



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ



МОСКВА



КРАСНОДАР



2008



КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ЛЕКЦИИ
И ПРАКТИКУМ

*Под общей редакцией
И. М. ПЕТРУШКО*

*Издание второе,
стереотипное*



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2008

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ



ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2008

ББК 22.161.1.я73

К 93

К 93 Курс высшей математики. Интегральное исчисление. Функции нескольких переменных. Дифференциальные уравнения. Лекции и практикум: Учебное пособие / Под общ. ред. И. М. Петрушко. 2-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2008. — 608 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0633-3

Учебное пособие соответствует стандартной программе и содержит конспект 24 лекций, разработки 24 практических занятий с подробным решением типовых примеров и задач для самостоятельного решения, контрольные вопросы по всем темам, варианты контрольных работ и программы экзамена с образцами экзаменационных билетов.

Книга отличается от существующих учебных пособий тем, что объединяет в себе функции учебника, сборника задач и репетитора-тренажера и может быть использована как при очной, так и при дистанционной форме обучения.

Для студентов первого курса высших учебных заведений, изучающих высшую математику.

ББК 22.161.1.я73

Коллектив авторов

*И. М. ПЕТРУШКО, Н. В. ГУЛИЧЕВ, Л. А. КУЗНЕЦОВ,
А. А. МАСЛОВ, В. И. ПРОХОРЕНКО, Т. А. САЛЬНИКОВА,
В. Ф. САФОНОВ, А. Я. ЯНЧЕНКО*

Рецензенты:

доктор физико-математических наук,
профессор *Н. В. КИСЛОВ*;
доктор физико-математических наук,
профессор *Б. И. ЗАВЬЯЛОВ*

Обложка

С. ШАПИРО, А. ЛАПШИН

*Охраняется законом РФ об авторском праве.
Воспроизведение всей книги или любой ее части
запрещается без письменного разрешения издателя.
Любые попытки нарушения закона
будут преследоваться в судебном порядке.*

© Издательство «Лань», 2008

© Коллектив авторов, 2008

© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 2008

ПРЕДИСЛОВИЕ

В предлагаемой книге излагаются разделы математического анализа, которые изучаются в технических вузах во втором семестре. Она является составной частью комплекса для организации дистанционного обучения по курсу «Высшая математика», разработанного на кафедре Высшей математики МЭИ.

Программа второго семестра содержит следующие разделы:

- интегральное исчисление функции одного переменного;
- функции нескольких переменных (дифференциальное исчисление);
- обыкновенные дифференциальные уравнения.

В книге содержатся конспекты лекций и разработки для практических занятий, вопросы и задачи для самоконтроля в процессе изучения, а также контрольные работы по всем темам, изучаемым в семестре.

В конце каждой лекции содержатся контрольные вопросы к ней. Если ответ на какой-либо вопрос вызывает затруднение или нет уверенности в его правильности, то следует вернуться к соответствующему месту в лекции (оно указывается в каждом вопросе ссылкой на определение, теорему, замечание или пример). Если в тексте нет прямого ответа на поставленный вопрос, то посмотрите ответы, следующие за контрольными вопросами.

В конце каждого занятия приведены примеры для самостоятельного решения. Начало решения примеров и задач отмечено знаком $\triangleleft$, а конец — знаком $\triangleright$.

Для проверки усвоения студентами пройденного материала проводятся контрольные работы по темам: «Интегрирование», «Функции нескольких переменных», «Дифференциальные уравнения».

Авторы искренне благодарят Е. Б. Зарецкую, В. И. Иванову за большую помощь, оказанную в подготовке рукописи к изданию.

КУРС ЛЕКЦИЙ

Лекция 1

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1.1. СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

На прошлых лекциях рассматривалась следующая задача: дана функция $F(x)$, требуется найти ее производную, т. е. такую функцию $f(x)$, что $f(x) = F'(x)$.

Сейчас разберем обратную задачу: требуется найти такую функцию $F(x)$, производная которой равна заданной функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$.

Определение 1.1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если во всех точках этого отрезка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

ПРИМЕР 1.1. Найти первообразную для функции $f(x) = x^2$.

Из определения первообразной следует, что

$$F(x) = \frac{x^3}{3}, \text{ так как } \left(\frac{x^3}{3} \right)' = x^2.$$

Легко видеть, что если для данной функции $f(x)$ существует первообразная, то эта первообразная не является единственной. Так, в предыдущем примере можно взять $F_1(x) = \frac{x^3}{3} + 1$, $F_2(x) = \frac{x^3}{3} - 3$ и, вообще, $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$, где

C — произвольная постоянная, так как $\left(\frac{x^3}{3} + C \right)' = x^2$.

Теорема 1.1. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ две первообразные для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то разность между ними равна постоянному числу.

Доказательство. В силу определения первообразной имеем:

$$F_1'(x) = f(x) \text{ и } F_2'(x) = f(x), \forall x \in [a, b].$$

Обозначим $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Тогда, очевидно,

$$\varphi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0, \forall x \in [a, b].$$

Но из того, что $\varphi'(x) \equiv 0$ на $[a, b]$ немедленно следует, что $\varphi(x) \equiv C$ на $[a, b]$. Действительно, функция $\varphi(x)$ удовлетворяет для любого $x \in (a, b]$ всем условиям теоремы Лагранжа на отрезке $[a, x]$, так как она непрерывна и дифференцируема на всем отрезке $[a, b]$ и, следовательно, непрерывна и дифференцируема и на отрезке $[a, x]$. Поэтому по теореме Лагранжа существует такая точка $\xi \in (a, x)$, что $\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(x - a) = 0$, т. е. $\varphi(x) = \varphi(a)$, $\forall x \in (x, b]$. Обозначим $\varphi(a) = C$, тогда получим $\varphi(x) = C$, $\forall x \in [a, b]$.

Теорема доказана.

Определение 1.2. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом от функции $f(x)$* и обозначается символом

$$\int f(x) dx.$$

Определение 1.3. Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то выражение $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, называется *неопределенным интегралом от функции $f(x)$* .

Таким образом, по определению,

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad (1.1)$$

где $F'(x) = f(x)$.

При этом функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, выражение $f(x) dx$ — *подынтегральным выражением*, а знак $\int$ — *знаком интеграла*.

Нахождение первообразной для данной функции $f(x)$ называется *интегрированием функции $f(x)$* .

Возникает вопрос: для всякой ли функции $f(x)$ существует неопределенный интеграл? Ответ: нет, не для всякой.

§ 1.2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ

Теорема 1.2 (без доказательства). Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то для нее существует первообразная и, следовательно, существует неопределенный интеграл.

§ 1.3. СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Прежде всего отметим, что из определения неопределенного интеграла вытекают следующие свойства.

1) Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т. е. $F'(x) = f(x)$, то и

$$\left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x). \quad (1.2)$$

2) Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x) dx \right) = d(F(x) + C) = (F(x) + C)' dx = f(x) dx.$$

3) Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int dF(x) = F(x) + C \quad (1.3)$$

или

$$\int F'(x) dx = F(x) + C. \quad (1.4)$$

Отметим, что свойство 3) неопределенного интеграла является очень важным для практики и называется *вычислением интеграла путем подведения под знак дифференциала*.

ПРИМЕР 1.2.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int d(\arcsin x) = \arcsin x + C.$$

ПРИМЕР 1.3.

$$\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int d\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \sqrt{1-x^2} + C.$$

4) Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т. е.

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx, \quad (1.5)$$

где a — некоторая постоянная.

Действительно, в силу свойства 1) неопределенного интеграла

$$\left(\int a f(x) dx \right)' = a f(x)$$

и

$$\left(a \int f(x) dx \right)' = a \left(\int f(x) dx \right)' = a f(x),$$

т. е. выражения $a \int f(x) dx$ и $a \int f(x) dx$ являются неопределенными интегралами для одной и той же функции $a f(x)$. Следовательно, они равны (в том смысле, что выражают одно и то же множество функций).

5) Неопределенный интеграл от суммы двух или нескольких функций равен сумме их интегралов, т. е.

$$\int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx. \quad (1.6)$$

Доказательство. Как и в предыдущем случае, найдем производные левой и правой частей равенства (73):

$$\left(\int (f_1(x) + f_2(x)) dx \right)' = f_1(x) + f_2(x),$$

$$\left(\int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx \right)' = \left(\int f_1(x) dx \right)' + \left(\int f_2(x) dx \right)' = f_1(x) + f_2(x).$$

Таким образом, производные от левой и правой частей равенства (73) равны между собой. Следовательно, выражения

$$\int (f_1(x) + f_2(x)) dx \quad \text{и} \quad \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx$$

представляют собой совокупность всех первообразных для одной и той же функции $f_1(x) + f_2(x)$. Значит, они равны.

6) Если

$$\int f(x) dx = f(x) + C,$$

то

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C. \quad (1.7)$$

Действительно,

$$\frac{d}{dx} \left(\int f(ax + b) dx \right) = f(ax + b).$$

Обозначив через $t = ax + b$ и вспомнив правило вычисления производной сложной функции, имеем

$$\left(\frac{1}{a} F(ax + b) + C \right)' = \frac{1}{a} \frac{d}{dt} (F(t)) \frac{dt}{dx} = \frac{1}{a} f(ax + b) a = f(ax + b).$$

Частные случаи свойства 6):

$$\int f(x + b) dx = F(x + b) + C, \quad \int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C,$$

где $F'(x) = f(x)$.

§ 1.4. ТАБЛИЦА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

$$1) \int 0 dx = 0,$$

$$2) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1,$$

$$3) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$4) \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$5) \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$6) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$7) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$8) \int e^x dx = e^x + C,$$

$$9) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$10) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$11) \int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0,$$

$$12) \int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C,$$

$$13) \int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, a \neq 0,$$

$$14) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, |x| < 1,$$

$$15) \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C, |x| < a,$$

$$16) \int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C, (a \neq 0),$$

$$17) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C, |x| > |a| > 0,$$

$$18) \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C, \quad 19) \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C,$$

$$20) \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C, \quad 21) \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

Справедливость формул таблицы неопределенных интегралов может быть доказана непосредственным дифференцированием.

Например, в случае формулы 3)

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

имеем

$$а) \text{ если } x > 0, \text{ то } (\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$б) \text{ если } x < 0, \text{ то } (\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

В случае формулы 11)

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C,$$

имеем

$$\left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) \right)' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{a^2}{(a^2 + x^2)a^2} = \frac{1}{a^2 + x^2}.$$

В случае формулы 13)

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C,$$

имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| \right)' &= \frac{1}{2a} \cdot (\ln|a+x| - \ln|a-x|)' = \\ &= \frac{1}{2a} \cdot \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right) = \frac{1}{2a} \cdot \frac{a-x+a+x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a^2 - x^2}. \end{aligned}$$

В случае формулы 15)

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C,$$

имеем

$$\left(\arcsin \frac{x}{a} \right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

В случае формулы 16)

$$\begin{aligned} \left(\ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| \right)' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{(x + \sqrt{x^2 + a^2})\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}. \end{aligned}$$

Аналогично доказываются и все остальные формулы таблицы неопределенных интегралов.

Замечание. Для практического приложения очень удобно запомнить следующие частные случаи интегралов формулы 2) таблицы неопределенных интегралов:

- | | |
|--|---|
| 1. $\int 1 dx = x + C;$ | 2. $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C;$ |
| 3. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C;$ | 4. $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C;$ |
| 5. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C;$ | 6. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$ |

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение первообразной для функции $y = f(x)$ (см. определение 1.1).

2. Можно ли утверждать, что разность между двумя различными первообразными постоянна?

3. Что называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ (см. определение 1.2)?

4. Сформулируйте и докажите свойства неопределенного интеграла.

Ответы

2. Да (см. теорему 1.1).

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

§ 2.1. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В НЕОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Одним из главных способов вычисления неопределенных интегралов является метод замены переменной или подстановки. Этот метод основывается на следующей теореме.

Теореме 2.1. Пусть существует неопределенный интеграл

$$\int f(x)dx$$

и пусть $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, имеющая обратную функцию. Тогда

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad (2.1)$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что равенство (2.1) понимается следующим образом: после интегрирования в правой части равенства (2.1) вместо t будет подставлена функция $t = \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ — обратная функция к функции $x = \varphi(t)$. Для доказательства самого равенства (2.1) продифференцируем по x его левую и правую части:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int f(x)dx &= f(x); \\ \frac{d}{dx} \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \right) &= \frac{d}{dt} \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \right) \frac{dt}{dx} = \end{aligned}$$

$$= f(\varphi(t)) \varphi'(t) \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = f(\varphi(t)) \varphi'(t) \frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x).$$

Таким образом, мы получили, что производные левой и правой частей равны, и тем доказали справедливость равенства (2.1).

Замечание 2.1. При интегрировании функций иногда целесообразно делать замену в виде $t = \psi(x)$, а не $x = \varphi(t)$. Тогда $dt = \psi'(t) dx$.

Например,

$$\int \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\psi(x)| + C.$$

ПРИМЕРЫ. 1) Вычислите

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad (a > 0).$$

Делаем замену

$$x = a \sin t, \quad t = \arcsin \frac{x}{a},$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \cos t.$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a \cos t}{a \cos t} dt = \int dt = t + C = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

2) Вычислите

$$\int \frac{x dx}{1 + x^2}.$$

Делаем замену

$$t = 1 + x^2, \quad dt = 2x dx, \quad x dx = \frac{1}{2} dt.$$

Тогда

$$\int \frac{x dx}{1 + x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C.$$

§ 2.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ В НЕОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Теорема 2.2. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые функции на некотором отрезке. Тогда

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du. \quad (2.2)$$

Доказательство. По правилу дифференцирования

$$d(uv) = u \, dv + v \, du.$$

Но тогда

$$\int d(uv) = \int u \, dv + \int v \, du. \quad (2.3)$$

Так как

$$\int d(uv) = uv + C,$$

то отнеся константу C в любой из интегралов правой части равенства (2.3), получаем равенство

$$uv = \int u \, dv + \int v \, du,$$

из которого немедленно следует равенство (2.2).

Теорема доказана.

Формула (2.1) сводит вопрос о вычислении интеграла $\int u \, dv$ к вычислению интеграла $\int v \, du$. Во многих конкретных случаях этот последний интеграл вычисляется без особого труда.

Вычисление интеграла $\int u \, dv$ посредством применения формулы (2.1) называется *интегрированием по частям*.

ПРИМЕР 2.1. Вычислите

$$\int x \sin x \, dx.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= \left(\begin{array}{ll} u = x, & dv = \sin x \, dx \\ du = dx, & v = -\cos x \end{array} \right) = \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

Отметим основные классы функций, при интегрировании которых применяется формула интегрирования по частям. Как показывает практика, большинство интегралов, вычисление которых производится посредством интегрирования по частям, можно разбить на следующие три группы.

I. К первой группе относятся интегралы, подынтегральная функция которых в качестве множителя имеет одну из функций $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$. Для вычисления интегралов первой группы следует применять формулу (2.1), полагая в ней $u(x)$, равной одной из указанных выше функций.

ПРИМЕР 2.2.

$$\begin{aligned} \int x^n \ln x \, dx &= \left(\begin{array}{l} u = \ln x, \quad dv = x^n dx \\ du = \frac{1}{x} dx, \quad v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{array} \right) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \\ &- \int \frac{x^{n+1}}{(n+1)x} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2.3.

$$\begin{aligned} \int x^n \ln^k x \, dx &= \left(\begin{array}{l} u = \ln^k x, \quad dv = x^n dx \\ du = \frac{k \ln^{k-1} x}{x} dx, \quad v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{array} \right) = \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln^k x - \int \frac{x^n}{n+1} k \ln^{k-1} x \, dx, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Отметим, что для вычисления интеграла

$$\int x^n \ln^{k-1} x \, dx$$

нужно снова применить формулу интегрирования по частям (2.1).

ПРИМЕР 2.4.

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx = \left(\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, \quad dv = x dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right) = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x -$$

$$-\int \frac{x^2 + 1 - 1}{2(1 + x^2)} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

ПРИМЕР 2.5.

$$\int \arcsin x dx = \left(\begin{array}{l} u = \arcsin x, \quad dv = dx \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = x \end{array} \right) = x \arcsin x -$$

$$-\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

II. Ко второй группе относятся интегралы вида:

$$\int (ax + b)^n \sin \alpha x dx, \int (ax + b)^n \cos \alpha x dx, \int (ax + b)^n e^{\alpha x} dx,$$

где a, b, α — некоторые постоянные; n — любое целое положительное число.

Интегралы второй группы берутся путем n -кратного применения формулы интегрирования по частям (2.1), причем в качестве $u(x)$ каждый раз следует брать $(ax + b)$ в соответствующей степени. После каждого интегрирования по частям эта степень будет понижаться на единицу.

ПРИМЕР 2.6.

$$\int x^n e^x dx = \left(\begin{array}{l} u = x^n, \quad dv = e^x dx \\ du = nx^{n-1} dx, \quad v = e^x \end{array} \right) = x^n e^x - \int nx^{n-1} e^x dx.$$

Для вычисления интеграла $\int x^{n-1} e^x dx$ нужно снова применить формулу интегрирования по частям (2.1).

ПРИМЕР 2.7.

$$\int x^n \sin x dx = \left(\begin{array}{l} u = x^n, \quad dv = \sin x dx \\ du = nx^{n-1} dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right) =$$

$$= -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x dx.$$

ПРИМЕР 2.8.

$$\begin{aligned}\int x^n \cos x \, dx &= \left(\begin{array}{ll} u = x^n, & dv = \cos x \, dx \\ du = nx^{n-1} \, dx, & v = \sin x \end{array} \right) = \\ &= x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x \, dx.\end{aligned}$$

Как уже отмечалось выше, для вычисления интегралов $\int x^{n-1} \cos x \, dx$ и $\int x^{n-1} \sin x \, dx$ нужно опять таки применять формулу интегрирования по частям (2.1).

III. К третьей группе относятся интегралы вида:

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx, \int e^{ax} \sin bx \, dx, \int \sin(\ln x) \, dx, \int \cos(\ln x) \, dx.$$

Обозначая любой из интегралов этой группы через I и произведя двукратное интегрирование по частям, получаем для I уравнение, из которого и найдем выражение для него. Отметим, что в полученном для I выражении будет отсутствовать произвольная постоянная C , поэтому для вычисления соответствующего неопределенного интеграла I нужно к полученному выражению добавить произвольную постоянную C .

ПРИМЕР 2.9.

$$\begin{aligned}I = \int e^{ax} \cos bx \, dx &= \left(\begin{array}{ll} u = e^{ax}, & dv = \cos bx \, dx \\ du = ze^{ax} \, dx, & v = \frac{\sin bx}{b} \end{array} \right) = \\ &= e^{ax} \frac{\sin bx}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx.\end{aligned}$$

Для вычисления интеграла $\int e^{ax} \sin bx \, dx$ еще раз применим формулу интегрирования по частям (2.1). В результате получаем

$$I = \frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \frac{a}{b} \left(-\frac{e^{ax} \cos bx}{b} + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx \, dx \right) =$$

$$= \frac{e^{ax} \sin bx}{b} + \frac{ae^{ax} \cos bx}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} I. \quad (2.4)$$

Таким образом, в результате двукратного применения формулы интегрирования по частям (2.1), получили для интеграла I уравнение, из которого следует

$$I = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax}. \quad (2.5)$$

Отметим еще раз, что в правой части равенства (2.5) отсутствует произвольная постоянная C , а так как

$$I = \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

является неопределенным интегралом, то

$$I = \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

Аналогично вычисляется интеграл

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

ПРИМЕР 2.10.

$$\begin{aligned} \sin(\ln x) \, dx &= \left(\begin{array}{ll} u = \sin(\ln x), & dv = dx \\ du = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}, & v = x \end{array} \right) = \\ &= x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) \, dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \cos(\ln x) \, dx &= \left(\begin{array}{ll} u = \cos(\ln x), & dv = dx \\ du = -\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x}, & v = x \end{array} \right) = \\ &= x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) \, dx. \end{aligned}$$

Из последних двух равенств получаем

$$\int \sin(\ln x) \, dx = \frac{x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)}{2} + C$$

и

$$\int \cos(\ln x) dx = \frac{x \sin(\ln x) + x \cos(\ln x)}{2} + C.$$

Конечно, указанные три группы не исчерпывают всех без исключения интегралов, которые вычисляются посредством интегрирования по частям. Приведем ряд примеров, не входящих ни в одну из перечисленных групп.

ПРИМЕР 2.11.

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sin^2 x} dx &= \left(\begin{array}{l} u = x, \quad dv = \frac{1}{\sin^2 x} dx \\ du = dx, \quad v = -\operatorname{ctg} x \end{array} \right) = \\ &= -x \operatorname{ctg} x + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \\ &= -x \operatorname{ctg} x + \int \frac{d \sin x}{\sin x} = -x \operatorname{ctg} x + \ln |\sin x| + C. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2.12.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &= \left(\begin{array}{l} u = \sqrt{x^2 + a^2}, \quad dv = dx \\ du = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx, \quad v = x \end{array} \right) = \\ &= x \sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \\ &= x \sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2} dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$2 \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = x \sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

Таким образом, вычисляя интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}},$$

имеем

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C.$$

Аналогично,

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте и докажите теорему о замене переменных в неопределенном интеграле (см. теорему 2.1).

2. Какую замену нужно делать в интегралах вида

$$\int \Psi'(x) \Psi(x) dx.$$

3. Сформулируйте и докажите теорему об интегрировании по частям в неопределенном интеграле (см. теорему 2.2).

4. Вычислите интегралы:

$$1) \int \frac{2 \operatorname{arctg} x + 4x}{1+x^2} dx.$$

$$2) \int \frac{\cos x - x \sin x}{x \cos x} dx.$$

Ответы

2. $t = \Psi(x)$, так как $dt = \Psi'(x) dx$ и

$$\int \Psi'(x) \Psi(x) dx = \int t dt = t^2/2 + C = \frac{(\Psi'(x))^2}{2} + C.$$

4.

$$\int \frac{2 \operatorname{arctg} x + 4x}{1+x^2} dx = 2 \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx + 4 \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

(см. свойства 4), 5) неопределенного интеграла).

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \int (\operatorname{arctg} x)(\operatorname{arctg} x)' dx = \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2} + C$$

(см. вопрос 2 к лекции № 2).

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = 1/2 \int \frac{2x}{1+x^2} dx = 1/2 \int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx = 1/2 \ln(1+x^2) dx$$

(см. замечание 2.1).

Следовательно,

$$\int \frac{2 \operatorname{arctg} x + 4x}{1+x^2} dx = (\operatorname{arctg} x)^2 + 2 \ln(1+x^2) + C.$$

2)

$$\int \frac{\cos x - x \sin x}{x \cos x} dx = \int \frac{(x \cos x)'}{x \cos x} dx = \ln(x \cos x) + C$$

(см. замечание 2.1).

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

В этой лекции приводятся сведения из высшей алгебры, необходимые для рассмотрения методов интегрирования рациональных функций, являющиеся предметом обсуждения в лекции № 4.

В процессе развития математики не раз возникала необходимость расширения множества рассматриваемых чисел. Так, чтобы выполнять операцию сложения в множестве N *натуральных* чисел запаса чисел в этом множестве достаточно, но операция вычитания уже оказывается не всегда выполнимой. Например, в множестве N нет числа, выражающего разность $2-5$. Чтобы вычитание было выполнимым для любых натуральных чисел, были введены отрицательные числа, которые вместе с натуральными числами и числом 0 образовали множество Z *целых* чисел.

Подобным же образом для обеспечения выполнимости деления для любых чисел в Z (например, $2:5$), кроме деления на 0, были добавлены дробные числа, которые вместе с целыми числами, образовали множество *рациональных* чисел.

Когда к арифметическим операциям сложения, вычитания, умножения и деления были добавлены алгебраические операции возведения в степень и извлечения корня, то оказалось, что в множестве рациональных чисел не всегда выполняема операция извлечения корня (например, среди рациональных чисел нет числа, равного $\sqrt{2}$). Появились иррациональные числа, которые вместе с рациональными

образовали множество R действительных чисел. Однако и в этом множестве операция извлечения корня не всегда выполнима (например, нет действительного числа, равного $\sqrt{-1}$). И тогда ввели мнимые числа, которые вместе с действительными образовали множество комплексных чисел.

Простейшим мнимым числом является так называемая *мнимая единица*, обозначаемая в математике буквой i . Она появилась как величина, призванная выражать одно из значений корня квадратичного из (-1) , и поэтому она по определению наделяется свойством $i^2 = -1$. Введение мнимой единицы дало возможность считать, что $\sqrt{-1} = \pm i$. Опираясь на такое определение мнимой единицы, комплексные числа можно ввести следующим образом.

Определение 3.1. Комплексным числом называется выражение вида

$$a + bi,$$

где a, b — действительные числа;

i — мнимая единица.

Действительные числа a и b называются соответственно *действительной* и *мнимой частями* комплексного числа $a + bi$.

Используются обозначения:

$$z = a + bi, \operatorname{Re} z = a, \operatorname{Im} z = b.$$

Над комплексными числами выполняются операции сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень с натуральным показателем и извлечения корня по правилам действий над алгебраическими многочленами, причем полагается $i^2 = -1$.

ПРИМЕР 3.1. Найти

$$(1 - i)(1 + i).$$

$$(1 - i)(1 + i) = 1^2 - i^2 = 1 - (-1) = 2.$$

Комплексные числа подразделяются на *действительные*
 $a + 0i$

и *мнимые*

$$a + bi \quad (b \neq 0).$$

Среди мнимых выделяют *чисто мнимые* числа

$$0 + bi \ (b \neq 0).$$

Из школьного курса математики известно, что квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

не имеет корней, если дискриминант

$$D = b^2 - 4ac < 0.$$

Однако это утверждение справедливо только по отношению к действительным корням. В множестве комплексных чисел квадратное уравнение всегда имеет корни, так как $\sqrt{D}$ имеет смысл и при $D < 0$.

ПРИМЕР 3.2. Найти

$$x^2 + 2x + 2 = 0.$$

Здесь $D = 4 - 8 = -4$, $\sqrt{D} = \sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = 2\sqrt{-1} = \pm 2i$ и корни уравнения

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i.$$

Определение 3.2. Числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ (a, b — действительные числа) называются *сопряженными* комплексными числами.

Сопряженные комплексные числа обладают следующими свойствами.

1°. Если z — действительное число, то $\bar{z} = z$.

Для любых комплексных чисел z_1, z_2, z :

2°. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;

3°. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$;

4°. $\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} \ (z_2 \neq 0)$;

5°. $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.

Свойства 1°, 2° докажите самостоятельно.

Докажем свойство 3°. Пусть $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ (a, b, c, d — действительные числа). Тогда $\bar{z}_1 = a - bi$, $\bar{z}_2 = c - di$ и

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + i(ad + bc),$$

$$\overline{z_1 z_2} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - i(ad + bc).$$

Из сравнения двух последних результатов следует

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

Докажем теперь свойство 4°.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{(c^2 + d^2) + (cd - cd)i} = \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} &= \frac{a - bi}{c - di} = \frac{(a - bi)(c + di)}{(c - di)(c + di)} = \frac{(ac + bd) + (ad - bc)i}{(c^2 + d^2)} = \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i. \end{aligned}$$

Из сравнения результатов следует свойство 4°.

Свойство 5° доказывается путем $(n - 1)$ -кратного применения свойства 3°:

$$\overline{z^2} = \overline{z \cdot z} = \bar{z}^2, \overline{z^3} = \overline{z^2 \cdot z} = \overline{z^2} \bar{z} = \bar{z}^2 \bar{z} = \bar{z}^3 \text{ и т. д.}$$

§ 3.1. МНОГОЧЛЕНЫ

Функция $P(z)$ вида

$$P(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_n z^n,$$

где z — независимая переменная,

$A_0, A_1, \dots, A_n$ — постоянные коэффициенты, называются *многочленом*.

В общем случае коэффициенты и независимая переменная рассматриваются как комплексные величины.

Если $A_n \neq 0$, то $P(z)$ называется многочленом *степени n* и обозначается символом $P_n(z)$.

Если $A_n = 0, A_{n-1} = 0, \dots, A_{m+1} = 0, A_m \neq 0$, то $P(z) = P_m(z)$ — многочлен *степени m* . При $m = 0$, $P(z) = P_0(z) = A_0 (\neq 0)$ — многочлен *нулевой степени* (постоянная, не равная нулю).

Если $P(z) \equiv 0$, то многочлен называется *нулевым* многочленом, и его степень не определяется.

В высшей алгебре доказывается (основная теорема алгебры), что любой многочлен степени n можно представить в виде

$$P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) A_n,$$

где $z_1, z_2, \dots, z_n$ — комплексные числа.

Это представление называется *разложением многочлена на линейные множители*.

Очевидно, $P_n(z_i) = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$.

Числа $z_1, z_2, \dots, z_n$ называются *корнями* многочлена.

Если все корни различны, то они называются *простыми* корнями.

Если среди корней есть одинаковые, то объединив все соответствующие им линейные множители в степени, получим представление многочлена в виде

$$P_n(z) = (z - z_1)^{k_1} \dots (z - z_m)^{k_m} A_n,$$

где все числа $z_1, \dots, z_m$ различные.

Показатели степеней $k_1, \dots, k_m$ называются *кратностями корней*, соответственно, $z_1, \dots, z_m$.

При наличии кратных корней число различных корней у многочлена $P_n(z)$ степени n меньше, чем n , но если каждый корень считать столько раз, какова у него кратность, то можно сказать, что любой многочлен степени n имеет ровно n корней, так как, очевидно,

$$k_1 + \dots + k_m = n.$$

Это утверждение относится и к случаю $n = 0$, когда оно означает, что многочлен нулевой степени не имеет корней (имеет 0 корней). Вспомните, что $P_0(z) = A_0 \neq 0$.

Для разложения многочлена на множители достаточно уметь находить корни многочлена.

ПРИМЕР 3.3. Найти

$$P_2(z) = z^2 + 2z + 2.$$

Так как корни этого многочлена

$$z_1 = -1 + i, z_2 = -1 - i \text{ (см. пример 1.2), то}$$

$$z^2 + 2z + 2 = (z - z_1)(z - z_2) = (z + 1 - i)(z + 1 + i).$$

§ 3.2. МНОГОЧЛЕНЫ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Многочлены с действительными коэффициентами обладают рядом свойств, вытекающих из следующих двух теорем.

Теорема 3.1. Если в многочлене с действительными коэффициентами

$$P_n(z) = A_0 + A_1 z + \dots + A_m z^m + \dots + A_n z^n \quad (3.1)$$

значение аргумента z заменить на сопряженную величину $\bar{z}$, то значение многочлена также заменится на сопряженное.

Доказательство. Рассмотрим слагаемое $A_m z^m$. Заменим в нем z на $\bar{z}$. Тогда получим

$$\begin{aligned} A_m \bar{z}^m &= (\text{по свойству } 5^\circ) = \\ &= \overline{A_m z^m} = (\overline{1^\circ}) = \overline{A_m} \cdot \overline{z^m} = (\overline{3^\circ}) = \overline{A_m z^m}. \end{aligned}$$

Полагая $m = 0, 1, \dots, n$, придем к выводу, что каждое слагаемое в правой части формулы (3.1) меняется на сопряженное при замене в нем z на $\bar{z}$, следовательно, по свойству 2°

$$P_n(\bar{z}) = \overline{P_n(z)},$$

что и доказывает теорему.

Теорема 3.2. Если z_0 — корень многочлена с действительными коэффициентами $P_n(z)$, то сопряженное число $\bar{z}_0$ также является корнем этого многочлена.

Доказательство. По теореме 3.1 $P_n(\bar{z}_0) = \overline{P_n(z_0)}$. А так как $P_n(z_0) = 0$, то $\overline{P_n(z_0)} = 0$ и $P_n(\bar{z}_0) = 0$. Следовательно, $\bar{z}_0$ — корень многочлена $P_n(z)$. Теорема доказана.

Теорема означает, что мнимые корни многочлена с действительными коэффициентами (если они есть) попарно сопряжены.

Пусть $z_0 = a + bi$ и $\bar{z}_0 = a - bi$ (a, b — действительные) — мнимые корни многочлена $P_n(z)$ с действительными коэффициентами. Тогда в разложение многочлена $P_n(z)$ будут входить линейные множители $(z - z_0)$ и $(z - \bar{z}_0)$. Их произведение

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = z^2 + pz + q. \quad (3.2)$$

По теореме Виетта

$$p = -(z_0 + \bar{z}_0) = -2a, \quad q = z_0 \bar{z}_0 = a^2 + b^2.$$

Отсюда следует, что квадратный трехчлен в правой части (1.2) имеет действительные коэффициенты p, q . При этом его дискриминант

$$D = p^2 - 4q < 0,$$

так как корни квадратного трехчлена мнимые.

Перемножив рассмотренные линейные множители, многочлен можно будет представить в виде

$$P_n(z) = (z - z_0)(z - \bar{z}_0)P_{n-2}(z) = (z^2 + pz + q)P_{n-2}(z), \quad (3.3)$$

где $P_{n-2}(z)$ — многочлен степени $(n - 2)$. Так как $P_{n-2}(z)$ можно получить как результат деления многочлена $P_n(z)$ с действительными коэффициентами на квадратный трехчлен $(z^2 + pz + q)$ с действительными p и q , то коэффициенты $P_{n-2}(z)$ также действительные.

Если z_0 , а следовательно, и $\bar{z}_0$ являются корнями и у многочлена $P_{n-2}(z)$, то аналогично получим

$$P_{n-2}(z) = (z - z_0)(z - \bar{z}_0)P_{n-4}(z) = (z^2 + pz + q)P_{n-4}(z),$$

где $P_{n-4}(z)$ — многочлен степени $(n - 4)$ с действительными коэффициентами.

Из (3.3) следует

$$P_n(z) = (z - z_0)^2 (z - \bar{z}_0)^2 P_{n-4}(z) = (z^2 + pz + q)^2 P_{n-4}(z).$$

Продолжая процесс выделения линейных множителей $(z - z_0)$, $(z - \bar{z}_0)$ в многочлене $P_n(z)$, мы придем в конце концов к его представлению в виде

$$P_n(z) = (z - z_0)^l (z - \bar{z}_0)^l P_{n-2l}(z) = (z^2 + pz + q)^l P_{n-2l}(z), \quad (3.4)$$

где $P_{n-2l}(z)$ — многочлен степени $(n - 2l)$ с действительными коэффициентами, для которого ни z_0 , ни $\bar{z}_0$ уже не являются корнями.

Из (3.4) следует, что в разложении многочлена с действительными коэффициентами на множители его мнимым сопряженным корням будут соответствовать квадратичные множители (в общем случае квадратные трехчлены) с действительными коэффициентами. Их количество равно кратности каждого из корней. Заметим, что кратности мнимых сопряженных корней многочлена с действительными коэффициентами всегда совпадают.

Установленное свойство позволяет сделать вывод, что в общем случае многочлен $P_n(z)$ с действительными коэффициентами можно разложить на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами:

$$P_n(z) = (z - a_1)^{k_1} \dots (z - a_m)^{k_m} (z^2 + p_1 z + q_1)^{l_1} \dots \\ \dots (z^2 + p_r z + q_r)^{l_r} \cdot A_n. \quad (3.5)$$

Линейные множители $(z - a_1)$, ..., $(z - a_m)$ соответствуют действительным корням многочлена a_1 , ..., a_m (k_1 , ..., k_m — их кратности), а квадратичные множители $(z^2 + p_1 z + q_1)$, ..., $(z^2 + p_r z + q_r)$ соответствуют парам мнимых сопряженных корней (l_1 , ..., l_r — кратности каждого из корней в парах). Дискриминанты квадратичных множителей отрицательны.

§ 3.3. УСЛОВИЯ ТОЖДЕСТВЕННОСТИ ДВУХ МНОГОЧЛЕНОВ

Пусть $P_n(z)$ и $Q_n(z)$ многочлены степени n .

Если $P_n(z) = Q_n(z) \quad \forall z$, то говорят, что многочлены $P_n(z)$ и $Q_n(z)$ тождественны и пишут

$$P_n(z) \equiv Q_n(z).$$

Сформулируем два условия тождественности.

1°. Если в многочленах $P_n(z)$, $Q_n(z)$ коэффициенты при одинаковых степенях равны, то $P_n(z) \equiv Q_n(z)$.

2°. Если $P_n(z) = Q_n(z)$ при $n + 1$ различных значениях аргумента $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$, то $P_n(z) \equiv Q_n(z)$.

Условие 1° очевидно. Справедливость условия 2° можно доказать методом «от противного».

Допустим, что существует такое значение аргумента z_0 , при котором $P_n(z_0) \neq Q_n(z_0)$. Рассмотрим многочлен $R(z) = P_n(z) - Q_n(z)$. Так как $R(z_0) \neq 0$, то $R(z)$ — ненулевой многочлен и, следовательно, имеет степень. Как разность многочленов степеней n его степень не может быть больше n . Но, с другой стороны, так как $R(z_1) = 0$, $R(z_2) = 0$, ..., $R(z_{n+1}) = 0$, то он имеет $n + 1$ различных корней и степень его должна быть больше n . Полученное противоречие означает, что допущение «от противного» неверно, и ни при каком значении аргумента z_0 значения $P_n(z_0)$ и $Q_n(z_0)$ не могут быть неравными, т. е. $P_n(z) \equiv Q_n(z)$.

Условия тождественности многочленов используются при решении задач, которые могут возникать в процессе интегрирования рациональных функций. Рассмотрим пример такой задачи.

ПРИМЕР 3.4. При каких A, B, C имеет место тождество

$$Az(z-1) + Bz(z-2) + C(z-1)(z-2) \equiv z^2 + 2.$$

Преобразуем многочлен слева, расположив его по степеням z :

$$(A + B + C)z^2 + (-A - 2B - 3C)z + 2C = z^2 + 2.$$

Чтобы это равенство было тождеством, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях z слева и справа

$$\left. \begin{aligned} A + B + C &= 1 \\ -A - 2B - 3C &= 0 \\ 2C &= 2 \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему, получаем значения $A = 3$, $B = -3$, $C = 1$, при которых многочлены будут тождественны.

Здесь было использовано условие 1°. Если использовать условие 2°, то в рассматриваемом случае задача решается проще.

Потребуем, чтобы исходные многочлены совпадали в точках $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 2$. Тогда

$$\begin{aligned} z = 0 &\Rightarrow 2C = 2 \Rightarrow C = 1, \\ z = 1 &\Rightarrow -B = 3 \Rightarrow B = -3, \\ z = 2 &\Rightarrow 2A = 6 \Rightarrow A = 3. \end{aligned}$$

Здесь фактически тоже получается система трех уравнений с неизвестными A , B , C . Но она является расщепленной (каждое уравнение содержит только одно неизвестное). Поэтому для его решения требуются минимальные усилия.

Контрольные вопросы

1. Какие числа называются комплексными, мнимыми, чисто мнимыми? (см. определение 3.1).
2. Какие комплексные числа называются сопряженными и какими свойствами они обладают? (см. определение 3.2 и свойства 1°–5°).
3. Какие корни многочлена называются простыми и какие кратными? Как определяется кратность корня? Сколько корней имеет многочлен степени n ? (см. разложение многочлена на линейные множители).
4. Что произойдет со значением многочлена с действительными коэффициентами, если значение его аргумента заменить на сопряженное? (см. теорему 3.1).
5. Пусть многочлен с действительными коэффициентами имеет мнимый корень z_0 . Может ли сопряженное с ним число $\bar{z}_0$ не быть корнем этого многочлена? (см. теорему 3.2).
6. Как выглядит разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и квадратичные множители? Какими числами являются коэффициенты этих множителей? Чем определяются показатели степеней в разложении? (см. формулу (3.5)).
7. Сформулируйте условия тождественности двух многочленов (см. условия 1°, 2°).

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

В этой лекции рассматриваются методы, используемые при интегрировании рациональных функций.

Функция называется *рациональной*, если любое ее значение можно получить, выполняя конечное число арифметических операций (сложения, вычитания, умножения и деления).

Рациональной функцией является, например, многочлен

$$P_n(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n.$$

Входящие в его выражение степени можно вычислить с помощью умножений: $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x \cdot x \cdot x$ и т. д.

Рациональной будет также функция

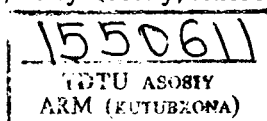
$$R(x) = \frac{P_m(x)}{P_n(x)}, \quad (4.1)$$

где $P_m(x)$, $P_n(x)$ — многочлены степеней m и n соответственно.

Многочлен называется *целой* рациональной функцией.

Отношение $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ при $n \geq 1$ называется *рациональной дробью*, *правильной*, если $m < n$ (т. е. если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе) и

неправильной, если $m \geq n$. При $n = 0$ $P_n(x) = A_0 \neq 0$ и отношение $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ является, по существу, многочленом $\frac{1}{A_0} P_m(x)$.



Следовательно, в этом случае, отношение определяет целую рациональную функцию.

Нетрудно понять, что любое выражение, задающее рациональную функцию $R(x)$ можно привести к виду (4.1).

ПРИМЕР 4.1. Вычислить

$$R(x) = x + \frac{1}{x-9} + \frac{x^3}{x^2+4}.$$

$$\text{Здесь } \frac{x^3}{x^2+4} = \frac{x^3}{(x-9)(x^2+4)}.$$

Приводя к общему знаменателю слагаемые в $R(x)$ и складывая их, получаем

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{x(x-9)(x^2+4) + (x^2+4) + x^3}{(x-9)(x^2+4)} = \\ &= \frac{x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 36x + 4}{x^3 - 9x^2 + 4x - 36}, \end{aligned}$$

$$\text{т. е. } R(x) = \frac{P_4(x)}{P_3(x)}.$$

Определение 4.1. Рациональные дроби вида

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{и} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l} \quad (p^2-4q < 0),$$

где A, M, N, a, p, q — постоянные, k и l — натуральные, называются *простейшими дробями*.

§ 4.1. РАЗЛОЖЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ ДРОБИ НА ПРОСТЕЙШИЕ

При интегрировании рациональных функций важное значение имеет теорема о разложении рациональной дроби на простейшие.

Теорема 4.1. Пусть рациональная дробь (4.1) является правильной, $P_m(x)$ и $P_n(x)$ — многочлены с действительными коэффициентами и разложение многочлена в

знаменателе на линейные и квадратичные множители имеет вид

$$P_n(x) = A_n(x-a)^k \dots (x^2 + px + q)^l \dots (p^2 - 4q < 0, \dots).$$

Здесь A_n — старший коэффициент многочлена (при x^n);

$(x-a)^k$ — множитель, соответствующий действительному корню многочлена a кратности k ;

первое многоточие выражает возможность наличия множителей, соответствующих другим действительным корням многочлена;

$(x^2 + px + q)^l$ — множитель, соответствующий паре мнимых сопряженных корней многочлена кратностей l ;

второе многоточие выражает возможность наличия множителей, соответствующих другим парам мнимых сопряженных корней многочлена.

Тогда рациональная дробь (4.1) разлагается на простейшие дроби. В разложении каждому множителю $(x-a)^k$ соответствует k слагаемых

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k},$$

а каждому множителю $(x^2 + px + q)^l$ соответствует l слагаемых

$$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_lx + N_l}{(x^2 + px + q)^l}.$$

Коэффициенты разложения $A_1, A_2 \dots A_k, M_1, M_2 \dots M_l, N_1, N_2 \dots N_l$ и все другие определяются однозначно.

Доказательство теоремы здесь не рассматривается.

На практике для разложения правильной рациональной дроби (2.1) на простейшие используется метод неопределенных коэффициентов, под которыми понимаются коэффициенты $A_1, \dots, A_k, M_1, \dots, M_l, N_1, \dots, N_l$ и, которые определяются из условия тождественности дроби (4.1) и ее разложения.

ПРИМЕР 4.2. Вычислить

$$R(x) = \frac{4x^2 + 3x + 3}{(x+1)(x-1)^2}.$$

В соответствии с теоремой 4.1 разложение будет иметь вид

$$R(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$

Если коэффициентов немного, то их обычно обозначают различными латинскими буквами без индексов.

Для отыскания неопределенных коэффициентов сложим дроби

$$R(x) = \frac{A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}$$

и потребуем, чтобы получившаяся дробь была тождественна исходной. Так как у них знаменатели одинаковые, то достаточно, чтобы были тождественны многочлены, стоящие в числителях:

$$A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1) \equiv 4x^2 + 3x + 3.$$

Возникает задача, подобная рассмотренной в примере 3.4. Применим здесь условие 2° тождественности многочленов:

$$x = 1 \Rightarrow 2C = 10 \Rightarrow C = 5,$$

$$x = -1 \Rightarrow 4A = 4 \Rightarrow A = 1,$$

$$x = 0 \Rightarrow A - B + C = 3 \Rightarrow B = 3.$$

Подставляя найденные A , B , C в простейшие дроби с неопределенными коэффициентами, получаем разложение

$$\frac{4x^2 + 3x + 3}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2}.$$

§ 4.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Как уже было установлено, рациональная функция представима в виде дроби

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{P_n(x)},$$

где $P_m(x)$, $P_n(x)$ — многочлены степеней m и n соответственно.

Если дробь неправильная ($m \geq n$), то у нее можно выделить *целую часть*, т. е. представить в виде

$$R(x) = P_{m-n}(x) + \frac{P_s(x)}{P_n(x)} \quad (s < n),$$

где $P_{m-n}(x)$ — многочлен степени $(m-n)$, называемый целой частью дроби;

$\frac{P_s(x)}{P_n(x)}$ — правильная дробь (дробная часть $R(x)$).

Целую часть можно выделить, разделив числитель $P_m(x)$ на знаменатель $P_n(x)$, например «углом».

ПРИМЕР 4.3. Если $R(x) = \frac{x^4}{x^2+1}$, то

$$\begin{array}{r} x^4 \\ \overline{) x^2 + 1} \\ x^2 + 1 \\ \hline x^2 + x^2 \\ \overline{) x^2 + 1} \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{— частное} \\ \text{— остаток} \end{array}$$

Частное от деления будет целой частью, а остаток от деления — числителем дробной части,

$$R(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Интеграл от рациональной функции, в общем случае, находится как сумма интегралов от целой и дробной частей

$$\int R(x) dx = \int P_{m-n}(x) dx + \int \frac{P_s(x)}{P_n(x)} dx.$$

Целая часть $P_{m-n}(x)$ интегрируется непосредственно как линейная комбинация степенных функций. Для интегрирования правильной дроби $\frac{P_s(x)}{P_n(x)}$, в общем случае, ее

разлагают на простейшие дроби и представляют интеграл суммой интегралов от простейших дробей.

ПРИМЕР 4.4. Вычислить

$$\int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$$

$$\int \frac{x^4}{x^2+1} dx = (\text{см. пример 4.3}) = \int (x^2-1) dx + \int \frac{dx}{x^2+1} = \\ = \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x + C.$$

Здесь не потребовалось разложить дробную часть на простейшие дроби, так как интеграл от нее оказался табличным.

ПРИМЕР 4.5. Вычислить

$$\int \frac{4x^2 + 3x + 3}{(x+1)(x-1)^2} dx.$$

Здесь под знаком интеграла стоит правильная рациональная дробь. Поэтому целую часть выделять не требуется, а для разложения дроби на простейшие воспользуемся результатом, полученным в примере 4.2.

$$\int \frac{4x^2 + 3x + 3}{(x+1)(x-1)^2} dx = \int \frac{dx}{x+1} - 3 \int \frac{dx}{x-1} + 5 \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \\ = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)} - 3 \int \frac{d(x-1)}{(x-1)} + \\ + 5 \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} = \ln|x+1| - 3 \ln|x-1| - \frac{5}{x-1} + C = \\ = \ln \left| \frac{x+1}{(x-1)^3} \right| - \frac{5}{x-1} + C.$$

Простейшие дроби в этом примере были дробями вида

$$\frac{A}{(x-a)^k},$$

которые всегда можно интегрировать путем подведения под знак дифференциала двучлена $(x-a)$:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = \begin{cases} A \ln|x-a| + C & \text{при } k=1 \\ \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} & \text{при } k \neq 1 \end{cases}.$$

Для отыскания интеграла от простейшей дроби второго вида

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} dx, (p^2 - 4q < 0)$$

выделяются полный квадрат в квадратном трехчлене и основание квадрата в числителе, которое подводится под знак дифференциала:

$$\begin{aligned} & \int \frac{M(x + (p/2)) + (N - (Mp/2))}{[(x + (p/2))^2 + (q - (p^2/4))]^k} d(x + \frac{p}{2}) = \\ & = M \int \frac{(x + (p/2))d(x + (p/2))}{[(x + (p/2))^2 + (q - (p^2/4))]^k} + \\ & + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{d(x + (p/2))}{[(x + (p/2))^2 + (q - (p^2/4))]^k}, \end{aligned}$$

после чего интеграл сводится (заменой $x + \frac{p}{2}$ на x) к интегралам вида

$$I = \int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^k} \quad \text{и} \quad I_k = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^k}, \quad (4.2)$$

где $a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$, так как $p^2 - 4q < 0$.

Интеграл I находится путем подведения под знак дифференциала двучлена $x^2 + a^2$:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + a^2)}{(x^2 + a^2)^k} = \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + C \text{ при } k = 1 \right. \\ &\quad \left. \text{или } \frac{1}{2(1-k)(x^2 + a^2)^{k-1}} + C \text{ при } k \neq 1 \right\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Интеграл I_k при $k = 1$ является табличным

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

При $k > 1$ для его вычисления можно использовать рекуррентную формулу, для получения которой проинтегри-

руем I_k по частям и выполним указанные ниже преобразования:

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^k} + 2k \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^{k+1}} = \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^k} + 2k \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{(x^2 + a^2)^{k+1}} dx = \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^k} + 2k \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^k} - 2ka^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{k+1}} = \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^k} + 2kI_k - 2ka^2 I_{k+1}. \end{aligned}$$

Находя отсюда I_{k+1} , получаем *рекуррентную формулу*

$$I_{k+1} = \frac{x}{2ka^2(x^2 + a^2)^k} + \frac{2k-1}{2ka^2} I_k, \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (4.4)$$

По этой формуле I_2 выражается через I_1 , I_3 , через I_2 и т. д.

ПРИМЕР 4.6. Вычислить

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2}.$$

Этот интеграл равен I_2 при $a^2 = 4$.

Найдем сначала $I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$.

Затем из формулы (2.4) при $k = 1$ получим

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} = \frac{x}{8(x^2 + 4)} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C \right)$$

Замечание. Интеграл I_k можно находить также с помощью подстановки

$$x = a \operatorname{tg} t,$$

которая сводит его к интегралу от тригонометрического выражения (методы интегрирования тригонометрических выражений рассматриваются ниже).

Так, в примере (4.6) подстановка $x = 2 \operatorname{tg} t$ приводит к интегралу

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2 dt}{(4 \operatorname{tg}^2 t + 4)^2 \cos^2 t} &= \frac{1}{8} \int \cos^2 t dt = \frac{1}{16} \int (1 + \cos 2t) dt = \\
 &= \frac{1}{16} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \frac{1}{16} \sin t \cos t + C = \\
 &= \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \frac{1}{16} \frac{\operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} + C = \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \frac{x}{4 + x^2} + C.
 \end{aligned}$$

(Сравните с результатом, полученным по рекуррентной формуле.)

Контрольные вопросы

1. Какие функции называются рациональными? Какие среди них называются целыми, какие дробными? Какие рациональные дроби называются правильными, какие неправильными?

2. Какие рациональные дроби называются простейшими? Сформулируйте теорему о разложении правильной рациональной дроби на простейшие (см. теорему 4.1).

3. В чем заключается метод неопределенных коэффициентов для разложения правильной рациональной дроби на простейшие? (см. пример 4.2).

4. Как можно выделить целую часть у неправильной рациональной дроби? (см. пример 4.3).

5. Как интегрируется целая часть неправильной рациональной дроби? (см. пример 4.5).

6. Как интегрируется простейшая дробь вида $\frac{A}{(x-a)^k}$? (см. пример 4.5).

7. Как интегрируется простейшая дробь вида $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, $(p^2-4q < 0)$? (см. процедуру сведения к интегралам (4.2), (4.3) и (4.4), пример 4.6 и замечание).

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Прежде чем рассматривать методы интегрирования выражений, содержащих тригонометрические функции, введем понятия многочлена и рациональной функции двух переменных.

Определение 5.1. Многочленом m -й степени от двух переменных x, y называется выражение вида

$$P_m(x, y) = L_{m,0}x^m + L_{m-1,1}x^{m-1}y + \dots + L_{0,m}y^m + \\ + L_{m-1,0}x^{m-1} + \dots + L_{0,m-1}y^{m-1} + \dots + L_{1,0}x + L_{0,1}y + L_{0,0},$$

в котором коэффициенты $L_{m,0}, \dots, L_{0,0}$ являются действительными числами.

Определение 5.2. Рациональной функцией $R(x, y)$ двух переменных называется отношение вида

$$R(x, y) = \frac{Q_l(x, y)}{P_m(x, y)},$$

где $Q_l(x, y)$ и $P_m(x, y)$ — многочлены от двух переменных.

Выражение $R(\sin x, \cos x)$ означает, что в рациональной функции $R(x, y)$ вместо x записывается $\sin x$, а вместо y — $\cos x$.

Например, если рациональная функция

$$R(x, y) = \frac{x^3 + 3xy^2 + x + 5}{x^2 + 2x^2y^2 + y + 1},$$

то

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^3 x + 3 \sin x \cos^2 x + \sin x + 5}{\sin^2 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos x + 1}.$$

§ 5.1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ $R(\sin x, \cos x)$

Интегрирование выражений такого вида всегда может быть сведено к интегрированию рациональной функции одной переменной с помощью *универсальной тригонометрической подстановки*:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, x \in (-\pi, \pi).$$

Действительно, так как

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \cos^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \\ &= 2 \frac{\operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1 + t^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} \left(1 - \frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)} \right) = \\ &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \end{aligned}$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, dx = \frac{2}{1 + t^2} dt,$$

то

$$\begin{aligned} \int R(\sin x, \cos x) dx &= \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt = \\ &= \int R_1(t) \frac{2}{1+t^2} dt = \int R_2(t) dt, \end{aligned}$$

где $R_1(t) \equiv R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$ — рациональная функция уже одной переменной t , $R_2(t) \equiv R_1(t) \frac{2}{1+t^2}$.

ПРИМЕР 5.1. Вычислить

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{2 + \cos x} \\ \int \frac{dx}{2 + \cos x} &= \left\{ t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \right\} = \\ &= \int \frac{1}{2 + (1-t^2)/(1+t^2)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1+t^2}{2+2t^2+1-t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \\ &= \int \frac{2}{3+t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Замечание. Выражение $R(\sin x, \cos x)dx$ принципиально всегда можно проинтегрировать в явном виде, т. е. выразить через элементарные функции.

§ 5.2. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ

ИНТЕГРИРОВАНИЯ ВЫРАЖЕНИЙ ВИДА $R(\sin x, \cos x)$

$$1. \int R(\sin x) \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int R(t) dt.$$

$$2. \int R(\cos x) \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right\} = -\int R(t) dt.$$

$$\begin{aligned} 3. \int R(\operatorname{tg} x) dx &= \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, x = \operatorname{arctg} t \\ dx = dt / (1+t^2) \end{array} \right\} = \int R(t) \frac{dt}{1+t^2} = \\ &= \int R_1(t) dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \int R(\sin^2 x, \cos^2 x) dx &= \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, x = \operatorname{arctg} t \\ dx = dt / (1+t^2) \end{array} \right\} = \\ &= \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2} = \int R_1(t) dt, \end{aligned}$$

$$\text{так как } \sin^2 x = \cos^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2},$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}.$$

§ 5.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ

ВИДА $R(\sin^m x, \cos^n x)$,где m, n — целые числаа) n — нечетное число, $n = 2p + 1$.

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cdot \cos^{2p+1} x dx &= \int \sin^m x (\cos^2 x)^p \cos x dx = \\ &= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^p \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \\ &= \int t^m (1 - t^2)^p dt. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 5.2. Вычислить

$$\int \cos^3 x dx.$$

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x dx &= \int \cos^2 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int (1 - t^2) dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \\ &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

б) m — нечетное число, $m = 2k + 1$.

$$\begin{aligned} \int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx &= \int (\sin^2 x)^k \cos^n x \sin x dx = \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right\} = \\ &= -\int (1 - t^2)^k \cdot t^n dt. \end{aligned}$$

в) m и n — четные неотрицательные числа, $m = 2k \geq 0$, $n = 2p \geq 0$.

$$\begin{aligned} \int \sin^{2k} x \cos^{2p} x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^k \cdot \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^p dx = \\ &= \frac{1}{2^{k+p}} \int (1 - \cos 2x)^k (1 + \cos 2x)^p dx. \end{aligned}$$

Возведя в последнем интеграле подынтегральное выражение в соответствующие степени и раскрывая скобки, получаем члены, содержащие степени $\cos 2x$ с нечетными,

либо с четными показателями. Члены с нечетными показателями интегрируются как в случае а) заменой $t = \sin 2x$; члены с четными показателями интегрируются понижением порядка, используя формулу тригонометрии

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

Применяя эту формулу достаточно большое число раз, дойдем до интеграла вида: $\int \cos(\beta x) dx = \frac{1}{\beta} \sin(\beta x) + C$.

г) m и n — четные числа и хотя бы одно из них отрицательно.

В этом случае можно делать замету $\operatorname{tg} x = t$ или $\operatorname{ctg} x = t$. Например, если $n = -2p$ ($p > 0$), то

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^{2k} x}{\cos^{2p} x} dx &= \int \frac{\operatorname{tg}^{2k} x}{\cos^{2(p-k-1)} x \cos^2 x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ dx / \cos^2 x = dt \end{array} \right\} = \\ &= \int t^{2k} (1 + t^2)^{p-k-1} dt = \int R(t) dt. \end{aligned}$$

§ 5.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ ВИДА:

а) $\int \sin(\alpha x) \sin(\beta x) dx$; б) $\int \sin(\alpha x) \cos(\beta x) dx$;

в) $\int \cos(\alpha x) \cos(\beta x) dx$

Интегрирование этих выражений основано на следующих тригонометрических формулах:

$$\sin(\alpha x) \sin(\beta x) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x];$$

$$\sin(\alpha x) \cos(\beta x) = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x];$$

$$\cos(\alpha x) \cos(\beta x) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x].$$

Контрольные вопросы

1. Что называется рациональной функцией двух переменных?
2. Какую замену надо сделать, чтобы вычислить интеграл

$$\int \frac{\sin^6 x}{\cos^9 x} dx?$$

3. Доказать, что существуют такие постоянные A и B , что

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x| + C$$

(здесь a_1, b_1, a, b — постоянные; $a^2 + b^2 \neq 0$).

Ответы

1. Смотри определения 5.2, 5.1.

2. Необходимо сделать замену $\sin x = t$, так как

$$\frac{\sin^6 x}{\cos^9 x} = \frac{\sin^6 x}{\cos^{10} x} \cos x = \frac{\sin^6 x}{(1 - \sin^2 x)^5} \cos x.$$

3. Преобразуем выражение $a_1 \sin x + b_1 \cos x$ к следующему виду:

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x = A(a \sin x + b \cos x) + B(a \cos x - b \sin x).$$

Приравнявая коэффициенты при $\sin x$ и при $\cos x$, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} Aa - Bb = a_1, \\ Ab + Ba = b_1. \end{cases}$$

Решая ее, имеем $A = \frac{a_1 a + b_1 b}{a^2 + b^2}$, $B = \frac{ab_1 - ba_1}{a^2 + b^2}$, и, следовательно:

$$\begin{aligned} \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx &= \\ &= \frac{a_1 a + b_1 b}{a^2 + b^2} \int \frac{a \sin x + b \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx + \frac{ab_1 - ba_1}{a^2 + b^2} \int \frac{a \cos x - b \sin x}{a \sin x + b \cos x} dx = \\ &= \frac{a_1 a + b_1 b}{a^2 + b^2} \int dx + \frac{ab_1 - ba_1}{a^2 + b^2} \int \frac{d(a \sin x + b \cos x)}{a \sin x + b \cos x} dx = \\ &= \frac{a_1 a + b_1 b}{a^2 + b^2} x + \frac{ab_1 - ba_1}{a^2 + b^2} \ln |a \sin x + b \cos x| + C. \end{aligned}$$

Второй вариант доказательства:

$$\begin{aligned} (Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x| + C)' &= A + B \frac{a \cos x - b \sin x}{a \sin x + b \cos x} = \\ &= \frac{(Aa - Bb) \sin x + (Ab + Ba) \cos x}{a \sin x + b \cos x}, \end{aligned}$$

$$Aa - Bb = a_1, Ab + Ba = b_1 \Rightarrow A = \frac{a_1 a + b_1 b}{a^2 + b^2}, B = \frac{ab_1 - ba_1}{a^2 + b^2}.$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Не от всякой иррациональной функции интеграл выражается через элементарные функции. В этой лекции мы с вами рассмотрим те иррациональные функции, интегралы от которых с помощью подстановки приводятся к интегралам от рациональных функций и, следовательно, интегрируются в элементарных функциях.

§ 6.1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ

Пусть $R(u, v)$ — рациональная функция от двух переменных u, v .

а) Интегрирование выражений вида $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$, $a \neq 0$, $n \geq 2$ натуральное число, a, b — действительные числа. Подстановкой $y = \sqrt[n]{ax+b}$ интеграл $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$ легко сводится к интегралу от рациональной функции. Действительно,

$$y = \sqrt[n]{ax+b}; y^n = ax+b, x = \frac{y^n - b}{a}; dx = \frac{n}{a} y^{n-1} dy.$$

Таким образом,

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx = \frac{n}{a} \int R\left(\frac{y^n - b}{a}, y\right) y^{n-1} dy = \frac{n}{a} \int R_1(y) dy.$$

Здесь $R_1(y) \equiv R\left(\frac{y^n - b}{a}, y\right)y^{n-1}$ — рациональная функция одного переменного y .

б) $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, n \geq 2$ — натуральное число; a, b, c, d — действительные числа, $ad - cb \neq 0$.

Сделаем замену $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \frac{ax+b}{cx+d} = y^n$. Из последнего равенства найдем $x = \frac{dy^n - b}{a - cy^n}$ и $dx = \frac{ny^{n-1}(ad - bc)}{(a - cy^n)^2} dy$.

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx &= \int R\left(\frac{dy^n - b}{a - cy^n}, y\right) \frac{n(ad - bc)}{(a - cy^n)^2} y^{n-1} dy = \\ &= \int R_1(y) dy, \end{aligned}$$

где $R_1(y) \equiv R\left(\frac{dy^n - b}{a - cy^n}, y\right) \frac{n(ad - bc)}{(a - cy^n)^2} y^{n-1}$ — рациональная функция переменного y .

ПРИМЕР 6.1. Вычислить

$$\int \sqrt{\frac{6-x}{x-14}} dx.$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{6-x}{x-14}} dx &= \left\{ \begin{array}{l} y^2 = \frac{6-x}{x-14} \\ dx = \frac{16y}{(y^2+1)^2} \end{array} \right\} = 16 \int \frac{y^2}{(y^2+1)^2} dy = \\ &= 16 \int \frac{y^2+1}{(y^2+1)^2} dy - 16 \int \frac{dy}{(y^2+1)^2} = 16 \int \frac{dy}{y^2+1} - 8 \frac{y}{y^2+1} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -8 \int \frac{dy}{y^2 + 1} &= 8 \operatorname{arctg} y - 8 \frac{y}{y^2 + 1} + C = \\
 &= 8 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{6-x}{x-14}} + \sqrt{\frac{6-x}{x-14}} (x-14) + C.
 \end{aligned}$$

в) $\int R(x, \sqrt[n]{x}, \dots, \sqrt[m]{x}) dx, n \geq 2, \dots, m \geq 2$ — натуральные числа. Обозначим через S наименьшее общее кратное чисел $n, \dots, m$; $S = \text{НОК}\{n, \dots, m\}$. Но тогда $S = nl, \dots, S = mk$; l, k — натуральные числа.

Сделаем замену

$$y^S = x, dx = Sy^{S-1} dy, \sqrt[n]{x} = y^l, \dots, \sqrt[m]{x} = y^k.$$

Следовательно,

$$\int R(x, \sqrt[n]{x}, \dots, \sqrt[m]{x}) dx = \int R(y^S, y^l, \dots, y^k) Sy^{S-1} dy = \int R_1(y) dy,$$

где $R_1(y) \equiv R(y^S, y^l, \dots, y^k) Sy^{S-1}$ — рациональная функция переменного y .

Аналогично легко сводится к интегралу от рациональной функции и интеграл более общего вида:

$$\text{г) } \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dy, n \geq 2, \dots, m \geq 2 \text{ — на-}$$

туральные числа; a, b, c, d — действительные числа, $ac - bd \neq 0$.

§ 6.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ БИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

Биномиальными дифференциалами называются дифференциалы вида

$$x^m (a + bx^n)^p dx,$$

a, b — постоянные числа, не равные нулю; m, n, p — рациональные числа, $p \neq 0$.

Теорема П. Л. Чебышева. Интегралы от биномиальных дифференциалов выражаются через элементарные функции лишь в трех случаях:

1) p — целое; 2) $\frac{m+1}{n}$ — целое; 3) $\frac{m+1}{n} + p$ — целое.

Рассмотрим подробнее эти случаи.

1) p — целое число.

Если обозначим через r наименьшее общее кратное знаменателей рациональных чисел m и n , то получим

$$\begin{aligned}\int x^m (a + bx^n)^p dx &= \int R(x, \sqrt[n]{x}) dx = \left\{ \begin{array}{l} x = t^r \\ dx = rt^{r-1} dt \end{array} \right\} = \\ &= \int R(t^r, t) rt^{r-1} dx = \int R_1(t) dt.\end{aligned}$$

Пусть p — дробное число. Сделаем замену $x^n = z$:

$$\begin{aligned}\int x^m (a + bx^n)^p dx &= \int z^{m/n} (a + bz)^p \cdot \frac{1}{n} z^{(1/n)-1} dz = \\ &= \frac{1}{n} \int (a + bz)^p z^{[(m+1)/n]-1} dz.\end{aligned}$$

2) $\frac{m+1}{n}$ — целое число.

Пусть $p = \frac{l}{s}$. Используя замену $t = \sqrt[s]{a + bz} = \sqrt[s]{a + bx^n}$,

получаем:

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \int R(z, \sqrt[s]{a + bz}) dz = \int R_1(t) dt.$$

3) $\frac{m+1}{n} + p$ — целое число.

$$\begin{aligned}\int (a + bz)^p z^{[(m+1)/n]-1} dz &= \int \left(\frac{a + bz}{z} \right)^p z^{p+[(m+1)/n]-1} dz = \\ &= \int R \left(z, \sqrt[s]{\frac{a + bz}{z}} \right) dz,\end{aligned}$$

s — знаменатель числа p . Замена $t = \sqrt[s]{\frac{a + bz}{z}} = \sqrt[s]{ax^{-n} + b}$ сводит интеграл $\int R \left(z, \sqrt[s]{\frac{a + bz}{z}} \right) dz = \int R_1(t) dt$ к интегралу от рациональной функции переменной t .

ПРИМЕР 6.2. Вычислить

$$\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{z}} dx.$$

В этом случае $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{3}$. Подсчитаем $\frac{m+1}{n} = \frac{-(1/2)+1}{1/4} = 2$ (случай 2). Необходимо делать замену

$$t = \sqrt[3]{1 + x^{1/4}}; x^{1/4} = t^3 - 1; x = (t^3 - 1)^4; dx = 4(t^3 - 1)^3 3t^2 dt.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} & \int x^{-1/2} (1 + x^4)^{1/3} dx = \\ &= \int (t^3 - 1)^{-2} \cdot t \cdot 12t^2 (t^3 - 1)^3 dt = 12 \int t^3 (t^3 - 1) dt = \\ &= 12 \int t^6 dt - 12 \int t^3 dt = \frac{12}{7} t^7 - 3t^4 + C = \\ &= \frac{12}{7} \sqrt[3]{(1 + x^{1/4})^7} - 3\sqrt{(1 + x^{1/4})^4} + C. \end{aligned}$$

§ 6.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ

КВАДРАТИЧНЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ

$$\begin{aligned} \text{а) } \int R(x, \sqrt{m^2 - n^2 x^2}) dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{m}{n} \sin t, \\ dx = \frac{m}{n} \cos t dt \end{array} \right\} = \\ &= \int R\left(\frac{m}{n} \sin t, m \cos t\right) \frac{m}{n} \cos t dt = \int R_1(\sin t, \cos t) dt. \end{aligned}$$

$$\text{б) } \int R(x, \sqrt{m^2 + n^2 x^2}) dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{m}{n} \operatorname{tg} t, \\ dx = \frac{m}{n} \frac{dt}{\cos^2 t}, \\ \sqrt{m^2 + n^2 x^2} = \frac{m}{\operatorname{tg} t} \end{array} \right\} =$$

$$= \int R\left(\frac{m}{n} \operatorname{tg} t, \frac{m}{\operatorname{tg} t}\right) \frac{m}{n} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int R_1(\sin t, \cos t) dt.$$

$$\text{в) } \int R(x, \sqrt{n^2 x^2 - m^2}) dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{m}{n \cos t}, \\ dx = \frac{m \sin t}{n \cos^2 t}, \\ \sqrt{n^2 x^2 - m^2} = \frac{m \sin t}{\cos t} \end{array} \right\} =$$

$$= \int R\left(\frac{m}{n \cos t}, \frac{m \sin t}{\cos t}\right) \frac{m \sin t}{n \cos t} = \int R_1(\sin t, \cos t) dt.$$

$$\text{г) } \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx.$$

Подстановка Эйлера:

1) $a > 0$.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x; ax^2 + bx + c = t^2 - 2\sqrt{a}xt + ax^2;$$

следовательно,

$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{at} + b}; \quad dx = 2 \frac{\sqrt{at^2 + bt + c\sqrt{a}}}{(2\sqrt{at} + b)^2} dt.$$

$$\begin{aligned} & \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \\ &= \int R\left(\frac{t^2 - c}{2\sqrt{at} + b}, \frac{\sqrt{at^2 + bt + c\sqrt{a}}}{2\sqrt{at} + b}\right) 2 \frac{\sqrt{at^2 + bt + c\sqrt{a}}}{(2\sqrt{at} + b)^2} dt = \\ &= \int R_1(t) dt. \end{aligned}$$

2) $c > 0$.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}; ax^2 + bx + c = x^2 t^2 + 2xt\sqrt{c} + c.$$

$$ax + b = xt^2 + 2t\sqrt{c}; \quad x = \frac{2\sqrt{ct} - b}{a - t^2};$$

$$dx = 2 \frac{\sqrt{ct^2 - bt + \sqrt{ca}}}{(a - t^2)^2} dt.$$

$$\begin{aligned}
 & \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \\
 & = \int R\left(\frac{2\sqrt{ct} - b}{a - t^2}, \frac{\sqrt{ct^2 - bt + a\sqrt{c}}}{a - t^2}\right) 2 \frac{\sqrt{ct^2 - bt + a\sqrt{c}}}{(a - t^2)^2} dt = \\
 & = \int R_1(t) dt.
 \end{aligned}$$

3) Пусть x_1, x_2 — действительные различные корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Сделаем замену $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = t^2(x - x_1)^2; \quad a(x - x_2) = t^2(x - x_1);$$

$$x = \frac{-ax_2 + x_1 t^2}{t^2 - a}; \quad dx = \frac{2a(x_2 - x_1)t}{(t^2 - a)^2} dt.$$

$$\begin{aligned}
 & \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \\
 & = \int R\left(\frac{-ax_2 + x_1 t^2}{t^2 - a}, \frac{a(x_1 - x_2)t}{t^2 - a}\right) \frac{2a(x_2 - x_1)t}{(t^2 - a)^2} dt = \int R_1(t) dt.
 \end{aligned}$$

Контрольные вопросы

1. Какой подстановкой можно избавиться от иррациональности в интеграле

$$\int 2 \frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}{2(\sqrt{1+x})^3} dx?$$

2. Как избавиться от иррациональности в интеграле

$$\int R(x, \sqrt[l]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b}, \sqrt[n]{ax+b}) dx,$$

$l \geq 2, m \geq 2, n \geq 2$ — натуральные числа; a, b — действительные числа?

3. Сформулируйте теорему П. Л. Чебышева.

4. При каких целых значениях n интеграл $\int \sqrt{1+x^n} dx$ выражается элементарными функциями?

5. Какие подстановки называются подстановками Эйлера?

Ответы

1. Подстановка

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}$$

сводит интеграл к виду

$$-\int \frac{t(t+1)}{t^2+1} dt.$$

2. Пусть S — наименьшее общее кратное чисел l, m, n . Тогда делается замена

$$t = \sqrt[l]{ax+b}, \quad x = \frac{t^S - b}{a}, \quad dx = \frac{S}{a} t^{S-1}.$$

4. Сведем $\int \sqrt{1+x^2} dx$ к виду

$$\int x^0 (1+x^n)^{1/2} dx.$$

Тогда по теореме П. Л. Чебышева интеграл выражается через элементарные функции в двух случаях:

а) $\frac{1}{n}$ — целое, следовательно $n = \pm 1$;

б) $\frac{1}{n} + \frac{1}{2}$ — целое, следовательно, $n = \pm 2$.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

§ 7.1. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ПОНЯТИЮ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

а) *Площадь криволинейной трапеции.* Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и неотрицательна, т. е. $f(x) \geq 0$ при всех $x \in [a, b]$. Рассмотрим фигуру, ограниченную графиком функции $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (рис. 7.1). Такую фигуру называют *криволинейной трапецией*.

Наша задача — дать определение и указать способ вычисления площади криволинейной трапеции. Для этого разобьем отрезок $[a, b]$ на n отрезков точками

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = b \quad (7.1)$$

и проведем через эти точки прямые, параллельные оси Oy (рис. 7.2).

Тогда данная криволинейная трапеция разобьется на n частей, каждая из которых является криволинейной трапецией.

Введем обозначения

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad (k = 1, \dots, n); \quad \lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k, \quad (7.2)$$

и в каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ выберем произвольным образом точку ξ_k ($k = 1, \dots, n$).

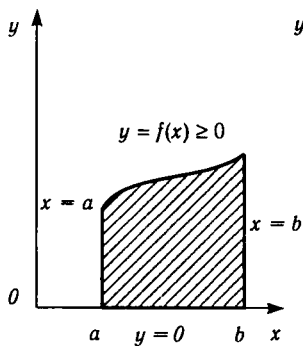


Рис. 7.1

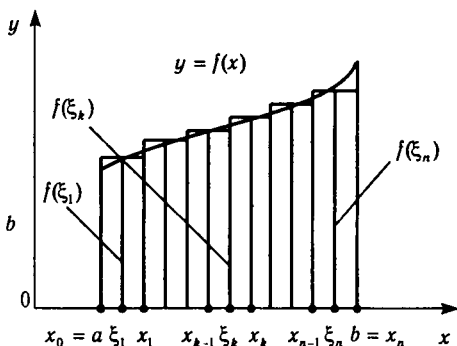


Рис. 7.2

Рассмотрим ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников с основаниями Δx_k и высотами $f(\xi_k)$. Площадь S_n этой ступенчатой фигуры вычисляется по формуле

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Ясно, что при достаточно малых отрезках Δx_k эта ступенчатая фигура будет мало отличаться от исходной криволинейной трапеции. Поэтому за площадь S криволинейной трапеции естественно принять предел площадей ступенчатых фигур при стремлении к нулю длин всех отрезков разбиения

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \quad (7.3)$$

(при условии, что указанный предел существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части, ни от выбора точек ξ_k).

б) *Работа переменной силы.* Пусть материальная точка движется вдоль оси Ox из точки a в точку b под действием силы F , причем направление действия силы совпадает с направлением движения точки и ее величина F задана как функция от координаты x точки, т. е. $F = F(x)$. Найдем работу силы F при перемещении материальной точки из a в b . Для этого разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками

(7.1), введем обозначения (7.2) и в каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ выберем произвольным образом точку ξ_k ($k = 1, \dots, n$). Тогда работа силы $F = F(x)$ на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ приближенно равна $F(\xi_k)\Delta x_k$, а на всем отрезке $[a, b]$ работу A этой силы можно приближенно считать равной сумме $\sum_{k=1}^n F(\xi_k)\Delta x_k$.

Предел этой суммы

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n F(\xi_k)\Delta x_k \quad (7.4)$$

(при тех же условиях, что и в задаче о площади) естественно назвать *работой переменной силы при перемещении материальной точки из точки a в точку b* .

Замечание. В рассмотренных задачах возникает необходимость нахождения пределов вида (7.3), (7.4), которые называются пределами интегральных сумм. К вычислению пределов таких сумм сводится решение многих важных задач геометрии, физики, других дисциплин. В связи с этим и вводится понятие определенного интеграла.

§ 7.2. ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n отрезков точками

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

и введем обозначения

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad (k = 1, \dots, n); \quad \lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k,$$

(Δx_k — длина k -го отрезка, λ — длина наибольшего отрезка разбиения). В каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ выберем произвольным образом точку ξ_k ($k = 1, \dots, n$) и составим сумму

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k, \quad (7.5)$$

называемую *интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$* .

Определение 7.1. Если существует конечный предел интегральных сумм (7.5) при $\lambda \rightarrow 0$, причем этот предел не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части, ни от выбора точек ξ_k , то функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$, а указанный предел называется *определенным интегралом* от $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается символом $\int_a^b f(x)dx$.

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k. \quad (7.6)$$

§ 7.3. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ

Теорема 7.1. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Доказательство. Предположим противное: $f(x)$ не ограничена на отрезке $[a, b]$. Тогда при любом разбиении отрезка $[a, b]$ на части $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, \dots, n$) найдется отрезок $[x_{k_0-1}, x_{k_0}]$, на котором функция $f(x)$ тоже не ограничена.

Выберем точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, \dots, n$) и составим интегральную сумму (7.5). Точки $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k_0-1}, \xi_{k_0+1}, \dots, \xi_n$ зафиксируем и будем менять только точку ξ_{k_0} . Тогда интегральная сумма (7.5) представляется в виде

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^{k_0-1} f(\xi_k) \Delta x_k + f(\xi_{k_0}) \Delta x_{k_0} + \sum_{k=k_0+1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Отсюда, обозначив через A сумму первого и третьего слагаемых правой части, получим

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = A + f(\xi_{k_0}) (x_{k_0} - x_{k_0-1}). \quad (7.7)$$

Так как A — постоянная величина, а функция $f(x)$ не ограничена на отрезке $[x_{k_0-1}, x_{k_0}]$, то при соответствующем выборе точки $\xi_{k_0} \in [x_{k_0-1}, x_{k_0}]$, значение $f(\xi_{k_0})$ можно сделать как

угодно большим (по абсолютной величине). Поэтому модуль второго слагаемого в (7.7), а значит и модуль интегральной суммы (7.7), можно сделать сколь угодно большим. Следовательно, интегральные суммы (7.7) не могут иметь конечного предела, что противоречит интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Замечание. Ограниченность функции не является достаточным условием ее интегрируемости. Так, например, функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число} \end{cases}$$

ограничена, но не интегрируема ни на каком отрезке $[a, b]$.

Действительно, при любом разбиении отрезка $[a, b]$ на части, взяв в качестве промежуточных точек ξ_k иррациональные числа, получим интегральную сумму (7.5), равную нулю. Если же в качестве промежуточных точек ξ_k взять рациональные числа, то интегральная сумма (7.5) будет равна сумме длин всех отрезков разбиения, т. е. $b - a$. Отсюда следует, что для функции Дирихле интегральные суммы (7.5) при $\lambda \rightarrow 0$, предела, не зависящего от выбора точек ξ_k , не имеют, т. е. функция Дирихле не интегрируема ни на каком отрезке $[a, b]$.

§ 7.4. ОСНОВНЫЕ КЛАССЫ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Теорема 7.2. *Если выполнено одно из следующих условий:*

- а) *функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$;*
- б) *функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$ и имеет на этом отрезке конечное число точек разрыва;*

в) *функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a, b]$, то $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и, следовательно, $\int_a^b f(x)dx$ существует.*

Доказательство этой теоремы выходит за рамки нашего курса.

Из предыдущей теоремы и формулы (7.3) следует, что если функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$, то криволинейная трапеция имеет площадь S и эта площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

В этом и заключается геометрический смысл определенного интеграла.

Кроме того, из формулы (7.4) следует, что работа непрерывной на отрезке $[a, b]$ переменной силы $F(x)$ при перемещении материальной точки из точки a в точку b вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b F(x) dx.$$

§ 7.5. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Свойство I. Если функция $f(x)$ определена в точке $x = a$, то

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

Свойство II. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Свойства I и II принимаются по определению.

Свойство III. $\int_a^b dx = b - a$.

Доказательство. Воспользуемся определением 7.1. В рассматриваемом случае $f(x) \equiv 1$, поэтому интегральные суммы (7.5) имеют такой вид:

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta x_k = b - a.$$

Следовательно,

$$\int_a^b dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (b - a) = b - a.$$

Свойство III доказано.

Свойство IV (линейность определенного интеграла).

а) Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и c — постоянная величина, то функция $c f(x)$ также интегрируема на $[a, b]$ и справедливо равенство

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

б) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то функция $f(x) + g(x)$ также интегрируема на $[a, b]$ и справедливо равенство

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Доказательство. При любом разбиении отрезка $[a, b]$ и любом выборе точки ξ_k справедливы равенства:

$$\sum_{k=1}^n c f(\xi_k) \Delta x_k = c \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k; \quad (7.8)$$

$$\sum_{k=1}^n (f(\xi_k) + g(\xi_k)) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \Delta x_k. \quad (7.9)$$

Так как по условию $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то при $\lambda \rightarrow 0$ пределы каждого из слагаемых в правых частях формул (7.8) и (7.9) существуют. По свойствам предела отсюда следует, что пределы левых частей формул (7.8) и (7.9) также существуют и справедливы равенства

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n c f(\xi_k) \Delta x_k &= c \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k; \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (f(\xi_k) + g(\xi_k)) \Delta x_k &= \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \Delta x_k, \end{aligned}$$

т. е. (в силу определения 7.1)

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx; \int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Свойство IV доказано.

Следствие. Линейная комбинация $\sum_{i=1}^m c_i f_i(x)$ интегрируемых на отрезке $[a, b]$ функций $f_i(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и справедливо равенство

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^m c_i f_i(x) \right) dx = \sum_{i=1}^m c_i \int_a^b f_i(x) dx.$$

Свойство V. а) Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $a < c < b$, то $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a, c]$, $[c, b]$ и справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

б) Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, то $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и справедливо равенство

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Свойство V принимается без доказательства.

Следствие. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то при любом расположении точек c_1, c_2, c_3 на отрезке $[a, b]$ справедливо равенство

$$\int_{c_1}^{c_3} f(x)dx = \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)dx. \quad (7.10)$$

Доказательство. Если $c_1 < c_2 < c_3$, то равенство (7.10) справедливо в силу свойства V.

Пусть, например $c_1 < c_3 < c_2$ (при других расположениях точек доказательство проводится аналогично). Тогда в силу свойства V имеем

$$\begin{aligned} \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx &= \int_{c_1}^{c_3} f(x) dx + \int_{c_3}^{c_2} f(x) dx \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_{c_1}^{c_3} f(x) dx &= \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx - \int_{c_3}^{c_2} f(x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом того, что в силу свойства II

$$\int_{c_3}^{c_2} f(x) dx = - \int_{c_2}^{c_3} f(x) dx,$$

и вытекает соотношение (5.10).

Свойство VI. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \geq 0$ при всех $x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Доказательство. Так как $f(x) \geq 0$, то все интегральные суммы (5.5) функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ неотрицательны:

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \geq 0.$$

Используя теорему о переходе к пределу в неравенствах, получаем

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \geq \lim_{\lambda \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Свойство VI доказано.

Свойство VII. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \leq g(x)$ при всех $x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = g(x) - f(x)$. Так как $\varphi(x)$ интегрируема и $\varphi(x) \geq 0$ на отрезке $[a, b]$, то, в силу свойств VI и IV имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x) dx \geq 0 &\Leftrightarrow \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq 0 \Leftrightarrow \\ \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx &\geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Свойство VII доказано.

Следствие. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на этом отрезке и справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Доказательство вытекает из неравенства $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, справедливого при любом $x \in [a, b]$ и предыдущего свойства.

Свойство VIII. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $m \leq f(x) \leq M$ при всех $x \in [a, b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a). \quad (7.11)$$

Доказательство. Так как, согласно условию

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b],$$

то, используя свойство VII, получаем

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx.$$

С помощью свойств IV а) и III выводим отсюда такие неравенства:

$$\begin{aligned} m \int_a^b dx &\leq \int_a^b f(x) dx \leq M \int_a^b dx \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow m(b-a) &\leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a). \end{aligned}$$

Следовательно, формула (7.11) справедлива.

Свойство IX. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $m \leq f(x) \leq M$ при всех $x \in [a, b]$, то существует такое число μ , удовлетворяющее неравенствам $m \leq \mu \leq M$, что

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a). \quad (7.12)$$

Доказательство. Так как $m \leq f(x) \leq M$, то справедливо соотношение (7.11), следовательно,

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M. \quad (7.13)$$

Полагая $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$, получаем что формула (7.12)

справедлива, причем в силу (7.13), $m \leq \mu \leq M$. Свойство IX доказано.

Свойство X (теорема о среднем значении). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке найдется такая точка ξ , что справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \quad (\xi \in [a, b]). \quad (7.14)$$

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке (см. теорему 7.2). Кроме того, по теореме Вейерштрасса $f(x)$ принимает на отрезке $[a, b]$ свои наименьшее m и наибольшее M значения, т. е. существуют $x_1, x_2 \in [a, b]$ такие, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$ и

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b].$$

Поэтому, согласно свойству IX, существует такое число μ , что справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a) \quad (m \leq f(x) \leq M). \quad (7.15)$$

Поскольку число μ лежит между двумя значениями непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то из теоремы о промежуточном значении непрерывной функции вытекает существование точки $\xi \in [a, b]$, в которой значение $f(x)$ равно μ , т. е. $f(\xi) = \mu$. Подставляя $\mu = f(\xi)$ в (7.15), получаем требуемое соотношение (7.14). Свойство IX доказано.

§ 7.6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ

Пусть непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ неотрицательна на этом отрезке, т. е. $f(x) \geq 0$. Тогда левая часть формулы (7.14) равна S — площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и прямыми $x = a, x = b, y = 0$ (рис. 7.3), а правая часть формулы (7.14) равна площади S_{ABCD} прямоугольника $ABCD$ с основанием $b - a$ и высотой $f(\xi)$. Следовательно, формула (7.14) означает $S = S_{ABCD}$.

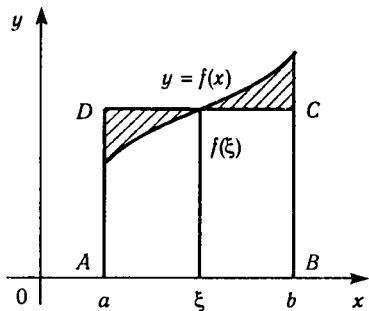


Рис. 7.3

Таким образом, для непрерывной неотрицательной функции $f(x)$ теорема о среднем значении утверждает существование прямоугольника с основанием $b - a$ и высотой, равной

значению функции $f(x)$ в некоторой точке $\xi \in [a, b]$, площадь которого равна площади криволинейной трапеции.

Контрольные вопросы

1. Что называется криволинейной трапецией?
2. Как определяется площадь криволинейной трапеции?
3. Как найти работу переменной силы $F = F(x)$ при перемещении материальной точки вдоль оси Ox из a в b (если направление действия силы совпадает с направлением движения точки)?
4. Сформулируйте определение интегральной суммы функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (см. определение 7.1).
Зависит ли интегральная сумма:
а) от разбиения отрезка $[a, b]$ на части? б) от выбора точек ξ_k ?
5. Какая функция называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$? Что называется определенным интегралом от $f(x)$ по отрезку $[a, b]$? (см. определение 7.1).

Зависит ли $\int_a^b f(x) dx$:

- а) от разбиения отрезка $[a, b]$ на части? б) от выбора точек ξ_k ?

6. Сформулируйте необходимое условие интегрируемости функции (см. теорему 7.1).

Является ли функция

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 2 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

интегрируемой на отрезке $[0, 1]$?

7. Является ли ограниченность функции достаточным условием ее интегрируемости? (см. замечание к теореме 7.1).

8. Сформулируйте достаточные условия интегрируемости функции. (см. теорему 7.2).

9. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла? Дайте геометрическую иллюстрацию свойства III определенного интеграла.

10. Докажите линейность определенного интеграла (см. свойство IV).

11. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Будет ли их разность $f(x) - g(x)$ интегрируемой на этом отрезке? (см. свойство IV).

12. Может ли сумма $f(x) + g(x)$ двух не интегрируемых на отрезке $[a, b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$ быть интегрируемой на этом отрезке?

Указание. Рассмотрите пример: $f(x)$ — функция Дирихле

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 1, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

13. Вычислите $\int_0^3 f(x) dx$, если

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 2, & \text{при } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

(см. свойства V, IV, III).

14. Сформулируйте и докажите теорему о среднем значении (см. свойство X).

15. Приведите геометрический смысл теоремы о среднем значении.

16. Справедливо ли свойство X для разрывных функций?

Указание. Рассмотрите функцию $f(x)$ из контрольного вопроса 13 на отрезке $[0, 3]$.

Ответы

6. Не является. 7. Не является.

11. Разность интегрируемых на отрезке функций интегрируема на данном отрезке.

$$14. \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = \int_0^1 dx + \int_1^3 2dx = 1 + 2 \cdot 2 = 5.$$

**ВЫЧИСЛЕНИЕ
ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА.
ФОРМУЛА НЬЮТОНА—ЛЕЙБНИЦА.
ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ
И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ**

**§ 8.1. ПРОИЗВОДНАЯ ИНТЕГРАЛА
ПО ВЕРХНЕМУ ПРЕДЕЛУ**

Предварительно отметим, что определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$, являющийся пределом интегральных сумм (см. определение в лекции № 7) есть постоянная величина, не зависящая от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования. Поэтому, если переменную x под знаком определенного интеграла обозначить другой буквой (например, t), то интеграл не изменится, т. е.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, x — произвольная точка отрезка $[a, b]$. Тогда $f(x)$ непрерывна, а значит интегрируема на отрезке $[a, x]$, причем интеграл $\int_a^x f(t) dt$ представляет функцию своего верхнего предела x . Обозначим эту функцию через $\Phi(x)$, т. е.

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (8.1)$$

Справедлива следующая

Теорема 8.1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ имеет производную в каждой точке отрезка $[a, b]$, причем

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x), \quad \forall x \in [a, b]. \quad (8.2)$$

Формула (8.2) означает, что если подынтегральная функция непрерывна, то производная определенного интеграла по верхнему пределу равна подынтегральной функции, в которую вместо переменной интегрирования подставлен верхний предел.

Доказательство. По определению производной

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x}. \quad (8.3)$$

Используя последовательно обозначение (8.1), свойство II определенного интеграла и следствие из свойства V, получаем

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \\ &= \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt + \int_x^a f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt. \end{aligned}$$

По теореме о среднем значении существует точка ξ , лежащая между точками x и $x + \Delta x$ такая, что справедливо равенство

$$\Delta \Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(\xi)(x + \Delta x - x) = f(\xi)\Delta x. \quad (8.4)$$

Так как ξ лежит между x и $x + \Delta x$, то $\xi \rightarrow x$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Поэтому при $\Delta x \rightarrow 0$ имеем: $f(\xi) \rightarrow f(x)$ (в силу непрерывности функции $f(x)$). Учитывая это, из (8.3), (8.4) выводим:

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x),$$

т. е. формула (8.2) справедлива.

Отметим, что в формуле (8.2) под $\Phi'(a)$ и $\Phi'(b)$ понимаются односторонние производные:

$\Phi'_+(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Phi(a + \Delta x) - \Phi(a)}{\Delta x}$ (правая производная);

$\Phi'_-(b) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Phi(b + \Delta x) - \Phi(b)}{\Delta x}$ (левая производная).

Следствие 8.1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то интеграл с переменным нижним пределом $\int_x^b f(t) dt$ имеет производную по x в каждой точке отрезка $[a, b]$, причем

$$\frac{d}{dx} \left(\int_x^b f(t) dt \right) = -f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Доказательство. Используя свойство V, а) определенного интеграла, получаем

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^b f(t) dt \Leftrightarrow \int_x^b f(t) dt = A - \int_a^x f(t) dt,$$

где $A = \int_a^b f(t) dt$. Так как A — постоянная величина, то

$A' = 0$, поэтому с помощью формулы (8.2) из последнего равенства следует, что

$$\frac{d}{dx} \left(\int_x^b f(t) dt \right) = A' - \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = -f(x).$$

Замечание. Если $f(x)$ — непрерывная, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — дифференцируемые функции, то справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\int_a^{\psi(x)} f(t) dt \right) &= f[\psi(x)]\psi'(x); \quad \frac{d}{dx} \left(\int_{\varphi(x)}^b f(t) dt \right) = \\ &= -f[\varphi(x)]\varphi'(x) \end{aligned}$$

Для доказательства достаточно воспользоваться теоремой о производной сложной функции, а также теоремой 8.1 и следствием 8.1.

ПРИМЕР 8.1. Вычислить

$$\text{а) } \frac{d}{dx} \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right) = e^{-x^2};$$

$$\text{б) } \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt \right) = e^{-x} (\sqrt{x})' = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}};$$

$$\text{в) } \frac{d}{dx} \left(\int_x^0 \frac{\sin t}{t} dt \right) = -\frac{\sin x}{x};$$

$$\text{г) } \frac{d}{dx} \left(\int_{x^4}^0 \frac{\sin t}{t} dt \right) = -\frac{\sin x^4}{x^4} (x^4)' = -\frac{\sin x^4}{x^4} 4x^3 = -\frac{4 \sin x^4}{x}.$$

Следствие 8.2. Любая, непрерывная на отрезке $[a, b]$, функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную. Одной из первообразных является функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Доказательство. Требуемый результат вытекает из определения первообразной и формулы (8.2).

§ 8.2. ФОРМУЛА НЬЮТОНА—ЛЕЙБНИЦА

Докажем основную формулу интегрального исчисления.

Теорема 8.2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ — какая-нибудь первообразная для $f(x)$ на этом отрезке, то справедлива формула Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (8.5)$$

Формула (8.5) дает правило вычисления определенного интеграла: определенный интеграл от непрерывной функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ равен разности значений

произвольной ее первообразной функции в концах a и b отрезка.

Для краткой записи используется обозначение

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b,$$

и обычно формулу (8.5) записывают в виде

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b.$$

Доказательство. Известно, что любые две первообразные функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ отличаются постоянным слагаемым. По условию $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, поэтому в силу следствия 8.2 функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ тоже является первообразной для $f(x)$ на $[a, b]$. Следовательно,

$$\Phi(x) = F(x) + C \Leftrightarrow \int_a^x f(t) dt = F(x) + C, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (8.6)$$

Полагая в (8.6) $x = a$ и используя свойство I определенного интеграла, получаем

$$\int_a^a f(t) dt = F(a) + C \Leftrightarrow 0 = F(a) + C \Leftrightarrow C = -F(a).$$

Подставляя найденное значение $C = -F(a)$ в (8.6), приходим к равенству

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a), \quad \forall x \in [a, b],$$

из которого при $x = b$ вытекает формула

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a),$$

совпадающая с формулой (8.5). Теорема 8.2 доказана.

ПРИМЕР 8.2. Вычислить

$$а) \int_2^6 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_2^6 = \frac{6^4}{4} - \frac{2^4}{4} = 324 - 4 = 320;$$

б)

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = -\cos \frac{\pi}{2} - \left(-\cos \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$$

$$\text{в) } \int_e^5 \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| \Big|_e^5 = \ln 5 - \ln e = \ln 5 - 1.$$

§ 8.3. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ ПОД ЗНАКОМ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Теорема 8.3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ таком, что

а) множество значений функции $x = \varphi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, совпадает с отрезком $[a, b]$;

б) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Тогда справедлива следующая формула замены переменной в определенном интеграле:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt. \quad (8.7)$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ — какая-нибудь первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда по формуле Ньютона—Лейбница (см. теорему 8.2) находим

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a). \quad (8.8)$$

Функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для подынтегральной функции правого интеграла формулы (8.7), так как

$$\frac{d}{dt}(F(\varphi(t))) = \frac{dF(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = f(x)\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Снова применяя к вычислению правого интеграла формулы (8.7) формулу Ньютона—Лейбница (учитывая при этом, что $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$), получаем

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a). \quad (8.9)$$

Из равенств (8.8) и (8.9) следует формула (8.7). Теорема 8.3 доказана.

ПРИМЕР 8.3. Вычислить

$$\int_{-3}^1 x \sqrt{x+3} dx.$$

Положим

$$t = \sqrt{x+3}. \quad (8.10)$$

Тогда $x = t^2 - 3$ и $dx = 2t dt$. Новые пределы интегрирования определяются из формулы (8.10): при $x = -3$ имеем $t = 0$, а при $x = 1$ получим $t = 2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{-3}^1 x \sqrt{x+3} dx &= \int_0^2 (t^2 - 3)t \cdot 2t dt = 2 \int_0^2 (t^4 - 3t^2) dt = \\ &= 2 \left(\frac{t^5}{5} - 3 \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 2 \left(\frac{2^5}{5} - 2^3 \right) = 16 \left(\frac{4}{5} - 1 \right) = -\frac{16}{5}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 8.4. Вычислить

$$\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{1 + \sqrt{1-x^2}}.$$

Положим

$$x = \sin t. \quad (8.11)$$

Тогда

$$dx = \cos t dt, \quad \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t,$$

$$t = \arcsin x. \quad (8.12)$$

Новые пределы интегрирования определяются из формулы (8.12): при $x = 0$ имеем $t = \arcsin 0 = 0$, а при $x = \sqrt{3}/2$ получим $t = \arcsin(\sqrt{3}/2) = \pi/3$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{1 + \sqrt{1-x^2}} &= \int_0^{\pi/3} \frac{\cos t dt}{1 + \cos t} = \int_0^{\pi/3} \frac{(\cos t + 1) - 1}{1 + \cos t} dt = \\ &= \int_0^{\pi/3} \left(1 - \frac{1}{2 \cos^2(t/2)} \right) dt = \left(t - \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/3} = \\ &= \frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\pi - \sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

§ 8.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Теорема 8.4. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) dx, \quad (8.13)$$

где $u(x)v(x) \Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Формулу (8.13) называют формулой интегрирования по частям в определенном интеграле и, учитывая, что $v'(x)dx = dv$, $u'(x)dx = du$, записывают обычно в виде

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (8.14)$$

Доказательство. Отметим, что функция $u(x)v(x)$ и является первообразной для функции $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, причем эта функция непрерывна на отрезке $[a, b]$. Поэтому, применяя формулу Ньютона—Лейбница, получаем

$$\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b.$$

Так как на отрезке $[a, b]$ функции $u'(x)v(x)$, $u(x)v'(x)$ также непрерывны, то определенные интегралы от этих функций существуют и справедливо равенство

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b,$$

которое можно записать в виде (8.13). Теорема 8.4 доказана.

ПРИМЕР 8.5. Вычислить

$$\int_0^{\pi} (2x + 1) \sin 3x dx.$$

Положим $u = 2x + 1$, $dv = \sin 3x dx$. Тогда $du = 2dx$, $v = -(\cos 3x)/3$. Используя формулу (8.14), получаем

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} (2x+1) \sin 3x \, dx &= -\frac{(2x+1) \cos 3x}{3} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \left(-\frac{\cos 3x}{3}\right) 2 \, dx = \\
 &= -\frac{(2\pi+1) \cos 3\pi}{3} + \frac{\cos 0}{3} + \frac{2}{3} \int_0^{\pi} \cos 3x \, dx = \\
 &= \frac{2\pi+1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin 3x}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{2(\pi+1)}{3}.
 \end{aligned}$$

ПРИМЕР 8.6. Вычислить

$$\int_1^e x^2 \ln x \, dx.$$

Положим $u = \ln x$, $dv = x^2 dx$. Тогда

$$du = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx, \quad v = \frac{x^3}{3}.$$

Используя формулу (8.14), получаем

$$\begin{aligned}
 \int_1^e x^2 \ln x \, dx &= \\
 &= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{e^3 \ln e}{3} - \frac{\ln 1}{3} - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \\
 &= \frac{e^3}{3} - \frac{x^3}{9} \Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{e^3}{9} - \frac{1}{9} \right) = \frac{2e^3 + 1}{9}.
 \end{aligned}$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теорему о производной определенного интеграла по верхнему пределу (см. теорему 8.1).
2. Как вычисляется производная определенного интеграла по нижнему пределу? (см. следствие 8.1).
3. Выразите

$$а) \frac{d}{dx} \left(\int_1^x \sqrt[3]{1+t^3} \, dt \right); \quad б) \frac{d}{dx} \left(\int_x^0 \frac{t}{2-\sin t} \, dt \right).$$

4. Найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x (\arctg t)^2 \, dt}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Указание. Воспользуйтесь правилом Лопиталья.

5. Пусть $f(x)$ — непрерывная, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — дифференцируемые функции. Докажите, что

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt \right) = f[\psi(x)] \psi'(x) - f[\varphi(x)] \varphi'(x).$$

6. Выразите

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\sqrt{x}}^{x^2} e^{t^2} dt \right)$$

7. Докажите, что любая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную (см. следствие 8.2).

8. Сформулируйте правило вычисления определенного интеграла (формула Ньютона–Лейбница) (см. теорему 8.2).

9. Вычислите

$$\text{а) } \int_{\pi/2}^{\pi} (2x + \cos x) dx; \quad \text{б) } \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^2 x}; \quad \text{в) } \int_{-1}^1 \frac{dx}{e^x}.$$

10. Сформулируйте правило замены переменной в определенном интеграле (см. теорему 8.3).

11. Вычислите

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$$

Указание. Сделайте замену переменной по формуле $t = \sqrt{e^x - 1}$.

12. Можно ли в интеграле $\int_0^3 x^2 \sqrt[3]{1-x^3} dx$ сделать замену $x = \sin t$?

13. Докажите, что для непрерывной на отрезке $[-a, a]$ функции $f(x)$ справедливы соотношения:

$$\text{а) } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \text{ если функция } f(x) \text{ четная;}$$

$$\text{б) } \int_{-a}^a f(x) dx = 0, \text{ если функция } f(x) \text{ нечетная.}$$

14. Сформулируйте правило интегрирования по частям для определенного интеграла (см. теорему 8.4).

15. Вычислите

$$\text{а) } \int_0^{\sqrt{3}} x \arctg x dx; \quad \text{б) } \int_1^2 x^2 e^{2x} dx; \quad \text{в) } \int_0^{\pi} e^x \sin x dx.$$

Ответы

$$3. \text{ а) } \sqrt[3]{1+x^3}; \quad \text{б) } \frac{x}{\sin x - 2}.$$

$$4. 0,25\pi^2.$$

6. $3x^2 e^{x^6} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} e^{\sqrt[3]{x^2}}.$

9. а) $0,75\pi^2 - 1$; б) $\sqrt{3}$; в) $e - e^{-1}$.

11. $2 - 0,5\pi$.

12. Нет, так как $\sin t \leq 1$ при любом $t \in \mathbb{R}$.

15. а) $\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}$; б) $2e^2 - e$; в) $(e^\pi + 1)/2$.

**ПРИЛОЖЕНИЯ
ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА
К ВЫЧИСЛЕНИЮ ПЛОЩАДЕЙ**

**§ 9.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР
В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ДЕКАРТОВЫХ
КООРДИНАТАХ**

Задача нахождения площади криволинейной трапеции рассматривалась в лекции № 7. Напомним, что криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком неотрицательной функции $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (см. рис. 7.1).

Если функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$, то, согласно геометрическому смыслу определенного интеграла (см. лекцию № 7), площадь S криволинейной трапеции вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (9.1)$$

Рассмотрим теперь фигуру D , ограниченную прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, где $f_1(x) \leq f_2(x)$ (рис. 9.1). Так как площадь S_D фигуры D равна разности площадей криволинейных трапеций, соответствующих функциям $f_1(x)$ и $f_2(x)$, то справедлива формула

$$S_D = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (9.2)$$

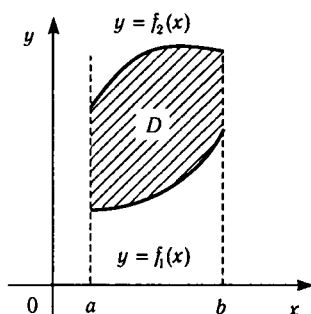


Рис. 9.1

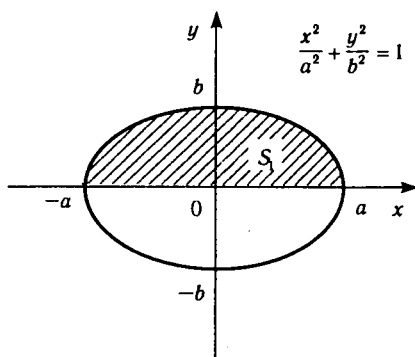


Рис. 9.2

ПРИМЕР 9.1. Найти площадь S фигуры, ограниченной эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Искомая площадь S равна $2S_1$, где S_1 — площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox и графиком функции $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ $-a \leq x \leq a$ (рис. 9.2). По формуле (9.1) находим

$$S = 2S_1 = 2 \frac{b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Для вычисления последнего интеграла сделаем замену переменной интегрирования по формуле $x = a \sin t$, $dx = a \cos t dt$. Пределы интегрирования по t определяются из уравнений $-a = a \sin t$, $a = a \sin t$. Можно считать, что $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} S &= 2 \frac{b}{a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt = 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \\ &= ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = ab \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \end{aligned}$$

$$= ab \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \pi ab.$$

Итак, площадь, ограниченная эллипсом с полуосями a и b равна $S = \pi ab$. В частности, полагая $a = b = R$, получаем площадь круга $S = \pi R^2$ с радиусом R .

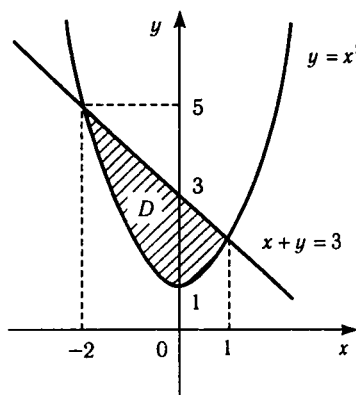


Рис. 9.3

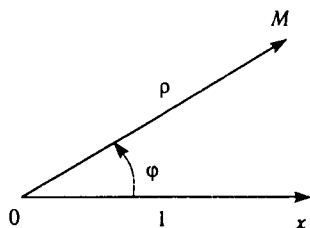


Рис. 9.4

ПРИМЕР 9.2. Найти площадь S_D фигуры D , ограниченной параболой $y = x^2 + 1$ и прямой $x + y = 3$ (рис. 9.3).

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = 3 - x, \end{cases}$$

находим абсциссы точек пересечения параболы и прямой: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

Полагая $f_1(x) = x^2 + 1$ и $f_2(x) = 3 - x$, на основании формулы (9.2) получаем

$$\begin{aligned} S_D &= \int_{-2}^1 ((3 - x) - (x^2 + 1)) dx = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx = \\ &= \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^1 = 2(1 + 2) - \frac{1 - 4}{2} - \frac{1 + 8}{3} = 6 + \frac{3}{2} - 3 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

§ 9.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

а) *Полярные координаты.* Основная идея метода координат состоит в том, что положение точки на плоскости однозначно определяется с помощью двух чисел, причем геометрический смысл этих чисел дает ту или иную систему координат. Наряду с прямоугольной системой координат, которая рассматривалась нами ранее, часто используется *полярная система координат*.

Возьмем на плоскости точку O , которую назовем *полюсом*. Проведем из полюса O направленную полупрямую Ox , называемую *полярной осью* (рис. 9.4) и выберем масштаб для измерения длин.

Пусть M — произвольная точка плоскости. Соединим точку M с полюсом O отрезком OM .

Определение 9.1. Длина отрезка $OM = r$ называется *полярным радиусом* точки M , а угол $\angle xOM = \varphi$ между полярной осью и вектором $\vec{OM}$, отсчитываемый против хода часовой стрелки, называется *полярным углом* точки M . *Полярными координатами* точки M называются ее полярный радиус r и полярный угол φ .

Если точка M имеет полярные координаты r и φ , то пишут $M(r, \varphi)$, причем сначала указывается полярный радиус r , а затем полярный угол φ . При этом r принимает лишь неотрицательные значения, т. е. $0 \leq r < +\infty$, а φ изменяется в пределах, соответствующих полному обороту: например, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

В некоторых задачах приходится рассматривать углы, бóльшие 2π , а также отрицательные углы.

б) *Связь между прямоугольными и полярными координатами.* Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy и пусть полюс O полярной системы координат совпадает с началом прямоугольной системы координат, а полярная ось является положительной полуосью Ox (рис. 9.5). Тогда для произвольной точки M с прямоугольными координатами x, y и полярными координатами r, φ имеем

$$OA = x, AM = y, OM = r, \angle xOM = \varphi,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} OA &= OM \cos \varphi, \quad AM = OM \sin \varphi \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \end{aligned}$$

Итак, прямоугольные координаты точки выражаются через ее полярные координаты по формулам:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi \quad (\rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi). \end{cases} \quad (9.3)$$

Зная прямоугольные координаты x, y точки M , можно найти ее полярные координаты ρ, φ с помощью формул:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

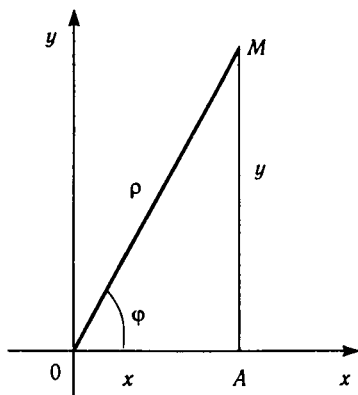


Рис. 9.5

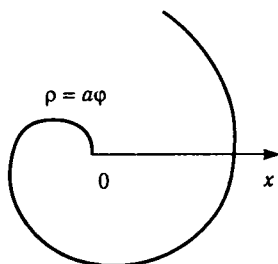


Рис. 9.6

ПРИМЕР 9.3. Записать уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$ в полярных координатах.

Используя формулы (9.3), получаем

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = R^2 &\Leftrightarrow \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \\ &= R^2 \Leftrightarrow \rho^2 = R^2 \Leftrightarrow \rho = R. \end{aligned}$$

Таким образом, окружность радиуса R с центром в полюсе в полярной системе координат задается уравнением $\rho = R$ ($0 \leq \varphi < 2\pi$).

ПРИМЕР 9.4. Построить кривую, заданную в полярных координатах уравнением $\rho = a\varphi$, где a — некоторое положительное число (эту кривую называют *спиралью Архимеда*).

Используя уравнение кривой, составим таблицу соответственных значений φ и ρ :

φ	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	...
ρ	0	$\frac{1}{4}\pi a$	$\frac{1}{2}\pi a$	πa	$\frac{3}{2}\pi a$	$2\pi a$	$\frac{5}{2}\pi a$	...

Через полюс O проводим лучи, образующие с полярной осью углы, указанные в первой строке таблицы. На каждом луче отмечаем точку, удаленную от полюса на расстояние, указанное во второй строке таблицы. Соединяя эти точки непрерывной линией, получаем требуемую кривую (рис. 9.6).

в) **Площадь в полярных координатах.** Пусть кривая Γ задана в полярной системе координат уравнением

$$\rho = f(\varphi), \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta.$$

Тогда плоскую фигуру G , ограниченную кривой Γ и отрезками двух лучей, составляющих с полярной осью углы α и β (рис. 9.7), назовем *криволинейным сектором*.

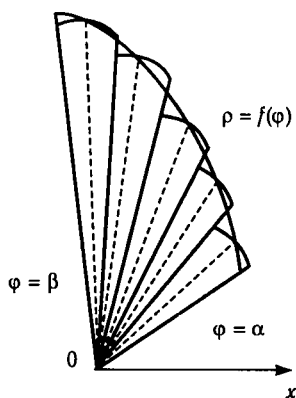


Рис. 9.7

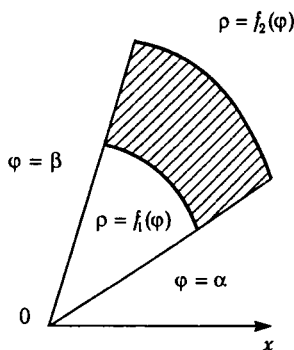


Рис. 9.8

Теорема 9.1. Если $f(\varphi)$ — неотрицательная непрерывная на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция, то площадь S криволинейного сектора G , ограниченного кривой $\rho = f(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $\alpha < \beta$, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi. \quad (9.4)$$

Доказательство. Разобьем отрезок $[\alpha, \beta]$ на n частей точками

$$\varphi_0 = \alpha < \varphi_1 < \dots < \varphi_{k-1} < \varphi_k < \dots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta.$$

На каждом из отрезков $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$ выберем точку ξ_k ($k = 1, \dots, n$). Лучами $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2, \dots, \varphi = \varphi_{n-1}$ данный криволинейный сектор разбивается на n узких секторов $G_1, G_2, \dots, G_n$, каждый из которых мы заменим круговым сектором (рис. 9.7). При этом сектор G_k , ограниченный лучами $\varphi = \varphi_{k-1}, \varphi = \varphi_k$ заменяется сектором круга с радиусом $\rho_k = f(\xi_k)$ и углом $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$ ($k = 1, \dots, n$).

Так как площадь сектора круга с радиусом R и центральным углом ω вычисляется по формуле

$$S_{\text{сект}} = \frac{1}{2} R^2 \omega$$

то площадь S_n полученной веерообразной фигуры, составленной из круговых секторов, выражается формулой

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \rho_k^2 \Delta\varphi_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} f^2(\xi_k) \Delta\varphi_k. \quad (9.5)$$

Будем считать, что площадь S данного криволинейного сектора равна пределу площадей (9.5) при $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta\varphi_k \rightarrow 0$, т. е.

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} f^2(\xi_k) \Delta\varphi_k. \quad (9.6)$$

Заметим, что участвующие в соотношении (9.6) суммы совпадают с интегральными суммами функции $\frac{1}{2} f^2(\varphi)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$. Так как из непрерывности $f(\varphi)$ на $[\alpha, \beta]$ вытекает непрерывность функции $\frac{1}{2} f^2(\varphi)$ на указанном отрезке,

то по теореме 7.2 лекции № 7 предел в (9.6) существует и равен определенному интегралу от $\frac{1}{2}f^2(\varphi)$ по отрезку $[\alpha, \beta]$.

Следовательно,

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} f^2(\varphi) d\varphi,$$

т. е. формула (9.4) справедлива.

Замечание. Пусть фигура ограничена кривыми, заданными в полярной системе координат уравнениями $\rho = f_1(\varphi)$, $\rho = f_2(\varphi)$, $0 \leq f_1(\varphi) \leq f_2(\varphi)$, и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $\alpha < \beta$ (рис. 9.8). Тогда площадь S этой фигуры равна разности площадей двух криволинейных секторов и может быть найдена по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f_2^2(\varphi) - f_1^2(\varphi)) d\varphi. \quad (9.7)$$

ПРИМЕР 9.5. Найти площадь фигуры, ограниченной спиралью Архимеда $\rho = a\varphi$, где a — некоторое положительное число, и лучом $\varphi = \frac{3}{2}\pi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{3}{2}\pi$ (см. рис. 9.9).

Используя формулу (9.4), получаем

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{(3/2)\pi} \rho^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{(3/2)\pi} (a\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{(3/2)\pi} \varphi^2 d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\varphi^3}{3} \Big|_0^{(3/2)\pi} = \frac{9a^2}{16}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 9.6. Найти площадь фигуры, ограниченной окружностью $\rho = 3$ и кардиоидой $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$ (вне кардиоды).

Кривая $\rho = 3$ — это окружность радиуса 3 с центром в полюсе O (см. пример 9.3).

Для построения кривой $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$ составим таблицу соответственных значений φ и ρ :

φ	0	$\pm \frac{1}{6}\pi$	$\pm \frac{1}{3}\pi$	$\pm \frac{1}{2}\pi$	$\pm \frac{2}{3}\pi$	$\pm \frac{5}{6}\pi$	$\pm \pi$
ρ	0	$2 - \sqrt{3}$	1	2	3	$2 + \sqrt{3}$	4

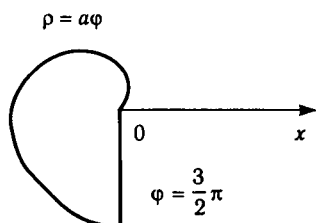


Рис. 9.9

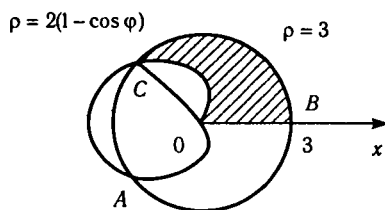


Рис. 9.10

Отмечаем на чертеже точки, с полярными координатами ρ и φ , указанными в таблице, и соединяем эти точки непрерывной кривой (рис. 9.10).

Для нахождения полярных координат точек A и C пересечения окружности и кардиоиды решаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \rho = 3, \\ \rho = 2(1 - \cos \varphi) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 3, \\ 3 = 2(1 - \cos \varphi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 3, \\ \cos \varphi = -1/2 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \rho = 3, \\ \varphi = \pm(2/3)\pi \end{cases}. \end{aligned}$$

Следовательно, $A(3; -\frac{2}{3}\pi)$; $C(3; \frac{2}{3}\pi)$.

Требуется вычислить площадь фигуры $ABCOA$, которая равна удвоенной площади фигуры $OBCO$. Так как фигура $OBCO$ ограничена кривыми $\rho = 3$, $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$ и лучами $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{2}{3}\pi$, то, используя формулу (9.7), получаем

$$\begin{aligned} S &= 2S_{OBCO} = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{(2/3)\pi} [3^2 - 4(1 - \cos \varphi)^2] d\varphi = \\ &= \int_0^{(2/3)\pi} \left(5 + 8 \cos \varphi - 4 \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = \\ &= \int_0^{(2/3)\pi} (3 + 8 \cos \varphi - 2 \cos 2\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

$$= (3\varphi + 8\sin\varphi - \sin 2\varphi) \Big|_0^{(2/3)\pi} = 2\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Контрольные вопросы

1. Как вычисляется площадь криволинейной трапеции? (см. формулу (9.1)).
2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = \ln x$ и прямыми $x = e$, $y = 0$.
3. Найти площадь, ограниченную эллипсом $25x^2 + 9y^2 = 225$ (см. пример 9.1).
4. Как найти площадь фигуры D , ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, где $f_1(x) \leq f_2(x)$? (см. формулу (9.2)).
5. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = e^x$, $y = e^{-x}$ и прямой $x = 1$.
6. Сформулируйте определение полярной системы координат и полярных координат точки (см. определение 9.1).
7. Как связаны между собой прямоугольные и полярные координаты? Зная прямоугольные координаты точки $M(3; \sqrt{3})$, найти ее полярные координаты; зная полярные координаты точки $M(3; \frac{2}{3}\pi)$, найти ее прямоугольные координаты.
8. Записать уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$ в полярных координатах (см. пример 9.3).
9. Как найти площадь криволинейного сектора в полярных координатах? (см. теорему 9.1).
10. Найти площадь части плоскости, ограниченной кардиоидой $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$ (см. пример 9.6 и формулу (9.4)).
11. Как найти площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярной системе координат уравнениями $\rho = f_1(\varphi)$, $\rho = f_2(\varphi)$, $0 \leq f_1(\varphi) \leq f_2(\varphi)$, и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $\alpha < \beta$ (см. формулу (9.7)).
12. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными следующими уравнениями в полярных координатах: $\rho = 2\sin 2\varphi$; $\rho = \sqrt{3}(\rho \geq \sqrt{3})$.

Ответы

2. 1. $5. e + e^{-1} - 2$
7. Точка $M(3; \sqrt{3})$ имеет полярные координаты $\rho = 2\sqrt{3}$, $\varphi = \pi/6$, а точка $M(4; \frac{2}{3}\pi)$ — прямоугольные координаты $x = -2$, $y = 2\sqrt{3}$.
10. 6π .
12. $\frac{3\sqrt{3} - \pi}{24}$.

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА К ВЫЧИСЛЕНИЮ ДЛИН ДУГ КРИВЫХ И ОБЪЕКТОВ ТЕЛ

§ 10.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ДУГИ КРИВОЙ

В элементарной математике измерение длин определено лишь для отрезков прямых, а также для окружности и ее частей. Дадим понятие длины дуги произвольной кривой и укажем способ ее вычисления.

Пусть дана некоторая кривая Γ_{AB} (рис. 10.1). Разобьем ее на n частей точками $M_0 = A, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n = B$.

Рассмотрим вписанную ломаную $M_0 M_1 \dots M_{n-1} M_n$, вершинами которой являются точки кривой, и обозначим через Π_n периметр этой ломаной, а через Λ — длину наибольшего звена ломаной:

$$\Pi_n = \sum_{k=1}^n M_{k-1} M_k; \quad \Lambda = \max \{M_0 M_1; M_1 M_2; \dots; M_{n-1} M_n\}.$$

Если $\Lambda \rightarrow 0$, то длина каждого звена ломаной уменьшается, а их число n стремится к бесконечности.

Определение 10.1. Если существует предел периметра Π_n вписанной в кривую Γ_{AB} ломаной при $\Lambda \rightarrow 0$ и этот предел не зависит от способа разбиения кривой на части, то указанный предел называется *длиной дуги кривой* Γ_{AB} и обозначается s . Кривая, имеющая длину, называется *спрямляемой*.

Итак, по определению имеем:

$$s = \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \Pi_n = \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n M_{k-1} M_k. \quad (10.1)$$

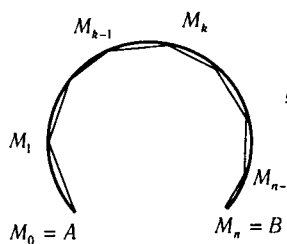


Рис. 10.1

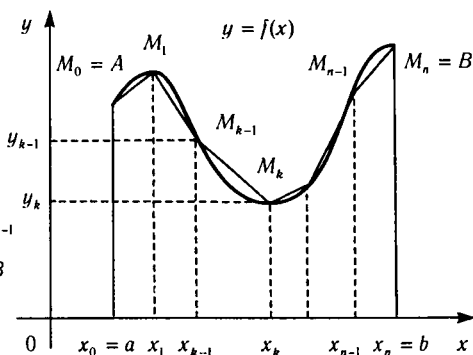


Рис. 10.2

Теорема 10.1. Если кривая Γ_{AB} задана в прямоугольных координатах уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, причем $f'(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то кривая Γ_{AB} спрямляема и ее длина s вычисляется по формуле

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (10.2)$$

Доказательство. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ (рис. 10.2) и рассмотрим соответствующие им точки данной кривой:

$$M_0(x_0; y_0), M_1(x_1; y_1), \dots, M_{k-1}(x_{k-1}; y_{k-1}), M_k(x_k; y_k), \dots, M_{n-1}(x_{n-1}; y_{n-1}), M_n(x_n; y_n),$$

где $y_k = f(x_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Построим вписанную ломаную, вершинами которой являются указанные точки, и найдем длины звеньев ломаной:

$$M_{k-1}M_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (10.3)$$

По теореме Лагранжа

$$y_k - y_{k-1} = f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \quad (10.4)$$

где ξ_k — некоторая точка отрезка $[x_{k-1}, x_k]$.

Полагая $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, из (8.3) и (8.4) получаем

$$M_{k-1}M_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f'(\xi_k)\Delta x_k]^2} = \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k \quad (10.5)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n).$$

Пусть

$$\lambda = \max \{\Delta x_0; \Delta x_1; \dots; \Delta x_n\},$$

$$\Lambda = \max \{M_0M_1; M_1M_2; \dots; M_{n-1}M_n\}.$$

Тогда (10.5), если $\Lambda \rightarrow 0$, то и $\lambda \rightarrow 0$, поэтому из определения длины кривой (см. (10.1)) и соотношений (10.5) имеем

$$s = \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n M_{k-1}M_k = \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k. \quad (10.6)$$

Заметим, что сумма, входящая в правую часть формулы (10.6), является интегральной суммой для функции $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ на отрезке $[a, b]$. Из непрерывности производной $f'(x)$ следует непрерывность, а значит и интегрируемость функции $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ на $[a, b]$. Следовательно, предел интегральных сумм (10.6) существует и равен определенному интегралу от $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ по отрезку $[a, b]$, т. е.

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Итак, данная кривая Γ_{AB} имеет длину s (а значит кривая спрямляема) и формула (10.2) справедлива. Теорема 8.1 доказана.

ПРИМЕР 10.1. Найти длину кривой $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ от начала координат до точки $(3; 2\sqrt{3})$.

Так как $f(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$, $0 \leq x \leq 3$ и $f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} = \sqrt{x}$,

то, используя формулу (10.2), получаем

$$\begin{aligned} s &= \int_0^3 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_0^3 \sqrt{1 + x} dx = \\ &= \frac{2}{3}(1 + x)^{3/2} \Big|_0^3 = \frac{2}{3}(2^3 - 1) = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

Теорема 10.2. Пусть кривая Γ_{AB} задана в параметрической форме уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_0 \leq t \leq T$, причем функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ на отрезке $[t_0, T]$. Тогда кривая Γ_{AB} спрямляема и ее длина s вычисляется по формуле

$$s = \int_{t_0}^T \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt,$$

или, в других обозначениях,

$$s = \int_{t_0}^T \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \quad (10.7)$$

Доказательство. Проведем рассуждения для случая, когда $\psi'(t) \neq 0$, $t \in [t_0, T]$. Будем предполагать, что $\varphi'(t) > 0$ (если $\varphi'(t) < 0$, то доказательство проводится аналогично). Тогда функция $x = \varphi(t)$ является непрерывной и строго возрастающей на отрезке $[t_0, T]$. Следовательно, на отрезке $[a, b]$, где $a = \varphi(t_0)$, $b = \varphi(T)$, существует обратная функция $t = \Phi(x)$. Поэтому уравнения $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ задают параметрически функцию $y = f(x) = \psi(\Phi(x))$, производная которой находится по правилу дифференцирования функций, заданных параметрически: $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

Далее воспользуемся формулой (10.2) и сделаем замену переменной $x = \varphi(t)$:

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{t_0}^T \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2} \varphi'(t) dt = \\ &= \int_{t_0}^T \frac{\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}}{\varphi'(t)} \varphi'(t) dt = \int_{t_0}^T \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \end{aligned}$$

Теорема 10.2 доказана.

ПРИМЕР 10.2. Найти длину дуги кривой, заданной параметрически уравнениями $x = R(t - \sin t)$, $y = R(1 - \cos t)$, $0 < t \leq 2\pi$ (эту кривую называют *циклоидой*; можно показать, что такую кривую описывает точка окружности радиуса R , катящейся без скольжения по прямой линии).

Для построения графика циклоиды составим таблицу значений x и y для некоторых значений t из отрезка $[0, 2\pi]$.

t	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
x	0	$R(\frac{1}{2}\pi - 1)$	πR	$R(\frac{3}{2}\pi + 1)$	$2\pi R$
y	0	R	$2R$	R	0

Нанося точки с соответствующими координатами (x, y) на плоскость Oxy и соединяя их линией, получаем искомую кривую (рис. 10.3). Для нахождения ее длины s воспользуемся формулой (10.7). Так как

$$\begin{aligned} x'(t) &= R(t - \sin t)' = R(1 - \cos t); & y'(t) &= R(1 - \cos t)' = R \sin t; \\ [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 &= R^2(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = \\ &= R(2 - 2 \cos t) = 4R^2 \sin^2 \frac{t}{2}, \end{aligned}$$

то

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4R^2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = \int_0^{2\pi} 2R \sin \frac{t}{2} dt = -4R \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8R.$$

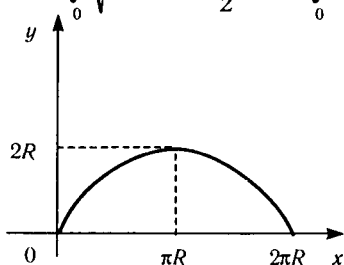


Рис. 10.3

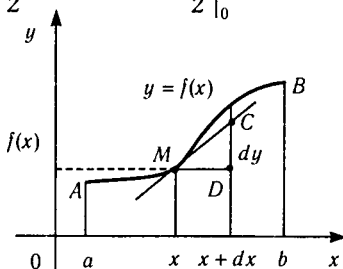


Рис. 10.4

Теорема 10.3. Пусть кривая Γ_{AB} задана в полярных координатах уравнением $\rho = f(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, причем функция $f(\varphi)$ имеет непрерывную производную $f'(\varphi)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда кривая Γ_{AB} спрямляема и ее длина s вычисляется по формуле

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f^2(\varphi) + [f'(\varphi)]^2} d\varphi,$$

или, в других обозначениях,

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi. \quad (10.8)$$

Доказательство. Используя связь между полярными и прямоугольными координатами (см. формулы (9.3)), представим данную кривую Γ_{AB} уравнениями в параметрической форме (считая φ параметром):

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi = f(\varphi) \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi = f(\varphi) \sin \varphi, \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta. \end{cases}$$

Найдя производные от x и y по φ

$$x'(\varphi) = f'(\varphi) \cos \varphi - f(\varphi) \sin \varphi; y'(\varphi) = f'(\varphi) \sin \varphi + f(\varphi) \cos \varphi,$$

имеем

$$\begin{aligned} [x'(\varphi)]^2 + [y'(\varphi)]^2 &= \\ &= [f'(\varphi)]^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + f^2(\varphi) (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \\ &= [f'(\varphi)]^2 + f^2(\varphi). \end{aligned}$$

Поэтому, используя формулу (10.7), получаем

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(\varphi)]^2 + [y'(\varphi)]^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f^2(\varphi) + [f'(\varphi)]^2} dt.$$

Теорема 10.3 доказана.

ПРИМЕР 10.3. Найти длину s кардиоиды $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$ (см. рис. 9.10).

Используя уравнение кардиоиды, находим

$$\rho' = 2(1 - \cos \varphi)' = 2 \sin \varphi;$$

$$\rho^2 + \rho'^2 = 4(1 - \cos \varphi)^2 + 4 \sin^2 \varphi = 4(2 - 2 \cos \varphi) = 16 \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Учитывая, что кривая симметрична относительно полярной оси, по формуле (10.8) получаем

$$\begin{aligned}
 s &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \, d\varphi = \\
 &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{16 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \, d\varphi = 2 \int_0^{\pi} 4 \sin \frac{\varphi}{2} \, d\varphi = -16 \cos \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 16.
 \end{aligned}$$

Пусть кривая Γ_{AB} задана в прямоугольных координатах уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, причем ее производная $f'(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим дугу Γ_{AM} данной кривой от точки A до переменной точки $M(x, f(x))$ (рис. 10.4). Длина этой дуги будет функцией x и, согласно (10.2), выражается формулой

$$s = s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(z)]^2} \, dz.$$

Так как подынтегральная функция последнего интеграла непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по теореме о производной определенного интеграла по верхнему пределу имеем

$$\frac{ds}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\int_a^x \sqrt{1 + [f'(z)]^2} \, dz \right) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}.$$

Зная производную функции $s = s(x)$, находим ее дифференциал:

$$\begin{aligned}
 ds &= s'(x) \, dx = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx = \sqrt{(dx)^2 + [f'(x) \, dx]^2} = \\
 &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.
 \end{aligned}$$

Итак, дифференциал ds длины дуги кривой выражается формулой

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}, \quad (10.9)$$

где $dx = \Delta x$ — приращение аргумента а $dy = f'(x) \, dx$ — дифференциал функции.

Формула (10.9) позволяет установить *геометрический смысл дифференциала длины дуги*. Для этого проведем касательную к кривой Γ_{AB} в точке $M(x, f(x))$ (см. рис. 10.4). Из геометрического смысла дифференциала функции $y = f(x)$ следует, что при изменении абсциссы на $dx = MD$ ордината точки касательной изменится на величину, равную дифференциалу функции, т. е. на $dy = CD$. Следова-

тельно, из прямоугольного треугольника MCD по теореме Пифагора получаем

$$MC = \sqrt{MD^2 + CD^2} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}. \quad (10.10)$$

Сравнивая (10.9) и (10.10), делаем вывод, что $ds = MC$, т. е. *дифференциал длины дуги кривой равен длине отрезка касательной от точки касания $M(x, f(x))$ до точки с абсциссой $x + dx$.*

Замечание. Аналогично доказывается, что если кривая Γ_{AB} задана параметрически уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ или задана уравнением $\rho = f(\varphi)$ в полярных координатах, то дифференциал длины дуги выражается формулами $dx = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$ и $ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi$, соответственно.

§ 10.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ

Пусть некоторое тело T расположено между параллельными плоскостями $x = a$, $x = b$ (рис. 10.5) и пусть известна площадь $S = S(x)$ любого его поперечного сечения плоскостью, перпендикулярной оси Ox в точке с абсциссой x .

Можно доказать, что *если функция $S = S(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то объем V тела T вычисляется по формуле*

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (10.11)$$

ПРИМЕР 10.4. Найти объем эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Полуоси данного эллипсоида — величины a , b , c . Сечением эллипсоида плоскостью, перпендикулярной оси Ox в точке с абсциссой x , $-a < x < a$, является эллипс (рис. 10.6), определяемый уравнениями

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}, \\ x = \text{const} \end{cases}, \Leftrightarrow$$

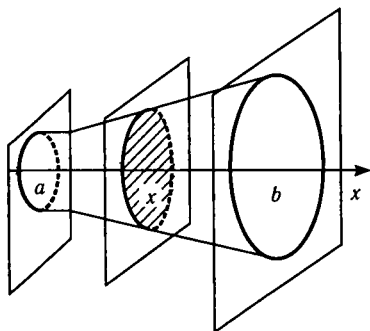


Рис. 10.5

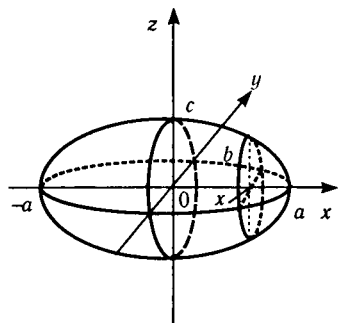


Рис. 10.6

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y^2}{b^2(1 - x^2/a^2)} + \frac{z^2}{c^2(1 - x^2/a^2)} = 1, \\ x = \text{const}, \quad -a < x < a. \end{cases} \quad (10.12)$$

Известно (см. пример 9.1), что если α и β — полуоси эллипса, то ограниченная им площадь равна $S = \pi\alpha\beta$. Поскольку $\alpha = \sqrt{b^2(1 - x^2/a^2)}$, $\beta = \sqrt{c^2(1 - x^2/a^2)}$ — полуоси эллипса (10.12), то ограниченная им площадь равна $S = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, $-a < x < a$.

Зная площади поперечных сечений эллипса, по формуле (10.11) находим его объем:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^a S(x) dx = \int_{-a}^a \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_{-a}^a = \\ &= \pi bc \left(a - \frac{a}{3} + a - \frac{a}{3}\right) = \frac{4}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

Итак, объем эллипсоида с полуосями a , b , c равен $V = \frac{4}{3} \pi abc$. В частности, полагая $a = b = c = R$, получаем объем шара $S = \frac{4}{3} \pi R^3$ с радиусом R .

Пусть тело T образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$ и прямыми $x = a, x = b, y = 0$ (рис. 10.7). Тогда сечением тела T плоскостью, перпендикулярной оси Ox в точке с абсциссой $x, a \leq x \leq b$, является круг с радиусом $y = f(x)$. Следовательно, зная площади поперечных сечений $S = \pi y^2 = \pi f^2(x), a \leq x \leq b$, по формуле (10.11) находим объем тела вращения

$$V_x = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \pi f^2(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Таким образом, объем тела T , образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$ и прямыми $x = a, x = b, y = 0$, вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (10.13)$$

Замечание. Можно доказать, что объем тела T , образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$ и прямыми $x = a, x = b, y = 0$, вычисляется по формуле

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx. \quad (10.14)$$

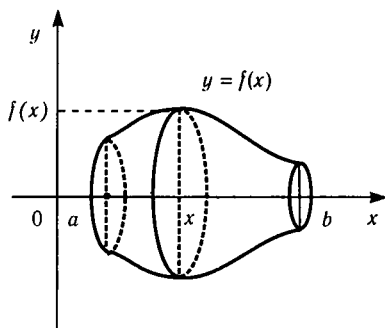


Рис. 10.7

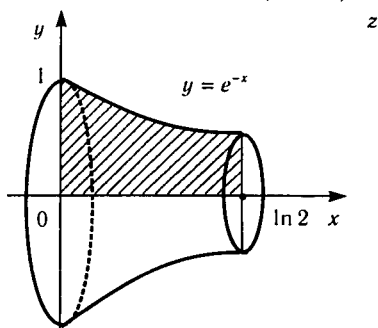


Рис. 10.8

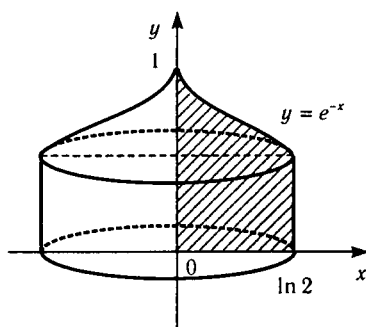


Рис. 10.9

ПРИМЕР 10.5. Найти объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = e^{-x}$, $x = 0$, $x = \ln 2$, $y = 0$ а) вокруг оси Ox (см. рис. 10.8); б) вокруг оси Oy (рис. 10.9).

а) Используя формулу (10.13), получаем

$$V_x = \pi \int_0^{\ln 2} f^2(x) dx =$$

$$= \pi \int_0^{\ln 2} e^{-2x} dx = -\frac{\pi}{2} e^{-2x} \Big|_0^{\ln 2} = \frac{\pi}{2} e^{-2 \ln 2} + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}.$$

б) Для нахождения объема тела, образованного вращением вокруг оси Oy данной криволинейной трапеции (рис. 10.9), воспользуемся формулой (10.14):

$$V_y = 2\pi \int_0^{\ln 2} x f(x) dx = 2\pi \int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx.$$

Для вычисления последнего интеграла применим формулу интегрирования по частям в определенном интеграле (см. теорему 8.4).

Положим $u = x$, $dv = e^{-x} dx$; тогда $du = dx$, $v = -e^{-x} dx$. Следовательно,

$$V_y = 2\pi \int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx = 2\pi \left(-x e^{-x} \Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} e^{-x} dx \right) =$$

$$= 2\pi \left(-\frac{\ln 2}{2} - e^{-x} \Big|_0^{\ln 2} \right) = 2\pi \left(-\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} + 1 \right) = \pi(1 - \ln 2).$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение длины дуги кривой. Какая кривая называется спрямляемой? (см. определение 10.1).

2. Можно ли в определении длины дуги кривой условие $\Lambda \rightarrow 0$ заменить условием $n \rightarrow +\infty$?

3. Какие условия достаточно наложить на функцию $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, чтобы кривая, заданная в прямоугольных координатах уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, была спрямляемой? Как найти длину этой кривой? (см. теорему 10.1).

4. Найти длину дуги цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, концы которой имеют абсциссы $x = 0$ и $x = a$.

5. Сформулировать условия, при которых кривая, заданная в параметрической форме уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_0 \leq t \leq T$, спрямляема. Как найти длину этой кривой? (см. теорему 10.2).

6. Записать уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$ в параметрической форме. Используя теорему 10.2, вычислить длину этой окружности.

7. Сформулировать условия, при которых кривая, заданная в полярных координатах уравнением $\rho = f(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, спрямляема. Как найти длину этой кривой? (см. теорему 10.3).

8. Найти длину первых двух витков спирали Архимеда $\rho = a\varphi$.

9. Как выражается дифференциал длины дуги кривой в прямоугольных координатах? Сформулировать геометрический смысл дифференциала длины дуги кривой.

10. Как найти объем тела T , расположенного между параллельными плоскостями $x = a$, $x = b$, зная площадь $S = S(x)$ любого его поперечного сечения плоскостью, перпендикулярной оси Ox в точке с абсциссой x ? (см. формулу (10.11)).

11. Вычислить объем эллипсоида $x^2 + 36y^2 + 100z^2 = 3600$ (см. пример 8.4).

12. Как найти объем тела T , образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$? (см. формулу (10.13)).

13. Найти объем тела T , образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиком функции $y = 2x - x^2$ и прямой $y = 0$.

14. Как найти объем тела T , образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$? (см. формулу (10.14)).

15. Найти объем тела T , образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) и прямой $y = 0$.

Ответы

4. $a \operatorname{sh} 1$. 8. $2\pi a \sqrt{1+16\pi^2} + a \ln \sqrt{4\pi + \sqrt{1+16\pi^2}}$. 13. $\frac{16}{15}\pi$. 15. π .

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

На предыдущих лекциях определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ рассматривался на отрезках $[a, b]$ определенной длины $b - a < +\infty$, причем необходимым условием интегрируемости являлась ограниченность подынтегральной функции $f(x)$ на $[a, b]$.

В этой лекции понятие интеграла будет распространено на такие случаи:

- 1) промежуток интегрирования бесконечен;
- 2) подынтегральная функция неограничена на отрезке интегрирования.

§ 11.1. НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

С БЕСКОНЕЧНЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Пусть функция $f(x)$ определена на бесконечном промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема на отрезке $[a, b]$ при любом $b > a$.

Несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом называется предел определенного интеграла

$$\int_a^b f(x) dx \text{ при } b \rightarrow +\infty.$$

Обозначение: $\int_a^{+\infty} f(x) dx$. Итак,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (11.1)$$

Если существует конечный предел в правой части равенства (11.1), то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называется *сходящимся*. Если предел в правой части равенства (11.1) не существует (или равен бесконечности), то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называется *расходящимся*.

Аналогично определяется *несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом*:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

(предполагается, что функция $f(x)$ определена на бесконечном промежутке $-\infty, b]$ и интегрируема на отрезке $[a, b]$ при любом $a < b$).

Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой оси $(-\infty, +\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b]$. Тогда несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ определяется следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) dx.$$

При этом интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ называется *сходящимся* в случае существования конечного предела, причем этот предел не должен зависеть от того, каким образом a и b стремятся соответственно к $-\infty$ и к $+\infty$.

ПРИМЕР 11.1. Показать, что интеграл $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$ сходится, и вычислить этот интеграл.

Используя определение интеграла с бесконечным верхним пределом, вычисляем:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x^2} d(-x^2) = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-x^2} \Big|_0^b = -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^{-b^2} - 1) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Итак, данный интеграл сходится, причем $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = 0,5$.

ПРИМЕР 11.2. Показать, что интеграл $\int_{-\infty}^{\pi} \cos x \, dx$ рас-
ходится.

Используя определение интеграла с бесконечным нижним пределом, вычисляем:

$$\int_{-\infty}^{\pi} \cos x \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{\pi} \cos x \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \sin x \Big|_a^{\pi} = -\lim_{a \rightarrow -\infty} \sin a.$$

Так как последний предел не существует, то данный интеграл расходится.

ПРИМЕР 11.3. Показать, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 20}$ сходится, и вычислить этот интеграл.

Так как

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{dx}{x^2 + 4x + 20} &= \int_a^b \frac{d(x+2)}{(x+2)^2 + 16} = \\ &= \frac{1}{4} \left(\operatorname{arctg} \frac{b+2}{4} - \operatorname{arctg} \frac{a+2}{4} \right)\end{aligned}$$

то, используя определение интеграла с бесконечными верхним и нижним пределами, вычисляем:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 20} &= \frac{1}{4} \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \left(\operatorname{arctg} \frac{b+2}{4} - \operatorname{arctg} \frac{a+2}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Итак, данный интеграл сходится и равен $0,25\pi$.

Важные примеры сходящихся и расходящихся интегралов содержатся в следующей теореме.

Теорема 11.1. Пусть $a > 0$ и α — произвольное действительное число. Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при любом $a > 0$ и расходится при любом $\alpha \leq 1$.

Доказательство. Используя определение интеграла с бесконечным верхним пределом, имеем:

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_a^b & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_a^b & \text{при } \alpha = 1 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \text{при } \alpha > 1, \\ \infty & \text{при } \alpha \leq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

откуда и вытекает требуемое утверждение.

§ 11.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Пусть $f(x)$ — непрерывная неотрицательная на промежутке $[a, +\infty)$ функция.

Площадью S бесконечной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x) \geq 0$ и прямыми $x = a$ и $y = 0$, называется предел площади криволинейной трапеции $aABb$ (см. рис. 11.1) при $b \rightarrow +\infty$ (если указанный предел существует).

Итак, по определению имеем:

$$S = \lim_{b \rightarrow +\infty} S_{aABb}. \quad (11.2)$$

Так как, согласно геометрическому смыслу определенного интеграла, $S_{aABb} = \int_a^b f(x) dx$, то из (11.2) следует, что

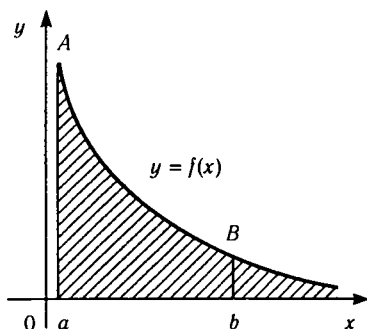


Рис. 11.1

$$S = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Таким образом, *сходящийся несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом интегрирования от неотрицательной функции равен площади бесконечной трапеции*. Аналогичный геометрический смысл имеют несобственные интегралы с

бесконечными нижним и верхним пределами интегрирования.

§ 11.3. СВОЙСТВА И ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Ограничимся случаем бесконечного верхнего предела интегрирования (в других случаях свойства аналогичны).

Свойство 11.1. Если $a_1 > a$, то несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_{a_1}^{+\infty} f(x) dx$ оба сходятся или оба расходятся.

Свойство 11.2 (линейность).

а) $\int_a^{+\infty} \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x) dx$, α — произвольное действительное число;

$$\text{б) } \int_a^{+\infty} (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int_a^{+\infty} f_1(x) dx + \int_a^{+\infty} f_2(x) dx$$

(в предположении, что каждый из несобственных интегралов, стоящих в правых частях указанных равенств, сходится).

Свойство 11.3 (аналог формулы Ньютона—Лейбница). Если $F(x)$ — какая-либо первообразная непрерывной

на бесконечном промежутке $[a, +\infty)$ функции $f(x)$, то справедлива формула

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(a) \equiv F(x) \Big|_a^{+\infty}, \quad (11.3)$$

где $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. Равенство (11.3) следует понимать так: либо левая и правая его части имеют смысл и тогда (11.3) справедливо, либо обе части равенства (11.3) не имеют смысла.

Доказательство свойств 11.1–11.3 проводится с помощью определения несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом интегрирования. Докажем, например, свойство 11.3. Используя определение несобственного интеграла и формулу Ньютона–Лейбница для определенного интеграла, имеем

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (F(b) - F(a)) = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - F(a) = F(+\infty) - F(a). \end{aligned}$$

Следовательно, формула (11.3) справедлива.

Теорема 11.2 (интегрирование по частям в несобственном интеграле). Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ определены и непрерывны вместе со своими производными первого порядка во всех точках промежутка $[a, +\infty)$. Если существует конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x)$$

и интеграл $\int_a^{+\infty} v du$ сходится, то и интеграл $\int_a^{+\infty} u dv$ сходится и справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^{+\infty} u dv = u(x)v(x) \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v du.$$

Доказательство непосредственно следует из определения несобственного интеграла и формулы интегрирования по частям в определенном интеграле.

§ 11.4. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ОТ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ. ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ

Сходимость или расходимость несобственных интегралов от неотрицательных функций часто устанавливается с помощью следующих теорем.

Теорема 11.3 (первая теорема сравнения). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на промежутке $[a, +\infty)$ и при всех $x \geq a$ выполняется неравенство

$$0 \leq f(x) \leq \varphi(x). \quad (11.4)$$

Тогда

а) если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ сходится, то и несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ тоже сходится;

б) если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится, то и несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ тоже расходится.

Доказательство. а) Пусть несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ сходится. Для доказательства сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ воспользуемся следующим достаточным

признаком существования предела функции: *монотонная и ограниченная на промежутке $[a, +\infty)$ функция $\Phi(b)$ имеет предел при $b \rightarrow +\infty$.*

Рассмотрим функцию $\Phi(b) = \int_a^b f(x) dx$. Пусть $b_2 \geq b_1 \geq a$.

Тогда, поскольку $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \geq 0$, то

$$\Phi(b_2) = \int_a^{b_2} f(x) dx = \int_a^{b_1} f(x) dx + \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \geq \int_a^{b_1} f(x) dx = \Phi(b_1).$$

Следовательно, $\Phi(b_2) \geq \Phi(b_1)$ и функция $\Phi(b)$ монотонно возрастает на $[a, +\infty)$.

Кроме того, используя соотношение (11.4), получаем:

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx = \text{const}.$$

Таким образом, функция $\Phi(b)$ монотонно возрастает и ограничена на $[a, +\infty)$, следовательно, предел

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \Phi(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

существует, т. е. несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится.

б) Пусть несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится.

Докажем, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ тоже рас-

ходится. Допустим противное: интеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ сходит-

ся. Тогда по доказанному пункту а) этой теоремы несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ тоже сходится, что

противоречит условию теоремы. Следовательно, $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ расходится и теорема доказана.

Из теорем 11.1 и 11.3 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 11.1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $x \geq a > 0$. Тогда, если существует постоянная $M > 0$ такая, что

- а) $0 \leq f(x) \leq \frac{M}{x^\alpha}$ при всех $x \geq a$, причем $\alpha > 1$, то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится;
- б) $f(x) \geq \frac{M}{x^\alpha}$ при всех $x \geq a$, причем $\alpha \leq 1$, то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится.

ПРИМЕР 11.4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$\int_1^{+\infty} \frac{1 + \cos x}{x^2} dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{125x^2 + x - 1}}. \quad (11.5)$$

Так как $-1 \leq \cos x \leq 1$, то при всех $x \geq 1$ выполняется неравенство $0 \leq \frac{1 + \cos x}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}$ и потому в силу следствия 11.1 (п. а)) первый из несобственных интегралов (11.5) сходится.

Так как при всех $x \geq 1$ выполняется неравенство $\frac{1}{\sqrt[3]{125x^2 + x - 1}} \geq \frac{1}{5\sqrt[3]{x^2}}$, то в силу следствия 11.1 (п. б)) второй из несобственных интегралов (11.5) расходится.

Теорема 11.4 (вторая теорема сравнения). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и положительны на промежутке $[a, +\infty)$ и пусть существует конечный положительный предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A \quad (0 < A < +\infty). \quad (11.6)$$

Тогда оба несобственных интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Доказательство теоремы 11.4 проводится с помощью теоремы 11.3. В самом деле, из (11.6) следует, что для $\varepsilon = \frac{A}{2} > 0$ можно указать такое число $a_1 > a$, что

$$-\frac{a}{2} < \frac{f(x)}{\varphi(x)} - A < \frac{A}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{A}{2} \varphi(x) < f(x) < \frac{3A}{2} \varphi(x) \quad (11.7)$$

при всех $x \geq a_1$.

Если интеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ сходится, то интегралы $\int_{a_1}^{+\infty} \varphi(x) dx$ и $\int_{a_1}^{+\infty} \frac{3A}{2} \varphi(x) dx$ тоже сходятся (см. свойства 11.1 и 9.2 несобственных интегралов), а потому (в силу неравенства (11.7)) по теореме 11.3 (п. а)) интеграл $\int_{a_1}^{+\infty} f(x) dx$, а вместе с ним и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, тоже сходится.

Аналогично доказывается, что из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

ПРИМЕР 11.5. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$\int_1^{+\infty} x^2 \sin \frac{1}{x^3} dx; \quad \int_1^{+\infty} x \ln \left(1 + \frac{3}{x^4} \right) dx. \quad (11.8)$$

Сравним первый из интегралов (11.8) с интегралом $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$. Найдем предел отношения подынтегральных функций:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sin \frac{1}{x^3} : \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \frac{1}{x^3} : \frac{1}{x} = 1.$$

Так как интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ расходится (см. теорему 11.1),

то по теореме 11.4 первый из интегралов (11.8) тоже расходится.

Второй из интегралов (11.8) сравним с интегралом $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$. Снова находим предел отношения подынтегральных функций:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{3}{x^4} \right) : \frac{1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{3}{x^4} : \frac{1}{x^3} = 3.$$

Так как интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ сходится (см. теорему 11.1), то

по теореме 11.4 второй из интегралов (11.8) тоже сходится.

Замечание. Аналогичные теоремы сравнения справедливы и для несобственных интегралов с бесконечным нижним пределом, а также для несобственных интегралов с бесконечными верхним и нижним пределами интегрирования.

§ 11.5. АБСОЛЮТНАЯ И УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

В этом пункте будем рассматривать функции, принимающие на $[a, +\infty)$ как положительные, так и отрицательные значения.

Определение 11.1. Несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (11.9)$$

называется

а) *абсолютно сходящимся*, если сходится несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx \quad (11.10)$$

от модуля данной функции;

б) *условно сходящимся*, если интеграл (11.9) сходится, а интеграл (11.10) расходится.

Аналогичные понятия можно дать и для несобственных интегралов других типов.

Теорема 11.5. *Абсолютно сходящийся интеграл сходится.*

Доказательство. По условию несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ является абсолютно сходящимся, т. е. интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится.

Требуется доказать, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ тоже сходится.

Из определения модуля действительного числа следует, что

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \Leftrightarrow 0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)| \quad (11.11) \\ (\forall x \geq a).$$

Так как интеграл (11.10) сходится, то по свойству 11.2 несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} 2|f(x)| dx$ тоже сходится, что в силу (11.11) и первой теоремы сравнения (см. теорему 11.3) влечет сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|) dx$.

Заметим теперь, что так как $(f(x) + |f(x)|) - |f(x)|$, то по свойству 2 несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|) dx - \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

сходится. Теорема 11.5 доказана.

Теорема 11.6 (достаточный признак абсолютной сходимости). Если функция $f(x)$ непрерывна при $x \geq a > 0$ и существуют такие постоянные $M > 0$ и $\alpha > 1$, что $|f(x)| \leq \frac{M}{x^\alpha}$ при всех $x \geq a > 0$, то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ абсолютно сходится.

Доказательство. Так как несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{M}{x^\alpha} dx$ при $\alpha > 1$ сходится (см. свойство 11.2 несобственных интегралов и теорему 11.1), то по первой теореме сравнения (теорема 11.3) интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ тоже сходится. Следовательно, несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ является абсолютно сходящимся.

ПРИМЕР 11.6. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Так как $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ при всех $x \geq 1$, то по теореме 11.6

несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ является абсолютно

сходящимся. Поскольку в силу теоремы 11.5 всякий абсолютно сходящийся интеграл сходится, то данный интеграл является сходящимся.

ПРИМЕР 11.7. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$\text{а) } \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx; \quad \text{б) } \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx; \quad \text{в) } \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx.$$

а) Положим $u = \frac{1}{x}$, $dv = \sin x dx$. Тогда $du = -\frac{1}{x^2} dx$,

$u = -\cos x$. Используя формулу интегрирования по частям в несобственном интеграле (см. теорему 11.2), получаем:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x} \Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx, \quad (11.12)$$

так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$. Поскольку несобственный интеграл из правой части соотношения (11.12) сходится (см. пример 9.6), то интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ тоже сходится.

б) Аналогично доказывается, что несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ является сходящимся.

в) Так как

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}$$

и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$ расходится (см. теорему 11.1), а несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$ сходится (см. п. б)), то несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ расходится.

ПРИМЕР 11.8. Показать, что несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ является условно сходящимся.

Рассмотрим интеграл от модуля данной подынтегральной функции:

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx. \quad (11.13)$$

Так как $|\sin x| \geq \sin^2 x$, то $\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x} \geq 0$ при любом $x \geq 0$. Следовательно, поскольку интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ расходится (см. пример 11.7(в)), то по первой теореме сравнения несобственный интеграл (11.13) расходится. Поэтому интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ не является абсолютно сходящимся. С другой стороны в примере 11.7(а) показано, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится. Следовательно, этот интеграл является условно сходящимся.

Контрольные вопросы

1. Как определяется несобственный интеграл:

- а) с бесконечным верхним пределом?
- б) с бесконечным нижним пределом?
- в) с бесконечным верхним и нижним пределами?

2. Показать, что интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$ сходится и вычислить этот интеграл.

3. Показать (исходя из определения), что интеграл $\int_{-a}^a \frac{x \, dx}{x^2 + 4}$ расходится.
4. Показать, что интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} \, dx$ сходится и вычислить этот интеграл.
5. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, где $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (см. теорему 11.1).
6. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x}$, где $a > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
7. В чем заключается геометрический смысл несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования?
8. Докажите линейность несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования (см. свойство 11.2).
9. Докажите, что если несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f_1(x) \, dx$ сходится, а несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f_2(x) \, dx$ расходится, то несобственный интеграл $\int_a^{\infty} (f_1(x) + f_2(x)) \, dx$ расходится.
10. Сформулируйте правило вычисления несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования (аналог формулы Ньютона–Лейбница) (см. свойство 11.3).
11. Сформулируйте правило интегрирования по частям в несобственном интеграле с бесконечными пределами интегрирования (см. теорему 11.2).
12. Сформулируйте первую и вторую теоремы сравнения для несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования (см. теоремы 11.3, 11.4).
13. Докажите, что если $f(x) \geq 0$ при всех $x \geq a > 0$ и если существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)x^\alpha = A > 0$ при некотором $\alpha > 1$, то интеграл $\int_a^{\infty} f(x) \, dx$ сходится (воспользуйтесь теоремой 11.4).
14. Докажите, что если $f(x) \geq 0$ при всех $x \geq a > 0$ и если существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)x^\alpha = A > 0$ при некотором $\alpha \leq 1$, то интеграл $\int_a^{\infty} f(x) \, dx$ расходится.
15. Исследовать на сходимость следующие несобственные интегралы:
- а) $\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^5 + 1}} \, dx$; б) $\int_1^{\infty} \frac{2 + \arcsin(1/x)}{1 + \sqrt{x}} \, dx$; в) $\int_1^{\infty} \frac{(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 2)^3}{(5x - 4)^{2/3} \sqrt{x^2}} \, dx$
- (воспользуйтесь теоремами 11.3 или 11.4).

16. Какой несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования называется: а) абсолютно сходящимся? б) условно сходящимся? (см. определение 11.1).

17. Может ли абсолютно сходящийся интеграл быть расходящимся? (см. теорему 11.5).

18. Сформулируйте достаточный признак абсолютной сходимости несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования (см. теорему 11.6).

19. Показать, что несобственные интегралы

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin 3x}{x^{\frac{10}{9}} \sqrt{x+1}} dx, \quad \int_2^{\infty} \frac{\cos x + \cos 2x}{x \ln^2 x} dx$$

являются абсолютно сходящимися.

20. Привести пример несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования, сходящегося условно (см. пример 11.8).

Ответы

2. $\ln \sqrt[4]{3}$. 4. 0. 5. Расходится при $\alpha \leq 1$; сходится при $\alpha > 1$.

15. а) сходится; б) расходится; в) сходится.

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, b)$, интегрируема на отрезке $[a, b - \epsilon]$ при любом $\epsilon > 0$, но не является ограниченной на промежутке $[a, b)$, т. е. точка $x = b$ является особой для функции $f(x)$ (рис. 12.1, а). Несобственным интегралом от функции $f(x)$ (с особой точкой $x = b$) по промежутку $[a, b)$ называется предел определенного интеграла $\int_a^{b-\epsilon} f(x) dx$ при $\epsilon \rightarrow +0$.

Обозначение обычное: $\int_a^b f(x) dx$. Итак,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx. \quad (12.1)$$

Если существует конечный предел в правой части равенства (12.1), то несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ называется *сходящимся*. Если предел в правой части равенства (12.1) не существует (или равен бесконечности), то несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ называется *расходящимся*.

Аналогично определяется несобственный интеграл от функции $f(x)$ (с особой точкой $x = a$) по промежутку $(a, b]$:

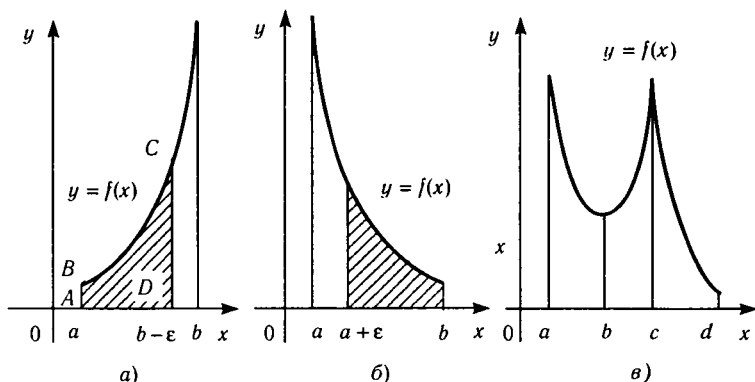


Рис. 12.1

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$$

(предполагается, что функция $f(x)$ определена на промежутке $(a, b]$, интегрируема на отрезке $[a + \epsilon, b]$ при любом $\epsilon > 0$, но не является ограниченной на промежутке $(a, b]$; рис. 12.1, б).

Если промежуток интегрирования функции содержит *несколько особых точек* функции $f(x)$ (среди которых могут быть и $-\infty, +\infty$ которые всегда считаются особыми), то интеграл по всему промежутку представляется в виде суммы интегралов по таким меньшим промежуткам, каждый из которых имеет только одну особую точку функции $f(x)$ в одном из своих концов (рис. 12.1, в). В этом случае *несобственный интеграл называется сходящимся*, если сходятся все интегралы по меньшим промежуткам, и *расходящимся*, если интеграл по хотя бы одному из меньших промежутков расходится.

Таким образом, для функции, график которой изображен на рис. 12.1, в, имеем:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx + \int_d^{+\infty} f(x) dx.$$

ПРИМЕР 12.1. Показать, что несобственный интеграл $\int_0^1 \ln x dx$ сходится, и вычислить этот интеграл.

Для функции $\ln x$ особой точкой является $x = 0$, поэтому

$$\int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\epsilon}^1 \ln x \, dx. \quad (12.2)$$

Для вычисления определенного интеграла из правой части равенства (12.2) воспользуемся формулой интегрирования по частям. Для этого положим $u = \ln x$, $dv = dx$; тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln x \, dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(x \ln x \Big|_{\epsilon}^1 - \int_{\epsilon}^1 dx \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} (-\epsilon \ln \epsilon - 1 + \epsilon) = \\ &= -\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\ln \epsilon}{1/\epsilon} - 1 = -\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{(\ln \epsilon)'}{(1/\epsilon)'} - 1 = \\ &= -\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1/\epsilon}{-1/\epsilon^2} - 1 = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon - 1 = -1 \end{aligned}$$

(при вычислении предела $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon \ln \epsilon$ применялось правило Лопиталя).

Итак, данный интеграл сходится, причем $\int_0^1 \ln x \, dx = -1$.

ПРИМЕР 12.2. Показать, что несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ расходится.

Для функции $\frac{1}{1-x}$ особой точкой является $x = 1$, поэтому

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{1-x} = -\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \ln(1-x) \Big|_0^{1-\epsilon} = -\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \ln \epsilon = +\infty.$$

Следовательно, данный интеграл расходится.

Важные примеры сходящихся и расходящихся интегралов содержатся в следующей теореме.

Теорема 12.1. Пусть $a < b$ и $\alpha > 0$ — действительные числа. Несобственный интеграл $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ сходится при любом $0 < \alpha < 1$ и расходится при любом $\alpha \geq 1$.

Доказательство. Для функции $\frac{1}{(x-a)^\alpha}$ особой точкой является $x = a$, поэтому

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{a+\epsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \\
 &= \begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_{a+\epsilon}^b & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \ln(x-a) \Big|_{a+\epsilon}^b & \text{при } \alpha = 1 \end{cases} = \\
 &= \begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{\epsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) & \text{при } \alpha \neq 1 \\ \lim_{\epsilon \rightarrow +0} [\ln(b-a) - \ln \epsilon] & \text{при } \alpha = 1 \end{cases} = \\
 &= \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{при } \alpha < 1, \\ +\infty & \text{при } \alpha \geq 1, \end{cases}
 \end{aligned}$$

откуда и вытекает требуемое утверждение.

Упражнение 12.1. Пусть $a < b$ и $\alpha > 0$ — действительные числа. Доказать, что несобственный интеграл $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ сходится при любом $0 < \alpha < 1$ и расходится при любом $\alpha \geq 1$.

§ 12.1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ОТ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $f(x)$ — непрерывная неотрицательная на промежутке $[a, b)$ функция, неограниченная в окрестности точки $x = b$. Площадь S бесконечной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x) \geq 0$ и прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$, называется пределом площади криволинейной трапеции $ABCD$ (см. рис. 12.1, а) при $\epsilon \rightarrow +0$ (если указанный предел существует).

Итак, по определению имеем:

$$S = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} S_{ABCD}. \quad (12.3)$$

Так как согласно геометрическому смыслу определенного интеграла $S_{ABCD} = \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx$, то из (12.3) следует, что

$$S = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Таким образом, *сходящийся несобственный интеграл от неотрицательной неограниченной функции равен площади бесконечной трапеции.*

Ограничимся случаем функций, являющимися непрерывными и неограниченными в окрестности точки $x = b$ (в других случаях свойства аналогичны).

§ 12.2. СВОЙСТВА НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ОТ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Свойство 12.1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b)$ и точка $x = b$ является особой для $f(x)$. Тогда, если $a < a_1 < b$, то несобственные интегралы $\int_a^b f(x) dx$ и $\int_{a_1}^b f(x) dx$ оба сходятся или оба расходятся.

Свойство 12.2 (линейность).

а) $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$, α — произвольное действительное число;

$$\text{б) } \int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$$

(в предположении, что каждый из несобственных интегралов, стоящих в правых частях указанных равенств сходится).

Свойство 12.3 (аналог формулы Ньютона—Лейбница). Пусть $F(x)$ — какая-либо первообразная непрерывной на промежутке $[a, b)$ функции $f(x)$, причем точка $x = b$ является особой для $f(x)$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \equiv F(x) \Big|_a^b, \quad (12.4)$$

$F(b) = \lim_{x \rightarrow b-0} F(x)$. Равенство (12.4) следует понимать так: либо левая и правая его части имеют смысл и тогда (12.4) справедливо, либо обе части равенства (12.4) не имеют смысла.

Сходимость или расходимость несобственных интегралов от неотрицательных неограниченных функций часто устанавливается с помощью следующих теорем.

Теорема 12.2 (первая теорема сравнения). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на промежутке $[a, b)$, причем точка $x = b$ является особой для $f(x)$ и $\varphi(x)$. Тогда, если при всех $x \in [a, b)$ выполняется неравенство $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$, то справедливы следующие утверждения:

а) если несобственный интеграл $\int_a^b \varphi(x) dx$ сходится,

то и несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ тоже сходится;

б) если несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ расходится,

то и несобственный интеграл $\int_a^b \varphi(x) dx$ тоже расходится.

Теорема 12.3 (вторая теорема сравнения). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на промежутке $[a, b)$, причем точка $x = b$ является особой для $f(x)$ и $\varphi(x)$. Тогда, если существует конечный положительный предел

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A \quad (0 < A < +\infty),$$

то оба несобственных интеграла $\int_a^b f(x) dx$ и $\int_a^b \varphi(x) dx$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Доказательство теорем 12.2, 12.3 аналогично доказательствам первой и второй теорем сравнения для несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования (см. доказательства теорем 11.3, 11.4).

Замечание. Теоремы, подобные теоремам 12.2 и 12.3, справедливы и для функций с особой точкой в левом конце интегрирования или с несколькими особыми функциями.

Из теоремы 12.2 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 12.1. Если существует постоянная $M > 0$ такая, что

а) $0 \leq f(x) \leq \frac{M}{(b-x)^\alpha}$ при всех $x \in [a, b)$, причем $0 < \alpha < 1$,

то несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится;

б) $f(x) \geq \frac{M}{(b-x)^\alpha}$ при всех $x \in [a, b)$, причем $\alpha \geq 1$, то не-

собственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ расходится.

ПРИМЕР 12.3. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$\text{а) } \int_0^\pi \frac{5 + \cos x}{(\pi - x)^2} dx; \quad \text{б) } \int_0^\pi \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx; \quad \text{в) } \int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Для подынтегральной функции интеграла а) особой является точка $x = \pi$. Так как $-1 \leq \cos x \leq 1$, то при всех $x \in [0, \pi)$ выполняется неравенство $\frac{5 + \cos x}{(\pi - x)^2} \geq \frac{4}{(\pi - x)^2}$ и потому в силу следствия 12.1 (п. б)) интеграл а) расходится.

Для подынтегральной функции $f(x) = \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}$ интеграла

б) особой является точка $x = 0$. Положим $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ и вычислим предел отношения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \rightarrow +0$:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} : \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Отсюда (в силу теоремы 12.3 и замечания к ней) вытекает, что интеграл б) ведет себя так же, как и интеграл $\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{x}} dx$. Поскольку интеграл $\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ сходится (см. теорему 12.1), то интеграл б) тоже является сходящимся.

Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ интеграла в) имеет на промежутке $[0, +\infty)$ две особые точки: $x = 0$ и $x = +\infty$. Поэтому

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Первый интеграл в правой части последнего равенства сходится при $0 < \alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$, а второй расходится при $0 < \alpha \leq 1$ и сходится при $\alpha > 1$. Отсюда следует, что при любом $\alpha > 0$ интеграл в) расходится.

Определение 12.1. Несобственный интеграл

$$\int_a^b f(x) dx \quad (12.5)$$

называется

а) *абсолютно сходящимся*, если сходится несобственный интеграл

$$\int_a^b |f(x)| dx \quad (12.6)$$

от модуля данной функции;

б) *условно сходящимся*, если интеграл (12.5) сходится, а интеграл (12.6) расходится.

Аналогичные понятия можно дать и для несобственных интегралов от неограниченных функций с другими особыми точками.

Теорема 12.4. Абсолютно сходящийся интеграл от неограниченной функции сходится.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 11.5.

ПРИМЕР 12.4. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x + \sin 3x}{\sqrt[3]{x - \pi}} dx. \quad (12.7)$$

$$\text{Так как } 0 \leq \left| \frac{\sin x + \sin 3x}{\sqrt[3]{x - \pi}} \right| \leq \frac{2}{\sqrt[3]{x - \pi}} \text{ при всех } x \in (\pi, 2\pi]$$

и несобственный интеграл $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{2}{\sqrt[3]{x - \pi}} dx$ сходится (см. тео-

рему 12.1), то по первой теореме сравнения интеграл

$$\int_{\pi}^{2\pi} \left| \frac{\sin x + \sin 3x}{\sqrt[3]{x - \pi}} \right| dx \text{ сходится. Следовательно, несоб-}$$

ственный интеграл (12.7) является абсолютно сходящимся. Поскольку в силу теоремы 12.4 всякий абсолютно сходящийся интеграл сходится, то данный интеграл является сходящимся.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение несобственного интеграла $\int_a^b f(x) dx$, если:
 - а) точка $x = b$ является особой для $f(x)$;
 - б) точка $x = a$ является особой для $f(x)$;
 - в) точка $x = c$ ($a < c < b$) является особой для $f(x)$.
 2. Показать (исходя из определения), что интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{4-x^2}$ расходится.
 3. Показать, что интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ сходится и вычислить этот интеграл.
 4. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_a^b \left(\frac{1}{(x-a)^\alpha} + \frac{1}{(b-x)^\beta} \right) dx \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.
 5. В чем заключается геометрический смысл несобственного интеграла от неограниченной функции?
 6. Перечислите свойства несобственных интегралов от неограниченных функций.
 7. Сформулируйте первую и вторую теоремы сравнения для несобственных интегралов от неограниченных функций (см. теоремы 12.2, 12.3).
 8. Исследовать на сходимость следующие несобственные интегралы:
 - а) $\int_0^1 \frac{x \arcsin \sqrt{x}}{\operatorname{tg}^2 x} dx$;
 - б) $\int_0^1 \frac{e^x - e}{(1-x)^2} dx$;
 - в) $\int_1^e \frac{dx}{x \ln^2 x}$.
- Указание.** Воспользуйтесь теоремами сравнения для несобственных интегралов.
9. Какой несобственный интеграл от неограниченной функции называется: а) абсолютно сходящимся; б) условно сходящимся? (см. определение 10.1).
 10. Показать, что несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{\sin 5x}{\sqrt[3]{x^5 + x^4}} dx$ является абсолютно сходящимся.

Ответы

3. 0,5π. 4. Сходится при $\alpha < 1, \beta < 1$; расходится при других значениях $\alpha < 1$ и β .
8. а) сходится; б) расходится; в) расходится.

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Основные идеи дифференциального исчисления функции одного переменного распространяются на функции нескольких переменных. В результате возникает аппарат для исследования функций нескольких переменных, который и рассматривается в этом разделе.

§ 13.1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Функции, которые до сих пор рассматривались в курсе математического анализа, определялись на множествах точек числовой прямой. Так как положение точки на прямой характеризуется *одним* числом (координатой), то каждую такую функцию можно назвать функцией *одного* переменного. Точнее, если $D = \{x\}$ есть множество точек x на числовой прямой и каждой точке $x \in D$ поставлено в соответствие по некоторому закону определенное число y , то говорят, что на множестве D определена *функция одного переменного* $y = f(x)$.

Геометрической интерпретацией такой функции является ее *график*. Например, если $f(x) = x^2$, то графиком является парабола $y = x^2$ (см. рис. 13.1).

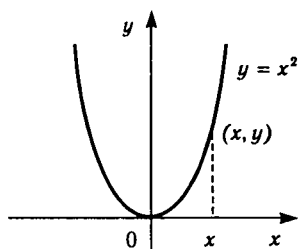


Рис. 13.1

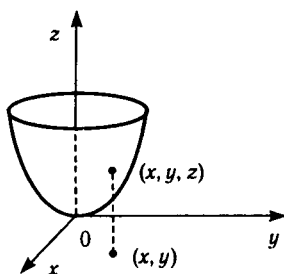


Рис. 13.2

Значение функции в точке x изображается на графике ординатой y точки графика, абсцисса которой равна x .

Если множество D рассматривать как множество точек $\{(x, y)\}$ на плоскости и каждой точке $(x, y) \in D$ поставить в соответствие определенное число z , то, тем самым, на множестве D определится функция $z = f(x, y)$, которую называют *функцией двух переменных*.

Геометрической интерпретацией функции двух переменных $f(x, y)$ служит поверхность $z = f(x, y)$, которую называют *графиком* этой функции. Например, если $f(x, y) = x^2 + y^2$, то графиком является параболоид вращения $z = x^2 + y^2$ (рис. 13.2).

Значение функции в точке (x, y) изображается аппликатой z точки графика, абсцисса и ордината которой равны, соответственно, x и y .

Подобным же образом можно определить и функцию трех переменных. Если $D = \{(x, y, z)\}$ есть множество точек трехмерного пространства и каждой точке $(x, y, z) \in D$ поставлено в соответствие число u , то говорят, что на множестве D определена *функция трех переменных* $u = f(x, y, z)$.

Выразить значение функции координатой точки геометрического образа в трехмерном пространстве в этом случае уже нельзя. В качестве геометрической интерпретации для функции трех переменных рассматривают *поверхности уровня*

$$f(x, y, z) = \text{const},$$

на каждой из которой функция имеет постоянное значение $u = \text{const}$. Например, если $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, то поверхностями уровня являются сферы $x^2 + y^2 + z^2 = \text{const}$.

Для определения функций большого числа переменных потребуется рассматривать пространства размерности $n > 3$.

Определение 13.1. Множество всех упорядоченных совокупностей по n действительных чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется n -мерным арифметическим (или координатным) пространством R^n .

Элементы этого множества называют точками $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, а числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ — их координатами.

Определение 13.2. Если каждой точке $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из множества D точек пространства R^n поставлено в соответствие по некоторому закону число z , то говорят, что на множестве D определена функция n переменных

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

или функция точки

$$z = u(M).$$

§ 13.2. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ МНОЖЕСТВ В ПРОСТРАНСТВЕ R^n

Определение 13.3. Пусть точки $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $N(y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$. Расстоянием между этими точками в пространстве R^n называется число

$$\rho(M, N) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Очевидно, в пространствах R^1, R^2, R^3 определяемые по этой формуле расстояния совпадают с обычно рассматриваемыми в этих пространствах расстояниями. При $n > 3$ этой формулой понятие расстояния между точками распространяется на точки в пространствах большей размерности.

Определение 13.4. δ -окрестностью точки $M_0 \in R^n$ называется множество всех точек $M \in R^n$, для которых расстояние

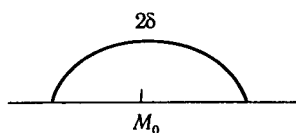


Рис. 13.3

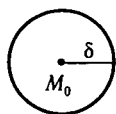


Рис. 13.4

$$\rho(M, M_0) < \delta.$$

Обозначение: $\delta(M_0)$.

Очевидно, $\delta(M_0)$ является:

- в пространстве R^1 интервалом с центром в точке M_0 длиной 2δ (рис. 13.3);
- в пространстве R^2 кругом с центром в точке M_0 радиуса δ (рис. 13.4);
- в пространстве R^3 шаром с центром в точке M_0 радиуса δ (рис. 13.5).

В общем случае $\delta(M_0)$ в пространстве R^n называется *n-мерным шаром с центром в точке M_0 радиуса δ* .

Определение 13.5. Пусть множество $D \subset R^n$ (т. е. D является подмножеством множества R^n).

Точка $M_{\text{вн}}$ называется *внутренней точкой* множества D , если в R^n существует такая достаточно малая δ -окрестность точки $M_{\text{вн}}$, что

$$\delta(M_{\text{вн}}) \subset D.$$

Точка M_r называется *граничной точкой* D , если в любой ее δ -окрестности в R^n , как бы мала она ни была, найдутся точки $M_1 \in D$ и $M_2 \notin D$ (рис. 13.6).

Определение 13.6. Множество D , состоящее из одних внутренних точек называется *открытым*.

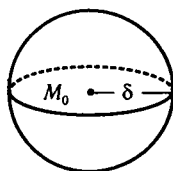


Рис. 13.5

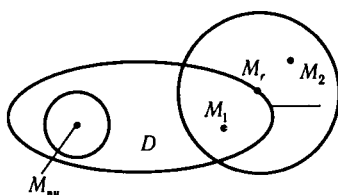


Рис. 13.6

ПРИМЕР 13.1. В пространстве R^2 круг

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < R^2\},$$

т. е. круг с центром в точке $(0,0)$ радиусом R без ограничивающей его окружности, является *открытым* множеством.

Определение 13.7. Множество D , содержащее все свои граничные точки, называется *замкнутым* множеством.

ПРИМЕР 13.2. В пространстве R^2 круг

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\},$$

т. е. круг с центром в точке $(0,0)$ радиусом R вместе с ограничивающей его окружностью, является *замкнутым* множеством.

Заметим, что этот круг не является открытым множеством, а круг в примере 13.1 не является замкнутым множеством.

Определение 13.8. Множество D называется *связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат множеству D .

ПРИМЕР 13.3. В пространстве R^2 кольцо

$$D = \{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 4\}$$

является связным множеством (рис. 13.7).

ПРИМЕР 13.4. В пространстве R^2 множество

$$D = \{(x, y) | (x-2)^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) | (x+2)^2 + y^2 < 1\}$$

не является связным множеством (рис. 13.8).

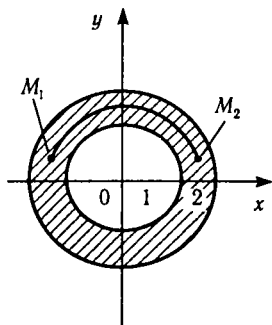


Рис. 13.7

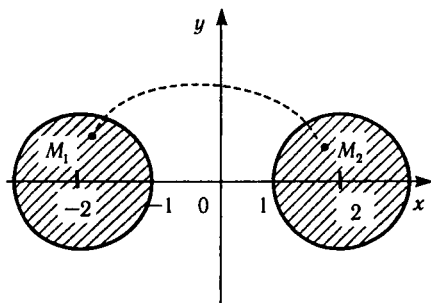


Рис. 13.8

Это множество состоит из двух отдельных кругов. И если взять точку M_1 в одном круге, а точку M_2 в другом, то их нельзя соединить непрерывной кривой, которая не выходила бы из множества D .

Замечание. В общем случае в пространстве R^n непрерывная кривая определяется параметрическими уравнениями

$$x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t),$$

где $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ — непрерывные функции.

Определение 13.9. Открытое связное множество называется *областью*. Область с присоединенными к ней всеми граничными точками называется *замкнутой областью*.

В примерах 13.1 и 13.3 множества D являются областями. В примере 13.2 множество D является замкнутой областью. В примере 13.4 множество D не является областью, так как оно не является связным.

Определение 13.10. Множество D называется *ограниченным* в R^n , если в R^n существует такая δ -окрестность какой-либо точки M_0 , что $D \subset \delta(M_0)$, другими словами, если в R^n существует какой-либо шар, содержащий множество D .

Во всех рассмотренных выше примерах множества D являются ограниченными. Примерами неограниченных множеств в R^2 являются полуплоскость $\{(x, y) | y \geq 0\}$ или все пространство R^2 (т. е. вся плоскость).

Определение 13.11. *Окрестностью точки* $M_0 \in R^n$ называется любая область в R^n , содержащая эту точку.

§ 13.3. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Так же, как и для функций одного переменного логической базой дифференциального исчисления функций нескольких переменных является теория пределов. В этом параграфе коротко рассматриваются ее основные положения.

Обозначим через $\delta(M_0)$ — выколотую δ -окрестность точки M_0 , т. е. $\delta(M_0)$ без точки M_0 .

Определение 13.12. Пусть функция $u(M)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0 \in R^n$, за исключением, может быть, самой точки M_0 .

Число a называется *пределом функции $u(M)$ в точке M_0* , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(M_0) : \forall M \in \dot{\delta}(M_0) \quad |u(M) - a| < \varepsilon.$$

Обозначение: $a = \lim_{M \rightarrow M_0} u(M)$.

Условие $|u(M) - a| < \varepsilon$ в этом случае выполняется для любого числа $\varepsilon > 0$. Но суть понятия раскрывается при рассмотрении малых значений ε , когда условие $|u(M) - a| < \varepsilon$ означает близость значений функции $u(M)$ к числу a . Условие близости выполняется $\forall M \in \dot{\delta}(M_0)$. Чем меньше ε , тем меньше радиус δ максимальной окрестности $\dot{\delta}(M_0)$, в которой выполняется это условие. Поэтому если $a = \lim_{M \rightarrow M_0} u(M)$, то значения функции $u(M)$ сколь угодно близки к числу a для всех точек M , достаточно близких к точке M_0 (исключая, конечно, саму точку M_0).

Если M_0 является граничной точкой области определения D функции $u(M)$, то в любой окрестности $\dot{\delta}(M_0)$ найдутся точки, в которых функция $u(M)$ не определена (рис. 13.9) и условие $|u(M) - a| < \varepsilon$ не может выполняться $\forall M \in \dot{\delta}(M_0)$. Поэтому определение предела в этом случае видоизменяется.

Определение 13.13. Если M_0 — граничная точка области определения D функции $u(M)$, то

$a = \lim_{M \rightarrow M_0} u(M)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(M_0) : \forall M \in \dot{\delta}(M_0) \cap D \quad |u(M) - a| < \varepsilon.$$

В этом случае требуется, чтобы условие $|u(M) - a| < \varepsilon$ выполнялось не для всех точек $M \in \dot{\delta}(M_0)$, а лишь для всех тех из них, которые принадлежат области определения D функции $u(M)$.

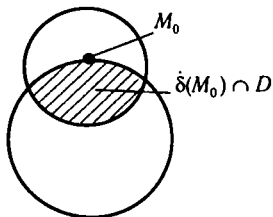


Рис. 13.9

Если сравнить определения 13.12 и 13.13 с определениями пределов функции одного переменного $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, то можно заметить, что основное отличие их состоит в том, что для функции одного переменного условие близости значений $f(x)$ к предельному значению a выполняется в одномерной окрестности $\delta(x_0)$, а для функции нескольких переменных соответствующее условие выполняется в n -мерной окрестности $\delta(M_0)$, либо в ее n -мерной части $\delta(M_0) \cap D$. (Кстати, предел функции $u(M)$ в граничной точке ее области определения можно рассматривать как аналог одностороннего предела функции $f(x)$.)

С указанным обстоятельством связано то, что все основные теоремы в пределах функции одного переменного (о пределе суммы, разности, произведения, частного двух функций и ряд других) распространяются на функции нескольких переменных.

Определение 13.14. Функция $u(M)$, определенная в некоторой окрестности точки M_0 , за исключением может быть, самой точки M_0 , называется *бесконечно малой* при $M \rightarrow M_0$, если

$$\lim_{M \rightarrow M_0} u(M) = 0.$$

Все основные свойства бесконечно малых функций одного переменного также распространяются на бесконечно малые функции нескольких переменных.

В пространстве R^2 функцию $u(M)$ можно рассматривать как функцию координат точки $M(x, y)$ и если $M_0(x_0, y_0)$, а $u = f(x, y)$, то используется обозначение предела в виде

$$a = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y).$$

Для вычисления предела в этом случае обычно переходят к полярным координатам (ρ, θ) , выбирая точку (x_0, y_0) в качестве полюса полярной системы координат и направляя полярную ось параллельно оси Ox (рис. 13.10).

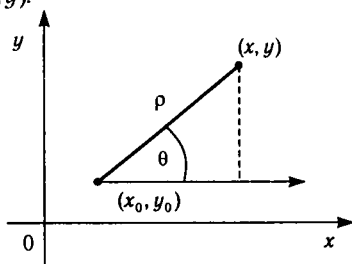


Рис. 13.10

Очевидно,

$$x - x_0 = \rho \cos \theta, \quad y - y_0 = \rho \sin \theta$$

и

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} f(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \rho \sin \theta).$$

ПРИМЕР 13.5. Найти

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}. \\ & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + 1} - 1} = \\ & = \left| \left(\sqrt{\rho^2 + 1} - 1 \right) \approx \frac{\rho^2}{2} \text{ при } \rho \rightarrow 0 \right| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2\rho^2}{\rho^2} = 2. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 13.6. Найти

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

При переходе к полярным координатам получаем

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}{\rho^2} = \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta.$$

Зависимость величины этого предела от θ означает, что $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ не существует. В любой выколотой окрестности точки $(0, 0)$, как бы мала она ни была, значения функции на каждом фиксированном луче $\theta = \text{const}$ постоянны, а на различных лучах изменяются от $-\frac{1}{2}$ до $+\frac{1}{2}$. Следовательно, они не могут быть сколь угодно близкими к одному какому-либо числу.

§ 13.4. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

После того как понятие предела определено для функции нескольких переменных, легко распространить на них и понятие непрерывности.

Определение 13.15. Функция $u(M)$, определенная в некоторой окрестности точки $M_0 \in R^n$ (включая саму точку M_0), называется *непрерывной в точке M_0* , если

$$\exists \lim_{M \rightarrow M_0} u(M) = u(M_0). \quad (13.1)$$

Пусть $\Delta u = u(M) - u(M_0)$ — приращение функции $u(M)$, которое она получает при смещении из точки M_0 в точку M . Тогда очевидно

$$\lim_{M \rightarrow M_0} u(M) = u(M_0) \Leftrightarrow \lim_{M \rightarrow M_0} \Delta u = 0$$

т. е. выполнение равенства

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \Delta u = 0 \quad (13.2)$$

является необходимым и достаточным *условием непрерывности* функции $u(M)$ в точке M_0 .

На непрерывные функции нескольких переменных распространяются все основные теоремы о непрерывных функциях одного переменного, в частности, имеет место *теорема Вейерштрасса*: если функция нескольких переменных непрерывна в ограниченной замкнутой области, то в этой области она ограничена и имеет наибольшее и наименьшее значения.

Пусть в пространстве $R^2: M(x, y), M_0(x_0, y_0)$, $u = f(x, y)$ и пусть $x - x_0 = \Delta x, y - y_0 = \Delta y$ — приращения аргументов, а $\Delta u = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ — соответствующее им приращение функции.

Тогда (13.1) будет иметь вид

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0), \quad (13.3)$$

а условие (13.2) приводится к равенству

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta u = 0, \quad (13.4)$$

выражающему необходимое и достаточное условие непрерывности функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) .

Упражнение 13.1. Исследовать на непрерывность в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = y = 0. \end{cases}$$

Здесь

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta = 0.$$

А так как $f(0, 0) = 0$, то $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = f(0, 0)$.

Следовательно, функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $0, 0$.

Упражнение 13.2. Исследовать на непрерывность в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = y = 0. \end{cases}$$

Так как $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ не существует (см. пример 13.6), то функция $f(x, y)$ не является непрерывной в точке $(0, 0)$.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение пространства R^n (см. определение 13.1).
2. Сформулируйте определение функции n переменных (см. определение 13.2).
3. Сформулируйте определения внутренней и граничной точек множества (см. определение 13.5).
4. Сформулируйте определения открытого и замкнутого множества (см. определения 13.6, 13.7).
5. Может ли замкнутое множество быть открытым?
6. Сформулируйте определение связного множества (см. определение 13.8).

7. Сформулируйте определение ограниченного множества (см. определение 13.10).

8. Сформулируйте определение предела функции в точке (см. определение 13.12).

9. Сформулируйте определение предела функции в граничной точке ее области определения (см. определение 13.13).

10. Сформулируйте определение бесконечно малой функции (см. определение 13.14).

11. Вычислите предел

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}.$$

12. Сформулируйте определение непрерывности функции в точке (см. определение 13.15).

13. Сформулируйте необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке (см. формулу (13.2)).

14. Исследуйте на непрерывность в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = y = 0. \end{cases}$$

Ответы

5. Может, если множество не имеет граничных точек и состоит из одних внутренних точек, например все пространство R^n .

$$11. \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sin(\rho^3(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta))}{\rho^2} =$$

$$= |\sin \alpha \approx \alpha \text{ при } \alpha \rightarrow 0| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)}{\rho^2} =$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) = 0$$

(произведение бесконечно малой функции на ограниченную).

14. $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$ (см. вопрос 11) и $f(0, 0) = 0$. Следовательно, функция

$f(x, y)$ непрерывна в точке $(0, 0)$.

ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ И ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 14.1. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ И ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Понятие производной является одним из основных понятий дифференциального исчисления. Спецификой этого понятия для функции нескольких переменных является то, что ее производная зависит не только от точки, в которой она определяется, но и от того, в каком направлении происходит смещение, вызывающее приращение функции. В результате возникают понятия производной по направлению и частных производных. Количество последних совпадает с числом аргументов функции нескольких переменных. Таким образом, если в каждой фиксированной точке функция одного переменного может иметь лишь одну производную, то функция нескольких переменных, при соответствующих условиях, имеет столько частных производных, сколько у нее аргументов и еще бесчисленное множество производных по направлениям.

Определение 12.1. Пусть функция $u = u(M)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0 \in R^n$; l — ось, проходящая через точку M_0 ; M — подвижная точка на оси; $\Delta_l u = u(M) - u(M_0)$ — приращение функции, которое она получает при смещении из точки M_0 в точку M ;

$$\Delta l = \begin{cases} +|\overline{M_0 M}|, & \text{если } \overline{M_0 M} \uparrow \uparrow l; \\ -|\overline{M_0 M}|, & \text{если } \overline{M_0 M} \uparrow \downarrow l \end{cases}$$

величина смещения (см. рис. 14.1).

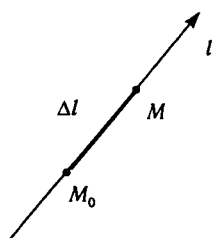


Рис. 14.1

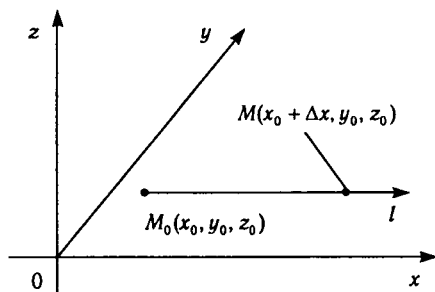


Рис. 14.2

Производной функции $u(M)$ в точке M_0 по направлению оси l называется предел отношения $\Delta_l u$ к Δl при $\Delta l \rightarrow 0$ и обозначается

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}. \quad (14.1)$$

Пусть в пространстве R^3 с прямоугольной декартовой системой координат $Oxyz$

$$u = f(x, y, z), \quad M_0(x_0, y_0, z_0)$$

и пусть ось l параллельна оси Ox и одинаково с ней направлена (рис. 14.2).

Тогда $M(x_0 + \Delta x, y_0, z_0)$, величина смещения $\Delta l = \Delta x$ и приращение

$$\Delta_l u = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)$$

можно рассматривать как приращение функции $f(x, y_0, z_0)$ одного переменного x при фиксированных аргументах $y = y_0$ и $z = z_0$:

$$\Delta_l u = \Delta f(x, y_0, z_0).$$

Производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ в этом случае называется *частной производной* функции $f(x, y, z)$ по x в точке (x_0, y_0, z_0) , обозначается через $\frac{\partial u}{\partial x}$ и

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x, y_0, z_0)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} f(x, y_0, z) \Big|_{x=x_0} \quad (14.2)$$

Если $l \uparrow \uparrow Oy$, то производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ называется *частной производной* функции $f(x, y, z)$ по y , а, если $l \uparrow \uparrow Oz$, то — ее *частной производной* по z в точке (x_0, y_0, z_0) . Обозначаются эти производные через $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$ соответственно и

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{d}{dy} f(x_0, y, z_0) \Big|_{y=y_0}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{d}{dz} f(x_0, y_0, z) \Big|_{z=z_0}. \quad (14.3)$$

Таким образом, частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ являются производными функции $u = f(x, y, z)$ по направлениям осей, параллельных осям координат (или совпадающих с ними).

Используются и другие обозначения частных производных, например:

$$\begin{aligned} f'_x(x_0, y_0, z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad f'_y(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial u}{\partial y}, \\ &= f'_z(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}$$

(читается «эф штрих по x », «эф штрих по y », «эф штрих по z »).

Из формул (14.2), (14.3) следует, что отыскание частных производных сводится к отысканию производных функций одного переменного.

ПРИМЕР 14.1. Найти частные производные функции $u = x^2 y^3 z^4$ в произвольной точке (x, y, z) .

Из формулы (14.2) следует, что при отыскании частной производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ аргументы y и z нужно рассматривать как постоянные. Поэтому множитель $y^3 z^4$ выносится из-под знака производной, а так как $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^3z^4.$$

При отыскании $\frac{\partial u}{\partial y}$ как постоянные рассматриваются x и z , и так как $\frac{d}{dy}(y^3) = 3y^2$, то

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 y^2 z^4.$$

Наконец, при отыскании $\frac{\partial u}{\partial z}$ фиксируются x и y и получается

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 4x^2 y^3 z^3.$$

Аналогично определяются частные производные для функций трех переменных и с большим, чем 3, количеством аргументов.

§ 14.2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Основой для определения дифференцируемости функции нескольких переменных так же, как для функции одного переменного, является возможность выделения главной линейной (относительно приращений аргументов) части приращения функции.

Для простоты рассмотрим как вводится понятие дифференцируемости для функции двух переменных. Переход к функциям большего числа переменных не связан ни с какими принципиальными отличиями.

Определение 14.2. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) ;

$\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ — приращения аргументов;

$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ — соответствующее приращение функции.

Если его можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \quad (14.4)$$

где $A = A(x_0, y_0)$, $B = B(x_0, y_0)$ — величины, не зависящие от Δx , Δy (постоянные),

$\alpha = \alpha(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y)$,
 $\beta = \beta(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малые при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$,

то функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой в точке (x_0, y_0)* , а линейная (относительно $\Delta x, \Delta y$) часть приращения $A\Delta x + B\Delta y$ называется *полным дифференциалом* функции

$z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) и обозначается символом dz :

$$dz = A\Delta x + B\Delta y. \quad (14.5)$$

Получим еще одну нередко употребляемую форму представления приращения дифференцируемой функции.

Пусть $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ — расстояние между точками (x_0, y_0) и $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ (рис. 14.3).

Рассмотрим отношение

$$\frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\rho} = \alpha \frac{\Delta x}{\rho} + \beta \frac{\Delta y}{\rho}.$$

Очевидно, $\frac{|\Delta x|}{\rho} \leq 1$ и $\frac{|\Delta y|}{\rho} \leq 1$. Поэтому при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ величины $\frac{\Delta x}{\rho}$, $\frac{\Delta y}{\rho}$ являются ограниченными, а $\alpha \frac{\Delta x}{\rho}$, $\beta \frac{\Delta y}{\rho}$ — бесконечно малыми как произведения бесконечно малых на ограниченные. Отсюда, учитывая, что $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$, получаем

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\rho} = 0.$$

Следовательно, величина $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ является бесконечно малой при $\rho \rightarrow 0$ высшего порядка по сравнению с ρ :

$$\alpha\Delta x + \beta\Delta y = o(\rho) \quad \text{при } \rho \rightarrow 0.$$

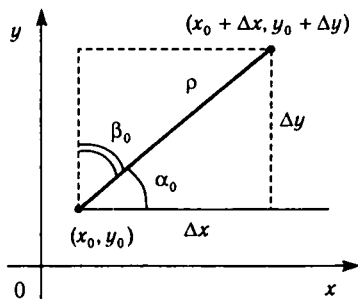


Рис. 14.3

Теперь из (14.4) получается представление приращения дифференцируемой функции в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \quad \text{при } \rho \rightarrow 0. \quad (14.6)$$

Можно показать, что, обратно, из (14.6) следует (14.4), и поэтому (14.6) является необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) (или равносильным определением дифференцируемости этой функции в точке (x_0, y_0)).

Для функции одного переменного из дифференцируемости в некоторой точке вытекает существование производной в этой точке. Для функций нескольких переменных это утверждение обобщается следующим образом.

Теорема 14.1. *Если функция нескольких переменных дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке у нее существует производная по любому направлению и, в частности, все частные производные.*

Доказательство проведем для функции двух переменных.

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) ;

l — произвольно фиксированная ось, проходящая через точку (x_0, y_0) .

Тогда приращение функции при смещении из точки (x_0, y_0) в точку $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ по оси l (14.6):

$$\Delta_l z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \quad \text{при } \rho \rightarrow 0,$$

а его отношение к величине смещения Δl

$$\frac{\Delta_l z}{\Delta l} = A \frac{\Delta x}{\Delta l} + B \frac{\Delta y}{\Delta l} + \frac{o(\rho)}{\Delta l},$$

где $\cos \alpha_0, \cos \beta_0$ — направляющие косинусы оси l (см. рис. 14.3).

При $\Delta l \rightarrow 0$ $\cos \alpha_0, \cos \beta_0$ не меняются, A и B постоянные, а так как $\Delta l = \pm \rho$, то $\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\Delta l} = 0$ и, следовательно, су-

ществует $\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}$, т. е.

$$\exists \frac{\partial z}{\partial l} = A \cos \alpha_0 + B \cos \beta_0. \quad (14.7)$$

Так как ось l была выбрана произвольно, то у функции $z = f(x, y)$ существует производная по любому направлению в точке (x_0, y_0) .

В частности, если $l \uparrow \uparrow Ox$, то это означает, что существует частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$. Причем в этом случае

$\alpha_0 = 0, \beta_0 = \frac{\pi}{2}$ и из (14.7) получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A. \quad (14.8)$$

Аналогично, если выбрать ось $l \uparrow \uparrow Oy$ ($\alpha_0 = \frac{\pi}{2}, \beta_0 = 0$), то придем к выводу о существовании частной производной $\frac{\partial z}{\partial y}$ и равенству

$$\frac{\partial z}{\partial y} = B. \quad (14.9)$$

Доказательство закончено.

Рассмотрим еще ряд важных выводов, вытекающих из приведенного доказательства.

1) Из (14.7)–(14.9) следует формула

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha_0 + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta_0, \quad (14.10)$$

которая используется для вычисления производной по направлению.

2) Из (14.5) получается выражение полного дифференциала через частные производные

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y. \quad (14.11)$$

3) Из (14.10) и (14.11) следует

$$dz = \frac{\partial z}{\partial l} \Delta l, \quad (14.12)$$

так как $\Delta \cos \alpha_0 = \Delta x, \Delta \cos \beta_0 = \Delta y$.

4) Если $\frac{\partial z}{\partial l} \neq 0$, то при $\rho \rightarrow 0$ ($\Delta l = \pm \rho \rightarrow 0$) полный дифференциал dz является бесконечно малой одного порядка с ρ (см. (14.12)), а так как

$$\Delta z = dz + o(\rho) \quad \text{при } \rho \rightarrow 0 \quad (14.13)$$

(см. (14.6) и (14.5)), то при малых ρ основной вклад в приращение функции Δz делает dz . На этом основании dz называют *главной частью* приращения Δz .

Таким образом, *полный дифференциал является главной линейной частью приращения дифференцируемой функции.*

Наряду с дифференциалом функции рассматривают и дифференциалы независимых переменных, под которыми по определению понимают их приращения. Для функции $z = f(x, y)$ их обозначают $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Учитывая это, из (14.11) получаем формулу

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \quad (14.14)$$

выражающую связь между полным дифференциалом функции, ее частными производными и дифференциалами независимых переменных.

Для функции $u = f(x, y, z)$ эта формула обобщается следующим образом:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz. \quad (14.15)$$

Аналогично выражается и полный дифференциал функции большего числа переменных, через все его частные производные и дифференциалы независимых переменных.

Обратимся к вопросу об условиях дифференцируемости функции нескольких переменных.

Как известно, для функции одного переменного необходимым и достаточным условием дифференцируемости в некоторой точке является существование (конечной) производной функции в этой точке.

Из теоремы 14.1 следует, что *необходимым условием дифференцируемости функции нескольких переменных в*

точке является существование всех ее частных производных в этой точке. Однако это условие не является достаточным. Существуют функции, имеющие все частные производные в некоторой точке, но не являющиеся дифференцируемыми в этой точке.

Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных устанавливает следующая теорема.

Теорема 14.2. *Если функция нескольких переменных имеет все частные производные, непрерывные в некоторой точке, то она дифференцируема в этой точке.*

Доказательство. Докажем для функции двух переменных.

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$, непрерывные в точке (x_0, y_0) .

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

приращение функции, соответствующее приращению аргументов Δx и Δy .

Представим Δz в виде

$$\begin{aligned} \Delta z &= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + \\ &+ [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]. \end{aligned} \quad (14.16)$$

По теореме Лагранжа для функции $f(x, y_0 + \Delta y)$ на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$ или, если $\Delta x < 0$ на отрезке $[x_0 + \Delta x, x_0]$, то

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) &= \\ = f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \cdot \Delta x, \quad 0 < \theta_1 < 1. \end{aligned} \quad (14.17)$$

Так как частная производная $f'_x(x, y)$ непрерывна в точке (x_0, y_0) , то

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0),$$

следовательно,

$$f'_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha,$$

где α — бесконечно малая функция при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$, и из (14.17) получаем

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = \\ = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + \alpha\Delta x. \end{aligned} \quad (14.18)$$

Аналогично, применяя формулу Лагранжа к функции $f(x_0, y)$ на отрезке $[y_0, y_0 + \Delta y]$ или, если $\Delta y < 0$, на отрезке $[y_0 + \Delta y, y_0]$ получаем

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) \cdot \Delta y,$$

$$0 < \theta_2 < 1,$$

а учитывая непрерывность частной производной $f'_y(x, y)$ в точке $f(x_0, y_0)$

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \beta\Delta y, \quad (14.19)$$

где β — бесконечно малая функция при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$.

Подставим теперь (14.18) и (14.19) в (14.16). Тогда приращение функции окажется представленным в виде

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

Сравнивая его с (14.4), замечаем, что $f'_x(x_0, y_0) = A$, $f'_y(x_0, y_0) = B$ — величины, не зависящие от $\Delta x, \Delta y$; α, β — бесконечно малые функции при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$, и, следовательно, по определению 14.2, функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) . Теорема доказана.

Рассмотрим еще вопрос о связи между дифференцируемостью и непрерывностью функции. Эта связь аналогична установленной для функции одного переменного.

Теорема 14.3. *Если функция нескольких переменных дифференцируема в некоторой точке, то она в этой точке непрерывна.*

Доказательство. Доказательство проведем для функции двух переменных.

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) . Тогда ее приращение представимо в виде (14.4):

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

и

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = a \cdot 0 + B \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0.$$

В силу условия (13.4) функция $z = f(x, y)$ непрерывна в точке (x_0, y_0) .

Обратная теорема неверна. Существуют функции нескольких переменных (как и функции одного переменного), непрерывные в некоторой точке, но недифференцируемые в этой точке (см. контрольный вопрос 7).

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение дифференцируемой функции и полного дифференциала (см. определение 14.2).

2. Сформулируйте теорему о существовании производной по направлению у дифференцируемой функции (см. теорему 14.1).

3. Как связаны производные функции по двум взаимно противоположным направлениям в одной и той же точке?

4. Как связан полный дифференциал функции с ее частными производными и дифференциалами независимых переменных? (см. формулу (12.14)).

5. Найдите частные производные функции

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = y = 0 \end{cases} \quad (14.20)$$

в точке $(0, 0)$.

6. Является ли функция (14.20) дифференцируемой в точке $(0, 0)$? (см. упреждение 13.2 и теорему 14.3).

7. Докажите, что функция

$$f(x, y) = |x| + y$$

непрерывна в точке $(0, 0)$, но не является дифференцируемой в этой точке.

Ответы

3. Они отличаются только знаком. В самом деле, пусть l и l_1 — две противоположно направленные оси и $\cos \alpha_0, \cos \beta_0$ — направляющие косинусы оси l , а $\cos \alpha_1, \cos \beta_1$ — направляющие косинусы оси l_1 . Тогда $\cos \alpha_1 = -\cos \alpha_0, \cos \beta_1 = -\cos \beta_0$ и из формулы (14.10) следует, что $\frac{\partial z}{\partial l_1} = -\frac{\partial z}{\partial l}$.

5. $f'_x(0, 0) = 0$. Это следует из формул для функции $z = f(x, y)$, аналогичных формулам (12.2), (12.3):

$$f'_x(0, 0) = \frac{d}{dx} f(x, 0) \Big|_{x=0} = \frac{d}{dx} (0) = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \left. \frac{d}{dy} f(y, 0) \right|_{y=0} = \frac{d}{dy} (0) = 0.$$

6. Не является. В упражнении (13.2) доказано, что функция (14.20) не является непрерывной в точке $(0, 0)$, а значит в силу теоремы 14.3 она не может быть дифференцируемой в этой точке.

Функция (14.20) подтверждает, что существование частных производных функции в некоторой точке не является достаточным условием для дифференцируемости функции в этой точке. Функция (14.20) имеет частные производные в точке $(0, 0)$ (см. ответ к вопросу 5), но она не является дифференцируемой в этой точке.

7.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (|x| + y) = 0 = f(0, 0).$$

Следовательно, функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $(0, 0)$ (см. формулы (13.3) и (13.1)). Но частная производная

$$f'_x(0, 0) = \left. \frac{d}{dx} f(x, 0) \right|_{x=0} = \left. \frac{d}{dx} (|x|) \frac{d}{dx} \right|_{x=0} \text{ не существует.}$$

Значит, функция $f(x, y)$ не является дифференцируемой в точке $(0, 0)$, так как нарушено необходимое условие дифференцируемости (см. теорему 14.1).

Таким образом, функция, непрерывная в некоторой точке может не быть дифференцируемой в этой точке. Это является подтверждением того, что теорема, обратная теореме 14.3 неверна.

КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

§ 15.1. УРАВНЕНИЯ КАСАТЕЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ И НОРМАЛИ К ПОВЕРХНОСТИ

Пусть дана поверхность.

M_0 — фиксированная точка на поверхности,

M — подвижная точка на ней,

$\vec{n}$ — фиксированный вектор,

$\varphi = \varphi(M)$ — угол между векторами $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{n}$ (рис. 15.1).

Определение 15.1. Ненулевой вектор $\vec{n}$ называется *нормальным* к поверхности в точке M_0 , если

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Определение 15.2. Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности $F(x, y, z) = 0$ называется *обыкновенной*, если в этой точке:

1) частные производные F'_x, F'_y, F'_z непрерывны;

2) $F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z \neq 0$.

При нарушении хотя бы одного из этих условий точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ называется *особой* точкой поверхности.

Покажем, что если $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — обыкновенная точка поверхности $F(x, y, z) = 0$, то вектор

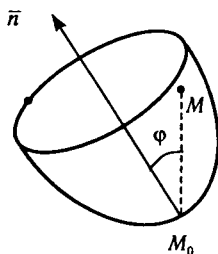


Рис. 15.1

$$\begin{aligned}\bar{n} = F'_x(x_0, y_0, z_0)\bar{i} + F'_y(x_0, y_0, z_0)\bar{j} + \\ + F'_z(x_0, y_0, z_0)\bar{k}\end{aligned}\quad (15.1)$$

является нормальным к этой поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Так как $|\bar{n}| = \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z} \neq 0$, то $\bar{n}$ — ненулевой вектор.

Теперь нужно показать, что $\lim_{M \rightarrow M_0} \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Пусть точка M на поверхности получена, когда координатам x_0, y_0, z_0 дали приращения dx, dy и dz соответственно.

Тогда

$$M(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz), \quad \overline{M_0M} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k},$$

$$\cos \varphi = \frac{(\bar{n}, \overline{M_0M})}{|\bar{n}| \cdot |\overline{M_0M}|} = \frac{F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz}{|\bar{n}| \cdot \rho},$$

где $\rho = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$.

Так как точка M_0 — обыкновенная точка поверхности, то в этой точке частные производные F'_x, F'_y, F'_z непрерывны и по теореме 14.2 функция $F(x, y, z)$ дифференцируема. Приращение ΔF этой функции представимо в виде

$$\Delta F = dF + o(\rho) \quad \text{при } \rho \rightarrow 0,$$

где $dF = F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz$.

С другой стороны,

$$\Delta F = F(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz) - F(x_0, y_0, z_0) = 0 - 0 = 0$$

так как точки $M(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$ находятся на поверхности и их координаты удовлетворяют уравнению поверхности $F(x, y, z) = 0$.

Отсюда следует, что $dF = -o(\rho)$ и

$$\cos \varphi = \frac{dF}{|\bar{n}| \cdot \rho} = -\frac{1}{|\bar{n}|} \cdot \frac{o(\rho)}{\rho}.$$

Так как $\rho \rightarrow 0$ при $M \rightarrow M_0$, а $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = 0$, то

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \cos \varphi = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{M \rightarrow M_0} \varphi = \frac{\pi}{2},$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, вектор $\vec{n}$ в (15.1) действительно является нормальным к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Определение 15.3. Нормалью к поверхности в некоторой ее точке называется прямая, направляющий вектор которой является нормальным к поверхности в этой точке и которая проходит через эту точку.

Канонические уравнения нормали можно представить в виде

$$\frac{x - x_0}{F'_x} = \frac{y - y_0}{F'_y} = \frac{z - z_0}{F'_z}. \quad (15.2)$$

Определение 15.4. Касательной плоскостью к поверхности в некоторой точке называется плоскость, которая проходит через эту точку перпендикулярно нормали к поверхности в этой точке.

Из определения 15.4 следует, что нормальный вектор к поверхности в точке M_0 является перпендикулярным касательной плоскости к поверхности в этой точке, и уравнение касательной плоскости можно представить в виде

$$F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) + F'_z(z - z_0) = 0. \quad (15.3)$$

Замечание. В уравнениях (15.2) и (15.3) частные производные вычисляются в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Если точка поверхности является особой, то в этой точке нормальный к поверхности вектор может не существовать, и, следовательно, поверхность может не иметь нормали и касательной плоскости.

Например, для поверхности

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2, \quad F'_x = 2x, \quad F'_y = 2y, \quad F'_z = -2z.$$

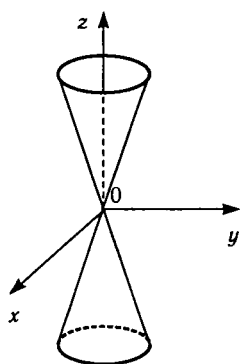


Рис. 15.2

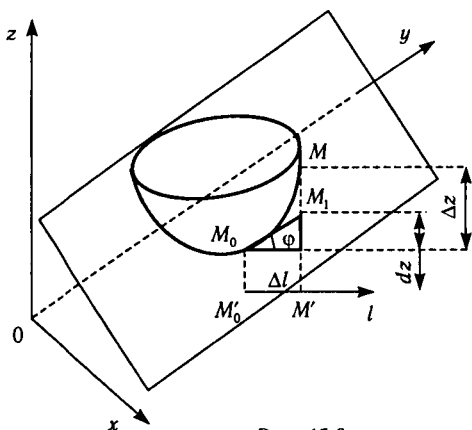


Рис. 15.3

В точке $O(0, 0, 0)$ $F'_x{}^2 + F'_y{}^2 + F'_z{}^2 = 0$, поэтому эта точка особая. А так как она является вершиной конуса (рис. 15.2), то очевидно, что нормального к поверхности вектора в этой точке нет, так же как нет нормали касательной плоскости.

§ 15.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПОЛНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА И ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть дана функция $z = F(x, y)$, имеющая непрерывные частные производные в точке $M'_0(x_0, y_0)$. Ее графиком является поверхность

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0.$$

Если положить $f(x_0, y_0) = z_0$, то точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ будет точкой на поверхности, а $M'_0(x_0, y_0)$ — ее проекция на плоскость Oxy (рис. 15.3).

Частные производные

$$F'_x = f'_x, \quad F'_y = f'_y, \quad F'_z = -1$$

и в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

- 1) они непрерывны;
- 2) $F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z = f'^2_x + f'^2_y - 1 \neq 0$.

Следовательно, M_0 — обыкновенная точка поверхности $F(x, y, z)$ (см. определение 13.2) и существует касательная плоскость к поверхности в этой точке. Ее уравнение

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Рассмотрим точку $M'(x_1, y_1)$ на плоскости Oxy вблизи точки $M'_0(x_0, y_0)$ и соответствующие ей точки $M_1(x_1, y_1)$, на касательной плоскости и $Mf(x_1, y_1)$ на границе функции (т. е. на поверхности $F(x, y, z) = 0$).

Координаты точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ удовлетворяют уравнению касательной плоскости:

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0. \quad (15.4)$$

Будем считать, что в точку M' мы попадаем в результате смещений из точки M'_0 вызванного приращениями аргументов, равными

$$dx = x_1 - x_0 \quad \text{и} \quad dy = y_1 - y_0.$$

Тогда из (15.4) получим

$$f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy = z_1 - z_0$$

и, следовательно, полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0)

$$dz = z_1 - z_0$$

равен разности аппликат точек M_1 и M_0 , которую можно интерпретировать как приращение аппликаты точки M_1 на касательной плоскости при смещении ее проекции M' на плоскости Oxy из точки M'_0 .

Другими словами, полный дифференциал dz функции $z = f(x, y)$ в точке M'_0 равен приращению аппликаты точки M_1 касательной плоскости к графику этой функции в точке M_0 , вызванное приращениями ее абсциссы и ординаты, равными соответственно dx и dy .

Заметим, что разность аппликат точек M и M_0 выражает полное приращение функции $\Delta z = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)$,

главную линейную часть которого и составляет дифференциал dz (см. рис. 15.3).

Чтобы выяснить геометрический смысл, производной по направлению, проведем ось l через точки M'_0 и M' (см. рис. 15.3), а на касательной плоскости прямую M_0M_1 . Эта прямая, очевидно, будет касательной прямой к графику функции $z = f(x, y)$.

Пусть φ — угол наклона прямой M_0M_1 к оси l , Δl — величина смещения из точки M'_0 в точку M' . Легко видеть (см. рис. 15.3), что $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dz}{\Delta l}$, а так как $dz = \frac{\partial z}{\partial l} \Delta l$ (см. (14.11)), то

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Таким образом, производная по направлению $\frac{\partial z}{\partial l}$ в точке M'_0 равна тангенсу угла наклона к оси l касательной прямой к графику функции $z = f(x, y)$ в точке M_0 , лежащей в одной плоскости с осью l .

Чтобы выяснить геометрический смысл частных производных $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$, проведем через точку M'_0 оси $l_x \uparrow \uparrow O_x$ и $l_y \uparrow \uparrow O_y$, а через точку M_0 касательные прямые L_x и L_y к графику функции $z = f(x, y)$, лежащие соответственно в одной плоскости с осью l_x и осью l_y . Тогда частная производная $f'_x(x_0, y_0)$ будет равна тангенсу угла наклона к оси l_x касательной прямой L_x , а $f'_y(x_0, y_0)$ — тангенсу угла наклона к оси l_y касательной прямой L_y .

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение нормального вектора к поверхности (см. определение 15.1).
2. Сформулируйте определение нормали к поверхности и напишите уравнения нормали (см. определение 15.3 и уравнение (15.2)).
3. Сформулируйте определение касательной плоскости и напишите уравнение касательной плоскости (см. определение 15.4 и уравнение (15.3)).

4. Сформулируйте определения обыкновенной и особой точек поверхности (см. определение 15.2).

5. Может ли поверхность не иметь нормали и касательной плоскости в особой точке? (см. рис. 15.2).

6. В чем заключается геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных?

7. В чем заключается геометрический смысл производной по направлению функции двух переменных?

8. В чем заключается геометрический смысл частных производных функции двух переменных?

ПРОИЗВОДНЫЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Производная сложной функции $y = y(x(t))$ равна произведению производной $\frac{dy}{dx}$ по промежуточному аргументу x на производную $\frac{dx}{dt}$ промежуточного аргумента по основному аргументу t (предполагается, конечно, что производные $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dx}$ существуют). При рассмотрении функций нескольких переменных количество промежуточных и основных аргументов может быть весьма разнообразным, что приводит к соответствующему разнообразию формул для дифференцирования сложных функций.

Пусть дана функция $z = f(x, y)$ и ее аргументы являются значениями функций $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$. Тогда можно рассматривать *сложную функцию*

$$z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) = \chi(u, v).$$

В этом случае функцию $z = f(x, y)$ называют *внешней*, а функции $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ — *внутренними* функциями. Аргументы u и v будем называть *основными*, а x и y — *промежуточными* аргументами сложной функции.

Теорема 16.1. Если функции $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ дифференцируемы в точке (u, v) , а функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в соответствующей точке (x, y) , то сложная функция $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ дифференцируема в

точке (u, v) . (Выражения для ее частных производных будут получены в процессе доказательства теоремы).

Доказательство. Так как функции $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ дифференцируемы в точке (u, v) , то их приращения Δx и Δy , вызванные приращениями аргументов Δu и Δv , представимы в виде:

$$\Delta x = \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v + \alpha_1 \Delta u + \beta_1 \Delta v, \quad (16.1)$$

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v + \alpha_2 \Delta u + \beta_2 \Delta v, \quad (16.2)$$

где $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ — бесконечно малые функции при $\Delta u \rightarrow 0$, $\Delta v \rightarrow 0$.

Так как функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y) , соответствующей точке (u, v) , то ее приращение Δz , вызванное приращениями аргументов, равными Δx и Δy представимо в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y, \quad (16.3)$$

где α, β — бесконечно малые функции при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$.

Из дифференцируемости функций $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ в точке (u, v) следует их непрерывность в этой точке (см. теорему 15.2), и в силу условия непрерывности (13.4)

$$\lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0}} \Delta x = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0}} \Delta y = 0,$$

т. е. $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ при $\Delta u \rightarrow 0$, $\Delta v \rightarrow 0$, а отсюда следует, что α и β являются бесконечно малыми функциями и при $\Delta u \rightarrow 0$, $\Delta v \rightarrow 0$.

Величина Δz , определяемая формулой (16.3), является приращением функции $z = f(x, y)$ — внешней по отношению к сложной функции $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$. Но нетрудно сообразить, что если в (16.3) подставить (16.1) и (16.2), то она будет выражать приращение рассматриваемой сложной функции, вызванное приращениями ее основных аргументов, равными Δu , Δv (при этом Δx и Δy будут являться соответствующими приращениями промежуточных аргументов сложной функции).

Результат подстановки (16.1), (16.2) в (16.3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Delta z = & \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) \Delta u + \\ & + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right) \Delta v + \gamma \Delta u + \delta \Delta v. \end{aligned} \quad (16.4)$$

Здесь $\gamma = \frac{\partial z}{\partial x} \alpha_1 + \frac{\partial z}{\partial y} \alpha_2 + \alpha \left(\frac{\partial x}{\partial u} + \alpha_1 \right) + \beta \left(\frac{\partial y}{\partial u} + \alpha_2 \right)$ — бесконечно малая функция при $\Delta u \rightarrow 0, \Delta v \rightarrow 0$ как сумма бесконечно малых; δ — бесконечно малая функция при $\Delta u \rightarrow 0, \Delta v \rightarrow 0$, так как является выражением подобного же вида.

Так как выражения в скобках в (16.4) не зависят от $\Delta u, \Delta v$, то из (16.4) и следует дифференцируемость рассматриваемой сложной функции в точке (u, v) (см. определение 14.2 дифференцируемости функции). Теорема доказана.

Кроме того, из (16.4) можно получить выражения для частных производных сложной функции $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, которые являются коэффициентами при Δu и Δv в линейной части приращения функции Δz (см. (14.4), (14.8) и (14.9)):

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \quad (16.5)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (16.6)$$

Проанализируем формулу (16.5):

$\frac{\partial z}{\partial u}$ — производная сложной функции по основному аргументу u ;
 $\frac{\partial z}{\partial x}$ — ее производная по промежуточному аргументу x ;
 $\frac{\partial x}{\partial u}$ — производная от этого промежуточного аргумента по основному аргументу u ;

$\frac{\partial z}{\partial y}$ — производная сложной функции по промежуточно-

му аргументу y ;

$\frac{\partial y}{\partial u}$ — производная от этого промежуточного аргумента

по основному аргументу u .

Аналогично устроена и формула (16.6), в которой основным аргументом является v .

Проведенный анализ позволяет сформулировать следующее правило дифференцирования.

Производная сложной функции по некоторому основному аргументу равна сумме производных функции по всем промежуточным аргументам, умноженных на производные от соответствующих промежуточных аргументов по этому основному аргументу.

Это правило распространяется на функции с любым количеством промежуточных и основных аргументов.

ПРИМЕР 16.1. Пусть $z = z(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ — дифференцируемые функции. Тогда сложная функция $z = z(x(t), y(t))$ является дифференцируемой функцией с основным аргументом t и ее производная

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Здесь $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ — производные функций одного переменного. Поэтому в их обозначениях использовано «прямое» d . А $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ — частные производные внешней функции

$z = z(x, y)$, которая является функцией двух переменных. Поэтому в обозначениях этих производных используется «круглое» ∂ .

ПРИМЕР 16.2. Пусть $z = z(x, y)$, $y = y(x)$ — дифференцируемые функции. Тогда сложная функция $z = z(x, y(x))$ является дифференцируемой функцией с основным аргументом x и

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Здесь один из промежуточных аргументов совпадает с основным: $x = x$. И можно считать, что $\frac{\partial z}{\partial x}$ умножается на $\frac{dx}{dx} = 1$.

Обратите внимание, что в левой части формулы $\frac{dz}{dx}$ — производная сложной функции, которая является функцией одного переменного x , (поэтому d «прямое»), а в правой части $\frac{\partial z}{\partial x}$ — частная производная внешней функции $z = z(x, y)$, которая является функцией двух переменных (поэтому ∂ «круглое»).

ПРИМЕР 16.3. Пусть $w = w(x, y, z)$, $z = z(x, y)$ — дифференцируемые функции своих аргументов. Тогда сложная функция $w = w(x, y, z(x, y))$ является дифференцируемой функцией с основными аргументами x, y и ее частные производные

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_n = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_n = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Здесь основные аргументы x, y независимы. Поэтому $\frac{dx}{dy} = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$. Частные производные $\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_n$ и $\frac{\partial w}{\partial x}$ — это производные разных функций: первая — производная сложной функции (ее называют *полной* частной производной, поскольку сложная функция учитывает зависимость ее значений от x непосредственную и обусловленную промежуточным аргументом z и $\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_n$ характеризуют эту полную зависимость), а вторая — производная внешней функции $w = w(x, y, z)$ (у которой аргумент z является независимым от x).

Аналогичным образом различаются и производные $\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_n$ и $\frac{\partial w}{\partial y}$.

§ 16.1. ИНВАРИАНТНОСТЬ ФОРМЫ ПОЛНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Пусть функции $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ дифференцируемы в точке (u, v) , а функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в соответствующей точке (x, y) . Тогда сложная функция $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ дифференцируема в точке (u, v) (см. теорему 16.1) и ее дифференциал

$$dz_{c\lambda} = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

Подставляя сюда $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ из (16.5) и (16.6) и выполняя простые преобразования, получаем

$$\begin{aligned} dz_{c\lambda} &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) du + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \end{aligned}$$

Таким образом, дифференциал сложной функции

$$dz_{c\lambda} = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (16.7)$$

совпадает по форме с дифференциалом внешней функции

$$dz_{en} = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (16.8)$$

Это свойство называют *инвариантностью формы* полного дифференциала, так как она не зависит от того, какие аргументы рассматривать в качестве первичных аргументов сложной функции (u, v) или аргументы внешней функции (x, y) .

Следует однако иметь в виду, что по содержанию правые части в формулах (16.7) и (16.8) различны (как различны и сами полные дифференциалы $dz_{c\lambda}$ и dz_{en}). Это различие заключается в том, что аргументы x и y для внешней функции являются первичными и поэтому их дифференциалы dx и dy совпадают с приращениями Δx и Δy этих аргументов, а для сложной функции dx и dy — это

дифференциалы внутренних функций $x = \varphi(u, v)$ и $y = \psi(u, v)$ и в общем случае они являются лишь линейными частями приращений Δx и Δy внутренних функций.

Так что, в формуле (16.8)

$$dx = \Delta x, dy = \Delta y,$$

а в формуле (16.7)

$$dx \neq \Delta x, dy \neq \Delta y.$$

Свойство инвариантности формы полного дифференциала распространяется на функции с любым количеством промежуточных и основных аргументов.

§ 16.2. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $v = v(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $z(u)$ — дифференцируемые функции своих аргументов. Тогда

$$1^\circ d(Cu) = Cdu, C — \text{постоянная},$$

$$2^\circ d(u \pm v) = du \pm dv,$$

$$3^\circ d(uv) = vdu + u dv,$$

$$4^\circ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2} (v \neq 0),$$

$$5^\circ d(z(u)) = z'(u)du.$$

Эти правила легко доказываются с помощью свойства инвариантности формы полного дифференциала. Например, для доказательства 4° рассмотрим сложную функцию

$$z = \frac{u}{v}$$

с промежуточными аргументами u , v и основными — $x_1, x_2, \dots, x_n$. В силу инвариантности полный дифференциал этой функции

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv,$$

где $du = du(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $dv = dv(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

А так как

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{v}, \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{u}{v^2},$$

то

$$dz = \frac{1}{v} du - \frac{u}{v^2} dv = \frac{vdu - u dv}{v^2}.$$

Учитывая, что $z = \frac{u}{v}$ и $dz = d\left(\frac{u}{v}\right)$ приходим к 4°.

Столь же просто доказываются и остальные правила.

ПРИМЕР 16.4. Найти полный дифференциал и частные производные функции

$$z = \sin\left(5x^2y^3 + \frac{x-y}{x+y}\right)$$

Применяя последовательно правила 5°, 2°, 3°, 1°, 4° и снова 2°, получаем

$$\begin{aligned} dz &= \cos\left(5x^2y^3 + \frac{x-y}{x+y}\right) \left(10xy^3 dx + 15x^2y^2 dy + \right. \\ &+ \left. \frac{(x+y)(dx - dy) - (x-y)(dx + dy)}{(x+y)^2}\right) = \cos\left(5x^2y^3 + \frac{x-y}{x+y}\right) \times \\ &\times \left(\left(10xy^3 + \frac{2y}{(x+y)^2}\right) dx + \left(15x^2y^2 - \frac{2x}{(x+y)^2}\right) dy \right) \end{aligned}$$

Частные производные $z = \frac{\partial z}{\partial x}$, $z = \frac{\partial z}{\partial y}$ являются коэффициентами при dx и dy соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \left(10xy^3 + \frac{2y}{(x+y)^2}\right) \cos\left(5x^2y^3 + \frac{x-y}{x+y}\right) \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \left(15x^2y^2 - \frac{2x}{(x+y)^2}\right) \cos\left(5x^2y^3 + \frac{x-y}{x+y}\right) \end{aligned}$$

§ 16.3. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

Функции, которые задаются уравнениями, неразрешенными относительно величин, выражающих значения функций, называются *неявными*.

Рассмотрим сначала неявные функции одного переменного.

Определение 16.1. говорят, что уравнение

$$F(x, y) = 0 \quad (16.9)$$

определяет неявно (или неявную) функцию $y(x)$, если

$$F(x, y(x)) \equiv 0 \quad (16.10)$$

(тождество (16.10) означает, что равенство $F(x, y(x)) = 0$ выполняется для всех допустимых значений x).

ПРИМЕР 16.5. Уравнение

$$x^2 - xy = 5 = 0 \quad (16.11)$$

задает неявно функцию

$$y = x + \frac{5}{x}, \quad (16.12)$$

определенную при $x \neq 0$, так как равенство

$$x^2 - x \left(x + \frac{5}{x} \right) + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x^2 - \frac{5x}{x} + 5 = 0$$

выполняется $\forall x \neq 0$, т. е. является тождеством.

Заметим, что определением 16.1 не вводится новое понятие функции. Функция по-прежнему понимается как соответствие между элементами числовых множеств. Выделяется лишь особый способ задания функции уравнением.

В примере 16.5 равенство (16.12), определяющее функцию явно, можно получить из уравнения (16.11), если разрешить последнее относительно y . Так и в общем случае для перехода от неявного задания функции уравнением (16.9) достаточно разрешить это уравнение относительно y .

ПРИМЕР 16.6. Рассмотрим уравнение

$$y^2 - x = 0.$$

Разрешив его относительно y , получим равенства

$$y_1 = +\sqrt{x}, y_2 = -\sqrt{x},$$

определяющее неявно две непрерывные функции.

Графики этих функций являются ветвями параболы $y^2 - x = 0$ и изображены на рис. 16.1.

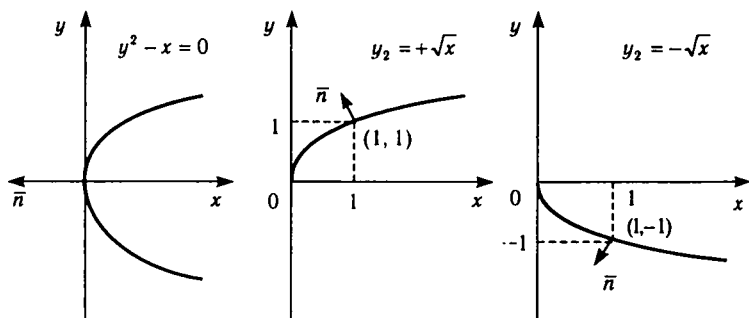


Рис. 16.1

Рассмотренный пример показывает, что уравнение (16.9) может определять не одну, а несколько неявных функций. Возможна и другая крайность, например уравнение

$$x^2 + y^2 + 5 = 0 \quad (16.13)$$

не определяет ни одной действительной функции, так как оно не удовлетворяется ни при каких действительных x и y .

Условия, при которых уравнение (16.9) определяет неявно единственную функцию, устанавливаются в следующей теореме.

Теорема 16.2. Пусть функция $F(x, y)$ удовлетворяет условиям:

- 1) $F(x_0, y_0) = 0$;
- 2) частные производные F'_x, F'_y непрерывны в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) ;
- 3) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда уравнение $F(x, y) = 0$ определяет неявно в некоторой окрестности точки x_0 единственную непрерывную функцию $y(x)$, удовлетворяющую условию $y(x_0) = y_0$. Эта функция имеет производную, непрерывную в окрестности точки x_0 .

Доказательство теоремы не приводится.

Вясним геометрический смысл условий теоремы.

Первое условие гарантирует существование точки, координаты которой удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$ и исключает случай типа (16.13), когда уравнение не удовлетворяется ни при каких действительных x и y . Из 2-го и

3-го условия следует, что x_0, y_0 — обыкновенная точка кривой $F(x, y) = 0$ (в этой точке $F'_y \neq 0$, следовательно, $F_x'^2 + F_y'^2 \neq 0$ и вектор $\bar{n} = F'_x(x_0, y_0)\bar{i} + F'_y(x_0, y_0)\bar{j}$ является нормальным к кривой в точке (x_0, y_0)).

С этим обстоятельством связана единственность непрерывной функции, определяемой неявно уравнением $F(x, y) = 0$ и удовлетворяющей условию $y(x_0) = y_0$. Чтобы понять это, вернемся к примеру 16.6:

$$F(x, y) = y^2 - x, \quad F'_x = -1, \quad F'_y = 2y.$$

Рассмотрим в качестве точки (x_0, y_0) точку $(1, 1)$. Очевидно, $F(1, 1) = 0$; F'_x, F'_y непрерывны в окрестности точки $(1, 1)$; $F'_y(1, 1) = 2 \neq 0$. Условия теоремы 16.2 выполнены, и уравнение $y^2 - x = 0$ определяет вблизи точки $x_0 = 1$ единственную непрерывную функцию $y(x) = \sqrt{x}$, удовлетворяющую условию $y(1) = 1$ (см. рис. 16.1). Для точки $(1, -1)$ условия теоремы также выполняются ($F'_y(1, -1) = -1 \neq 0$) и уравнение $y^2 - x = 0$ определяет вблизи точки $x_0 = 1$ теперь уже другую, но единственную непрерывную функцию $y(x) = -\sqrt{x}$, удовлетворяющую условию $y(1) = -1$ (см. рис. 16.1). А вот для точки $(0, 0)$ производная $F'_y(0, 0) = 0$, что нарушает 3-е условие теоремы и приводит к существованию двух непрерывных функций, определяемых уравнением $y^2 - x = 0$ и удовлетворяющих условию $y(0) = 0$: $y(x) = +\sqrt{x}$ и $y(x) = -\sqrt{x}$. Геометрическим условием этой двузначности является направленность нормального вектора $\bar{n} = F'_x(0, 0)\bar{i} + F'_y(0, 0)\bar{j} = -\bar{i}$ по оси Ox . В первых же двух случаях $\bar{n} = F'_x(1, 1)\bar{i} + F'_y(1, 1)\bar{j} = -\bar{i} + 2\bar{j} \nparallel Ox$ и $\bar{n} = F'_x(1, -1)\bar{i} + F'_y(1, -1)\bar{j} = -\bar{i} - 2\bar{j} \nparallel Ox$, что, учитывая существование касательных к кривой в точках $(1, 1)$, $(1, -1)$, исключает возможность подобной двузначности (см. рис. 16.1).

Обратимся теперь к вопросу об отыскании производной функции, заданной неявно. Если можно перейти к явному заданию, то после такого перехода функция дифференцируется по обычным правилам. Если же уравнение $F(x, y) = 0$ неразрешимо в элементарных функциях относительно y (или относительно x , если рассматривается функция $x(y)$), то перейти к явному заданию функции не-

возможно. В этом случае для отыскания производной можно поступить следующим образом.

Если функция $F(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 16.2, то уравнение $F(x, y) = 0$ определяет неявно функцию, которая обращает это уравнение в тождество, т. е.

$$F(x, y(x)) \equiv 0.$$

Дифференцируя это тождество, получаем

$$dF(x, y(x)) \equiv 0,$$

а в силу инвариантности формы полного дифференциала

$$F'_x dx + F'_y dy(x) = 0.$$

Отсюда для дифференциала неявной функции получаем формулу

$$dy(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} dx,$$

а для производной —

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}. \quad (16.14)$$

ПРИМЕР 16.7. Найти производную функции $y(x)$, определяемой неявно уравнением

$$y + \sin y - x = 0. \quad (16.15)$$

Здесь $F(x, y) = y + \sin y - x = 0$, $F'_x = -1$, $F'_y = 1 + \cos y$ и по формуле (16.14) получаем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-1}{1 + \cos y} = \frac{1}{1 + \cos y}. \quad (16.16)$$

Заметим, что в этом случае перейти к явному заданию функции $y(x)$ невозможно, так как уравнение, определяющее ее, является трансцендентным и неразрешимым в элементарных функциях относительно y .

Отметим еще, что в рассматриваемом случае функция $y(x)$ является *неэлементарной*, а в общем случае это означает, что спектр исследуемых функциональных зависимостей можно расширить путем включения в него *неэлементарных* функций, определяемых неявно уравнениями.

Отыскание производных более высоких порядков от функций, задаваемых неявно, связано с особенностью, которую мы выясним, вернувшись к примеру 16.7.

Пусть для функции $y(x)$, определяемой неявно уравнением (16.16), требуется найти производную второго порядка. Непосредственно из (16.16) получим

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 + \cos y} \right)$$

Возникает проблема дифференцирования по x функции $\frac{1}{1 + \cos y}$, которая выражена не через x , а через y . Но

здесь y — это значение функции $y(x)$ и $\frac{1}{1 + \cos y(x)}$ является

сложной функцией. Поэтому для получения результата применяется правило дифференцирования сложной функции

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{1 + \cos y} \right) \cdot \frac{dy}{dx} = \\ &= -\frac{\sin y}{(1 + \cos y)^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos y} = \frac{\sin y}{(1 + \cos y)^3}. \end{aligned}$$

Здесь для выражения $\frac{dy}{dx}$ использовано (16.16).

Аналогично, применяя при необходимости правило дифференцирования сложной функции, можно находить производные второго и более высоких порядков неявных функций и в общем случае.

Идея неявного способа задания распространяется и на функции нескольких переменных.

Определение 16.2. Говорят, что уравнение

$$F(x, y, z) = 0$$

определяет неявно функцию $z(x, y)$, если

$$F(x, y, z(x, y)) \equiv 0.$$

Теорема 16.3. Пусть функция $F(x, y, z) = 0$ удовлетворяет условиям:

1) $F(x_0, y_0, z_0) = 0$;

2) частные производные F'_x, F'_y, F'_z непрерывны в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) ;

3) $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Тогда уравнение $F(x, y, z) = 0$ определяет неявно в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) единственную непрерывную функцию $z(x, y)$, удовлетворяющую условию $z(x_0, y_0) = z_0$. Эта функция имеет непрерывные частные производные в окрестности точки (x_0, y_0) .

(Доказательство теоремы не приводится.)

Для отыскания частных производных функции $z(x, y)$, продифференцируем тождество

$$F(x, y, z(x, y)) \equiv 0. \quad (16.17)$$

Получим

$$dF(x, y, z(x, y)) \equiv 0,$$

а в силу инвариантности формы полного дифференциала

$$F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz(x, y) = 0,$$

откуда следуют формулы для отыскания полного дифференциала

$$dz(x, y) = -\frac{F'_x}{F'_z} - \frac{F'_y}{F'_z} dy$$

и частных производных

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}, \quad (16.18)$$

(они являются коэффициентами при dx и dy в выражении для полного дифференциала $dz(x, y)$).

На практике для отыскания частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ можно наряду с формулами (16.18) использовать и прием, рассмотренный для их вывода, основанный на дифференцировании тождества (16.17).

ПРИМЕР 16.8. Найти частные производные функции $z(x, y)$, заданной неявно уравнением

$$e^{xyz} - xyz = 0.$$

Считая, что в это уравнение подставлена функция $z(x, y)$, обратившая его в тождество, дифференцируем это тождество:

$$e^{xyz} d(xyz) - d(xyz) = 0,$$

откуда получаем

$$(e^{xyz} - 1)d(xyz) = 0.$$

В точках, где выполняются условия теоремы 16.3, $F'_z = (e^{xyz} - 1)xy \neq 0$, следовательно, $e^{xyz} - 1 \neq 0$ (и $xy \neq 0$). Поэтому

$$d(xyz) = 0$$

или

$$yzdx + xzdy + xydz = 0.$$

Выражаем отсюда полный дифференциал

$$dz = -\frac{z}{x}dx - \frac{z}{y}dy$$

и находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z}{x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z}{y}.$$

Упражнение. Пусть функция $F(x, y, z)$ удовлетворяет условиям теоремы 16.3, из которой вытекает существование функции, определяемой неявно уравнением

$$F(x, y, z) = 0.$$

И пусть она также удовлетворяет условиям аналогичных теорем существования для функций $y(x, z)$ и $x(y, z)$, определяемых этим же уравнением.

Доказать, что

$$\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} = -1.$$

Доказательство. Из (16.18) следует

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Нетрудно сообразить, что аналогичные формулы для частных производных функций $y(x, z)$ и $x(y, z)$ будут иметь вид

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_y}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{F'_z}{F'_x}.$$

Перемножая левые и правые части этих трех равенств, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} = \left(-\frac{F'_y}{F'_z} \right) \left(-\frac{F'_x}{F'_y} \right) \left(-\frac{F'_z}{F'_x} \right) = -1,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что символы частных производных нельзя трактовать как дроби, иначе после сокращения числителей и знаменателей получилось бы неверное равенство

$$\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} = 1.$$

Контрольные вопросы

1. Пусть $z = z(u, v, w, x)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $w = w(y)$, — дифференцируемые функции. Напишите формулы для частных производных $\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_n$ и

$\frac{\partial z}{\partial y}$ сложной функции.

2. В чем заключается инвариантность формы полного дифференциала? (см. (16.7) и (16.8)).

3. Сформулируйте определение неявной функции $y(x)$, задаваемой уравнением $F(x, y) = 0$ (см. определение 16.1).

4. Сформулируйте теорему существования неявной функции $y(x)$, задаваемой уравнением $F(x, y) = 0$ (см. теорему 16.2).

5. Сформулируйте определение неявной функции $z(x, y)$, задаваемой уравнением $F(x, y, z) = 0$ (см. определение 16.2).

6. Сформулируйте теорему существования неявной функции $z(x, y)$, задаваемой уравнением $F(x, y, z) = 0$.

7. Пусть уравнение $F(x, y, z) = 0$ определяет неявные функции $x(y, z)$ и $y(x, z)$ (функция $F(x, y, z)$ удовлетворяет условиям соответствующих теорем существования). Чему равно произведение $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$?

Ответы

$$1. \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_n = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}.$$

$$7. \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = \left(-\frac{F'_y}{F'_x} \right) \left(-\frac{F'_x}{F'_y} \right) = 1.$$

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

§ 17.1. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть функция $z(x, y)$ в некоторой окрестности точки (x, y) имеет частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad (17.1)$$

или в других обозначениях

$$z'_x \quad \text{и} \quad z'_y.$$

Частные производные сами являются в общем случае функциями x и y , некоторые, в свою очередь, могут иметь частные производные:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

Если это так, то последние называются частными производными *второго порядка* функции $z(x, y)$ и обозначаются соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad \text{или} \quad z''_{xx}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad \text{или} \quad z''_{xy}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{или} \quad z''_{yx}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad \text{или} \quad z''_{yy}. \end{aligned}$$

Аналогично определяются частные производные *третьего и более высоких порядков*. При сопоставлении с ними производные (17.1) называются частными производными *первого порядка*.

ПРИМЕР 17.1. Найти частные производные 2-го порядка функции:

$$z = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5.$$

Находим сначала частные производные 1-го порядка:

$$z'_x = 3x^2 + y^2 - 5y^3; \quad z'_y = 2xy - 15xy^2 + 5y^4,$$

затем, образуя от каждой из них частные производные по x и по y , получаем:

$$z''_{xx} = 6x; \quad z''_{xy} = 2y - 15y^2;$$

$$z''_{yx} = 2y - 15y^2; \quad z''_{yy} = 2x - 30xy + 20y^3.$$

Обратите внимание на равенство $z''_{xy} = z''_{yx}$. Чуть позже вы узнаете, что это не случайное совпадение.

Частные производные, образованные дифференцированием по различным аргументам, называются *смешанными* частными производными. К их числу относятся z''_{xy} и z''_{yx} .

Среди смешанных производных одного порядка выделяют производные: 1) отличающиеся количеством дифференцирований по одноименным аргументам (например, z'''_{xxy} и z'''_{xyy}); 2) отличающиеся лишь порядком дифференцирования по аргументам (например, z'''_{xxy} , z'''_{xyx} , z'''_{yxx}).

ПРИМЕР 17.2. Найти частные производные z''_{xxy} , z''_{xyx} , z''_{yxx} функции $z = x^2y^3$.

Последовательно находим:

$$z'_x = 2xy^3, \quad z'_y = 3x^2y^2; \\ z''_{xx} = 2y^3, \quad z''_{xy} = 6xy^2, \quad z''_{yx} = 6xy^2 \quad (z''_{yy} \text{ не понадобится});$$

$$z''_{xxy} = (z''_{xx})'_y = 6x^2, \quad z''_{xyx} = (z''_{xy})'_x = 6y^2, \quad z''_{xyy} = (z''_{xy})'_y = 12xy; \\ z''_{yxx} = (z''_{yx})'_x = 6y^2.$$

Здесь смешанные частные производные, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны:

$$z''_{xxy} = z''_{xyx} = z''_{yxx} = 6y^2,$$

но не равны смешанной частной производной z''_{xyy} , отличающейся от них количеством дифференцирований по x и по y .

Последние равенства, также как и равенство $z''_{xy} = z''_{yx}$, здесь и в примере 17.1 являются следствием теоремы 17.1.

Теорема 17.1 (о равенстве смешанных частных производных). Если смешанные частные производные, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, непрерывны в некоторой точке, то их значения в этой точке равны.

Доказательство проведем для функции двух переменных $z = z(x, y)$.

1) Сначала докажем теорему для смешанных частных производных II порядка.

Пусть частные производные z''_{xy} , z''_{yx} непрерывны в точке (x, y) . Покажем, что они равны в этой точке.

Рассмотрим величины

$$\varphi(x) = z(x, y + \Delta y) - z(x, y)$$

и

$$\begin{aligned} A &= \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \\ &= z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y + \Delta y) + z(x, y). \end{aligned}$$

По теореме Лагранжа для функции $\varphi(x)$ на отрезке $[x, x + \Delta x]$ или, если $\Delta x < 0$, на отрезке $[x + \Delta x, x]$:

$$\begin{aligned} A &= \varphi'(x + \theta_1 \Delta x) \Delta x = \\ &= (z'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) - z'_x(x + \theta_1 \Delta x, y)) \Delta x, \\ 0 &< \theta_1 < 1. \end{aligned}$$

Рассматривая теперь z'_x как функцию y на отрезке $[y, y + \Delta y]$ или, если $\Delta y < 0$, на отрезке $[y + \Delta y, y]$ и, применяя теорему Лагранжа, получаем

$$A = z''_{xy}(x + \theta_1 \Delta x, y + \theta_2 \Delta y) \Delta y \Delta x. \quad (17.2)$$

Далее введем функцию

$$\psi(y) = z(x + \Delta x, y) - z(x, y)$$

и заметим, что

$$\psi(y + \Delta y) - \psi(y) = A.$$

Применяя дважды теорему Лагранжа, теперь получаем

$$A = \psi'(y + \theta_3 \Delta y) \Delta y =$$

$$\begin{aligned}
 &= (z'_y(x + \Delta x, y + \theta_3 \Delta y) - z'_y(x, y + \theta_3 \Delta y)) \Delta y = \\
 &= z''_{yx}(x + \theta_4 \Delta x, y + \theta_3 \Delta y) \Delta x \Delta y; \quad 0 < \theta_3 < 1, \quad 0 < \theta_4 < 1.
 \end{aligned}$$

Сравнивая с (15.2), приходим к равенству

$$z''_{xy}(x + \theta_1 \Delta x, y + \theta_2 \Delta y) = z''_{yx}(x + \theta_4 \Delta x, y + \theta_3 \Delta y).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ и учитывая непрерывность частных производных z''_{xy}, z''_{yx} в точке (x, y) , заключаем, что в этой точке $z''_{xy} = z''_{yx}$.

2) Как распространить теорему на частные производные произвольного порядка легко понять, рассмотрев следующие примеры.

В точках непрерывности

$$z'''_{xyx} = z'''_{yxx}, \quad \text{так как}$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} \Rightarrow (z''_{xy})'_x = (z''_{yx})'_x \Rightarrow z'''_{xyx} = z'''_{yxx};$$

$$z'''_{xyy} = z'''_{yyx}, \quad \text{так как}$$

$$z'''_{xyy} = (z''_{xy})'_y = (z''_{yx})'_y = z'''_{yxy} = (z'_y)''_{xy} = (z'_y)''_{yx} = z'''_{yyx};$$

и т. п. Теорема доказана.

При нарушении условия непрерывности утверждение теоремы 17.1 может не иметь места. Например, для функции $z = x^2 + \sqrt[3]{y}$:

$$z'_x = 2x, \quad z'_y = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} \quad (y \neq 0);$$

$$z''_{xy} = 0, \quad z''_{yx} = 0 \quad (y \neq 0);$$

и $z''_{xy} = z''_{yx}$ всюду, кроме точек на оси Ox , в которых $y = 0$, и частная производная z'_y не определена, а вместе с нею не определена и, следовательно, разрывна смешанная частная производная z''_{yx} .

Определения частных производных высших порядков и теорема 17.1 обобщаются и на функции с большим, чем два, количеством аргументов.

§ 17.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть функция $z(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y) и ее аргументам x, y даны приращения соответственно dx, dy . Эти приращения вызывают приращение функции Δz , главная линейная часть которого, как вам уже известно, называется полным дифференциалом функции и выражается через частные производные

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (17.3)$$

При сопоставлении с дифференциалами высших порядков полный дифференциал называется *дифференциалом первого порядка*. Если функция $z(x, y)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки (x, y) , то dz является функцией x, y . Кроме того, dz зависит также от dx и dy .

Зафиксируем dx, dy (считаем их постоянными). Тогда dz будет функцией только аргументов x и y . Допустим, что эта функция дифференцируема в точке (x, y) и ее аргументам даны приращения dx, dy (причем, совпадающие с теми, которые вызвали приращение функции Δz с дифференциалом dz). Эти приращения вызовут приращение Δdz , главная линейная часть которого является полным дифференциалом $d(dz)$. Этот полный дифференциал называется *дифференциалом второго порядка* функции $z(x, y)$ в точке (x, y) и обозначается символом $d^2 z$ (читается: d два z).

Таким образом,

$$d^2 z = d(dz) \text{ при постоянных } dx, dy.$$

Покажем, что дифференциал второго порядка выражается через частные производные второго порядка.

Применяя к (17.3) правила дифференцирования $2^\circ, 1^\circ$ (см. лекцию № 16) и учитывая постоянство dx и dy , получаем:

$$\begin{aligned} d^2 z &= d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = dx \cdot d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + dy \cdot d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \\ &= dx \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dy\right) + \end{aligned}$$

$$+ dy \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) dy \right\} \quad (17.4)$$

Если смешанные частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ непрерывны в точке (x, y) и, следовательно, равны, то полученный результат приводится к виду:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \quad (17.5)$$

Формула (17.5) напоминает школьную формулу для возведения в квадрат суммы двух величин. Это обстоятельство послужило основанием для использования символической формы для нее:

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z. \quad (17.6)$$

Если скобку в правой части (17.6) возвести в квадрат по правилам школьной алгебры, а под произведением символов производных $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ на z понимать производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, то из (17.6) получится (17.5).

Формуле (15.6) можно придать и иной, лишенный символизма, смысл. Если $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ рассматривать как обозначения дифференциальных операторов, результатами действия которых на z являются частные производные соответственно $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, то

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) z = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

и

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) \cdot dy = \\
&= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy \right) dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy \right) dy,
\end{aligned}$$

что и приводит, очевидно, к формуле (17.5). На основании изложенного формулу (17.6) называют представлением $d^2 z$ в операторной форме.

Если $d^2 z$ является дифференцируемой функцией x, y в окрестности точки (x, y) , то аналогично вышеизложенному вводится понятие дифференциала третьего порядка:

$$d^3 z = d(d^2 z) \text{ при постоянных } dx, dy.$$

Вообще, дифференциал n -го порядка определяется как дифференциал от дифференциала $(n-1)$ -го порядка:

$$d^n z = d(d^{n-1} z) \text{ при постоянных } dx, dy,$$

а его связь с частными производными n -го порядка выражается формулой:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z. \quad (17.7)$$

Следует однако иметь в виду, что для сложной функции с промежуточными аргументами x, y эта формула при $n \geq 2$ может оказаться неверной.

Рассмотрим, например, сложную функцию

$$z(x(t), y(t)) = z_{ca}(t)$$

с основным аргументом t . В этом случае дифференциал $d^n z_{ca}$ как главная линейная часть приращения $\Delta d^{n-1} z_{ca}$ вызывается приращением dt основного аргумента t , и dt рассматривается как постоянная величина, а дифференциалы промежуточных аргументов $dx = x'(t)dt, dy = y'(t)dt$ в общем случае являются переменными (зависящими от t).

Поэтому в силу инвариантности формы дифференциала 1-го порядка

$$dz_{\text{сл}} = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

но уже в выражении для $d^2 z_{\text{сл}}$ появятся дополнительные слагаемые

$$\begin{aligned} d^2 z_{\text{сл}} &= d(dz_{\text{сл}}) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = \\ &= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial z}{\partial x} d(dx) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial z}{\partial y} d(dy) \end{aligned} \quad (17.8)$$

(сравните с формулой (17.4), в которой $d^2 z = d^2 z_{\text{вн}}$ — дифференциал 2-го порядка внешней функции) и $d^2 z_{\text{сл}} \neq d^2 z_{\text{вн}}$.

Это означает, что дифференциал II порядка в общем случае свойством инвариантности не обладает. По аналогичным причинам формула (17.7) для сложной функции при $n > 2$ в общем случае не сохраняется и, следовательно, дифференциалы порядков $n \geq 2$ не обладают свойством инвариантности.

Однако если $x(t)$ и $y(t)$ являются линейными функциями t , например если

$$x(t) = x_0 + ht, \quad y(t) = y_0 + kt, \quad (17.9)$$

где x_0, y_0, h, t — постоянные, то их дифференциалы $dx = hdt$, $dy = kdt$ не зависят от t (постоянны), вследствие чего $d(dx) = 0$, $d(dy) = 0$, формула (15.8) превращается в (17.4) и $d^2 z_{\text{сл}} = d^2 z_{\text{вн}}$. По этой же причине $d^n z_{\text{сл}} = d^n z_{\text{вн}}$ при $n \geq 3$, т. е. в этом случае дифференциалы всех порядков обладают свойством инвариантности:

$$d^n z_{\text{сл}} = d^n z_{\text{вн}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (17.10)$$

Рассмотренные определения дифференциалов высших порядков и их свойства распространяются и на функции с большим, чем два, количеством аргументов.

§ 17.3. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Обобщим формулу Тейлора на функцию двух переменных.

Пусть функция $z(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до $(n + 1)$ -го порядка включительно в некоторой δ -окрестности точки (x_0, y_0) .

Проведем через эту точку прямую и пусть ее параметрические уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + ht \\ y = y_0 + kt \end{cases} \quad (17.11)$$

где h и k — постоянные, а t — параметр.

На прямой функцию $z(x, y)$ можно рассматривать как сложную функцию:

$$z(x_0 + ht, y_0 + kt) = z_{cl}(t). \quad (17.12)$$

По формуле Тейлора для функции одного переменного в окрестности точки $t = 0$:

$$z_{cl}(t) = z_{cl}(0) + \frac{z'_{cl}(0)}{1!}t + \frac{z''_{cl}(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{z^{(n)}_{cl}(0)}{n!}t^n + R_{n+1} \quad (17.13)$$

где R_{n+1} — остаточный член, имеющий вид

$$R_{n+1} = \frac{z^{(n+1)}_{cl}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1 \quad (17.14)$$

в форме Лагранжа и

$$R_{n+1} = o(t^n) \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0 \quad (17.15)$$

в формуле Пеано.

Заменим в формуле (17.13) t на dt и перенесем $z_{cl}(0)$ в левую часть равенства.

Из (17.12), учитывая (17.11), получаем:

$$\begin{aligned} z_{cl}(dt) &= z(x_0 + hdt, y_0 + kdt) = z(x_0 + dx, y_0 + dy), \\ z_{cl}(0) &= z(x_0, y_0), \end{aligned}$$

$$z_{cl}(dt) - z_{cl}(0) = z(x_0 + dx, y_0 + dy) - z(x_0, y_0) = \Delta z.$$

Здесь Δz можно рассматривать как приращение функции $z(x, y)$, вызванное приращениями аргументов, равными

dx и dy (величину $|dt|$, а вместе с нею и величины $|dx|$, $|dy|$ будем считать достаточно малыми, чтобы точка $(x_0 + dx, y_0 + dy)$ находилась в δ -окрестности точки (x_0, y_0) .)

Далее,

$$z_{\text{сл}}^{(n)}(0)dt^n = d^n z_{\text{сл}}(0),$$

а так как в нашем случае форма дифференциалов инвариантна (см. (17.9) и (17.10)), то

$$d^n z_{\text{сл}}(0) = d^n z_{\text{вн}} \Big|_{t=0} = d^n z(x_0, y_0) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned} d^{n+1} z_{\text{сл}}(\theta dt) &= d^{n+1} z(x_0 + \theta h dt, y_0 + \theta k dt) = \\ &= d^{n+1} z(x_0 + \theta dx, y_0 + \theta dy). \end{aligned}$$

В результате преобразований из (17.13) и (17.14) получим формулу Тейлора для функции $z(x, y)$:

$$\Delta z = \frac{dz(x_0, y_0)}{1!} + \frac{d^2 z(x_0, y_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n z(x_0, y_0)}{n!} + R_{n+1} \quad (17.16)$$

и остаточный член в форме Лагранжа

$$R_{n+1} = \frac{d_{\text{сл}}^{n+1}(x_0 + \theta dx, y_0 + \theta dy)}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (17.17)$$

Для получения остаточного члена в форме Пеано введем величину $\rho = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Так как $dx = hdt$, $dy = kdt$, то $\rho = \sqrt{h^2 + k^2} |dt|$ и, следовательно,

$$R_{n+1} = o(dt^n)$$

$$\text{при } dt \rightarrow 0 \Leftrightarrow R_{n+1} = o(\rho^n) \text{ при } \rho \rightarrow 0. \quad (15.18)$$

Последнее и является выражением остаточного члена в форме Пеано.

Формула Тейлора в виде (17.16) выражает приращение функции через ее дифференциалы. Вам уже известно, что дифференциал I порядка является главной частью приращения функции. Сумма всех остальных слагаемых является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с ρ при $\rho \rightarrow 0$ ($R_2 = o(\rho)$ при $\rho \rightarrow 0$). Добавление каждого следующего слагаемого с дифференциалом более высоко-

го порядка уточняет приращение Δz , учитывая величины все более и более высокого порядка малости ($R_3 = o(\rho^2)$, $R_4 = o(\rho^3)$ при $\rho \rightarrow 0$ и т. д.).

Формула Тейлора в виде (17.16) легко распространяется на функции с любым числом аргументов.

Другой вид формулы Тейлора позволяет дать ей иную интерпретацию.

Если положить $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$, то $\Delta z = z(x, y) - z(x_0, y_0)$, а из (17.7) получим

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0) \right)^n z \quad (n = 1, 2, \dots)$$

и формула Тейлора (17.16) приводится в виде:

$$\begin{aligned} z(x, y) &= z(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0) \right) z(x_0, y_0) + \dots + \\ &= \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0) \right)^n z(x_0, y_0) + R_{n+1}. \end{aligned} \quad (17.19)$$

в таком виде формулу Тейлора называют *разложением функции $z(x, y)$ по степеням разностей $(x - x_0)$, $(y - y_0)$* .

Формула Тейлора находит многочисленные применения в приближенных вычислениях, а в нашем курсе она используется в теории экстремумов (см. лекцию № 18).

Контрольные вопросы

1. Сколько частных производных 2-го и 3-го порядков можно образовать у функции трех переменных?
2. Сформулируйте теорему о равенстве смешанных частных производных (см. теорему 17.1).
3. Как связаны дифференциалы высших порядков с частными производными соответствующих порядков? (см. формулы (17.5)–(17.7)).
4. При каких условиях дифференциалы высших порядков обладают свойством инвариантности (см. формулы (17.9), (17.10)).
5. Напишите формулу Тейлора и выражения для ее остаточного члена (см. формулы (17.16)–(17.18)).

Ответ

1. 9 и 27, соответственно.

МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В этой лекции рассматривается теория экстремумов функции нескольких переменных.

Графики функции $z = f(x, y)$ на рис. 18.1 дают представление о максимуме и минимуме функции двух переменных.

На левом рисунке значение функции в точке M_0 является наибольшим, а на правом рисунке — наименьшим, по сравнению с ее значениями во всех точках вблизи точки M_0 . В первом случае говорят, что функция имеет максимум, а во втором — минимум в точке M_0 .

Сопоставим знаки приращений Δz , которые получает функция при смещении из точки M_0 в точку M . Очевидно, в

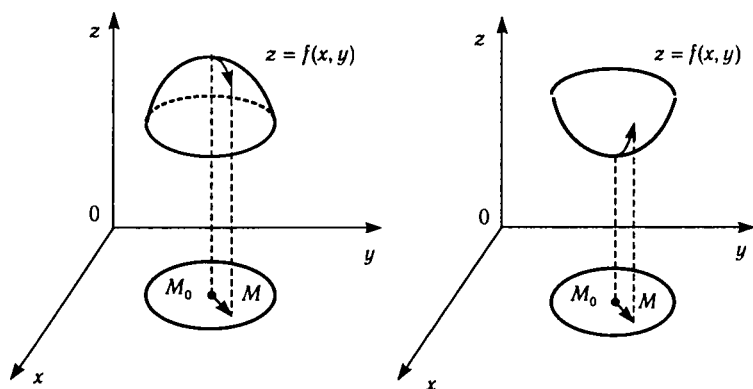


Рис. 18.1

случае максимума $\Delta z < 0$, а в случае минимума $\Delta z > 0$. Это свойство приращения Δz используется при формализации понятий максимума и минимума функции.

Определение 18.1. Пусть функция нескольких переменных $z = u(M)$ определена в некоторой окрестности точки M_0 и $\Delta z = u(M) - u(M_0)$ — приращение, которое функция получает при смещении из точки M_0 в точку M .

Если $\exists \delta(M_0) : \forall M \in \delta(M_0) \quad \Delta z < 0$ (или $\Delta z > 0$), то точка M_0 называется *точкой максимума* (или *минимума*) функции $z = u(M)$, а значение функции в этой точке $z = u(M_0)$ называется *максимумом* (или *минимумом*) функции.

$$M_0 \text{ — точка } \max u(M) \Leftrightarrow u(M_0) = \max u(M)$$

$$M_0 \text{ — точка } \min u(M) \Leftrightarrow u(M_0) = \min u(M)$$

Определение 18.2. Точки максимума и минимума функции называются ее *точками экстремума*, а максимумы и минимумы — *экстремумами* функции.

$$M_0 \text{ — точка } \operatorname{extr} u(M) \Leftrightarrow u(M_0) = \operatorname{extr} u(M)$$

§ 18.1. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

Для экстремума функции одного переменного $y = f(x)$ в точке x_0 необходимым является условие

$$f'(x_0) = 0 \text{ или не существует.}$$

Для функции нескольких переменных это условие переносится на ее частные производные.

Теорема 18.1. Если функция нескольких переменных имеет экстремум в некоторой точке, то в этой точке каждая ее частная производная равна нулю или не существует.

Доказательство проведем для функции двух переменных $f(x, y)$. Пусть она имеет экстремум в точке (x_0, y_0) .

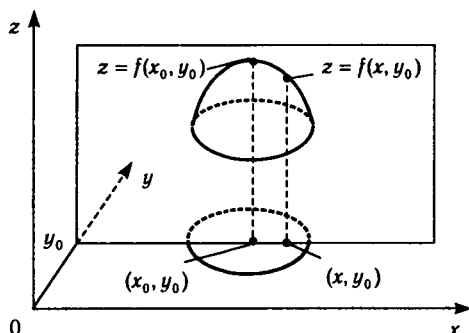


Рис. 18.2

Рассмотрим функцию одного переменного $f(x, y_0)$. Ее графиком является сечение поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $y = y_0$ и, очевидно, x_0 является точкой экстремума функции $f(x, y_0)$ (рис. 18.2).

В силу необходимого условия экстремума для функции одного переменного

$$\left. \frac{df(x, y_0)}{dx} \right|_{x=x_0} = 0 \quad \text{или} \quad \exists,$$

откуда следует, что частная производная

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{или} \quad \exists. \quad (18.1)$$

Аналогично, рассматривая функцию $f(x_0, y)$, получаем

$$f'_y(x_0, y_0) = 0 \quad \text{или} \quad \exists. \quad (18.2)$$

Из доказанной теоремы следует, что (18.1) и (18.2) являются необходимыми условиями экстремума функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) .

Заметим, что если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) , то частные производные f'_x, f'_y существуют в этой точке и, следовательно, $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$, а отсюда вытекает, что и полный дифференциал

$$dz(x_0, y_0) = 0. \quad (18.3)$$

Таким образом, необходимым условием экстремума дифференцируемой функции в некоторой точке является равенство нулю ее полного дифференциала в этой точке.

Определение 18.3. Внутренние точки из области определения функции, в которых выполняются необходимые условия экстремума, называются *критическими*, а те из них, в которых все частные производные равны нулю, — *стационарными* точками функции.

Так же как для функции одного переменного необходимые условия экстремума функции нескольких переменных не являются достаточными. Это означает, что в критической точке функции экстремума может и не быть. Примером такой функции является функция

$$z = x^2 - y^2.$$

Ее частные производные $z'_x = 2x$, $z'_y = -2y$ равны нулю при $x = 0$ и $y = 0$. Следовательно, точка $O(0,0)$ является критической (стационарной) точкой функции. Однако экстремума в этой точке у функции нет. В самом деле, графиком функции является гиперболический параболоид («седло»), рис. 18.3.

Значение функции в точке O равно $z(0,0) = 0$. Но в любой окрестности $\delta(O)$, как бы мала она ни была, есть точки $M_1(x,0)$, в которых $z(x,0) = x^2 > 0$ при $x \neq 0$, и точки $M_2(0,y)$, в которых $z(0,y) = -y^2 < 0$ при $y \neq 0$. Значит, при смещении из точки O в точки M_1 приращение функции $\Delta z > 0$, а при смещении в точки M_2 — $\Delta z < 0$.

Следовательно, не существует такая окрестность $\delta(O)$, чтобы при смещении из точки O в любую ее точку приращение функции Δz было бы только больше 0, либо только меньше 0. Это значит, что в точке O экстремума у функции нет.

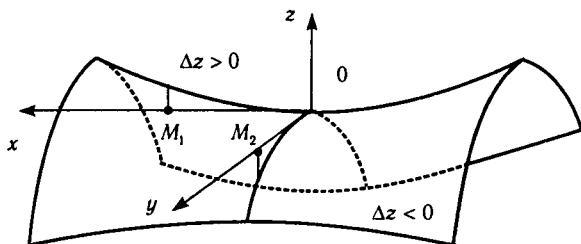


Рис. 18.3

§ 18.2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно в некоторой δ -окрестности ее стационарной точки $M_0(x_0, y_0)$, $M(x_0 + dx, y_0 + dy)$ — точка из этой окрестности;
 $\Delta z = f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0)$ — приращение функции, которое она получает при смещении из точки M_0 в точку M ;

$\rho = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ — расстояние между точками M_0 и M .

По формуле Тейлора

$$\Delta z = dz(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 z(x_0, y_0) + o(\rho^2) \quad \text{при } \rho \rightarrow 0.$$

Так как (x_0, y_0) — стационарная точка функции $z = f(x, y)$, то $dz(x_0, y_0) = 0$.

Допустим, что $d^2 z(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда при достаточно малых $\rho \neq 0$ знак Δz будет совпадать со знаком $d^2 z(x_0, y_0)$.

Если $d^2 z(x_0, y_0) > 0$ при любом $\rho \neq 0$, то и $\Delta z > 0$ для всех точек M из достаточно малой окрестности $\dot{\delta}(M_0)$. В этом случае функция $z = f(x, y)$ имеет минимум в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Если же $d^2 z(x_0, y_0) < 0$ при любом $\rho \neq 0$, то $\Delta z < 0$ — и в точке $M_0(x_0, y_0)$ у функции максимум.

Полученный результат распространяется на функции с любым числом аргументов.

Таким образом, достаточным условием экстремума функции нескольких переменных в ее стационарной точке является знакоопределенность (положительная или отрицательная определенность) дифференциала второго порядка в этой точке.

Достаточному условию экстремума можно придать и другой вид, более удобный для практического использования.

Пусть $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$.

Тогда (см. (17.5)):

$$d^2 z(x_0, y_0) = A dx^2 + 2B dx dy + C dy^2. \quad (18.4)$$

Умножим это равенство почленно на A :

$$Ad^2 z(x_0, y_0) = A^2 dx^2 + 2AB dx dy + AC dy^2.$$

Затем выделим полный квадрат:

$$Ad^2 z(x_0, y_0) = (Adx + Bdy)^2 + (AC - B^2)dy^2. \quad (18.5)$$

Так как $(Adx + Bdy)^2 \geq 0$, то знак произведения $Ad^2 z(x_0, y_0)$ будет зависеть от величины $(AC - B^2)$.

Рассмотрим три случая.

1°. $AC - B^2 > 0$.

Заметим сразу, что в этом случае $AC > 0$ и поэтому A и C не равны нулю и имеют одинаковые знаки.

Далее из (18.5) следует, что в рассматриваемом случае

$$Ad^2 z(x_0, y_0) > 0 \quad \text{при } \rho \neq 0.$$

(Если $dy = 0$, то $dx \neq 0$, так как $\rho \neq 0$, и $Ad^2 z(x_0, y_0) = (Adx)^2 > 0$.)

Если $A > 0$, то $d^2 z(x_0, y_0) > 0$ при $\rho \neq 0$, и функция $z = f(x, y)$ имеет минимум в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Если $A < 0$, то и $d^2 z(x_0, y_0) < 0$ при $\rho \neq 0$, и функция $z = f(x, y)$ имеет максимум в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Таким образом, в рассматриваемом случае функция всегда имеет экстремум в точке $M_0(x_0, y_0)$. Вид экстремума определяется по знаку A (или по знаку C , так как знаки C и A совпадают).

2°. $AC - B^2 < 0$.

Пусть $A \neq 0$. Тогда из (18.5) следует, что при $\rho \neq 0$ на прямой $Adx + Bdy = 0$ величина $Ad^2 z(x_0, y_0) < 0$, а на прямой $dy = 0$ она больше нуля (см. рис. 18.4).

Знаки $d^2 z(x_0, y_0)$ на этих прямых при $\rho \neq 0$ противоположны, и в любой выколотой окрестности точки M_0 , как бы мала она ни была, найдутся точки, при смещении в которые из точки M_0 приращения функции Δz будут тоже противоположных знаков. Следовательно, в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремума у функции нет.

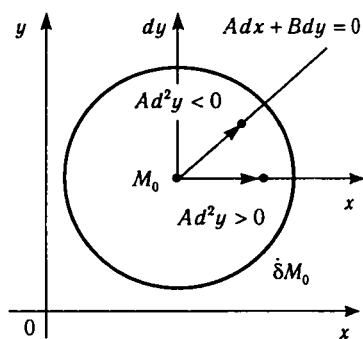


Рис. 18.4

Если $A = 0$ (при этом $B \neq 0$, так как $AC - B^2 < 0$), то из (18.4) получим:

$$d^2 z(x_0, y_0) = 2B dx dy + C dy^2.$$

Нетрудно убедиться, что если $\rho \neq 0$, то дифференциалы $d^2 z(x_0, y_0)$ будут разных знаков при $C = 0$ на прямых $dy = dx$ и $dy = -dx$, а при $C \neq 0$ на прямых $dx = 0$ и $dx = -\frac{C}{B} dy$.

Следовательно, и при $A = 0$ экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$ нет.

Таким образом, если $AC - B^2 < 0$, то функция $z = f(x, y)$ не имеет экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$.

3°. $AC - B^2 = 0$.

В этом случае, чтобы установить наличие или отсутствие экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$ нужно проводить дополнительное исследование, так как при $AC - B^2 = 0$ одни функции имеют экстремум в точке M_0 , а другие нет (см. ниже примеры 18.2, 18.3).

Сведем полученные результаты в таблицу.

(x_0, y_0) — стационарная точка функции $f(x, y)$. $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$				
$AC - B^2$	> 0		< 0	$= 0$
A	< 0	> 0	$\forall$	$\forall$
extr $f(x, y)$ в т. (x_0, y_0)	max	min	нет	требуется дополнительное исследование

ПРИМЕР 18.1. Исследовать на экстремум функцию

$$z = y^3 + 2x^2 - 12xy + 4x - 12y + 2.$$

1) Найдем стационарные точки функции:

$$z'_x = 4x - 12y + 4, \quad z'_y = 3y^2 - 12x - 12.$$

Для отыскания координат стационарных точек получаем систему:

$$\left. \begin{aligned} 4x - 12y + 4 &= 0 \\ 3y^2 - 12x - 12 &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} x - 3y + 1 &= 0 \\ y^2 - 4x - 4 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Выражаем x из первого уравнения:

$$x = 3y - 1$$

и исключаем его из второго:

$$y^2 - 12y = 0.$$

Корни этого уравнения: $y_1 = 0, y_2 = 12$.

Соответствующие значения x : $x_1 = -1, x_2 = 35$.

Стационарные точки: $M_1(-1, 0), M_2(35, 12)$.

2) Проверим выполняются ли достаточные условия экстремума в стационарных точках:

$$z''_{xx} = 4, z''_{xy} = -12, z''_{yy} = 6y.$$

В точке $M_1(-1, 0)$: $A = 4, B = -12, C = 0$; $AC - B^2 = 0 - 144 < 0$. С помощью таблицы устанавливаем, что в точке M_1 экстремума нет.

В точке $M_2(35, 12)$: $A = 4, B = -12, C = 72$; $AC - B^2 = 4 \cdot 72 - 144 > 0$. Следовательно, экстремум есть (см. таблицу). Так как $A > 0$, то (снова см. таблицу) $M_2(35, 12)$ — точка минимума. Сам минимум равен

$$z(35, 12) = 12^3 + 2 \cdot 35^2 - 12 \cdot 35 \cdot 12 + 4 \cdot 35 - 12 \cdot 12 + 2 = -864.$$

ПРИМЕР 18.2. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^4 + y^4.$$

1) $z'_x = 4x^3, z'_y = 4y^3 \Rightarrow O(0, 0)$ — стационарная точка.

2) $z''_{xx} = 12x^2, z''_{xy} = 0, z''_{yy} = 12y^2$.

В точке $O(0, 0)$: $A = 0, B = 0, C = 0, AC - B^2 = 0$ (см. таблицу).

Требуется дополнительное исследование. Проведем его, используя непосредственно определение 18.1 максимума и минимума.

В точке $O(0, 0)$ $z = 0$, а в выколотой окрестности $\delta(O)$ этой точки $z = x^4 + y^4 > 0$, так как x и y одновременно

в нуль не обращаются. Следовательно, для любой точки $M(x, y) \in \dot{X}(O)$ $\Delta z > 0$ и, по определению 18.1, $O(0, 0)$ — точка минимума функции, а сам $\min z = 0$.

ПРИМЕР 18.3. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^4 - y^4.$$

1) $z'_x = 4x^3$, $z'_y = -4y^3 \Rightarrow O(0, 0)$ — стационарная точка.

2) $z''_{xx} = 12x^2$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{yy} = -12y^2$.

В точке $O(0, 0)$: $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$; $AC - B^2 = 0$ (см. таблицу).

3) Дополнительное исследование (с помощью определения 16.1).

В точке $O(0, 0)$ $z = 0$, а в любой выколотой окрестности $\dot{X}(O)$, как бы мала она ни была, есть точки $M_1(x, 0)$, в которых $z = x^4 > 0$ ($x \neq 0$), и точки $M_2(0, y)$, в которых $z = -y^4 < 0$ ($y \neq 0$). Поэтому приращение функции $\Delta z > 0 \quad \forall M_1 \in \dot{X}(O)$ и $\Delta z < 0 \quad \forall M_2 \in \dot{X}(O)$. Следовательно, Δz не является знакоопределенным. Это значит, что в точке $O(0, 0)$ экстремума нет.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определения максимума, минимума функции и ее экстремума (см. определения 18.1 и 18.2).

2. Сформулируйте теорему о необходимых условиях экстремума функции (см. теорему 18.1). Как можно выразить необходимое условие экстремума дифференцируемой функции? (см. (18.3)).

3. Сформулируйте определение критических и стационарных точек функции (см. определение 18.3).

4. Всякая ли критическая точка функции является ее точкой экстремума?

5. Каким должен быть дифференциал второго порядка функции в ее стационарной точке, чтобы можно было гарантировать существование экстремума функции в этой точке?

6. Как можно установить наличие или отсутствие экстремума функции двух переменных по ее частным производным второго порядка? (см. таблицу).

Ответы

4. Не всякая (см. рис. 18.3 и пример 18.3).

5. Дифференциал второго порядка функции должен быть знакоопределенным (положительно или отрицательно знакоопределенным).

УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

В этой лекции рассматриваются понятия условного экстремума и методы его отыскания.

Понятие условного экстремума не имеет смысла для функции одного переменного и приложимо только к функциям нескольких переменных. Выясним суть понятия, рассматривая для простоты функцию двух переменных.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области D и ее аргументы связаны условием

$$F(x, y) = 0, \quad (19.1)$$

которое называют *уравнением связи*.

Допустим, что это уравнение определяет неявно функцию $y(x)$. Тогда можно рассматривать сложную функцию $f(x, y(x)) = u(x)$. Если эта функция имеет экстремум в точке x_0 и $y(x_0) = y_0$, то говорят, что точка (x_0, y_0) является точкой *условного экстремума* функции $f(x, y)$, аргументы которой удовлетворяют уравнению связи (19.1), или короче точкой условного экстремума функции $f(x, y)$ при $F(x, y) = 0$.

Если уравнение (19.1) можно разрешить относительно y и перейти от неявного задания функции $y(x)$ к явному, то отыскание условных экстремумов в рассматриваемом случае сводится к отысканию обычных, или безусловных экстремумов функции $u(x)$.

ПРИМЕР 19.1. Исследовать на условный экстремум функцию

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{при} \quad x + y - 2 = 0.$$

Разрешим уравнение связи относительно y :

$$y = 2 - x$$

и исследуем на экстремум функцию

$$u(x) = x^2 + (2 - x)^2 = 2x^2 - 4x + 4.$$

Ее производная

$$u'(x) = 4x - 4.$$

Приравнивая производную к нулю, найдем стационарную точку $x_0 = 1$. Исследуем знаки производной (см. рис. 19.1).

Так как производная при переходе через точку $x_0 = 1$ меняет знак с «-» на «+», то в этой точке функция $u(x)$ имеет минимум, и он равен $u(1) = 2$.

Из уравнения связи определяем $y_0 = 2 - x_0 = 1$ и заключаем, что $(1, 1)$ — точка условного минимума функции $z = x^2 + y^2$ при $x + y - 2 = 0$, причем он равен $z(1, 1) = u(1) = 2$.

Выясним геометрический смысл условного экстремума функции.

В примере 19.1 графиком функции является параболоид вращения $z = x^2 + y^2$. Уравнение связи определяет на плоскости Oxy прямую $x + y - 2 = 0$ (рис. 19.2), а в пространстве $Oxyz$ плоскость, проходящую через эту прямую параллельно оси Oz . Построим линию пересечения этой плоскости с параболоидом. Аппликаты точек этой линии

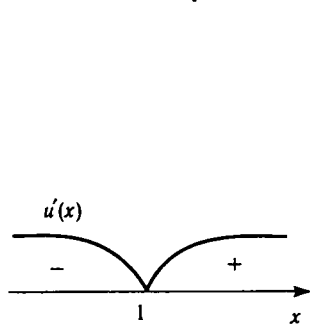


Рис. 19.1

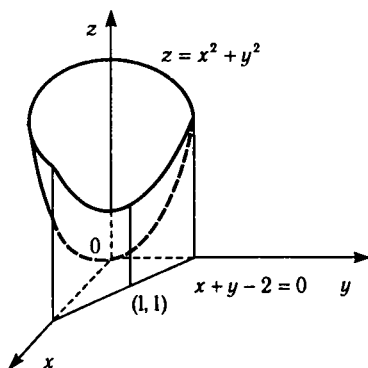


Рис. 19.2

выражают значения функции $z = x^2 + y^2$ при $x + y - 2 = 0$. Условный минимум выражается аппликатой самой нижней точки этой линии, а проекция этой точки на плоскость Oxy является точкой условного минимума $(1, 1)$.

Обратите внимание, что в любой окрестности точки $(1, 1)$ есть точки, в которых значения функции меньше, чем значение в точке $(1, 1)$. Последнее является наименьшим лишь среди значений функции в точках, расположенных на прямой $x + y - 2 = 0$. В этом и заключается *условность* минимума. Он является минимумом, когда функция рассматривается не всюду в области определения, а лишь в точках линии, определяемой уравнением связи.

Если же функцию $z = x^2 + y^2$ рассматривать во всей области определения, то очевидно, что точкой ее минимума (безусловного) будет $(0, 0)$ и сам безусловный минимум равен $z(0, 0) = 0$.

Такую же геометрическую интерпретацию можно дать и в общем случае: условными экстремумами функции $z = f(x, y)$ при $F(x, y) = 0$ являются ее экстремумы на линии, определяемой уравнением $F(x, y) = 0$.

ПРИМЕР 19.2. Исследовать на условный экстремум функцию

$$z = x^2 - y^2 \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 = 4.$$

В этом случае исследование методом, рассмотренным в примере 19.1, осложняется тем, что уравнение связи определяет неявно не одну функцию $y(x)$, а две: $y = +\sqrt{4 - x^2}$ и $y = -\sqrt{4 - x^2}$. Кроме того, в точках $x = \pm 2$ производные этих функций бесконечны. Поэтому вблизи точек $(2, 0)$, $(-2, 0)$ уравнение связи придется разрешать относительно x и рассматривать функцию $x(y)$.

Избежать указанных осложнений позволяет другой метод отыскания условных экстремумов, который носит имя замечательного французского математика Ж. Л. Лагранжа, с одной из теорем которого Вы уже встречались в дифференциальном исчислении. Обратимся к рассмотрению этого метода, а затем мы вернемся к примеру 19.2.

§ 19.1. МЕТОД ЛАГРАНЖА ОТЫСКАНИЯ УСЛОВНЫХ ЭКСТРЕМУМОВ

Пусть дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ исследуется на условный экстремум при $F(x, y) = 0$. Функция $F(x, y)$ пусть удовлетворяет условиям теоремы существования неявной функции $y(x)$ и $F'_y \neq 0$ в точке x_0, y_0 условного экстремума. Тогда условный экстремум функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) при $F(x, y) = 0$ является безусловным экстремумом функции

$$u(x) = f(x, y(x))$$

в точке x_0 .

Так как функция $u(x)$ дифференцируемая (см. теорему 16.2), то x_0 является стационарной точкой функции $u(x)$ и в этой точке $u'(x_0) = 0$. Отсюда следует, что

$$f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)y'(x_0) = 0. \quad (19.2)$$

Здесь $y_0 = y(x_0)$.

Из тождества $F(x, y(x)) \equiv 0$ (см. определение 16.1 неявной функции) вытекает равенство

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y)y'(x) = 0,$$

верное для всех x вблизи точки x_0 и соответствующих $y = y(x)$. В частности,

$$F'_x(x_0, y_0) + F'_y(x_0, y_0)y'(x_0) = 0. \quad (19.3)$$

Умножим (19.3) на множитель λ (он называется множителем Лагранжа) и сложим результат умножения почленно с (19.2):

$$f'_x(x_0, y_0) + \lambda F'_x(x_0, y_0) + [f'_y(x_0, y_0) + \lambda F'_y(x_0, y_0)] = 0.$$

Выберем λ так, чтобы квадратная скобка обратилась в нуль, т. е. положим $\lambda = \lambda_0 = -\frac{f'_y(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$. Тогда получим

условие

$$f'_x(x_0, y_0) + \lambda F'_x(x_0, y_0) = 0.$$

Если к этим двум условиям добавить уравнение связи, которому удовлетворяют координаты точки (x_0, y_0) :

$$F(x_0, y_0) = 0,$$

то получим систему трех уравнений

$$\left. \begin{aligned} f'_x(x, y) + \lambda F'_x(x, y) &= 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda F'_y(x, y) &= 0 \\ F(x, y) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19.4)$$

для которой тройка (x_0, y_0, λ_0) является решением.

Таким образом, чтобы точка (x_0, y_0) была точкой условного экстремума функции $f(x, y)$ при $F(x, y) = 0$ необходимо, чтобы ее координаты x_0, y_0 вместе с соответствующим значением $\lambda_0 = \frac{f'_y(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$ были решением (19.4). Суть метода

Лагранжа сводится к отысканию решений этой системы.

Если (x_0, y_0, z_0) — решение системы (19.4), то точку (x_0, y_0) будем называть *стационарной точкой* функции $f(x, y)$ при $F(x, y) = 0$. Все точки, в которых функция имеет условные экстремумы будут находиться среди этих стационарных точек. Но, разумеется, среди них могут быть и точки, в которых условных экстремумов нет. Вопрос о достаточных условиях условного экстремума мы оставляем в стороне, но заметим, что при решении практических задач во многих случаях наличие условного экстремума в стационарной точке определяется существом задачи.

Отметим еще одно важное обстоятельство, характеризующее метод Лагранжа.

Если $F'_y(x_0, y_0) = 0$, но $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$, то вместо неявной функции $y(x)$, с определением которой возникают осложнения, можно рассматривать неявную функцию $x(y)$ и, соответственно, вместо функции $u(x) = f(x, y(x))$ — функцию $u(y) = f(x(y), y)$. (19.2) и (19.3) в этом случае превращаются в $f'_x(x_0, y_0)x'(y_0) + f'_y(x_0, y_0) = 0$, $F'_x(x_0, y_0)x'(y_0) + F'_y(x_0, y_0) = 0$

и полагая $\lambda = \lambda_0 = \frac{f'_x(x_0, y_0)}{F'_x(x_0, y_0)}$, мы приходим к той же самой

системе (19.4) для отыскания стационарных точек.

Таким образом, метод Лагранжа является универсальным. Он не применим лишь в случае, когда обе частные производные F'_x, F'_y равны нулю в точке (x_0, y_0) . Но в этом случае точка (x_0, y_0) является особой точкой линии $F(x, y) = 0$ и исследование на экстремум вблизи этой точки требует индивидуального подхода.

Отметим, наконец, еще, что метод Лагранжа становится особенно удобным, если ввести в рассмотрение функцию, называемую *функцией Лагранжа*

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda F(x, y). \quad (19.5)$$

Если исследовать эту функцию на безусловный экстремум, то для отыскания ее стационарных точек мы придем к системе

$$\left. \begin{aligned} L'_x &= f'_x(x, y) + \lambda F'_x(x, y) = 0 \\ L'_y &= f'_y(x, y) + \lambda F'_y(x, y) = 0 \\ L'_\lambda &= F(x, y) = 0 \end{aligned} \right\},$$

которая в точности совпадает с системой (19.4).

Так что *задача отыскания условных экстремумов функции $f(x, y)$ при $F(x, y) = 0$ сводится к отысканию безусловных экстремумов функции Лагранжа (19.5) в том смысле, что стационарные точки в обоих случаях определяются одинаково.*

Вернемся теперь к примеру 19.2, в котором требовалось исследовать на условный экстремум функцию

$$z = x^2 - y^2 \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 = 4.$$

Построим функцию Лагранжа (19.5).

Здесь $f(x, y) = x^2 - y^2$, $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4$. Поэтому

$$L(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4).$$

Для отыскания ее стационарных точек получим систему

$$\left. \begin{aligned} L'_x &= 2x + 2\lambda x = 0 \\ L'_y &= -2y + 2\lambda y = 0 \\ L'_\lambda &= x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} x(1 + \lambda) &= 0 \\ y(\lambda - 1) &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{aligned} \right\},$$

решая которую, находим

$$\lambda = -1 \Rightarrow y = 0, x = \pm 2,$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow x = 0, y = \pm 2,$$

$\lambda \neq \pm 1 \Rightarrow x = 0, y = 0$, но при этом неудовлетворяется уравнение

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Таким образом, имеем четыре стационарные точки функции $f(x, y) = x^2 - y^2$ при $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$;

$$M'_{1,2}(\pm 2, 0), \quad M'_{3,4}(0, \pm 2).$$

В точках $M'_{1,2}$ значения функции $z_{1,2} = 4$, в точках $M'_{3,4}$ — $z_{3,4} = -4$. Нетрудно сообразить, что $z = 4$ является условным максимумом, а $z = -4$ — условным минимумом. Существование условных экстремумов вытекает из геометрических соображений (рис. 19.3).

Графиком функции $z = x^2 - y^2$ является гиперболический параболоид («седло»), а значения функции на окружности $x^2 + y^2 = 4$ изображаются аппликатами точек на линии пересечения цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ с гиперболическим параболоидом. На этой линии условным минимумам

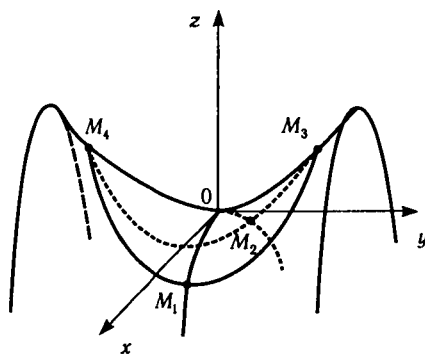


Рис. 19.3

соответствуют точки M_1, M_2 с наименьшими аппликатами, а условным максимумам — точки M_3, M_4 с наибольшими аппликатами. Проекция этих четырех точек на плоскость Oxy являются точками условных экстремумов. А так как стационарных точек всего *четыре*, то стало быть все они являются точками условных экстремумов: $M'_{1,2}$ — точки условных минимумов (проекция точек $M_{1,2}$), $M'_{3,4}$ — точки условных максимумов (проекция точек $M_{3,4}$).

Отметим одно достоинство метода Лагранжа. Он легко распространяется на функции с числом аргументов большим, чем два и на более общие задачи отыскания условных экстремумов. Дело в том, что если функция имеет больше двух аргументов, то уравнений связи между ними может быть больше одного. В общем случае задача ставится следующим образом.

Найти условные экстремумы функции

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

аргументы которой удовлетворяют уравнениям связи

$$\left. \begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ (m < n) \end{aligned} \right\} \quad (19.6)$$

В этом случае для решения задачи строится функция Лагранжа с m множителями (по числу уравнений связи):

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) &= \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \\ &+ \lambda_2 F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_m F_m(x_1, x_2, \dots, x_m). \end{aligned} \quad (19.7)$$

Для отыскания стационарных точек этой функции получается система $(n + m)$ уравнений

$$L'_{x_1} = 0, L'_{x_2} = 0, \dots, L'_{x_n} = 0, L'_{\lambda_1} = 0, L'_{\lambda_2} = 0, \dots, L'_{\lambda_m} = 0.$$

Если $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}; \lambda_{10}, \lambda_{20}, \dots, \lambda_{m0})$ — решение этой системы, то оно определяет стационарную точку $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при связях (19.6), в которой функция может иметь условный экстремум.

Чтобы установить наличие или отсутствие условного экстремума в найденных стационарных точках нужно проводить дополнительное исследование.

Наряду с отысканием локальных экстремумов функции (безусловных и условных) рассматривают и задачи, в которых требуется найти *глобальные максимум и минимум*. Так называют наибольшее и наименьшее значения функции не в окрестностях каких-либо точек, а во всей области, где рассматривается функция.

§ 19.2. ОТЫСКАНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Пусть функция $f(x, y)$ дифференцируема в замкнутой области D , ограниченной гладкой линией L , которая задана уравнением $F(x, y) = 0$.

Из дифференцируемости функции $f(x, y)$ следует ее непрерывность в области D (см. теорему 14.3) и по теореме Вейерштрасса (см. лекции № 13) функция $f(x, y)$ имеет наибольшее и наименьшее значения в области D . Обозначим их соответственно через M и m .

Нетрудно понять, что наибольшее значение M функция может принимать в точках максимума (внутри области D) и на границе L в точках условного максимума функции $f(x, y)$ при $F(x, y) = 0$, а наименьшее значение m — соответственно в точках минимума (внутри области D) и на границе L в точках условного минимума. Все эти точки являются стационарными точками, и если вычислить значения функции $f(x, y)$ во всех этих точках, то M и m обязательно окажутся среди вычисленных величин. В связи с этим можно предложить следующий *алгоритм для отыскания M и m* .

1. Найти все стационарные точки функции $f(x, y)$ внутри области D .

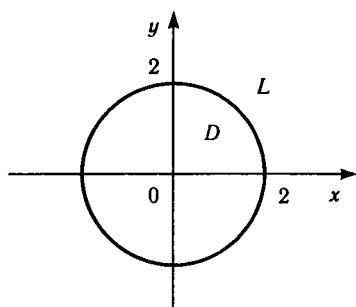


Рис. 19.4

2. Найти все стационарные точки функции $f(x, y)$ при $F(x, y) = 0$.

3. Вычислить значения функции $f(x, y)$ во всех найденных точках и выделить среди них наибольшее и наименьшее, это и будут соответственно M и m .

ПРИМЕР 19.3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = xy$$

в области D , ограниченной линией $L: x^2 + y^2 = 4$ (рис. 19.4).

1. Ищем стационарные точки функции $z = xy$.

$$z'_x = y = 0 \text{ при } y = 0, \quad z'_y = x = 0 \text{ при } x = 0.$$

Следовательно, точка $O(0, 0)$ — стационарная и, очевидно, находится внутри области D .

2. Ищем стационарные точки функции $z = xy$ при $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

и найдем ее стационарные точки:

$$\left. \begin{aligned} L'_x &= y + 2\lambda x = 0 \\ L'_y &= x + 2\lambda y = 0 \\ L'_\lambda &= x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} y &= -2\lambda x \\ x &= -2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{aligned} \right\}.$$

Возводя в квадрат обе части первого и второго уравнений и складывая результаты почленно, получаем

$$y^2 + x^2 = 4\lambda^2(x^2 + y^2),$$

откуда следует

$$4\lambda^2 = 1 \text{ и } \lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2}.$$

При $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2}$ получаем $y = -x = \pm\sqrt{2}$, при
 $\lambda = \lambda_2 = -\frac{1}{2}$ — $y = x = \pm\sqrt{2}$.

Следовательно, точки $M_{1,2}(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$ и $M_{3,4}(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ являются стационарными точками функции Лагранжа и стационарными точками функции
 $z = xy$ при $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

3. Вычисляем значения функции $z = xy$ во всех найденных точках

$$z(0,0) = 0, z(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}) = -2, z(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}) = 2.$$

Наибольшее среди вычисленных значений равно 2, а наименьшее равно -2. Следовательно, $M = 2, m = -2$.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается геометрический смысл условного экстремума функции $f(x, y)$ при $F(x, y) = 0$? (см. рис. 19.2 и анализ результата исследования в примере 19.1).
2. Как строится функция Лагранжа? (см. (19.5) и (19.7)).
3. В чем суть метода Лагранжа отыскания условных экстремумов?
4. Сформулируйте алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значений функции.

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
(ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ).
ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.
СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ
НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ. МЕТОД ИЗОКЛИН**

Уравнения, в которых неизвестная функция входит под знак производной или дифференциала, называется *дифференциальным уравнением*. Различают обыкновенные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения в частных производных. Если неизвестная функция зависит только от одного аргумента, то соответствующее уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением; если неизвестная функция зависит от двух или более аргументов, то соответствующее уравнение является уравнением в частных производных.

Примеры:

$$1) \quad F(x, y, y') = 0; \quad 2) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y);$$

$$3) \quad F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0;$$

$$4) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0;$$

$$5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4 \pi \rho(x, y, z).$$

Здесь уравнения 1)–4) — обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнение 5) — уравнение в частных производных.

Мы будем рассматривать в основном обыкновенные уравнения.

Определение 20.1. Порядком дифференциального уравнения называется максимальный порядок входящей в него производной (или дифференциала) неизвестной функции.

В выписанных выше примерах 1), 2) и 4) — дифференциальные уравнения первого порядка; уравнение 3) — дифференциальное уравнение n -го порядка. В качестве еще одного примера приведем уравнение второго порядка

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}),$$

где $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $m = \text{const}$. Это уравнение описывает движение материальной точки массы m под действием внешней силы $F = F(t, x, \dot{x})$ вдоль оси OX , причем $x = x(t)$ — это абсцисса материальной точки в момент времени t . Указанное уравнение является математическим выражением известного в физике второго закона Ньютона.

Совокупность двух или более дифференциальных уравнений, рассматриваемых совместно, называется *системой дифференциальных уравнений*. Такова, например, система

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t), \\ m\ddot{y} = F_2(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t), \end{cases}$$

являющаяся математическим выражением второго закона Ньютона, описывающая движение материальной точки массы m в плоскости XOY под действием внешней силы $\vec{F} = \{F_1, F_2\}$. Здесь неизвестные функции $x(t)$ и $y(t)$ являются соответственно абсциссой и ординатой материальной точки в момент времени t .

Приведенные примеры показывают, что обыкновенные дифференциальные уравнения имеют широкие приложения в прикладных науках, поэтому их изучение весьма актуально. Начнем это изучение с уравнений первого порядка.

**§ 20.1. ОБЩЕЕ И ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ,
ОБЩИЙ И ЧАСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ПЕРВОГО ПОРЯДКА. ТЕОРЕМА КОШИ.
ОСОБЫЕ РЕШЕНИЯ**

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (20.1)$$

первого порядка, разрешенное относительно производной dy/dx . Здесь x — независимая переменная (аргумент), $y = y(x)$ — неизвестная функция. Это же уравнение можно записать в дифференциальной форме

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (20.2)$$

если обозначить $f(x, y) = -M(x, y) / N(x, y)$. И та и другая форма записи равноправны и часто встречаются в конкретных примерах.

Определение 20.2. Областью определения уравнения (18.1) называется множество D пар (x, y) , при которых его правая часть $f(x, y)$ имеет смысл (т. е. может быть вычислена).

Например, область определения уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x} + 2\sqrt{y-1}$$

является множество $D = \{(x, y): x \geq 0, y \geq 1\}$.

Определение 20.3. Говорят, что функция $y = y(x)$ является решением уравнения (20.1) на отрезке $[a, b]$, если выполняются следующие условия:

- 1) точка $(x, y(x)) \in D$ при всех $x \in [a, b]$;
- 2) функция $y = y(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и для всех $x \in [a, b]$ имеет место тождество

$$\frac{dy(x)}{dx} \equiv f(x, y(x)). \quad (20.3)$$

Иногда кратко говорят, что решением уравнения (20.1) (или другого дифференциального уравнения) называется

функция, обращающая его в тождество (см. (20.3)). На нестрогом научном уровне такое определение решения приемлемо. Однако в тонких математических исследованиях оно не пригодно, поэтому рекомендуем с самого начала придерживаться понятия решения, данного в определении 20.3.

Замечание 20.1. Иногда вместо решения на отрезке $[a, b]$ рассматривают решение на интервале (a, b) или полуинтервалах $[a, b)$ и $(a, b]$. При этом не исключаются случаи $a = -\infty$ и $b = +\infty$. Определение 20.3 в этих случаях почти дословно повторяется (надо лишь говорить не об отрезке $[a, b]$, а о соответствующем промежутке (a, b) , $[a, b)$ или $(a, b]$).

Например, функция $y = \frac{1}{4}x^2$ является решением дифференциального уравнения $y' = \sqrt{y}$ на промежутке $[0, +\infty)$ (проверьте условия 1) и 2) определения 20.3).

График решения $y = y(x)$, т. е. множество

$$\Gamma = \{(x, y): x \in [a, b], y = y(x)\}$$

на плоскости R^2 , называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения (20.1), поэтому часто вместо слов «решить дифференциальное уравнение» говорят «проинтегрировать дифференциальное уравнение».

Поясним геометрический смысл уравнения (20.1). Если $y = y(x)$ интегральная кривая дифференциального уравнения (20.1), то в каждой своей точке $(x, y(x))$ она имеет касательную, угловой коэффициент которой равен $k = f(x, y(x))$ (см. тождество (20.3)). Однако не всегда удается найти решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (20.1), а значит построить его интегральную кривую. Тем не менее по уравнению (20.1) в любом случае можно построить вектор $\{k f(x, y)\}$ с началом в точке (x, y) области D опреде-

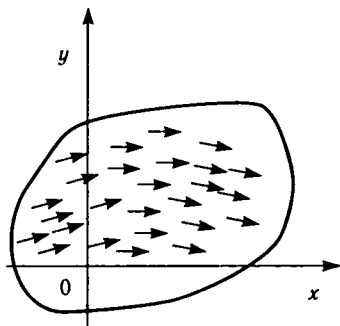


Рис. 20.1

ления этого уравнения. Сделав это для произвольной точки $(x, y) \in D$, мы заполним область D соответствующими векторами $\{f(x, y)\}$. Полученное множество векторов (или просто отрезков, имеющих направления этих векторов) называют *полем направлений дифференциального уравнения* (см. рис. 20.1). Заметим, что поле направлений не связано с интегрированием уравнения (20.1). *Дифференциальное уравнение (20.1) по своей форме задает поле направлений*. Используя только поле направлений, можно приближенно вычертить на бумаге интегральные кривые соответствующего дифференциального уравнения. Один из таких способов — метод изоклин — будет продемонстрирован ниже.

Интегрируя простейшее дифференциальное уравнение $y' = 1$, можно заметить, что оно имеет бесчисленное множество решений $y = x + C$, где C — произвольная постоянная. Графики этих решений (интегральные кривые) являются прямыми, параллельными биссектрисе первого координатного угла. Эти прямые заполняют всю плоскость XOY . Для выделения вполне конкретной прямой, надо задать хотя бы одну точку, через которую проходит эта прямая. Например, через точку $M(2; 3)$ проходит интегральная «кривая» $y = x + 1$. В этом случае говорят, что начальное условие $y(2) = 3$ выделяет вполне конкретное решение уравнения $y' = 1$. Обобщая сказанное на произвольное дифференциальное уравнение (20.1), назовем задачу

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (20.4)$$

начальной задачей (или задачей Коши) для дифференциального уравнения (20.1). При этом точка (x_0, y_0) называется *начальной точкой*. Ясно, что эта точка должна принадлежать области D определения уравнения (20.1).

И здесь начальное условие $y(x_0) = y_0$ позволяет (при определенных условиях на функцию $f(x, y)$ (см. ниже теорему Коши)) выделить вполне определенное решение уравнения (20.1).

Определение 20.4. Частным решением уравнения (20.1) называется решение $y = \varphi(x)$ какой-нибудь конкретной ее задачи Коши (именно: задачи Коши с начальным условием $y(x_0) = \varphi(x_0)$).

Общим решением уравнения (20.1) в области $Q \subset D$ называется функция $y = \Phi(x, C)$, зависящая от произвольной постоянной C , удовлетворяющая следующим требованиям:

1) при любом допустимом значении постоянной C функция $y = \Phi(x, C)$ является решением уравнения (20.1) на некотором отрезке $[a, b]$ (таком, что $(x, \Phi(x, C)) \in Q$ при $x \in [a, b]$), т. е.

$$\frac{d\Phi(x, C)}{dx} \equiv f(x, \Phi(x, C)) \forall x \in [a, b];$$

2) какова бы ни была задача Коши (20.4) с начальной точкой $(x_0, y_0) \in Q$, существует постоянная $C = C^0$ такая, что функция $y = \Phi(x, C^0)$ является решением именно этой задачи Коши.

Заметим, что условие 2) означает, что алгебраическое уравнение $\Phi(x_0, C) = y_0$, где (x_0, y_0) — произвольная точка области Q , имеет хотя бы одно решение $C = C^0$.

ПРИМЕР 20.1. Проверить, что функция $y = Ce^{3x}$ является общим решением уравнения $y' = 3y$ (в области $Q = R^2$).

Условие 1) определения 20.4 проверяется непосредственно:

$$\frac{d}{dx}(Ce^{3x}) \equiv 3 \cdot (Ce^{3x}) (\forall x \in (-\infty, +\infty)).$$

Это тождество имеет место при любом значении постоянной C . Пусть теперь (x_0, y_0) — произвольная (но фиксированная) точка на плоскости R^2 . Посмотрим, можно ли найти $C = C^0$ так, чтобы выполнялось условие $y(x_0) = y_0$. Имеем

$$Ce^{3x} = y_0 \Leftrightarrow C = C^0 = y_0 e^{-3x_0}.$$

Значит, такое значение $C = C^0$ существует, и функция $y = y_0 e^{3(x-x_0)}$ является решением задачи Коши $y' = 3y$,

$y(x_0) = y_0$. Итак, условия 1) и 2) определения 20.4 общего решения выполнены, и значит $y = Ce^{3x}$ — общее решение уравнения $y' = 3y$.

Однако не всегда удастся найти решение уравнения (20.1) в виде функции $y = y(x)$, заданной явно. Если в результате интегрирования уравнения (20.1) получено некоторое соотношение между x и y (алгебраическое, т. е. не содержащее производной y'), то говорят, что найден интеграл уравнения (20.1). Уточним это понятие.

Определение 20.5. *Общим интегралом* в области $Q \subset D$ дифференциального уравнения (20.1) называется соотношение

$$F(x, y, C) = 0 \quad (20.5)$$

(C — произвольная постоянная), определяющее общее решение в Q этого уравнения неявным образом. Аналогичный смысл имеет частный интеграл $F(x, y) = 0$ уравнения (20.1).

Используя теорию неявных функций, можно дать следующий алгоритм проверки того, что соотношение (20.5) является общим интегралом уравнения (20.1).

Алгоритм 20.1. а) Продифференцируем соотношение (18.5) по x , считая, что y есть функция x :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

б) Присоединим к соотношению (20.5) полученное равенство и из системы двух уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, C) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \end{cases} \quad (20.6)$$

исключим постоянную C . Если при этом будет получено исходное дифференциальное уравнение (20.1) (или эквивалентное ему уравнение), то (20.5) — общий интеграл этого уравнения.

ПРИМЕР 20.2. Проверить, что соотношение $x^2 - y^2 - Cx = 0$ является общим интегралом уравнения $x^2 + y^2 - 2xy \cdot y' = 0$.

В нашем случае $F(x, y, C) \equiv x^2 - y^2 - Cx$. Составляем систему (20.6):

$$\begin{cases} 2x - 2y \cdot y' - C = 0, \\ x^2 - y^2 - Cx = 0. \end{cases}$$

Исключаем из этих равенств постоянную C . Для этого из первого уравнения находим C и подставляем ее во второе уравнение:

$$\begin{aligned} C = 2x - 2y \cdot y'; \quad x^2 - y^2 - (2x - 2y \cdot y')x = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -x^2 - y^2 + 2xy \cdot y' = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \cdot y' = 0. \end{aligned}$$

Получено исходное дифференциальное уравнение, и значит $x^2 - y^2 - Cx = 0$ — общий интеграл этого уравнения.

Общий интеграл (20.5) также позволяет решить любую задачу Коши для уравнения (20.1) (если, конечно, она имеет решение).

ПРИМЕР 20.3. Найти решение задачи Коши

$$x^2 + y^2 - 2xy \cdot y' = 0, \quad y(1) = 2.$$

Воспользуемся общим интегралом $x^2 - y^2 - Cx = 0$ данного уравнения. Подставляя в него $x = 1$ (тогда $y = 2$), будем иметь

$$1 - 4 - C = 0 \Leftrightarrow C = -3.$$

Следовательно, $x^2 - y^2 + 3x = 0$ — частный интеграл данного уравнения, задающий решение исходной задачи Коши неявным образом.

Перейдем теперь к обсуждению проблемы существования решения задачи Коши (20.4). При каких условиях на функцию $f(x, y)$ эта задача будет разрешимой?

Теорема Пикара. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $\Pi = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ ($a > 0, b > 0$), содержащем начальную точку (x_0, y_0) . Тогда задача Коши (20.4) имеет, по крайней мере, одно решение $y = y(x)$. Это решение определено на отрезке $[x_0 - h; x_0 + h]$, где $h = \min(a, \frac{b}{M})$, $M = \max_{(x, y) \in \Pi} |f(x, y)|$.

Эта теорема устанавливает лишь существование решения задачи Коши (20.4). Непрерывности функции $f(x, y)$ не достаточно для единственности решения этой задачи. Нужны более ограничительные условия на функцию $f(x, y)$ для того, чтобы задача (20.4) была однозначно разрешимой.

Теорема Коши. Пусть функция $f(x, y)$ и ее частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывны в области D . Тогда какова бы ни была начальная точка (x_0, y_0) , лежащая внутри области D , существует отрезок $[x_0 - h; x_0 + h]$ такой, что задача Коши (20.4) с начальной точкой (x_0, y_0) имеет решение $y = y(x)$ на этом отрезке и это решение единственно.

Геометрически это означает, что в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) существует интегральная кривая уравнения (20.1), проходящая через точку (x_0, y_0) , причем такая интегральная кривая единственна (рис. 20.2).

Отметим локальный характер этой теоремы: существование решения $y = y(x)$ и его единственность гарантиру-

ются лишь в достаточно малой окрестности точки $x = x_0$ ($h > 0$ — достаточно мало). Обе теоремы носят достаточный характер. Условия теорем могут быть не выполнены, но тем не менее решение соответствующей задачи Коши может существовать. Например, задача Коши

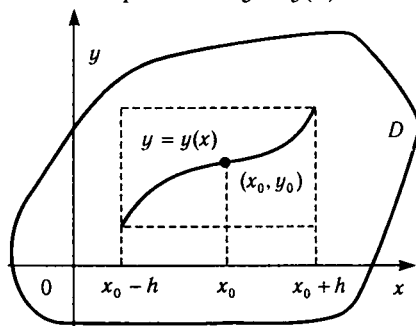


Рис. 20.2

$y' = \sqrt{y}$, $y(0) = 0$ имеет очевидное решение $y \equiv 0$, определенное на всей оси $-\infty < x < +\infty$, а частная производная $f'_y = 1 / 2\sqrt{y}$ ее правой части не существует в начальной точке $(x_0, y_0) = (0, 0)$. В этом случае, однако, нельзя гарантировать единственности решения. Для указанной задачи Коши, кроме решения $y \equiv 0$, существует, например, еще такое решение

$$y = \begin{cases} x^2/4, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Определение 20.6. Решение $y = \varphi(x)$ уравнения (18.1) называется его *особым решением*, если каждая точка $(x_0, \varphi(x_0))$ интегральной кривой $y = \varphi(x)$ является точкой неединственности решения уравнения (20.1), т. е. существует (по крайней мере, еще одна) интегральная кривая $y = y(x)$ уравнения (20.1), проходящая через точку $(x_0, \varphi(x_0))$, не совпадающая с интегральной кривой $y = \varphi(x)$.

Имеет место следующее утверждение: если функция $f(x, y)$ непрерывна всюду в области D и ее частная производная f'_y существует всюду в D , за исключением некоторых точек $(x, y) \in D$, причем в этих точках $f'_y = \infty$, то особыми решениями уравнения (20.1) могут быть только такие кривые $y = \varphi(x)$, во всех точках которых $f'_y = \infty$.

ПРИМЕР 20.4. Найти особые решения уравнения $y' = 2\sqrt{y}$.

Здесь $f(x, y) = 2\sqrt{y}$, $f'_y = 1 / \sqrt{y}$. Частная производная f'_y существует всюду в $D = \{(x, y): y \geq 0\}$, кроме точек (x, y) , лежащих на оси абсцисс $y = 0$. При этом $f'_y|_{y=0} = \infty$. Значит, прямая $y = 0$ может быть особым решением уравнения $y' = 2\sqrt{y}$. Проверим, будет ли это на самом деле так. Функция $y = \varphi(x) \equiv 0$, очевидно, удовлетворяет уравнению $y' = 2\sqrt{y}$. Кроме того, в каждой точке $(x_0, \varphi(x_0)) = (x_0; 0)$ прямой $y = \varphi(x) = 0$ задача Коши $y' = 2\sqrt{y}$, $y(x_0) = 0$ имеет два

различных решения: $y \equiv 0$ и $y = \begin{cases} (x - x_0)^2, & x \geq x_0, \\ 0, & x < x_0. \end{cases}$ Следо-

вательно, $y \equiv 0$ — особое решение данного уравнения. Других особых решений это уравнение не имеет, так как в D нет других точек (x, y) кроме точек $(x, 0)$, в которых $f'_y = \infty$. Итак, окончательный ответ: $y = 0$.

Укажем еще на один признак существования особых решений. Напомним сначала следующее понятие.

Определение 20.7. Кривая $y = \varphi(x)$ называется *огibaющей семейства кривых* $y = y(x, C)$ (C — параметр, произвольная постоянная), если в каждой своей точке $(x, \varphi(x))$ кривая $y = \varphi(x)$ касается, по крайней мере, одной из кривых семейства $y = y(x, C)$ и каждого отрезка кривой $y = \varphi(x)$ касается бесконечное множество кривых $y = y(x, C)$.

Кривую, подозрительную на огibaющую семейства кривых $y = y(x, C)$, можно найти, исключая постоянную C из системы уравнений

$$\begin{cases} y = y(x, C), \\ 0 = \frac{\partial y(x, C)}{\partial C}. \end{cases}$$

Однако при этом надо доказать, что найденная кривая является огibaющей.

Теорема 20.1. *Огibaющая семейства $y = y(x, C)$ интегральных кривых дифференциального уравнения (20.1) является особым решением этого уравнения.*

Действительно, если $y = \varphi(x)$ огibaющая семейства $y = y(x, C)$ интегральных кривых уравнения (20.1), то в каждой своей точке $(x_0, \varphi(x_0))$ она касается некоторой интегральной кривой $y = y(x, C)$, значит $\varphi'(x_0) = y'(x_0, C)$, или $\varphi'(x_0) = f(x_0, y(x_0, C)) \equiv f(x_0, \varphi(x_0))$. Это означает, что $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (20.1). Кроме того, в любой точке $(x_0, \varphi(x_0))$ задача Коши (20.4) (где $y_0 = \varphi(x_0)$) имеет, по крайней мере, два решения: $y = \varphi(x)$ и $y = y(x, C)$, где $y = y(x, C)$ — решение уравнения (20.1), касающееся кривой $y = \varphi(x)$ в точке $(x_0, \varphi(x_0))$.

Например, для уравнения $y' = 2\sqrt{y}$ (см. пример 20.3) семейство $y = (x - C)^2$ ($x > C$) интегральных кривых имеет огибающую $y = \varphi(x) \equiv 0$ и эта огибающая, как было показано в примере 20.4, является особым решением уравнения $y' = 2\sqrt{y}$.

§ 20.2. МЕТОД ИЗОКЛИН

Рассмотрим вновь уравнение (20.1). Как было указано выше, это уравнение задает в своей области определения D поле направлений $\{ \downarrow f(x, y) \}$. В области D существуют кривые γ , в каждой точке (x, y) которых выполняется равенство

$$f(x, y) = k \quad (k = \text{const}). \quad (20.7)$$

Такие кривые называются *изоклинами* дифференциального уравнения (20.1), а само равенство (20.7) — уравнением изоклин.

Равенство (20.7) показывает, что в каждой точке (x, y) изоклины γ интегральные кривые уравнения (20.1) имеют одно и то же направление $\{ \downarrow k \} = \{ \downarrow f(x, y) \}$. Построив достаточно густую сетку изоклин (20.7), отвечающих различным значениям постоянной k , и изобразив на каждой изоклине соответствующие ей направления $\{ \downarrow k \}$, будем (двигаясь от конкретной точки $(x_0, y_0 \in D)$) проводить кривую, которая при пересечении с изоклиной (20.7) касается направления $\{ \downarrow k \}$. Полученная таким образом кривая, будет, очевидно, приближенным эскизом интегральной кривой уравнения (20.1).

ПРИМЕР 20.5. Методом изоклин построить интегральную кривую задачи Коши $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$.

Уравнение изоклин (20.7) в данном случае принимает вид $x^2 + y^2 = k$. Это есть семейство концентрических окружностей с центром в начале координат $(0, 0)$ (точка $(0, 0)$ также является изоклиной, отвечающей значению $k = 0$). Изобразим на каждой изоклине направления $\{ \downarrow k \}$. Например, на изоклине $x^2 + y^2 = 1$ все направления образуют угол 45° с положительным направлением оси OX .

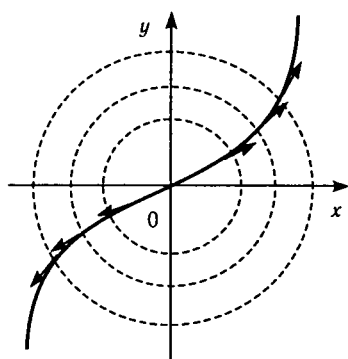


Рис. 20.3

Двигаясь от точки $(0, 0)$ к каждой изоклине $x^2 + y^2 = k$, коснемся указанного на ней отрезка, изображающего направление $\{k, k\}$. Полученная таким образом кривая и будет приближенным изображением интегральной кривой заданной начальной задачи (рис. 20.3).

Рассмотрим еще несколько примеров.

ПРИМЕР 20.6. Проверить, будет ли функция $y = y(x)$, заданная параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = 2 \sin t, \\ y = 4 \cos t (0 \leq t < 2\pi), \end{cases}$$

решением задачи Коши $y' = -4xy^{-1}$, $y(0) = 4$.

Сначала проверим, что выполняется начальное условие $y(0) = 4$, т. е. что существует значение t_0 параметра t , при котором интегральная кривая $y = y(x)$ проходит через точку $(0, 4)$. Это значение параметра должно удовлетворять заданной системе. Оно, очевидно, существует и равно нулю: $t_0 = 0$. Теперь проверим выполнение тождества (20.3). Имеем

$$y' \equiv y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-4 \sin t}{2 \cos t} = -2 \operatorname{tg} t, \quad -4xy^{-1} = -4 \frac{2 \sin t}{4 \cos t} = -2 \operatorname{tg} t.$$

Следовательно, $y'(x) \equiv -4x/y(x)$, и тождество (20.3) выполняется.

ПРИМЕР 20.7. Пусть $y = y(x)$ решение начальной задачи

$$y' = x^2 y + \cos x, \quad y(0) = 1. \quad (20.8)$$

Вычислить $y''(0)$.

Подставив функцию $y = y(x)$ в уравнение (20.8), получим тождество $y'(x) \equiv x^2 y(x) + \cos x$. Продифференцировав это тождество по x , будем иметь

$$y''(x) \equiv 2xy(x) + x^2 y'(x) - \sin x.$$

Положим здесь $x = 0$ и воспользуемся начальным условием $y(0) = 1$. При этом значение производной $y'(0)$ находим из уравнения (20.7): $y'(0) = 0 \cdot 1 + \cos 0 = 1$. Следовательно,

$$y''(0) = 2 \cdot 0 \cdot y(0) + 0 \cdot y'(0) - \sin 0 = 0.$$

ПРИМЕР 20.8. Найти уравнение $F(x, y) = 0$, которому удовлетворяют множество всех стационарных точек (точек покоя) интегральных кривых уравнения $y' = x^2 + y^2 - 4$.

Напомним, что стационарной точкой кривой $y = y(x)$ называется точка $M(x_0, y(x_0))$, обладающая свойством $y'(x_0) = 0$. Если $y = y(x)$ интегральная кривая данного уравнения, то выполняется тождество $y'(x) = x^2 + y^2(x) - 4$, поэтому условие $y'(x) = 0$ приводит к равенству $x^2 + y^2(x) = 4$. Следовательно, множество всех стационарных точек данного уравнения образует окружность $x^2 + y^2 = 4$.

ПРИМЕР 20.9. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых

$$\ln \frac{x}{y} = 1 + Cy, \quad (20.9)$$

где C — произвольная постоянная (параметр).

Дифференцируя уравнение (20.9) по x (считая, что $y = y(x)$), получаем

$$\frac{y}{x} \cdot \frac{y - xy'}{y^2} = Cy', \quad y^2 - xyy' = Cxy^2 y', \quad xy(1 + Cy)y' = y^2$$

(все проделанные здесь выкладки справедливы в области существования кривых (20.9)). Чтобы найти дифференци-

альное уравнение семейства (20.9), исключим параметр C из системы уравнений

$$\begin{cases} \ln \frac{x}{y} = 1 + Cy, \\ xy(1 + Cy)y' = y^2. \end{cases}$$

Будем иметь

$$xy \left(\ln \frac{x}{y} \right) y' = y^2, \quad \left(x \ln \frac{x}{y} \right) y' = y.$$

ПРИМЕР 20.10. Не подставляя функцию $y = x \ln x$ в уравнение, ответить, почему она не может быть решением задачи Коши

$$y' = e^y(e - y)^{-1}, \quad y(e) = e.$$

Правая часть $e^y(e - y)^{-1}$ данного уравнения не определена в точке $M(e, e)$, поэтому задача Коши с начальным условием $y(e) = e$ для этого уравнения не имеет смысла.

Контрольные вопросы

1. Какие уравнения называются дифференциальными?
2. Чем отличается обыкновенное дифференциальное уравнение от уравнения в частных производных?
3. Какое число называется порядком дифференциального уравнения? Приведите примеры уравнений первого, второго и n -го порядков.
4. Какое множество называется областью определения дифференциального уравнения первого порядка? Приведите пример.
5. Какая функция называется решением дифференциального уравнения на отрезке (на интервале, полуинтервале)? Может ли функция $y = (1 - x)^{-1}$ быть решением уравнения $y' = y^2$ на отрезке $[0; 2]$? Почему? Какая кривая называется интегральной кривой?
6. Что такое поле направлений в некоторой области D ? Каков геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка?
7. Как ставится начальная задача (задача Коши) для дифференциального уравнения первого порядка? Поясните ее геометрический смысл.
8. Дайте определения частного и общего решения дифференциального уравнения. Что такое общий и частный интегралы дифференциального уравнения первого порядка? Как проверить, что соотношение $F(x, y, C) = 0$ является общим интегралом уравнения $y' = f(x, y)$?

9. Сформулируйте теорему Пикара существования решения уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$. Можно ли утверждать, что задача Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ имеет решение на любом отрезке $[a; b]$?

10. Сформулируйте теорему Коши существования и единственности решения начальной задачи. Чем она отличается от теоремы Пикара? Какое условие в теореме Коши гарантирует единственность решения?

11. В чем состоит «локальность» теоремы Коши?

12. Какое решение называется особым решением дифференциального уравнения? Приведите соответствующий пример. Какие кривые $y = \varphi(x)$ могут быть особыми решениями уравнения $y' = 2\sqrt{y}$?

13. Какая кривая называется огибающей семейства кривых $y = \Phi(x, C)$? Из каких уравнений находится кривая, подозрительная на огибающую?

14. Чем является огибающая для семейства $y = y(x, C)$ интегральных кривых дифференциального уравнения $y' = f(y, x)$?

15. Какая кривая называется изоклиной дифференциального уравнения? Опишите метод изоклин на примере уравнения $y' = x^2 + y^2$.

**ПРИЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ
НЕКОТОРЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ПЕРВОГО ПОРЯДКА**

Теорема Пикара и Коши, сформулированные в предыдущей лекции, устанавливают лишь существование решения начальной задачи (3.4), но не дают способа его вычисления. К сожалению, не существует такого способа в общем случае. Можно привести примеры, когда решение дифференциальных уравнений нельзя записать с помощью элементарных функций и интегралов от них (т. е. квадратур). Однако для частных типов дифференциальных уравнений это можно сделать. Некоторые из таких уравнений перечислены ниже. Наиболее полный список уравнений, допускающих интегрирование в виде квадратур, можно найти в книге Э. Камке «Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям» (Изд-во «Наука», 1971). Прежде чем перейти к упомянутым уравнениям, сделаем несколько замечаний.

В конкретных геометрических (или физических) задачах роль переменных x и y равноправна. В этом случае удобно записывать соответствующее дифференциальное уравнение в дифференциальной форме

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (21.1)$$

Здесь роль переменных x и y равноправна, так как решением уравнения (21.1) можно считать как функцию $y = y(x)$, удовлетворяющую уравнению (21.1), так и функ-

цию $x = x(y)$, обращающую (21.1) в тождество. Может случиться так, что при вычислении общего решения уравнения (21.1) одни решения следует записать в виде $y = y(x)$, другие — в виде $x = x(y)$. Например, для уравнения

$$x dy - y dx = 0$$

вся совокупность решений записывается в виде

$$\begin{cases} y = Cx (C = \text{const}), \\ x = 0. \end{cases}$$

При этом решение $x = 0$ не может быть получено из решений $y = Cx$ ни при каком значении постоянной C .

Для уравнения (21.1) также можно поставить начальную задачу. При этом начальное условие можно задать в одной из следующих форм:

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{или} \quad x(y_0) = x_0.$$

Чтобы применить в этом случае теорему Коши, надо решить уравнение (21.1) относительно одной из производных y'_x или x'_y . В первом случае начальную задачу следует записать так:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}, \quad y(x_0) = y_0,$$

во втором —

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)}, \quad x(y_0) = x_0.$$

Уравнение (21.1) в каждой точке $M_0(x_0, y_0)$ своей области определения $D = D(M) \cap D(N)$ задает поле направлений (если $M(x_0, y_0) \times N(x_0, y_0) \neq 0$). Если в точке (x_0, y_0) одновременно равны нулю функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$, то говорят, что в этой точке уравнение (21.1) не задает никакого направления. Такая точка называется *особой*.

Иногда, желая указать, что в уравнении

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{21.2}$$

переменные x и y входят равноправно, считают решениями этого уравнения не только обычные его решения (см. определение 3.3), но и решения перевернутого уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)},$$

графики которых на плоскости XOY не совпадают с графиками $y = y(x)$ обычных решений уравнения (21.2). Во избежание путаницы будем придерживаться следующего соглашения: если ничего не говорится о равноправности переменных x и y в уравнении (21.2) (или в уравнении $F(x,y, dy/dx) = 0$), то при его интегрировании будем вычислять только обычные его решения $y = y(x)$ (или интегралы, задающие их), не присовокупляя к ним недостающие решения $x = x(y)$ перевернутого уравнения (тем самым из решений исключаются, в частности, функции $x = \text{const}$). Если же уравнение (21.2) записано в дифференциальной форме

$$f(x,y)dx - dy = 0,$$

то автоматически считаем, что переменные x и y равноправны в нем и выписываем все решения как исходного уравнения (21.2), так и перевернутого. Точно такое же замечание относится и к уравнению (21.1).

§ 21.1. УРАВНЕНИЯ, НЕ СОДЕРЖАЩИЕ ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad (21.3)$$

в котором правая часть не содержит искомой функции $y = y(x)$. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то, как это следует из интегрального исчисления, общим решением уравнения (21.3) будет совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$:

$$y = \int f(x)dx = \int_{x_0}^x f(t)dt + C,$$

где C — произвольная постоянная, $x_0 \in [a; b]$ — фиксированная точка, а x изменяется на отрезке $[a; b]$.

ПРИМЕР 21.1. Найти решение задачи Коши

$$y' = 2 \sin 3x, \quad y(\pi) = 1.$$

Интегрируя уравнение, найдем, что

$$y = 2 \int \sin 3x dx = -\frac{2}{3} \cos 3x + C.$$

Полагая здесь $x = \pi$, будем иметь $1 = 2/3 + C$, и значит $C = 1/3$. Получаем:

$$y = -\frac{2}{3} \cos 3x + \frac{1}{3}.$$

§ 21.2. УРАВНЕНИЯ, НЕ СОДЕРЖАЩИЕ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(y), \quad (21.4)$$

в правой части которого отсутствует независимая переменная x . Предположим сначала, что функция $f(y)$ непрерывна на некотором отрезке $[c; d]$ и не обращается на нем в нуль. Тогда уравнение (21.4) можно записать в эквивалентной форме

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}. \quad (21.5)$$

Здесь роль неизвестной функции играет $x = x(y)$, а роль независимой переменной — y . Интегрируя уравнение (19.5), найдем его общее решение в виде:

$$x = \int_{y_0}^y \frac{dy}{f(y)} + C, \quad (21.6)$$

где C — произвольная постоянная, $y_0 \in [c; d]$ — фиксированная точка, а y изменяется на отрезке $[c; d]$. Соотношение (21.5) является общим интегралом уравнения (21.4) в случае, когда $f(y) \neq 0$ ($\forall y \in [c; d]$).

Пусть теперь $f(y) = 0$ в некоторой точке $y = \alpha \in [c; d]$. Подставляя функцию $y = \alpha$ в уравнение (21.4), видим, что она является решением этого уравнения. Таким образом, все решения уравнения (21.4) будут найдены в виде (21.6) при $y \in [c; \alpha) \cup (\alpha; d]$. К ним следует присовокупить решение $y = \alpha$, если $f(\alpha) = 0$.

ПРИМЕР 21.2. Найти общее решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = y + y^2 \quad (21.7)$$

и решить задачу Коши с начальной точкой $M_0(0, 1)$. Указать интервал существования решения этой задачи.

Правая часть $f(y) = y^2 + y$ обращается в нуль в двух точках: $y = 0$ и $y = -1$. Функции $y = 0$ и $y = y(x) \equiv -1$ являются, очевидно, решениями уравнения (21.7) на всей оси $-\infty < x < +\infty$. Предполагая, что $y \neq 0$ и $y \neq -1$, перепишем уравнение (21.7) в виде

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y(y+1)}.$$

Интегрируя по y , будем иметь

$$x = \int \frac{dy}{y(y+1)} = \int \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \right] dy = \ln|y| - \ln|y+1| + C.$$

Итак, все решения уравнения (19.7) записываются в виде

$$\begin{cases} x = \ln|y / (y+1)| + C, & \text{если } y \neq 0 \text{ и } y \neq -1, \\ y \equiv 0, \quad y \equiv -1. \end{cases}$$

Особых решений нет, так как производная $f'(y) = 2y + 1$ непрерывна при всех $y \in R$. Перейдем теперь к задаче Коши с начальным условием $y(0) = 1$. Решения $y = 0$ и $y = -1$ не удовлетворяют этому условию, поэтому следует обратиться к интегралу

$$x = \ln \left| \frac{y}{y+1} \right| + C.$$

Полагая здесь $x = 0$ и $y = 1$, получаем $0 = \ln(1/2) + C$, откуда $C = \ln 2$. Значит, решение указанной задачи Коши задается интегралом $x = \ln|y / (y + 1)| + \ln 2$. Учитывая, что в окрестности точки $y = 1$ функция $y / (y + 1)$ положительна, модуль можно отбросить и разрешить полученное уравнение относительно y . В результате получим $y = e^x / (2 - e^x)$. Отсюда видно, что решение задачи Коши существует на промежутке $(-\infty; \ln 2)$. Итак, в данном примере получаем окончательный ответ. Общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} x = \ln|y / (y + 1)| + C, & \text{если } y \neq 0 \text{ и } y \neq -1, \\ y = 0, \quad y = -1 \end{cases}$$

Решением задачи Коши является функция

$$y = \frac{e^x}{2 - e^x}, \quad x \in (-\infty; \ln 2).$$

§ 21.3. УРАВНЕНИЯ

С РАЗДЕЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Так называется дифференциальное уравнение

$$f(x)dx + g(y)dy = 0, \quad (21.8)$$

в котором перед dx стоит функция, зависящая только от x , а перед dy — функция, зависящая только от y .

Пусть функции $f(x)$ и $g(y)$ непрерывны в своих областях определения $D(f)$ и $D(g)$. Учитывая формулу $du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$, перепишем уравнение (21.8) в эквивалентной форме

$$d \left(\int_{x_0}^x f(x) dx + \int_{y_0}^y g(y) dy \right) = 0,$$

где $x_0, x \in D(f)$, $y_0, y \in D(g)$. Но тогда функция, стоящая под дифференциалом постоянна, т. е.

$$\int_{x_0}^x f(x)dx + \int_{y_0}^y g(y)dy = C. \quad (21.9)$$

Мы получили общий интеграл уравнения (21.8). Действительно, если $y = y(x, C)$ — функция, определяемая неявно уравнением (21.9), то подставляя ее в (21.9), получаем тождество. Взяв дифференциал от обеих частей этого тождества, получим уравнение (21.8). Это и означает, что (21.9) — общий интеграл уравнения (21.8). Заметим, что общий интеграл часто записывают в терминах неопределенного интеграла

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C.$$

ПРИМЕР 21.3. Найти интегральную кривую уравнения

$$(2x - 3)dx + 3ydy = 0,$$

проходящую через точку $M_0(1; 2)$. При каких значениях x она существует?

Имеем

$$\int (2x - 3)dx + \int (3y)dy = C \Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{3}{2}y^2 = C.$$

Полагая здесь $x = 1$ и $y = 2$, будем иметь $1 - 3 + 6 = C$, откуда $C = 4$. Следовательно, искомая интегральная кривая задается уравнением $x^2 - 3x + (3y^2)/2 = 4$. Учитывая, что $y(1) = 2 > 0$, отсюда получаем уравнение этой кривой в явной форме: $y = \sqrt{\frac{2}{3}(4 + 3x - x^2)}$. Кривая определена при x ,

удовлетворяющих неравенству

$$4 + 3x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4.$$

§ 21.4. УРАВНЕНИЯ

С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Если в уравнении

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (21.10)$$

функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ допускают разложение на множители

$$M(x, y) = M_1(x) \cdot M_2(y), \quad N(x, y) = N_1(x) \cdot N_2(y),$$

каждый из которых является функцией только одной переменной (или x , или y), то говорят, что (21.10) — уравнение с разделяющимися переменными. Будем предполагать, что все функции $M_i(x)$, $N_i(x)$ непрерывны в своих областях определения. Перепишем уравнение (21.10) в виде

$$M_1(x)M_2(y)dx = -N_1(x)N_2(y)dy \quad (21.11)$$

и разделим обе части на произведение $M_2(y)N_1(x)$, предполагая пока, что $M_2(y)N_1(x) \neq 0$. Получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx = -\frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy.$$

Интегрируя его, получаем общий интеграл уравнения (21.11):

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx = -\int \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy + C \quad (21.12)$$

в случае $M_2(y)N_1(x) \neq 0$ (здесь: $x \in D(M_1) \cap D(N_1)$, $y \in D(N_2) \cap D(M_2)$). Если же $M_2(y)N_1(x) = 0$, то (21.12) нельзя считать общим интегралом уравнения (21.11), так как деление на нуль невозможно. Пусть совокупность уравнений

$$\begin{cases} M_2(y) = 0, \\ N_1(x) = 0 \end{cases}$$

имеет решение (т. е. $M_2(\beta) = 0$ или $N_1(\alpha) = 0$, где α и β постоянные). Тогда непосредственной подстановкой $x = \alpha$ и $y = \beta$ в (21.11) убеждаемся, что функции $x = \alpha$ и $y = \beta$ являются решениями этого уравнения (при этом точку $M(\alpha; \beta)$ следует исключить из прямых $x = \alpha$ и $y = \beta$, так как в этой точке уравнение (21.11) не задает никакого направления). Решения $x = \alpha$ и $y = \beta$ могут быть особыми (это нужно проверить отдельно); их нужно присовокупить к интегралу (21.12).

ПРИМЕР 21.4. Проинтегрировать уравнение

$$(x + 2)\sqrt{y}dx - 3xdy = 0. \quad (21.13)$$

Имеет ли это уравнение особые решения?

Разделим обе части уравнения на произведение $x\sqrt{y}$, предполагая пока, что оно не равно нулю. Будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x}dx &= 3\frac{dy}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow \int \frac{x+2}{x}dx = 3\int \frac{dy}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x + 2\ln|x| = 6\sqrt{y} + C. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $x\sqrt{y} = 0$. Получаем еще два решения $x = 0$ и $y = 0$ уравнения (21.13) (при этом из указанных прямых надо исключить точку $M(0; 0)$). Проверим, будет ли решение $x = 0$ ($y > 0$) особым. Оно удовлетворяет уравнению

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3x}{(x+2)\sqrt{y}}. \quad (21.14)$$

Частная производная $f'_x = 6 / \sqrt{y}(x+2)^2$ правой части (21.14) существует в каждой точке прямой $x = 0$ ($y > 0$) (и некоторой ее окрестности), поэтому уравнение (21.14) имеет единственное решение в окрестности этой точки (см. теорему Коши). Отсюда следует, что прямая $x = 0$ ($y > 0$) не может быть особым решением (21.14) (значит и уравнения (21.13)). Проверим, будет ли решение $y = 0$ ($x \neq 0$) особым. Это решение является также и решением эквивалентного уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+2)\sqrt{y}}{3x}. \quad (21.15)$$

Частная производная $f'_y = (x+2) / (6x\sqrt{y})$ правой части (21.15) равна ∞ в каждой точке прямой $y = 0$ ($x \neq 0$), и значит последняя может быть особым решением уравнения (21.15). Пусть $(x_0; y_0) = (x_0; 0)$ — фиксированная точка этой

прямой. Задача Коши с начальной точкой $(x_0; 0)$, $x_0 \neq 0$, как нетрудно видеть, имеет решение, определяемое интегралом

$$(x - x_0) + 2 \ln \left| \frac{x}{x_0} \right| = 6\sqrt{y}.$$

Это решение не совпадает с решением $y = 0$ ($x \neq 0$), и значит последнее является особым решением исходного уравнения (21.13). Нетрудно видеть, что другие решения, определяемые интегралом $x + 2 \ln|x| = 6\sqrt{y} + C$ являются неособыми. Окончательный ответ: общее решение имеет вид

$$\begin{cases} x + 2 \ln|x| = 6\sqrt{y} + C, \\ x = 0 (y > 0), y = 0 (x \neq 0); \end{cases}$$

функция $y = 0 (x \neq 0)$ — особое решение.

Уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c), \quad (21.16)$$

где a, b, c — постоянные, причем $b \neq 0$, заменой

$$ax + by + c = z$$

приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Действительно, дифференцируя указанную замену, найдем, что $y' = \frac{1}{b}(z' - a)$, и уравнение (21.16) примет вид

$$\frac{z' - a}{b} = f(z) \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = bf(z) + a.$$

При $x \neq \text{const}$ его можно переписать в эквивалентной форме

$$dz = [bf(z) + a]dx.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными.

ПРИМЕР 21.5. Найти общий интеграл уравнения

$$y' = (3x + 2y - 1)^2.$$

Делаем замену $z = 3x + 2y - 1$. Тогда $z' = 3 + 2y'$, и значит $y' = (z' - 3)/2$. Подставляя это в исходное уравнение, будем иметь

$$\frac{z' - 3}{2} = z^2 \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = 2z^2 + 3.$$

Разделяя в последнем уравнении переменные, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dz}{2z^2 + 3} = dx &\Leftrightarrow \int \frac{dz}{2z^2 + 3} = \int dx + C \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^2 + (\sqrt{3/2})^2} = x + C \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = x + C. \end{aligned}$$

Подставляя сюда $z = 3x + 2y - 1$, получаем общий интеграл исходного уравнения:

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (3x + 2y - 1) \right] = x + C.$$

§ 21.5. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Напомним, что функция $F(x, y)$ называется однородной функцией степени k (точнее: A -однородной), если для всех $t \in A \subset \mathbb{R}$ выполняются следующие свойства:

- 1) $(x, y) \in D(F) \Rightarrow (tx, ty) \in D(F)$;
- 2) $F(tx, ty) \equiv t^k F(x, y) \ (\forall (x, y) \in D(F))$.

Чаще всего в качестве множества A выступают множества

$$A = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{или} \quad A = \mathbb{R}_+ = \{t > 0\}.$$

Например, функция $F(x, y) = \sqrt{x^3 - y^3}$ является однородной функцией степени $k = 3/2$, если в качестве A берется множество $A = \mathbb{R}_+$. Действительно, при $t \in \mathbb{R}_+$ имеем $(\forall (x, y) : x^3 - y^3 \geq 0)$:

$$F(tx, ty) = \sqrt{t^3 x^3 - t^3 y^3} \equiv t^{3/2} \sqrt{x^3 - y^3} \equiv t^{3/2} F(x, y).$$

Если $F(x, y)$ — многочлен от x и y , то он будет однородной функцией степени k тогда и только тогда, когда все его члены (в его каноническом представлении) имеют одну и ту же степень, равную k . Например, $F(x, y) = 3x^2y^2 - 7xy^3$ — однородный многочлен степени $k = 4$ (заметим, что для многочленов в качестве множества A можно взять множество $A = R$).

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (21.17)$$

Если в нем функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — однородные функции одной и той же степени k , то (21.17) называется *однородным* дифференциальным уравнением. Это уравнение при $x \neq 0$ может быть приведено к виду

$$f\left(\frac{y}{x}\right)dx + g\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0. \quad (21.18)$$

Действительно, взяв в качестве параметра t переменную x ($t = x$), будем иметь

$$\begin{aligned} M(x, y) &\equiv M\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^k M\left(1, \frac{y}{x}\right) \equiv x^k f\left(\frac{y}{x}\right) \\ N(x, y) &\equiv N\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^k N\left(1, \frac{y}{x}\right) \equiv x^k g\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

Если $g(z) \neq 0$ (случай $g(z) = 0$, как и случай $x = 0$, надо рассматривать отдельно), то уравнение (21.18) (а значит и уравнение (21.17)) приводится к виду

$$\frac{dy}{dx} = F(y/x), \quad (21.19)$$

где $F(z) \equiv -f(z)/g(z)$. Сделав в уравнении (21.19) замену переменных $y/x = z$, будем иметь

$$y = xz \Rightarrow y' = z + xz' \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx},$$

и уравнение (21.19) приведем к виду

$$z + x \frac{dz}{dx} = F(z) \Leftrightarrow x dz = (F(z) - z) dx.$$

Получено уравнение с разделяющимися переменными. Если $x \cdot (F(z) - z) \neq 0$, то оно имеет общий интеграл

$$\int \frac{dz}{F(z) - z} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Вернувшись здесь к исходной функции $y(z = y/x)$, получим общий интеграл исходного уравнения (21.17) в случае $x \cdot (F(z) - z) \neq 0$. Если $x = 0$ или $F(z) - z = 0$ является решением уравнения (21.20). Полагая $x \neq 0$, приводят к решениям уравнения (21.17), то их следует включить в общее решение.

ПРИМЕР 21.6. Решить уравнение

$$x dy = (\sqrt{x^2 + y^2} + y) dx. \quad (21.20)$$

Здесь $M(x, y) = x$ и $N(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y$ — однородные функции одной и той же степени $k = 1$ (проверьте это, полагая $t \in A = R_+$). Очевидно, функция $x = 0$, является решением уравнения (21.20). Полагая $x \neq 0$ разделив обе части (21.20) на x , получим

$$dy = \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} + \frac{y}{x} \right) dx \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} + \frac{y}{x}$$

(здесь берется знак $(+)$, если $x > 0$, и знак $(-)$, если $x < 0$). Сделав замену

$$\frac{y}{x} = z \Leftrightarrow y = xz \Leftrightarrow y' = z + xz',$$

получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$z + x \frac{dz}{dx} = \pm \sqrt{1 + z^2} + z \Leftrightarrow x dz = \pm \sqrt{1 + z^2} dx.$$

Рассмотрим случай $x > 0$. Тогда, разделяя переменные, будем иметь

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} &= \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln(z + \sqrt{1 + z^2}) = \\ &= \ln x + \ln C_1 \Leftrightarrow z + \sqrt{1 + z^2} = C_1 x. \end{aligned}$$

Заменяя здесь z на y/x получаем общий интеграл исходного уравнения (21.20) (в случае $x > 0$): $y + \sqrt{x^2 + y^2} = C_1 x^2 (C_1 > 0)$.

Если $x < 0$, то, проводя аналогичные выкладки, получаем общий интеграл в виде $\sqrt{x^2 + y^2} - y = C_2 (C_2 > 0)$. Умножая обе части этого равенства на $\sqrt{x^2 + y^2} + y \neq 0$, получаем

$$x^2 = C_2 (\sqrt{x^2 + y^2} + y) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + y = \frac{x^2}{C_2}.$$

Итак, если обозначить через C общую константу, то общий интеграл исходного уравнения (21.20) при $x \neq 0$ можно записать в виде $\sqrt{x^2 + y^2} + y = Cx^2 (C > 0)$. Окончательный ответ:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + y = Cx^2 (C > 0), \\ x = 0. \end{cases}$$

Заметим, что уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

приводятся к однородным, если сделать замену переменных $u = x - x_0, v = y - y_0$, где (x_0, y_0) — решение системы

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0. \end{cases}$$

В случае, когда эта система не имеет решений (соответствующие прямые параллельны), коэффициенты уравнений будут пропорциональны, т. е. $a_1 = k a_2, b_1 = k b_2$. В этом случае исходное уравнение принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(a_2 x + b_2 y) + c_1}{a_2 x + b_2 y}\right)$$

и оно после замены $a_2 + b_2 y = z$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

ПРИМЕР 21.7. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}.$$

Система уравнений

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение $(x, y) = (1; 2)$. Делаем замену переменных $u = x - 1$, $v = y - 2$. Поскольку $dx = du$, $dy = dv$, то данное уравнение принимает вид

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + 1 - v - 2 + 1}{u + 1 + v + 2 - 3} \Leftrightarrow \frac{dv}{du} = \frac{u - v}{u + v} \Leftrightarrow \frac{dv}{du} = \frac{1 - v/u}{1 + v/u}.$$

Оно однородно, поэтому делаем замену

$$\frac{v}{u} = z \Leftrightarrow v = uz \Leftrightarrow \frac{dv}{du} = z + u \frac{dz}{du},$$

и получаем

$$\begin{aligned} z + u \frac{dz}{du} &= \frac{1 - z}{1 + z} \Leftrightarrow u \frac{dz}{du} = \\ &= \frac{1 - 2z - z^2}{1 + z} \Leftrightarrow \int \frac{(1 + z)dz}{1 - 2z - z^2} = \int \frac{du}{u} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \ln|1 - 2z - z^2| = \ln|u| - \frac{1}{2} \ln C \Leftrightarrow (1 - 2z - z^2)u^2 = C. \end{aligned}$$

Возвращаясь к старым переменным с помощью равенств $z = (y - 2)/(x - 1)$, $u = x - 1$, получаем общий интеграл исходного уравнения

$$x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = C_1.$$

§ 21.6. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x), \quad (21.21)$$

где $a(x)$ и $b(x)$ — известные функции, называются *линейными дифференциальными уравнениями* (первого порядка). При этом функция $b(x)$ называется *неоднородностью* уравнения (21.21). Если неоднородность отсутствует, то уравнение (21.21) называется *однородным*; в противном случае (т. е. когда $b(x) \neq 0$) уравнение (21.21) называется *неоднородным*. Уравнение $z' = a(x)z$ называется *однородным уравнением*, соответствующим уравнению (21.21).

Докажем следующее замечательное утверждение. Отметим, что это утверждение называют глобальной теоремой существования решения, так как она гарантирует разрешимость задачи Коши в области непрерывности коэффициентов $a(x)$ и $b(x)$ (т. е. на всем отрезке $[a; b]$). В нелинейном случае гарантируется лишь локальная разрешимость, т. е. разрешимость в достаточно малой окрестности точки $x = x_0$.

Теорема 21.1. *Если в уравнении (21.21) коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, то какова бы ни была начальная точка (x_0, y_0) ($x_0 \in [a; b]$), задача Коши*

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x), y(x_0) = y_0$$

с этой начальной точкой имеет решение на отрезке $[a; b]$ и оно единственно. Это решение можно записать в форме

$$y(x) = y(x, x_0, y_0) = e^{\int_{x_0}^x a(t) dt} \left[y_0 + \int_{x_0}^x e^{-\int_{x_0}^s a(t) dt} b(s) ds \right] \quad (21.22)$$

Доказательство. Подставляя в (21.22) значение $x = x_0$, будем иметь $y(x_0) = y_0$. Значит функция (21.22) удовлетворяет начальному условию. Далее, функция (21.22) определена на отрезке $[a; b]$ и даже дифференцируема на нем (так как функции $a(x)$ и $b(x)$ непрерывны на $[a; b]$). Дифференцируя (21.22) по x , будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dy(x)}{dx} &= e^{\int_{x_0}^x a(t)dt} \cdot a(x) \left[y_0 + \int_{x_0}^x e^{-\int_{x_0}^t a(t)dt} b(x)dx \right] + \\ &+ e^{\int_{x_0}^x a(t)dt} \cdot e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} \cdot b(x) = \\ &= a(x) \cdot y(x) + b(x). \end{aligned}$$

Значит имеет место тождество $y'(x) \equiv a(x)y(x) + b(x)$. Это означает, что функция (21.22) является решением уравнения (21.21). Теорема доказана.

Замечание. Поскольку y_0 произвольно, то заменяя его на произвольную постоянную C и записывая вместо определенных интегралов неопределенные, получаем общее решение в виде

$$y = y(x; C) = e^{\int a(x)dx} \left[C + \int e^{-\int a(x)dx} b(x)dx \right]. \quad (21.23)$$

В отличие от (21.23) функцию (21.22) часто называют общим решением уравнения (21.21) в форме Коши.

Функцию (21.23) можно расчленить на две: функцию $y_{o.o.} = e^{\int a(x)dx} C$ и функцию $y_{r.n.} = e^{\int a(x)dx} \int e^{-\int a(x)dx} b(x)dx$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция $y_{o.o.}(x)$ является общим решением соответствующего однородного уравнения $z' = a(x)z$, а функция $y_{r.n.}(x)$ — частным решением исходного неоднородного уравнения (21.21). Таким образом, имеет место формула

$$y_{o.n.} = y_{o.o.} + y_{r.n.}, \quad (21.24)$$

где $y_{o.n.}$ — общее решение неоднородного уравнения (21.21).

Запомнить формулу (21.23) довольно затруднительно. Поэтому дадим способ ее вычисления, называемый *методом вариации произвольной постоянной Лагранжа*.

Алгоритм 21.1. Пусть дано линейное дифференциальное уравнение (21.21). Чтобы найти его общее решение сделаем следующее.

1) Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения методом разделения переменных:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= a(x)z, \quad \frac{dz}{z} = a(x)dx \Leftrightarrow \int \frac{dz}{z} = \int a(x)dx \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln|z| = \int a(x)dx + \ln C_1 \Leftrightarrow |z| = C_1 e^{\int a(x)dx} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = Ce^{\int a(x)dx} \quad (C = \pm C_1).\end{aligned}$$

2) Определяем общее решение неоднородного уравнения (21.21) в виде $y = C(x)e^{\int a(x)dx}$ (т. е. в таком же виде, что и решение соответствующего однородного уравнения, но в котором «постоянная» C является функцией x , т. е. она варьируется). Подставляя функцию $y = C(x)e^{\int a(x)dx}$ в уравнение (21.21), будем иметь

$$C'(x)e^{\int a(x)dx} + C(x)e^{\int a(x)dx} \cdot a(x) = a(x)C(x)e^{\int a(x)dx} + b(x).$$

Сокращая здесь $C(x)e^{\int a(x)dx} \cdot a(x)$, найдем, что функция $C(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$C'(x) = e^{-\int a(x)dx} b(x),$$

интегрируя которое находим $C(x)$:

$$C(x) = \int e^{-\int a(x)dx} b(x)dx + \bar{C}.$$

3) Подставив найденную функцию $C(x)$ в $y = C(x)e^{\int a(x)dx}$, получим общее решение неоднородного уравнения (21.21):

$$y = y_{o.n.} = e^{\int a(x)dx} \left[\bar{C} + \int e^{-\int a(x)dx} b(x)dx \right].$$

ПРИМЕР 21.8. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} = y + x \tag{21.25}$$

и найти его интегральную кривую, проходящую через точку $M(1; 2)$.

Соответствующее однородное уравнение легко интегрируется:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= z, \quad \frac{dz}{z} = dx \Leftrightarrow \int \frac{dz}{z} = \int dx \Leftrightarrow \ln|z| = x + \ln C_1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |z| = C_1 e^x \Leftrightarrow z = Ce^x \quad (C = \pm C_1).\end{aligned}$$

Определяем решение неоднородного уравнения (21.25) в виде $y = C(x)e^x$, где $C(x)$ — пока неизвестная функция. Подставляя $y = C(x)e^x$ в уравнение (21.25):

$$\begin{aligned} C'(x)e^x + C(x)e^x &= C(x)e^x + x \Leftrightarrow C'(x)e^x = \\ &= x \Leftrightarrow C'(x) = xe^{-x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow C(x) &= \int xe^{-x} dx \Leftrightarrow C(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + \bar{C}. \end{aligned}$$

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения (21.25) имеет вид

$$y = C(x)e^x = (-xe^{-x} - e^{-x} + \bar{C})e^x = \bar{C}e^x - (x + 1).$$

Положим здесь $x = 1$ и $y = 2$, тогда

$$2 = \bar{C} \cdot e - 2 \Leftrightarrow \bar{C} = 4e^{-1}.$$

Значит, интегральная кривая, проходящая через точку $M(1; 2)$ имеет вид

$$y = 4e^{x-1} - (x + 1).$$

§ 21.7. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Так называется уравнение

$$y' = a(x)y + b(x)y^n, \quad (21.26)$$

в котором $a(x)$ и $b(x)$ — известные непрерывные на отрезке $[a; b]$ функции, n — постоянная ($n \neq 0$ и $n \neq 1$). Его можно свести к линейному уравнению следующими преобразованиями:

а) разделив обе части уравнения (21.26) на y^n , получим

$$y^{-n}y' = a(x)y^{1-n} + b(x);$$

б) сделав замену переменной $z = y^{1-n}$ и приняв во внимание, что $z' = (1-n)y^{-n} \cdot y'$, будем иметь

$$\frac{1}{1-n} z' = a(x)z + b(x) \Leftrightarrow z' = (1-n)a(x)z + (1-n)b(x).$$

Получено линейное уравнение, которое решается описанным выше способом.

ПРИМЕР 21.9. Решить уравнение

$$y' + 2y = e^x y^2. \quad (21.27)$$

Мы дадим два способа решения этого уравнения.

1. Разделим обе части уравнения (21.27) на y^2 и сделаем замену $y^{-1} = z$. Получим уравнение $z' = 2z - e^x$. Оно линейно, и поэтому его можно решить указанным выше способом. Будем иметь $z = e^{2x} \cdot C + e^x$, а значит исходное уравнение имеет следующее общее решение:

$$\begin{cases} y = (e^{2x}C + e^x)^{-1}, \\ y = 0 \end{cases}$$

(решение $y = 0$ было потеряно в результате деления на y).

2. Будем искать решение уравнения (21.27) в виде произведения двух функций $y = uv \equiv u(x) \cdot v(x)$. Подставляя это произведение в (21.27), получаем

$$u'v + uv' + 2uv = e^x u^2 v^2 \Leftrightarrow u'v + u(v' + 2v) = e^x u^2 v^2.$$

Потребуем, чтобы $v' + 2v = 0$. Тогда $v = e^{-2x}$, и последнее уравнение приобретает вид $u' = e^{-x} u^2$. Решая его методом разделения переменных, найдем, что

$$\begin{aligned} \frac{du}{u^2} &= e^{-x} dx \Leftrightarrow \int \frac{du}{u^2} = \int e^{-x} dx \Leftrightarrow -\frac{1}{u} = \\ &= -e^{-x} - C \Leftrightarrow u = (e^{-x} + C)^{-1}. \end{aligned}$$

Значит $y = uv = e^{-2x}(e^{-x} + C)^{-1} = (Ce^{2x} + e^x)^{-1}$. Мы снова потеряли решение $y = 0$, когда делили на v .

§ 21.8. УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Если в уравнении

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (21.28)$$

левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, т. е. $du(x, y) \equiv M(x, y)dx + N(x, y)dy$, то его

называют уравнением в полных дифференциалах. В этом случае $u(x, y) = C$ — общий интеграл уравнения.

Теорема 21.2. Пусть функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\partial M/\partial y$ и $\partial N/\partial x$ в некоторой односвязной области D . Тогда уравнение (21.28) будет уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \equiv \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \quad (\forall (x, y) \in D). \quad (21.29)$$

Доказательство этой теоремы сводится к проверке того, что условие (21.29) является необходимым и достаточным для существования функции $u(x, y)$ такой, что $du = Mdx + Ndy$. Подробное доказательство этого факта проводится в теории криволинейного интеграла и мы его опускаем.

Если выполнено условие (21.29), то определяем функцию $u = u(x, y)$ из уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y).$$

ПРИМЕР 21.10. Решить уравнение

$$(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0. \quad (21.30)$$

Проверяем условие (21.29):

$$\frac{\partial(x - y^2 + 3)}{\partial x} \equiv 1, \quad \frac{\partial(x + y + 1)}{\partial y} \equiv 1.$$

Оно выполняется при всех x, y , значит (21.30) — уравнение в полных дифференциалах. Следовательно, существует функция $u(x, y)$ такая, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + y + 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x - y^2 + 3. \quad (21.31)$$

Проинтегрируем первое уравнение, взяв от обеих частей интеграл по переменной x . Будем иметь $u = x^2/2 + xy + x + \varphi(y)$ (здесь роль произвольной постоянной играет функция $\varphi(y)$, не зависящая от x). Подставляя эту функцию во второе уравнение (21.31), будем иметь

$$\begin{aligned}
 x + \varphi'(y) &= x - y^2 + 3 \Leftrightarrow \varphi'(y) = 3 - y^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \varphi(y) = 3y - \frac{y^3}{3} + C_1.
 \end{aligned}$$

Следовательно, $u = x^2/2 + xy + x + 3y - y^3/3 + C_1$, и общий интеграл уравнения (21.30) имеет вид $u(x, y) = C_2$. Окончательный ответ:

$$\frac{x^2}{2} + xy + x + 3y - \frac{y^3}{3} = C.$$

В некоторых случаях, когда уравнение (21.28) не является уравнением в полных дифференциалах, можно найти такую функцию $\mu(x, y)$, после умножения на которую обеих частей уравнения (21.28) получается уравнение

$$(\mu \cdot M)dx + (\mu \cdot N)dy = 0$$

в полных дифференциалах. В этом случае функцию $\mu(x, y)$ называют *интегрирующим множителем*. Ясно, что $\mu(x, y)$ будет интегрирующим множителем для уравнения (21.28), если $\mu(x, y)$ удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N),$$

которое после очевидных выкладок можно представить в виде

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \quad (21.32)$$

Решить это уравнение в общем случае является задачей довольно трудной. Однако можно задаться целью отыскать интегрирующий множитель в виде функции одной переменной или в виде функции, зависящей только от суммы (разности) $x \pm y$, или $x^2 + y^2$, или $x \cdot y$ и т. д. Используя (21.32), нетрудно показать, что $\mu(x, y) \equiv \mu(x)$, если функция $\varphi = (\partial M / \partial y - \partial N / \partial x) / N$ зависит только от x . В этом случае

$$\mu = \mu(x) = e^{\int \varphi(x) dx} \quad (21.33)$$

Если же функция $\varphi = (\partial M/\partial y - \partial N/\partial x)/(xN - yM)$ зависит только от $x^2 + y^2$, то интегрирующий множитель имеет вид

$$\mu = \mu(x^2 + y^2) = e^{\frac{1}{2} \int \varphi(z) dz} \Big|_{z=x^2+y^2}.$$

И, наконец, если функция

$$\varphi = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) / \left(M \frac{\partial \omega}{\partial y} - N \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \quad (21.34)$$

зависит только от $\omega = \omega(x, y)$, то уравнение (21.28) допускает интегрирующий множитель в виде $\mu = \mu(\omega(x, y))$, вычисляемый по формуле

$$\mu = e^{\int \varphi(\omega) d\omega} \Big|_{\omega=\omega(x,y)}. \quad (21.35)$$

Действительно, пусть функция (21.34) зависит только от ω . Подставляя (21.35) в уравнение (21.32), имеем

$$\begin{aligned} M e^{\int \varphi(\omega) d\omega} \cdot \varphi(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial y} - N e^{\int \varphi(\omega) d\omega} \cdot \varphi(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} &\equiv \\ &\equiv e^{\int \varphi(\omega) d\omega} \cdot \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Сокращая здесь экспоненту и подставляя вместо $\varphi(\omega)$ функцию (21.34), получаем тождество, означающее, что функция (21.35) является решением уравнения (21.32). Следовательно, (21.35) — интегрирующий множитель уравнения (21.28).

ПРИМЕР 21.11. Найти общий интеграл уравнения

$$(1 - xe^{-y})dx + (x + 2xe^{2y} + x^2e^{-y})dy = 0. \quad (21.36)$$

Имеем

$$\frac{\partial M}{\partial y} = xe^{-y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 + 2e^{2y} + 2xe^{-y}.$$

Так как $\partial M/\partial y \neq \partial N/\partial x$, то (21.36) не является уравнением в полных дифференциалах. Попробуем найти интегрирующий множитель. Так как функция

$$\varphi \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = \frac{xe^{-y} - 1 - 2e^{2y} - 2xe^{-y}}{x(1 + 2e^{2y} + xe^{-y})} = -\frac{1}{x}$$

зависит только от x , то (21.36) имеет интегрирующий множитель

$$\mu = \mu(x) = e^{\int \varphi(x) dx} = e^{-\int dx/x} = \frac{1}{x} (x \neq 0).$$

Умножая обе части уравнения (21.36) на $1/x$ получаем уравнение

$$\left(\frac{1}{x} - e^{-y} \right) dx + (1 + 2e^{2y} + e^{-y} x) dy = 0.$$

в полных дифференциалах. Находим функцию $u = u(x, y)$ из уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x} - e^{-y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1 + 2e^{2y} + e^{-y} x.$$

Из первого уравнения вычисляем $u = \ln|x| - e^{-y} x + v(y)$ и, подставляя во второе уравнение, имеем

$$e^{-y} x + v'(y) = 1 + 2e^{2y} + e^{-y} x \Leftrightarrow v'(y) = 1 + 2e^{2y} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow v(y) = y + e^{2y} + C_1.$$

Следовательно, $u(x, y) = \ln|x| - xe^{-y} + y + e^{2y}$. Получаем окончательный ответ:

$$\begin{cases} \ln|x| - xe^{-y} + y + e^{2y} = C, \\ x = 0. \end{cases}$$

ПРИМЕР 21.12. Решить уравнение

$$x dx + y dy + x dy - y dx = 0. \quad (21.37)$$

Здесь функция

$$\varphi = \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{xN - yM} = \frac{(\partial/\partial y)(x - y) - (\partial/\partial x)(x + y)}{x(x + y) - y(x - y)} = -\frac{2}{x^2 + y^2}$$

зависит только от $\omega = x^2 + y^2$. Значит, функция

$$\mu = \mu(x^2 + y^2) = e^{\int \varphi(\omega) d\omega} = e^{-\int d\omega/\omega} = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

является интегрирующим множителем уравнения (21.37). Умножая его обе части на $\mu = 1/(x^2 + y^2)$, получаем уравнение

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} + \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} d(\ln(x^2 + y^2)) + \frac{d(y/x)}{1 + (y/x)^2} = 0.$$

Интегрируя, получаем $\ln \sqrt{x^2 + y^2} + \operatorname{arctg}(y/x) = \ln C$.
После преобразований имеем:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^{\operatorname{arctg}(y/x)} = C.$$

§ 21.9. УРАВНЕНИЯ, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Рассмотрим уравнение

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \quad (21.38)$$

Если его можно легко разрешить относительно dy/dx , то получим одно или несколько уравнений вида

$$\frac{dy}{dx} = f_i(x, y), \quad i = \overline{1, m},$$

которые решаются изложенными выше способами. Однако не всегда удастся разрешить уравнение (21.38) относительно производной (или сделать это бывает очень трудно). Тогда для решения уравнения (21.38) применяют так называемый *метод введения параметра*, рассмотрение которого мы начнем с простейших случаев.

а) Уравнение (21.38) не содержит неизвестную функцию $y = y(x)$, т. е. имеет вид

$$F(x, y') = 0. \quad (21.39)$$

Подберем функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ так, чтобы удовлетворялось тождество $F(\varphi(t), \psi'(t)) \equiv 0$. Тогда $x = \varphi(t)$, $y' = \psi'_x = \psi'(t)$. Интегральная кривая $y = y(x)$ уравнения (21.39) будет задана параметрически, если наряду с уравнением $x = \varphi(t)$ мы найдем параметрическое уравнение для y . Для этого

воспользуемся формулой $y'_x = y'_t/x'_t \Leftrightarrow y'_t = y'_x x'_t$. Будем иметь

$$y'_t = \psi(t) \cdot \varphi'(t) \Leftrightarrow y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Тем самым получено параметрическое представление

$$x = \varphi(t), \quad y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt$$

решения уравнения (21.39).

ПРИМЕР 21.13. Решить уравнение

$$x\sqrt{1+y'^2} = y'. \quad (21.40)$$

Здесь целесообразно ввести параметр t так, чтобы $y' = y'_x = \operatorname{tg} t$. Предполагая, что $t \in (-\pi/2; \pi/2)$, из уравнения (21.40) получаем

$$\frac{x}{\cos t} = \operatorname{tg} t \Leftrightarrow x = \sin t.$$

Таким образом, найдены две функции $x = \sin t$ и $y' = \operatorname{tg} t$, удовлетворяющие уравнению (21.40). Однако надо найти параметрическое представление для y . Имеем

$$\begin{aligned} y'_t &= y'_x \cdot x'_t \Leftrightarrow y'_t = \operatorname{tg} t \cdot \cos t \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y'_t = \sin t \Leftrightarrow y = -\cos t + C. \end{aligned}$$

Итак, решение уравнения (21.40) в параметрической форме имеет вид $x = \sin t$, $y = -\cos t + C$. Если исключить здесь параметр C , то получим интеграл $x^2 + (y - C)^2 = 1$ уравнения (21.41) в обычной форме. Ответ:

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = -\cos t + C (t \in (-\pi/2; \pi/2)), \end{cases} \quad \text{или} \quad x^2 + (y - C)^2 = 1.$$

б) Уравнение (21.38) не содержит независимую переменную x , т. е. имеет вид

$$F(y, y') = 0. \quad (21.41)$$

Подберем функции $y = \varphi(t)$ и $y'_x = \psi(t)$ так, чтобы выполнялось тождество $F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$. Тогда функция y бу-

дет задана, и надо найти параметрическое представление для x . Имеем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \Leftrightarrow \psi(t) = \frac{\psi'(t)}{x'(t)} \Leftrightarrow x'_t = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} \Leftrightarrow x = \int \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} dt + C;$$

тем самым получено параметрическое представление

$$x = \int \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} dt + c, \quad y = \varphi(t)$$

решения уравнения (21.41).

ПРИМЕР 21.14. Решить уравнение

$$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = 1. \quad (21.42)$$

Чтобы избавиться от иррациональности, удобно ввести параметр t так, чтобы $y' = y'_x = \operatorname{sh} t$. Тогда $y/\operatorname{ch} t = 1$, и значит $y = \operatorname{ch} t$. Найдем параметрическое представление для x . Имеем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \Leftrightarrow \operatorname{ch} t \frac{\operatorname{sh} t}{x'_t} \Leftrightarrow x'_t = 1 \Leftrightarrow x = \int dt = t + C.$$

Следовательно, решение уравнения (21.42) в параметрической форме имеет вид $x = t + C$, $y = \operatorname{ch} t$ ($-\infty < t < +\infty$). Исключая здесь t , можно записать общий интеграл $y = \operatorname{ch}(x - C)$ уравнения (21.42) в обычной форме. Ответ:

$$\begin{cases} x = t + C, \\ y = \operatorname{ch} t (t \in (-\infty, +\infty)), \end{cases}$$

или $y = \operatorname{ch}(x - C)$.

в) Уравнение (21.38) легко разрешается относительно y , т. е. приводится к виду

$$y = f(x, y'). \quad (21.43)$$

В этом случае в качестве параметра удобно взять $y' = y'_x = p$ (здесь мы отдаем дань традиции, обозначая параметр не буквой t , а буквой p). Тогда (21.43) принимает вид

$$y = f(x, p).$$

Мы получили только одно соотношение, связывающее y и x через параметр p . Надо найти еще одно соотношение такого типа.

Продифференцировав равенство $y = f(x, p)$, имеем

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx}.$$

Последнее равенство является дифференциальным уравнением относительно неизвестной функции $p = p(x)$, так как в нем частные производные $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial p$ зависят от x и p . Интегрируя это дифференциальное уравнение, найдем его общий интеграл $\Phi(x, p, C) = 0$. Тогда система уравнений $\Phi(x, p, C) = 0$, $y = f(x, p)$, где p — параметр, определяет семейство интегральных кривых уравнения (21.43) в параметрической форме.

г) Уравнение (21.38) легко разрешается относительно x , т. е. приводится к виду

$$x = g(y, y'). \quad (21.44)$$

В этом случае также удобно ввести параметр $y' = y'_x = p$. Тогда (21.44) принимает вид

$$x = g(y, p).$$

Дифференцируя это равенство, будем иметь

$$dx = \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial p} dp, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy}; \quad \frac{1}{p} = \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy}.$$

Последнее равенство является дифференциальным уравнением относительно функции $p = p(y)$, так как в нем частные производные $\partial g/\partial y$ и $\partial g/\partial p$ являются функциями y и p . Интегрируя это дифференциальное уравнение, получаем его общий интеграл $\Phi(y, p, C) = 0$. Тогда система уравнений $\Phi(y, p, C) = 0$, $x = g(y, p)$, p — параметр, определяет семейство интегральных кривых уравнения (21.44) в параметрической форме.

ПРИМЕР 21.15. Решить уравнение Клеро

$$y = xy' + \psi(y'), \quad (21.45)$$

где $\psi(u)$ — гладкая функция в своей области определения D .

Здесь уравнение (21.45) уже имеет вид (21.43). Поэтому вводим параметр $p = dy/dx$ и получаем одно соотношение

$$y = xp + \psi(p). \quad (21.46)$$

Для получения другого соотношения, дифференцируем (21.46). Вследствие чего имеем:

$$dy = p dx + x dp + \psi'(p) dp \Leftrightarrow dy = p dx + (x + \psi'(p)) dp.$$

Так как $x = C$ не является решением уравнения (21.45), то $dx \neq 0$, и значит можно разделить последнее уравнение на dx и получить

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= p + (x + \psi'(p)) \frac{dp}{dx} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow p &= p + (x + \psi'(p)) \frac{dp}{dx} \Leftrightarrow (x + \psi'(p)) \frac{dp}{dx} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + \psi'(p) = 0, \\ dp/dx = 0; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + \psi'(p) = 0, \\ p = C = \text{const} \end{cases} \end{aligned}$$

Учитывая (21.46), видим, что интегральные кривые уравнения (21.45) задаются в виде

$$\begin{cases} y = xp + \psi(p), \\ x + \psi'(p) = 0, \\ y = xC + \psi(C). \end{cases} \quad (21.47)$$

Это и есть ответ.

ПРИМЕР 21.16. Решить уравнение Лагранжа

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \quad (21.48)$$

где $\varphi(u) \neq u$ и $\psi(u)$, $\varphi(u)$ — гладкие в своих областях определения функции.

Здесь также уравнение (21.48) имеет вид (21.43). Поэтому вводя параметр $p = dy/dx$, получаем соотношение

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \quad (21.49)$$

Чтобы найти еще одно соотношение, продифференцируем (21.49). В результате получаем

$$dy = \varphi(p)dx + x\varphi'(p)dp + \psi'(p)dp \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow dy = (p)dx + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]dp.$$

Поскольку $x = C$ не является решением уравнения (21.48), то, поделив последнее уравнение на dx , получим эквивалентное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)] \frac{dp}{dx} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow p - \varphi(p) &= [x\varphi'(p) + \psi'(p)] \frac{dp}{dx}. \end{aligned} \quad (21.50)$$

Если $dp/dx \neq 0$, то уравнение (21.50) равносильно следующему:

$$[p - \varphi(p)] \frac{dx}{dp} = x\varphi'(p) + \psi'(p).$$

Оно линейно по x , и, поскольку $\varphi(p) \neq p$, можно найти его общий интеграл $\Phi(x, p, C) = 0$, пользуясь, например, методом вариации произвольной постоянной Лагранжа.

Если $dp/dx = 0$, то уравнение (21.50) приводится к виду $\varphi(p) = p$. Если это алгебраическое уравнение имеет действительные корни $p = p_i$ ($i = \overline{1, m}$), то интегральные кривые уравнения Лагранжа (21.48) имеют вид

$$\begin{cases} y = x\varphi(p) + \psi(p), \\ p = p_i; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad y = x\varphi(p_i) + \psi(p_i), \quad i = \overline{1, m},$$

т. е. являются прямыми. Объединяя оба случая, рассмотренные выше, получаем окончательный результат:

$$\begin{cases} y = x\varphi(p) + \psi(p), \\ \Phi(x, p, C) = 0, \\ y = x\varphi(p_i) + \psi(p_i), \quad i = \overline{1, m}, \end{cases}$$

где $\Phi(x, p, C) = 0$ — общий интеграл уравнения

$$[p - \varphi(p)] \frac{dx}{dp} = x\varphi'(p) + \psi'(p);$$

$p = p_i$ — корни уравнения $\varphi(p) = p$, $i = \overline{1, m}$.

ПРИМЕР 21.17. Показать, что интегральная кривая, задаваемая уравнениями

$$y = xp + \psi(p), \quad x = -\psi'(p)$$

является огибающей семейства интегральных кривых $y = xC + \psi(C)$ уравнения Клеро (21.45).

Напомним, что огибающая семейства интегральных кривых (и даже не интегральных) $\Phi(x, y, C) = 0$ находится из уравнений

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \partial\Phi(x, y, C)/\partial C = 0 \end{cases} \quad (21.51)$$

после исключения параметра C . Однако не всякая кривая, полученная таким образом, обязательно является огибающей. Если в некоторой области Q переменных x, y и C существуют частные производные $\partial\Phi/\partial x$, $\partial\Phi/\partial y$ и они ограничены в Q и хотя бы одна из них не обращается в нуль в этой области, то кривая γ , полученная из (21.51) исключением параметра C , является огибающей семейства кривых $\Phi(x, y, C) = 0$. Этот факт доказывается в дифференциальной геометрии.

В нашем случае семейство кривых имеет вид $\Phi \equiv y - Cx - \psi(C) = 0$. Здесь частная производная $\partial\Phi/\partial y = 1 \neq 0$ и обе частные производные $\partial\Phi/\partial x$, $\partial\Phi/\partial y$ ограничены в любой фиксированной замкнутой области $\bar{G}$, содержащей область D определения функции $\psi(u)$ (так как $\psi(u)$ гладка в D). Значит, кривая, найденная из (21.51) исключением параметра C , будет огибающей. В нашем случае (21.51) имеет вид

$$\begin{cases} y - Cx - \psi(C) = 0, \\ -x - \psi'(C) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = Cx + \psi(C), \\ x = -\psi'(C). \end{cases}$$

Исключая параметр C из этой системы и параметр p из системы

$$y = px + \psi(p); \quad x = p\psi'(p),$$

получаем одну и ту же кривую, задаваемую уравнением $F(x, y) = 0$. Это означает, что кривая $y = xp + \psi(p)$, $x = -\psi'(p)$ является огибающей семейства интегральных кривых $y = xC + \psi(C)$ уравнения Клеро (21.45).

Рассмотрим другие дифференциальные уравнения. Для их решения надо сначала определить тип соответствующего уравнения и лишь затем воспользоваться надлежащим методом решения, описанным выше.

ПРИМЕР 21.18. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$x \frac{dy}{dx} = \frac{3y^3 + 6x^2y}{2y^2 + 3x^2}. \quad (21.52)$$

Переписав уравнение (21.52) в дифференциальной форме

$$(2xy^2 + 3x^3)dy = (3y^3 + 6x^2y)dx,$$

видим, что функции $M = 2xy^2 + 3x^3$ и $N = 3y^3 + 6x^2y$ являются однородными многочленами степени $k = 3$. Значит, (21.51) — однородное уравнение. Пользуясь методикой решения однородных уравнений, делим обе части последнего уравнения на x^3 . В результате преобразований имеем

$$\left[2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 3 \right] dy = \left[3\left(\frac{y}{x}\right)^3 + 6\frac{y}{x} \right] dx.$$

Делая замену $y/x = z$ (тогда $dy/dx = z + xdz/dx$), получаем

$$z + x \frac{dz}{dx} = \frac{3z^3 + 6z}{2z^2 + 3} \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z^3 + 3z}{2z^2 + 3}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{2z^2 + 3}{z^3 + 3z} dz = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \left[\frac{1}{z} + \frac{z}{z^2 + 3} \right] dx = \ln|x| + \ln C_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|z| + \frac{1}{2} \ln(z^2 + 3) = \ln C_1 |x| \Leftrightarrow |z| \sqrt{z^2 + 3} = C_1 |x| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z \sqrt{z^2 + 3} = Cx \quad (C = \pm C_1).$$

Окончательный ответ: $\frac{y}{x} \sqrt{3 + \frac{y^2}{x^2}} = Cx.$

ПРИМЕР 21.19. Решить задачу Коши

$$(y^2 + 2y - x + 1) \frac{dy}{dx} = -1, \quad y(2) = 0. \quad (21.53)$$

Сделав здесь замену $y + 1 = z$ (тогда $dy/dx = dz/dx$), перепишем уравнение (21.53) в виде

$$(z^2 - x) \frac{dz}{dx} = -1; \quad \frac{dx}{dz} = x - z^2. \quad (21.54)$$

Получили линейное уравнение относительно $x = x(z)$. Так как общее решение соответствующего однородного уравнения $x' = x$ имеет вид $x = Ce^z$ (вычислите это сами!), то варьируя постоянную, можно вычислить общее решение уравнения (21.54) в виде $x = C(z)e^z$, где $C(z)$ — пока неизвестная функция. Подставляя $x = C(z)e^z$ в уравнение (21.54), имеем

$$C'(z)e^z + C(z)e^z = C(z)e^z - z^2 \Leftrightarrow C'(z)e^z = -z^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow C'(z) = -z^2 e^{-z} \Leftrightarrow C(z) = -\int z^2 e^{-z} dz.$$

Последний интеграл берем два раза по частям; будем иметь

$$C(z) = (z^2 + 2z + 2)e^{-z} + C,$$

и значит общий интеграл уравнения (21.54) имеет вид

$$x(z^2 + 2z + 2) + Ce^z \quad (z = y + 1).$$

Полагая здесь $x = 2, y = 0$ (тогда $z = 1$), получаем

$$2 = 5 + Ce \Leftrightarrow C = -3e^{-1},$$

и значит

$$x = (z^2 + 2z + 2) - 3e^{z-1} = y^2 + 4y + 5 - 3e^y.$$

ПРИМЕР 21.20. Найти интегральную кривую уравнения

$$y' - y = xy^2, \quad (21.55)$$

проходящую через точку $M(0, 1)$.

Уравнение (21.55) является уравнением Бернулли. Поделив обе его части на y^2 , будем иметь

$$y^{-2}y' - y^{-1} = x.$$

Сделав замену $y^{-1} = z$ (тогда $y^{-2}y' = -z'$), получим линейное уравнение

$$-z' - z = x \Leftrightarrow z' = -z - x.$$

Решая его методом вариации произвольных постоянных (см. разд. «Линейные уравнения»), найдем, что

$$\begin{aligned} z &= e^{-\int dx} \left[C - \int e^{\int dx} x dx \right] = e^{-x} \left[C - \int e^x x dx \right] = \\ &= e^{-x} [C - xe^x + e^x] = Ce^{-x} - x + 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $y = (Ce^{-x} - x + 1)^{-1}$. Желая найти интегральную кривую, проходящую через точку $M(0, 1)$, положим $x = 0$ и $y = 1$. Будем иметь $1 = (C + 1)^{-1} \Leftrightarrow C = 0$. Значит, искомая интегральная кривая имеет вид $y = (1 - x)^{-1}$, т. е. является гиперболой.

ПРИМЕР 21.21. Найти общий интеграл уравнения

$$e^{-2y} dx - (1 + 2xe^{-2y}) dy = 0. \quad (21.56)$$

Здесь $M = e^{-2y}$, $N = -(1 + 2xe^{-2y})$. Имеем

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2e^{-2y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2e^{-2y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} \equiv \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Значит уравнение (21.56) является уравнением в полных дифференциалах (см. методику решения уравнений в полных дифференциалах). Находим функцию $u = u(x, y)$ такую, что

$$du \equiv e^{-2y} dx - (1 + 2xe^{-2y}) dy.$$

Тогда $u(x, y)$ должна удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-2y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -1 - 2xe^{-2y}.$$

Интегрируя первое уравнение по x , найдем, что $u = e^{-2y} x + \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ — пока неизвестная функция. Подставляя во второе уравнение, будем иметь

$$-2e^{-2y} x + \varphi'(y) = -1 - 2xe^{-2y} \Leftrightarrow \varphi'(y) = -1 \Leftrightarrow \varphi(y) = -y + C_1.$$

следовательно, $u = xe^{-2y} - y + C_1$, и значит общий интеграл уравнения (21.56) имеет вид

$$xe^{-2y} - y = C.$$

ПРИМЕР 21.22. Решить уравнение

$$y = xy' - y'^2 \quad (21.57)$$

и указать его особое решение.

Уравнение (21.57) является уравнением Клеро. Используя методику решения уравнений, не разрешенных относительно производной, вводим параметр $p = dy/dx$. Тогда (21.56) переписывается в виде $y = xp - p^2$. Надо найти еще одно соотношение относительно x , y и p . Дифференцируя предыдущее соотношение, имеем ($x \neq \text{const}$)

$$\begin{aligned} dy &= p dx + x dp - 2p dp \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = p + x \frac{dp}{dx} - 2p \frac{dp}{dx} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow p &= p + (x - 2p) \frac{dp}{dx} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2p, \\ dp/dx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2p, \\ p = C = \text{const} \end{cases} \end{aligned}$$

(здесь мы учли, что $x = C$ не является решением уравнения (21.57)). Итак, уравнение (21.57) имеет решения, определяемые системами

$$\begin{cases} y = xp - p^2, \\ x = 2p, \end{cases} \quad \begin{cases} y = xp - p^2, \\ p = C. \end{cases}$$

Исключая здесь параметр p , имеем

$$y = \frac{x^2}{4} \text{ или } y = Cx - C^2 \text{ (где } C \text{ — произвольная постоянная).}$$

Интегральная кривая $y = x^2/4$ является огибающей семейства интегральных кривых $y = Cx - C^2$. Действительно, исключая C из уравнений (см. (21.51))

$$\begin{cases} y = Cx - C^2, \\ 0 = x - 2C; \end{cases}$$

получаем $y = \frac{x^2}{4}$. Поскольку $y = \frac{x^2}{4}$ огибающая семейства интегральных кривых, то она является особым решением уравнения (21.57) (см. теорему 20.1). Ответ:

$$\begin{cases} y = x^2/4, \\ y = Cx - C^2; \end{cases}$$

$$y = \frac{x^2}{4} \text{ — особое решение.}$$

Контрольные вопросы

1. Как записывается дифференциальное уравнение первого порядка в дифференциальной форме? Какова роль переменных x и y в таком уравнении? Как вычисляется поле направлений, определяемое такими уравнениями? Что такое особая точка?

2. Как применить теорему существования и единственности решения (теорему Коши) для уравнений в дифференциальной форме?

3. Как решаются уравнения вида $\frac{dy}{dx} = f(x)$ и $\frac{dy}{dx} = f(y)$?

4. Какие дифференциальные уравнения называются уравнениями с разделяющимися переменными? В чем состоит метод разделения переменных? Могут ли при разделении переменных потеряться решения исходного уравнения? Как их вычислить?

5. Какие функции называются однородными (точнее: A -однородными)? Каков критерий однородности многочлена? Приведите соответствующие примеры.

6. Какие дифференциальные уравнения называются однородными? Как решаются такие уравнения? Может ли при этом произойти потеря решений?

7. Как решаются уравнения вида $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$?

8. Какие дифференциальные уравнения называются линейными? Сформулируйте для таких уравнений теорему существования и единственности решения задачи Коши? В чем состоит отличие этой теоремы от аналогичной теоремы для нелинейного дифференциального уравнения? Что такое «глобальный характер» и «локальный характер» теорем существования решений?

9. В чем состоит метод вариации произвольной постоянной Лагранжа? Продемонстрируйте его при выводе общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения.

10. Какие уравнения называются уравнениями Бернулли? Как они решаются?

11. Какие уравнения называются уравнениями в полных дифференциалах? Как записывается общий интеграл таких уравнений? Сформулируйте необходимый и достаточный признак того, что уравнение в дифференциальной форме является уравнением в полных дифференциалах.

12. Как вычисляется общий интеграл уравнения в полных дифференциалах? Приведите соответствующий пример.

13. Что такое интегрирующий множитель? Какому уравнению в частных производных он должен удовлетворять? Как вычисляется интегрирующий множитель, зависящий только от x ?

14. В чем заключается метод введения параметра для дифференциальных уравнений вида $F(x, y') = 0$ и $F(y, y') = 0$? Приведите соответствующие примеры.

15. Как получить общие интегралы в параметрической форме для уравнения вида $y = f(x, y')$? Продемонстрируйте соответствующую методику при решении уравнения Клеро.

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.
РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ.
УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ
ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА,
И ИХ ИНТЕГРИРОВАНИЕ**

Если дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (22.1)$$

содержит производную неизвестной функции $y = y(x)$ порядка выше первого ($n > 1$), то его называют *уравнением высшего порядка*. Часто записывают такие уравнения в форме

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (22.2)$$

разрешенной относительно старшей производной $y^{(n)}(x)$. Конечно, к уравнениям высших порядков относятся и уравнения в дифференциальной форме типа

$$d^2y + a(x)dx dy + b(x)dx^2 = 0,$$

если в них порядок дифференциала неизвестной функции выше первого. Однако в таком виде уравнения высшего порядка встречаются крайне редко. Перейдем к изучению таких уравнений.

**§ 22.1. ПОНЯТИЯ ЧАСТНОГО И ОБЩЕГО РЕШЕНИЙ.
НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА И ЕЕ РАЗРЕШИМОСТЬ**

Начнем с определения решения уравнения высокого порядка. Будем формулировать эти понятия по отношению к уравнению (22.2), хотя все сказанное ниже почти дословно переносится и на уравнение (22.1), не разрешенное относительно старшей производной.

Пусть D — область определения функции $f(x, y, y', \dots, y_{n-1})$ ($D \subset R^{n+1}$). Ее называют также областью определения уравнения (22.2).

Определение 22.1. Функция $y = y(x)$ называется *решением уравнения* (22.2) на отрезке $[a, b]$, если выполняются следующие условия:

1) при всех $x \in [a, b]$ точка $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ принадлежит области D ;

2) функция $y = y(x)$ дифференцируема n раз на отрезке $[a, b]$ и при всех $x \in [a, b]$ выполняется тождество

$$y^{(n)}(x) \equiv f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)).$$

Аналогичный смысл имеют решения на интервале (a, b) или на полуинтервалах $[a, b)$ и $(a, b]$ (см. замечание 20.1). Например, функция $y = 2 \cos 3x - 3 \sin 3x$ является решением уравнения $y'' = -9y$ на всей оси $(a, b) = (-\infty, +\infty)$, что проверяется непосредственной подстановкой указанной функции в уравнение.

Как и в случае дифференциального уравнения первого порядка, график решения $y = y(x)$ называется *интегральной кривой уравнения* (22.2). Интегральные кривые заполняют некоторую подобласть пространства R^2 . Чтобы найти вполне определенную интегральную кривую, надо задать дополнительные условия. В случае уравнения первого порядка задавалось всего одно начальное условие. В случае уравнения n -го порядка ($n > 1$) таких условий должно быть n . Именно: пусть $(x_0, y_0, y_1^0, \dots, y_{n-1}^0)$ — фиксированная точка области D . Задача отыскания решения $y = y(x)$ уравнения (22.2), удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1^0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}^0, \quad (22.3)$$

называется *начальной задачей* (или задачей Коши) для уравнения (22.2).

Например, для уравнения второго порядка $m\ddot{y} = F(x, y, \dot{y})$, выражающего собой второй закон Ньютона, для выделения вполне определенного закона движения

$y = y(t)$, надо задать не только начальную точку, но и начальную скорость $\dot{y}(t_0) = y_1^0$.

Вопрос о том, в каком случае существует интегральная кривая, с начальными данными (22.3), решается следующим образом.

Теорема 22.1. Пусть функция $f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})$ и ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}$ непрерывны в области D .

Тогда какова бы ни была начальная точка $(x_0, y_0, y_1^0, \dots, y_{n-1}^0)$, лежащая внутри области D , существует число $h > 0$ такое, что задача Коши (22.2), (22.3) имеет решение на отрезке $[x_0 - h; x_0 + h]$ и это решение единственно на указанном отрезке.

Снова обращаем внимание на локальный характер этой теоремы: существование решения здесь гарантировано лишь в некоторой достаточно малой окрестности точки $x = x_0$ ($h > 0$ — достаточно мало). Условия этой теоремы являются всего лишь достаточными для существования решения задачи (22.2), (22.3). Может случиться так, что они не выполнены, а решение задачи (22.2), (22.3) все-таки существует на отрезке $[a; b]$ ($x_0 \in [a; b]$).

Перейдем теперь к описанию частного и общего решения уравнения (22.2).

Определение 22.2. Любое конкретное решение $y = \varphi(x)$ уравнения (22.2) (т. е. решение некоторой его задачи Коши) называется *частным решением* уравнения (22.2). *Общим решением* этого уравнения в области $Q \subset D$ называется функция $y = \Phi(x, C_1, \dots, C_n)$, зависящая от n произвольных постоянных $C_1, \dots, C_n$, удовлетворяющая следующим требованиям:

1) при любых допустимых значениях постоянных $C_1, \dots, C_n$ функция $y = \Phi(x, C_1, \dots, C_n)$ является решением уравнения (22.2) на некотором отрезке $[a; b]$;

2) какова бы ни была начальная точка $(x_0, y_0, y_1^0, \dots, y_{n-1}^0) \in Q$, существуют значения $C_1 = C_1^0, \dots, C_n = C_n^0$ постоянных такие, что функция $y = \Phi(x, C_1^0, \dots, C_n^0)$ удовлетворяет задаче Коши (22.2), (22.3) с этой начальной точкой.

ПРИМЕР 22.1. Проверить, что функция $y = C_1 e^x + C_2$ является общим решением уравнения $y'' = y'$ в области $Q = R^3$.

Вычисляя производные $y' = C_1 e^x, y'' = C_1 e^x$, видим, что функция $y = \Phi(x, C_1, C_2) = C_1 e^x + C_2$ удовлетворяет уравнению при любых значениях постоянных C_1 и C_2 . Пусть теперь (x_0, y_0, y_1^0) — произвольная фиксированная точка в пространстве R^3 . Посмотрим, можно ли найти такие значения $C_1 = C_1^0$ и $C_2 = C_2^0$ постоянных, при которых выполняются равенства

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1^0. \quad (22.4)$$

Подставляя $y = C_1 e^x + C_2$ и $y' = C_1 e^x$, имеем

$$C_1 e^{x_0} + C_2 = y_0, \quad C_1 e^{x_0} = y_1^0.$$

Из второго равенства находим $C_1 = C_1^0 = y_1^0 e^{-x_0}$, а из первого вычисляем $C_2 = C_2^0 = y_0 + C_1 e^{x_0} = y_0 - y_1^0$.

Итак, равенства (22.4) выполняются, если выбрать постоянные $C_1 = C_1^0$ и $C_2 = C_2^0$. При этом функция $y = y_1^0 e^{x-x_0} + y_0 - y_1^0$ является решением уравнения $y'' = y'$ и удовлетворяет начальным условиям (22.4). Это означает, что функция $y = C_1 e^x + C_2$ является общим решением уравнения $y'' = y'$ в области $Q = R^3$.

Однако не всегда удастся записать общее решение в явной форме.

Определение 22.3. Соотношение

$$F(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0 \quad (22.5)$$

называется *общим интегралом* уравнения (22.2) в области $Q \subset D$, если оно определяет общее решение этого уравнения (в Q) неявным образом. Аналогично определяется частный интеграл уравнения.

Алгоритм 22.1. Чтобы проверить, что соотношение (20.5) является общим интегралом уравнения (22.2), надо сделать следующее:

а) продифференцировать соотношение (22.5) n раз по x , считая, что y есть функция x (т. е. $y = y(x)$);

б) из системы равенств

$$\begin{cases} F(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0, \\ \frac{d}{dx} F(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0, \\ \frac{d^n}{dx^n} F(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0 \end{cases}$$

исключить постоянные $C_1, \dots, C_n$. Если при этом будет получено уравнение (22.2), то соотношение (22.5) является общим интегралом этого уравнения.

ПРИМЕР 22.2. Проверить, что соотношение

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = \frac{1}{a} \quad (a = \text{const} > 0) \quad (22.6)$$

является общим интегралом уравнения $(y'')^2 = a(1 + y'^2)^3$.

Дифференцируем соотношение (22.6) два раза по x , считая, что $y = y(x)$. Присоединяя к полученным равенствам соотношение (22.6), получаем систему

$$\begin{cases} (x - C_1) + (y - C_2)y' = 0, \\ 1 + y'^2 + (y - C_2)y'' = 0, \\ (x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = \frac{1}{a}. \end{cases}$$

Из второго соотношения находим $y - C_2$ и подставляем в первое соотношение:

$$y - C_2 = \frac{y'^2 + 1}{y''}, \quad x - C_1 = -(y - C_2)y' = \frac{(1 + y'^2)y'}{y''}.$$

Тогда третье соотношение будет иметь вид

$$\frac{(1 + y'^2)^2 y'^2}{(y'')^2} + \frac{(1 + y'^2)^2}{(y'')^2} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow (y'')^2 = a(1 + y'^2)^3.$$

Получено исходное дифференциальное уравнение, значит (22.6) — его общий интеграл.

§ 22.2. УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

Если в результате каких-либо преобразований порядок исходного уравнения (22.1) (или (22.2)) понижается, то оно становится проще и есть надежда проинтегрировать его полностью. Однако не все уравнения допускают понижение порядка. Ниже приводятся некоторые классы уравнений, порядок которых может быть понижен на единицу и более. Прежде чем перейти к таким уравнениям, рассмотрим простейшее дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = f(x), \quad (22.7)$$

к которому часто приводятся более сложные уравнения после понижения порядка. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то его общее решение легко находится последовательным интегрированием:

$$\begin{aligned} y^{(n-1)} &= \int_0^x f(t_1) dt_1 + C_1, \quad x_0 = 0 \in [a, b]; \\ y^{(n-2)} &= \int_0^x \int_0^{t_2} f(t_1) dt_1 dt_2 + C_1 x + C_2; \\ y^{(n-3)} &= \int_0^x \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} f(t_1) dt_1 dt_2 dt_3 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3; \\ y &= \int_0^x \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_2} f(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_n + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \\ &\quad + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_{n-1} x + C_n \end{aligned}$$

(здесь нижний предел интегралов взят в виде $x_0 = 0$ ради простоты).

Выписанный выше n -кратный повторный интеграл можно упростить по формуле

$$\int_{x_0}^x \int_{x_0}^{t_n} \dots \int_{x_0}^{t_2} f(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_n =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f(t)(x-t)^{n-1} dt, \quad x_0 \in [a; b] \quad (22.8)$$

Заметим, что последовательное интегрирование удобно производить с помощью неопределенных интегралов.

ПРИМЕР 22.3. Решить уравнение

$$y'' = x + \cos x.$$

Интегрируем последовательно два раза:

$$y' = \int (x + \cos x) dx = \frac{x^2}{2} + \sin x + C_1;$$

$$y = \int \left(\frac{x^2}{2} + \sin x + C_1 \right) dx = \frac{x^3}{6} - \cos x + C_1 x + C_2.$$

Это и есть общее решение исходного уравнения.

ПРИМЕР 22.4. Решить уравнение

$$y''' = e^{-x^2/2}.$$

Последовательное интегрирование этого уравнения дает:

$$y'' = \int_0^x e^{-t_1^2/2} dt_1 + C_1; \quad y' = \int_0^x \int_0^{t_2} e^{-t_1^2/2} dt_1 dt_2 + C_1 x + C_2;$$

$$y = \int_0^x \int_0^{t_2} \int_0^{t_3} e^{-t_1^2/2} dt_1 dt_2 dt_3 + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Здесь первообразная (неопределенный интеграл) от экспоненты $e^{-t_1^2/2}$ не выражается через элементарные функции, поэтому удобно записать решение через определенный интеграл. Применяя формулу (22.8), получаем окончательный результат:

$$y = \frac{1}{2!} \int_0^x e^{-t^2/2} (x-t)^2 dt + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

§ 22.3. УРАВНЕНИЯ, НЕ СОДЕРЖАЩИЕ ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ НАЧАЛЬНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДО ОПРЕДЕЛЕННОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (22.9)$$

где $1 \leq k \leq n-1$. Если обозначить самую младшую производную через z (т. е. $y^{(k)} = z$), то получим следующее уравнение:

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0.$$

Порядок этого уравнения относительно неизвестной функции $z = z(x)$ на k единиц меньше порядка исходного уравнения (22.9). Если последнее уравнение легко интегрируется и $z = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-k})$ — его общее решение, то для получения общего решения исходного уравнения (22.9) надо решить уравнение

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-k}),$$

которое имеет вид (22.7) и методика интегрирования которого изложена выше.

ПРИМЕР 22.5. Решить уравнение

$$y^{(5)} - \frac{1}{x} y^{(4)} = 0.$$

Делаем замену $y^{(4)} = z$. Тогда уравнение принимает вид $z' - x^{-1}z = 0$, после чего оно легко интегрируется методом разделения переменных:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} &\Leftrightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln |z| = \ln |x| + \ln C_1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |z| = C_1 |x| \Leftrightarrow z = \pm C_1 x \Leftrightarrow z = Cx \quad (C = \pm C_1). \end{aligned}$$

Заменяя здесь z на $y^{(4)}$, получаем уравнение $y^{(4)} = Cx$, которое решаем последовательным интегрированием:

$$y'' = \frac{Cx^2}{2} + \bar{C}_1; \quad y''' = \frac{Cx^3}{6} + \bar{C}_1x + \bar{C}_2;$$

$$y' = \frac{Cx^4}{24} + \frac{\bar{C}_1x^2}{2} + \bar{C}_2x + \bar{C}_3;$$

$$y = \frac{Cx^5}{120} + \frac{\bar{C}_1x^3}{6} + \frac{\bar{C}_2x^2}{2} + \bar{C}_3x + C_4.$$

Переобозначая здесь константы, общее решение исходного уравнения запишем в виде

$$y = C_5x^5 + C_3x^3 + C_2x^2 + C_1x + C_0.$$

§ 22.4. УРАВНЕНИЯ, НЕ СОДЕРЖАЩИЕ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Рассмотрим уравнение

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (22.10)$$

В нем отсутствует независимая переменная x . Считая y независимой переменной, введем функцию $p = p(y) = \frac{dy}{dx}$ (где $y = y(x)$). Используя правило дифференцирования сложной функции, будем иметь

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}(p(y)) = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy};$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(y'') = \frac{d}{dx}\left(p \frac{dp}{dy}\right) =$$

$$= \frac{d}{dy}\left(p \frac{dp}{dy}\right) \frac{dy}{dx} = p^2 \frac{d^2 p}{dy^2} + p \left(\frac{dp}{dy}\right)^2.$$

и т. д. Отсюда видно, что k -я производная функции $y = y(x)$ выражается через функцию $p = p(y)$ и ее производные до $k - 1$ -го порядка, поэтому замена $p = \frac{dy}{dx}$ приводит исходное уравнение (22.10) к уравнению

$$F_1(y, p, p', \dots, p^{(n-1)}) = 0, \quad (22.11)$$

порядок которого на единицу меньше порядка уравнения (22.10). Уравнение (22.11) является дифференциальным уравнением $(n-1)$ -го порядка относительно неизвестной функции $p = p(y)$. Если удастся вычислить его общее решение $p = \varphi(y, C_1, \dots, C_{n-1})$, то для поиска общего решения исходного уравнения (22.10) надо будет проинтегрировать уравнение $\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1, \dots, C_{n-1})$.

ПРИМЕР 22.6. Найти решение задачи Коши

$$1 + y'^2 = 2yy'', \quad y(1) = y'(1) = 1. \quad (22.12)$$

Это уравнение не содержит независимую переменную x , поэтому понижаем порядок с помощью замены $p = p(y) = \frac{dy}{dx}$. Имеем

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}(p(y)) = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}.$$

При этом начальные условия (22.12) переходят в условие

$$p(y)|_{y=1} = \frac{dy}{dx}|_{y=1} \Leftrightarrow p(y(1)) = y'(1) \Leftrightarrow p(1) = 1.$$

Итак, для функции $p = p(y)$ надо решить задачу Коши

$$1 + p^2 = 2yp \frac{dp}{dy}, \quad p(1) = 1.$$

Разделяя переменные, получаем

$$\begin{aligned} \frac{p dp}{1 + p^2} &= \frac{1}{2y} dy \Leftrightarrow \int \frac{p dp}{1 + p^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln(1 + p^2) = \frac{1}{2} \ln|y| + \frac{1}{2} \ln C_1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 + p^2 = C_1 |y| \Leftrightarrow 1 + p^2 = \\ &= Cy \quad (C = \pm C_1) \Leftrightarrow p = \pm \sqrt{Cy - 1}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\rho(1) = 1 > 0$, должны взять $\rho = +\sqrt{Cy - 1}$. Полагая здесь $y = 1$ и пользуясь условием $\rho(1) = 1$, будем иметь $1 = \sqrt{C - 1} \Leftrightarrow C = 2$. Следовательно, $\rho = \sqrt{2y - 1}$, и дальнейшие вычисления таковы:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \sqrt{2y - 1} &\Leftrightarrow \frac{dy}{\sqrt{2y - 1}} = dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{2y - 1}} = \int dx \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2y - 1} = x + C_2.\end{aligned}$$

Чтобы найти постоянную C_2 , положим в последнем равенстве $x = 1$. Поскольку $y(1) = 1$, то будем иметь $\sqrt{2 \cdot 1 - 1} = 1 + C_2 \Leftrightarrow C_2 = 0$. Итак, решение задачи Коши (20.12) вычисляется из уравнения

$$\sqrt{2y - 1} = x \Leftrightarrow y = \frac{x^2 + 1}{2} = \frac{1}{2}(1 + x^2).$$

§ 22.5. УРАВНЕНИЯ, ОДНОРОДНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИИ И ВСЕХ ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ

Рассмотрим уравнение (22.1). Если ее левая часть обладает свойством

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) \equiv t^k F(x, y, y', \dots, y^{(n)}),$$

то порядок уравнения (22.1) может быть понижен на единицу с помощью замены $y = e^{\int z dx}$, где $z = z(x)$ — новая неизвестная функция. Покажем это на примере уравнения

$$F(x, y, y', y'', y''') = 0 \quad (22.13)$$

третьего порядка. Сделав замену $y = e^{\int z dx}$, получим

$$y' = e^{\int z dx} x; \quad y'' = e^{\int z dx} z^2 + e^{\int z dx} z' = e^{\int z dx} (z^2 + z');$$

$$y''' = e^{\int z dx} z(z^2 + z') = e^{\int z dx} (2zz' + z'') = e^{\int z dx} (z^3 + 3zz' + z'').$$

Подставляя все это в уравнение (22.13), получаем уравнение

$$F(x, e^{\int z dx}, e^{\int z dx} \cdot z, e^{\int z dx} \cdot (z^2 + z'), e^{\int z dx} (z^3 + 3zz' + z'')) = 0.$$

Используя однородность функции F , можно вынести за знак F множитель $(e^{\int z dx})^4$. Сократив на него обе части уравнения, будем иметь

$$F(x, 1, z, z^2 + z', z^3 + 3zz' + z'') = 0.$$

Мы получили уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $z = z(x)$. Если найдено решение $z = \varphi(x, C_1, C_2)$ последнего уравнения, то общее решение исходного уравнения (22.13) вычисляется по формуле $y = e^{\int \varphi(x, C_1, C_2) dx}$.

ПРИМЕР 22.7. Найти общее решение уравнения

$$yy'' = (y')^2 = (x + 1)y^2.$$

Перепишав уравнение в виде

$$yy'' - y'^2 - (x + 1)y^2 = 0,$$

обнаруживаем, что его левая часть является однородным многочленом степени $k = 2$ относительно y, y' и y'' . Делаем замену $y = e^{\int z dx}$. Тогда $y' = e^{\int z dx} z$, $y'' = e^{\int z dx} (z^2 + z')$, и исходное уравнение принимает вид

$$e^{2\int z dx} (z^2 + z') - e^{2\int z dx} z^2 - (x + 1)e^{2\int z dx} = 0.$$

После сокращения на экспоненту получаем уравнение $z' = x + 1$, общим решением которого является функция $z = x^2/2 + x + C_1$. Следовательно, общим решением исходного уравнения будет функция

$$y = e^{\int z dx} = e^{x^3/6 + x^2/2 + C_1 x + C_2}.$$

Рассмотрим еще несколько примеров, в которых понижение порядка уравнения не всегда производится по процедуре, рассмотренной выше. Иногда для этого привлекаются иные соображения.

$$yy' + x(y')^2 + xyy'' = 0.$$

Это уравнение является однородным относительно y , y' и y'' , поэтому можно было бы применить методику решения уравнений, однородных относительно неизвестной функции и всех ее производных. Однако легко заметить, что левая часть уравнения является полной производной от функции xyy' . Значит, уравнение имеет вид $(xyy')' = 0$, и оно решается следующим образом:

$$\begin{aligned} xyy' &= \bar{C}_1; \quad yy' \frac{\bar{C}_1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(y^2)' = \frac{\bar{C}_1}{x} \Leftrightarrow \int \frac{2\bar{C}_1}{x} dx \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y^2 = 2\bar{C}_1 \ln |x| + C_2 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{2\bar{C}_1 \ln |x| + C_2}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 22.8. Показать, что функция $y = y(x)$, заданная параметрически уравнениями

$$x = \frac{1}{2} \ln t + \frac{3}{4t^2}, \quad y = \frac{1}{4}t + \frac{3}{4t^3} \quad (t > 0), \quad (22.14)$$

является решением уравнения $(y'')^2 - 2y'y'' + 3 = 0$.

Надо найти y'_x и y''_{x^2} . Пользуясь формулой производной функции, заданной параметрически, будем иметь:

$$y'_x = y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1/4 - 9/(4t^4)}{1/(2t) - 3/(2t^3)} = \frac{t^2 + 3}{2t};$$

$$y''_{x^2} = y'' = \frac{(y'_t)'_t}{x'_t} = \frac{(t^2 - 3)/(2t^2)}{1/(2t) - 3/(2t^3)} = t.$$

Подставляя y'_x и y''_{x^2} в уравнение $y''^2 - 2y'y'' + 3 = 0$, получаем тождество

$$t^2 - 2 \frac{t^2 + 3}{2t} t + 3 \equiv 0.$$

Это означает, что функция, заданная параметрически уравнениями (22.14), является решением данного дифференциального уравнения.

ПРИМЕР 22.9. Решить задачу Коши

$$x^2 y y'' - (y - x y')^2 = 0, \quad y(1) = y'(1) = 1. \quad (22.15)$$

Поскольку левая часть уравнения (22.15) — однородный многочлен степени $k=2$, то делаем замену $y = e^{\int z dx}$. Так как $y' = e^{\int z dx} \cdot z$, $y'' = e^{\int z dx} \cdot (z^2 + z')$, то после указанной замены уравнение приобретает вид

$$x^2(z^2 + z') - (1 - xz)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 z' - 1 + 2xz = 0;$$

$$z' = -\frac{2}{x}z + \frac{1}{x^2}.$$

Это линейное дифференциальное уравнение относительно z . Решая его методом вариации произвольной постоянной Лагранжа (см. лекцию 21), получаем следующее решение: $z = \frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x}$. Значит, общее решение исходного уравнения (20.15) будет найдено по формуле

$$y = e^{\int z dx} = e^{\int (C_1/x^2 + 1/x) dx} = e^{-C_1/x + \ln |x| + \ln \bar{C}_2} =$$

$$= C_2 x e^{-C_1/x} \quad (C_2 = \pm \bar{C}_2).$$

Подчинив это решение начальным условиям $y(1) = y'(1) = 1$, получим

$$C_2 e^{-C_1} = 1, \quad C_2 \cdot e^{-C_1} (1 + C_1) = 1 \Leftrightarrow C_2 e^{-C_1} = 1, \quad 1 + C_1 = 1.$$

Отсюда находим $C_1 = 0$ и $C_2 = 1$. Следовательно, решением задачи Коши (22.15) является функция $y = x$.

ПРИМЕР 22.10. Из общего интеграла дифференциального уравнения

$$y'^2 + 2y y'' = 0$$

Выделить интегральную кривую, проходящую через точку $M(1, 1)$ и касающуюся прямой $y = x$.

Пусть искомая интегральная кривая имеет вид $y = y(x)$. Тогда поскольку она проходит через точку $M(1, 1)$, то должно быть $y(1) = 1$. Далее, кривая $y = y(x)$ касается прямой $y = x$ в точке M , значит ее угловой коэффициент в этой точ-

ке равен угловому коэффициенту прямой $y = x$, т. е. $y'(1) = 1$. Итак, надо решить задачу Коши

$$y'^2 + 2yy'' = 0, \quad y(1) = y'(1) = 1.$$

Так как в уравнении нет независимой переменной x , то понижаем его порядок с помощью замены $p = dy/dx$. Поскольку

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}(p(y)) = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy},$$

то после указанной замены уравнение приобретает вид

$$p^2 + 2py \frac{dp}{dy} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0 \Leftrightarrow y = C. \\ 2y \frac{dp}{dy} = -p. \end{cases}$$

Решаем его методом разделения переменных:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y} \Leftrightarrow \int \frac{dp}{p} = -\frac{1}{2} \int \frac{dy}{y} \Leftrightarrow p = \frac{1}{\sqrt{C_1 y}},$$

Найдем сначала C_1 . Поскольку $p(y) = dy/dx$, то при $x = 1$ будем иметь $p(y(1)) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} \Leftrightarrow p(1) = 1$. Полагая $y = 1$ в равенстве $p = 1/\sqrt{C_1 y}$ получаем, что $C_1 = 1$. Значит, $p = 1/\sqrt{y}$ и надо решить уравнение $y' = 1/\sqrt{y}$. Решаем его методом разделения переменных:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow \sqrt{y} dy = dx \Leftrightarrow \int \sqrt{y} dy = \\ &= \int dx \Leftrightarrow y^{3/2} = \frac{3}{2}(x + C_2). \end{aligned}$$

Полагая здесь $x = 1$ и пользуясь условием $y(1) = 1$, получаем $1 = \frac{3}{2}(1 + C_2) \Leftrightarrow C_2 = -\frac{1}{3}$. Следовательно, исходная

задача Коши имеет следующее решение: $y = \left[\frac{3}{2} \left(x - \frac{1}{3} \right) \right]^{2/3}$.

Контрольные вопросы

1. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением высшего порядка?
2. Какая функция называется решением уравнения n -го порядка?
3. Как ставится начальная задача (задача Коши) для уравнения порядка выше первого?
4. Сформулируйте теорему существования и единственности решения задачи Коши для уравнения n -го порядка. Почему эта теорема имеет локальный характер? Может ли задача Коши иметь решение, если не выполняется хотя бы одно условие этой теоремы?
5. Какая функция называется общим решением уравнения n -го порядка? Что такое частное решение этого уравнения?
6. Как определяется общий интеграл уравнения высшего порядка? Что такое частный интеграл?
7. Как решается уравнение $y^{(n)} = f(x)$?
8. Опишите процедуру понижения порядка для уравнения $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$.
9. Как понижается порядок дифференциального уравнения, в котором отсутствует независимая переменная x ?
10. Какое уравнение называется однородным относительно неизвестной функции и всех ее производных? Как понижается порядок таких уравнений?

**ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ
СИСТЕМА РЕШЕНИЙ И СТРУКТУРА ОБЩЕГО
РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ.
НЕОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ, СТРУКТУРА ЕГО
ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧАСТНОГО
РЕШЕНИЯ МЕТОДОМ ЛАГРАНЖА**

Линейным дифференциальным уравнением n -го порядка называется уравнение

$$p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x), \quad (23.1)$$

в котором неизвестная функция $y = y(x)$ и все ее производные входят линейным образом (т. е. с целой неотрицательной степенью не выше первой). При этом функции $p_n(x), \dots, p_0(x)$ называются *коэффициентами* уравнения (23.1), а правая часть $f(x)$ — *неоднородностью* этого уравнения. Если в (23.1) отсутствует неоднородность ($f(x) \equiv 0$), то уравнение (23.1) называется *однородным*. Если же $f(x) \not\equiv 0$, то уравнение (23.1) называется *неоднородным* дифференциальным уравнением. .

Уравнение (23.1) можно записать кратко $Ly = f(x)$, если обозначить через L — дифференциальный оператор n -го порядка:

$$L = p_n(x)\frac{d^n}{dx^n} + p_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + p_1(x)\frac{d}{dx} + p_0(x). \quad (23.2')$$

Мы предполагаем, что читатель знаком с понятием линейного пространства и с основными его свойствами. В дальнейшем будут использоваться следующие пространства:

1) $C[a; b]$ — пространство функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$;

2) $C^k[a; b]$ — пространство функций $y = y(x)$ непрерывных вместе со своими производными $y'(x), \dots, y^{(k)}(x)$ (до k -го порядка включительно), $k \geq 1$.

Эти пространства являются линейными пространствами с обычными для функций операциями сложения и умножения на числа.

Теорема 23.1. Если в операторе (23.2') все коэффициенты $p_n(x), \dots, p_0(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, то L действует из пространства $C^n[a; b]$ в пространство $C[a; b]$ (т. е. $L: C^n[a; b] \rightarrow C[a; b]$) и является линейным оператором, т. е.

$$L[C_1 f(x) + C_2 g(x)] = C_1 Lf(x) + C_2 Lg(x)$$

для произвольных постоянных C_1 и C_2 и произвольных функций $f(x), g(x) \in C^n[a; b]$.

Действительно, при дифференцировании теряется гладкость функции на единицу, значит при n -кратном дифференцировании функция класса $C^n[a; b]$ переходит в функцию класса $C[a; b]$. Кроме того, поскольку операция дифференцирования линейна, то и линейен оператор L .

Будем рассматривать в основном уравнения (23.1) со старшим коэффициентом $p_n(x) \neq 0 (\forall x \in [a; b])$. В этом случае на него можно поделить уравнение (23.1) и записать его в форме

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x),$$

где обозначено:

$$a_i(x) \equiv \frac{p_i(x)}{p_n(x)}; \quad h(x) \equiv \frac{f(x)}{p_n(x)};$$

$$L \equiv \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_0(x).$$

Наша ближайшая задача — изучить свойства решений этого уравнения. Начнем с теоремы существования и единственности решения задачи Коши $(x_0 \in [a; b], (y_0, y_1^0, \dots, y_{n-1}^0) — произвольная точка из R^n):$

$$Ly = h(x), y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1^0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}^0. \quad (23.2)$$

Теорема 23.2. Если в уравнении (23.2) все коэффициенты $a_i(x)$ и правая часть $h(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, то задача Коши (23.2) для этого уравнения имеет единственное решение $y = y(x)$ и это решение определено также на этом отрезке.

Таким образом, теорема существования и единственности решения начальной задачи для линейного дифференциального уравнения носит «глобальный» характер в отличие от «локального» характера общей теоремы 22.1 для нелинейного уравнения.

§ 23.1. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И ЛИНЕЙНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ. ВРОНСКИАН. ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ С ПОМОЩЬЮ ВРОНСКИАНА

Пусть функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ имеют смысл на отрезке $[a; b]$.

Определение 23.1. Говорят, что система функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависима на отрезке $[a; b]$, если существуют постоянные $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, не равные нулю одновременно, такие, что имеет место тождество

$$\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0 (\forall x \in [a; b]). \quad (23.3)$$

Если же тождество (23.3), где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — постоянные, выполняется тогда и только тогда, когда все числа α_i равны нулю ($\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$), то система функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$ называется *линейно независимой* на отрезке $[a; b]$.

Аналогично определяется *линейная зависимость* и *линейная независимость* на промежутках $(a; b)$, $(a; b]$, $[a; b)$, причем не исключается и случай бесконечного промежутка. Заметим, что выражение $\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x)$ называется *линейной комбинацией* функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$, а числа $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$ — *коэффициентами* линейной комбинации.

ПРИМЕР 23.1. Доказать, что система функций

$$y_0 = 1, \quad y_1 = x, \dots, \quad y_n = x^n \quad (23.4)$$

линейно независима на любом отрезке $[a; b]$.

Составим линейную комбинацию функций (23.4) и посмотрим, когда она тождественно обращается в нуль:

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot x + \dots + \alpha_n \cdot x^n \equiv 0 (\forall x \in [a; b]).$$

Слева стоит многочлен с коэффициентами $\alpha_0, \dots, \alpha_n$. Само тождество означает, что любое число x из отрезка $[a; b]$ является корнем этого многочлена. Если хотя бы один из коэффициентов α_i не равен нулю, то получилось бы, что указанный многочлен имеет бесчисленное число корней, что невозможно. Значит, все числа α_i равны нулю, поэтому функции (23.4) линейно независимы на отрезке $[a; b]$.

ПРИМЕР 23.2. Будут ли линейно зависимыми на промежутке $(-\infty; +\infty)$ функции $y_1 = \sin^2 x$, $y_2 = \cos^2 x$, $y_3 = 1$?

Линейная комбинация $\alpha_1 \sin^2 x + \alpha_2 \cos^2 x + \alpha_3 \cdot 1$ тождественно обращается в нуль на промежутке $(-\infty; +\infty)$, если взять числа $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1$. Так как они не равны нулю (достаточно было бы, чтобы хотя бы одно из них не равнялось нулю), то указанные функции линейно зависимы на промежутке $(-\infty; +\infty)$. Ответ: да.

Теорема 23.3. Если система функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависима на отрезке $[a; b]$, то хотя бы одна из них является линейной комбинацией других (на этом отрезке). Обратно: если одна из функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$ является на отрезке $[a; b]$ линейной комбинацией других, то система $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависима на отрезке $[a; b]$.

Доказательство. Пусть функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a; b]$. Тогда найдутся числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, не равные нулю одновременно, такие, что $\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_k y_k(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$. Пусть, например, $\alpha_k \neq 0$. Тогда можно записать

$$y_k(x) \equiv \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\right)y_1(x) + \dots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_k}\right)y_n(x) \quad (\forall x \in [a; b]),$$

т. е. функция $y_k(x)$ является линейной комбинацией функций $y_1(x), \dots, y_{k-1}(x), y_{k+1}(x), \dots, y_n(x)$. Обратно: если выполняется тождество

$$y_k(x) \equiv \alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_{k-1} y_{k-1}(x) + \alpha_{k+1} y_{k+1}(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) \quad (\forall x \in [a; b]),$$

то $\alpha_1 y_1(x) + \dots + (-1) y_k(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$. Мы видим, что тождество (23.3) имеет место при числах $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, не равных нулю одновременно. Следовательно, система функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависима. Теорема доказана.

Очевидны следующие утверждения.

1°) Если система функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$ содержит функцию $y_i(x) \equiv 0$, то она линейно зависима (на отрезке $[a; b]$, на котором указанные функции имеют смысл).

2°) Если какая-нибудь подсистема системы функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависима, то и вся система $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависима.

3°) Если система функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависима на отрезке $[a; b]$, то она линейно зависима и на любом отрезке $[a_1; b_1]$, лежащем внутри отрезка $[a; b]$.

4°) Если система функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно независима на отрезке $[a; b]$, то она линейно независима и на любом отрезке $[c; d]$, содержащем отрезок $[a; b]$ (если, конечно, функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ определены на отрезке $[c; d]$).

Заметим, что свойство линейной зависимости функций нельзя продолжить на больший отрезок, а свойство линейной независимости — сузить на меньший отрезок.

Дадим эффективный способ проверки линейной зависимости или линейной независимости системы функций с помощью определителя Вронского.

Определение 23.2. *Определителем Вронского* (или просто вронскианом) системы функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$, принадлежащих пространству $C^{n-1}[a; b]$, называется определитель

$$W(x) \equiv W[y_1, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix},$$

первую строку которого образуют данные функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$, а последующие строки являются производными функций предыдущей строки. Матрицу этого определителя мы будем называть *матрицей Вронского*.

Теорема 23.4 (необходимое условие линейной зависимости функций). Если функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a; b]$, то их вронскиан обращается тождественно в нуль на этом отрезке, т. е. $W[y_1, \dots, y_n] \equiv 0$ ($\forall x \in [a; b]$).

Доказательство. Поскольку функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a; b]$, то существуют числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, не равные нулю одновременно, такие, что имеет место тождество

$$\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0 \quad (\forall x \in [a; b]).$$

Дифференцируя это тождество $n-1$ раз, получаем еще $n-1$ тождество. Вместе с предыдущим тождеством они образуют однородную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0, \\ \alpha_1 y_1'(x) + \dots + \alpha_n y_n'(x) \equiv 0, \\ \dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) \equiv 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

которая (в силу линейной зависимости функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$) имеет при каждом $x \in [a; b]$ ненулевое решение $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Но тогда определитель этой системы, яв-

ляющийся определителем Вронского функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$, обращается в нуль при каждом $x \in [a; b]$, т. е. $W(x) \equiv W[y_1, \dots, y_n] \equiv 0 \ (\forall x \in [a; b])$ не имеет места.

ПРИМЕР 23.3. Показать, что функции

$$y_1(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 < x \leq 2, \end{cases} \quad y_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ (x-1)^2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

линейно независимы на отрезке $[0; 2]$, но $W[y_1(x), y_2(x)] \equiv 0 \ (\forall x \in [0; 2])$.

Посмотрим, при каких постоянных α_1 и α_2 выполняется тождество $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0 \ (\forall x \in [a; b])$. При $x \in [0; 1]$ имеем $\alpha_1 (x-1)^2 + \alpha_2 \cdot 0 \equiv 0$. Это тождество имеет место при $\alpha_1 = 0$ и при произвольном α_2 . На промежутке $(1; 2]$ имеем $\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 (x-1)^2 \equiv 0$, откуда выводим, что $\alpha_2 = 0$. Итак, тождество $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0$ на всем промежутке $[0; 2]$ имеет место лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Значит, функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы на отрезке $[0; 2]$. С другой стороны,

$$W[y_1, y_2] \Big|_{x \in [0; 1]} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \Big|_{x \in [0; 1]} = \begin{vmatrix} (x-1)^2 & 0 \\ 2(x-1) & 0 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

$$W[y_1, y_2] \Big|_{x \in [1; 2]} = \begin{vmatrix} 0 & (x-1)^2 \\ 0 & 2(x-1) \end{vmatrix} \equiv 0,$$

т. е. определитель Вронского $W[y_1, y_2]$ тождественно обращается в нуль на отрезке $[0; 2]$.

Ситуация, описанная в этом примере, не реализуется, если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями однородного уравнения $Ly = 0$ с непрерывными на отрезке $[a; b]$ коэффициентами. Это будет показано ниже. Теорему 23.4 применяют при установлении линейной независимости функций.

Следствие 23.1. Если вронскиан системы функций $y_1(x), \dots, y_n(x) \in C^{n-1}[a; b]$ не равен нулю хотя бы в одной точке $x = x_0 \in [a; b]$, то указанные функции линейно независимы на отрезке $[a; b]$.

Действительно, если бы $y_1(x), \dots, y_n(x)$ были линейно зависимы на отрезке $[a; b]$, то $W(x) \equiv W[y_1, \dots, y_n]$ тождественно

но обращался бы в нуль на этом отрезке, а значит, в частности, он был бы равен нулю в точке $x = x_0$, чего быть не может.

§ 23.2. СТРУКТУРА ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО И НЕОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение

$$Ly \equiv y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \quad (23.5)$$

Докажем следующий важный результат.

Теорема 23.5. Пусть функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ являются решениями однородного уравнения (23.5) с непрерывными на отрезке $[a; b]$ коэффициентами $a_{n-1}(x), \dots, a_0(x)$. Тогда $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно независимы на отрезке $[a; b]$ в том и только в том случае, когда вронскиан $W(x) \equiv W[y_1, \dots, y_n]$ этих функций не равен нулю ни в одной точке отрезка $[a; b]$.

Доказательство. Достаточность вытекает из следствия 23.1. Докажем необходимость. Пусть решения $y_1(x), \dots, y_n(x)$ уравнения (23.5) линейно независимы на отрезке $[a; b]$. Покажем, что тогда вронскиан не обращается в нуль ни в одной точке отрезка $[a; b]$. Предположим противное, т. е. что существует точка $x_0 \in [a; b]$ такая, что вронскиан $W(x)$ обращается в нуль в этой точке:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда столбцы этого определителя линейно зависимы, т. е. существуют числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, не равные нулю одновременно, такие, что

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} y_n(x_0) \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \dots + \alpha_n y_n(x_0) = 0, \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \quad (23.6)$$

С помощью указанных чисел построим функцию $y = \varphi(x) = \alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x)$. Поскольку $y_j(x)$ решения однородного уравнения (23.5), то из линейности дифференциального оператора L следует, что

$$L\varphi(x) = \alpha_1 L y_1(x) + \dots + \alpha_n L y_n(x) \equiv \alpha_1 \cdot 0 + \dots + \alpha_n \cdot 0 \equiv 0$$

Это означает, что функция $y = \varphi(x)$ является решением уравнения (23.5). Из (23.6) следует, что эта функция удовлетворяет нулевым начальным условиям, т. е.

$$\varphi(x_0) = 0, \varphi'(x_0) = 0, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Но таким же начальным условиям удовлетворяет и тривиальное решение $y = 0$ этого уравнения. В силу единственности решения (см. теорему 23.1) функции $y = \varphi(x)$ и $y \equiv 0$ совпадают на отрезке $[a; b]$, и значит $\varphi(x) \equiv 0$, и значит

$$\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0 \quad (\forall x \in [a; b]).$$

Поскольку здесь не все числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ равны нулю, то последнее тождество означает, что функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a; b]$. Мы получили противоречие, которое показывает, что наше предположение $W(x_0) = 0$ не верно. Следовательно, вронскиан не обращается в нуль ни в одной точке отрезка $[a; b]$. Теорема доказана.

Из теоремы 23.4 и доказательства теоремы 23.5 вытекают следующие свойства вронскиана $W(x) \equiv W[y_1, \dots, y_n]$ системы решений $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения (23.5) с непрерывными на отрезке $[a; b]$ коэффициентами $a_{n-1}(x), \dots, a_0(x)$.

5°) Если вронскиан $W(x)$ обращается в нуль в некоторой точке $x = x_0$ отрезка $[a; b]$, то он тождественно равен нулю на всем отрезке $[a; b]$, (т. е. $W(x) \equiv 0 (\forall x \in [a; b])$).

6°) Если вронскиан $W(x)$ не равен нулю хотя бы в одной точке $x = x_0$ отрезка $[a; b]$ (то он не равен нулю и на всем отрезке $[a; b]$).

Свойства 5° и 6° легко усматриваются также из формулы

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x a_{n-1}(t) dt} \quad (\forall x \in [a; b]), \quad (23.7)$$

называемой формулой Остроградского-Лиувилля. Здесь $a_{n-1}(x)$ — коэффициент при производной $y^{(n-1)}$ в уравнении (23.5), $x = x_0$ — произвольная фиксированная точка отрезка $[a; b]$.

Обозначим теперь через Y_0 множество всех решений $y = y(x)$ однородного уравнения (23.5). Какова структура множества Y_0 ? Во-первых, оно является линейным пространством. Действительно, если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ два произвольных элемента множества Y_0 , то выполняются тождества $Ly_j(x) \equiv 0$, $j = 1, 2$, а значит для произвольных чисел C_1 и C_2 (в силу линейности оператора L) имеет место тождество

$$L[C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)] = C_1 Ly_1(x) + C_2 Ly_2(x) \equiv 0.$$

Это тождество показывает, что любая линейная комбинация элементов множества Y_0 принадлежит Y_0 (т. е. является решением уравнения (23.5)). Следовательно, Y_0 — линейное пространство.

Из линейной алгебры известно, что если линейное пространство X конечномерно, то в нем можно выделить базис, т. е. такую упорядоченную систему элементов $f_1, \dots, f_m \in X$, которая обладает свойствами:

- а) система $f_1, \dots, f_m$ линейно независима;
- б) каков бы ни был элемент $f \in X$, существуют числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ такие, что $f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_m f_m$.

При этом числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ называются координатами элемента f в базисе $f_1, \dots, f_m$ (показывается, что координаты элемента в данном базисе единственны).

В пространстве Y_0 также можно выделить базис. В случае дифференциальных уравнений (а также в случае лю-

бой линейной системы уравнений) базис пространства решений принято называть фундаментальной системой решений. Мы вернемся к этому термину немного позднее и определим его более точно.

Существование базиса в Y_0 устанавливается следующей теоремой.

Теорема 23.6 (о структуре общего решения однородного уравнения). Если в уравнении (23.5) все коэффициенты $a_i(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, то для него существуют n линейно независимых на отрезке $[a; b]$ решений $y_1(x), \dots, y_n(x)$ (n — порядок уравнения (23.5)). При этом любое другое решение уравнения (23.5) является линейной комбинацией указанных линейно независимых решений $y_1(x), \dots, y_n(x)$, т. е. общее решение уравнения (23.5) описывается формулой

$$y = y(x; C_1, \dots, C_n) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x), \quad (23.8)$$

где $C_1, \dots, C_n$ — произвольные постоянные.

Доказательство. Покажем сначала, что для уравнения (23.5) существуют n линейно независимых на отрезке $[a; b]$ решений. Возьмем произвольную постоянную матрицу B с определителем $\det B \neq 0$ и со столбцами $\{b_{1j}, \dots, b_{nj}\}$, $j = 1, n$. Так что матрица B не вырождена и имеет порядок n . Каждый столбец этой матрицы будем использовать в качестве начальной точки для задачи Коши для уравнения (23.5). Получим n задач Коши:

$$\begin{cases} Ly = 0, \\ y(x_0) = b_{11}, y'(x_0) = b_{21}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = b_{n1}; \dots \\ \dots \\ \begin{cases} Ly = 0, \\ y(x_0) = b_{1n}, y'(x_0) = b_{2n}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = b_{nn}. \end{cases} \end{cases}$$

Каждая из этих задач (в силу непрерывности коэффициентов $a_i(x)$) имеет единственное решение. Обозначим через $y_1(x), \dots, y_n(x)$ решения этих задач соответственно. Вронскиан в точке $x = x_0$ этих решений:

$$W[y_1, \dots, y_n] \Big|_{x=x_0} = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

совпадает с определителем $\det B$ матрицы B , и поэтому не равен нулю. Отсюда следует, что решения $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно независимы на отрезке $[a; b]$. Существование таких решений доказано (их можно даже построить бесчисленное множество, выбирая произвольно матрицу B с $\det B \neq 0$).

Покажем теперь, что (23.8) — общее решение уравнения (23.5).

При любых значениях постоянных $C_1, \dots, C_n$ функция (23.8) является решением уравнения (23.5), так как пространство Y_0 решений уравнения (23.5) является линейным пространством. Пусть теперь $y = y(x)$ — решение произвольной задачи Коши

$$Ly = 0, y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1^0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}^0, \quad (23.9)$$

где $x_0 \in [a; b]$. Покажем, что существуют значения постоянных $C_1 = C_1^0, \dots, C_n = C_n^0$ такие, что функция $y = C_1^0 y_1(x) + \dots + C_n^0 y_n(x)$ совпадает с решением $y = y(x)$ задачи Коши (23.9). Подчиняя (23.8) начальным условиям (23.9), получаем равенства

$$\begin{aligned} C_1 y_1(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) &= y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) &= y_1^0, \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1}^0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1^0 \\ \vdots \\ y_{n-1}^0 \end{pmatrix} \quad (23.10)$$

Так как решения $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно независимы на отрезке $[a; b]$, то их вронскиан $W(x) \equiv W[y_1, \dots, y_n]$ не равен нулю в произвольной точке отрезка $[a; b]$. Определитель системы (23.10) совпадает с вронскианом $W(x_0)$, и значит он не равен нулю. Но тогда система уравнений (23.10) имеет единственное решение $C_1 = C_1^0, \dots, C_n = C_n^0$. При этом

функция $y = C_1^0 y_1(x) + \dots + C_n^0 y_n(x)$, являясь решением уравнения (23.5), удовлетворяет и начальным условиям (23.9) (в силу выбора чисел $C_1^0, \dots, C_n^0$). Следовательно, функция (23.8) является общим решением уравнения (23.5). Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что любая система из n линейно независимых решений $y_1(x), \dots, y_n(x)$ уравнения (23.5) порядка n образует базис в пространстве Y_0 . Следовательно, пространство Y_0 решений однородного уравнения (23.5) имеет размерность n .

Определение 23.3. Любая упорядоченная система из n линейно независимых на отрезке $[a; b]$ решений $y_1(x), \dots, y_n(x)$ уравнения (23.5) (n -го порядка) называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения (или базисом его решений).

Рассмотрим теперь неоднородное дифференциальное уравнение

$$Ly \equiv y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x) \quad (23.11)$$

и докажем следующее утверждение.

Теорема 23.7 (о структуре общего решения неоднородного уравнения). Если в уравнении (23.11) все коэффициенты $a_i(x)$ и правая часть $h(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, то общее решение уравнения (23.11) (на этом отрезке) имеет вид

$$\begin{aligned} y = y(x; C_1, \dots, C_n) &= C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x) + y_*(x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y_{o.n.} = y_{o.o.} + y_{г.н.}, \end{aligned} \quad (23.12)$$

где $y_1(x), \dots, y_n(x)$ — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения $Ly = 0$, а $y = y_*(x)$ — частное решение неоднородного уравнения (23.11), $C_1, \dots, C_n$ — произвольные постоянные.

Доказательство. Применяя оператор L к функции (23.12), будем иметь

$$\begin{aligned} Ly &= C_1 Ly_1(x) + \dots + C_n Ly_n(x) + Ly_*(x) \equiv \\ &\equiv 0 + \dots + 0 + h(x) \equiv h(x). \end{aligned}$$

Это означает, что функция (23.12) является решением уравнения (23.11) при произвольных значениях постоянных $C_1, \dots, C_n$. Пусть теперь $(x_0, y_0, y_1^0, \dots, y_{n-1}^0)$ — произвольная точка в R^{n+1} ($x_0 \in [a; b]$). Покажем, что решение $y = y(x)$ задачи Коши

$$Ly = h(x), y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1^0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}^0 \quad (23.13)$$

можно получить из (23.12) выбором определенных значений $C = C_1^0, \dots, C_n = C_n^0$ постоянных. Подчиняя (23.12) условиям (23.13), будем иметь

$$\begin{aligned} C_1 y_1(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) &= y_0 - y_*(x_0), \\ C_1 y_1'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) &= y_0' - y_*'(x_0), \\ &\dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} - y_*^{(n-1)}(x_0) \end{aligned} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} y_0 - y_*(x_0) \\ y_0' - y_*'(x_0) \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} - y_*^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (23.14)$$

Определитель этой системы совпадает с вронскианом $W(x) \equiv W[y_1, \dots, y_n]$ в точке $x = x_0$, и поскольку фундаментальная система решений $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно независима на отрезке $[a; b]$, то указанный определитель системы (23.14) не равен нулю. Следовательно, система (23.14) имеет единственное решение $C_1 = C_1^0, \dots, C_n = C_n^0$, а значит функция $y = C_1^0 y_1(x) + \dots + C_n^0 y_n(x)$ является решением задачи Коши (23.13). Тем самым показано, что функция (23.12) является общим решением неоднородного уравнения (23.11). Теорема доказана.

§ 23.3. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ ЛАГРАНЖА

Согласно теореме 23.7 поиск общего решения неоднородного дифференциального уравнения (23.11) сводится к двум процедурам:

- 1) построение фундаментальной системы решений $y_1(x), \dots, y_n(x)$ соответствующего однородного уравнения;
- 2) вычисление частного решения $y = y_*(x)$ неоднородного уравнения (23.11).

Самым трудным является осуществление первой процедуры. Однако для уравнений с постоянными коэффициентами (см. следующий раздел) ее можно всегда реализовать. Если же найдена фундаментальная система решений $y_1(x), \dots, y_n(x)$ однородного уравнения $Ly = 0$, то реализовать вторую процедуру не составляет особого труда.

Теорема 23.8. Пусть $y_1(x), \dots, y_n(x)$ — фундаментальная система решений однородного уравнения (23.5) с непрерывными на отрезке $[a, b]$ коэффициентами $a_i(x)$. Если правая часть $h(x)$ соответствующего неоднородного уравнения (23.22) непрерывна на отрезке $[a, b]$, то его частное решение можно вычислить в виде

$$y = y_*(x) = C_1(x)y_1(x) + \dots + C_n(x)y_n(x), \quad (23.15)$$

где функции $C_1(x), \dots, C_n(x)$ (представляющие собой варьируемые постоянные общего решения однородного уравнения (23.5)) находятся из системы

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y'_1(x_0) & \dots & y'_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \\ \vdots \\ C'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ h(x) \end{pmatrix} \quad (23.16)$$

Доказательство. Проведем доказательство для уравнения второго порядка:

$$Ly = y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x). \quad (23.17)$$

В этом случае система (23.16) имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h(x) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = h(x) \end{cases} \quad (23.18)$$

Проверим, что функция

$$y = y_*(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \quad (23.19)$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ удовлетворяют уравнениям (23.18), является частным решением уравнения (23.17).

Вычислим производные y' и y'' функции (23.19) с учетом равенств (23.18):

$$y' = C_1' y_1 + C_2' y_2 + C_1 y_1' + C_2 y_2' = C_1 y_1' + C_2 y_2',$$

$$y'' = C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_1 y_1'' + C_2 y_2'' = h(x) + C_1 y_1'' + C_2 y_2''.$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y &\equiv \\ &\equiv (C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + h(x)) + a_1(x) (C_1 y_1' + C_2 y_2') + a_0(x) (C_1 y_1 + C_2 y_2). \end{aligned}$$

Группируя здесь коэффициенты отдельно перед каждой функцией $C_1(x)$ и $C_2(x)$, получаем

$$\begin{aligned} y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y &\equiv \\ &\equiv h(x) + C_1(y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) + C_2(y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2). \end{aligned}$$

Поскольку $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения соответствующего однородного уравнения $Ly = 0$, то $Ly_j(x) \equiv 0$, и значит $y'' + a_1 y' + a_0 y \equiv h(x)$. Таким образом, функция $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ является частным решением неоднородного уравнения (23.17). Теорема доказана.

ПРИМЕР 23.4. Проверить, что функции $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ образуют фундаментальную систему решения уравнения $y'' + y = 0$ и найти общее решение неоднородного уравнения $y'' + y = 1/\cos x$.

Поскольку $y_1'(x) = -\sin x$ и $y_1'' = -\cos x$, то функция $y_1 = \cos x$ удовлетворяет уравнению $y'' + y = 0$. Точно так же убеждаемся, что функция $y_2(x) = \sin x$ также удовлетворяет уравнению $y'' + y = 0$. Вычисляем вронскиан

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Видим, что он не обращается в нуль на промежутке $(-\infty; +\infty)$, значит функции $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y'' + y = 0$.

Найдем теперь частное решение $y = y_*(x)$ неоднородного уравнения $y'' + y' = 1/\cos x$ в форме $y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$. При этом функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ должны удовлетворять системе

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\cos x \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\cos x \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ C_1' &= -\frac{\sin x}{\cos x}, \Leftrightarrow C_2' = 1 \Leftrightarrow C_1 = \\ &= -\int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int \frac{d \cos x}{\cos x} = \ln |\cos x| + \bar{C}_1, \\ C_2' &= \int 1 dx = x + \bar{C}_2. \end{aligned}$$

Поскольку нас интересует частное решение неоднородного уравнения $y'' + y = 1/\cos x$, то $C_1(x)$ и $C_2(x)$ можно взять в виде $C_1(x) = \ln |\cos x|$, $C_2(x) = x$. Подставляя их в $y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$, получаем частное решение в виде

$$y = y_*(x) = (\ln |\cos x|)\cos x + x \sin x,$$

а значит общее решение неоднородного уравнения запишется в форме

$$\begin{aligned} y &= C_1 \cos x + C_2 \sin x + (\ln |\cos x|)\cos x + x \sin x = \\ &= (C_1 + \ln |\cos x|)\cos x + (C_2 + x)\sin x. \end{aligned}$$

§ 23.4. КОМПЛЕКСНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ЛИНЕЙНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ КОМПЛЕКСНЫХ РЕШЕНИЙ

Напомним, что *комплексными числами* называют числа вида $z = a + ib$, где a и b — действительные числа, $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица ($i^2 = -1$). При этом $a = \operatorname{Re} z$ называется *действительной частью*, а $b = \operatorname{Im} z$ — *мнимой частью* комплексного числа z . Число $\bar{z} = a - ib$ называется *сопряженным* числу $z = a + ib$, а неотрицательное число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется *модулем* числа z . Множество всех комплексных чисел обозначают буквой $\mathbb{C}$. Каждому комплексному числу $z = a + ib$ соответствует единственная точка $M(a; b)$ на плоскости XOY или радиус-вектор $\vec{OM}$ этой точки. При этом ось OX называется *действительной осью*, а ось OY — *мнимой осью*. Сама плоскость XOY называется *комплексной плоскостью*; ее тоже обозначают буквой $\mathbb{C}$. Угол $\varphi = (\vec{OM}, \vec{Ox})$ называется *аргументом* комплексного числа z . Ясно, что аргумент определяется неоднозначно. *Главным значением* аргумента называется угол $\varphi = (\vec{OM}, \vec{Ox})$, лежащий в пределах $0 \leq \varphi < 2\pi$ (или в пределах $-\pi < \varphi \leq \pi$). Главное значение аргумента обозначается так: $\varphi = \arg z$.

Из рис. 23.1 видно, что $a = |z| \cos \varphi$, $b = |z| \sin \varphi$. Значит, комплексное число можно записать еще в виде $a + ib = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Эта форма называется *тригонометрической формой* числа z , а его первоначальная форма $z = a + ib$ — *алгебраической формой* комплексного числа z . Если воспользоваться формулой Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

то можно получить еще одну форму комплексного числа $z = |z|e^{i\varphi}$ называемую *показательной формой* числа z .

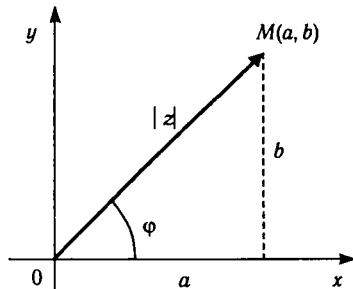


Рис. 23.1

Два комплексных числа называются *равными*, если равны одновременно порознь действительные и мнимые части этих чисел, т. е.

$$a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

Действия над комплексными числами определяются равенствами:

$$\begin{aligned} 1) & (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2), \\ & (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2); \\ 2) & (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) \equiv a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 = \\ & = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1); \\ 3) & \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{a_2^2 + b_2^2}. \end{aligned}$$

Умножение комплексных чисел (и их деление) лучше производить в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} [|z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)] \cdot [|z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)] = \\ = |z_1| \cdot |z_2| \cdot [(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))]. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает известная формула

$$(|z|(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)),$$

называемая *формулой Муавра*. С помощью нее можно определить операцию извлечения корня n -й степени из комплексных чисел.

Определение 23.4. Отображение $z = z(x) : D \rightarrow \mathbb{C}$, ставящее в соответствие каждому действительному числу $x \in D \subset \mathbb{R}$ единственное комплексное число $z = u(x) + iv(x)$ ($u(x), v(x) \in \mathbb{R}$), называется *комплексной функцией действительной переменной x* с областью определения D .

Над такими функциями можно производить обычные арифметические действия. Например,

$$[u(x) + iv(x)]^2 = u^2(x) + 2u(x)v(x)i - v^2(x).$$

Комплексная экспонента вычисляется по формуле Эйлера

$$e^{u(x)+iv(x)} = e^{u(x)}[\cos v(x) + i \sin v(x)].$$

Отсюда легко получить формулы для синуса и косинуса комплексного аргумента:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \quad (23.20)$$

Производные комплексной функции действительного аргумента определим равенствами:

$$z'(x) \equiv \frac{d}{dx}[u(x) + iv(x)] = u'(x) + iv'(x),$$

$$z^{(n)}(x) \equiv \frac{d^n}{dx^n}[u(x) + iv(x)] = u^{(n)}(x) + iv^{(n)}(x),$$

а интеграл — равенством

$$\int_a^b z(x)dx \equiv \int_a^b [u(x) + iv(x)]dx = \int_a^b u(x)dx + i \int_a^b v(x)dx.$$

Например,

$$(e^{(\alpha+i\beta)x})^{(n)} = (\alpha + i\beta)^n e^{(\alpha+i\beta)x} \quad (\alpha + i\beta = \text{const}).$$

Пусть теперь дано дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (23.21)$$

в котором участвуют только функции действительного аргумента (в том числе и комплексные функции действительной переменной x). Комплексное решение этого уравнения определяется так же, как и действительное решение (см. определение 20.2): функция $y = u(x) + iv(x)$ называется решением уравнения (23.21) на отрезке $[a, b]$, если она, будучи подставлена в уравнение (23.21), обращает его в тождество на отрезке $[a, b]$. Задача Коши для уравнения (23.21) ставится аналогично (только здесь начальная точка может быть комплексной).

Нас будет интересовать линейное дифференциальное уравнение

$$Ly \equiv y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x) \quad (23.22)$$

с действительными коэффициентами $a_i(x)$ и с комплексной неоднородностью $h(x) = h_1(x) + ih_2(x)$ ($h_1(x)$ и $h_2(x)$ — действительные функции). Ясно, что оператор L остается линей-

ным и в пространстве $C^n[a; b]$ комплекснозначных функций. Докажем следующее утверждение.

7°) Если $y = u(x) + iv(x)$ комплексное решение уравнения (23.22) с действительными коэффициентами $a_i(x)$ ($i = \overline{0, n-1}$), то его действительная $u(x)$ и мнимая $v(x)$ части являются решениями уравнений:

$$Lu = h_1(x), \quad Lv = h_2(x).$$

В самом деле, в силу линейности оператора L имеем

$$Ly(x) \equiv L[u(x) + iv(x)] \equiv Lu(x) + iLv(x) \equiv h_1(x) + ih_2(x).$$

Приравнивая здесь отдельно действительную и мнимую части, получаем тождества

$$Lu(v) \equiv h_1(x), \quad Lv(x) \equiv h_2(x),$$

ч. т. д.

Полагая здесь $h(x) \equiv 0$, получаем следующий результат.

8°) Действительная и мнимая части комплексного решения $y = u(x) + iv(x)$ однородного дифференциального уравнения $Ly = 0$ с действительными коэффициентами $a_i(x)$ также являются решениями этого уравнения (т. е. $Lu(x) \equiv 0$, $Lv(x) \equiv 0$).

Линейная зависимость и линейная независимость на отрезке $[a; b]$ системы комплекснозначных функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$ определяется так же, как и для системы действительных функций (см. определение 23.1). Только здесь коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ линейной комбинации могут быть комплексными числами. Все теоремы 23.1–23.8 остаются в силе и для комплексных решений.

В дальнейшем потребуются факт линейной независимости некоторых систем комплекснозначных и действительных функций, описанных ниже.

9°) Система функций

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x},$$

где все числа λ_j (комплексные или действительные) попарно различны (т. е. $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$) линейно независима на произвольном отрезке $[a; b]$.

Доказательство. Запишем вронскиан

$$W[e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}] = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

(здесь из каждого столбца вынесли общий множитель — соответствующую экспоненту). Стоящий здесь определитель (его называют *определителем Вандермонда*) равен произведению двучленов $(\lambda_i - \lambda_j)$ для всех $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ таких, что $j < i$, т. е. $\Delta_n = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)$. Этот факт можно показать по индукции, но мы не будем этого делать. Проверим его только для определителя Вандермонда

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix}$$

третьего порядка. Прибавляя ко второй строке определителя Δ_3 его первую строку, умноженную на $(-\lambda_1)$, а к третьей строке — вторую, умноженную на $(-\lambda_1)$, будем иметь

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_3 - \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2^2 - \lambda_2 \lambda_1 & \lambda_3^2 - \lambda_3 \lambda_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_3 - \lambda_1 \\ \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_3(\lambda_3 - \lambda_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2).$$

Итак, определитель Вронского $W(x) \equiv W[e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}]$ имеет вид

$$W(x) = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x} \prod_{1 \leq j < i \leq n} (\lambda_i - \lambda_j).$$

Поскольку у нас $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ ($i, j = \overline{1, n}$) и экспонента в нуль не обращается, то $W(x) \neq 0$ на любом отрезке $[a; b]$. Свойство 9° доказано.

10°) Пусть дана система действительных функций

$$e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_m x},$$

$$e^{\alpha_{m+1} x} \cos \beta_{m+1} x, \dots, e^{\alpha_s x} \cos \beta_s x, \quad (23.23)$$

$$e^{\alpha_{m+1} x} \sin \beta_{m+1} x, \dots, e^{\alpha_s x} \sin \beta_s x.$$

Если числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1} = \alpha_{m+1} + i\beta_{m+1}, \dots, \lambda_s = \alpha_s + i\beta_s$ попарно различны, то указанная система функций линейно независима на любом отрезке $[a; b]$.

Доказательство. Проведем его для системы функций

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, e^{\alpha_3 x} \cos \beta_3 x, e^{\alpha_3 x} \sin \beta_3 x. \quad (23.23')$$

составим их линейную комбинацию и приравняем ее нулю:

$$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\alpha_3 x} \cos \beta_3 x + C_4 e^{\alpha_3 x} \sin \beta_3 x \equiv 0 \quad (23.24)$$

Используя формулы

$$\cos \beta_3 x = \frac{1}{2}(e^{i\beta_3 x} + e^{-i\beta_3 x}), \sin \beta_3 x = \frac{1}{2i}(e^{i\beta_3 x} - e^{-i\beta_3 x}),$$

перепишем предыдущее тождество в виде

$$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_5 e^{\lambda_3 x} + C_6 e^{\bar{\lambda}_3 x} \equiv 0, \quad (23.24')$$

где обозначено: $C_5 = (C_3 - iC_4)/2$, $C_6 = (C_3 + iC_4)/2$. По условию числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ попарно не равны друг другу, но тогда попарно не равны друг другу и числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \bar{\lambda}_3$ (учесть, что λ_1 и λ_2 — действительные числа). По свойству 9° система функций $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, e^{\lambda_3 x}, e^{\bar{\lambda}_3 x}$ линейно независима на любом отрезке $[a; b]$. Значит, тождество (23.24') имеет место тогда и только тогда, когда одновременно $C_1 = C_2 = C_5 = C_6 = 0$.

$$\begin{cases} C_5 = \frac{C_3 - iC_4}{2}, \\ C_6 = \frac{C_3 + iC_4}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_3 + iC_4 = 0, \\ C_3 - iC_4 = 0 \end{cases}$$

Аналогичными рассуждениями может быть доказано следующее утверждение.

[illegible]

§ 23.5. МЕТОД ЭЙЛЕРА ПОСТРОЕНИЯ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В СЛУЧАЕ ПРОСТЫХ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

$$Ly \equiv y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (23.26)$$
$$p(\lambda) \equiv \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad (*)$$

заменяв в (23.26) производные $y^{(k)}$ на степени $\lambda^k (k = \overline{0, n})$.

Определение 23.5. Многочлен $p(\lambda) \equiv \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ называется *характеристическим многочленом* уравнения (23.26), а само уравнение (*) — *характеристическим уравнением*, соответствующим уравнению (23.26).

Имеет место очевидное тождество

$$L(e^{\lambda x}) \equiv e^{\lambda x} p(\lambda), \quad (23.27)$$

если λ — постоянная, так как $(e^{\lambda x})^{(k)} \equiv \lambda^k e^{\lambda x}, k = \overline{0, n}$.

Теорема Эйлера. Для того чтобы экспонента $y = e^{\lambda_0 x}$ (λ_0 — постоянная) была решением уравнения (23.26), необходимо и достаточно, чтобы $\lambda = \lambda_0$ было корнем характеристического многочлена $p(\lambda)$ (или, что то же самое, корнем характеристического уравнения (*)).

Действительно, если $p(\lambda_0) = 0$, то из (23.27) следует тождество $L(e^{\lambda_0 x}) \equiv 0$, показывающее, что экспонента $y = e^{\lambda_0 x}$ является решением уравнения (23.26). Обратно: если $y = e^{\lambda_0 x}$ — решение уравнения (23.26), то $L(e^{\lambda_0 x}) \equiv 0$, и из (23.27) следует, что $p(\lambda_0) = 0$, т. е. $\lambda = \lambda_0$ — корень характеристического многочлена $p(\lambda)$.

Из теоремы Эйлера сразу же вытекает следующий результат.

Теорема 23.9. Если все корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ характеристического уравнения (*) различны (т. е. $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j, i, j = \overline{1, n}$), то система функций

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x} \quad (23.28')$$

образует фундаментальную систему решений уравнения (23.26). В этом случае общее решение (на любом отрезке $[a; b]$) уравнения (23.26) имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}, \quad (23.28)$$

где $C_1, \dots, C_n$ — произвольные постоянные.

Доказательство следует сразу из теоремы Эйлера и утверждения 9°.

Общее решение (23.28) уравнения (23.26) может быть комплексным, если хотя бы один из корней λ_j характеристического полинома $p(\lambda)$ комплексный. Для уравнений

(23.26) с действительными коэффициентами a_i принято записывать общее решение в действительной форме. Это не трудно сделать, если воспользоваться утверждением 8° и отделив в комплексном решении $e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)$ мнимую и действительную части: $y = e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $\bar{y} = e^{\alpha x} \sin \beta x$. Согласно 8° действительные функции y и $\bar{y}$ также являются решениями однородного уравнения (23.26) с действительными коэффициентами. Поступив так с каждой комплексной экспонентой в (23.28'), получим следующий результат.

Теорема 23.10. Пусть корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ характеристического уравнения (*) различны, а коэффициенты a_i уравнения (23.26) действительны. Пусть, далее, корни $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — действительны, а остальные корни $\lambda = \lambda_j$ комплексны:

$$\lambda = \alpha_{m+1} \pm i\beta_m + 1, \dots, \lambda = \alpha_s \pm i\beta_s \quad (2(s-m) = n-m).$$

Тогда фундаментальную систему решений уравнения (23.26) можно выбрать в виде действительных функций

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_m = e^{\lambda_m x}, \quad (23.29)$$

$$y_{m+1} = e^{\alpha_{m+1} x} \cos \beta_{m+1} x, \dots, y_s = e^{\alpha_s x} \cos \beta_s x,$$

$$y_{m+1} = e^{\alpha_{m+1} x} \sin \beta_{m+1} x, \dots, \bar{y}_s = e^{\alpha_s x} \sin \beta_s x,$$

а общее решение уравнения (23.26) записать в виде

$$y = \sum_{j=1}^m C_j e^{\lambda_j x} + \sum_{k=m+1}^s [C_k e^{\alpha_k x} \cos \beta_k x + D_k e^{\alpha_k x} \sin \beta_k x],$$

где C_k, D_k — произвольные постоянные.

Доказательство следует из того, что функции (23.29) являются решениями уравнения (23.26) (утверждение 8°) и образуют линейно независимую систему на любом отрезке $[a; b]$ (утверждение 9°).

Заметим, что в силу действительности всех коэффициентов a_i уравнения (23.26) его характеристическое уравнение (*) наряду с корнем $\lambda = \alpha + i\beta$ имеет и комплексно-сопряженный корень $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$.

ПРИМЕР 23.5. Найти общее решение уравнения

$$y''' - y'' + y' - y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение (*):

$$\rho(\lambda) \equiv \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0.$$

Разлагая его левую часть на множители, будем иметь

$$\rho(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1) + (\lambda - 1) = (\lambda^2 + 1)(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_{2,3} = \pm i. \end{cases}$$

Итак, все корни характеристического уравнения различны. Согласно теореме 23.10 соответствующая фундаментальная система решений будет иметь вид

$$y_1 = e^x, y_2 = \cos x, \tilde{y}_2 = \sin x,$$

а значит общее решение исходного уравнения запишется в форме

$$y = y_{o.o.} = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

§ 23.6. ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ КРАТНЫХ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Напомним сначала, что корень $\lambda = \lambda_0$ характеристического многочлена $\rho(\lambda)$ называется *корнем кратности* $r \geq 1$, если

$$\rho(\lambda_0) = \rho'(\lambda_0) = \dots = \rho^{(r-1)}(\lambda_0) = 0, \rho^{(r)}(\lambda_0) \neq 0. \quad (23.30)$$

Полезно заметить, что если полином $\rho(\lambda)$ имеет n различных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (n — степень многочлена $\rho(\lambda)$), то все они имеют кратность $r = 1$. Однократные корни называют еще *простыми корнями* $\rho(\lambda)$.

Записав для многочлена $\rho(\lambda)$ формулу Тейлора

$$\rho(\lambda) = \rho(\lambda_0) + \frac{\rho'(\lambda_0)}{1!}(\lambda - \lambda_0) + \dots + \frac{\rho^{(r-1)}(\lambda_0)}{(r-1)!}(\lambda - \lambda_0)^{r-1} +$$

$$+ \frac{p^{(r)}(\lambda_0)}{r!}(\lambda - \lambda_0)^4 + \dots + \frac{p^{(n)}(\lambda_0)}{n!}(\lambda - \lambda_0)^n$$

(остаточный член его равен тождественно нулю), получим с учетом равенств (23.30), что если $\lambda = \lambda_0$ — корень кратности r , то $p(\lambda)$ представляется в виде

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^r g(\lambda), \quad (23.30')$$

где $g(\lambda)$ — многочлен степени $n - r$ такой, что $g(\lambda_0) \neq 0$. Очевидно, верно и обратное: если $p(\lambda)$ представляется в виде (23.30'), где $g(\lambda_0) \neq 0$, то $\lambda = \lambda_0$ — корень кратности r многочлена $p(\lambda)$.

Построению фундаментальной системы решений в случае кратных корней характеристического уравнения (*) предположим несколько вспомогательных утверждений.

12°) Если $L \equiv \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_0$ — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами a_i , то имеет место формула

$$L(x^k e^{\lambda x}) \equiv \frac{d^k}{d\lambda^k} (e^{\lambda x} p(\lambda)) \quad (\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in [a, b], k \geq 0). \quad (23.31)$$

Действительно, по (23.27) имеем

$$L(e^{\lambda x}) \equiv e^{\lambda x} p(\lambda).$$

Дифференцируя это тождество по λ и учитывая, что операторы $d^k/d\lambda^k$ и L перестановочны при применении их к бесконечно дифференцируемой по x и λ функции $e^{\lambda x}$, будем иметь

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} [e^{\lambda x} p(\lambda)] \equiv \frac{d^k}{d\lambda^k} L(e^{\lambda x}) \equiv L \left(\frac{d^k}{d\lambda^k} e^{\lambda x} \right) \equiv L(x^k e^{\lambda x}).$$

Таким образом, справедливо тождество (23.31).

13°) Пусть $\lambda = \lambda_0$ — корень кратности r характеристического многочлена $p(\lambda)$ уравнения (23.26) с постоянными коэффициентами a_i . Тогда r функций

$$y_1 = e^{\lambda_0 x}, y_2 = x e^{\lambda_0 x}, \dots, y_r = x^{r-1} e^{\lambda_0 x} \quad (23.32)$$

линейно независимы на любом отрезке $[a; b]$ и являются решениями уравнения (23.26).

Доказательство. Пусть k — любое натуральное число, удовлетворяющее неравенству $k < r$. Согласно 12° имеет место тождество

$$L(x^k e^{\lambda x}) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \equiv \frac{d}{d\lambda^k} (e^{\lambda x} p(\lambda)) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \equiv \left[\frac{d^k}{d\lambda^k} ((\lambda - \lambda_0)^r W(x, \lambda)) \right]_{\lambda=\lambda_0},$$

где $W(x, \lambda) \equiv e^{\lambda x} g(\lambda)$ (см. (23.30')). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} ((\lambda - \lambda_0)^r W(x, \lambda)) &\equiv r(\lambda - \lambda_0)^{r-1} W(x, \lambda) + (\lambda - \lambda_0)^r \frac{\partial W}{\partial \lambda} \equiv \\ &\equiv (\lambda - \lambda_0)^{r-1} W_1(x, \lambda); \\ \frac{d^2}{d\lambda^2} ((\lambda - \lambda_0)^r W(x, \lambda)) &\equiv \\ &\equiv (r-1)(\lambda - \lambda_0)^{r-2} W_1(x, \lambda) + (\lambda - \lambda_0)^{r-1} \frac{\partial W_1}{\partial \lambda} \equiv \\ &\equiv (\lambda - \lambda_0)^{r-2} W_2(x, \lambda); \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d^k}{d\lambda^k} ((\lambda - \lambda_0)^r W(x, \lambda)) &\equiv (\lambda - \lambda_0)^{r-k} W_k(x, \lambda), r > k. \end{aligned}$$

Полагая в последнем тождестве $\lambda = \lambda_0$, будем иметь

$$L(x^k e^{\lambda_0 x}) \equiv \left[\frac{d^k}{d\lambda^k} ((\lambda - \lambda_0)^r W(x, \lambda)) \right]_{\lambda=\lambda_0} \equiv 0.$$

Это означает, что функции (23.32) являются решениями уравнения (23.26). Эти функции линейно независимы на любом отрезке $[a; b]$ (см. утверждение 11°). Свойство 13° доказано.

Если $\lambda = \lambda_0 = \alpha \pm i\beta$ — комплексный корень кратности r уравнения (*) с постоянными и действительными коэффициентами a_j , то отделяя в (23.32) действительные и мнимые части, получаем $2r$ линейно независимых действительных решений

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, y_r = x^{r-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$\tilde{y}_1 = e^{\alpha x} \sin \beta x, \tilde{y}_2 = x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, \tilde{y}_r = x^{r-1} e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (23.33)$$

Из этого факта и предыдущих утверждений вытекает следующий алгоритм построения фундаментальной системы решений однородного уравнения (23.26) с постоянными и действительными коэффициентами.

Алгоритм 23.1.

1) По уравнению (23.26) составляем характеристическое уравнение (*), заменив в (23.26) производные d^k/dx^k на степени λ^k ($k = 0, n$).

2) Найдем корни $\lambda = \lambda_j$ характеристического уравнения (*) и установим их кратности.

3) Каждому действительному корню $\lambda = \lambda_0$ кратности r поставим в соответствие r линейно независимых решений $e^{\lambda_0 x}, x e^{\lambda_0 x}, \dots, x^{r-1} e^{\lambda_0 x}$.

4) Каждой паре комплексно-сопряженных корней $\lambda = \alpha \pm i\beta$ кратности l сопоставим $2l$ линейно независимых решений

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{l-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{l-1} e^{\alpha x} \sin \beta x. \end{aligned}$$

5) Объединим все полученные линейно независимые решения. Получим фундаментальную систему решений уравнения (23.26), состоящую из n функций (n — порядок уравнения (23.26)).

Общее решение уравнения (23.26) имеет вид

$$y = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

где $y_1(x), \dots, y_n(x)$ — построенная в алгоритме 23.1 фундаментальная система решений, а $C_1, \dots, C_n$ — произвольные постоянные.

ПРИМЕР 23.6. Найти общее решение уравнения

$$y^V - y^{IV} + 18y''' - 18y'' + 81y' - 81y = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение (*), находим его корни и устанавливаем их кратности:

$$\begin{aligned} \lambda^5 - \lambda^4 + 18\lambda^3 - 18\lambda^2 + 81\lambda - 81 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda^4(\lambda - 1) + 18\lambda^2(\lambda - 1) + 81(\lambda - 1) &= 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^4 + 18\lambda^2 + 81) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 + 9)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 3i)^2(\lambda + 3i)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 & (\text{кратности } 1), \\ \lambda_{2,3} = \pm 3i & (\text{кратности } 2). \end{cases}$$

Согласно алгоритму 23.1 выписываем линейно независимые решения, отвечающие каждому корню:

$$\lambda_1 = 1 : y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^x,$$

$$\lambda_{2,3} = \pm 3i : y_2 = \cos 3x, \quad y_3 = x \cos 3x,$$

$$\tilde{y}_2 = \sin 3x, \quad \tilde{y}_3 = x \sin 3x.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos 3x + C_3 x \cos 3x + C_4 \sin 3x + C_5 x \sin 3x =$$

$$= C_1 e^x + (C_2 + x C_3) \cos 3x + (C_4 + x C_5) \sin 3x.$$

§ 23.7. ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. МЕТОД ПОДБОРА ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Для неоднородного уравнения (23.22) с непрерывными на отрезке $[a; b]$ коэффициентами $a_i(x)$ и неоднородностью $h(x)$ был изложен метод вычисления частного решения $y = y_{r.n.}(x)$, называемый *методом вариации постоянных*. После того как найдено частное решение неоднородного уравнения, его общее решение вычисляется по формуле $y_{o.n.} = y_{o.o.} + y_{r.n.}$, где $y_{o.o.}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения $Ly = 0$. Дадим еще один способ вычисления частного решения неоднородного уравнения (23.22), который применяется и в случае, когда коэффициенты этого уравнения переменные.

14*) Пусть в уравнении (23.22) все коэффициенты $a_i(x)$ и правая часть $h(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и пусть $z = z(x, s)$ — решение соответствующего однородного уравнения $Lz = 0$, удовлетворяющее начальным условиям

$$z(s, s) = z'_x(s, s) = \dots = z_x^{(n-2)}(s, s) = 0, \quad z_x^{(n-1)}(s, s) = 1 \quad (23.34)$$

при любом фиксированном значении параметра $s \in [a; b]$. Тогда частное решение неоднородного уравнения (23.22) с нулевыми начальными данными $y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$ может быть записано в виде

$$y(x) = \int_{x_0}^x z(x, s) h(s) ds \quad (x_0, x, s \in [a; b]). \quad (23.35)$$

Доказательство. Найдем производные $y', \dots, y^{(n)}(x)$ функции (23.35), пользуясь формулой

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{x_0}^x g(x, s) ds \right) = g(x, x) + \int_{x_0}^x g'_x(x, s) ds.$$

С учетом начальных условий (23.34), будем иметь

$$y'(x) = z(x, x)h(x) + \int_{x_0}^x z'_x(x, s)h(s)ds = \int_{x_0}^x z'_x(x, s)h(s)ds;$$

$$y''(x) = z'_x(x, x)h(x) + \int_{x_0}^x z''_{xx}(x, s)h(s)ds = \int_{x_0}^x z''_{xx}(x, s)h(s)ds;$$

.....

$$y^{(n-1)}(x) = z_x^{(n-2)}(x, x)h(x) + \int_{x_0}^x z_x^{(n-1)}(x, s)h(s)ds =$$

$$= \int_{x_0}^x z_x^{(n-1)}(x, s)h(s)ds;$$

$$y^{(n)}(x) = z_x^{(n-1)}(x, x)h(x) + \int_{x_0}^x z_x^{(n)}(x, s)h(s)ds =$$

$$= h(x) + \int_{x_0}^x z_x^{(n)}(x, s)h(s)ds.$$

Следовательно,

$$Ly(x) \equiv \left[h(x) + \int_{x_0}^x z_x^{(n)}(x, s)h(s)ds \right] + a_{n-1}(x) \int_{x_0}^x z_x^{(n-1)}(x, s)h(s)ds +$$

$$\begin{aligned}
 & + \dots + a_1(x) \int_{x_0}^x z'_x(x,s)h(s)ds + a_0(x) \int_{x_0}^x z_x(x,s)h(s)ds \equiv \\
 & \equiv \left[h(x) + \int_{x_0}^x (Lz(x,s))h(s)dx \right] \equiv h(x),
 \end{aligned}$$

так как $Lz(x,s) \equiv 0$. Таким образом, функция (23.35) удовлетворяет неоднородному уравнению $Ly = h(x)$. Из выписанных выше равенств для производных функции (23.35) следует, что она удовлетворяет нулевым начальным условиям. Утверждение 14* доказано.

ПРИМЕР 23.7. Найти общее решение неоднородного уравнения

$$Lz \equiv y'' + \omega^2 y = h(x), \quad (23.36)$$

где $\omega \neq 0$ — постоянная, а $h(x)$ — произвольная непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция.

Построим сначала общее решение соответствующего однородного уравнения $Lz = z'' + \omega^2 z = 0$. Так как его характеристическое уравнение $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ имеет два различных комплексно-сопряженных корня $\lambda = \pm i\omega$, то его общее решение имеет вид

$$z = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x.$$

Подчиним это решение начальным условиям

$$z(s) = 0, z'(s) = 1 (s \in [a; b] \text{ — параметр}).$$

Будем иметь

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} C_1 \cos \omega s + C_2 \sin \omega s = 0, \\ -C_1 \omega \sin \omega s + C_2 \omega \cos \omega s = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos \omega s & \sin \omega s \\ -\omega \sin \omega s & \omega \cos \omega s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega s & \sin \omega s \\ -\omega \sin \omega s & \omega \cos \omega s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} \omega \cos \omega s & -\sin \omega s \\ \omega \sin \omega s & \cos \omega s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, $C_1 = \frac{\sin \omega s}{\omega}$, $C_2 = \frac{\cos \omega s}{\omega}$, значит

$$\begin{aligned} z = z(x, s) &= \frac{1}{\omega} [-\sin \omega s \cdot \cos \omega x + \cos \omega s \cdot \sin \omega x] = \\ &= \frac{1}{\omega} \sin \omega(x - s). \end{aligned}$$

Следовательно, частное решение неоднородного уравнения (23.36) имеет вид

$$y = y_{r.n.} = \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^x \sin \omega(x - s) \cdot h(s) ds \quad (x_0 \in [a, b]),$$

а общее решение этого уравнения запишется в форме

$$\begin{aligned} y &= y_{o.n.} = y_{o.o.} + y_{r.n.} = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x + y_{r.n.} = \\ &= C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x + \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^x \sin \omega(x - s) \cdot h(s) ds. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к вычислению частного решения неоднородного уравнения (23.22) с помощью так называемого *метода подбора*. Оговоримся сразу же, что он применим для уравнений (23.22) с постоянными коэффициентами a_i и со специальной правой частью вида

$$h(x) = e^{\alpha x} [M_n(x) \cos \beta x + N_m(x) \sin \beta x], \quad (23.37)$$

где α и β — постоянные, а $M_n(x)$ и $N_m(x)$ — многочлены степени n и m соответственно. Заметим, что функции вида

$$f(x) = P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \dots + P_l(x)e^{\lambda_l x},$$

где $P_1(x), \dots, P_l(x)$ — многочлены, а $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ — постоянные (в общем случае комплексные), называются *квазиполиномами* (или квазимногочленами). Если выразить в (23.37) $\cos \beta x$ и $\sin \beta x$ через экспоненты (см. формулы (23.20)), то (23.37) можно представить в виде квазиполинома с комплексными коэффициентами. Поэтому функцию (23.37) бу-

дем также называть *квазимногочленом*. При этом будем считать, что числа α и β действительные, а число $\lambda = \lambda_* = \alpha + i\beta$ будем называть *спектральным значением квазиполинома* (23.37). Это число играет важную роль при построении частного решения неоднородного уравнения (23.22).

Алгоритм 23.2 (метода подбора).

Пусть требуется найти частное решение уравнения

$$ly \equiv y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = h(x) \quad (23.38)$$

с постоянными коэффициентами $a_i \in R$ и с неоднородностью $h(x)$, являющейся квазимногочленом (23.37). Для этого надо сделать следующее:

1) составить спектральное значение $\lambda_* = \alpha + i\beta$ правой части $h(x)$ уравнения (23.38);

2) если спектральное значение $\lambda = \lambda_*$ не является корнем характеристического уравнения

$$\rho(\lambda) \equiv \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad (*)$$

то частное решение следует искать в виде

$$y = y_{r.l.} = e^{\alpha x} [P_k(x) \cos \beta x + Q_k(x) \sin \beta x], \quad (23.39)$$

где $P_k(x)$ и $Q_k(x)$ — многочлены (с неопределенными коэффициентами) степени $k = \max(m; n)$;

3) если спектральное значение $\lambda = \lambda_*$ является корнем кратности r характеристического уравнения (*), то частное решение следует искать в виде

$$y = y_{r.l.} = x^r e^{\alpha x} [P_k(x) \cos \beta x + Q_k(x) \sin \beta x], \quad (23.40)$$

где $P_k(x)$ и $Q_k(x)$ — многочлены (с неопределенными коэффициентами) степени $k = \max(m; n)$;

4) для вычисления неопределенных коэффициентов надо подставить функцию (23.39) (или (23.40)) в уравнение (23.38), сократить его обе части на экспоненту $e^{\alpha x}$ и произвести приравывание коэффициентов в обеих частях при одинаковых $x^s \cos \beta x, x^s \sin \beta x$, а затем решить полученную линейную систему алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов.

Заметим, что если спектральное значение $\lambda = \lambda_*$ является корнем характеристического уравнения (*), то говорят, что в уравнении (23.38) имеет место *резонанс*.

Мы не будем заниматься обоснованием этого алгоритма. Такое обоснование можно найти во многих учебных пособиях по обыкновенным дифференциальным уравнениям (см., например, [1]). Покажем, как он работает на практике. Отметим, что при применении алгоритма 23.2 часто используется следующий принцип суперпозиции.

Принцип суперпозиции. Если правая часть $h(x)$ уравнения (23.11) является линейной комбинацией непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций $h_1(x), \dots, h_m(x)$, т. е.

$$h(x) \equiv \alpha_1 h_1(x) + \dots + \alpha_m h_m(x),$$

то линейная комбинация

$$y \equiv \alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_m y_m(x),$$

решений $y_1(x), \dots, y_m(x)$ уравнений $Ly_1 = h_1(x), \dots, Ly_m = h_m(x)$ является решением уравнения (23.11) (здесь числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ могут быть и комплексными).

Действительно, в силу линейности оператора L из тождеств

$$Ly_1 \equiv h_1(x), \dots, Ly_m \equiv h_m(x)$$

вытекает тождество

$$\begin{aligned} L[\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_m y_m(x)] &\equiv \alpha_1 Ly_1(x) + \dots + \alpha_m Ly_m(x) \equiv \\ &\equiv \alpha_1 h_1(x) + \dots + \alpha_m h_m(x). \end{aligned}$$

Рассмотрим несколько примеров.

ПРИМЕР 23.8. Найти общее решение уравнения

$$Ly \equiv y'' + y = x^2 + 1. \quad (23.41)$$

Так как в правой части (23.41) нет $e^{\alpha x}$, то $\alpha = 0$, и поскольку в правой части нет синусов и косинусов, то $\beta = 0$. Значит, спектральное значение правой части равно $\alpha + i\beta = 0$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет два различных чисто мнимых корня $\lambda_{1,2} = \pm i$ и спектральное значение

$\alpha + i\beta = 0$ отличается от них, поэтому частное решение неоднородного уравнения (23.41) следует искать в виде

$$y = y_{r.n.} = Ax^2 + Bx + C \quad (23.42)$$

(т. е. в таком же виде, что и правая часть уравнения (23.41)). Для вычисления неопределенных коэффициентов A, B, C надо подставить (23.42) в (23.41) и произвести приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях x . Вычислим сначала производные от многочлена (23.42):

$$y' = 2Ax + B, \quad y'' = 2A.$$

Значит, $Ly_{r.n.} \equiv 2A + Ax^2 + Bx + C = x^2 + 1$. Приравнивание коэффициентов дает:

$$\begin{array}{l} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A = 1, \\ B = 0, \\ 2A + C = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow A = 1, B = 0, C = 1 - 2A = -1.$$

Подставляя найденные коэффициенты в (23.42), найдем окончательно частное решение неоднородного уравнения (23.41): $y = y_{r.n.} = x^2 - 1$. Поскольку корни $\lambda_{1,2} = \pm i$ характеристического уравнения (*) различны, то общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $y_{o.o.} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, а значит общее решение исходного уравнения (23.41) запишется в форме $y = y_{o.n.} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 1$.

ПРИМЕР 23.9. Найти общее решение уравнения

$$Ly \equiv y'' + y' = x + 2. \quad (23.43)$$

Найти общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + y' = 0$ не составляет труда, так как здесь корни характеристического уравнения $\lambda^2 + \lambda = 0$ различны: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$. Оно имеет вид $y_{o.o.} = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-1x} = C_1 + C_2 e^{-x}$. Займемся вычислением частного решения неоднородного уравнения (23.43). Поскольку в правой части нет экспоненты $e^{\alpha x}$ и синусов и косинусов, то спектральное значение $\lambda = \alpha + i\beta = 0$. Оно является корнем характеристического уравнения кратности $r = 1$. Согласно п. 3 алгоритма 23.2 частное решение неоднородного уравнения (23.43) следует искать в виде

$$y = y_{r.n.} = x(Ax + B) \equiv Ax^2 + Bx. \quad (23.44)$$

Вычисляя производные $y' = 2Ax + B$, $y'' = 2A$ функции (23.44) и подставляя ее в (23.43), будем иметь

$$2A + 2Ax + B = x + 2.$$

Приравнивая здесь коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем

$$\left. \begin{matrix} x^1 \\ x^0 \end{matrix} \right| \begin{cases} 2A = 1, \\ 2A + B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow A = 1/2, B = 2 - 2A = 1$$

Подставляя A и B в (23.44), найдем частное решение уравнения (23.43) в виде $y_{r.n.} = \frac{1}{2}x^2 + x$, а значит общее решение этого уравнения запишется в форме

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 + x.$$

ПРИМЕР 23.10. Решить уравнение

$$Ly \equiv y'' - 3y' + 2y(x^2 + x)e^{3x}. \quad (23.45)$$

Спектральное значение правой части $\lambda_* = \alpha + i\beta$ равно $\lambda_* = 3$, так как $\alpha = 3$, а синусы и косинусы отсутствуют. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ имеет два различных действительных корня: $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$. Так как спектральное значение $\lambda_* = 3$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения (23.45) следует искать в виде (см. п. 2 алгоритма 23.2):

$$y = y_{r.n.} = e^{3x}(Ax^2 + Bx + C). \quad (23.46)$$

Для составления уравнений относительно неопределенных коэффициентов A , B и C , найдем производные функции (23.46):

$$\begin{aligned} y' &= e^{3x}(3Ax^2 + 3Bx + 3C) + e^{3x}(2Ax + B) = \\ &= e^{3x}(3Ax^2 + 3Bx + 2Ax + 3C + B), \\ y'' &= e^{3x}(9Ax^2 + 9Bx + 6Ax + 9C + 3B) + \\ &+ e^{3x}(6Ax + 3B + 2A) = \end{aligned}$$

$$= e^{3x}(9Ax^2 + 9Bx + 12Ax + 9C + 6B + 2A).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} Ly_{r.n.} &\equiv e^{3x}(9Ax^2 + 9Bx + 12Ax + 9C + 6B + 2A) - \\ &- 3e^{3x}(3Ax^2 + 3Bx + 2Ax + 3C + B) + 2e^{ex}(Ax^2 + Bx + C) \equiv \\ &\equiv (x^2 + x)e^{3x}. \end{aligned}$$

Сокращая здесь экспоненту, получаем тождество

$$2Ax^2 + 2Bx + 6Ax + 2C + 3B + 2A \equiv x^2 + x.$$

Приравнивание коэффициентов дает:

$$\begin{array}{l} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2A = 1, \\ 2B + 6A = 1, \\ 2C + 3B + 2A = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow A = 1/2, B = -1, C = 1.$$

Подставляя A , B и C в (23.46), получаем частное решение в виде $y = y_{r.n.} = e^{3x}(x^2/2 - x + 1)$. При этом общее решение соответствующего однородного уравнения строится по корням $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$ характеристического уравнения следующим образом: $y_{o.o} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$, а значит общее решение неоднородного уравнения (23.45) запишется в виде

$$y = y_{o.n.} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^{3x} \left(\frac{1}{2} x^2 - x + 1 \right)$$

ПРИМЕР 23.11. Построить общее решение уравнения

$$Ly = y'' + y = 2\sin x - 6\cos x + 2e^x \quad (23.47)$$

и найти его интегральную кривую, удовлетворяющую начальным условиям $y(0) = y'(0) = 0$.

Здесь правая часть не является квазиполиномом вида (23.39), поэтому сразу воспользоваться алгоритмом 23.2 нельзя. Разобьем уравнение (23.47) на два уравнения

$$Ly_1 \equiv y_1'' + y_1 = 2e^x, \quad (23.48)$$

$$Ly_2 \equiv y_2'' + y_2 = 2\sin x - 6\cos x, \quad (23.49)$$

к которым можно применить метод подбора. Если будут найдены частные решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ этих уравнений, то, согласно принципу суперпозиции, частное решение исходного уравнения (23.47) будет иметь вид $y_{r.n.} = y_1(x) + y_2(x)$. Займемся поиском частного решения уравнения (23.48).

Спектральное значение $\lambda_* = \alpha + i\beta$ его правой части равно $\lambda_* = 1$, так как в (23.48) отсутствуют синусы и косинусы. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет два различных корня $\lambda_{1,2} = \pm i$. Спектральное значение не совпадает с ними, и поэтому частное решение уравнения (23.48) следует искать в виде (см. п. 2 алгоритма 23.2) $y_1 = Ae^x$. Подставляя это в уравнение (23.48), имеем

$$Ae^x + Ae^x \equiv 2e^x \Leftrightarrow A = 1.$$

Значит, $y_1(x) = e^x$.

Спектральное значение правой части уравнения (23.49) равно $\lambda_* = i$. Оно является корнем кратности $r = 1$ характеристического уравнения, поэтому частное решение уравнения (23.49) следует искать в виде (см. п. 3 алгоритма 23.2):

$$y_2(x) = x(B \sin x + C \cos x).$$

Вычисляя производные

$$y_2'(x) = (B - Cx) \sin x + (C + Bx) \cos x,$$

$$y_2''(x) = -2C \sin x + 2B \cos x - Cx \cos x - Bx \sin x,$$

$$Ly_2(x) = -2C \sin x + 2B \cos x - Cx \cos x -$$

$$- Bx \sin x + xB \sin x + xC \cos x \equiv$$

$$\equiv 2 \sin x - 6 \cos x,$$

или

$$-2C \sin x + 2B \cos x \equiv 2 \sin x - 6 \cos x.$$

Приравнивая здесь коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$, получаем

$$\begin{vmatrix} \sin x \\ \cos x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2C = 2, \\ 2B = -6 \end{vmatrix} \Leftrightarrow C = -1, B = -3.$$

Значит, частное решение уравнения (23.49) имеет вид

$$y_2(x) = x(-3 \sin x - \cos x).$$

Согласно принципу суперпозиции частное решение уравнения (23.47) является суммой частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$, т. е.

$$y_{г.п.}(x) = y_1(x) + y_2(x) = e^x - x(3 \sin x + \cos x).$$

По корням $\lambda_{1,2} = \pm i$ характеристического уравнения (*) строим общее решение соответствующего однородного уравнения $ly = 0$:

$$y_{о.о.}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

и общее решение исходного неоднородного уравнения (23.47):

$$y = y_{о.н.} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^x - x(3 \sin x + \cos x). \quad (23.50)$$

Найдем теперь интегральную кривую, удовлетворяющую начальным условиям $y(0) = y'(0) = 0$. Дифференцируя (23.50), найдем, что

$$\begin{aligned} y'(x) &= -C_1 \sin x + C_2 \cos x + e^x - \\ &- (3 \sin x + \cos x) - x(3 \sin x + \cos x)'. \end{aligned} \quad (23.51)$$

Подчиняя (23.50) и (23.51) начальным условиям $y(0) = y'(0) = 0$, имеем

$$\begin{cases} C_1 + 1 = 0, \\ C_2 + 1 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow C_1 = -1, C_2 = 0.$$

Следовательно, искомая интегральная кривая имеет вид

$$y = y_*(x) = -\cos x + e^x - x(3 \sin x + \cos x).$$

Получаем окончательный ответ:

а) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^x - x(3 \sin x + \cos x)$ — общее решение;

б) $y = -\cos x + e^x - x(3 \sin x + \cos x)$ — искомая интегральная кривая.

Замечание. Частное решение уравнения (23.47) можно вычислить с помощью интеграла

$$y = y_*(x) = \int_0^x \sin(x-s)(2\sin s - 6\cos s + 3e^s)ds$$

(см. результат решения примера (23.7)).

Контрольные вопросы

1. Какие уравнения n -го порядка называются линейными?
2. Что такое линейный дифференциальный оператор n -го порядка? Какими свойствами он обладает?
3. Сформулируйте теорему существования и единственности решения для линейных уравнений высшего порядка. В чем ее отличие от аналогичной теоремы для нелинейных дифференциальных уравнений высшего порядка?
4. Какие функции называются линейно зависимыми и линейно независимыми на отрезке $[a; b]$? Приведите соответствующие примеры.
5. Какое условие является необходимым условием линейной зависимости функции на отрезке $[a; b]$? Почему оно не достаточно? Как можно установить факт линейной независимости функции с помощью определителя Вронского?
6. Сформулируйте необходимые и достаточные условия линейной независимости системы решений линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка?
7. Какими свойствами обладает вронскиан системы решений линейного дифференциального уравнения?
8. Является ли пространство решений линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка линейным пространством? Почему?
9. Что такое фундаментальная система решений? В каком случае она существует? Как строится такая система и является ли она базисом в пространстве решений однородного уравнения?
10. Какова размерность пространства решений однородного дифференциального уравнения n -го порядка?
11. Какова структура общих решений однородного и неоднородного дифференциальных уравнений?
12. Как вычисляется частное решение неоднородного дифференциального уравнения n -го порядка методом вариации произвольных постоянных Лагранжа?
13. Какими свойствами обладает комплексное решение дифференциального уравнения n -го порядка с действительными коэффициентами?
14. Запишите формулу Эйлера для комплексной экспоненты. Как из нее получить формулы для синуса и косинуса комплексного аргумента?

15. Докажите теорему о линейной независимости системы экспонент $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$, а также действительной системы функций $\{e^{\lambda_j x}; e^{\lambda_j x} \cos \beta_j x; e^{\lambda_j x} \sin \beta_j x\}$.

16. В каком случае система функций $e^{\lambda_j x}, x e^{\lambda_j x}, \dots, x^{j-1} e^{\lambda_j x}$ ($j = \overline{1, m}$) линейно независима?

17. Какой многочлен называется характеристическим? Как он строится?

18. Какая связь между корнями характеристического уравнения и решениями дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами?

19. Как строится фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения в случае простых и кратных корней характеристического уравнения? Опишите соответствующий алгоритм.

20. Какая функция называется квазимногочленом? Опишите алгоритм метода подбора частного решения неоднородного уравнения с правой частью в виде квазиполинома.

21. Как можно вычислить частное решение неоднородного уравнения с помощью однопараметрического семейства решений соответствующего однородного уравнения? Покажите это на примере дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

22. Сформулируйте принцип суперпозиции для линейных дифференциальных уравнений. Как им пользоваться? Приведите соответствующий пример.

$$\begin{cases} F_1(t, y, z, y', z') = 0, \\ F_2(t, y, z, y', z') = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, \dots, y_n), \end{cases} \quad (24.1')$$
$$\frac{dy}{dt} = f(t, y). \quad (24.1)$$

Такая форма записи системы уравнений (24.1') называется ее векторной формой. Ею мы и будем пользоваться в дальнейшем.

§ 24.1. ПОНЯТИЯ ОБЩЕГО И ЧАСТНОГО РЕШЕНИЙ. ЗАДАЧА КОШИ И ЕЕ РАЗРЕШИМОСТЬ

Областью определения системы (24.1) называется область определения ее правой части $f(t, y)$, т. е. множество

$$D = \{(t, y) : \text{все функции } f_j(t, y) \text{ имеют смысл, } j = \overline{1, n}\}.$$

Например, областью определения системы

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \sqrt{y_1} + t\sqrt{y_2}, \\ \frac{dy_2}{dt} = \sqrt{y_1 y_2}, \end{cases}$$

является множество

$$D = \{(t, y_1, y_2) : -\infty < t < +\infty, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\}.$$

В левой части системы (24.1) стоит производная вектор-функции $y = \{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$ скалярного аргумента t . В дальнейшем будут встречаться и интегралы от вектор-функции. Поэтому с самого начала разъясним соответствующие понятия.

Производная (любого порядка) вектор-функции скалярного аргумента определяется равенствами:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \{\dot{y}_1(t), \dots, \dot{y}_n(t)\}, \quad \ddot{y}(t) = \{\ddot{y}_1(t), \dots, \ddot{y}_n(t)\}, \dots, \\ y^{(k)}(t) &= \{y_1^{(k)}(t), \dots, y_n^{(k)}(t)\} \end{aligned}$$

(здесь $\dot{y} = \frac{d}{dt} y(t)$), а интеграл — равенством

$$\int_a^b y(t) dt = \left\{ \int_a^b y_1(t) dt, \dots, \int_a^b y_n(t) dt \right\}.$$

Таким образом, чтобы продифференцировать или проинтегрировать вектор-функцию скалярного аргумента,

надо продифференцировать или проинтегрировать каждую компоненту этой функции. Вектор-функция называется непрерывной в точке $t = t_0$ (или на множестве A), если непрерывна в этой точке (или на множестве A) каждая компонента этой функции. Для вектор-функций скалярного аргумента сохраняются обычные правила дифференцирования:

$$а) (x(t) \pm y(t)) = \dot{x}(t) \pm \dot{y}(t),$$

$$б) (\alpha(t)y(t)) = \dot{\alpha}(t)y(t) + \alpha(t)\dot{y}(t) \quad (\alpha(t) — \text{скалярная функция}),$$

$$в) \left(\frac{x(t)}{\alpha(t)} \right) = \frac{\dot{x}(t)\alpha(t) - x(t)\dot{\alpha}(t)}{\alpha^2(t)} \quad (\alpha(t) \neq 0 — \text{скалярная функция}),$$

$$г) (x(t), y(t)) \equiv \left(\sum_{j=1}^n x_j(t)y_j(t) \right) = (\dot{x}(t)y(t)) + (x(t)\dot{y}(t)).$$

Интеграл от вектор-функции обладает свойствами линейности, аддитивности, дифференцируемости по верхнему и нижнему пределам. Например,

$$\frac{d}{dt} \left(\int_a^t y(s) ds \right) = y(s)|_{s=t} = y(t).$$

Имеет место оценка

$$\left\| \int_a^b y(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|y(t)\| dt,$$

$$\text{где } \|y(t)\| = \sum_{j=1}^n (|y_j(t)|^2)^{1/2} \text{ или } \|y(t)\| = \max_{j=1, n} |y_j(t)|.$$

Если производную от матрицы $A(t) \equiv (a_{ij}(t))_1^n$ определить равенством $\dot{A}(t) = (\dot{a}_{ij}(t))_1^n$, то, как нетрудно видеть, будут иметь место формулы

$$(A(t)y(t)) = \dot{A}(t)y(t) + A(t)\dot{y}(t),$$

$A(t)C = \dot{A}(t)C$, (C — постоянная матрица или вектор).

Перейдем к понятию решения системы (24.1). Пусть D — область определения системы (24.1).

Определение 24.1. Решением системы дифференциальных уравнений (24.1) на отрезке $[a; b]$ называется вектор-функция $y(t) = \{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$, обладающая свойствами:

- 1) $(t, y(t)) \in D (\forall t \in [a, b])$;
- 2) вектор-функция $y = y(t)$ дифференцируема на отрезке $[a; b]$;
- 3) при всех $t \in [a, b]$ выполняется тождество

$$\frac{dy(t)}{dt} \equiv f(t, y(t)).$$

Аналогично определяются решения на промежутках (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$ и $[a, +\infty)$, $(-\infty, a]$, $(-\infty, +\infty)$.

Если $y = y(t)$ — решение системы (24.1) на отрезке $[a; b]$, то множество точек $(t, y(t)) \in R^{n+1}$, когда t пробегает отрезок $[a; b]$, образует в R^{n+1} некоторую γ . Эту кривую называют *интегральной кривой* системы (24.1). Пространство R^n переменных $y_1, \dots, y_n$ называют *фазовым пространством*. Проекция интегральной кривой γ в фазовое пространство называется *траекторией* системы уравнений (24.1). Ясно, что по интегральной кривой γ траектория определяется однозначно, но не наоборот. Впредь решение $y = y(t)$ также будем называть интегральной кривой системы (24.1).

Мы знаем, что решение дифференциальных уравнений определяется неоднозначно. Чтобы выделить вполне конкретное решение, надо задать дополнительные условия.

Пусть $(t_0, y_1^*, \dots, y_n^*) \in (t_0, y^*)$ — фиксированная точка в области D . Задача, состоящая в нахождении решения $y = y(t)$ системы (24.1), удовлетворяющего начальному условию $y(t_0) = y^*$, называется *задачей Коши или начальной задачей* для системы (24.1). Ее кратко записывают так:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y^*. \quad (24.2)$$

Ее геометрический смысл состоит в том, чтобы среди всех интегральных кривых системы (24.1) найти ту, кото-

рая проходит через заданную начальную точку (t_0, y^*) (рис. 24.1).

В каком случае задача Коши (24.2) имеет решение? Как и в случае скалярных дифференциальных уравнений это зависит от свойств правой части

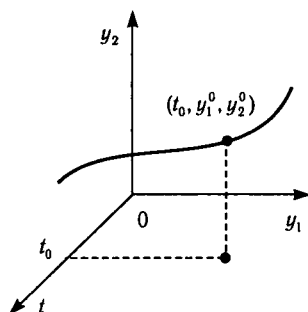


Рис. 24.1

$$f(t, y) \equiv \{f_1(t, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(t, y_1, \dots, y_n)\}.$$

Теорема Коши. Пусть все компоненты $f_j(t, y_1, \dots, y_n)$ правой части $f(t, y)$ и их частные производные $\partial f_j / \partial y_1, \dots, \partial f_j / \partial y_n$ ($j = 1, n$) непрерывны в области $D \subset R^{n+1}$. Тогда какова бы ни была начальная точка $(t_0, y^*) \equiv (t_0, y_1^*, \dots, y_n^*)$, лежащая внутри области D , существует отрезок $[t_0 - h, t_0 + h]$ такой, что задача Коши (24.2) имеет решение на этом отрезке, причем это решение единственно.

Отметим, что эта теорема носит локальный характер: существование решения $y = y(t)$ гарантируется лишь в достаточно малой окрестности точки $t = t_0$ ($h > 0$ — достаточно мало). Кроме того, условия этой теоремы носят достаточный характер. При нарушении этих условий задача (24.2) может иметь или может не иметь решения. При этом, если решение существует, оно может быть не единственным. Например, задача Коши

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \sqrt{y_1}, & y_1(0) = 0, \\ \dot{y}_2 = y_1 y_2, & y_2(0) = 0 \end{cases}$$

имеет два решения: $(y_1, y_2) \equiv (0, 0)$ и $(y_1, y_2) = \{y_1(t), 0\}$, где $y_1(t)$ — функция вида

$$y_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} t^2, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

ПРИМЕР 24.1. Показать, что вектор-функция

$$y \equiv \{y_1(t), y_2(t)\} = \left\{ C_2 e^{C_1 t^2/2}, \frac{C_1}{C_2} t e^{-C_1 t^2/2} \right\} \quad (24.4)$$

является общим решением системы

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1^2 y_2, \\ \dot{y}_2 + t^{-1} y_2 - y_1 y_2^2. \end{cases} \quad (24.5)$$

Вычислим производные от компонент вектор-функции (24.4)

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= (C_2 e^{C_1 t^2/2})' = C_2 e^{C_1 t^2/2} t C_1 = C_1 C_2 e^{C_1 t^2/2} t, \\ \dot{y}_2 &= \left(\frac{C_1}{C_2} t e^{-C_1 t^2/2} \right)' = \frac{C_1}{C_2} \left[e^{-C_1 t^2/2} + t e^{-C_1 t^2/2} (-C_1 t) \right] = \\ &= \frac{C_1}{C_2} e^{-C_1 t^2/2} (1 - C_1 t^2). \end{aligned}$$

Вычислим правые части системы (24.5):

$$\begin{aligned} y_1^2 y_2 &= C_2^2 e^{C_1 t^2} \cdot \frac{C_1}{C_2} t e^{-C_1 t^2/2} = C_1 C_2 t e^{C_1 t^2/2}, \quad t^{-1} y_2 - y_1 y_2^2 = \\ &= t^{-1} \frac{C_1}{C_2} t e^{-C_1 t^2/2} - C_2 e^{C_1 t^2/2} \cdot \left(\frac{C_1}{C_2} \right)^2 t^2 e^{-C_1 t^2} = \frac{C_1}{C_2} e^{-C_1 t^2/2} (1 - C_1 t^2). \end{aligned}$$

Сравнивая найденные значения производных с вычисленными правыми частями, видим, что при подстановке вектор-функции (24.4) в систему (24.5) получаются тождества. Это означает, что вектор-функция (24.4) является решением системы (24.5) на любом отрезке $[a; b]$, не содержащем точку $t = 0$.

Рассмотрим теперь произвольную точку $(t_0, y_1^0, y_2^0) \in D$, взятую из области $D = \{(t, y) : t \neq 0, y_1, y_2 \in R\}$ определения системы (24.5). Покажем, что алгебраическая система уравнений (24.3) имеет решение. В нашем случае (24.3) приобретает вид

$$C_2 e^{C_1 t_0^2/2} = y_1^*,$$

$$\frac{C_1}{C_2} t_0 e^{-C_1 t_0^2/2} = y_2^*.$$

Умножая уравнения друг на друга, найдем, что

$$C_1 t_0 = y_1^* y_2^* \Leftrightarrow C_1 = C_1^* = \frac{y_1^* y_2^*}{t_0}.$$

Подставляя это в первое уравнение, имеем

$$C_2 = C_2^* = y_1^* e^{-C_1^{*2}/2} = y_1^* e^{-(y_1^* y_2^*/t_0) t_0^2/2} = y_1^* \cdot e^{-t_0 y_1^* y_2^*/2}.$$

Таким образом, вектор-функция $y(t) = \{C_2^* e^{C_1^{*2} t^2/2}, C_1^* C_2^{*-1} t e^{C_1^{*2} t^2/2}\}$ является решением системы (24.5) с начальным условием $y_1(t_0) = y_1^*$, $y_2(t_0) = y_2^*$. Это означает, что вектор-функция (24.4) является общим решением системы (24.5).

Общий и частный интегралы системы (24.1) определяются так же, как и в скалярном случае: это есть общее и частное решения системы (24.1), заданные соотношениями $F(t, y, C) = 0$ и $\Phi(t, y) = 0$ соответственно, из которых общее и частное решения определяются как функции, заданные неявно.

§ 24.2. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Одним из методов решения систем дифференциальных уравнений является метод исключения, суть которого заключается в том, чтобы путем дифференцирования уравнений свести данную систему к одному дифференциальному уравнению высшего порядка. Рассмотрим этот метод на примерах.

ПРИМЕР 24.2. Решить систему уравнений

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = -y_1. \quad (24.6)$$

Дифференцируя первое уравнение системы (24.6) по t , получаем уравнение $\ddot{y}_1 = \dot{y}_2$. Производную $\dot{y}_2$ заменяем на $-y_1$, используя второе уравнение (24.6). В результате имеем уравнение

$$\ddot{y}_1 = -y_1 \Leftrightarrow \ddot{y}_1 + y_1 = 0$$

второго порядка относительно одной функции $y_1 = y_1(t)$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет два различных чисто мнимых корня $\lambda_{1,2} = \pm i$. Значит, общее решение имеет вид $y_1 = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. Поскольку $y_2 = \dot{y}_1$ (см. первое уравнение (24.6)), то вторая компонента решения системы (24.6) вычисляется по формуле $y_2 = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$.

Таким образом,

$$y = \{C_1 \cos t + C_2 \sin t, -C_1 \sin t + C_2 \cos t\}.$$

ПРИМЕР 24.3. Решить систему уравнений

$$\dot{x} = y^2 + \sin t, \quad \dot{y} = \frac{1x}{2y}. \quad (24.7)$$

Дифференцируя первое уравнение системы (24.7), будем иметь $\ddot{x} = 2y\dot{y} + \cos t$. Из второго уравнения (24.7) находим $2y\dot{y} = x$ и подставляем в последнее уравнение. В результате будем иметь

$$\ddot{x} = x + \cos t \Leftrightarrow \ddot{x} - x = \cos t.$$

Это линейное уравнение второго порядка. Его общее решение вычисляем, например, методом подбора. Оно будет иметь вид

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2} \cos t.$$

Из первого уравнения системы (24.7) находим

$$y^2 = \dot{x} - \sin t = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - \frac{1}{2} \sin t.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2} \cos t, \\ y^2 = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - \frac{1}{2} \sin t. \end{cases}$$

Заметим, что в последнем примере решение записано в виде интеграла.

Вторым способом решения систем уравнений является метод интегрируемых комбинаций. Суть этого метода состоит в том, чтобы подходящими преобразованиями привести исходную систему к одному дифференциальному уравнению относительно некоторой функции компонент данной системы. Если это уравнение легко интегрируется, то говорят, что оно является интегрируемой комбинацией данной системы. Получив достаточное число интегрируемых комбинаций, а затем рассмотрев их совместно, можно найти решение данной системы.

ПРИМЕР 24.4. Решить систему уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x. \quad (24.8)$$

Эту систему можно было бы решить методом исключения. Однако попробуем найти ее решение методом интегрируемых комбинаций. Складывая почленно оба уравнения (24.8), получаем интегрируемую комбинацию

$$\frac{d(x+y)}{dt} = x+y \Leftrightarrow \frac{d(x+y)}{x+y} = dt,$$

откуда вычисляем $x+y = C_1 e^t$. Вычитая из первого уравнения системы (24.8) ее второе уравнение, получаем еще одну интегрируемую комбинацию

$$\frac{d(x-y)}{dt} = x-y \Leftrightarrow \frac{d(x-y)}{x-y} = dt,$$

из которой находим $x-y = C_2 e^{-t}$. Итак, получено два алгебраических уравнения

$$x+y = C_1 e^t,$$

$$x-y = C_2 e^{-t},$$

из которых легко находим решение системы (24.8):

Соотношение $\Phi(t, y_1, \dots, y_n) = C$, где Φ — скалярная функция, C — постоянная, называется первым интегралом системы (24.1), если при подстановке в него решения $y_1 = y_1(t), \dots, y_n = y_n(t)$ оно обращается в тождество. Часто первым интегралом системы (24.1) называют скалярную функцию $\Phi(t, y_1, \dots, y_n)$, сохраняющую постоянное значение на решениях $y = y(t)$ системы (24.1).

[illegible]
$$\Delta = \left| \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_j} \right| \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1}, & \dots, & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_1}, & \dots, & \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

не равен нулю в области $Q \subset D$, то (24.9) задают общий интеграл (в Q) системы (24.1). Это означает, что система алгебраических уравнений (24.9) задает общее решение дифференциальной системы (24.1) в неявной форме. Заметим, что определитель Δ называется *якобианом* системы функций $\Phi_1, \dots, \Phi_n$. Если якобиан $\Delta = |\partial \Phi_i / \partial y_j|$ не равен нулю в области Q , то система функций $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ будет функционально независимой в Q . В этом случае система уравнений (24.9) может быть разрешена относительно $y_1 = y_1(t), \dots, y_n = y_n(t)$, причем однозначно.

§ 24.3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Если в дифференциальной системе (24.1) правая часть $f(t, y)$ линейна по y , то соответствующая система уравнений называется линейной системой дифференциальных уравнений. Такая система имеет вид

[illegible]

где $a_{ij}(t)$ и $b_j(t)$ — известные функции; $y_j = y_j(t)$ — неизвестные функции ($i, j = \overline{1, n}$). Пользуясь векторно-матричными обозначениями, систему (24.10) можно записать в следующей компактной форме:

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + b(t), \quad (24.11)$$

где

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_n \end{pmatrix}, b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}, A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) \dots a_{1n}(t) \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1}(t) \dots a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

Мы будем пользоваться преимущественно записью (24.11). При этом число компонент неизвестной вектор-функции $y = y(t)$ (или размерность матрицы $A(t)$) называется *порядком* системы (24.11). Таким образом, (24.11) — дифференциальная система n -го порядка.

Вектор-функция $b(t)$ называется неоднородностью системы (24.11). Если $b(t) \equiv 0$ (т. е. если все компоненты $b_1(t) \equiv \dots \equiv b_n(t) \equiv 0$), то система (24.11) называется *однородной*; в противном случае (т. е. если $b(t) \neq 0$) система (24.11) называется неоднородной системой. Если в (24.11) отбросить неоднородность, то получим соответствующую ей однородную систему $\dot{z} = A(t)x$.

Оператор $L \equiv \frac{d}{dt} - A(t)$ позволяет записать систему (24.11) кратко так: $Ly = b(t)$. Изучим свойства этого оператора. Будем обозначать через $C_n^k[a; b]$ пространство n -мерных вектор-функций $y(t) = \{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$, непрерывных на отрезке $[a, b]$ вместе с производными $y(t), \dots, y^{(k)}(t)$ до k -го порядка включительно (число индекс n в $C_n^k[a; b]$ опускают, если из контекста ясно, о каких вектор-функциях идет речь). Имеют место следующие утверждения.

1°) Если матрица $A(t)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ (т. е. если все ее элементы $a_{ij}(t)$ непрерывны на $[a; b]$), то оператор L действует из пространства $C_n^1[a; b]$ в пространство $C_n[a; b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ вектор-функций:

$$L : C_n^1[a, b] \rightarrow C_n[a, b].$$

2°) Оператор L линеен, т. е.

$$L(C_1 y(t) + C_2 z(t)) = C_1 Ly(t) + C_2 Lz(t)$$

для произвольных чисел C_1 и C_2 и произвольных элементов $y(t)$ и $z(t)$ пространства $C_n^1[a, b]$.

Первое свойство вытекает из того, что при дифференцировании гладкость функции понижается на единицу, а второе свойство вытекает из того, что операторы $\frac{d}{dt}$ и $(-A(t))$ являются линейными операторами, а значит линейным оператором является и их сумма $L = \frac{d}{dt} + (-A(t))$.

Если через Y_0 обозначить пространство решений однородной системы уравнений $Ly \equiv \dot{y} - A(t)y = 0$ с непрерывной матрицей $A(t)$, то из свойств 1° и 2° сразу же вытекает, что Y_0 — линейное пространство. Как и в случае скалярных дифференциальных уравнений, нас будет интересоваться, какова размерность пространства Y_0 и какие системы функций образуют в нем базис. Мы ответим на эти вопросы, если научимся выделять в Y_0 максимальную линейно независимую систему элементов.

§ 24.4. ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть $(t_0, y^*) = (t_0, y_1^*, \dots, y_n^*)$ — фиксированный постоянный вектор в R^{n+1} . Рассмотрим начальную задачу

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + b(t), \quad y(t_0) = y^*. \quad (24.12)$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 24.1. *Если в системе (24.12) матрица $A(t)$ и вектор-функция $b(t)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то какова бы ни была начальная точка $(t_0, y^*) \in R^{n+1}$, задача Коши (24.12) имеет решение $y = y(t)$. Это решение единственно и определено на отрезке $[a, b]$.*

Таким образом, в случае линейной системы дифференциальных уравнений разрешимость начальной задачи глобальная: решение существует там, где непрерывна правая часть дифференциальной системы. В случае нелинейных систем это не так.

ПРИМЕР 24.5. Показать, что задача Коши

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1^2 y_2, & y_1(0) = y_1^*, \\ \dot{y}_2 = 0, & y_2(0) = 1 \end{cases} \quad (24.13)$$

с непрерывными (при всех t, y_1, y_2) правыми частями не имеет решение, определенное при всех $t \in (-\infty, +\infty)$, если $y_1^* \neq 0$.

Из второго уравнения (24.13) находим, что $y_2 = y_2(t) \equiv 1$. Поэтому первое уравнение приобретает вид

$$\dot{y}_1 = y_1^2, \quad y_1(0) = y_1^*.$$

Разделяя здесь переменные, будем иметь

$$\frac{dy_1}{y_1^2} = dt, \quad \int_{y_1^*}^{y_1} \frac{dy_1}{y_1^2} = \int_0^t dt \Leftrightarrow -\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_1^*} = t \Leftrightarrow y_1 = \frac{y_1^*}{1 - y_1^* t}.$$

Итак, задача Коши (24.13) имеет следующее решение:

$$y = \{y_1, y_2\} = \{y_1^*(1 - y_1^*t)^{-1}, 1\}. \quad (24.14)$$

Это решение единственно, так как выполнены все условия теоремы Коши. Первая компонента решения разрывна при $t = y_1^{\circ -1} (y_1^{\circ} \neq 0)$, поэтому каково бы ни было начальное значение $y_1^{\circ} \neq 0$, решение (24.14) не может существовать на всей оси $-\infty < t < +\infty$, так как оно всегда разрывно в точке $t = \frac{1}{y_1^{\circ}}$.

§ 24.5. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И ЛИНЕЙНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ СИСТЕМЫ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ И РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Эти понятия встречались при изучении скалярных дифференциальных уравнений. На вектор-функции они обобщаются следующим образом.

Определение 24.3. Система вектор-функций

$$y_1(t) = \{y_{11}(t), \dots, y_{n_1}(t)\}, \dots, y_n(t) = \{y_{1n}(t), \dots, y_{nn}(t)\}$$

называется линейно зависимой на отрезке $[a, b]$, если существуют числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, не равные нулю одновременно, такие, что для всех $t \in [a, b]$ имеет место тождество

$$\alpha_1 y_1(t) + \dots + \alpha_n y_n(t) \equiv 0. \quad (24.15)$$

Если же тождество (24.15), где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — числа, имеет место тогда и только тогда, когда все $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, то система вектор-функций $y_1(t), \dots, y_n(t)$ называется линейно независимой на отрезке $[a, b]$.

Заметим, что векторное тождество (24.15) эквивалентно n скалярным тождествам

[illegible]

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_{11}(t) \dots y_{1n}(t) \\ \dots \dots \dots \\ y_{n1}(t) \dots y_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (24.16)$$

Определение 24.4. Определитель

$$W(t) \equiv W[y_1(t), \dots, y_n(t)] = \det(y_1(t), \dots, y_n(t)) = \begin{vmatrix} y_{11}(t) \dots y_{1n}(t) \\ \dots \dots \dots \\ y_{n1}(t) \dots y_{nn}(t) \end{vmatrix},$$

столбцами которого являются вектор-функции $y_1(t), \dots, y_n(t)$, называется определителем Вронского (или вронскианом) системы вектор-функций $y_1(t), \dots, y_n(t)$.

Теорема 24.2 (необходимое условие линейной зависимости). Если система вектор-функций $y_1(t), \dots, y_n(t)$ линейно зависима на отрезке $[a, b]$, то их вронскиан $W(t) \equiv W[y_1(t), \dots, y_n(t)]$ тождественно обращается в нуль на этом отрезке, т. е. $W(t) \equiv 0 (\forall t \in [a, b])$.

Доказательство. Так как вектор-функции $y_1(t), \dots, y_n(t)$ линейно зависимы на отрезке $[a, b]$, то существуют числа $\alpha_1 \dots \alpha_n$, не равные нулю одновременно, такие, что имеет место тождество (24.15). Но это означает, что эквивалентная им линейная система (24.16) алгебраических уравнений имеет при всех $t \in [a, b]$ нетривиальное решение $(\alpha_1 \dots \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$. Это возможно лишь в том случае, когда определитель системы (24.16) обращается в нуль при всех $t \in [a, b]$. Остается заметить, что указанный определитель совпадает с вронскианом системы функций $y_1(t), \dots, y_n(t)$. Теорема доказана.

Следствие 24.1. Если вронскиан $W(t) \equiv W[y_1(t), \dots, y_n(t)]$ не обращается в нуль хотя бы в одной точке $t = t_0 \in [a, b]$, то система вектор-функций $y_1(t), \dots, y_n(t)$ линейно независима на отрезке $[a, b]$ (если, конечно, она имеет смысл на этом отрезке).

Как и в скалярном случае, из тождества $W[y_1(t), \dots, y_n(t)] \equiv 0$ еще не следует, что система вектор-функций $y_1(t), \dots, y_n(t)$ линейно зависима на отрезке $[a, b]$. Например, вектор-функции

$$y_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \quad y_2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

линейно независимы на любом отрезке $[a, b]$ (докажите это!), а их вронскиан

$$W(t) = \begin{vmatrix} t & t^2 \\ t & t^2 \end{vmatrix}$$

тождественно равен нулю на отрезке $[a, b]$. Однако для системы решений однородной системы

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y \quad (24.17)$$

с непрерывной на отрезке $[a, b]$ матрицей теорему 24.2 можно обратить.

Теорема 24.3. Пусть $y_1(t), \dots, y_n(t)$ — система решений однородной дифференциальной системы (24.17) с непрерывной на отрезке $[a, b]$ матрицей $A(t)$. Тогда имеют место следующие утверждения:

1) решения $y_1(t), \dots, y_n(t)$ линейно независимы на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда их вронскиан $W(t) \equiv W[y_1(t), \dots, y_n(t)]$ не обращается в нуль ни в одной точке отрезка $[a, b]$;

2) решения $y_1(t), \dots, y_n(t)$ линейно зависимы на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда их вронскиан $W(t) \equiv W[y_1(t), \dots, y_n(t)]$ тождественно равен нулю на отрезке $[a, b]$.

Докажем, например, утверждение 1). Достаточность его очевидна, так как если $W(t) \neq 0$ хотя бы в одной точке $t = t_0$ отрезка $[a, b]$, то из следствия 24.1 вытекает, что функции $y_1(t), \dots, y_n(t)$ линейно независимы на отрезке $[a, b]$. Докажем необходимость.

Пусть решения $y_1(t), \dots, y_n(t)$ системы (24.17) линейно независимы на отрезке $[a, b]$. Предположим, что существует точка $t = t_0 \in [a, b]$ такая, что $W(t_0) = 0$. Отсюда следует, что столбцы $y_1(t_0), \dots, y_n(t_0)$ определителя $W(t_0)$ линейно зависимы, т. е. существуют числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, не равные нулю одновременно, такие что

$$\alpha_1 y_1(t_0) + \dots + \alpha_n y_n(t_0) = 0. \quad (24.18)$$

Рассмотрим вектор-функцию $\varphi(t) = \alpha_1 y_1(t) + \dots + \alpha_n y_n(t)$. В силу линейности пространства Y_0 решений однородной системы (24.17) эта функция является решением указанной дифференциальной системы. Из (24.18) следует, что она удовлетворяет начальному условию $\varphi(t_0) = 0$. Но такому же начальному условию удовлетворяет и тривиальное решение $y = y(t) \equiv 0$ системы (24.17). В силу единственности решения вектор-функции $y \equiv 0$ и $y = \varphi(t)$ совпадают на отрезке $[a, b]$, т. е. $\varphi(t) \equiv 0 (\forall t \in [a, b])$. Следовательно,

$$\alpha_1 y_1(t) + \dots + \alpha_n y_n(t) \equiv 0 \quad (\forall t \in [a, b]).$$

Поскольку здесь числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ не равны нулю одновременно, то это означает, что решения $y_1(t), \dots, y_n(t)$ линейно зависимы на отрезке $[a, b]$, чего не может быть. Значит, равенство $W(t_0) = 0$ ложно, поэтому $W(t) \neq 0$ при всех $t \in [a, b]$. Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекают следующие свойства вронскиана $W(t)$ системы решений $y_1(t), \dots, y_n(t)$ однородной дифференциальной системы (24.17) с непрерывной на отрезке $[a, b]$ матрицей $A(t)$:

3°) если вронскиан $W(t)$ обращается в нуль хотя бы в одной точке $t = t_0$ отрезка $[a, b]$, то $W(t) \equiv 0 (\forall t \in [a, b])$;

4°) если вронскиан $W(t)$ не равен нулю хотя бы в одной точке $t = t_0$ отрезка $[a, b]$, то он не равен нулю на всем отрезке $[a, b]$.

Эти свойства становятся очевидными, если воспользоваться формулой Лиувилля

$$W[y_1(t), \dots, y_n(t)] = W[y_1(t_0), \dots, y_n(t_0)] e^{\int_{t_0}^t \text{Sp} A(s) ds},$$

где $y_1(t), \dots, y_n(t)$ — решения однородной системы (24.17) с непрерывной на отрезке $[a, b]$ матрицей $A(t)$, а $t = t_0$ — произвольная фиксированная точка этого отрезка. Через $\text{Sp} A(t)$ обозначен след матрицы $A(t)$, т. е. сумма всех ее элементов $a_{ii}(t)$, стоящих на главной диагонали: $\text{Sp} A(t) \equiv a_{11}(t) + \dots + a_{nn}(t)$.

§ 24.6. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТРИЦА РЕШЕНИЙ И СТРУКТУРА ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим однородную систему (24.17). Пусть она имеет порядок n . Введем следующее важное понятие.

Определение 24.5. Матрица

$$\Phi(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t)), \quad (24.19)$$

столбцами которой являются n линейно независимых на отрезке $[a, b]$ решений $y_1(t), \dots, y_n(t)$ системы (24.17), называется *фундаментальной матрицей решений системы* (24.17) (на отрезке $[a, b]$).

Заметим, что поскольку каждый столбец $y_j(t)$ матрицы $\Phi(t)$ удовлетворяет системе (24.17), то фундаментальная матрица решений удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t) \Leftrightarrow (\dot{y}_1(t), \dots, \dot{y}_n(t)) = A(t)(y_1(t), \dots, y_n(t)), \quad (24.20)$$

которое эквивалентно n векторным уравнениям

$$\dot{y}_1(t) = A(t)y_1(t), \dots, \dot{y}_n(t) = A(t)y_n(t).$$

С помощью фундаментальной матрицы решений можно записать общее решение однородной системы (24.17). Сначала докажем следующее утверждение.

Теорема 24.4. *Для любой однородной системы (24.17) с непрерывной на отрезке $[a, b]$ матрицей $A(t)$ существуют (и даже бесчисленное множество) фундаментальные матрицы решений $\Phi(t)$.*

Доказательство. Пусть $F = (f_1, \dots, f_n)$ — произвольная постоянная матрица с $\det F \neq 0$. Возьмем в качестве начальных векторов столбцы f_j этой матрицы и рассмотрим n задач Коши:

$$\dot{y} = A(t)y, y(t_0) = f_1; \dots; \dot{y} = A(t)y, y(t_0) = f_n, \quad (24.21)$$

где t_0 — произвольная фиксированная точка отрезка $[a, b]$. Так как матрица $A(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то зада-

чи (24.21) имеют решения $y = y_1(t), \dots, y = y_n(t)$ на отрезке $[a, b]$ и эти решения единственны (см. теорему 24.1). Составим из этих решений матрицу (24.19). Она является фундаментальной матрицей решений (на отрезке $[a, b]$) однородной дифференциальной системы (24.17). Действительно, каждый ее столбец является решением системы (24.17) (по построению задач Коши (24.21)) и

$$\det \Phi(t_0) = \det(y_1(t_0), \dots, y_n(t_0)) = \det(f_1, \dots, f_n) = \det F \neq 0$$

(в силу выбора матрицы F). Значит, столбцы матрицы $\Phi(t)$ линейно независимы на отрезке $[a, b]$ (см. следствие 24.1). Теорема доказана.

Теорема 24.5. Пусть в однородной дифференциальной системе (24.17) матрица $A(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда ее общее решение имеет вид

$$y = y_{\text{о.о.}}(t) = \Phi(t)c \equiv c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t), \quad (24.22)$$

где $\Phi(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ — фундаментальная (на отрезке $[a, b]$) матрица решений системы (24.17), а $c = \{c_1, \dots, c_n\}$ — произвольный постоянный вектор.

Доказательство. Дифференцируя (24.22) по t и, учитывая, что матрица $\Phi(t)$ удовлетворяет уравнению $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$, будем иметь

$$\dot{y}(t) = \Phi(t)\dot{c} \equiv A(t)\Phi(t)c \equiv A(t)y(t),$$

т. е. вектор-функция (24.22), является решением системы (24.17) при любом постоянном векторе $c = \{c_1, \dots, c_n\}$. Если теперь $\dot{y} = A(t)y$, $y(t_0) = y^*$ — произвольная задача Коши для системы (23.17) ($t_0 \in [a, b]$, $y^* \in R^n$), то подчиняя функцию (24.22) начальному условию $y(t_0) = y^*$ найдем, что

$$\Phi(t_0)c = y^* \Leftrightarrow c = c^* = \Phi^{-1}(t_0)y^*,$$

а значит вектор-функция (24.22), где $c = \Phi^{-1}(t_0)y^*$ удовлетворяет указанной задаче Коши. Следовательно, (24.22) — общее решение системы (24.17). Теорема доказана.

Пусть $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ — две фундаментальные матрицы решений дифференциальной системы (24.17). Как связаны

они между собой? Связь эта очень проста и описывается следующим утверждением.

5°) Если $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ — две фундаментальные (на отрезке $[a, b]$) матрицы решений однородной системы (24.17) с непрерывной на отрезке $[a, b]$ матрицей $A(t)$, то существует постоянная матрица M такая, что $\Psi(t) = \Phi(t)M$. При этом $\det M \neq 0$.

Действительно, в силу теоремы 24.5 каждый столбец $\psi(t)$ матрицы $\Psi(t)$, являясь решением системы (24.17), имеет вид $\psi_j(t) = \Phi(t)m_j$, где $m_j = \{m_{1j}, \dots, m_{nj}\}$ — некоторый постоянный вектор. Поэтому матрица $\Psi(t)$ может быть записана в форме $\Psi(t) = \Phi(t)(m_1, \dots, m_n) = \Phi(t)M$. Матрица M не вырождена, так как если бы $\det M = 0$, то $\det \Psi(t) = \det \Phi(t) \det M = 0$, чего не может быть в силу фундаментальности матрицы $\Psi(t)$.

§ 24.7. СТРУКТУРА ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим теперь неоднородную дифференциальную систему

$$Ly \equiv \frac{dy}{dt} - A(t)y = b(t). \quad (24.23)$$

Теорема 24.6. Пусть в системе (24.23) матрица $A(t)$ и вектор-функция $b(t)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица решений соответствующей однородной системы $Lz = 0$. Тогда общее решение неоднородной дифференциальной системы (24.23) имеет вид

$$y = y_{\text{о.н.}}(t) = \Phi(t)c + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds, \quad (24.24)$$

где $c = (c_1, \dots, c_n)$ — произвольный постоянный вектор, $t = t_0$ — произвольная (фиксированная) точка отрезка $[a, b]$.

Доказательство. Применяя к (24.24) оператор L , учитывая его линейность и тот факт, что $\Phi(t)c$ — общее решение соответствующей однородной системы $Lz = 0$, будем иметь

$$\begin{aligned} Ly &\equiv L(\Phi(t)c) + L\left(\Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds\right) \equiv \\ &\equiv L\left(\Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds\right) \end{aligned} \quad (24.25)$$

Вычислим теперь

$$\begin{aligned} L\left(\Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds\right) &= \frac{d}{dt}\left(\Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds\right) - \\ &- A(t)\Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds = \dot{\Phi}(t)\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)b(t) - \\ &- A(t)\Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds = b(t) + \Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds - \\ &- A(t)\Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\dot{\Phi}(t) \equiv A(t)\Phi(t)$, получаем из (24.25) тождество

$$Ly = b(t) + A(t)\Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds - A(t)\Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds \equiv b(t),$$

которое показывает, что вектор-функция (24.24) является решением неоднородной системы (24.23) при любом постоянном векторе c .

Если теперь $Ly = b(t)$, $y(t_0) = y^*$ — произвольная задача Коши для системы (24.23), то подчиняя функцию (24.24) начальному значению $y(t_0) = y^*$, получаем $\Phi(t_0)c = y^*$, откуда найдем $c = c^* = \Phi^{-1}(t_0)y^*$. Следовательно, вектор-функция (24.24), где $c = \Phi^{-1}(t_0)y^*$, является решением указанной задачи Коши. Это означает, что (24.24) —

общее решение дифференциальной системы (24.23). Теорема доказана.

Следствие 24.2. Решением задачи Коши

$$Ly \equiv \frac{dy}{dt} - A(t)y = b(t), \quad y(t_0) = y^* \quad (24.26)$$

(с непрерывными на отрезке $[a, b]$ матрицей $A(t)$ и неоднородностью $b(t)$) является вектор-функция

$$y = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)y^* + \Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds, \quad (24.27)$$

где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица решений соответствующей однородной системы $Lz = 0, t_0 \in [a, b]$.

Это вытекает из заключительной части доказательства теоремы 24.6. Заметим, что формулу (24.27) называют *формулой Коши* решения начальной задачи (24.26) для неоднородной дифференциальной системы (24.23).

ПРИМЕР 24.6. Найти общее решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -y + 1 \end{cases} \quad (24.28)$$

Построим сначала фундаментальную матрицу решений соответствующей однородной системы $\dot{y} = z, \dot{z} = -y$. Применяя метод исключения (см. разд. 24.2), приведем эту систему (дифференцированием по t первого уравнения) к скалярному уравнению второго порядка:

$$\ddot{y} = -1 \Leftrightarrow \ddot{y} + y = 0.$$

Общее решение этого уравнения (см. пример 24.3) имеет вид

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Учитывая, что $z = \dot{y}$, получаем общее решение однородной системы $\dot{y} = z, \dot{z} = -y$:

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ -C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Стоящая здесь матрица

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

является фундаментальной матрицей решений для однородной системы $\dot{y} = z, \dot{z} = -y$ проверьте это, используя определение 24.5!). По формуле Коши (24.27) вычисляем общее решение системы (24.28):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds \right] = \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds \right] = \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \end{pmatrix} ds \right] = \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t - 1 \\ \sin t \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Теперь, когда изучена структура общего решения линейной дифференциальной системы, можно вычислить размерность пространства Y_0 решений однородной системы (24.17) и выделить в нем базис.

Следствие 24.3. Пространство Y_0 решений однородной системы (24.17) с непрерывной на отрезке $[a, b]$ матрицей $A(t)$ является подпространством пространства $C_n^1[a, b]$ размерности n (где n — размерность (порядок) системы (24.17)). В качестве базиса пространства Y_0 можно взять любые n линейно независимых решений системы (24.17) (или n столбцов любой ее фундаментальной матрицы решений $\Phi(t)$).

Заметим, что пространство решений неоднородной системы Y не является линейным пространством, если $b(t) \neq 0$. Оно получается из пространства Y_0 решений однородной системы (23.17) сдвигом на вектор $y_{r,n}(t)$, являющийся частным решением неоднородной системы (24.23), т. е. $Y = y_{r,n}(t) + Y_0$.

§ 24.8. ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННОЙ МАТРИЦЕЙ. МЕТОД ЭЙЛЕРА

Формула Коши (24.27) позволяет вычислить общее решение системы (24.23), если известна фундаментальная матрица решений $\Phi(t)$ соответствующей однородной системы (24.17). Как и в случае скалярных уравнений, в которых роль фундаментальной матрицы играла фундаментальная система решений, построение матрицы $\Phi(t)$ представляет серьезные трудности и не всегда осуществимо. Однако если в системе (24.23) матрица $A(t) \equiv A$ постоянна, то это можно всегда сделать. Но и в этом случае вычислительные трудности значительны, особенно если матрица A имеет кратные собственные значения. Поэтому здесь приводится алгоритм построения фундаментальной матрицы в случае простых корней характеристического уравнения. Напомним соответствующие понятия.

Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ — постоянная матрица порядка n .

Определение 24.6. Вектор $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ называется *собственным вектором матрицы A* , соответствующим собственному значению λ_0 , если

$$а) \ x \neq 0; \ б) \ Ax = \lambda_0 x \Leftrightarrow (A - \lambda_0 E)x = 0. \quad (24.29)$$

Здесь $E = \text{diag}(1, \dots, 1)$ — единичная матрица размерности $n \times n$.

Поскольку в этом случае однородная алгебраическая система (24.29) имеет нетривиальное решение $x \neq 0$, то $\det(A - \lambda_0 E) = 0$. Очевидно, верно и обратное: если $\det(A - \lambda_0 E) = 0$, то система (24.29) имеет нетривиальное решение $x \neq 0$.

Определение 24.7. Уравнение

$$\det(A - \lambda_0 E) = 0 \quad (24.30)$$

называется *характеристическим уравнением матрицы A* (или *характеристическим уравнением дифференциальной системы (24.17)*), а если его корни $\lambda = \lambda_j$ — *собственными*

значениями этой матрицы. При этом множество $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ называется *спектром* матрицы A .

По каждому собственному значению $\lambda = \lambda_j$ можно вычислить соответствующий ему собственный вектор $x = x^j$ (возможно, не единственный).

Определение 24.8. Спектр $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ матрицы A называется *простым*, если он состоит из n различных собственных значений (т. е. $m = n$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$).

В противном случае говорят, спектр $\sigma(A)$ матрицы A *кратный*.

Нетрудно доказать следующие утверждения.

6°) Двум различным собственным значениям λ_1 и λ_2 матрицы A соответствуют два линейно независимых собственных вектора x^1 и x^2 .

7°) Если спектр $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ матрицы A простой, то совокупность всех собственных векторов $x^1, \dots, x^n$ этой матрицы образует базис в R^n (или в пространстве C^n n -мерных комплексных векторов). Если $T = (x^1, \dots, x^n)$ — матрица из собственных векторов x^j матрицы A , то имеет место равенство

$$T^{-1}AT = \Lambda, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (24.31)$$

(в этом случае говорят, что матрица A *подобна* диагональной матрице Λ , а матрицу T называют *преобразующей матрицей*).

Рассмотрим теперь линейную однородную систему дифференциальных уравнений

$$\mathfrak{L}y \equiv \frac{dy}{dt} - Ay = 0 \quad (24.32)$$

с постоянной матрицей A . Связь спектра матрицы A с решениями этой системы устанавливается следующей теоремой.

Теорема Эйлера. Для того чтобы ненулевая вектор-функция $y = xe^{\lambda_0 t} \equiv \{x_1 e^{\lambda_0 t}, \dots, x_n e^{\lambda_0 t}\}$ была решением системы (24.32), необходимо и достаточно, чтобы

$x = \{x_1, \dots, x_n\}$ был собственным вектором матрицы A , соответствующим собственному значению $\lambda = \lambda_0$.

Доказательство. Подставим вектор-функцию $y = xe^{\lambda_0 t}$ в (24.32). Будем иметь

$$x \cdot \lambda_0 e^{\lambda_0 t} - A x e^{\lambda_0 t} \equiv 0 \Leftrightarrow (A - \lambda_0 E)x = 0.$$

Отсюда видно, что если $y = xe^{\lambda_0 t}$ является решением системы (24.32), то $\lambda = \lambda_0$ — собственное значение матрицы A , а x — собственный вектор этой матрицы, соответствующий собственному значению $\lambda = \lambda_0$.

Очевидно, верно и обратное: если $\lambda = \lambda_0$ и $x \neq 0$, соответствующие друг другу собственное значение и собственный вектор матрицы A , то выполняются равенства

$$(A - \lambda_0 E)x = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda_0 E)xe^{\lambda_0 t} \equiv 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_0 xe^{\lambda_0 t} - A x e^{\lambda_0 t} \equiv 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(xe^{\lambda_0 t}) - A(xe^{\lambda_0 t}) \equiv 0.$$

Последнее тождество означает, что вектор-функция $y = xe^{\lambda_0 t}$ — решение системы (24.32). Теорема доказана.

Воспользовавшись теоремой Эйлера, нетрудно построить фундаментальную матрицу решений системы (24.32) в случае простых корней характеристического уравнения (24.30).

Теорема 24.7. Если спектр $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ постоянной матрицы A простой, то матрица

$$\Phi(t) = (x^1 e^{\lambda_1 t}, \dots, x^n e^{\lambda_n t}), \quad (24.33)$$

где $x^j = \{x_1^j, \dots, x_n^j\}$ — собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному значению $\lambda = \lambda_j$ ($j = \overline{1, n}$), является фундаментальной матрицей решений системы (24.32) (на всей оси $R = (-\infty, +\infty)$).

Доказательство. По теореме Эйлера каждый столбец $x^j e^{\lambda_j t}$ матрицы (24.33) является решением системы (24.32). Покажем теперь, что матрица (24.33) не вырождена. Для этого достаточно проверить ее невырожденность в точке $t = 0$. Имеем

$$\Phi(0) = (x^1, \dots, x^n).$$

Поскольку все столбцы этой матрицы являются собственными векторами матрицы A , отвечающими различным собственным значениям $\lambda = \lambda_j$, $j = \overline{1, n}$, то они линейно независимы, и значит $\det \Phi(0) \neq 0$. Следовательно, (24.33) является фундаментальной матрицей решений системы (24.32). Теорема доказана.

Следствие 24.4. В случае простого спектра $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ матрицы A общее решение однородной системы (24.32) имеет вид

$$y = y_{o.o.} = \Phi(t)c = c_1 x^1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n x^n e^{\lambda_n t}, \quad (24.34)$$

где x^j — собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному значению $\lambda = \lambda_j$, ($j = \overline{1, n}$); $c_1, \dots, c_n$ — произвольные постоянные.

Заметим, что фундаментальную матрицу $\Phi(t)$ системы (24.32) можно построить и в случае кратных корней характеристического уравнения (24.30). Однако для этого нужно привлекать информацию о собственных и присоединенных векторах матрицы A . Такая информация дается не во всех технических вузах, поэтому алгоритм построения фундаментальной матрицы решений в случае кратного спектра $\sigma(A)$ здесь не излагается.

ПРИМЕР 24.7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x + e^t \\ \dot{y} = 3x + 2y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (24.35)$$

Матрица этой системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ее собственные значения находим из характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - \lambda)(2 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

Таким образом, спектр $\sigma(A) = \{1, 2\}$ матрицы A простой. Вычисляем собственные векторы этой матрицы. При $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$ система (24.29) принимает вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot x_1^1 + 0 \cdot x_2^1 = 0, \\ 3 \cdot x_1^1 + 1 \cdot x_2^1 = 0. \end{cases} \quad (24.36)$$

Поскольку первое уравнение этой системы удовлетворяется при любых x_1^1 и x_2^1 , то система (24.36) эквивалентна одному уравнению $3x_1^1 = -x_2^1$, и поэтому общее решение системы (24.36) имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ -3c_1 \end{pmatrix}$$

где c_1 — произвольная постоянная. Нас интересует вполне определенный собственный вектор, поэтому здесь можно положить $c_1 = 1$. Получим собственный вектор

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

соответствующий собственному значению $\lambda = \lambda_1 = 1$. Для вычисления второго собственного вектора, соответствующего собственному значению $\lambda = \lambda_2 = 2$, надо решить систему

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \cdot x_1^2 + 0 \cdot x_2^2 = 0, \\ 3 \cdot x_1^2 + 1 \cdot x_2^2 = 0. \end{cases}$$

Она имеет общее решение вида

$$\begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Положив здесь $c_2 = 1$, получим собственный вектор

$$x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

соответствующий собственному значению $\lambda = \lambda_2 = 2$. По теореме 24.7 фундаментальная матрица решений однородной дифференциальной системы, соответствующей системе (24.33), имеет вид

$$\Phi(t) = (x^1 e^{\lambda_1 t}, x^2 e^{\lambda_2 t}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^t, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \right) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ -3e^t & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Для вычисления общего решения неоднородной системы (24.35) воспользуемся формулой (24.24):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y_{o.n.} = \Phi(t) \left[c + \int_0^t \Phi^{-1}(s) \begin{pmatrix} e^s \\ 0 \end{pmatrix} dx \right]. \quad (24.37)$$

Вычислим матрицу $\Phi^{-1}(t)$:

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ -3e^t & e^{2t} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{e^{3t}} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 3e^t & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 3e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Теперь (24.37) принимает вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y_{o.n.} &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ -3e^t & e^{2t} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-s} & 0 \\ -3e^{-2s} & e^{-2s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^s \\ 0 \end{pmatrix} dx \right] = \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ -3e^t & e^{2t} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^t 1 ds \\ \int_0^t 3e^{-s} ds \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ -3e^t & e^{2t} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3e^{-t} + 3 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

§ 24.9. УСТОЙЧИВОСТЬ (ПО ЛЯПУНОВУ) РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Любое дифференциальное уравнение (или система таких уравнений) описывает реальный физический процесс с определенной степенью точности. Приборы, фиксирующие то или иное физическое явление, не совершенны. Они производят соответствующие измерения (например, начальных условий) с погрешностью. Может оказаться, что малая погрешность начальных данных вызывает «ощутимые» изменения решений дифференциальных уравнений. В этой ситуации нельзя гарантировать, что выбранная математическая модель реально отражает описываемое ею физическое явление. И, наоборот, если малые возмущения начальных условий мало изменяют решения на всем промежутке их существования, то соответствующую математическую модель следует признать удачной. Таким образом, возникает важный для приложений вопрос о нахождении условий, при которых математическая модель, описываемая дифференциальными уравнениями, будет устойчивой.

К решению этого вопроса мы и переходим.

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad (24.38)$$

где $y = \{y_1, \dots, y_n\}$, $f(t, y) = \{f_1, \dots, f_n\}$, $t \geq t_0$. Будем считать, что для системы (24.38) выполнены все условия теоремы существования и единственности решения (теоремы Коши) и что некоторое фиксированное решение $y = \varphi(t)$ этой системы существует при всех $t \geq t_0$.

Определение 24.39. Решение $y = \varphi(t)$ системы (24.38) называется *устойчивым по Ляпунову* при $t \geq t_0$, если для любого $\epsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ (зависящее, вообще говоря, от ϵ) такое, что:

1) решение $y = y(t)$ системы (24.38) с начальным условием $y(t_0)$, удовлетворяющим неравенству $|y(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$, существует при всех $t \geq t_0$;

2) для всех таких решений имеет место высказывание

$$|y(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta \Rightarrow |y(t) - \varphi(t)| < \varepsilon (\forall t \in t_0). \quad (24.39)$$

$$\text{Здесь } |y| = |y_1, \dots, y_n| = \left(\sum_{j=1}^n y_j^2 \right)^{1/2}.$$

Таким образом, устойчивость интегральной кривой $y = \varphi(t)$ означает, что все близкие к ней интегральные кривые $y = y(t)$ в начальный момент $t = t_0$ остаются близкими к $y = \varphi(t)$ и на всем бесконечном промежутке времени $[t_0; +\infty)$ (см. рис. 24.2).

Заметим, что близость интегральных кривых на конечном промежутке времени $[t_0, T]$, вытекающая из близости их начальных точек, называется *интегральной непрерывностью решений* системы (24.38). Интегральная непрерывность решений имеет место для широкого круга систем (24.38) (например, для систем с непрерывно дифференцируемой в области D правой частью $f(y, t)$). Однако она не влечет за собой устойчивость решения $y = \varphi(t)$ при $t \geq t_0$ (т. е. близость решений на бесконечном промежутке $[t_0, \infty)$).

Определение 24.10. Решение $y = \varphi(t)$ системы (24.38) называется *асимптотически устойчивым* при $t \rightarrow +\infty$, если:

а) $y = \varphi(t)$ устойчиво по Ляпунову при $t \geq t_0$;

б) существует число $\Delta > 0$ такое, что для любого решения $y = y(t)$ системы (24.38), удовлетворяющего неравенству

$$|y(t_0) - \varphi(t_0)| < \Delta,$$

имеет место предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |y(t) - \varphi(t)| = 0. \quad (24.40)$$

Таким образом, асимптотическая устойчивость решения $y = \varphi(t)$ означает не только близость к нему всех решений $y = y(t)$ системы (24.38), вытекающая из близости их к $\varphi(t)$ в начальный момент $t = t_0$, но и неограниченное сближение их с $\varphi(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ (рис. 24.3).

Определение 24.11. Решение $y = \varphi(t)$ системы (24.38) называется *неустойчивым по Ляпунову* при $t \geq t_0$, если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ найдутся

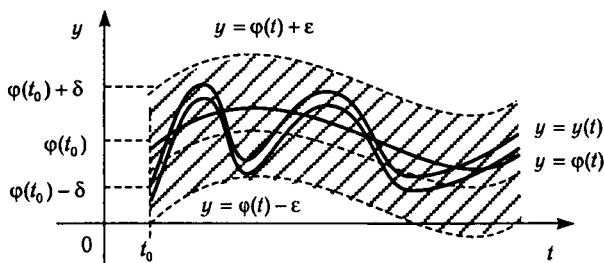


Рис. 24.2

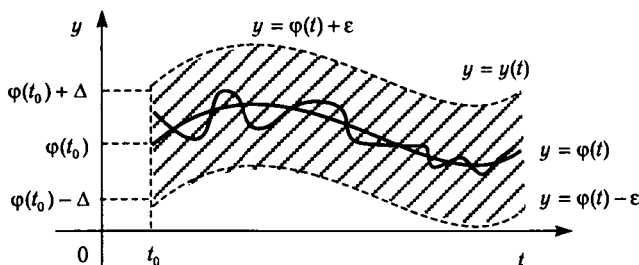


Рис. 24.3

решение $y = y_\delta(t)$ системы (24.38) и момент $t_1 = t_1(\delta) > t_0$ такие, что

$$|y_\delta(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta \quad \text{и} \quad |y_\delta(t_1) - \varphi(t_1)| \geq \varepsilon.$$

Рассмотрим теперь линейную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + b(t). \quad (24.41)$$

Оказывается (см. теорему 24.8), что решения линейных уравнений либо все одновременно устойчивы (асимптотически устойчивы), либо одновременно неустойчивы. Поэтому для линейных систем оправдано следующее понятие.

Определение 24.12. Будем говорить, что линейная система (24.41) устойчива по Ляпунову при $t \geq t_0$ (асимптотически устойчива при $t \rightarrow +\infty$), если *каждое* решение $y = \varphi(t)$ этой системы устойчиво при $t \geq t_0$ (соответственно асимптотически устойчиво при $t \rightarrow +\infty$).

Теорема 24.8. Пусть в системе (24.41) матрица $A(t)$ и вектор-функция $b(t)$ непрерывны на промежутке $[t_0; +\infty)$. Система (24.41) устойчива при $t \geq t_0$ (асимптотически устойчива при $t \rightarrow +\infty$) тогда и только тогда, когда тривиальное решение $z \equiv 0$ соответствующей однородной системы

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z \quad (24.42)$$

устойчиво при $t \geq t_0$ (соответственно асимптотически устойчиво при $t \rightarrow +\infty$).

Доказательство. Пусть $y = \varphi(t)$ — произвольное фиксированное решение системы (24.41), а $y = y(t)$ — любое другое решение этой системы. Если $y = \varphi(t)$ устойчиво при $t \geq t_0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что имеет место высказывание

$$|y(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta \Rightarrow |y(t) - \varphi(t)| < \varepsilon \quad (\forall t \geq t_0).$$

Но разность $z(t) = y(t) - \varphi(t)$ двух решений неоднородной системы (24.41) является решением однородной системы (24.42), и для него предыдущее высказывание принимает вид

$$|z(t_0)| < \delta \Rightarrow |z(t)| < \varepsilon \quad (\forall t \geq t_0). \quad (24.43)$$

Ясно, что при изменении всех решений $y = y(t)$ неоднородной системы (24.41) получаются все решения $z(t) = y(t) - \varphi(t)$ однородной системы (24.42). Высказывание (24.43) означает, что тривиальное решение $z \equiv 0$ однородной системы (24.42) устойчиво при $t \geq t_0$. Итак, из устойчивости произвольного (фиксированного) решения $y = \varphi(t)$ неоднородной системы вытекает устойчивость тривиального решения однородной системы (24.42).

Предположим теперь, что тривиальное решение $z(t) \equiv 0$ однородной системы (24.42) устойчиво при $t \geq t_0$. Тогда имеет место высказывание (24.43) для любого решения $z = z(t)$ однородной системы (24.42). Если теперь $y = \varphi(t)$ — фиксированное решение неоднородной системы (24.41) и $y = y(t)$ — произвольное решение этой системы, удовлетво-

ряющее неравенству $|y(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$, то (поскольку разность $z(t) = y(t) - \varphi(t)$ является решением однородной системы (24.42)) выполняется неравенство

$$|y(t) - \varphi(t)| = |z(t)| < \varepsilon \quad (\forall t \geq t_0).$$

Это и означает, что решение $y = \varphi(t)$ неоднородной системы (24.41) устойчиво при $t \geq t_0$. Так как решение $y = \varphi(t)$ фиксировалось произвольным образом, то и все решения неоднородной системы (24.41) устойчивы при $t \geq t_0$. Аналогично рассматривается случай асимптотической устойчивости.

Теорема доказана.

Таким образом, для изучения асимптотической устойчивости (или просто устойчивости) решений линейной системы (24.41) достаточно изучить асимптотическую устойчивость (или просто устойчивость) решения $z \equiv 0$ соответствующей однородной системы (24.42). Для систем с постоянной матрицей $A(t) = A = \text{const}$ это можно сделать довольно просто.

Теорема 24.9. *Для того чтобы тривиальное решение $z(t) \equiv 0$ однородной системы (24.42) было асимптотически устойчивым при $t \rightarrow +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы спектр $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ ее постоянной матрицы A лежит в полуплоскости $\text{Re } \lambda < 0$.*

Теорема 24.10. *Пусть в системе (24.42) матрица $A(t) = A$ является постоянной и ее спектр $\sigma(A) = \{\lambda_j\}$ удовлетворяет условиям*

$$\lambda_j \neq \lambda_i, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}$$

(т. е. является простым). Тогда для устойчивости тривиального решения $z(t) \equiv 0$ этой системы необходимо и достаточно, чтобы все точки спектра матрицы A лежали в полуплоскости $\text{Re } \lambda \leq 0$.

Теорема 24.11. *Пусть в системе (24.42) матрица $A(t) = A$ является постоянной и среди ее точек спектра $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ имеется хотя бы одна с положительной действительной частью ($\text{Re } \lambda_j > 0$). Тогда решение $z(t) \equiv 0$ этой системы неустойчиво при $t \geq t_0$.*

Замечание 24.1. В теореме 24.10 для устойчивости тривиального решения $x(t) \equiv 0$ системы (24.42) требовалось, чтобы спектр $\sigma(A)$ матрицы A был простым. На самом деле можно потребовать, чтобы спектр был не обязательно простым. Простыми должны быть только чисто мнимые точки спектра.

Заметим, что все утверждения об устойчивости, сформулированные для систем линейных уравнений переносятся и на скалярные дифференциальные уравнения:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(t). \quad (24.44)$$

Действительно, введем вектор-функцию $\{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$ с компонентами

$$y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'', \dots, y_{n-1} = y^{(n-2)}, y_n = y^{(n-1)},$$

где $y = y(t)$ — решение уравнения (24.44). Тогда

$$y'_1 = y' = y_2, y'_2 = y'' = y_3, \dots, y'_{n-1} = y^{(n-1)} = y_n,$$

$$y'_n = y^{(n)} = -a_{n-1}y^{(n-1)} - a_{n-2}y^{(n-2)} - \dots - a_1y' - a_0y + f(t) \equiv$$

$$\equiv -a_{n-1}y_n - a_{n-2}y_{n-1} - \dots - a_1y_2 - a_0y_1 + f(t),$$

и для вектор-функции $\{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$ получаем систему

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_{n-1} \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \quad (24.45)$$

Ясно, что если $y = y(t)$ — решение уравнения (24.44), то вектор-функция $\{y, y', \dots, y^{(n-2)}, y^{(n-1)}\}$ является решением системы (24.45). Обратно: если $\{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$ — решение системы (24.45), то $y = y(t)$ — решение уравнения (24.44) (см. последнее уравнение системы (24.45)).

Итак, уравнение (24.44) эквивалентно (в указанном только что смысле) системе (24.45). Можно показать, что устойчивость решений уравнения (24.44) влечет за собой и

устойчивость решений системы (24.45), и наоборот. Вычисляя собственные значения матрицы A системы (24.45), видим, что они удовлетворяют уравнению

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad (24.46)$$

которое является характеристическим уравнением для скалярного дифференциального уравнения (24.44). Таким образом, спектр уравнения (24.44) совпадает со спектром матрицы A системы (24.45), поэтому теоремы об устойчивости (асимптотической устойчивости и неустойчивости), сформулированные для системы (24.45), остаются верными и для скалярных уравнений (24.44).

ПРИМЕР 24.8. Исследовать на устойчивость систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y + e^t, \\ \dot{y} = -5y + \sin t. \end{cases}$$

Матрица этой системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \quad (24.47)$$

Ее спектр $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ вычисляется из характеристического уравнения

$$\det(a - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -3 - \lambda & 2 \\ 0 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3 + \lambda)(5 + \lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3, \\ \lambda_2 = -5. \end{cases}$$

Так как все точки спектра $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -5$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$, то система (24.47) асимптотически устойчива при $t \rightarrow +\infty$ (см. теоремы 24.8 и 24.9).

ПРИМЕР 24.9. Исследовать на устойчивость дифференциальное уравнение

$$y'' + 4y' = 0.$$

Спектр этого уравнения образует корни характеристического полинома

$$\lambda^3 + 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = -2i, \\ \lambda_3 = +2i. \end{cases}$$

Все точки спектра лежат на мнимой оси. Поскольку все они простые, то каждое решение исходного дифференциального уравнения устойчиво по Ляпунову при $t \geq t_0$ (здесь $t_0 \in R$ — произвольное фиксированное число). Это вытекает из теоремы 24.10 и замечания 24.1.

§ 24.10. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ ТОЧЕК ПОКОЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим нелинейную систему (24.38). Точка $y = \bar{y} = \{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n\}$ называется *точкой покоя* этой системы, если:

- а) $\bar{y} = \text{const}$;
- б) $f(t, \bar{y}) \equiv 0 \quad \forall t \geq t_0$.

Ясно, что любая точка покоя системы (24.38) является решением этой системы. Например, уравнение $\dot{y} = y^2 - 1$ имеет две точки покоя $\bar{y} = -1$ и $\bar{y} = +1$ (они обе являются решениями исходного уравнения).

Пусть $y = \bar{y}$ — точка покоя системы (24.38). Для исследования ее на устойчивость сделаем в (24.38) преобразование $y = \bar{y} + z$. Тогда получим систему

$$\frac{dz}{dt} = f(t, \bar{y} + z). \quad (24.48)$$

Предполагая, что каждая компонента $f_i(t, y)$ вектор-функции $f(t, y)$ непрерывно дифференцируема по y в некоторой окрестности точки покоя $y = \bar{y}$, можем записать для $f_i(t, \bar{y} + z)$ формулу Тейлора

$$\begin{aligned} f_i(t, \bar{y} + z) &\equiv f_i(t, \bar{y}_1 + z_1, \dots, \bar{y}_n + z_n) = \\ &= f_i(t, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(t, \bar{y})}{\partial z_i} z_i + R_i(t, z) = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial f_1(t, \bar{y})}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f_n(t, \bar{y})}{\partial z_n} \right) \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + R_i(t, z),$$

где $|R_i(t, z)| = o(|z|)$ ($z \rightarrow 0$). С учетом этого представления систему (24.48) можно записать в виде

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + R(t, z), \quad (24.49)$$

где обозначено:

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(t, \bar{y})}{\partial z_1} & \vdots & \frac{\partial f_1(t, \bar{y})}{\partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(t, \bar{y})}{\partial z_1} & \vdots & \frac{\partial f_n(t, \bar{y})}{\partial z_n} \end{pmatrix} \quad R(t, z) = \begin{pmatrix} R_1(t, z) \\ \vdots \\ R_n(t, z) \end{pmatrix}$$

Если отбросить в (24.49) нелинейный член $R(t, z)$, то получим линейную систему $\dot{z} = A(t)z$, которую называют *системой первого приближения* для исходной дифференциальной системы (24.38). Оказывается, что об устойчивости точки покоя $y = \bar{y}$ нелинейной системы (24.38) можно судить (при некоторых ограничениях на $R(t, z)$) по устойчивости тривиального решения $z = 0$ ее системы первого приближения (24.49). Имеет место следующее утверждение.

Теорема 24.12. Пусть в системе (24.49) матрица $A(t) = A$ постоянна, а вектор-функция $R(t, z)$ непрерывна по (t, z) и непрерывно дифференцируема по z в некоторой области $G = \{t \geq t_0, |z| < H\}$. Пусть, кроме того, существуют постоянные $C > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что

$$|R(t, z)| \leq C|z|^{1+\alpha}. \quad (24.50)$$

Тогда тривиальное решение $z = 0$ нелинейной системы (24.49) асимптотически устойчиво при $t \rightarrow +\infty$ или неустойчиво при $t \geq t_0$, если таковым является тривиальное решение $z = 0$ соответствующей системы первого приближения $\dot{z} = Az$.

Учитывая, что при замене $y = \bar{y} + z$ точка покоя $y = \bar{y}$ системы (24.38) переходит в точку покоя $z = 0$ системы

(24.49), мы можем сказать, что $y = \bar{y}$ будет асимптотически устойчивой при $t \rightarrow +\infty$ или неустойчивой при $t \geq t_0$, если таковым является тривиальное решение $z = 0$ системы первого приближения $\dot{z} = Az$. Но для систем последнего типа вопрос об асимптотической устойчивости или неустойчивости легко решается после исследования расположения спектра $\sigma(A)$ матрицы A относительно мнимой оси на комплексной плоскости λ .

Замечание 24.2. Если система первого приближения всего лишь устойчива при $t \geq t_0$, то об устойчивости точки покоя $y = \bar{y}$ нелинейной системы (24.38) ничего сказать нельзя. В зависимости от характера нелинейности $f(t, y)$ эта точка может быть как устойчивой (асимптотически устойчивой), так и неустойчивой. Этот случай принято называть критическим случаем устойчивости.

ПРИМЕР 24.10. Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + x^2 + y^2 \sin t, \\ \dot{y} = x + y - y^2. \end{cases}$$

Точка $(x, y) = (0, 0)$, очевидно, является точкой покоя данной системы. Поскольку

$$|R_1(x, y, t)| = |x^2 + y^2 \sin t| \leq x^2 + y^2 = |z|^2,$$

$$|R_2(x, y, t)| = |-y^2| = y^2 \leq x^2 + y^2 = |z|^2,$$

то применима теорема 24.12. система первого приближения:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

имеет спектр $\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{1 - i, 1 + i\}$. По теореме 24.11 ее точка покоя неустойчива, а значит неустойчиво и тривиальное решение $(x, y) = (0, 0)$ исходной нелинейной системы.

Замечание 24.3. Пусть система (24.49) автономна (т. е. ее правая часть не зависит от t : $A(t) \equiv A$, $R(t, z) \equiv R(z)$). Пусть, кроме того, нелинейность $R(z)$ дважды непрерывно дифференцируема по z в некоторой области $D = \{|z| < h\}$. Тогда если $R(z) = o(|z|)$ при $z \rightarrow 0$, то условие (24.50) будет

выполнено. Это можно доказать, выписав для $R_i(z)$ формулу Тейлора. При этом получим, что

$$|R_i(z)| \leq C \cdot |z|^2 \quad (\forall z \in D), \quad i = \overline{1, n},$$

где $C > 0$ — постоянная.

ПРИМЕР 24.11. Исследовать на устойчивость точку покоя $(x, y) = (0, 0)$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + \sin^2 xy, \\ \dot{y} = -2y + \operatorname{tg}^2 xy. \end{cases}$$

Данная система является автономной, причем ее нелинейность удовлетворяет условиям

$$R_1(x, y) = \sin^2 xy = o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \left(|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0\right),$$

$$R_2(x, y) = \operatorname{tg}^2 xy = o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \left(|z| \rightarrow 0\right).$$

Следовательно, применима теорема 24.12. Поскольку спектр $\{-1, -2\}$ системы первого приближения

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = -2y$$

лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$, то точка покоя $(x, y) = (0, 0)$ асимптотически устойчива при $t \rightarrow +\infty$.

Контрольные вопросы

1. Какие уравнения образуют систему дифференциальных уравнений?
2. Как записываются системы дифференциальных уравнений в векторной форме?
3. Какое множество называется областью определения системы дифференциальных уравнений?
4. Как вычисляются производная и интеграл от вектор-функции? Каким правилам действий они подчиняются?
5. Что называется решением системы дифференциальных уравнений?
6. Какая кривая называется интегральной кривой системы дифференциальных уравнений? Что такое траектория системы?
7. Как ставится задача Коши для системы дифференциальных уравнений? Поясните ее геометрический смысл.
8. Сформулируйте теорему Коши о существовании и единственности решения начальной задачи для системы дифференциальных уравнений. В чем состоит ее достаточность и локальный характер?

9. Как определяются общее решение и общий интеграл дифференциальной системы? Что такое частное решение и частный интеграл?

10. Поясните суть методов исключения и интегрируемых комбинаций решения систем дифференциальных уравнений.

11. Что такое первый интеграл системы дифференциальных уравнений? Сколько первых интегралов определяют общее решение системы дифференциальных уравнений в неявной форме?

12. Как определяются линейные системы дифференциальных уравнений? Запишите векторно-матричную форму линейной дифференциальной системы.

13. Какая система называется однородной (неоднородной)? Что такое порядок системы дифференциальных уравнений?

14. Является ли пространство решений однородной дифференциальной системы линейным пространством? Почему?

15. Сформулируйте теорему существования и единственности решения задачи Коши для линейной системы дифференциальных уравнений. В чем состоит ее отличие от теоремы Коши для нелинейных систем? Что такое глобальная разрешимость начальной задачи?

16. Дайте определения линейной зависимости и линейной независимости системы вектор-функций. Что такое вронскиан системы вектор-функций?

17. Сформулируйте необходимые условия линейной зависимости системы вектор-функций. Как вывести отсюда достаточное условие линейной независимости?

18. Сформулируйте необходимое и достаточное условие линейной независимости системы решений однородной дифференциальной системы линейных уравнений.

19. Какими свойствами обладает вронскиан системы решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений?

20. Что такое фундаментальная матрица решений? Сформулируйте теорему о существовании фундаментальной матрицы решений.

21. Как записывается общее решение линейной однородной дифференциальной системы?

22. Запишите формулу Коши общего решения неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений.

23. Какова размерность пространства решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений? Что является базисом в этом пространстве?

24. Как определяются собственное значение и собственный вектор матрицы? Какое уравнение называется характеристическим уравнением линейной дифференциальной системы?

25. Что такое спектр матрицы? Какой спектр называется простым (кратным)?

26. Каким свойством обладают собственные значения и собственные векторы матрицы?

27. В чем состоит смысл теоремы Эйлера?

28. Как строится фундаментальная матрица решений для линейной системы дифференциальных уравнений в случае простого спектра ее матрицы?

29. Как записывается общее решение однородной дифференциальной системы с постоянной матрицей в случае простых корней ее характеристического уравнения?

30. Дайте определения устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости решения дифференциальной системы уравнений.

31. Может ли одно из решений линейной дифференциальной системы быть устойчивым, а другое неустойчивым? Почему? Сформулируйте соответствующее утверждение.

32. Каким должен быть спектр постоянной матрицы A , чтобы все решения линейной дифференциальной системы $\dot{y} = Ay + h(t)$ были устойчивыми, асимптотически устойчивыми или неустойчивыми?

33. Как исследуется устойчивость решений скалярных дифференциальных уравнений n -го порядка? Как вычисляется в этом случае спектр?

34. Что такое точка покоя дифференциальной системы? Вычислите все точки покоя системы

$$\dot{x} = x^2 - 5y + 6, \quad \dot{y} = x^2 - 7x + 10. \quad (24.51)$$

35. Как вычисляется система первого приближения нелинейной дифференциальной системы? Какими будут системы первого приближения для системы (24.51)?

36. Сформулируйте теорему об устойчивости по первому приближению и примените ее к системе (24.51). Какая из точек покоя этой системы будет устойчивой (асимптотически устойчивой), неустойчивой?

37*. Рассмотрите линейную дифференциальную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad (24.52)$$

с постоянными коэффициентами a_{ij} ($a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \neq 0$) и изобразите в фазовой плоскости (x, y) расположение ее траекторий в окрестности точки покоя $(0, 0)$ в зависимости от вида спектра $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ системы (24.52). Рекомендуется при этом воспользоваться необходимой учебной литературой (см., например, [2], стр. 96–100).

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

Занятие 1

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на некотором промежутке X , если $F'(x) = f(x) \forall x \in X$.

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на промежутке X , то множество всех первообразных функции $f(x)$ на этом промежутке выражается формулой $F(x) + C$, где C — *произвольная постоянная*, и называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)dx$ — *подынтегральным выражением*, аргумент x — *переменной интегрирования*.

Отыскание неопределенного интеграла называется *интегрированием* подынтегральной функции.

§ 1.1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

$$1^\circ. \left(\int f(x)dx \right)' = f(x).$$

$$2^\circ. \int f'(x)dx = f(x) + C.$$

$$3^\circ. \int a f(x)dx = a \int f(x)dx \quad (a — \text{постоянная, } a \neq 0).$$

$$4^\circ. \int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

§ 1.2. ОСНОВНАЯ ТАБЛИЦА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

$$1^\circ. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1).$$

$$2^\circ. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$3^\circ. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1).$$

$$4^\circ. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$5^\circ. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$6^\circ. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$7^\circ. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$8^\circ. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$9^\circ. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0).$$

$$10^\circ. \int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

$$11^\circ. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

$$12^\circ. \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$$

$$13^\circ. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + \alpha}| + C \quad (\alpha \neq 0).$$

$$14^\circ. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (a \neq 0).$$

$$15^\circ. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$16^\circ. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$17^\circ. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

§ 1.3. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$18^\circ. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

Простейшие приемы интегрирования основаны на непосредственном применении таблицы интегралов и использовании свойств линейности 3°, 4°.

ПРИМЕР 1.1. Найти интеграл

$$\int x dx.$$

◁ Этот интеграл — частный случай интеграла $\int x^n dx$ (пункт 1° таблицы). Полагая $n = 1$, получим

$$\int x dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C. \triangleright$$

ПРИМЕР 1.2. Найти интеграл

$$\int x^2 dx.$$

◁ Согласно пункту 1° таблицы ($n = 2$)

$$\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C. \triangleright$$

ПРИМЕР 1.3. Найти интеграл

$$\int dx.$$

◁ Заметим, что подынтегральная функция в этом случае равна 1, которую можно представить как x^0 , что дает возможность опять-таки применить п. 1° таблицы (при $n = 0$). Получим

$$\int dx = \int x^0 dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = x + C. \triangleright$$

ПРИМЕР 1.4. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2}.$$

◁ Снова применим п. 1° таблицы (при $n = -2$).

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C. \triangleright$$

ПРИМЕР 1.5. Найти интеграл

$$\int \sqrt[3]{x} \, dx.$$

◁ Применяем п. 1° таблицы ($n = \frac{1}{3}$).

$$\int \sqrt[3]{x} \, dx = \int x^{1/3} \, dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{4} x^{4/3} + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + C. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 1.6. Найти интеграл

$$\int 3^x \, dx.$$

◁ Этот интеграл — частный случай $\int a^x \, dx$ при $a = 3$.
Согласно п. 3° таблицы

$$\int 3^x \, dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 1.7. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{2+x^2}.$$

◁ Это частный случай $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ при $a = \sqrt{2}$ (п. 9° таблицы). Поэтому

$$\int \frac{dx}{2+x^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{2})^2+x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{2}} + C. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 1.8. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{9-x^2}.$$

◁ Согласно п. 14° таблицы ($a = 3$)

$$\int \frac{dx}{9-x^2} = \int \frac{dx}{3^2-x^2} = \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{3+x}{3-x} \right| + C. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 1.9. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}.$$

◁ Применяя п. 11° таблицы ($a = \sqrt{5}$), получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C. \triangleright$$

ПРИМЕР 1.10. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \ln 2}}.$$

◁ Это частный случай интеграла из таблицы п. 13° при $\alpha = \ln 2$ (так как $\ln 2$ — постоянная!). Имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \ln 2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + \ln 2}| + C. \triangleright$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти неопределенные интегралы:

- 1) $\int x^3 dx$; 2) $\int \sqrt{x} dx$; 3) $\int 5^x dx$; 4) $\int \frac{dx}{4-x^2}$;
 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7}}$.

Ответы:

- 1) $\frac{x^4}{4} + C$; 2) $\frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$; 3) $\frac{5^x}{\ln 5} + C$;
 4) $\frac{1}{4} \ln \frac{x+2}{x-2} + C$; 5) $\arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + C$; 6) $\ln|x + \sqrt{x^2 - 7}| + C$.

Решение нижеследующих примеров потребует (помимо обращения к таблице неопределенных интегралов) также и применения свойств линейности неопределенного интеграла (пункты 3°, 4° основных свойств).

ПРИМЕР 1.11. Найти интеграл

$$\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx.$$

$$\triangleleft \int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx = \int \frac{1-2x+x^2}{x\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{2x}{x\sqrt{x}} + \frac{x^2}{x\sqrt{x}} \right) dx = \int \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} - 2 \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) dx.$$

Последний интеграл в силу свойств линейности равен линейной комбинации интегралов, каждый из которых является табличным:

$$\int \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} - 2 \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) dx = \int \frac{dx}{x\sqrt{x}} - 2 \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int \sqrt{x} dx =$$

$$= \int x^{-\frac{3}{2}} dx - 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} - 2 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= -2x^{-\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2x^2 - 12x - 6}{3\sqrt{x}} + C. \triangleright$$

ПРИМЕР 1.12. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{3-3x^2}.$$

$$\triangleleft \int \frac{dx}{3-3x^2} = \int \frac{dx}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{1-x^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin x + C. \triangleright$$

ПРИМЕР 1.13. Найти интеграл

$$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx.$$

$$\triangleleft \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int \frac{1}{\cos^2 x} + 1 \right) dx = \frac{1}{2} \left[\int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int dx \right] = \frac{1}{2} (\operatorname{tg} x + x) + C.$$

В данном примере были применены п. 7° и 1° таблицы неопределенных интегралов. $\triangleright$

ПРИМЕР 1.14. Найти интеграл

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx.$$

$$\begin{aligned} \triangleleft \int \operatorname{tg}^2 x dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \\ &= \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C. \quad \triangleright \end{aligned}$$

ПРИМЕР 1.15. Найти интеграл

$$\int \frac{(1 + 2x^2) dx}{x^2(1 + x^2)}.$$

$$\begin{aligned} \triangleleft \int \frac{(1 + 2x^2) dx}{x^2(1 + x^2)} &= \int \frac{(1 + x^2) + x^2}{x^2(1 + x^2)} dx = \int \frac{1 + x^2}{x^2(1 + x^2)} dx + \\ &+ \int \frac{x^2}{x^2(1 + x^2)} dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1 + x^2} = -\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

Для решения данного примера применялись пункты 1° и 10° таблицы неопределенных интегралов. $\triangleright$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти неопределенные интегралы:

$$\begin{array}{ll} 1) \int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx; & 2) \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx; \\ 3) \int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx; & 4) \int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}. \end{array}$$

Ответы:

$$\begin{array}{ll} 1) -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}} - e^x + \ln|x| + C; & 2) -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C; \\ 3) \ln|x| + 2 \operatorname{arctg} x + C; & 4) \operatorname{tg} x + C. \end{array}$$

**МЕТОД ПОДВЕДЕНИЯ
ПОД ЗНАК ДИФФЕРЕНЦИАЛА**

Этот метод интегрирования основывается на теореме об инвариантности неопределенного интеграла по отношению к переменной интегрирования.

Если

$$\int f(u) du = F(u) + C \quad (2.1)$$

и $u = \varphi(x)$ — любая дифференцируемая функция, то

$$\int f(\varphi(x)) d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C,$$

где

$$\int f(\varphi(x)) d\varphi(x) = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Теорема означает, что в формуле интегрирования (2.1) под переменной интегрирования можно понимать любую дифференцируемую функцию.

Пусть требуется найти $\int g(x) dx$ и удастся подобрать такую функцию $u = \varphi(x)$, что

$$g(x)dx = f(\varphi(x))d\varphi(x)$$

(это преобразование называют подведением функции $\varphi(x)$ под знак дифференциала).

Тогда

$$\int g(x) dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x)$$

и интеграл сводится к интегралу $\int f(u) du$, отыскание которого может оказаться возможным с помощью таблицы интегралов или другими известными приемами.

§ 2.1. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОДВЕДЕНИЯ ПОД ЗНАК ДИФФЕРЕНЦИАЛА

ПРИМЕР 2.1. Найти интеграл

$$I = \int \sin x \cos x \, dx.$$

◁ Здесь множитель $\cos x$ в подынтегральной функции можно использовать для того, чтобы подвести под знак дифференциала $\sin x$. Тогда

$$I = \int \sin x \, d(\sin x)$$

и интеграл сводится к интегралу $\int u \, du$, который является табличным (см. 1° при $n = 1$). Поэтому

$$I = \frac{\sin^2 x}{2} + C. \triangleright$$

ПРИМЕР 2.2. Найти интеграл

$$I = \int (x + 1)^{15} \, dx.$$

◁ Здесь под знак дифференциала целесообразно подвести $(x + 1)$.

Так как $d(x + 1) = dx$, то получаем

$$I = \int (x + 1)^{15} d(x + 1) = \frac{(x + 1)^{16}}{16} + C.$$

(Снова использован табличный интеграл 1° при $n = 15$). ▷

ПРИМЕР 2.3. Найти интеграл

$$I = \int \frac{dx}{(2x + 3)^5}.$$

◁ Здесь интеграл сведется к табличному, если под знак дифференциала подвести $(2x + 3)$. Так как

$$d(2x + 3) = d(2x) + d(3) = 2dx + 0 = 2dx,$$

то

$$dx = \frac{1}{2} d(2x + 3)$$

и

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2} \int \frac{d(2x+3)}{(2x+3)^5} = \frac{1}{2} \int (2x+3)^{-5} d(2x+3) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+3)^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{8(2x+3)^4} + C.
 \end{aligned}$$

Принято говорить, что множитель $\frac{1}{2}$ компенсирует подведение под знак дифференциала множителя 2, а постоянное слагаемое 3 не требует компенсации (заносится под знак дифференциала «бесплатно»). $\triangleright$

ПРИМЕР 2.4. Найти интеграл

$$I = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4 + 1}}.$$

$\triangleleft$ В данном случае замечаем, что $x^3 dx = \frac{1}{4} d(x^4 + 1)$.

Поэтому

$$I = \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4 + 1)}{(x^4 + 1)^{1/3}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(x^4 + 1)^{-1/3+1}}{-1/3+1} + C = \frac{3}{8} (x^4 + 1)^{2/3} + C$$

(использован табличный интеграл 1* при $n = -\frac{1}{3}$). $\triangleright$

ПРИМЕР 2.5. Найти интеграл

$$I = \int \sin^3 x \cos x \, dx.$$

$\triangleleft$ Так как $(\sin x)' = \cos x$, то, внося под дифференциал $\sin x$, получим

$$I = \int \sin^3 x \, d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 2.6. Найти интеграл

$$I = \int \cos 3x \, dx.$$

$\triangleleft$ Интеграл сведется к табличному, если под знак дифференциала подвести $3x$.

$$I = \frac{1}{3} \int \cos 3x \, d3x = \frac{1}{3} \sin 3x + C. \triangleright$$

ПРИМЕР 2.7. Найти интеграл

$$I = \int \sin(2x - 3) \, dx.$$

◁ Здесь подведем под знак дифференциала $(2x - 3)$.
Получим

$$I = \frac{1}{2} \int \sin(2x - 3) d(2x - 3) = -\frac{1}{2} \cos(2x - 3) + C. \triangleright$$

ПРИМЕР 2.8. Найти интеграл

$$I = \int \frac{e^x dx}{e^x + 1}.$$

◁ В данном случае, если внести под дифференциал e^x , получим

$$I = \int \frac{d(e^x)}{e^x + 1}.$$

Далее вспомним (пример 2.3), что постоянное слагаемое вносится под знак дифференциала без компенсации

$$I = \int \frac{d(e^x)}{e^x + 1} = \int \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = \ln(e^x + 1) + C$$

(последний интеграл фактически уже имеет вид $\int \frac{du}{u}$ и является табличным 2°). $\triangleright$

ПРИМЕР 2.9. Найти интеграл

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - 25x^2}}.$$

◁ Похожим на наш является табличный интеграл

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$$

Поэтому, заметив, что $25x^2 = (5x)^2$, внесем под дифференциал $5x$. Получим

$$I = \int \frac{\frac{1}{5} d(5x)}{\sqrt{1 - (5x)^2}} = \frac{1}{5} \int \frac{d(5x)}{\sqrt{1 - (5x)^2}} = \frac{1}{5} \arcsin 5x + C. \triangleright$$

ПРИМЕР 2.10. Найти интеграл

$$I = \int \frac{dx}{1 + 9x^2}.$$

$\triangleleft$ Аналогично предыдущему примеру замечаем, что $9x^2 = (3x)^2$, переходим к $d(3x)$. Получаем

$$I = \int \frac{\frac{1}{3} d(3x)}{1 + (3x)^2} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x)}{1 + (3x)^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 3x + C$$

(п. 10° таблицы). $\triangleright$

ПРИМЕР 2.11. Найти интеграл

$$I = \int \frac{2x - \sqrt{\arcsin x}}{1 - x^2} dx.$$

$\triangleleft$ Воспользовавшись линейностью неопределенного интеграла, представим искомый интеграл как разность интегралов:

$$I = \int \frac{2x dx}{\sqrt{1 - x^2}} - \int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

При вычислении интеграла

$$I_1 = \int \frac{2x dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

заметим, что $d(1 - x^2) = -2x dx$, поэтому

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{-d(1 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} = -\int (1 - x^2)^{-1/2} d(1 - x^2) = \\ &= \frac{-(1 - x^2)^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C_1 = -2\sqrt{1 - x^2} + C_1. \end{aligned}$$

Для вычисления интеграла

$$I_2 = \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

ВСПОМНИМ, ЧТО

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

откуда

$$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \sqrt{\arcsin x} d(\arcsin x) = \int (\arcsin x)^{1/2} d(\arcsin x) = \\ &= \frac{(\arcsin x)^{1/2+1}}{1/2+1} + C_2 = \frac{2}{3}(\arcsin x)^{3/2} + C_2 = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{(\arcsin x)^3} + C_2. \end{aligned}$$

В итоге исходный интеграл

$$I = I_1 - I_2 = -2\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3} \sqrt{(\arcsin x)^3} + C$$

(здесь мы объединили C_1 и C_2 , положив $C = C_1 - C_2$). $\triangleright$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти неопределенные интегралы:

1) $\int x\sqrt{1-x^2} dx;$

2) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{4+x^5}};$

3) $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x};$

4) $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x};$

5) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}};$

6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1+\tg x}};$

7) $\int \frac{dx}{x \ln x};$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}};$

9) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4};$

10) $\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx.$

Ответы:

$$1) -\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + C; \quad 2) \frac{2}{5}\sqrt{4+x^5} + C; \quad 3) \frac{1}{\cos x} + C; \quad 4) 3\sqrt[3]{\sin x} + C;$$

$$5) -\frac{1}{2} \frac{1}{(\arcsin x)^2} + C; \quad 6) 2\sqrt{1+\lg x} + C; \quad 7) \ln|\ln x| + C;$$

$$8) \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{2}; \quad 9) \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x}{2} + C; \quad 10) \arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

§ 2.2. ИНТЕГРАЛЫ ОТ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

Если подынтегральная функция содержит квадратный трехчлен, то может оказаться эффективным выделение в нем полного квадрата.

ПРИМЕР 2.12. Найти интеграл

$$I = \int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}.$$

◁ Выделим полный квадрат в знаменателе

$$4x^2 + 4x + 5 = [(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1] + 4 = (2x + 1)^2 + 2^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{(2x+1)^2 + 2^2} = \int \frac{1/2 d(2x+1)}{(2x+1)^2 + 2^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{2} + C = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{2} + C. \quad \triangleright \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2.13. Найти интеграл

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}.$$

◁ Опять-таки выделяем в знаменателе полный квадрат

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{3-1-6x-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3-(3x+1)^2}} =$$

$$= \int \frac{1/3 d(3x+1)}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 - (3x+1)^2}} = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x+1}{\sqrt{3}} + C$$

(заменяем dx на $\frac{1}{3} d(3x+1)$ и воспользуемся значением табличного интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ п. 11° таблицы). $\triangleright$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти неопределенные интегралы:

$$1) \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3}, \quad 2) \int \frac{dx}{\sqrt{8 + 6x - 9x^2}}.$$

Ответы:

$$1) \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C; \quad 2) \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x-1}{3} + C.$$

МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПОДСТАНОВКОЙ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

§ 3.1. МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПОДСТАНОВКОЙ

Этот метод основан на утверждении, вытекающем из теоремы об инвариантности неопределенного интеграла: если $x = \varphi(t)$ — дифференцируемая функция, а $t = \varphi^{-1}(x)$ — обратная к ней функция, то

$$\int f(x)dx = \left\{ \int f(\varphi(t))d\varphi(t) \right\}_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Функция $x = \varphi(t)$ подбирается так, чтобы получающийся после ее подстановки вместо переменной интегрирования x интеграл $\int (\varphi(t))d\varphi(t)$ оказался проще исходного. Отыскав последний, нужно вернуться от новой переменной интегрирования t к первоначальной, подставляя $t = \varphi^{-1}(x)$.

ПРИМЕР 3.1. Найти интеграл

$$I = \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x+1}}.$$

◁ Положим $t = \sqrt{x+1}$. Тогда $x = t^2 - 1$, $dx = 2tdt$ и

$$I = \int \frac{2tdt}{1+t} = 2 \int \frac{(t+1)-1}{1+t} dt = 2 \left(\int dt - \int \frac{d(1+t)}{1+t} \right) =$$

$$= 2(t - \ln|1+t|) + C = 2(\sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1})) + C. \quad \triangleright$$

Использованная здесь подстановка позволила «избавиться» от иррациональности в подынтегральном выраже-

нии и свести интеграл простейшими приемами к двум табличным.

Заметим, что на практике нередко подбирается сначала не $x = \varphi(t)$, а обратная функция $t = \varphi^{-1}(x)$, как в рассмотренном примере.

ПРИМЕР 3.2. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}.$$

◁ Положим $t = \sqrt{x}$, чтобы здесь тоже «избавиться» от иррациональности. Отыскание интеграла можно оформлять в виде цепочки равенств, в которую включаются необходимые для выполнения подстановки формулы, выделенные каким-либо образом (здесь — вертикальными линиями).

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)} &= |t = \sqrt{x}, x = t^2, dx = 2t dt| = \int \frac{2t dt}{t(t^2-1)} = \\ &= -2 \int \frac{dt}{1-t^2} = (\text{табличный интеграл } 14') = \\ &= -2 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \left| \ln \frac{1-t}{1+t} \right| + C = \ln \left| \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right| + C. \triangleright \end{aligned}$$

ПРИМЕР 3.3. Найти интеграл

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} dx.$$

◁ В данном случае, чтобы избавиться от иррациональности, достаточно положить $t = \sqrt[12]{x}$. Покажем отыскание интеграла в виде цепочки равенств (аналогично примеру 3.2):

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} dx &= |t = \sqrt[12]{x}, x = t^{12}, dx = 12t^{11} dt| = \\ &= \int \frac{t^6}{t^8 - t^3} 12t^{11} dt = 12 \int \frac{t^{14} dt}{t^5 - 1} = \frac{12}{5} \int \frac{t^{10}}{t^5 - 1} 5t^4 dt = \\ &= |u = t^5 - 1, du = 5t^4 dt, t^{10} = (t^5)^2 = (u+1)^2| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{12}{5} \int \frac{(u+1)^2}{u} du = \frac{12}{5} \int \frac{u^2 + 2u + 1}{u} du = \\
&= \frac{12}{5} \left(\int u du + \int 2 du + \int \frac{du}{u} \right) = (\text{табличные интегралы,} \\
&\text{п. 1}^\circ, 1^\circ, 2^\circ \text{ соответственно}) = \frac{12}{5} \left(\frac{u^2}{2} + 2u + \ln |u| \right) + C = \\
&= \frac{12}{5} \left(\frac{(t^5 - 1)^2}{2} + 2(t^5 - 1) + \ln |t^5 - 1| \right) + C = \\
&= \frac{12}{5} \left(\frac{t^{10}}{2} - t^5 + \frac{1}{2} + 2t^5 - 2 + \ln |t^5 - 1| \right) + C = \\
&= \left| \text{полагаем } C_1 = \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{2} - \frac{12}{5} \cdot 2 + C, \text{ и возвращаемся к } x \right| = \\
&= \frac{6}{5} \sqrt[5]{x^5} + \frac{12}{5} \sqrt[12]{x^5} + \frac{12}{5} \ln |\sqrt[12]{x^5} - 1| + C_1. \quad \triangleright
\end{aligned}$$

ПРИМЕР 3.4. Найти интеграл

$$\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln \sin x} dx.$$

◁ Заметим, что $(\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x$, т. е. производная знаменателя равна числителю. В таких случаях к цели ведет подстановка, при которой в качестве новой переменной интегрирования принимается знаменатель

$$\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln \sin x} dx = \left| t = \ln \sin x, dt = \operatorname{ctg} x dx \right| =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = (\text{табличный интеграл п. 2}^\circ) =$$

$$= \ln |t| + C = \ln |\ln \sin x| + C. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 3.5. Найти интеграл

$$\int \frac{2x^5 - 3x^2}{1 + 3x^3 - x^6} dx.$$

◁ Производная знаменателя

$$(1 + 3x^3 - x^6)' = 9x^2 - 6x^5 = 3(3x^2 - 2x^5) = -3(2x^5 - 3x^2)$$

отличается от числителя лишь на постоянный множитель (-3) . Поэтому здесь, как и в примере 3.4, подстановка со знаменателем в качестве новой переменной интегрирования ведет к цели. Поэтому

$$\int \frac{2x^5 - 3x^2}{1 + 3x^3 - x^6} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C, \quad dt = -3(2x^5 - 3x^2) dx,$$

$$(2x^5 - 3x^2) dx = -\frac{1}{3} dt \Rightarrow \int \frac{1}{t} dt = -\frac{1}{3} \ln |1 + 3x^3 - x^6| + C. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 3.6. Найти интеграл

$$\int \frac{1 - \sin x}{(x + \cos x)^3} dx.$$

◁ Замечаем, что $(x + \cos x)' = 1 - \sin x$. И хотя здесь числитель — производная не знаменателя, а функции, являющейся основанием степени, стоящей в знаменателе, примем именно эту функцию за новую переменную интегрирования $t = x + \cos x$ и придем к табличному интегралу:

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - \sin x}{(x + \cos x)^3} dx &= \int \frac{1}{t^3} dt = \int t^{-3} dt = -\frac{1}{2} t^{-2} + C = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(x + \cos x)^2} + C. \quad \triangleright \end{aligned}$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

$$\begin{array}{ll}
 1) \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}; & 2) \int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}; \\
 3) \int dx\sqrt{x+x}; & 4) \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.
 \end{array}$$

Ответы:

$$\begin{array}{l}
 1) \frac{3}{2}(x+1)^{(2/3)} - 3(x+1)^{(1/3)} + 3 \ln |1+(x+1)^{(1/3)}| + C; \\
 2) x + \frac{6}{5}x^{(5/6)} + \frac{3}{2}x^{(2/3)} + 2x^{(1/2)} + 3x^{(1/3)} + 6x^{(1/6)} + 6 \ln |x^{(1/6)} - 1| + C; \\
 3) 2x^{(1/2)} - 4x^{(1/4)} + 4 \ln (1+x^{(1/4)}) + C; \\
 4) \ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}+1} + C.
 \end{array}$$

§ 3.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Этот метод основан на применении формулы интегрирования по частям

$$\int uv' dx = uv - \int vu' dx \quad (3.1)$$

или

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (3.1')$$

Предполагается, что u и v — дифференцируемые функции x .

ПРИМЕР 3.7. Найти интеграл

$$\int x \cos x dx.$$

◁ Положим $u = x$, $v' = \cos x$. Тогда $u' = 1$, $v = \int \cos x dx = \sin x$ (в качестве v берем первообразную, соответствующую постоянной C , равной нулю).

По формуле (3.1) получаем

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C. \triangleright$$

Заметим, что при переходе в равенстве (3.1) от интеграла в левой части к интегралу в правой части множитель u дифференцируется, а множитель v' интегрируется (интегрируется часть подынтегрального выражения). Поэтому за u целесообразно принимать множитель, который при дифференцировании упрощается, а за v' — множитель, который легко интегрируется.

ПРИМЕР 3.8. Найти интеграл

$$\int x e^x dx.$$

◁ Учитывая замечание к примеру 3.7, можно положить $u = x, v' = e^x$. Но выкладки упрощаются, если использовать формулу интегрирования по частям в виде (3.1'). Для этого положим $dv = e^x dx = de^x$. Подведение функции e^x под знак дифференциала приводит исходный интеграл к виду

$$\int x de^x = \int u dv,$$

который сразу позволяет определить функцию $v = e^x$.

По формуле (3.1') получаем

$$\int x e^x dx = \int x de^x = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C. \triangleright$$

ПРИМЕР 3.9. Найти интеграл

$$\int x e^{-x} dx.$$

◁ Как и в примере 3.8, подведем e^{-x} под знак дифференциала ($e^{-x} dx = -de^{-x}$). Тогда, применяя формулу (3.1'), получаем:

$$\begin{aligned} \int x e^{-x} dx &= -\int x de^{-x} = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C = \\ &= -e^{-x}(x + 1) + C. \triangleright \end{aligned}$$

ПРИМЕР 3.10. Найти интеграл

$$\int x^2 e^{-x} dx.$$

◁ В этом случае придется дважды применять формулу интегрирования по частям, каждый раз понижая степень множителя при e^{-x} :

$$\int x^2 e^{-x} dx = \int x^2 (-e^{-x})' dx = -x^2 e^{-x} + \int (x^2)' e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + \\ + 2 \int x e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2e^{-x}(x+1) + C = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$$

($\int x e^{-x} dx$ — интеграл из примера 3.9). $\triangleright$

ПРИМЕР 3.11. Найти интеграл

$$\int \ln(x^2 + 1) dx.$$

$\triangleright$ Полагая $u = \ln(x^2 + 1)$, $dv = dx$, получим:

$$\begin{aligned} \int \ln(x^2 + 1) dx &= x \ln(x^2 + 1) - \int x d \ln(x^2 + 1) = \\ &= x \ln(x^2 + 1) - \int \frac{2x^2}{x^2 + 1} dx = \\ &= x \ln(x^2 + 1) - 2 \int \frac{(x^2 + 1) - 1}{x^2 + 1} dx = \\ &= x \ln(x^2 + 1) - 2 \left[\int dx - \int \frac{dx}{x^2 + 1} \right] = \\ &= x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C. \quad \triangleright \end{aligned}$$

ПРИМЕР 3.12. Найти интеграл

$$\int e^x \sin x dx.$$

$\triangleleft$ Используем прием, называемый «приведением интеграла к самому себе» — положим $I = \int e^x \sin x dx$. Тогда, применяя дважды формулу (3.1'):

$$\begin{aligned} I &= \int \sin x de^x = e^x \sin x - \int e^x d \sin x = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = \\ &= e^x \sin x - \int \cos x de^x = e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x d \cos x = \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - I. \end{aligned}$$

Таким образом, для определения интеграла I получена формула $I = e^x \sin x - e^x \cos x - I$, откуда (перенося I

из правой части в левую и «оставляя» произвольную постоянную C_1 справа) $2I = e^x \sin x - e^x \cos x + C_1$ и $I = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + C$ ($C = \frac{C_1}{2}$). Следовательно,

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C. \quad \triangleright$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти интегралы:

- 1) $\int x \sin 2x dx$; 2) $\int x \cdot 3^x dx$; 3) $\int \arccos x dx$;
 4) $\int x^3 e^{-x} dx$; 5) $\int x \operatorname{arctg} x dx$; 6) $\int e^x \cos x dx$.

Ответы:

- 1) $\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{2} x \cos 2x + C$; 2) $x \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3} + C$;
 3) $x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$; 4) $(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C$;
 5) $\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$; 6) $\frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$;
 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ — произвольное разбиение этого отрезка на n частей;

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) — длины элементарных отрезков;

$d = \max_{k=1, \dots, n} \Delta x_k$ — диаметр разбиения;

$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$) — точки, произвольно выбранные на элементарных отрезках.

Тогда сумма

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

называется *интегральной суммой* для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. При фиксированном способе разбиения $[a, b]$ на элементарные отрезки и выбора на них точек $\{\xi_k\}$ интегральная сумма σ является функцией диаметра разбиения d .

Если существует конечный предел интегральных сумм σ при $d \rightarrow 0$, независимый от способов разбиения отрезка $[a, b]$ и выбора точек $\{\xi_k\}$, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$, а величина предела называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается символом $\int_a^b f(x) dx$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке. Если, кроме того, $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx$ выража-

ет площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, отрезком $[a, b]$ оси Ox и отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ (рис. 4.1)

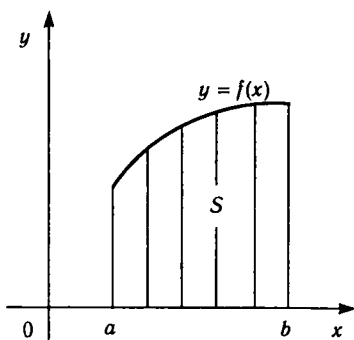


Рис. 4.1

$$\int_a^b f(x) dx = S.$$

Рассматривают определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ ($b > a$), при определении которого отрезок $[a, b]$ разбивается на элементарные отрезки справа налево точками

$$b = x_0 > x_1 > \dots > x_{n-1} > x_n = a.$$

Для функции $f(x)$, интегрируемой на $[a, b]$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx,$$

т. е. при перемене пределов интегрирования местами определенный интеграл меняет знак.

§ 4.1. ФОРМУЛА НЬЮТОНА—ЛЕЙБНИЦА

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ — одна из ее первообразных на этом отрезке, то применима *формула Ньютона—Лейбница*

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Эта формула используется для вычисления определенных интегралов.

ПРИМЕР 4.1. Вычислить

$$\int_1^4 \frac{dx}{x^2}.$$

◁ Одна из первообразных для функции $\frac{1}{x^2}$ есть $\left(-\frac{1}{x}\right)$. Поэтому, применив формулу Ньютона–Лейбница, получим

$$\int_1^4 \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)_1^4 = \left(-\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = \frac{3}{4}. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 4.2. Вычислить

$$\int_1^9 3\sqrt{x} dx.$$

◁ Так как $\int 3\sqrt{x} dx = 3 \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = 2\sqrt{x^3} + C$, то одной из первообразных для функции $3\sqrt{x}$ является $2\sqrt{x^3} - 2$. Применяя формулу Ньютона–Лейбница, найдем

$$\int_1^9 3\sqrt{x} dx = \left(2\sqrt{x^3} - 2\right)_1^9 = (2\sqrt{9^3} - 2) - (2\sqrt{1^3} - 2) = 52. \quad \triangleright$$

Заметим, что, если бы мы взяли какую-либо другую первообразную, то результат вычисления определенного интеграла был бы тем же (так как постоянная, отличающая две первообразные одной и той же функции при вычитании результатов верхней и нижней подстановок уничтожается):

$$(F(x) + C)_a^b = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = F(x)_a^b.$$

Обычно используется наиболее простая из первообразных (получающаяся при $C = 0$). Так, в примере 4.2 результат проще получить используя первообразную $2\sqrt{x^3}$:

$$\int_1^9 3\sqrt{x} dx = 2\sqrt{x^3}_1^9 = 2\sqrt{9^3} - 2\sqrt{1^3} = 52.$$

ПРИМЕР 4.3. Вычислить

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(1+5x)^3}.$$

◁ Имеем

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(1+5x)^3} &= \int_{-2}^{-1} \frac{1/5 d(1+5x)}{(1+5x)^3} = \left[\frac{1}{5} \cdot \frac{(1+5x)^{-2}}{-2} \right]_{-2}^{-1} = \\ &= \left[-\frac{1}{10} \frac{1}{(1+5 \cdot (-1))^2} \right] - \left[-\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{(1+5 \cdot (-2))^2} \right] = \\ &= \frac{1}{10} \left(1 - \frac{1}{36} \right) = \frac{7}{72}. \quad \triangleright\end{aligned}$$

(В данном случае вначале нашли неопределенный интеграл способом подведения под знак дифференциала, а затем применили формулу Ньютона–Лейбница.)

ПРИМЕР 4.4. Вычислить

$$\int_{-0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}.$$

◁ Выделяя полный квадрат в знаменателе, получим

$$\int_{-0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}} = \int_{-0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{9-(x-1)^2}} = \int_{-0,5}^1 \frac{d(x-1)}{\sqrt{3^2-(x-1)^2}} =$$

(используем табличный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$)

$$\begin{aligned}&= \left(\arcsin \frac{x-1}{3} \right)_{-0,5}^1 = \arcsin 0 - \arcsin \left(-\frac{1}{2} \right) = \\ &= \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}. \quad \triangleright\end{aligned}$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Вычислить определенные интегралы:

- 1) $\int_4^1 \frac{dx}{x^3};$
- 2) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (a > 0; b > 0)$
- 3) $\int_0^1 \sqrt{1+xdx};$
- 4) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}.$

Ответы:

$$1) -\frac{15}{32}; \quad 2) \frac{3(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a})}{\sqrt[3]{ab}}; \quad 3) \frac{4\sqrt{2} - 2}{3}; \quad 4) \operatorname{arctg} \frac{1}{7}.$$

§ 4.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА ПО ЧАСТЯМ

Если функции $u(x)$, $v(x)$ и их производные непрерывны на отрезке $[a, b]$, то справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_a^b uv' dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b vu' dx \quad (4.1)$$

или

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (4.1')$$

ПРИМЕР 4.5. Вычислить

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x dx}{\sin^2 x}.$$

◁ Применяем формулу интегрирования по частям (4.1):

$$\begin{aligned} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x dx}{\sin^2 x} &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} x \cdot (-\operatorname{ctg} x)' dx = x \cdot (-\operatorname{ctg} x) \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} + \int_{\pi/4}^{\pi/3} x' \cdot \operatorname{ctg} x dx = \\ &= -\frac{\pi}{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} + \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin x} dx = \\ &= -\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4} \cdot 1 + \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \\ &= \pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) + \ln |\sin x| \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \\ &= \pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) + \left(\ln \sin \frac{\pi}{3} - \ln \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi(3\sqrt{3} - 4)}{12\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}. \quad \triangleright \end{aligned}$$

ПРИМЕР 4.6. Вычислить

$$\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x \, dx.$$

◁ По аналогии с вычислением подобного неопределенного интеграла будем вычислять интеграл «приведением его к самому себе»:

$$\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x \, dx = \int_0^{\pi/2} e^{2x} d(\sin x) =$$

(пользуемся формулой интегрирования по частям (4.1))

$$\begin{aligned} &= e^{2x} \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x d(e^{2x}) = e^{\pi} - \int_0^{\pi/2} 2e^{2x} \sin x \, dx = \\ &= e^{\pi} + 2 \int_0^{\pi/2} e^{2x} d(\cos x) = e^{\pi} + 2e^{2x} \cos x \Big|_0^{\pi/2} - 2 \int_0^{\pi/2} \cos x d(e^{2x}) = \\ &= e^{\pi} - 2 - 4 \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x \, dx. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x \, dx = e^{\pi} - 2 - 4 \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x \, dx.$$

Отсюда

$$5 \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x \, dx = e^{\pi} - 2$$

и, окончательно,

$$\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x \, dx = \frac{1}{5}(e^{\pi} - 2). \quad \triangleright$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_0^1 x e^{-x} \, dx; \quad 2) \int_0^{\pi} x^3 \sin x \, dx.$$

Ответы:

$$1) 1 - 2e^{-1}; \quad 2) \pi(\pi^2 - 6).$$

§ 4.3. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$;
функция $x = \varphi(t)$ непрерывна и имеет непрерывную
производную на $[\alpha, \beta]$;

$t = \varphi^{-1}(x)$ — обратная к ней функция на $[a, b]$, причем

$$\alpha = \varphi^{-1}(a) = t|_{x=a}, \quad \beta = \varphi^{-1}(b) = t|_{x=b}.$$

Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) d\varphi(t).$$

Эта формула выражает правило *подстановки* $x = \varphi(t)$ в определенном интеграле.

ПРИМЕР 4.7. Вычислить

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx.$$

◁ Делаем замену $t = \sqrt{x}$. Тогда $x = t^2$ — непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[4, 9]$ и

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx =$$

$$= |t = \sqrt{x}; t(4) = \sqrt{4} = 2; t(9) = \sqrt{9} = 3; x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt| =$$

$$= \int_2^3 \frac{2t^2}{t-1} dt = 2 \int_2^3 \left(\frac{t^2-1}{t-1} + \frac{1}{t-1} \right) dt =$$

$$= \int_2^3 2(t+1)dt + \int_2^3 \frac{2dt}{t-1} = (t+1)^2 \Big|_2^3 + 2(\ln |t-1|) \Big|_2^3 = 7 + 2\ln 2. \triangleright$$

ПРИМЕР 4.8. Вычислить

$$\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}.$$

◁ Имеем

$$\int_3^8 \frac{x \, dx}{\sqrt{1+x}} = \left| t = \sqrt{1+x}; x = t^2 - 1; t(3) = \sqrt{1+3} = 2; \right.$$

$$t(8) = \sqrt{1+8} = 3; \quad dx = 2t \, dt \left| = \int_2^3 \frac{(t^2 - 1) \cdot 2t \, dt}{t} = \right.$$

$$= 2 \int_2^3 (t^2 - 1) \, dt = 2 \left[\left(\frac{t^3}{3} - t \right) \right]_2^3 = 2 \left[(9 - 3) - \left(\frac{8}{3} - 2 \right) \right] = \frac{32}{3}. \triangleright$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

$$1) \int_0^1 \frac{\sqrt{x} \, dx}{1+x}; \quad 2) \int_0^1 \frac{x \, dx}{1+\sqrt{x}}.$$

Ответы:

$$1) 2 - \frac{\pi}{2}; \quad 2) \frac{5}{3} - 2 \ln 2.$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 5.1. РАЗЛОЖЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ ДРОБИ НА ПРОСТЕЙШИЕ

Рациональную функцию $R(x)$ всегда можно представить в виде:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{P_n(x)},$$

где $P_m(x)$, $P_n(x)$ — многочлены степеней m и n соответственно.

Отношение $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ при $n \geq 1$ называется *рациональной дробью, правильной*, если $m < n$, и *неправильной*, если $m \geq n$.

Неправильная дробь представима в виде

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = P_{m-n}(x) + \frac{P_s(x)}{P_n(x)} \quad (s < n),$$

где $P_{m-n}(x)$ — многочлен степени $(m - n)$, называемый *целой частью* дроби;

$P_s(x)$ — многочлен степени $s < n$ и, следовательно, дробь $\frac{P_s(x)}{P_n(x)}$ правильная.

Правильную дробь можно разложить на сумму простейших дробей вида

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l}, \quad (p^2-4q < 0),$$

где A, M, N, a, p, q — действительные числа; $k, l = 1, 2, \dots$

В этом разложении каждому действительному корню a кратности k знаменателя $P_n(x)$ соответствуют k слагаемых

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k};$$

каждой паре мнимых сопряженных корней кратностей l знаменателя $P_n(x)$ (являющихся корнями квадратного трехчлена $x^2 + px + q$) соответствуют l слагаемых

$$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_lx + N_l}{(x^2 + px + q)^l}.$$

Для разложения правильной дроби на сумму простейших используется *метод неопределенных коэффициентов*, под которыми понимаются коэффициенты $A_1, \dots, A_k, \dots, M_1, \dots, M_l, N_1, \dots, N_l, \dots$ определяемые из условий тождественности правильной дроби и ее разложения (см. примеры 5.1, 5.2, 5.3, 5.4). Коэффициенты определяются однозначно, так как разложение является единственным.

§ 5.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Для интегрирования рациональной дроби можно использовать следующий алгоритм.

1°. Выделить целую часть, если дробь неправильная (это можно сделать, например, разделив «углом» числитель на знаменатель).

2°. Разложить знаменатель $P_n(x)$ на множители: линейные

$$(x - a_1), (x - a_2), \dots,$$

соответствующие действительным корням $a_1, a_2, \dots$ и квадратичные

$$(x^2 + p_1x + q_1), (x^2 + p_2x + q_2), \dots,$$

соответствующие парам мнимых сопряженных корней знаменателя $P_n(x)$.

3°. Разложить правильную дробь на сумму простейших дробей.

4°. Проинтегрировать целую часть (если она есть) и простейшие дроби. Целая часть интегрируется непосредственно как линейная комбинация степенных функций. Методы интегрирования простейших дробей см. ниже (в примерах).

ПРИМЕР 5.1. Найти

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx.$$

◁ Под интегралом стоит неправильная дробь — степень числителя (равная 5) больше степени знаменателя (равной 3). Выделим целую часть, для чего разделим числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} x^5 + x^4 - 8 & x^3 - 4x \\ -x^5 - 4x^3 & x^2 + x + 4 \\ \hline x^4 + 4x^2 - 8 & \\ -x^4 - 4x^2 & \\ \hline 4x^3 + 4x^2 - 8 & \\ -4x^3 - 16x & \\ \hline 4x^2 + 16x - 8 & \end{array}$$

$4x^2 + 16x - 8$ — остаток от деления.

Таким образом,

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}.$$

Разложим получившуюся правильную дробь $\frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}$ на простейшие, а знаменатель на множители:

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} = \frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+2}.$$

Приводя последние три дроби к общему знаменателю и складывая их, придем к условию:

$$4x^2 + 16x - 8 = A_1(x-2)(x+2) + A_2x(x+2) + A_3x(x-2).$$

Коэффициенты A_1, A_2, A_3 можно определить, полагая в последнем равенстве x равным подходяще подобранным

числам (наиболее удобными являются действительные корни знаменателя исходной рациональной дроби). В нашем случае:

$$x = 0 \Rightarrow -8 = -4A_1;$$

$$x = 2 \Rightarrow 40 = 8A_2;$$

$$x = -2 \Rightarrow -24 = 8A_3;$$

$$\text{откуда } A_1 = 2; A_2 = 5; A_3 = -3.$$

Находим исходный интеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx &= \int (x^2 + x + 4) dx + \int \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} dx = \\ &= \int (x^2 + x + 4) dx + \int \frac{2dx}{x} + \int \frac{5dx}{x-2} + \int \frac{-3dx}{x+2} = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2 \ln |x| + 5 \ln |x-2| - 3 \ln |x+2| + C. \quad \triangleright \end{aligned}$$

Упражнение 5.1. Указать вид разложения правильной рациональной дроби на простейшие дроби (не определяя коэффициенты):

$$\text{а) } R = \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)}; \quad \text{б) } R = \frac{x^3 - 6x^2 + 9x + 7}{(x-2)^3(x-5)};$$

$$\text{в) } R = \frac{x}{x^4 - 3x^2 + 2}; \quad \text{г) } R = \frac{1}{x(x^2 + 1)};$$

$$\text{д) } R = \frac{x+1}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}; \quad \text{е) } R = \frac{x^7}{(x^4-1)^2}.$$

$\triangleleft$ а) У знаменателя в данном случае только действительные простые корни. В разложении на простейшие дроби каждому такому корню соответствует одно слагаемое. Разложение будет иметь вид:

$$R = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+3} + \frac{A_3}{x-4}.$$

б) У знаменателя корни $x_1 = 2$ кратности 3 и $x_2 = 5$ кратности 1. Поэтому в разложении будут три слагаемых, соответствующих корню $x_1 = 2$, и одно, соответствующее корню $x_2 = 5$. Вид разложения следующий:

$$R = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3} + \frac{A_4}{x-5}.$$

в) Имеем:

$$\frac{x}{x^4 - 3x^2 + 2} = \frac{x}{(x^2 - 1)(x^2 - 2)} = \frac{x}{(x - 1)(x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}.$$

Рассуждая так же, как и в случае а), найдем, что в разложении R на сумму простейших дробей будет четыре слагаемых:

$$R = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x + 1} + \frac{A_3}{x - \sqrt{2}} + \frac{A_4}{x + \sqrt{2}}.$$

г) В данном случае в знаменателе есть квадратичный множитель $x^2 + 1$, не имеющий действительных корней. Так как он стоит в первой степени, то в разложении на простейшие дроби ему будет соответствовать слагаемое вида $\frac{Ax + B}{x^2 + 1}$. Тогда

$$R = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2x + A_3}{x^2 + 1}.$$

д) В этом случае сомножителю знаменателя $(4 + x^2)^2$ при разложении на простейшие дроби будут соответствовать два слагаемых, а сомножителю $(1 + x^2)$ — одно слагаемое. Так как $(4 + x^2)$ и $(1 + x^2)$ не имеют действительных корней, то соответствующие простейшие дроби будут иметь вид:

$$\frac{Ax + B}{4 + x^2}, \quad \frac{Ax + B}{(4 + x^2)^2}, \quad \frac{Ax + B}{x^2 + 1}.$$

Линейному сомножителю знаменателя x соответствует одна простейшая дробь. Окончательно получим:

$$R = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2x + A_3}{4 + x^2} + \frac{A_4x + A_5}{(4 + x^2)^2} + \frac{A_6x + A_7}{1 + x^2}.$$

е) Имеем:

$$\begin{aligned} R &= \frac{x^7}{(x^4 - 1)^2} = \frac{x^7}{(x - 1)^2(x + 1)^2(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{A_1}{x - 1} + \frac{a_2}{(x - 1)^2} + \frac{A_3}{x + 1} + \frac{A_4}{(x + 1)^2} + \frac{A_5x + A_6}{x^2 + 1} + \frac{A_7x + A_8}{(x^2 + 1)^2}. \quad \triangleright \end{aligned}$$

ПРИМЕР 5.2. Найти

$$\int \frac{dx}{x^3 + 1}.$$

◁ $\frac{1}{x^3 + 1}$ — правильная рациональная дробь;

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A_1}{x + 1} + \frac{A_2x + A_3}{x^2 - x + 1},$$

$$1 = A_1(x^2 - x + 1) + (A_2x + A_3)(x + 1).$$

$$x = -1 \Rightarrow 1 = 3A_1 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{3};$$

$$x = 0 \Rightarrow 1 = A_1 + A_3 \Rightarrow A_3 = \frac{2}{3};$$

$$\begin{aligned} x = 1 &\Rightarrow 1 = A_1 + 2(A_2 + A_3) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 = \frac{1}{3} + 2A_2 + \frac{4}{3} \Rightarrow A_2 = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x + 1} + \frac{2 - x}{x^2 - x + 1} \right)$$

Полезно провести проверку правильности нахождения коэффициентов в разложении на простейшие дроби:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x + 1} + \frac{2 - x}{x^2 - x + 1} \right) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 - x + 1 + (2 - x)(x + 1)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 - x + 1 + 2x - x^2 + 2 - x}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{x^3 + 1} = \frac{1}{x^3 + 1}, \end{aligned}$$

т. е. коэффициенты верны.

Теперь найдем исходный интеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3 + 1} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x + 1} - \frac{1}{3} \int \frac{x - 2}{x^2 - x + 1} dx = \int \frac{(x^2 - x + 1)' - 2x - 1}{x^2 - x + 1} dx = \\ &= \frac{1}{3} \ln |x + 1| - \frac{1}{6} \int \frac{(2x - 1) - 3}{x^2 - x + 1} dx = \\ &= \frac{1}{3} \ln |x + 1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{3} \ln |x + 1| - \frac{1}{6} \int \frac{d(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} dx + \\
& + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x - 1/2)^2 + 3/4} = \frac{1}{3} \ln |x + 1| - \frac{1}{6} \ln (x^2 - x + 1) + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x - 1/2}{\sqrt{3}/2} + C = \frac{1}{3} \ln |x + 1| - \frac{1}{6} \ln (x^2 - x + 1) + \\
& + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

(При вычислении интеграла мы воспользовались способами «внесения под дифференциал» и «выделения полного квадрата».) ▸

ПРИМЕР 5.3. Найти

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1}.$$

◁ Заметим, что

$$\begin{aligned}
x^4 + 1 &= (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = \\
&= (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1),
\end{aligned}$$

где последние квадратные трехчлены уже неразложимы далее на двухчлены с действительными коэффициентами, так как у них отрицательные дискриминанты и, следовательно, мнимые корни.

Отсюда

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{A_1 x + A_2}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{B_1 x + B_2}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}.$$

Последнее равенство останется верным, если в нем « x » всюду заменить на « $-x$ »:

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{-A_1 x + A_2}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{-B_1 x + B_2}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}.$$

Так как правильная дробь единственным образом (с точностью до перемены мест слагаемых) разлагается в сумму простейших дробей, то при всех x должны быть верны равенства:

$$\frac{-A_1x + A_2}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \frac{B_1x + B_2}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}; \quad \frac{-B_1x + B_2}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} = \frac{A_1x + A_2}{x^2 - \sqrt{2}x + 1},$$

откуда $B_1 = -A_1$; $B_2 = A_2$. С учетом установленных равенств получаем:

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{A_1x + A_2}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{-A_1x + A_2}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \quad \text{или}$$

$$1 = (A_1x + A_2)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + (-A_1x + A_2)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

При $x = 0$ из последнего равенства получим, что $1 = 2A_2$, откуда $A_2 = \frac{1}{2}$; подставив далее $x = 1$, найдем:

$$1 = (A_1 + \frac{1}{2})(1 + \sqrt{2} + 1) + (-A_1 + \frac{1}{2})(1 - \sqrt{2} + 1),$$

$$1 = 2 + 2\sqrt{2}A_1$$

и $A_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, откуда окончательно получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^4 + 1} &= \frac{-1/(2\sqrt{2}) \cdot x + 1/2}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1/(2\sqrt{2}) \cdot x + 1/2}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{-x + \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right) \end{aligned}$$

Откуда

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\int \frac{\sqrt{2} - x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx + \int \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx \right].$$

Вычислим вначале $\int \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx$:

$$\int \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x + \sqrt{2}) + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| d(x^2 + \sqrt{2}x + 1) = (2x + \sqrt{2})dx \right| = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + \sqrt{2}x + 1)}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \\
&+ \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{d(x + \sqrt{2}/2)}{(x + \sqrt{2}/2)^2 + 1/2} = \\
&= \frac{1}{2} \ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x + \sqrt{2}/2}{1/\sqrt{2}} + C = \\
&= \frac{1}{2} \ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x + 1) + C.
\end{aligned}$$

Заметим, что, если $F'(x) = \varphi(x)$ для некоторых функций $F(x)$ и $\varphi(x)$, то

$$(-F(-x))' = -F'(-x) \cdot (-1) = F'(-x) = \varphi(-x),$$

т. е. для функции $\varphi(-x)$ первообразной будет $-F(-x)$. Так как функция $\frac{\sqrt{2} - x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$ получается из функции

$\frac{\sqrt{2} + x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$ подстановкой замены « x » на « $-x$ », то, с уче-

том вышесказанного, получим:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{2} - x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx &= - \left[\frac{1}{2} \ln((-x)^2 - \sqrt{2}x + 1) + \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{arctg}(-\sqrt{2}x + 1) \right] + C = \\
&= -\frac{1}{2} \ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) - \operatorname{arctg}(-\sqrt{2}x + 1).
\end{aligned}$$

Окончательно:

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\int \frac{\sqrt{2} - x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx + \int \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[-\frac{1}{2} \ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) - \operatorname{arctg}(1 - \sqrt{2}x) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \operatorname{arctg}(1 + \sqrt{2}x) \right] + C = \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} [\operatorname{arctg}(1 + \sqrt{2}x) + \\
&\quad + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x - 1)] + C. \quad \triangleright
\end{aligned}$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти интегралы:

$$1) \int \frac{x^6 - 2x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 4}{x^5 - 5x^3 + 4x} dx; \quad 2) \int \frac{x dx}{x^3 - 1}.$$

Ответы:

$$1) \frac{x^2}{2} + \ln|x| + \ln|x-2| - \ln|x+2| + \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{3}{2} \ln|x+1| + C;$$

$$2) \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Интеграл от дроби

$$\frac{Mx + n}{(x^2 + px + q)^k}$$

путем выделения полного квадрата сводится к интегралам вида

$$J = \int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^k} \quad \text{и} \quad J_k = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^k}.$$

J находится путем подведения $(x^2 + a^2)$ под знак дифференциала. $J_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$. Для J_k при $k > 1$ можно использовать рекуррентную формулу

$$J_k = \frac{x}{2a^2(k-1)(x^2 + a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)} J_{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots)$$

или подстановку $x = a \operatorname{tg} t$.

ПРИМЕР 5.4. Найти

$$\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx.$$

$$\triangleq \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} = \frac{x^3 + 2x - x - 1}{(x^2 + 2)^2} =$$

$$= \frac{x(x^2 + 2)}{(x^2 + 2)^2} - \frac{x + 1}{(x^2 + 2)^2} = \frac{x}{x^2 + 2} - \frac{x + 1}{(x^2 + 2)^2},$$

т. е. в данном случае разложение в сумму простейших дробей может быть получено простыми преобразованиями. Далее имеем:

$$\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx = \int \frac{xdx}{x^2 + 2} - \int \frac{(x + 1)dx}{(x^2 + 2)^2}.$$

Вычислим получившиеся интегралы.

$$1) \int \frac{xdx}{x^2 + 2} = \int \frac{1/2 \cdot d(x^2 + 2)}{x^2 + 2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) + C.$$

$$2) \int \frac{xdx}{(x^2 + 2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{(x^2 + 2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 2)}{(x^2 + 2)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x^2 + 2)} + C.$$

Интеграл $\frac{dx}{(x^2 + 2)^2}$ вычислим следующим образом:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} = \int \frac{dx}{x^2 + 2} \quad (\text{применяем формулу интегрирования по частям}) = \frac{x}{x^2 + 2} + \int \frac{2x^2}{(x^2 + 2)^2} dx = \frac{x}{x^2 + 2} +$$

$$+ 2 \int \frac{(x^2 + 2) - 2}{(x^2 + 2)^2} dx = \frac{x}{x^2 + 2} + 2 \int \frac{dx}{x^2 + 2} - 4 \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} =$$

$$= \frac{x}{x^2 + 2} + \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} - 4 \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2};$$

$$\text{откуда: } \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{x}{x^2 + 2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$$

(что совпадает с результатом применения рекуррентной формулы при $k = 2$).

Собирая все вместе, окончательно получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + 2} - \frac{x}{4(x^2 + 2)} - \\ &- \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} x\sqrt{2} + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) - \frac{x - 2}{4(x^2 + 2)} - \\ &- \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C. \quad \triangleright \end{aligned}$$

ПРИМЕР ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти интеграл $\int \frac{2x dx}{(1+x)(1+x^2)^2}$.

Ответ:

$$\frac{x-1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{4} \ln(1+x^2) + C.$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 6.1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Интеграл вида

$$\int R(\sin x, \cos x) dx,$$

где $R(u, v)$ — рациональная функция относительно двух аргументов u и v , с помощью *универсальной подстановки*

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

сводится к интегралу от рациональной функции относительно новой переменной интегрирования t .

При этом используются формулы

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Если $R(-u, v) = -R(u, v)$, т. е. подынтегральная функция является нечетной относительно синуса, то можно использовать подстановку

$$t = \cos x;$$

если $R(u, -v) = -R(u, v)$ (нечетность относительно косинуса), то

$$t = \sin x;$$

если $R(-u, -v) = R(u, v)$ (четность по совокупности аргументов), то

$$t = \operatorname{tg} x \quad \text{или} \quad t = \operatorname{ctg} x.$$

Эти подстановки при указанных условиях рационализируют подынтегральное выражение и называются *полууниверсальными*.

ПРИМЕР 6.1. Найти

$$\int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x}.$$

◁ Применим универсальную тригонометрическую подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, в результате перейдем к интегралу от рациональной функции (говорят, что универсальная тригонометрическая подстановка «рационализирует» подынтегральное выражение):

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x} &= \left| t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x} = \right. \\ &= \frac{1}{5 - 4 \cdot (2t/(1+t^2)) + 3 \cdot (1-t^2)/(1+t^2)} = \frac{1+t^2}{2t^2 - 8t + 8}; \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} &= \int \frac{1+t^2}{2t^2 - 8t + 8} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t^2 - 4t + 4} = \\ &= \int \frac{d(t-2)}{(t-2)^2} = -\frac{1}{t-2} + C = \frac{1}{\operatorname{tg}(x/2) - 2} + C. \triangleright \end{aligned}$$

ПРИМЕР ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти интеграл $\int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}$.

Ответ:

$$\frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg}(x/2) + 4}{3} + C.$$

ПРИМЕР 6.2. Найти

$$\int \sin^3 x dx.$$

◁ В данном случае $R(u, v) = u^3$ — нечетная относительно синуса функция, поэтому используем подстановку $t = \cos x$:

$$\begin{aligned}
 \int \sin^3 x dx &= \int \sin^2 x \cdot \sin x dx = \int t = \cos x; \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \\
 &= 1 - t^2; dt = d \cos x = -\sin x dx \mid = -\int (1 - t^2) dt = \\
 &= \int (t^2 - 1) dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C. \quad \triangleright
 \end{aligned}$$

ПРИМЕР 6.3. Найти

$$\int \cos^5 x dx.$$

◁ Здесь $R(u, v) = v^5$ — функция, нечетная относительно косинуса. Сделаем подстановку $t = \sin x$:

$$\begin{aligned}
 \int \cos^5 x dx &= \int \cos^4 x \cdot \cos x dx = \int t = \\
 &= \sin x; \cos^4 x = (1 - \sin^2 x)^2 = \\
 &= (1 - t^2)^2; dt = d \sin x = \cos x dx \mid = \\
 &= \int (1 - t^2)^2 dt = \int (t^4 - 2t^2 + 1) dt = \\
 &= \frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^3 x}{3} + \sin x + C. \quad \triangleright
 \end{aligned}$$

ПРИМЕР 6.4. Найти

$$\int \frac{dx}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x}.$$

◁ В данном случае $R(u, v) = \frac{1}{4 - 3v^2 + 5u^2}$ и

$$R(-u, -v) = \frac{1}{4 - 3(-v)^2 + 5(-u)^2} = \frac{1}{4 - 3v^2 + 5u^2} = R(u, v).$$

Применим подстановку $t = \operatorname{tg} x$:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x} &= \int \frac{1}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x} \cdot \frac{dx}{dx} = \\
 &= \int \frac{1}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x dx = \\
 &= \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{4(1 + \operatorname{tg}^2 x) - 3 + 5 \operatorname{tg}^2 x} = \int \frac{1}{9 \operatorname{tg}^2 x + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{9t^2 + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \Big| = \int \frac{1}{9t^2 + 1} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dt}{9t^2 + 1} = \\
 &= \frac{1}{3} \int \frac{d(3t)}{(3t)^2 + 1} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 3t + C = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} (3 \operatorname{tg} x) + C. \quad \triangleright
 \end{aligned}$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти интегралы:

$$\begin{aligned}
 &1) \int \cos^3 x dx; \quad 2) \int \sin^5 x dx; \\
 &3) \int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}; \quad 4) \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}.
 \end{aligned}$$

Ответы:

$$\begin{aligned}
 &1) \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C; \quad 2) -\cos x + \frac{2 \cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + C; \\
 &3) \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) + C; \quad 4) \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} (\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C.
 \end{aligned}$$

Иногда для интегрирования тригонометрических выражений применяются тригонометрические формулы понижения степени:

$$\begin{aligned}
 \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \sin^2 x = \\
 &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x;
 \end{aligned}$$

формулы преобразования произведений синусов и косинусов различных аргументов в суммы или разности синусов и косинусов:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)),$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)).$$

ПРИМЕР 6.5. Найти

$$\int \cos^2 x dx.$$

◁ Воспользуемся формулой понижения степени (перейдем к двойному аргументу):

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x dx &= \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{4} \int \cos 2x d(2x) = \\ &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C. \quad \triangleright \end{aligned}$$

ПРИМЕР 6.6. Найти

$$\int \cos^4 x dx.$$

◁ Последовательно понижая степень, получим:

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x dx &= \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \right)^2 dx = \\ &= \int \frac{1}{4} dx + \int \frac{1}{2} \cos 2x dx + \int \frac{1}{4} \cos^2 2x dx = \\ &= \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \int \cos 2x d(2x) + \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} (1 + \cos 4x) dx = \\ &= \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{32} \int \cos 4x d(4x) = \\ &= \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x + C = \\ &= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C. \quad \triangleright \end{aligned}$$

ПРИМЕР 6.7. Найти

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

◁ В данном случае для понижения степени используем формулу синуса двойного аргумента, а затем формулу понижения степени синуса:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \frac{1}{4} \sin^2 2x dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{32} \int \cos 4x d(4x) = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C. \triangleright$$

ПРИМЕР 6.8. Найти

$$\int \cos x \sin 3x dx.$$

◁ Преобразуем произведение $\sin 3x \cos x$ в сумму:

$$\begin{aligned} \int \cos x \sin 3x dx &= \int \frac{1}{2} (\sin 4x + \sin 2x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \int \sin 4x d(4x) + \frac{1}{2} \int \sin 2x d(2x) \right) = \\ &= -\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} \cos 2x + C. \triangleright \end{aligned}$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1) $\int \sin^2 x dx$; 2) $\int \sin^4 x dx$; 3) $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$;

4) $\int \cos 2x \cos 3x dx$; 5) $\int \sin 2x \sin 5x dx$.

Ответы:

1) $\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$; 2) $\frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$;

3) $\frac{3}{128} x - \frac{1}{128} \sin 4x + \frac{1}{1024} \sin 8x + C$; 4) $\frac{1}{10} \sin 5x + \frac{1}{2} \sin x + C$;

5) $\frac{1}{6} \sin 3x - \frac{1}{14} \sin 7x + C$.

§ 6.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Интегралы вида

$$\begin{aligned} &\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx, \quad \int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx, \\ &\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx, \quad (a > 0) \end{aligned}$$

тригонометрическими подстановками

$x = a \sin t$ (или $x = a \cos t$), $x = a \operatorname{tg} t$ (или $x = a \operatorname{ctg} t$),

$$x = \frac{a}{\cos t} \quad \text{или} \quad x = \frac{a}{\sin t}$$

сводятся к интегралам вида

$$\int R_1(\sin t, \cos t) dt.$$

Здесь R и R_1 — рациональные функции своих аргументов.
Для интегралов вида

$$\int R \left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx,$$

где a, b, c, d — постоянные, а R — рациональная функция, можно использовать подстановку

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},$$

которая рационализирует подынтегральное выражение.

Следует иметь в виду, что существует много других подстановок и других приемов для интегрирования различных иррациональностей, которые здесь не рассматриваются и которые читатель может найти в учебниках и задачниках по математическому анализу.

ПРИМЕР 6.9. Найти

$$\int_{2,5}^5 \frac{(\sqrt{25-x^2})^3}{x^4} dx.$$

◁ Поскольку соответствующий неопределенный интеграл имеет вид $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2}) dx$, $a=5$, то применим тригонометрическую подстановку $x = 5 \sin t$.

Если в качестве обратной функции рассматривать $t = \arcsin \frac{x}{5}$, то нижнему пределу интегрирования $x = 2,5$ будет соответствовать $t = \frac{\pi}{6}$; верхнему $x = 5$ — $t = \frac{\pi}{2}$. Отображение $x(t): \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow [2,5; 5]$, задаваемое формулой $x(t) = 5 \sin t$ удовлетворяет тогда всем условиям теоремы о замене переменных в определенном интеграле. Поэтому

$$\int_{2,5}^5 \frac{(\sqrt{25 - x^2})^3}{x^4} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{(5 \cos t)^3 \cdot 5 \cos t dt}{5^4 \sin^4 t} = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^4 t}{\sin^4 t} dt.$$

$$\sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - 25 \sin^2 t} = 5 |\cos t| = 5 \cos t$$

$$\left(\text{так как } t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right] \right) = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{(5 \cos t)^3 \cdot 5 \cos t dt}{5^4 \sin^4 t} = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^4 t}{\sin^4 t} dt.$$

Это интеграл вида

$$\int R(\sin t, \cos t) dt,$$

где $R(u, v) = \frac{v^4}{u^4}$ обладает свойством:

$$R(-u, -v) = \frac{(-v)^4}{(-u)^4} = \frac{v^4}{u^4} = R(u, v).$$

Поэтому здесь рационализирующими будут подстановки $y = \operatorname{tg} t$ и $y = \operatorname{ctg} t$. Более удобной в нашем случае оказывается подстановка $y = \operatorname{ctg} t$:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^4 t}{\sin^4 t} dt = \left| y = \operatorname{ctg} t; dy = -\frac{1}{\sin^2 t} dt = -(1 + \operatorname{ctg}^2 t) dt \Rightarrow \right.$$

$$\Rightarrow dt = -\frac{dy}{1 + y^2}; \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0 \Big| =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\int_{\sqrt{3}}^0 \frac{y^4}{1+y^2} dy = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{y^4}{1+y^2} dy = \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{y^4-1}{1+y^2} + \frac{1}{1+y^2} \right) dy = \\
 &= \int_0^{\sqrt{3}} (y^2-1) dy + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dy}{1+y^2} = \left(\frac{y^3}{3} - y \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} y \Big|_0^{\sqrt{3}} = \\
 &= \left(\frac{(\sqrt{3})^3}{3} - \sqrt{3} \right) + \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}. \quad \triangleright
 \end{aligned}$$

ПРИМЕР 6.10. Найти

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx.$$

◁ Интеграл вида $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2}) dx$, $a=1$, поэтому сделаем замену $x = \operatorname{tg} t$:

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx &= \left| x = \operatorname{tg} t, \quad t \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3} \right]; \right. \\
 \sqrt{1+x^2} &= \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{1}{|\cos t|} = \frac{1}{\cos t}; \quad dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt \Big| = \\
 &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 t} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dt}{\cos t \sin^2 t} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos t dt}{\cos^2 t \sin^2 t} = \\
 &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{d \sin t}{(1-\sin^2 t) \sin^2 t} = \left| y = \sin t; \quad y \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad y \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \\
 &= \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dy}{(1-y^2)y^2}.
 \end{aligned}$$

Это интеграл от рациональной функции, легко видеть, что

$$\frac{1}{(1-y^2)y^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{1-y^2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dy}{(1-y^2)y^2} &= \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dy}{y^2} + \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dy}{1-y^2} = \left(-\frac{1}{y} \right) \Big|_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} + \\ &+ \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{y+1}{y-1} \right| \right) \Big|_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} = \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1+\sqrt{3}/2}{1-\sqrt{3}/2} - \ln \frac{1+\sqrt{2}/2}{1-\sqrt{2}/2} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \ln \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{3}} + \\ &+ \frac{1}{2} \ln \frac{(2+\sqrt{3})^2}{2^2-3} - \frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1} = \frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{3}} + \ln \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}. \quad \triangleright \end{aligned}$$

ПРИМЕР 6.11. Найти

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx.$$

◁ Подынтегральная функция имеет вид $R(x, \sqrt{x^2-a^2})$ (при $a=1$). Делаем замену $x = \frac{1}{\sin t}$;

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx = \left| x = \frac{1}{\sin t}; \quad dx = \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt; \quad x=1 \text{ при } t = \frac{\pi}{2}; \right.$$

$$\begin{aligned} x=2 \text{ при } t = \frac{\pi}{6}; \quad \sqrt{x^2-1} &= \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} = \left| \frac{\cos t}{\sin t} \right| = \frac{|\cos t|}{|\sin t|} = \\ &= -\int_{\pi/2}^{\pi/6} \frac{\cos t}{\sin t} \cdot \left(\frac{1}{\sin t} \right)^{-1} \cdot \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t} dt = \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin^2 t} - \int_{\pi/6}^{\pi/2} dt = (-\operatorname{ctg} t) \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}. \quad \triangleright \end{aligned}$$

ПРИМЕР 6.12. Найти

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{1+x} \frac{dx}{x}.$$

◁ Используем подстановку $t = \frac{\sqrt{1-x}}{1+x}$, тогда $t^2 = \frac{1-x}{1+x}$ и $(1+x)t^2 = 1-x$, что дает $x(1+t^2) = 1-t^2$ и $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$;

$dx = \frac{(-4t)}{(1+t^2)^2} dt$ и интеграл преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \int t \cdot \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^{-1} \cdot \frac{(-4t)}{(1+t^2)^2} dt &= -4 \int \frac{t^2}{(1-t^2)(1+t^2)} dt = \\ &= -4 \int \left(\frac{1}{1-t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right) \cdot \frac{1}{2} dt = -2 \int \frac{dt}{1-t^2} + 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = \\ &= 2 \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + 2 \operatorname{arctg} t + C = \ln \left| \frac{\sqrt{(1-x)/(1+x)} - 1}{\sqrt{(1-x)/(1+x)} + 1} \right| + \\ &\quad + 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x}}{1+x} + C. \triangleright \end{aligned}$$

ПРИМЕР 6.13. Найти

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2} dx.$$

◁ Этот интеграл — частный случай интеграла

$$\int R \left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx \quad (\text{где } n=2; c=0; d=1). \text{ Поэтому испо-}$$

льзуем подстановку $t = \sqrt{2x+1}$ или $t^2 = 2x+1$ и $t dt = dx$:

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2} dx = \int t \cdot \left(\frac{t^2-1}{2} \right)^{-2} \cdot t dt = 4 \int \frac{t^2}{(t^2-1)^2} dt.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{(t^2-1)^2} &= \left(\frac{t}{t^2-1} \right)^2 = \left(\frac{t}{(t-1)(t+1)} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} \right) \right)^2 = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(t-1)^2} + 2 \frac{1}{t^2-1} + \frac{1}{(t+1)^2} \right) \end{aligned}$$

Поэтому интеграл равен

$$\begin{aligned}
 4 \cdot \frac{1}{4} \int \left[\frac{1}{(t-1)^2} + 2 \frac{1}{t^2-1} + \frac{1}{(t+1)^2} \right] dt &= \int \frac{d(t-1)}{(t-1)^2} + 2 \int \frac{dt}{t^2-1} + \\
 + \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2} &= -\frac{1}{t-1} + 2 \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{1}{t+1} + C = \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \\
 - \frac{2t}{t^2-1} + C &= \ln \left| \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1} \right| - \frac{2\sqrt{2x+1}}{(\sqrt{2x+1})^2-1} + C = \\
 &= \ln \frac{|\sqrt{2x+1}-1|}{\sqrt{2x+1}+1} - \frac{\sqrt{2x+1}}{x} + C. \quad \triangleright
 \end{aligned}$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти интегралы:

$$1) \int \frac{x\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} dx, \quad 2) \int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}.$$

Ответы:

$$1) \frac{1}{2} \arcsin x = \frac{x+2}{2} \sqrt{1-x^2} + C; \quad 2) \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x+1}}{2} + C.$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР

§ 7.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиками непрерывных функций $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, $y_1(x) \leq y_2(x)$ и отрезками прямых $x = a$, $x = b$ (рис. 7.1) выражается формулой

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx. \quad (7.1)$$

В частности, при $y_1(x) \equiv 0$, $y_2(x) = y(x)$ получаем формулу

$$S = \int_a^b y(x) dx, \quad (7.2)$$

площади криволинейной трапеции, изображенной на рис. 7.2.

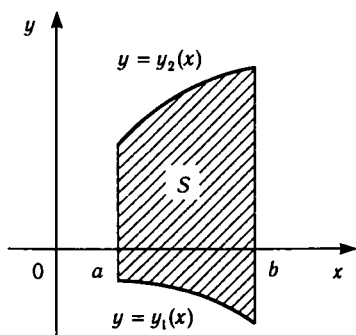


Рис. 7.1

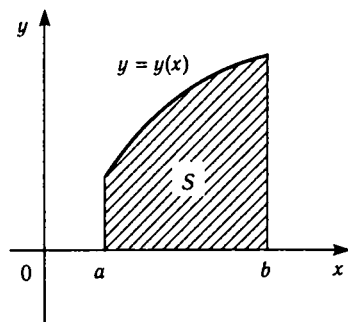


Рис. 7.2

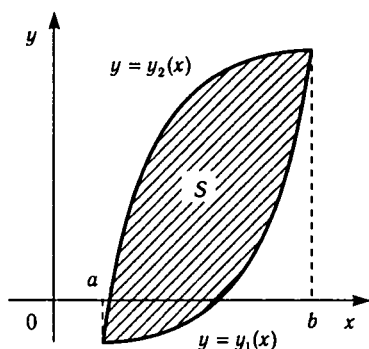


Рис. 7.3

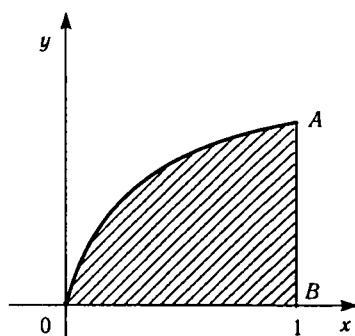


Рис. 7.4

Следует иметь в виду, что формулы (7.1), (7.2) остаются верными и в тех случаях, когда каждый из отрезков прямых $x = a$, $x = b$ или одновременно оба вырождаются в точки (рис. 7.3).

ПРИМЕР 7.1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = xe^{-x}, \quad x = 1, \quad y = 0.$$

◁ Сделаем рисунок. Имеем: $y(0) = 0$; $y(1) = \frac{1}{e}$; $xe^{-x} > 0$ при $x \in (0, 1)$. Следовательно, линия OA , ограничивающая фигуру, расположена над осью Ox (рис. 7.4). Отметим, что при решении задачи о вычислении площади фигуры не требуется точно устанавливать форму линий, ограничивающих фигуру.

Фигура является криволинейным треугольником (криволинейной трапецией, у которой левая вертикальная граница выродилась в точку O). Учитывая это и применяя формулу (7.2), найдем:

$$\begin{aligned} S_{OAB} &= \int_0^1 xe^{-x} dx = -\int_0^1 x de^{-x} = -xe^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = \\ &= -e^{-1} + (e^0 - e^{-1}) = 1 - 2e^{-1}. \quad \triangleright \end{aligned}$$

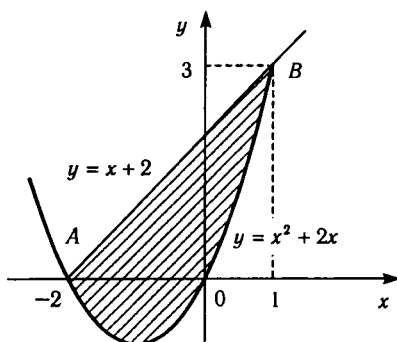


Рис. 7.5

ПРИМЕР 7.2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 + 2x, y = x + 2.$$

◁ Найдем точки пересечения линий:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = x + 2, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= \\ &= x + 2, x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow y_1 = 0, y_2 = 3$. Имеем две точки: $A(-2, 0), B(1, 3)$.

Фигура ограничена параболой $y = x^2 + 2x$ и отрезком AB прямой $y = x + 2$ (рис. 7.5).

Оба вертикальных отрезка, ограничивающих криволинейную трапецию слева и справа, выродились в точки A и B ; $y_1(x) = x^2 + 2x$; $y_2(x) = x + 2$. По формуле (7.1) получаем:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 ((x+2) - (x^2 + 2x)) dx = \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx = \\ &= \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right)_{-2}^1 = \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - 2 \right) = 4,5. \triangleright \end{aligned}$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти площади фигур, ограниченных линиями:

- 1) $y = 0, y = \ln x, x = 2, x = 3$; 2) $y = x^2, y = \sqrt{x}$;
- 3) $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1$.

Ответы:

- 1) $\ln \frac{27}{4} - 1$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $e + e^{-1} - 2$

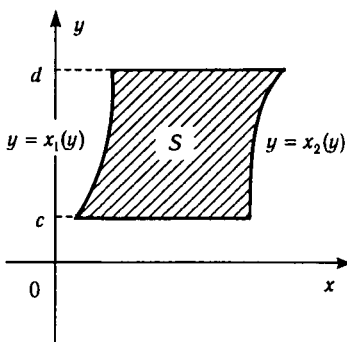


Рис. 7.6

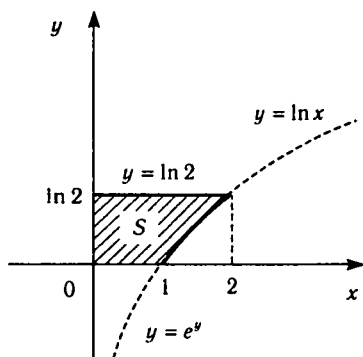


Рис. 7.7

Иногда бывает удобно в формулах (7.1), (7.2) поменять ролями x и y . Так, площадь S криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$ ($x_1(y) \leq x_2(y)$), $y = c$, $y = d$ (рис. 7.6) можно найти по формуле

$$S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y)) dy, \quad (7.3)$$

ПРИМЕР 7.3. Найти площадь S криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y = \ln x$, $x = 0$, $y = 0$, $y = \ln 2$ (рис. 7.7).

◁ Учитывая, что $y = \ln x \Rightarrow x = e^y$, можно положить $x_1(y) \equiv 0$, $x_2(y) = e^y$, $c = 0$, $d = \ln 2$. Используем формулу (7.3) для площади трапеции:

$$S = \int_0^{\ln 2} e^y dy = e^y \Big|_0^{\ln 2} = e^{\ln 2} - e^0 = 2 - 1 = 1. \quad \triangleright$$

Заметим, что в рассматриваемом случае неудобно пользоваться формулой (7.1), так как функция $y_1(x)$ задается различными формулами: $y_1 = 0$ на отрезке $[0, 1]$ и $y_1 = \ln x$ на отрезке $[1, 2]$ и площадь будет выражаться суммой двух интегралов:

$$S = \int_0^1 \ln 2 dx + \int_1^2 (\ln 2 - \ln x) dx,$$

причем второй из них вычислять менее приятно, чем $\int_0^{\ln 2} e^y dy$.

ПРИМЕР 7.4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x + 1$, $x - y - 1 = 0$.

$\triangleleft y^2 = 2x + 1$ — это парабола, ветви которой направлены вдоль оси Ox ; $x - y - 1 = 0$ — прямая. Найдем точки пересечения линий

$$\begin{aligned} \begin{cases} y^2 = 2x + 1 \\ x - y - 1 = 0, \end{cases} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{y^2 - 1}{2} = y + 1 &\Rightarrow (y + 1) \left(1 - \frac{y - 1}{2} \right) = 0 \Rightarrow (y + 1)(3 - y) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y_1 = -1, \quad y_2 = 3 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 4. \end{aligned}$$

Таким образом, точки пересечения линий $A(0, -1)$ и

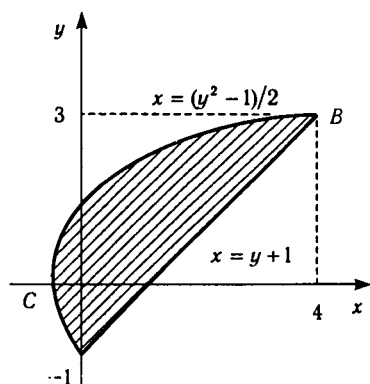


Рис. 7.8

$B(4, 3)$, а фигура ограничена параболой и отрезком AB (рис. 7.8). В этом случае также удобней формула (7.3), потому что нижняя граница описывается двумя выражениями $y = -\sqrt{2x + 1}$ и $y = x - 1$, а левая и правая границы — каждая одним: $x = \frac{y^2 - 1}{2}$ и $x = y + 1$, соответственно.

В данном случае $x_1(y) = \frac{y^2 - 1}{2}$; $x_2(y) = y + 1$.

Согласно (7.3):

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^3 \left(y + 1 - \frac{y^2 - 1}{2} \right) dy = \int_{-1}^3 \left(-\frac{y^2}{2} + y + \frac{3}{2} \right) dy = \\ &= \left(-\frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{-1}^3 + \frac{3}{2}(3 - (-1)) = \\ &= \left(-\frac{27}{6} + \frac{9}{2} \right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) + 6 = 5\frac{1}{3}. \quad \triangleright \end{aligned}$$

ПРИМЕР ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой:
 $y^2 + 8x = 16$; $y^2 - 24x = 48$.

Ответ:

$$\frac{32\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

§ 7.2. ПЛОЩАДЬ ФИГУРЫ, ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВОЙ, ЗАДАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

Если фигура ограничена кривой AB , заданной параметрическими уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \right\}$$

отрезками прямых $x = a$, $x = b$ и оси Ox (рис. 7.9), то ее площадь

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) dx(t), \quad (7.4)$$

где пределы интегрирования α, β находятся из условий $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$.

ПРИМЕР 7.5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos^3 t \\ y &= \sin^3 t \end{aligned} \right\}$$

◁ Установим форму кривой. При изменении параметра t от 0 до $\frac{\pi}{2}$ переменная x уменьшается от 1 до 0, а y растет от 0 до 1:

$$0 \xrightarrow{t} \frac{\pi}{2} \Rightarrow 1 \xrightarrow{x} 0 \Rightarrow 0 \xrightarrow{y} 1.$$

Следовательно, соответствующая часть кривой расположена в I квадранте ($x \geq 0, y \geq 0$). Для уточнения ее формы выразим производные функции $y(x)$, которая определяется заданными параметрическими уравнениями и графиком которой является кривая при $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3 \sin^2 t \cos t}{-3 \cos^2 t \cdot \sin t} = -\operatorname{tg} t < 0 \quad \text{при } t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''_{xx} = (-\operatorname{tg} t)'_t \cdot t'_x = -\frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{3 \cos^4 t \cdot \sin t} > 0 \quad \text{при } t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Следовательно, функция $y(x)$ убывающая, ее график выпуклый вниз имеет горизонтальную касательную при $t = 0$ ($y'_x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0 + 0$) и вертикальную — при $t = \frac{\pi}{2}$

($y'_x \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$) (рис. 7.9).

Аналогично можно исследовать форму кривой для $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $t \in \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$ и т. д. Но более целесообразно установить ее симметрию с помощью следующих соображений.

Пусть точка $M(x, y)$ кривой соответствует параметру $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Так как

$$\cos(\pi - t) = -\cos t, \quad \sin(\pi - t) = \sin t,$$

то ее точка M_1 , соответствующая параметру $t_1 = \pi - t$

$\left(t_1 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right)$ имеет координаты $(-x, y)$ и, следовательно, симметрична точке M относительно оси Oy (рис. 7.9).

Так как $M(x, y)$ — произвольная точка части кривой в I квадранте, то во II квадранте ($x \leq 0, y \geq 0$) расположена часть кривой, симметричная относительно оси Oy .

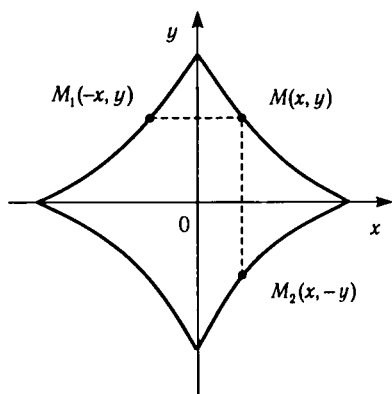


Рис. 7.9

Подобным же образом, учитывая, что

$$\cos(2\pi - t) = \cos t, \quad \sin(2\pi - t) = -\sin t,$$

устанавливаем симметрию точек M_2 , соответствующей параметру $t_2 = 2\pi - t$, и M и симметрию относительно оси Ox .

Исследованная кривая называется *астроидой*.

Фигура, ограниченная астроидой, состоит из четырех одинаковых частей. Подсчитаем площадь ее части, находящейся в I квадранте, по формуле (7.4): в данном случае $a = 0$, $b = 1$ (отрезок вырождается в точку); $\alpha = \frac{\pi}{2}$

($0 = x(\alpha) = \cos^3 \alpha$; $\beta = 0$ ($1 = x(\beta) = \cos^3 \beta$);

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{\pi/2}^0 \sin^3 t \, d\cos^3 t = 3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^4 t \, dt = \\ &= \frac{3}{4} \int_0^{\pi/2} (2 \sin t \cos t)^2 \sin^2 t \, dt = \frac{3}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t \sin^2 t \, dt = \\ &= \frac{3}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 - \cos 4t) \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) \, dt = \\ &= \frac{3}{16} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t - \cos 2t + \cos 4t \cos 2t) \, dt = \\ &= \frac{3}{16} \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{4} \sin 4t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\cos 2t + \cos 6t) \, dt = \\ &= \frac{3}{16} \left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{12} \sin 6t \right) \right]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{32}. \end{aligned}$$

Искомая площадь $S = 4S_1 = \frac{3\pi}{8}$. $\triangleright$

ПРИМЕР ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды: $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ и осью абсцисс.

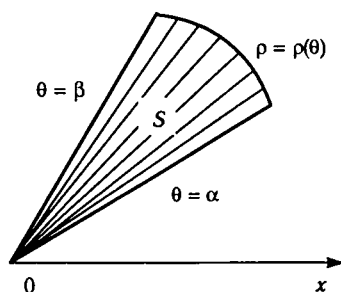
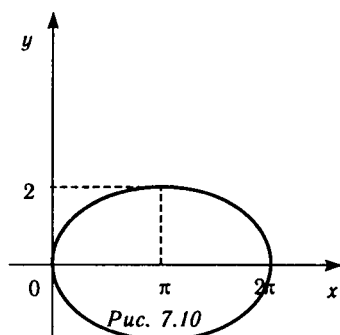


Рис. 7.11

Ответ:

Область изменения параметра $t: 0 \leq t \leq 2\pi$. Эскиз кривой — на рис. 7.10. Площадь фигуры равна 3π .

§ 7.3. ПЛОЩАДЬ КРИВОЛИНЕЙНОГО СЕКТОРА В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной уравнением в полярных координатах

$$\rho = \rho(\theta), \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

и лучами $\theta = \alpha, \theta = \beta$ (рис. 7.11) выражается формулой

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta. \quad (7.5)$$

ПРИМЕР 7.6. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = \cos 5\theta$.

◁ Составим таблицу изменения полярного радиуса ρ в зависимости от угла θ при $\theta \in [0, \pi]$ (так как $\cos 5\theta = \cos 5(-\theta)$, то кривая симметрична относительно полярной оси и ее часть, соответствующая $\theta \in [-\pi, 0]$, получается отражением относительно полярной оси части, соответствующей $\theta \in [0, \pi]$).

θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{10} \rightarrow \frac{3\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{10} \rightarrow \frac{4\pi}{10}$	$\frac{4\pi}{10} \rightarrow \frac{5\pi}{10}$	$\frac{5\pi}{10} \rightarrow \frac{7\pi}{10}$	$\frac{7\pi}{10} \rightarrow \frac{8\pi}{10}$	$\frac{8\pi}{10} \rightarrow \frac{9\pi}{10}$	$\frac{9\pi}{10} \rightarrow \pi$
ρ	$1 \rightarrow 0$	< 0 точек нет	$0 \rightarrow 1$	$1 \rightarrow 0$	< 0 точек нет	$0 \rightarrow 1$	$1 \rightarrow 0$	< 0 точек нет

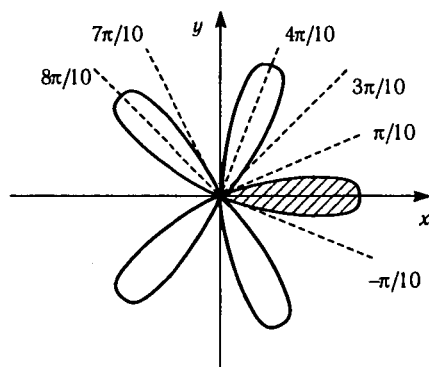


Рис. 7.12

Эскиз кривой на рис. 7.12.

Кривая состоит из 5 одинаковых элементов (так называемая пятилепестковая роза). Вычислим площадь S_1 одного лепестка (заштрихованного на рис. 7.12), для чего воспользуемся формулой (7.5).

В данном случае $\rho(\theta) = \cos 5\theta$, $\alpha = -\frac{\pi}{10}$, $\beta = \frac{\pi}{10}$:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/10}^{\pi/10} \cos^2 5\theta \, d\theta = \frac{1}{4} \int_{-\pi/10}^{\pi/10} (1 + \cos 10\theta) \, d\theta = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{\pi}{10} - \left(-\frac{\pi}{10} \right) \right] = \frac{\pi}{20}. \end{aligned}$$

Для площади S всей фигуры:

$$S = 5S_1 = 5 \cdot \frac{\pi}{20} = \frac{\pi}{4}. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = \sin 2\theta$.

Ответ:

$$\frac{\pi}{4}.$$

**ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИН ДУГ КРИВЫХ
И ОБЪЕМОВ ТЕЛ****§ 8.1. ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ**

Пусть l — длина дуги гладкой кривой.

Если кривая задана уравнением в декартовых координатах

$$y = y(x) \text{ и } y(x) \in C^1[a, b], \quad a \leq x \leq b,$$

то

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} \, dx. \quad (8.1)$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \, y = y(t) \text{ и } x(t), y(t) \in C^1[\alpha, \beta], \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

то

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt. \quad (8.2)$$

Если кривая задана уравнением в полярных координатах

$$\rho = \rho(\theta) \text{ и } \rho(\theta) \in C^1[\alpha, \beta], \quad \alpha \leq \theta \leq \beta,$$

то

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} \, d\theta. \quad (8.3)$$

Обратите внимание, что во всех трех случаях в интегралах, выражающих длину дуги кривой, нижний предел интегрирования меньше верхнего.

ПРИМЕР 8.1. Найти длину линии $y = \ln x$ от $x_1 = \sqrt{3}$ до $x_2 = \sqrt{8}$.

◁ Здесь кривая задана уравнением в декартовых координатах. Применяем формулу (8.1):

$$\begin{aligned} l &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + ((\ln x)')^2} \, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \, dx = \\ &= \left| \sqrt{x^2 + 1} = t; x^2 = t^2 - 1; x dx = t dt; \frac{dx}{x} = \frac{x dx}{x^2} = \frac{t dt}{t^2 - 1}; \right. \\ &\left. t(\sqrt{3}) = 2; t(\sqrt{8}) = 3 \right| = \int_2^3 \frac{t^2 dt}{t^2 - 1} = \int_2^3 \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 - 1} + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt = \\ &= \int_2^3 dt + \int_2^3 \frac{dt}{t^2 - 1} = (3 - 2) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right|_2^3 = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{3 - 1}{3 + 1} - \ln \frac{2 - 1}{2 + 1} \right) = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Отметим, что при решении этого примера был неважен вид самой кривой, важно лишь, что соответствующая функция $y = \ln x$ непрерывно дифференцируема на $[\sqrt{3}; \sqrt{8}]$ (эскиз кривой на рис. 8.1).

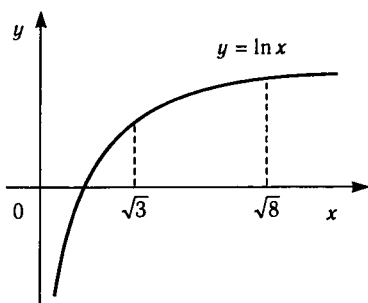


Рис. 8.1

ПРИМЕР 8.2. Найти длину дуги эвольвенты окружности, заданной параметрическими уравнениями

$$x = R(\cos t + t \sin t); \quad y = R(\sin t - t \cos t); \quad t \in [0, \pi] \quad (R > 0).$$

◁ По формуле (8.2), где

$$x(t) = R(\cos t + t \sin t); \quad y(t) = R(\sin t - t \cos t); \quad \alpha = 0; \quad \beta = \pi:$$

$$l = \int_0^\pi \sqrt{[(R(\cos t + t \sin t))']^2 + [(R(\sin t - t \cos t))']^2} \, dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\pi} \sqrt{R^2(-\sin t + \sin t + t \cos t)^2 + R^2(\cos t - \cos t + t \sin t)^2} dt = \\
 &= \int_0^{\pi} |R||t| dt = \int_0^{\pi} R t dt = R \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{R\pi^2}{2}. \quad \triangleright
 \end{aligned}$$

Опять-таки, как и в предыдущем примере, вид кривой не важен. Имеет значение лишь то, что функции $x(t) = R(\cos t + t \sin t)$; $y(t) = R(\sin t - t \cos t)$ — непрерывно дифференцируемы на отрезке изменения параметра $[0, \pi]$. (Эскиз кривой — на рисунке 8.2.)

ПРИМЕР 8.3. Найти длину дуги архимедовой спирали $\rho = \theta$ от начала до конца первого завитка.

◁ Эскиз кривой $\rho = \theta$ можно представить как след, оставляемый точкой, поступательно движущейся из полюса по лучу (ρ — расстояние от полюса), который в свою очередь поворачивается против часовой стрелки вокруг полюса (θ — угол поворота) (рис. 8.3). Конец первого завитка соответствует $\theta = 2\pi$. Таким образом, необходимо найти длину кривой, заданной в полярной системе координат уравнением $\rho = \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Применяем формулу (8.3):

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 0; \beta = 2\pi; \rho(\theta) = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + (\theta')^2} d\theta &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta.
 \end{aligned}$$

Последний интеграл вычислим по частям с помощью приема «приведение к самому себе» (см. раздел интегрирования по частям).

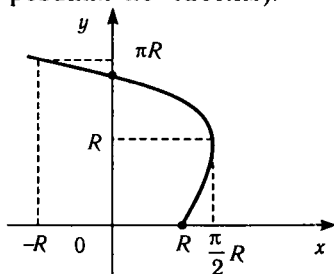


Рис. 8.2

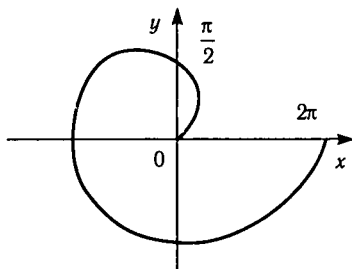


Рис. 8.3

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2} d\theta &= \theta \sqrt{1+\theta^2} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\theta^2}{\sqrt{1+\theta^2}} d\theta = \\
&= 2\pi \sqrt{1+4\pi^2} - \int_0^{2\pi} \left(\frac{\theta^2+1}{\sqrt{1+\theta^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}} \right) d\theta = \\
&= 2\pi \sqrt{1+4\pi^2} - \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2} d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1+\theta^2}} = \\
&= 2\pi \sqrt{1+4\pi^2} - \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2} d\theta + \ln |\theta + \sqrt{\theta^2+1}| \Big|_0^{2\pi} = \\
&= 2\pi \sqrt{1+4\pi^2} + \ln (2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}) - \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2} d\theta,
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2} d\theta &= \frac{1}{2} \left(2\pi \sqrt{1+4\pi^2} + \ln (2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}) \right) = \\
&= \pi \sqrt{4\pi^2+1} + \frac{1}{2} \ln (2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}). \quad \triangleright
\end{aligned}$$

ПРИМЕР 8.4. Вычислить длину кривой, заданной уравнением

$$y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

◁ Кривая задана уравнением в декартовых координатах, но неизвестна область изменения « x ». Ее найдем, исходя из области определения функции. В данном случае это отрезок $[-1, +1]$. Итак, нужно найти длину кривой, задаваемой уравнением $y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; $-1 \leq x \leq 1$. (Эскиз кривой — на рис. 8.4.) Так как производная

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

— не определена на концах отрезка $[-1, 1]$, то применить непосредственно формулу (8.1) нельзя. Поступим следующим образом.

Пусть δ_1, δ_2 — положительные достаточно малые числа. Рассмотрим часть нашей кривой, соответствующую изменению x от $(-1+\delta_1)$ до $(1-\delta_2)$ ($A_{\delta_1}, B_{\delta_2}$ на рис. 8.5):

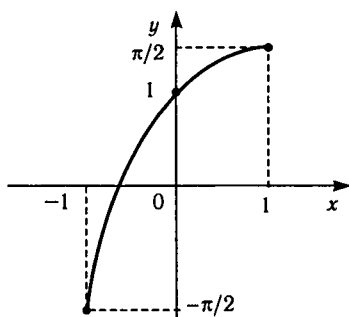


Рис. 8.4

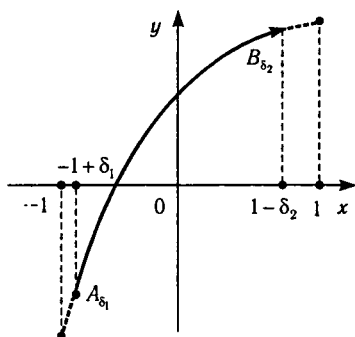


Рис. 8.5

$$y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1 + \delta_1; 1 - \delta_2]$$

и подсчитаем длину этой части $l_{\delta_1 \delta_2}$. Можно непосредственно применить формулу (8.1). Затем устремим δ_1, δ_2 к нулю. Если при независимом стремлении δ_1, δ_2 к нулю длина $l_{\delta_1 \delta_2}$ стремится к некоторому числу l , то l и будет длиной нашей кривой:

$$\begin{aligned} l_{\delta_1 \delta_2} &= \int_{-1+\delta_1}^{1-\delta_2} \sqrt{1 + \left(\arcsin x + \sqrt{1 - x^2} \right)'}^2 dx = \\ &= \int_{-1+\delta_1}^{1-\delta_2} \sqrt{1 + \frac{(1-x)^2}{1-x^2}} dx = \int_{-1+\delta_1}^{1-\delta_2} \sqrt{1 + \frac{1-x}{1+x}} dx = \\ &= \int_{-1+\delta_1}^{1-\delta_2} \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{1+x}} d(x+1) = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{1+x} \Big|_{-1+\delta_1}^{1-\delta_2} = \\ &= 2\sqrt{2}(\sqrt{2-\delta_2} - \sqrt{\delta_1}). \end{aligned}$$

Легко видеть, что при независимом стремлении к нулю δ_1 и δ_2 полученное выражение стремится к $2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4$. Итак, $\lim_{\substack{\delta_1 \rightarrow 0 \\ \delta_2 \rightarrow 0}} l_{\delta_1 \delta_2} = 4$, следовательно, длина искомой кривой равна 4.

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1) Вычислить длину дуги цепной линии

$$y = e^{x/2} + e^{-x/2} \text{ (от } x_1 = 0 \text{ до } x_2 = 2).$$

2) Вычислить длину дуги линии

$$x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t, \quad y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t \text{ (от } \alpha = 0 \text{ до } \beta = \pi).$$

3) Найти длину кардионды $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ ($a > 0$).

4) Найти длину линии

$$y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}.$$

Ответы:

$$1) e - e^{-1}; \quad 2) \frac{\pi^3}{3}; \quad 3) 8a; \quad 4) 2.$$

§ 8.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ ТЕЛ

Пусть тело ограничено плоскостями $z = a, z = b$ ($a < b$) (рис. 8.6). Если известна функция $S(x)$, определяющая площади сечений этого тела плоскостями $z = \text{const}$ и являющаяся непрерывной на $[a, b]$, то объем тела

$$V = \int_a^b S(z) dz. \quad (8.4)$$

Для тела, которое получается в результате вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = y(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (рис. 8.7), площадь сечения плоскостью $x = \text{const}$ равна площади круга $S(x) = \pi(y(x))^2$.

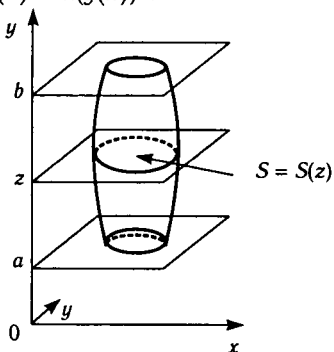


Рис. 8.6

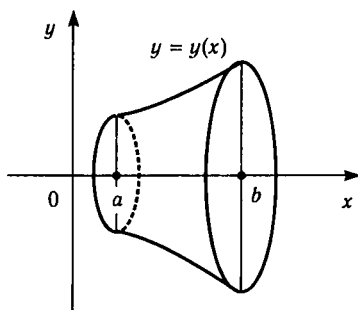


Рис. 8.7

Объем такого тела вращения

$$V = \pi \int_a^b (y(x))^2 dx. \quad (8.5)$$

ПРИМЕР 8.5. Вычислить объем тела, ограниченного эллиптическим параболоидом $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}$ и плоскостью $z = 1$.

△ Тело ограничено плоскостями $z = 0$ и $z = 1$ (рис. 8.8).

В любом сечении $z = \text{const}$, $0 < z \leq 1$ — будет фигура, ограниченная эллипсом $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = z$ или

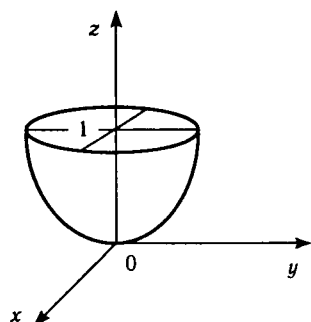


Рис. 8.8

$\frac{x^2}{(2\sqrt{z})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2z})^2} = 1$. Площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{y^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ равна πab .

Следовательно, площадь сечений

$$S(z) = \pi 2\sqrt{z} \cdot \sqrt{2z} = 2\sqrt{2}\pi z.$$

Функция $S(z)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ (заметим, что при $z = 0$ сечение вырождается

в точку и $S(0) = 0$). Поэтому, согласно (8.4):

$$S = \int_0^1 2\sqrt{2}\pi z dz = \sqrt{2}\pi z^2 \Big|_0^1 = \sqrt{2}\pi. \triangleright$$

ПРИМЕР ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти объем тела, ограниченного однополостным гиперболоидом $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$ и плоскостями $z = -1$ и $z = 2$.

Ответ:

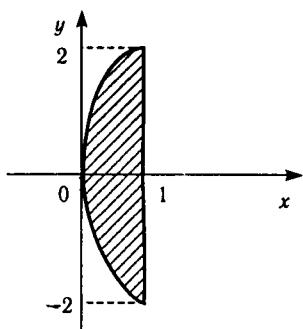


Рис. 8.9

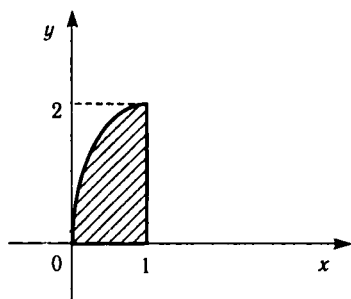


Рис. 8.10

ПРИМЕР 8.6. Вычислить объем тела вращения, полученного вращением фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 4x$ и отрезком прямой $x = 1$ вокруг оси Ox (рис. 8.9).

△ Данное тело можно рассматривать как результат вращения трапеции, ограниченной линиями $y = 2\sqrt{x}$; $y = 0$; $x = 1$ вокруг оси Ox (рис. 8.10).

Применим для вычисления объема формулу (8.5). Здесь $y(x) = 2\sqrt{x}$; $a = 0$; $b = 1$:

$$V = \pi \int_0^1 4x dx = 2\pi x^2 \Big|_0^1 = 2\pi.$$

ПРИМЕР ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 2$ вокруг оси Ox .

Ответ:

$$\frac{\pi}{8} (e^4 - e^{-4} - e^2 + e^{-2} + 4).$$

**ФУНКЦИИ
НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ****§ 9.1. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.
ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ**

Пусть $D = \{(x, y)\}$ — множество точек на плоскости Oxy . Если каждой точке $(x, y) \in D$ поставлено в соответствие число z , то говорят, что на множестве D определена функция $f(x, y)$ двух переменных x, y . Переменные x, y называют *аргументами* функции. Множество D называется областью определения функции $f(x, y)$.

Если функция задается формулой, то в качестве области определения обычно рассматривается множество точек, значения координат которых является допустимыми для выражения, определяющего значения функции.

Поверхность, определяемая уравнением $z = f(x, y)$ называется *графиком функции* $f(x, y)$. График функции дает наглядное представление о значениях функции в различных точках ее области определения. Значение функции в точке (x, y) выражается аппликатой z соответствующей точки графика (рис. 9.1).

ПРИМЕР 9.1. Найти область определения функции

$$z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

◁ В данном случае допустимы те значения переменных x и y , при которых выражение $1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ неотрицательно,

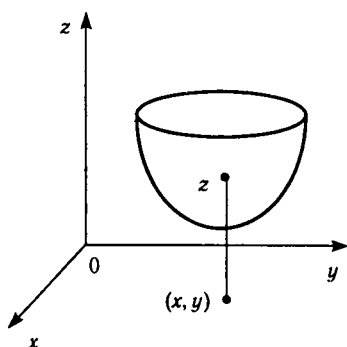


Рис. 9.1

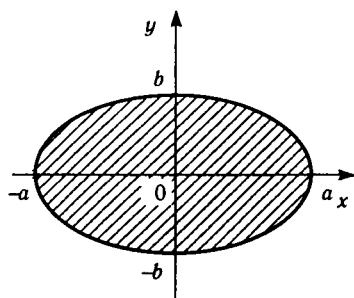


Рис. 9.2

т. е. $1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \geq 0$ или $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$. Так как кривая $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ является эллипсом, то искомые точки находятся внутри области, ограниченной этим эллипсом (рис. 9.2).
▷

ПРИМЕР 9.2. Найти область определения функции

$$z = \ln(y^2 - 4x + 8).$$

◁ Область допустимых значений функции $z = \ln t$ — $\{t : t > 0\}$. Поэтому область ее определения — множество точек (x, y) таких, что $y^2 - 4x + 8 > 0$. Заметим, что $y^2 = 4x - 8$ — парабола с вершиной в точке $x = 2, y = 0$. Так как $0^2 - 4 \cdot 0 + 8 > 0$, то точка $(0, 0)$ лежит в области определения. Точка $(3, 0)$, наоборот, не входит в область определения, так как $0^2 - 4 \cdot 3 + 8 > 0$. А поскольку величина $y^2 - 4x + 8$ может менять знак только проходя через 0, т. е. только в точках параболы, то $y^2 - 4x + 8 < 0$ всюду внутри параболы и > 0 всюду вне ее. Следовательно, область определения функции представляет собой часть плоскости, лежащая слева от параболы $y^2 = 4x - 8$ (рис. 9.3). ▷

ПРИМЕР 9.3. Найти область определения функции

$$z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}.$$

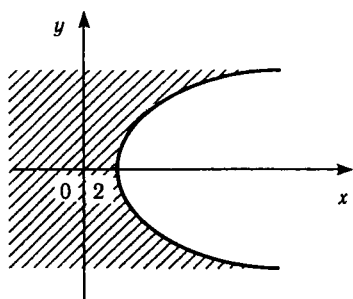


Рис. 9.3

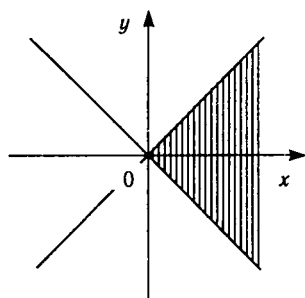


Рис. 9.4

◁ Областью определения функции является множество точек (x, y) , для которых

$$\begin{cases} x + y \geq 0 \\ x - y \geq 0, \end{cases}$$

что на плоскости соответствует внутренней части одного из четырех углов, на которые прямые $x + y = 0$ и $x - y = 0$ делят координатную плоскость (рис. 9.4). ▷

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти области определения функций:

1) $z = \frac{1}{R^2 - x^2 - y^2}$; 2) $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$;

3) $z = \ln xy$.

Ответы:

1) Вся плоскость за исключением точек окружности $x^2 + y^2 + R^2$ (рис. 9.5).

2) $\begin{cases} x + y > 0 \\ x - y > 0 \end{cases}$ — внутренняя часть одного из четырех углов (без границ), на которые плоскость делится прямыми $x + y = 0$ и $x - y = 0$ (рис. 9.6).

3) Область $xy > 0$ изображена на рис. 9.7.

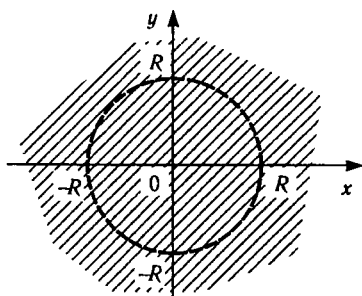


Рис. 9.5

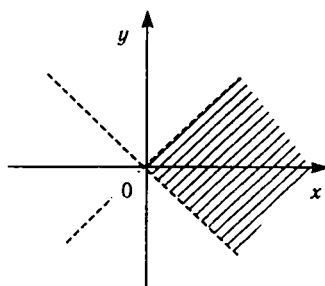


Рис. 9.6

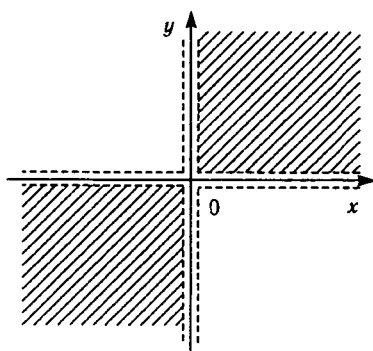


Рис. 9.7

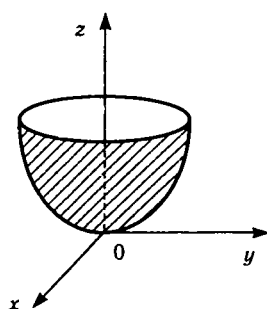


Рис. 9.8

ПРИМЕР 9.4. Изобразить графики функций

$$1) \quad z = x^2 + y^2.$$

◁ Поверхность представляет круговой параболоид (рис. 9.8). ▷

$$2) \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

◁ Это часть поверхности, задаваемой уравнением и неравенством: $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z \geq 0 \end{cases}$, т. е. верхняя часть конуса (рис. 9.9). ▷

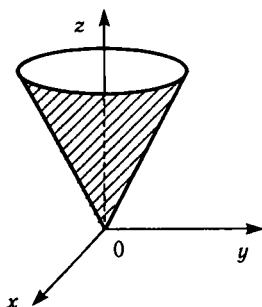


Рис. 9.9

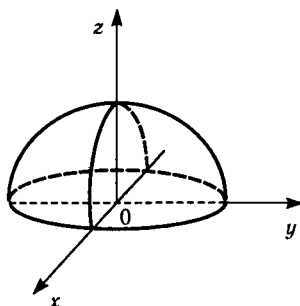


Рис. 9.10

$$3) \quad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

◁ Это часть поверхности $z^2 = 1 - x^2 - y^2$, на которой $z \geq 0$, т. е. верхняя часть сферы $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$ (рис. 9.10). ▷

$$4) \quad z = x^2 - y^2.$$

◁ График функции $z = x^2 - y^2$ представляет собой седловую поверхность (так называемый гиперболический параболоид) (рис. 9.11). ▷

Пусть $D = \{(x, y, z)\}$ — множество точек пространства $Oxyz$. Если каждой точке $(x, y, z) \in D$ поставлено в соответствие число u , то говорят, что на множестве D определена функция $f(x, y, z)$ трех переменных x, y, z . Переменные x, y, z называются *аргументами функции*.

Множество D называется *областью определения функции* $f(x, y, z)$.

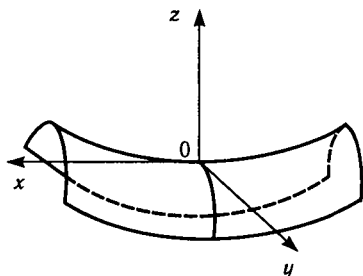


Рис. 9.11

В качестве геометрической интерпретации функции $f(x, y, z)$ трех переменных рассматривают *поверхности уровня*

$$f(x, y, z) = \text{const},$$

на каждой из которых значения функции являются постоянными (но, в общем случае, различными на различных поверхностях).

ПРИМЕР 9.5. Найти область определения функции

$$u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - r^2}} \quad \text{при } R > r$$

и показать, что сферы $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ являются поверхностями уровня. Показать, что наименьшее значение функции имеет на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

◁ Найдем сначала область определения

$$\left. \begin{aligned} R^2 - x^2 - y^2 - z^2 &\geq 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - r^2 &> 0 \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &\leq R^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 &> r^2 \end{aligned} \right\}$$

Следовательно, областью определения функции является шаровой пояс $r^2 < x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, ограниченный сферами радиусов r и R .

Очевидно, что при $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 = \text{const}$ значения функции $u = \sqrt{R^2 - \rho^2} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - r^2}}$ не изменяются.

Таким образом, сферы $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ при $r < \rho \leq R$ являются поверхностями уровня функции $u = u(x, y, z)$.

Рассмотрим функцию

$$u(\rho) = \sqrt{R^2 - \rho^2} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - r^2}} \quad \text{на полуинтервале } (r, R].$$

Найдем наименьшее значение

$$\begin{aligned} u'(\rho) &= -\frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} - \frac{\rho}{\sqrt{(\rho^2 - r^2)^3}} = \\ &= -\rho \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} + \frac{1}{\sqrt{(\rho^2 - r^2)^3}} \right) \end{aligned}$$

При $0 < r < \rho \leq R$ производная $u'(\rho) < 0$, следовательно, функция $u(\rho)$ при возрастании ρ убывает. Поэтому наименьшее значение функции $u(\rho)$ имеет при $\rho = R$, т. е. на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

§ 9.2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

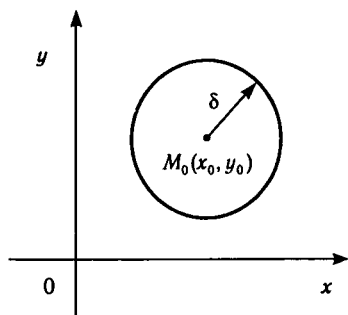


Рис. 9.12

Открытый круг радиуса δ с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$, т. е. множество всех точек $M(x, y)$, для которых

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2,$$

называется δ -окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$, которую мы будем обозначать символом $\dot{\delta}(M_0)$ (рис. 9.12).

Если из $\dot{\delta}(M_0)$ удалить точку M_0 , то получается *выколотая* δ -окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$, которую будем обозначать символом $\dot{\dot{\delta}}(M_0)$.

Число A называется *пределом функции* $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \dot{\dot{\delta}}(M_0) : \forall M \in \dot{\dot{\delta}}(M_0) |f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

При этом пишут

$$A = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y).$$

Введем полярные координаты ρ, θ с полюсом в точке $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 9.13).

Очевидно,

$$x - x_0 = \rho \cos \theta,$$

$$y - y_0 = \rho \sin \theta$$

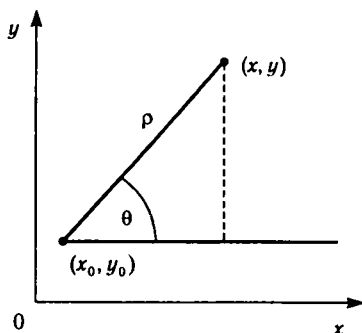


Рис. 9.13

и

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} f(x_0 + \rho \sin \theta, y_0 + \rho \cos \theta). \quad (9.1)$$

По формуле (9.1) вычисление предела функции двух переменных x, y сводится к вычислению предела функции одного переменного ρ . (Следует иметь в виду, что если величина предела в правой части формулы (9.1) окажется зависящей от θ , то это будет означать, что $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ не существует.)

ПРИМЕР 9.6. Вычислить предел

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} \\ & \triangleleft \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = \\ & = \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{array} \right| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + 1} - 1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ & = \left| \begin{array}{l} \sqrt{\rho^2 + 1} - 1 \approx \rho^2/2 \\ \text{при } \rho \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2}{\rho^2/2} = 2. \quad \triangleright \end{aligned}$$

ПРИМЕР 9.7. Вычислить предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}.$$

$$\begin{aligned}
 & \triangleleft \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} = \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{array} \right| = \\
 & = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\rho^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 1} - 1}{\rho^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left| \begin{array}{l} \sqrt{\alpha + 1} - 1 \approx \alpha/2 \\ \text{при } \alpha \rightarrow 0 \end{array} \right| = \\
 & = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{2\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \sin^2 2\theta}{8} = 0. \quad \triangleright
 \end{aligned}$$

ПРИМЕР 9.8. Вычислить предел

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)}. \\
 & \triangleleft \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)} = \\
 & = \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{array} \right| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \rho^2}{\rho^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\
 & = \left| \begin{array}{l} 1 - \cos \alpha \approx \alpha/2 \\ \text{при } \alpha \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^4}{2\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2}{2} = 0. \quad \triangleright
 \end{aligned}$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Вычислить:

$$\begin{array}{ll}
 1) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{(x^2 + y^2)}, & 2) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} (1 + x^2 y^2)^{-1/(x^2 + y^2)}.
 \end{array}$$

При решении второго примера можно использовать второй замечательный предел $\lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{-1/z} = e$.

Ответы:

$$1) 0; \quad 2) 1.$$

§ 9.3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Функция $f(x, y)$ называется *непрерывной* в точке (x_0, y_0) , если

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

ПРИМЕР 9.9. Исследовать на непрерывность функцию при $x = 0$ и $y = 0$

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0.$$

$$\begin{aligned} \triangleleft \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{array} \right| = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \sin^2 2\theta}{4} = 0. \end{aligned}$$

Итак, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(0, 0) = 0$, следовательно функция непрерывна в точке $(0, 0)$. $\triangleright$

ПРИМЕР 9.10. Исследовать на непрерывность при $x = 0$ и $y = 0$

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}, \quad f(0, 0) = 0.$$

$\triangleleft$ Здесь

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{array} \right| \Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\rho^2} = \frac{\sin^2 2\theta}{4}.$$

Результат имеет различные значения, в зависимости от выбранного θ , и поэтому предел функции в точке $(0, 0)$ не существует. Следовательно, функция не является непрерывной в точке $(0, 0)$. $\triangleright$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Исследовать на непрерывность при $x = 0$ и $y = 0$.

1) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0$

2) $f(x, y) = \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0.$

Ответы:

- 1) Разрывна.
- 2) Непрерывна.

Элементарные функции непрерывны в каждой точке области определения.

ПРИМЕР 9.11. Найти точки разрыва функции

$$z = \frac{x^2 + 2x}{y^2 - 2x}.$$

◁ Функция не определена в точках, в которых знаменатель обращается в нуль. Поэтому она имеет линию разрыва — параболу $y^2 = 2x$. ▷

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти точки разрыва функции

$$1) z = \frac{1}{x-y}, \quad 2) z = \frac{1}{\sin \pi x} + \frac{1}{\sin \pi y}$$

Ответ:

- 1) На прямой $y = x$.
- 2) На прямых $x = m$, $y = n$ (m и n — целые числа).

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§ 10.1. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) . Ее *частными производными* в точке (x_0, y_0) по x и по y называются величины

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

и

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

В произвольной точке (x, y) частные производные функции $z = f(x, y)$ обозначают также символами $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$. Для их отыскания используются правила дифференцирования функции одного переменного, причем при отыскании $\frac{\partial z}{\partial x}$ фиксируется аргумент y (рассматривается как постоянный), а при отыскании $\frac{\partial z}{\partial y}$ фиксируется аргумент x .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d}{dx}(z|_{y=\text{const}}), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d}{dy}(z|_{x=\text{const}}).$$

ПРИМЕР 10.1. Найти частные производные по каждой из независимых переменных.

$$1) \quad z = x^2 y^3.$$

◁ Считая y постоянным и учитывая, что постоянный множитель можно выносить за знак производной, т. е. $(Cu)' = Cu'$, где $C = \text{const}$, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^3 \cdot 2x = 2xy^3,$$

полагая x постоянным, имеем

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot 3y^2 = 3x^2y^2. \quad \triangleright$$

$$2) \quad z = 5xy^4 + 3x^3y^2.$$

◁ Считая y постоянным и учитывая, что производная суммы функций равна сумме производных этих функций, т. е. $(u + v)' = u' + v'$, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5y^4 + 9x^2y^2;$$

полагая x постоянным,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 20xy^3 + 6x^3y. \quad \triangleright$$

$$3) \quad z = x^2y^2 \sin x \cos y.$$

◁ При нахождении частных производных данной функции учтем, что производная от произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первой функции на вторую функцию плюс произведение первой функции на производную от второй функции, т. е. $(uv)' = u'v + uv'$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 \sin x \cos y + x^2y^3 \cos x \cos y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2 \sin x \cos y + x^2y^3 \sin x \cdot (-\sin y). \quad \triangleright$$

$$4) \quad z = \frac{x^2 + \sin y}{y^3 + \cos x}.$$

◁ Принимая во внимание правило дифференцирования дроби $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, получим

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{2x(y^3 + \cos x) - (x^2 + \sin y) \cdot (-\sin x)}{(y^3 + \cos x)^2} = \\
 &= \frac{2x(y^3 + \cos x) + (x^2 + \sin y) \sin x}{(y^3 + \cos x)^2}, \\
 \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\cos y \cdot (y^3 + \cos x) - (x^2 + \sin y) \cdot 3y^2}{(y^3 + \cos x)^2} = \\
 &= \frac{(y^3 + \cos x) \cos y - 3(x^2 + \sin y)y^2}{(y^3 + \cos x)^2}. \quad \triangleright
 \end{aligned}$$

$$5) z = x^3 \sqrt[4]{y} + \frac{y}{\sqrt[4]{x}}.$$

◁ Запишем функцию следующим образом:

$$z = xy^{1/3} + yx^{-1/4}.$$

Найдем частные производные

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial x} &= y^{1/3} + y \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot x^{-5/4} = \sqrt[3]{y} - \frac{y}{4\sqrt[4]{x^5}}, \\
 \frac{\partial z}{\partial x} &= x \cdot \frac{1}{3} \cdot y^{-2/3} + x^{-1/4} = \frac{x}{3\sqrt[3]{y^2}} + \frac{y}{\sqrt[4]{x}}. \quad \triangleright
 \end{aligned}$$

$$6) z = (5x^3y - y^4 + 7)^4.$$

◁ Данная функция является сложной $z = z(u(x, y))$, где $z(u)$ — внешняя функция, а $u(x, y)$ — внутренняя функция. Учитывая, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y},$$

получим

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial x} &= 4(5x^3y - y^4 + 7)^3 \cdot 5 \cdot 3x^2y = 60x^2y(5x^3y - y^4 + 7)^3, \\
 \frac{\partial z}{\partial y} &= 4(5x^3y - y^4 + 7)^3 \cdot (5x^3 - 4y^3). \quad \triangleright
 \end{aligned}$$

$$7) z = \sin(x^2y^3).$$

◁ Здесь $z(u) = \sin u$, а $u = x^2y^3$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \cos(x^2 y^3) \cdot 2xy^3 = 2xy^3 \cos(x^2 y^3),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \cos(x^2 y^3) \cdot x^2 \cdot 3y^2 = 3x^2 y^2 \cos(x^2 y^2). \quad \triangleright$$

$$8) z = e^{xy^2}.$$

$$\triangleleft \frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy^2} \cdot y^2 = y^2 e^{xy^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy^2} \cdot x \cdot 2y = 2xy e^{xy^2}. \quad \triangleright$$

$$9) z = \sin^2(x^3 y^4).$$

$\triangleleft$ Данная сложная функция является трехзвенной $z = z(u(v(x, y)))$, где $z(u) = u^2$, $u(v) = \sin v$, $v(x, y) = x^3 y^4$. Найдем частные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \\ &= 2 \sin(x^3 y^4) \cdot \cos(x^3 y^4) \cdot 3x^2 y^4 = 3x^2 y^4 \sin(2x^3 y^4); \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \\ &= 2 \sin(x^3 y^4) \cdot \cos(x^3 y^4) \cdot x^3 \cdot 4y^3 = \\ &= 4x^3 y^3 \sin(2x^3 y^4). \quad \triangleright \end{aligned}$$

$$10) z = x^y.$$

$\triangleleft$ При дифференцировании по x функцию рассматриваем как степенную

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1},$$

а при дифференцировании по y — как показательную

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x. \quad \triangleright$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти частные производные:

$$1) z = x^3 y - y^3 x, \quad 2) z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2},$$

$$3) z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}, \quad 4) z = e^{-xy}.$$

Ответы:

$$1) \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y - y^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3y^2x;$$

$$2) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y^4 + 3x^2y^2 - yx^3y}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$3) \frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{y} - \frac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}};$$

$$4) \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{y} e^{-x/y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} e^{-x/y}.$$

Частные производные функции $u = u(x, y, z)$ трех переменных определяются и находятся аналогично:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{d}{dx} \left(u \Big|_{\substack{y=\text{const} \\ z=\text{const}}} \right), & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{d}{dy} \left(u \Big|_{\substack{x=\text{const} \\ z=\text{const}}} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{d}{dz} \left(u \Big|_{\substack{x=\text{const} \\ y=\text{const}}} \right) \end{aligned}$$

ПРИМЕР 10.2. Найти частные производные:

$$1) u = x^2 y^3 z^4.$$

$$\begin{aligned} \triangleleft \frac{\partial u}{\partial x} &= 2xy^3z^4, & \frac{\partial u}{\partial y} &= x^2 \cdot 3y^2z^4 = 3x^2y^2z^4, \\ & \frac{\partial u}{\partial z} &= x^2y^3 \cdot 4z^3 = 4x^2y^3z^3. & \triangleright \end{aligned}$$

$$2) u = x^3y + y^2z + xz^2.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2y + z^2, & \frac{\partial u}{\partial y} &= x^3 + 2yz, \\ & \frac{\partial u}{\partial z} &= y^2 + 2xz. & \triangleright \end{aligned}$$

$$3) u = y^{z/x}.$$

$$\begin{aligned} \triangleleft \frac{\partial u}{\partial x} &= yx^{z/x} \cdot \ln y \cdot z \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \\ &= -\frac{zy^z \ln y}{x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{z}{x} y^{z/x-1} = \frac{xy^{z/x}}{xy}, \\ & \frac{\partial u}{\partial z} = y^{z/x} \cdot \ln y \cdot \frac{1}{x} = \frac{y^{z/x} \ln y}{x}. & \triangleright \end{aligned}$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти частные производные:

$$1) u = xy + yz + zx; \quad 2) u = \sin(x^2 + y^2 + z^2);$$

$$3) u = x^{y/z}.$$

Ответы:

$$1) \frac{\partial u}{\partial x} = y + z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x + z, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x + y;$$

$$2) \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \cos(x^2 + y^2 + z^2), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \cos(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2z \cos(x^2 + y^2 + z^2);$$

$$3) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{z} x^{y/z-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{z} x^{y/z} \ln x, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{x^2} x^{y/z} \ln x$$

§ 10.2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ И ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки (x, y) и

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

— ее приращение, вызванное приращениями аргументов x и y , равными Δx и Δy .

Если это приращение функции представимо в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \quad \text{при } \rho \rightarrow 0,$$

где $A = A(x, y)$, $B = B(x, y)$ — величины, не зависящие от Δx и Δy , а $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, и $o(\rho)$ — бесконечно малая при $\rho \rightarrow 0$ высшего порядка по сравнению с ρ , то функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке (x, y) , а линейная относительно $\Delta x, \Delta y$ часть приращения $A\Delta x + B\Delta y$ называется полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ в точке (x, y) и обозначается символом dz :

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Дифференциалы независимых переменных по определению принимаются равными их приращениям

$$dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y.$$

Полный дифференциал выражается через частные производные

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

ПРИМЕР 10.3. Найти полный дифференциал функции

$$z = x^2 y^4 - x^3 y^3 + x^4 y^2.$$

◁ Найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^4 - 3x^2 y^3 + 4x^3 y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4x^2 y^3 - 3x^3 y^2 + 2x^4 y.$$

$$\text{Следовательно, } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy =$$

$$= (2xy^4 - 3x^2 y^3 + 4x^3 y^2) dx + (4x^2 y^3 - 3x^3 y^2 + 2x^4 y) dy. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 10.4. Найти значение полного дифференциала функции

$$z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$$

при $x = 3, y = 4, \Delta x = 0,1, \Delta y = 0,2$.

◁ Учитывая, что $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$, имеем

$$\begin{aligned} dz &= \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=3 \\ y=4}} \cdot \Delta x + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=3 \\ y=4}} \cdot \Delta y = \\ &= \left(1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \bigg|_{\substack{x=3 \\ y=4}} \cdot \Delta x + \left(1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \bigg|_{\substack{x=3 \\ y=4}} \cdot \Delta y = \\ &= \left(1 - \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right) \cdot 0,1 + \left(1 - \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right) \cdot 0,2 = 0,08. \quad \triangleright \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что численное значение дифференциала dz зависит не только от x, y , но и от $\Delta x, \Delta y$.

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1) Найти полный дифференциал функции

$$z = \frac{x+y}{x-y}.$$

2) Найти значение полного дифференциала функции

$$z = \frac{xy}{x^2 - y^2}$$

при $x = 2, y = 1, \Delta x = 0,01, \Delta y = 0,03$.**Ответы:**

$$1) \frac{2(xdy - ydx)}{(x-y)^2}; \quad 2) \frac{1}{36}.$$

**§ 10.3. ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА
В ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ**

Полный дифференциал функции является главной частью ее приращения и при достаточно малых $|dx|, |dy|$ имеет место приближенное равенство

$$\Delta z \approx dz,$$

которое используется при решении некоторых задач.

ПРИМЕР 10.5. Цилиндр имеет радиус $R = 4$ см и высоту $H = 10$ см. Как изменится объем цилиндра при увеличении R на 0,1 см и H на 0,25 см?

◁ Объем цилиндра $V = \pi R^2 H$ является функцией двух переменных R и H . Если увеличить R на ΔR и H на ΔH , то функция V получит приращение ΔV .

$$\begin{aligned} \Delta V &\approx dV = \frac{\partial V}{\partial R} \Delta R + \frac{\partial V}{\partial H} \Delta H = \\ &= 2\pi R H \Delta R + \pi R^2 \Delta H = \pi(2RH\Delta R + R^2\Delta H) = \\ &= \pi(2 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 0,1 + 4^2 \cdot 0,25) = 12\pi. \end{aligned}$$

Следовательно, объем цилиндра увеличится примерно на 12π см³. ▷

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1) В усеченном конусе радиусы оснований равны $R = 30$ см, $r = 20$ см, высота $h = 40$ см. Как изменится объем конуса, если увеличить R на 0,3 см, r на 0,4 см, h на 0,2 см?

2) Радиус основания конуса равен $10,2 \pm 0,1$ см, образующая равна $44,6 \pm 0,1$ см. Найти объем конуса и указать погрешности подсчета.

Ответы:

- 1) Увеличится приблизительно на 2575 см^3 .
 2) $4730 \pm 100 \text{ см}^3$.

Дифференцируемость и полный дифференциал функции $u = f(x, y, z)$ трех переменных определяются аналогично

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

ПРИМЕР 10.6. Найти полный дифференциал.

1) $u = x^2 y^3 z^4$.

◁ Найдем частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^3z^4, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y^2z^4, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 4x^2y^3z^3.$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = \\ &= 2xy^3z^4 dx + 3x^2y^2z^4 dy + 4x^2y^3z^3 dz = \\ &= xy^2z^3(2yzdx + 3xzdy + 4xydz). \quad \triangleright \end{aligned}$$

2) $u = x^{y/z}$.

◁ Найдем частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{z} x^{y/z-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y/z} \ln x \frac{1}{z} = \frac{1}{z} x^{y/z} \ln x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^{y/z} \ln x \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right) = -\frac{y}{z^2} x^{y/z} \ln x.$$

Итак,

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = \\ &= \frac{y}{z} x^{y/z-1} dx + \frac{1}{z} x^{y/z} \ln x dy - \frac{y}{z^2} x^{y/z} \ln x dz = \\ &= \frac{x^{y/z}}{xz^2} (yzdx + xz \ln x dy - xy \ln x dz). \quad \triangleright \end{aligned}$$

КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ. ПРОИЗВОДНЫЕ СЛОЖНЫХ И НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 11.1. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Пусть поверхность задана уравнением

$$F(x, y, z) = 0.$$

Если функция $F(x, y, z)$ дифференцируема в точке поверхности $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и хотя бы одна из ее частных производных в точке M_0 отлична от нуля, то в этой точке существует касательная плоскость и нормаль к поверхности. Вектор

$$\vec{n} = F'_x(x_0, y_0, z_0)\vec{i} + F'_y(x_0, y_0, z_0)\vec{j} + F'_z(x_0, y_0, z_0)\vec{k}$$

является нормальным к поверхности, *уравнение касательной плоскости* имеет вид

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

а *уравнение нормали* —

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

ПРИМЕР 11.1. Найти уравнения нормали и касательной плоскости в точке $M(1, 2, -1)$ к поверхности, заданной уравнением

$$x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0.$$

◁ Точка $M(1, 2, -1)$ лежит на указанной поверхности, так как при подстановке ее координат в уравнение поверхности получаем тождество:

$$1^3 + 2^3 + (-1)^3 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) - 6 = 0.$$

Функция $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6$ дифференцируема в каждой точке R^3 .

Найдем значения частных производных в указанной точке M

$$F'_x|_M = (3x^2 + yz)|_M = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot (-1) = 1;$$

$$F'_y|_M = (3y^2 + xz)|_M = 3 \cdot 2^2 + 1 \cdot (-1) = 11;$$

$$F'_z|_M = (3z^2 + xy)|_M = 3 \cdot (-1)^2 + 1 \cdot 2 = 5.$$

Следовательно, вектор $\vec{n} = (1, 11, 5)$ является нормальным к данной поверхности в точке M , и уравнение касательной плоскости $(x - 1) + 11(y - 2) + 5(z + 1) = 0$ или (раскрывая скобки и приводя подобные)

$$x + 11y + 5z = 18;$$

уравнение нормали имеет вид

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}. \triangleright$$

ПРИМЕР 11.2. Найти уравнения нормали и касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением $z = 2x^2 - 4y^2$ в т. $M_0(2, 1, 4)$.

◁ Уравнение поверхности запишем в виде: $2x^2 - 4y^2 - z = 0$. Далее аналогично примеру 11.1:

$$F'_x|_M = 4x|_M = 4 \cdot 2 = 8;$$

$$F'_y|_M = -8y|_M = -8;$$

$$F'_z|_M = -1 \Rightarrow$$

уравнение нормали

$$\frac{x-2}{8} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-4}{-1}.$$

Уравнение касательной плоскости можно записать как $8(x-2) + (-8)(y-1) + (-1)(z-4) = 0$ или $8x - 8y - z = 4$.

Итак, уравнения нормали

$$\frac{x-2}{8} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-4}{-1};$$

уравнение касательной плоскости $8x - 8y - z = 4$. $\triangleright$

ПРИМЕР 11.3. К эллипсоиду $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x - 2y + z = 0$.

$\triangleleft$ Пусть касательная плоскость проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащую на эллипсоиде. Так как искомая касательная плоскость параллельна плоскости $x - 2y + z = 0$, то их нормальные векторы коллинеарны.

Для касательной плоскости вектор $(2x_0, 2y_0, 4z_0)$ является нормальным. Следовательно, вектор $(1, -2, 1)$ (нормальный к плоскости $x - 2y + z = 0$) должен быть коллинеарен вектору $(2x_0, 2y_0, 4z_0)$, т. е.

$$\frac{2x_0}{1} = \frac{2y_0}{-2} = \frac{4z_0}{1} \quad \text{или} \quad 2x_0 = -y_0 = 4z_0.$$

Учтя также, что точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на эллипсоиде (и, следовательно, $x_0^2 + y_0^2 + 2z_0^2 = 1$), для определения (x_0, y_0, z_0) имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_0 = -y_0 = 4z_0 \\ x_0^2 + y_0^2 + 2z_0^2 = 1, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x_0 = 2z_0; & y_0 = -4z_0 \\ (2z_0)^2 + (-4z_0)^2 + 2z_0^2 = 1, \end{cases} \Rightarrow z_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{22}}.$$

Имеем две точки $M_0^{(1)}\left(\frac{2}{\sqrt{22}}, -\frac{4}{\sqrt{22}}, \frac{1}{\sqrt{22}}\right)$ и $M_0^{(2)}\left(-\frac{2}{\sqrt{22}}, \frac{4}{\sqrt{22}}, -\frac{1}{\sqrt{22}}\right)$ и, соответственно, 2 касательные плоскости Π_1, Π_2 :

$$\Pi_1: \frac{4}{\sqrt{22}}\left(x - \frac{2}{\sqrt{22}}\right) - \frac{8}{\sqrt{22}}\left(y + \frac{4}{\sqrt{22}}\right) + \frac{2}{\sqrt{22}}\left(z - \frac{1}{\sqrt{22}}\right) = 0;$$

$$\Pi_2: -\frac{4}{\sqrt{22}}\left(x + \frac{2}{\sqrt{22}}\right) + \frac{8}{\sqrt{22}}\left(y - \frac{4}{\sqrt{22}}\right) - \frac{2}{\sqrt{22}}\left(z + \frac{1}{\sqrt{22}}\right) = 0.$$

Упрощая, получим:

$$\Pi_1: \frac{2}{\sqrt{22}}x - \frac{4}{\sqrt{22}}y + \frac{1}{\sqrt{22}}z = \frac{21}{22} \quad \text{или}$$

$$2x - 4y + z = \frac{21}{\sqrt{22}};$$

$$\Pi_2: -\frac{2}{\sqrt{22}}x + \frac{4}{\sqrt{22}}y - \frac{1}{\sqrt{22}}z = \frac{21}{22} \quad \text{или}$$

$$-2x + 4y - z = \frac{21}{\sqrt{22}}.$$

Таким образом, плоскости Π_1, Π_2 можно задать уравнениями

$$2x - 4y + z = \pm \frac{21}{\sqrt{22}}.$$

Наличие двух касательных плоскостей с геометрической точки зрения естественно. Плоскость $x - 2y + z = 0$ проходит через центр эллипсоида, разрезая его на две половины, в каждой из которых есть касательная плоскость, параллельная плоскости $x - 2y + z = 0$. ▽

ПРИМЕР 11.4. Поверхность задана уравнением $x^2 - y^2 - 3z = 0$. Провести к ней касательную плоскость, перпендикулярную прямой

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{3}.$$

◁ Пусть искомая касательная плоскость проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Тогда нормальным к ней будет вектор $(2x_0, -2y_0, -3)$. Этот вектор должен быть коллинеарным вектору $(4, 2, 3)$ — направляющему вектору прямой.

Поэтому

$$\frac{2x_0}{4} = \frac{-2y_0}{2} = \frac{-3}{3} \Rightarrow x_0 = -2, \quad y_0 = 1.$$

Третью координату z_0 определим из уравнения $x_0^2 - y_0^2 - 3z_0 = 0$ (так как точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит, по нашему предположению, на поверхности $x^2 - 2y^2 - 3zx^2 = 0$). Имеем: $z_0 = 1$, $\vec{n} = (2x_0, -2y_0, -3) = (-4, -2, -3)$ и искомое уравнение касательной плоскости:

$$-4(x + 2) - 2(y - 1) - 3(z - 1) = 0$$

или $4x + 2y + 3z = -3$. $\triangleright$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1) Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $3x^4 - 4y^3z + 4z^2xy - 4z^3x + 1 = 0$ в точке $(1, 1, 1)$.

2) Для поверхности $z = xy$ написать уравнение касательной плоскости, перпендикулярной прямой

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-1}.$$

Ответы:

$$1) 3x - 2y - 2z + 1 = 0; \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-2}.$$

$$2) 2x + y - z = 2.$$

§ 11.2. ПРОИЗВОДНЫЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Если $z = f(x, y)$ — дифференцируемая функция, и ее аргументы являются дифференцируемыми функциями $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, то сложная функция $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ также является дифференцируемой, и ее частные производные выражаются формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (11.1)$$

В рассмотренном случае x, y называют *промежуточными*, а u, v — основными аргументами сложной функции;

функцию $f(x, y)$ называют *внешней*, а $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ — *внутренними* функциями.

Из формул (11.1) следует, что частная производная $\frac{\partial z}{\partial u}$ сложной функции по основному аргументу u равна сумме ее частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ по промежуточным аргументам x, y , умноженных на частные производные $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}$ соответствующих промежуточных аргументов по основному аргументу u . Аналогично можно написать и выражение для частной производной $\frac{\partial z}{\partial v}$.

Установленное правило обобщается на сложные функции с любым количеством промежуточных и основных аргументов (причем число промежуточных аргументов у сложной функции может отличаться от числа ее основных аргументов). В общем случае правило дифференцирования сложной функции можно сформулировать следующим образом:

Производная сложной функции по некоторому основному аргументу равна сумме ее производных по всем промежуточным аргументам, умноженных на производные от соответствующих промежуточных аргументов по этому основному аргументу.

ПРИМЕР 11.5. Пусть

$$w = w(x, y, z), \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

Тогда w можно рассматривать как значение сложной функции с основными аргументами u, v и промежуточными — x, y, z .

◁ Частные производные сложной функции

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Здесь сложная функция имеет две частные производные, потому что количество основных аргументов равно двум, и каждая выражается суммой трех слагаемых, потому что количество промежуточных аргументов равно трем. $\triangleright$

ПРИМЕР 11.6. Пусть $z = z(x, y); x = x(t); y = y(t)$. Положим $\Phi(t) = z(x(t), y(t))$. Найти $\frac{d\Phi}{dt}$.

$\triangleleft$ Так как Φ зависит только от одной переменной t , то ищется обычная производная функции одной переменной. Поэтому в обозначении используются такие « d »:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

ПРИМЕР 11.7. $z = z(x, y); y = y(x)$. Найти $\frac{d}{dx}(z(x, y(x)))$.

$\triangleleft z(x, y(x))$ — функция одной переменной, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{d}{dx}(z(x, y(x))) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}. \quad \triangleright \end{aligned}$$

ПРИМЕР 11.8. Пусть $w = w(x, y, z)$, $z = z(x, y)$. Найти $\frac{\partial}{\partial x}(w(x, y, z(x, y)))$, $\frac{\partial}{\partial y}(w(x, y, z(x, y)))$.

$\triangleleft$ Согласно общему правилу:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_n &= \frac{\partial}{\partial x}(w(x, y, z(x, y))) = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial w}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot 0 + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}. \end{aligned}$$

Аналогично получим

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_n = \frac{\partial}{\partial y}(w(x, y, z(x, y))) = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}. \quad \triangleright$$

Частные производные $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_n, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_n$ сложной функции в рассмотренном случае называют *полными* частными производными. Они учитывают зависимость w от x и y как непосредственную, так и обусловленную зависимостью z от x и y (в отличие от частных производных $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$), которые учитывают только непосредственную зависимость w от x и y .

ПРИМЕР 11.9. Пусть $z = f(u, v)$; $u = x^2 y^2$; $v = e^{xy}$.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

◁ Здесь промежуточные аргументы задаются конкретно, поэтому их производные также конкретны:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial(e^{xy})}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot e^{xy} \cdot y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial(e^{xy})}{\partial y} = -2y \frac{\partial f}{\partial u} + e^{xy} \cdot x \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Отметим, что входящие в ответы $\frac{\partial f}{\partial u}$ и $\frac{\partial f}{\partial v}$ имеют аргументами $u = x^2 - y^2$, $v = e^{xy}$. ▷

ПРИМЕР 11.10. Показать, что если $\varphi(t)$ — произвольная дифференцируемая функция, то функция $z = \varphi(x^2 + y^2)$ удовлетворяет соотношению

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

◁ Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(x^2 + y^2) \cdot 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(x^2 + y^2) \cdot 2y.$$

(Здесь $\varphi'(x^2 + y^2)$ — производная функции $\varphi(t)$ с аргументом $t = x^2 + y^2$.)

Тогда

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = y \cdot \varphi'(x^2 + y^2) \cdot 2x - x \cdot \varphi'(x^2 + y^2) \cdot 2y = 0. \quad \triangleright$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1) Пусть $u = \sin x + F(\sin y - \sin x)$, где $F(t)$ — какая-либо дифференцируемая функция. Показать, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} \cos x + \frac{\partial u}{\partial x} \cos y = \cos x \cos y$$

независимо от выбранной функции F .

2) Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$.

$$z = x^2 y - y^2 x, \text{ где } x = u \cos v, y = u \sin v.$$

Ответы:

$$2) \frac{\partial z}{\partial u} = 3u^3 \sin v \cos v (\cos v - \sin v)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = u^3 (\sin v + \cos v) (1 - 3 \sin v \cos v).$$

§ 11.3. ПРОИЗВОДНЫЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Неявными называют функции, определяемые уравнениями.

Пусть уравнение

$$F(x, y) = 0$$

определяет неявную функцию $y(x)$. (Это означает, что подстановка $y(x)$ вместо y обращает уравнение в тождество $F(x, y(x)) \equiv 0$.) Тогда, предполагая выполненными условия существования неявной функции, для дифференцирования этой функции можно пользоваться формулой

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \quad (11.2)$$

Производные высших порядков находятся последовательным дифференцированием (11.2) с учетом того, что $y = y(x)$.

ПРИМЕР 11.11. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2 y}{dx^2}$, если

$$xy - \ln y = e.$$

◁ Здесь $F(x, y) = xy - \ln y - e$,

$$F'_x(x, y) = y, \quad F'_y(x, y) = x - \frac{1}{y} = \frac{xy - 1}{y}.$$

По формуле (11.2) получаем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{xy - 1} = \frac{y^2}{1 - xy};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{y^2}{1 - xy} \right) = \frac{(1 - xy)d(y^2)/dx - y^2 d(1 - xy)/dx}{(1 - xy)^2}.$$

Учитывая, что $y = y(x)$, найдем

$$\frac{d}{dx}(y^2) = 2y \frac{dy}{dx} = \frac{2y^3}{1 - xy},$$

$$\frac{d}{dx}(1 - xy) = -y - x \frac{dy}{dx} = -y - \frac{xy^2}{1 - xy} = -\frac{y}{1 - xy}$$

и

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y^3 + (y^3)/(1 - xy)}{(1 - xy)^2} = \frac{3y^3 - 2xy^4}{(1 - xy)^3}. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 11.12. Найти $\frac{dy}{dx}$, если $y(x)$ задана неявно уравнением

$$\sin(xy) - e^{xy} - x^2y = 0.$$

◁ По формуле (11.2) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\partial(\sin(xy) - e^{xy} - x^2y)/dx}{\partial(\sin(xy) - e^{xy} - x^2y)/dy} = \\ &= -\frac{y \cos xy - ye^{xy} - 2xy}{x \cos xy - xe^{xy} - x^2} = \frac{2xy + ye^{xy} - y \cos xy}{x \cos xy - xe^{xy} - x^2}. \quad \triangleright \end{aligned}$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1) Найти $y''(x)$, если $y - \sin(x + y) = 0$.

2) Найти $\frac{dy}{dx}$, если $x^3y - y^3x = 1$.

3) Найти $\frac{dy}{dx}$, если $xe^3 + ye^x - e^{xy} = 0$.

Ответы:

$$1) -\frac{y}{(1 - \cos(x+y))^2}; \quad 2) \frac{3x^2y - y^3}{3xy^2 - x^3}; \quad 3) \frac{ye^{xy} - ye^x - e^y}{xe^y + e^x - xe^{xy}}.$$

Пусть уравнение

$$F(x, y, z) = 0$$

определяет неявную функцию $z = z(x, y)$. Тогда для дифференцирования этой функции, предполагая выполненными условия ее существования, можно пользоваться формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \quad (11.3)$$

ПРИМЕР 11.13. Пусть функция $z(x, y)$ неявно определена уравнением $e^z - xyz = 0$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

◁ Применим формулы (11.3): $F(x, y, z) = e^z - xyz$. Тогда $F'_x = -yz, F'_y = -xz, F'_z = e^z - xy$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-yz}{e^z - xy} = \frac{yz}{e^z - xy}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-xz}{e^z - xy} = \frac{xz}{e^z - xy}.$$

Формулы для $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ можно записать и по-иному, учитывая, что (x, y, z) связаны соотношением $e^z - xyz = 0$. Тогда $e^z = xyz$ и

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{xyz - xy} = \frac{z}{xz - x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{xyz - xy} = \frac{z}{yz - y}. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 11.14. Пусть $F(x, y, z) = 0$. Доказать, что

$$а) \quad \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 1; \quad б) \quad \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} = -1.$$

◁ Рассматривая x как функцию y, z (т. е. $x = x(y, z)$), имеем:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_x}.$$

Аналогично, если рассмотреть y как функцию от z, x , то

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Тогда
$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = \left(-\frac{F'_y}{F'_x}\right) \left(-\frac{F'_x}{F'_y}\right) = 1$$

(естественно, для тех (x, y, z) , при которых выражение в левой части определено).

Аналогично б)

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F'_z}{F'_y}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_x}.$$

Перемножая эти равенства, имеем:

$$\frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} = \left(-\frac{F'_z}{F'_y}\right) \left(-\frac{F'_x}{F'_z}\right) \left(-\frac{F'_y}{F'_x}\right) = -1. \quad \triangleright$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial y} = ?$

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial y} = ?$

Ответы:

1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2-x}{z+1}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{z+1}.$

2) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}.$

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

§ 12.1. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть $z = f(x, y)$ — дифференцируемая функция и, следовательно, имеет частные производные, которые, также в свою очередь, являются дифференцируемыми функциями. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$$

называются *частными производными 1-го порядка*, а частные производные от них называются *частными производными 2-го порядка* и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

или соответственно

$$f''_{xx}(x, y), \quad f''_{xy}(x, y), \quad f''_{yx}(x, y), \quad f''_{yy}(x, y).$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные 3-го и более высоких порядков для функции двух переменных и функций большего числа переменных.

Частные производные, полученные в результате дифференцирования по различным аргументам, называются *смешанными*. Среди смешанных частных производных одного порядка выделяют *отличающиеся лишь порядком дифференцирования* по аргументам в отличие от содержа-

щих различное количество дифференцирований по одному и тому же аргументу. Например, смешанные частные производные

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$$

отличаются лишь порядком дифференцирования, а

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$$

отличаются количеством дифференцирований по x и по y .

Смешанные частные производные, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны во всех точках непрерывности (теорема о равенстве смешанных частных производных).

ПРИМЕР 12.1. $z = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5$. Показать, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

◁ Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + y^2 - 5y^3; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy - 15xy^2 + 5y^4.$$

Дифференцируя повторно, получим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (2xy - 15xy^2 + 5y^4) = 2y - 15y^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 + y^2 - 5y^3) = 2y - 15y^2.$$

Следовательно, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. ▷

ПРИМЕР 12.2. $z = e^{xy^2}$. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ и $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$.

◁ Имеем $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy^2} \cdot 2xy = 2xye^{xy^2}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (2xye^{xy^2}) = 2ye^{xy^2} + 2xye^{xy^2} y^2 = 2(y + xy^3)e^{xy^2};$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(2(y + xy^3)e^{xy^2} \right) = 2y^3 e^{xy^2} + 2(y + xy^3)e^{xy^2} y^2 = \\ &= 2y^3(2 + xy^2)e^{xy^2}.\end{aligned}$$

Очевидно, искомые частные производные непрерывны для всех значений x и y , поэтому, используя теорему о равенстве смешанных частных производных, получим:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 2y^3(2 + xy^2)e^{xy^2}. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 12.3. $w = e^{xyz}$. Найти $\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z}$.

$$\triangleleft \text{ Имеем } \frac{\partial w}{\partial z} = e^{xyz} \cdot xy = xye^{xyz};$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} (xyz^{xyz}) = xe^{xyz} + xy \cdot e^{xyz} \cdot xz = (x + x^2 yz)e^{xyz};$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left((x + x^2 yz)e^{xyz} \right) = (1 + 2xyz)e^{xyz} + (x + x^2 yz)e^{xyz} yz = \\ &= (x^2 y^2 z^2 + 3xyz + 1)e^{xyz}. \quad \triangleright\end{aligned}$$

ПРИМЕР 12.4. $u = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Показать, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$\triangleleft$ Здесь для дифференцирования удобно функцию представить в виде

$$u = -\frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2).$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Дифференцируя повторно, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{x^2 + y^2 - 2x \cdot x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{x^2 + y^2 - 2y \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Подставим найденные выражения в левую часть уравнения:

$$\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \equiv 0.$$

Получаем тождество, т. е. функция u удовлетворяет данному уравнению. $\triangleright$

ПРИМЕР 12.5. $y = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$. Показать, что $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, каковы бы ни были дважды дифференцируемые функции φ и ψ .

$\triangleleft$ Найдем частные производные:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \varphi'(x - at) \cdot \frac{\partial}{\partial t}(x - at) + \psi'(x + at) \frac{\partial}{\partial t}(x + at) =$$

$$= \varphi' \cdot (-a) + \psi' \cdot a = a(\psi' - \varphi');$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a \left(\psi'' \cdot \frac{\partial}{\partial t}(x + at) - \varphi'' \cdot \frac{\partial}{\partial t}(x - at) \right) =$$

$$= a(\psi'' \cdot a - \varphi'' \cdot (-a)) = a^2 \psi'' + a^2 \varphi'';$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi' \frac{\partial}{\partial x}(x - at) + \psi' \frac{\partial}{\partial x}(x + at) = \varphi' + \psi';$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \varphi'' \cdot 1 + \psi'' \cdot 1 = \varphi'' + \psi''.$$

Подставим частные производные второго порядка в уравнение:

$$a^2 \psi'' + a^2 \varphi'' = a^2 (\psi'' + \varphi'').$$

В результате получим тождество, т. е. функция y является решением уравнения при условии, что φ и ψ — любые дважды дифференцируемые функции.

Данное дифференциальное уравнение называется *волновым*, а

$$y = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$$

общим решением волного уравнения.

С физической точки зрения оно интересно тем, что представляет сумму двух бегущих волн произвольной формы, движущихся в противоположных направлениях со скоростью a . Например, при $a > 0$ функция $y = \sin(x - at)$ описывает волну, движущуюся слева направо, а $y = \sin(x + at)$ — волну, движущуюся справа налево; $y = \sin(x - at) + \sin(x + at)$ — суперпозиция двух волн, движущихся в противоположных направлениях. ▷

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1) $z = x^y$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

2) $z = \ln(x^2 + y^2)$. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

3) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Показать, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$;

4) $u = \frac{1}{y} [\varphi(ax + y) + \psi(ax - y)]$. Показать, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{a^2}{y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right)$

Ответ:

2) $\frac{4x(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3}$.

§ 12.2. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) . Тогда в этой окрестности существует полный дифференциал

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy,$$

который можно рассматривать как функцию x, y при постоянных dx, dy . Если эта функция, в свою очередь, дифференцируема, то существует полный дифференциал от dz , который называется *дифференциалом 2-го порядка* и обозначается

$$d^2 z = d(dz).$$

Аналогично определяются дифференциалы 3-го и более высоких порядков.

Дифференциалы n -го порядка выражаются через частные производные n -го порядка по формуле

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z \quad (n = 1, 2, \dots),$$

в которой под возведением в степень и умножением символов производных на x понимается образование частной производной соответствующего порядка. Например,

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

(Здесь предполагается, что частные производные 2-го порядка непрерывны и поэтому $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dx dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy$.)

Если функция $z = f(x, y)$ имеет в окрестности точки (x_0, y_0) дифференциалы до $(n+1)$ порядка включительно, то справедлива *формула Тейлора*

$$\Delta z = \frac{dz(x_0, y_0)}{1!} + \frac{d^2 z(x_0, y_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n z(x_0, y_0)}{n!} + R_{n+1},$$

где $\Delta z = f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0)$ — приращение функции, вызванное приращением аргументов dx, dy , а величина R_{n+1} , называемая *остаточным членом*, представима в виде

$$R_{n+1} = \frac{d^{n+1} z(x_0 + \theta dx, y_0 + \theta dy)}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1 \quad (\text{форма Лагранжа})$$

или

$$R_{n+1} = o(\rho^n) \quad \text{при } \rho = \sqrt{dx^2 + dy^2} \rightarrow 0 \quad (\text{форма Пеано}).$$

ПРИМЕР 12.6. Написать формулу Тейлора для функции $z = x^2 + 3xy - y^3$ в окрестности точки $M_0(2, -1)$.

◁ Найдем дифференциалы

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (2x + 3y)dx + (3x - 3y^2)dy,$$

$$\begin{aligned} d^2 z &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = \\ &= 2dx^2 + 6dx dy - 6y dy^2, \end{aligned}$$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy +$$

$$+ 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3 = -6dy^3,$$

$$d^n z = 0 \quad \text{при } n = 4, 5, \dots$$

Следовательно, остаточный член при $n \geq 4$ равен нулю.

Найдем значения дифференциалов в точке $M_0(2, -1)$.

$$dz(2, -1) = dx + 3dy,$$

$$d^2 z(2, -1) = 2dx^2 + 6dx dy + 6dy^2,$$

$$d^3 z(2, -1) = -6dy^3.$$

Итак, формула Тейлора имеет вид

$$\Delta z = dz(2, -1) + \frac{1}{2} d^2 z(2, -1) + \frac{1}{6} d^3 z(2, -1)$$

или

$$\Delta z = dx + 3dy + dx^2 + 3dx dy + 3dy^2 - dy^3.$$

Положим $dx = x - 2$, $dy = y + 1$ и представим приращение функции в виде разложения по степеням $(x - 2)$, $(y + 1)$:

$$\begin{aligned} \Delta z &= (x - 2) + 3(y + 1) + (x - 2)^2 + \\ &+ 3(x - 2)(y + 1) + 3(y + 1)^2 - (y + 1)^3. \quad \triangleright \end{aligned}$$

В общем случае, считая $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$, формулу Тейлора можно интерпретировать как разложение функции $f(x, y)$ по степеням $(x - x_0)$, $(y - y_0)$.

ПРИМЕР 12.7. Функцию $z = x^y$ разложить по степеням $(x - 1)$, $(y - 1)$, найдя члены до третьего порядка включительно.

Использовать результат для вычисления (без таблиц!) $1, 1^{1,02}$.

◁ Значение функции z при $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ равно $z_0 = 1$.

$$1, 1^{1,02} = z(1, 1; 1, 02) = z(1, 1) + \Delta z = z_0 + \Delta z.$$

Вычислим приращение функции.

Сначала найдем дифференциалы первого, второго и третьего порядка данной функции:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = yx^{y-1} dx + x^y \ln x dy,$$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 =$$

$$= y(y-1)x^{y-2} dx^2 + 2x^{y-1}(y \ln x + 1) dx dy + x^y \ln^2 x dy^2,$$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3 =$$

$$= y(y-1)(y-2)x^{y-3} dx^3 + 3(y-1)x^{y-2} +$$

$$+ yx^{y-2} + y(y-1)x^{y-2} \ln x dx^2 dy +$$

$$+ 3[yx^{y-1} \ln^2 x + 2x^{y-1} \ln x] dx dy^2 + x^y \ln^3 x dy^3$$

и вычислим их значения в точке $(1, 1)$:

$$dz = dx, \quad d^2 z = 2 dx dy, \quad d^3 z = 3 dx^2 dy.$$

Используя формулу Тейлора, получим

$$\Delta z = \frac{x-1}{1!} + \frac{2(x-1)(y-1)}{2!} + \dots + \frac{3(x-1)^2(y-1)}{3!} + R_4,$$

или

$$\Delta z \approx (x-1) + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2(y-1).$$

Найдем приращение функции Δz при $x = 1,1$ и $y = 1,02$:

$$\Delta z \approx (1,1 - 1) + (1,1 - 1) \cdot (1,02 - 1) + \frac{1}{2}(1,1 - 1)^2(1,02 - 1) = 0,1021.$$

Следовательно,

$$1,1^{1,02} = z_0 + \Delta z \approx 1 + 0,1021 = 1,1021. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 12.8. Показать, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho},$$

где $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$.

$\triangleleft$ Это тождество проще доказывать справа налево.

Найдем частные производные $\frac{\partial u}{\partial \rho}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 \varphi +$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin^2 \varphi;$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot (-\rho \sin \varphi) + \frac{\partial u}{\partial y} \rho \cos \varphi;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\frac{\partial u}{\partial x} \rho \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \rho \cos \varphi \right) =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rho^2 \sin^2 \varphi = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial x} \rho \cos \varphi -$$

$$- \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rho^2 \cos^2 \varphi - \frac{\partial u}{\partial y} \rho \sin \varphi.$$

Подставим частные производные в правую часть доказываемого тождества:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 \varphi + \\ & + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin^2 \varphi + \frac{1}{\rho^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rho^2 \sin^2 \varphi - \right. \\ & - \frac{\partial u}{\partial x} \rho \cos \varphi - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rho^2 \cos^2 \varphi - \frac{\partial u}{\partial y} \rho \sin \varphi \left. \right) + \\ & + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi \right) = \\ & = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Тождество верно, что и требовалось доказать. $\triangleright$

ПРИМЕР ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Функцию $f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(2, 1)$.

Ответ:

$$f(x, y) = 12 + 15(x - 2) + 6(x - 2)^2 + 3(x - 2)(y - 1) - 6(y - 1)^2 + (x - 2)^3 - 2(y - 1)^3.$$

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ**§ 13.1. ПОНЯТИЕ ОБ ЭКСТРЕМУМАХ ФУНКЦИИ**

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и

$$\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

— приращение, которое она получает при смещении из точки $M_0(x_0, y_0)$ в точку $M(x, y)$.

Если существует выколота окрестность $\delta(M_0)$ такая, что

$$\forall M \in \delta(M_0) \Delta z < 0 \quad (\text{или } z > 0),$$

то точка $M_0(x_0, y_0)$ называется *точкой максимума* (или *точкой минимума*) функции $f(x, y)$, а значение функции $f(x_0, y_0)$ в этой точке называется *максимумом* (или *минимумом*) функции $f(x, y)$.

Точки максимума и минимума называются *точками экстремума*, а максимумы и минимумы — *экстремумами* функции.

§ 13.2. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

Если функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_0, y_0)$ и дифференцируема в этой точке, то

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0 \quad (13.1)$$

и, следовательно, $dz(x_0, y_0) = 0$ тождественно относительно dx, dy . Точки, в которых выполняются условия (13.1) называются *стационарными* точками функции $f(x, y)$.

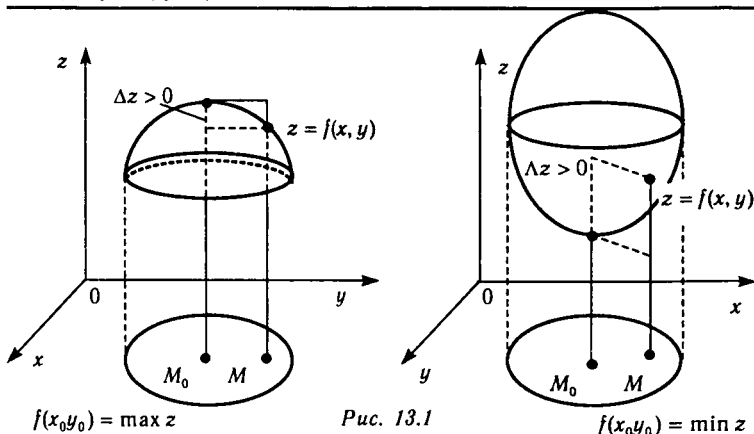


Рис. 13.1

В общем случае, если функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_0, y_0)$, то M_0 — стационарная точка функции, или в этой точке функция не дифференцируема (необходимое условие экстремума).

Достаточные условия экстремума функции, имеющих непрерывные частные производные 2-го порядка приведены в таблице.

(x_0, y_0) — стационарная точка, $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$				
$AC - B^2$	> 0		< 0	$= 0$
A (и C)	> 0	< 0	$\forall$	$\forall$
extr	min	max	$\exists$	$\exists$ или $\bar{\exists}$

Если $AC - B^2 = 0$, то для того, чтобы установить наличие или отсутствие экстремума, требуется провести дополнительное исследование (применяя для анализа знаков Δz формулу Тейлора с частными производными более высоких порядков, или, в простейших случаях, используя непосредственно определение экстремума).

§13.3. ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ НА ЭКСТРЕМУМ

Для отыскания экстремумов дифференцируемой функции сначала находят стационарные точки функции, а затем проверяют выполнение достаточных условий наличия

или отсутствия экстремума, чтобы выделить среди стационарных точек те, в которых экстремум достигается.

ПРИМЕР 13.1. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

◁ Найдем частные производные 1-го порядка и составим систему уравнений вида (13.1):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12 = 0$$

или

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0, \\ xy - 2 = 0. \end{cases}$$

Выражая из второго уравнения системы $x = \frac{2}{y}$ и подставляя в первое уравнение, получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{y}\right)^2 + y^2 - 5 = 0 &\Leftrightarrow (y^2)^2 - 5y^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (y^2 - 1)(y^2 - 4) = 0. \end{aligned}$$

Соединим это уравнение со вторым уравнением системы:

$$\begin{cases} (y - 1)(y + 1)(y - 2)(y + 2) = 0, \\ x = \frac{2}{y}. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем четыре стационарные точки:

$$M_1(1, 2), \quad M_2(-1, -2), \quad M_3(2, 1), \quad M_4(-2, -1).$$

Частные производные 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x.$$

Составим дискриминант $D = AC - B^2$ для каждой стационарной точки.

Для точки M_1 :

$$\begin{aligned} A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{M_1} &= 6, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{M_1} = 12, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{M_1} = 6; \\ D &= 6 \cdot 6 - 12^2 = -108 < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, экстремума в точке M_1 нет.

Для точки M_2 :

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{M_2} = -6, \quad b = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{M_2} = -12, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{M_2} = -6;$$

$$D = 36 - 144 = -108 < 0.$$

В точке M_2 экстремума также нет.

Для точки M_3 :

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{M_3} = 12, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{M_3} = 6, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{M_3} = 12;$$

$$D = 144 - 36 = 108 > 0, \quad A > 0.$$

Следовательно, в точке M_3 функция имеет минимум, равный

$$z_{\min} = z \Big|_{\substack{x=2 \\ y=1}} = 2^3 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 - 15 \cdot 2 - 12 \cdot 1 = -28.$$

Для точки M_4 :

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{M_4} = -12, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{M_4} = -6, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{M_4} = -12;$$

$$D = 144 - 36 = 108 > 0, \quad A < 0.$$

Поэтому в точке M_4 функция имеет максимум, равный

$$z_{\max} = z \Big|_{\substack{x=-2 \\ y=-1}} = (-2)^3 + 3 \cdot (-2) \cdot (-1)^2 - 15 \cdot (-2) - 12 \cdot (-1) = 28. \triangleright$$

ПРИМЕР 13.2. Найти точки экстремума функции

$$z = 4(x - y) - x^2 - y^2.$$

◁ Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4 - 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -4 - 2y.$$

Воспользовавшись необходимыми условиями экстремума, находим стационарные точки:

$$\begin{cases} 4 - 2x = 0 \\ -4 - 2y = 0, \end{cases}$$

откуда $x = 2$, $y = -2$, $M(2, -2)$.

Значения частных производных 2-го порядка в точке M :

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

Составляем дискриминант

$$AC - B^2 = (-2) \cdot (-2) - 0 = 4 > 0; \quad A < 0.$$

Следовательно, в точке $M(2, -2)$ заданная функция имеет максимум:

$$z_{\max} = 4 \cdot (2 + 2) - 2^2 - (-2)^2 = 8. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 13.3. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$$

в точках $M_1(\sqrt{2}, \sqrt{2}), M_2(0, 1)$.

$\triangleleft$ Сначала проверим выполнение необходимых условий экстремума в точке M_1 :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_1} &= 4x^3 - 4x - 4y \Big|_{M_1} = \\ &= 4 \cdot (\sqrt{2})^3 - 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M_1} &= 4y^3 - 4x - 4y \Big|_{M_1} = \\ &= 4 \cdot (\sqrt{2})^3 - 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, точка M_1 является стационарной.

Найдем частные производные 2-го порядка:

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{M_1} = 12x^2 - 4 \Big|_{M_1} = 20;$$

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{M_1} = -4;$$

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{M_1} = 12y^2 - 4 \Big|_{M_1} = 20.$$

Итак, $AC - B^2 = 400 - 16 = 384 > 0, A > 0 \Rightarrow$ точка M_1 является точкой минимума.

Для точки M_2 :

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_2} = 4 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = -4 \neq 0;$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M_2} = 4 \cdot 1^3 - 4 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = 0.$$

Необходимые условия экстремума не выполняются. Следовательно, точка M_2 не является точкой экстремума. $\triangleright$

ПРИМЕР 13.4. Исследовать на экстремум функцию

$$z = (x - 1)^4 + (y + 2)^4.$$

$\triangleleft$ Находим частные производные первого порядка и составляем систему уравнений вида (13.1):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4(x - 1)^3 = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4(y + 2)^3 = 0,$$

откуда $x = 1, y = -2, M_0(1, -2)$. Найдем значения частных производных второго порядка в т. $M_0(1, -2)$:

$$A = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{M_0} = 12(x - 1)^2 \Big|_{M_0} = 12 \cdot (1 - 1)^2 = 0;$$

$$B = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{M_0} = 0;$$

$$C = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{M_0} = 12(y + 2)^2 \Big|_{M_0} = 12 \cdot (-2 + 2)^2 = 0$$

и составим дискриминант

$$AC - B^2 = 0.$$

Следовательно, для того чтобы установить наличие или отсутствие экстремума требуется провести дополнительное исследование.

Рассмотрим приращение функции

$$\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) = (x - 1)^4 + (y + 2)^2.$$

Видно, что для $\forall M(x, y) \in \dot{X}(M_0(1, -2)) \Delta z > 0$. Следовательно, в точке M_0 функция, согласно определению, имеет минимум:

$$z_{\min} = z|_{\substack{x=1 \\ y=-2}} = (1-1)^4 + (-2+2)^4 = 0. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 13.5. Исследовать на экстремум функцию

$$z = (x-1)^4 - (y+2)^4.$$

◁ Аналогично предыдущему примеру найдем стационарную точку $M_0(1, -2)$.

Частные производные второго порядка в точке M_0 , также, как и в примере 13.4, равны 0:

$$A = B = C = 0.$$

Дискриминант

$$AC - B^2 = 0,$$

и необходимо дополнительное исследование.

Несложно заметить, что в любой $\delta(M_0)$ $\exists$ точки M , в которых $\Delta z > 0$, например, для $M(x, -2)$

$$\Delta z = (x-1)^4,$$

и точки, в которых $\Delta z < 0$, например, для $M(1, y)$

$$\Delta z = -(y+2)^4.$$

Поэтому $\bar{\exists} \delta(M_0) : \forall M \in \delta(M_0) \quad \Delta z > 0$ (или $\Delta z < 0$), следовательно, экстремум в точке M_0 не существует. $\triangleright$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти:

1) стационарные точки функции

$$z = 2x^3 + xy^3 + 5x^2 + y^2 + 10;$$

2) экстремумы функции

$$z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10;$$

3) экстремумы функции

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

4) экстремумы функции

$$z = (x+1)^4 + (y-1)^4.$$

Ответы:

$$1) (0, 0), \left(-\frac{5}{3}, 0\right), (-1, 2), (-1, -2);$$

$$2) z_{\max} = 10 \text{ при } x = 0, y = 0;$$

$$3) z_{\min} = -28 \text{ при } x = 2, y = 1;$$

$$z_{\max} = 28 \text{ при } x = -2, y = -1;$$

$$4) z_{\min} = 0 \text{ при } x = -1, y = 1.$$

УСЛОВНЫЕ ЭКСТРЕМУМЫ

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$,

$$\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

— приращение, которое она получает при смещении из точки $M_0(x_0, y_0)$ в точку $M(x, y)$, и аргументы функции связаны условием

$$F(x, y) = 0, \quad (14.1)$$

которое называют *уравнением связи*.

Тогда говорят, что функция $z = f(x, y)$ имеет *условный максимум (условный минимум)* в точке $M_0(x_0, y_0)$, если существует такая окрестность $\dot{\delta}(M_0)$, что

$$\Delta z < 0 \quad (\Delta z > 0)$$

для любой точки $M \in \dot{\delta}(M_0)$, координаты которой удовлетворяют уравнению связи (14.1).

Условные максимумы и условные минимумы называются *условными экстремумами*.

**§ 14.1. УСЛОВНЫЕ ЭКСТРЕМУМЫ, СВОДЯЩИЕСЯ
К ОБЫЧНЫМ ЭКСТРЕМУМАМ ФУНКЦИИ
ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

Пусть уравнение связи (14.1) можно разрешить относительно y (или относительно x), т. е. можно выразить явно определяемую этим уравнением неявную функцию $y = y(x)$

(или $x = x(y)$). Тогда отыскание условных экстремумов функции $f(x, y)$ при $F(x, y) = 0$ сводится к отысканию обычных (безусловных) экстремумов функции $f(x, y(x)) = \varphi(x)$ (или $f(x(y), y) = \psi(y)$).

ПРИМЕР 14.1. Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$ при условии, что x и y связаны уравнением $x + y - 2 = 0$.

◁ Выразим из уравнения связи y и подставим в функцию z :

$$y = 2 - x; \quad z = x^2 + (2 - x)^2 = 2x^2 - 4x + 4.$$

Задача сводится к отысканию обычного (безусловного) экстремума функции $z = f(x)$.

Найдем производную первого порядка

$$z' = 4x - 4 = 4(x - 1).$$

Приравнявая z' нулю, определим критическую точку:

$$x = 1.$$

Найдем вторую производную в этой точке:

$$z'' = 4 > 0.$$

Следовательно, в точке $x = 1$ функция $z = f(x)$ имеет минимум. Из уравнения связи найдем координаты точки условного минимума:

$$x = 1, \quad y = 1.$$

Значит, функция $z = x^2 + y^2$ имеет условный минимум в точке $M(1, 1)$.

$$z_{\min} = z|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Рассмотрим геометрическую интерпретацию. Выражение $z = x^2 + y^2$ является уравнением параболоида вращения, изображенного на рис. 14.1. Уравнение $x + y - 2 = 0$ представляет плоскость, которая пересекается с параболоидом по параболе. Нижняя точка параболы —

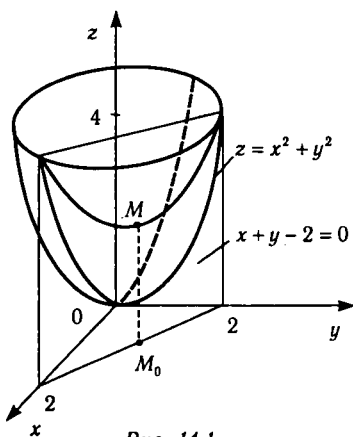


Рис. 14.1

точка M . Ее проекция M_0 на плоскость Oxy является точкой условного минимума, а аппликата $z = 2$ выражает значение условного минимума. $\triangleright$

ПРИМЕР 14.2. Найти экстремум функции $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

при условии, что x и y связаны уравнением $x + y = 2$.

$\triangleleft$ Из уравнения связи выразим

$$x = 2 - y$$

и подставим в функцию z :

$$z = \frac{1}{2-y} + \frac{1}{y} \Leftrightarrow z = \frac{2}{(2-y)y}.$$

Задача, как и в предыдущем примере сводится к отысканию экстремума функции $z = f(y)$.

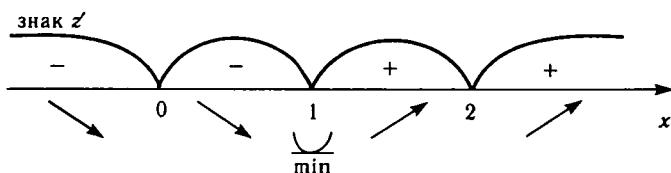
Найдем производную первого порядка:

$$z' = 2 \cdot \frac{-1}{(2-y)^2 y^2} \cdot (2-2y) = \frac{4(y-1)}{(y-2)^2 y^2}.$$

Определим критические точки:

$$z' = 0 \quad \text{при} \quad y = 1,$$

$$\bar{\exists} z' \quad \text{и} \quad \bar{\exists} z \quad \text{при} \quad y = 0 \quad \text{и} \quad y = 2$$



Следовательно, в точке $y = 1$ функция $z = f(y)$ имеет минимум. Учитывая уравнение связи, найдем координаты точки условного минимума:

$$x = 1, \quad y = 1.$$

Условный минимум функция имеет в точке $(1, 1)$:

$$z_{\min} = z|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2. \quad \triangleright$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1) Найти экстремум функции $z = xy^2$ при условии, что x и y связаны уравнением $x + 2y = 1$.

2) Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$ при условии, что x и y связаны уравнением $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.

Ответы:

1) В точке $(1, 0)$ — условный минимум, $z_{\min} = 0$. В точке $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ — условный максимум, $z_{\max} = \frac{1}{27}$.

2) В точке $\left(\frac{36}{25}, \frac{48}{25}\right)$ — условный минимум, $z_{\min} = \frac{144}{25}$.

§ 14.2. УСЛОВНЫЕ ЭКСТРЕМУМЫ, СВОДЯЩИЕСЯ К ОБЫЧНЫМ ЭКСТРЕМУМАМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Аналогично определяются и разыскиваются в простейших случаях условные экстремумы функции $u = u(x, y, z)$ при $F(x, y, z) = 0$.

ПРИМЕР 14.3. Найти экстремум функции $u = xyz$ при условии, что x , y и z связаны уравнением $x + y + z = 5$.

◁ Из уравнения связи выразим

$$z = 5 - x - y$$

и подставим в функцию u :

$$u = xy(5 - x - y).$$

Задача сводится к отысканию экстремума функции двух переменных

$$u = f(x, y).$$

Найдем частные производные первого порядка и приравняем их нулю:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 5y - 2xy - y^2 = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 5x - x^2 - 2xy = 0$$

или

$$\begin{cases} y^2 + 2xy - 5y = 0, \\ x^2 + 2xy - 5x = 0. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения системы первое, получим

$$x^2 - y^2 - 5(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 5) = 0.$$

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} (x-y)(x+y-5) = 0 \\ x^2 + 2xy - 5x = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2x^2 - 5x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} t = 5 - x \\ x^2 + 10x - 2x^2 - 5x = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y = x \\ 3x(x - 5/3) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 5 - x \\ x(5 - x) = 0 \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Из совокупности двух систем найдем четыре стационарные точки:

$$M_1(0, 0), \quad M_2\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right), \quad M_3(0, 5), \quad M_4(5, 0).$$

Найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 5 - 2x - 2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2x.$$

Составим дискриминант $D = AC - B^2$ для каждой стационарной точки.

Для точки $M_1(0, 0)$:

$$A = 0, B = 5, C = 0, D = 0 \cdot 0 - 5^2 = -25 < 0,$$

следовательно, экстремума в точке M_1 нет.

Для точки $M_2\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$

$$A = -\frac{10}{3}, B = 5 - \frac{10}{3} - \frac{10}{3} = -\frac{5}{3}, C = -\frac{10}{3},$$

$$D = \frac{100}{9} - \frac{25}{3} = \frac{75}{9} > 0, A < 0,$$

следовательно, $M_2\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$ — точка максимума функции

$u = f(x, y)$. Из уравнения связи найдем аппликату $z = 5 - \frac{5}{3} - \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$ точки $M\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$ являющейся точкой

условного максимума

$$u_{\max} = \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{125}{27}.$$

Для точки $M_3(0, 5)$:

$$A = -10, B = 5 - 0 - 10 = -5, C = 0, D = 0 - 25 = -25 < 0;$$

экстремума в точке M_3 нет.

Для точки $M_4(5, 0)$:

$$A = 0, B = 5 - 10 - 0 = -5, C = -10, D = 0 - 25 = -25 < 0;$$

в точке M_4 экстремума также нет.

Итак, исследуемая функция имеет условный максимум

$u_{\max} = \frac{125}{27}$ в точке $M\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$. Других условных экстремумов нет. $\triangleright$

ПРИМЕР ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти экстремум функции $u = x^3 y^2 z$ при условии, что x, y и z связаны уравнением $3x + 2y + z = 12 (x > 0, y > 0, z > 0)$.

Ответ:

В точке $(2, 2, 2)$ — максимум, $u_{\max} = 64$.

ПРИМЕР 14.4. На плоскости $2x - z = 0$ найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до точек $A(1, 1, 1)$, $B(4, 3, 4)$ была бы наименьшей.

$\triangleleft$ Пусть искомая точка $M(x, y, z)$, тогда расстояния от точки A до M и от B до M выражаются следующим образом:

$$|\vec{MA}| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2},$$

$$|\vec{MB}| = \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2}.$$

Сумма квадратов расстояний равна

$$u = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + (x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2,$$

$$u = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 10x - 8y - 10z + 44.$$

Таким образом, задача сводится к отысканию минимума функции $u = f(x, y, z)$ при условии, что x, y и z связаны уравнением $2x - z = 0$.

Выражая из уравнения связи $z = 2x$ и подставляя z в функцию, получим

$$u = 2x^2 + 2y^2 + 2(2x)^2 - 10x - 8y - 20x + 44,$$

$$u = 10x^2 + 2y^2 - 30x - 8y + 44.$$

Выделяем полные квадраты

$$u = 10\left(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right) - 10 \cdot \frac{9}{4} + 2(y^2 - 4y + 4) - 2 \cdot 4 + 44,$$

$$u = 10\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 2(y - 2)^2 + \frac{27}{2}.$$

Это уравнение параболоида с вершиной в точке $\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{27}{2}\right)$. Следовательно, точка условного минимума функции $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$. При этом $z = 2x = 3$ и искомой точкой будет точка $\left(\frac{3}{2}, 2, 3\right)$. $\triangleright$

ПРИМЕР 14.5. Сечение канала имеет форму равнобокой трапеции данной площади. Как выбрать угол α , чтобы омываемая поверхность канала была наименьшей (рис. 14.2)?

$\triangleleft$ Пусть S — площадь трапеции, тогда

$$S = \frac{b + b + 2l \cos \alpha}{2} \cdot l \sin \alpha = (b + l \cos \alpha)l \sin \alpha.$$

Поверхность канала пропорциональна периметру трапеции без верхнего основания $P = b + 2l$.

Задачу можно сформулировать следующим образом: найти минимум функции $P = b + 2l$ при условии, что b и l связаны уравнением

$$S = (b + l \cos \alpha)l \sin \alpha, \quad \text{где}$$

$$S = \text{const}, \quad b > 0, \quad l > 0, \quad 0 < \alpha < \pi.$$

Выражая из уравнения связи

$$b = \frac{S}{l \sin \alpha} - l \cos \alpha$$

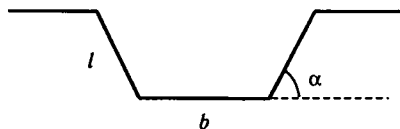


Рис. 14.2

и подставляя в функцию, получим

$$P = \frac{S}{l \sin \alpha} - l \cos \alpha + 2l.$$

Найдем производные первого порядка и приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial P}{\partial l} = \frac{S}{\sin \alpha} \cdot -\frac{1}{l^2} - \cos \alpha + 2 = \frac{-S + (2 - \cos \alpha)l^2 \sin \alpha}{l^2 \sin \alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = \frac{S}{l} \cdot \left(-\frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) + l \sin \alpha = \frac{-S \cos \alpha + l^2 \sin^3 \alpha}{l \sin^2 \alpha} = 0.$$

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} -S + (2 - \cos \alpha)l^2 \sin \alpha = 0 \\ -S \cos \alpha + l^2 \sin^3 \alpha = 0. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение системы на $-\cos \alpha$ и складывая его со вторым, получим

$$l^2((2 - \cos \alpha) \cdot (-\cos \alpha) \sin \alpha + \sin^3 \alpha) = 0;$$

$$l^2 \sin \alpha (-2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = 0 \\ \cos \alpha = 1/2. \end{cases}$$

Решения уравнения $\sin \alpha = 0$ не принадлежат интервалу $0 < \alpha < \pi$, а решение уравнения $\cos \alpha = 1/2$, принадлежащее данному интервалу, равно $\alpha = \pi/3$.

Из геометрического смысла задачи следует, что при $\alpha = \frac{\pi}{3}$ функция P имеет условный минимум. Ответим люб-

пытный факт, что оптимальное значение угла $\alpha = \pi/3$ не зависит от площади трапеции S и, следовательно, остается оптимальным при любых l и b . $\triangleright$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1) Найти стороны прямоугольного треугольника, имеющего при данной площади S наименьший периметр.

2) Найти прямоугольный параллелепипед данного объема V , имеющий наименьшую поверхность.

Ответы:

1) Стороны треугольника $\sqrt{2S}$, $\sqrt{2S}$, $2\sqrt{S}$.

2) Куб.

МЕТОД ЛАГРАНЖА ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ УСЛОВНЫХ ЭКСТРЕМУМОВ

§ 15.1. МЕТОД ЛАГРАНЖА

Пусть требуется найти условные экстремумы функции

$$f(x, y) \text{ при } F(x, y) = 0. \quad (15.1)$$

По методу Лагранжа эта задача решается следующим образом. Составляется вспомогательная функция

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda F(x, y),$$

которую называют *функцией Лагранжа* и разыскиваются ее стационарные точки, т. е. решается система уравнений

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 0, \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0, \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0. \end{cases}$$

Если (x_0, y_0, λ_0) — решение этой системы, то (x_0, y_0) — точка, в которой возможен условный экстремум (15.1).

§ 15.2. НАХОЖДЕНИЕ УСЛОВНЫХ ЭКСТРЕМУМОВ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ЛАГРАНЖА

Метод Лагранжа целесообразно использовать, когда затруднительно или вообще невозможно выразить y или x из уравнения связи $F(x, y) = 0$ в элементарных функциях. С другой стороны, при применении метода Лагранжа усложняется проверка достаточных условий экстремума. Поэтому наличие или отсутствие условного экстремума в

найденной точке (x_0, y_0) по возможности устанавливается, исходя из существа задачи.

ПРИМЕР 15.1. В сечении цилиндра $x^2 + y^2 = 2$ плоскостью $x + y + z - 4 = 0$ найти точки с наименьшей и наибольшей аппликатами.

◁ Эту задачу можно сформулировать следующим образом: требуется найти экстремумы функции $z = 4 - x - y$ при условии, что x , y и z связаны уравнением $x^2 + y^2 - 2 = 0$.

Составим функцию Лагранжа

$$L = 4 - x - y + \lambda(x^2 + y^2 - 2)$$

и найдем ее частные производные

$$L'_x = -1 + 2\lambda x, \quad L'_y = -1 + 2\lambda y, \quad L'_\lambda = x^2 + y^2 - 2.$$

Для определения x , y и λ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -1 + 2\lambda x = 0, \\ -1 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Выражая из первого и второго уравнений $x = \frac{1}{2\lambda}$, $y = \frac{1}{2\lambda}$ и подставляя x и y в третье уравнение системы, найдем

$$\lambda^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1/2 \\ \lambda = -1/2. \end{cases}$$

Система имеет два решения: $x = y = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$; $x = y = -1$, $\lambda = -\frac{1}{2}$. Условные экстремумы возможны в точках $(1, 1)$ и $(-1, -1)$ (и только в этих точках).

Из геометрической сути задачи ясно, что точки в сечении цилиндра с наименьшей и наибольшей аппликатами существуют, следовательно, функция $z = 4 - x - y$ имеет условный минимум и условный максимум. А так как точек, в которых условные экстремумы возможны, всего две, то в одной из них достигается условный минимум, а в другой — условный максимум.

В точке $(1, 1)$

$$z = (4 - x - y) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = 2,$$

а в точке $(-1, -1)$

$$z = (4 - x - y) \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=-1}} = 6.$$

Следовательно, $z_{\text{наим}} = 2$, а $z_{\text{наиб}} = 6$. $\triangleright$

Если требуется найти условные экстремумы функции трех переменных

$$f(x, y, z) \quad \text{при} \quad F(x, y, z) = 0,$$

то функция Лагранжа имеет вид

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda F(x, y, z),$$

и система для отыскания ее стационарных точек содержит 4 уравнения:

$$L'_x = 0, \quad L'_y = 0, \quad L'_z = 0, \quad L'_\lambda = 0.$$

Вообще метод Лагранжа обобщается на случай функции с любым числом аргументов, и уравнений связи может быть несколько.

ПРИМЕР 15.2. Палатка имеет форму цилиндра с насаженной на него конической верхушкой. При каких соотношениях между линейными размерами палатки для ее изготовления потребуется наименьшее количество материала при заданном объеме?

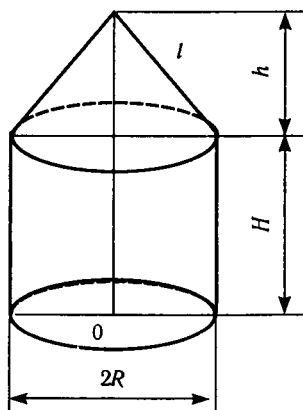
◁ Пусть R — радиус основания палатки,

H — высота цилиндрической части,

h — высота конической верхушки.

Тогда объем палатки

$$V = \pi R^2 H + \frac{1}{3} \pi R^2 h,$$



а боковая поверхность

$$S = \pi Rl + 2\pi RH = \pi h\sqrt{R^2 + h^2} + 2\pi RH.$$

Задачу можно сформулировать следующим образом: найти, при каких соотношениях между переменными R , H , h функция $S = \pi R\left(\sqrt{R^2 + h^2} + 2H\right)$ имеет минимум при условии

$$V = \pi R^2\left(H + \frac{h}{3}\right) = \text{const.}$$

Составим функцию Лагранжа

$$L = \pi R\left(\sqrt{R^2 + h^2} + 2H\right) + \lambda\left[V - \pi R^2\left(H + \frac{h}{3}\right)\right].$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial L}{\partial h} = \pi R\left(\frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} - \frac{\lambda}{3}R\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial H} = \pi R(2 - \lambda R),$$

$$\frac{\partial L}{\partial R} = \pi\left[\left(\sqrt{R^2 + h^2} + 2H\right) + \frac{R^2}{R^2 + h^2} - 2\lambda R\left(H + \frac{h}{3}\right)\right],$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = V - \pi R^2\left(H + \frac{h}{3}\right)$$

Необходимые условия экстремума функции Лагранжа имеют вид

$$\begin{cases} R\left(\frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} - (\lambda/3) \cdot R\right) = 0, \\ R(2 - \lambda R) = 0, \\ \left(\sqrt{R^2 + h^2} + 2H\right) + R^2/(\sqrt{R^2 + h^2}) - 2\lambda R(H + h/3) = 0, \\ V - \pi R^2(H + h/3) = 0. \end{cases}$$

Ищем только положительные решения.

Из первых двух уравнений системы получим $R = \frac{\sqrt{5}}{2}h$,
 $\lambda = \frac{4}{\sqrt{5}h}$.

Подставляя R и λ в третье уравнение, найдем $H = \frac{1}{2}h$.

Нетрудно понять, что из четвертого уравнения можно найти значение h , причем оно определяется однозначно.

Из задачи ясно, что условный минимум существует, а так как стационарная точка у функции Лагранжа всего одна, то именно она и определяет точку условного минимума. Так что решением задачи являются соотношения

$$R = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad H = \frac{1}{2}h. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Спроектировать консервную банку цилиндрической формы заданной вместимости так, чтобы требовалось минимальное количество жести для ее изготовления.

Ответ:

Вертикальное сечение банки должно быть квадратным ($h = 2r$).

**НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ
ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ**

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в замкнутой области D , ограниченной линией L (рис. 16.1). Тогда она имеет наибольшее M и наименьшее m значения (следует из теоремы Вейерштрасса), причем они могут достигаться в стационарных точках внутри области D и в граничных точках, т. е. на линии L .

Если L — гладкая линия (рис. 16.1), заданная уравнением $F(x, y) = 0$, то наибольшее и наименьшее значения в граничных точках являются условными экстремумами функции

$$f(x, y) \quad \text{при} \quad F(x, y) = 0. \quad (16.1)$$

Если L не гладкая линия, но состоит из конечного числа гладких кусков, соединяющихся в угловых точках (рис. 16.2), то наибольшее и наименьшее значения могут достигаться также и в этих угловых точках.

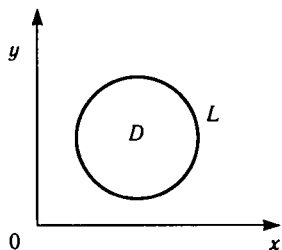


Рис. 16.1

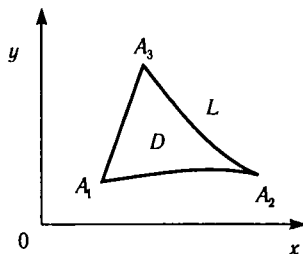


Рис. 16.2

§ 16.1. СХЕМА НАХОЖДЕНИЯ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Для отыскания M и m можно поступить следующим образом:

- 1) найти стационарные точки функции $f(x, y)$ внутри области D ;
- 2) найти точки на границе L , в которых могут быть условные экстремумы (16.1);
- 3) вычислить значения функции во всех найденных точках и в угловых точках границы L (если они есть);
- 4) выделить M и m среди вычисленных значений.

§ 16.2. ЗАДАЧИ НА ОТЫСКАНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

ПРИМЕР 16.1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = (x - 1)^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \leq 4$.

◁ Здесь рассматривается область D , ограниченная окружностью $x^2 + y^2 = 4$, включая и точки окружности.

Найдем стационарные точки данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x - 1), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y.$$

В силу необходимых условий экстремума $x = 1, y = 0$.

Стационарная точка $M(1, 0)$ принадлежит области D .

Найдем точки на границе $x^2 + y^2 = 4$, которые могут быть условными экстремумами. Для этого рассмотрим функцию Лагранжа

$$L = (x - 1)^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4).$$

Найдем частные производные

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2(x - 1) + 2\lambda x, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -2y + 2\lambda y, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 4.$$

Для определения x, y и λ получаем систему

$$\begin{cases} x - 1 + \lambda x = 0 \\ -y + \lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0, \end{cases}$$

решения которой:

$$x = 2, y = 0, \lambda = -\frac{1}{2}; \quad x = -2, y = 0, \lambda = \frac{1}{2};$$

$$z = \frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{15}}{2}, \lambda = 1; \quad x = \frac{1}{2}, y = -\frac{\sqrt{15}}{2}, \lambda = 1$$

Вычислим значения функции в найденных точках:

$$z(1, 0) = (1 - 1)^2 - 0 = 0,$$

$$z(2, 0) = (2 - 1)^2 - 0 = 1,$$

$$z(-2, 0) = (-2 - 1)^2 - 0 = 9,$$

$$z\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 = -\frac{7}{2},$$

$$z\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 = -\frac{7}{2}.$$

Выбираем из найденных значений $m = -\frac{7}{2}$, $M = 9$.

Итак, $z_{\text{наим}} = -\frac{7}{2}$, $z_{\text{наиб}} = 9$. $\triangleright$

ПРИМЕР 16.2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 4xy - 2y^2 - 12x + 10$ в треугольнике с вершинами $A(1, 1)$, $B(5, 1)$, $C(1, 3)$.

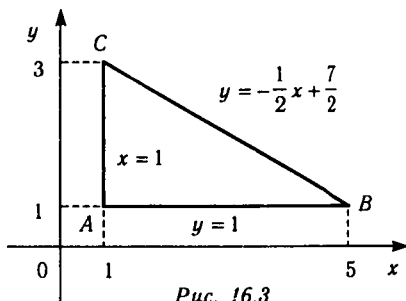


Рис. 16.3

$\triangleleft$ Здесь область D ограничена прямыми, совпадающими со сторонами треугольника,

$$x = 1, y = 1, y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

(рис. 16.3).

Найдем стационарные точки данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y - 12, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4x - 4y.$$

Из системы уравнений (необходимые условия экстремума)

$$\begin{cases} x + 2y - 6 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

находим $x = y = 2$.

Точка $M_1(2, 2)$ принадлежит области D .

Определим точки на сторонах треугольника, в которых могут быть условные экстремумы.

На стороне AC , т. е. при $x = 1$, функция имеет вид

$$z = -2y^2 + 4y - 1.$$

Находим критические точки

$$z'_y = -4y + 4 = -4(y - 1),$$

$$z'_y = 0 \quad \text{при} \quad y = 1.$$

Следовательно, в точке $M_2(1, 1)$, совпадающей с точкой A , функция может иметь условный экстремум.

На стороне AB , т. е. при $y = 1$ функция имеет вид $z = x^2 - 8x + 8$. Находим стационарные точки

$$z'_x = 2x - 8 = 2(x - 4),$$

$$z'_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 4.$$

Следовательно, в точке $M_3(4, 1)$ функция также может иметь условный экстремум.

На стороне CB , т. е. при $y = \frac{7-x}{2}$ функция имеет вид

$$z = -\frac{3x^2}{2} + 9x - \frac{29}{2}.$$

Находим критические точки

$$z'_x = -3x + 9,$$

$$z'_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 3.$$

Следовательно, и в точке $M_4(3, 2)$ может быть условный экстремум.

Вычислим значения функции в точках M_1, M_2, M_3, M_4, B, C .

$$z(2, 2) = -2, \quad z(1, 1) = 1, \quad z(4, 1) = -8,$$

$$z(3, 2) = -1, \quad z(5, 1) = -7, \quad z(1, 3) = -7.$$

Итак, $z_{\text{наиб}} = 1, \quad z_{\text{наим}} = -8. \quad \triangleright$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x(y - 1)$ в круге $x^2 + y^2 \leq 1$.

2) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 4x + 4y + 1$ в треугольнике с вершинами $A(1, 0), B(4, 0), C(1, -3)$.

Ответы:

$$1) z_{\text{наиб}} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ при } x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, y = -\frac{1}{2}; \quad z_{\text{наим}} = -\frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ при } x = \frac{\sqrt{3}}{2}, y = -\frac{1}{2}.$$

$$2) \quad z_{\text{наиб}} = 16 - 4\sqrt{14} \text{ при } x = 2 + \frac{\sqrt{14}}{2}, y = 2 - \frac{\sqrt{14}}{2}; \quad z_{\text{наим}} = -7 \text{ при } x = 2, y = -2.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 17.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Решением уравнения $F(x, y, y') = 0$ на интервале (a, b) называется любая функция $y = y(x)$, которая будучи подставлена в это уравнение вместе со своей производной $y'(x)$, обращает его в тождество относительно $x \in (a, b)$. Уравнение $\Phi(x, y) = 0$, определяющее решение как неявную функцию, называется *интегралом дифференциального уравнения*, а кривая, которую определяет уравнение $\Phi(x, y) = 0$, называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения. Процесс решения дифференциального уравнения называется *интегрированием дифференциального уравнения*.

ПРИМЕР 17.1. Доказать, что функция $y = \frac{\sin x}{x}$ является решением дифференциального уравнения $xy' + y = \cos x$.

◁ $y' = \frac{(x \cos x - \sin x)}{x^2}$. Подставим y и y' в левую часть уравнения:

$$\begin{aligned} x \cdot \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} + \frac{\sin x}{x} &= \frac{x^2 \cos x}{x^2} - \frac{x \sin x}{x^2} + \frac{\sin x}{x} = \\ &= \cos x - \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin x}{x} = \cos x. \end{aligned}$$

Получили тождество $\cos x \equiv \cos x$, что требовалось доказать. ▷

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Доказать, что функция $y = y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению.

1) $y = xe^{-x}$, $xy' = (1-x)y$;

2) $y = xe^{-x^2/2}$, $xy' = (1-x^2)y$;

3) $y = -\sqrt{x^4 - x^2}$, $xyy' = y^2 + x^4$;

4) $y = x\sqrt{1-x^2}$, $yy' = x - 2x^3$;

5) $y = \frac{1}{1+x+\ln x}$; $xy' = y(y \ln x - 1)$.

ПРИМЕР 17.2. Показать, что функция $y = Ce^{2x}$ является решением дифференциального уравнения $y' = 2y$ при любой постоянной C . Построить интегральные кривые при $C_1 = 0$, $C_2 = -1$, $C_3 = 1$.

◁ Находим $y' = (Ce^{2x})' = C(e^{2x})' = 2Ce^{2x}$. Подставляем y и y' в уравнение

$$2Ce^{2x} = 2Ce^{2x}; e^{2x} \equiv e^{2x}.$$

При $C_1 = 0$ $y \equiv 0$; при $C_2 = -1$ $y = -e^{2x}$; при $C_3 = 1$ $y = e^{2x}$. Строим графики (рис. 17.1). ▷

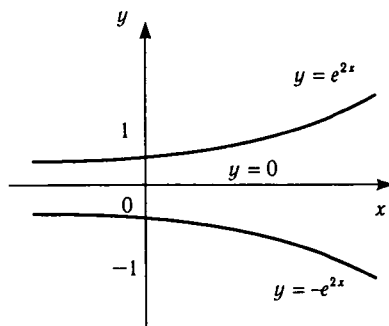


Рис. 17.1

ПРИМЕР 17.3. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y' = 4x^3$. Найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$, и построить интегральную кривую, проходящую через точку $M_0(0, 1)$.

◁ Уравнения вида $y' = f(x)$ являются простей-

шими и интегрируются в квадратурах непосредственным интегрированием. Имеем

$$y = \int 4x^3 dx = 4 \int x^3 dx = 4 \frac{x^4}{4} + C.$$

Таким образом, $y = x^4 + C$, где C — произвольная постоянная. Найдем C из условия $y = 1$ при $x = 0$: $1 = 0^4 + C$, откуда $C = 1$. Подставляя $C = 1$ в найденное решение, получаем $y = x^4 + 1$. График функции $y = x^4 + 1$ — искомая интегральная кривая. $\triangleright$

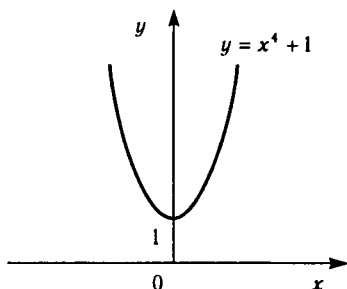


Рис. 17.2

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y' = f(x)$. Найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

1) $y' = -\sin x$, $y(\pi) = 1$; 2) $y' = xe^x$, $y(0) = -1$;

3) $y' = \ln x$, $y(1) = 0$; 4) $y' = xe^{x^2}$, $y(0) = 1/2$;

5) $y' = \frac{1}{1+x^2}$, $y(0) = 0$.

Ответы:

1) $y = \cos x + 2$; 2) $y = (x-1)e^x$; 3) $y = x \ln x - x + 1$;

4) $y = e^{x^2/2}$; 5) $y = \operatorname{arctg} x$.

§ 17.2. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y' = f(x, y)$

Постановка задачи. Найти частное решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$, т. е. найти интегральную кривую, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Для существования и единственности решения задачи Коши в некоторой области D плоскости Oxy достаточно непрерывности $f(x, y)$ и ограниченности частной производной $f'_y(x, y)$.

Замечание. В предыдущем пункте мы решили задачу Коши для уравнений $y' = f(x)$.

ПРИМЕР 17.4. Показать что при любых начальных условиях $y(x_0) = y_0$, существует и единственное решение задачи Коши для дифференциальных уравнений

$$1) \ y' = ye^{-x^2}; \quad 2) \ y' = \sin(2y + x).$$

◁ Достаточно показать, что правые части уравнений непрерывны в плоскости Oxy и имеют ограниченные частные производные по y .

1) $f(x, y) = ye^{-x^2}$ непрерывна как функция двух переменных (x, y) . $f'_y = (ye^{-x^2})'_y = e^{-x^2}$ ограничена, так как $|e^{-x^2}| = e^{-x^2} \leq 1$.

2) $f(x, y) = \sin(2y + x)$ непрерывна для всех (x, y) . $f'_y = 2\cos(2y + x)$ ограничена при всех (x, y) , так как $|2\cos(2y + x)| \leq 2$. ▷

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Показать, что при любых начальных условиях $y(x_0) = y_0$, существует и единственное решение задачи Коши для дифференциальных уравнений.

$$1) \ y' = \sin y \cos x; \quad 2) \ y' = \arctg(x - y);$$

$$3) \ y' = \operatorname{arccotg}(2x + 4y); \quad 4) \ y' = \cos x^2 + \sin 3y.$$

§ 17.3. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ПРИМЕР 17.5. Найти кривую, проходящую через точку $(0, -2)$, чтобы угловой коэффициент ее касательной в любой точке равнялся ординате этой точки, увеличенной в 3 раза.

◁ Пусть $y = y(x)$ искомая кривая. По геометрическому смыслу производной угловой коэффициент касательной равен $y'(x)$; ордината в точке x равна $y(x)$. По условию задачи $y' = 3y$ — это и есть искомое уравнение, а так как кривая должна проходить через точку $(0, -2)$, то имеем задачу Коши

$$y' = 3y, \quad y(0) = -2.$$

Решить уравнение $y' = 3y$ — это значит найти функцию, производная которой равна самой себе с некоторым коэффициентом. Таким свойством обладают только экспоненты. Таким образом, $y' = 3y \Leftrightarrow y = Ce^{3x}$. Подставляя начальное условие, $-2 = Ce^0$ получаем $C = -2$. Окончательный ответ: $y = -2e^{3x}$. $\triangleright$

ПРИМЕР 17.6. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(1; 1)$, если для любого отрезка $[1, x]$ площадь, ограниченная этой кривой, на 2 единицы больше удвоенного произведения координат точки $M(x, y)$ кривой ($x > 0, y > 0$).

$\triangleleft$ По геометрическому смыслу определенного интеграла площадь криволинейной трапеции над отрезком $[1, x]$ равна $\int_1^x y(t)dt$. По условию задачи

$$\int_1^x y(t)dt + 2 = 2xy.$$

Дифференцируя это равенство по x (см. производную определенного интеграла по верхнему пределу), получим $y = 2(y + xy')$, или $y' = -\frac{y}{2x}$. Интегрируя это уравнение (см. занятие № 18) и учитывая начальное условие $y(1) = 1$, найдем

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}. \quad \triangleright$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1) Доказать, что кривая, все нормали которой проходят через постоянную точку $M(x_0, y_0)$, есть окружность.

2) Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная a^2 .

3) Найти кривые, для которых сумма катетов треугольника, построенного как в предыдущей задаче, есть величина постоянная, равная b .

Ответы:

2. $(C \pm x)y = 2a^2$.

3. $b \ln y - y = \pm x + C, \quad 0 < y < b$.

УРАВНЕНИЯ

С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ.
ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**§ 18.1. УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ
ПЕРЕМЕННЫМИ**

Уравнения вида

$$E(x)F(y)dx = G(x)H(y)dy, \quad (18.1)$$

в которых коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от x и только от y называются *уравнениями с разделяющимися переменными*.

Схема решения.

а) Разделяем переменные в (18.1) путем деления обеих частей на произведение $F(y)G(x)$, т. е. приводим (18.1) к виду

$$\frac{E(x)}{G(x)} dx = \frac{H(y)}{F(y)} dy.$$

б) Интегрируем обе части

$$\int \frac{E(x)}{G(x)} dx = \int \frac{H(y)}{F(y)} dy.$$

в) Ответ записываем в виде

$$\psi(x, y) = C \quad (18.2)$$

(или $y = \psi(x, C)$, или $x = \psi(y, C)$) при всевозможных значениях постоянной C .

Замечание. Деление на $F(y)G(x)$ может привести к потере решений, обращающих в 0 произведение $F(y)G(x)$. Те из них, которые не могут быть получены в (18.2) ни при каких значениях постоянной C , следует присоединить к ответу.

ПРИМЕР 18.1. Решить уравнение

$$6x dx - 6y dy = 2x^2 y dy - 3xy^2 dx.$$

◁ а) Преобразуем уравнение к виду

$$2y(x^2 + 3)dy = 3x(y^2 + 2)dx$$

и разделим обе части на $(x^2 + 3)(y^2 + 2)$:

$$\frac{2y dy}{y^2 + 2} = \frac{3x dx}{x^2 + 3}.$$

Переменные разделены: при dy стоит функция, зависящая только от y , при dx — только от x .

б) Вычисляем интегралы в уравнении

$$\int \frac{2y dy}{y^2 + 2} = \int \frac{3x dx}{x^2 + 3}$$

путем подведения под знак дифференциала. Произвольную постоянную записываем только в одном интеграле, например, в правом (так как разность двух произвольных постоянных есть произвольная постоянная):

$$\begin{aligned} \int \frac{2y dy}{y^2 + 2} &= \int \frac{d(y^2 + 2)}{y^2 + 2} = \ln(y^2 + 2), \\ \int \frac{2x dx}{x^2 + 3} &= \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2 + 3)}{(x^2 + 3)} = \frac{3}{2} \ln(x^2 + 3) + C_1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\ln(y^2 + 2) = \frac{3}{2} \ln(x^2 + 3) + C_1$$

или

$$2 \ln(y^2 + 2) = 3 \ln(x^2 + 3) + 2C_1.$$

Последовательно используя свойства логарифмов, получаем

$$\begin{aligned} \ln(y^2 + 2)^2 &= \ln(x^2 + 3)^3 + 2C_1, \\ \ln \frac{(y^2 + 2)^2}{(x^2 + 3)^3} &= 2C_1, \quad \frac{(y^2 + 2)^2}{(x^2 + 3)^3} = e^{2C_1}. \end{aligned}$$

Обозначив $e^{2C_1} = C$, получим

$$\frac{(y^2 + 2)^2}{(x^2 + 3)^3} = C. \triangleright$$

ПРИМЕР 18.2. Решить уравнение

$$y' = \frac{2x}{3y^2 + 1}.$$

◁ Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то уравнение переписываем в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2} + 1$$

и умножаем «крест накрест»

$$(3y^2 + 1)dy = 2xdx,$$

тем самым разделяя переменные. Интегрируем обе части

$$\int (3y^2 + 1)dy = \int 2xdx,$$

откуда

$$y^3 + y = x^2 + C$$

или

$$y^3 + y - x^2 = C. \triangleright$$

ПРИМЕР 18.3. Решить уравнение

$$e^x \operatorname{tg} y dx + \frac{(2 - e^x)}{\cos^2 y} dy = 0.$$

◁ Преобразуем уравнение к виду

$$\frac{(e^x - 2)}{\cos^2 y} dy = e^x \operatorname{tg} y dx,$$

делим обе части на $\operatorname{tg} y(e^x - 2)$:

$$\frac{dy}{\operatorname{tg} y \cos^2 y} = \frac{e^x dx}{e^x - 2}$$

и интегрируем (вычисляем последовательно два интеграла):

$$\int \frac{dy}{\operatorname{tg} y \cos^2 y} = \int \frac{d(\operatorname{tg} y)}{\operatorname{tg} y} = \ln |\operatorname{tg} y|,$$

$$\int \frac{e^x dx}{e^x - 2} = \int \frac{d(e^x - 2)}{e^x - 2} = \ln |e^x - 2| + C.$$

Таким образом,

$$\ln |\operatorname{tg} y| = \ln |e^x - 2| + C_1$$

или

$$\ln \left| \frac{\operatorname{tg} y}{e^x - 2} \right| = C_1.$$

Потенцируем и раскрываем модуль

$$\frac{\operatorname{tg} y}{e^x - 2} = \pm e^{C_1}.$$

Обозначая $\pm e^{C_1} = C$, имеем

$$\frac{\operatorname{tg} y}{e^x - 2} = C \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} y - C(e^x - 2) = 0. \quad (18.3)$$

При делении на $\operatorname{tg} y(e^x - 2)$ могли быть потеряны решения: $y = \pi n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — корни уравнения $\operatorname{tg} y = 0$ и $x = \ln 2$ — корень уравнения $e^x - 2 = 0$. Однако решения $y = \pi n$ содержатся в (18.3) при $C = 0$, а решение $x = \ln 2$ не может быть получено из (18.3) ни при каком значении C . Следовательно, оно должно быть присоединено к ответу.

Получаем окончательный ответ: $\operatorname{tg} y - C(e^x - 2) = 0$, $x = \ln 2$. $\triangleright$

ПРИМЕР 18.4. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e.$$

◁ а) Находим общее решение уравнения, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{dx} \sin x = y \ln y,$$

$$dy \sin x = y \ln y dx;$$

делим на $\sin x \cdot y \ln y$:

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}.$$

Переменные разделены, откуда

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{dx}{\sin x}.$$

Интеграл справа табличный

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \ln |C| = \ln \left| C \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

Здесь произвольную постоянную записали в виде $\ln |C|$. Такая запись корректна, так как функция $y = \ln x$ при $x > 0$ принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Интеграл слева берется подведением под знак дифференциала:

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{d(\ln y)}{\ln y} = \ln |\ln y|.$$

Таким образом, $\ln |\ln y| = \ln |C \operatorname{tg} (x/2)|$. Потенцируем и раскрываем (так как $\pm C$ вновь производная постоянная):

$$\ln y = C \operatorname{tg} (x/2) \quad \text{или} \quad y = e^{C \operatorname{tg} (x/2)}.$$

Найдено общее решение исходного уравнения

$$y = e^{C \operatorname{tg} (x/2)}. \quad (18.4)$$

б) Находим значение C , полагая в (18.4) $x = \frac{\pi}{2}$, $y = e$, тогда $e = e^{C \operatorname{tg} (\pi/4)}$ или $e = e^C$, откуда $C = 1$. Подставляя в (18.4) $C = 1$, получаем искомое решение

$$y = e^{\operatorname{tg} (x/2)}. \quad \triangleright$$

Замечание. Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + d),$$

где a, b, d — постоянные, заменой $z = ax + by + d$, где $z = z(x)$ — новая неизвестная функция, преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными.

ПРИМЕР 18.5. Решить уравнение

$$y' = \cos (x - y).$$

$\triangleleft$ Сделаем замену $z = x - y$, откуда $y = x - z$; $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dz}{dx}$ и подставим в исходное выражение, тогда

$$1 - \frac{dz}{dx} = \cos z$$

ИЛИ

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \cos z, \quad dz = (1 - \cos z)dx.$$

Разделяем переменные, деля на $(1 - \cos z)$:

$$\frac{dz}{1 - \cos z} = dx$$

и интегрируем, используя тождество $1 - \cos z = 2 \sin^2 \frac{z}{2}$,

$$\int \frac{dz}{2 \sin^2(z/2)} = \int dx \quad \text{или} \quad \int \frac{d(z/2)}{\sin^2(z/2)} = \int dx.$$

Получили два табличных интеграла, откуда

$$C - \operatorname{ctg} \frac{z}{2} = x.$$

Заменяя z на $x - y$, получим $x + \operatorname{ctg} \frac{x - y}{2} = C$ — иско-
мое решение в неявном виде. $\triangleright$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить дифференцированные уравнения:

$$1) \ y' = -\frac{y}{x},$$

$$2) \ x\sqrt{1+y^2} + yy' \sqrt{1+x^2} = 0;$$

3) $(e^x + 1)dy - ye^x dx = 0$,

4) $y(1 + \ln y) + xy' = 0$.

5) $(2 + e^x)yy' = e^x;$

6) $3(x^2y + y)dy + \sqrt{2 + y^2}dx = 0.$

7) $y' = (x + y)^2$;

8) $y' = (8x + 2y + 1)^2$;

9) $(2x + 3y - 1)dx + (4x + 6y - 5)dy = 0$

10) $(2x - y)dx + (4x - 2y + 3)dy = 0.$

Ответы:

- | | |
|--|--|
| 1) $y = \frac{C}{x};$ | 2) $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C;$ |
| 3) $y = C(e^x + 1);$ | 4) $x(1 + \ln y) = C;$ |
| 5) $y^2 - 2 \ln(2 + e^x) = C;$ | 6) $3\sqrt{2+y^2} + \operatorname{arctg} x = C;$ |
| 7) $\operatorname{arctg}(x+y) = x+C;$ | 8) $8x + 2y + 1 = 2 \operatorname{tg}(4x+C);$ |
| 9) $x + 2y + 3 \ln 2x + 3y - 7 = C;$ | |
| 10) $5x + 10y + C = 3 \ln 10x - 5y + 6 .$ | |

§ 18.2. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией порядка n* , если справедливо тождество $f(tx, ty) \equiv t^n f(x, y)$.

Например, функция $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ есть однородная функция второго порядка, так как

$$f(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 + (tx)(ty) = t^2(x^2 + y^2 + xy) = t^2 f(x, y).$$

При $n = 0$ имеем функцию нулевого порядка. Например, $f(x, y) = \frac{x^2 - 3y^2}{2x^2 + y^2}$ — однородная функция нулевого порядка, так как

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)^2 - 3(ty)^2}{2(tx)^2 + (ty)^2} = \frac{t^2(x^2 - 3y^2)}{t^2(2x^2 + y^2)} = \frac{x^2 - 3y^2}{2x^2 + y^2} = f(x, y).$$

Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (18.5)$$

называется *однородным* относительно x и y , если $f(x, y)$ — однородная функция нулевого порядка.

Схема решения

а) Преобразуем уравнение к виду

$$\frac{dy}{dx} = \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

б) Делаем замену $\frac{y}{x} = z$, где $z = z(x)$ — новая неизвестная функция, тогда $y = xz$ и $\frac{dy}{dx} = (xz)' = z + xz' = z + x \frac{dz}{dx}$, и уравнение (18.5) приводим к виду

$$z + x \frac{dz}{dx} = \varphi\left(\frac{xz}{x}\right) \quad \text{или} \quad x \frac{dz}{dx} = \varphi(z) - z,$$

а это уравнение с разделяющимися переменными.

в) Разделяем переменные, интегрируем

$$\int \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \int \frac{dx}{x}$$

и отслеживаем возможные потери решений.

г) Возвращаемся к переменной y заменой $z = y/x$.

ПРИМЕР 18.6. Решить уравнение

$$y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}.$$

◁ а) Разделив числитель и знаменатель правой части на x^2 ($x^2 \neq 0$ по смыслу уравнения), преобразуем его к виду

$$y' = \frac{1 + 2y/x - 5(y/x)^2}{2 - 6(y/x)}.$$

б) Делаем замену $y/x = z$, тогда $y = xz$ и $y' = z + x \frac{dz}{dx}$,

и уравнение приводится к виду

$$z + x \frac{dz}{dx} = \frac{1 + 2z - 5z^2}{2 - 6z}, \quad \text{а после алгебраических преоб-}$$

разований

$$x \frac{dz}{dx} = \frac{1 + z^2}{2 - 6z}.$$

в) Разделяем переменные ($1 + z^2 \neq 0$, $x \neq 0$)

$$\frac{(2 - 6z)dz}{1 + z^2} = \frac{dx}{x}$$

и интегрируем

$$\int \frac{(2-6z)dz}{1+z^2} = \int \frac{dx}{x}.$$

$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$ — табличный, а интеграл слева разбиваем на два интеграла:

$$\int \frac{2-6z}{1+z^2} dz = 2 \int \frac{dz}{1+z^2} - 3 \int \frac{2z dz}{1+z^2} = 2 \operatorname{arctg} z - 3 \int \frac{d(1+z^2)}{1+z^2} =$$

$$= 2 \operatorname{arctg} z - 3 \ln (1+z^2) = 2 \operatorname{arctg} z - \ln (1+z^2)^3;$$

$$2 \operatorname{arctg} z - \ln (1+z^2)^3 = \ln |z| + C,$$

или

$$2 \operatorname{arctg} z - \ln ((1+z^2)^3 |x|) = C.$$

г) Заменяем z на y/x :

$$2 \operatorname{arctg}(y/x) - \ln ((1+y^2/x^2)^3 |x|) = C.$$

Учитывая, что

$$\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^3 |x| = \frac{(x^2 + y^2)^3}{|z|^6} |x| = \frac{(x^2 + y^2)^3}{|x|^5},$$

приходим к ответу

$$2 \operatorname{arctg}(y/x) - \ln \frac{x^2 + y^2}{|x|^5} = C. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 18.7. Решить уравнение

$$xy' = y + \cos \frac{y}{x}.$$

◁ Последовательно выполняем действия по изложенной схеме: делим на x ($x \neq 0$ по смыслу уравнения)

$$y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x},$$

делаем замену $y/x = z$, откуда $y' = z + x \frac{dz}{dx}$; подставляем в уравнение:

$$z + x \frac{dz}{dx} = z + \cos z \quad \text{или} \quad x \frac{dz}{dx} = \cos z;$$

разделяем переменные:

$$\frac{dz}{\cos z} = \frac{dx}{x}$$

и интегрируем

$$\int \frac{dz}{\cos z} = \int \frac{dx}{x}$$

(смотри таблицу интегралов):

$$\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{z}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| = \ln |x| + \ln |C|,$$

или

$$\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{z}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| = \ln |Cx|.$$

Потенцируем и снимаем знаки модулей:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{z}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = Cx. \quad (18.6)$$

При делении на $\cos z$ могли быть потеряны решения $z = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). При нечетных $n = 2k + 1$ они входят в (18.6) при $C = 0$, а при четных $n = 2k$ не входят в (18.6) ни при каких значениях C . Поэтому к (18.6) следует присоединить решения $z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Заменяя z на y/x , получаем

$$\left\{ \operatorname{tg} \left(\frac{y}{2x} + \frac{\pi}{4} \right) = Cx, \quad y = x \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) \right\}. \quad \triangleright$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить уравнения:

$$1) y' = \frac{2y+x}{x};$$

$$2) y' = e^{xy} + \frac{y}{x};$$

$$3) y' = \frac{y}{x} - 1;$$

$$4) y' = -\frac{x+y}{4};$$

$$5) (y - 2x)dx + \frac{x^2}{y} dy = 0; \quad 6) xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y;$$

$$7) 2y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 6\frac{y}{x} + 3; \quad 8) y' = \frac{x + 2y}{2x - y};$$

$$9) xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}; \quad 10) y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}.$$

Ответы:

$$1) x + y = Cx^2;$$

$$2) y = -x \ln \ln \frac{C}{x};$$

$$3) y = x \ln \frac{C}{x};$$

$$4) y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2};$$

$$5) x(y - x) = Cy;$$

$$6) y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2;$$

$$7) x + y = Cx(3x + y);$$

$$8) 2 \arctg \frac{y}{x} - \ln \sqrt{x^2 + y^2} = C;$$

$$9) \frac{y}{x^2} \sqrt{2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = C;$$

$$10) \arctg \frac{y}{x} - \ln \frac{x^2 + y^2}{x} = C.$$

**ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ПЕРВОГО ПОРЯДКА.
УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ**

Уравнения вида

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (19.1)$$

где $p(x)$, $q(x)$ — заданные непрерывные функции, называющиеся *линейными* (относительно y и y').

**§ 19.1. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ
ПОСТОЯННЫХ**

Схема решения методом вариации постоянной

а) Решаем соответствующее однородное уравнение

$$y' + p(x)y = 0 \quad (19.2)$$

путем разделения переменных (см. занятие № 18). Его решение $y = Cy_0(x)$, где частное решение $y_0(x) \neq 0$.

б) Общее решение уравнения (19.1) ищем в виде

$$y = C(x)y_0(x), \quad (19.3)$$

где $C(x)$ — неизвестная функция. Находим $y' = C'y_0 + Cy'_0$ и подставляем в (19.1) вместе с $y = C(x)y_0(x)$:

$$C'y_0 + Cy'_0 + p(x)Cy_0 = q(x), \text{ или}$$

$$C'y_0 + C(y'_0 + p(x)y_0) = q(x). \quad (19.4)$$

Так как y_0 — решение уравнения (19.2), то выражение, заключенное в скобках, $y'_0 + p(x)y_0 \equiv 0$, и из (19.4) имеем

$$C' y_0 = q(x),$$

а это уравнение решается в квадратурах (интегрированием):

$$C(x) = \int \frac{q(x)}{y_0(x)} dx + C.$$

Подставив найденную $C(x)$ в (19.3), получаем общее решение уравнения (19.1).

ПРИМЕР 19.1. Решить уравнение

$$y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x. \quad (19.5)$$

◁ Имеем линейное уравнение, где $p(x) = -\operatorname{ctg} x$, $q(x) = \sin x$.

а) Соответствующее однородное уравнение имеет вид $y' - y \operatorname{ctg} x = 0$. Последовательно применяем схему разделения переменных:

$$\frac{dy}{dx} = y \operatorname{ctg} x, \quad \frac{dy}{y} = \operatorname{ctg} x dx, \quad \int \frac{dy}{y} = \int \operatorname{ctg} x dx,$$

$$\ln |y| = \ln |\sin x| + \ln |C|, \quad \ln |y| = \ln |C \sin x|,$$

$y = C \sin x$ — общее решение однородного уравнения.

б) Решение исходного уравнения ищем в виде

$$y = C(x) \sin x. \quad (19.6)$$

Подставляем в (19.5) $y = C(x) \sin x$ и $y' = C'(x) \sin x + C(x) \cos x$:

$$C'(x) \sin x + C(x) \cos x - C(x) \sin x \operatorname{ctg} x = \sin x,$$

откуда

$$C'(x) \sin x = \sin x, \quad \text{или} \quad C'(x) = 1.$$

Интегрируем:

$$C(x) = \int dx = x + C$$

и, подставляя в (19.6), имеем

$$y = (x + C) \sin x. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 19.2. Решить задачу Коши для линейного уравнения

$$y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x, \quad y(0) = 0.$$

⟨ а) Решаем соответствующее однородное уравнение $y' \cos^2 x + y = 0$. Разделяя переменные, получим

$$\frac{dy}{dx} \cos^2 x = -y, \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{\cos^2 x}, \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{\cos^2 x},$$

$$\ln |y| = -\operatorname{tg} x + \ln |C|, \quad \ln \left| \frac{y}{C} \right| = -\operatorname{tg} x, \quad \frac{y}{C} = e^{-\operatorname{tg} x}, \quad y = Ce^{-\operatorname{tg} x}.$$

б) Общее решение исходного уравнения ищем в виде

$$y = C(x)e^{-\operatorname{tg} x}. \quad (19.7)$$

Подставляя в исходное уравнение

$$y = C(x)e^{-\operatorname{tg} x} \quad \text{и} \quad y' = C'(x)e^{-\operatorname{tg} x} + C(x)e^{-\operatorname{tg} x}(-1/\cos^2 x),$$

получим

$$C'(x)e^{-\operatorname{tg} x} \cos^2 x - C(x)e^{-\operatorname{tg} x} + C(x)e^{-\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x$$

или

$$C'(x)e^{-\operatorname{tg} x} \cos^2 x = \operatorname{tg} x,$$

откуда

$$C(x) = \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} e^{\operatorname{tg} x} dx.$$

Интегрируем путем подведения под знак дифференциала, затем по частям:

$$\begin{aligned} C(x) &= \int \operatorname{tg} x e^{\operatorname{tg} x} d(\operatorname{tg} x) = [\text{замена } t = \operatorname{tg} x] = \\ &= \int t e^t dt = \int t d(e^t) = t e^t - \int e^t dt = e^t(t-1) + C = e^{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} x - 1) + C. \end{aligned}$$

Найденную $C(x)$ подставляем в (19.7):

$$y = [e^{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} x - 1) + C]e^{-\operatorname{tg} x} \quad \text{или}$$

$$y = (\operatorname{tg} x - 1) + Ce^{-\operatorname{tg} x} \quad \text{— общее решение.}$$

в) Для решения задачи Коши в общее решение подставляем $y = 0$ и $x = 0$ и находим C

$$0 = (\operatorname{tg} 0 - 1) + Ce^{-\operatorname{tg} 0} \quad \text{или}$$

$$0 = C - 1, \quad \text{откуда } C = 1.$$

Подставляя $C = 1$ в общее решение, получаем искомое решение $y = (\operatorname{tg} x - 1) + e^{-\operatorname{tg} x}$. $\triangleright$

§ 19.2. МЕТОД БЕРНУЛЛИ

Схема решения методом Бернулли

а) Решение уравнения (19.1) ищем в виде

$$y = u \cdot v, \quad (19.8)$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$ — неизвестные функции. Подставляем в уравнение (19.1) $y = u \cdot v$ и $y' = u'v + uv'$. Уравнение (19.1) принимает вид

$$u'v + uv' = p(x)uv = q(x).$$

Группируем, например, к виду

$$u'v + u[v' + p(x)v] = q(x).$$

б) $u(x)$ и $v(x)$ определяем из системы

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0, & (19.9) \\ u'v = q(x). & (19.10) \end{cases}$$

Находим любое частное решение $v \neq 0$ линейного однородного уравнения (19.9), а найденное решение подставляем в уравнение (19.10) и находим общее решение $u(x)$ интегрированием.

в) Ответ записываем в виде $y = uv$.

ПРИМЕР 19.3. Решить уравнение

$$y' - y \operatorname{th} x = \operatorname{ch}^2 x.$$

$\triangleleft$ Применим схему метода Бернулли:

а) $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$, и уравнение принимает вид

$$u'v + u[v' - \operatorname{th} xv] = \operatorname{ch}^2 x.$$

б) $u(x)$ и $v(x)$ определяем из системы

$$\begin{cases} v' - \operatorname{th} xv = 0, & (19.11) \\ u'v = \operatorname{ch}^2 x. & (19.12) \end{cases}$$

К уравнению $v' - \operatorname{th} xv = 0$ применяем схему разделения переменных:

$$\frac{dv}{dx} = \operatorname{th} xv, \quad \frac{dv}{v} = \operatorname{th} x dx, \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} dx,$$

$$\ln |v| = \int \frac{d(\operatorname{ch} x)}{\operatorname{ch} x}, \quad \ln |v| = \ln |\operatorname{ch} x|,$$

$v = \operatorname{ch} x$ — частное решение уравнения (19.11). Тогда уравнение (19.12) принимает вид:

$$u' \operatorname{ch} x = \operatorname{ch}^2 x \quad \text{или} \quad u' = \operatorname{ch} x.$$

Интегрируем его: $u = \int \operatorname{ch} x dx$ или $u = \operatorname{sh} x + C$.

в) Получаем ответ: $y = (\operatorname{sh} x + C) \operatorname{ch} x$. $\triangleright$

ПРИМЕР 19.4. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cos y + \sin 2y}.$$

$\triangleleft$ Преобразуем данное уравнение к виду

$$\frac{dx}{dy} = x \cos y + \sin 2y, \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dy} - x \cos y = \sin 2y.$$

Последнее уравнение является линейным, если рассматривать x как функцию от y ($x = x(y)$). Для его решения применим схему метода Бернулли (с заменой x на y).

а) $x = u \cdot v$, где $u = u(y)$, $v = v(y)$. Тогда $\frac{dx}{dy} = x' = u'v + uv'$,

и уравнение принимает вид

$$u'v + u[v' - v \cos y] = \sin 2y.$$

б) $u(y)$ и $v(y)$ определяем из системы

$$\begin{cases} v' - v \cos y = 0, \\ u'v = \sin 2y. \end{cases}$$

К уравнению $v' - v \cos y = 0$ применяем схему разделения переменных:

$$\frac{dv}{dy} = v \cos y, \quad \frac{dv}{v} = \cos y dy, \quad \int \frac{dv}{v} = \int \cos y dy,$$

$\ln |v| = \sin y$, $v = e^{\sin y}$ — частное решение.

Подставляем его в уравнение $u'v = \sin 2y$, откуда

$$u'e^{\sin y} = \sin 2y, \quad \text{или} \quad u' = \sin 2ye^{-\sin y}.$$

Интегрируем последнее уравнение путем подведения под знак дифференциала и интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} u &= \int \sin 2ye^{-\sin y} dy = 2 \int \sin ye^{-\sin y} \cos y dy = \\ &= 2 \int \sin ye^{-\sin y} d(\sin y) = [\text{замена } t = \sin y] = 2 \int te^{-t} dt = \\ &= -2 \int td(e^{-t}) - 2 \left(te^{-t} - \int e^{-t} dt \right) = -2(te^{-t} + e^{-t}) + C = \\ &= -2e^{-\sin y}(\sin y + 1) + C. \end{aligned}$$

$$\text{в) } x = uv = [-2e^{-\sin y}(\sin y + 1) + C]e^{\sin y}, \quad \text{или}$$

$$x = Ce^{\sin y} - 2(\sin y + 1). \quad \triangleright$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить уравнения.

1) $xy' - 2y = 2x^4$;

2) $y' + y \operatorname{tg} x = \sec x$;

3) $(xy + e^x)dx - xdy = 0$;

4) $y = x(y' - x \cos x)$;

5) $2x(x^2 + y)dx = dy$;

6) $y' - \frac{y}{x} = x$;

7) $y' + \frac{2y}{x} = x^3$;

8) $y' - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0$, $y = 0$ при $x = 0$;

9) $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, $y = 0$ при $x = 0$;

10) $xy' + y - e^x = 0$, $y = b$ при $x = a$.

Ответы:

1) $y = Cx^2 + x^4$;

2) $y = \sin x + C \cos x$;

3) $y = e^x(\ln |x| + C)$, $x = 0$;

4) $y = x(C + \sin x)$;

5) $y = Ce^{x^2} - x^2 - 1$;

6) $y = Cx + x^2$;

7) $y = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2}$;

8) $y = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;

9) $y = \frac{x}{\cos x}$;

10) $y = \frac{e^x}{x} + \frac{a \cdot b - e^a}{x}$.

§ 19.3. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha \quad (\alpha \neq 0, \alpha \neq 1) \quad (19.13)$$

называется *уравнением Бернулли*.

Решить уравнение Бернулли можно как методом вариации постоянной, так и методом Бернулли ($y = u \cdot v$). Следует учесть, что при этом могут быть потеряны решения вида $y = 0$.

ПРИМЕР 19.5. Решить уравнение

$$xy' + y = y^2 \ln x.$$

◁ Поделив обе части уравнения на $x \neq 0$, получим уравнение в виде (19.13):

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2, \quad (19.14)$$

здесь $p(x) = 1/x$, $q(x) = \ln x/x$, $\alpha = 2$.

Применим метод вариации постоянной. Соответствующее однородное уравнение

$$y' + \frac{1}{x}y = 0$$

решаем путем разделения переменных:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}y, \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln |y| = -\ln |x| + \ln |C|, \quad \ln |y| = \ln \left| \frac{C}{x} \right|,$$

$y = C/x$ — общее решение однородного уравнения. Общее решение уравнения (19.14) ищем в виде

$$y = \frac{C(x)}{x}, \quad \text{откуда} \quad y' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}.$$

Подставляем y и y' в (19.14), получаем

$$C' \frac{x}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{C^2(x)}{x^2},$$

$$C'(x) = C^2(x) \frac{\ln x}{x^2},$$

уравнение с разделяющимися переменными. По схеме разделения переменных

$$\frac{dC}{dx} = C^2 \frac{\ln x}{x^2}, \quad \frac{dC}{C^2} = \frac{\ln x}{x^2} dx, \quad \int \frac{dC}{C^2} = \int \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

Вычисляем интегралы: слева — табличный, справа — интегрируем по частям

$$\begin{aligned} \int \frac{dC}{C^2} &= -\frac{1}{C(x)}, \quad \int \frac{\ln x}{x^2} dx = \int \ln x d(-1/x) = \\ &= -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x} d(\ln x) = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

Таким образом, $(C \rightarrow -C)$

$$-\frac{1}{C(x)} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} - C \quad \text{или} \quad C(x) = \frac{x}{1 + Cx + \ln x},$$

а так как решение искали в виде $y = C(x)/x$, то получим общее решение $y = \frac{1}{1 + Cx + \ln x}$. Так как $y = 0$ — решение исходного уравнения, которое нельзя получить из общего ни при каком значении C , то его нужно присоединить к ответу:

$$\left\{ y = \frac{1}{1 + Cx + \ln x}, \quad y = 0 \right\}. \triangleright$$

ПРИМЕР 19.6. Решить задачу Коши для уравнения Бернулли

$$y' + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{y^2}, \quad y(0) = 1.$$

◁ Общее решение уравнения найдем методом Бернулли ($y = uv$, $y' = u'v + uv'$) и после подстановки в уравнение получим

$$u'v + uv' + \frac{1}{3}uv = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{u^2v^2},$$

а после группировки

$$u'v + u \left[v' + \frac{1}{3}v \right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{u^2v^2}.$$

Для определения $u(x)$ и $v(x)$ составляем систему

$$\begin{cases} v' + \frac{1}{3}v = 0, \\ u'v = \frac{1}{3u^2v^2}. \end{cases}$$

Первое уравнение приводим к виду $v' = -\frac{1}{3}v$, откуда получаем частное решение $v = e^{-x/3}$. Подставив его во второе уравнение системы, имеем

$$u'e^{-x/3} = \frac{1}{3u^2e^{-(2x)/3}}, \quad \text{или} \quad u' = \frac{e^x}{3u^2}$$

— это уравнение с разделяющимися переменными. По схеме разделения переменных получаем

$$3u^2 du = e^x dx, \quad \int 3u^2 du = \int e^x dx, \quad u^3 = e^x + C, \quad u = \sqrt[3]{e^x + C}.$$

А так как решение ищем в виде $y = uv$, то

$$y = \sqrt[3]{e^x + C} e^{-x/3} = \sqrt[3]{(e^x + C)e^{-x}} = \sqrt[3]{Ce^{-x} + 1}.$$

Таким образом, $y = \sqrt[3]{Ce^{-x} + 1}$ — общее решение. Для решения задачи Коши в общее решение подставим $x = 0, y = 1$:

$$1 = \sqrt[3]{Ce^0 + 1}, \quad \text{откуда} \quad C = 0.$$

Ответ: $y = 1$. $\triangleright$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить уравнения.

- 1) $y' = -\frac{y}{x} - xy^2$; 2) $2xy \cdot y' - y^2 + x = 0$;
 3) $y' + 2y = y^2 \cdot e^x$; 4) $xy^2y' = x^2 + y^3$.

Ответы:

- 1) $y = (x^2 + Cx) = 1$; 2) $y^2 = x \ln \frac{C}{x}$;
 3) $y(e^x + Ce^{2x}) = 1$; 4) $y^3 = Cx^3 - 3x^2$.

**УРАВНЕНИЯ
В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ****§ 20.1. УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ**

Уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad (20.1)$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u = u(x,y)$, т. е.

$$Pdx + Qdy \equiv \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

В этом случае уравнение (20.1) записывается в виде $du = 0$, поэтому его общий интеграл имеет вид $u(x,y) = C$.

Схема решения

а) Проверка, что уравнение (20.1) в полных дифференциалах, из тождества

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

б) Нахождение функции $u(x,y)$ такой, что $du = 0$, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q. \quad (20.2)$$

Интегрируя первое равенство (20.2) по x , считая y постоянной, получаем

$$u = \int P(x,y)dx + \varphi(y), \quad (20.3)$$

где $\varphi(y)$ — неизвестная функция аргумента y .

Дифференцируем (20.3) по y :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x, y) dx \right) + \varphi'(y)$$

и найденную $\partial u / \partial y$ подставляем во второе равенство (20.2):

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x, y) dx \right) + \varphi'(y) = Q(x, y),$$

откуда находим $\varphi'(y)$ и интегрированием по y находим $\varphi(y)$. Подставляя $\varphi(y)$ в (20.3), получаем искомую функцию $u(x, y)$.

в) Ответ записываем в виде $u(x, y) = C$.

ПРИМЕР 20.1. Решить уравнение

$$(\sin xy + xy \cos xy) dx + x^2 \cos xy dy = 0.$$

◁ а) Здесь $P(x, y) = \sin xy + xy \cos xy$, $Q(x, y) = x^2 \cos xy$,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (\sin xy + xy \cos xy)'_x = x \cos xy + x \cos xy - x^2 y \sin xy =$$

$$= 2x \cos xy - x^2 y \sin xy,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (x^2 \cos xy)'_x = 2x \cos xy - x^2 y \sin xy.$$

Таким образом, $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ и, следовательно, уравнение в

полных дифференциалах.

б) Для определения функции $u(x, y)$ имеем систему

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \sin xy + xy \cos xy, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \cos xy. \end{cases}$$

Интегрируем первое уравнение по x :

$$u = \int (\sin xy + xy \cos xy) dx + \varphi(y) =$$

$$= \int \sin xy dx + \int xy \cos xy dx + \varphi(y).$$

Вычисляем интегралы, считая y — постоянной:

$$\int \sin xy dx = \frac{1}{y} \int \sin xy d(xy) = -\frac{1}{y} \cos xy,$$

$$\int xy \cos xy dx =$$

$$= \int x d(\sin xy) = x \sin xy - \int \sin xy dx = x \sin xy + \frac{1}{y} \cos xy$$

(второй интеграл вычислили методом интегрирования по частям). Таким образом,

$$u = -\frac{1}{y} \cos xy + x \sin xy + \frac{1}{y} \cos xy + \varphi(y), \text{ или}$$

$$u = x \sin xy + \varphi(y). \quad (20.4)$$

Дифференцируем по y :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x \sin xy + \varphi(y))'_y = x^2 \cos xy + \varphi'(y)$$

и подставляем найденную $\partial u / \partial y$ во второе уравнение системы:

$$x^2 \cos xy + \varphi'(y) = x^2 \cos xy, \text{ или } \varphi'(y) = 0,$$

откуда $\varphi(y) = \int 0 dy = 0$ — одна из первообразных. $\varphi(y) = 0$ подставляем в (20.4) и получаем искомую функцию $u(x, y)$:

$$u(x, y) = x \sin xy.$$

в) Ответ записываем в виде $u(x, y) = C \Rightarrow x \sin xy = C. \triangleright$

Заметим, что владея техникой дифференцирования и интегрирования, во многих случаях уравнение (20.1) можно привести к виду $du = 0$ путем группировки слагаемых без непосредственного вычисления интегралов в пункте б) схемы.

Рассмотрим этот способ на примерах.

ПРИМЕР 20.2. Решить уравнение

$$(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0.$$

$$\triangleleft \text{ а) Здесь } P(x, y) = 2x + y, \quad Q(x, y) = x + 2y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (2x + y)'_y = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = (x + 2y)'_x = 1.$$

Таким образом, $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ и, следовательно, уравнение в полных дифференциалах.

б) Для нахождения функции $u(x, y)$ перепишем уравнение в виде

$$2x dx + 2y dy + (y dx + x dy) = 0.$$

Так как $2x dx = dx^2$, $2y dy = dy^2$, $y dx + x dy = d(xy)$, то уравнение преобразуется к виду

$$dx^2 + dy^2 + d(xy) = 0,$$

или по свойству дифференциалов

$$d(x^2 + y^2 + xy) = 0.$$

Нашли функцию $u(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ такую, что $du = 0$. Ответ: $x^2 + y^2 + xy = C$. $\triangleright$

ПРИМЕР 20.3. Решить уравнение

$$(3x^2y + y^3)dx + (x^3 + 3xy^2)dy = 0.$$

$$\triangleleft \text{ а) Здесь } P(x, y) = 3x^2y + y^3, \quad Q(x, y) = x^3 + 3xy^2,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (3x^2y + y^3)_y = 3y^2 + 3x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = (x^3 + 3xy^2)_x = 3x^2 + 3y^2.$$

Таким образом, $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ и, следовательно, уравнение в полных дифференциалах.

б) Для нахождения функции $u(x, y)$ перепишем его в виде

$$(3x^2y dx + x^3 dy) + (3xy^2 dy + y^3 dx) = 0.$$

Так как $3x^2y dx + x^3 dy = d(x^3y)$, $3xy^2 dy + y^3 dx = d(y^3x)$, то уравнение преобразуется к виду

$$d(x^3y) + d(y^3x) = 0 \quad \text{или} \quad d(x^3y + y^3x) = 0.$$

Нашли функцию $u(x, y) = x^3y + y^3x$ такую, что $du = 0$.
 Ответ: $x^3y + y^3x = C$. $\triangleright$

§ 20.2. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

Рассмотрим случаи, когда для уравнения (20.1) условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ не выполняется, но существует функция $\mu = \mu(x, y)$, которая называется *интегрирующим множителем*, такая, что уравнение

$$\mu P dx + \mu Q dy = 0$$

будет *уравнением в полных дифференциалах*.

Рассмотрим частные случаи: если в (20.1) отношение

$$\frac{\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x}{Q} = f(x)$$

зависит только от x , то существует интегрирующий множитель $\mu = \mu(x)$, который находится по формуле

$$\mu(x) = e^{\int f(x) dx}.$$

Если же в (20.1) отношение

$$\frac{\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x}{P} = g(y)$$

зависит только от y , то существует интегрирующий множитель $\mu = \mu(y)$, который находится по формуле

$$\mu(y) = e^{-\int g(y) dy}.$$

ПРИМЕР 20.4. Решить уравнение

$$(x \cos y - y \sin y)dy + (x \sin y + y \cos y)dx = 0.$$

◁ Здесь $P(x, y) = x \sin y + y \cos y$,
 $Q(x, y) = x \cos y - y \sin y$,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x \cos y + \cos y - y \sin y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y.$$

$$\frac{\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x}{Q} = \frac{x \cos y - y \sin y}{x \cos y - y \sin y} = 1.$$

Поэтому уравнение имеет интегрирующий множитель

$$\mu = \mu(x) = e^{\int 1 dx} = e^x.$$

Умножая уравнение на e^x , получим

$$e^x(x \sin y + y \cos y)dx + e^x(x \cos y - y \sin y)dy = 0$$

— уравнение в полных дифференциалах.

Далее, по схеме решения уравнения в полных дифференциалах (пункт а) проверять необязательно) для определения функции $u(x, y)$ имеем систему

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = e^x(x \sin y + y \cos y), \\ \frac{\partial u}{\partial y} = e^x(x \cos y - y \sin y). \end{cases}$$

Интегрируя первое уравнение по x , получим

$$\begin{aligned} u &= \int e^x(x \sin y + y \cos y) dx + \varphi(y) = \sin y \int e^x x dx + \\ &+ y \cos y \int e^x dx + \varphi(y) = \\ &= e^x x \sin y - e^x \sin y + e^x y \cos y + \varphi(y). \end{aligned} \quad (*)$$

Дифференцируя полученную функцию $u(x, y)$ по y , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= (e^x x \sin y - e^x \sin y + e^x y \cos y + \varphi(y))'_y = \\ &= e^x x \cos y - e^x \cos y + e^x \cos y - e^x y \sin y + \varphi'(y). \end{aligned}$$

Подставляем найденную $\partial u / \partial y$ во второе уравнение системы после алгебраических преобразований

$$\varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = 0 \text{ — частное решение.}$$

Подставляем $\varphi(y) = 0$ в $(*)$, получаем $u(x, y)$:

$$u = e^x x \sin y - e^x \sin y + e^x y \cos y.$$

Ответ: $e^x(x \sin y - \sin y + y \cos y) = C$. $\triangleright$

ПРИМЕР 20.5. Решить уравнение

$$y dx - (x + y^2) dy = 0.$$

$\triangleleft$ Здесь $P(x, y) = y$, $Q(x, y) = -(x + y^2)$,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1,$$

$$\frac{\partial P / \partial y - \partial Q / \partial x}{P} = \frac{2}{y}.$$

Поэтому уравнение имеет интегрирующий множитель

$$\mu = \mu(y) = e^{-\int 2/y dy} = e^{-\ln y^2} = e^{\ln(1/y^2)} = 1/y^2.$$

Умножая уравнение на $1/y^2$, получим

$$\frac{y}{y^2} dx - \frac{x + y^2}{y^2} dy = 0$$

— уравнение в полных дифференциалах.

Функцию $u(x, y)$ такую, что $du = 0$, найдем группировкой слагаемых. Преобразуем уравнение следующим образом:

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} - dy = 0.$$

Так как

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right), \quad dy = d(y),$$

то

$$d\left(\frac{x}{y} - y\right) = 0,$$

откуда имеем

$$\frac{x}{y} - y = C, \quad \text{или} \quad x - y^2 = Cy. \quad (**)$$

Учитывая, что при умножении уравнения на $1/y^2$ потеряли решение $y = 0$, то присоединим его к (**): $\{x - y^2 = Cy, y = 0\}$. $\triangleright$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить уравнения.

- 1) $(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0;$ 2) $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0;$
- 3) $(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0;$ 4) $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0;$
- 5) $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0;$
- 6) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0;$
- 7) $(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0;$ 8) $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0;$
- 9) $\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)dy = 0;$
- 10) $\frac{y}{x}dx - (4xy + 1)dy = 0.$

Ответы:

1) $x^2 + x^3y - y^3 = C;$

2) $3x^2y - y^3 = C;$

3) $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = C;$

4) $xe^{-y} - y^2 = C;$

5) $4y \ln x + y^4 = C;$

6) $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C;$

7) $\frac{x^2}{2} + xy + y^2 = C;$

8) $\frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 = C;$

9) $ye^x \left(x^2 + \frac{y^2}{3} \right) = C;$

10) $\frac{y}{x} + 2y^2 = C.$

УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

§ 21.1. УРАВНЕНИЯ ВИДА $y^{(n)} = f(x)$

Общее решение уравнения вида

$$y^{(n)} = f(x)$$

получаем путем n -кратного интегрирования.

ПРИМЕР 21.1. Решить уравнение

$$y''' = \sin x + x.$$

◁ Последовательно интегрируя 3 раза, получим

$$y'' = \int (\sin x + x) dx = -\cos x + \frac{x^2}{2} + C_1;$$

$$y' = \int (-\cos x + \frac{x^2}{2} + C_1) dx = -\sin x + \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2;$$

$$y = \int (-\sin x + \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2) dx =$$

$$= \cos x + \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Так как $\frac{C_1}{2}$ — произвольная постоянная, то ответ можно записать в виде:

$$y = \cos x + \frac{x^4}{24} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3. \triangleright$$

ПРИМЕР 21.2. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y'' = \frac{\ln x}{x^2}, \end{cases} \quad (21.1)$$

$$y(1) = 0, \quad y'(1), \quad y''(1) = 2 \quad (21.2)$$

◁ После первого интегрирования (по частям) уравнения (21.1) имеем:

$$\begin{aligned} y' &= \int \frac{\ln x}{x^2} dx = \int \ln x d\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} \ln x + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= -\frac{1}{x} \ln x + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + C_1. \end{aligned}$$

Найдем C_1 , используя третье начальное условие в (21.2): $y' = 2$ при $x = 1$. Подставляем в последнее уравнение:

$$2 = -\frac{1}{1} \ln 1 - \frac{1}{1} + C_1, \quad \text{или} \quad 2 = 0 - 1 + C_1,$$

откуда $C_1 = 3$ и, следовательно,

$$y' = -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + 3.$$

При втором интегрировании

$$\begin{aligned} y &= \int \left(-\frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} + 3 \right) dx = -\int \ln x d(\ln x) - \int \frac{1}{x} dx + \int 3 dx = \\ &= \frac{-1}{2} \ln^2 x - \ln x + 3x + C_2. \end{aligned}$$

Найдем C_2 , используя второе начальное условие в (21.2): $y' = 1$ при $x = 1$.

$$1 = -\frac{1}{2} \ln^2 1 - \ln 1 + 3 + C_2, \quad \text{или} \quad 1 = 0 + 3 + C_2,$$

откуда $C_2 = -2$ и, следовательно,

$$y' = \frac{-1}{2} \ln^2 x - \ln x + 3x - 2.$$

При третьем интегрировании

$$y = \int -\frac{\ln^2 x dx}{2} - \int \ln x dx + \int (3x - 2) dx.$$

Выполняя в первых двух интегралах интегрирование по частям, получаем

$$y = -\frac{x}{2} \ln^2 x + \frac{3}{2} x^2 - 2x + C_3. \quad (21.3)$$

На последнем шаге находим C_3 , используя первое начальное условие в (21.2): $y = 0$ при $x = 1$.

$$0 = -\frac{1}{2} \ln^2 1 + \frac{3}{2} 1^2 - 2 + C_3, \text{ или } 0 = 0 + \frac{3}{2} - 2 + C_3,$$

откуда $C_3 = 1/2$. Подставляя $C_3 = 1/2$ в (21.3), получаем

$$y = -\frac{\ln^2 x}{x} + \frac{3x^2}{2} - 2x + \frac{1}{2}.$$

(Так как начальные условия заданы в точке $x = 1 > 0$, то в качестве первообразной функции $\frac{1}{x}$ брали функцию $\ln x$.) $\triangleright$

§ 21.2. УРАВНЕНИЯ, НЕ СОДЕРЖАЩИЕ ЯВНО ИСКОМУЮ ФУНКЦИЮ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ДО НЕКОТОРОГО ПОРЯДКА ВКЛЮЧИТЕЛЬНО

Уравнение вида

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (21.4)$$

не содержит явно искомую функцию $y(x)$ и ее производные до $(k-1)$ -го порядка включительно.

Схема решения

а) Производя замену $y^{(k)} = z(x)$, где $z(x)$ — неизвестная функция, понижаем порядок в уравнении (21.4) на k единиц, т. е. получаем

$$F(x, z, z', z'', \dots, z^{(n-k)}) = 0. \quad (21.4')$$

б) Определяем тип этого уравнения и решаем его, т. е. находим z как функцию от x и $(n-k)$ постоянных:

$$z = f(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}),$$

а так как $z = y^{(k)}$, то получаем уравнение типа (21.1):

$$y^{(k)} = f(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}).$$

в) Находим y из последнего уравнения k интегрированиями.

ПРИМЕР 21.3. Решить уравнение

$$xy^{(4)} - y'' = 0.$$

◁ а) Уравнение не содержит y, y', y'' , поэтому делаем замену $y'' = z(x)$, откуда $y^{(4)} = (y'')' = z'(x)$. Таким образом, приходим к уравнению первого порядка

$$xz' - z = 0.$$

б) $x \frac{dz}{dx} - z = 0$ — уравнение с разделяющимися переменными. Действуя по схеме занятия № 18, последовательно получаем:

$$x \frac{dz}{dx} = z, \quad x dz = z dx, \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln |z| = \ln |x| + \ln |C_1|, \quad \ln |z| = \ln |C_1 x|, \quad z = C_1 x.$$

Так как $z = y''$, то получим уравнение $y'' = C_1 x$.

в) Трижды интегрируем последнее уравнение:

$$y'' = \int C_1 x dx = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2,$$

$$y' = \int \left(C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \right) dx = \frac{C_1 x^3}{6} + C_2 x + C_3;$$

$$y = \int \left(\frac{C_1 x^3}{6} + C_2 x + C_3 \right) dx = \frac{C_1}{24} x^4 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4.$$

Так как $C_1/24$ и $C_2/2$ — произвольные постоянные, то, обозначая их как C_1 и C_2 , получаем

$$y = C_1 x^4 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4. \triangleright$$

ПРИМЕР. 21.4. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} x^4 y'' + 2x^3 y' = 1, \\ y(1) = \frac{1}{2}, \quad y'(1) = \frac{1}{2}, \quad y''(1) = -1 \end{cases} \quad (21.5)$$

$$\begin{cases} y(1) = \frac{1}{2}, \quad y'(1) = \frac{1}{2}, \quad y''(1) = -1 \end{cases} \quad (21.6)$$

а) Уравнение (21.5) не содержит y и y' , поэтому делаем замену $y'' = z(x)$, откуда $y''' = (y'')' = z'$. Таким образом, (21.5) преобразовали к виду

$$x^4 z' + 2x^3 z = 1.$$

б) Так как начальные условия (21.6) даны в точке $x = 1 \neq 0$, то, деля обе части уравнения на x^4 , получаем

$$z' + \frac{2}{x} z = \frac{1}{x^4}, \quad (21.7)$$

а это линейное уравнение первого порядка. Применим, например, метод Бернулли (см. занятие № 19).

Решение в виде $z = uv$, $z' = u'v + uv'$ и будем искать. Получаем уравнение

$$u'v + u \left[v' + \frac{2}{x} v \right] = \frac{1}{x^4}.$$

Для нахождения u и v имеем систему

$$\begin{cases} v' + \frac{2}{x} v = 0, \\ u'v = \frac{1}{x^4}. \end{cases}$$

В первом уравнении системы последовательно разделяем переменные

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{2}{x}v, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{2dx}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = \int -\frac{2dx}{x},$$

$$\ln |v| = -2 \ln |x|, \quad \ln |v| = \ln \left| \frac{1}{x^2} \right|, \quad v = \frac{1}{x^2}.$$

Получили частное решение, которое подставляем во второе уравнение системы:

$$u' \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^4}, \quad \text{или} \quad u' = \frac{1}{x^2}, \quad u = \int \frac{1}{x^2} dx, \quad u = -\frac{1}{x} + C_1.$$

Так как $z = uv$, то решение уравнения (21.7) имеет вид

$$z = \left(-\frac{1}{x} + C_1 \right) \frac{1}{x^2}, \quad \text{или} \quad z = C_1 \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}.$$

Учитывая, что $z = y''$, получаем

$$y'' = \frac{C_1}{x^2} - \frac{1}{x^3}. \quad (21.8)$$

в) Последнее уравнение решаем двукратным интегрированием; неизвестные постоянные находим из начальных условий (21.6). C_1 определяем из третьего начального условия: $y'' = -1$ при $x = 1$, и подставляем в (21.8):

$$-1 = \frac{C_1}{1^2} - \frac{1}{1^3},$$

откуда $C_1 = 0$ и, следовательно,

$$y'' = -\frac{1}{x^3}, \quad y' = \int -\frac{1}{x^3} dx + C_2, \quad \text{откуда} \quad y' = \frac{1}{2x^2} + C_2.$$

C_2 определяем из второго начального условия: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2 \cdot 1^2} + C_2$, откуда $C_2 = 0$ и, следовательно,

$$y' = \frac{1}{2x^2}, \quad y = \int \frac{1}{2x^2} dx + C_3, \quad \text{или} \quad y = -\frac{1}{2x} + C_3.$$

C_3 определяем из первого начального условия: $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2 \cdot 1} + C_3$, откуда $C_3 = 1$. Таким образом, $y = 1 - \frac{1}{2x}$. $\triangleright$

§ 21.3. УРАВНЕНИЯ, НЕ СОДЕРЖАЩИЕ ЯВНО НЕЗАВИСИМУЮ ПЕРЕМЕННУЮ

Уравнение вида

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

не содержит явно независимую переменную x .

Схема решения

а) Производим замену $y' = p(y)$, где $p(y)$ — неизвестная функция аргумента y . По правилу дифференцирования сложной функции

$$y'' = \frac{d}{dx}(p(y)) = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p,$$

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dp}{dy} p \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{dp}{dy} p \right) \frac{dy}{dx} = p^2 \frac{d^2 p}{dy^2} + p \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 \text{ и т. д.}$$

Подставив эти выражения в исходное уравнение вместо $y', y'', \dots, y^{(n)}$, получим уравнение $(n-1)$ -го порядка относительно $p(y)$.

б) Определим тип этого уравнения и решим его, т. е. найдем $p(y)$.

в) Заменяя $p(y)$ на y' , получаем уравнение первого порядка относительно $y(x)$.

ПРИМЕР 21.5. Решить уравнение

$$1 + (y')^2 = yy''.$$

◁ а) Уравнение не содержит x , поэтому делаем замену $y' p(y)$. Откуда $y'' = \frac{dp}{dy} p$. Подставив y' и y'' в исходное уравнение, получим

$$1 + p^2 = y \frac{dp}{dy} p$$

— уравнение с разделяющимися переменными y и p .

б) Последовательно действуем по схеме разделения переменных:

$$yp \frac{dp}{dy} = 1 + p^2, \quad y p dp = (1 + p^2) dy, \quad \frac{p}{1 + p^2} dp = \frac{dy}{y},$$

$$\int \frac{p dp}{1 + p^2} = \int \frac{dy}{y}, \quad \frac{1}{2} \int \frac{d(p^2 + 1)}{p^2 + 1} = \ln |y| + \ln |C_1|,$$

$$\ln |p^2 + 1| = 2 \ln |C_1 y|, \quad \ln |p^2 + 1| = \ln |C_1^2 y^2|, \quad p^2 + 1 = C_1^2 y^2,$$

откуда $p^2 = C_1^2 y^2 - 1$ или $p = \pm \sqrt{C_1^2 y^2 - 1}$.

в) Заменяя p на y' , получаем

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{C_1^2 y^2 - 1}$$

два уравнения с разделяющимися переменными (со знаком «+» и со знаком «-»). Разделяем переменные и интегрируем:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}} &= \pm dx, \quad \int \frac{dy}{\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}} = \pm \int dx, \\ \frac{1}{C_1} \ln \left(C_1 y + \sqrt{C_1^2 y^2 - 1} \right) &= \pm (x + C_2) \text{ или} \\ \ln \left(C_1 y + \sqrt{C_1^2 y^2 - 1} \right) &= \pm (x + C_2) C_1. \quad \triangleright\end{aligned}$$

ПРИМЕР 21.6. Решить задачу Коши

$$y'' y^3 + 1 = 0,$$

$$y(1) = -1, \quad y'(1) = -1.$$

◁ а) Уравнение не содержит x , поэтому делаем замену $y' = p(y)$, откуда $y'' = \frac{dp}{dy} p$. Тогда исходное уравнение

$$\frac{dp}{dy} p y^3 + 1 = 0.$$

б) Применяем схему разделения переменных:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dy} p y^3 &= -1, \quad p y^3 dp = -dy, \quad p dp = -\frac{dy}{y^3}, \\ \int p dp &= -\int \frac{dy}{y^3}, \quad \frac{p^2}{2} = \frac{1}{2y^2} + \frac{C_1}{2}, \quad p^2 = \frac{1}{y^2} + C_1, \\ p &= \pm \sqrt{\frac{1}{y^2} + C_1}.\end{aligned}$$

в) Заменяв p на y' , приходим к уравнению:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{1}{y^2} + C_1}.$$

Подставив начальные условия $y = -1$ и $y' = -1$, определим C_1 и знак перед корнем:

$$-1 = \pm \sqrt{1 + C_1}.$$

В последнем уравнении относительно C надо выбрать знак «-», так как корень четной степени ≥ 0 и, следовательно

$$-1 = -\sqrt{1 + C_1}, \text{ или } C_1 = 0, \text{ откуда}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{1}{y^2}}, \text{ или } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{|y|}.$$

В силу первого начального условия $y(1) = -1 < 0$, поэтому $|y| = -y$ и приходим к уравнению с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y},$$

откуда

$$y dy = dx, \quad \int y dy = \int dx, \quad \frac{y^2}{2} = x + C_2.$$

Из первого начального условия:

$$\frac{(-1)^2}{2} = 1 + C_2, \text{ откуда } C_2 = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{y^2}{2} = x - \frac{1}{2}, \text{ или } y^2 = 2x - 1, \quad y = \pm\sqrt{2x - 1}.$$

В силу начального условия $y(-1) = -1 < 0$ перед корнем надо взять знак «-». Окончательный ответ: $y = -\sqrt{2x - 1}$. ▽

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить уравнения.

1) $y'' = \frac{1}{x}$; 2) $xy^{(4)} = 1$;

3) $x^4 y'' + x^3 y' = 1$; 4) $xy''' + 2y'' = 0$;

5) $y'' = 1 - (y')^2$; 6) $yy'' - y'(1 + y') = 0$;

7) $(y''')^2 + (y'')^2 = 1$; 8) $(x+1)y'' - (x+2)y' + x + 2 = 0$;

9) $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$;

- 10) $1 + (y')^2 = 2yy''$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$;
 11) $yy'' + (y')^2 = (y')^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;
 12) $y''(1 + \ln x) + \frac{1}{x}y' = 2 + \ln x$, $y(1) = \frac{1}{2}$, $y'(1) = 1$;
 13) $y'' = (y')^2 - y$, $y(1) = -\frac{1}{4}$, $y'(1) = \frac{1}{2}$;
 14) $2y''' - 3(y')^2 = 0$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$.

Ответы:

- 1) $y = x \ln |x| + C_1x + C_2$;
 2) $6y = x^3 \ln |x| + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$;
 3) $y = \frac{1}{4x^2} + C_1 \ln |x| + C_2$;
 4) $y = C_1 \ln |x| + C_2x + C_3$;
 5) $y = \ln |e^{2x} + C_1| - x + C_2$;
 6) $y = C_1 e^{C_2 x} + \frac{1}{C_2}$;
 7) $y = \sin(C_1 + x) + C_2x + C_3$;
 8) $y = (C_1 e^x + 1)x + C_2$;
 9) $y = x^3 + 3x$;
 10) $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$;
 11) $y = x + 1$;
 12) $y = \frac{1}{2}x^2$;
 13) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}$;
 14) $y(x + 2) = -x - 6$.

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 22.1. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

I. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0, \quad (22.1)$$

$a_0, a_1, \dots, a_n$ — действительные числа.

Схема решения

а) Для уравнения (22.1) составляем алгебраическое уравнение относительно λ :

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad (22.2)$$

которое называется характеристическим.

б) Находим корни уравнения (22.2) и по корням выпишем фундаментальную систему решений (ФСР) уравнения (22.1). При этом

— каждому действительному корню α кратности $r \geq 1$ отвечает ровно r линейно независимых частных решений уравнения (22.1)

$$e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, \dots, x^{r-1}e^{\alpha x};$$

— каждой паре комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ кратности r отвечает $2r$ линейно независимых частных решений уравнения (22.1)

$$\begin{aligned} &e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{r-1}e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ &e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{r-1}e^{\alpha x} \sin \beta x. \end{aligned}$$

в) Общее решение y_{∞} уравнения (22.1) — линейная комбинация найденных n линейно независимых частных решений.

ПРИМЕР 22.1. Решить уравнение

$$y^{(4)} - 2y'' - 3y' = 0.$$

◁ а) Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 - 3\lambda^2 = 0,$$

или

$$\lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda - 3). \quad (*)$$

б) Находим его корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$. Для определения кратности корней перепишем уравнение (*) в виде

$$(\lambda - 0)^2(\lambda + 1)^1(\lambda - 3)^1 = 0.$$

Показатели степеней показывают кратности соответствующих корней. Корню $\lambda_1 = 0$ кратности 2 отвечают два частных решения

$$y_1 = e^{0x} = 1, \quad y_2 = xe^{0x} = x.$$

Корни $\lambda_2 = -1$ и $\lambda_3 = 3$ имеют кратность 1 и им отвечает по одному частному решению $y_3 = e^{-x}$, $y_4 = e^{3x}$. Таким образом, найдена ФСР, состоящая из четырех решений:

$$y_1 = 1, \quad y_2 = x, \quad y_3 = e^{-x}, \quad y_4 = e^{3x}.$$

$$y_{\infty} = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4e^{3x}. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 22.2. Решить уравнение

$$y''' + 4y'' + 4y' = 0.$$

◁ а) Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda = 0$$

или

$$\lambda(\lambda^2 + 4\lambda + 4) = 0,$$

или

$$\lambda(\lambda + 2)^2 = 0.$$

б) Корню $\lambda_1 = 0$ кратности 1 отвечает одно частное решение $y_1 = e^{0x} = 1$, корню $\lambda_2 = -2$ кратности 2 отвечает два частных решения $y_2 = e^{-2x}$. Найдена ФСР:

$$y_1 = 1, \quad y_2 = e^{-2x}, \quad y_3 = xe^{-2x}.$$

$$y_{\infty} = C_1 + C_2e^{-2x} + C_3xe^{-2x}. \quad \triangleright$$

ПЕРИМЕР 22.3. Решить уравнение

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

◁ а) Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0.$$

б) Находим его корни

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 13} = -2 \pm \sqrt{-9} = -2 \pm 3i.$$

Паре комплексно-сопряженных корней $-2 \pm 3i$ (кратность каждого из них равна 1) отвечает два частных решения $y_1 = e^{-2x} \cos 3x$ и $y_2 = e^{-2x} \sin 3x$, которые являются ФСР.

$$y_{\infty} = C_1 e^{-2x} \cos 3x + C_2 e^{-2x} \sin 3x. \triangleright$$

ПРИМЕР 22.4. Решить уравнение

$$y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0.$$

◁ а) Выписываем характеристическое уравнение

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

б) Для нахождения корней проведем в левой части уравнения группировку

$$(\lambda^5 - 2\lambda^4) + (2\lambda^3 - 4\lambda^2) + (\lambda - 2) = 0,$$

откуда

$$\lambda^4(\lambda - 2) + 2\lambda^2(\lambda - 2) + (\lambda - 2) = 0,$$

или

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda^2 + 1)^2 = 0.$$

Так как второй сомножитель — полный квадрат, то уравнение имеет вид

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)^2 = 0,$$

его корни $\lambda_1 = 2$ кратности 1 и $\lambda_{2,3} = \pm i$ каждый кратности 2. Корню $\lambda_1 = 2$ отвечает частное решение $y_1 = e^{2x}$, паре корней $0 \pm li$ отвечает четыре частных решения

$$y_2 = e^{0x} \cos x, \quad y_4 = x e^{0x} \cos x,$$

$$y_3 = e^{0x} \sin x, \quad y_5 = x e^{0x} \sin x.$$

$$y_{00} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{0x} \cos x + C_3 e^{0x} \sin x + \\ + C_4 x e^{0x} \cos x + C_5 x e^{0x} \sin x. \triangleright$$

Замечание. Так как ошибка в определении кратностей корней наиболее распространенная, то для самопроверки полезно иметь в виду, что сумма кратностей корней равна степени уравнения n .

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить уравнения.

1) $y'' + y' - 2x = 0$;

6) $y'' + 2y' + 10y = 0$;

2) $y'' + 4y' + 3y = 0$;

7) $y'' + 4y = 0$;

3) $y'' + 2y' = 0$;

8) $4y'' + 4y' + y = 0$;

4) $y'' - 5y' + 2y = 0$;

9) $y^{(5)} - 10y''' + 9y' = 0$;

5) $y'' - 4y' + 5y = 0$;

10) $y^{(5)} + 8y''' + 16y = 0$.

Ответы:

1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$;

2) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$;

3) $y = C_1 + C_2 e^{2x}$;

4) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x/2}$;

5) $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$;

6) $y = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$;

7) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$;

8) $y = e^{-x/2}(C_1 + C_2 x)$;

9) $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 e^{3x} + C_5 e^{-3x}$;

10) $y = C_1 + (C_2 + C_3 x) \cos 2x + (C_4 + C_5 x) \sin 2x$.

§ 22.2. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. МЕТОД ЛАГРАНЖА

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ) n -го порядка имеет вид

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x), \quad (22.3)$$

где $f(x)$ — заданная функция. Решение уравнения (22.3) методом Лагранжа (методом вариации постоянных) проводим по схеме.

а) Находим ФСР $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ и общее решение ЛОДУ (22.1)

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n.$$

б) Общее решение уравнения (22.3) ищем в виде

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n(x)y_n. \quad (22.4)$$

Для определения неизвестных функций $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ составим систему алгебраических уравнений относительно $C'_1(x), C'_2(x), \dots, C'_n(x)$

$$\begin{cases} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \dots + C'_n y_n = 0 \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + \dots + C'_n y'_n = 0 \\ \vdots \\ C'_1 y_1^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C'_n y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

в) Находим $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$ и интегрированием — $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$. Ответ записываем в виде (22.4).

ПРИМЕР 22.5. Решить уравнение

$$y''' + y' = \operatorname{tg} x.$$

◁ а) Характеристическое уравнение соответствующего ЛОДУ

$$\lambda^3 + \lambda = 0, \quad \text{или} \quad \lambda(\lambda^2 + 1) = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm i$ и, следовательно,

$$y_{\infty} = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x,$$

$y_1 = 1, y_2 = \cos x, y_3 = \sin x$ образуют ФСР ЛОДУ.

б) Общее решение исходного уравнения ищем в виде

$$y = C_1(x) + C_2(x) \cos x + C_3(x) \sin x.$$

$y'_1 = 0, y'_2 = (\cos x)' = -\sin x, y'_3 = (\sin x)' = \cos x,$
 $y''_1 = 0, y''_2 = -\cos x, y''_3 = -\sin x$, поэтому для определения $C'_1(x), C'_2(x), C'_3(x)$ имеем систему

$$\begin{cases} C'_1 + C'_2 \cos x + C'_3 \sin x = 0 \\ -C'_2 \sin x + C'_3 \cos x = 0 \\ -C'_2 \cos x - C'_3 \sin x = \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

в) Решаем эту систему, например, методом исключения:

$$C_1' = \operatorname{tg} x, C_2' = -\sin x, C_3' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} x.$$

Интегрируя, находим

$$C_1 = \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln |\cos x| + A,$$

$$C_2 = \int (-\sin x) dx = \cos x + B,$$

$$\begin{aligned} C_3 &= -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{\cos x} dx + \int \cos x dx = \\ &= -\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \sin x + C; \end{aligned}$$

здесь A, B, C — произвольные постоянные. Найденные $C_1(x), C_2(x), C_3(x)$ подставляем в б) и получаем

$$\begin{aligned} y &= (-\ln |\cos x| + A) + (\cos x + B) \cos x + \\ &+ \left(\sin x - \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C \right) \sin x. \end{aligned}$$

Раскроем скобки и переобозначим $A = C_1, B = C_2, C = C_3$:

$$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \ln |\cos x| - \sin x \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + 1. \triangleright$$

ПРИМЕР 22.6. Решить задачу Коши для ЛНДУ

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2x = \frac{1}{e^x + 1} \\ y(0) = 2 \ln 2, y'(0) = -3 \ln 2. \end{cases} \quad (22.5)$$

◁ а) Характеристическое уравнение соответствующего ЛОДУ

$$\lambda_2 + 3\lambda + 2 = 0, \quad \text{или} \quad (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -2$, поэтому $y_1 = e^{-x}$ и $y_2 = e^{-2x}$ образуют ФСР ЛОДУ и, следовательно,

$$y_{\text{го}} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

б) Общее решение исходного уравнения ищем в виде

$$y = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{-2x}.$$

Т. к. $y'_1 - e^{-x}, y'_2 = -2e^{-2x}$, для определения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ имеем систему

$$\begin{cases} C'_1 e^{-x} + C'_2 e^{-2x} = 0 \\ -C'_1 e^{-x} - 2C'_2 e^{-2x} = \frac{1}{e^x + 1}. \end{cases} \quad (22.6)$$

в) Решаем эту систему, например, методом исключения:

$$C'_1 = \frac{e^x}{e^x + 1}, \quad C'_2 = -\frac{e^{2x}}{e^x + 1}.$$

Интегрируя, находим

$$\begin{aligned} C_1 &= \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = \ln(e^x + 1) + A, \\ C_2 &= -\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx = -\int \frac{e^x d(e^x)}{e^x + 1} = -\int \frac{(e^x + 1) - 1}{e^x + 1} d(e^x) = \\ &= \int \frac{1}{e^x + 1} d(e^x) - \int 1 \cdot d(e^x) = \ln(e^x + 1) - e^x + B; \end{aligned}$$

здесь A, B — произвольные постоянные. Найденные C_1 и C_2 подставляем в б) и получаем общее решение уравнения

$$y = (\ln(e^x + 1) + A)e^{-x} + (\ln(e^x + 1) - e^x + B)e^{-2x}. \quad (22.7)$$

Используя первое уравнение в (22.6), найдем y' :

$$y' = -e^{-x}(\ln(e^x + 1) + A) - 2e^{-2x}(\ln(e^x + 1) - e^x + B).$$

Учитывая первое начальное условие в (22.5), получим

$$y(0) = 2 \ln 2 = 2 \ln 2 + A + B - 1,$$

откуда $A + B = 1$.

Из второго начального условия в (22.5)

$$y'(0) = -3 \ln 2 = -(\ln 2 + A) - 2(\ln 2 - 1 + B),$$

откуда $A + 2B = 2$.

Решение системы

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A + 2B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow A = 0, B = 1$$

подставляем в (22.7) и получаем решение задачи Коши

$$y = e^{-x} \ln(e^x + 1) + e^{-2x}(\ln(e^x + 1) - e^x + 1). \triangleright$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить уравнения.

$$1) y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x};$$

$$2) y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x};$$

$$3) y'' + y = \frac{1}{\sin x};$$

$$4) y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x;$$

$$5) y'' + y = 2 \sec^3 x;$$

$$6) y'' + y = \operatorname{ctg} x;$$

$$7) y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\sin \pi x}, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2};$$

$$8) y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{1 - e^{-x}}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0;$$

$$9) y'' + 9y = \frac{9}{\cos 3x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$$

$$10) y'' + 4y = 8 \operatorname{ctg} 2x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4.$$

Ответы:

$$1) y = e^x(x \ln |x| + C_1 x + C_2);$$

$$2) y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + xe^{-x} \ln |x|;$$

$$3) y = (C_1 + \ln |\sin x|) \sin x + (C_2 - x) \cos x;$$

$$4) y = \sin 2x \ln |\cos x| - x \cos 2x + C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x;$$

$$5) y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{\cos 2x}{\cos x};$$

$$6) y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \ln |\operatorname{tg} x/2|;$$

$$7) y = (1 + \ln |\sin \pi x|) \sin \pi x - \pi x \cos \pi x;$$

$$8) y = e^x \ln \frac{2}{1 + e^x} + e^{2x} \ln \frac{2}{1 + e^{-x}};$$

$$9) y = (1 + \ln |\cos 3x|) \cos 3x + 3x \sin 3x;$$

$$10) y = (5 + 2 \ln |\operatorname{tg} x|) \sin 2x.$$

ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 23.1. МЕТОД ПОДБОРА ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ

Рассмотрим ЛНДУ с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x). \quad (23.1)$$

Общее решение $y_{\text{он}}$ имеет следующую структуру:

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{гн}} = C_1y_1 + \dots + C_ny_n + y_{\text{гн}}, \quad (23.2)$$

где $y_1, \dots, y_n$ — ФСР соответствующего ЛОДУ, а $y_{\text{гн}}$ — какое-нибудь частное решение уравнения (23.1).

Если в (23.1) правая часть $f(x)$ имеет специальный вид

$$f(x) = e^{\alpha x} [P_m(x) \cos \beta x + Q_l(x) \sin \beta x], \quad (23.3)$$

где $P_m(x), Q_l(x)$ — многочлены степени m и l , то частное решение $y_{\text{гн}}$ можно найти *методом подбора*, а именно:

— если $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то $y_{\text{гн}}$ ищется в виде

$$y_{\text{гн}} = e^{\alpha x} [\tilde{P}_k(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) \sin \beta x], \quad (23.4)$$

где $\tilde{P}_k(x)$ и $\tilde{Q}_k(x)$ — многочлены степени $k = \max\{l, m\}$ с определенными коэффициентами;

— если $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения кратности r , то $y_{\text{гн}}$ ищется в виде

$$y_{\text{гн}} = x^r e^{\alpha x} [\tilde{P}_k(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) \sin \beta x]. \quad (23.5)$$

Коэффициенты многочленов $\tilde{P}_k(x), \tilde{Q}_k(x)$ определяются подстановкой $y_{\text{гн}}$ в исходное уравнение (23.1).

Схема решения

а) Находим y_{∞} (см. занятие № 22);

б) находим $y_{\text{гн}}$ методом подбора;

в) ответ записываем в виде (23.2):

$$y = y_{\infty} + y_{\text{гн}}.$$

Отметим частный случай формулы (23.3) при $\beta = 0$, т. е.

$$f(x) = e^{\alpha x} P_m(x). \quad (23.3')$$

Тогда формулы (23.4) и (23.5) принимают вид

$$y_{\text{гн}} = e^{\alpha x} \tilde{P}_m(x), \quad (23.4')$$

(α — не корень характеристического уравнения),

$$y_{\text{гн}} = x^r e^{\alpha x} \tilde{P}_m(x), \quad (23.5')$$

(α — корень характеристического уравнения кратности r).

ПРИМЕР 23.1. Найти общее решение уравнения

$$y''' - y'' + y' - y = x^2 + x.$$

◁ а) Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

или

$$\lambda^2(\lambda - 1) + \lambda - 1 = 0,$$

или

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \pm i$ имеют кратность 1, поэтому

$$y_{\infty} = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

б) Правую часть уравнения $f(x) = x^2 + x$ можно записать в виде

$$f(x) = e^{0 \cdot x} (x^2 + x).$$

Здесь число $\alpha = 0$ не является корнем характеристического уравнения, многочлен $x^2 + x$ степени 2, поэтому $y_{\text{гн}}$ можно искать в виде (23.4'):

$$y_{\text{гн}} = e^{0 \cdot x} (Ax^2 + Bx + C),$$

где A, B, C — неизвестные коэффициенты. Находим

$$y'_{\text{гн}} = 2Ax + B, \quad y''_{\text{гн}} = 2A, \quad y'''_{\text{гн}} = 0.$$

Подставляем $y_{\text{гн}}, y'_{\text{гн}}, y''_{\text{гн}}, y'''_{\text{гн}}$ в исходное уравнение:

$$-2A + 2Ax + B - Ax^2 - Bx - C = x^2 + x.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в многочленах слева и справа и получаем систему

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \\ x \\ x^0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -A = 1 \\ 2A - B = 1 \\ B - 2A - C = 0 \end{array}$$

откуда находим $A = -1, B = -3, C = -1$. Следовательно, частное решение

$$y_{\text{гн}} = -x^2 - 3x - 1.$$

в) Ответ записываем в виде $y = y_{\text{оо}} + y_{\text{гн}}$:

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - x^2 - 3x - 1. \triangleright$$

ПРИМЕР 23.2. Найти общее решение уравнения

$$y''' - y'' = 12x + 6.$$

◁ а) Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - \lambda^2 = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2(\lambda - 1) = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 0$, кратности 2 и $\lambda_2 = 1$ кратности 1, поэтому

$$y_{\text{оо}} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x.$$

б) Правую часть уравнения $f(x) = 12x + 6$ записываем в виде

$$f(x) = e^{0x}(12x + 6).$$

Здесь число $\alpha = 0$ является двукратным корнем характеристического уравнения, многочлен $12x + 6$ — степени 1, поэтому $y_{\text{гн}}$ можно искать в виде (23.5') при $r = 2, \alpha = 0, m = 1$, т. е.

$$y_{\text{гн}} = x^2(Ax + B) = Ax^3 + Bx^2,$$

откуда

$$y'_{\text{гн}} = 3Ax^2 + 2Bx, \quad y''_{\text{гн}} = 6Ax + 2B, \quad y'''_{\text{гн}} = 6A.$$

Подставляем $y_{\text{гн}}'$ и $y_{\text{гн}}''$ в исходное уравнение:

$$6A - 6Ax - 2B = 12x + 6,$$

откуда, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем

$$\left. \begin{array}{l} x \\ x^0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -6A = 12 \\ 6A - 2B = 6 \end{array}.$$

Решение системы $A = -2, B = -9$. Следовательно,

$$y_{\text{гн}} = -2x^3 - 9x^2.$$

в) Ответ записываем в виде $y = y_{\infty} + y_{\text{гн}}$:

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^x - 2x^3 - 9x^2. \triangleright$$

ПРИМЕР 23.3. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y' = 4x^2e^x.$$

◁ а) Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \lambda = 0 \quad \text{или} \quad \lambda(\lambda + 1) = 0$$

имеет однократные корни $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -1$, поэтому

$$y_{\infty} = C_1 + C_2e^{-x}.$$

б) Правую часть уравнения $f(x) = 4x^2e^x$ записываем в виде

$$f(x) = e^{1x}4x^2.$$

Здесь $\alpha = 1$. Так как 1 не является корнем характеристического уравнения, а многочлен $4x^2$ — степени 2, то $y_{\text{гн}}$ ищем в виде (23.4') при $\alpha = 1, m = 2$:

$$y_{\text{гн}} = e^x(Ax^2 + Bx + C).$$

Находим

$$y_{\text{гн}}' = e^x(Ax^2 + Bx + C) + (2Ax + B)e^x,$$

$$y_{\text{гн}}'' = e^x(Ax^2 + Bx + C) + 2(2Ax + B)e^x + 2Ae^x$$

и подставляем в исходное уравнение, сокращаем на $e^x \neq 0$:

$$2Ax^2 + (6A + 2B)x + 2A + 3B + 2C = 4x^2.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях:

$$\begin{cases} 2A = 4 \\ 6A + 2B = 0 \\ 2A + 3B + 2C = 0, \end{cases}$$

откуда $A = 2, B = -6, C = 7$. Следовательно,

$$y_{\text{гн}} = e^x(2x^2 - 6x + 7).$$

в) Ответ записываем в виде $y = y_{\infty} + y_{\text{гн}}$:

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + e^x(2x^2 - 6x + 7). \triangleright$$

ПРИМЕР 23.4. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 3y' + 2y = x \sin x.$$

◁ а) Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0 \quad \text{или} \quad (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

имеет однократные корни $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$, поэтому

$$y_{\infty} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

б) Правую часть уравнения $f(x) = x \sin x$ записываем в виде

$$f(x) = e^{0x}(0 \cdot \cos x + x \sin x).$$

Здесь число $\alpha + i\beta = 0 + li = i$ не является корнем характеристического уравнения, многочлен x — степени 1, поэтому $y_{\text{гн}}$ ищем в виде (23.4) при $\alpha = 0, \beta = 1, k = \max\{0, 1\} = 1$, т. е.

$$y_{\text{гн}} = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x,$$

тогда

$$y'_{\text{гн}} = (A + D + Cx)\cos x + (C - B - Ax)\sin x,$$

$$y''_{\text{гн}} = (2C - B - Ax)\cos x - (2A + D + Cx)\sin x.$$

Подставляя $y_{\text{гн}}, y'_{\text{гн}}, y''_{\text{гн}}$ в исходное уравнение, получаем

$$\begin{aligned} & [(A + 3C)x + 3A + B + 2C + 3D]\cos x + \\ & + [(-3A + C)x - 2A - 2B + 3C + D]\sin x = x \sin x. \end{aligned}$$

В обеих частях приравниваем коэффициенты при функциях $\cos x$, $\sin x$, $x \cos x$, $x \sin x$; получаем систему:

$$\left. \begin{array}{l} \cos x \\ \sin x \\ x \cos x \\ x \sin x \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3A + B + 2C + 3D = 0 \\ -2A - 3B + 3C + D = 0 \\ A + 3C = 0 \\ -3A + C = 1 \end{array}$$

Решая эту систему снизу вверх, получим $A = -\frac{3}{10}$,
 $B = \frac{17}{50}$, $C = \frac{1}{10}$, $D = \frac{3}{25}$. Следовательно,

$$y_{\text{гн}} = \left(-\frac{3}{10}x + \frac{17}{50}\right)\cos x + \left(\frac{1}{10}x + \frac{3}{25}\right)\sin x.$$

в) Ответ записываем в виде $y = y_{\infty} + y_{\text{гн}}$:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \left(-\frac{3}{10}x + \frac{17}{50}\right)\cos x + \left(\frac{1}{10}x + \frac{3}{25}\right)\sin x. \triangleright$$

ПРИМЕР 23.5. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \cos 2x.$$

◁ а) Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

имеет корни кратности 1:

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm 2i,$$

поэтому

$$y_{\infty} = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x.$$

б) Правую часть уравнения $f(x) = e^{-x} \cos 2x$ записываем в виде

$$f(x) = e^{-1 \cdot x} (1 \cdot \cos 2x + 0 \sin 2x).$$

Здесь число $\alpha + i\beta = -1 + 2i$ является однократным корнем характеристического уравнения, поэтому $y_{\text{гн}}$ ищем в виде (23.4) при $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $k = 0$, т. е.

$$y_{\text{гн}} = x e^{-x} (A \cos 2x + B \sin 2x),$$

тогда

$$y'_{\text{гн}} = e^{-x}[(A - Ax + 2Bx)\cos 2x + (B - Bx - 2Ax)\sin 2x],$$

$$y''_{\text{гн}} = e^{-x}[(-2A - 3Ax + 4B - 4Bx)\cos 2x + \\ + (-2B - 3Bx - 4A + 4Ax)\sin 2x].$$

Подставляем $y_{\text{гн}}, y'_{\text{гн}}, y''_{\text{гн}}$ в исходное уравнение и сокращаем на $e^{-x} \neq 0$:

$$-4A \sin 2x + 4B \cos 2x = \cos 2x.$$

Приравнявая коэффициенты в обеих частях, имеем:

$$\left. \begin{array}{l} \cos 2x \\ \sin 2x \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4B = 1 \\ -4A = 0 \end{array}$$

откуда $A = 0, B = \frac{1}{4}$. Следовательно,

$$y_{\text{гн}} = xe^{-x} \cdot \frac{1}{4} \sin 2x.$$

в) Ответ записываем в виде $y = y_{\infty} + y_{\text{гн}}$:

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{4} xe^{-x} \cdot \sin 2x. \triangleright$$

ПРИМЕР 23.6. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 10y' + 25y = 4 \operatorname{ch} 5x.$$

◁ а) Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0 \quad \text{или} \quad (\lambda + 5)^2 = 0.$$

Его корень $\lambda_1 = -5$ имеет кратность 2, поэтому

$$y_{\infty} = C_1 e^{-5x} + C_2 x e^{-5x}.$$

б) Так как $\operatorname{ch} 5x = \frac{e^{5x} + e^{-5x}}{2}$, то правую часть уравнения записываем в виде

$$f(x) = 2e^{5x} + 2e^{-5x}. \quad (23.6)$$

§ 23.2. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ

Для определения вида частного решения $y_{\text{гн}}$ используем *принцип суперпозиции*: если $y_{\text{гн1}}$ — частное решение уравнения с правой частью $f_1(x)$, а $y_{\text{гн2}}$ — частное решение уравнения с правой частью $f_2(x)$, то $y_{\text{гн}} = y_{\text{гн1}} + y_{\text{гн2}}$ — частное решение того же уравнения с правой частью $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Положим в (23.6) $f_1(x) = 2e^{5x}$, $f_2(x) = 2e^{-5x}$. Так как число 5 не является корнем характеристического уравнения, то $y_{\text{гн1}}$ ищем в виде (23.4')

$$y_{\text{гн1}} = Ae^{5x},$$

а так как число -5 является двукратным корнем характеристического уравнения, то $y_{\text{гн2}}$ ищем в виде (23.5')

$$y_{\text{гн2}} = x^2 e^{-5x} B.$$

Таким образом, $y_{\text{гн}}$ ищем в виде $y_{\text{гн1}} + y_{\text{гн2}}$, т. е.

$$y_{\text{гн}} = Ae^{5x} + Bx^2 e^{-5x},$$

$$y'_{\text{гн}} = 5Ae^{5x} + B(2x - 5x^2)e^{-5x},$$

$$y''_{\text{гн}} = 25Ae^{5x} + B(2 - 20x + 25x^2)e^{-5x}.$$

Подставляя $y_{\text{гн}}, y'_{\text{гн}}, y''_{\text{гн}}$ в исходное уравнение

$$y'' + 10y' + 25y = 2e^{5x} + 2e^{-5x},$$

получим

$$100Ae^{5x} + 2Be^{-5x} = 2e^{5x} + 2e^{-5x}.$$

Приравниваем в обеих частях коэффициенты при e^{5x} и e^{-5x} :

$$\left. \begin{aligned} e^{5x} & \left| \begin{aligned} 100A &= 2 \\ 2B &= 2 \end{aligned} \right\} \\ e^{-5x} & \left| \end{aligned} \right\}$$

откуда $A = \frac{1}{50}$, $B = 1$, следовательно,

$$y_{\text{гн}} = \frac{1}{50}e^{5x} + x^2 e^{-5x}.$$

в) Ответ записываем в виде $y = y_{\text{оо}} + y_{\text{гн}}$:

$$y = C_1 e^{-5x} + C_2 x e^{-5x} + \frac{1}{50}e^{5x} + x^2 e^{-5x}. \triangleright$$

ПРИМЕР 23.7. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения

$$\begin{cases} y'' - y = 4 \cos x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

◁ а) Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \text{или} \quad (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

имеет однократные корни $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$, поэтому

$$y_{\infty} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

б) Правую часть уравнения $4 \cos x$ записываем в виде

$$f(x) = e^{0 \cdot x} (4 \cos x + 0 \sin x).$$

Здесь число $\alpha + i\beta = 0 + li = i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $y_{\text{гн}}$ ищем в виде (23.4) при $\alpha = 0, \beta = 1, k = 0$,

$$y_{\text{гн}} = A \cos x + B \sin x,$$

тогда

$$y'_{\text{гн}} = -A \sin x + B \cos x,$$

$$y''_{\text{гн}} = -A \cos x - B \sin x.$$

Подставляем $y_{\text{гн}}, y'_{\text{гн}}, y''_{\text{гн}}$ в исходное уравнение:

$$-A \cos x - B \sin x - A \cos x - B \sin x = 4 \cos x$$

или

$$-2A \cos x - 2B \sin x = 4 \cos x,$$

откуда $A = -2, B = 0$, следовательно,

$$y_{\text{гн}} = -2 \cos x.$$

в) Общее решение $y = y_{\infty} + y_{\text{гн}}$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2 \cos x. \quad (23.7)$$

Для определения C_1 и C_2 используем начальные условия, предварительно найдя

$$y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + 2 \sin x.$$

Имеем

$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^{-0} - 2 \cos 0 = 0,$$

$$y'(0) = C_1 e^0 - C_2 e^{-0} + 2 \sin 0 = 1.$$

Получили систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 2 = 0 \\ C_1 - C_2 = 1, \end{cases}$$

откуда $C_1 = \frac{3}{2}$, $C_2 = \frac{1}{2}$. Подставляем в (23.7) найденные C_1 и C_2 :

$$y = \frac{3}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} - 2\cos x. \triangleright$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить уравнения.

- 1) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$; 2) $y'' + y = 4xe^x$;
- 3) $y'' - 2y' + y = 6xe^x$; 4) $y'' + y = x \sin x$;
- 5) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$; 6) $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$;
- 7) $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;
- 8) $y'' - 2y' = 2e^x$, $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$;
- 9) $y''' - 3y' - 2y = 9e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$, $y''(0) = 3$;
- 10) $y^{IV} + y'' = 2 \cos x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$.

Ответы:

- 1) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{5} e^{4x}$;
- 2) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (2x - 2)e^x$;
- 3) $y = (C_1 + C_2 x + x^3)e^x$;
- 4) $y = \left(C_1 - \frac{x^2}{4}\right) \cos x + \left(C_2 + \frac{x}{4}\right) \sin x$;
- 5) $y = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + 0,25e^{2x} + 0,1 \cos 2x + 0,05 \sin 2x$;
- 6) $y = C_1 + C_2 e^{5x} - 0,2x^3 - 0,12x^2 - 0,048x + 0,02(\cos 5x - \sin 5x)$;
- 7) $y = e^{-x}(x - \sin x)$; 8) $y = e^{2x-1} - 2e^x + e - 1$;
- 9) $y = (x-1)(e^{2x} - e^{-x})$; 10) $y = x - x \sin x - 2 \cos x$.

**СИСТЕМЫ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Рассмотрим методы решений *нормальных систем*, т. е. систем вида

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где $x_k = x_k(t)$ — искомые функции, f_k — заданные функции $n + 1$ переменной.

§ 24.1. МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ

Суть метода заключается в сведении системы уравнений к одному уравнению.

ПРИМЕР 24.1. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 1, \\ \frac{dy}{dt} = x + 1 \end{cases}$$

◁ Из первого уравнения находим $y = \frac{dx}{dt} - 1$, тогда

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} - 1 \right) = \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Найденную производную $\frac{dy}{dt}$ подставляем во второе уравнение системы и получаем

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = x + 1 \quad \text{или} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} - x = 1.$$

Последнее уравнение — это линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ) 2-го порядка. (Методы решения ЛНДУ рассмотрены в занятиях 22 и 23.) Найдем общее решение уравнения (24.1).

а) Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \text{или} \quad (\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0. \quad (24.2)$$

Его корни $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 1$ имеют кратность 1, поэтому

$$x_{\text{оо}} = C_1 e^{-1 \cdot t} + C_2 e^{1 \cdot t}.$$

б) Правую часть уравнения (24.1) $f(t) = 1$ представляем в виде

$$f(t) = e^{0t} \cdot 1.$$

Здесь $\alpha = 0$ не является корнем уравнения (24.2), поэтому $x_{\text{гн}} = A \Rightarrow x'_{\text{гн}} = 0$, и, подставляя $x_{\text{гн}}$ и $x'_{\text{гн}}$ в (24.1), получаем $0 - A = 1$, откуда $A = -1$ и, следовательно, $x_{\text{гн}} = -1$.

в) $x = x_{\text{оо}} + x_{\text{гн}}$, поэтому

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^t - 1, \quad \frac{dx}{dt} = -C_1 e^{-t} + C_2 e^t,$$

т. к. $y = \frac{dx}{dt} - 1$, то

$$y = \frac{dx}{dt} - 1 = -C_1 e^{-t} + C_2 e^t - 1.$$

Таким образом, общее решение исходной системы:

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^t - 1, \quad y = -C_1 e^{-t} + C_2 e^t - 1. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 24.2. Решить задачу Коши для системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 8y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y, \end{cases} \quad x(0) = 6, \quad y(0) = -2.$$

◁ Из второго уравнения системы находим $x = -3y - \frac{dy}{dt}$, откуда

$$\frac{dx}{dt} = -3\frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2}. \quad (24.3)$$

Подставляя (24.3) в первое уравнение системы, получим

$$-3\frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2} = -9y - 3\frac{dy}{dt} + 8y \quad \text{или} \quad \frac{d^2y}{dt^2} - y = 0,$$

а это ЛОДУ. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 1 = 0$, или $(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$. Следовательно,

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad \frac{dy}{dt} = C_1 e^t - C_2 e^{-t},$$

а так как $x = -3y - \frac{dy}{dt}$, то

$$x = -4C_1 e^t - 2C_2 e^{-t}.$$

Общее решение системы

$$x = -4C_1 e^t - 2C_2 e^{-t}, \quad y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}. \quad (24.4)$$

Для определения C_1 и C_2 из начальных условий получаем алгебраическую систему

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= 6 = -4C_1 - 2C_2 \\ y(0) &= -2 = C_1 + C_2 \end{aligned} \right\},$$

решение которой $C_1 = -1$, $C_2 = -1$ подставляем в (24.4) и получаем ответ:

$$x = 4e^t + 2e^{-t}, \quad y = -e^t - e^{-t}. \quad \triangleright$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить методом исключения.

$$1) \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -9y, \\ \frac{dy}{dt} &= x; \end{aligned} \right. \quad 2) \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + t, \\ \frac{dy}{dt} &= x - t; \end{aligned} \right.$$

$$\begin{array}{lll}
 3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3x + 4y = 0, \\ \frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0, \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 4; \end{cases} & 4) \begin{cases} 4 \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 3x = \sin t, \\ \frac{dx}{dt} + y = \cos t; \end{cases} & 5) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + z, \\ \frac{dy}{dt} = z, \\ \frac{dz}{dt} = -x + z. \end{cases}
 \end{array}$$

Ответы:

$$1) x = 3C_1 \cos 3t - 3C_2 \sin 3t, \quad y = C_1 \sin 3t + C_2 \cos 3t;$$

$$2) x = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + t - 1, \quad y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - t + 1;$$

$$3) x = -2e^{-t} + 3e^{-7t}, \quad y = e^{-t} + 3e^{-7t};$$

$$4) x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}, \quad y = C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{-3t} + \cos t;$$

$$5) \begin{cases} x = (C_1 - C_2) \cos t + (C_1 + C_2) \sin t, \\ y = C_1 \sin t - C_2 \cos t + C_2 e^t, \\ z = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 e^t. \end{cases}$$

§ 24.2. МЕТОД ИНТЕГРИРУЕМЫХ КОМБИНАЦИЙ

С помощью арифметических операций из уравнений системы образуют комбинации, которые достаточно просто интегрируются.

ПРИМЕР 24.3. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 + y^2, \\ \frac{dy}{dt} = 2xy. \end{cases}$$

◁ Складывая почленно оба уравнения, получаем

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = x^2 + y^2 + 2xy, \text{ или } \frac{d(x+y)}{dt} = (x+y)^2. \quad (24.5)$$

Обозначив $x + y = u$, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dt} = u^2, \text{ откуда } \frac{du}{u^2} = dt,$$

$$\int \frac{du}{u^2} = \int dt, -\frac{1}{u} = t + C_1, u = -\frac{1}{t + C_1}, x + y = -\frac{1}{t + C_1}. \quad (24.6)$$

Вычитая почленно второе уравнение из первого, получаем

$$\frac{d(x - y)}{dt} = (x - y)^2, \quad (24.7)$$

это уравнение вида (24.5) и его решение $x - y = -\frac{1}{t + C_2}$.

Вместе с (24.6) имеем систему алгебраических уравнений для определения x и y :

$$\begin{cases} x + y = -\frac{1}{t + C_1}, \\ x - y = -\frac{1}{t + C_2}. \end{cases}$$

Складывая почленно оба уравнения, а затем вычитая второе из первого, получаем

$$2x = -\left(\frac{1}{t + C_1} + \frac{1}{t + C_2}\right), \quad 2y = \frac{1}{t + C_2} - \frac{1}{t + C_1}. \quad (24.8)$$

Заметим, что при разделении переменных в (24.6) и (24.7) потеряны решения $x + y = 0$, $x - y = 0$, т. е. $x \equiv 0, y \equiv 0$. Вместе с (24.8) получаем ответ

$$x = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t + C_1} + \frac{1}{t + C_2}\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t + C_2} - \frac{1}{t + C_1}\right) \text{ или}$$

$$x = 0, \quad y = 0. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 24.4. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{y}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

◁ Умножим первое уравнение на y , второе — на x и сложим уравнения:

$$y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt} = 0.$$

По правилу дифференцирования произведения

$$y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt} = d(xy),$$

т. е. $d(xy) = 0$, общее решение которого $xy = C_1$, или

$$y = \frac{C_1}{x}. \quad (24.9)$$

Продифференцируем (24.9) по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{C_1}{x} \right) = \frac{d}{dx} \frac{C_1}{x} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{C_1}{x^2} \cdot \frac{dx}{dt}, \text{ т. е.}$$

$\frac{dy}{dt} = -\frac{C_1}{x^2} \cdot \frac{dx}{dt}$. Подставив $\frac{dy}{dt}$ во второе уравнение системы, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$-\frac{C_1}{x^2} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{1}{x}, \quad \text{откуда} \quad \frac{dx}{x} = -\frac{1}{C_1} dt,$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{C_1} \int dt, \quad \ln |x| = -\frac{1}{C_1} t + \ln |C_2|,$$

$$\ln \left| \frac{x}{C_2} \right| = -\frac{1}{C_1} t, \quad \frac{x}{C_2} = e^{-(1/C_1)t}, \quad x = C_2 e^{-t/C_1}.$$

Найденное x подставим в (24.9):

$$y = \frac{C_1}{C_2 e^{-t/C_1}} \quad \text{или} \quad y = \frac{C_1}{C_2} e^{t/C_1}. \triangleright$$

Получим ответ $x = C_2 e^{-t/C_1}$, $y = \frac{C_1}{C_2} e^{t/C_1}$. $\triangleright$

ПРИМЕР 24.5. Решить задачу Коши для системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{y}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x-t}, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1$$

◁ Умножив первое уравнение на y , а второе — на $(x - t)$, получим

$$\begin{cases} y \left(\frac{dx}{dt} - 1 \right) = -1, \\ (x - t) \frac{dy}{dt} = 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y \left(\frac{d(x - t)}{dt} \right) = -1, \\ (x - t) \frac{dy}{dt} = 1. \end{cases}$$

Сложим уравнения почленно:

$$y \frac{d(x - t)}{dt} + (x - t) \frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}(y(x - t)) = 0, \quad \text{откуда}$$

$$y(x - t) = C_1, \quad x - t = \frac{C_1}{y}.$$

Подставив во второе уравнение системы C_1/y вместо $x - t$, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{C_1}, \quad \text{откуда} \quad \frac{dy}{y} = \frac{1}{C_1} dt,$$

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{C_1} \int dt, \ln |y| = \frac{1}{C_1} t + \ln |C_2|, \ln \left| \frac{y}{C_2} \right| = \frac{1}{C_1} t, y = C_2 e^{t/C_1}.$$

Итак,

$$\begin{cases} (x - t)y = C_1, \\ y = C_2 e^{t/C_1}, \end{cases}$$

откуда получаем общее решение системы

$$x = t + \frac{C_1}{C_2} e^{-t/C_1}, \quad y = C_2 e^{t/C_1}.$$

Полагая $t = 0$, из начальных условий $1 = C_1/C_2$, $1 = C_2$, т. е. $C_1 = C_2 = 1$, найдем решение $x = t + e^{-t}$, $y = e^t$. ▷

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить методом интегрируемых комбинаций.

$$1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sin x \cdot \cos y, \\ \frac{dy}{dt} = \cos x \cdot \sin y; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} e^t \frac{dx}{dt} = \frac{1}{y}, \\ e^t \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{y}{x-y}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x}{x-y}; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{x}{y}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{y}{x}. \end{cases}$$

Ответы:

$$1) \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = C_1 e^t, \quad \operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = C_2 e^t;$$

$$2) y = C_1 x, \quad C_1 x^2 = C_2 - 2e^{-t};$$

$$3) x^2 - y^2 = C_1, \quad x - y + t = C_2;$$

$$4) \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = C_1, \quad 1 + C_1 x = C_2 e^{C_1 t}.$$

§ 24.3. МЕТОД ЭЙЛЕРА

Схемы решений однородных систем с постоянными коэффициентами рассмотрим на примерах трех возможных случаев.

А. Корни характеристического уравнения действительны и кратности единица.

ПРИМЕР 24.6. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \frac{dy}{dt} = -x + 5y - z, \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 3z. \end{cases} \quad (24.10)$$

◁ а) Выписываем матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

и составляем *характеристическое уравнение* системы $\det(A - \lambda E) = 0$, или в развернутом виде

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, например, по первой строке, получаем характеристическое уравнение в виде

$$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0. \quad (24.11)$$

Его корни (собственные числа матрицы A) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$ имеют кратность 1. (Заметим, что один корень, например, $\lambda_1 = 2$ можно найти подбором, как делитель свободного члена -36 уравнения (24.11), а два других определить из квадратного уравнения после деления нацело многочлена в (24.11) на $(\lambda - 2)$.)

б) Для каждого собственного числа λ находим собственные векторы $\vec{\mu} = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ матрицы A из системы

$$(A - \lambda E)\vec{\mu} = \vec{0}. \quad (24.12)$$

1. $\lambda = \lambda_1 = 2$.

Выписываем систему (24.12) при $\lambda = 2$ в развернутом виде

$$\begin{pmatrix} 3-2 & -1 & 1 \\ -1 & 5-2 & -1 \\ 1 & -1 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 = 0 \\ -\mu_1 + 3\mu_2 - \mu_3 = 0 \\ \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 = 0. \end{cases} \quad (24.13)$$

В системе (24.13) первое и третье уравнения совпадают, поэтому третье уравнение можно отбросить

$$\begin{cases} \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 = 0 \\ -\mu_1 + 3\mu_2 - \mu_3 = 0. \end{cases}$$

Прибавляя к второму уравнению первое, получим равносильную систему

$$\begin{cases} \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 = 0 \\ 2\mu_2 = 0, \end{cases} \quad \text{откуда}$$

$\mu_2 = 0, \mu_1 = -\mu_3$. Взяв, например, $\mu_1 = 1$, получим $\mu_3 = -1$ и первый собственный вектор матрицы A

$$\bar{\mu} = \{1; 0; -1\}.$$

Нашли *первое частное решение* исходной системы (24.10) в виде $\bar{\mu} \cdot e^{\lambda_1 t}$ или

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}. \quad (24.14)$$

2. $\lambda = \lambda_2 = 3$. Выписываем систему (24.12) при $\lambda = 3$ в развернутом виде

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} -\mu_2 + \mu_3 = 0 \\ -\mu_1 + 2\mu_2 - \mu_3 = 0 \\ \mu_1 - \mu_2 = 0. \end{cases}$$

Из первого и третьего уравнений сразу находим $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ и, полагая $\mu_1 = 1$, получим $\mu_2 = \mu_3 = 1$ и второй собственный вектор матрицы A

$$\bar{\mu} = \{1; 1; 1\}.$$

Нашли *второе частное решение* исходной системы в виде $\bar{\mu} \cdot e^{\lambda_2 t}$ или

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}. \quad (24.15)$$

3. $\lambda = \lambda_3 = 6$. Выписываем систему (24.12) при $\lambda = 6$:

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} -3\mu_1 - \mu_2 + \mu_3 = 0 \\ -\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 = 0 \\ \mu_1 - \mu_2 - 3\mu_3 = 0. \end{cases}$$

Складывая второе и третье уравнения, получим $-2\mu_2 - 4\mu_3 = 0$, и, полагая $\mu_3 = 1$, получим $\mu_2 = -2$, а из первого уравнения находим $\mu_1 = 1$. Тем самым нашли третий собственный вектор матрицы A

$$\bar{\mu} = \{1; -2; 1\}$$

и третье частное решение системы (24.10) в виде $\bar{\mu} \cdot e^{\lambda_3 t}$ или

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t}. \quad (24.16)$$

в) Ответ записываем в виде линейной комбинации линейно независимых решений (24.14), (24.15), (24.16)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t} \\ y = C_2 e^{3t} - 2C_3 e^{6t} \\ x = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}. \end{cases} \quad \triangleright$$

В. Корни характеристического уравнения попарно различные и среди них есть комплексные.

ПРИМЕР 24.7. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases} \quad (24.17)$$

◁ а) Выписываем матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

и составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ откуда имеем}$$

$$(1-\lambda)(-1-\lambda) + 10 = 0, \quad \lambda^2 + 9 = 0.$$

Корни характеристического уравнения (собственные значения) $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i$ — комплексно-сопряженные.

б) Находим собственный вектор $\vec{\mu} = \{\mu_1, \mu_2\}$ матрицы A , отвечающий собственному значению $\lambda = 3i$, из системы

$$(A - 3iE)\vec{\mu} = \vec{0},$$

которая в развернутом виде выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1-3i & -5 \\ 2 & -1-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (1-3i)\mu_1 - 5\mu_2 = 0 \\ 2\mu_1 - (1+3i)\mu_2 = 0. \end{cases}$$

В этой системе одно из уравнений следствие другого (определитель этой системы равен 0). Полагая $\mu_1 = 5$ получим из первого уравнения $\mu_2 = 1 - 3i$ и собственный вектор $\vec{\mu} = \{5; 1 - 3i\}$. Нашли частное решение системы (24.17) в виде

$$\vec{\mu} e^{3it} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 - 3i \end{pmatrix} e^{3it}. \quad (24.18)$$

Отделим в (24.18) действительную и мнимую части, используя формулу Эйлера $e^{i\alpha t} = \cos \alpha t + i \sin \alpha t$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 - 3i \end{pmatrix} e^{3it} &= \begin{pmatrix} 5e^{3it} \\ (1 - 3i)e^{3it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cos 3t + 5i \sin 3t \\ (1 - 3i)(\cos 3t + i \sin 3t) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5 \cos 3t + 5i \sin 3t \\ \cos 3t - 3i \cos 3t + i \sin 3t - 3i^2 \sin 3t \end{pmatrix} = [i^2 = -1] = \\ &= \begin{pmatrix} 5 \cos 3t + 5i \sin 3t \\ \cos 3t + 3 \sin 3t + i(\sin 3t - 3 \cos 3t) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5 \cos 3t \\ \cos 3t + 3 \sin 3t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 5 \sin 3t \\ \sin 3t - 3 \cos 3t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

в) По свойству комплексных решений линейных уравнений действительная часть

$$\begin{pmatrix} 5 \cos 3t \\ \cos 3t + 3 \sin 3t \end{pmatrix}$$

и мнимая часть

$$\begin{pmatrix} 5 \sin 3t \\ \sin 3t - 3 \cos 3t \end{pmatrix}$$

решения являются линейно независимыми решениями системы (24.17) и, следовательно, их линейная комбинация является общим решением системы (24.17):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 5 \cos 3t \\ \cos 3t + 3 \sin 3t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 5 \sin 3t \\ \sin 3t - 3 \cos 3t \end{pmatrix} \quad \text{или}$$

$$x = 5C_1 \cos 3t + 5C_2 \sin 3t,$$

$$y = C_1(\cos 3t + 3 \sin 3t) + C_2(\sin 3t - 3 \cos 3t). \quad \triangleright$$

С. Среди корней характеристического уравнения есть кратные.

ПРИМЕР 24.8. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -2x - y. \end{cases} \quad (24.19)$$

◁ а) Матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ -2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{откуда}$$

$$(3 - \lambda)(-1 - \lambda) + 4 = 0, \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, \quad \text{или} \quad (\lambda - 1)^2 = 0.$$

Таким образом $\lambda = 1$ — двукратный корень характеристического уравнения.

б) Будем искать решение системы (24.19) в виде

$$\begin{cases} x = (\mu_1 + v_1 t)e^{1t} \\ y = (\mu_2 + v_2 t)e^{1t}. \end{cases} \quad (24.20)$$

Найдем

$$\frac{dx}{dt} = v_1 e^t + (\mu_1 + v_1 t)e^t, \quad \frac{dy}{dt} = v_2 e^t + (\mu_2 + v_2 t)e^t$$

и подставим в систему (24.19):

$$\begin{cases} (\mu_1 + v_1 + v_1 t)e^t = [3(\mu_1 + v_1 t) + 2(\mu_2 + v_2 t)]e^t \\ (\mu_2 + v_2 + v_2 t)e^t = (-2(\mu_1 + v_1 t) - \mu_2 + v_2 t)e^t. \end{cases} \quad (24.21)$$

Сократив на $e^t \neq 0$, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t в первом и во втором уравнениях:

$$\begin{aligned} t \quad & \left\{ \begin{array}{l} v_1 = 3v_1 + 2v_2 \\ \mu_1 + v_1 = 3\mu_1 + 2\mu_2 \end{array} \right\} \\ t^0 \quad & \left\{ \begin{array}{l} v_2 = -2v_1 - v_2 \\ \mu_2 + v_2 = -2\mu_1 - \mu_2 \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

откуда получаем одну равносильную систему с четырьмя неизвестными

$$\begin{cases} v_1 = -v_2 \\ v_1 = 2\mu_1 + 2\mu_2. \end{cases}$$

1. Полагая $v_1 = v_2 = 0$, получим $\mu_1 = -\mu_2$ и, взяв, например, $\mu_1 = 1$, получим $\mu_2 = -1$. Подставив $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -1$, $v_1 = v_2 = 0$ в (24.21), получим *первое частное решение* системы (24.19)

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = -e^t. \end{cases}$$

2. Полагая $v_1 = 1$, получим $v_2 = -1$ и $2\mu_1 + 2\mu_2 = 1$. Взяв в последнем уравнении, например, $\mu_1 = 0$, получим $\mu_2 = \frac{1}{2}$.

Подставив $\mu_1 = 0, \mu_2 = \frac{1}{2}, v_1 = 1, v_2 = -1$ в (24.21), получим второе частное решение системы (24.19)

$$\begin{cases} x = te^t \\ y = \left(\frac{1}{2} - t\right)e^t. \end{cases}$$

в) Записываем ответ в виде линейной комбинации найденных частных решений

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 t e^t \\ y = -C_1 e^t + C_2 \left(\frac{1}{2} - t\right) e^t. \end{cases} \quad \triangleright$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить системы уравнений.

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 8y - x, \\ \frac{dy}{dt} = x + y; \end{cases} & 2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 5y, \\ \frac{dy}{dt} = x, x(0) = 0, y(0) = 1; \end{cases} & 3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 4y - x. \end{cases} \end{array}$$

Ответы:

$$1) x = 2C_1 e^{3t} - 4C_2 e^{-3t}, \quad y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t};$$

$$2) x = -5e^{2t} \sin t, \quad y = e^{2t} (\cos t - 2 \sin t);$$

$$3) x = (C_1 + C_2) e^{3t}, \quad y = (C_1 + C_2 + C_2 t) e^{3t}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА «ИНТЕГРИРОВАНИЕ»

Вариант 1

1. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}.$$

2. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int (4 - 3x)e^{-3x} dx.$$

3. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 9}{(x + 1)(x + 2)^3} dx.$$

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$y = (x - 2)^3, \quad y = 4x - 8.$$

5. Вычислите длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{1 + \ln x}{x} dx.$$

2. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \operatorname{arctg} \sqrt{4x - 1} dx.$$

3. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 8}{x(x+2)^3} dx.$$

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$y = x\sqrt{9 - x^2}, \quad y = 0 \quad (0 \leq x \leq 3).$$

5. Вычислите длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

2. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int (3x + 4)e^{3x} dx.$$

3. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$y = 4 - x^2, \quad y = x^2 - 2x.$$

5. Вычислите длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \\ 0 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx.$$

2. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int (4x - 2) \cos 2x dx.$$

3. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 14x + 10}{(x+1)(x+2)^3} dx.$$

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$y = \sin x \cos^2 x, \quad y = 0 \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}).$$

5. Вычислите длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Вариант 5

1. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} dx.$$

2. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int (4 - 16x) \sin 4x dx.$$

3. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 10}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$y = \sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1.$$

5. Вычислите длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 10 \cos^3 t, \\ y = 10 \sin^3 t, \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Вариант 6

1. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

2. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int (5x - 2)e^{3x} dx.$$

3. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 7}{(x + 1)(x + 2)^3} dx.$$

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$y = x^2 \sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0 \quad (0 \leq x \leq 2).$$

5. Вычислите длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Вариант 7

1. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \operatorname{tg} x \ln \cos x dx.$$

2. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int (1 - 6x)e^{2x} dx.$$

3. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 1}{(x - 1)(x + 1)^3} dx.$$

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$y = \cos x \sin^2 x, \quad y = 0 \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}).$$

5. Вычислите длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \\ \pi \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

Вариант 8

1. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx.$$

2. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \ln(x^2 + 4) dx.$$

3. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 10x + 10}{(x-1)(x+2)^3} dx.$$

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$y = \sqrt{e^x - 1}, \quad y = 0, \quad x = \ln 2.$$

5. Вычислите длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 2t, \\ y = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin 2t, \\ \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$$

Вариант 9

1. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

2. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \ln(4x^2 + 1) dx.$$

3. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 2}{x(x+1)^3} dx.$$

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$y = \frac{1}{x\sqrt{1 + \ln x}}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = e^3.$$

5. Вычислите длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 3(\cos t + t \sin t), \\ y = 3(\sin t - t \cos t), \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Вариант 10

1. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx.$$

2. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int (2 - 4x) \sin 2x dx.$$

3. Найдите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 8}{x(x - 2)^3} dx.$$

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$y = \arccos x, \quad y = 0, \quad x = 0.$$

5. Вычислите длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
«ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ»

Вариант 1

1. Найдите полный дифференциал функции:

$$z = x \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

2. Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к данной поверхности в указанной точке A :

$$4x^3 + y^3 - z^2 + 3xyz = 0, \quad A(1, 0, 2).$$

3. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = 2y^3 + x^2 + 6xy + 18y^2 + 18x + 54y + 54.$$

Вариант 2

1. Найдите полный дифференциал функции:

$$z = \sqrt[3]{\frac{x^3 + yx^3}{y}}.$$

2. Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к данной поверхности в указанной точке A :

$$z = x^4 - 4y^4 + 3yx^2 - x + 1, \quad A(2, 1, 23).$$

3. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = -6y^3 + 54x^2 - 6xy - y^2 - 150x - 14y.$$

Вариант 3

1. Найдите полный дифференциал функции:

$$z = ye^{x/y}.$$

2. Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к данной поверхности в указанной точке A :

$$z = x^2 \ln(x + 4y^2) + x^3 y^2 - y + 3, \quad A(2, 0, 3 + \ln 16).$$

3. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = 3y^3 - 2x^2 - 12xy + 27y^2 - 36x + 81y - 15.$$

Вариант 4

1. Найдите полный дифференциал функции:

$$z = x \ln \cos(x\sqrt{y}).$$

2. Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к данной поверхности в указанной точке A :

$$z = \sin(x^2 + y + z) - x^2 yz - 1, \quad A(0, 1, -1).$$

3. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = -2y^3 - x^2 - 6xy - 18y^2 - 12x - 36y + 9.$$

Вариант 5

1. Найдите полный дифференциал функции:

$$z = \frac{x \operatorname{arctg} y}{1 + x^2}.$$

2. Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к данной поверхности в указанной точке A :

$$x^y + y^z - 3xyz = 2, \quad A(1, 2, 0).$$

3. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = -3x^3 + 81x^2 - 12xy - 2y^2 - 93x + 32y + 4.$$

Вариант 6

1. Найдите полный дифференциал функции:

$$z = 2^x \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{y}} \right)$$

2. Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к данной поверхности в указанной точке A :

$$3z^2 = 4e^{x+y} - 3xy^2z^3 + 2, \quad A(1, -1, 1).$$

3. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = 6y^3 + 18x^2 + 6xy + y^2 - 6x + 10y + 13.$$

Вариант 7

1. Найдите полный дифференциал функции:

$$z = y^2 \cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

2. Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к данной поверхности в указанной точке A :

$$z = 4 \operatorname{tg}^2 xy - 3y^3 + x^3 - 1, \quad A(2, 0, 7).$$

3. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = -y^3 - 3x^2 - 6xy - 3y^2 + 3y + 2.$$

Вариант 8

1. Найдите полный дифференциал функции:

$$z = y \operatorname{arccos}(x\sqrt{y}).$$

2. Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к данной поверхности в указанной точке A :

$$x^2yz^3 + 4y^2 = e^z + 15, \quad A(1, 2, 0).$$

3. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = -2x^3 + 6x^2 + 6xy + y^2 + 12x + 24.$$

Вариант 9

1. Найдите полный дифференциал функции:

$$z = \sqrt{\frac{xy^3 + x}{y^2}}.$$

2. Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к данной поверхности в указанной точке A :

$$4z^2 = x^2 y^3 + \cos(x + y^2) + 14, \quad A(-1, 1, 2).$$

3. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = -2x^3 + 24x^2 + 6xy + 3y^2 - 90x - 18y + 1.$$

Вариант 10

1. Найдите полный дифференциал функции:

$$z = \ln(\sqrt{x} \cdot 2^{\cos(x^2 y)}).$$

2. Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к данной поверхности в указанной точке A :

$$yz^3 - \frac{z}{x^2 - y} = 2z^2, \quad A(2, 3, 1).$$

3. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = -2x^3 + 6x^2 - 6xy - y^2 + 8y - 1.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Вариант 1

1. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения: $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{2} + 2$.

2. Найдите решение задачи Коши:

$$y' - \frac{y}{x} = x^2, \quad y(1) = 0.$$

3. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

$$y'''x \ln x = y''.$$

4. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' - 2y' = 2 \operatorname{ch} 2x.$$

Вариант 2

1. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения:

$$xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}.$$

2. Найдите решение задачи Коши:

$$y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x, \quad y(\pi/2) = 0.$$

3. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

$$xy'' + y' = 1.$$

4. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' + y = 2 \sin x - 6 \cos x + 2e^x.$$

Вариант 3

1. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения: $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

2. Найдите решение задачи Коши:

$$y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad y(0) = 0.$$

3. Найдите общее решение дифференциального уравнения: $2xy'' = y'$.

4. Найдите общее решение дифференциального уравнения: $y''' - y' = 2e^x + \cos x$.

Вариант 4

1. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения:

$$xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

2. Найдите решение задачи Коши:

$$y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x, \quad y(\pi/4) = 1.$$

3. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

$$xy''' + y'' = x + 1.$$

4. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' - 3y' = 2 \operatorname{ch} 3x.$$

Вариант 5

1. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения: $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$.

2. Найдите решение задачи Коши:

$$y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = 3/2.$$

3. Найдите общее решение дифференциального уравнения: $\operatorname{tg} x \cdot y'' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0$.

4. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' + 4y = -8 \sin 2x + 32 \cos 2x + 4e^{2x}.$$

Вариант 6

1. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения:

$$xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}.$$

2. Найдите решение задачи Коши:

$$y' - \frac{1}{x+1} \cdot y = e^x(x+1), \quad y(0) = 1.$$

3. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

$$x^2 y'' + xy' = 1.$$

4. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

$$y''' - y' = 10 \sin x + 6 \cos x + 4e^x.$$

Вариант 7

1. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения:

$$y' = \frac{x + 2y}{2x - y}.$$

2. Найдите решение задачи Коши:

$$y' - \frac{y}{x} = x \sin x, \quad y(\pi/2) = 1.$$

3. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

$$y''' \operatorname{ctg} 2x + 2y'' = 0.$$

4. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' - 4y' = 16 \operatorname{ch} 4x.$$

Вариант 8

1. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения:

$$xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

2. Найдите решение задачи Коши:

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = 1/\pi.$$

3. Найдите общее решение дифференциального уравнения: $x^3 y''' + x^2 y'' = 1$.

4. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' + 9y = -18 \sin 3x - 18e^{3x}.$$

Вариант 9

1. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения:

$$3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4.$$

2. Найдите решение задачи Коши:

$$y' + \frac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1.$$

3. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

$$\operatorname{tg} x \cdot y'' = 2y'.$$

4. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' - 4y' = 24e^{2x} - 4 \cos 2x + 8 \sin 2x.$$

Вариант 10

1. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения:

$$xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^3 + 3x^2}.$$

2. Найдите решение задачи Коши:

$$y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = 2/3.$$

3. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' \operatorname{cth} 2x = 2y'.$$

4. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' - 5y' = 50 \operatorname{ch} 5x.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

1. Понятие первообразной. Неопределенный интеграл, его свойства.
2. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
3. Определенный интеграл, его свойства.
4. Теорема о среднем значении для определенного интеграла.
5. Производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу. Формула Ньютона–Лейбница.
6. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
7. Интегрирование рациональных функций, интегрирование простейших рациональных дробей.
8. Интегрирование тригонометрических выражений.
9. Интегрирование иррациональных выражений.
10. Применение определенного интеграла к вычислению площадей.
11. Применение определенного интеграла к вычислению длины дуги кривой.
12. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Теоремы сравнения. Признаки сходимости.
13. Несобственные интегралы от неограниченных функций.
14. Функции нескольких переменных. Область определения. Линии уровня и поверхности уровня.
15. Частные производные и полный дифференциал функций нескольких переменных.
16. Производные сложных функций нескольких переменных.
17. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
18. Частные производные высших порядков.
19. Экстремум функций двух переменных.
20. Условный экстремум.
21. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши (формулировка). Общее и частное решение, общий и частный интегралы.
22. Дифференциальные уравнения 1-го порядка: с разделяющимися переменными, однородные относительно переменных и приводящиеся к ним, линейные, уравнение Бернулли.
23. Дифференциальные уравнения высших порядков. Теорема существования и единственности решения задачи Коши (формулировка). Общее и частное решения, общий и частный интегралы.

24. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

25. Линейные однородные дифференциальные уравнения, свойства их решений.

26. Линейно зависимые и линейно независимые системы функций. Определитель Вронского. Необходимое условие линейной зависимости системы функций.

27. Условие линейной независимости решений линейного однородного дифференциального уравнения.

28. Линейные однородные дифференциальные уравнения. Фундаментальная система решений. Структура общего решения.

29. Метод Эйлера решения линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

30. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения. Метод вариации произвольных постоянных.

31. Метод подбора частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Принцип суперпозиции.

32. Системы дифференциальных уравнений, основные понятия. Метод исключения и метод интегрируемых комбинаций.

33. Системы линейных дифференциальных уравнений. Свойства решений. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами, метод Эйлера.

34. Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений. Формула Коши решения начальной задачи.

35. Устойчивость линейных систем дифференциальных уравнений.

Образцы экзаменационных билетов

Билет № 1

1. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

2. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

3. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

4. Найдите интеграл $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$.

5. Найдите общее решение уравнения $y'' + 9y = 2x^2$.

6. Найдите дифференциал функции $z = x^y$.

Билет № 2

1. Применение определенного интеграла к вычислению длины дуги кривой.

2. Условие линейной независимости решений линейного однородного дифференциального уравнения.

3. Экстремум функций двух переменных.

4. Найдите интеграл $\int_0^1 (x-1) \cos 2x \, dx$.

5. Найдите общее решение уравнения $y'' + 2y' + y = 1$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$.

6. Найдите дифференциал функции $z = x^2 + xy + y^2 - 3x = 6y$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. — М.: Наука, 1985.
2. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Наука, 1984.
3. *Краснов М. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Высш. шк., 1983.
4. *Краснов М. Л., Киселев Л. И., Макаренко Г. И.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Высшая школа, 1978.
5. *Кузнецов Л. А.* Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). — М.: Высшая школа, 1994.
6. *Петрушко И. М., Кузнецов Л. А., Прохоренко В. И., Сафонов В. Ф.* Курс высшей математики. Интегральное исчисление. Функции нескольких переменных. Дифференциальные уравнения: Учебное пособие для студентов технических вузов. — М.: Издательство МЭИ, 2002.
7. Сборник задач по математике для вузов. Ч. I. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учебное пособие для вузов / Под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича — М.: Наука, 1993.
8. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980.
9. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления. — М.: Наука, 1969.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
-----------------------	---

Курс лекций

Лекция 1. Неопределенный интеграл	5
§ 1.1. Свойства неопределенного интеграла	5
§ 1.2. Достаточные условия интегрируемости функции	7
§ 1.3. Свойства неопределенного интеграла	7
§ 1.4. Таблица неопределенных интегралов	9
Контрольные вопросы	12
Лекция 2. Основные методы интегрирования	13
§ 2.1. Замена переменной в неопределенном интеграле	13
§ 2.2. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле	15
Контрольные вопросы	21
Лекция 3. Комплексные числа	23
§ 3.1. Многочлены	26
§ 3.2. Многочлены с действительными коэффициентами	28
§ 3.3. Условия тождественности двух многочленов	31
Контрольные вопросы	32
Лекция 4. Рациональные функции	33
§ 4.1. Разложение рациональной дроби на простейшие	34
§ 4.2. Интегрирование рациональных функций	36
Контрольные вопросы	41
Лекция 5. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции	42
§ 5.1. Интегрирование выражений $R(\sin x, \cos x)$	43
§ 5.2. Частный случай интегрирования выражений вида $R(\sin x, \cos x)$	44
§ 5.3. Интегрирование выражений вида $R(\sin^m x, \cos^n x)$, где m, n — целые числа	45
§ 5.4. Интегрирование выражений вида: а) $\int \sin(\alpha x), \sin(\beta x) dx$; б) $\int \sin(\alpha x), \cos(\beta x) dx$; в) $\int \cos(\alpha x), \cos(\beta x) dx$	46
Контрольные вопросы	46
Лекция 6. Интегрирование иррациональных выражений	48
§ 6.1. Интегрирование дробно-линейных ирирациональностей	48

§ 6.2. Интегрирование биномиальных дифференциалов	50
§ 6.3. Интегрирование квадратных иррациональностей	52
<i>Контрольные вопросы</i>	54
Лекция 7. Определенный интеграл и его свойства	56
§ 7.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла	56
§ 7.2. Понятие определенного интеграла	58
§ 7.3. Необходимое условие интегрируемости функции	59
§ 7.4. Основные классы интегрируемых функций. Геометрический смысл определенного интеграла	60
§ 7.5. Свойства определенного интеграла	61
§ 7.6. Геометрический смысл теоремы о среднем значении	67
<i>Контрольные вопросы</i>	67
Лекция 8. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона—Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям	69
§ 8.1. Производная интеграла по верхнему пределу	69
§ 8.2. Формула Ньютона-Лейбница	72
§ 8.3. Замена переменной под знаком определенного интеграла	74
§ 8.4. Интегрирование по частям в определенном интеграле	76
<i>Контрольные вопросы</i>	77
Лекция 9. Приложения определенного интеграла к вычислению площадей	80
§ 9.1. Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольных декартовых координатах	80
§ 9.2. Вычисление площадей плоских фигур в полярных координатах	83
<i>Контрольные вопросы</i>	89
Лекция 10. Приложения определенного интеграла к вычислению длин дуг кривых и объемов тел	90
§ 10.1. Вычисление длины дуги кривой	90
§ 10.2. Вычисление объемов	97
<i>Контрольные вопросы</i>	100
Лекция 11. Несобственные интегралы	102
§ 11.1. Несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования	102
§ 11.2. Геометрический смысл несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования	105
§ 11.3. Свойства и вычисление несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования	106
§ 11.4. Несобственные интегралы с бесконечными пределами от неотрицательных функций. Теоремы сравнения	108
§ 11.5. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования	112
<i>Контрольные вопросы</i>	115

Лекция 12. Несобственные интегралы от неограниченных функций	118
§ 12.1. Геометрический смысл несобственных интегралов от неограниченных функций	121
§ 12.2. Свойства несобственных интегралов от неограниченных функций	122
<i>Контрольные вопросы</i>	126
Лекция 13. Функции нескольких переменных	127
§ 13.1. Понятие функции нескольких переменных	127
§ 13.2. Основные виды множеств в пространстве R^n	129
§ 13.3. Предел функции нескольких переменных	132
§ 13.4. Непрерывность функции нескольких переменных	136
<i>Контрольные вопросы</i>	137
Лекция 14. Понятие производной по направлению и частных производных функции нескольких переменных	139
§ 14.1. Производные по направлению и частные производные	139
§ 14.2. Дифференцируемость функции нескольких переменных и полный дифференциал	142
<i>Контрольные вопросы</i>	149
Лекция 15. Касательная плоскость и нормаль к поверхности	151
§ 15.1. Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности	151
§ 15.2. Геометрический смысл полного дифференциала и производных функции двух переменных	154
<i>Контрольные вопросы</i>	156
Лекция 16. Производные сложных функций	158
§ 16.1. Инвариантность формы полного дифференциала	163
§ 16.2. Правила дифференцирования функций нескольких переменных	164
§ 16.3. Неявные функции	165
<i>Контрольные вопросы</i>	173
Лекция 17. Частные производные и дифференциалы высших порядков	175
§ 17.1. Частные производные высших порядков	175
§ 17.2. Дифференциалы высших порядков	179
§ 17.3. Формула Тейлора	183
<i>Контрольные вопросы</i>	185
Лекция 18. Максимумы и минимумы функции нескольких переменных	186
§ 18.1. Необходимые условия экстремума	187
§ 18.2. Достаточные условия экстремума	190
<i>Контрольные вопросы</i>	194
Лекция 19. Условный экстремум	195
§ 19.1. Метод Лагранжа отыскания условных экстремумов	198

§ 19.2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции	203
Контрольные вопросы	205
Лекция 20. Дифференциальные уравнения (общие понятия). Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Существование и единственность решения начальной задачи. Метод изоклин	206
§ 20.1. Общее и частное решение, общий и частный интеграл дифференциального уравнения первого порядка. Теорема Коши. Особые решения	208
§ 20.2. Метод изоклин	217
Контрольные вопросы	220
Лекция 21. Приемы интегрирования некоторых дифференциальных уравнений первого порядка	222
§ 21.1. Уравнения, не содержащие искомой функции	224
§ 21.2. Уравнения, не содержащие независимой переменной	225
§ 21.3. Уравнения с разделенными переменными	227
§ 21.4. Уравнения с разделяющимися переменными	228
§ 21.5. Однородные уравнения	232
§ 21.6. Линейные уравнения	236
§ 21.7. Уравнение Бернулли	240
§ 21.8. Уравнения в полных дифференциалах	241
§ 21.9. Уравнения, не разрешенные относительно производной	246
Контрольные вопросы	257
Лекция 22. Дифференциальные уравнения высших порядков. Разрешимость начальной задачи. Уравнения, допускающие понижение порядка, и их интегрирование	259
§ 22.1. Понятия частного и общего решений. Начальная задача и ее разрешимость	259
§ 22.2. Уравнения, допускающие понижение порядка	264
§ 22.3. Уравнения, не содержащие искомой функции и ее начальных производных до определенного порядка	266
§ 22.4. Уравнения, не содержащие независимой переменной	267
§ 22.5. Уравнения, однородные относительно неизвестной функции и всех ее производных	269
Контрольные вопросы	274
Лекция 23. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Фундаментальная система решений и структура общего решения однородного уравнения. Неоднородное уравнение, структура его общего решения и вычисление частного решения методом Лагранжа	275
§ 23.1. Линейная зависимость и линейная независимость системы функций. Вронскиан. Исследование линейной независимости с помощью вронскиана	277
§ 23.2. Структура общего решения однородного и неоднородного дифференциальных уравнений	282
§ 23.3. Метод вариации произвольных постоянных Лагранжа	289

§ 23.4. Комплексные решения дифференциальных уравнений. Линейная независимость комплексных решений	292
§ 23.5. Метод Эйлера построения общего решения однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в случае простых корней характеристического уравнения	298
§ 23.6. Построение общего решения однородного дифференциального уравнения в случае кратных корней характеристического уравнения	301
§ 23.7. Построение общего решения неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами. Метод подбора частного решения неоднородного уравнения	305
Контрольные вопросы	316
Лекция 24. Системы дифференциальных уравнений	318
§ 24.1. Понятия общего и частного решений. Задача Коши и ее разрешимость	319
§ 24.2. Методы интегрирования систем дифференциальных уравнений	325
§ 24.3. Системы линейных дифференциальных уравнений	329
§ 24.4. Глобальная теорема разрешимости начальной задачи для линейной системы дифференциальных уравнений	331
§ 24.5. Линейная зависимость и линейная независимость системы произвольных вектор-функций и решений однородной системы уравнений	332
§ 24.6. Фундаментальная матрица решений и структура общего решения однородной системы	336
§ 24.7. Структура общего решения неоднородной системы дифференциальных уравнений	338
§ 24.8. Построение фундаментальной матрицы решений дифференциальной системы с постоянной матрицей. Метод Эйлера	342
§ 24.9. Устойчивость (по Ляпунову) решений дифференциальных уравнений	348
§ 24.10. Устойчивость по первому приближению точек покоя нелинейных систем	355
Контрольные вопросы	358

Практические занятия

Занятие 1. Неопределенный интеграл. Простейшие приемы интегрирования	361
§ 1.1. Основные свойства неопределенного интеграла	361
§ 1.2. Основная таблица неопределенных интегралов	362
§ 1.3. Простейшие приемы интегрирования	363
Занятие 2. Метод подведения под знак дифференциала	368
§ 2.1. Применение метода подведения под знак дифференциала	369
§ 2.2. Интегралы от некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен	374
Занятие 3. Метод интегрирования подстановкой. Интегрирование по частям	376
§ 3.1. Метод интегрирования подстановкой	376

§ 3.2. Интегрирование по частям	380
Занятие 4. Определенный интеграл	384
§ 4.1. Формула Ньютона–Лейбница	385
§ 4.2. Вычисление определенного интеграла по частям	388
§ 4.3. Замена переменной в определенном интеграле	390
Занятие 5. Интегрирование рациональных функций	392
§ 5.1. Разложение рациональной дроби на простейшие	392
§ 5.2. Интегрирование рациональных функций	393
Занятие 6. Интегрирование тригонометрических выражений и иррациональных функций	404
§ 6.1. Интегрирование тригонометрических выражений	404
§ 6.2. Интегрирование иррациональных функций	409
Занятие 7. Вычисление площадей плоских фигур	416
§ 7.1. Вычисление площадей в прямоугольных координатах	416
§ 7.2. Площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрическими уравнениями	421
§ 7.3. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах	424
Занятие 8. Вычисление длин дуг кривых и объемов тел	426
§ 8.1. Длина дуги кривой	426
§ 8.2. Вычисление объемов тел	431
Занятие 9. Функции нескольких переменных	434
§ 9.1. Функции нескольких переменных. Область определения	434
§ 9.2. Предел функции	440
§ 9.3. Непрерывность функции нескольких переменных	442
Занятие 10. Частные производные. Полный дифференциал	445
§ 10.1. Частные производные	445
§ 10.2. Дифференцируемость и полный дифференциал функции	450
§ 10.3. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях	452
Занятие 11. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производные сложных и неявных функций	454
§ 11.1. Касательная плоскость и нормаль к поверхности	454
§ 11.2. Производные сложных функций	458
§ 11.3. Производные неявных функций	462
Занятие 12. Частные производные высших порядков. Формула Тейлора	466
§ 12.1. Частные производные высших порядков	466
§ 12.2. Формула Тейлора	470
Занятие 13. Экстремумы функции	476
§ 13.1. Понятие об экстремумах функции	476
§ 13.2. Необходимые и достаточные условия экстремума	476
§ 13.3. Исследование функций на экстремум	477
Занятие 14. Условные экстремумы	483
§ 14.1. Условные экстремумы, сводящиеся к обычным экстремумам функции одного переменного	483
§ 14.2. Условные экстремумы, сводящиеся к обычным экстремумам функции двух переменных	486

Занятие 15. Метод Лагранжа для отыскания условных экстремумов	491
§ 15.1. Метод Лагранжа	491
§ 15.2. Нахождение условных экстремумов с помощью метода Лагранжа	491
Занятие 16. Наибольшее и наименьшее значения функции	496
§ 16.1. Схема нахождения наибольшего и наименьшего значений функции	497
§ 16.2. Задачи на отыскание наибольшего и наименьшего значений функции	497
Занятие 17. Дифференциальные уравнения первого порядка	501
§ 17.1. Основные понятия	501
§ 17.2. Задача Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$	503
§ 17.3. Задачи на составление дифференциальных уравнений	504
Занятие 18. Уравнения с разделяющимися переменными.	
Однородные уравнения	506
§ 18.1. Уравнения с разделяющимися переменными	506
§ 18.2. Однородные уравнения	512
Занятие 19. Линейные уравнения первого порядка.	
Уравнения Бернулли	517
§ 19.1. Метод вариации произвольных постоянных	517
§ 19.2. Метод Бернулли	520
§ 19.3. Уравнение Бернулли	523
Занятие 20. Уравнения в полных дифференциалах	526
§ 20.1. Уравнения в полных дифференциалах	526
§ 20.2. Интегрирующий множитель	530
Занятие 21. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка	535
§ 21.1. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$	535
§ 21.2. Уравнения, не содержащие явно искомую функцию и ее производные до некоторого порядка включительно	537
§ 21.3. Уравнения, не содержащие явно независимую переменную	540
Занятие 22. Линейные дифференциальные уравнения	545
§ 22.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения	545
§ 22.2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Метод Лагранжа	548
Занятие 23. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	553
§ 23.1. Метод подбора частного решения	553
§ 23.2. Принцип суперпозиции	560
Занятие 24. Системы дифференциальных уравнений	563
§ 24.1. Метод исключения	563
§ 24.2. Метод интегрируемых комбинаций	566
§ 24.3. Метод Эйлера	570

<i>Контрольная работа «Интегрирование»</i>	578
<i>Контрольная работа «Функции нескольких переменных»</i>	584
<i>Контрольная работа «Дифференциальные уравнения»</i>	588
<i>Экзаменационная программа</i>	593
<i>Литература</i>	595

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Интегральное исчисление.

Функции нескольких переменных.

Дифференциальные уравнения

Лекции и практикум

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Издание второе,
стереотипное

Генеральный директор *А. Л. Кноп*
Директор издательства *О. В. Смирнова*
Художественный редактор *С. Л. Шапиро*
Верстальщик *С. В. Арсфьев*
Выпускающие *Н. К. Белякова, О. В. Шилова*

ЛР № 065466 от 21.10.97

Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.004173.04.07
от 26.04.2007 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»

lan@lplib.spb.ru

www.lanbook.com

192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.

Тел./факс: (812)567-29-35, 567-05-97, 567-92-72

Подписано в печать 10.12.08.

Бумага офсетная. Гарнитура Литературная. Формат 84×108 1/16.

Печать офсетная. Усл. п. л. 31,92. Тираж 2000 экз.

Заказ № 3306.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
представленных диапозитивов

в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера»,
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, 32.

Тел./факс (8182) 64-14-54, тел.: (8182) 65-37-65, 65-38-78

www.ippps.ru, e-mail: zakaz@ippps.ru



**КНИГИ ИЗДАТЕЛЬСТВА «ЛАНЬ»
МОЖНО ПРИОБРЕСТИ
В ОПТОВЫХ КНИГОТОРГОВЫХ
ОРГАНИЗАЦИЯХ**

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

ООО «Лань-Трейд»
192029, Санкт-Петербург, ул. Крупской, 13,
тел./факс: (812)567-54-93,
тел.: (812)567-85-78, (812)567-14-45,
567-85-82, 567-85-91;
trade@lanpbl.spb.ru
www.lanpbl.spb.ru/price.htm

МОСКВА

ООО «Лань-Пресс»
109263, Москва, 7-я ул. Текстильщиков, 6/19,
тел.: (495)178-65-85; 740-43-16;
lanpress@ultimanet.ru; lanpress@yandex.ru

КРАСНОДАР

ООО «Лань-Юг»
350072, Краснодар, ул. Жлобы, 1/1,
тел.: (861)274-10-35;
lankrd98@mail.ru

Издательство
«ЛАНЬ»  ЛАНЬ®

ПРЕДЛАГАЕТ
УЧЕБНУЮ ЛИТЕРАТУРУ
для ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ
ПО НАПРАВЛЕНИЯМ

МАТЕМАТИКА
ФИЗИКА

Приглашаем к сотрудничеству
авторов и издательства

*Рукописи не рецензируются
и не возвращаются*

НАШИ АДРЕСА И ТЕЛЕФОНЫ
Издательский отдел
РФ, 192029, Санкт-Петербург,
Общественный пер., 5.
(812) 567-29-35, 567-05-97, 567-92-72

ЭЛЕКТРОННЫЕ АДРЕСА
www.lanbook.com;
www.lanpbl.spb.ru/price.htm;
E-mail: lan@pbl.spb.ru
(издательский отдел);
print@pbl.spb.ru
(производственный отдел)



КНИГА — ПОЧТОЙ

УВАЖАЕМЫЕ ЧИТАТЕЛИ!
ВЫ МОЖЕТЕ ПРИОБРЕСТИ КНИГИ
НАШЕГО ИЗДАТЕЛЬСТВА
ОТПРАВИВ ПОЧТОВУЮ КАРТОЧКУ С ЗАКАЗОМ
ПО АДРЕСУ:
192029, САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, ул. КРУПСКОЙ, 13
ОТДЕЛ «КНИГА — ПОЧТОЙ»

Образец заполнения почтовой карточки:

ПОЧТОВАЯ КАРТОЧКА

Куда: 192029, Санкт-Петербург,
ул. Крупской, 13
отд. «Книга — почтой»

Адрес отправителя:
198216, Санкт-Петербург,
Ленинский проспект, д. 5, кв. 40
Ельскому Юрию Михайловичу

ВЫ МОЖЕТЕ ОФОРМИТЬ ЗАКАЗ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРОННОЙ ПОЧТЫ
E-MAIL: POST@LPBL.SPB.RU

СПРАВКИ ПО ТЕЛЕФОНАМ:
(812)567-54-93; (812)567-85-78; (812)567-14-45



ПРЕДСТАВЛЯЕМ
НОВЫЕ УЧЕБНИКИ И УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ

**КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Содержание пособия охватывает следующие разделы программы: введение в математический анализ и дифференциальное исчисление функции одной переменной, которые изучаются в первом семестре. Учебное пособие содержит 17 практических занятий.

В каждом занятии приводятся необходимые теоретические сведения. Типовые задачи даются с подробными решениями. Имеется большое количество примеров для самостоятельной работы.

Учебное пособие может быть использовано как при очной, так и при дистанционной форме обучения.

Предназначено для студентов вузов.