

С.СИРОЖИДИНОВ, Ш.МАКСУДОВ
М.САЛОХИДДИНОВ

**КОМПЛЕКС
ЎЗГАРУВЧИНИНГ
ФУНКЦИЯЛАРИ
НАЗАРИЯСИ**



КОМПЛЕКС ЎЗГАРУВЧИНИНГ ФУНКЦИЯЛАРИ НАЗАРИЯСИ

ТУЗАТИЛГАН 2-НАШРИ

*ЎзССР Олий ва махсус ўрта таълим министрлиги
университетларнинг ва пединститутларнинг
механика-математика, физика-математика
факультетлари учун ўқув қўлланма сифатида
руҳсат этган*

ЎҚИТУВЧИ НАШРИЁТИ

ТОШКЕНТ — 1979

БИРИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Бу китоб университетлар механика-математика ва педагогика институтлари физика-математика факультетларининг студентлари учун мулжаллаб ёзилган. Уни ёзишда авторлар машҳур совет ва чет эл олимлари томонидан яратилган қўлланмалар ва дарсликлардан ҳамда ўзларининг узоқ йиллик педагогик тажрибаларидан кенг фойдаландилар. Қўлланма ўзбек тилида биринчи марта ёзилганлиги туфайли, авторлар кўпчилик темаларни соддароқ тил билан тўлароқ ёзишга ҳаракат қилдилар.

Дарсликда комплекс ўзгарувчининг функциялари назариясининг асослари баён қилинганлиги учун ундан техника олий ўқув юртларининг студентлари ҳам фойдаланишлари мумкин. Комплекс ўзгарувчининг функциялари назариясини ва унинг физика, механика ва бошқа табиий фанлардаги турли-туман татбиқларини мукамалроқ (чуқурроқ ва кенгроқ) ўрганишни истаган ўқувчиларга атоқли совет математиклари А. И. Маркушевичнинг „Теория аналитических функций“, М. А. Лаврентьев ва Б. В. Шабатнинг „Методы теории функций комплексного переменного“ китобларини тавсия қиламиз.

Қўл ёзмани кўриб чиқиб унинг айрим камчиликларини тузатишга ёрдамлашганлари учун доцентлардан Н. Х. Тешабоева ва М. К. Холиқов, шунингдек дарсликнинг қўл ёзмасини узил-кесил нашрга тайёрлаган „Ўқитувчи“ нашриётининг бўлим мудир И. Аҳмаджоновга авторлар ўзларининг миннатдорчиликларини билдирадilar. Бу дарслик мазкур фан бўйича ўзбек тилида биринчи дарслик бўлгани учун, шубҳасиз, уни камчиликлардан холи деб бўлмайди. Бу китоб тўғрисидаги ҳурматли китобхонларнинг танқидий фикр ва мулоҳазаларини авторлар чуқур ташаккур билан қабул қиладилар.

Январь, 1968 й.

Авторлар

ИККИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Ҳозирги пайтда университет ва педагогика институтларининг ўқув планларида комплекс ўзгарувчининг функциялари назариясига ажратилган соатларнинг оширилиши ва мазкур китобнинг биринчи наشري тезда тарқалиб кетганилиги сабабли уни қайта нашр этиш зарурати туғилди.

Китобнинг ушбу наشري унинг олдинги наширдан унча фарқ қилмайди. Олдинги нашрда учраган камчиликлар тузатилиб, биринчи бобга баъзи ўзгаришлар киритилди. Китобдан олий техника ўқув юртлари студентлари ҳам фойдаланишлари мумкин.

Китоб ҳақида ўзларининг фикр ва мулоҳазаларини юборган китобхоналарга авторлар ўз миннатдорчиликларини билдирадилар.

Январь, 1978 й.

Авторлар

I БОБ КОМПЛЕКС СОНЛАР

1-§. Комплекс соннинг таърифи

Комплекс сонни бу фанга таъриф орқали киритамиз.

1-таъриф. α комплекс сон деб маълум бир тартибда берилган бир жупта a ва b ҳақиқий сонларга айтилади ва қуйидагича ёзилади:

$$\alpha = (a, b). \quad (1)$$

Бу ерда a, b лар компоненталар дейилади. Таърифга кура $(a, b) \neq (b, a)$, яъни компоненталарнинг тартиби ҳам катта аҳамиятга эга. Агар $b = 0$ бўлса, (1) да

$$\alpha = (a, 0) = a \quad (2)$$

деб қабул қиламиз. Бундан кўринадики, барча ҳақиқий сонлар туплами барча комплекс сонлар тупламининг қисм тупламидан иборат экан. $\alpha = (a, b)$ ва $\beta = (c, d)$ комплекс сонлар берилган бўлсин. Агар $a = c$ ва $b = d$ бўлса, $\alpha = \beta$ деб қабул қиламиз.

2-таъриф. α ва β комплекс сонларни қўшишни қуйидагича қабул қиламиз:

$$\alpha + \beta = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d). \quad (3)$$

Агар $b = d = 0$ бўлса, (3) тенгликдан

$$\alpha + \beta = (a + c, 0) = a + c \quad (4)$$

ҳосил бўлади, яъни ҳақиқий сонларни қўшиш қондаси келиб чиқади.

Икки сон айирмаси тушунчасини ўша (3) қўшиш таърифи-га асосан келтириб чиқарилади. $\alpha = (a, b)$ билан $\beta = (c, d)$ соннинг айирмаси деб, шундай $\gamma = (x, y)$ сонни айтамизки, β ни γ га қўшганда α ҳосил бўлади:

$$(c, d) + (x, y) = (c + x, d + y) = (a, b),$$

бундан

$$c + x = a, \quad d + y = b, \quad \text{яъни } x = a - c, \quad y = b - d;$$

мана шу айирма қуйидагича ёзилади:

$$\alpha - \beta = (a, b) - (c, d) = (a - c, b - d). \quad (5)$$

3-таъриф. α ва β комплекс сонларни кўпайтиришни қуйидагича қабул қиламиз:

$$\alpha \cdot \beta = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \quad (6)$$

Агар $b=d=0$ бўлса, бундан

$$\alpha \cdot \beta = (ac, 0) = ac \quad (7)$$

келиб чиқади. Шундай қилиб, (4) ва (7) тенгликлардан кўринадики, иккита ҳақиқий сонни қўшиш ҳамда кўпайтириш комплекс сонларни қўшиш ва кўпайтиришнинг хусусий ҳоли экан.

Энди юқоридаги қўшиш ва кўпайтириш таърифларига асосланиб, $\alpha = (a, b)$ комплекс сонни бошқача кўринишга келтираемиз:

$$\alpha = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + (b, 0) \quad (0, 1), \quad (8)$$

бунда

$$(0, b) = (b, 0)(0, 1) \quad (9)$$

тенгликнинг тўғрилигини (6) га асосан текшириб куриш кифоя. Ниҳоят, $(0, 1)$ нинг қандай сон эканлигини аниқлаш мақсадида унинг квадратини текшириб курайлик, (6) га мувофиқ,

$$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Одатда бу сон қуйидагича белгиланади:

$$(0, 1) = i, \quad (0, 1)^2 = i^2 = -1. \quad (10)$$

Мана шунга асосан (3) дан комплекс соннинг ушбу

$$\alpha = a + ib$$

алгебранинг формаси келиб чиқади, a ва b ҳақиқий сонлар мос равишда комплекс соннинг ҳақиқий ва мавҳум қисми деб юритилади ва қуйидагича символлар билан белгиланади¹:

$$a = \operatorname{Re} \alpha, \quad b = \operatorname{Im} \alpha.$$

Шундай қилиб, ҳозирча биз комплекс соннинг икки хил формаси билан танишдик. Келгусида биз комплекс соннинг тўрт хил формага эга эканлигини кўраемиз.

Баъзан қуйидагича ҳам ёзилади:

$$\alpha = R(\alpha) = R(a + ib) \quad \text{ва} \quad b = I(\alpha) = I(a + ib), \quad (11)$$

Масалан,

$$R\left(-\frac{1}{2} + 3i\right) = -\frac{1}{2}, \quad I\left(-\frac{1}{2} + 3i\right) = 3.$$

¹ *Realls* ва *Imaginaris* — латинча сўзлар бўлиб, ҳақиқий ҳамда мавҳум, деймакдир.

Ушбу

$$\alpha = a + ib \text{ ва } \bar{\alpha} = a - ib$$

қўринишдаги сонлар ўзаро қўшма комплекс сонлар дейилади.

Мисол учун

$$\alpha = \frac{1}{2} + 5i \text{ ва } \bar{\alpha} = \frac{1}{2} - 5i$$

комплекс сонлар қўшма комплекс сонлардир.

2-§. Комплекс сонлар устида амаллар

Ҳақиқий сонлар устида бажариладиган турт арифметик амалнинг комплекс сонлар устида ҳам бажариш қоидалари алгебра курсидан маълум. Шундай бўлса ҳам, бу амалларни қисқача эслатиб ўтамиз.

1 Қўшиш ва айириш

Иккита $\alpha = a + ib$ ва $\beta = c + id$ комплекс сонни қуйидаги қоида бўйича қўшилади:

$$\alpha + \beta = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d). \quad (1)$$

Берилган $\alpha = a + ib$ ва $\beta = c + id$ комплекс сонларнинг айирмаси деб шундай $\gamma = x + iy$ сонга айтиладики, у сон $\alpha = \beta + \gamma$, яъни $a + ib = (c + x) + i(d + y)$ тенгликни қаноатлантиради. Бу тенгликдан эса

$$c + x = a, \quad d + y = b, \quad \text{яъни } x = a - c, \quad y = b - d$$

тенгликлар ҳосил бўлади. Демак,

$$\alpha - \beta = \gamma = x + iy \quad \text{ёки} \quad \alpha - \beta = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d). \quad (2)$$

2. Кўпайтириш ва бўлиш

Иккита $\alpha = a + ib$ ва $\beta = c + id$ комплекс сонларни қуйидаги қоида бўйича кўпайтирилади:

$$\alpha \cdot \beta = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc). \quad (3)$$

Агар ушбу

$$\alpha = a + ib \text{ ва } \bar{\alpha} = a - ib$$

ўзаро қўшма комплекс сонлар берилган бўлса, уларнинг йиғиндиси ва кўпайтмаси ҳар доим ҳақиқий сонлардан иборат бўлади:

$$\alpha + \bar{\alpha} = 2a, \quad \alpha \bar{\alpha} = a^2 + b^2.$$

Берилган иккита $\alpha = a + ib$ ва $\beta = c + id$ комплекс соннинг $\frac{\alpha}{\beta}$ бўлинмаси деб шундай $\gamma = x + iy$ комплекс сонга айтиладики, у

$$\alpha = \beta\gamma, \text{ яъни } a + ib = (c + id)(x + iy)$$

тенгликни қаноатлантиради.

Тенгликнинг ўнг томонидаги кўпайтириш амалини бажарганда кейин иккала томондаги ҳақиқий ва мавҳум қисмларни таққосласак,

$$cx - dy = a,$$

$$dx + cy = b$$

тенгламалар системаси ҳосил бўлиб, бу системанинг ечими

$$x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \quad y = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

дан иборат бўлади. Шундай қилиб,

$$\frac{a}{\beta} = \gamma = x + iy,$$

яъни

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \frac{bc-ad}{c^2+d^2}. \quad (4)$$

Бу тенгликдан кўринадикки, агар $c=d=0$ бўлса, бўлиш амалини бажариб бўлмайди, чунки нолга бўлиш маънога эга эмас.

Комплекс сонларнинг ҳам ҳақиқий сонлар каби қуйидаги хоссаларга бўйсўнишини осонгина келтириб чиқариш мумкин:

- 1) рефлексивлик хоссаси: $\alpha = \alpha$;
- 2) симметриклик хоссаси: $\alpha = \beta$ бўлса, $\beta = \alpha$ бўлади;
- 3) транзитивлик хоссаси: $\alpha = \beta$ ва $\beta = \gamma$ дан $\alpha = \gamma$ келиб чиқади.

Китобхонга олий алгебра курсидан маълумки, комплекс сонларни қўшиш ва кўпайтириш амаллари ҳам ҳақиқий сонлардаги каби қуйидаги қонунларга бўйсўнади:

- 1) коммутативлик қонуни: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ва $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$;
- 2) ассоциативлик қонуни: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ ва $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$;
- 3) дистрибутивлик қонуни: $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$.

Мисоллар.

$$1. \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i, \text{ чунки } i^2 = -1.$$

$$2. \frac{1+itg\varphi}{1-itg\varphi} = \frac{(1+itg\varphi)^2}{1-i^2tg^2\varphi} = \frac{1+2itg\varphi-tg^2\varphi}{1+tg^2\varphi} = \frac{1-tg^2\varphi}{1+tg^2\varphi} + \frac{2itg\varphi}{1+tg^2\varphi} = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi,$$

$$3. \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(i\sqrt{3}-1)^3 = \frac{1}{8}[(i\sqrt{3})^3 - 3(i\sqrt{3})^2 + 3i\sqrt{3} - 1] = 1, \text{ чунки } i^2 = -1.$$

3. Қушма комплекс сонларнинг хоссалари.

Қушма комплекс сонларнинг йигиндиси ва кўпайтмасига доир баъзи хоссалари билан танишиб ўтамиз. Агар қуйидаги

$$\alpha_1 = a_1 + ib_1 \text{ ва } \alpha_2 = a_2 + ib_2$$

комплекс сонлар берилган бўлса, буларга қушма бўлган сонлар

$$\bar{\alpha}_1 = a_1 - ib_1 \text{ ва } \bar{\alpha}_2 = a_2 - ib_2$$

дан иборатдир.

$$\alpha_1 + \alpha_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

сонга қушма сон

$$\overline{\alpha_1 + \alpha_2} = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) = (a_1 - ib_1) + (a_2 - ib_2) = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2$$

дан иборат. Демак,

$$\overline{\alpha_1 + \alpha_2} = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2$$

ва умуман тулиқ математик индукция методига асосан,

$$\overline{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 + \dots + \bar{\alpha}_n \quad (5)$$

эканлигини исботлашни китобхоннинг ўзига тавсия қиламиз.

Шунингдек,

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1).$$

Бунга қушма бўлган сон:

$$\overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2} = (a_1a_2 - b_1b_2) - i(a_1b_2 + a_2b_1).$$

Иккинчи томондан,

$$\bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}_2 = (a_1 - ib_1) \cdot (a_2 - ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) - i(a_1b_2 + a_2b_1) = \overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2}$$

Демак,

$$\overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2} = \bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}_2.$$

Умуман,

$$\overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n} = \bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}_2 \cdot \dots \cdot \bar{\alpha}_n$$

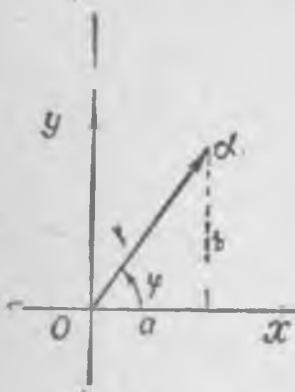
тенглик ўринли эканини текшириш ҳам китобхонга тавсия этилади.

3-§. Комплекс соннинг геометрик тасвири ва комплекс текислик

Текисликда туғри бурчакли xOy Декарт координаталари системасини танлаб, унинг абсциссалар ўқиға $\alpha = a + ib$ нинг ҳақиқий қисми a ни, ординаталари ўқиға эса мавҳум қисми-

нинг коэффициенти b ни жойлаштирсак, текисликда (a, b) нуқтага эга буламиз. Ана шу нуқтанг $\alpha = a + ib$ комплекс соннинг геометрик тасвири деб қабул қилинади. Шунга кўра бундан кейин „комплекс α сон“ дейиш урнига баъзан „ α —нуқта“ ҳам дейилади ва аксинча.

Шундай қилиб, бу усул билан ҳар бир комплекс сонга текисликда биргина нуқта ва аксинча, текисликдаги ҳар бир нуқта учун битта комплекс сон мос келишини кўриш мумкин. Бошқача айтганда, текисликнинг барча нуқталари тўплами билан барча комплекс сонлар тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилади.



1-чизма.

Агар $b=0$ бўлса, $\alpha=a$ ҳақиқий сонга тегишли нуқта абсциссалар ўқида ётади, шу сабабли Ox —ҳақиқий ўқ деб аталади. Агар $\alpha=0$, $b \neq 0$ бўлса, $\alpha=ib$ мавҳум сонга тегишли нуқта ординаталар ўқида ётади, шу сабабли Oy мавҳум ўқ, xOy текислик эса комплекс текислик дейилади (1-чизма).

Берилган $\alpha = a + ib$ комплекс сонга мос нуқта ўша соннинг образи, аксинча α сон ўша нуқтанинг аффикси деб аталади.

Кўпинча α комплекс соннинг геометрик тасвири сифатида координаталар бошини текисликдаги α нуқта билан тугаштирувчи векторни ҳам қабул қилинади.

4-§. Комплекс соннинг тригонометрик шакли

Одатда $\alpha = a + ib$ шаклидаги комплекс сонни алгебраик кўринишдаги комплекс сон дейилади. Комплекс соннинг тригонометрик шаклини ҳосил қилиш учун 1-чизмага мурожаат қиламиз:

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi. \quad (7)$$

Бундаги r комплекс α сонни тасвирлаган векторнинг узунлигини ифодалайди, уни α соннинг модули, φ бурчакни эса α нинг аргументи дейилади ва у қуйидагича ёзилади:

$$|\alpha| = |a + ib| = r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \arg \alpha = \varphi.$$

α комплекс сонга мос бўлган векторга биргина узунлик ва чексиз кўп бурчаклар мос келиши юқоридаги чизмадан кўриниб турибди:

$$\varphi, \varphi + 2\pi, \varphi + 4\pi, \dots$$

Шу сабабли одатда бурчакнинг умумий кўриниши

$$\operatorname{Arg} z = \arg \alpha + 2k\pi \quad (8)$$

каби белгиланиб ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $\varphi = \arg \alpha$ ни аргументнинг бош қиймати дейилади.

1-чизмага биноан:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}, \text{ бундан: } \varphi = \arctg \frac{b}{a}. \quad (9)$$

Энди (7) га асосан

$$\alpha = a + ib = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (10)$$

булиб, унг томон α нинг тригонометрик шакли (формаси) дейилади. Комплекс текисликнинг ҳар бир нуқтаси r нинг $[0, +\infty)$ дан олинган тайин бир қиймати ва φ нинг $[0, 2\pi)$ дан олинган тайин бир қиймати билан тўла аниқланади. Шунинг учун (10) да $0 < r < \infty$ ва $0 \leq \varphi < 2\pi$ деб қабул қилинади.

Қўшма комплекс α ва $\bar{\alpha}$ сонларга мос нуқталар абсциссалар ўқига нисбатан симметрик бўлади. Шу сабабли, α ва $\bar{\alpha}$ га тегишли векторларнинг узунликлари бир-бирига тенг бўлиб, бурчаклари қарама-қарши ишорага эга ва абсолют қийматлари тенгдир:

$$|\bar{\alpha}| = |\alpha| \text{ ва } \arg \bar{\alpha} = -\arg \alpha.$$

Масалалар ечишда кўпинча комплекс соннинг тригонометрик шаклидан фойдаланиш қулайдир.

Математик анализ курсидан Эйлернинг қуйидаги машҳур формуласи маълум:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

бунда φ — ҳақиқий сон. У ҳолда (10) дан α комплекс соннинг ушбу кўрсаткичли формаси

$$\alpha = re^{i\varphi} \quad (11)$$

келиб чиқади, бунда

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x; \quad 2 < e < 3, \quad e = 2.718281828459045, \dots$$

Шундай қилиб, ҳар қандай комплекс сон тўрт хил формага эга экан:

$$\alpha = (a, b), \quad \alpha = a + ib, \quad \alpha = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \alpha = re^{i\varphi}, \quad (12)$$

буларда $i^2 = -1$. Табиий, комплекс соннинг бир формасидан иккинчисига ўтиш мумкин. Мураккаб масалаларни ҳал этишда (12) даги сўнгги икки форма ишни жуда осонлаштирилади.

Мисоллар.

1. $1+i$ сон тригонометрик шаклга келтирилсин.

$$a=1, \quad b=1, \quad r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} = 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{4},$$

чунки $(1,1)$ нуқта биринчи чоракда ётади, демак,

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

ёки умумий кўринишда:

$$1+i=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right], \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$2. -i.$$

$$-i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}.$$

$$3. -1=\cos\pi+i\sin\pi,$$

чунки $a=-1, b=0, \varphi=\pi$.

$$4. -1+i\sqrt{3}.$$

$$r=\sqrt{3+1}=2, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\sqrt{3}, \quad \varphi = \frac{2\pi}{3},$$

чунки берилган сонга мос $(-1, \sqrt{3})$ нуқта иккинчи чоракда ётади; демак,

$$-1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

5-§. Комплекс сонларни даражага кўтариш ва илдиздан чиқариш

1. Кўпайтириш. Биз олдин тригонометрик шаклда берилган сонларни кўпайтириш устида тўхталиб ўтамиз.

$$a_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1), \quad a_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2), \dots,$$

$$a_{n-1}=r_{n-1}(\cos\varphi_{n-1}+i\sin\varphi_{n-1}), \quad a_n=r_n(\cos\varphi_n+i\sin\varphi_n)$$

комплекс сонлар берилган бўлсин, (3) даги каби кўпхадларни кўпайтириш қондасига асосан, улардан биринчи иккитасининг кўпайтмасини топайлик:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot \alpha_2 &= r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + i (\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned} \quad (11)$$

Демак, тригонометрик шаклда берилган иккита комплекс сонни кўпайтириш учун уларнинг модулларини ўзаро кўпайтириб, аргументларини қўшиш керак, деган жуда содда қондага эга бўлдиқ. Бу қондани кетма-кет татбиқ этиб, тригонометрик шаклда берилган n та комплекс соннинг кўпайтмасини ҳисоблаш учун ушбу қондага эга бўламиз:

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n = r_1 r_2 \dots r_n [\cos (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)]. \quad (12)$$

Математик индукция методидан фойдаланиб, бу формуланинг тўғрилигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

Шундай қилиб, бир қанча комплекс сонларни ўзаро кўпайтириш учун уларнинг тригонометрик шаклидан фойдаланиш қулай экан.

Сунгги (12) тенгликдан қуйидаги натижа ҳам келиб чиқади:

$$|\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \dots |\alpha_n|, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \arg (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) &= \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n = \arg \alpha_1 + \\ &+ \arg \alpha_2 + \dots + \arg \alpha_n. \end{aligned} \quad (14)$$

яъни кўпайтманинг модули кўпайтувчиларнинг модуллари кўпайтмасига тенг, шунингдек, кўпайтманинг аргументи кўпайтувчиларнинг аргументлари йиғиндисига тенг.

Мисоллар.

$$1 \quad \alpha = 2 (\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ), \quad \beta = 3 (\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ).$$

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta &= 6 [\cos (35^\circ + 25^\circ) + i \sin (35^\circ + 25^\circ)] = 6 (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = \\ &= 6 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 3 + i 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \alpha &= \frac{1}{3} (\cos 11^\circ + i \sin 11^\circ), \quad \beta = \frac{5}{2} (\cos 19^\circ + i \sin 19^\circ), \\ \gamma &= \frac{12}{25} (\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ). \end{aligned}$$

У ҳолда

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = \frac{2}{5} (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{5} \cdot (1 + i).$$

2. Даражага кўтариш. Агар (12) формуладаги $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ сонлар ўзаро тенг, яъни $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$ бўлса, у вақт-

да уларнинг модуллари ўзаро ва аргументлари ҳам ўзаро тенг бўлади:

$$r_1 = r_2 = \dots = r_n = r, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n = \varphi.$$

(12) дан:

$$a^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (15)$$

Демак, тригонометрик шаклдаги комплекс сонни n -даражага кўтариш учун унинг модулини шу даражага кўтариб, аргументини n га кўпайтириш керак.

Даража кўрсаткичи манфий бўлса ҳам (15) формула ўз кучини сақлайди. Ҳақиқатан ҳам,

$$\begin{aligned} [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^{-n} &= \frac{1}{[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n} = \frac{1}{r^n} \cdot \frac{1}{\cos n\varphi + i \sin n\varphi} = \\ &= r^{-n} \cdot \frac{\cos n\varphi - i \sin n\varphi}{\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi} = r^{-n} [\cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi)], \end{aligned}$$

демак,

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^{-n} = r^{-n} [\cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi)]. \quad (16)$$

Мисоллар:

1. $(1 + i)^9$ ҳисоблаб чиқилсин.

Дастлаб қавслар ичидаги сонни тригонометрик шаклга келтириб оламиз:

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Энди, (15) формулага асосан, буни даражага кўтариб соддалаштирамиз:

$$\begin{aligned} (1 + i)^9 &= (\sqrt{2})^9 \left(\cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4} \right) = 16 \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= 16 \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 16 + 16i. \end{aligned}$$

2. $(\sqrt{3} - i)^{12}$ ҳисоблансин.

Маълумки,

$$\sqrt{3} - i = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right). \quad (17)$$

Демак, (15) формулага асосан:

$$(\sqrt{3} - i)^{12} = 2^{12} [\cos(22\pi) + i \sin(22\pi)] = 2^{12}.$$

3. Муавр формуласи. (15) формуладаги r ихтиёрий мусбат сондир. Хусусий ҳолда $r=1$ фараз этсак (15) дан

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n \varphi + i \sin n \varphi \quad (18)$$

Муавр формуласи ҳосил бўлади.

Бу формуланинг чап томонидаги қавсни, Ньютон биноми формуласига асосан, очиб чиққандан сўнг: $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ ва умуман, ихтиёрий мусбат бутун k учун:

$$i^{4k} = 1; i^{4k+1} = i; i^{4k+2} = -1; i^{4k+3} = -i \quad (18')$$

эканини эътиборда тутиб, ўша тенгликнинг иккала томонидаги комплекс сонларнинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини тенглаштириб, ушбу формулаларга эга бўламиз:

$$\begin{aligned} \cos n \varphi &= \cos^n \varphi - C_n^2 \cdot \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + C_n^4 \cdot \cos^{n-4} \varphi \times \\ &\times \sin^4 \varphi - \dots, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \sin n \varphi &= n \cdot \cos^{n-1} \varphi \cdot \sin \varphi - C_n^3 \cdot \cos^{n-3} \varphi \cdot \sin^3 \varphi + \\ &+ C_n^5 \cdot \cos^{n-5} \varphi \cdot \sin^5 \varphi - \dots, \end{aligned} \quad (20)$$

яъни каррали бурчакнинг косинус ва синусларини оддий бурчакнинг синус ва косинуслари орқали ифодаловчи формулаларни ҳосил қиламиз. Хусусий ҳолда $n=2$ десак, тригонометриядан маълум бўлган

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi &= \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi, \\ \sin 2\varphi &= 2 \cos \varphi \sin \varphi \end{aligned} \quad (21)$$

формулаларга келамиз.

Мисоллар:

1. $\cos 3\varphi$ ва $\sin 3\varphi$ лар $\cos \varphi$ ва $\sin \varphi$ нинг даражалари орқали ифода қилинсин.

Бунинг учун (19) ва (20) формулаларда $n=3$ деб олинн етарли:

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \cdot \sin^2 \varphi, \quad \sin 3\varphi = 3 \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi - \sin^3 \varphi.$$

2. $\sin^3 x$ ни каррали x нинг биринчи даражали синус ва косинуси орқали ифода қилинг.

Бунинг учун қуйидагича белгилаймиз:

$$a = \cos x + i \sin x,$$

бундан:

$$a^{-1} = \frac{1}{a} = \frac{1}{\cos x + i \sin x} = \frac{\cos x - i \sin x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \cos x - i \sin x.$$

Сунги икки тенгликни даражага кўтарилса, Муавр формуласига биноан:

$$a^k = \cos kx + i \sin kx, \quad a^{-k} = \cos kx - i \sin kx.$$

Бундан

$$\cos kx = \frac{1}{2} (a^k + a^{-k}), \quad \sin kx = \frac{1}{2i} (a^k - a^{-k}) \quad (22)$$

формулалар келиб чиқади. Энди, $k = 1$ фараз этилса, (22) нинг иккинчисидан қуйидаги, биз малаётган натижа ҳосил бўлади:

$$\begin{aligned} \sin^3 x &= -\frac{1}{8i} (a - a^{-1})^3 = -\frac{1}{8i} (a^3 - 3a + 3a^{-1} - a^{-3}) = \\ &= -\frac{1}{8i} [(a^3 - a^{-3}) - 3(a - a^{-1})]. \end{aligned}$$

Буларнинг ўрнига (22) дан қийматлари келтириб қўйилса:

$$\sin^3 x = \frac{1}{4} (3 \sin x - \sin 3x).$$

3. $\cos^5 x$ ни қаррали x нинг биринчи даражали синус ва косинуси орқали ифода қилинг.

Бунинг учун $k = 1$ фараз этиб, (22) нинг биринчисидан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} \cos^5 x &= \frac{1}{2^5} (a + a^{-1})^5 = \frac{1}{64} (a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + a^{-1} + \\ &+ 5a^{-2} + 10a^{-3} + 5a^{-4} + a^{-5}) = \frac{1}{64} [(a^5 + a^{-5}) + 5(a^4 + a^{-4}) + 10(a^3 + a^{-3}) + 10]. \end{aligned}$$

Мана шу йиғиндиларнинг ўрнига (22) дан мос қийматлари қўйилса,

$$\cos^5 x = \frac{1}{32} (\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x).$$

4. Қуйидаги йиғинди аниқлансин: $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 - C_n^{10} + \dots$. Бунинг учун $(1 + i)^n$ ни Ньютон биноми бўйича ёйиб чиқамиз:

$$\begin{aligned} (1 + i)^n &= 1 + C_n^1 \cdot i + C_n^2 \cdot i^2 + C_n^3 \cdot i^3 + C_n^4 \cdot i^4 + \dots + \\ &+ C_n^{n-1} \cdot i^{n-1} + i^n, \end{aligned} \quad (23)$$

Бундаги i нинг даражалари (18') га кўра ушбу

$$i, -1, -i, +1$$

қийматлардангина иборат бўлади.

Иккинчи томондан, $1 + i$ ни тригонометрик шаклга келтирсак,

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

ҳосил бўлади. Муавр формуласидан фойдалансак,

$$(1 + i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) \quad (24)$$

теңгиликка эга бўламиз. Энди, (23) билан (24) нинг чап томонлари бир хил бўлгани учун ўнг томонлари ҳам ўзаро тенг бўлади. Шу сабабли

$$2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) = (1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots) + \\ + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots)$$

бўлиб, унинг икки томонини солиштирсак, қуйидаги сўнгги натижага эришамиз:

$$1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \cos \frac{n\pi}{4}, \quad (25)$$

$$C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \sin \frac{n\pi}{4}. \quad (26)$$

Хусусий ҳолда, $n = 10$ деб олсак,

$$1 - C_{10}^2 + C_{10}^4 - C_{10}^6 + C_{10}^8 - C_{10}^{10} = 32 \cdot \cos \frac{5\pi}{2} = 0,$$

$$C_{10}^1 - C_{10}^3 + C_{10}^5 - C_{10}^7 + C_{10}^9 = 32 \cdot \sin \frac{5\pi}{2} = 32$$

Шу усул билан бошқа мисолларни ҳам ечиш мумкин.

4. Комплекс соннинг илдиэлари. Комплекс соннинг квадрат илдиэларини топиш масаласи ўрта мактабда ҳам урганилади. Биз комплекс соннинг ҳар қандай даражали илдиэларини топиш билан шуғулланамиз.

1. $\alpha = a + ib$ сон берилган бўлсин. Агар $\alpha = \beta^n$ бўлса, β сон α нинг n -даражали илдиэи дейилиб,

$$\beta = \sqrt[n]{\alpha} \quad (27)$$

қуринишда ёзилади. Мана шу β илдиэни топиш талаб қилинади. Дастлаб берилган α сонни тригонометрик шаклга келтирамиз:

$$\alpha = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Комплекс сонлар устида турт амални бажарган вақтимизда яна комплекс сонлар ҳосил бўлишини кўрган эдик. Шунинг учун комплекс сон илдиэининг ҳам, умуман, комплекс сондан иборат бўлишини кўтиш табиийдир. Мана шу фикрга асосан (27) ни қуйидагича ёза оламиз:

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \rho(\cos \theta + i \sin \theta), \quad (28)$$

ҳозирча ρ ва θ номаълум бўлиб, масала шуларни аниқлашдан иборатдир. Шу мақсадда (28) нинг икки томонини n -даражага кўтарамиз, у ҳолда $\alpha = \beta^n$, яъни

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

ҳосил бўлади. Қавсларни очиб тенгликнинг икки томонидаги комплекс сонларнинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини тенглаш билан ушбу

$$\rho^n \cdot \cos n\theta = r \cos \varphi, \quad \rho^n \sin n\theta = r \sin \varphi \quad (29)$$

тенгликларга эришамиз. Бундан:

$$\rho^{2n} (\cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta) = r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)$$

ёки

$$\rho^n = r \text{ ва } \rho = \sqrt[n]{r}. \quad (30)$$

Бунинг чап томонидаги ρ мусбат сон бўлгани учун уннг томонининг ҳам, мусбат ҳақиқий r соннинг n -даражали, аниқ бир мусбат илдизидан иборат, деб тушунмоқ лозим. Энди, (29) нинг чап томонидаги ρ^n ўрнига (30) дан қийматини қўйсак, ушбу

$$\cos n\theta = \cos \varphi, \quad \sin n\theta = \sin \varphi \quad (31)$$

тенгликлар келиб чиқади.

Тригонометриядан маълумки,

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

У ҳолда (31) тенгликларга кўра:

$$n\theta = \varphi + 2k\pi,$$

бундан

$$\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (32)$$

Шундай қилиб, бизга номаълум бўлган θ бурчак чексиз куп қийматларга эга экан. Энди, (30) ва (32) даги ρ ва θ нинг қийматларини (28) га қўйиб, унинг чап томонини қисқача β_k билан белгилаймиз:

$$\beta_k = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad (33)$$

бунда $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ қийматларни қабул қилиши мумкин. Бундан комплекс сондан олинган илдизларнинг сони чексиз куп бўлиши мумкинми, деган савол туғилиши табиийдир. Шунинг учун биз комплекс сонни n -даражали радикалдан чиқарганда ўзаро тенг бўлмаган нечта илдиз келиб чиқишини текшираимиз.

Биз k га турлича мусбат қийматлар берган билан (33) дан келиб чиқадиган илдизлар ҳар хил бўлиб чиқа бермайди. Фақат

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1 \quad (34)$$

бўлгандагина $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{n-1}$ илдизлар ўзаро тенг эмас, чунки (34) га мос бўлган қуйидаги

$$\frac{\varphi}{n}, \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \frac{\varphi + 4\pi}{n}, \dots, \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n} \quad (35)$$

бурчақларнинг бир-биридан фарқи 2π дан кичик, мисол учун:

$$\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n} - \frac{\varphi}{n} = \frac{n-1}{n} 2\pi < 2\pi.$$

Энди, $k=n, n+1, n+2, \dots$ бўлганда (33) дан янги илдиэлар-келиб чиқмаслигини, яъни

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{n-1} \quad (36)$$

илдиэларнинг яна такрорланишини кўриш қийин эмас. Шу мақсадда

$$k = np + q > n, q = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

деб белгилаймиз, у вақтда:

$$\frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{\varphi + 2(np + q)\pi}{n} = \frac{\varphi + 2q\pi}{n} + 2p\pi.$$

Унг томондаги мана шу бурчақнинг синус ва косинуслари мос равишда ушбу

$$\frac{\varphi + 2q\pi}{n}$$

бурчақнинг синус ва косинусларига тенг бўлгани учун яна (34) ҳол такрорланади.

Шундай қилиб, ушбу муҳим хулосага келдик: комплекс соннинг n -даражали илдиэлари сони n та бўлиб, улар (35) га асосан (33) формула орқали топилади.

Мисоллар: Қуйидаги илдиэлар ҳисоблансин:

1. $\sqrt[3]{1}$.

Дастлаб i ни тригонометрик шаклга келтирамиз: $r = 1$ ва $\varphi = \frac{\pi}{2}$ бўлгани учун:

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2},$$

(33) формулага биноан

$$\beta_k = \sqrt[3]{1} = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3},$$

бу ерда $k = 0, 1, 2$. Демак,

$$\beta_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i,$$

$$\beta_1 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i,$$

$$\beta_2 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i.$$

Буларнинг ҳар бирини учинчи даражага кўтарилса, радикал ишораси остидаги i сон келиб чиқади.

$$2. \sqrt[4]{-2-2i\sqrt{3}}.$$

Аввал радикал ишораси остидаги комплекс сонни тригонометрик шаклга келтириб оламиз:

$$a = -2, \quad b = -2\sqrt{3}; \quad r = 4, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} = \sqrt{3}.$$

Берилган комплекс сонга мос бўлган вектор учинчи чоракда ётгани учун $\varphi = \frac{4\pi}{3}$. Шу сабабли

$$-2-2i\sqrt{3} = 4 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right).$$

Бундан, (33) формулага асосланиб, тўртинчи даражали илдиэлари топсак бўлади:

$$\beta_0 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i\sqrt{3}),$$

$$\beta_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (-\sqrt{3} + i),$$

$$\beta_2 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i\sqrt{3}),$$

$$\beta_3 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - i\sqrt{3}).$$

$$3. \sqrt[4]{-27}.$$

$$a = -27, \quad b = 0; \quad r = 27, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} = 0,$$

лекин (-27) га мос вектор абсциссалар ўқининг манфий томонида ётгани учун $\varphi = \pi$. Демак,

$$-27 = 27(\cos \pi + i \sin \pi),$$

$$\beta_k = \sqrt[4]{3} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{6} \right) \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

формуладан $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_5$ ни толамиз.

Масалан,

$$\beta_0 = \sqrt[4]{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{3}{2} + i \frac{1}{2}, \quad \beta_1 = \sqrt[4]{3} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = i\sqrt[4]{3},$$

$$\beta_2 = \sqrt[4]{3} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = -\frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ва х. к.}$$

$$4. \sqrt[4]{1}.$$

Равшанки,

$$1 = \cos 0 + i \sin 0.$$

Бунга (33) формулани татбиқ қилинса, ушбу

$$\omega_k = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (37)$$

натижа досил бўлнб, бунда $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$; бу формуладан:

$$\begin{aligned} k=0 \text{ бўлганда } \omega_0 &= \cos 0 + i \sin 0 = 1, \\ k=1 \text{ бўлганда } \omega_1 &= \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}, \\ k=2 \text{ бўлганда } \omega_2 &= \cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n}. \end{aligned} \quad (38)$$

$$k = n - 1 \text{ бўлганда } \omega_{n-1} = \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

ҳосил бўлади. Бирнинг илдизларини топиш учун (38) формулалардан фойдаланиш ҳам мумкин. Лекин ҳисоблашни осонлаштириш учун бошқа қулай усулни ҳам келтираемиз. Муавр формуласига мувофиқ:

$$(\omega_1)^k = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}.$$

Бу тенгликнинг ўнг томони (37) даги ω , ни билдиради, демак.

$$\omega_k = \omega^k, \quad k = 2, 3, 4, \dots, n-1. \quad (39)$$

ω_k илдинни топиш учун ω₁ ни даражага кўтариш кифоялиги кейинги формуладан кўриниб турибди. Мисол учун,

$$\omega_2 = \omega_1, \quad \omega_3 = \omega_1^3, \quad \omega_4 = \omega_1^4.$$

Изоҳ. Биринг илдиэларини топишнинг маъноси $x^l - 1 = 0$ алгебраик тенгламани ечиш демакдир, чунки уни ечиш учун l нинг l -даражали илдиэларини топиш керак, холос.

Мисол учун $\sqrt[3]{1}$ ни ҳисоблаб чиқайлик, яъни $x^3 - 1 = 0$ тенгламини ечайлик. Демак, $n = 3$, (38) га асосан;

$$\omega_0 = 1, \omega_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Энди, (39) га мувофиқ:

$$u_1 = u_1^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(i\sqrt{3}-1)^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Шундай қилиб, қуйидаги илдишларга эга бўлидик:

$$1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5. Қўшиш ва айиришнинг геометрик тасвири. Механикадан, шунингдек аналитик геометриядан бизга маълумки, иккита векторнинг йиғиндиси шу векторлардан ясалган параллелограммнинг мос диагоналидан иборатдир. Иккинчи томондан,

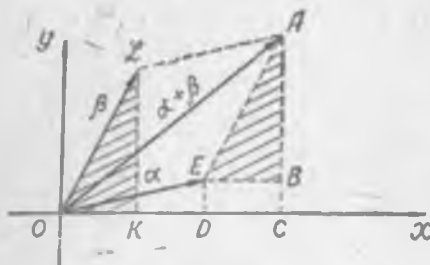
таъриф буйича, иккита комплекс сонни қўшиш учун уларнинг мос равишда ҳақиқий ва мавҳум қисмларини узаро қўшиш қабул қилинган эди. Энди икки комплекс сонни қўшиш билан уларга мос векторларни қўшиш орасида фарқ йўқлигини кўрсатамиз.

Фараз этайлик, бизга

$$\alpha = a + ib \text{ ва } \beta = c + id$$

комплекс сонлар берилган бўлиб,

$$a = OD, b = DE, c = OK, d = KL$$



2-ЧИЗМА.

бўлсин (2-чизма).

а) Дастлаб α билан β сонларни таъриф буйича ўзаро қўшсак

$$\alpha + \beta = (a + c) + i(b + d) \quad (40)$$

ҳосил бўлади.

б) Иккинчи томондан, комплекс сон геометрик жиҳатдан текисликдаги вектордан иборат эканлиги бизга маълум. Шу сабабли па-

раллелограмм усули билан α ва β ларга мос векторларни қўшсак, $\overrightarrow{OA}$ вектор ҳосил бўлади. Биз энди A нуқтанинг координаталари $a + c$ ва $b + d$ лардан иборат эканлигини кўрсатамиз. Дарҳақиқат, 2-чизмадаги штрихланган учбурчаклар тенг бўлгани учун $OK = EB$ ва $KL = AB$ бўлади. Бу икки тенг-

$$OC = OD + DC = OD + OK = a + c.$$

$$CA = CB + BA = DE + KL = b + d.$$

Демак, булардан куринадики, $\overrightarrow{OA}$ вектор (40) даги $\alpha + \beta$ йиғиндининг геометрик тасвирини билдиради. Иккинчи турли айтганда, иккита комплекс сонни қўшиш, демак, уларга мос бўлган векторларни параллелограмм усули билан қўшиш демакдир.

2-чизмада курсатилган OAL учбурчакнинг томонлари α , β , $\alpha + \beta$ векторларнинг ушбу

$$|\alpha|, |\beta|, |\alpha + \beta|$$

узунликларидан иборатдир. Маълумки, учбурчакнинг бир томони қолган икки томони йиғиндисидан катта бўла олмайди, шунга асосан қуйидаги тенгсизликка эга бўламиз:

$$|\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta|.$$

Агар бизга бир неча $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ комплекс сонлар берилган бўлса, уларга мос векторларни юқорида баён қилинган усул билан ўзаро қўшсак,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

йиғиндига мос вектор қўшилувчи векторлардан тузилган синиқ чизиқнинг бошланғич ва охири нуқталарини туташтирувчи (ёпувчи) вектордан иборат бўлади. Равшанки, ёпувчи чизиқнинг узунлиги синиқ чизиқ узунлигидан катта бўла олмайди, яъни

$$|\alpha + \beta + \dots + \delta| \leq |\alpha| + |\beta| + \dots + |\delta|. \quad (41)$$

Тенглик белгисини ҳам ёзишимизга сабаб ҳамма векторлар битта туғри чизиқда ётиб, бир томонга йўналган бўлиши ҳам мумкин. (41) тенгсизлик йиғиндининг модули қўшилувчилар модулларининг йиғиндисидан катта эмаслигини ифода қилади. Бу тенгсизликни туғридан туғри ҳам исботлаш мумкин. Масалан,

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta|^2 &= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta}) = \\ &= (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\operatorname{Re}\alpha\bar{\beta}, \text{ лекин } -|\alpha| \leq \operatorname{Re}\alpha\bar{\beta} \leq |\alpha|, \\ &\quad -|\alpha| \leq b \leq |\alpha| \end{aligned}$$

бўлгани учун

$$|\alpha + \beta|^2 \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta| = (|\alpha| + |\beta|)^2,$$

бундан:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

Шунга ўхшаш α ва β комплекс сонларни айириш учун уларга мос бўлган векторларни айириш кифоядир. Комплекс сонларни қуйидагича

$$\alpha - \beta = (a - c) + i(b - d)$$

айириш бизга маълум, векторларни айириш эса

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

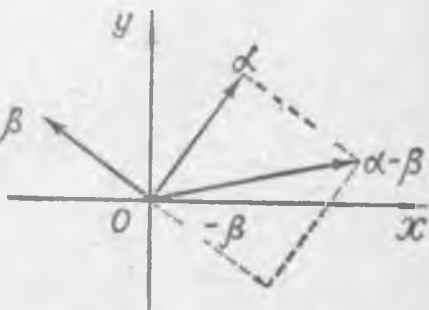
усул билан бажарилади, бундаги $-\beta$ вектор β векторга қарама-қарши йўналгандир (3-чизма).

Агар юқоридаги каби мулоҳаза қилинса (бунини ўқувчига қолдирдик), ушбу

$$|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha - \beta| \quad (42)$$

тенгсизлик келиб чиқади.

Кўпайтиришнинг геометрик тасвири. Энди комплекс сонларни кўпайтириш амалини геометрик томондан текширалиш.



3-чизма.

яъни берилган бирор $\beta = c + id$ сонни $\alpha = a + ib$ сонга кўпайтириш қандай геометрик маънога эга, деган саволга жавоб излаймиз.

Шу мақсадда α ва β сонларни тригонометрик шаклда ёзиб,

$$\alpha = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \beta = R(\cos \psi + i \sin \psi)$$

ларни ўзаро кўпайтирсак, (11) формулага асосан,

$$\alpha \cdot \beta = rR[\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)] = \gamma$$

ҳосил бўлади ва бундан эса:

$$|\gamma| = rR = |\alpha| \cdot |\beta| \quad \text{ва} \quad \arg \gamma = \varphi + \psi = \arg \alpha + \arg \beta.$$

Демак, α комплекс сонни β га кўпайтиришнинг геометрик маъноси, α га мос векторни ψ бурчакка (соат стрелкасига тескари) буриб, R марта чўзиш демакдир (4-чизма).

Шубҳасиз, агар $R < 1$ бўлса, α га мос вектор чўзилмасдан, балки қисқаради. Лекин биз иккала ҳолда ҳам „чўзилади“ деган терминни ишлата берамиз.

Хусусий ҳолда, агар:

а) $\beta = -1 = \cos \pi + i \sin \pi$ бўлса, $R = 1$ бўлиб,

$$\alpha \cdot (-1) = r[\cos(\varphi + \pi) + i \sin(\varphi + \pi)],$$

яъни (-1) га кўпайтиришнинг маъноси α га мос векторни π бурчакка буришдан иборатдир.

$$\text{б) } \beta = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

бўлса яна, $R = 1$ бўлиб,

$$\alpha \cdot i = r\left[\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right],$$

яъни i га кўпайтиришнинг маъноси α га тегишли векторни $\frac{\pi}{2}$

бурчакка буриш (соат стрелкасига тескари буриш) демакдир.

Булиш амали кўпайтиришга тескари бўлгани учун α сонни β га бўлишнинг геометрик маъноси юқорида айтилган ҳодисага тескари бўлади. Бошқача айтганда, α сонни β сонга бўлиш демак, α га мос бўлган векторни соат стрелкаси бўйича ψ бурчакка буриб, R марта қисқартириш (ёки чўзиш) демакдир.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{R(\cos \psi + i \sin \psi)} = \frac{r}{R}[\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi)].$$

Бундан кўринадики,

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{r}{R} = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \quad \text{ва} \quad \arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \varphi - \psi = \arg \alpha - \arg \beta.$$

7. $\frac{1}{a}$ соннинг геометрик тасвири. Фараз қилайлик. $|\alpha| < 1$

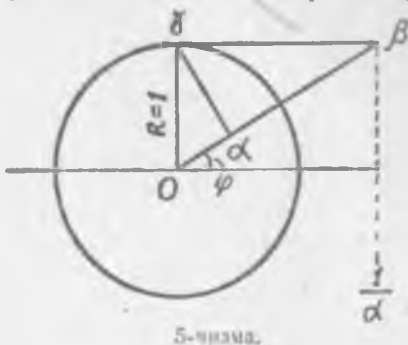
бўлсин, α нуқтадан $O\alpha$ нурга тик чизик чиқарсак, $u|z|=1$ айлана билан γ нуқтада кесишади (5-чизма). γ нуқтада бу айланага уринма ўтказиб, уринманинг $O\alpha$ нур билан кесишган нуқтасини β билан белгилаймиз. (Агар $|\alpha| > 1$ бўлса, яшаш аксинча бажарилади.)

α ва β нуқталар битта тўғри чизикда ётгани учун уларнинг аргументлари тенг, яъни:

$$\operatorname{Arg} \alpha = \operatorname{Arg} \beta = \varphi. \quad (43)$$

Иккинчи томондан, $O\alpha\gamma$ ва $O\beta\gamma$ учбурчаклар ўхшаш бўлгани учун: $\frac{O\beta}{O\gamma} = \frac{O\gamma}{O\alpha}$ бундан $|\gamma|=1$ бўлгани сабабли

$$|\beta| = \frac{1}{|\alpha|}. \quad (44)$$



Шундай қилиб, (43) ва (44) тенгликлардан

$$\beta = \frac{1}{\alpha}$$

келиб чиқади. α нуқтадан $\beta = \frac{1}{\alpha}$ нуқтага ўтишни бирлик айланага нисбатан инверсия дейилади. α ва β нуқталар эса бирлик айланага нисбатан симметрик нуқталар дейилади.

β га қўшма сон, равшанки, $\bar{\beta} = \frac{1}{\alpha}$ бўлади. Бу сонга ҳақиқий ўққа нисбатан β га симметрик бўлган нуқта мос келади.

Агарда айлананинг радиуси $R \neq 1$ бўлса, юқоридагига ўхшаш мулоҳаза юритиб, ўзаро симметрик нуқталар қуйидагилардан иборат бўлишини кўриш қийин эмас:

$$\alpha \text{ ва } \beta = \frac{R^2}{\alpha}.$$

Шундай қилиб, $\frac{1}{\alpha}$ ни яшаш учун айланага нисбатан α га симметрик бўлган $\frac{1}{\alpha}$ ни яшаш ҳамда ҳақиқий ўққа нисбатан $\frac{1}{\alpha}$ га симметрик бўлган $\frac{1}{\alpha}$ ни топиш лозим.

Агар $|\alpha|=1$ бўлса $|\beta|=1$ бўлиши (44) тенгликдан кўринади. Агар α нуқта марказга яқинлашиб борса, яъни $\alpha \rightarrow 0$ бўлса, у ҳолда β марказдан узоқлашади. Шу сабабли айлана марказининг айланага нисбатан симметрик нуқтаси чексизликда ҳисобланади.

6-§. Соҳа тўғрисида тушунча. Жордан чизиғи

Комплекс сонларнинг бирор E тўплами берилган бўлсин. Бунинг геометрик маъноси, ўша сонларга мос бўлган текисликдаги нуқталарнинг E тўпламидан иборатдир. Кўпинча E тўпламининг хусусий бир ҳоли бўлган соҳа тушунчаси кўп ишлатилади, шу сабабли соҳа тушунчаси устида тўхталиб ўтмоқчимиз.

а) Агар текисликдаги E тўпламнинг бирор M нуқтасини марказ деб, исталганча кичик радиусли доира чизилганда унинг барча нуқталари E тўпламга тегишли бўлса, у ҳолда M нуқта E нинг ички нуқтаси дейилади. Мисол учун текисликдаги бирор тўртбурчак ичидаги нуқталарнинг ҳаммасини E тўплам деб қабул қилсак, уларнинг ҳар бири E га нисбатан ички нуқта бўлади.

Агар қуйидаги икки шарт бажарилса текисликдаги нуқталар тўплами E соҳа дейилади.

1. E тўплам фақат ички нуқталардангина иборат;

2. E тўпламнинг ҳар қандай иккита нуқтасини шундай кўп қисмни синиқ чизиқ билан бирлаштириш мумкин бўлсинки, ўша чизиқнинг барча нуқталари E тўпламга тегишли бўлсин.

б) Агар текисликда бирор G соҳа берилган бўлса, у ҳолда текисликнинг барча нуқталари G га нисбатан икки синфга ажралади. Биринчи синф деб G нинг барча нуқталарини, иккинчи синф деб текисликнинг G га тегишли бўлмаган нуқталарини қабул қиламиз.

Энди иккинчи синфдан бирор N нуқта олайлик, у ҳолда бу ерда ҳам қуйидаги икки ҳол бўлиши мумкин. Агар маркази N нуқтада бўлган, исталганча кичик радиусли донранинг бирорта нуқтаси ҳам G га тегишли бўлмаса, у ҳолда N нуқта берилган G соҳага нисбатан ташқи нуқта дейилади (6-а-чизма).



6-чизма.

Мабодо N марказли исталганча кичик радиусга эга бўлган донранинг баъзи нуқталари G га тегишли бўлиб қолса, N

нуқта G соҳанинг чегара нуқтаси дейилади (6-б чизма). Равшанки, чегара нуқта соҳага тегишли бўлиши ҳам, тегишли бўлмаслиги ҳам мумкин. G соҳа чегара нуқталарининг тўплами унинг чегараси дейилади. G соҳадан ва унинг чегарасидан иборат бўлган нуқталар тўплами ёпиқ соҳа дейилиб, $\bar{G}$ орқали белгиланади.

Мисол учун текисликда бирор G учбурчак олсак, унинг барча ички нуқталари G нинг ички нуқталари бўлиб, учбурчак томонлари эса унинг чегараси бўлади. Учбурчакдан ташқаридаги нуқталар эса G га нисбатан ташқи нуқталар бўлиб қолади.

Чегарасиз соҳага фақат тула комплекс текислик мисол бўлади. Шунинг ҳам эса тутиш керакки, ҳар қандай G соҳа ҳам ташқи

нуқталарга эга бўлавермайди. Масалан, соҳа комплекс текисликни бир ёки бир неча нуқталаридан бошқа ҳамма нуқталаридан иборат бўлса, бу соҳа ташқи нуқталарга эга бўлмайди.

Жордан чизиғи. Фараз этайлик, бизга ҳақиқий t аргументли $x(t)$ ва $y(t)$ ҳақиқий ва узлуксиз функциялар берилган бўлиб, $\alpha \leq t \leq \beta$ бўлсин. У ҳолда қуйидаги иккита тенглама

$$x = x(t), y = y(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (45)$$

текисликдаги узлуксиз эгри чизиқни ифода қилади. Агар параметр t нинг икки хил қийматига ($t = \alpha$ ва $t = \beta$ қийматлардан бошқа) эгри чизиқнинг икки турли нуқтаси мос келса, у ҳолда эгри чизиқ уз-ўзини кесмайди, яъни қаррали нуқтага эга бўлмайди, ана шундай хусусиятга эга бўлган эгри чизиқ Жордан чизиғи ёки узлуксиз чизиқ деб аталади.

Агар биз комплекс ўзгарувчи миқдорни $z = x + iy$ орқали белгиласак, (45) га асосан, $z(t) = x(t) + iy(t)$ ҳосил бўлиб, эгри чизиқни биргина тенглама билан қуйидагича ифода қилиш ҳам мумкин:

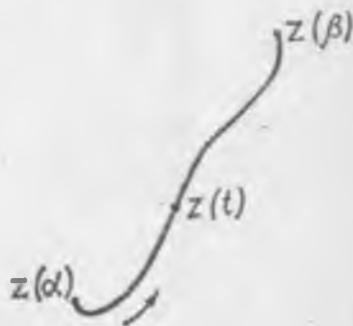
$$z = z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta). \quad (46)$$

Параметр t берилган $[\alpha, \beta]$ сегментда ўсиб бориши билан z нуқта Жордан чизиғини чизиб, унинг бошланғич нуқтаси $z(\alpha)$ ва сўнгги нуқтаси $z(\beta)$ лардан иборат бўлади. Шу билан чизиқда маълум йўналиш ҳам белгиланиб қолади (7-чизма). Одагда бу йўналишни мусбат йўналиш деб олинади.

Хусусий ҳолда $z(\alpha) = z(\beta)$ бўлса, эгри чизиқнинг бошланғич ва охириги нуқталари бирлашиб кетади, яъни ёпиқ чизиқ ҳосил бўлади. Бу ҳолда Жордан чизиғи текисликни икки қисмга ажратади. Улардан бири ёпиқ чизиқ ичидаги қисми бўлса, иккинчиси — текисликнинг қолган барча нуқталаридан иборатдир.

Жорданнинг ёпиқ чизиғи ичида ётган соҳанинг ажойиб хусусияти шундан иборатки, шу соҳада ҳар қандай ёпиқ узлуксиз чизиқ олсак ҳам унинг ичи ўша берилган соҳага тегишли бўлиб қолади

Шундай хусусиятга эга бўлган ҳар қандай соҳа бир боғламли, акс ҳолда, куп боғламли деб аталади. Соҳаларни купинча тенгсизликлар орқали бериш мумкин. Биз шуларнинг баъзилари билан танишиб ўтамиз.



7-чизма.

7-§. Баъзи бир мисоллар

1. Ушбу

$$|z - \alpha| < R \quad (47)$$

тенгсизлик қандай соҳа ҳосил қилишини текширайлик, бунда $\alpha = a + bi$.

Маълумки,

$$z = x + iy, \quad z - \alpha = (x - a) + i(y - b).$$

Демак,

$$|z - \alpha| = |(x - a) + i(y - b)| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < R.$$

бундан:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2. \quad (47')$$

Бу эса, маркази (a, b) нуқтада бўлган R радиусли айлананинг барча ички нуқталаридан иборатдир (8-чизма). Шундай қилиб,

(47) тенгсизлиكنинг геометрик маъноси R радиусли ва маркази α нуқтада бўлган очиқ доирандан иборат экан.

Хусусий ҳолда, агар $\alpha = 0$ бўлса, (47) дан

$$|z| < R \quad (48)$$

тенгсизлик ҳосил бўлиб, юқориди айтилган доиранинг маркази ноль нуқтада, яъни координаталар бошида бўлиб қолади.

2. Ҳалқа Келгусида куп учрайдиган соҳалардан бири ушбу

$$r < |z - \alpha| < R \quad (49)$$

тенгсизликлар билан ифода қилинади. Олдинги пунктда келтирилган усулга асосан қуйидаги икки тенгсизликка эга бўламиз:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2 \quad \text{ва} \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2.$$

- Булардан биринчиси r радиусли доиранинг ташқарисидagi барча нуқталар тупламиди, иккинчи тенгсизлик эса R радиусли доира ичидаги барча нуқталар тупламиди билдиради. Сўнгги икки тенгсизлик (49) дан келиб чиққанлиги учун (49) нинг геометрик маъноси r ва R радиусли айланалар билан чегараланган очиқ ҳалқадан иборатдир (9-чизма).

Ҳалқанинг маркази (a, b) , яъни $\alpha = a + ib$ нуқтада жойлашганлиги ўз-ўзидан равшан. Хусусий ҳолда, $\alpha = 0$ бўлса, ҳалқа маркази координаталар бошида бўлади.

Агар $r = 0$ бўлса (49) дан:

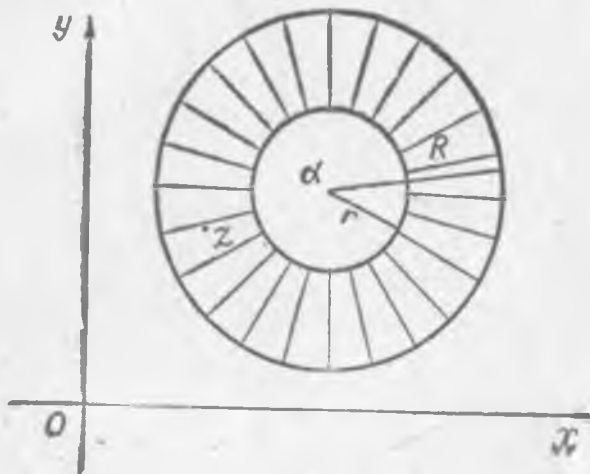
$$0 < |z - \alpha| < R \quad (50)$$

тенгсизликлар келиб чиқади. Булар эса R радиусли доирадан иборат бўлиб, унга марказий нуқта кирмайди.

Агар $R = +\infty$ бўлиб қолса, (49) дан

$$|z - \alpha| > r \quad (51)$$

бўлиб, бу r радиусли доиранинг ташқарисини билдиради (10-чизма).



9-чизма

Изоҳ. Агар биз (47) ва (49) лар ўрнига

$$|z - \alpha| < R \text{ ва } r < |z - \alpha| < R$$

тенгсизликлар билан берилган тўпламларни текширсак, у ҳолда ёпиқ соҳаларга эга бўламиз (ёпиқ доира ва ёпиқ ҳалқа).

3. Текисликнинг баъзи қисмлари. Берилган $z = x + iy$ комплекс ўзгарувчининг x ҳақиқий қисми

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(x + iy) = x \text{ ёки } R(z) = x,$$

мавҳум y қисми эса

$$\operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(x + iy) = y \text{ ёки } I(z) = y$$

куринишда ёзилиши бизга маълум.

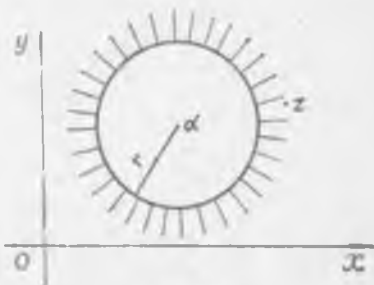
а) Ушбу

$$\operatorname{Re} z \geq a$$

тенгсизлик қандай тўпламни ифодалашини аниқлаймиз, бунда $a > 0$. Маълумки,

$$\operatorname{Re} z = x \geq a.$$

Демак, бу тенгсизлик $x = a$ тўғри чизиқнинг ўнг томонини ифода қилиб, чегара ҳам шу тўпламга киради (11-чизма).



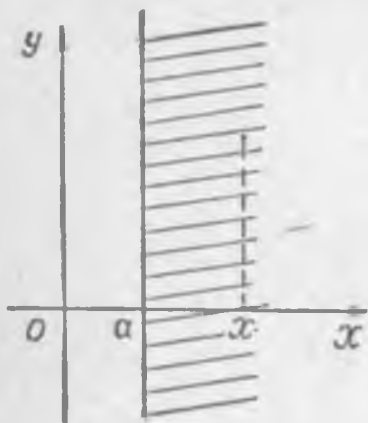
10-чизма.

б) Ушбу

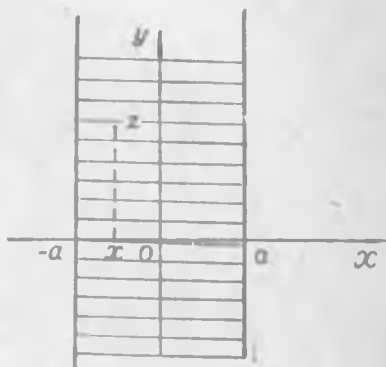
$$-a < \operatorname{Re} z < a$$

$$(a > 0)$$

тенгсизликлар билан қандай соҳа ифодаланади?
Юқоридаги мисолдан фойдалансак,



11-чизма.

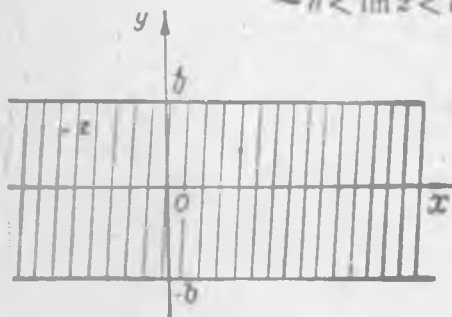


12-чизма.

га эга бўламиз. Бу эса текисликнинг $x = -a$ ва $x = a$ тўғри чизиқлар орасидаги қисмини билдиради (12-чизма).

в) Ушбу

$$-b < \operatorname{Im} z < b \quad (b > 0)$$



13-чизма.

тенгсизликлар текисликнинг $y = -b$ ва $y = b$ чизиқлар орасидаги йўлдан (полосадан) иборат (13-чизма), чунки $\operatorname{Im} z = y$.

г) Ушбу

$$|z| < 1 - \operatorname{Re} z$$

тенгсизлик қандай соҳани аниқлайди?

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\operatorname{Re} z = x$$

булгани учун

$$\sqrt{x^2 + y^2} < 1 - x.$$

Бундан:

$$x^2 + y^2 < (1 - x)^2 \quad \text{ёки} \quad y^2 < 1 - 2x.$$

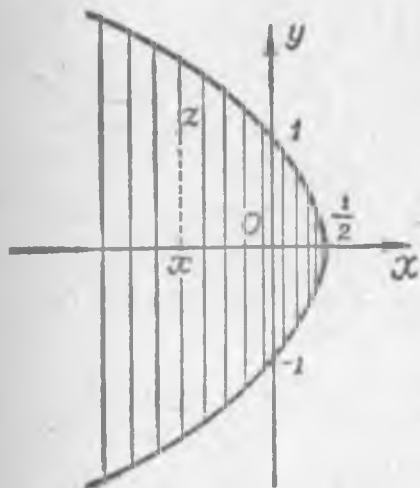
Агар $y^2 = 1 - 2x$ бўлганда эди параболага эга булар эдик.
 $y^2 < 1 - 2x$ булгани учун соҳа парабола ичидаги нуқталардан
 иборатдир (14-чизма).

д) Ушбу

$$\varphi_1 < \arg z < \varphi_2, \quad 2 \leq \operatorname{Re} z \leq 3$$

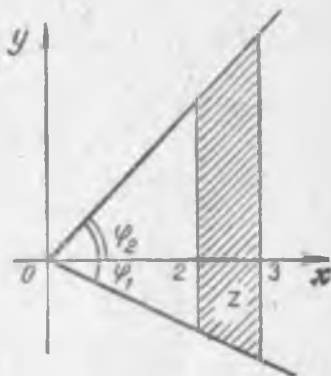
тенгсизликларга тегишли тўплам аниқлансин, бунда:

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < 0, \quad 0 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}.$$



14-чизма.

Маълумки, z нинг Декарт
 координатлари системасидаги
 кўриниши $z = x + iy$ дан, қутб
 координатлари системасидаги



15-чизма.

кўриниши эса $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ дан иборат. Шу сабабли

$$\arg z = \varphi, \quad \operatorname{Re} z = x.$$

Берилган тенгсизликларга асосан:

а) $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ лар текисликнинг $\varphi = \varphi_1$ ва $\varphi = \varphi_2$ нурлар ора-
 сидаги бир қисмини билдиради;

б) $2 \leq x \leq 3$ эса $x = 2$, $x = 3$ тўғри чизиқлар орасидир.

Мана шуларга асосан биз излаётган тўплам 15-чизмада кўр-
 сатилган трапеция ичидаги нуқталар тўпلامидан иборат бўлиб,
 трапециянинг параллел томонлари бу тўпламга кирали.

4. Баъзи эгри чизиқларнинг тенгламалари. Текисликдаги
 эгри чизиқларнинг тенгламалари Декарт ёки қутб координна-
 талар системасида берилиши, шунингдек параметрик шаклда
 берилиши бизга олий математиканинг бошқа бўлимларидан
 маълум.

Эгри чизиқ тенгламаси комплекс узгарувчилар орқали бе-
 рилиши ҳам мумкин, у бизга (46) дан маълум. Ҳозир биз энг

содда эгри чизиклардан баъзиларининг комплекс узгарувчилар орқали берилган тенгламалари билан танишиб ўтмоқчимиз.

а) Айлана. Маркази (a, b) нуқтада бўлган R радиусли айлананинг тенгламаси

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad (52)$$

дан иборат эканлиги аналитик геометриядан маълум.

16-чизмадан

$$x - a = R \cos \varphi, \quad y - b = R \sin \varphi$$

ёки булардан

$$x = 2a + R \cos \varphi, \quad y = b + R \sin \varphi.$$

Энди, $z = x + iy$ дан фойдаланиб

$$\begin{aligned} z &= x + iy = a + R \cos \varphi + i(b + R \sin \varphi) = \\ &= (a + ib) + R(\cos \varphi + i \sin \varphi) \end{aligned}$$

каби ёза оламиз. Яна чизмага эътибор қилсак, $\alpha = a + ib$ ва $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ эканлигини кўрамиз. Шу сабабли:

$$z = \alpha + R(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Агар ушбу

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (53)$$

Эйлер формуласидан¹ фойдалансак, юқоридаги тенгламани қуйидагн кўринишда ёзиш мумкин:

$$z = \alpha + Re^{i\varphi} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi). \quad (54)$$

Шундай қилиб, (54) маркази $\alpha = a + ib$ нуқтада бўлган R радиусли айлана тенгламасидир.

Агар $\alpha = a + ib = 0$ бўлса, (54) дан

$$z = Re^{i\varphi} \quad (55)$$

ҳосил бўлиб, марказ координаталар бошига жойлашган бўлади.

Демак, z нуқта қутб координаталар орқали берилган бўлса, айлана тенгламаси шулардан иборат бўлади.

Агар биз (47) тенгсизлик ўрнига ушбу

$$|z - \alpha| = R \quad (56)$$

тенгликни ёзсак, бунинг натижасида (52) айлана тенгламасидан иборат эканлигини кўрамиз.

¹ Эйлер формуласи ушбу кейинроқ алоҳида тўхталиб ўтамиз.

Хусусий ҳолда, $\alpha = 0$, $R = 1$ бўлса, айлана радиуси 1 га тенг ва маркази O нуқтада бўлиб, тенгламаси

$$|z| = 1 \quad (57)$$

кўринишни олади. Агар z нуқта Декарт координаталари системасида берилган бўлса, айлана тенгламаси $|z - \alpha| = R$ дан иборат бўлади.

б) Ярим ўқлари a ва b дан иборат эллипс тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (58)$$

кўринишда ёзилади. Агар $z = x + iy$ деб олсак, y ҳолда $\bar{z} = x - iy$ бўлади. Бундан:

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ ва } y = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

у ҳолда эллипс тенгламаси комплекс ўзгарувчи орқали бундай ёзилади:

$$\frac{(z + \bar{z})^2}{4a^2} - \frac{(z - \bar{z})^2}{4b^2} = 1.$$

в) Берилган ушбу

$$z = z(t) = c_1 e^{imt} + c_2 e^{-imt} \quad (59)$$

тенглама қандай эгри чизиқни тасвирлашини аниқлайлик, бундаги c_1 , c_2 , m — ўзгармас ҳақиқий сонлар.

Эйлер формуласига биноан:

$$e^{imt} = \cos mt + i \sin mt,$$

$$e^{-imt} = \cos(-mt) + i \sin(-mt) = \cos mt - i \sin mt.$$

У ҳолда:

$$\begin{aligned} x + iy &= c_1 [\cos mt + i \sin mt] + c_2 [\cos mt - i \sin mt] = \\ &= (c_1 + c_2) \cos mt + i (c_1 - c_2) \sin mt. \end{aligned}$$

Икки комплекс соннинг тенглик шартига асосан:

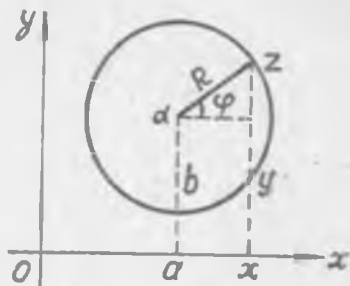
$$x = (c_1 + c_2) \cos mt, \quad y = (c_1 - c_2) \sin mt.$$

Агар биз $a = c_1 + c_2$, $b = c_1 - c_2$ ва $mt = \varphi$ деб белгиласак, сўнгги тенгламалар ушбу

$$x = a \cos \varphi,$$

$$y = b \sin \varphi$$

кўринишга эга бўлиб, эллипснинг параметрик тенгламаларини беради.



16-чизма.

Демак, (59) ҳам эллипснинг комплекс ўзгарувчи орқали берилган тенгламаси экан.

г) Ушбу

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z} = a \quad (60)$$

тенглама қандай чизиқни тасвирлашини аниқлайлик, бундаги a ҳақиқий ўзгармас сон ($a \neq 0$).

Агар $z = x + iy$ бўлса,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Демак,

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} = a.$$

Бундан:

$$a(x^2 + y^2) = x \text{ ёки } x^2 + y^2 - \frac{x}{a} = 0.$$

Бу тенгламани қуйидаги

$$\left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4a^2}$$

кўринишга келтирилса, маркази $\left(\frac{1}{2a}, 0\right)$ нуқтада бўлган $R = \frac{1}{2|a|}$ радиусли айланага эга бўламиз. Равшанки унинг маркази Ox ўққа жойлашган бўлиб, O нуқтада Oy га уриниб утади.

8-§. Кетма-кетликлар ва уларнинг лимитлари

Бу параграфда комплекс сонлардан тузилган кетма-кетликларни ўрганамиз.

Агар $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ натурал сонларнинг ҳар бирига биттадан комплекс сон мос келса, у ҳолда қуйидаги

$$z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots \quad (61)$$

чексиз кетма-кетлик ҳосил бўлади. Бундаги z_n комплекс сон натурал n сонга мос келади ($n = 1, 2, 3, \dots$). Энди $z_n = x_n + iy_n$ бўлиб, x_n ва y_n улар ҳақиқий сонлардан иборат бўлгани учун (61) га асосан қуйидаги иккита ҳақиқий ҳадли кетма-кетликни тузиб олиш мумкин:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \quad (62)$$

ва

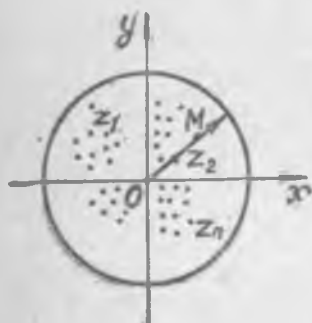
$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots \quad (63)$$

Аксинча, агар (62) ва (63) кетма-кетликлар берилган бўлса, уларга асосланиб, (61) ни тузиш мумкин. Бунинг учун (63) да ҳадларни i сонга кўпайтириб, (62) даги мос ҳадларга қўшиш кифоя.

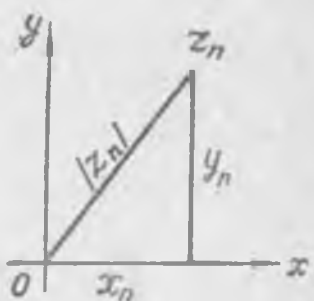
Берилган (61) кетма-кетликни қисқача $\{z_n\}$ кўринишда ёзиш қабул қилинган. Агар $\{z_n\}$ кетма-кетликнинг ҳар бир ҳадининг модули бирор мусбат сондан кичик бўлса, яъни шундай $M > 0$ сон мавжуд бўлсаки, барча z_n лар учун

$$|z_n| < M \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

бўлса, у ҳолда кетма-кетлик чегараланган дейилади. Сўнги тенгсизлик эса берилган кетма-кетликнинг барча элементлари маркази координаталар бошида бўлган M радиусли доира ичида жойлашганлигини билдиради. Демак, $\{z_n\}$ нинг чегараланган бўлиши учун $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ нуқталарнинг ҳаммаси бирор чекли радиусли донра ичига жойлашмоғи керак (17-чизма).



17-чизма.



18-чизма.

$|x_n|$ ва $|y_n|$ лар учбурчак катетларининг, $|z_n|$ эса учбурчак гипотенузасининг узунликлари экани 18-чизмадан кўриниб турибди. Шу сабабли қуйидаги тенгсизликларга эга бўламиз:

$$|x_n| \leq |z_n|, |y_n| \leq |z_n| \text{ ва } |z_n| \leq |x_n| + |y_n|.$$

Мана шу тенгсизликлардан қуйидаги хулосалар келиб чиқади.

а) Агар $\{z_n\}$ кетма-кетлик чегараланган бўлса, у ҳолда $|x_n|$ ва $|y_n|$ лар ҳам чегараланган бўлади.

б) Аксинча, агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар чегараланган бўлса, у ҳолда $\{z_n\}$ ҳам чегараланган бўлади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$|x_n| < M_1 \text{ ва } |y_n| < M_2$$

тенгсизликлардан

келиб чиқади. $|z_n| \leq |x_n| + |y_n| < M_1 + M_2 = M$

Мисол. Ушбу кетма-кетлик берилган:

$$1 - i, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i, \dots, \frac{1}{n} - \frac{1}{n}i, \dots$$

$$z_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}i,$$

$$|z_n| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n}i \right| = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{n} < \sqrt{2},$$

яъни

$$|z_n| < \sqrt{2}.$$

Демак, берилган кетма-кетлик чегараланган экан. Бундан келиб чиқадиган ушбу

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots,$$

$$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, -\frac{1}{n}, \dots$$

кетма-кетликлар ҳам чегаралангандир, ҳақиқатан ҳам,

$$|x_n| = |y_n| = \left| \pm \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < 1,$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

Кетма кетликнинг лимити. Комплекс сонларнинг ушбу $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots$, яъни: $\{z_n\}$ кетма-кетлиги берилган бўлсин.

Таъриф. Агар ҳар қандай кичик мусбат ε сон учун, шундай натурал $N(\varepsilon)$ сонни топиш мумкин бўлсаки, $n > N(\varepsilon)$ бўлганда

$$|z_n - z_0| < \varepsilon \quad (64)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда z_0 сон берилган $\{z_n\}$ кетма-кетликнинг лимити (чеки) дейилиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \text{ ёки } z_n \rightarrow z_0$$

каби ёзилади.

Бу таъриф расмий томондан ҳақиқий сонлар кетма-кетлигининг лимити таърифидан фарқ қилмаса ҳам, геометрик томондан тамомила бошқачадир. Сунгги (64) тенгсизликнинг геометрик маъноси шундан иборатки, барча $n > N(\varepsilon)$ учун z_n нуқталар маркази z_0 нуқтада бўлган ε радиусли доира ичига жойлашганлигини кўрсатади. Шундай қилиб, $\{z_n\}$ нинг z_0 лимитга эга бўлмоғи учун $z_{N+1}, z_{N+2}, \dots$ нуқталарнинг барчаси ҳалиги доира ичида бўлиши шарт. Мана шу доира z_0 нуқтанинг ε -атрофи (ε -тевараги) деб аталади.

Лимитга эга бўлган $\{z_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи кетма-кетлик ҳам дейилади.

Теорема. Ҳар қандай яқинлашувчи кетма-кетлик чегаралангандир.

Исбот. Фараз қилайлик, $\{z_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи, яъни $n > N(\varepsilon)$ бўлганда

$$|z_n - z_0| < \varepsilon$$

булсин. У ҳолда:

$$|z_n| = |(z_n - z_0) + z_0| \leq |z_n - z_0| + |z_0| < \varepsilon + |z_0|.$$

Энди $|z_0| + \varepsilon$ дан ва $|z_1|, |z_2|, \dots, |z_N|$ сонлардан каттароқ булган бирор сонни M билан белгиласак, у ҳолда

$$|z_n| < M (n = 1, 2, 3, \dots, N, \dots)$$

булиб қолади, демак, $|z_n|$ чегараланган кетма-кетлик экан.

Комплекс ҳадли кетма-кетликлар ҳам ҳақиқий ҳадли кетма-кетлик хоссаларига ўхшаш хоссаларга эга эканини кўрсатиш мумкин. Масалан, қуйидаги муҳим муносабатлар комплекс ҳадли $\{z_n\}$ ва $\{z'_n\}$ кетма-кетликлар учун ҳам ўринли. Агар $\lim z_n = z_0$ ва $\lim z'_n = z'_0$ мавжуд бўлса, у ҳолда:

1. $\lim (z_n + z'_n) = \lim z_n + \lim z'_n = z_0 + z'_0$;

2. $\lim (z_n \cdot z'_n) = \lim z_n \cdot \lim z'_n = z_0 \cdot z'_0$;

3. $z_n \neq 0$ ва $z'_0 \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\lim \frac{z_n}{z'_n} = \frac{\lim z_n}{\lim z'_n} = \frac{z_0}{z'_0}.$$

Буларни текширишни уқувчига қолдирамиз.

9-§. Стереографик проекция. Чексиз узоқлашган нуқта

Берилган $z = x + iy$ комплекс соннинг геометрик маъноси текисликдаги (x, y) нуқтадан иборат эканлигини кўрдик. Энди комплекс сонни сферадаги нуқта билан тасвирлашни ҳам кўрсатамиз. Бунинг учун сферанинг жанубий қутбини xOy текисликдаги O нуқтага қўямиз. Мана шу текисликдаги $z = x + iy$ нуқтани P шимолий қутб билан тўғри чизиқ орқали туташтирсак, у чизиқ сферани бирор Q нуқтада кесиб ўтади. Ҳосил қилинган Q нуқта текисликдаги z нуқтанинг сферадаги акси дейилади.

Шу усулда текисликдаги нуқталарнинг аксини сферага туширилса, текисликдаги ҳар бир нуқтага сферада биттадан нуқта мос келади. Бу ерда биз P нуқтани ҳисобга олмадик, яъни уни бирор сонга мос қилиб қўймадик. Натижада биз ҳар бир комплекс сонга сферадаги битта нуқта мос келишини кўрдик ва аксинча, сферадаги ҳар бир (P дан бошқа) нуқтага текисликда битта z комплекс сон мос келади. Бошқача айтганда (z) текисликдаги ҳамма нуқталар тўплами билан сферадаги ҳамма (P дан бошқа) нуқталар тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилди.

а) Агар текисликдаги z нуқтани координаталар бошидан узоқлаштирилса, сферадаги унга мос бўлган Q нуқта P га яқинлаша боради. Шу сабабли, P нуқтани буш қолдирмаслик учун, текисликда унга мос чексиз узоқлашган битта нуқта бор, деб қабул қиламиз.

М А Ш Қ Л А Р

Қуйдаги комплекс сонлар тригонометрик шаклда ифодалансин;

1. $1 - i$; 2. $-1 - i$; 3. i .

4. $\sqrt{3} - i$; 5. $2 - 5i$; 6. $-1 + i$;

7. $1 + i\sqrt{3}$; 8. i ; 9. $-i - i\sqrt{3}$;

10. $-2 - 5i$; 11. -1 .

Қуйдагилар ҳисоблансин:

12. $(1 + i)^{20}$; 13. $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{30}$; 14. $\left(1 - \frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{24}$;

15. $(1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^n$; 16. $\left(\frac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{1 - i \operatorname{tg} \alpha}\right)^n$,

17. $(\sqrt{3} - i)^n$.

Қуйдаги функциялар $\sin x$ ва $\cos x$ орқали ифода қилинсин:

18. $\cos 5x$; 19. $\sin 6x$; 20. $\operatorname{tg} 6x$.

Қуйдаги функциялар kx нинг синус ва косинуслари орқали ифода қилинсин:

21. $\sin^4 x$; 22. $\cos^3 x$;

23. $\omega_1^n + \omega_2^n$ ифода соддалаштирилсин, бунда

$$\omega_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \omega_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

24. $(1 + \omega)^n$ ифода соддалаштирилсин, бунда

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

Қуйда кўрсатилган йиғиндилар ҳисоблансин.

25. $1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots$;

26. $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots$;

27. $1 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \dots$;

28. $C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + \dots$;

29. $C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \dots$;

Сонларнинг қуйдаги илдиэлари топилинсин:

30. $\sqrt[4]{1+i}$; 31. $\sqrt[3]{3-i}$; 32. $\sqrt[3]{2-2i}$;

33. $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$; 34. $\sqrt[4]{-4}$.

Қуйдаги тенгсизликлар қандай тўпламларни тасвирлайди:

35. $|z - i| < 5$; 36. $|z + 3i| > 4$; 37. $\operatorname{Re} z < -6$;

38. $\operatorname{Im} z > 2$; 39. $\varphi < \arg z < \frac{\pi}{4}$;

40. $\operatorname{Re} \bar{z} + \operatorname{Im} z < 1$.

Қуйдаги тенгламалар қандай тўпламларни тасвирлайди:

41. $|z - 3 - 4i| = 2$; 42. $|z - 2| + |z + 2| = 5$;

43. $\operatorname{Re} z^2 = a (-\infty < a < +\infty)$;

44. $\operatorname{Im} z^2 = a$.

КОМПЛЕКС ЎЗГАРУВЧИНИНГ ФУНКЦИЯЛАРИ ВА УЛАРНИНГ ҲОСИЛАЛАРИ

1-§. Комплекс ўзгарувчининг функциялари

Агар ҳар қандай комплекс соннинг бирор E тўпламга тегишли ёки тегишли эмаслигини кўрсатадиган усул бизга маълум бўлса, у ҳолда комплекс сонларнинг E тўплами берилган дейилади. Мисол учун E тўплам $|z| < 1$ доира ичидаги барча

$z = x + iy$ нуқталардан иборат бўлса у ҳолда $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}i$ сон E тўпламга тегишли, чунки $\left| \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}i \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{17}{36}} = \frac{\sqrt{17}}{6} < 1$, $2 - 3i$ сон E тўпламга тегишли эмас, чунки

$$|2 - 3i| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} > 1,$$

яъни $2 - 3i$ нуқта доира ташқарисида ётади.

Таъриф. Агар E тўпладан олинган ҳар бир $z = x + iy$ сонга бирор қонун бўйича тайин бир $w = u + iv$ комплекс сон мос келса, у ҳолда E тўпламда функция берилган дейилади ва $w = f(z)$ кўринишда ёзилади.

Демак, бу таърифдан кўринадики, $z = x + iy$ — аргумент, яъни эркин ўзгарувчи, $w = u + iv$ эса унинг функциясидир. E тўпламдаги ҳар бир сон z аргументнинг қийматидан иборат бўлиб, у тўплам $w = f(z)$ функциянинг аниқланиш (берилиш) соҳаси дейилади. Агар z нинг ҳар бир қийматига w нинг биргина қиймати мос келса, $w = f(z)$ бир қийматли, акс ҳолда кўп қийматли функция дейилади. Масалан,

$$w = z^2, w = \frac{1}{z}, w = 3z^3$$

функциялар бир қийматли бўлиб,

$$w = \sqrt{z}, w = \sqrt[n]{z}, w = \frac{1}{\sqrt{z-1}}$$

эса кўп қийматли функциялардир. Маълумки, агар z берилган бўлса, x ва y лар берилган бўлади. Юқоридаги таърифга кўра $w = f(z)$ берилган бўлса, u ва v лар берилган демакдир. Равшанки, u ва v лар ҳам x ва y ларнинг функцияларидир:

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \quad (1)$$

Шундай қилиб,

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y), \\ v &= v(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

яъни битта $w = f(z)$ муносабат (2) иккита муносабатга эквивалентдир. Биз келгусида функцияни қуйидаги икки хил кўринишда ҳам ишлатамиз:

$$w = f(z) \text{ ва } w = u + iv(z = x + iy).$$

Агар бизга комплекс узгарувчининг элементар функциялари берилган бўлса, уларни (1) кўринишдан (2) кўринишга содда амаллар ёрдами билан ўтказиш, $f(z)$ функциянинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини ажратиш мумкин.

Мисоллар.

1. $w = z^2$ берилган бўлсин. Бундан

$$u + iv = w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

$$u = x^2 - y^2, v = 2xy$$

ҳосил бўлади. Берилган бу функциянинг аниқланиш соҳаси E тўла комплекс текисликдан иборатдир.

2. $w = \frac{1}{z}$ берилган бўлса, бундан

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \text{ ва } v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

келиб чиқади. Бу функциянинг аниқланиш соҳаси текисликнинг, нолдан бошқа, ҳамма нуқталаридан иборат, чунки $w = \frac{1}{z}$ функцияда $z \neq 0$.

Ҳар бир комплекс сонга текисликда тайин битта нуқтанинг мос келишлигидан фойдаланиб комплекс узгарувчи функциясининг геометрик маъносини аниқлаймиз. Бунинг учун z нинг қийматларига тегишли нуқталарни (z) текисликка, $w = f(z)$ функциянинг қийматларига тегишли нуқталарни эса (w) текисликка жойлаймиз. У вақтда (z) текисликдаги E тўпладан олинган ҳар бир z нуқтага (w) текисликда бирор w нуқта мос келади. Натижада E тўпламнинг акси (w) текисликка тушиб бирор E_1 тўпламни ҳосил қилади (20-чизма).

Шундай қилиб, $w = f(z)$ функционал муносабат ёрдами билан (z) текисликдаги E тўпламни (w) текисликдаги E_1 тўпламга кучираб эканмиз. Бу эса E тўпламни E_1 тўпламга акс эттириш (ёки акслантириш) дейилади.

Агар $w = f(z)$ функция E тўпламда бир қийматли функция бўлса ва E нинг иккита турли нуқтасига E_1 нинг ҳамма вақт иккита турли нуқталари мос келса (яъни $z_1 \neq z_2, f(z_1) \neq f(z_2)$), у ҳолда акслантириш ўзаро бир қийматли, $f(z)$ эса E соҳада бир варақли функция дейилади.

Одатда E_1 тўплам E нинг акси (образи), E эса E_1 нинг асли (прообрази) дейилади.

Акслантеришга доир содда мисоллар. Биз энди $w = f(z)$ функция ёрдами билан E тўпламини E_1 тўпламга акс эттиришга доир бир неча содда мисоллар келтирамиз.

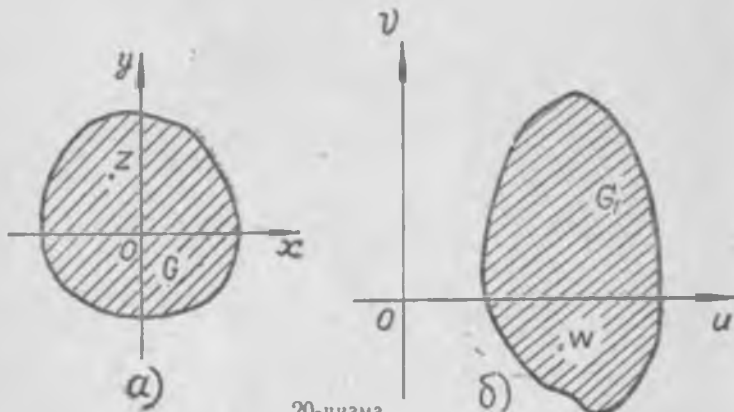
1. Берилган ушбу

$$w = mz$$

функция воситаси билан бажариладиган акслантеришни текширайлик (бунда $m > 0$).

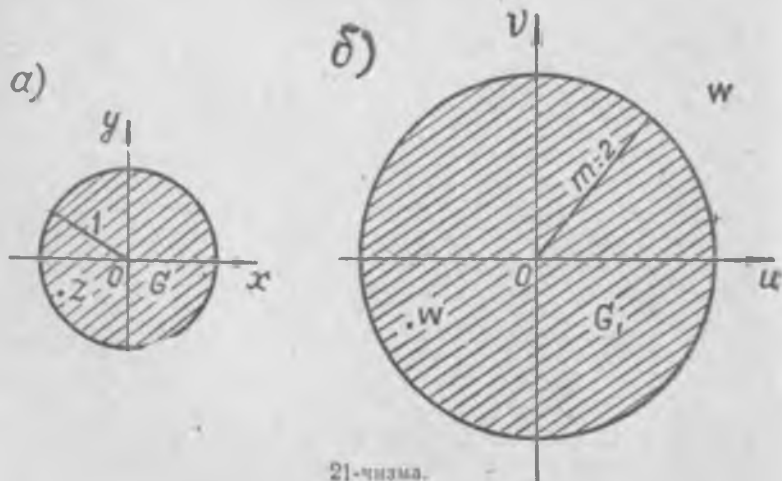
Аслида E тўплам масалада берилган бўлади, шунга қараб унинг E_1 образи топилади. Бизнинг мисолда E деб $|z| < 1$ ёпиқ бирлик доирани олайлик, бу бизга G тўпламини беради. У ҳолда

$$|w| = |mz| = m|z| < m$$



20-чизма.

га эга бўламиз. Бу эса G_1 ни тасвир қилиб, у m радиусли доирадан иборатдир. Биз 21-чизмада $m = 2$ деб олдик. Хусусий ҳолда $|z| = 1$ айлана образи $|w| = m$ айланадан иборат бўлади:



21-чизма.

Агар олдинги мисолимизда G соҳа сифатида 22-чизмадаги учбурчакни олсак, унинг образини топиш учун қуйидагича мулоҳаза қиламиз. Дастлаб, $z = x + iy$ ва $w = u + iv$ сонларни тригонометрик шаклда ёзиб оламиз:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \\ w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (3)$$

У ҳолда

$$mz = w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \\ = mr(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

бундан

$$\rho = mr, \quad \theta = \varphi \quad (3')$$

ҳосил булади. Энди z ва w сонларнинг ҳар бирига бит-

тадан вектор мос келади, деб қараймиз. У ҳолда (3') га кўра z нинг w образини топиш учун z га тегишли векторнинг r узунлигини m марта чузиш керак. Лекин вектор бурилмайди, чунки $\theta = \varphi$ (қулай булсин учун xOy ва uOv координаталар системаларини битта қилиб олдик). Агар $0 < m < 1$ булса, G учбурчакнинг акси G_1 кичрайиб қолиши аён (22-чизмада $m = 2$ деб олинди).

2. Берилган ушбу

$$w = z^2$$

функция воситаси билан бажариладиган акслангиришни аниқлайлик.

Муавр формуласига асосан:

$$w = z^2 = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^2 = r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi).$$

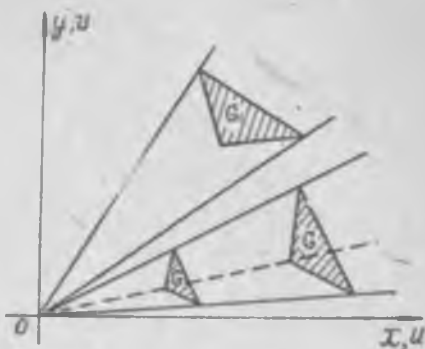
Буни (3) билан солиштирсак

$$\rho = r^2 \quad \text{ва} \quad \theta = 2\varphi$$

тенгликларга эга бўламиз. Маълумки, $|z| = r$, $\arg z = \varphi$ ва $|w| = \rho$, $\arg w = \theta$. Демак, z нуқтанинг w образини топиш учун r урнига $\rho = r^2$ ва φ ўрнига $\theta = 2\varphi$ олиш керак. Бошқача айтганда z векторни φ бурчакка буриб, $r = |z|$ марта чузиш (агар $r < 1$ булса, чузиш урнига қисқартириш) керак.

Агар G деб $|z| \leq \frac{1}{2}$ доирани олсак, G_1 соҳа $|w| = |z|^2 \leq \frac{1}{4}$ доирадан иборат бўлиб қолади.

Агар G сифатида қандайдир учбурчак олсак, унинг G_1 акси уша учбурчакка ўхшаш учбурчак бўлиб, олдинги учбурчакка нисбатан уридан $r = |z|$ қадар силжиган ва соат стрелкасига тесқари йуналишда φ бурчакка бурилган булади (22-чизма).



22-чизма

Акслантиришга доир содда мисоллар. Биз энди $w = f(z)$ функция ёрдами билан E тўпламини E_1 тўпламга акс эттиришга доир бир неча содда мисоллар келтирамиз.

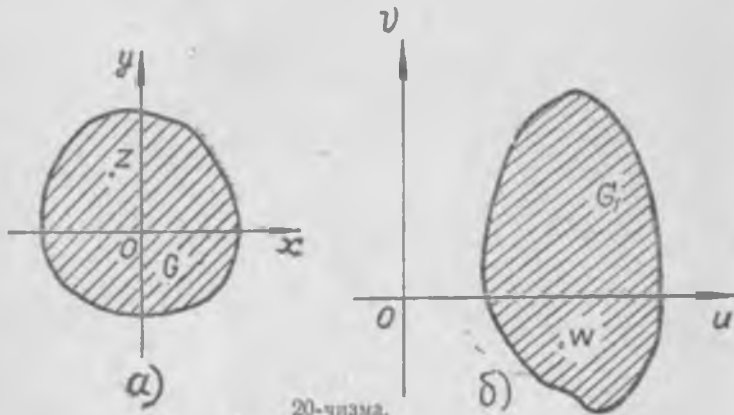
1. Берилган ушбу

$$w = mz$$

функция воситаси билан бажариладиган акслантиришни текширайлик (бунда $m > 0$).

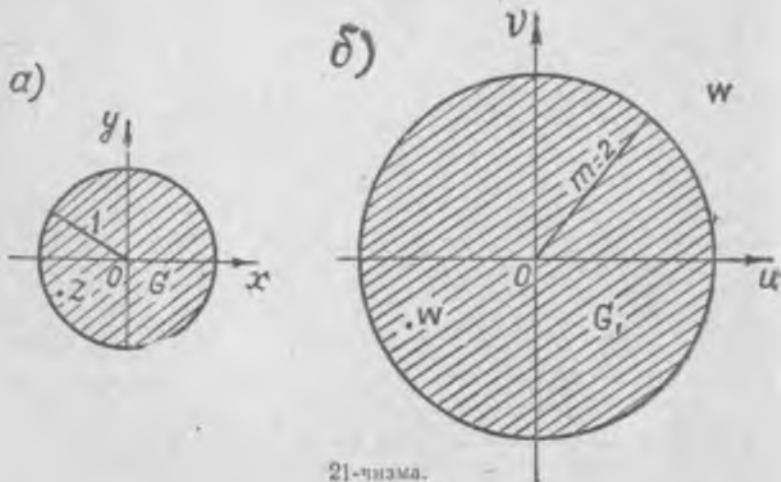
Аслида E тўплам масалада берилган бўлади, шунга қараб унинг E_1 образи топилади. Бизнинг мисолда E деб $|z| < 1$ ёпиқ бирлик доирани олайлик, бу бизга G тўпламини беради. У ҳолда

$$|w| = |mz| = m|z| < m$$



20-чизма.

га эга бўламиз. Бу эса G_1 ни тасвир қилиб, у m радиусли доирадан иборатдир. Биз 21-чизмада $m = 2$ деб олдик. Хусусий ҳолда $|z| = 1$ айлана образи $|w| = m$ айланадан иборат бўлади:



21-чизма.

Агар олдинги мисолимизда G соҳа сифатида 22-чизмадаги учбурчакни олсак, унинг образини топиш учун қуйидагича мулоҳаза қиламиз. Дастлаб, $z = x + iy$ ва $w = u + iv$ сонларни тригонометрик шаклда ёзиб оламиз:

$$\begin{aligned} z &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \\ w &= \rho(\cos \theta + i \sin \theta). \end{aligned} \quad (3)$$

У ҳолда

$$\begin{aligned} mz &= w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \\ &= mr(\cos \varphi + i \sin \varphi), \end{aligned}$$

бундан

$$\rho = mr, \quad \theta = \varphi \quad (3')$$

ҳосил бўлади. Энди z ва w сонларнинг ҳар бирига бит-

тадан вектор мос келади, деб қараймиз. У ҳолда (3') га кўра z нинг w образини топиш учун z га тегишли векторнинг r узунлигини m марта чўзиш керак. Лекин вектор бурилмайди, чунки $\theta = \varphi$ (қулай бўлсин учун xOy ва uOv координаталар системаларини битта қилиб олдик). Агар $0 < m < 1$ бўлса, G учбурчакнинг акси G_1 кичрайиб қолиши аён (22-чизмада $m=2$ деб олинди).

2. Берилган ушбу

$$w = z^2$$

функция воситаси билан бажариладиган акслангиришни аниқлайлик.

Муавр формуласига асосан:

$$w = z^2 = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^2 = r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi).$$

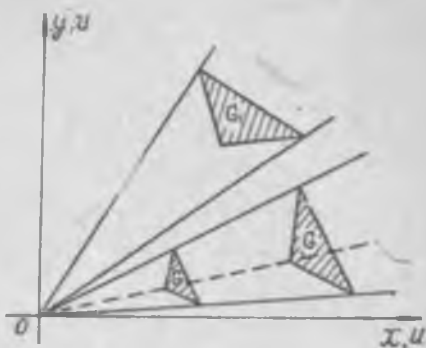
Буни (3) билан солиштирсак

$$\rho = r^2 \quad \text{ва} \quad \theta = 2\varphi$$

тенгликларга эга бўламиз. Маълумки, $|z| = r$, $\arg z = \varphi$ ва $|w| = \rho$, $\arg w = \theta$. Демак, z нуқтанинг w образини топиш учун r урнига $\rho = r^2$ ва φ урнига $\theta = 2\varphi$ олиш керак. Бошқача айтганда z векторни φ бурчакка буриб, $r = |z|$ марта чўзиш (агар $r < 1$ бўлса, чўзиш урнига қисқартириш) керак.

Агар G деб $|z| \leq \frac{1}{2}$ доирани олсак, G_1 соҳа $|w| = |z|^2 \leq \frac{1}{4}$ донрадан иборат бўлиб қолади.

Агар G сифатида қандайдир учбурчак олсак, унинг G_1 акси ўша учбурчакка ўхшаш учбурчак бўлиб, олдинги учбурчакка нисбатан уридан $r = |z|$ қадар силжиган ва соат стрелкасига тескари йуналишда φ -бурчакка бурилган бўлади (22-чизма).



22-чизма

3. Берилган $w = z^2$ функция ёрдами билан (z) текисликдаги Ox уққа параллел бўлган $y = a$ чизиқлар онласининг (23-чизма) (w) текисликдаги акси қандай чизиқлардан иборат бўлиши аниқлансин (a — ҳақиқий сон).

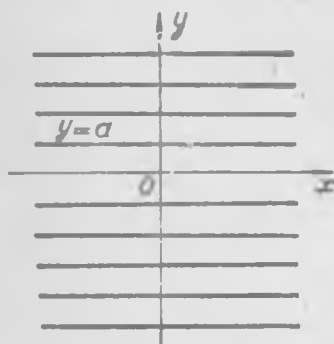
Маълумки, $z = x + iy$, $w = u + iv$ ва $w = z^2$ дан

$$u = x^2 - y^2, v = 2xy \quad (4)$$

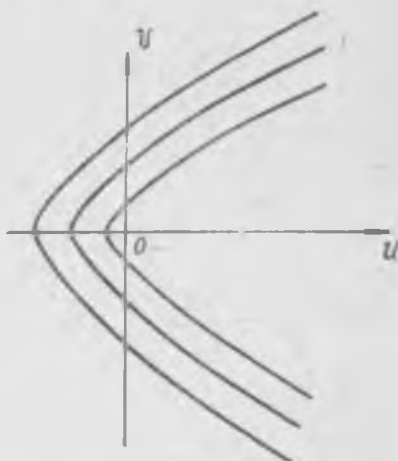
тенгликлар келиб чиқади. Буларга $y = a$ ни қўйиб чиқсак,

$$u = x^2 - a^2, v = 2ax$$

ёки бунинг иккинчисидан x нинг қийматини топиб, биринчисига қўйилса



23-чизма.



24-чизма.

$$u = \frac{v^2}{4a^2} - a^2$$

бўлади. Параметр a га турлича ҳақиқий қийматлар берилса, сўнгги тенглама ҳақиқий уққа симметрик параболалар онласини тасвирлайди (24-чизма).

Демак, $y = a$ тўғри чизиқлар онласининг образи (акси) уша параболалар онласидан иборат экан. Агар биз $w = z^2$ функция урнига бошқа бир функция олсак, y ҳолда $y = a$ нинг акси, шубҳасиз, бошқа эгри чизиқлар онласини берар эди.

Энди биз Ox уққнинг акси (w) текисликда қандай чизиқдан иборат бўлишини текшириб курайлик. Унинг учун $y = 0$ ни (4) тенгламаларга қўйиб чиқамиз:

$$u = x^2 > 0, v = 0.$$

Бу эса Ou уққнинг мусбат томонини билдиради. Демак, Ox , яъни $y = 0$ чизиқнинг образи Ou уққнинг фақат мусбат томонидан иборат экан.

Худди мана шу усулда Oy ўққа параллел бўлган $x = a$ тўғри чизиқлар оиласини $w = z^2$ функция ёрдами билан (w) текисликка акс эттирилса,

$$u = a^2 - \frac{v^2}{4a^2}$$

параболалар оиласи ҳосил бўлиб, уларнинг учлари Oy ўқнинг ўнг томонига жойлашган бўлади. Шунингдек, $x = 0$ ўқнинг акси эса Ox ўқнинг манфий томонидан иборат бўлиб қолади.

2-§. Мураккаб ва тескари функциялар

Берилган $w = f(z)$ функция воситаси билан унинг аниқланиш соҳаси G нинг бирор G_1 соҳага акс эттирилиши бизга маълум. Бундан ташқари G_1 соҳада $\omega = \Phi(w)$ функция берилган бўлса унинг ёрдами билан G_1 ҳам бирор G_2 соҳага акс эттирилади. У ҳолда:

$$\omega = F(z) = \Phi[f(z)] \quad (5)$$

мураккаб функция дейилади, унинг воситасида G соҳа G_2 га акслантирилади (25-чизма).

Мисол. $\omega = w^3$, $w = \frac{1}{\sqrt{z}}$.

Бунда ω мураккаб функция бўлиб,

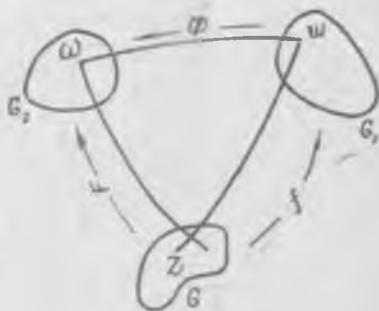
$$\omega = w^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^3 = z^{-\frac{3}{2}}.$$

Фараз этайлик, G соҳани G_1 соҳага акслантирувчи $w = f(z)$ функция берилган бўлсин. Умуман олганда айрим ҳолларда G соҳадаги бир неча нуқталарга G_1 соҳада битта нуқта мос келиб қолиши ҳам мумкин.

Аксинча, агар $z = \varphi(w)$ функция ёрдами билан G_1 соҳадаги ҳар бир w нуқта G соҳага акс эттирилганда айрилган нуқталар (яъни $w = f(z)$ воситаси билан w га акс эгирилган z нуқталар) мос келса, у ҳолда

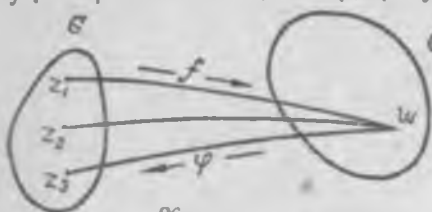
$$z = \varphi(w) \quad (6)$$

берилган $w = f(z)$ функцияга нисбатан тескари функция дейилади (26-чизма).



25-чизма.

Агар $w = f(z)$ акслантириш ўзаро бир қийматли бўлса, яъни G соҳадаги ҳар бир нуқтага G , соҳада фақатгина битта нуқта ва, аксинча, G_1 даги ҳар бир нуқтага G дан ҳам фақатгина битта нуқта мос келса, у ҳолда тескари $z = \varphi(w)$ функция ҳам бир қийматли бўлади. Агар G_1 даги ҳар бир w нуқтага G ичида бир неча нуқталар мос келса, $z = \varphi(w)$ кўп қийматли функция бўлади.



26-чизма

Математик анализ курси-дан маълумки, $z = (\varphi w)$ тескари функцияни топиш учун агар $w = f(z)$ аналитик ифода билан берилган бўлса, бундан z ни аниқлаб олиш керак (яъни $w = f(z)$ тенгламани z га нисбатан ечиш керак). Хусусий ҳолда, $w =$

$= f(z)$ ва унга тескари $z = \varphi(w)$ лар ўзаро бир қийматли акслантиришдан иборат бўлса, у ҳолда $\varphi[f(z)] = z$ бўлади.

Мисоллар.

1. Тўғри функция

$$w = \frac{z}{z + i} \quad (z \neq -i)$$

берилган. Бунини z га нисбатан ечсак

$$z = \frac{iw}{1 - w} \quad (w \neq 1)$$

тескари функция ҳосил бўлади.

Бу мисолда инверсия функция ҳам бир қийматлидир. Шу сабабли

$$\varphi[f(z)] = \frac{i\left(\frac{z}{z+i}\right)}{1 - \frac{z}{z+i}} = \frac{iz}{z+i-z} = z.$$

$$2 \quad w = \frac{z^2}{3}$$

тўғри функция берилган. Бунини z га нисбатан ечсак

$$z = \sqrt[3]{3w}$$

тескари функция келиб чиқади. Бу мисолда тўғри функция бир қийматли бўлиб, тескарисини тўрт қийматли функциядир.

3. Берилган тўғри функция $w = \sqrt[3]{z}$ уч қийматлидир. Бундан тескари $z = w^3$ функцияни топсак, у бир қийматли эканлигини кўраимиз.

3-§. Функциянинг лимити ва узлуксизлиги

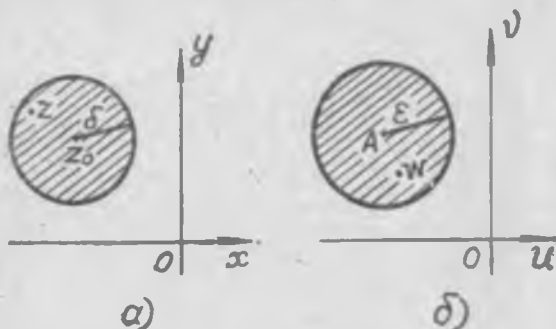
Энг аввал лимит тушунчаси ҳақида тўхталамиз: агар бирор z_0 нинг исталган атрофида G га тегишли (z_0 дан бошқа) а қалли бир нуқта бўлса, шу z нуқта G учун лимит нуқта бўлади. Умуман z_0 нуқта G га тегишли бўлмаслиги ҳам мумкин.

Текисликдаги бирор G соҳада аниқланган бир қийматли $w = f(z)$ функция берилган бўлиб, z_0 нуқта G нинг лимит нуқтаси бўлсин. Биз мана шу функциянинг z ўзгарувчи z_0 (қўзғалмас) нуқтага интилгандаги лимити билан танишамиз.

Таъриф. Агар тайин A комплекс сон ва исталганча кичик мусбат ε сон учун шундай $\delta(\varepsilon) > 0$ сонни топиш мумкин бўлсаки, $|z - z_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган ҳамма $z (z \neq z_0)$ лар учун $|f(z) - A| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, A сон $f(z)$ функциянинг z ўзгарувчи z_0 нуқтага интилгандаги лимити аталиб қуйидагича ёзилади:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A. \quad (7)$$

Яъни: ҳар қандай кичик $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta(\varepsilon)$ мусбат сонни топиш мумкин бўлсаки, z_0 нуқтанинг δ -атрофи ичидан олинган G га тегишли (z_0 дан фарқли) барча нуқталарга мос бўлган G га тегишли $w = f(z)$ нуқталар A нуқтанинг ε -атрофи ичида жойлашган бўлса, A сон $f(z)$ нинг z ўзгарувчи z_0 га интилгандаги лимити дейилади (27-чизма).



27-чизма.

$A = B + iC$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ва $z_0 = x_0 + iy_0$ бўлсин. У ҳолда (7) комплекс муносабатнинг қуйидаги икки ҳақиқий муносабатларга эквивалент эканлигини кўриш қийин эмас:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = B, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = C.$$

Бу изоҳдан ҳақиқий аргументли функцияларнинг лимитлари устидаги энг содда амалларни ҳеч ўзгаришсиз комплекс аргументли функцияларнинг лимитларига ҳам кўчириш мумкинлиги келиб чиқади. Масалан, $f(z)$ ва $\varphi(z)$ функциялар G соҳада аниқланган бўлиб,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A_1, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = A_2,$$

Мана шуларга асосан (10) дан:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\Delta u + i \Delta v) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w = 0.$$

Бундан эса

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta u = 0 \text{ ва } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta v = 0 \quad (11)$$

(11) тенг.ликлар

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \quad (12)$$

функцияларнинг (x_0, y_0) нуқтада узлуксизлигини билдиради.

Шундай қилиб, комплекс ўзгарувчили $w = f(z)$ функциянинг $z_0 = x_0 + iy_0$ нуқтадаги узлуксизлигидан унинг ҳақиқий $u(x, y)$ ва мавҳум $v(x, y)$ қисмларининг (x_0, y_0) нуқтада узлуксизлиги келиб чиқади. Ақсинча, (12) ларнинг узлуксизлигидан $w = f(z)$ нинг узлуксизлиги келиб чиқади. Дарҳақиқат, агар (11) мавжуд бўлса, ундан (10) келиб чиқиши аён.

Агар берилган $w = f(z)$ функция G соҳанинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, у ҳолда функция G соҳада узлуксиз дейилади.

1-мисол. $w = z^2$. $z_0 = x_0 + iy_0$ ихтиёрий ўзгармас сон (қўзғалмас нуқта).

$$\begin{aligned} \Delta w &= (z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2 = 2z_0 \cdot \Delta z + (\Delta z)^2; \\ \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} [2z_0 \cdot \Delta z + (\Delta z)^2] = 0. \end{aligned}$$

Демак, $w = z^2$ функция текислиқнинг ҳар қандай z нуқтасида узлуксиздир (чунки z_0 деб ихтиёрий нуқтани олдик).

2-мисол. $w = \bar{z} = x - iy$ бўлса,

$$\Delta w = \Delta x - i \Delta y, \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta w = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (\Delta x - i \Delta y) = 0.$$

Демак, бу функция ҳам текислиқнинг ҳамма чекли нуқталарида узлуксиз.

3-мисол. $w = \frac{1}{z}$.

$$\Delta w = \frac{1}{z_0 + \Delta z} - \frac{1}{z_0} = \frac{-\Delta z}{z_0(z_0 + \Delta z)}.$$

Агар $z_0 \neq 0$ бўлса, ўнг томондаги каср нолга интилади, яъни:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w = -\frac{1}{z_0} \cdot \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{z_0 + \Delta z} = 0.$$

Демак, $\frac{1}{z}$ функция текислиқнинг $z_0 = 0$ дан бошқа барча нуқталарида узлуксиз.

4-мисол. $w = 3xy - 5(x + y^2)i$.

Биринчи функциянинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини белгилаб олайлик
 ва уларнинг орттирмаларини ҳисоблайлик:

$$u = 3xy, v = -5(x + y)^2.$$

$$\Delta u = 3[(x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy] = 3[x\Delta y + y\Delta x + \Delta x \cdot \Delta y],$$

$$\Delta v = -5[(x + \Delta x + (y + \Delta y))^2 - (x + y)^2] = -5[\Delta x + 2y \cdot \Delta y + (\Delta y)^2].$$

Энди $\Delta z = \Delta u + i\Delta v$ ни нолга интилтирсак, Δx ва Δy лар ҳам нолга интилади,
 у ҳолда

$$\lim \Delta u = 0, \lim \Delta v = 0,$$

демак,

$$\lim \Delta w = \lim (\Delta u + i\Delta v) = 0.$$

Шундай қилиб, берилган функция ҳар қандай чекли (x, y) , яъни $z = x + iy$ нуқтада узлуксиз экан.

Узлуксиз функциянинг хоссалари. Агар $w = f(z)$ функция ёпиқ $\bar{G}$ соҳада, ёпиқ эгри чизиқда ёки икки чеккадаги нуқталарни ўз ичига оладиган кесмада (бу кесма тўғри чизиқнинг ёки эгри чизиқнинг бир қисми бўлиши мумкин) узлуксиз бўлса, у ҳолда функция қуйидаги асосий хоссаларга эга.

1-хосса. Ёпиқ $\bar{G}$ соҳада узлуксиз бўлган $w = f(z)$ функция шу соҳада чегараланган бўлади, яъни шундай узгармас мусбат $M \neq \infty$ сон мавжудки, G даги ҳамма z нуқталар учун

$$|f(z)| < M.$$

2-хосса. Ёпиқ $\bar{G}$ соҳада узлуксиз бўлган $w = f(z)$ функция шу соҳада энг катта модулли ва энг кичик модулли қийматларга эгадир, яъни $\bar{G}$ да шундай z_1 ва z_2 нуқталар борки, улар учун:

$$|f(z_1)| > |f(z)| \text{ ва } |f(z_2)| < |f(z)|.$$

3-хосса. Ёпиқ $\bar{G}$ соҳада узлуксиз бўлган $w = f(z)$ функция шу соҳада текис узлуксиз бўлади, яъни ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун, фақат ε га боғлиқ булган шундай $\delta > 0$ сонни топиш мумкинки, $|z'' - z'| < \delta$ тенгсизлиқни қаноатлантирувчи $\bar{G}$ соҳа ичидаги ҳар қандай иккита z' ва z'' нуқта учун

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Бу хоссаларнинг исботлари математик анализдагига ўхшаш бўлганлиги учун уларни исботлашни машқ сифатида китоб-хонга тавсия қиламиз.

4-§. Комплекс ўзгарувчи функциясининг ҳосиласи

Комплекс текисликдаги бирор G соҳада аниқланган бир қиймагли $w = f(z)$ функция берилган бўлиб, $z_0 \in G$ бўлсин. Бизга маълумки, аргумент z ортгирмаси $\Delta z = z - z_0$ айирмадан иборат бўлиб, функциянинг унга мос ортгирмаси эса

$$\Delta w = \Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0).$$

Таъриф. Агар Δz ни ҳар қандай йўл (қонун) билан нолга яқинлаштирганда ҳам $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ нисбат фақат биргина аниқ лимитга интилса, ўша лимит $f'(z)$ функциянинг z_0 нуқтадаги ҳосиласи дейилади:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \quad (13)$$

Мана шу ҳосила қисқача w' , $f'(z_0)$, $\frac{dw}{dz}$, $\frac{df}{dz}$ кўринишда белгиланади. Энди қуйидаги

$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $\Delta w = \Delta u + i\Delta v$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ тенгликларга асосан (13) ни ушбу кўринишда ёзиш ҳам мумкин:

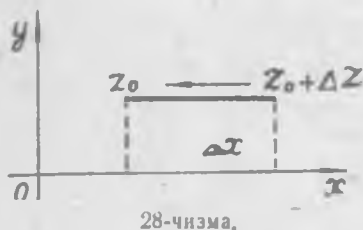
$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}. \quad (14)$$

Таъриф. Агар $w = f(z)$ функция z_0 нуқтада ҳосилага эга бўлса, уни бу нуқтада дифференциалланувчи (ёки моноген) функция дейилади.

Агар функция z_0 нуқтада ҳосилага эга бўлса, (13) лимит мавжуд бўлиб, у $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ нинг қандай қонун билан нолга интилишига мутлақо боғлиқ эмаслиги таърифдан кўринади.

Шу сабабли биз $z_0 + \Delta z$ нуқтани,

Ох ўққа параллел бўлган йўл билан z_0 нуқтага яқинлаштиришимиз ҳам мумкин. Унинг учун $\Delta z = \Delta x$, яъни $\Delta y = 0$ деб оламиз (28-чизма), у ҳолда (13) дан:



$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (15)$$

Шунингдек, агар $\Delta x = 0$, яъни $\Delta z = i\Delta y$ деб олсак, Δz нинг нолга интилиши учун $z_0 + \Delta z$ нуқта z_0 нуқтага Оу га парал-

дел йул билан яқинлашиши керак (29-чизма). У ҳолда (13) тенгликдан қуйидаги келиб чиқади:

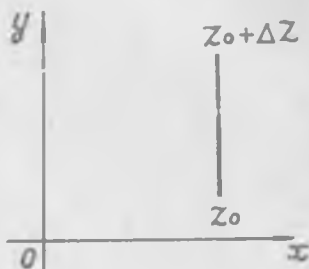
$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta v}{i\Delta y} + \frac{\Delta u}{\Delta y} \right) = -\frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (16)$$

чунки $\frac{1}{i} = -i$. Сунгги (15) ва (16) ларнинг чап томонлари, таърифга кўра тенг бўлгани учун ўнг томонлари ҳам ўзаро тенг бўлади:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y},$$

яъни

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (17)$$



29-чизма.

Мана шу иккала тенглик Даламбер—Эйлер шартлари деб аталади, уларни баъзан Коши Риман шартлари ҳам дейдилар.

Шундай қилиб, агар $w=f(z)$ функция z_0 нуқтада ҳосиллага эга бўлса, бундан (17) зарурий шартлари келиб чиқар экан. Бошқача айтганда биз қуйидагини исбот қилдик. Агар $w=f(z)$ функция z_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда

а) (x_0, y_0) нуқтада $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ хусусий ҳосилалар мавжуд бўлади.

б) Даламбер—Эйлернинг (17) шартлари бажарилади.

Етарли шартлар. Агар бирор икки аргументли $F(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада хусусий ҳосилаларга эга бўлса ҳам, ундан функциянинг ўша нуқтада тўла дифференциалга эга деган натижа келиб чиқмаслиги математик анализ курсидан маълум. Шунинг учун $u(x, y)$ ва $v(x, y)$ функцияларга қўшимча талаб қўямиз, яъни улар (x_0, y_0) нуқтада дифференциалланувчи, деб фараз қиламиз. Бундай функциялар учун (17) Даламбер—Эйлер шартларидан $f'(z_0)$ ҳосиланинг мавжудлиги келиб чиқишини кўрсатиш мумкин. Бошқача айтганда, бу ҳолда ҳосиланинг мавжуд бўлиши учун (17) шартлар етарли шартлардир. Биз ҳозир шунини исбот қиламиз.

Берилган икки аргументли $u(x, y)$ ва $v(x, y)$ функциялар (x_0, y_0) нуқтада дифференциалланувчи деб фараз қилганимиз учун уларнинг ортирмаларини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \alpha_1 |\Delta z|, \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \alpha_2 |\Delta z|, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

булардаги $|\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, α_1 ва α_2 лар эса Δz нолга инти-
лиши билан нолга интиладилар, яъни чексиз кичиклашувчи
миқдорлардир.

(18) га асосланиб,

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y\right) + (\alpha_1 + i\alpha_2)|\Delta z|}{\Delta x + i\Delta y}$$

тенгликни ёзиш мумкин. Биз энди (17) тенгликлар берилган
деб фараз этганимиз учун сўнгги тенгликдаги $\frac{\partial u}{\partial y}$ ўрнига (17)

даги $-\frac{\partial v}{\partial x}$ ни, $\frac{\partial v}{\partial y}$ ўрнига $\frac{\partial u}{\partial x}$ ни қўйсак,

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial v}{\partial x} \Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta y\right) + (\alpha_1 + i\alpha_2)|\Delta z|}{\Delta x + i\Delta y}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу тенгликни $i^2 = -1$ эканидан фойдала-
ниб, қуйидаги ҳолга келтира оламиз:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x + i\Delta y) + i \frac{\partial v}{\partial x} (\Delta x + i\Delta y) + (\alpha_1 + i\alpha_2)|\Delta z|}{\Delta x + i\Delta y},$$

бундан эса, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ эканини эсласак,

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}\right) + (\alpha_1 + i\alpha_2) \frac{|\Delta z|}{\Delta z}$$

тенглик келиб чиқади. Маълумки,

$$\left| \frac{|\Delta z|}{\Delta z} \right| = \frac{|\Delta z|}{|\Delta z|} = 1,$$

шу сабабли Δz нолга интилганда:

$$\left| \frac{\Delta w}{\Delta z} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}\right) \right| = |\alpha_1 + i\alpha_2| \rightarrow 0.$$

Сўнгги тенгликнинг маъноси қуйидагидан иборатдир:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Шундай қилиб, биз ушбу теоремани исбот қилдик.

Теорема. Бирор G соҳада аниқланган $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ функциянинг шу соҳага тегишли, z_0 нуқтада диф-
ференциалланувчи бўлиши учун $u(x, y)$ ва $v(x, y)$ функция-
ларнинг уша нуқтада дифференциалланувчи бўлишлари,
шунингдек

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

шартларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Агар $w = f(z)$ функция z_0 нуқтада дифференциалланган бўлса, унинг орттирмасини

$$\Delta w = \Delta f(z_0) = f'(z_0) \Delta z + \epsilon \cdot \Delta z \quad (19)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Мана шу (19) нинг икки томонидан лимит олсак,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w = 0$$

эканлигини кўраимиз. Демак, $w = f(z)$ функция z_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, u функция z_0 нуқтада узлуксиз ҳам булар экан. Аммо бунинг акси ҳар доим тўғри булавермайди, яъни берилган $w = f(z)$ функция z_0 нуқтада узлуксиз бўла туриб, u ўша нуқтада ҳосиллага эга бўлмаслиги ҳам мумкин.

5-мисол. $w = z = x - iy$. Бу функциянинг текисликдаги ҳамма нуқталарда узлуксизлиги бизга маълум эди.

Энди $u = x$, $v = -y$ лардан

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial v}{\partial y} = -1, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

ҳосил бўлиб,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$$

Даламбер—Эйлер шартларидан бири бузилди, демак, функция бирор нуқтада ҳам ҳосиллага эга эмас.

6-мисол. $w = 3xy - 5(x + y^2)i$.

Бунинг ҳам узлуксизлиги бизга маълум эди.

$$u = 3xy, v = -5(x + y^2).$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3y, \frac{\partial v}{\partial y} = -10y, \frac{\partial u}{\partial y} = 3x, \frac{\partial v}{\partial x} = -5.$$

Энди Даламбер—Эйлер шартларидан фойдаланиб қуйидаги тенгликларни ёзамиз:

$$3y = -10y, 3x = -5.$$

Бу тенгламаларни фақат, $y = 0$, $x = -\frac{5}{3}$ қаноатлантиради. Демак, берилган

функция фақат биттагина $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ яъни $z_0 = -\frac{5}{3}$ нуқтадагина ҳосиллага эга.

Бошқа нуқталарда функция узлуксиз, лекин дифференциалланувчи эмас, яъни ҳосиллага эга эмас.

Дифференциаллаш қоидалари. Олдинги икки параграфдан кўринадики, агар $w = f(z)$ нинг G соҳага тегишли бирор z нуқтадаги ҳосиласини топиш керак бўлса, (17) шартлардан фойдаланиб, қуйидаги тўртта формуланинг биридан фойдаланиш мумкин.

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (20)$$

Лекин функция $w = f(z)$ кўринишда берилган бўлса, яъни унинг ҳақиқий ва мавҳум қисми ажратилган бўлмаса, унинг ҳосиласини топмоқ учун (20) формулалардан фойдаланиш ноқулайлик туғдиради, чунки (20) формулалардан фойдаланиш

учун аввал $w=f(z)$ нинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини ажратиш зарур.

Комплекс ўзгарувчига боғлиқ функция ҳосиласининг юқорида келтирилган таърифи математик анализ курсида берилган таърифдан фарқ қилмайди. Шу сабабли $w=f(z)$ функциядан ҳосила олишда анализдан маълум бўлган формулалардан ва қоидалардан тўла фойдаланиш мумкин. Масалан, қўғидагиларни эслатиб ўтамиз:

$$1. \frac{dC}{dz} = 0, C — \text{ихтиёрий ўзгармас сон.}$$

$$2. \frac{dz}{dz} = 1. \quad 3. \frac{d}{dz} [f_1(z) \pm f_2(z)] = \frac{df_1(z)}{dz} \pm \frac{df_2(z)}{dz}.$$

$$4. \frac{d}{dz} [f(z)]^n = n[f(z)]^{n-1} \cdot f'(z)$$

ва ҳоказо.

5-§. Аналитик функциялар

1-таъриф. Агар бир қийматли $w=f(z)$ функция G соҳанинг барча нуқталарида дифференциалланувчи, яъни ҳосилага эга бўлса, у функция ўша соҳада аналитик¹ дейилади.

2-таъриф. Агар $w=f(z)$ функция z_0 нуқтада ва унинг бирор атрофида ҳам дифференциалланувчи бўлса, у функция шу нуқтада аналитик дейилади.

Агар $w=f(z)$ функция фақат z_0 нуқтада ҳосилага эга бўлиб, лекин унинг атрофида ҳосиласи мавжуд бўлмаса, у ҳолда функция z_0 нуқтада моноген бўлади. Демак, функциянинг z_0 нуқтада моноген бўлишидан унинг шу нуқтада аналитик бўлиши келиб чиқмайди.

3-таъриф. Агар бир қийматли $w=f(z)$ функция текисликнинг қайси нуқталарида аналитик бўлса, ўша нуқталар функциянинг тўғри (регуляр) нуқталари дейилади. Функция аниқланиш соҳасининг баъзи нуқталарида аналитик бўлмай қолса, ана шу нуқталар функциянинг маҳсуслар нуқталари деб аталади.

7-мисол. $w=x^2+y^2+ixy^3$ нинг аналитик ёки аналитик эмаслиги текширилсин

$$u = x^2 + y^2, \quad v = x y^3, \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y^3, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3xy^2.$$

Булардан кўринадики, Даламбер—Эйлер шартларининг бажарилиши учун $x=0, y=0$ бўлиши керак. Демак, $(0, 0)$ нуқтадагина дифференциалланувчи, бошқа нуқталарда ҳосиласи йўқ, яъни берилган функция аналитик эмас.

8-мисол. $w=z^2$ функциянинг аналитик ёки аналитик эмаслиги текширилсин.

¹ Аналитик функция голоморф, регуляр деб ҳам аталади.

Куриш оsonки:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 2z$$

ва демак, $w = z^2$ функция текисликнинг ҳаммасида аналитик бўлади.

6-§. Ҳосила аргументининг ва модулининг геометрик маъноси

Бирор G соҳанинг ҳар бир нуқтасида чекли ҳосилага эга бўлган, яъни шу соҳада аналитик бўлган $w = f(z)$ функция берилган бўлсин. G соҳага тегишли битта қўзғалмас z_0 нуқта олайлик. Берилган функциянинг шу нуқтадаги ҳосиласи нолдан фарқли бўлсин, яъни $f'(z_0) \neq 0$.

Қуйиладиган масала мана шу ҳосиланинг геометрик маъноси-ни текширишдан иборатдир. Шу мақсадда $w'_0 = f'(z_0)$ ўзгармас комплекс сонни тригонометрик шаклда ёзиб оламиз:

$$f'(z_0) = R(\cos \Phi + i \sin \Phi), \quad (21)$$

бунда

$$R = |f'(z_0)| \neq 0, \quad \Phi = \text{Arg } f'(z_0). \quad (22)$$

Биз ҳозирча мана шу Φ аргументни геометрик томондан текшириб чиқамиз. Ҳосила таърифини эсга олсак,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Бундан эса:

$$R = |f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}, \quad (23)$$

$$\Phi = \arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta z. \quad (24)$$

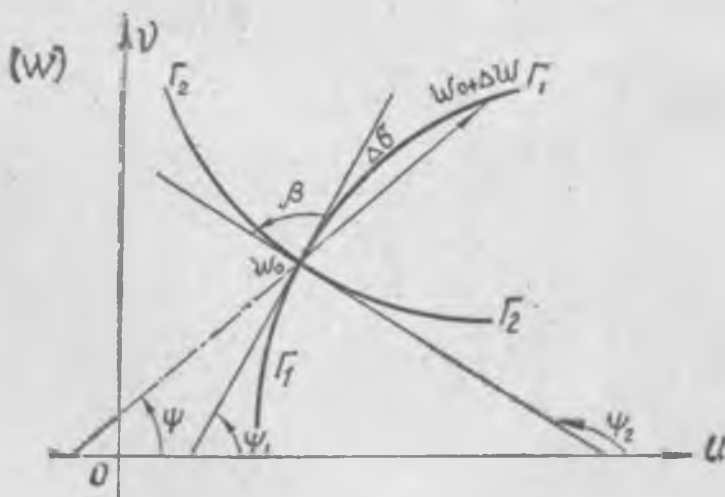
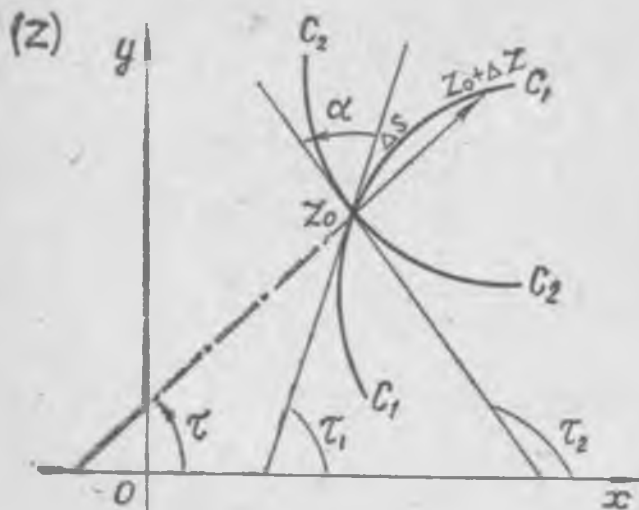
Бу ерда $\arg f'(z_0)$ деб $\text{Arg } f'(z_0)$ нинг қийматларидан биттасини олдик. (24) тенгликни ёзишда, касрнинг аргументи сурат аргументи билан махраж аргументи айирмасига тенглигидан фойдаландик.

Энди, $w = f(z)$ функция ёрдами билан (z) текисликдаги z_0 нуқтани (w) текисликка акслантирсак w_0 нуқта ҳосил бўлади. z_0 нуқтадан ихтиёрий равишда иккита C_1 ва C_2 чизиқ ўтказайлик. Уларга мос Γ_1 ва Γ_2 изиқлар w_0 нуқтадан ўтади. C_1 чизиқ устида яна битта ихтиёрий $z_0 + \Delta z$ нуқта олсак, унга мос $w_0 + \Delta w$ нуқта Γ_1 устида пайдо бўлади. Комплекс сонлар назариясидан маълумки, ҳар бир комплекс сонга текисликда битта вектор мос келади. Шунинг учун биз ушбу

$$\Delta z = (z_0 + \Delta z) - z_0, \quad \Delta w = (w_0 + \Delta w) - w_0$$

сонларни векторлар деб тушунамиз. Булардан биринчиси Δz вектор бўлиб, z_0 нуқтадан $z_0 + \Delta z$ нуқтага қаратилган. Иккинчи Δw вектор эса w_0 дан $w_0 + \Delta w$ нуқтага қаратилгандир. $|\Delta z|$ ва $|\Delta w|$ лар эса ўша векторларнинг узунликларидир. Шунингдек, $\arg \Delta z$ эса Δz вектор билан Ox ўқнинг мусбат томони орасидаги бурчакдир. ағр Δw ҳам Δw вектор билан Ou ўқнинг мусбат томони орасидаги бурчакдан иборатдир.

Агар биз $z_0 + \Delta z$ нуқтани C_1 чизиқ бўйлаб z_0 га яқинлаштирсак, Δz вектор ўша чизиққа z_0 нуқтада ўтказилган уринмага



30-ЧИЗМА.

интилади. Шунингдек; $\arg \Delta z$ бурчак τ_1 бурчакка интилади. У ҳолда $w_0 + \Delta w$ нуқта Γ_1 чизиқ бўйлаб w_0 га, Δw вектор w_0 нуқтадаги Γ_1 га утказилган уринмага интилади. Шунингдек $\arg \Delta w$ бурчак τ_1 бурчакка интилади. Мана шу сабабларга асосан, (24) дан

$$\Phi = \psi_1 - \tau_1 \quad (25)$$

келиб чиқади (30-чизма).

Агар $z_0 + \Delta z$ нуқтани C_2 чизиқ устида олиб, z_0 нуқтага яқинлаштирсак, Γ_2 чизиқ устидаги $w_0 + \Delta w$ нуқта w_0 га интилади. У ҳолда юқоридаги мулоҳазаларни айнан такрорласак, ушбу

$$\Phi = \psi_2 - \tau_2 \quad (26)$$

тенглик ҳосил булар эди. Агар (25) га эътибор қилсак, C_1 ни Γ_1 га акслантирганда z_0 нуқтада C_1 га утказилган уринма Φ бурчакка бурилиб, w_0 нуқтадаги Γ_1 га утказилган уринма устинга тушар экан. Бошқача айтганда, (w) текисликда C_1 нинг акси сифатида Γ_1 ҳосил бўлиб, у Φ бурчакка бурилар экан.

Худди шу фнкрни (26) тенглик устида юргизсак, C_2 акси Γ_2 нинг ҳам Φ бурчакка бурилганини кураимиз. Демак z_0 нуқтадан утадиган ҳамма эгри чизиқларнинг акси (w) текисликка бир хил бурчак остида бурилиб тушар экан.

Энди (25) ва (26) нинг чап томонлари узаро тенг бўлгани учун:

$$\psi_2 - \tau_2 = \psi_1 - \tau_1$$

ёки

$$\psi_2 - \psi_1 = \tau_2 - \tau_1, \text{ яъни: } \beta = \alpha. \quad (27)$$

Демак, z_0 нуқтадан ўтувчи C_1 ва C_2 чизиқлар орасидаги α бурчак билан уларга мос Γ_1 ва Γ_2 чизиқлар орасидаги β бурчак ўзаро тенг экан. Биз Ox ўқ билан Oy ўқнинг мусбат йўналишларини бир хил қилиб олганимиз учун α ва β бурчаклар миқдор томондан ҳам ва йўналиш томондан ҳам бир-бирига тенгдир.

Шундай қилиб, $w=f(z)$ аналитик функция ёрдами билан G соҳани G_1 га акслантирсак, у ҳолда бирор z_0 нуқтадан ўтувчи $C_1, C_2 \dots$ чизиқларнинг ҳаммаси бир хил $\Phi = \arg f'(z_0)$ бурчакка бурилар экан. Шунинг учун ҳам $C_1, C_2 \dots$ чизиқлар орасидаги бурчаклар ўзгармай қолади.

1-хосса. Демак, аналитик функция ёрдами билан ба-
жариладиган акслантириш $f'(z)$ ҳосила нолга тенг бўлма-
ган ҳамма нуқталарда бурчакларни сақлаш хоссасига эга-
дир.

Ҳосила модулининг геометрик маъноси. Ҳосила модулини геометрик томондан текшириш мақсадида олдинги пунктдаги (22) тенгликка мурожаат қиламиз.

Дастлаб ана шу нисбатнинг ўзини (лимитсиз) текшириб кў-
райлик:

$$k = \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}.$$

Бу нисбат $|\Delta w|$ ватарнинг $|\Delta z|$ ватарга қараганда k марта узунлигини билдиради, яъни C_1 чизиқни Γ_1 га акслантирганда $|\Delta z|$ ватар k марта чўзилиб тушар экан. Демак, агар $k > 1$ бўлса чўзилиб, $k < 1$ бўлса қисқариб ва $k = 1$ бўлса ўзгармай аксланади.

Юқоридаги $|\Delta z|$ ва $|\Delta w|$ ватарларни чексиз кичик миқдорлар деб фараз қиламиз. Шунинг учун уларнинг ўрнига, мос равишда ўзларига ёпишган Δs ва $\Delta \sigma$ ёйчаларни олиш мумкин, яъни:

$$k = \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} \approx \frac{\Delta \sigma}{\Delta s}. \quad (28)$$

Бу эса, Δs ни акслантирганда k марта чўзилиб (ёки қисқариб) $\Delta \sigma$ ҳосил бўлганлигидан дарак беради. Агар биз C_1 ўрнига C_2 чизиқни олсак ҳам худди шу ҳодиса такрорланади.

Агар (22) ва (28) тенгликларга эътибор қилсак, улардан қуйидаги

$$R = |f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \sigma}{\Delta s} \quad (29)$$

ҳосил бўлиб, бунини z_0 нуқтадан ўтувчи ҳар қандай C чизиқнинг чўзилиш коэффициентини дейилади. Бошқача айтганда, $w = f(z)$ ёрдами билан аксеттириш процессида ўтувчи исталган кичик ёй $R = |f'(z_0)|$ марта ўзгаришини кўрамыз.

Берилган $w = f(z_0)$ функция G соҳада аналитик бўлганлиги сабабли, $f'(z_0)$ ҳосиланинг қиймати $z_0 + \Delta z$ нуқтанинг z_0 га қайси йўл билан интилишига боғлиқ эмас. Шунинг учун ҳам z_0 дан ўтувчи барча чизиқлар учун чўзилиш коэффициентини бир хил бўлади, яъни z_0 нуқтада масштаб ўзгармасдир.

2-хосса. Аналитик функция ёрдами билан бажариладиган акслантириш, $f'(z)$ ҳосила нолга тенг бўлмаган барча нуқталарда ўзгармас чўзилишга эга.

7-§. Конформ акслантириш

Бундан олдинги параграфда айтилган гапларни эсга олсак, бундай натижага эришганимизни кўрамыз. $w = f(z)$ аналитик функция воситаси билан (z) текисликдаги бирор G соҳани (w) текисликка акслантирсак G_1 соҳа ҳосил бўлиб, қуйидаги икки ҳол рўй беради;

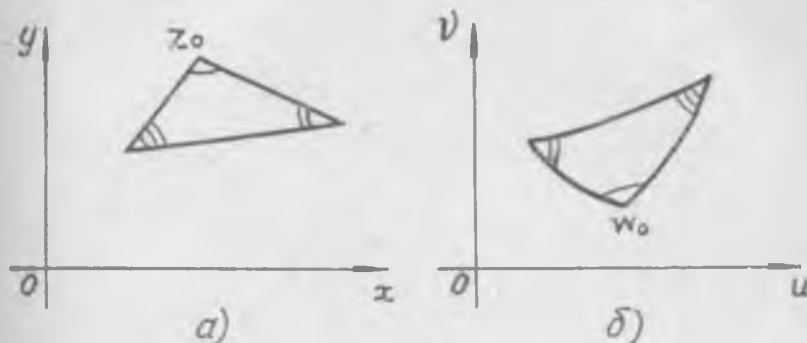
1) G га тегишли ихтиёрий z_0 нуқтадан ($f'(z_0) \neq 0$) ўтувчи ҳар қандай иккита чизиқ орасидаги бурчакнинг миқдори ҳам, йўналиши (саноқ бошланадиган нуқтадан йўналиши) ҳам ўзгармай қолади.

2) z_0 нуқтадан ўтувчи ҳамма чизиқларнинг z_0 га жуда яқин турган ёйчалари бир хилда чўзилади.

Мисол учун, бир учи z_0 нуқтадан иборат исталганча кичик учбурчакнинг $w = f(z)$ аналитик функция ёрдами билан акс-

лантирсак, бир учи w_0 нуқтадан иборат эгри чизиқли учбурчакка эга бўламиз. Лекин иккала учбурчакдаги мос бурчаклар ўзаро тенг бўлади (31-чизма).

Иккинчи мисол сифатида биз маркази z_0 нуқтага жойлашган кичик $\Delta\rho$ радиусли айлана олиб, уни ҳам ўша функция ёрдами билан акслантирсак унинг акси w_0 марказли ва $R\Delta\rho = |f'(z_0)|\Delta\rho$ радиусли айланани ўраб олган ёпиқ чизиқдан иборат бўлади.



31-чизма.

Равшанки, ўша иккала айлана билан чегараланган доира-ларнинг юзлари қуйидагича ифодаланади:

$$s = \pi\Delta\rho^2 \text{ ва } \sigma = \pi \cdot (R\Delta\rho)^2 = R^2 \cdot \pi\Delta\rho^2, \quad (30)$$

яъни $\sigma = R^2 s = |f'(z_0)|^2 s$ эканлигини кўрамиз. Бунинг маъноси шуки, z_0 атрофидаги чексиз кичкина доирани акслантирганда у, тахминан $R^2 = |f'(z_0)|^2$ марта кенгайиб аксланади (32-чизма). Шу сабабли $w = f(z)$ аналитик функция ёрдами билан акслантиришда $|f'(z_0)|^2$ сояни юзларни чўзиш (кенгайтириш) коэффициентини дейилади.



32-чизма.

Мана шу иккита мисолдан кўрамизки, z_0 нуқта атрофидаги исталганча кичик фигурани $w=f(z)$ аналитик функция ёрдамида акслантирсак, ўхшаш шакл ҳосил бўлади.

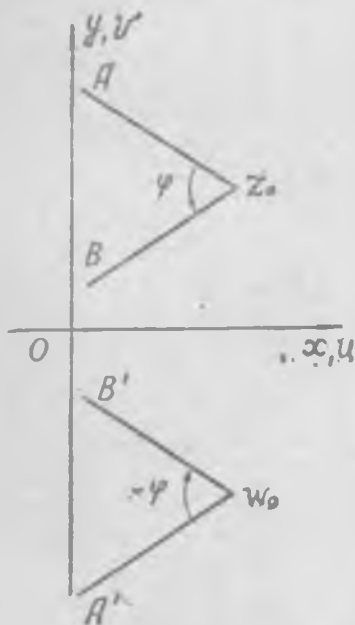
Таъриф. Бирор z_0 нуқтада 1) ва 2) хоссаларга эга бўлган $w=f(z)$ акслантириш шу нуқтада конформ (ўхшаш) акслантириш дейилади. Одатда бундай акслантириш I тур конформ акслантириш дейилади.

Шундай қилиб, сўнгги икки параграфдан мулоҳазаларимиз натижасида қуйидаги теоремани исбот қилдик.

Теорема. Агар $w=f(z)$ функция соҳада аналитик ва ундаги z_0 нуқтада $f'(z_0) \neq 0$ бўлса, у ҳолда $w=f(z)$ функция ёрдамида бажариладиган акслантириш z_0 нуқтада конформ бўлиб, $\arg f'(z_0)$ бурилиш бурчагини, $|f'(z_0)|$ эса z_0 нуқтадаги чизиқли чузилиш коэффициентини билдиради.

Изоҳ. Конформ — conformis латинча сўз бўлиб, ўхшаш демакдир. Бу теоремада $w=f(z)$ акслантиришга қўйилган $f'(z_0) \neq 0$ шарт муҳим шартдир. $w=z^2$ функцияни текширамиз. Бу функция $z=0$ нуқтадан ташқари ҳамма нуқтада конформ акслантиради. $z=0$ да эса $f'(0)=0$ бўлган сабабли акс эттириш конформ эмас.

Иккинчи тур конформ акслантириш. Маълумки $a=a+ib$ ва $\bar{a}=a-ib$ лар узаро қўшма комплекс сонлар бўлиб, уларга мос нуқталар текисликда Ox ҳақиқий ўққа нисбатан симметрик



33-чизма.

жойлашган. Фикримизни осонроқ баён этиш мақсадида xOy ва uOv координаталар системаларини битта текисликка жойлайлик. $w=z=x-iy$ функция воситаси билан $z=x+iy$ нуқталарни акслантирсак, уша текисликда Ox (демак, Oy) ўққа нисбатан симметрик нуқталар пайдо бўлади. Шунга асосан, z_0 нуқтадан чиққан икки тўғри чизиқ ва улар орасидаги φ бурчакни акслантирсак, худди кўзгуга туширилгандек, Ox га нисбатан симметрик бўлиб тушади. Шунинг учун φ бурчакнинг акси ($-\varphi$), яъни қарама-қарши томонга йўналган бўлиб тушади (33-чизма).

Агар функция ёрдами билан акслантириш натижасида z нуқтадаги чузилиш ўзгармаса ва бурилиш бурчагининг ҳам катталиги (миқдори) ўзгармай, фақат йўналиши қарама-қаршисига ўзгарса

у, II тур конформ акслантириш дейлади.

Агар $f(z)$ функция аналитик бўлса, $w = f(z)$ II тур конформ акслантириш бўлади. Ҳақиқатан, $w = f(z)$ акслантириш-ни иккита кетма-кет акслантириш ёрдами билан бажариш мумкин:

$$\zeta = f(z), \quad w = \bar{\zeta}.$$

Биринчи тур акслантиришда бурчак ҳам, миқдор ҳам йўналиш бўйича сақланади, иккинчи тур акслантиришда эса бурчакнинг йўналиши қарама-қаршисига ўзгаради. Чўзилиш эса ҳар икки ҳолда ҳам ўзгармайди.

Шундай қилиб, аналитик функцияга қўшма бўлган функция билан амалга ошириладиган акслантириш II тур конформ акслантиришдир.

Аксинча, ҳар қандай II тур конформ акслантириш аналитик функцияга қўшма бўлган функция билан амалга оширилади. Ҳақиқатан, агар $w = \varphi(z)$ II тур конформ акслантириш бўлса, $w = \varphi(z)$ I тур конформ акслантириш бўлиши керак, демак, $\varphi(z)$ текширилаётган соҳада аналитик функция: $\overline{\varphi(z)} = f(z)$, бундан:

$$f(z) = \overline{\varphi(z)}.$$

Биз бундан сўнг кўпинча I тур акслантириш билан иш кураимиз.

Мисоллар

1-мисол. $w = z^2$ аналитик функция ёрдами билан бажариладиган акслантиришда қуйидаги нуқталарнинг ҳар бирида рўй берадиган φ бурилиш бурчаги ва k чўзилиш коэффициенти аниқлансин:

$$\text{а) } z = \frac{1}{2}; \quad \text{б) } z = -\frac{1}{4}; \quad \text{в) } z = 1 + i; \quad \text{г) } z = \sqrt{3} - i.$$

$$\text{Е ч и ш. } w' = f'(z) = (z^2)' = 2z.$$

$$\text{а) } f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \neq 0; \quad 1 = \cos 0 + i \sin 0.$$

Демак, чўзилиш коэффициенти $k = \left|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right| = 1$, яъни бу нуқтада ҳеч қандай чўзилиш рўй бермайди.

$$\Phi = \arg f'\left(\frac{1}{2}\right) = \arg 1 = 0,$$

яъни бурилмайдн.

$$\text{б) } f'\left(-\frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} (\cos \pi + i \sin \pi) \neq 0.$$

$$\text{Демак, чўзилиш (қисқариш) коэффициенти } k = \left|f'\left(-\frac{1}{4}\right)\right| = \frac{1}{2}$$

бўлиб, бурилиш бурчаги $\Phi = \arg f'\left(-\frac{1}{4}\right) = \pi$ дан иборат.

$$в) f'(1+i) = 2(1+i) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \neq 0.$$

$$\text{Демак, } (1+i) \text{ нуқтада } k = |f'(1+i)| = 2\sqrt{2}; \quad \Phi = \arg f'(1+i) = \frac{\pi}{4}.$$

$$г) f'(\sqrt{3}-i) = 2(\sqrt{3}-i) \neq 0, \quad \operatorname{tg} \Phi = \frac{b}{a} = \frac{-2}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\Phi = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}; \quad 2(\sqrt{3}-i) = 4 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right).$$

$$\text{Демак, } k = |f'(\sqrt{3}-i)| = 4,$$

$$\Phi = \arg f'(\sqrt{3}-i) = \frac{11\pi}{6}.$$

2-мисол. $w = z^2 + 2z$ функция ёрдами билан акслантиришда z текисликнинг қайси қисми кенгайиб, қайси қисми торайиб аксланади?

Ечиш.

$$w = f(z) = z^2 + 2z, \quad f'(z) = 2z + 2.$$

Агар $k = |f'(z)| = |2z + 2| > 1$, яъни $|z + 1| > \frac{1}{2}$ бўлса кенгайиб, агар $|z + 1| < \frac{1}{2}$ бўлса торайиб аксланади. Демак, $|z + 1| < \frac{1}{2}$ доиранинг ички қисми торайиб, ташқи қисми эса кенгайиб аксланади. $|z + 1| = \frac{1}{2}$ айлана эса ўз ҳолича (кенгаймай ва тораймай) аксланади.

МАШҚЛАР

$w = z^2$ аналитик функция ёрдами билан бажариладиган акслантиришда қуйидаги нуқталарнинг ҳар биридаги бурилиш бурчаги Φ ва чўзилиш коэффициенти k топилсин: 1. $z = -\frac{1}{4}$; 2. $z = 1+i$; 3. $z = 3+4i$; 4. $z = \sqrt{3}-i$.

5. $w = \frac{1}{z}$ функция ёрдами билан акслантирилганда (z) текисликнинг қайси булаги торайиб ва қайси булаги кенгайиб аксланади?

ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАР ВА УЛАРГА МОС
КОНФОРМ АКСЛАНТИРИШЛАР

1-§. Чизиқли функция

Ўтган параграфларда биз $w = f(z)$ функция ёрдами билан (z) текисликдаги бирор G соҳани (w) текисликдаги G_1 соҳага акслантиришни ўргандик. Хусусий ҳолда, агар $w = f(z)$ функция G соҳада аналитик бўлса, биз конформ акслантиришга эга бўламиз.

Энди биз

$$w = f(z) = az + b \quad (1)$$

чизиқли функция воситаси билан бажариладиган акслантириш нимадан иборат эканлигини кўриб чиқамиз. Биз бундан кейин комплекс сонларни $a, b, c, d, \dots$ ҳарфлар билан, ҳақиқий сонларни эса $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ ҳарфлар билан белгилаймиз. Демак,

$$a = \alpha_1 + i\alpha_2 \text{ ва } b = \beta_1 + i\beta_2$$

комплекс сонлар бўлиб, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — ҳақиқий сонлардир.

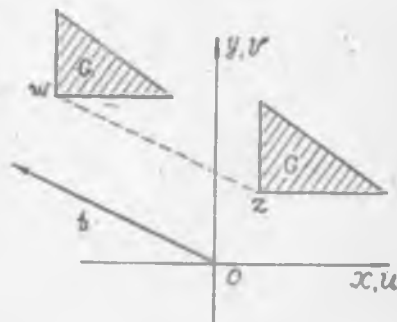
Масалани осонлаштириш мақсадида (1) функциянинг хусусий ҳолларини текшираемиз. Шунингдек, (z) ва (w) текисликларни бир жойдан оламиз, яъни Ox ва Ou лар умумий бошга эга уст-ма-уст тушган ҳақиқий, Oy ва Ov эса мавҳум уқлар дсб фарз қилинади.

1. $w = mz$ ($m > 0$), яъни (1) да $a = m, b = 0$ бўлсин. Бу ҳолни биз иккинчи бобда текширган эдик, $w = mz$ воситаси билан G соҳанинг аксини топсак, бунда G_1 соҳа пайдо бўлиб, иккита ўхшаш шаклга эга бўламиз (22-чизмага қаранг).

2. $w = z + b$, яъни (1) да $a = 1$.

Бунинг ўнг томонидаги йиғиндининг геометрик маъноси z ва b векторларни қўшиш демакдир. Унинг учун z нуқтани қўзғалмас b векторга параллел қилиб $|b|$ масофага силжитиш кифоя. Шу билан w нуқтани топган бўламиз. Агар G соҳа сифатида бирор учбурчакни олсак, унга мос G_1 ни топиш учун G нинг ҳар бир нуқтасини b вектор бўйлаб, юқоридагидек силжитамиз (34-чизма). Натижада G га тегишли шаклнинг катталиги ўзгармай, фақат ўз жойидан силжиган бўлади.

3. $w = e^{i\alpha}z$, яъни $b = 0, a = e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, бунда α — ҳақиқий сон.



34-чизма.

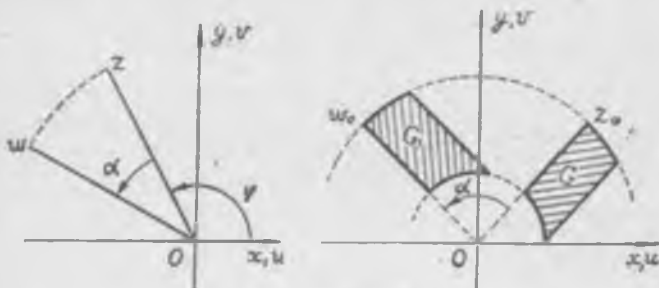
Маълумки,

$$\begin{aligned} w = e^{i\alpha} z &= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= r [\cos (\varphi + \alpha) + i \sin (\varphi + \alpha)]. \end{aligned}$$

Бу тенгликдан

$$|w| = r = |z| \text{ ва } \arg w = \varphi + \alpha$$

келиб чиқади. Демак, z нуқтанинг w аксини топиш учун z векторни (чузмасдан) фақат α бурчакка буриш керак экан. Умуман, G , соҳани топиш учун G соҳанинг нуқталарини аниқловчи векторларни α бурчакка буриш керак (35- чизма).



35- чизма.

4. Умумий ҳол. $w = az + b$. Фараз этайлик $a = me^{i\alpha} \neq 0$ бўлсин. Равшанки, бу функция воситаси билан бажариладиган акслантиришни юқоридаги уч ҳолга ажратиш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, агар биз қуйидагича

$$w = t_2 + b,$$

$$t_2 = mt_1,$$

$$t_1 = e^{i\alpha} z$$

деб белгилаб, сўнгра акс эттиришни пастдан бошласак, мақсадга эришамиз. Маълумки,

$$t_1 = e^{i\alpha} z$$

воситаси билан z векторни α бурчакка буриб t_1 векторга эга бўламиз. Шунингдек,

$$t_2 = mt_1$$

ёрдами билан t_1 векторни m марта узайтириб, t_2 нуқтага эга бўламиз. Сўнгра

$$w = t_2 + b$$

воситаси билан t_2 нуқтани b векторга параллел силжитиб w

нуқтани ҳосил қиламиз (36-чизма). Аслида берилган функцияга қуйидагича қайтиш мумкин:

$$w = t_2 + b = mt_1 + b = me^{ia} z + b = az + b.$$

Энди $w = f(z) = az + b$ алмаштиришнинг конформ эканлигини билиш учун унинг ҳосиласини оламиз:

$$f'(z) = (az + b)' = a = me^{ia} \neq 0, \\ |f'(z)| = m, \quad \Phi = \arg f'(z) = \alpha > 0$$

Бу эса I тур конформ акслантиришдир.

$\frac{1}{z}$ функция. Шу функция воситаси билан (z) текисликдаги бирор G соҳанинг (w) текисликдаги аксини аниқлаймиз. Бунинг учун I боб, 5-§ даги $\frac{1}{\alpha}$ нуқтанинг ўрнини қандай топганлигимизни эсга олиб, G нинг ҳар бир нуқтасини (w) га ўтказамиз (бу ўтказишни бажаришни китобхонларга ҳавола қиламиз).

Шунга асосан:

$$w = \frac{1}{z} \quad (2)$$

функция воситаси билан z нуқтанинг аксини топиш учун икки ишни бажариш зарур:

а) бирлик айланага нисбатан z нуқтага симметрик бўлган $\frac{1}{z}$ нуқтани топиш;

б) ҳақиқий ўққа нисбатан $\frac{1}{z}$ га симметрик бўлган $\frac{1}{z}$ нуқтани топиш.

Умуман (2) функция ёрдами билан G соҳанинг G_1 аксини аниқлаш учун шу икки принципга қатъий риоя қилинмоғи керак.

(2) функциянинг ҳосиласи:

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{z^2}$$

Бу ҳосила текисликнинг, $z = 0$ ($w = \infty$ нуқтага мос) ва $z = \infty$ ($w = 0$ нуқтага мос) нуқталардан ташқари барча нуқталарида чекли ва нолдан фарқлидир.

2-§. Каср чизиқли функция ва унинг хоссалари

Каср чизиқли функциянинг умумий кўринишини

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (3)$$

каби ёзиш мумкин бўлиб, a, b, c, d лар комплекс сонлардир. Касрнинг махражидаги c ва d ларнинг иккаласи бир вақтда нолга тенг бўлмаслиги керак, акс ҳолда махраж ноль бўлиб қолади.

Қўйиладиган масала (3) функция воситаси билан (2) текисликдаги G соҳа (w) текисликка акслантирилганда қандай G_1 соҳа пайдо бўлишини аниқлашдан иборат. Дастлаб (3) нинг баъзи хусусий ҳоллари билан танишиб ўтамиз.

а) Фараз қилайлик, $c = 0$, $d \neq 0$ бўлсин, у ҳолда (3) дан

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

ҳосил бўлиб, $a_1 = \frac{a}{d}$, $b_1 = \frac{b}{d}$ деб белгиласак,

$$w = a_1z + b_1$$

га эга бўламиз. Бу эса (1) бутун чизиқли функциянинг ўзгичасидан иборат бўлгани учун илгари айтилган акс эттириш қонунига эга бўламиз.

б) $ad - bc \neq 0$ бўлиши керак, чунки акс ҳолда $ad - bc = 0$ дан $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = k$ ёки $a = kc$, $b = kd$ бўлиб, (3) га қўйилса, w функция

$$w = \frac{k(cz + d)}{cz + d} = k$$

z нинг функцияси бўлмасдан, фақат битта ўзгичмас k сонга тенг бўлиб қолади.

в) $d = 0$, $c \neq 0$ бўлсин, у ҳолда (3) дан

$$w = \frac{az + b}{cz} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \cdot \frac{1}{z}$$

келиб чиқади. Агар

$$\frac{b}{c} = a_2, \quad \frac{a}{c} = b_2$$

деб белгиласак,

$$w = a_2 \cdot \frac{1}{z} + b_2 \quad (4)$$

га эга бўламиз. Мана шу функция ёрдами билан бажариладиган акслантиришни унга эквивалент бўлган қуйидаги иккита акслантириш билан алмаштириш мумкин:

$$\zeta = \frac{1}{z}, \quad w = a_2\zeta + b_2, \quad (5)$$

чунки

$$w = a_2\zeta + b_2 = a_2 \cdot \frac{1}{z} + b_2.$$

Юқоридаги (5) функциялар ёрдами билан бажариладиган акслантиришлар бизга олдинги параграфдан маълум. Шундай қилиб, мураккаб (4) акслантиришни иккита (5) содда акслантириш билан алмаштириш мумкин. Мана шу методни умумий ҳол учун ҳам ($c \neq 0$, $d \neq 0$) ишлатиш мумкин.

г) Умумий ҳол. Фараз қилайлик, $c \neq 0$, $d \neq 0$ бўлсин. (3) касрнинг сурат ва махражини c га кўпайтириб, сўнгра суратига ad ни қўшиб ва айирамиз, у ҳолда

$$w = \frac{c(az + b)}{c(cz + d)} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cz + d}.$$

Каср чизиқли функциянинг мана шу умумий ҳолини унга эквивалент бўлган бир неча функция билан қуйидагича алмаштирамиз:

$$\zeta = cz + d, \quad \eta = \frac{1}{\zeta}, \quad w = a_3\eta + b_3, \quad (6)$$

чунки

$$w = a_3\eta + b_3 = a_3 \cdot \frac{1}{\zeta} + b_3 = a_3 \cdot \frac{1}{cz + d} + b_3.$$

бунда:

$$a_3 = \frac{bc - ad}{c}, \quad b_3 = \frac{a}{c}.$$

Шундай қилиб, (3) ўрнига кетма-кет (6) нинг учаласидан фойдаланиш кифоя. (6) нинг биринчиси билан учинчиси (1) акслантиришни, иккинчиси эса (2) акслантиришни эслатади.

Агар биз (3) га эътибор қилсак курамизки, z нинг ҳар бир қийматига w нинг битта қиймати мос келади. $z = -\frac{d}{c}$ қийматга эса $w = \infty$ мос келади (чунки z га шу қийматни берганимизда касрнинг махражи нолга айланади). Демак, (3) воситаси билан (z) текислик акслантирилса, акси (w) кенгайтирилган текисликдан иборат булар экан.

Энди, (w) текисликнинг (z) даги аксини аниқлаш учун (3) ни (z) га нисбатан ечамиз,

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a} \quad (7)$$

тескари функция келиб чиқади. Бу ерда ҳам юқоридаги ҳодиса руй беради, яъни w нинг ҳар бир қийматига z нинг битта қиймати мос келади. $w = \frac{a}{c}$ бўлганда (7) нинг махражи нолга айланиб, $z = \infty$ мос келади. Демак, каср чизиқли (7) функция воситаси билан (w) текисликни акслантирилса, унинг акси ҳам кенгайтирилган (z) текисликдан иборат булар экан.

Шундай қилиб, (3) ва (7) ларнинг иккаласи ҳам каср чизиқли функциялар бўлиб, бир-бирига тескаридир. Шу билан бирга уларнинг воситасида кенгайтирилган (z) ва (w) текисликларнинг бирини иккинчисига акслангириш мумкин. Шундай қилиб, қуйидаги теорема исбот қилинди.

Теорема Иттиёрий каср чизиқли

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

функция кенгайтирилган (z) текисликни кенгайтирилган (w) текисликка узаро бир қийматли ва конформ акслантиради ($z = -\frac{d}{c}$ бўлганда $w = \infty$ ва $w = \frac{a}{c}$ бўлганда $z = \infty$ бўлади).

1. Доиравий хосса. Каср чизиқли функция воситасида бажариладиган акслантиришнинг ажойиб хоссалари бор. Булардан бири доиравий хосса бўлиб, у билан танишишдан илгари аналитик геометриядан маълум айрим мулоҳазаларни эсга оламиз. Текисликдаги тўғри чизик деб чексиз катта радиусли айланани қабул қиламиз, демак, биз айлана ҳақида сўзлаганимизда тўғри чизикни ҳам шу ҳисобга киритамиз.

Ишни осонлаштириш учун (3) нинг ушбу

$$w = \frac{1}{z}$$

хусусий ҳолини ($a = d = 0$, $c = b = 1$) оламиз. Бунинг ёрдами билан (z) текисликдаги айлананинг акси (w) да айлана бўлишини кўрамиз. Маълумки, (z) текисликдаги айлананинг умумий тенгламаси

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0$$

кўринишга эга. Агар B ва C лар нисбатан бир вақтда нолга тенг бўлмай, $A = 0$ бўлса,

$$Bx + Cy + D = 0$$

тўғри чизик тенгламаси келиб чиқади. Агарда

$$A \neq 0 \text{ ва } B^2 + C^2 - AD > 0$$

бўлса, ҳақиқатан айланага эга бўламиз.

Агар $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ лардан

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad z\bar{z} = x^2 + y^2$$

эканини эътиборга олсак, у ҳолда айлана тенгламасини комплекс ўзгарувчилар орқали

$$Az\bar{z} + B(z + \bar{z}) + \frac{C}{i}(z - \bar{z}) + D = 0$$

кўринишда ёки $\frac{1}{i} = -i$ дан фойдаланиб

$$Az\bar{z} + Mz + \bar{M}\bar{z} + D = 0 \quad (8)$$

кўринишда ёзиш ҳам мумкин, бунда $M = B + iC$, $\bar{M} = B - iC$. Мабодо, юқорида айтганимиздек, $A = 0$ бўлиб қолса, (8) дан тўғри чизикнинг комплекс кўринишдаги ушбу

$$\bar{M}z + M\bar{z} + D = 0$$

тенгламаси келиб чиқади.

Бизнинг мақсадимиз (2) функция воситаси билан (8) айланани (w) текисликка акслантиришдир. Шу мақсадда яна (2) га мурожаат қиламиз:

$$w = \frac{1}{z} \text{ дан } z = \frac{1}{w}; \quad \bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}, \quad z\bar{z} = \frac{1}{w\bar{w}}.$$

Буларнинг тегишли қийматларини (8) га қўямиз:

$$A \cdot \frac{1}{w\bar{w}} + \bar{M} \cdot \frac{1}{w} + M \cdot \frac{1}{\bar{w}} + D = 0$$

ёки касрдан қутқарилса:

$$Dw\bar{w} + Mw + \bar{M} \cdot \bar{w} + A = 0. \quad (9)$$

Бунинг (8) типдаги тенглама эканлиги очиқдан-очиқ кўриниб турибди, яъни (9) тенглама (w) текисликдаги айланани билдиради. Хусусий ҳолда $D = 0$ бўлса, ундан

$$Mw + \bar{M}\bar{w} + A = 0$$

тўғри чизиқ тенгламаси келиб чиқади. Шундай қилиб қуйидаги теорема исбот қилинди.

Теорема. *Ихтиёрий каср чизиқли*

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

функция (z) текисликдаги ҳар қандай айланани (w) текисликдаги айланага аксантиради ($z = -\frac{d}{c}$ бўлганда $w = -\infty$, $w = \frac{a}{c}$ бўлганда $z = \infty$ бўлади).

Шубҳасиз юқорида таъкидлаб ўтилган шартга мувофиқ, бу теоремани кенг маънода тушуниш зарур, яъни у ўз ичига тўғри чизиқни ҳам олади.

2. Симметриянинг сақланиши. Айланадан ташқаридаги A нуқтадан айланага AN уринма ва AC кесувчи ўтказилса (37-чизма), улар орасида

$$AC \cdot AB = AN^2 \quad (10)$$

муносабат ўринли бўлиши элементар геометриядан маълум. Шунингдек, агар 5-чизмада (25-бет) $R = 1$ демасдан, ихтиёрий R радиусли айлана олинса, ўша жойдаги мулоҳазаларга биноан

$$O\alpha \cdot O\beta = O\gamma^2 \quad (11)$$

га эга бўламиз.

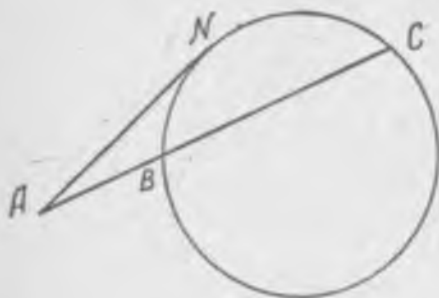
Энди биз қуйидагиларни исбот қиламиз.

а) Ихтиёрий R радиусли C айланага нисбатан P ва Q нуқталар бир-бирига симметрик, яъни $OP \cdot OQ = R^2$ бўлсин. Мана шу иккала нуқтадан ўтказилган ҳар қандай Γ айлана C га ортогонал эканлигини кўрсатамиз.

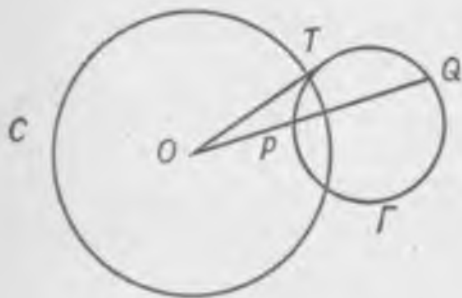
Иккала айлананинг кесишган нуқталаридан бирин, масалан, T ни O марказ билан туташтирамиз. P ва Q нуқталар ўзаро симметрик бўлгани учун, (11) га асосан:

$$OQ \cdot OP = OT^2 \quad (12)$$

булади (38-чизма). Γ айлана учун OQ —кесувчи чизиқдир. Шу сабабли, агар (11) ва (12) тенгликларни, яъни 37 ва 38-чизмаларни диққат билан солиштирсак, OT чизиқ худди AN каби уринма эканини кураимиз. Иккинчи томондан, OT чизиқ C айлананинг радиусидир. Элементар геометриядан маълумки, агар



37- чизма.



38- чизма.

C айлана радиуси Γ айланага уринма булса, у ҳолда бу иккала айлана бир-бирига ортогонал булади.

6) Аксинча, агар P ва Q нуқталардан утувчи Γ_1 ва Γ_2 айланалар C айланага ортогонал булса, у ҳолда бу нуқталар C га нисбатан симметрик булади. Бунисбот қилиш учун бундай фикр юритамиз.

P ва Q нуқталарда кесишиб утувчи Γ_1 ва Γ_2 айланалар C айланага ортогонал деб фараз қилайлик. Энди C нинг марказини P нуқта билан туғри чизиқ орқали туташтирамиз. Шу чизиқни давом эттирсак, у Γ_1 ни бирор Q_1 нуқтада кесиш ўтади. Γ_2 ва C айланаларнинг кесишган T нуқтасини O билан туташтирсак OT радиус Γ_1 га уринма бўлиб қолади, чунки Γ_1 ва C

ўзаро ортогоналдир. У ҳолда биз (11) га асосан қуйидагича

$$OQ_1 \cdot OP = OT^2$$

тенгликка эришамиз. Бу эса (12) га ва 5-чизмага асосан Q_1 нуқта билан P нинг ўзаро симметрик эканлигини кўрсатади.

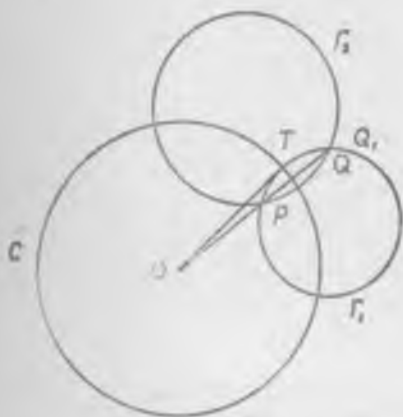
Худди мана шу усулда Γ_2 айлана устида фикр юритсак, P га симметрик бўлган Q_2 нуқта Γ_2 га ҳам тегишли булади. Демак, Q_1 нуқта Γ_1 ва Γ_2 ларнинг иккаласига ҳам тегишли бўлгани учун уларнинг ўзаро кесишган Q нуқтасидан иборат бўлиб қолади. Бошқача айтганда Q_1 ва Q_2 лар аслида битта нуқта экан, яъни P ва Q лар C га нисбатан симметрик нуқталар экан (39-чизма). Демак, биз қуйидаги теоремани исбот қилдик.

Теорема. Берилган C айланага нисбатан P ва Q нуқталарнинг симметрик бўлиши учун уша нуқталарнинг ик-

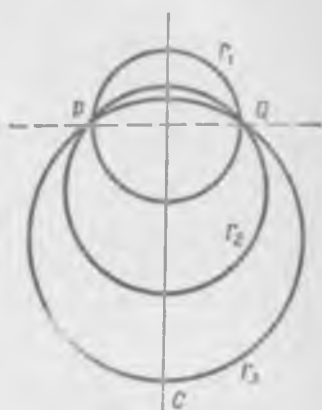
каласидан ўтувчи барча $\{\Gamma\}$ айланаларнинг C га ортогонал бўлиши завор ва етарлидир.

Изоҳ. P нуқтани z билан, Q нуқтани $\zeta = \frac{1}{z}$ билан белгилаш ҳам мумкин.

Агар C тўғри чизиқ бўлса, P ва Q нуқталар унга нисбатан симметрик бўлади. У вақтда P ва Q дан ўтувчи $\{\Gamma\}$ айланалар C тўғри чизиққа ортогонал бўлишидан ташқари уларнинг марказлари C чизиқ устида жойлашган бўлади (40- чизма).



39- чизма.



40- чизма.

в) Каср чизиқли функция воситасида $(\cdot)$ текисликдаги айланини (w) текисликка акслантирганда, айлана ҳосил бўлиши бизга маълум. Шунга асосан C айланининг (w) даги акси C' айланадан иборатдир. Агар C га нисбатан симметрик P ва Q нуқталарнинг аксини P' ва Q' билан белгиласак, P, Q лардан ўтувчи $\{\Gamma\}$ айланаларнинг акси P', Q' лардан ўтувчи $\{\Gamma'\}$ айланалардан иборат бўлади. Бизга маълумки, каср чизиқли функция ёрдами билан бажариладиган акслантириш конформ акслантиришдир. Мана шунга асосан, агар $\{\Gamma\}$ айланалар C га ортогонал эканлигини назарга олсак, $\{\Gamma'\}$ айланалар ҳам C' айланага ортогонал бўлади. Бундан эса P' ва Q' нуқталар C' га нисбатан симметрик, деган хулоса келиб чиқади.

Демак, P ва Q симметрик нуқталарнинг акси бўлмиш P' ва Q' нуқталар ҳам симметрик экан, яъни симметрия сақланиб қолар (инвариант) экан. Шундай қилиб, қуйидаги теорема иботланди.

Теорема. Ҳар қандай каср чизиқли акслантириш натижасида C айланага нисбатан симметрик бўлган P ва Q нуқталарнинг акси ўша айланининг образи бўлмиш C' айланага нисбатан симметрик P' ва Q' нуқталардан иборат бўлади.

3. Каср чизиқли функцияни тузиш. Баъзан бирор масалани ҳал қилиш учун ёрдам берадиган каср чизиқли функцияни тузиш (топиш) талаб қилинади. Ўша масалалардан бири қуйидагидан иборат. (z) текисликда ихтиёрий учта z_1, z_2, z_3 ва (w) текисликда ҳам учта w_1, w_2, w_3 нуқта берилган бўлсин. Энди ўша z_1, z_2 ва z_3 нуқталарни мос равишда w_1, w_2 ва w_3 нуқталарга акслантирувчи каср чизиқли функцияни тузиш талаб қилинади.

Каср чизиқли функциянинг умумий кўриниши (3) дан иборат бўлиб, унинг аниқлиги a, b, c, d — параметрларга боғлиқдир. Фараз этайлик $a \neq 0$ бўлсин, у ҳолда касрнинг сурат ва махражини a га бўлиб, бундай

$$\frac{a}{b} = b_1, \quad \frac{c}{a} = c_1, \quad \frac{d}{a} = d_1$$

белгиласак, юқоридаги функция

$$w = \frac{z + b_1}{c_1 z + d_1} \quad (13)$$

кўринишни олади ва энди b_1, c_1, d_1 параметрларга боғлиқ бўлиб қолади. Демак, (3) функция аслида учта параметрга боғлиқ экан. Соддалик учун (13) ни қуйидагича ёзсак булади:

$$w = \frac{z + b}{cz + d}. \quad (13')$$

Юқорида қўйилган масалани ҳал қилиш учун (13') га биноан қуйидагиларни ёза оламиз:

$$w = \frac{z + b}{cz + d}, \quad w_1 = \frac{z_1 + b}{cz_1 + d}, \quad w_2 = \frac{z_2 + b}{cz_2 + d}, \quad w_3 = \frac{z_3 + b}{cz_3 + d}. \quad (14)$$

Сўнгги учта тенгламадан b, c, d ларни топиб биринчисига қўйилса, изланаётган функция аниқланади. Лекин бу йўл узоқ бўлгани учун бошқача йш кўрамиз:

$$w - w_1 = \frac{z + b}{cz + d} - \frac{z_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{(z + b)(cz_1 + d) - (cz + d)(z_1 + b)}{(cz + d)(cz_1 + d)}$$

ёки суратидаги қавсларни очиб ихчамлаштирилса,

$$w - w_1 = \frac{(d - bc)(z - z_1)}{(cz + d)(cz_1 + d)}$$

тенглик келиб чиқади. Худди шу усул билан (14) дан

$$w - w_2 = \frac{(d - bc)(z - z_2)}{(cz + d)(cz_2 + d)}, \quad w_3 - w_1 = \frac{(d - bc)(z_3 - z_1)}{(cz_3 + d)(cz_1 + d)},$$

$$w_3 - w_2 = \frac{(d - bc)(z_3 - z_2)}{(cz_3 + d)(cz_2 + d)}$$

айирмаларни тузиш мумкин. Бу айирмалардан осонгина ушбу

$$\frac{w - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{w_3 - w_1}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \quad (15)$$

каср чизиқли функцияга эга буламиз. Юқорида қўйилган масалани ечиб берадиган (15) функция яғонадир, чунки, (14) даги сўнгги учта чизиқли тенглама системасини ечсак, биргина (b, c, d) ечимга эга буламиз ва уни (13') га қўйсак, (15) билан аниқланадиган биргина функция ҳосил бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, биз излаган функция (15) дан нбораг, чунки ундаги z ўрнига z_1, z_2 ва z_3 ларни қўйсак мос равишда $w = w_1, w = w_2$ ва $w = w_3$ бўлади. Демак, қуйидаги теорема исбот қилинди.

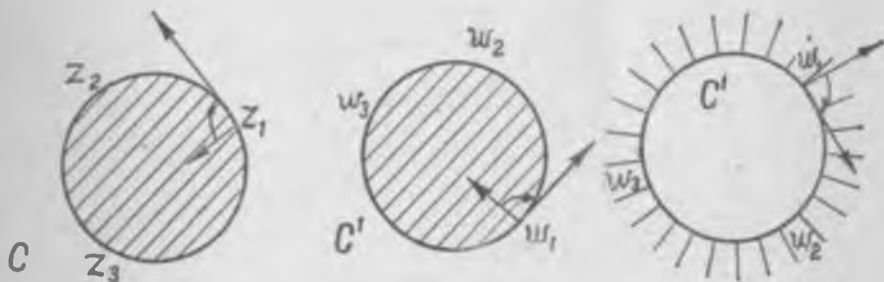
Теорема. (z) текисликдаги икки нукта z_1, z_2, z_3 нуктани мос равишда (w) текисликдаги икки нукта w_1, w_2, w_3 нуктага акслантирувчи каср чизиқли функция яғонадир.

(15) тенгликнинг унғ томони тўртта z_1, z_2, z_3, z_4 нуктанинг икки қайтали ёки ангармоник нисбати дейилиб,

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

кўринишда ёзилади. (15) нинг чап томони ҳам худди мана шу типдаги нисбатдир. Демак, чизиқли акслантириш нагжасида ангармоник нисбат узгармай сақланиб қолар (инвариант) экан.

Фараз этайлик, (z) текисликда учта ҳар хил z_1, z_2, z_3 нукта берилган бўлсин, у ҳолда бу нукталардан биргина C айлана ўтказиш мумкин. Агар (w) текисликда ҳалиги нукталарнинг акси w_1, w_2, w_3 бўлса, булардан ҳам биттагина C' айлана ўтади. Мана шу айлананинг биринчисини иккинчисига акслантирадиган каср чизиқли функциянинг яғона эканини кўрсатдик.



41- чизма.

Энди C билан ўралган доира C' нинг ичига ёки ташқарисига аксланиши мумкин. Буни аниқлаш учун қуйидагича фикр юритамиз. C айланага ички нормал ўтказамиз, бунинг акси ҳам C' айланага нормал бўлиб икки йўналишга эгадир. Шулардан қайси бирини олиш керак, деган савол туғилади. C билан унга ўтказилган ички нормал орасидаги бурчак қайси йўналишда олинса, C' билан унга ўтказилган нормал ораси-

даги бурчак ҳам худди шу йуналишда олиниш керак (41-чизма).

4. Юқори ярим текисликини бирлик доирага акслантириш. Ҳақиқий Ox ўқ текисликини икки бўлакка ажратиб, улардан бири ўша ўқнинг юқорисида, иккинчиси эса пастида туради. Шулардан биринчисини эса юқори ярим текислик дейилади.

Бу ерда қўйиладиган масала қуйидагидан иборат: (z) текисликининг бир қисми бўлган юқори ярим текисликини (w) текисликдаги $|w| \leq 1$ бирлик доира ичига акслантирувчи каср чизиқли функция топилсин.

Эслатиб утилган юқори ярим текисликининг бирор $z = \alpha$ нуқтасининг акси $|w| \leq 1$ доиранинг $w = 0$ марказидан иборат бўлсин дейлик, у ҳолда Ox ўқга нисбатан α нуқта α га симметрик бўлиб, α нинг акси $w = \infty$ дан иборат бўлади, чунки $w = 0$ ва $w = \infty$ нуқталар $|w| = 1$ айланага нисбатан ўзаро симметрикдир (42-чизма). Шу сабабли изланаётган функция

$$w = k \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}$$

кўринишга эга бўлади. Энди ўзгармас комплекс k коэффициентни аниқлаш лозим. Юқори ярим текисликини $|w| < 1$ доирага акслантириш учун текисликининг Ox чегарасининг $|w| = 1$ айланага аксланишини талаб қиламиз. Ox ўқдаги нуқталарда $z = x$ ҳақиқийдир. Шу сабабли:

$$|z - \alpha| = |x - \alpha| = |x - \bar{\alpha}|,$$

чунки, агар $\alpha = a + ib$ деб белгиласак,

$$x - \alpha = (x - a) - ib, \quad x - \bar{\alpha} = (x - a) + ib$$

сонлар ўзаро қўшма сонлар бўлиб, модуллари бир-бирига тенг. Демак,

$$1 = |w| = |k| \left| \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}} \right| = |k| \left| \frac{x - \alpha}{x - \bar{\alpha}} \right| = |k|,$$

яъни $|k| = 1$. Мана шунинг учун k ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$k = e^{i\psi} = \cos \psi + i \sin \psi,$$

бунда ψ — ўзгармас ҳақиқий сон. Шундай қилиб, юқори ярим текисликини бирлик доира ичига акслантирувчи функция ушбу

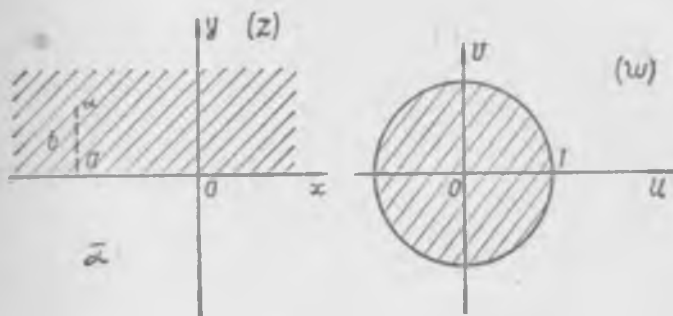
$$w = e^{i\psi} \cdot \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}} \quad (16)$$

кўринишга эгадир. Бундан кўринадики, агар ψ ва $\alpha = a + ib$ ларга исталган қийматлар берилса, (16) типдаги чексиз кўп функцияларга эга бўламиз, яъни бу масала чексиз кўп ечимга эгадир.

Бизнинг масаламизда юқори ярим текислик ҳақида гап бораётганлиги сабабли, шу текисликдаги ихтиёрий нуқтага тегишли комплекс соннинг мавҳум қисми мусбат сондан иборатдир, яъни

$$\operatorname{Im} a = \operatorname{Im} (a + ib) = b > 0.$$

Агар биз қуйи ярим текислиكنи $|w| \leq 1$ доирага акслантирмоқчи бўлсак, a нуқтани пастдан олиш керак бўлур эди, яъни $b < 0$ бўлиши керак.



42-чизма.

Биз (16) функциялар туплаидан конкрет бирортасини ҳосил қилиш мақсадида $\psi = 0$, $a = i$ деб олайлик, у ҳолда

$$w = \frac{z - i}{z + i}.$$

Бундан $z = a = i$ нинг акси $w = 0$ ва $z = \bar{a} = -i$ нинг акси эса $w = \infty$ нуқталардан иборат эканлигини кўрамиз.

5. Юқори ярим текислиكنи ўз-ўзига акслантириш. (z) текислигининг юқори ярмини (w) даги юқори ярим текисликка акслантирадиган каср чизиқли функция топилсин, яъни ярим текислиكنинг ўзини-ўзига акслантирувчи функция топилсин.

Юқори ярим текисликка биз чексиз катта радиусли доира деган назар билан қараб 1-пунктдаги методни ишлатамиз. Унинг учун юқори ярим текислиكنинг Ox чегарасида ихтиёрий учта $z_1 = \alpha$, $z_2 = \beta$, $z_3 = \gamma$ нуқталар олиб, уларни мос равишда Ou ўқдаги учта $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_3 = \infty$ нуқталарга акслантираемиз.

Мана шу нуқталарни (14) тенгликка қўйгандан сўнг b , c , d лар чиқариб ташланса,

$$w = \frac{(z - \alpha)(\gamma - \beta)}{(z - \gamma)(\alpha - \beta)} \quad (17)$$

тенглик ҳосил бўлади. Буни (15) дан келтириб чиқариш ҳам мумкин эди. Сунгги тенгликдан очиқ кўринадики,

$$\begin{aligned} z = \alpha & \text{ бўлганда } w = 0 \text{ бўлади,} \\ z = \beta & \text{ бўлганда } w = 1 \text{ бўлади,} \\ z = \gamma & \text{ бўлганда } w = \infty \text{ бўлади.} \end{aligned}$$

Юқоридаги (17) тенгликнинг сурат ва махражидаги қавслар очиб соддалаштирилса, ушбу

$$w = \frac{Az + B}{Cz + D} \quad (18)$$

кўринишга келади, бундаги A, B, C, D ҳақиқий сонлар эканини кўриш қийин эмас.

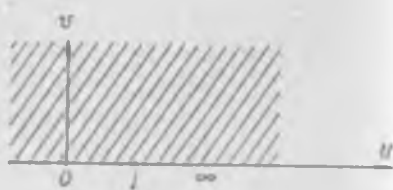
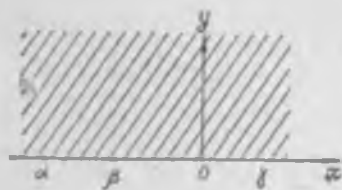
Энди бу хилдаги акслантиришнинг бурилиш коэффициентини топиш мақсадида (18) дан ҳосила оламиз:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{AD - BC}{(Cz + D)^2}$$

Агар биз z га ҳақиқий қийматлар берсак, бу ерда икки ҳолни кўриш мумкин:

а) $AD - BC > 0$, яъни $\frac{dw}{dz} = f'(z) > 0$, демак,

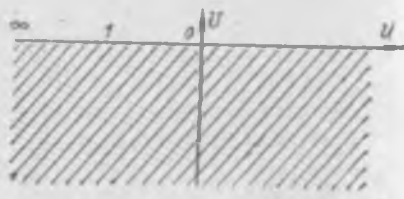
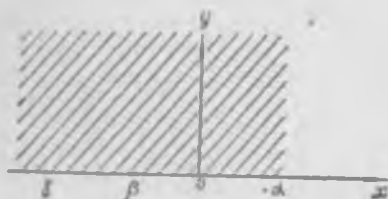
$$\arg f'(z) = 0.$$



43- чизма.

Бошқача айтганда, ҳеч қандай бурилиш йўқ демакдир. Шу сабабли юқори ярим текислик ўз-ўзига акс эттирилади (43-чизма).

б) $AD - BC < 0$, яъни $\frac{dw}{dz} = f'(z) < 0$ бўлса, $\arg f'(z) = -\pi$ бурилиш бурчагидан иборат бўлиб, юқори ярим текислик қўли ярим текисликка акс эттирилади (44-чизма).



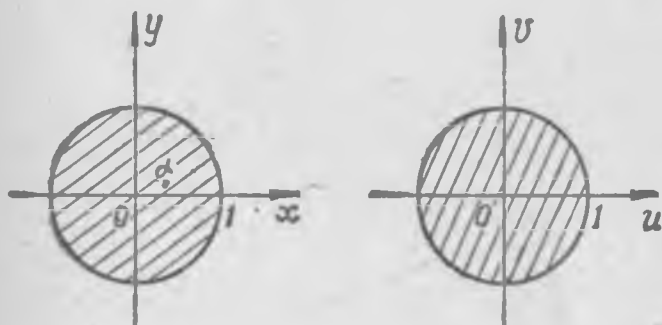
44- чизма.

6. Доирани ўз-ўзига акс эттириш. Энди (z) текисликдаги $|z| \leq 1$ бирлик доирани (w) текисликдаги $|w| \leq 1$ бирлик доирага акслантирувчи каср чизиқли функцияни топамиз. Аслида

бу иккала доира бир хил булиб, фақат жойлари бошқадир. Шу сабабли бу масалани доирани ўз-ўзига акс эттириш дейиладди.

Фараз этайлик, $|z| < 1$ доира ичидаги бирор α нуқтанинг акси $w = 0$ бўлсин (45-чизма). Маълумки, $|w| = 1$ айланага нисбатан $w = 0$ га симметрик бўлган нуқта $w = \infty$ дан иборат. Шунингдек, $|z| = 1$ айланага нисбатан $z = \alpha$ га симметрик нуқта $z = \frac{1}{\bar{\alpha}}$ дан иборат. Шуларга биноан изланаётган функция

$$w = k \frac{z - \alpha}{z - \frac{1}{\bar{\alpha}}}$$



45-чизма.

кўринишга эга бўлиши муқаррар. Энди k ни аниқлаш учун бундай

$$w = -k\bar{\alpha} \cdot \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} = k' \cdot \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

ёзиб олайлик, бунда $k' = -k\bar{\alpha}$. Масаланинг қўйилишига кўра $|z| = 1$ айлана $|w| = 1$ айланага акс эттирилиши керак:

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \text{ дан: } x^2 + y^2 = 1;$$

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = 1.$$

Шуларга асосан:

$$|1 - \bar{\alpha}z| = |1 - \bar{\alpha}z| |\bar{z}| = |\bar{z} - \bar{\alpha}| \cdot z\bar{z} = |\bar{z} - \bar{\alpha}| = |z - \alpha|,$$

яъни

$$|z - \alpha| = |1 - \bar{\alpha}z| \text{ ёки } \left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right| = 1.$$

У ҳолда

$$1 = |w| = |k'| \left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right| = |k'|.$$

яъни

$$k' = e^{i\psi} = \cos \psi + i \sin \psi$$

демакдир. Шундай қилиб, биз излаётган функция ушбу кўри-
нишда бўлиши керак:

$$w = e^{i\psi} \cdot \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha} z}. \quad (19)$$

Равшанки, ψ — бурилиш бурчаги бўлади. Лекин марказ атро-
фида $|z| \leq 1$ доирани ҳар қанча бурсак ҳам у доира ўз-ўзига
акс этирилади, яъни бошқа доира ҳосил бўлмайди. Шунинг-
дек, $|z| < 1$ доира ичидаги ҳар қандай нуқтани α сифатида
қабул қилиб, уни $w = 0$ га акс этириш мумкин.

3-§. Курсаткичли функция

Математик анализ курсида, кўрсаткичли e^x (x — ҳақиқий сон)
функция $\left\{ \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right\}$ кетма-кетликнинг лимити сифатида аниқ-
ланади:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n.$$

Комплекс соҳада ҳам кўрсаткичли e^z функцияни худди юқо-
ридагидек аниқлаш мумкин. Тайин $z = x + iy$ комплекс сон
учун

$$a_n = \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n$$

кетма-кетлик лимитининг мавжудлигини исботлаймиз ҳамда
шу лимитни ҳисоблаймиз.

Равшанки,

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{z}{n} \right) = 1 + \frac{x}{n}, \quad \operatorname{Im} \left(1 + \frac{z}{n} \right) = \frac{y}{n}.$$

Буни эътиборга олсак,

$$|a_n| = \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n = \left(\sqrt{\left(1 + \frac{x}{n} \right)^2 + \frac{y^2}{n^2}} \right)^n = \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}},$$

$$\arg a_n = n \arg \left(1 + \frac{z}{n} \right) = n \operatorname{arctg} \frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}}.$$

Биринчи ифодада $\frac{x^2 + y^2}{n^2}$ ҳадни ташлаб юборишимиз мумкин,
чунки $(n \rightarrow \infty)$ у $\frac{2x}{n}$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқ-

дор бўлади; чексиз кичик $\operatorname{arctg} \frac{y}{n}$ ни унга эквивалент бўлган

$\frac{y}{n+x}$ билан алмаштириб қуйидагиларни топамиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2x}{n}\right)^{\frac{n}{2x}}\right]^x = e^x, \quad (20)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arg a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ny}{n+x} = y. \quad (21)$$

Шундай қилиб, (20) ва (21) лимитларнинг мавжудлигидан кетма-кетлик лимитининг мавжудлиги келиб чиқади.

Демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Ихтиёрий $z = x + iy$ комплекс сон учун e^z кўрсаткичли функцияни ушбу

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (22)$$

муносабаб билан аниқлаймиз. Бундан $|e^z| = e^x$ ва $\operatorname{Arg} e^z$ нинг қийматларидан бири y га тенг. $x=0$ да эса Эйлер формуласи ҳосил бўлади.

Энди комплекс узгарувчининг кўрсаткичли функцияси e^z нинг хоссаларини кўрайлик:

1) z ҳақиқий бўлганда e^z функция e^x нинг барча хоссаларига эга;

2) бу функция бутун текисликда аналитик;

3) оддий дифференциаллаш формуласи сақланади, яъни

$$(e^z)' = e^z; \quad (23)$$

4) кўрсаткичли функциянинг асосий хоссаси—қўшиш теоремаси сақланади:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}. \quad (24)$$

Биринчи хоссанинг тўғрилигига ишонч ҳосил қилиш учун $y=0$ десак, (22) формуладан $e^z = e^x$ келиб чиқади. Иккинчи хосса эса комплекс аргументли функция дифференциалландиган булишининг зарурий ва етарли шартидан келиб чиқади, чунки текисликнинг ихтиёрий нуқтасида Даламбер—Эйлер шартлари уринли бўлади:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (e^x \cos y) &= \frac{\partial}{\partial y} (e^x \sin y), \\ \frac{\partial}{\partial y} (e^x \cos y) &= -\frac{\partial}{\partial x} (e^x \sin y) \end{aligned} \quad (25)$$

ва e^z нинг ҳақиқий ва мавҳум қисмлари дифференциалланувчи.

II бобдаги (20) формулага асосан:

$$\begin{aligned}(e^z)' &= \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) + i \frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} e^x (\cos y + i \sin y) = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z\end{aligned}$$

булиб, (23) формуланинг тўғрилигини кўрсатади. Ниҳоят, тўртинчи хоссани исботлаш учун $z_1 = x_1 + iy_1$, ва $z_2 = x_2 + iy_2$ ларни олиб, (22) формулага ҳамда комплекс сонларни купайтириш қондасига асосан ушбунни ёзишимиз мумкин:

$$\begin{aligned}e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2) = \\ &= e^{x_1+x_2} [\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i (\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)] = \\ &= e^{x_1+x_2} [\cos (y_1 + y_2) + i \sin (y_1 + y_2)] = e^{z_1+z_2}.\end{aligned}$$

Шу билан талаб қилинган нарсa исботланди.

Охирги хоссадан фойдаланиб, кўрсаткичли функциянинг ҳеч қандай чекли нуқтада нолга айланмаслигини кўрсатиш қийин эмас. Ҳақиқатан, (24) формулада $z_1 = z$, $z_2 = -z$ деб олсак,

$$e^z \cdot e^{-z} = 1 \text{ ёки } e^{-z} = \frac{1}{e^z}$$

тенглик ҳосил бўлади. Агарда бирор z нуқтада e^z нолга айланади деб фараз қилсак, $-z$ нуқтада бу функциямиз аниқланмаган бўлар эди (яъни чексизга айланиб кетади), бу эса (22) формулага зиддир, яъни фаразимизнинг нотўғрилиги келиб чиқади.

Комплекс ўзгарувчининг кўрсаткичли функцияси (1) — (4) хоссалардан ташқари янги специфик 5-хоссага эга, ҳақиқий ўзгарувчининг кўрсаткичли функцияси эса бундай хоссага эга эмас; бу функция даври й бўлиб, унинг асосий даври соф мавҳум сон $2\pi i$ га тенг. Ҳақиқатан, ихтиёрий бутун k сон учун

$$e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z, \quad (26)$$

чунки Эйлер формуласига асосан $e^{2k\pi i} = 1$.

Агар $r = |z|$ ва $\varphi = \text{Arg } z = \arg z + 2k\pi$ (k —ихтиёрий бутун сон) деб белгиласак, комплекс соннинг кўрсаткичли шаклини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$z = |z| e^{i \text{Arg } z} = |z| e^{i \arg z}.$$

$$\text{Масалан, } -1 = e^{i\pi}; \quad i = e^{i\frac{\pi}{2}}; \quad 1-i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

4-§. Тригонометрик функциялар

Ихтиёрый комплекс z сон учун тригонометрик функцияларни қуйидаги

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad ^1) \quad (27)$$

тенгликлар билан аниқлаймиз.

Бундан $\operatorname{tg} z$ ва $\operatorname{ctg} z$ функциялар ушбу

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}} \quad (28)$$

формулалар билан аниқланади. Бу функциялар мос равишда $\cos z$ ва $\sin z$ нолга айланмайдиган барча нуқталарда аналитик функциялардир. (28) формулаларга асосан, $\operatorname{tg} z$ ва $\operatorname{ctg} z$ нинг даврий эканлигини ва даври π га тенглигини кўрсатиш мумкин. (27) формулалар билан аниқланган функциялар ҳақиқий аргументли тригонометрик синус ва косинус функцияларнинг асосий хоссаларини сақлаб қолишини кўрсатиш қийин эмас.

Кўрсаткичли e^z функциянинг даври $2\pi i$ га тенг бўлгани учун комплекс аргументли $\sin z$ ва $\cos z$ функциялар ҳам даврий бўлиб, уларнинг даври 2π га тенг эканлиги шу билан бирга $\sin z - \operatorname{тоқ}$, $\cos z - \operatorname{жуфт}$ функциялиги (27) формуладан келиб чиқади. яъни

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z, \\ \sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z.$$

Ҳақиқий ўзгарувчи тригонометрик функциялари орасидаги муносабатларни ифодаловчи барча формулалар комплекс соҳада ҳам ўринлидир. Синус учун йиғинди ҳақидаги теоремани текшириб курайлик:

$$\sin z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_1 \cdot \sin z_2 = \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} + \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \times \\ \times \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \sin(z_1 + z_2). \quad (29)$$

Худди шундай усул билан ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 = \cos(z_1 + z_2).$$

Юқоридаги муносабатлардан:

$$\begin{array}{ll} \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z, & \sin(z + \pi) = -\sin z, \\ \text{тулдириш,} & \text{келтириш} \\ \cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z & \cos(z + \pi) = -\cos z \end{array}$$

формулаларини ва исталган z учун $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ эканини осонгина кўрсатиш мумкин. Шуларни кўрсатишни китобхонларга

¹⁾ Қаторларга бағишланган бобда кўрсаткичли e^z ва тригонометрик функцияларнинг қаторлар орқали ифодасини келтирамиз.

топширамыз. Энди $\sin z$ ва $\cos z$ функцияларнинг қайси нуқталарда нолга айланишини текшириб кўрайлик. Фараз этайлик, $\sin z = 0$ бўлсин. У ҳолда

$$e^{iz} - e^{-iz} = 0 \text{ ёки } e^{2iz} = 1.$$

$$z = x + iy \text{ десак, } e^{2i(x+iy)} = 1 \text{ ёки } e^{-2y} \cdot e^{2ix} = 1. \quad (30)$$

Бундан

$$e^{-2y} = 1, \quad 2x = 2k\pi \quad (31)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Демак,

$$y = 0, \quad x = k\pi.$$

Шундай қилиб, $\sin z$ функция

$$z = k\pi$$

нуқталарда нолга айланади, бундаги $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Худди шу усулда $\cos z = 0$ бўлиши учун $z = k\pi + \frac{\pi}{2}$ бўлиши зарурлигини кўрсатиш мумкин.

(27) формулалар билан аниқланган $\sin z$ ва $\cos z$ барча текисликда аналитик (чунки e^z — аналитик), ундан ташқари булар учун ушбу

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z$$

дифференциаллаш формулалари ўринлидир.

Аммо, ҳақиқий аргументли тригонометрик функцияларнинг барча хоссалари ҳам комплекс соҳада сақлана бермайди. Масалан, ҳар қандай z учун $|\sin z|$ ва $|\cos z|$ бирдан ортмайди, деб тасдиқлаш мумкин эмас. Ҳақиқатан ҳам, агар (27) да $z = i$ десак, у ҳолда

$$\sin i = \frac{e - e^{-1}}{2i} \approx 1,17520i, \quad \cos i = \frac{e + e^{-1}}{2} \approx 1,54308,$$

яъни:

$$|\sin i| > 1 \text{ ва } |\cos i| > 1.$$

МИСОЛЛАР

Қуйида берилган сонлар кўрсаткичли шаклга келтирилсин:

$$1) -1, -i, i, -1+i, -1-i.$$

а) $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$ Эйлер формуласига асосан бунинг ўнг томонини кўрсаткичли шаклда ёзамиз, у ҳолда: $-1 = e^{i\pi}$.

$$б) -i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

$$(25) \text{ га мувофиқ } -i = e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

$$в) i = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}i}.$$

$$г) -1+i = \sqrt{2} \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}i}.$$

$$д) -1-i = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right] = \sqrt{2} e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

2 Қуйидаги сонларнинг модуллари ва аргументларининг бош қийматлари топилсин:

а) e^{3+i} , б) e^{-2+3i} , в) e^{3+4i} , г) e^{-3-4i} , д) $-ae^{i\varphi}$ ($a>0$, $|\varphi|<\pi$)

Бундай мисолларни ечишда (22) формулага эътибор қилсак, унинг модули ва аргументининг бош қийматлари қуйидагилардан иборат эканини курамыз

$$R = |e^z| = |e^x(\cos y + i \sin y)| = e^x |\cos y + i \sin y| = e^x \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x,$$

$$\Phi = \arg e^z = \arg [e^x(\cos y + i \sin y)] = y.$$

а) $e^{3+i} = e^3 \cdot e^i = e^3(\cos 1 + i \sin 1)$, бундан: $R = |e^{3+i}| = e^3$, $\Phi = 1$ радиан.

б) $e^{-2+3i} = e^{-2} \cdot e^{3i} = e^{-2}(\cos 3 + i \sin 3)$, бундан: $R = e^{-2}$, $\Phi = 3$ радиан.

в) $e^{3+4i} = e^3 \cdot e^{4i} = e^3(\cos 4 + i \sin 4)$, бундан: $R = e^3$, $\Phi = 4$ ёки $\Phi = 4 - 2\pi$, чунки 4 радиан бурчак учинчи чоракда ётади, шу сабабли, $\Phi < 0$ бўлиши керак.

г) $e^{-3-4i} = e^{-3}[\cos(-4) + i \sin(-4)]$, бундан: $R = e^{-3}$,

$\Phi = -4 + 2\pi$, чунки (-4) радиан иккинчи чоракда ётади, шу сабабли $\Phi > 0$ бўлиши керак.

3. Ушбу йиғинди ҳисоблансин:

$$\frac{1}{2} + \cos z + \cos 2z + \cos 3z + \dots + \cos nz = S_n.$$

Бу ердаги косинуслар ўрнига уларнинг (27) даги қийматларини келтириб қўямиз:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) + \frac{1}{2} (e^{2iz} + e^{-2iz}) + \dots + \frac{1}{2} (e^{inz} + e^{-inz}) = \\ = \frac{1}{2} (e^{-inz} + \dots + e^{-iz} + 1 + e^{iz} + \dots + e^{inz}).$$

бу аса геометрик прогрессия ҳадларининг йиғиндисиди бўлиб, $q = e^{iz}$. Шунинг учун

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-inz} - e^{inz} \cdot e^{iz}}{1 - e^{iz}}.$$

Бунинг сурат ва махражини $\frac{1}{2i} e^{-\frac{iz}{2}}$ га қўпайтирилгандан сўнг (27)

формуладан фойдаланамиз, у ҳолда

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2i} \left[e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)z} - e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z} \right] \cdot \frac{e^{-\frac{iz}{2}} - e^{\frac{iz}{2}}}{2i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin \frac{z}{2}}.$$

күринишда ҳам ёзилади; $k = 0$ бўлган ҳолни, яъни $\ln r + i\varphi$ ни логарифмнинг бош қиймати дейилади ва $\ln z$ орқали белгилади:

$$\ln z = \ln|z| + i\varphi. \quad (40)$$

Буни эътиборга олиб, (39) формулани қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i.$$

Биз (39) тенгликка эътибор қилсак, z нинг ҳар бир қийматига логарифмнинг чексиз кўп қиймати мос келишини кўрамиз. Чунки $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Шунинг учун ҳам агар биз z ни эркин узгарувчи, яъни аргумент деб қабул қилсак, у ҳолда (38) даги логарифмик функция кўп қийматли бўлади. Таърифга кўра (37) дан (38) келиб чиққани учун $w = \operatorname{Ln} z$ функция $z = e^w$ бир қийматли функцияга нисбатан тескари функциядир. Энди (39) нинг баъзи хусусий ҳоллари билан танишиб олайлик.

1) $z = m$ мусбат сон бўлсин. У ҳолда $r = |z| = |m| = m$, $\varphi = \arg m = 0$ бўлади. Мана шуларни (39) га қўйсак

$$\operatorname{Ln} m = \ln m + 2k\pi i$$

қийматларга эга буламиз. Элементар математикада шу қийматлардан $k = 0$ бўлган ҳоли, яъни $\ln m$ ишлатилади. Агар $\operatorname{Ln} m$ нинг барча қийматларини ёзсак қуйидагича бўлади:

$$\dots, \ln m - 4\pi i, \ln m - 2\pi i, \ln m, \ln m + 2\pi i, \ln m + 4\pi i, \dots$$

2) $z = -m$ манфий сон бўлсин, деб фараз қилайлик. У ҳолда

$$r = |z| = |-m| = m.$$

Буларни (39) га қўйилса,

$$\operatorname{Ln}(-m) = \ln m + i(\pi + 2k\pi)$$

ёки

$$\dots, \ln m - \pi i, \ln m + \pi i, \ln m + 3\pi i, \dots$$

Бунинг бош қиймати

$$\ln(-m) = \ln m + \pi i,$$

яъни манфий соннинг логарифми комплекс сондан иборат. Бошқача айтганда, ҳақиқий сонлар соҳасида манфий соннинг логарифми мавжуд эмас. Шу сабабли элементар математикада манфий сонларнинг логарифмлари текширилмайди.

Логарифмлар ҳақидаги асосий теоремалар. Сон логарифмининг юқорида берилган таърифи мазмунан элементар математикадаги таърифдан фарқ қилмайди. Шу сабабли элементар математикада исбот қилинган логарифмларга тегишли теоремалар бу жойда ҳам ўз кучида қолади. Улар қуйидагилардан иборат:

$$1. \operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2.$$

$$2. \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

Бу теоремаларнинг исботлари ҳам элементар математикадагидан фарқ қилмаганлиги учун биринчисини исботлаш билан чегараланамиз. Фараз қилайлик,

$$e^{w_1} = z_1, \quad e^{w_2} = z_2,$$

яъни

$$w_1 = \operatorname{Ln} z_1, \quad w_2 = \operatorname{Ln} z_2$$

бўлсин. У ҳолда:

$$z_1 \cdot z_2 = e^{w_1} e^{w_2} = e^{w_1 + w_2}.$$

Бундан, логарифмнинг таърифига кўра

$$\operatorname{Ln} (z_1 \cdot z_2) = w_1 + w_2,$$

яъни

$$\operatorname{Ln} (z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2.$$

Биринчи теореманинг исботи шундан иборат.

1-мисол. $\operatorname{Ln} (-1) = ?$

Дастлаб (-1) ни тригонометрик ёки кўрсаткичли шаклда ёзиб оламиз:

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi = e^{i\pi},$$

яъни $r = |-1| = 1$, $\varphi = \arg (-1) = \pi$.

Демак, (39) га асосан:

$$\operatorname{Ln} (-1) = \ln 1 + i(\pi + 2k\pi) = (2k + 1)\pi i,$$

чунки $\ln 1 = 0$, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Шундай қилиб, (-1) нинг логарифмлари

$$\dots; -3\pi i; -\pi i; \pi i; 3\pi i; \dots$$

соф мавҳум сонлардан иборат бўлиб, жуфтма-жуфт ўзаро қўшма сонлардир. Геометрик томондан булар мавҳум ўққа жойлашган ва координаталар бошига нисбатан симметрик нуқталарни тасвирлайди.

2-мисол. $\operatorname{Ln} i = ?$

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}},$$

яъни

$$r = |i| = 1, \quad \varphi = \arg i = \frac{\pi}{2}.$$

$$\operatorname{Ln} i = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

3-мисол. $\operatorname{Ln} (1 + i) = ?$

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\operatorname{Ln} (1 + i) = \ln \sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right).$$

$$4\text{-мисол. } \operatorname{Ln}(2-i) = ?$$

$$r = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{-1}{2} \quad \text{ёки} \quad \varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(-\frac{1}{2} \right)$$

φ — тўртинчи чоракдаги бурчак. Демак,

$$\operatorname{Ln}(2-i) = \ln \sqrt{5} + i \left[2k\pi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(-\frac{1}{2} \right) \right].$$

Зарурият бўлганда φ бурчакнинг қийматини жадвалдан топиб олинади.

Ихтиёрий даражали функция. Биз даражанинг энг умумий z^a ҳолини текшираимиз, бунда

$$z = x + iy \quad \text{ва} \quad a = a + ib$$

комплекс сонлардир. Ҳақиқий x ва a сонлар учун $x > 0$ да

$$x^a = e^{a \ln x}$$

айният ўринли бўлгани учун z^a ни ҳам қуйидаги тенгликдан топамиз:

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$$

Қулай булсин учун бунини w орқали белгилаб олайлик.

$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}.$$

Логарифмнинг қийматини (39) дан бунга қўйилса,

$$w = e^{a(\ln r + i\varphi + 2k\pi i)}$$

ёки (40) га кўра $\ln z = \ln r + i\varphi$ бўлгани учун

$$w = e^{a \ln r} \cdot e^{2k\pi a i}$$

булади ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Агар $k = 0$ га мос келадиган қийматни

$$w_0 = e^{a \ln r} \quad (41)$$

деб белгиласак, у ҳолда

$$w = z^a = w_0 e^{2k\pi a i} \quad (42)$$

тенгликка эга бўламиз. Бу ерда $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ бўлгани учун z^a кўп қийматлидир, яъни

$$w = z^a$$

z ўзгарувчининг кўп қийматли функцияси бўлади.

Агар даражанинг (42) даги барча қийматларини ёйиб ёзилса, қуйидагича бўлади:

$$\dots, w_0 e^{-4\pi a i}, w_0 e^{-2\pi a i}, w_0, w_0 e^{2\pi a i}, w_0 e^{4\pi a i}, \dots \quad (43)$$

Энди (42) нинг баъзи хусусий ҳоллари билан танишиб ўтамиз.

1. $\alpha = n$ — бутун мусбат сон бўлсин. У ҳолда, (42) даги

$$e^{2k\pi i} = e^{2k\pi n i} = (e^{2\pi i})^{kn} = 1^{kn} = 1,$$

чунки kn — бутун сон ва

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1.$$

Демак,

$$w = z^n = z^n = w_0$$

бир қийматлидир. Агар $\alpha = -n < 0$ бўлса ҳам олдинги ифода бир қийматли бўлиб қолади, чунки

$$e^{2k\pi i} = e^{-2k\pi n i} = (e^{2\pi i})^{-kn} = 1^{-kn} = 1,$$

бундаги $(-kn)$ — бутун сон.

2. $\alpha = \frac{p}{q}$ — қисқармайдиган каср (рационал сон) бўлсин. У ҳолда

$$e^{2k\pi i} = e^{2k \frac{p}{q} \pi i} \quad (44)$$

Агар $k = 0, 1, 2, \dots, q-1$ бўлса, курсаткидаги $\frac{kp}{q}$ каср қисқармайди. Шу сабабдан (44) даги ифода k га мос равишда (q та) турлича қийматларга эга бўлади. Агар $k = q, q+1, q+2, \dots$ бўлса, уша қийматлар такрорланади, холос.

Демак,

$$w = z^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{z^p}$$

фақат q та ҳар хил қийматга эга экан. Бу бизга олий алгебрадан ҳам маълум, чунки q даражали илдишлар сони q та бўлади. (42) га мувофиқ уша илдишларни

$$w = z^{\frac{p}{q}} = w_0 e^{2k\pi i \cdot \frac{p}{q}} \quad (45)$$

($k = 0, 1, 2, \dots, q-1$) кўринишда ёзиш мумкин.

3. α — иррационал сон бўлсин. Бу ҳолда z^α чексиз кўп ҳар хил қийматларга эга бўлади. Уни исбот қилиш учун тескарисини фараз қилайлик, яъни z^α нинг ўзаро тенг қийматлари бор деб кўрайлик. У ҳолда

$$e^{2k_1\pi i} = e^{2k_2\pi i} \quad (k_1 \neq k_2)$$

бўлиб, бу тенгликдан

$$2k_1\pi i = 2k_2\pi i + 2k\pi i$$

ёки

$$(k_1 - k_2) \alpha = k$$

келиб чиқади, яъни

$$\alpha = \frac{k}{k_1 - k_2}$$

рационал сон бўлиб қолади, ҳолбуки α - иррационал сон. Қарама-қаршиликка учрадик. Демак, α иррационал бўлганда

$$w = z^{\alpha}$$

чексиз кўп қийматларга эга бўлиб, улар ўзаро тенг эмас. Мисол учун

$$z^{\sqrt{2}}, z^{\sqrt{3}}, z^{\sqrt{5}}, z^{\pi}, z^e$$

ларнинг ҳар бири (z нинг тайин бир қийматида) чексиз кўп қийматларга эга.

Энди

$$|w| = |z^{\alpha}| = |w_0| |e^{2k\pi i}|, \\ |e^{2k\pi i}| = 1$$

бўлгани учун $|z^{\alpha}| = |w_0|$, яъни z^{α} нинг барча қийматлари биргина модулга эгадир. Шу сабабли, α иррационал сон бўлганда z^{α} нинг ҳамма қийматларига тегишли нуқталар $|w_0|$ радиусли ва маркази O нуқтага жойлашган айланада ётади.

4. $\alpha = bi$ — соф мавҳум сон бўлсин ($b \neq 0$). У ҳолда:

$$w = z^{\alpha} = z^{bi} = w_0 e^{-2k\pi b}.$$

Бунда

$$|w| = |z^{bi}| = |w_0| e^{-2k\pi b} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Булгани сабабли z^{α} нинг модуллари ўзгариб, аргументи ўзгармайди. Демак z^{α} нинг ҳамма қийматларига мос нуқталар битта нуқтага жойлашгандир.

1-мисол. $(-1)^i$ даража ҳисоблансин. Бу мисолда $z = -1$ ва $\alpha = i$.

$$r = |-1| = 1, \varphi = \arg(-1) = \pi.$$

(40) га асосан

$$\ln z = \ln(-1) = \ln 1 + \pi i = \pi i,$$

(41) га мувофиқ,

$$w_0 = e^{\pi i} = e^{i\pi} = e^{-\pi}.$$

(42) га кўра

$$w = (-1)^i = e^{-\pi} \cdot e^{-2k\pi}.$$

Демак,

$$(-1)^i = e^{-(k+1)\pi}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Кўрсаткичдаги минус ишорани ташлаб юбориш ҳам мумкин, чунки k мусбат ва манфий қийматларни қабул қилмоқда.

2-мисол. $(-i)^i = ?$

$$z = -i, \alpha = i, r = |-i| = 1, \varphi = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2};$$

$$\ln z = \ln(-i) = \ln 1 - \frac{\pi}{2}i = -\frac{\pi}{2}i.$$

$$w_0 = e^{i \ln z} = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Демак,

$$(-i)^i = w_0 e^{-2k\pi} = e^{-\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi}.$$

3-мисол. $1^{-i} = ?$

$$z = 1, \alpha = -i, r = |z| = 1, \varphi = \arg 1 = 0.$$

Шуларга асосан

$$\ln z = \ln 1 = 0, w_0 = e^{-i \cdot 0} = e^0 = 1.$$

$$e^{2k\pi i} = e^{2k\pi}.$$

Демак,

$$1^{-i} = e^{2k\pi}$$

ёки

$$\dots, e^{-4\pi}, e^{-2\pi}, 1, e^{2\pi}, e^{4\pi}, \dots$$

лар ўша даражанинг қийматларидан иборат кетма-кетликдир.

4-мисол. $(1-i)^{1+i} = ?$

$$\alpha = 1+i, z = 1-i, r = |1-i| = \sqrt{2}, \varphi = \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\ln z = \ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}i; \alpha \ln z = (1+i) \left(\ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}i \right) =$$

$$= \left(\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} \right) + i \left(\ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} \right).$$

У ҳолда

$$w_0 = e^{\alpha \ln z} = e^{\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}} \cdot e^{i \left(\ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} \right)};$$

$$e^{2k\pi i} = e^{2k\pi(1+i)} = e^{-2k\pi} \cdot e^{2k\pi i}.$$

Демак, (42) га асосан:

$$(1-i)^{1+i} = e^{\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} - 2k\pi} \cdot e^{i \left(\ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right)}.$$

Сўнгги кўпайтувчини очикроқ ёзиш учун Эйлернинг $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ формуласини ишлатиш лозим.

7-§. Тескари тригонометрик ва тескари гиперболик функциялар

Бу параграфда комплекс ўзгарувчининг тескари тригонометрик функцияларини текшираамиз. Агар

$$z = \sin w$$

функция берилган бўлса, w ўзгарувчи унга тескари функция бўлиб, у z нинг арксинуси дейилади ва бундай

$$w = \text{Arc sin } z$$

ёзилади. Худди шунингдек, агар

$$z = \cos w, \quad z = \text{tg } w, \quad z = \text{ctg } w$$

функциялар берилган бўлса, уларга тескари бўлган функциялар мос равишда қуйидагича ёзилади:

$$w = \text{Arc cos } z, \quad w = \text{Arc tg } z, \quad w = \text{Arc ctg } z.$$

Ҳозир биз z нинг қиймати берилган вақтда унга мос бўлган тескари тригонометрик функцияларнинг қийматларини топиб берадиган формулаларни келтириб чиқарамиз. Дастлаб арксинусга тегишли формулани чиқарайлик.

(27) формулага асосан:

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \quad (\text{A})$$

ёки касрдан қутқариб бир томонга ўтказилса,

$$e^{iw} - 2iz - e^{-iw} = 0.$$

Бунинг икки томонини e^{iw} га кўпайтирилса:

$$e^{2iw} - 2iz e^{iw} - 1 = 0.$$

Агар вақтинча $k = e^{iw}$ деб белгиласак, ушбу

$$k^2 - 2izk - 1 = 0$$

квадрат тенгламанинг илдизлари:

$$k = iz \pm \sqrt{1 - z^2}$$

ёки

$$e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}$$

ҳосил бўлиб, бундан:

$$w = \frac{1}{i} \text{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}).$$

A) га асосан

$$w = \text{Arc sin } z$$

эди. Демак,

$$\text{Arc sin } z = \frac{1}{i} \text{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}). \quad (46)$$

Бунда $\sqrt{1-z^2}$ илдизнинг алгебранк қиймати олинди.
Мана шу усул билан осонгина

$$\operatorname{Arc} \cos z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}) \quad (47)$$

формулани чиқариш мумкин.

Энди арктангенсга тегишли формулани чиқарамиз:

$$z = \operatorname{tg} w \text{ дан } w = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} z.$$

Иккинчи томондан, (28) формулага асосан

$$z = \operatorname{tg} w = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}$$

ёки

$$iz(e^{iw} + e^{-iw}) = e^{iw} - e^{-iw}.$$

Бунинг икки томонини e^{iw} га кўпайтириб, сўнгра қуйидагини топиш қийин эмас:

$$e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz}$$

Бундан

$$w = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}$$

ёки w ўрнига арктангенсни қўйилса,

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz} \quad (48)$$

формула ҳосил бўлади.

Шу йўл билан

$$\operatorname{Arc} \operatorname{ctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z-i}{z+i} \quad (49)$$

формула келиб чиқади.

(46)–(49) тенгликларнинг ўнг томонлари логарифмлардан иборат бўлгани учун бу ерда, яъни комплекс ўзгарувчилар соҳасида ҳам тескари тригонометрик функциялар кўп қийматли эканлигини кўраимиз.

1-мисол. $\operatorname{Arc} \sin i$ ҳисоблансин.

(46) формулага асосан:

$$\operatorname{Arc} \sin i = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}(-1 + \sqrt{2}),$$

$$\operatorname{Ln}(-1 + \sqrt{2}) = \ln(-1 + \sqrt{2}) + 2k\pi i.$$

Демак,

$$\operatorname{Arc} \sin i = 2k\pi - i \ln(-1 + \sqrt{2}).$$

2-мисол. $\operatorname{Arc} \operatorname{tg}(1+i) = ?$

$$z = 1+i, \quad 1+iz = 1+i(1+i) = i, \quad 1-iz = 1-i(1+i) = 2-i$$

$$\frac{1+iz}{1-iz} = \frac{i}{2-i} = \frac{i(2+i)}{2^2-i^2} = \frac{-1+2i}{5}.$$

Энди, (48) га мувофиқ:

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tg}(1 + i) = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{-1 + 2i}{5}.$$

$$R = \left| \frac{-1 + 2i}{5} \right| = \frac{1}{5} \sqrt{1^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{b}{a} = \frac{2}{5} + \frac{-1}{5} = -\frac{1}{5}.$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \operatorname{arc} \operatorname{tg}(-2), \quad \operatorname{Ln} \frac{-1 + 2i}{5} = \ln \frac{-1 + 2i}{5} + 2k\pi i = \\ &= -\frac{1}{2} \ln 5 + i \operatorname{arc} \operatorname{tg}(-2) + 2k\pi i. \end{aligned}$$

У ҳолда:

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tg}(1 + i) = \frac{1}{4} \ln 5 - \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2 + k\pi.$$

Тескари гиперболик функциялар. (32) формулалар қуйидагилардан иборат эди:

$$\begin{aligned} z &= \operatorname{sh} w = \frac{1}{2} (e^w - e^{-w}), \quad z = \operatorname{ch} w = \frac{1}{2} (e^w + e^{-w}), \\ z &= \operatorname{th} w = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}}, \quad z = \operatorname{cth} w = \frac{e^w + e^{-w}}{e^w - e^{-w}}. \end{aligned} \quad (50)$$

Бу ерда биз w ни аргумент ва z ни функция сифатида қабул қилдик. Мана шу функцияларга тескари бўлган функциялар, мос рзвишда тескари гиперболик функциялар дейилиб,

$$w = \operatorname{Arsh} z, \quad w = \operatorname{Arch} z, \quad w = \operatorname{Arth} z, \quad w = \operatorname{Arcth} z \quad (51)$$

қўринишда ёзилади.

Агар тўғри гиперболик функциялар берилган бўлса, уларга мос тескари гиперболик функцияларни топиш учун (50) тенгламаларнинг ҳар бирини w га нисбатан ечмоқ керак. Мисол учун (50) нинг биринчисидан w ни топайлик:

$$e^w - e^{-w} = 2z \quad \text{ёки} \quad e^{2w} - 2ze^w - 1 = 0.$$

Бу эса e^w га нисбатан квадрат тенгламадир, демак, унинг илдизлари

$$e^w = z \pm \sqrt{z^2 + 1}$$

дан иборат. Икки томонини логарифмласак:

$$w = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}).$$

Шундай қилиб,

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}). \quad (52)$$

Бунда ҳам $\sqrt{z^2+1}$ илдиз алгебраик маънода, яъни радикал икки ишорали деб тушунамиз. Худди шу усулда (50) дан қуйидагиларни келтириб чиқариш мумкин:

$$\begin{aligned}\operatorname{Arch} z &= \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}), \quad \operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}, \\ \operatorname{Arcth} z &= \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}.\end{aligned}\quad (53)$$

Равшанки, тескари гиперболик функциялар ҳам кўп қийматлидир.

$$\begin{aligned}1\text{-мисол. } \operatorname{Arch} 2i &= \operatorname{Ln}(2i + \sqrt{(2i)^2 - 1}) = \operatorname{Ln}(2i + i\sqrt{5}) = \\ &= \operatorname{Ln}[i(2 + \sqrt{5})] = \ln(2 + \sqrt{5}) + \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\text{-мисол. } \operatorname{Arth}(1-i) &= \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+(1-i)}{1-(1-i)} = \frac{1}{2} \operatorname{Ln}(-1-2i) = \\ &= \frac{1}{4} \ln 5 + \left[\frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2 + \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right] i, \\ &(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).\end{aligned}$$

8-§. Айрим элементар функцияларга мос акслантиришлар. Риман сиртлари ҳақида тушунча

Берилган

$$w = f(z)$$

функция (z) текисликдаги бирор G соҳани (w) текисликка акслантириши бизга маълум. Бу хилдаги акслантириш турли бўлиб, улардан бири конформ ва иккинчиси конформ бўлмаган акслантиришдир. Биз баъзи элементар функциялар ёрдами билан бажариладиган акслантиришлар билан танишиб чиқамиз.

1. Даражали функция ва радикал, уларнинг Риман сирти. Берилган ушбу

$$w = z^n \quad (54)$$

даражали функция ёрдами билан (z) текислигининг (w) текисликка қандай аксланишини текширамыз. Даража кўрсаткичи $n=2, 3, 4, \dots$ сонларни қабул қилади.

(54) функция бир қийматли бўлгани учун (z) текислигининг ҳар бир нуқтаси (w) нинг тайини бир нуқтасига аксланади. Жумладан

$$z=0 \text{ бўлганда } w=0,$$

$$z=\infty \text{ бўлганда } w=\infty$$

бўлади. Бошқа нуқталарнинг қандай акс эттирилишини осонроқ текшириш мақсади билан (54) да қутб координаталарига ўтамыз. Бунинг учун $z=x+iy$ ва $w=u+iv$ ларини тригонометрик шаклда ёзиб оламиз:

$$z=r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}, \quad w=\rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}.$$

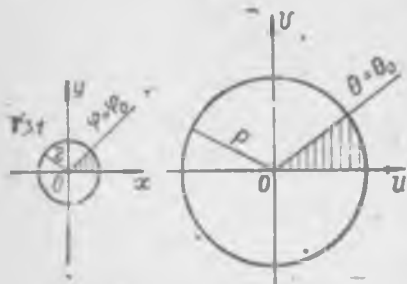
Мана шуларни (54) га қўйсак:

$$\rho e^{i\theta} = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi},$$

бундан

$$\rho = r^n, \theta = n\varphi \quad (55)$$

тенгликлар ҳосил бўлиб, иккаласи (54) га эквивалентдир. Мисол учун, агар (z) текисликда, маркази $z = 0$ нуқтада жойлашган $r = \frac{1}{2}$ радиусли айлана олсак, унинг (w) текисликдаги акси ҳам, (55) тенгликларга асосан, айланадан иборат бўлиб, унинг маркази $w = 0$ нуқтада ва радиуси $\rho = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ га тенг бўлади. Шунингдек, $z = 0$ нуқтадан чиқарилган $\varphi = \frac{\pi}{6}$ нурнинг



46-чизма.

бўлиб қолади. Умуман (z) текисликдаги $z = 0$ дан чиқувчи $\varphi = \text{const}$ нурнинг акси $w = 0$ дан чиқувчи нурдан иборат бўлади. Хусусий ҳолда Ox ўқнинг мусбат томони $\varphi = 0$ нурдан иборат бўлиб, унинг акси $\theta = 0$ нурдир, яъни Ox ўқнинг мусбат томонидан иборатдир.

Шундай қилиб, (54) даражали функция (z) текисликдаги $r = \text{const}$ айланалар оиласини (w) текисликдаги $\rho = r^n = \text{const}$ айланалар оиласига акслантиради. Шунингдек, $z = 0$ нуқтадан чиқувчи $\varphi = \text{const}$ нурлар оиласи эса $\theta = n\varphi = \text{const}$ нурлар оиласига аксланади. Мана шу мулоҳазаларга диққат қилинса, қуйидаги ҳодисаларни пайқаш мумкин:

я) агар $r > 1$ бўлса, бу айлананинг акси ундан каттароқ, агар $r < 1$ бўлса, акси кичикроқ бўлади, агар $r = 1$ бўлса, у ҳолда айлана ўзгармай аксланади, яъни иккала айлана айнан бир хилда бўлади.

б) (z) текисликда ётувчи иккита нур орасидаги, масалан, $\varphi = 0$ ва $\varphi = \varphi_0$ нурлар орасидаги ушбу

$$0 < \varphi < \varphi_0 \quad (56)$$

бурчак (w) текисликка кенгайиб аксланади ва

$$0 < \theta < n\varphi_0 = \theta_0 \quad (57)$$

бурчак ҳосил бўлади (46-чизма).

-Демак, агар $w = z^n$ функция воситаси билан (z) текисликдаги, учи $z = 0$ нуқтада бўлган бурчакларни акслантирсак, улар ўз ҳолича эмас, балки шаклини ўзгартириб (кенгайиб)

аксланади. Бошқача қилиб айтганда, $z=0$ нуқтада конформ акслантириш ўринли бўлмайди. Дарҳақиқат, агар берилган (54) функциядан ҳосила олсак,

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = nz^{n-1}$$

бўлиб, $z=0$ нуқтада

$$f'(0) = 0.$$

Бизга маълум эдики, функциянинг z нуқтада конформ акслантириш хоссасига эга бўлиши учун унинг ҳосиласи ўша нуқтада нолдан фарқли ($f'(z) \neq 0$) бўлиши керак.

Агар биз (56) деб, $\frac{\pi}{n}$ катталиikka эга бўлган ушбу

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{n}$$

бурчакни олсак, бунинг (w) текисликдаги акси, (57) га мувофиқ,

$$0 < \theta < \pi$$

юқори ярим текисликдан иборат бўлади.

Худди шунга ўхшаш, $\frac{2\pi}{n}$ катталикидаги ушбу

$$0 < \varphi < \frac{2\pi}{n} \quad (58)$$

бурчакнинг акси эса

$$0 < \theta < 2\pi \quad (59)$$

дан, яъни ҳақиқий мусбат ярим ўқдан ташқари бутун текисликдан иборатдир. (58) бурчак ичидаги ҳар бир z нуқтага (59) бурчак ичида битта w нуқта мос келади, яъни бу икки бурчак орасида ўзаро бир қийматли мослик ўринлидир, бошқача айтганда

$0 < \varphi < \frac{2\pi}{n}$ кенгликдаги бурчакда функция бир варақлидир. (58) бурчакнинг $\varphi = 0$ томонининг акси (59) бурчакнинг

$\theta = 0$ томонидан иборат ва $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ томоннинг акси $\theta = 2\pi$ томондан иборат, лекин $\theta = 0$ ва $\theta = 2\pi$ ларнинг иккаласи ҳам

Oz ўқнинг мусбат томонини билдиради. Демак, $\varphi = 0$ ва $\varphi =$

$= \frac{2\pi}{n}$ нурларнинг акси битта Oz чизиққа аксланади, яъни ўз-

аро бир қийматли акслантириш бузилди. Бундан қутулиш учун қуйидагича иш кўрамыз. (w) текислиكنи Oz ҳақиқий ўқнинг мусбат ярми бўйлаб (ноль нуқтадан бошлаб) „кесамиз“. Қўполроқ қилиб айтганда, Oz чизиқ бўйлаб, гўё биз канал (ариқ) ўтказамиз. Каналнинг икки „қирғоғи“ бўлганидек, ўша кесимнинг ҳам юқори ва қуйи „қирғоғи“ бор деб қабул қиламиз. Бу ҳилдаги текислиكنи биз кесилган текислик деб атаймиз (47- чизма). Энди $\varphi = 0$ томонни ўша текисликнинг юқори

„қирғоғи“ га, $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ томонни қуйи „қирғоқ“ қа акслантирамиз.

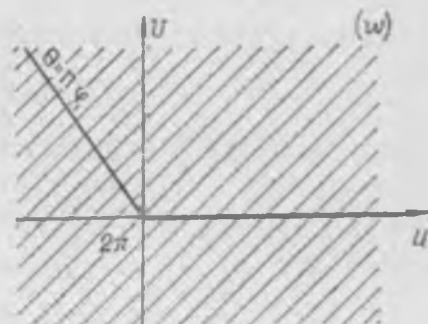
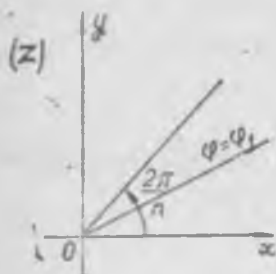
У вақтга, агар $\varphi = \varphi_1$ ($\varphi_1 < \frac{2\pi}{n}$) нур соат стрелкасига тескари

ауналиш бўйича $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ нурга яқинлашса, $\varphi = \varphi_1$ га мос бўлган

$\theta = n\varphi$, нур *Ои* ўқнинг мусбат томонига қуйидан (пастдан) интилиб боради.

Биз даражали

$$w = z^n \quad (54)$$



47-чизма.

($n = 2, 3, 4, \dots$) функция воситаси билан бажариладиган акслантиришни куриб чиқдик. Бунда ҳар бир z нуқтага битта w нуқта мос келишини, яъни (54) нинг бир қийматли функция эканлигини кўрдик. Энди (54) тенгламани z га нисбатан ечсак,

$$z = \sqrt[n]{w} \quad (60)$$

ҳосил бўлиб, у (54) функцияга нисбатан тескари функция бўлади. I бобдаги (33) формулага асосан (60) даги w нинг ҳар бир қийматига z нинг n та қиймати мос келади. IIIу сабабли (60) функция нуп қийматли функциядир (аниқроқ қилиб айтсак, n қийматли функция). w ва z ларни қутб координаталари орқали ифода қилиб, аввалгидай мулоҳаза қилсак, (60) дан қуйидаги икки тенглик келиб чиқади:

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad (61)$$

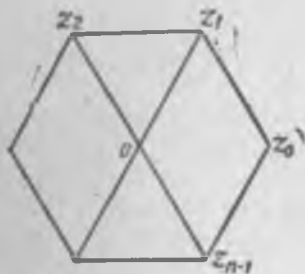
бундаги $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$. Агар биз z нинг ҳалиги n та қийматини $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ орқали белгиласак, буларнинг ҳар бирига (z) текисликда битта вектор мос келади. Бу векторларнинг модуллари ўзаро тенг бўлиб, у $r = \sqrt[n]{\rho}$ мусбат сондан иборат. Ўша нуқталарнинг аргументлари эса, (61) га мувофиқ, мос равишда

$$\varphi_0 = \frac{0}{n}, \quad \varphi_1 = \frac{0}{n} + \frac{2\pi}{n}, \quad \varphi_2 = \frac{0}{n} + \frac{4\pi}{n}, \quad \dots, \quad \varphi_{n-1} = \frac{0}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

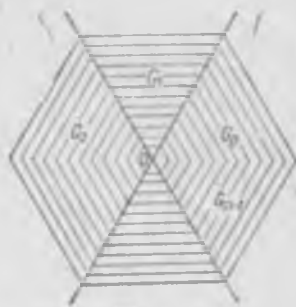
лардан иборатдир. Курсатилган сабабларга асосан z_k нуқталар мунтазам купбурчакнинг учларидан иборат бўлади (48-чизма).

Агар биз w нинг ҳар бир қийматига z нинг фақат битта қийматини мос қилиб қўймоқчи бўлсак, z га тегишли нуқталарни қуйидаги

$$0 < \varphi < \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{2\pi}{n} < \varphi < \frac{4\pi}{n}, \quad \dots, \quad \frac{2(n-2)\pi}{n} < \varphi < \frac{2(n-1)\pi}{n}$$



48- чизма.



49- чизма.

бурчакларнинг фақат биттаси ичидан олишимиз керак. Ўша бурчаклар (z) текисликдаги соҳалардан иборат бўлиб, уларни мос равишда

$$G_0, G_1, G_2, \dots, G_{n-1}$$

орқали белгилайлик (49-чизма).

Мисол учун, G_0 соҳада олинган ҳар бир z нуқтага (w) текисликда битта w нуқта мос келади ва аксинча, (w) текисликдаги ҳар бир w нуқтага (мусбат ҳақиқий ўқ нуқталаридан ташқари) G_0 соҳада битта нуқта мос келади. (w) текислик билан G_0 соҳа орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатувчи функция (60) нинг бир тармоғи аталиб, уни қуйидагича ёзадилар:

$$z_0 = (\sqrt[n]{w})_0.$$

Худди шу усулда (w) текислик билан G_1 соҳа орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш натижасида (60) нинг иккинчи тармоғи

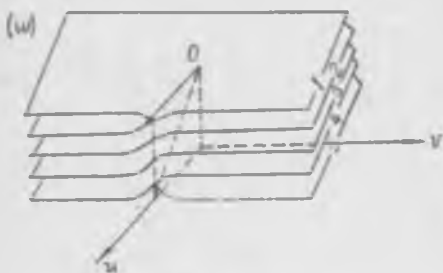
$$z_1 = (\sqrt[n]{w})_1.$$

келиб чиқади. Ўмуман, $G_k (k=0, 1, 2, \dots, n-1)$ соҳаларнинг ҳар бирини алоҳида-алоҳида (w) текислик билан ўзаро бир қийматли мослаш натижасида (60) куп қийматли функциянинг ушбу

$$z_0 = (\sqrt[n]{w})_0, \quad z_1 = (\sqrt[n]{w})_1, \quad z_2 = (\sqrt[n]{w})_2, \quad \dots, \quad z_{n-1} = (\sqrt[n]{w})_{n-1} \quad (62)$$

тармоқлари ҳосил бўлади.

Мана шу акслантириш жараёнида шундай ҳодиса рўй бермоқдаки, G_0 соҳанинг акси (w) текислигининг барча нуқталаридан иборат бўлиб, G_1 акслантириш учун (w) да буш жой қолмади. Бошқача айтганда, G_0 нинг акси (w) текислигини бутунлай қоплайди, шу сабабли $G_1, G_2, \dots$ ларни акслантириш учун жой йўқ. Ана шу қийинчиликдан қутулиш учун қуйидагича иш қиламиз. G_0 нинг аксини бир варақ қоғозга тушириб, уни 1-номерли текислик деб қабул қиламиз. G_1 нинг аксини бошқа бир



50- чизма.

варақ қоғозга тушириб, уни 2- номерли текислик деб қабул қиламиз ва ҳоказо G_{n-1} нинг аксини ($n-1$) вараққа туширамиз.

Бу текисликларнинг ҳаммасида, олдинги параграфда айтилганидек, кесим ҳосил қиламиз. $w = 0$ бўлганда (60) га асосан, ҳамма G_n соҳалар учун $z = 0$ нуқта умумий

булади. Шу сабабли ҳалиги номерланган текисликлардаги $w = 0$ нуқта умумийдир, яъни бир жойда бўлиши шарт. Шунинг учун ўша варақларни устма-уст қўйиб шундай тахлаймизки, натижада $w = 0$ нуқта (координаталар боши) ҳаммаси учун умумий бўлсин. Ундан ташқари, ҳаммасининг ҳақиқий ўқларининг мусбат томонлари бир-бирининг устига тушсин. Демак, у ҳолда ҳамма текисликлардаги ўқлар бир хилда булади. Сунгра 1- варақнинг пастки „қирғоғи“ ни (чеккасини) 2- варақнинг юқори „қирғоғи“ га „ёпиштирамиз“. Шунингдек, 2- варақнинг пастки „қирғоғи“ ни 3- варақнинг юқори „қирғоғи“ га „ёпиштирамиз“ ва ҳоказо. Мана шу усулда ҳосил қилинган сирт Риман сирти деб аталади.

Агар энди, z нуқта (z) текисликда бирор эгри чизик бўлаб узлуксиз равишда ҳаракат қилиб, $G_0, G_1, G_2, \dots$ соҳаларнинг биридан иккинчисига ўта борса, w нуқта ҳам Риман сиртида бирор чизик бўйича узлуксиз ҳаракат қилиб, мос равишда, бир варақдан иккинчи вараққа ўтиб боради (50- чизма).

Натижада, (60) тескари ва n қийматли функция воситаси орқали (z) текислик билан Риман сирти орасида узаро бир қийматли мослик урнатилди.

Агар z нуқта $|z| = r$ айлана бўйича $z = 0$ нуқтани айланиб чиқса, (61) га биноан, w нуқта $w = 0$ нуқтани $|w| = r$ айлана бўйича n марта айланиб чиқади, яъни Риман сиртида w нуқта бир варақдан иккинчисига, ундан учинчисига ва ҳоказо сунгги вараққа ўтади. Худди шу усулда, агар z нуқта $z = \infty$ теварақда айланиб чиқса, яъни етарли даражада катта радиусли айланани соат стрелкаси бўйича айланиб чиқса, унга мос w нуқта ҳам

$w = \infty$ теъаракни n марта айлапиб чиқади. Мана шунинг натижасида $z = \sqrt[n]{w}$ функциянинг (62) тармоқлари келиб чиқади. Шундай хусусиятга эга бўлган $w = 0$ ва $w = \infty$ нуқталар n -тартибли тармоқланиш нуқталари дейилади. (60) функциянинг $w = 0$ ва $w = \infty$ лардан бошқа тармоқланиш нуқталари йуқ.

2. Жуковский функцияси. Жуковский функцияси қуйидагидан иборат:

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right). \quad (63)$$

(63) функция нолдан фарқли барча z лар учун аниқланган, бир қийматли ҳамда аналитик функциядир. Дастлаб бу функция воситаси билан бажариладиган акслантириш ўзаро бир қийматли булиши учун қандай шарт кераклигини текшираимиз. Унинг учун аксинча фараз қиламиз, яъни z_1 ва z_2 ($z_1 \neq z_2$) қийматларга биттагина w , сон мос келсин:

$$\frac{1}{2} \left(z_2 + \frac{1}{z_2} \right) = \frac{1}{2} \left(z_1 + \frac{1}{z_1} \right).$$

Бундан

$$(z_1 - z_2) \left(1 - \frac{1}{z_1 z_2} \right) = 0$$

ёки

$$1 - \frac{1}{z_1 z_2} = 0, \text{ яъни: } z_1 z_2 = 1.$$

Демак, (63) функцияда ўзаро бир қийматли мосликнинг сақланиши учун (z) текисликдаги G соҳа ичида ушбу

$$z_1 z_2 = 1$$

тенгликни қаноатлантирадиган икки хил z , ва z , нуқталар бўлмаслиги шарт. Мисол учун $|z| < 1$ бирлик доиранинг ичини ёки $|z| > 1$ ташқарисини ўша G соҳа сифатида қабул этиш мумкин, чунки доира ичида $|z_1| < 1$ ва $|z_2| < 1$ бўлгани учун $|z_1 z_2| < 1$, яъни $z_1 z_2 \neq 1$. Худди шунингдек доира ташқарисида $|z_1 z_2| > 1$ бўлгани учун $z_1 z_2 \neq 1$ бўлади.

Энди (63) функциянинг геометрик маъносини текшириш учун қуйидагича ёзиб оламиз:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi} \text{ ва } w = u + iv$$

бунда $r = |z|$. У ҳолда (63) дан

$$\begin{aligned} u + iv &= \frac{1}{2} \left(re^{i\varphi} + \frac{1}{re^{i\varphi}} \right) = \frac{1}{2} \left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r} e^{-i\varphi} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi + i \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi \right]. \end{aligned}$$

Бундан

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi \quad (64)$$

тенгламаларга эга бўламиз.

Энди биз (63) функцияни (64) кўринишда ёзиб, унинг ёрдами билан (z) текисликдаги $|z| = r$ айлананинг (w) текисликдаги акси қандай чизиқдан иборат эканини текшираемиз. Бу ерда икки ҳол бор: $r < 1$ ва $r > 1$.

а) $r < 1$ бўлсин. Қуйидагича белгилаб олайлик:

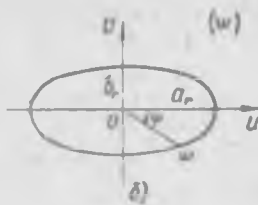
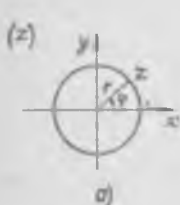
$$a_r = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \text{ ва } b_r = -\frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right). \quad (65)$$

бунда $b_r > 0$, чунки $r < 1$. У ҳолда (64) нинг кўриниши

$$u = a_r \cos \varphi, \quad v = -b_r \sin \varphi \quad (64')$$

дан иборат бўлиб, (w) текисликдаги эллипснинг параметрик тенгламаларидир. Бунинг фокуслари, $c = \sqrt{a_r^2 - b_r^2}$ формулага мувофиқ $(\pm 1, 0)$ нуқталарга жойлашган.

Демак, (z) текисликдаги $|z| = r$ айлананинг (w) текисликдаги акси (64') эллипсдан иборат бўлар экан. Энди эллипсдаги



51- чизма.

— мусбат йўналишни аниқлайлик. Агар айлана устидаги ихтиёрий z нуқта мусбат йўналиш бўйича (соат стрелкасига тескари) бир марта айланиб чиқса, φ бурчак 0 дан 2π гача ўзгаради. Аналитик геометриядан маълумки, эллипснинг ушбу

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi \quad (65)$$

параметрик тенгламаларида $a > 0$, $b > 0$ ҳамда $0 \leq \varphi < 2\pi$ бўлади. Ҳолбуки (64') эллипсда $-b_r < 0$. Мана шундан кўринадики, φ бурчак 0 дан -2π гача ўзгариши керак: $-2\pi < \varphi \leq 0$. Бунинг учун эллипс устидаги ихтиёрий w нуқта соат стрелкаси бўйича ҳаракат қилишга мажбур (51- чизма).

Агар биз айлананинг r радиусини нолга яқинлаштирсак, (65) га асосан

$$a_r \rightarrow \infty, \quad b_r \rightarrow \infty \text{ ва } a_r - b_r = r \rightarrow 0,$$

яъни эллипс катталаша бориб, айлана шаклига яқинлаша боради. Агар $r \rightarrow 1$ ($r < 1$) бўлса, у ҳолда

$$a_r \rightarrow 1, \quad b_r \rightarrow 0, \quad (66)$$

яъни юқоридаги эллипс Ou ўқдаги $[-1, 1]$ кесмага тортилади.

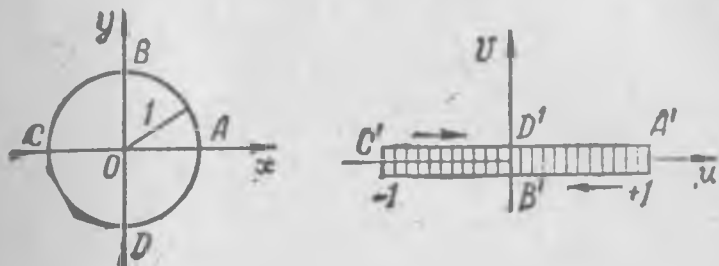
Шундай қилиб, (63) функция воситаси билан $|z| < 1$ доира Ou ҳақиқий ўқнинг $[-1, 1]$ кесмасидан ташқари қисмига аксланар экан.

Энди $|z| = r = 1$ айланага (w) текисликда қандай чизиқ мос келишини текширайлик. Унинг учун (64) да $r = 1$ дейлик, у ҳолда

$$u = \cos \varphi, \quad v = 0 \quad (67)$$

булади. $|z| = 1$ айлананинг устки ярмида $0 < \varphi \leq \pi$ бўлиб, (67) га асосан $1 \geq u \geq -1$, $v = 0$ булади. Айлананинг пастки ярмида эса $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ бўлиб, $-1 < u < 1$, $v = 0$ булади.

Демак, $|z| = 1$ айлананинг акси Ou уқдаги икки қаватли $[-1, 1]$ кесмадан иборат бўлиб, -1 ва $+1$ нуқталар қўзғалмай қолади. Шу билан бирга $|z| = 1$ айлананинг ABC юқори қисмига



52- чизма.

$[-1, 1]$ кесманинг қуйи $A'B'C'$ „қирғоғи“ ва айлананинг пастки ADC қисмига эса кесманинг юқори „қирғоғи“ мос келади (52- чизма).

б) $r > 1$ бўлсин. Бу ҳолда (64) эллипс тенгламаларидаги коэффицентлар

$$\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) > 0 \text{ ва } \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) > 0$$

бўлгани учун $|z| = r$ айлана билан эллипсдаги йуналишлар бир хил булади. Агар $r \rightarrow 1$ ($r > 1$) бўлса, у ҳолда

$$a_r \rightarrow 1, b_r \rightarrow 0,$$

яъни эллипс $[-1, 1]$ кесмага тортилади (айланади). Агар $r \rightarrow \infty$ бўлса, у ҳолда:

$$a_r \rightarrow \infty, b_r \rightarrow \infty \text{ ва } a_r - b_r = \frac{1}{r} \rightarrow 0,$$

яъни эллипс кагталаша бориб, айлана шаклига яқинлашади.

Шундай қилиб, (63) функция $|z| > 1$ доира ташқарисини $[-1, 1]$ кесманинг ташқарисига акслантиради, $|z| = 1$ айлананинг акси икки қаватли кесмадан иборат бўлиб, айлананинг устки ярмига кесманинг ҳам устки „қирғоғи“ (чеккаси) ва айлананинг пастки ярмига пастки „қирғоғи“ мос келади.

Юқоридаги мулоҳазаларимиздан $|z| = 1$ айлананинг ичига ҳам, ташқарисига ҳам $[-1, 1]$ кесманинг ташқариси мос келиши очиқ кўриниб турибди. Демак, (63) функция ёрдами билан (z) текисликни (w) текисликка акслантириб, ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш учун битта текислик етарли эмас. Шунинг учун (w) текисликни $[-1, 1]$ кесма бўйлаб кесиндан ҳосил бўлган иккита $(\tilde{w})_1$ ва $(\tilde{w})_2$ текислик олиб уларни бир-

бирига кесма „қирғоқлари“ буйлаб ёпиштирамиз. Натижада (63) Жуковский функциясининг геометрик тасвиридан иборат Риман сирти ҳосил бўлиб, $w = \pm 1$ лар унинг тармоқланиш нуқталари дейилади.

Тескари функция. Юқоридаги (63) тенгламани z га нисбатан ечайлик:

$$z + \frac{1}{z} = 2w \text{ ёки } z^2 - 2wz + 1 = 0,$$

бундан:

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1}. \quad (68)$$

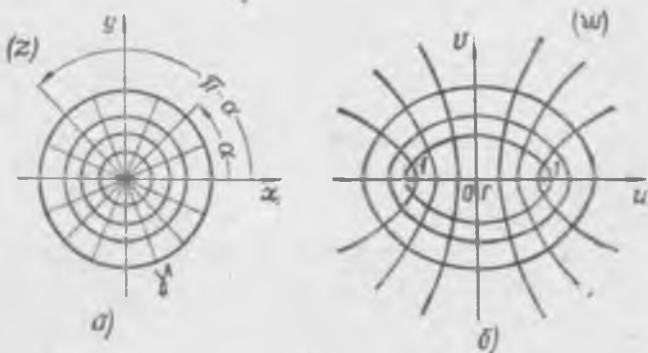
Бу эса (63) га тескари булган функциядир. Риман сиртидаги ҳар бир w нуқтага битта z нуқта мос келади. Бу сирт икки варақли бўлгани учун (68) функция иккита тармоққа эга бўлиб,

$$z_1 = w + \sqrt{w^2 - 1} \text{ ва } z_2 = w - \sqrt{w^2 - 1} \quad (68')$$

деб олсак, $z_1 \cdot z_2 = 1$ бўлади.

Улардан биринчиси $[-1, 1]$ кесманинг ташқарисидаги w нуқтани $|z| < 1$ доира ичига акслантирса, иккинчиси эса $|z| > 1$ доиранинг ташқарисига акслантиради.

Нуқталарнинг акси. Юқоридаги r радиус турли мусбат қийматларни қабул қилиши мумкин бўлгани учун $|z| = r$ айланалар оиласи бўлиб, унинг (w) текисликдаги акси (64) эллипслар оиласидан иборатдир (53-чизма). Энди (z) текисликда O нуқтадан чиқувчи $\arg z = \varphi$ нурлар оиласининг акси (w) текис-



53- чизма.

ликда қандай чизиқлардан иборат бўлишини текширайлик. Шунинг учун (64) тенгламалардан r ни чиқариб ташланса, ушбу

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = 1$$

гиперболалар оиласига эга бўламиз ва уларнинг фокуслари ҳам $(\pm 1, 0)$ нуқталардан иборат бўлади.

3. Кўрсаткичли ва логарифмик функциялар, уларнинг Риман сирти. Энди биз $w = e^z$ кўрсаткичли функция воситаси билан бажариладиган акслантиришни текширамыз. Маълумки, бу функция бир қийматлидир, чунки $z = x + iy$ нинг ҳар бир қийматига $w = u + iv = e^z$ нинг биргина қиймати мос келади. Берилган функцияни қуйидагича ёзиб олайлик:

$$w = u + iv = e^x (\cos y + i \sin y).$$

$w = e^z$ функция аналитик ва ҳосиласи барча нуқталарда нолдан фарқли бўлгани учун, унинг ёрдами билан конформ акслантириш бажарилади.

Энди бу функция воситаси билан (z) текисликдаги баъзи чизиқларни (w) текисликка акслантирганда қандай чизиқлар ҳосил булишини аниқлаш мақсадида w ни қутб координаталари орқали ифодалаб ушбу:

$$w = \rho (\cos \theta + i \sin \theta) = e^x (\cos y + i \sin y)$$

тенгликни тузамиз. Бундан

$$\rho = e^x, \theta = y \quad (k=0) \quad (69)$$

тенгликлар ҳосил бўлади.

Маълумки, $x = a$ тенглама мавҳум ўққа параллел бўлган чизиқлар оиласини билдиради (a — ҳар қандай ҳақиқий ўзгармас сон). У ҳолда, буларнинг (w) текисликдаги акси, (69) га мувофиқ,

$$\rho = e^a$$

маркази ноль нуқтага ўрнашган айланалар оиласидан иборат бўлади. Худди шунингдек, $y = b$ тенглама ҳақиқий ўққа параллел чизиқлар оиласидан иборат бўлиб (b — ҳар қандай ўзгармас ҳақиқий сон), унинг (w) даги акси

$$\theta = b$$

ноль нуқтадан чиқувчи нурлар оиласидан иборатдир (54-чизма). (z) текисликдаги $x = a_1, x = a_2$ ва $y = b_1, y = b_2$ тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчакнинг (w) текисликдаги акси $\rho = e^{a_1}, \rho = e^{a_2}$ айланалар ва $\theta = b_1, \theta = b_2$ нурлар билан чегараланган соҳадан иборатдир. Шунингдек (z) даги $y = 0$ ҳақиқий ўқнинг акси (w) даги $\theta = 0$ ҳақиқий мусбат Ои ярим ўқдан иборат. Мана шуларга асосан

$$y = 0 \text{ ва } y = b$$

тўғри чизиқлар билан чегараланган (z) текисликдаги ушбу

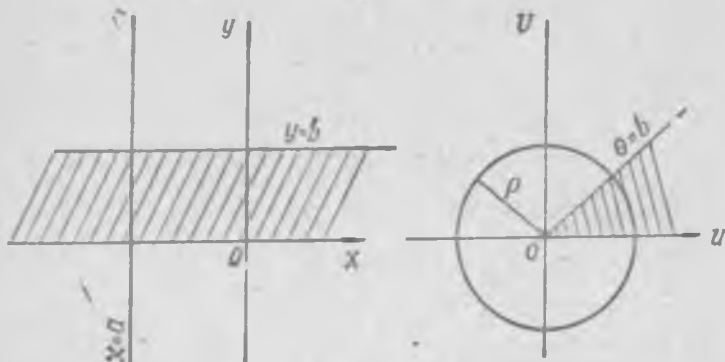
$$0 \leq y < b$$

полоса (w) текисликка конформ ва ўзаро бир қийматли акслантирилиб, ушбу

$$0 \leq \theta < b$$

бурчак ҳосил бўлади (54- чизма).

Хусусий ҳолда, $0 < y < \pi$ йўл π кенгликка эга бўлиб, унинг акси (w) нинг юқори $0 < \theta < \pi$ қисмидан иборат бўлади. Шунингдек, 2π кенгликка эга бўлган $0 \leq y < 2\pi$ йўлнинг акси $0 < \theta < 2\pi$, яъни бутун (w) текисликдан иборат бўлиб, у ҳақиқий ўқнинг мусбат йўналиши бўйича



54- чизма.

кесилгандир, чунки (w)-текисликни юқорида айтгандек қилиб кесмасак, $y = 0$ ва $y = 2\pi$ тўғри чизиқларнинг акси биргина O ирим ўқдан иборат бўлиб, z билан w орасида ўзаро бир қийматли мослик бузилади.

Шундай қилиб, биз $w = e^z$ функция ёрдами билан (z) текисликнинг бир булаги бўлмиш $0 \leq y < b$ ($b < 2\pi$) йўлнинг (w) даги аксини аниқладик. Бу жойда шунга этибор қилиш керакки, (z) текислигининг $0 \leq y < 2\pi$ қисмини акс эттирганимизда y (w) ни батамом қоплайди. Демак, (z) текислигининг қолган қисmlарини акслантириш учун битта (w) текислик етарли эмас. Бошқача айтганда, бутун (z) текисликни (w) текисликка акслантириш ўзаро бир қийматли мосликка эга эмас. Ҳақиқатан ҳам,

$$w = e^z \quad (70)$$

функция бир қийматли, лекин

$$z = \operatorname{Ln} w = \ln |w| + i \operatorname{Arg} w = \ln |w| + i \arg w + 2k\pi i \quad (71)$$

($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) эса кўп қийматли функциядир. (70) нинг даврий функция эканлиги бизга маълум, яъни

$$e^{z+2\pi i} = e^z = w.$$

Шунинг учун z нинг баъзи қийматларида $w = e^z$ нинг қийматлари бир-бирига тенг бўлиб қолади. Мисол учун $z = z_1$ ва $z = z_2$ қийматларда

$$e^{z_1} = e^{z_2} \text{ ёки } e^{z_1} (\cos y_1 + i \sin y_1) = e^{z_2} (\cos y_2 + i \sin y_2)$$

булсин. У ҳолда

$$x_2 = x_1 \text{ ва } y_2 = y_1 + 2k\pi,$$

яъни:

$$y_2 - y_1 = 2k\pi.$$

Демак, $w = e^z$ ёрдами билан (z) нинг бирор қисмини (w) текисликка акслантирсак, узаро бир қийматли мослик ўрнатиш учун

$$e^{z_1} \neq e^{z_2},$$

яъни $y_2 - y_1 \neq 2k\pi$ ($z_2 - z_1 \neq 2k\pi i$) булиши керак экан.

Хусусий ҳолда биз айтган G соҳа $2k\pi < y < 2(k+1)\pi$ йўлдан иборат булса ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) e^z бу соҳада бир нарақли булади.

Агар биз (z) текислиكنинг ҳаммасини ушбу

$$\dots - 4\pi < y < -2\pi, -2\pi < y < 0, 0 < y < 2\pi, 2\pi < y < 4\pi, \dots$$

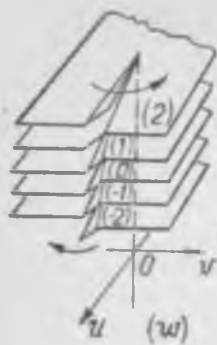
полосаларга ажратсак, улардан ҳар бири $w = e^z$ воситаси билан ҳақиқий ўқнинг мусбат томонидан кесилган бугун (w) текисликка узаро бир қийматли равишда акс эттирилади. Энди $2k\pi < y < 2(k+1)\pi$ йўлининг чегараларида ҳам узаро бир қийматли мослик ўрнатиш учун қуйидагича шарт қиламиз. Ўстаки $y = 2k\pi$ чегаранинг акси сифатида (w) даги кесимнинг юқори „қирғоғи“ ни, юқори $y = 2(k+1)\pi$ чегаранинг акси сифатида эса кесимнинг қўйи „қирғоғи“ ни қабул қиламиз.

Маълумки, агар $y = b$ тўғри чизик $y = 2k\pi$ ҳолатдан бошлаб $y = 2(k+1)\pi$ га қараб кўтарилса, унга мос равишда $\theta = -b$ нур (w) текисликда, соат стрелкасига тескари йўналиш билан, $\theta = 2k\pi$ ҳолатдан $\theta = 2(k+1)\pi$ ҳолатга утиб, текислиكنи тула равишда айланиб чиқади.

Бизнинг асосий мақсадимиз $w = e^z$ функция воситаси билан (z) текислиكنинг барча нуқталарини (w) текисликка акслантиришдан иборат. Бунинг учун, юқорида кўрганимиздек, битта (w) текислик етарли эмас. Шу сабабли биз чексиз куп (w) текисликлар олиб, уларнинг ҳар бирини ҳақиқий ўқнинг мусбат йўналиши бўйича кесамиз. Мана шу текисликларни (мисол учун қоғоз варақларини) қуйидагича

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

номерлаб, китоб варақлари каби бир-бирининг устига қўйиб тахлаймиз, сўнгра $0 < y < 2\pi$ йўлининг акси деб нолинчи варақни, $2\pi < y < 4\pi$ нинг акси деб, 1-варақни қабул қиламиз ва ҳоказо. Шунингдек, $-2\pi < y < 0$ нинг акси деб (-1)-варақ-



55- чизма.

ни, $-4\pi < u < -2\pi$ нинг акси деб (-2) -варақни қабул қиламиз ва ҳоказо.

Ҳамма жойда ўзаро бир қийматли мос-лик ўрнатиш учун юқорида айтилган варақларин бир-бирига қуйидагича ёпишти-рамиз:

k -варақнинг юқори „қирғоғи“ ни $(k - 1)$ -варақнинг қуйи „қирғоғи“ билан ёпиш-тирамиз (елимлаймиз). Бошқача қилиб айт-ганда, ҳар бир варақнинг юқори „қирғоғи“ ни унинг тагидаги варақнинг қуйи „қирғоғи“ билан ёпиштирамиз. Бу иш чексиз давом этади. Мана шундай усулда ясалган сирт Риман сирти деб аталади (55-чизма).

Юқоридаги мулоҳазаларимиздан шун-дай натижага келиш мумкин:

$$w = e^z \text{ ёки } z = \text{Ln } w$$

функция воситаси билан (z) текисликни (w) га акс этгирсак, ҳар бир нуқтага Риман сиртида биргина нуқта мос келади. Агар z нуқта Ou ўққа параллел йўналишда пастдан юқорига кўтарилса, u ҳолда Риман сиртидаги мос w нуқта O атрофида бирор спираль бўйича, соат стрелкасига тескари айланиб кўта-рила боради ва бир варақдан иккинчи вараққа ўтади. Аксин-ча, агар z нуқта Ou йўналишда пастга қараб ҳаракат қилса, Риман сиртидаги w нуқта айтилган спираль бўйлаб (соат стрел-каси бўйича ҳаракаат қилиб) пастга туша бошлайди.

Агар $w = \rho e^{i\theta}$ деб олсак, (69) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$z = \text{Ln } w = \ln \rho + i\theta + 2k\pi i. \quad (69')$$

$w_0 \neq 0$, $w \neq \infty$ бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда $w = w_0$ нуқтанинг исталганича кичик атрофида

$$z = \text{Ln } w$$

функциянинг бир қийматли тармоғини аниқлаб ёзиш қийин эмас. Бунинг учун (69) формуладаги k бутун сонни ўзгартмай қўйиш kifоя. Бошқача айтганда, w_0 нуқтада θ аргументнинг аниқ битта $\theta = \theta_0$ қийматини, масалан, бош қийматини, танлаб олиш керак. Шу билан бирга w нуқта бирор эгри чизик бўйлаб ўзлуксиз ҳаракат қилган вақтда θ аргумент ҳам ўзлуксиз ра-вишда ўзгаради, деб фараз қиламиз. Шундай қилиб, $w = w_0$ нуқ-танинг исталганча кичик атрофида функциянинг битта тармоғини ажратиб олдик. Бу ҳолда w нуқта w_0 атрофида ҳар қанча ҳара-кат қилса ҳам θ қийматларининг ўзаро фарқи 2π дан кичик бўлади.

Агар k га турлича қийматлар берилса, олдинги мулоҳазамизга асосан $z = \text{Ln } w$ функциянинг уларга мос турли тармоқлари келиб чиқади. Мабодо w нуқта (w) текисликда $w_0 = 0$ нуқта атрофидан бир неча марга айланиб олдинги ҳолагига келса, u ҳолда θ нинг сўнгги қиймати билан дастлабки қиймати орасидаги фарқи $2\pi k$

тенг бўлади, бундаги p — бутун сон. Масалан, w нуқта $w_0 = 0$ атрофида уч марта айланиб чиққан бўлса, $p=3$, яъни $2\pi p = 6\pi$ бўлади. Бу эса (69') даги k нинг қиймати ўзгаради демакдир, яъни $z = Lp w$ функция бир тармоқдан иккинчи тармоққа ўтади. Демак, $w_0 = 0$ нуқта $Lp w$ функциянинг тармоқланиш нуқтасидир. Худди шу усулда $w_0 = \infty$ тармоқланиш нуқтаси эллиптигини аниқлаш қийин эмас. Мана шу нуқталарда $z = Lp w$ функция биттадангина қийматга эга.

$w = 0$ ва $w = \infty$ нуқталар Риман сиртидаги барча варақлар учун умумийдир.

$z = 1/\bar{w}$ ва $z = Lp w$ функцияларнинг тармоқланиш нуқталарининг характери турличадир. $w = 0$ нуқта атрофида бир хил йуналишда n марта айланиш натижасида $\sqrt[n]{w}$ функциянинг бошланғич тармоғига қайтиб келамиз. Бундай хоссага эга бўлган тармоқланиш нуқтасини $(n-1)$ -тартибли алгебраик тармоқланиш нуқтаси дейилади. Бу $Lp w$ функция учун бошқароқ бўлади. $w = 0$ нуқта атрофида чекли марта (бир хил йуналишда) айланиш натижасида $Lp w$ функциянинг бошланғич тармоғига қайтиб келмаймиз, балки ҳар гал бу функциянинг янгидан-янги тармоқлари ҳосил бўлади ва натижада $Lp w$ нинг бошланғич тармоғига ҳеч вақт қайтиб келмаймиз.

Бундай хоссага эга бўлган тармоқланиш нуқтасини чексиз тартибли ёки логарифмик тармоқланиш нуқтаси дейилади.

4. Синус ва арксинус, уларнинг Риман сирти. Худди юқоридагидек, $w = \sin z$ функция учун $(2k-1)\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < (2k+1)\frac{\pi}{2}$ йўл (полоса) бир варақли соҳа бўлишини кўриш қийин эмас, бунда $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Қуйнда биз z нуқта (z) текисликда ўзгарганда w нуқта (w) текисликда қандай ҳаракат қилишини текшираемиз. $\sin z$ функцияни ушбу кўринишда ёзиб олиб,

$$w = u + iv = \sin(x + iy) = \sin x \cdot \cos iy + \cos x \cdot \sin iy = \sin x \cdot \operatorname{ch} y + i \cos x \cdot \operatorname{sh} y$$

тенгликнинг ҳар икки томонини солиштирсак,

$$u = \sin x \cdot \operatorname{ch} y, \quad v = \cos x \cdot \operatorname{sh} y.$$

Бундан кўринадики, z нуқта $x = c$ тўғри чизиқларни чизганда, w нуқта $u = \sin c \cdot \operatorname{ch} y, v = \cos c \cdot \operatorname{sh} y$ чизиқларни чизади. Агар $c = 0$ [бу (z) текисликда мавҳум ўққа мос келади] бўлса, $u = 0$ ва $v = \operatorname{sh} y$ функция $-\infty$ дан $+\infty$ гача ўзгаради, яъни (w) текисликда ҳам мавҳум ўқ $u = 0$ га эга бўламиз. Агар $c \neq 0$ ($-\frac{\pi}{2} < c < \frac{\pi}{2}$) бўлса, у ни чиқариб, ярим ўқлари $|\sin c|$ ва $\cos c$ дан иборат бўлган ушбу гипербола тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1,$$

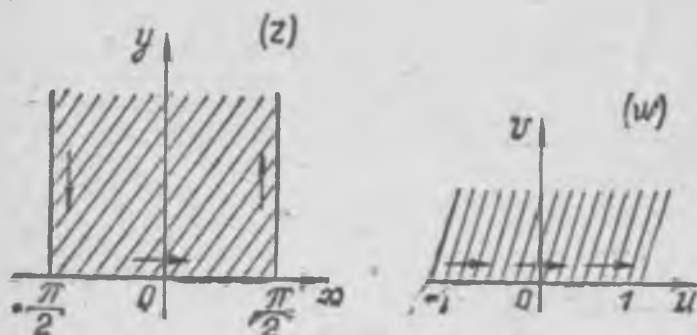
$u = \sin c \cdot \operatorname{ch} y$ бўлгани учун u ва c нинг ишоралари бир хил бўлиб, c нинг маъний қийматларига гиперболанинг чап тармоқлари, мусбатларига эса ўнг тармоқлари мос келади: (z) текисликда $y > 0$, $-\frac{\pi}{2} < c < \frac{\pi}{2}$ ярим йўлни оламиз (56-чизма). Агар z нуқта

$c = -\frac{\pi}{2}$ тўғри чизикда бўлса, $u = -\operatorname{ch} y = -\frac{e^y + e^{-y}}{2}$, $v = 0$ бўлади, агар z нуқта $c = \frac{\pi}{2}$ тўғри чизик бўйлаб $y = +\infty$ дан $y = 0$

гача ҳаракат қилса, w нуқта ҳақиқий ўқ бўйича $w = -\infty$ дан $w = -1$ гача ҳаракат қилади. Ҳақиқий ўқда $y = 0$ бўлгани учун

$$u = \sin c, \quad v = 0$$

бўлади.



56-чизма.

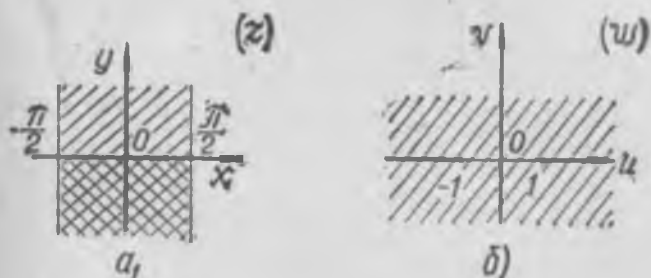
агарда z нуқта ҳақиқий ўқ бўйича $c = -\frac{\pi}{2}$ дан $c = \frac{\pi}{2}$ гача ҳаракат қилса, унга мос бўлган w нуқта ҳақиқий ўқ бўйича $w = -\infty$ дан $w = 1$ гача ҳаракат қилади. $c = \frac{\pi}{2}$ тўғри чизик бўлганда

$$w = \operatorname{ch} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad v = 0$$

бўлгани учун z нуқта $c = \frac{\pi}{2}$ тўғри чизик бўйлаб $y = 0$ дан $y = +\infty$ гача ҳаракат қилса, унга мос w нуқта ҳақиқий ўқ бўйича $w = 1$ дан $w = +\infty$ гача ҳаракат қилади. Худди шунингдек $y < 0$, $c = -\frac{\pi}{2}$ га $-\infty < w < -1$ кесим, $y = 0$, $-\frac{\pi}{2} < c < \frac{\pi}{2}$ га $-1 < w < 1$ кесим ҳамда $y < 0$, $c = \frac{\pi}{2}$ га $1 < w < +\infty$ кесим мос келади. Демак, c миқдор $-\frac{\pi}{2}$ дан $\frac{\pi}{2}$ гача ўзгарганда

(z) текисликда тик йўл (полоса) ни тўлдирувчи $x = c$ тўғри чизиклар тўпламини (оиласини) ҳосил қиламиз, (w) текисликда эса бу текисликни $-\infty$ дан -1 гача ва 1 дан $+\infty$ гача қирқиш нати-

жасида ҳосил бўлган соҳани тўлдирувчи $\frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1$ гипербола тармоқларининг тўплами ҳосил бўлади. Шундай қилиб, юқоридаги айтилганларга асосан бундай хулосага келамиз: $w = \sin z$ функция ёрдами билан $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ йўл (57-чизма) $-\infty$ дан

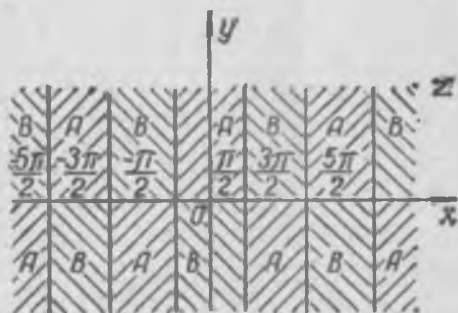


57- чизма.

-1 гача ва 1 дан $+\infty$ гача қирқилган бутун (w) текисликка акслантирилади, шу билан бирга қирқимларнинг юқори четларига (z) текисликда $x = -\frac{\pi}{2}$, $y > 0$ ва $x = \frac{\pi}{2}$, $y > 0$ чизиклар, қуйи четларига эса $x = -\frac{\pi}{2}$, $y < 0$ ва $x = \frac{\pi}{2}$, $y < 0$ чизиклар

мос келади. $\text{Arcsin } w$ нинг логарифм орқали ифодасидан фойдаланиб ± 1 нинг тармоқланиш нуқталари эканини куриш қийин эмас.

$\sin(z + 2\pi) = \sin z$ ва $\cos(z + \pi) = -\sin z$ бўлгани учун $w = \sin z$ функция ёрдами билан барча A ярим йўллар (полосалар) (58- чизма) (w) текисликдаги юқори ярим текисликка, барча B йўллар эса қуйи ярим текисликка

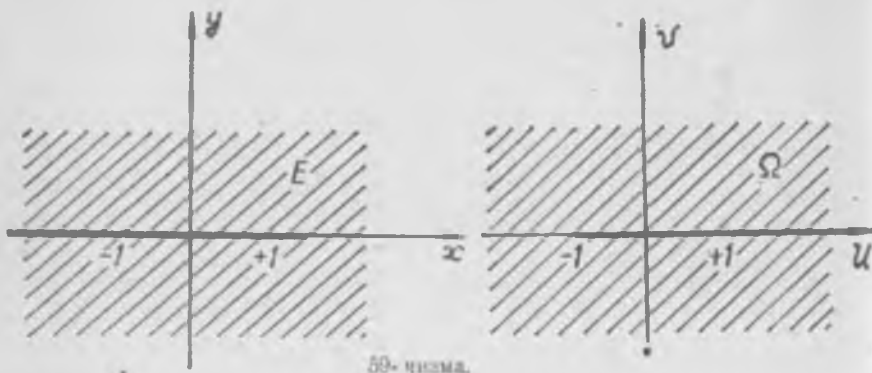


58- чизма.

акслантирилади. Шаклдан кўриняптики, ҳар бир A ярим йўл учта B ярим йўллар билан чегараланган ва аксинча. Бундан ҳар бир A ёки B ярим йўлга учта қўшни ярим йўлдан ихтиёрий биттасини қўшсак, $\sin z$ функциянинг бир varaқли соҳасини ҳосил қиламиз. Ҳақиқатан, бир ярим йўл ичидаги турли нуқталарда $\sin z$ функция турли қийматларни қабул қилади; агар иккинчи нуқтадан биттаси бир ярим йўлда, иккинчиси эса иккинчи қўшни ярим йўлда ётса, бу нуқталар $w = \sin z$ функция воситаси билан биттаси юқори ярим текисликдаги нуқтага, иккинчиси эса қуйи ярим текисликдаги нуқтага уғади, яъни бу

нуқталар ҳам ҳар хил бўлади. Яна шунга эътибор бериш керакки, бир жуфт қўшни юқори ёки қуйи ярим йўлларга шаклда курсатилган E ёки Ω соҳалардан биттаси мос келади (59-чизма).

E ҳақиқий ўқнинг $+1$ дан $+\infty$ гача қисми бўйича уланган юқори ва қуйи ярим текисликлардан иборат, Ω эса ҳақиқий ўқнинг $-\infty$ дан -1 гача қисми бўйича уланган юқори ва қуйи ярим текисликлардан иборат. Ҳақиқатан, z нуқта ярим йўлларнинг чегараси бўлган $z = (2k-1)\frac{\pi}{2} + iy$ (y ўз ишорасини



59-чизма.

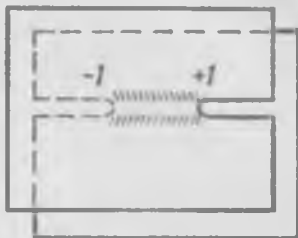
сақлаб, 0 дан $\pm\infty$ гача ўзгаради) ярим тўғри чизиқ чизса, $w = \operatorname{Arc} z = (-1)^{k-1} \operatorname{ch} u$ нуқта шундай чизиқни чизиши керакки, бу чизиқ бўйича (w) ярим текисликлар уланади; k тоқ бўлса, ҳақиқий ўқнинг $+1$ дан $+\infty$ гача бўлган қисми, k жуфт бўлса, $-\infty$ дан -1 гача бўлган қисми ҳосил бўлади.

$z = \operatorname{Arc} \sin w$ функциянинг Риман сиртини ясашда, тасаввур қилиш осон бўлсин учун, аввал бу сиртнинг (z) текислигининг юқори қисмига мос келадиган бўлаги, сўнг қуйисига мос бўлагини ясаймиз, сўнггра бу булакларни бирга қўшамиз. Юқоридаги ярим $A\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ йўлдан бошлаб, бунга ундан

ўнгга ётувчи йўлларни қўшиб борамиз: w ўзгарувчи учун биз навбат билан юқори ярим ва қуйи ярим текисликларни ҳосил қиламиз, шу билан бирга улар ҳақиқий ўқнинг гоҳ $+1$ дан $+\infty$ гача, гоҳ $-\infty$ дан -1 гача қисми бўйича уланиши керак. Бу ерда ҳар сафар ҳақиқий ўқнинг -1 ва $+1$ орасидаги қисмлари бўш қолади. Бундан ташқари юқори ярим $A'\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

йўлнинг чап „қиргоғи“ мос келган биринчи (юқори) ярим текислик ҳақиқий ўқнинг $-\infty$ дан -1 гача бўлган қисми ҳам бўш қолади. Агар A нинг шу „қиргоғи“га чап қўшни ярим йўлни қўшсак, у ҳолда биринчи ярим текислик ҳақиқий ўқнинг бўш қисмига янги ярим қуйи текислигини улаш керак. (z) текис-

ликда бошланғич ярим йўлдан чапда ётувчи ярим йўллари бирин-кетин қушиб бориб ҳосил қилинган Риман сиртининг булагига янгидан-янги ярим текисликларни улаб боришимиз керак, улаш навбат билан $(-\infty, -1)$ ва $(+1, +\infty)$ кесмалар бўйича амалга оширилади. Натижада, z юқори ярим текисликка мос бўлган $z = \operatorname{Arcsin} w$ функция Риман сиртининг булагини ҳосил қиламиз: бу булак чексиз кўп варақлардан иборат бўлиб, булар ичида биринчиси ҳам охиригиси ҳам бўлмайди. Буларнинг ҳар бирида $[-1, 1]$ кесманинг (биттаси юқори, иккинчиси қуйи ярим текисликларга тегишли бўлган) икки чети бўш қолади.



60-чизма.

$z = \operatorname{Arcsin} w$ функциянинг қуйи ярми (z) текисликка (қуйи ярим йўлларга) мос бўлган Риман сиртининг булаги ҳам худди юқоридагидек структурага эга бўлади.

Бу икки булакдан бутун Риман сиртини ҳосил қилиш учун шу нарсага эътибор бериш керакки, юқори ва қуйи ярим йўллари битта соҳага бирлаштирганда биз уларга мос (w) ярим текисликларни $[-1, 1]$ кесма бўйича улашимиз керак.

Шундай қилиб, Риман сирти биринчи булагининг ҳар бир ярим текислигига унга мос бўлган иккинчи булак ярим текислигини бўш қолган $[-1, 1]$ кесмалар бўйича улашимиз керак. Амалда, қоғоз варақларидан ясалган моделда охириги (чекли сондаги варақлар билан чекланган бўлади) улашларни бажариш мумкин эмас, чунки -1 дан $+1$ гача бўлган иккита „қиргоқ“ни улаганда, уланган варақдан турли томонда бўлган бўш қиргоқларни улаш учун тусиқ ҳосил бўлиб қолади. 60-чизмада Риман сиртининг икки булагидagi мос икки варақнинг уланиши схематик кўрсатилган.

М А Ш Қ Л А Р

Қуйидагилар ҳисоблансин:

1. $\sin t$. 2. $\cos(1 + i)$. 3. $\operatorname{tg}(2 - i)$. 4. $\operatorname{Ln}(2 - 3i)$.
5. $\operatorname{Ln}(-2 + 3i)$. 6. $i^{\sqrt{2}}$. 7. $(-2)^{\sqrt{2}}$. 8. 2^i .
9. 1^{-i} . 10. i^i . 11. $(3 - 4i)^{1+i}$.

IV БОБ

КОМПЛЕКС ЎЗГАРУВЧИНИНГ ФУНКЦИЯСИДАН ОЛИНГАН ИНТЕГРАЛ

1-§. Интегралнинг таърифи

Комплекс (z) текисликдаги бирор G соҳада узлуксиз бир қийматли

$$w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y) \quad (1)$$

функция берилган бўлсин. У ҳолда $f(z)$ функция G соҳа ичидан олинган ихтиёрий Γ силлиқ¹ чизиқда ҳам бир қийматли ва узлуксиз бўлади.

Бу чизиқнинг тенгламаси $z = z(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) бўлиб, унинг бошланғич нуқтаси z_0 ва охириги нуқтаси Z бўлсин, яъни $z_0 = z(\alpha)$ ва $Z = z(\beta)$.

Γ чизиқда икки йўналишни аниқлаш мумкин; булардан биттаси t параметрнинг ўсишига, иккинчиси эса камайишига мос келади. Одатда t нинг ўсишига мос йўналишни мушбат йўналиш деб $+\Gamma$ ёки Γ^+ орқали, бунга қарама-қарши йўналишни эса манфий йўналиш деб $-\Gamma$ ёки Γ^- билан белгиланади (61-чизма).

Масала $f(z)$ функциядан Γ чизиқ бўйлаб олинган интегралга таъриф беришдан иборатдир. Унинг учун Γ чизиқни ушбу

$$z_0, z_1, z_2, \dots, z_{k-1}, z_k, \dots, z_{n-1}, z_n = Z \quad (2)$$

нуқталар воситаси билан ихтиёрий равишда n та ёйчаларга бўламиз ва шу ёйчалардан ҳар бирининг исталган жойидан биттадан нуқта олиб, бу нуқталарни мос равишда

$$\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k, \dots, \zeta_n \quad (3)$$

деб белгилаймиз (62-чизма). Юқоридаги шартимизга мувофиқ $w = f(z)$ функция ζ_k нуқталарнинг ҳар бирида аниқ чекли қийматга эга.

Ушбу

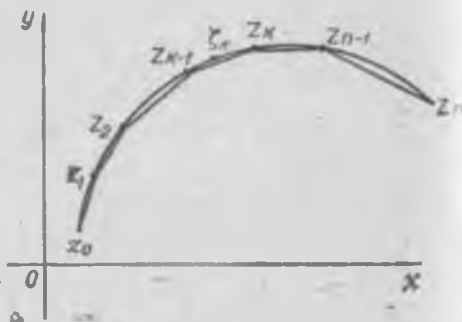
$$f(\zeta_1), f(\zeta_2), \dots, f(\zeta_k), \dots, f(\zeta_n)$$

сонлар билан қуйидаги

$$\Delta z_1 = z_1 - z_0, \Delta z_2 = z_2 - z_1, \dots$$

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}, \dots, \Delta z_n = z_n - z_{n-1}$$

айырмаларнинг мос кўпайтималаридан тузилган ушбу



62-чизма.

$$\begin{aligned} S_n &= f(\zeta_1) \Delta z_1 + f(\zeta_2) \Delta z_2 + \dots + f(\zeta_k) \Delta z_k + \dots + f(\zeta_n) \Delta z_n = \\ &= \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \end{aligned} \quad (4)$$

¹ Жордан чизиги $z + z(t)$ ($\alpha < t < \beta$) узлуксиз ўзгарувчи уринмага эга бўлса, яъни $z'(t)$ мавжуд ва нолдан фарқли бўлса, у ҳолда бу чизиқни силлиқ чизиқ дейилади. Агар эгри чизиқ чекли сондаги силлиқ чизиқлардан ташкил топган бўлса, уни бўлақлари силлиқ чизиқ дейилади.

Йиғиндини одатда интеграл йиғинди дейилади. Бу йиғиндининг қиймати (2) ва (3) нуқталарга боғлиқ. Агар биз ўша нуқталарни Γ бўйлаб бир марта силжитсак (z_0 ва Z ларни қўзғатмасдан) яна битта интеграл йиғиндига эга бўламиз. Умуман, мана шу усул билан чексиз кўп

$$S_n^{(1)}, S_n^{(2)}, \dots, S_n^{(m)}, \dots$$

интеграл йиғиндилар тузиш мумкин. Мана шулардан ихтиёрий биттаси (4) даги S_n йиғиндидан иборат.

Агар биз (2) нуқталарни кетма-кет туғри чизиқлар орқали туташирсак, Γ эгри чизиқ ичига чизилган синиқ чизиқ ҳосил бўлади. Бу синиқ чизиқ звеноларининг узунликлари

$$|\Delta z_1|, |\Delta z_2|, \dots, |\Delta z_k|, \dots, |\Delta z_n|$$

лардан иборатдир. Шартимизга мувофиқ, Γ силлиқ чизиқ бўлгани учун $|\Delta z_k|$ звено (ватар) нолга яқинлашганда унинг қаршисидagi ён узунлиги ҳам нолга интилади. Мана шу ватарларнинг энг каттаси δ бўлсин, яъни:

$$|\Delta z_k| < \delta, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Равшанки, δ нолга интилганда n чексизликка интилади.

Энди,

$$\begin{aligned} z_k &= x_k + iy_k, \quad \zeta_k = \xi_k + i\eta_k, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1} = \\ &= (x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1}) = \Delta x_k + i\Delta y_k \end{aligned}$$

булгани учун (1) га мувофиқ

$$\begin{aligned} f(\zeta_k) \Delta z_k &= [u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)](\Delta x_k + i\Delta y_k) = \\ &= [u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] + i[v(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k]. \end{aligned}$$

Шуларга асосан, S_n интеграл йиғиндини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k = \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] + \\ &+ i \sum_{k=1}^n [v(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k]. \end{aligned} \quad (4')$$

Таъриф. Агар δ нолга интилганда (4) интеграл йиғинди $z_1, \dots, z_{n-1}$ ва $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ нуқталар Γ чизиқнинг қайси жойларидан олинганига боғлиқ бўлмай, аниқ бир чекли лимитга интилса, шу лимит $f(z)$ функциядан Γ чизиқ бўйлаб олинган интеграл дейилади ва қуйидагича ёзилади:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k. \quad (5)$$

Γ чизиқ интеграллаш йўли ёки контури дейилади. Таърифда айtilган лимит ҳақиқатан ҳам мавжуд, чунки $f(z)$ функция Γ силлиқ чизикда узлуксиз бўлгани учун (1) га асосан $u(x, y)$ ва $v(x, y)$ функциялар ҳам узлуксиз бўлади.

У ҳолда математик анализ курсидаги эгри чизиқли интеграллар таърифига асосан қуйидаги тенгликларга эга бўламиз:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] = \int_{\Gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [v(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] = \int_{\Gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy.$$

Мана шуларга ва (4') га асосан (5) ни бундай ёзиш мумкин:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\Gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy \quad (6)$$

ёки қисқароқ қилиб,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} (u + iv)(dx + idy)$$

кўринишда ёзиш қулайдир. (6) тенгликнинг унг томони ҳақиқий аргументли функциялардан олинган эгри чизиқли интеграллардан иборат.

2-§. Интегралнинг асосий хоссалари

Комплекс ўзгарувчининг $f(z)$ функциясидан олинган интегралнинг хоссаларини исбот қилишда биз унинг (5) таърифига асосланамиз.

1-хосса. *Ўзгармас кўпайтирувчини интеграл белгиси ташқарисига чиқариш мумкин:*

$$\int_{\Gamma} a f(z) dz = a \int_{\Gamma} f(z) dz.$$

Ҳақиқатан ҳам,

$$\sum_{k=1}^n a f(\zeta_k) \Delta z_k = a \cdot \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k$$

тенгликнинг икки томонида $h \rightarrow 0$ (яъни $n \rightarrow \infty$) фараз қилиниб лимитга ўтилса, 1-хосса исбот бўлади.

2-хосса. Интеграллаш контурининг йўналиши қарама-қаршисига ўзгартирилса, интеграл белгиси олдидagi ишора ҳам ўзгаради:

$$\int_{\bar{\Gamma}} f(z) dz = - \int_{\Gamma} f(z) dz.$$

Ҳақиқатан ҳам, агар интеграл йиғинди Γ нинг мусбат йўналишида олинса, у ҳолда Δz_k орттирма $z_k - z_{k-1}$ айирмани билдирадн, лекин қарама-қарши йўналишда олинса, (4) даги Δz_k орттирма $z_{k-1} - z_k = -(z_k - z_{k-1})$ айирмани билдиради. Шу сабабли

$$\sum_{k=1}^n f(\zeta_k) (z_k - z_{k-1}) \text{ ва } \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) (z_{k-1} - z_k)$$

йиғиндилар фақат ўзаро ишоралари билангина фарқ қилади. Демак, уларнинг лимитлари ҳам шу билан фарқ қилади.

3-хосса. Чекли сондаги функциялар йиғиндисидан олинган интеграл унинг ҳар бир ҳадидан олинган интеграллар йиғиндисига тенг:

$$\int_{\Gamma} [f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z)] dz = \int_{\Gamma} f_1(z) dz + \int_{\Gamma} f_2(z) dz + \dots + \int_{\Gamma} f_n(z) dz.$$

Ҳақиқатан ҳам, чекли йиғинди учун

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n [f_1(\zeta_k) + f_2(\zeta_k) + \dots + f_m(\zeta_k)] \Delta z_k = \\ &= \sum_{k=1}^n f_1(\zeta_k) \Delta z_k + \sum_{k=1}^n f_2(\zeta_k) \Delta z_k + \dots + \sum_{k=1}^n f_m(\zeta_k) \Delta z_k, \end{aligned}$$

бу тенгликнинг икки томонидан, $\delta \rightarrow 0$ деб лимитга ўтиш кифоя.

4-хосса. Агар узунлиги l булган Γ чизиқнинг ҳамма нуқталарида $M > 0$ сон учун $|f(z)| < M$ бўлса, у ҳолда

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| < M \cdot l$$

бўлади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \right| < \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| \cdot |\Delta z_k| \leq M \cdot \sum_{k=1}^n |\Delta z_k|,$$

бунда

$$\sum_{k=1}^n |\Delta z_k| = |\Delta z_1| + |\Delta z_2| + \dots + |\Delta z_n|$$

йигинди Γ ичига чизилган синиқ чизиқ узунлигидан иборат булгани учун l дан катта бўла олмайди, демак,

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \right| < M \cdot l.$$

Бунинг икки томонидан лимит олинса 4-хосса исбот бўлади. Бу хосса интегрални баҳолаш теоремаси ҳам дейилади.

Баъзан интеграл модулни яна ҳам аниқроқ қилиб баҳолаш талаб қилинади. Унинг учун қуйидаги хоссага мурожаат қиламиз.

5-хосса.

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| ds,$$

бунинг ўнг томони, $|f(z)|$ ҳақиқий функциядан Γ ёй бўйлаб олинган эгри чизикли интегралдан иборат бўлиб, ds ёй узунлигининг дифференциалидир.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| \cdot |\Delta z_k|.$$

$\delta \rightarrow 0$ деб фараз қилиб, иккала томонда лимитга ўтиш кифоя. Бунда

$$|dz| = |dx + i dy| = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds.$$

6-хосса.

$$\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_n} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\Gamma_n} f(z) dz,$$

бунда $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_n$ эгри чизик Γ_m ёйлардан тузилган бўлиб, Γ_m нинг охири нуқтаси Γ_{m+1} нинг учи билан устма-уст тушган, яъни иккаласи бир нуқта ($m = 1, 2, 3, \dots, n-1$). Бунинг исботини китобхонга қолдирдик.

3-§. Интегрални ҳисоблаш

1. Комплекс ўзгарувчини $f(z)$ функциядан Γ силлиқ чизик бўйлаб олинадиган интегрални (6) формулага мувофиқ ҳақиқий ўзгарувчини функциялардан олинган эгри чизикли интегралларга келтирдик. Математик анализ курсидан маълумки, эгри чизикли интегрални ҳисоблаб чиқиш учун дастлаб уни аниқ интегралга келтириб олинади. Бунинг учун Γ чизикнинг параметрик тенгламалари берилган бўлиши керак.

Γ силлиқ чизикнинг параметрик тенгламалари

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (7)$$

лардан иборат булсин, дейлик. Бу параметрик тенгламаларни комплекс шаклда ёзсак,

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (7')$$

булиб, ундан $z_0 = z(\alpha)$, $Z = z(\beta)$ экани келиб чиқади. Γ силлиқ чизик булгани учун $z(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ сегментда узлуксиз ва уша сегментда нолдан фарқли узлуксиз $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ ҳосилага эга. Бунини геометрик тил билан айтганда, Γ чизик ҳар бир нуқтада уринмага эга булиб, уринини нуқта-си ҳарикат қилганда, уринма билан ҳақиқий ўқ орасидаги бурчак узлуксиз равишда ўзгариб боради.

Мана шуларга асосан, (6) дан қуйидагига эга буламиз:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\alpha}^{\beta} v(x, y) dx + u(x, y) dy = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{u[x(t), y(t)] x'(t) - v[x(t), y(t)] y'(t)\} dt + \\ &+ i \int_{\alpha}^{\beta} \{v[x(t), y(t)] x'(t) + u[x(t), y(t)] y'(t)\} dt. \quad (7'') \end{aligned}$$

Ўнг томондаги интегралларнинг чегаралари бир хил булгани учун уларни бирлаштириб, сунгра ихчамлаш мумкин:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} \{u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)]\} [x'(t) + iy'(t)] dt.$$

Иккинчи томондан

$$u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)] = f[z(t)]$$

булгани сабабли

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)] z'(t) dt \quad (8)$$

формулага эришамиз. Шундаё қилиб, комплекс аргументли $f(z)$ функциядан Γ контур буйлаб олинган интегрални ҳисоблаш масаласини аниқ интегрални ҳисоблашга келтирдик.

1-мисол. Фараз қилайлик, (z) текисликдаги z_0 ва Z нуқталарини туташтирувчи силлиқ Γ чизикнинг тенгламаси

$$z = z(t) \quad (\alpha < t < \beta)$$

булсин. Бунда:

$$z_0 = z(\alpha), \quad Z = z(\beta).$$

У ҳолда $f(z) = z^n$ функциянинг интеграли қуйидагича ҳисобланади:

$$\int_{\Gamma} z^n dz = \int_{\alpha}^{\beta} [z(t)]^n \cdot z'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{n+1} \frac{d}{dt} [z(t)]^{n+1} dt =$$

$$-\frac{1}{n+1} [z(t)]^{n+1} \Big|_a^b = \frac{1}{n+1} ([z(b)]^{n+1} - [z(a)]^{n+1}) = \frac{1}{n+1} (Z^{n+1} - z_0^{n+1}).$$

Демак,

$$\int_{\Gamma} z^n dz = \frac{1}{n+1} (Z^{n+1} - z_0^{n+1}), \quad (9)$$

бунда n бутун сон бўлиб, $n \neq -1$. Агар $n = -2, -3, \dots$ манфий бутун сонлардан иборат бўлса, Γ чизиқ $z = 0$ нуқтадан ўтмаслиги керак, чунки акс ҳолда интеграл белгиси остидаги функция ўша нуқтада узилади.

Агар $Z = z_0$, яъни Γ ёпиқ чизиқ бўлса, (9) дан

$$\oint_{\Gamma} z^n dz = 0$$

экани келиб чиқади. Бунда $\oint$ символ Γ ёпиқ контур бўйлаб олинган интегрални билдиради.

2-мисол. Маркази a нуқтага жойлашган r радиусли C айлана бўйлаб $f(z) = \frac{1}{z-a}$ функциядан интеграл олинсин.

Ўша C айлананинг тенгламаси

$$z - a = re^{i\varphi} \quad (0 < \varphi < 2\pi)$$

эканлиги бизга маълум. Бундан:

$$d(z - a) = dz = rie^{i\varphi} d\varphi,$$

$$\frac{dz}{z-a} = \frac{rie^{i\varphi} d\varphi}{re^{i\varphi}} = i d\varphi.$$

Шуларга асосан:

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i. \quad (10)$$

Мабодо $a = 0$, яъни C айлананинг маркази ноль нуқтага жойлашган бўлса, (10) нинг

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i \quad (10')$$

хусусий ҳолига эга бўламиз.

Биз (9) формулада $n \neq -1$ деб таъкидлаган эдик. Агар энди $n = -1$ ва Γ чизиқ маркази координаталар бошида жойлашган C айланадан иборат, деб фараз қилсак, (9) нинг чап томонидан (10') нинг чап томони ҳосил бўлади. Шу сабабли бу ҳолни алоҳида текширдик.

Мана шу (9), (10) ва (10') формулалар кейинги параграфларда кўп ишлатилади.

2. Ёпиқ контур бўйлаб олинган интеграл ҳақида. Юқорида текширилган

$$\int_{\Gamma} f(z) dz$$

интегралнинг қиймати, умуман олганда, икки нарсага, яъни берилган $f(z)$ функцияга ва Γ чизиқнинг формасига боғлиқ. Бошқача айтганда, агар биз z_0 ва Z нуқталарни туташтирувчи икки хил Γ_1 ва Γ_2 чизиқларни олсак (63-чизма), $f(z)$ дан олинган интегралнинг қийматлари ҳам умуман икки турли бўлади:

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz \neq \int_{\Gamma_2} f(z) dz.$$



63- чизма.

Баъзи вақтларда бу иккала интегралнинг қийматлари бир-бирига тенг бўлиб ҳам қолади, яъни:

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz. \quad (11)$$

Бундай ҳолда интегралнинг қиймати интеграллаш йўлига боғлиқ эмас дейилади. Демак, интегралнинг қиймати ўша чизиқларнинг фақат бошланғич z_0 ва охири Z нуқталарига боғлиқ бўлади. Шу сабабли (11) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{z_0}^Z f(z) dz. \quad (11')$$

У ҳолда (11) дан:

$$0 = \int_{\Gamma_1} f(z) dz - \int_{\Gamma_2} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz = \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz$$

келиб чиқади, яъни ёпиқ контур бўйлаб олинган интеграл нолга тенг:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0. \quad (11'')$$

Аксинча, (11'') дан (11) га ўтиш мумкин. Шундай қилиб, $f(z)$ дан олинган интеграл қийматининг йўлга боғлиқ бўлмаслигини (11'') тенглик орқали аниқлаш мумкин. Энди, $f(z)$ функциядан бирор Γ чизиқ бўйлаб олинган интеграл қийматининг интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмасдан, фақат унинг бошланғич ва охири нуқталарига боғлиқ бўлиши учун $f(z)$ функция қандай шартларга бўйсунishi керак, деган савол туғилади. Бу саволга Коши теоремаси жавоб беради.

4-§. Коши теоремаси

1-теорема: Агар бир боғламали G соҳада $f(z)$ функция аналитик бўлса, у ҳолда G да ётувчи ҳар қандай Γ ёпиқ контур бўйлаб $f(z)$ функциядан олинган интеграл нолга тенг бўлади:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Агар қўшимча шарт— $f'(z)$ нинг G да узлуксизлигини талаб қилинса, бу теореманинг ўринли экани, Даламбер—Эйлер шартлари ва Грин формуласига асосан, (6) формуладан бевосита келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, математик анализ курсидан маълумки, агар $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ лар ёпиқ D соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда ушбу

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Грин формуласи ўринлидир, бундаги D ёпиқ контурнинг ички қисмидан иборат.

Равшанки,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

нинг узлуксизлигидан

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

ҳосилаларнинг, шунингдек $u(x, y)$ ва $v(x, y)$ функцияларнинг узлуксизлиги келиб чиқади. Грин формуласидан фойдаланиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} f(z) dz &= \oint_{\Gamma} (udx - vdy) + i \oint_{\Gamma} (vdx + udy) = \\ &= \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy. \end{aligned}$$

Даламбер—Эйлер шартларига асосан:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

У ҳолда охириги тенгликнинг ўнг томони нолга тенг бўлади, яъни

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Бу теоремани $f'(z)$ нинг узлуксизлигини талаб қилмасдан ҳам

исбот этиш мумкин, у биринчи марта Э. Гурса¹ томонидан исботланган. Ҳозир биз шуни келтирамиз.

Аввало қуйидаги асосий леммани исбот қиламиз.

Лемма: $f(z)$ функция G соҳада аниқланган ва узлуксиз функция бўлсин, Γ эса G соҳада ётувчи силлиқ ёки силлиқ бўлаклардан иборат ихтиёрий чизиқ бўлсин. Ихтиёрий кичик мусбат ε сон учун G соҳада тула ётувчи ва Γ нинг ичига чизилган шундай синиқ чизиқ P мавжудки,

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| < \varepsilon$$

бўлади.

Исбот. Γ чизиқни ўз ичига олган ва G га тегишли бўлган ёпиқ $\bar{E}$ соҳани текширамиз. Лемманинг шартига кўра $f(z)$ функция $\bar{E}$ нинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлгани учун у бу соҳада текис узлуксиз бўлади, яъни ихтиёрий кичик ε ($\varepsilon > 0$) учун шундай $\delta = \delta(\varepsilon)$ сон мавжудки, $\bar{E}$ га тегишли ихтиёрий икки z' ва z'' учун $|z - z''| < \delta$ бўлганда $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади. Γ чизиқни узунликлари δ дан кичик бўлган n та $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$ ёйчаларга ажратамиз ҳамда Γ нинг ичига бўлаклари шу ёйчаларни тартиб турувчи P синиқ чизиқни чизамиз.

P синиқ чизиқнинг бўлакларини $l_0, l_1, \dots, l_{n-1}$ лар билан, уларнинг учларини эса $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n$ лар орқали белгилайлик. s_k ёйнинг (l_k кесманинг ҳам) узунлиги δ дан кичик бўлгани учун битта ёйда (ёки кесмада) ётувчи ихтиёрий икки нуқта орасидаги масофа ҳам δ дан кичик бўлади.

Энди $\int_{\Gamma} f(z) dz$ интегралнинг қийматини $\int_P f(z) dz$ интеграл қиймати билан таққослаймиз.

Бунинг учун $\int_{\Gamma} f(z) dz$ интегралнинг тақрибий қийматидан иборат қуйидаги йигиндини текширамиз:

$$S = f(z_0) \Delta z_0 + f(z_1) \Delta z_1 + \dots + f(z_{n-1}) \Delta z_{n-1}, \quad (12)$$

$\Delta z_k = \int_{s_k} dz$ бўлгани учун (12) йигиндини бундай ёзиш мумкин:

$$S = \int_{s_0} f(z_0) dz + \int_{s_1} f(z_1) dz + \dots + \int_{s_{n-1}} f(z_{n-1}) dz. \quad (12')$$

Иккинчи томондан, $\int_{\Gamma} f(z) dz$ интегрални s_k ёйлар бўйлаб олинган интегралларнинг йигиндиси сифатида ҳам ёзиш мумкин:

¹ Эдуард Гурса (1858—1936)—машҳур француз математиги.

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{s_0} f(z) dz + \int_{s_1} f(z) dz + \dots + \int_{s_{n-1}} f(z) dz. \quad (13)$$

(13) тенгликдан (12') тенгликни ҳадлаб айирмиз:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz - S = \int_{s_0} [f(z) - f(z_0)] dz + \int_{s_1} [f(z) - f(z_1)] dz + \dots + \int_{s_{n-1}} [f(z) - f(z_{n-1})] dz.$$

Бундан:

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz - S \right| \leq \int_{s_0} |f(z) - f(z_0)| |dz| + \int_{s_1} |f(z) - f(z_1)| |dz| + \dots + \int_{s_{n-1}} |f(z) - f(z_{n-1})| |dz|.$$

Ҳар бир s_k ёйда $|f(z) - f(z_k)| < \epsilon$ бўлгани учун

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz - S \right| < \epsilon s_0 + \epsilon s_1 + \dots + \epsilon s_{n-1} = \epsilon l \quad (14)$$

бўлади, бунда l сон Γ чизиқнинг узунлиги.

Худди шу усул билан $\int_{\Gamma} f(z) dz - S$ айирманинг модулини баҳолаймиз. $\Delta z_k = \int_{s_k} dz$ ни эътиборга олиб, (12) йиғиндини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$S = \int_{s_0} f(z_0) dz + \int_{s_1} f(z_1) dz + \dots + \int_{s_{n-1}} f(z_{n-1}) dz. \quad (12'')$$

Иккинчи томондан:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{s_0} f(z) dz + \int_{s_1} f(z) dz + \dots + \int_{s_{n-1}} f(z) dz. \quad (15)$$

(15) тенгликдан (12'') тенгликни ҳадлаб айириб, ҳар бир s_k бўлакда $|f(z) - f(z_k)| < \epsilon$ эканлигини эсласак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz - S \right| < \epsilon l_0 + \epsilon l_1 + \dots + \epsilon l_{n-1} = \epsilon (l_0 + l_1 + \dots + l_{n-1}) < \epsilon \cdot l. \quad (16)$$

(14) ва (16) тенгсизликлардан:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} f(z) dz - \int_{\Gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\Gamma} f(z) dz - S + S - \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{\Gamma} f(z) dz - S \right| + \left| S - \int_{\Gamma} f(z) dz \right| < \epsilon l + \epsilon l = 2\epsilon l. \end{aligned}$$

Лемма исбот бўлди.

Коши теоремасининг исботи.

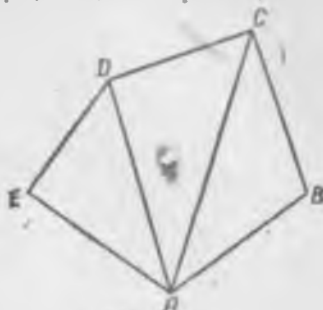
Исбот қилинган леммага асосан Коши теоремасини O соҳада

ётувчи ихтиёрий ёпиқ синиқ P чизиқ учун исботласак, у ҳолда теорема силлиқ ёки силлиқ булаклардан иборат Γ чизиқ учун исбогланган булади.

Бу ҳол осонгина интеграллаш йули учбурчакнинг периметридан иборат ҳолга келтирилади. Ҳақиқатан, P периметри берилган купбурчакни диагоналар ёрдами билан (64-чизма) учбурчакларга ажратамиз. $\int_P f(z) dz$ интеграл-

ни ажратилган учбурчакларнинг периметрлари бўйлаб олинган интеграллар йиғиндиси сифатида ёзиш мумкин:

$$\int_P f(z) dz = \int_{ABCA} f(z) dz + \int_{ACDA} f(z) dz + \int_{ADEA} f(z) dz. \quad (17)$$



64-чизма.

Ҳар бир диагональ бўйича интеграллаш қарама-қарши йўналишда икки марта бажарилгани учун уларнинг йиғиндиси нолга тенг. Шундай қилиб, Коши теоремасини G соҳада ётувчи ихтиёрий учбурчак периметри бўйича олинган интеграл учун исботласак, (17) га асосан ихтиёрий ёпиқ P синиқ чизиқ учун, демак, Γ учун ҳам исботлаган бўламиз.

$\left| \int_{\Delta} f(z) dz \right| = M \geq 0$ деб белгиллаб оламиз. Энди Δ да теорема шартлари бажарилганда $M = 0$ бўлишини исбот қилиш керак. Берилган Δ учбурчакнинг томонларини тенг иккига бўлиб ва булиниш нуқталарини ўзаро бирлаштириб, Δ учбурчакни тўртта $\Delta^I, \Delta^{II}, \Delta^{III}$ ва Δ^{IV} учбурчакларга ажратамиз (65-чизма):

$$\int_{\Delta^I} = \int_{FAD} + \int_{DF}, \int_{\Delta^{II}} = \int_{DBE} + \int_{ED}, \int_{\Delta^{III}} = \int_{ECF} + \int_{FE}, \int_{\Delta^{IV}} = \int_{FD} + \int_{DE} + \int_{EF}.$$

Буларни эътиборга олиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\int_{\Delta^I} + \int_{\Delta^{II}} + \int_{\Delta^{III}} + \int_{\Delta^{IV}} = \int_{FAD} + \int_{DBE} + \int_{ECF} = \int_{\Delta}.$$

Бундан:

$$M = \left| \int_{\Delta} \right| \leq \left| \int_{\Delta^I} \right| + \left| \int_{\Delta^{II}} \right| + \left| \int_{\Delta^{III}} \right| + \left| \int_{\Delta^{IV}} \right|. \quad (18)$$

(18) тенгсизликдан кўринадики, унг томондаги модуллarning энг камида биттаси $\frac{M}{4}$ дан кичик бўлмайди. Шу шартни қаноатлантирган учбурчакни Δ_1 билан белгилаймиз, яъни

$$\left| \int_{\Delta_1} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4}$$

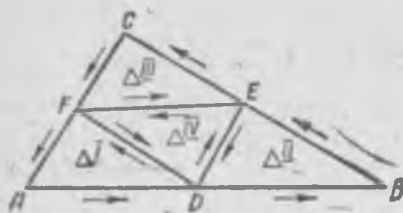
Δ , учбурчак учун ҳам Δ учбурчак устида юритилган мулоҳазаларни қайтариб, Δ , ни шундай тўртга учбурчакка ажратамизки, буларнинг камида биттаси, масалан, Δ_2 учун

$$\left| \int_{\Delta_2} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4}$$

булади. Шу усулда бир-бирининг ичига жойлашган шундай $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots$ учбурчаклар кетма-кетлигини ҳосил қиламизки, булар учун

$$\left| \int_{\Delta_n} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^n} \quad (19)$$

булади.



65-чизма.

Δ учбурчак периметрининг узунлигини σ билан белгиласак, $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots$ учбурчаклар периметрининг узунлиги мос равишда $\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2^2}, \dots, \frac{\sigma}{2^n}, \dots$

булади. Энди $\int_{\Delta_n} f(z) dz$ инте-

гралнинг модулини баҳолай-

миз. Ҳосил қилинган $|\Delta_n|$ учбурчаклар кетма-кетлиги ичма-ич жойлашганлиги сабабли улар учун G соҳага тегишли ягона умумий ζ нуқта мавжуддир (бу ҳол бир-бирининг ичига жойлашган кесмалар ҳақидаги лемманинг умумлаштирилишидан дарҳол келиб чиқади).

$f(z)$ функция G соҳада аналитик бўлгани учун ζ нуқтада чекли $f'(\zeta)$ ҳосила мавжуд бўлади, яъни ихтиёрий $\epsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ мавжудки, $|z - \zeta| < \delta$ бўлганда $\left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} - f'(\zeta) \right| < \epsilon$

булади. $\alpha(z, \zeta) = \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} - f'(\zeta)$ деб белгиласак,

$$f(z) = f(\zeta) + f'(\zeta)(z - \zeta) + \alpha(z, \zeta)(z - \zeta)$$

булади, бунда $|z - \zeta| < \delta$ бўлса, $|\alpha(z, \zeta)| < \epsilon$.

Агар n_0 етарли катта бўлса, ζ нуқтага тегишли бўлган $\Delta_n (n > n_0)$ учбурчак $|z - \zeta| < \delta$ доира ичида ётади, шунинг учун $\int_{\Delta_n} dz = 0$ ва $\int_{\Delta_n} z dz = 0$ эканлигини эътиборга олиб, қуйи-

дагини ҳосил қиламиз:

$$\left| \int_{\Delta_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{\Delta_n} [f(\zeta) + f'(\zeta)(z - \zeta) + \alpha(z, \zeta)(z - \zeta)] dz \right| =$$

$$= \left| f(\zeta) \int_{\Delta_n} dz + f'(\zeta) \int_{\Delta_n} z dz - \zeta f'(\zeta) \int_{\Delta_n} dz + \int_{\Delta_n} z \zeta (z - \zeta) dz \right| < \\ < \int_{\Delta_n} \varepsilon |z - \zeta| |dz| \quad (20)$$

$|z - \zeta|$ модуль Δ_n учбурчак периметридаги ихтиёрий z нуктадан шу учбурчакда ётувчи ζ нуктагача масофа булгани учун

$$|z - \zeta| < \frac{\sigma}{2^n}.$$

Демак, (20) тенгсизликдан:

$$\left| \int_{\Delta_n} f(z) dz \right| < \varepsilon \frac{\sigma}{2^n} \cdot \frac{\sigma}{2^n} = \frac{\varepsilon \sigma^2}{4^n}. \quad (21)$$

(19) ва (21) тенгсизликларни солиштирсак,

$$\frac{M}{4^n} < \varepsilon \frac{\sigma^2}{4^n}$$

ёки

$$M < \varepsilon \sigma^2.$$

Бундан, ε —исталганча кичик сон булгани учун $M = 0$ эканлиги келиб чиқади. Шу билан Коши теоремаси исбот булди.

3-§, 2-бандда айтилганларга кўра Коши теоремасидан қуйидаги муҳим натижа келиб чиқади:

Агар $f(z)$ функция бир боғламли G соҳада аналитик булса, у ҳолда G га тегишли силлиқ ёки силлиқ булаклардан иборат ихтиёрий чизиқ бўйлаб олинган $\int f(z) dz$ интеграл-

нинг қиймати Γ чизиққа боғлиқ бўлмайди, балки бу чизиқнинг бошланғич ва охириги нукталарининг ҳолати билан аниқланади.

1-мисол. $f(z) = (z - a)^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ ва a — ўзгармас сон. Бу функция ҳар қандай G чекли соҳада аналитик, чунки унинг ҳосиласи

$$f'(z) = n(z - a)^{n-1}$$

ҳар қандай чекли $z = x + iy$ учун аниқ қийматга эга. Шу сабабли Коши теоремасига асосан:

$$\oint_{\Gamma} (z - a)^n dz = 0,$$

бунда Γ контур G соҳа ичида олинган ихтиёрий содда ёпиқ чизиқ.

2-мисол. $f(z) = \frac{1}{(z - a)^n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ функция a нуктани ўз ичига олмайдиган ҳар қандай чекли G соҳада аналитик, чунки

$$f'(z) = \frac{-n}{(z - a)^{n+1}}$$

ҳосила $z \neq a$ нуқталарда аниқ қийматларга эга. Шу сабабли, Коши теоремасига мувофиқ,

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z-a)^n} = 0, \quad (22)$$

бунда Γ чизиқ a ни ўз ичига олмайдиган ихтиёрий ёпиқ контур. Мабодо бирор ёпиқ Γ_1 чизиқ $z = a$ нуқтани ўз ичига олса у ҳолда берилган $f(z)$ функция G соҳанинг $z = a$ нуқтасида аналитик бўлмай қолади. Демак, Коши теоремасининг шарти бузилди, шунинг учун

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{dz}{(z-a)^n} \neq 0.$$

Мана шу интегралнинг қийматини кейинроқ аниқлаймиз.

2. Кўп боғламли соҳа учун Коши теоремаси. Ўтган бандда биз Коши теоремасини бир боғламли соҳада текширган эдик. Энди ўша теореманинг умумий ҳолини кўрамиз, яъни кўп боғламли соҳа учун текшираемиз.

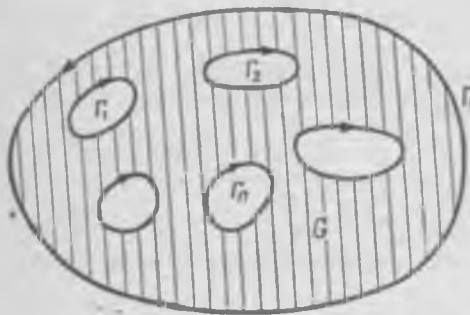
Фараз этайлик, G соҳа ташқи томондан Γ_0 ёпиқ чизиқ билан ва ички томондан n узаро кесишмайдиган оддий

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$$

ёпиқ чизиқлар билан чегараланган $n+1$ боғламли соҳадан иборат бўлсин. Мана шу G соҳанинг ҳамма чегаралари биргаликда мураккаб контур дейилиб, уни битта Γ билан белгилайлик. Бу Γ контурнинг соҳага нисбатан мусбат йўналиши деб шуни қабул қиламизки, ўша йўналиш бўйлаб ҳаракат

қилган вақтимизда G соҳа доим чап томонимизда қолсин. Бунинг учун Γ_0 бўйлаб соат стрелкаси йўналишига тескари ва $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ чизиқлар бўйлаб эса соат стрелкаси йўналиши бўйича ҳаракат қилиш керак (66-чизма). Демак, мураккаб Γ контур қуйидагидан иборатдир:

$$\Gamma = \Gamma_0 + \bar{\Gamma}_1 + \bar{\Gamma}_2 + \dots + \bar{\Gamma}_n.$$



66- чизма.

Фараз этайлик, $f(z)$ функция ёпиқ $\bar{G}$ соҳада, яъни G соҳада ва унинг барча чегараларида аналитик бўлсин. Бизнинг мақсадимиз $f(z)$ функциядан Γ мураккаб контур бўйлаб олинган интегралнинг нолга тенглигини исбот қилишдан иборатдир:

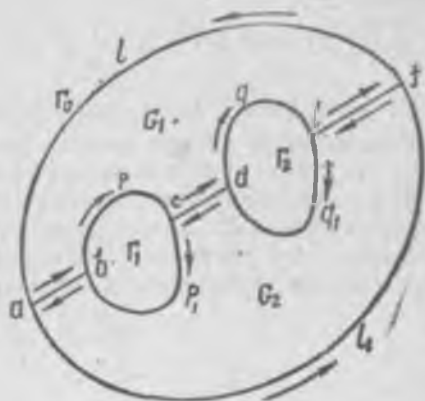
$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Соддалик учун $n=2$, яъни G ни уч боғламли соҳа деб қабул қиламиз. Мана шу G ни иккита бир боғламли соҳага айлантириш мақсадида G_0, G_1, G_2 контурларни ab, cd, ef чизиклар орқали туташтираемиз. Бу чизиклар хусусий ҳолда тўғри чизиклардан иборат бўлиб, G соҳадан ташқарига чиқиб кетмаслиги керак. Натижада G_1 ва G_2 бир боғламли соҳалар ҳосил бўлиб, уларнинг контурлари мос равишда қуйидагилардан иборат бўлади (67- чизма):

$$C_1 = abpcdqefla,$$

$$C_2 = al_1 feq, dcp, ba.$$

Теореманинг шартига кўра $f(z)$ функция $\bar{G}$ ёпиқ соҳада аналитик бўлгани учун унинг G_1 ва G_2 қисмларида ҳам $f(z)$ аналитик бўлади. Шу сабабли юқоридаги Коши теоремасига асосан ёпиқ C_1 ва C_2 контурлар бўйича олинган интегралнинг ҳар бири нолга тенг бўлади:



67- чизма.

$$\oint_{C_1} f(z) dz = 0, \quad \oint_{C_2} f(z) dz = 0.$$

Интегралнинг 6-хоссасига асосан C_1 бўйича олинган интеграл унинг булаклари бўйича олинган интеграллар йиғиндисига тенг. Биз ёзув қисқа бўлсин учун интеграл белгиси остидаги $f(z) dz$ ифодани вақтинча ёзмаймиз. Шундай қилиб,

$$\oint_{C_1} = \int_{ab} + \int_{bpc} + \int_{cd} + \int_{dqe} + \int_{ef} + \int_{fla} = 0.$$

Худди шунингдек,

$$\oint_{C_2} = \int_{al_1f} + \int_{fe} + \int_{eq,d} + \int_{dc} + \int_{cpl,b} + \int_{ba} = 0.$$

Буларнинг унг томонлари ноль бўлгани сабабли ўзаро қўш-сак, йиғиндиси ҳам нолга тенг бўлади. Қўшиш натижасида ab, ba ва бошқа қарама-қарши йўналишлар бўйлаб олинган интеграллар йиғиндиси нолга тенг бўлади, яъни

$$\int_{ab} + \int_{ba} = \int_{ab} - \int_{ab} = 0, \quad \int_{cd} + \int_{dc} = \int_{cd} - \int_{cd} = 0, \quad \int_{ef} + \int_{fe} = \int_{ef} - \int_{ef} = 0.$$

Шуларга асосан:

$$\oint_{\zeta_1} + \oint_{\zeta_2} = \left(\int_{bpc} + \int_{cp,b} \right) + \left(\int_{dqe} + \int_{eq,d} \right) + \left(\int_{fa} + \int_{af,f} \right) = \\ = \oint_{\tilde{\Gamma}_1} + \oint_{\tilde{\Gamma}_2} + \oint_{\tilde{\Gamma}_3} = \oint_{\tilde{\Gamma}_0 + \tilde{\Gamma}_1 + \tilde{\Gamma}_2} = 0.$$

Демак,

$$\oint_{\tilde{\Gamma}} f(z) dz = \oint_{\tilde{\Gamma}_0} f(z) dz + \oint_{\tilde{\Gamma}_1} f(z) dz + \oint_{\tilde{\Gamma}_2} f(z) dz = 0. \quad (23)$$

Шундай қилиб, Кошининг қуйидаги теоремаси исбот бўлди.

Кошининг 2-теоремаси. Агар кўп боғламли ёпиқ $\bar{G}$ соҳада $f(z)$ функция аналитик бўлса, у ҳолда шу соҳанинг бутун контури бўйлаб мусбат йўналишда $f(z)$ функциядан олинган интеграл нолга тенг бўлади.

Баъзан бу теорема бошқача ҳам таърифланади. Бунинг учун (23) ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\oint_{\tilde{\Gamma}_0} - \oint_{\tilde{\Gamma}_1} - \oint_{\tilde{\Gamma}_2} = 0$$

ёки

$$\oint_{\tilde{\Gamma}_0} f(z) dz = \oint_{\tilde{\Gamma}_1} f(z) dz + \oint_{\tilde{\Gamma}_2} f(z) dz. \quad (23')$$

Кошининг 3-теоремаси. Агар кўп боғламли ёпиқ $\bar{G}$ соҳада $f(z)$ функция аналитик бўлса, у ҳолда функциядан ташқи контур бўйлаб олинган интеграл икки контурлар бўйлаб олинган интеграллар йигиндисига тенг бўлиб, ҳамма контурлар бўйича йўналиш соат стрелкаси ҳаракати йўналишига тескари олинади.

Биз бу теоремани (23) тенгликка асосланиб ёздик. Унда биз қўрамизки, $\tilde{\Gamma}_0$, $\tilde{\Gamma}_1$, $\tilde{\Gamma}_2$ контурлар бўйлаб олинган ҳамма интеграллар мусбат йўналиш бўйича олинган. Агар (23) тенгликнинг икки томонини (-1) га кўпайтириб қуйидагича

$$-\oint_{\tilde{\Gamma}_0} = -\oint_{\tilde{\Gamma}_1} - \oint_{\tilde{\Gamma}_2} \quad \text{ёки} \quad \oint_{\tilde{\Gamma}_0} = \oint_{\tilde{\Gamma}_1} + \oint_{\tilde{\Gamma}_2}$$

ёзилса, ҳамма контурларнинг йўналиши соат стрелкаси йўналиши бўйича олинган бўлади. Иккала ҳолда ҳам ҳамма контурларнинг йўналишлари бир хилда бўлади. Шу сабабли сўнгги теоремада контурлар йўналишини „соат стрелкаси ҳаракати йўналиши бўйича“ дейиш ҳам мумкин.

Мана шу усулда теоремани ҳар қандай натурал n учун ҳам исбот қилиш мумкин эди:

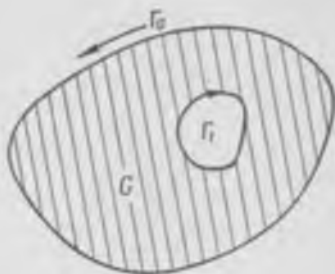
$$\oint_{\tilde{\Gamma}_0} f(z) dz = \oint_{\tilde{\Gamma}_1} f(z) dz + \oint_{\tilde{\Gamma}_2} f(z) dz + \dots + \oint_{\tilde{\Gamma}_n} f(z) dz.$$

Мабодо $n = 1$ бўлса, бундан

$$\oint_{\Gamma_2} f(z) dz = \oint_{\Gamma_1} f(z) dz \quad (24)$$

тенглик келиб чиқади, яъни, агар G икки боғламли соҳа бўлса (68-чизма), ташқи контур бўйлаб олинган интеграл ички контур бўйлаб олинган интегралга тенг. Коши теоремасининг мана шу хусусий ҳоли тажрибада кўп ишлатилади.

Юқорида исботланган Коши теоремасида (бир боғламли соҳа учун ҳам, кўп боғламли соҳа учун ҳам) $f(z)$ функциянинг соҳада ва унинг чегарасида аналитик булиши талаб қилинган эди. Бу теоремани чуқурроқ анализ қилиш натижасида шундай нарсани аниқланганки, соҳанинг чегарасида функция аналитик бўлмай, фақат узлуксиз бўлса, Коши теоремаси уз кучини сақлаб қолади, яъни қуйидаги умумлашган теорема ҳам ўринлидир.



68-чизма.

4-теорема. Агар $f(z)$ функция G соҳада аналитик ва $\bar{G}$ да узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(z)$ функциядан соҳанинг чегараси бўйлаб (чегара шундай утганки, соҳа ҳамма вақт унинг бир томонида қолади) олинган интеграл нолга тенг бўлади. Бу теореманинг исботига тўхталмаймиз.

1-мисол. Фараз этайлик, текисликнинг S уздан иборат қисми оддий ёпиқ Γ чизиқ билан чегараланган бўлсин. Қуйидаги тенгликларнинг тўғрилигини исбот қилиш керак:

$$a) \oint_{\Gamma} y dz = -S; \quad b) \oint_{\Gamma} \bar{z} dz = 2iS.$$

Исбот.

$$a) z = x + iy, \quad dz = dx + i dy.$$

У ҳолда:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} y dz &= \oint_{\Gamma} y(dx + i dy) = \oint_{\Gamma} y dx + i \oint_{\Gamma} y dy = \\ &= \oint_{\Gamma} y dx + i \oint_{\Gamma} d\left(\frac{y^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Эгри чизиқли интеграллар назариясидан маълумки: 1) тўлиқ дифференциалдан ёпиқ контур бўйлаб олинган интеграл нолга тенг, яъни

$$\oint_{\Gamma} d\left(\frac{y^2}{2}\right) = 0.$$

2) S юзин аниқлаш формуласи қуйидагидан иборат:

$$S = \oint_{\Gamma} x dy = - \oint_{\Gamma} y dx = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx. \quad (A)$$

1) ва 2) дан

$$\oint_{\Gamma} y dx = -S.$$

$$\begin{aligned} 6) z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \quad \bar{z} dz &= (x - iy)(dx + i dy) = \\ &= (xdx + ydy) + i(xdy - ydx). \end{aligned}$$

У ҳолда

$$\oint_{\Gamma} \bar{z} dz = \oint_{\Gamma} xdx + ydy + i \oint_{\Gamma} xdy - ydx.$$

1) га кўра

$$\oint_{\Gamma} xdx + ydy = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} d(x^2 + y^2) = 0.$$

Шунингдек, (A) формулага мувофиқ:

$$\oint_{\Gamma} xdy - ydx = 2S.$$

Демак,

$$\oint_{\Gamma} \bar{z} dz = 2iS.$$

2-мисол. Ушбу интеграл

$$I = \int_{\Gamma} x dz$$

қуйида курсатилган йўллар бўйлаб ҳисоблансин:

- а) $z = 2 + i$ нуқтанинг радиус-вектори бўйича;
- б) $|z| = 1$ ярим айлана бўйлаб, $0 < \arg z < \pi$ (йўлнинг бош нуқтаси $z = 1$ да);
- в) $|z - a| = R$ айлана бўйлаб.

Еч иш. $\int_{\Gamma} x dz = ?$ а) Бундаги Γ_1 чизиқ O ва $2 + i$ нуқталарни туташтирувчи кесмадир. Шу кесмани ўз ичига олган тўғри чизиқнинг тенгламаси $y = \frac{x}{2}$ ва Γ_1 учун $0 < x < 2$.

Мана шуларга асосан:

$$\int_{\Gamma_1} x dz = \int_{\Gamma_1} x(dx + i dy) = \int_{\Gamma_1} xdx + i \int_{\Gamma_1} x dy, \quad dy = \frac{dx}{2},$$

$$\int_{\Gamma_1} x dx = \int_0^2 x dx = 2; \quad \int_{\Gamma_1} x dy = \int_0^2 x \frac{dy}{dx} = 1.$$

Шундай қилиб, буларни тегишли жойига қўйгандан сўнг ушбу натижа

$$\int_{\Gamma_1} x dz = 2 + i$$

ҳосил бўлади.

б) $|z| = 1$ айлананинг параметрик тенгламаларини

$$x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi \quad (0 < \varphi < 2\pi)$$

кўринишда ёзайлик. Буларни дифференциалласак:

$$dx = -\sin \varphi d\varphi, \quad dy = \cos \varphi d\varphi;$$

$$\int_{\Gamma_1} x dz = \int_{\Gamma_1} x(dx + i dy) = \int_{\Gamma_1} x dx + i \int_{\Gamma_1} x dy,$$

бунда Γ_1 ярим айланadır.

$$\int_{\Gamma_1} x dx = - \int_0^{\pi} \cos \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi = \int_0^{\pi} \cos \varphi d(\cos \varphi) = \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \Big|_0^{\pi} = 0;$$

$$\int_{\Gamma_1} x dy = \int_0^{\pi} \cos \varphi \cos \varphi d\varphi = \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Мана шуларга биноан:

$$\int_{\Gamma_1} x dz = \frac{i\pi}{2}.$$

в) $|z - a| = R$ айланани Γ_2 деб олсак, у ҳолда

$$\oint_{\Gamma_2} x dz = \oint_{\Gamma_2} x(dx + i dy) = \oint_{\Gamma_2} x dx + i \oint_{\Gamma_2} x dy.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегралларни алоҳида-алоҳида ҳисоблаб чиқайлик. 1) га асосан:

$$\oint_{\Gamma_2} x dx = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma_2} d(x^2) = 0; \quad (*)$$

(А. формулага кўра:

$$\oint_{\Gamma_2} x dy = S = \pi R^2; \quad (**)$$

(*) ва (***) дан:

$$\oint_{\Gamma_1} x dz = i\pi R^2.$$

3-мисол. Ушбу интеграл

$$\int |z| dz$$

қуйида берилган йўллар бўйлаб ҳисоблансин:

а) $z = 2 - i$ нуқтанинг радиус-вектори бўйлаб;

б) $|z| = 1$ ярим айлана бўйлаб, $\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$ (йўлнинг бош нуқтаси $z = -i$ да).

Ечиш:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_{\Gamma_1} |z| dz &= \int_{\Gamma_1} \sqrt{x^2 + y^2} (dx + i dy) = \int_{\Gamma_1} \sqrt{x^2 + y^2} dx + \\ &+ i \int_{\Gamma_1} \sqrt{x^2 + y^2} dy, \text{ бундаги } \Gamma_1 \text{ чизиқ } O \text{ билан } 2 - i \text{ нуқта орасидаги кесма-} \end{aligned}$$

дан иборат, Γ_1 нинг тенгламаси: $y = -\frac{x}{2}$ ($0 < x < 2$). Бундан:

$$dy = -\frac{dx}{2}; \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \left(-\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} x.$$

Мана шуларга асосан:

$$\int_{\Gamma_1} \sqrt{x^2 + y^2} dx = \frac{\sqrt{5}}{2} \int_0^2 x dx = \frac{\sqrt{5}}{4} x^2 \Big|_0^2 = \sqrt{5};$$

$$\int_{\Gamma_1} \sqrt{x^2 + y^2} dy = -\frac{\sqrt{5}}{4} \int_0^2 x dx = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Демак,

$$\int_{\Gamma_1} |z| dz = \sqrt{5} \left(1 - \frac{i}{2}\right).$$

б) Айлананинг тенгламалари:

$$x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right).$$

Бундан:

$$dx = -\sin \varphi d\varphi, \quad dy = \cos \varphi d\varphi;$$

$$\int_{\Gamma_2} |z| dz = \int_{\Gamma_2} 1 \cdot dz = \int_{\Gamma_2} dx + i \int_{\Gamma_2} dy,$$

чунки $|z| = 1$.

$$\int_{\Gamma_2} dx = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi = \cos \varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

$$\int_{\Gamma_2} dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = \sin \varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

Демак,

$$\int_{\Gamma_2} |z| dz = 2L.$$

4-мисоля. Ушбу интеграл ҳисоблансин:

$$\oint_{\Gamma} \frac{z}{z} dz.$$

бундаги Γ чизиқ 69-чизмада кўрсатилган ярим ҳаққадан иборат.

Ечиш. Агар $z = x + iy$ бўлса, $\bar{z} = x - iy$, $dz = dx + i dy$ бўлади.

Буларни эътиборга олиб, баъзи соддалаштиришларни ўтказсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{z}{z} dz = \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dx - \frac{2xy}{x^2 + y^2} dy \right) + i \left(\frac{2xy}{x^2 + y^2} dx + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dy \right). \quad (Б)$$

Масалада берилган Γ ярим ҳалқани тўрт бўлакка ажратиб, ҳар бир бўлақ бўйича интеграл оламиз:

$$\int_{\Gamma} \frac{z}{z} dz = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4}. \quad (В)$$

Ўнг томондаги интеграллар ишоралари остидаги $\frac{z}{z} dz$ ифодани қисқалик учун вақтинча ёзмадик. Γ_1 чизиқ $z = 1$ ва $z = 2$ нуқталар орасидаги кесмадан иборат бўлгани учун $1 < x < 2$, $y = 0$ бўлади. Шунга асосан (Б) дан:

$$\frac{z}{z} dz = dx; \quad \int_{\Gamma_1} \frac{z}{z} dz = \int_1^2 dx = 1.$$

Энди Γ_2 чизиқ катта ярим айланадан иборат бўлгани сабабли

$$x = 2 \cos \varphi, \quad y = 2 \sin \varphi$$

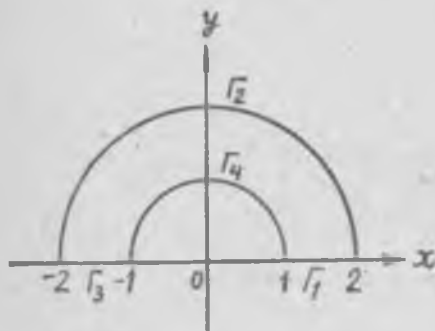
бўлиб, баъзи соддалаштиришлардан сўнг, (Б) қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{z}{z} dz = 2(1 - 4 \cos^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi + i(1 - 4 \sin^2 \varphi) \cos \varphi d\varphi, \quad 0 < \varphi < \pi.$$

У ҳолда

$$\int_{\Gamma_2} \frac{z}{z^2} dz = 2 \int_0^{\pi} (1 - 4 \cos^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi + 2i \int_0^{\pi} (1 - 4 \sin^2 \varphi) \cos \varphi d\varphi = -\frac{4}{3}.$$

Γ_2 чизик $z = -2$ ва $z = -1$ нуқталар орасидаги кесмадир. Шу сабабли $-2 < x < -1$, $y = 0$. У ҳолда, (Б) дан:



69-чизма.

$$\frac{z}{z} dz = dx, \quad \int_{\Gamma_2} \frac{z}{z} dz = \int_{-2}^{-1} dx = 1.$$

Энди Γ_4 кичик ярим айланадан иборат бўлгани учун

$$x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi \quad (\pi > \varphi > 0)$$

бўлиб, баъзи амаллардан сўнг, (Б) қуйидаги куралишга эга бўлади:

$$\frac{z}{z} dz = (1 - 4 \cos^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi + i(1 - 4 \sin^2 \varphi) \cos \varphi d\varphi.$$

У ҳолда:

$$\int_{\Gamma_4} \frac{z}{z} dz = \int_{\pi}^0 (1 - 4 \cos^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi + i \int_{\pi}^0 (1 - 4 \sin^2 \varphi) \cos \varphi d\varphi = \frac{2}{3}.$$

Мана шу топишган қийматларни (В) га қўйсак, ушбу

$$\oint \frac{z}{z} dz = 1 + 1 - \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

натижага эришамиз.

5-ми сол. Агар C бирлик айланадан иборат бўлса, ушбу

$$\oint_C \operatorname{Ln} z dz$$

интеграл ҳисоблансин, бунда $\operatorname{Ln} 1 = 0$ қўшимча шарт эътиборга олинсин. Е ч и ш.

III бобдаги (39) формулага биноан:

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + i\varphi + 2k\pi i, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Бирлик айлананинг тенгламаси $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ дан иборат бўлгани учун $r = |z| = 1$, $\ln r = \ln 1 = 0$ бўлади. Масаланинг шартига кўра $\operatorname{Ln} 1 = 0$ бўлгани сабабдан $k = 0$ бўлади.

Демак, $\operatorname{Ln} z = i\varphi$.

$$dz = (-\sin \varphi + i \cos \varphi) d\varphi.$$

Бундан:

$$\begin{aligned} \oint_C \operatorname{Ln} z dz &= \int_0^{2\pi} i\varphi (-\sin \varphi + i \cos \varphi) d\varphi = \\ &= -i \int_0^{2\pi} \varphi \sin \varphi d\varphi - \int_0^{2\pi} \varphi \cos \varphi d\varphi. \\ \int_0^{2\pi} \varphi \sin \varphi d\varphi &= -2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \varphi \cos \varphi d\varphi = 0 \end{aligned}$$

бўлганидан:

$$\oint_C \operatorname{Ln} z dz = 2\pi i.$$

5-§. Бошланғич функция ва аниқмас интеграл

1. Бошланғич функция ҳақидаги тушунча китобхонларимизга математик анализ курсидан маълум. Лекин биз комплекс соҳадаги бошланғич функция билан танишиб ўтамиз. Энг аввал биз қуйидаги леммани исбот қилайлик.

Лемма. Агар G соҳанинг барча нуқталарида $f(z)$ функциянинг ҳосиласи нолга тенг бўлса, у ҳолда функция шу соҳада ўзгармас бўлади.

Исбот. а) G соҳада $f(z) \equiv C$ ўзгармас деб фараз қилайлик. У ҳолда барча $z \in G$ лар учун

$$f'(z) = C' \equiv 0.$$

б) Энди барча $z \in G$ учун G соҳада $f'(z) \equiv 0$ бўлсин. У ҳолда:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0,$$

Бундан эса:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$$

ёки

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Икки аргументли $u(x, y)$ ва $v(x, y)$ функцияларнинг ҳар биридан иккала x ва y аргументлар бўйича олинган хусусий ҳосилалар айнан нолга тенг бўлгани сабабли барча $z \in G$ лар учун $du(x, y) = 0$ ва $dv(x, y) = 0$, яъни

$$u(x, y) \equiv C_1, \quad v(x, y) \equiv C_2,$$

ўзгармас сонларга тенг. Демак, барча $z \in G$ лар учун:

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) \equiv C_1 + i C_2.$$

Тенгликнинг ўнг томонидаги ўзгармас комплекс сонни C орқали белгиласак

$$f(z) \equiv C$$

бўлиб, леммани исбот қилган бўламиз.

Таъриф. Агар G соҳанинг барча нуқталарида

$$F'(z) = \frac{dF(z)}{dz} = f(z)$$

тенглик бажарилса, у ҳолда $F(z)$ фуқция берилган $f(z)$ функциянинг бошланғич функцияси дейилади. Ҳақиқий ўзгарувчилар соҳасидаги каби комплекс ўзгарувчилар $f(z)$ функциянинг бошланғич функцияси учун ҳам қуйидаги теорема ўринли.

Теорема. Агар G соҳада $F(z)$ фуқция $f(z)$ нинг бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда $\Phi(z) = F(z) + C$ (бунда C —ихтиёрий ўзгармас) ҳам G да ўша $f(z)$ фуқция учун бошланғич фуқция бўлади ва аксинча, агар $F(z)$ ва $\Phi(z)$ лар $f(z)$ нинг бошланғич фуқциялари бўлса, у ҳолда барча $z \in G$ лар учун

$$\Phi(z) - F(z) \equiv C \quad (25)$$

бўлади.

Бу ҳақиқий ўзгарувчилар соҳасидаги шундай фикрнинг такрорланишидан иборат бўлгани учун бунинг исботини ўқувчиларга қолдирамиз. Демак, ҳақиқий ўзгарувчилар соҳасидаги-га ўхшаш берилган $f(z)$ функциянинг бошланғич функциялари чексиз кўп бўлиб, улар бир-бирдан ихтиёрий ўзгармас қўшилувчи билан фарқ қилади.

2 Аниқмас интеграл. Берилган $f(z)$ функциянинг ҳамма бошланғич фуқциялари аниқмас интеграл дейилиб, ўшбу

$$\int f(z) dz$$

символ билан белгиланади. Демак, (25) га мувофиқ:

$$\int f(z) dz = F(z) + C = \Phi(z), \quad (25')$$

бунда:

$$F'(z) = f(z).$$

Энди $f(z)$ функция бир боғламли G соҳада аналитик бўлсин, G ичида қўзғалмас бир z_0 нуқта ва нхтиёрий z нуқта олиб, уларни G соҳадан чиқиб кетмайдиган бирор Γ чизиқ билан туташтирайлик (70-чизма). У вақтда қуйидаги теоремани исбот қилиш мумкин.

Теорема. Бир боғламли G соҳада $f(z)$ аналитик функция ва z_0 шу соҳада бирор қўзғалмас нуқта бўлсин. У ҳолда

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz \quad (26)$$

функция G соҳада аналитик ва $f(z)$ учун бошланғич функция бўлади, бунда интеграл z_0 ва z нуқталарни туташтирувчи Γ чизиқ бўйлаб олинган.

Исбот. $f(z)$ функция G соҳада аналитик бўлгани учун 4-§ даги Коши теоремасига мувофиқ юқоридаги интегралнинг қиймати Γ йўлга боғлиқ бўлмай, фақат ўзгарувчи z нуқтага боғлиқ, шу сабабли уни $F(z)$ билан белгиладик.

Энди,

$$F'(z) = \frac{d}{dz} \int_{z_0}^z f(z) dz = f(z)$$

эканлигини исботлаш керак бўлади.

Унинг учун G ичидан z га яқин турган яна битта $z+h$ нуқта олиб λ ёйча орқали уларни туташтирайлик. $f(z)$ функция G соҳада аналитик бўлгани сабабли у узлуксиз ҳам бўлади. Шунга асосан ҳар қандай $\epsilon > 0$ сон учун шундай $|h|$ сонни топиш мумкинки, $|\zeta - z| < |h|$ бўлганда $|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon$ бўлади.

Энди, (26) га мувофиқ:

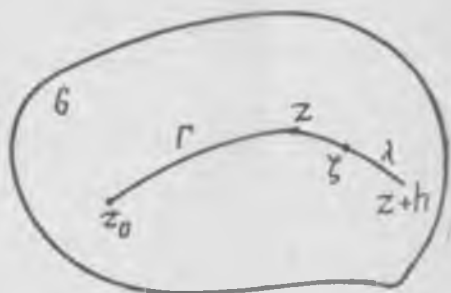
$$F(z+h) = \int_{z_0}^{z+h} f(\zeta) d\zeta. \quad (27)$$

(26) ва (27) лардан қуйидаги айирмани ҳосил қиламиз:

$$F(z+h) - F(z) = \int_{z_0}^{z+h} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta$$

ёки

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta. \quad (28)$$



70-чизма.

Иккинчи томондан,

$$\int_z^{z+h} d\zeta = [\zeta]_z^{z+h} = (z+h) - z = h.$$

У ҳолда қуйидаги айнииятни ёзиш мумкин:

$$f(z) = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta. \quad (29)$$

Энди (28) дан (29) ни айирайлик:

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} [f(\zeta) - f(z)] d\zeta.$$

Бунинг икки томонидан модуль олиб, ε га тегишли тенгсизликни ишлатсак,

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|h|} \cdot \varepsilon \cdot |h| = \varepsilon$$

булади. Бундан, функция ҳосиласининг таърифига асосан:

$$F'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z).$$

Шу билан теорема тўла исботланди.

Теореманинг исботидан равшанки, уни қуйидагича таърифлаш ҳам мумкин.

Теорема. Агар $f(z)$ функция бир боғламли G соҳада узлуксиз бўлиб, G да ётувчи ихтиёрий ёпиқ контур бўйлаб олинган $\int f(z) dz$ интеграл нолга тенг бўлса, у ҳолда

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

функция G соҳада аналитик булади, шу билан бирга

$$F'(z) = f(z).$$

Теоремадан баъзи муҳим натижалар келиб чиқади. (26) тенгликдаги $F(z)$ нинг қийматини (25') га қўйилса, аниқмас интеграл қуйидагича кўринишга эга булади:

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta + C. \quad (30)$$

Интеграл таърифига кўра:

$$\Phi(z_0) = \int_{z_0}^{z_0} f(\zeta) d\zeta + C = 0 + C = C.$$

У ҳолда (30) дан ушбу

$$\int_{z_0}^z f(z) dz = \Phi(z) - \Phi(z_0)$$

тенглик ҳосил бўлади. Баъзан интеграл белгиси остидаги ҳарф билан интегралнинг юқори чегарасидаги ҳарфнинг ара-лашиб кетмаслиги учун охириги тенгликни қуйидагича ёзиш қулайдир:

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \Phi(z) - \Phi(z_0), \quad (31)$$

бу тенгликлардаги $\Phi(z)$ билан $f(z)$ бундай боғланган:

$$\Phi'(z) = f(z).$$

(31) тенглик Ньютон—Лейбниц формуласи деб ата-лади.

Демак, агар $f(z)$ функция G соҳада аналитик бўлиб, G ичидаги z_0 ва z нуқталарни бирлаштирувчи Γ контур бўйлаб интеграллаш талаб қилинса, тўғридан-тўғри Ньютон—Лейбниц формуласи бўйича ҳисоблаш мумкин, яъни

$$\int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \Phi(z) - \Phi(z_0). \quad (31')$$

Агар Γ ёпиқ контур бўлса, $z = z_0$ бўлиб, (31') нинг ун-г томонидаги айирма нолга айланади. Шунинг учун ҳам

$$\oint_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Бунни биз илгари ҳам курган эдик.

Аниқмас интеграл таърифи расмий томондан математик анализ курсидаги таърифдан фарқ қилмагани учун бизга маълум интеграллаш формулалари жадвалидан тула фойдаланиш мумкин.

1-мисол. $\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C,$

чунки

$$\left(\frac{z^{n+1}}{n+1} \right)' = z^n, \quad n \neq -1.$$

Агар a ва b нуқталарни бирлаштирувчи Γ чизиқ бўйлаб интеграл олиш талаб қилинса,

$$\int_{\Gamma} z^n dz = \int_a^b z^n dz = \frac{1}{n+1} [z^{n+1}]_a^b = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}).$$

2-мисол.

$$\int e^z dz = e^z + C.$$

чунки

$$(e^z)' = e^z.$$

Шу сабабли

$$\int_{\Gamma} e^z dz = \int_a^b e^z dz = [e^z]_a^b = e^b - e^a.$$

3-мисол.

$$\int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} + C.$$

чунки

$$\left(-\frac{1}{z}\right)' = \frac{1}{z^2}.$$

Шу сабабли

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2} = \int_a^b \frac{dz}{z^2} = \left[-\frac{1}{z}\right]_a^b = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

бунда Γ чизиқ ноль нуқтадан ўтмаслиги керак, чунки $f(z) = \frac{1}{z^2}$ функция $z = 0$ нуқтада маънога эга эмас.

4. Рационал функцияларни интеграллаш. Биз илгари

$$\oint_{\Gamma} (z-a)^n dz = 0$$

булишини кўрган эдик, бунда $n = 0, 1, 2, \dots$ ва Γ эса ёпиқ контур. Хусусий ҳолда $a = 0$ бўлса,

$$\oint_{\Gamma} z^n dz = 0.$$

Шуларга асосан Γ утун рационал функциядан (полиномдан) ёпиқ Γ контур бўйлаб интеграл олишимиз мумкин:

$$\text{а) } P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n,$$

бунда

$$a_0, a_1, \dots, a_n$$

коэффициентлар ўзгармас комплекс сонлардан иборат бўлиб, $z = x + iy$ — комплекс ўзгарувчидир.

$$\oint_{\Gamma} P(z) dz = a_0 \oint_{\Gamma} z^n dz + a_1 \oint_{\Gamma} z^{n-1} dz + \dots + a_n \oint_{\Gamma} dz = 0.$$

Демак,

$$\oint_{\Gamma} P(z) dz = 0. \quad (32)$$

б) Агар a нуқта Γ ёпиқ чизик ташқарисида ётган бўлса, $f(z) = \frac{1}{(z-a)^n}$ функция Γ билан чегараланган ёпиқ соҳада аналитик бўлгани учун

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z-a)^n} = 0$$

булишини биз 4-§ да кўрган эдик.

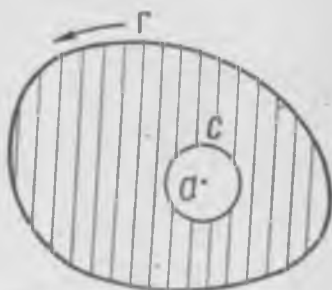
$z=a$ нуқта Γ нинг ичида ётади, деб фараз этайлик. Агар Γ ичида маркази $z=a$ дан иборат бирор C айлана ясасак (71-чизма), икки боғламли соҳа ҳосил бўлиб, унда

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^n}$$

функция аналитик бўлади. Шу сабабли, Коши теоремасига асосан, ташқи ва ички контурлар бўйлаб олинган интеграллар ўзаро тенг бўлади, яъни

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_C \frac{dz}{(z-a)^n}. \quad (33)$$

(33) тенгликдан, 3-§ даги 2-мисол, 4-§ даги 2-мисолларга асосан n нинг иккала ҳоли учун:



71-чизма.

$$\oint \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} \text{агар } n \neq 1 \text{ бўлса, } 0 \\ \text{агар } n = 1 \text{ бўлса, } 2\pi i. \end{cases} \quad (34)$$

Бунда, юқорида айтганимиздек, a нуқта Γ ичида ётади. Хусусий ҳолда $a=0$ нуқта Γ ичида бўлса,

$$\oint \frac{dz}{z^n} \begin{cases} \text{агар } n \neq 1 \text{ бўлса, } 0 \\ \text{агар } n = 1 \text{ бўлса, } 2\pi i. \end{cases} \quad (34')$$

Сўнгги иккала формулага асосланиб қуйидаги оддий каср рационал функциялардан интеграл олиш қийин эмас:

$$R(z) = \frac{A_0}{(z-a)^n} + \frac{A_1}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{z-a}.$$

Агар a нуқта Γ ташқарисида бўлса, ҳар бир ҳаддан олинган интеграл нолга тенг бўлади. Биз аксинча, a нуқта Γ ичида ётади, деб фараз қилайлик. У ҳолда, (34) га асосан:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} R(z) dz &= A_0 \oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z-a)^n} + A_1 \oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z-a)^{n-1}} + \dots + A_{n-1} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z-a} = \\ &= A_0 \cdot 0 + A_1 \cdot 0 + \dots + A_{n-1} \cdot 2\pi i = A_{n-1} \cdot 2\pi i, \end{aligned}$$

$$\oint R(z) dz = A_{n-1} \cdot 2\pi i. \quad (35)$$

Мабодо рационал функция ушбу

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

куринишда берилган бўлса, дастлаб уни оддий касрларга ажратиб, сунгра юқоридаги метод билан интеграллаш керак.

Мисол.

$$I = \oint \frac{(z+1) dz}{z^2(z-1)(z-3)},$$

бундаги Γ чизиқ $|z| = 2$ айланадан иборат.

Интеграл ипораси остидаги каср-рационал функцияни қуйидагича оддий касрларга ажратиб оламиз:

$$\frac{z+1}{z^2(z-1)(z-3)} = \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z} + \frac{C}{z-1} + \frac{D}{z-3}.$$

Бундан, олий алгебра курсида баён қилинган усул билан, номаълум A, B, C ва D коэффициентларни топамиз, улар мос равишда қуйидагиларга тенг:

$$A = -\frac{1}{3}, \quad B = \frac{7}{9}, \quad C = -1, \quad D = \frac{2}{9}.$$

У ҳолда

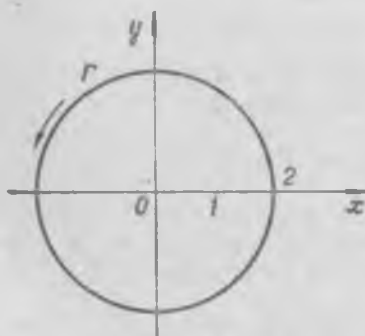
$$I = -\frac{1}{3} \oint \frac{dz}{z^2} + \frac{7}{9} \oint \frac{dz}{z} - \oint \frac{dz}{z-1} + \frac{2}{9} \oint \frac{dz}{z-3}.$$

Бу интегралларнинг ҳар бирини текшириб чиқайлик: (34') формулага асосан:

$$\oint \frac{dz}{z^2} = 0, \quad \oint \frac{dz}{z} = 2\pi i;$$

(34) га мувофиқ:

$$\oint \frac{dz}{z-1} = 2\pi i;$$



72-чизма.

энди, $z = 3$ нуқта I айлананинг ташқарисида бўлгани учун (72-чизма) $\frac{1}{z-3}$ функция I билан чегараланган ёпиқ доирада аналитикдир. Шу сабабли, Коши теоремасига асосан,

$$\oint \frac{dz}{z-3} = 0.$$

Демак,

$$I = \frac{7}{9} \cdot 2\pi i - 2\pi i = -\frac{4}{9} \pi i.$$

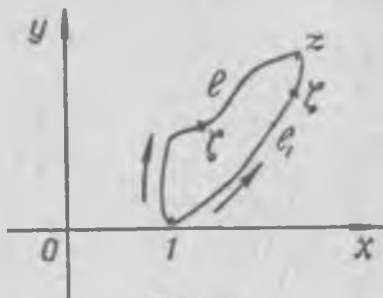
6-§. Логарифмик функциянинг интеграл орқали ифодаси

Ўтган параграфлардан бизга маълумки, агар $z = 0$ нуқта Γ ёпиқ чизиқнинг ташқарисида бўлса,

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z} = 0,$$

агар $z = 0$ нуқта Γ контур ичида бўлса, у ҳолда

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$



73-чизма.

Бизнинг мақсадимиз текисликдаги 1 ва z нуқталарни туташтирувчи, ёпиқ бўлмаган, бирор Γ чизиқ бўйлаб олинган

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z}$$

(73-чизма) интегралнинг қийматини топишдан иборат. Маълумки, ноль нуқтадан ўтмайдиган ҳар қандай Γ чизиқда $f(z) = \frac{1}{z}$ функция аналитикдир. Шу сабабдан, Коши теоремасига асосан, юқоридаги интегралнинг қиймати Γ йўлининг шаклига боғлиқ эмас, яъни

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = \int_1^z \frac{dz}{z} = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Биз ҳарфлар аралашиб кетмасин деб ζ ҳарфини киритдик. Ўнг томондаги интегрални ҳисоблаш учун, олдин Γ чизиқни танлаб оламиз. Унинг учун ноль нуқтани марказ деб, z нуқтадан ўтадиган бир айлана чизамиз ва Γ сифатида $|r|\zeta$ чизиқни, оламиз (74-чизма), Γ чизиқ ҳақиқий ўқнинг $[1, r]$ кесмаси билан айлананинг $r\zeta$ ёйидан иборат бўлгани сабабли:

$$\int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_1^r \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_r^z \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

$$\oint_{\Gamma} R(z) dz = A_{n-1} \cdot 2\pi i. \quad (35)$$

Мабодо рационал функция ушбу

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

кўринишда берилган бўлса, дастлаб уни оддий касрларга ажратиб, сунгра юқоридаги метод билан интеграллаш керак

Мисол.

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{(z+1) dz}{z^2(z-1)(z-3)},$$

бундаги Γ чизиқ $|z| = 2$ айланадан иборат.

Интеграл ишораси остидаги каср-рационал функцияни қуйидагича оддий касрларга ажратиб оламиз:

$$\frac{z+1}{z^2(z-1)(z-3)} = \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z} + \frac{C}{z-1} + \frac{D}{z-3}.$$

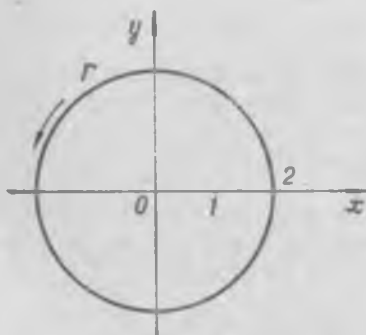
Бундан, олий алгебра курсида баён қилинган усул билан, номаълум A, B, C ва D коэффициентларини топамиз, улар мос равишда қуйидагиларга тенг:

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{7}{9}, \quad C = -1, \quad D = \frac{2}{9}.$$

У ҳолда

$$I = \frac{1}{3} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^2} + \frac{7}{9} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z} - \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z-1} + \frac{2}{9} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z-3}.$$

Бу интегралларнинг ҳар бирини текшириб чиқайлик: (34') формулага асосан:



72-чизма.

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^2} = 0, \quad \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i,$$

(34) га мувофиқ:

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z-1} = 2\pi i,$$

энди, $z = 3$ нуқта Γ айлананинг ташқарисида бўлгани учун (72-чизма) $\frac{1}{z-3}$ функция f билан чегараланган ёпиқ доирада аналитикдир. Шу сабабли, Коши теоремасига асосан,

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z-3} = 0.$$

Демак,

$$I = \frac{7}{9} \cdot 2\pi i - 2\pi i = \frac{-4}{9} \pi i.$$

6-§. Логарифмик функциянинг интеграл орқали ифодаси

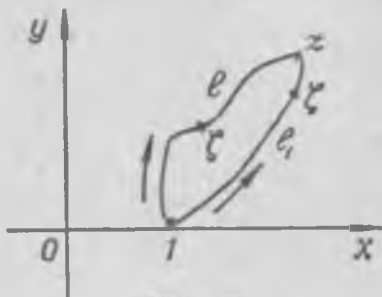
Ўтган параграфлардан бизга маълумки, агар $z = 0$ нуқта Γ ёпиқ чизиқнинг ташқарисиди бўлса,

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z} = 0,$$

агар $z = 0$ нуқта Γ контур ичиди бўлса, у ҳолда

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

Бизнинг мақсадимиз текисликдаги 1 ва z нуқталарни туташтирувчи, ёпиқ бўлмаган, бирор l чизиқ бўйлаб олинган



73-чизма.

$$\int_l \frac{dz}{z}$$

(73-чизма) интегралнинг қийматини топишдан иборат. Маълумки, ноль нуқтадан ўтмайдиган ҳар қандай l чизиқда $f(z) = \frac{1}{z}$ функция аналитикдир. Шу сабабдан, Коши теоремасига асосан, юқоридаги интегралнинг қиймати l йўлнинг шаклига боғлиқ эмас, яъни

$$\int_l \frac{dz}{z} = \int_1^z \frac{dz}{z} = \int_1^z \frac{dz}{\zeta}.$$

Биз ҳарфлар аралашиб кетмасин деб ζ ҳарфини киритдик. Ўнг томондаги интегрални ҳисоблаш учун, олдин l чизиқни танлаб оламиз. Унинг учун ноль нуқтани марказ деб, z нуқтадан ўтадиган бир айлана чизамиз ва l сифатида $l \cap z$ чизиқни оламиз (74-чизма), l чизиқ ҳақиқий ўқнинг $[1, r]$ кесмаси билан айлананинг $r \cap z$ ёйидан иборат бўлгани сабабли:

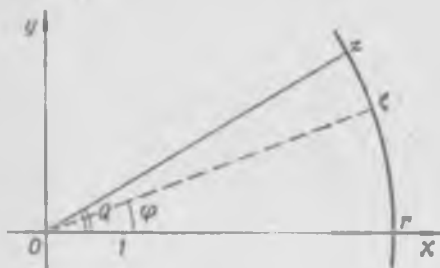
$$\int_l \frac{dz}{\zeta} = \int_1^r \frac{dz}{\zeta} + \int_r^z \frac{dz}{\zeta}.$$

Унг томондаги биринчи интеграл ҳақиқий уқ бўйлаб олингани учун $\zeta = x$ бўлиб,

$$\int_1^r \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_1^r \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^r = \ln r - \ln 1 = \ln r,$$

бунда $r > 0$.

Иккинчи интегрални ҳисоблаш учун айлана тенгламасини ушбу кўринишда ёзамиз:



74-чизма.

$$\zeta = re^{i\varphi} \quad (0 < \varphi < \theta).$$

Бундан:

$$d\zeta = ire^{i\varphi} d\varphi, \quad \frac{d\zeta}{\zeta} = i d\varphi.$$

У ҳолда

$$\int_r^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_0^\theta i d\varphi = i\theta.$$

Буларни юқорига қўйилса:

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln r + i\theta = \ln z$$

ҳосил бўлади.

Демак,

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln z. \quad (36)$$

Бунда унг томон логарифмик функциядан иборат бўлиб, уни биз интеграл орқали ифода қилдик.

Агар l чизиқ $z = 0$ нуқтани, чизмада кўрсатилганидек, бир марта ўраб олган бўлса (75-чизма), l бўйлаб олинган интегрални иккига ажратамиз:

$$\int_l \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_l \frac{d\zeta}{\zeta} = \oint_{\text{Im } z} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{\text{Re } z} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Булардан биринчиси ноль нуқтани ўз ичига олувчи ёпиқ $\text{Im } z$ контур бўйлаб олингани учун

$$\oint_{\text{Im } z} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i.$$

Иккинчи интеграл эса (36) га асосан:

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = \ln z.$$

Демак,

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = \ln z + 2\pi i.$$

Мабодо l чизиқ $z = 0$ нуқтани икки марта ўраб олса,

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = \ln z + 4\pi i$$

бўлишини худди шу усулда исбот қилиш мумкин.

Умуман, агар k марта ўраб олса,

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = \ln z + 2k\pi i$$

бўлади. Бунинг ўнг томони логарифмик функциянинг умумий

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i$$

кўринишидан иборат бўлгани учун натижада ушбу

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = \operatorname{Ln} z \quad (37)$$

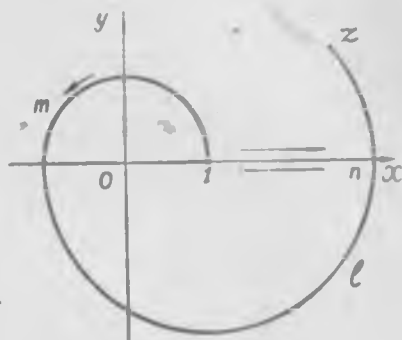
формулага эга бўламиз.

Агар l чизиқнинг йўналиши мусбат, яъни соат стрелкасининг ҳаракатига тескари бўлса, $k = 0, 1, 2, \dots$, акс ҳолда $k = -1, -2, -3, \dots$ бўлади.

Диққат қилиб қаралса шуни куриш мумкинки, (37) нинг ўнг томони кўп қийматли функциядан иборат бўлгани учун чап томонидаги интеграл ҳам юқори чегара z нинг кўп қийматли функцияси экан. Бунинг кўп қийматли бўлишининг геометрик маъноси $z = 0$ нуқтани l чизиқ ўраб олишидан иборат экан.

7-§. Кошининг интеграл формуласи

1. Чегараси Γ чизиқдан иборат бўлган ёпик G соҳада бир қийматли ва аналитик $f(z)$ функция берилган бўлсин. Бу деган сўз, G ни ўз ичига олган бирор G' соҳанинг ҳар бир нуқтасида $f(z)$



75-чизма.

функция аниқ чекли ҳосилага эга деган сўздир. Соҳанинг ичидан ихтиёрий бир z нуқтани олайлик ва бу нуқтани марказ қилиб G ичида ρ радиусли γ айлана чизайлик. У ҳолда Γ ва γ лар билан чегараланган икки боғламли соҳада (ҳалқада) ушбу

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

функция аналитик бўлади, чунки

$$\zeta \neq z.$$

Шу сабабли, Коши теоремасига мувофиқ, ташқи Γ контур бўйлаб олинган интеграл ички γ бўйлаб олинган интегралга тенг бўлади (76-чизма):

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (38)$$

Берилган $f(z)$ функция $\overline{G}$ соҳада аналитик бўлгани сабабли табиийки, уша соҳада узлуксиз ҳам бўлади. У ҳолда ҳар қандай исталганча кичик $\varepsilon > 0$ сон олинган бўлмасин, шундай $\delta > 0$ мавжудки, γ айлананинг ихтиёрий ζ нуқтаси учун $|\zeta - z| = \rho < \delta$ бўлганда

$$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Энди, интегралнинг хоссасидан фойдаланиб, қуйидаги айирмани текширамыз (баҳолаймыз):

$$\left| \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \oint_{\gamma} \frac{f(z) d\zeta}{\zeta - z} \right| = \left| \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| < 2\pi\varepsilon.$$

Ун томондаги ε истаганча кичик мусбат сондан иборат бўлгани учун чап томондаги айирманинг лимити нолга тенгдир. Иккинчи томондан;

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z) d\zeta}{\zeta - z} = f(z) \oint_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = f(z) \cdot 2\pi i.$$

Демак,

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \oint_{\gamma} \frac{f(z) d\zeta}{\zeta - z} \right] &= \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - f(z) \cdot 2\pi i = 0. \end{aligned}$$

Бундан

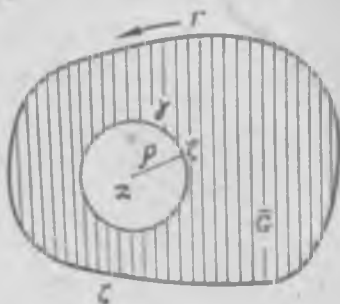
$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = f(z) \cdot 2\pi i. \quad (39)$$

Агар (38) тенгликнинг икки томонидан ρ ни нолга интиштириб лимитга ўтиса қуйидаги тенглик ҳосил бўлади:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = f(z) \cdot 2\pi i.$$

Γ чизиқ бўйлаб олинган интеграл ρ га боғлиқ бўлмагани сабабли лимит белгисини ташлаб ёзиш мумкин, натижада Коши формуласи деб аталувчи ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (40)$$



76-чизма.

Тенгликнинг ўнг томонидаги ифода Коши интеграл дейилади.

Коши формуласининг моҳияти шундаки, у G соҳанинг ички z нуқтасига тегишли $f(z)$ функция қийматини ўша функциянинг Γ контурдаги $f(\zeta)$ қиймати орқали ифодалайди.

Коши формуласи мураккаб контур учун ҳам ўз кучини сақлайди. G кўп боғламли соҳа $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ содда ёпиқ чизиқлар билан чегараланган бўлиб, $f(\zeta)$ функция $\bar{G}$ ёпиқ соҳада аналитик бўлсин, дейлик. G нинг мураккаб контурини

$$\Gamma = \Gamma_0 + \bar{\Gamma}_1 + \bar{\Gamma}_2 + \dots + \bar{\Gamma}_n$$

билан белгилайлик. Энди G нинг ичидан ихтиёрий битта z нуқта олиб, маркази ўша z нуқтадан иборат ва Γ_i ларни кесмайдиган γ айлана чизайлик (77-чизма).

У ҳолда мураккаб контурга тегишли Коши теоремасига асосан

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \oint_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \dots + \oint_{\Gamma_n} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

ёки охириги интегралдан бошқаларини чапга ўтказиб йиғиштирилса,

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (41)$$

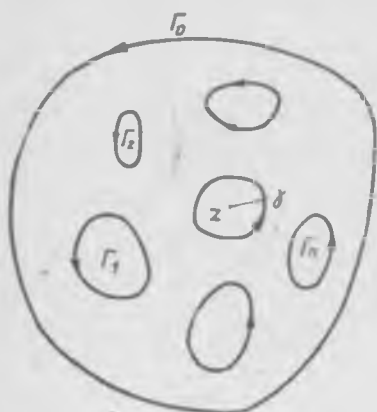
γ билан чегараланган соҳа бир боғламли соҳа бўлгани учун унга (40) Коши формуласини татбиқ эта оламиз, яъни

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

У ҳолда (41) дан

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

Коши формуласи келиб чиқади, бунда Γ — мураккаб контур



77-чизма.

Изоҳ. Агар z нуқта $\bar{G}$ соҳанинг ташқарисиди бўлса, у ҳолда функция G соҳада аналитик бўлиб, (40) даги интеграл нолга тенг бўлади.

2. Ўрта қиймат ҳақидаги теорема. Агар (40) даги Γ контур радиуси r ва a марказли

$$z - a = re^{i\varphi} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi)$$

С айланадан иборат бўлса, Коши формуласининг кўриниши бошқачароқ бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$f(z) = f(a + re^{i\varphi}), \quad dz = ire^{i\varphi} d\varphi,$$

$$\frac{dz}{z - a} = id\varphi.$$

У ҳолда

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - a} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\varphi}) id\varphi,$$

яъни

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\varphi}) d\varphi. \quad (42)$$

Бу эса Гаусс формуласи аталиб, аналитик функциялар учун ўрта қиймат ҳақидаги теоремани ифода қилади. Бундай дейилишига сабаб қуйидагидан иборат. С айланада φ нинг узлуксиз $\Phi(\varphi)$ функцияси берилган деб фараз қилайлик. a марказдан чиқувчи нурлар воситаси билан С айланани n та тенг ёйга бўлсак, марказий бурчак ҳам n та тенг бўлакка бўлиниб, ҳар бири $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{n}$ га тенг бўлади (78-чизма).

Аниқ интегралнинг таърифига кўра

$$\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\varphi}) d\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left[a + re^{i\left(\varphi_k + \frac{2k\pi}{n}\right)}\right] \frac{2\pi}{n}.$$

Бундан

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\varphi}) d\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left[a + re^{i\left(\varphi_k + \frac{2k\pi}{n}\right)}\right].$$

Агар

$$z_0 = a + re^{i\varphi_0}, \quad z_1 = a + re^{i\left(\varphi_0 + \frac{2\pi}{n}\right)}, \quad \dots, \\ z_{n-1} = a + re^{i\left(\varphi_0 + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)}$$

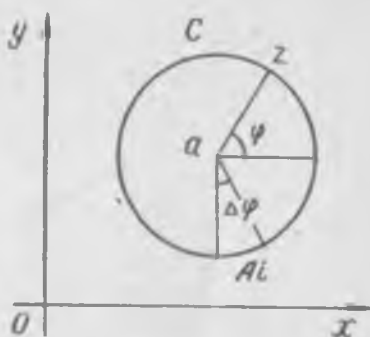
деб белгиласак, лимит белгиси остидаги йиғинди қуйидагича ёзилади:

$$\frac{f(z_0) + f(z_1) + \dots + f(z_{n-1})}{n}$$

Бу эса $f(z)$ функциянинг ўрта арифметик қийматидан иборатдир. Шунинг учун (42) интегрални ҳам $f(z)$ нинг ўрта арифметик қиймати деб қараш мумкин. Мана шу натижага асосланиб, (42) ҳақида хулоса чиқаришимиз мумкин: *аналитик функциянинг доира марказидаги қиймати уша доирани ураб олган айланадаги функция қийматларининг ўрта арифметик қийматига тенгдир.*

Мабодо доиранинг маркази координаталар бошида бўлса, (42) нинг хусусий ҳолига эга бўламиз:

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) d\varphi. \quad (42')$$



78-чиёзма.

8-§. Модулнинг максимум принципи

Теорема. Бирор G соҳада аналитик бўлган ва ўзгармас сонга тенг булмаган $f(z)$ функциянинг $|f(z)|$ модули G соҳанинг бирорта ҳам нуқтасида узининг максимум қийматига эриша олмайди.

Бу теоремани исбот қилишдан аввал қуйидаги леммани исботлаймиз.

Лемма. Агар бирор G соҳада: 1) $f(z) = u + iv$ аналитик функциянинг ҳақиқий қисми ўзгармас бўлса, ёки 2) бу функциянинг модули ўзгармас бўлса, у ҳолда $f(z)$ функция ҳам G да ўзгармасдир.

Исбот. 1) шартга кўра $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$; $f(z)$ аналитик бўлгани учун Даламбер-Эйлер шартларига кўра $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ бўлади. Бундан

у нинг узгармаслиги ва натижада $f(z)$ ҳам узгармаслиги келиб чиқади. Энди лемманинг 2) шарти бажарилган бўлсин, яъни $|f(z)| = M$, $M = \text{const}$. Агар $M = 0$ бўлса, лемманинг туғрилиги равшан. $M \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда $\ln f(z) = \ln |f(z)| + i \arg f(z)$ функцияни текшираемиз. Бу функция аналитик бўлиб, унинг ҳақиқий қисми $(\ln M)$ шартга кура узгармасдир; у ҳолда биринчи шартига асосан $\ln f(z)$ функция ҳам узгармас ва, демак, $f(z)$ ҳам узгармасдир. Лемма исбот бўлди.

Теореманинг исботи. M билан $f(z)$ функция модулининг юқори чегараси қийматини (яъни $\sup |f(z)|$ ни) белгилаб оламиз. G соҳанинг бирор z_0 нуқтасида $f(z)$ функциянинг модули ўзининг максимумига тенг бўлсин дейлик, яъни: $|f(z_0)| = M$. Энди маркази z_0 да ва барча нуқталари G да ётувчи r радиусли айлана чизамиз. Ўрта қиймат туғрисидаги (42) формулага асосан

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi$$

бўлади. Бундан

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})| d\varphi. \quad (43)$$

M максимум қиймат бўлгани учун $|f(z_0 + re^{i\varphi})| \leq M$, бундан ва (43) тенгсизликдан $|f(z_0)| \leq M$ бўлади. Бу эса фаразimizга зид. Демак ихтиёрий φ учун $|f(z_0)| = |f(z_0 + re^{i\varphi})| = M$ булиши керак.

Шундай қилиб, z_0 нуқтанинг етарли кичик атрофида $|f(z)| = M$ булишини кўрсатамиз. Бунинг учун G нинг ихтиёрий z_1 нуқтасини олиб, бу нуқтани z_0 нуқта билан G да ётувчи узлуксиз l чизик орқали туташтирамиз. l чизикдан G соҳанинг чегарасигача бўлган энг қисқа масофани d ($d > 0$) билан белгилаймиз. l чизикнинг ихтиёрий нуқтасини марказ қилиб, $\frac{d}{2}$ радиусли айлана чизсак, у айлана G

соҳадан чиқиб кетмайди. Исботланганига асосан z_0 марказли ва $\frac{d}{2}$ радиусли доирада $|f(z)| = M$ бўлади. Радиуси $\frac{d}{2}$ га тенг бўлган доиранинг марказини l чизик бўйича z_0 нуқтадан z_1 нуқтагача узлуксиз ҳаракатлантурсак, ҳаракатланувчи доиранинг ҳолати қандай булишидан қатъи назар, бу доирада $|f(z)| = M$ тенглик бажарилади. Натижада $|f(z_1)| = M$. Демак, z_1 ихтиёрий нуқта бўлгани учун бутун G соҳада $|f(z)| = M$ тенгликнинг туғрилигини исбот қилдик. Бундан леммага асосан $f(z)$ функциянинг G соҳада узгармаслиги келиб чиқади. Бу хулоса эса теореманинг шартига қарама-қаршидир. Бундан фаразimizнинг нотўғрилиги келиб чиқади. Шу билан теорема исботланди.

1-натижа. *Ўзгармас сонга тенг бўлмаган $f(z)$ функция G соҳада аналитик ва ёпиқ $\bar{G}$ соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг модули ўзининг тах $|f(z)|$ қийматига соҳанинг чегарасида эришади.*

Ҳақиқатан, $f(z)$ ёпиқ $\bar{G}$ соҳада узлуксиз бўлгани учун $|f(z)|$ функция ҳам $\bar{G}$ да узлуксиз бўлади, чунки

$$||f(z+h)| - |f(z)|| \leq |f(z+h) - f(z)|$$

тенгсизлиkning ўнг томони h билан бирга нолга интилади. Демак, ёпиқ соҳада узлуксиз бўлган функциянинг хоссасига асосан $|f(z)|$ функция ўзининг максимум қийматига $\bar{G}$ соҳанинг бирор z_0 нуқтасида эришади. Искот қилинган теоремага асосан z_0 нуқта G соҳада бўлиши мумкин эмас, демак, бу нуқта G соҳанинг чегарасида ётади.

2-натижа. *Агар ўзгармас сонга тенг бўлмаган $f(z)$ функция G соҳада аналитик, $\bar{G}$ да узлуксиз бўлса ва шу билан бирга у нолдан фарқли бўлса, у ҳолда $|f(z)|$ минимум қийматга G ичида эриша олмайди.*

Буни исботлаш учун максимум принципини $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ функцияга татбиқ қилиш етарлидир.

9-§. Коши типдаги интеграл

Кошининг (40) интеграл формуласини келтириб чиқаришда биз $f(z)$ функцияни G соҳада аналитик ва Γ ни ёпиқ чизиқ, деб фараз қилган эдик. Агар бу икки фаразимиизнинг бирортаси бузилса, Коши формуласи ўринли бўлмайди. Маълумки, ўша (40) формуланинг ўнг томони Коши интегралли дейилар эди. Биз энди Коши интегралига қараганда умумийроқ бир интегрални текшираимиз.

Текисликда бирор силлиқ Γ чизиқ олайлик. Бу чизиқ ёпиқ бўлмаслиги ҳам мумкин. Фараз эгайлик, $\varphi(\zeta)$ бир қийматли функция мана шу Γ чизиқда узлуксизгина бўлсин. Агар биз Γ чизиқда ётмайдиган бирор z нуқтани олсак, у вақтда

$$\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}$$

каср Γ чизиқнинг барча нуқталарида узлуксиз бўлади, чунки ζ нуқта Γ устида ётувчи ихтиёрий нуқтадан иборат бўлгани учун $\zeta \neq z$. Шу сабабдан

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

интеграл текисликдаги ҳар бир z (Γ да ётмайдиган) нуқта учун аниқ қийматга эга. Демак, уша интеграл z нинг функциясиدير:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (44)$$

Бу интегралнинг хусусий ҳолларини текширайлик. Агар Γ чизиқ ёпиқ бўлиб, у билан чегараланган G соҳада $\varphi(\zeta)$ аналитик бўлса, у ҳолда:

а) z нуқта G нинг ташқарисида ётган бўлса, (44) интеграл нолга тенг булади;

б) z нуқта G нинг ичида ётган бўлса, (44) тенглик Кошининг (40) формуласига айланади.

Шу сабабли (44) нинг ўнг томони Коши типидagi интеграл деб аталади.

Юқори тартибли ҳосилаларнинг мавжудлиги. Бу ерда Коши типидagi интеграл билан аниқланган $\Phi(z)$ функция учун ушбу теоремани исбот қиламиз.

Теорема. Коши типидagi интеграл билан аниқланган $\Phi(z)$ функция Γ чизиқда ётмайдиган, ҳар қандай чекли z нуқтада аналитик булади. Шундай нуқталарда функция барча юқори тартибли ҳосилаларга эга бўлиб, улар

$$\Phi^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \quad (45)$$

формула орқали ифода қилинади.

Биз ҳозирча $n=1$ учун (45) нинг тўғрилигини исбот қиламиз. Бунинг учун (44) дан қуйидагини топиб оламиз:

$$\Phi(z+h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z - h}.$$

Бундан (44) ни айтириб, h га бўлайлик, яъни

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(z+h) - \Phi(z)}{h} &= \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z - h} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}. \end{aligned} \quad (46)$$

Энди h ни нолга интиштириб лимитга ўтилса, расмий томондан қуйидагига эришамиз:

$$\Phi'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(z+h) - \Phi(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2}. \quad (47)$$

Шундай усулда лимитга ўтиш қонуний эканлигини кўрсатиш учун қуйидагича мулоҳаза қиламиз.

Γ чизиқдаги ζ нуқталар билан Γ дан ташқаридаги қўзғалмас z нуқта орасидаги масофалардан энг қисқасини $2d$ орқали белгилаб,

$|h|$ ни шундай кичик қилиб олайликки, натижада $|h| < d$ бўлсин^{II} (79-чизма). У вақтда шубҳасиз

$$|\zeta - z| > d, \quad |\zeta - (z + h)| = |\zeta - z - h| > d$$

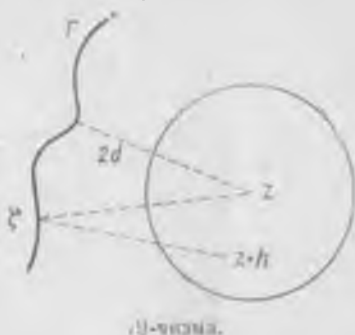
тенгсизлик бажарилади. $\varphi(\zeta)$ функция Γ чизиқда узлуксиз бўлгани учун чегараланган, $|\varphi(\zeta)| \leq M$ бўлади. Шуларга асосан қуйидаги тенгсизлик ҳосил бўлади:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Phi(z+h) - \Phi(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2} \right| < \frac{|h|}{2\pi} \cdot \frac{Ml}{d^3} + l = \frac{Ml}{2\pi d^3} + |h|, \end{aligned}$$

бундаги l сон Γ чизиқнинг узунлигидир. h нолга интилганда тенгсизликнинг унг томони ҳам нолга интилади. Шунинг учун чап томондаги айирма лимити ҳам нолга тенг бўлади. Демак, (47) тенглик туғри экан.

Худди мана шу усулда (47) даги $\Phi'(z)$ устида мулоҳаза қилинса, қуйидаги

$$\begin{aligned} \Phi''(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi'(z+h) - \Phi'(z)}{h} = \\ &= \frac{2i}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^3} \end{aligned}$$



формула келиб чиқади. Умуман тўла математик индукция метод^{II} билан теоремада баён этилган (45) умумий формулани келтириб чиқариш мумкин.

Юқорида исбот этилган теоремадан равшанки, (44) даги интеграл ишораси остидаги функция теорема шартларини қаноатлантирган ҳолда уни параметр z бўйича исталганча марта дифференциаллаш мумкин экан. Дифференциаллаш қондаси ҳақиқий ўзгаришчилар соҳасидаги параметрга боғлиқ интегрални параметр бўйича дифференциаллашнинг ўзгинасидир.

Аналитик функция исталган тартибли ҳосиласининг маълумлиги. Кўпинча (45) нинг қуйидаги хусусий ҳоли ишлатилади^{II}. Контури ёпиқ Γ чизиқдан иборат G соҳада аниқланган $f(z)$ функция G да аналитик бўлсин. У ҳолда (44) формула ушбу

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

Коши формуласини ва (45) эса

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \quad (50)$$

аналитик функциянинг юқори тартибли ҳосилаларини ҳисоблаш формуласини беради. Агар $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ деб олсак, (50) дан

$$f(z), f'(z), f''(z), \dots, f^{(n)}(z), \dots$$

ҳосилалар келиб чиқади. Шундай қилиб, биз қуйидаги натижага эришдик: агар $f(z)$ функция $\bar{G}$ соҳада аналитик (яъни $f'(z)$ мавжуд) бўлса, у функция иккинчи, учинчи ва ҳоказо барча юқори тартибли ҳосилага эга бўлиб, уша ҳосилаларнинг ҳар бири $\bar{G}$ соҳада узлуксиз булар экан. Лекин ҳақиқий узгарувчилар соҳасида бундай ҳодисани кўрмаймиз, яъни бирор соҳада биринчи тартибли ҳосилага эга булган $f(x)$ функция уша соҳада иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлавермайди.

Кошининг (40) формуласи ва (50) формула аниқ интегралларни ҳисоблашда кўп ишлатилади. Юқорида биз ушбу теоремани исбот қилдик.

Теорема. *Эпиқ $\bar{G}$ соҳада аналитик булган ҳар қандай $f(z)$ функция шу соҳада исталган тартибли ҳосилаларга эга бўлиб, улар*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}$$

формула билан ифодаланади, бунда Γ контур $\bar{G}$ соҳанинг чегарасидир.

1-мисол.

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{z^2 dz}{z - 2i}$$

интеграл ҳисоблансин, бунда Γ — айлана бўлиб, унинг маркази ноль нуқтада ва радиуси $R = 3$ га тенг.

Бу мисолда берилган функция $f(z) = z^2$ дан иборат бўлиб, Γ айлана билан чегараланган эпиқ доирада аналитик функция, $a = 2i$ нуқта шу доира ичида ётгани учун Кошининг

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - a} = 2\pi i \cdot f(a) \quad (40')$$

формуласидан фойдаланамиз. Мана шунга асосан:

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{z^2 dz}{z - 2i} = 2\pi i \cdot f(2i) = 2\pi i \cdot (2i)^2 = -8\pi i.$$

2-мисол. Биринчи мисолдаги айлана радиуси $R = 1$ деб интеграл ҳисоблансин. Равшанки, $a = 2i$ нуқта C нинг ташқарисида ётгани учун ўша ёпиқ доирада

$$\frac{z^2}{z - 2i}$$

аналитикдир. Коши теоремасига мувофиқ ўша аналитик функциядан ёпиқ C контур (айлана) бўйлаб олинган интеграл нолга тенг бўлади:

$$\oint_C \frac{z^2 dz}{z - 2i} = 0.$$

3-мисол. Маркази i да, радиуси $R = 3$ га тенг бўлган айлана C бўйлаб ушбу

$$I = \oint_C \frac{\sin z}{z - i} dz$$

интеграл ҳисоблансин.

Берилган интегрални (40) Коши интегрални билан таққосласак,

$$f(z) = \sin z, \quad a = +i$$

эканини кўрамыз.

Бу функция C айлана билан чегараланган ёпиқ доирада аналитик бўлгани учун (40') га асосан:

$$I = 2\pi i \cdot f(+i) = 2\pi i \cdot \sin(+i) = 2\pi i \cdot \sin i.$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{дан} \quad \sin i = \frac{e^{-1} - e}{2i}.$$

Бундан

$$I = +2\pi i \cdot \frac{e^{-1} - e}{2i} = -(e + e^{-1})\pi.$$

4-мисол.

$$I = \oint_C \frac{dz}{z^2 + 9}$$

интеграл ҳисоблансин, бунда C — айлана бўлиб, унинг радиуси $R = 2$ ва маркази $2i$ нуқтага жойлашган.

Аввало бу интегрални Коши интегрални кўринишига келтириб оламиз:

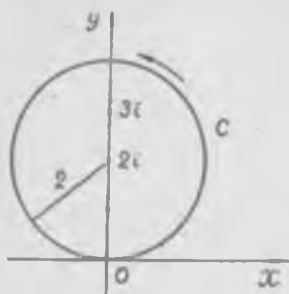
$$z^2 + 9 = z^2 - (3i)^2 = (z + 3i)(z - 3i),$$

$$I = \oint_C \frac{dz}{(z + 3i)(z - 3i)} = \oint_C \frac{1}{z + 3i} dz.$$

Бундан

$$f(z) = \frac{1}{z + 3i}$$

ва $a = 3i$ бўлиб, у C айлана ичида ётади, $(-3i)$ эса доира ташқарисиди ётади (80-чиизма). Демак, $f(z)$ функция C билан чегараланган доира ичида аналитикдир. У ҳолда Коши формуласига асосан:



80-чиизма

$$I = 2\pi i \cdot f(3i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{3i + 3i} = \frac{\pi}{3}.$$

Демак,

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 + 9} = \frac{\pi}{3}.$$

(50) формула ёрдами билан кўпгина интеграллар жуда содда ҳисобланиши мумкинлигини қуйидаги мисолда кўрсатамиз. Иштиёрий чекли соҳада аналитик $f(z) = e^z$ функция хоссаларига асосан ушбу

$$\int_0^{2\pi} e^{r \cos \varphi} \cdot \cos(r \sin \varphi - n\varphi) d\varphi,$$

$$\int_0^{2\pi} e^{r \cos \varphi} \cdot \sin(r \sin \varphi - n\varphi) d\varphi$$

интеграллар ҳисоблансин:

$$f^{(n)}(z) = e^z \text{ ва } f(a) = e^a$$

(a — иштиёрий чекли ўзгармас) дан (50) формулага кўра

$$e^a = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{e^z dz}{(z-a)^{n+1}}$$

бўлиб, бундаги C контур ушбу

$$z - a = re^{i\varphi} \quad (0 < \varphi < 2\pi)$$

кўринишдаги айланадир. Бундан

$$\begin{aligned} dz &= ire^{i\varphi} d\varphi, \quad e^z = e^{a+re^{i\varphi}} = e^a \cdot e^{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \\ &= e^a \cdot e^{r \cos \varphi} \cdot e^{ir \sin \varphi}, \end{aligned}$$

У ҳолда

$$\begin{aligned} \frac{e^z dz}{(z-a)^{n+1}} &= \frac{e^a \cdot e^{r \cos \varphi} \cdot e^{ir \sin \varphi} \cdot ire^{i\varphi} d\varphi}{(re^{i\varphi})^{n+1}} = \\ &= \frac{i}{r^n} \cdot e^a \cdot e^{r \cos \varphi} \cdot e^{ir \sin \varphi - i(n+1)\varphi} \cdot d\varphi. \end{aligned}$$

Буни интеграл ишораси остига қўйиб, соддалаштирилгандан сўнг қуйидаги натижа ҳосил бўлади:

$$\frac{2\pi \cdot r^n}{n!} = \int_0^{2\pi} e^{r \cos \varphi} \cdot e^{i(r \sin \varphi - n\varphi)} d\varphi.$$

Эйлер формуласига мувофиқ

$$e^{i(r \sin \varphi - n\varphi)} = \cos(r \sin \varphi - n\varphi) + i \sin(r \sin \varphi - n\varphi).$$

Шу сабабли

$$\begin{aligned} \frac{2\pi r^n}{n!} &= \int_0^{2\pi} e^{r \cos \varphi} \cdot \cos(r \sin \varphi - n\varphi) d\varphi + \\ &+ i \int_0^{2\pi} e^{r \cos \varphi} \cdot \sin(r \sin \varphi - n\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Бу тенглиkning чап томони ҳақиқий ва ўнг томони комплекс сондан иборат бўлгани учун унинг ҳақиқий қисми чап томондаги сонга тенг, мавҳум қисми эса нолга тенг бўлади, демак,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{r \cos \varphi} \cdot \cos(r \sin \varphi - n\varphi) d\varphi &= \frac{2\pi r^n}{n!}, \\ \int_0^{2\pi} e^{r \cos \varphi} \cdot \sin(r \sin \varphi - n\varphi) d\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Хусусий ҳолда, агар $n = r = 1$ бўлса,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{\cos \varphi} \cdot \cos(\sin \varphi - \varphi) d\varphi &= 2\pi, \\ \int_0^{2\pi} e^{\cos \varphi} \cdot \sin(\sin \varphi - \varphi) d\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Буларга ўхшаш мураккаб интегралларни математик анализ курсида урганилган усуллар билан ҳисоблаш баъзан мумкин эмас.

Морера теоремаси¹ (*Коши теоремасига тескари теорема*). Агар $f(z)$ бир боғламли G соҳада узлуксиз бўлса ҳамда G да ётувчи ихтиёрий силлиқ ёки силлиқ булаклардан иборат ёпиқ Γ чизиқ бўйлаб $f(z)$ функциядан олинган интеграл нолга тенг бўлса, у ҳолда $f(z)$ G соҳада аналитик функциядир.

Исбот. Бизга маълумки, бу теореманинг шартлари бажарилганда $\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta$ ифода G даги z_0 ва z нуқталарни туташтирувчи йўлга боғлиқ бўлмайди ва 5-§ даги 2 теоремага асосан

¹ Г. Морера (1856 — 1909) — итальян математиги.

G соҳада аналитик $F(z)$ функцияни аниқлайди, шу билан бирга $F'(z) = f(z)$ бўлади. $F(z)$ функция аналитик бўлгани учун аввалги пунктдан бизга маълумки, $F'(z)$ ҳам G да аналитик функция бўлади, у ҳолда $f(z) = F'(z)$ ҳам G соҳада аналитик функциядир.

Морера теоремасининг шартини бир оз соддалаштириш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, Коши теоремасини исботлашдаги мулоҳазаларни эсга олсак, бу теоремада айтилган типдаги $f(z)$ функциядан ёпиқ Γ чизиқ бўйлаб олинган интегралнинг нолга тенглигини талаб қилиш ўрнига, $f(z)$ функциядан G да ётувчи ихтиёрый учбурчакнинг периметри бўйлаб олинган интегралнинг нолга тенглигини талаб қилиш етарлидир.

Коши типдаги интегралнинг чегаравий қийматлари тўғрисида. Биз кўрдикки, Коши типдаги

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

интеграл $z \in \Gamma$ нуқталарда аналитик функцияни ифодалайди. Энди биз z нуқта Γ чизиқда ётган ҳолни текширамиз. У ҳолда бу интеграл хосмас интеграл бўлади ва уни текшириш учун аввало ҳақиқий ўзгарувчилар соҳасидаги хосмас интегралларга онд асосий тушунчаларни эслатиб ўтамиз.

Ҳақиқий ўзгарувчи $f(x)$ функция (a, b) интервалда берилган бўлиб, бу интервалнинг бирор ички c нуқтасида чексизликка айлансин. Агар

$$\lim_{\substack{c_1 \rightarrow 0 \\ c_2 \rightarrow 0}} \left[\int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \int_{c_2}^b f(x) dx \right]$$

лимит мавжуд бўлса, ўша лимит чегараланмаган $f(x)$ функциянинг (a, b) интервалдаги хосмас интегрални дейилади. Бу таърифнинг муҳим жойи шундан иборатки, c_1 ва c_2 кичик миқдорлар ихтиёрый қонун билан, бир-бирга боғлиқ бўлмай нолга интилади. Математик анализ курсидан маълумки, $f(x)$ функциянинг $x = c$ да чексизликка айланнш тартиби бирдан кичик бўлса, яъни

$$|f(x)| < \frac{M}{|x-c|^n} \quad (n < 1)$$

бўлса, хосмас интеграл мавжуд бўлади. Агар $f(x)$ функция $x = c$ да бир ёки бирдан юқори тартибдаги чексизликка айланса, у ҳолда хосмас интеграл мавжуд бўлмайди ёки бошқача айтганда узоқлашади. Масалан, ушбу

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} \quad (a < c < b) \quad (51)$$

интеграл хосмас бўлиб, қуйидагича ифодаланади:

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\substack{e_1 \rightarrow 0 \\ e_2 \rightarrow 0}} \left[\int_a^{c-e_1} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+e_2}^b \frac{dx}{x-c} \right] = \ln \frac{b-c}{c-a} + \lim_{\substack{e_1 \rightarrow 0 \\ e_2 \rightarrow 0}} \ln \frac{e_1}{e_2}. \quad (52)$$

Охирги ифоданинг limiti e_1 ва e_2 ларнинг нолга ингилиш усулига боғлиқ. Демак, бу интеграл хосмаслик маъносида ҳар доим мавжуд эмас. Шунинг учун уни махсус (сингуляр) интеграл дейилади. Аммо, e_1 ва e_2 ўртасида бирор боғланиш ўрнатилса унга аниқ маъно бериш мумкин.

Равшанки, агар

$$e_1 = e_2 = \varepsilon \quad (53)$$

деб ҳисобласак, текширилган интеграл аниқ бир маънога эга, яъни мавжуд бўлади. Шундай қилиб, қуйидаги таърифга келдик.

Таъриф. Ушбу

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-c} \right]$$

лимитни махсус (51) интегралнинг Коши бўйича бош қиймати дейилади ва $v \cdot p \int_a^b \frac{dx}{x-c}$ орқали белгиланади, бунда v ва p бош қиймат деган француз сўзлари *valeur principale* нинг бошланғич ҳарфлари, (52) ва (53) ни эътиборга олсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$v \cdot p \int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a}.$$

Энди умумийроқ

$$\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \quad (54)$$

интегрални текшираимиз, бунда Γ — бирор силлиқ чизиқ. Агар (54) ифодадаги z нуқта Γ чизиққа тегишли бўлса, бу нуқтани ζ_0 орқали белгилаб, ушбу

$$\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta-\zeta_0} \quad (54')$$

хосмас интегрални комплекс соҳада текшираимиз. Бунинг учун ζ_0 нуқтани марказ қилиб, етарли кичик «радиусли шундай айлана чизамизки, у Γ чизиқни қандайдир иккита ζ_1 ва ζ_2 нуқталарда кесиб ўтсин. γ орқали $\zeta_1 \zeta_2$ ёғни белгилаб

$$\int_{\Gamma-\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-\zeta_0} d\zeta \quad (55)$$

интегрални текшираимиз (81-чизма).

Табриф. Агар $\epsilon \rightarrow 0$ да (55) интеграл аниқ лимитга интилса, бу лимитни (54') махсус интегралнинг Коши бўйича бош қиймати дейилади ва қуйидагича ёзилади:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta = v \cdot p \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta$$

Юқоридаги айтганларимиздан равшанки, агар интеграл оддий маънода (яъни хосмас интеграл сифатида) мавжуд бўлса, у ҳолда бу интеграл махсус интеграл сифатида ҳам мавжуд бўлади ва унинг бош қиймати оддий интеграл қиймати билан бир хил бўлади.

Бунга тескари фикр нотўғри. Шунинг учун махсус интегралнинг бош қийматини $v \cdot p$ белгисиз ҳам ёзадилар. Энди махсус интегралнинг мавжудлик шартини кўрайлик.

Теорема. Агар $\varphi(z)$ функция Γ чизиққа Гёльдер (H) шартини қаноатлантирса, яъни Γ нинг ихтиёрий икки нуқтасида

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leq A |z_1 - z_2|^\lambda, \quad 0 < \lambda \leq 1 \quad (56)$$

тенгсизлик бажарилса, (54') интегралнинг Коши бўйича бош қиймати мавжуддир.

(56) тенгсизликдаги A — мусбат сон бўлиб, Гёльдер ўзгармаси, λ эса Гёльдер кўрсаткичи дейилади.

Исбот. Аввало текширилатган махсус интегрални қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\int_{\Gamma-\gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = \int_{\Gamma-\gamma} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + \varphi(\zeta_0) \int_{\Gamma-\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0}. \quad (57)$$

Γ чизиқнинг охирги нуқталарини a ва b орқали белгилаймиз. У вақтда:

$$\int_{\Gamma-\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = \ln(\zeta - \zeta_0) \Big|_a^{\zeta_1} + \ln(\zeta - \zeta_0) \Big|_{\zeta_1}^b = \ln \frac{b - \zeta_0}{a - \zeta_0} - \ln \frac{\zeta_1 - \zeta_0}{\zeta_1 - \zeta_0}.$$

$\ln(\zeta - \zeta_0)$ кўп қийматли функция бўлганлиги туфайли, унинг аниқ аналитик тармоғини ажратиб олиш учун текисликда бу функциянинг тармоқланиш нуқталарини бирлаштирувчи қирқим утказиш керак. Шу сабабли аввалги тенгликдаги $\ln \frac{b - \zeta_0}{a - \zeta_0}$ де-

ганда $\ln \frac{b - \zeta}{a - \zeta}$ функциянинг $\Gamma = ab$ эгри чизиқ бўйлаб қирқилган текисликдаги аналитик тармоғининг Γ дан чап томонда ζ_0 нуқтада қабул қиладиган қиймати тушунилади.

$$\ln \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \ln \left| \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} \right| + i [\arg(z_2 - z_0) - \arg(z_1 - z_0)].$$

Шарт буйича $|z_2 - z_0| = |z_1 - z_0|$ бўлгани учун юқоридаги ифода-нинг ун-г томонидаги биринчи қўшилувчи нолга тенг бўлади. Урта қавслар ичидаги ифода эса $\overline{z_0 z_1}$ ва $\overline{z_0 z_2}$ векторлар орасидаги α бурчакка тенг, охириги айтганларимизга асосан ушбунни ҳосил қиламиз:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \ln \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = -i\pi. \quad (58)$$

Иккинчи томондан, етарли кичик ε учун Гёльдер шартига асосан

$$\left| \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{A}{|z - z_0|^{1-\lambda}}$$

бўлади, демак, ушбу лимит мавжуд:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\gamma} \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} dz = \int_{\Gamma} \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} dz. \quad (59)$$

Шу билан бирга охириги интегрални оддий маънода тушуниш мумкин (яъни интеграл Коши маъносида эмас). Шундай қилиб, (57) тенгликнинг ун-г томонидаги иккала қўшилувчи ҳам $\varepsilon \rightarrow 0$ да аниқ лимитга интилади; бу лимит, таърифга асосан, (54) интегралнинг бош қийматидир. Бу бош қиймат (57), (58) ва (59) тенгликларга асосан қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$\int_{\Gamma} \frac{\varphi(z)}{z - z_0} dz = \int_{\Gamma} \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} dz + \varphi(z_0) \left[\ln \frac{b - z_0}{a - z_0} + \pi i \right]. \quad (60)$$

Хусусий ҳолда Γ ёпиқ контур бўлса, (60) да $a = b$ деб, қуйидаги тенгликка эришамиз:

$$\oint_{\Gamma} \frac{\varphi(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\Gamma} \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} dz + i\pi \varphi(z_0). \quad (61)$$

Энди Коши типидagi (54) интегралнинг z нуқта интеграллаш чизиғи Γ га интилгандаги чегаравий қийматларини ўрганамиз. Аввало қуйидаги леммани исботлаймиз.

Лемма. $\varphi(z)$ функция Γ чизиқда Гёльдер шартини қаноатлантирсин ва z нуқта z_0 га шундай интилсинки, $h = |z - z_0|$ нинг z дан Γ гача бўлган энг қисқа масофа d га нисбати ҳар доим чекли бўлсин (яъни z нуқта z_0 га контурга уринма бўлмаган чизиқ бўйича интилсин). У ҳолда

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} dz = \int_{\Gamma} \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} dz. \quad (62)$$

Бу леммани исботлаш учун (62) тенгликнинг чап ва ўнг томонларидаги интегралнинг айирмасини баҳолаймиз:

$$\Delta = \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta = \int_{\Gamma} (z - \zeta_0) \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{(\zeta - z)(\zeta - \zeta_0)} d\zeta.$$

Δ интегрални икки қисмга ажратамиз:

$$\Delta = \int_{\gamma} (z - \zeta_0) \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{(\zeta - z)(\zeta - \zeta_0)} d\zeta + \int_{\Gamma} (z - \zeta_0) \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{(\zeta - z)(\zeta - \zeta_0)} d\zeta = \Delta_1 + \Delta_2,$$

бу ерда γ ёй Γ эгри чизиқнинг ёйи бўлиб, унинг нуқталари $|\zeta - \zeta_0| \leq \delta$ тенгсизлиқни қаноатлантиради, δ исталганча кичик мусбат сон, $\Gamma' = \Gamma - \gamma$.

Биринчи интеграл учун Гёльдер шартидан ва $|\zeta - z| > d$ тенгсизликдан фойдаланиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} |\Delta_1| &\leq \int_{\gamma} |z - \zeta_0| \frac{|\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)|}{|\zeta - z||\zeta - \zeta_0|} |d\zeta| \leq \int_{\gamma} h \cdot \frac{A|\zeta - \zeta_0|^\lambda}{d|\zeta - \zeta_0|} |d\zeta| = \\ &= \frac{hA}{d} \int_{\gamma} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - \zeta_0|^{1-\lambda}}. \end{aligned}$$

ζ_0 ёйни тортиб турувчи ватарнинг узунлигини $r = |\zeta - \zeta_0|$ орқали белгилаймиз. Γ силлиқ чизиқ бўлгани учун унинг қуйидаги хоссасидан фойдаланамиз: Γ силлиқ чизиқ учун ёй узунлигининг бу ёйни тортиб турувчи ватар узунлигига бўлган нисбати ўзгармас миқдордир, яъни

$$\left| \frac{d\zeta}{dr} \right| \leq M,$$

бунда M — ўзгармас мусбат сон. Демак,

$$|d\zeta| \leq M |dr|.$$

Бундан:

$$|\Delta_1| \leq \frac{hMA}{d} \int_{\gamma} \frac{|dr|}{r^{1-\lambda}} = \frac{2hMA}{d} \int_0^{\delta} \frac{dr}{r^{1-\lambda}} = \frac{2hMA}{\lambda d} \delta^\lambda.$$

Равшанки, δ ни шундай кичик қилиб танлаб олиш мумкинки, $|\Delta_1|$ миқдор берилган ихтиёрий $\frac{\varepsilon}{2}$ дан катта бўлмайди, яъни:

$$|\Delta_1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Γ' эгри чизиққа ζ_0 нуқта тегишли бўлмагани учун тайин δ учун Δ_2 интеграл ζ_0 нуқтада z нинг узлуксиз функцияси бўлади, демак, исталганча кичик $h = |z - \zeta_0|$ учун $|\Delta_2|$ миқдор ҳам $\frac{\varepsilon}{2}$ дан катта бўлмайди:

$$|\Delta_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

У ҳолда ана шундай h лар учун:

$$|\Delta| \leq |\Delta_1| + |\Delta_2| < \varepsilon.$$

Бу эса лемманинг туғрилигини исботлайди.

Исбот қилинган леммага асосан Коши типдаги интеграл чегаравий қийматларини ҳисоблаш формулаларини чиқариш қийин эмас.

Сохоцкий формулалари. Ушбу

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Коши типдаги интегрални текшираемиз, бундаги $\varphi(\zeta)$ Гёльдер шартини қаноатлантирадиган функция бўлсин. Γ ёпиқ эгри чизик деб ҳисоблаймиз, акс ҳолда уни бирор эгри чизик билан ёпиқ эгри чизикқача тулдириб, тулдирувчи чизикда $\varphi(\zeta) = 0$ деб ҳисоблашимиз мумкин. $\Phi(z)$ аналитик функциянинг чегаравий қийматларини мос равишда $\Phi^+(\zeta_0)$ ва $\Phi^-(\zeta_0)$ билан белгилаймиз. Бундаги $\Phi^+(\zeta_0)$ миқдор $\Phi(z)$ нинг z нуқта Γ нинг ичида ётиб контурдаги ζ_0 нуқтага интилгандаги лимити бўлиб, $\Phi^-(\zeta_0)$ эса z нуқта контур ташқарисидан ζ_0 га интилгандаги лимитидир (контур очик бўлса, улар чап ва ўнг чегаравий қийматларга мос келади). ζ_0 нуқтадаги қийматни $\Phi(\zeta_0)$ билан белгилаймиз, яъни

$$\Phi(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta.$$

$\Phi(z)$ функцияни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \quad (63)$$

Исбот қилинган леммага асосан ўнг томондаги биринчи интегралнинг $z \rightarrow \zeta_0$ даги лимити

$$\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta,$$

иккинчиси эса z нуқта контурнинг ичида ёки ташқарисида ётишига қараб, $2\pi i$ ёки 0 га тенг. Буларни эътиборга олиб, (63) формулада $z \rightarrow \zeta_0$ деб лимитга ўтсак, ушбу

$$\Phi^+(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + \varphi(\zeta_0); \quad \Phi^-(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta$$

тенгликларга эга бўламиз.

Бу формуладаги интегралнинг ўрнига унинг юқоридаги қийматини олиб келиб қўйсак, қуйидаги формулаларни ҳосил қиламиз:

$$\Phi^+(\zeta_0) = \Phi(\zeta_0) + \frac{1}{2} \varphi(\zeta_0), \quad \Phi^-(\zeta_0) = \Phi(\zeta_0) - \frac{1}{2} \varphi(\zeta_0). \quad (64)$$

(64) формулаларни биринчи марта 1873 йилда рус математиги Юлиан Васильевич Сохоцкий исбот қилган. Шунинг учун ҳам бу формулалар Сохоцкий номи билан юритилади.

(64) формулаларни айлриб ва қушиб, (64) га тенг кучли формулаларни чиқарамиз:

$$\begin{aligned}\Phi^+(\zeta_0) - \Phi^-(\zeta_0) &= \varphi(\zeta_0), \\ \Phi^+(\zeta_0) + \Phi^-(\zeta_0) &= 2\Phi(\zeta_0).\end{aligned}\quad (65)$$

10 § Гармоник функциялар

Фараз этайлик,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

функция G соҳада аналитик бўлсин. U ҳолда ҳосила олиш формуласига асосан:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (66)$$

Ўтган 9-§ дан маълумки, G соҳада аналитик бўлган $f(z)$ функция барча юқори тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга. (66) дан яна бир марта ҳосила олинса,

$$f''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - i \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (67)$$

келиб чиқади. Илгари айтилган сабабга мувофиқ ҳамма тартибли

$$\frac{\partial u}{\partial x^k}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots$$

хусусий ҳосилалар ҳам мавжуд ва узлуксиздир. (67) нинг икки томонидаги комплекс миқдорлар ўзаро тенг бўлгани учун уларнинг ҳақиқий қисмлари ўзаро ва мавҳум қисмлари ўзаро тенг бўлади:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ ва } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Ўнг томондаги ҳадларни чапга ўтказиб қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (68)$$

Буларнинг иккаласи ҳам бир типдаги дифференциал тенгламалардан иборат бўлгани учун биттасини, масалан, (68) ни олсак кифоя. Демак, $u(x, y)$ ва $v(x, y)$ функцияларнинг иккаласи ҳам (68) тенгламани қаноатлантиради. Юқоридаги (68) хусусий ҳосилалар иккинчи тартибли дифференциал тенглама бўлиб, Лаплас тенгламаси, Δ ни эса Лапласнинг дифференциал оператори деб аталади. Баён этилган мана шу фикрларимиздан гармоник функция тушунчаси келиб чиқади.

Таъриф. Агар ҳақиқий $u(x, y)$ функция G соҳада биринчи ва иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга

булиб, (68) Лаплас тенгламасини қаноатлантирса, $u(x, y)$ функция G соҳада гармоник функция дейилади.

Мана шу таърифдан ва юқоридаги мулоҳазаларимиздан кўринадики, биз қуйидаги теоремани исбот қилдик.

Теорема. Берилган G соҳада аналитик булган $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ функциянинг ҳақиқий ва мавҳум қисмлари шу соҳада гармоник функциялардир.

1-мисол. $u = \varphi(ax + by)$ кўринишга эга бўлган гармоник функция мавжудми, агар мавжуд бўлса, ўша топилсин (a, b — ҳақиқий ўзгармас сонлар).

Дастлаб $z = ax + by$ деб белгилаб оламиз. У ҳолда:

$$u = \varphi(z); \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = a\varphi'(z);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a\varphi''(z) \frac{\partial z}{\partial x} = a^2\varphi''(z); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(z) \frac{\partial z}{\partial y} = b\varphi'(z);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = b\varphi''(z) \frac{\partial z}{\partial y} = b^2\varphi''(z).$$

Чунки $\varphi(z)$ — бир аргументли мураккаб функция ва

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(ax + by) = a, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(ax + by) = b.$$

Энди юқоридаги иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларнинг қийматларини (68) Лаплас тенгламасига қўямиз. У ҳолда

$$\Delta u = (a^2 + b^2)\varphi''(z) = 0$$

бўлиб, a, b лар нолдан фарқли бўлгани учун $\varphi''(z) = 0$ бўлади. Сўнгги тенгламани ечсак,

$$\varphi'(z) = C, \quad \varphi(z) = Cz + B.$$

Энди, z ўрнига қиймати қўйилса,

$$\varphi(ax + by) = C(ax + by) + B$$

ҳосил бўлади. Демак, изланган гармоник функциянинг кўриниши шундан иборат экан.

2-мисол. $u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ кўринишга эга бўлган гармоник функция мавжуд бўлса, ўша топилсин.

$z = \frac{y}{x}$ бўлсин, у ҳолда $u = \varphi(z)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(z) \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(z) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2}\varphi'(z);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2}{x^4}\varphi''(z) + \frac{\partial y}{\partial x^3}\varphi'(z);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(z) \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(z) \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\varphi'(z); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2}\varphi''(z).$$

Буларни (68) га қўямиз, у ҳолда баъзи соддалаштиришлардан кейин ушбу

$$(x^2 + y^2)\varphi''(z) + 2xy\varphi'(z) = 0$$

оддий дифференциал тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламани ечиш учун $\varphi'(z) = \psi(z)$ деб белгилаб оламиз. Демак,

$$(x^2 + y^2)\psi'(z) + 2xy\psi(z) = 0$$

ёки

$$\frac{\psi'}{\psi} = -\frac{2xy}{x^2 + y^2} = -\frac{2\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2};$$

$z = \frac{y}{x}$ бўлгани сабабли

$$\frac{d\psi}{\psi} = -2\frac{zdz}{1+z^2}.$$

Бундан

$$\ln \psi = -\ln(1+z^2) + \ln C = \ln \frac{C}{1+z^2},$$

яъни

$$\psi = \frac{C}{1+z^2}.$$

Энди,

$$\psi = \varphi'(z) = \frac{C}{1+z^2}$$

тенгламадан

$$\varphi(z) = C \int \frac{dz}{1+z^2} + B = C \cdot \arctg z + B$$

ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, изланаётган гармоник функция ушбу

$$u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = C \cdot \arctg \frac{y}{x} + B$$

кўринишга эга экан, бунда C, B — ихтиёрий ўзгармас ҳақиқий сонлардир.

Қўшма гармоник функциялар. $u(x, y)$ ва $v(x, y)$ функциялар G соҳада гармоник бўлса ҳам, $u(x, y) + iv(x, y)$ функция G соҳада аналитик бўлмай қолиши мумкин. Агар $u(x, y)$ функция шу соҳада гармоник бўлса, $u + iv$ ни аналитик функцияга айлантирадиган $v(x, y)$ гармоник функцияни топиш учун қуйидаги

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Даламбер — Эйлер шартларидан фойдаланиш керак. Мана шу шартлар билан боғланган $u(x, y)$ ва $v(x, y)$ лар ўзаро қўшма гармоник функциялар дейилади.

Берилган $u(x, y)$ гармоник функцияга қўшма гармоник функцияни бир неча усул билан топиш мумкин.

Биринчи усул. Даламбер — Эйлер шартидан:

$$\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy. \quad (69)$$

Математик анализ курсидан маълумки,

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

ифода бирор $\Phi(x, y)$ функциянинг тўла дифференциалидан иборат бўлиши учун

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (70)$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир. Демак, (70) тенглик ўринли бўлса,

$$d\Phi(x, y) = M dx + N dy. \quad (71)$$

Мана шунга асосланиб, (69) нинг ўнг томонини тўла дифференциал эканлигини текширайлик.

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ ва } \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

$u(x, y)$ функция гармоник бўлгани учун охириги икки тенгликнинг ўнг томонлари ўзаро тенгдир. Шунга асосан (69) ни

$$dv(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

кўринишда ёзиш қонунийдир. Бундан ушбу

$$v(x, y) = \int -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

интегралга эга бўламиз. Сўнгги интеграл қиймати интеграллаш йулига боғлиқ бўлмагани учун уни бундай ёзиш мумкин:

$$v(x, y) = \int_{z_0}^z -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + C, \quad (72)$$

бунда z_0 берилган G соҳадаги қўзғалмас, $z = x + iy$ эса ўзгариувчи нуқта бўлиб, C — ихтиёрий ўзгармас сондир. Сўнгги тенгликда C иштирок этаётгани учун $u(x, y)$ га қўшма гармоник бўлган $v(x, y)$ функциялар чексиз кўп бўлиб, улар бир-биридан ўзгармас сон билан фарқ қилади, деган хулосага келамиз. C ни аниқлаб биргина $v(x, y)$ функцияни топиш учун масалада қўшимча шарт берилиши керак.

Худди шу усулда, агар $v(x, y)$ гармоник функция берилган бўлса, унга қўшма булган гармоник $u(x, y)$ функцияни қуйидагича топиш мумкин:

$$u(x, y) = \int_{z_0}^z \frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy + C. \quad (73)$$

Шундай қилиб қуйидаги теорема исбот қилинди.

Теорема. Бир боғламли G соҳада гармоник бўлган ихтиёрий функция шу соҳада аналитик булган функциянинг ҳақиқий ёки мавҳум қисми деб қабул қилиниши мумкин.

Агар G соҳа куп боғламли бўлса (72) даги функция ва $f(z) = -u + iv$ лар бир қийматли булмай қолишлари ҳам мумкин. Шу сабабли теоремани исбот қилишда G соҳани бир боғламли деб фараз қилинади. Мисол ишлашда (72) ва (73) ларга эътибор қилсак, $u(x, y)$ ёки $v(x, y)$ ни топиш учун функциянинг тула дифференциали бўйича ўзини топиш методини қўллаш талаб қилинишини кўрамиз

1-мисол. $f(z) = e^z$ функция ҳар қандай чекли G соҳада аналитик эканлиги маълум. Бу функциянинг ҳақиқий ва мавҳум қисмлари G соҳада гармоник эканлигини текшириш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам,

$$f(z) = u + iv = e^x - e^x (\cos y + i \sin y)$$

бўлиб,

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y.$$

Булардан:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos y (e^x)' = e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos y (e^x)' = e^x \cos y.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x (\cos y)' = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \cos y.$$

Мана шуларни (68) га қўйилса, тенгламани қаноатлантиради. Худди шу усулда

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -e^x \sin y$$

ларни ўзаро қўшсак, (68) ни қаноатлантирганини кўрамиз.

2-мисол. Шундай $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитик функция топилсинки, унинг мавҳум қисми

$$v(x, y) = x^4 - 8x^2y - 6x^2y^2 + 8xy^3 + y^4$$

дан иборат ва $f(0) = 0$ бўлсин.

Бунинг учун (73) формуладан фойдаланамиз:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 4x^3 - 24x^2y - 12xy^2 + 8y^3,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -8x^2 - 12x^2y + 24xy + 4y^3.$$

$$\begin{aligned} du(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy = \\ &= -(8x^3 + 12x^2y - 24xy^2 - 4y^3) dx - (4x^3 - 24x^2y - 12xy^2 + 8y^3) dy = \\ &= M(x, y) dx + N(x, y) dy. \end{aligned}$$

Бундаги:

$$M = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad N = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Энди $u(x, y)$ ни қуйидагича излаймиз:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int M dx + \varphi(y) = - \int (8x^3 + 12x^2y - 24xy^2 - 4y^3) dx + \\ &+ \varphi(y) = -(2x^4 + 4x^3y - 12x^2y^2 - 4xy^3) + \varphi(y). \end{aligned}$$

Ҳозирча бизга $\varphi(y)$ номаълум функциядир.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= -(4x^3 - 24x^2y - 12xy^2) + \varphi'(y) = N = \\ &= -(4x^3 - 24x^2y - 12xy^2 + 8y^3). \end{aligned}$$

Икки томондаги ўхшаш ҳадлар ўзаро йўқолиб,

$$\varphi'(y) = -8y^3, \text{ яъни } d\varphi(y) = -8y^3 dy$$

ҳосил бўлади. Бундан эса

$$\varphi(y) = -8 \int y^3 dy = -2y^4 + C$$

келиб чиқади. Демак,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -(2x^4 + 4x^3y - 12x^2y^2 - 4xy^3 + 2y^4) + C, \\ f(z) &= u + iv = -2(x^4 + 2x^3y - 6x^2y^2 - 2xy^3 + y^4) + \\ &+ i(x^4 - 8x^3y - 6x^2y^2 + 8xy^3 + y^4) + C. \end{aligned}$$

Бунинг орқали нфода қилиш мақсадида ўхшаш ҳадларни қуйидагича йиғиштираймиз:

$$\begin{aligned} f(z) &= x^4(-2 + i) + 4x^3y(-1 - 2i) - 6x^2y^2(-2 + i) - \\ &- 4xy^3(-1 - 2i) + y^4(-2 + i) + C. \end{aligned}$$

Аmmo

$$-1 - 2i = i^2 - 2i = i(-2 + i)$$

бўлгани учун

$$\begin{aligned} f(z) &= (-2 + i)[x^4 + 4x^3(iy) + 6x^2(iy)^2 + 4x(iy)^3 + y^4] + C = \\ &= (-2 + i)(x + iy)^4 + C = (-2 + i)z^4 + C. \end{aligned}$$

Берилган масаладаги $f(0) = 0$ шартдан фойдалансак,

$$0 = f(0) = (-2 + i) \cdot 0^4 + C,$$

яъни $C = 0$ бўлади. Шундай қилиб,

$$f(z) = (-2 + i)z^4.$$

3-мисол. Юқоридаги мисол қўйидаги шартларда ечилсин:

$$v(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 2x + 1}, \quad f(1) = 0.$$

Бунини ҳам олдинги усул билан ечамиз.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{4(x+1)y}{[(x+1)^2 + y^2]^2} = N, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2[(x+1)^2 - y^2]}{[(x+1)^2 + y^2]^2} = M.$$

У ҳолда

$$du(x, y) = M dx + N dy$$

дан $u(x, y)$ ни топиш осон:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int N dy + \varphi(x) = \int \frac{4(x+1)y}{[(x+1)^2 + y^2]^2} dy + \varphi(x) = \\ &= 4(x+1) \int \frac{y dy}{[(x+1)^2 + y^2]^2} + \varphi(x) = 4(x+1) \cdot I + \varphi(x). \end{aligned}$$

Бу интеграл у бўйича олинатгани учун x га боғлиқ кўпайтувчиларни интеграл белгиси ташқарисига чиқарамиз, вақтинча

$$x+1 = a$$

билан белгилаб олсак

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{y dy}{(a^2 + y^2)^2} = \frac{1}{2} \int (a^2 + y^2)^{-2} d(a^2 + y^2) = \\ &= -\frac{1}{2} (a^2 + y^2)^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Демак,

$$u(x, y) = -\frac{2(x+1)}{(x+1)^2 + y^2} + \varphi(x).$$

Энди $\varphi(x)$ ни топиш мақсадида икки томонини x бўйича дифференциалламиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2[(x+1)^2 - y^2]}{[(x+1)^2 + y^2]^2} + \varphi'(x) = M = \frac{2[(x+1)^2 - y^2]}{[(x+1)^2 + y^2]^2}.$$

Иккала томонидаги каср ўзаро йўқолиб,

$$\varphi'(x) = 0 \text{ дан } \varphi(x) = C$$

эгани келиб чиқади. Демак,

$$u(x, y) = -\frac{2(x+1)}{(x+1)^2 + y^2} + C.$$

Масаллада $f(1) = 0$ бўлгани учун $x = 1$, $y = 0$ бўлади. Шу сабабли

$$0 = u(1, 0) = -\frac{2 \cdot 2}{2^2} + C, \text{ яъни } C = 1$$

ҳосил бўлади.

Демак,

$$f(z) = u + iv = 1 - \frac{2(x+1)}{(x+1)^2 + y^2} + \frac{2iy}{(x+1)^2 + y^2}.$$

Ўнг томондаги касрларни умумий махражга келтириб, сўнгра

$$(x+1)^2 + y^2 = [(x+1) - iy][(x+1) + iy],$$

$$(x+1) + iy = (x+iy) + 1 = z + 1$$

эканлигини эътиборга олсак, қуйидаги натижага эришамиз:

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

Иккинчи усул. Берилган гармоник функцияга асосланиб унга қўшма гармоник функцияни топишнинг иккинчи усули билан танишайлик.

Агар (70) шарт бажарилса, математик анализ курсидан бизга маълумки, (71) даги номаълум $\Phi(x, y)$ функция қуйидаги формулалар орқали топилаверди:

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C \quad (74)$$

ки

$$\Phi(x, y) = \int_{y_0}^y N(x, y) dy + \int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + C. \quad (74')$$

Агар $M(x, y)$ ва $N(x, y)$ функциялар бутун текисликда узлуксиз бўлса, у ҳолда $x_0 = y_0 = 0$ деб олиш яна ҳам қулай бўлади.

Энди, агар $u(x, y)$ гармоник функция берилган бўлса, (74) на (74') формулаларга асосланиб, қўшма гармоник $v(x, y)$ функцияни қуйидагича топамиз. Маълумки,

$$\begin{aligned} dv(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = \\ &= -u'_y(x, y) dx + u'_x(x, y) dy = M dx + N dy. \end{aligned}$$

У ҳолда (74) га асосан

$$v(x, y) = - \int_{x_0}^x u'_y(x, y) dx + \int_{y_0}^y u'_x(x_0, y) dy + C \quad (75)$$

ёки (74') га асосан

$$v(x, y) = \int_{y_0}^y u'_x(x, y) dy - \int_{x_0}^x u'_y(x, y_0) dx + C. \quad (75')$$

Аксинча, агар $v(x, y)$ гармоник функция берилган бўлиб, унга қўшма $u(x, y)$ гармоник функцияни излаш керак бўлса, худди шу усулдан фойдаланилади, яъни

$$du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy =$$

$$= v'_y(x, y) dx - v'_x(x, y) dy = M dx + N dy$$

ифодадан (74) ва (74') ларга асосан қуйидагилар ҳосил қилинади:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x v'_y(x, y) dx - \int_{y_0}^y v'_x(x_0, y) dy + C, \quad (76)$$

ёки

$$u(x, y) = - \int_{y_0}^y v'_x(x, y) dy + \int_{x_0}^x v'_y(x, y_0) dx + C. \quad (76')$$

4-ми с ол. $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ га асосланиб унга қўшма гармоник бўлган $v(x, y)$ функция, демак, $f(z) = u + iv$ аналитик функция топилсин.

$$u'_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$u'_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Энди, (75) га мувофиқ, $x_0 = 0$ фараз этсак.

$$v(x, y) = \int_0^x \frac{2xy dx}{(x^2 + y^2)^2} + \int_{y_0}^y \frac{dy}{y^2} + C_1 =$$

$$= y \int_0^x (x^2 + y^2)^{-2} d(x^2 + y^2) - \frac{1}{y} \Big|_{y_0}^y + C_1 = \frac{y(x^2 + y^2)^{-1}}{-1} \Big|_0^y - \frac{1}{y} + \frac{1}{y_0} + C_1 =$$

$$= - \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y} + C = - \frac{y}{x^2 + y^2} + C, \quad C = C_1 + \frac{1}{y_0}.$$

Шуларга асосан

$$f(z) = u + iv = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{iy}{x^2 + y^2} + iC = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} + iC,$$

$$x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$$

бўлгани учун

$$f(z) = \frac{1}{x + iy} + iC = \frac{1}{z} + iC$$

Ихтиёрий ўзгармас C ни топиш учун қўшимча шарт, масалан, $f(i) = 0$ шарт берилган бўлиши керак. У вақтда

$$0 = f(i) = \frac{1}{i} + iC; \quad \frac{1}{i} = -i$$

ёки

$$i(C - 1) = 0, \quad C = 1.$$

Демак,

$$f(z) = \frac{1}{z} + i.$$

Учинчи усул. Аналитик функцияни, унинг ҳақиқий $u(x, y)$ ёки мавҳум $v(x, y)$ қисмига асосланиб, топилш учун яна битта усул бор. Унинг учун аналитик функциянинг қуйидаги хоссасидан фойдаланиш керак бўлади. Агар

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

аналитик функцияда $y = 0$ фараз этсак,

$$f(x) = u(x, 0) + iv(x, 0)$$

ҳосил бўлади. Энди, бу тенгликдаги x ўрнига z қўйсак,

$$f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0) \quad (77)$$

бўлиб, олдинги $f(z)$ функциянинг ўзи келиб чиқади, фақат унинг ўнг томони бошқа шакл олади: $u(z, 0)$ ва $v(z, 0)$.

5-мисол. $f(z) = z^2 - 3z + 1$ бўлсин. Бунини

$$f(x + iy) = (x + iy)^2 - 3(x + iy) + 1 = (x^2 - y^2 - 3x + 1) + i(2xy - 3y)$$

қўйишида ёзиб, $y = 0$ деб фараз этсак,

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

ҳосил бўлади. Энди x ўрнига z қўйсак, берилган

$$f(z) = z^2 - 3z + 1$$

функция келиб чиқади.

Мана шу (77) тенгликдан фойдаланиб, (75) ва (76) лардан қуйидагиларни ҳосил қилиш қийин эмас:

$$f(x) = u(x, 0) + iv(x, 0) = u(x, 0) - i \int u'_y(x, 0) dx + iC, \quad (78)$$

$$f(x) = \int v'_y(x, 0) dx + iv(x, 0) + C \quad (78')$$

Агар $u(x, y)$ функция берилган бўлиб, $f(x)$ ни топилш лозим бўлса, (78) формуладан фойдаланамиз. Агар $v(x, y)$ берилган бўлса, $f(x)$ ни (78') орқали топилшга тўғри келади.

$f(x)$ функция аниқлангандан сўнг, (77) га асосан, x ўрнига z ни қўйиш киёя.

6-мисол. $u(x, y) = e^x \cos y \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ га асосан $f(z)$ аналитик функция топилсин. (78) дан фойдаланамиз:

$$u(x, 0) = e^x \cos 0 \cdot \ln \sqrt{x^2} = e^x \ln x.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u'_y(x, y) = e^x \left(-\sin y \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \cos y \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \right),$$

бунида $y = 0$ фараз этилса,

$$u'_y(x, 0) = 0.$$

У ҳолда, (78) дан:

$$f(x) = e^x \ln x + iC.$$

Энди x ўрнига z қўйилса, изланаётган функция

$$f(z) = e^z \ln z + iC$$

келиб чиқади.

7-мисол. $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$ га асосан $f(z)$ аналитик функция топилсин.

Бунинг учун (78') дан фойдаланамиз:

$$v'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2} - 2; \quad v(x, 0) = 2 \ln x + x, \quad v'_y(x, 0) = -2$$

У ҳолда

$$f(z) = \int v'_y(x, 0) dx + i v(x, 0) + C = -2x + i(x + 2 \ln x) + C = -2i \ln x - (2 - i)x + C.$$

Энди x ўрнига z ни қўйсак, биз излаган аналитик функция ҳосил бўлади:

$$f(z) = 2i \ln |z| - (2 - i)z + C.$$

Гармоник функциянинг айрим хоссалари

Теорема (максимум ва минимум ҳақида). Агар $u(x, y)$ функция G соҳада гармоник бўлиб, айнан узгармас сонга тенг бўлмаса, u ҳолда бу функция G нинг ички нуқталарида максимумга ҳам, минимумга ҳам эга бўлмайди.

Исбот. Теоремани максимум учун исбот қилинса етарли, чунки $u(x, y)$ гармоник функциянинг минимум нуқтаси $-u(x, y)$ гармоник функция учун максимум нуқта бўлади.

Теорема шартлари бажарилганда $u(x, y)$ функция G соҳанинг бирор $z_0 = x_0 + iy_0$ нуқтасида максимум қийматга эришсин, дейлик. K —маркази z_0 нуқтада бўлиб, G соҳада ётувчи доира бўлсин. K доирада $u(x, y)$ га қўшма бўлган $v(x, y)$ гармоник функция тузамиз.

K доира бир боғламли соҳа бўлгани учун $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитик функция K да бир қийматли бўлади (бунинг учун $v(x, y)$ ифодасига кирган узгармас сонни аниқ қилиб танлаб олиш керак (масалан, $v(x_0, y_0) = 0$ шартнинг бажарилишини талаб қилиш мумкин). $e^{f(z)}$ функция ҳам K да бир қийматли ва аналитик функция бўлади ва унинг модули $|e^{u+iv}| = e^u$ фаразимизга кўра ички нуқтада максимумга эришади. Бу эса 8-§ да исботланган аналитик функция модулининг максимум принцига қарама-қаршдир. Шу билан теорема исботланди.

1-натижа. G соҳада гармоник ва ёпиқ $\bar{G}$ соҳада узлуксиз булган $u(x, y)$ функция узининг энг катта ва энг кичик қийматларига соҳанинг чегаравий нуқталарида эришади. Бунга асосан, агар шундай функция G соҳанинг чегарасида ўз қийматини узгартирмаса, u ҳолда унинг ёпиқ $\bar{G}$ соҳадаги барча энг катта ва энг кичик қийматлари бир хил бўлиб уст-ма-уст тушади демак, бу функция G соҳада узгармас бўлади.

2-натижа. Агар икки $u_1(x, y)$ ва $u_2(x, y)$ функция G соҳада гармоник ва ёниқ $\bar{G}$ соҳада узлуксиз бўлиб, уларнинг G соҳанинг барча чегара нуқталардаги қийматлари бир-бирига тенг бўлса, у ҳолда бу функциялар G соҳада ўзаро тенг бўлади.

Ҳақиқатан, бу функцияларнинг айирмаси G да узлуксиз ҳамда $\bar{G}$ да гармоник бўлиб, барча чегара нуқталарда нолга тенг бўлади. Демак, 1-натижага асосан, бу айирма барча G соҳада нолга тенг.

Теорема. Агар $u(z)^1$ функция бир боғламли G соҳада гармоник бўлса ва қийматлари $\bar{G}$ да ётувчи $z = \varphi(\zeta)$ функция бирор D соҳада аналитик бўлса, у ҳолда $u[\varphi(\zeta)] = U(\zeta)$ мураккаб функция D да гармоник функция бўлади.

Исбот қилиш учун ҳақиқий қисми G да $u(z)$ га тенг бўлган $f(z)$ (кўп қийматли булиши ҳам мумкин) функция тузамиз, яъни $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$. Равшанки, $F(\zeta) = f[\varphi(\zeta)]$ функция D да аналитик, демак, $U(\zeta) = \operatorname{Re} f[\varphi(\zeta)]$ D да гармоник функция бўлади.

Дирихле масаласи. Пуассон ва Шварц интеграллари

Биз бу пунктда аввало гармоник функцияларнинг муҳим татбиқидан иборат бўлган Дирихле масаласини кураимиз.

G соҳа чегарасида аниқланган ва узлуксиз $\varphi(\zeta)$ функция берилган бўлсин. G соҳада гармоник ва ёниқ $\bar{G}$ соҳада узлуксиз бўлган шундай $u(z)$ функция топилсинки, бу функция G нинг барча чегаравий нуқталарида берилган $\varphi(\zeta)$ қийматларни қабул қилсин.

Масалан, иссиқлик майдонининг температурасини (вақтга боғлиқ бўлмаган ҳолда) ёки бирор соҳада берилган температурада электростатик майдоннинг потенциалини топиш ва шунга ўхшаш бир қанча масалалар Дирихле масаласига келади.

Аввалги пунктдаги 2-натижадан Дирихле² масаласининг ечими ягоналигига доир қуйидаги теорема келиб чиқади:

Теорема. Дирихле масаласи учун биттадан ортиқ ечим мавжуд эмас.

Биз Дирихле масаласини G соҳа R радиусли донрадан иборат бўлган ҳол учун ечамиз: ёзишни соддалаштириш мақсадида доиранинг маркази координаталар бошида жойлашган, деб фараз этамиз. Донра айланасининг тенгламаси $|\zeta| = R$ бўлади. Агар қутб координаталари системасига ўтиб, қутб бурчакни α деб белгиласак, $\zeta = Re^{i\alpha}$ бўлиб,

$$\varphi(\zeta) = \varphi(Re^{i\alpha}) = \varphi(z), \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi$$

ва $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$ бўлади.

¹ Қўлайлик учун $u(x, y)$ ўрнига $u(z)$ ёзаямиз.

² Лежен Дирихле (1805–1859) – немис математиги.

Бу масалани ечишдан олдин, гармоник функциянинг қиймати доира айланасида маълум бўлса, бу функцияни доиранинг ички нуқталарида қандай аниқлаш мумкинлигини кўриб чиқамиз. $f(z)$ функция R радиусли доирада ва унинг C — айланасида аналитик бўлсин дейлик. C нинг ичида ёгувчи нхтиёрий $z = re^{i\theta}$ нуқта учун, Коши формуласига асосан, қуйидагини ёза оламиз:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\alpha}) \frac{Re^{i\alpha}}{Re^{i\alpha} - re^{i\theta}} d\alpha. \quad (79)$$

C айланага нисбатан z нуқтага симметрик бўлган z^* нуқтани оламиз:

$$|z^*| = \frac{R^2}{|z|} = \frac{R^2}{r}, \quad z^* = \frac{R^2}{r} e^{i\theta}.$$

z^* нуқта C дан ташқарида ётганлиги учун $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z^*}$ функция C айланада ва унинг ичида аналитик бўлади, шунинг учун Коши теоремасига асосан:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z^*} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\alpha}) Re^{i\alpha} d\alpha}{Re^{i\alpha} - \frac{R^2}{r} e^{i\theta}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\alpha}) \frac{re^{i\alpha}}{re^{i\alpha} - Re^{i\theta}} d\alpha. \end{aligned} \quad (80)$$

(79) тенгликдан (80) тенгликни айирамиз:

$$\begin{aligned} f(z) - f(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\alpha}) e^{i\alpha} \left(\frac{R}{Re^{i\alpha} - re^{i\theta}} - \frac{r}{re^{i\alpha} - Re^{i\theta}} \right) d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\alpha}) \frac{(R^2 - r^2)e^{i(\theta + \alpha)}}{(R^2 + r^2)e^{i(\theta + \alpha)} - Rr(e^{2i\theta} + e^{2i\alpha})} d\alpha. \end{aligned}$$

Охирги тенгликдаги интеграл ишораси остидаги касрнинг сурат ва махражини $e^{i(\theta + \alpha)}$ га бўлиб, ушбу

$$e^{i(\theta - \alpha)} + e^{-i(\theta - \alpha)} = 2 \cos(\theta - \alpha)$$

тенгликка асосан қуйидагига эришамиз:

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\alpha}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha. \quad (81)$$

Бу формуладан

$$f(re^{i\theta}) = u(r, \theta) + iv(r, \theta), \quad f(Re^{i\alpha}) = u(R, \alpha) + iv(R, \alpha)$$

булгани учун чап ва унг томондаги ҳақиқий қисмларни тенглаб, қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \alpha) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha. \quad (82)$$

Мавҳум қисм v учун ҳам худди шу кўринишдаги формула ҳосил бўлади. Аналитик функциянинг ҳақиқий ва мавҳум қисмлари гармоник функциялардан иборат булгани учун (82) формула ёрдами билан ихтиёрий гармоник функциянинг доира ичидаги қиймати айланадаги қийматлари орқали ифодаланади. Бундан шундай хулоса келиб чиқадики, агар Дирихле масаласидаги берилган $\varphi(\alpha)$ функция доирада изланаётган бирор $u(r, \theta)$ гармоник функциянинг айланадаги $u(R, \alpha)$ қийматига тенг бўлса, (82) формула Дирихле масаласининг ечимидан иборат бўлади. (82) формуланинг унг томонидаги интегрални Пуассон¹ интеграли дейилади.

(81) формулада $r=0$ десак, ва $u(r, \theta)$ функциянинг $r=0$ даги қийматини $u(0)$ орқали белгилаб олсак, ушбу формулага эга буламиз:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \alpha) d\alpha. \quad (83)$$

Бу эса ўрта қиймат ҳақидаги теоремадир, яъни гармоник функциянинг доира марказидаги қиймати унинг айланадаги қийматларининг ўрта арифметик қийматига тенг.

(82) формулада $u(R, \alpha) = 1$ бўлса, аввалги пунктдаги 1-натижага асосан $u(r, \theta) = 1$ бўлади, яъни

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha. \quad (84)$$

Энди $\varphi(\alpha)$ — олдиндан берилган, $[0, 2\pi]$ сегментда узлуксиз булган α ҳақиқий ўзгарувчининг функцияси бўлсин. Бу функция учун Пуассон интегралини ёзамиз:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha. \quad (85)$$

Бу интегралнинг биринчида, r ва α нинг гармоник функцияси булишини ва иккинчидан доира ичидаги $z = re^{i\theta}$ нуқта айланада ётувчи ихтиёрий $\zeta = Re^{i\alpha}$ нуқтага интилганда $\varphi(\alpha)$ лимитга ингилишини кўрсатамиз: R ўзгармас булгани учун (85) интеграл r ва θ параметрларнинг функцияси бўлиб, θ га кўра даврийдир (даври 2π). Ушбу

$$R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha) > R^2 - 2Rr + r^2 = (R - r)^2$$

¹ Пуассон Симеон (1761 — 1841) — француз математиги ва физиги.

тенгликни эътиборга олиб, ушбу функцияни текшираимиз:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta) \frac{\zeta+z}{\zeta-z} d\alpha + iA, \quad (91)$$

бундаги A — ҳақиқий ўзгармас. Бу функция Коши типигади интегралга оид теоремага асосан $|z| < R$ доирада аналитик функция бўлади. (91) формуланинг ҳақиқий қисми тузилиши бўйича Пуассон интегралидан иборат. Бундан, дарҳол (91) формула юқоридаги масаланинг ечими эканлиги келиб чиқади.

(91) формулани Шварц формуласи ёки интегралли дейилади. Шварц интегралидаги ўзгармас A ни топиш учун $z = 0$ деб, ушбу ифодани ҳосил қиламиз:

$$f(0) = u(0) + iv(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta) d\alpha + iA.$$

Ўрта қиймат ҳақидаги теоремага асосан ўнг томондаги интеграл $u(0)$ га тенг, демак, $A = v(0)$ бўлиб, Шварц интегралли қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta) \frac{\zeta+z}{\zeta-z} d\alpha + iv(0). \quad (92)$$

Ярим текислик учун Дирихле масаласи. Ҳақиқий ўқда узлуксиз $u(t)$ функция берилган бўлсин. Юқори ярим текисликда гармоник булган ва ҳақиқий ўқда олдиндан берилган қийматларни қабул қилувчи $u(\zeta)$ функциянинг z нуқтадаги қийматини топиш учун юқори ярим текислик $\text{Im} \zeta > 0$ ни $|\omega| < 1$ доирага конформ акслантираимиз:

$$\omega = \frac{\zeta - z}{\zeta - \bar{z}} \quad \left(\zeta = \frac{z - \omega \bar{z}}{1 - \omega} \right)$$

$u[\zeta(\omega)] = U(\omega)$ деб белгилаб оламиз. Юқоридаги акслантиришда z нуқта $\omega = 0$ нуқтага ўтгани учун ўрта қиймат ҳақидаги теоремага асосан:

$$U(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\omega) d\alpha, \quad (93)$$

бунда α — айланадаги нуқтанинг аргументи,

$$e^{i\alpha} = \frac{t-z}{t-\bar{z}},$$

Охирги тенгликни дифференциаллаб, қуйидагини топамиз:

$$e^{i\alpha} dz = \frac{2y}{(t-z)^2} dt, \text{ бундан: } dz = \frac{2ydt}{(t-z)(t-\bar{z})} = \frac{2ydt}{(t-z)^2 + y^2}.$$

(93) формулада эски z ва t ўзгарувчиларга қайтиб, юқори ярим текисликдаги Пуассон интегралини ҳосил қиламиз:

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \frac{y dt}{(t-x)^2 + y^2}. \quad (94)$$

Равшанки,

$$\frac{y}{(t-x)^2 + y^2} = \operatorname{Re} \frac{1}{i(t-z)}.$$

Бундан фойдаланиб, юқори ярим текислик учун қуйидаги Шварц интегрални ҳам ёзиш мумкин:

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \frac{dt}{t-z} + iA, \quad (95)$$

бунда A — ҳақиқий ўзгармас, Шу нарсани уқтириб ўтиш керакки, (94) интеграл чегараланган $u(t)$ функциялар учун ҳам яқинлашувчи бўлади, лекин (95) интегралнинг яқинлашувчи бўлиши учун $u(t)$ нинг чегараланганлиги етарли бўлмайди (чунки (95) интеграл ишораси остидаги функциянинг мавҳум қисмидан олинган интеграл (94) интегралга нисбатан суст яқинлашади). Бу интегралнинг яқинлашувчи бўлиши учун, масалан, $u(t)$ функциянинг $|t| \rightarrow \infty$ да нолга $\frac{1}{|t|^\mu}$ функцияга нисбатан секин интилмаслиги етарлидир, яъни $|u(t)| < \frac{\text{const}}{|t|^\mu}$, бундаги $\mu > 0$ — ихтиёрий ўзгармас сон.

Мисол. Юқори ярим текисликда гармоник бўлган ҳамда ҳақиқий ўқнинг (α, β) кесмасида 1 га, бу ўқнинг қолган қисмида эса 0 га тенг функция топилсин.

Изланаётган функцияни (94) формулага асосан дарҳол топа оламиз:

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{y dt}{(t-x)^2 + y^2} = \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arc tg} \frac{\beta-x}{y} - \operatorname{arc tg} \frac{\alpha-x}{y} \right).$$

Агар $z = \alpha$ ва $z = \beta$ векторларнинг ҳақиқий ўқ билан ташкил қилган бурчакнинг φ_α ва φ_β орқали белгиласак, охириги формулани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$u(z) = \frac{\varphi_\beta - \varphi_\alpha}{\pi} = \frac{\omega}{\pi} \quad (96)$$

($\varphi_\beta = \varphi_\alpha + \omega$) экани 82-чизмадан кўринадиган.

тенгсизликдан равшанки, $0 \leq r < R$ бўлганда

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} \quad (86)$$

ифоданинг r ва θ га нисбатан ихтиёрий тартибдаги ҳосиласи ушба параметрларнинг узлуксиз функцияси эканлиги келиб чиқади. Шунга кура (85) интегрални r ва θ бўйича интеграл ишораси остида дифференциаллаш мумкин Лаплас операторида қутб координаталарига ўтиб, (86) функциянинг Лаплас тенгламасини қаноатлантиришини текшириб куриш қийин эмас. Буни биз ўқувчига тавсия қиламиз. Шундай қилиб, (85) интеграл $r < R$ да гармоник функциядир, буни биз $u(r, \theta)$ орқали белгилаб оламиз:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha. \quad (87)$$

Энди $z = re^{i\theta}$ ($r < R$) нуқта C айланада ётувчи ихтиёрий $z_0 = Re^{i\alpha_0}$ нуқтага интилганда $u(r, \theta)$ функция $\varphi(\alpha_0)$ лимитга интилишини кўрсатиш керак. Умумиятликини чегараламай, $\alpha_0 = 0$ дейиш мумкин, чунки α қутб бурчакнинг қиймати фақат қутб ўқи йўналишининг танлаб олинишига боғлиқ бўлгани учун, қутб ўқни ихтиёрий $z_0 \in C$ нуқтадан ўтказишимиз мумкин. Шундай қилиб,

$$\lim_{r \rightarrow R, \theta \rightarrow 0} [u(r, 0) - \varphi(0)] = 0$$

тенгликни исботлаш керак.

(84) формуладан фойдаланиб, $\varphi(0)$ ни бундай ёзиб оламиз:

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha. \quad (88)$$

(87) дан (88) ни айирамиз:

$$u(r, \theta) - \varphi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi(\alpha) - \varphi(0)] \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha. \quad (89)$$

ε — ихтиёрий мусбат сон бўлсин. $\varphi(\alpha)$ функциянинг $\alpha = 0$ нуқтадаги узлуксизлигидан фойдаланиб, $\delta(\varepsilon) > 0$ ни шундай тантаймизки, $|\alpha| < 2\delta(\varepsilon)$ бўлганда

$$|\varphi(\alpha) - \varphi(0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

тенгсизлик бажарилсин. Сўнгра нуқталари $|\alpha| < 2\delta(\varepsilon)$ тенгсизлигини қаноатлантирувчи C айланынинг ёйини γ_ε билан, қолган қисминини Γ_ε билан белгилаб оламиз. У ҳолда (89) дан.

$$|u(r, \theta) - \varphi(0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\varepsilon} \right| < \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\varepsilon} \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \right| \quad (90)$$

(86) функциянинг мусбат эканлигини эътиборга олиб, (90) тенгсизликдаги γ_a бўйича олинган интегрални баҳолаймиз:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_a}^{\gamma_a} \right| &< \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_a}^{\gamma_a} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$\varphi(\alpha)$ функция $[0, 2\pi]$ сегментда узлуксиз бўлгани учун $\varphi(\alpha) - \varphi(0)$ айирма шу сегментда чегараланган бўлади:

$$|\varphi(\alpha) - \varphi(0)| < M.$$

(90) даги Γ_a бўйича олинган интегрални ҳам етарли кичик қилиб олиш мумкинлигини кўрсатиш учун (r, θ) нуқтани

$$|\theta| < \delta(\varepsilon)$$

шартни бажариладиган қилиб оламиз (z нуқта z_0 га етарли яқин қилиб олиinsa, бу шарг бажарилади).

Γ_a ёйнинг нуқталарида қутб бурчак $\alpha(2\delta(\varepsilon), 2\pi - 2\delta(\varepsilon))$ интервалга тегишли бўлгани сабабли, шу нуқталар учун $(\alpha - \theta)(\delta(\varepsilon), 2\pi - \delta(\varepsilon))$ интервалга тегишли бўлади. Шунинг учун қуйидаги тенгсизликлар бажарилади:

$$\begin{aligned} \cos(\theta - \alpha) &< \cos \delta(\varepsilon); \quad \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} < \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \delta(\varepsilon)} \\ \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_a} \right| &< M \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \delta(\varepsilon)} \frac{1}{2} \int_{\Gamma_a} d\alpha < \\ &< M \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \delta(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Бу тенгсизликнинг унг томони $r \rightarrow R$ да нолга интилади, дечак, агар $R - r < \delta'(\varepsilon)$ булса,

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_a} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Демак, $|\theta| < \delta(\varepsilon)$ ва $R - r < \delta'(\varepsilon)$ бўлганда

$$|u(r, \theta) - \varphi(0)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади.

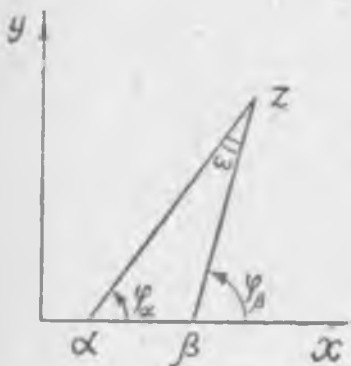
Шундай қилиб, доира учун Дирихле масаласининг ечими (87) формула орқали ифодаланар экан.

Шварц интеграл. Агар $|z| < R$ доирада бирор $f(z)$ аналитик функцияни топиш талаб қилинса, бу масалани ҳал қилиш учун $f(z)$ ҳақиқий қисмининг доира айланасида берилган $u(\zeta)$ қийматларининг маълум бўлиши етарлидир. Ҳақиқатан,

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} = \operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}, \quad \zeta = Re^{i\alpha}, \quad z = re^{i\theta}$$

Шундай қилиб, z нуқтадан a_1 кесма ω бурчак остида кўринса, $u(z)$ функция шу ω бурчакни π га бўлинганига тенг экан. Бу мисолда Шварц формуласини ҳам қўллаш мумкин:

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{a_1}^{a_2} \frac{dt}{t-z} = \frac{1}{\pi i} \ln \frac{a_2-z}{a_1-z}. \quad (97)$$



82-чизма.

Энди ҳақиқий ўқнинг $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($-\infty < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \infty$) нуқталари берилган бўлсин.

Юқори ярим текисликда гармоник бўлган ва $(-\infty, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_n, \infty)$ кесмаларда мос равишда узгармас $u_0, u_1, \dots, u_n$ қийматларини қабул қилувчи $u(z)$ функция топилсин. Бу масала (96) формулани қўллаш натижа-сида дарҳол ечилади:

$$u(z) = \frac{\varphi_1 u_0}{\pi} + \frac{u_1}{\pi} (\varphi_2 - \varphi_1) + \dots + \frac{u_n}{\pi} (\pi - \varphi_n)$$

ёки

$$u(z) = \frac{\varphi_1}{\pi} (u_0 - u_1) + \frac{\varphi_2}{\pi} (u_1 - u_2) + \dots + \frac{\varphi_n}{\pi} (u_{n-1} - u_n) + u_n. \quad (98)$$

М а ш қ л а р

1. Ушбу

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

интеграл ҳисоблансин, бунда Γ чизиқ ярим айлана бўлиб, $|z|=1, \sqrt{z}=1, y>0$.

2. S юзни ўраб олган содда ёпиқ чизиқ Γ дан иборат бўлсин дейлик. Қуйидаги тенгликнинг туғрилиги исбот қилинсин:

$$\oint_{\Gamma} x dz = iS.$$

3. Ушбу

$$\int y dz$$

интеграл қуйида кўрсатилган йўллар бўйича ҳисоблансин:

- $z=2+i$ нуқтанинг радиус-вектори бўйлаб;
- $|z|=1$ ярим айлана бўйлаб, $0 < \arg z < \pi$ (йўлнинг бош нуқтаси $z=1$ да);
- $|z-a|=R$ айлана бўйлаб.

4. Ушбу

$$\int |z| dz$$

интеграл қуйида берилган йўллар бўйича ҳисоблансин:

а) $|z| = 1$ ярим айлана бўйлаб, $0 < \arg z < \pi$ (йўлнинг боши $z = 1$ нуқтада);

б) $|z| = 1$ айлана бўйича.

5. Ушбу

$$\int |z| \bar{z} dz$$

интеграл ҳисоблансин, бунда Γ чизиқ $|z|$ айлананинг юқори ярим бўлагидан ва $-1 < x < 1$, $y = 0$ кесмадан иборат.

6. Ушбу

$$\oint \operatorname{Ln} z dz$$

интеграл ҳисоблансин, бунда C — бирлик айлана ва $\operatorname{Ln} i = \frac{\pi i}{2}$.

7. Ушбу

$$\oint \frac{dz}{z^2 + 9}$$

интеграл ҳисоблансин, бунда C — радиуси $R = 2$ га тенг ва маркази $(-2i)$ нуқтага жойлашган айлана.

8. Ушбу

$$\oint \frac{dz}{(z^2 + 9)^2}$$

интеграл ҳисоблансин, бунда C — радиуси $R = 2$ га тенг ва маркази $2i$ нуқтага жойлашган айлана.

9. Бундан олдинги мисолдаги C айлана маркази $(-2i)$ нуқтага жойлашган бўлса, интегралнинг қиймати нимага тенг бўлади?

10. Ушбу

$$\oint \frac{e^z dz}{(z + 2)^4}$$

интеграл ҳисоблансин, бундаги Γ чизиқ (-2) нуқтани бир марта ўраб олган содда ёпиқ чизиқ.

11. Ушбу

$$\oint \frac{dz}{(z - 1)^2(z + 1)^3}$$

интеграл ҳисоблансин, бунда C — айлана, унинг маркази 1 нуқтада ва $1 < R < 2$.

12. Бундан олдинги мисолда $1 < R < 2$ ва айлана маркази (-1) нуқтага жойлашган бўлса, интеграл қандай ҳисобланади?

13. Шундай $f(z) = u + iv$ аналитик функция топилсинки, унинг ҳақиқий қисми

$$u = x^2 - y^2$$

дан иборат бўлиб, $f(0) = l$ шартин қаноатлантирсин.

Қуйидаги қўринишга эга бўлган гармоник функциялар топилсин:

$$14. u = \varphi(xy); \quad 15. u = \varphi(x^2 + y^2); \quad 16. u = \varphi\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right);$$

$$17. u = \varphi(x + \sqrt{x^2 + y^2});$$

$$18. u = \varphi(x^2 + y^2) \text{ қўринишга эга бўлган гармоник функция мавжудми?}$$

Қуйида берилган гармоник функцияларга қўшма бўлган гармоник функциялар топилсин:

$$19. u(x, y) = x^2 - y^2 + x, \quad 0 < |z| < \infty;$$

$$20. u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad 0 < |z| < \infty;$$

$$21. u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2).$$

Қуйидаги мисолларда берилган ҳақиқий ёки мавҳум қисмга асосланиб $f(z) = u + iv$ аналитик функция топилсин:

$$22. u = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$23. u = e^x(x \cos y - y \sin y) + 2 \sin x \cdot \operatorname{sh} y + x^2 - 3xy^2 + y;$$

$$24. v = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2 + y^2)};$$

$$25. v = x + y - 3; \quad 26. v = x^2 - y^2 + 2;$$

$$27. u = e^x(x \cos y - y \sin y) - \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

УБОБ

КОМПЛЕКС ҲАДЛИ ҚАТОРЛАР

1- §. Сонли қаторлар

Ҳадлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган қаторлар математик анализда чуқур текширилади. Биз ҳадлари комплекс сонлардан тузилган ушбу

$$z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} + z_n + \dots \quad (1)$$

қўринишдаги қаторлар билан танишиб ўтамиз. Бу қатордаги ҳар бир $z_n = x_n + iy_n$ ҳад ўзгармас сондан иборат бўлиб, x_n , y_n лар ҳақиқий сонлардир.

(1) қаторнинг хусусий йигиндиларини тузамиз:

$$\begin{aligned} s_1 &= z_1, \\ s_2 &= z_1 + z_2, \\ &\dots \\ s_n &= z_1 + z_2 + \dots + z_n, \\ &\dots \end{aligned} \quad (2)$$

Мана шу хусусий йигиндиларнинг

$$s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$$

кетма-кетлигига асосланиб (1) қаторнинг яқинлашишига таъриф бериш мумкин (II боб, 8-§ га қаранг).

Таъриф. Агар n чексизликка интилганда (2) кетма-кетлик бирор чекли s лимитга интилса, яъни (2) кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (1) қатор яқинлашувчи, акс ҳолда узоқлашувчи дейилади.

Демак, таърифга кўра,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

(s —аниқ сон) бўлганда (1) қатор яқинлашувчи бўлиб, s сон қаторнинг йигиндиси дейилади:

$$s = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots$$

Агар (2) кетма-кетлик ∞ га интилса ёки ҳеч қандай лимитга интилмаса, (1) қатор узоқлашувчи бўлиб, унинг йигиндиси ҳақида сўзлаш маъносиздир.

Энди, s_n йигиндини бошқа кўринишга келтириб ёзамиз:

$$\begin{aligned} s_n &= z_1 + z_2 + \dots + z_n = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) + \dots + (x_n + \\ &+ iy_n) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + i(y_1 + y_2 + \dots + y_n) = \sigma_n + i\tau_n, \end{aligned}$$

бунда

$$\sigma_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

$$\tau_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n.$$

Шу сабабли (1) дан қуйидаги қаторлар келиб чиқади:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots, \quad (3)$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n + \dots \quad (4)$$

Буларнинг хусусий йигиндиларидан мос равишда ушбу кетма-кетликларни ҳосил қилиш мумкин:

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots, \quad (5)$$

$$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots \quad (6)$$

Юқоридаги таърифга кўра, агар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma \text{ ва } \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau \quad (7)$$

(σ , τ —аниқ сонлар) бўлса, (3) ва (4) қаторларнинг иккаласи ҳам яқинлашувчи бўлади.

Теорема. Агар ҳадлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган (3) ва (4) қаторлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда комплекс сонлардан тузилган (1) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади ва аксинча.

Исбот. Фараз қилайлик, (3) ва (4) қаторларнинг иккаласи ҳам яқинлашувчи, яъни (7) лимитлар мавжуд бўлсин. У ҳолда лимитларнинг хоссасига кўра:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma_n + i\tau_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \sigma + i\tau = s,$$

бунда $s = \sigma + i\tau$ аниқ сон бўлгани учун, таърифга кўра яқинлашувчидир. Аксинча s аниқ сон бўлса, σ ва τ ҳам аниқ сон бўлади.

Мана шу теоремага асосан, агар (1) қаторнинг яқинлашишини текширмоқчи бўлсак, унинг ўрнига (3) ва (4) қаторларнинг яқинлашишини текшириш kifоя. Сўнгги қаторларнинг ҳадлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлгани учун уларнинг яқинлашиши ёки узоқлашишини математик анализ курсида курсатилган аломатлар ёрдами билан текширамыз. Мисол учун Даламбер ёки Коши аломатларидан ва бошқа аломатлардан фойдаланиш мумкин.

Энди, (1) қатор ҳадларнинг модулларидан қуйидаги қаторларни тузамиз:

$$|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots, \quad (8)$$

бунда

$$|z_n| = |x_n + iy_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}. \quad (9)$$

Теорема. Агар (8) қатор яқинлашувчи бўлса, (1) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

Исбот. (8) қатор яқинлашувчи бўлсин дейлик, (9) га асосан:

$$|x_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |z_n|$$

ла

$$|y_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |z_n|$$

бўлгани учун

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| + \dots$$

ва

$$|y_1| + |y_2| + \dots + |y_n| + \dots$$

қаторларнинг ҳар бир ҳади (8) нинг мос ҳадларидан кичик. Шунга биноан сўнгги икки қатор яқинлашувчидир. Иккинчи томондан, бу қаторлар (3) ва (4) қатор ҳадларнинг абсолют қийматларидан тузилган бўлгани учун (3) ва (4) қатор абсолют

яқинлашувчи бўлади. У ҳолда олдинги теоремага асосан (1) қатор яқинлашувчидир. Шу билан теорема исбот қилинди. Бунга тескари теорема умуман нотўғри. Агар (8) қатор яқинлашса (1) қатор абсолют яқинлашувчи дейилади. Бундай қаторлар тажрибада кўп ишлатилади. Агар (1) қатор яқинлашувчи, лекин (8) қатор узоқлашувчи бўлса, (1) қатор шартли яқинлашувчи қатор дейилади.

1-мисол. Ушбу

$$1 + a + a^2 + \dots + a^n + \dots$$

қаторнинг хусусий йиғиндиси

$$s_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{1 - a^n}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} - \frac{a^n}{1 - a}$$

дан иборат. Бу қаторда a —ҳар қандай комплекс сон.

Агар $|a| < 1$ бўлса, $|a^n| = |a|^n$ сон, n катталашishi билан нолга интилади, яъни $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$. Аксинча, агар $|a| > 1$ бўлса, a^n чексизликка интилади. Демак,

$$|a| < 1 \text{ бўлганда } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1 - a} = S,$$

$$|a| > 1 \text{ бўлганда } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty,$$

яъни биринчи ҳолда қатор абсолют яқинлашувчи ва йиғиндиси $s = \frac{1}{1 - a}$ дан иборат бўлиб, иккинчи ҳолда қатор узоқлашувчидир.

Агар $|a| = 1$ бўлса, қатор яна узоқлашувчи бўлади, чунки s_n аниқ сонга интилмайди.

2-мисол. Ушбу

$$(1 - t) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}t\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}t\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}t\right) + \dots$$

қаторнинг яқинлашishi текширилсин, бунда $n = 0, 1, 2, \dots$.

Дастлаб қаторнинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларидан тузилган қаторларни ёзиб оламиз:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

ва

$$-1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \dots - \frac{1}{3^n} \dots$$

Буларнинг ҳар бири геометрик прогрессия бўлиб, махражлари $|q| < 1$ дан иборатдир. Шу сабабли мос қаторларнинг йиғиндилари қуйидагилардан иборат:

$$\sigma = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \text{ ва } \tau = \frac{-1}{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{3}{2}.$$

Демак, қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси

$$s = \sigma + it = 2 - \frac{3}{2}i$$

бўлади.

Энди бу қаторнинг абсолют яқинлашишини текшириб кўрайлик:

$$\left| \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} i \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2^n} \right)^2 + \left(-\frac{1}{3^n} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}}} < \sqrt{\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}}} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}, \text{ яъни } \left| \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} i \right| < \frac{\sqrt{2}}{2^n}$$

бўлиб, ўнг томондаги сон

$$\sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right)$$

яқинлашувчи қаторнинг умумий ҳадидир. Демак, берилган қатор абсолют яқинлашувчи ҳам экан.

Қатор яқинлашишининг зарурий шarti. Фараз этайлик, (1) қатор яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда яқинлашиш таърифига кўра

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (z_1 + z_2 + \dots + z_n) = s,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1}) = s.$$

Буларга асосан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = 0, \quad (10)$$

яъни n чексизликка интилганда яқинлашувчи қаторнинг z_n умумий ҳади нолга интилади.

Лекин, қаторнинг умумий ҳади нолга интилгани билан унинг яқинлашувчи бўлиши шарт эмас. Мисол учун

$$z_n = \frac{1}{n} + \frac{i}{\sqrt{n}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

лардан тузилган қатор узоқлашувчи. Чунки $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ бўлганига қарамай $x_n = \frac{1}{n}$ ва $y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ дан тузилган қаторлар узоқлашади.

Шу сабабли (10) тенглик қатор яқинлашишининг зарурий шarti (етарли эмас) дейилади.

3-мисол. Ушбу

$$(1 + i) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} i \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} i \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} i \right) + \dots$$

қаторнинг умумий ҳади

$$c_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} i$$

нолга интилса ҳам у қатор узоқлашувчидир, чунки унинг ҳақиқий қисмидан тузилган

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

гармоник қатор узоқлашувчи.
Энди ушбу

$$e^l + \frac{e^{2l}}{2^2} + \frac{e^{3l}}{3^2} + \dots + \frac{e^{nl}}{n^2} + \dots$$

қаторнинг умумий ҳади нолга интилиши билан бирга қатор абсолют яқинлашувчи, чунки

$$|c_n| = \frac{|e^{nl}|}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

бўлиб,

$$|e^{nl}| = |\cos n + i \sin n| = \sqrt{\cos^2 n + \sin^2 n} = 1$$

ва $\frac{1}{n^2}$ га тегишли қатор яқинлашувчи.

2-§. Қаторлар устида амаллар

Қаторларни қўшиш ва айириш. Агар бизга

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \tag{1}$$

ва

$$z_1^i + z_2^i + \dots + z_n^i + \dots \tag{11}$$

иккита сонли қатор берилган бўлса, у ҳолда бу қаторларнинг йиғиндиси деб ушбу

$$(z_1 + z_1^i) + (z_2 + z_2^i) + \dots + (z_n + z_n^i) + \dots \tag{12}$$

қаторни ва уларнинг айирмаси деб

$$(z_1 - z_1^i) + (z_2 - z_2^i) + \dots + (z_n - z_n^i) + \dots \tag{13}$$

қаторни айтилади.

Фараз этайлик, (1) ва (11) қаторлар яқинлашувчи бўлиб, уларнинг йиғиндилари мос равишда s ва s' бўлсин. У ҳолда ҳақиқий сонлардан иборат қатордек (12) ва (13) қаторлар ҳам яқинлашувчи бўлади ва уларнинг йиғиндиси мос равишда $s \pm s'$ га тенг бўлади. Яқинлашувчи қаторларнинг бу хоссасининг исботи ҳақиқий сонлардан иборат қатордаги сингари бўлгани учун исботни келтирмаймиз.

Қўш қатор ҳақида. Берилган ушбу

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \tag{1}$$

қаторнинг ҳадларидан чексиз куп шундай қаторлар тузиш мумкинки, (1) нинг бирор қаторга кирган z_k ҳади бошқа қаторларга мутлақо кирмайди. Мисол учун (1) қаторни қуйидаги усул билан чексиз куп қаторларга ажратиш мумкин:

$$\begin{aligned} & z_1 + z_3 + z_6 + z_{10} + z_{15} + z_{21} + \dots \\ & z_2 + z_5 + z_9 + z_{14} + z_{20} + \dots \\ & z_4 + z_8 + z_{13} + z_{19} + \dots \\ & z_7 + z_{12} + z_{18} + \dots \\ & z_{11} + z_{17} + \dots \\ & z_{16} + \dots \\ & \dots \end{aligned}$$

Демак, қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси

$$s = \sigma + k = 2 - \frac{3}{2}l$$

бўлади.

Энди бу қаторнинг абсолют яқинлашишини текшириб кўрайлик:

$$\left| \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2^n} \right)^2 + \left(-\frac{1}{3^n} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}}} < \\ < \sqrt{\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}}} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}, \text{ яъни } \left| \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right| < \frac{\sqrt{2}}{2^n}$$

бўлиб, ўнг томондаги сон

$$\sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right)$$

яқинлашувчи қаторнинг умумий ҳадидир. Демак, берилган қатор абсолют яқинлашувчи ҳам экан.

Қатор яқинлашишининг зарурий шarti. Фараз этайлик, (1) қатор яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда яқинлашиш таърифига кура

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (z_1 + z_2 + \dots + z_n) = s,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1}) = s.$$

Буларга асосан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = 0, \quad (10)$$

яъни n чексизликка интилганда яқинлашувчи қаторнинг z_n умумий ҳади нолга интилади.

Лекин, қаторнинг умумий ҳади нолга интилгани билан унинг яқинлашувчи бўлиши шарт эмас. Мисол учун

$$z_n = \frac{1}{n} + \frac{l}{\sqrt{n}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

лардан тузилган қатор узоқлашувчи. Чунки $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ бўлганига қарамай $x_n = \frac{1}{n}$ ва $y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ дан тузилган қаторлар узоқлашади. Шу сабабдан (10) тенглик қатор яқинлашишининг зарурий шarti (етарли эмас) дейилади.

3-мисол. Ушбу

$$(1 + l) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} l \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} l \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} l \right) + \dots$$

қаторнинг умумий ҳади

$$c_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} l$$

нолга интилса ҳам у қатор узоқлашувчидир, чунки унинг ҳақиқий қисми, дан тузилган

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

гармоник қатор узоқлашувчи.

Энди ушбу

$$e^l + \frac{e^{2l}}{2^2} + \frac{e^{3l}}{3^2} + \dots + \frac{e^{nl}}{n^2} + \dots$$

қаторнинг умумий ҳади нолга интилиши билан бирга қатор абсолют яқинлашувчи, чунки

$$|c_n| = \frac{|e^{nl}|}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

бўлиб,

$$|e^{nl}| = |\cos n + i \sin n| = \sqrt{\cos^2 n + \sin^2 n} = 1$$

ва $\frac{1}{n^2}$ га тегишли қатор яқинлашувчи.

2-§. Қаторлар устида амаллар

Қаторларни қўшиш ва айтириш. Агар бизга

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \quad (1)$$

ва

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \quad (11)$$

иккита сонли қатор берилган бўлса, у ҳолда бу қаторларнинг йиғиндиси деб ушбу

$$(z_1 + z_1) + (z_2 + z_2) + \dots + (z_n + z_n) + \dots \quad (12)$$

қаторни ва уларнинг айирмаси деб

$$(z_1 - z_1) + (z_2 - z_2) + \dots + (z_n - z_n) + \dots \quad (13)$$

қаторни айтилади.

Фараз этайлик, (1) ва (11) қаторлар яқинлашувчи бўлиб, уларнинг йиғиндилари мос равишда s ва s' бўлсин. У ҳолда ҳақиқий сонлардан иборат қатордек (12) ва (13) қаторлар ҳам яқинлашувчи бўлади ва уларнинг йиғиндиси мос равишда $s \pm s'$ га тенг бўлади. Яқинлашувчи қаторларнинг бу хоссасининг исботи ҳақиқий сонлардан иборат қатордаги сингари булгани учун исботни келтирмаймиз.

Қўш қатор ҳақида. Берилган ушбу

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \quad (1)$$

қаторнинг ҳадларидан чексиз кўп шундай қаторлар тузиш мумкин, (1) нинг бирор қаторга кирган z_n ҳади бошқа қаторларга мутлақо кирмайди. Мисол учун (1) қаторни қўйидаги усул билан чексиз кўп қаторларга ажратиш мумкин:

$$z_1 + z_2 + z_6 + z_{10} + z_{15} + z_{21} + \dots$$

$$z_2 + z_3 + z_9 + z_{14} + z_{20} + \dots$$

$$z_4 + z_8 + z_{13} + z_{19} + \dots$$

$$z_7 + z_{12} + z_{18} + \dots$$

$$z_{11} + z_{17} + \dots$$

$$z_{16} + \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

Умумий ҳолда (1) қаторнинг чексиз кўп қаторларга ажратилиши қуйидагича ёзилади:

$$\left. \begin{aligned} z_{k_1} + z_{k_2} + z_{k_3} + \dots \\ z_{l_1} + z_{l_2} + z_{l_3} + \dots \\ z_{m_1} + z_{m_2} + z_{m_3} + \dots \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\}, \quad (14)$$

булардаги $k_1, l_1, m_1 \dots$ лар натурал сонлардан иборат.

1-теорема. Агар (1) қатор абсолют яқинлашувчи ва йиғиндиси s сонга тенг бўлса, у ҳолда (14) қаторларнинг ҳар бири абсолют яқинлашади: агар (14) қаторларнинг йиғиндиларини мос равишда $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ деб белгиласак, ушбу қуш

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n + \dots \quad (15)$$

қатор ҳам абсолют яқинлашувчи ва йиғиндиси s га тенг бўлади.

Исбот. (14) даги биринчи қаторнинг абсолют яқинлашувчи эканлигини исбот қилайлик. Теореманинг шартига мувофиқ (1) қатор абсолют яқинлашувчи бўлгани учун

$$\sigma = |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots$$

чекли сондан иборат бўлиб, (14) даги биринчи қаторнинг ушбу

$$\sigma'_n = |z_{k_1}| + |z_{k_2}| + \dots + |z_{k_n}|$$

хусусий йиғиндиси исталганча катта n учун σ дан кичик, яъни $\sigma'_n < \sigma$. Шу сабабли қатор абсолют яқинлашувчи ва йиғиндиси бирор s_1 сонга тенг.

Худди шу усулда (14) даги бошқа қаторларнинг ҳам абсолют яқинлашувчи эканлигини исботлаш мумкин. Энди (15) қаторнинг абсолют яқинлашишини исбот қиламиз. Маълумки,

$$|s_1| = |z_{k_1} + z_{k_2} + \dots| \leq |z_{k_1}| + |z_{k_2}| + \dots,$$

$$|s_2| = |z_{l_1} + z_{l_2} + \dots| \leq |z_{l_1}| + |z_{l_2}| + \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$|s_m| = |z_{p_1} + z_{p_2} + \dots| \leq |z_{p_1}| + |z_{p_2}| + \dots$$

Буларнинг чап томонларини ўзаро ва ўнг томонларини ўзаро қўшсак, ушбу

$$|s_1| + |s_2| + \dots + |s_m| \leq \sigma$$

тенгсизлик ҳар қандай исталганча катта натурал m сон учун тўғри бўлганидан (15) қатор абсолют яқинлашади, деган натижа келиб чиқади.

Ниҳоят, (15) қаторнинг йиғиндиси (1) нинг s йиғиндисига тенг эканлигини кўрсатамиз. Унинг учун m чексизликка интилганда ушбу айирманинг

$$s - (s_1 + s_2 + \dots + s_m)$$

нолга интилишини кўрсатиш кифоя. Маълумки, (14) даги оддинги m та қаторнинг ҳамма ҳадлари йиғиндиси $s_1 + s_2 + \dots + s_m$ дан иборат. Бу қаторларни тузилиш усулига асосан охириги йиғиндига (1) қаторнинг баъзи ҳадлари кирмайди, демак,

$$|s - (s_1 + s_2 + \dots + s_m)| \leq |z_{n_1}| + |z_{n_2}| + \dots,$$

бунда $z_1, z_2, \dots$ лар натурал сонлар. Энди, ихтиёрий натурал сонни n билан белгилайлик ва m ни шундай катта қилиб олайликки, натижада $z_1, z_2, \dots$ индексларнинг ҳаммаси n дан катта бўлсин. У ҳолда ушбу

$$|s - (s_1 + s_2 + \dots + s_m)| < |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \dots$$

тенгсизликка эга бўламиз. Берилган (1) қатор абсолют яқинлашувчи ва йиғиндиси s бўлгани сабабли исталганча кичик $\epsilon > 0$ учун шундай етарли даражада катта натурал n_0 сон кўрсатиш мумкинки, барча $n > n_0$ лар учун

$$|z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \dots < \epsilon$$

бўлади. Шундай қилиб, етарли даражада катта m учун

$$|s - (s_1 + s_2 + \dots + s_m)| < \epsilon$$

тенгсизлик бажарилади, яъни

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (s_1 + s_2 + \dots + s_m) = s.$$

Теорема тула исбот бўлди.

Изоҳ. Агар берилган (1) қатор абсолют яқинлашувчи бўлмаса, юқоридаги теорема ўз кучини йўқотади.

Қатор ҳадларининг ўринларини алмаштириш ҳақида

Теорема. Агар (1) сонли қатор абсолют яқинлашувчи бўлса, унинг ҳадларининг ўринларини исталганча алмаштирилса ҳам қатор яқинлашувчи бўлиб, йиғиндиси ўзгармайди.

Ҳақиқатан ҳам, биз (1) қатор ҳадларининг жойларини алмаштириб қуйидагича ёзайлик:

$$z_{m_1} + z_{m_2} + z_{m_3} + \dots \quad (16)$$

бунда $m_1, m_2, m_3, \dots$ лар маълум тартибда ёзилган барча натурал сонлардан иборат. Энди бундай белгилаб олайлик:

$$s_1 = z_{m_1}, s_2 = z_{m_2}, s_3 = z_{m_3}, \dots$$

Фаразimiz бўйича (1) қатор абсолют яқинлашувчи бўлгани учун юқоридаги теоремага асосан ушбу

$$s_1 + s_2 + s_3 + \dots$$

қатор ҳам абсолют яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси (1) нинг s йиғиндисига тенг. Сўнги қатор эса (16) нинг ўзгинасидир. Шу билан теорема исбот бўлди.

Агар сонли қатор шартли яқинлашувчи бўлса, бу теорема ўз кучини йўқотади.

Қаторларни кўпайтириш. Берилган ушбу

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \quad (1)$$

$$z_1' + z_2' + \dots + z_n' + \dots \quad (11)$$

қаторларнинг кўпайтмаси деб қуйидаги

$$z_1 z_1' + (z_1 z_2' + z_2 z_1') + \dots + (z_1 z_n' + z_2 z_{n-1}' + \dots + z_n z_1') + \dots \quad (17)$$

қаторни айтилади.

2-теорема. Агар берилган (1) ва (11) қаторлар абсолют яқинлашувчи бўлиб, уларнинг йиғиндилари мос равишда s ва s' дан иборат бўлса, у ҳолда уларнинг кўпайтмасидан иборат (17) қатор ҳам абсолют яқинлашиб, йиғиндиси $S = ss'$ га тенг бўлади.

Исбот. Дастлаб биз (1) ва (11) қаторларнинг ҳадларидан тузилган ушбу

$$z_1 z_1', z_1 z_2', z_2 z_1', z_2 z_2', \dots \quad (18)$$

кўпайтмаларни ёнб оламин. Мана шу ҳадлардан тузилган

$$z_1 z_1' + z_1 z_2' + z_2 z_1' + z_2 z_2' + \dots \quad (19)$$

қаторнинг абсолют яқинлашувчи эканлигини кўрсатамиз. Унинг учун (19) нинг модулларидан тузилган қаторнинг хусусий

$$|z_1 z_1'| + |z_1 z_2'| + |z_2 z_1'| + |z_2 z_2'| + \dots \quad (20)$$

йиғиндисининг чегараланган эканлигини кўрсатиш кифоя. (20) йиғиндига кирувчи (1) ва (11) қаторларнинг ҳадларининг энг катта номери (индекси) n бўлсин. Энди, (20) йиғинди ушбу

$$(|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|)(|z_1'| + |z_2'| + \dots + |z_n'|) \quad (21)$$

кўпайтмадан катта бўла олмайди, чунки (21) даги баъзи ҳадлар (20) га кирмай қолиши мумкин. У ҳолда (20) йиғинди ушбу

$$(|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots)(|z_1'| + |z_2'| + \dots + |z_n'| + \dots) \quad (22)$$

кўпайтмадан албатта кичик бўлади, чинки (21) га қараганда (22) кўпайтма катта сон. Демак, (20) кўпайтма ss' сон билан чегараланган. У ҳолда (19) қатор абсолют яқинлашувчи экан.

Энди (19) қаторнинг ҳадларидан (17) қаторни тузиб оламин:

$$s_1' = z_1 z_1', s_2' = z_1 z_2' + z_2 z_1', \dots, s_n' = z_1 z_n' + z_2 z_{n-1}' + \dots + z_n z_1', \dots$$

1-теоремага асосан (17) ҳам абсолют яқинлашувчи бўлади. Энг сўнгида (17) қаторнинг йиғиндиси ss' кўпайтмага тенглигини кўрсатиш учун (19) нинг ҳадларидан қуйидагиларни тузамиз:

$$s_1 = z_1 z_1' + z_1 z_2' + z_2 z_1' + \dots,$$

$$s_2 = z_2 z_1' + z_2 z_2' + z_2 z_3' + \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

Юқоридаги теоремага асосан бу қаторларнинг ҳар бири яқин-

лашувчи бўлиб, қуйидаги

$$s_1 + s_2 + \dots = z_1(z_1^1 + z_2^1 + z_3^1 + \dots) + z_2(z_1^1 + z_2^1 + z_3^1 + \dots) + \dots = (z_1^1 + z_2^1 + z_3^1 + \dots)(z_1 + z_2 + z_3 + \dots) = s's$$

қатор йигиндиси билан (17) нинг йигиндиси бир хилда бўлади. Шу билан теорема тула исбот қилинди.

Маълумки, чекли йигинди ҳадларининг жойлари алмаштирилса, йигиндининг қиймати ўзгармайди; шунингдек йигиндиларни ўзаро ҳадлаб купайтириш мумкин. Биз бу параграфда абсолют яқинлашувчи қаторлар учун ҳам бу хоссалар ўринли эканини курсатдик, яъни ўша хоссаларни чексиз йигинди учун умумлаштирдик.

Қаторларни купайтиришга доир теорема шартли яқинлашувчи қаторлар учун умуман ўринли эмас, чунки иккита шартли яқинлашувчи қаторнинг купайтмаси узоқлашувчи бўлиб қолиши ҳам мумкин. Агар уларнинг купайтмаси яқинлашувчи бўлиши олдиндан маълум бўлсагина шартли яқинлашувчи қаторларни купайтиришда юқорида айтилган теоремани қўллаш мумкин.

3-§. Функционал қаторлар

Ҳадлари ўзгармас комплекс сонлардан иборат бўлган қаторлар билан юқорида танишиб ўтдик. Энди ҳар бир ҳади бирор соҳада аниқланган комплекс ўзгарувчили функциядан иборат бўлган қаторлар билан танишамиз.

Фараз этайлик, бизга ҳар бир ҳади G соҳада аниқланган $z = x + iy$ комплекс ўзгарувчининг бир қийматли $f_n(z)$ функциялардан тузилган ушбу

$$f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots \quad (23)$$

функционал қатор берилган бўлсин. Хусусий ҳолда, агар $y = 0$ бўлса, бундан ҳақиқий ўзгарувчилар соҳасидаги

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

функционал қатор келиб чиқади. Албатта, сунгги қатордаги ҳар бир ҳад фақат ҳақиқий қийматларни қабул қилади, деб тушуниш керак.

Агар G соҳага тегишли бирор z_0 ўзгармас сонни (23) га қуйгандан ҳосил бўлган ушбу

$$f_1(z_0) + f_2(z_0) + \dots + f_n(z_0) + \dots \quad (24)$$

сонли қатор яқинлашувчи бўлса, y ҳолда берилган (23) функционал қатор $z = z_0$ нуқтада яқинлашувчи дейилади. Агар G соҳанинг ҳар бир нуқтасида (23) қатор яқинлашса, ўша қатор G соҳада яқинлашувчи дейилади. Функционал қаторнинг яқинлашиш соҳасини аниқлаш асосий масалалардан бири ҳисобланади.

(24) қатор яқинлашувчи бўлса унинг йигиндиси аниқ бир $f(z_0)$ ўзгармас сонга тенг бўлади. Шунингдек (23) қатор G соҳада

яқинлашувчи бўлса, унинг йиғиндиси ҳам G соҳада аниқланган $z = x + iy$ нинг аниқ бир $f(z)$ функциясида иборат бўлади, яъни

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots \quad (25)$$

Бу қаторнинг n -хусусий йиғиндисини қуйидагича

$$S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z)$$

белгиласак, ушбу

$$R_n(z) = f(z) - S_n(z) = f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots \quad (26)$$

айирма (23) қаторнинг қолдиқ ҳади деб аталади. (25) ва (26) га асосан қаторнинг яқинлашиш соҳасига тегишли барча z лар учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(z) - S_n(z)] = f(z) - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = f(z) - f(z) = 0,$$

яъни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = 0. \quad (27)$$

Бунинг маъноси шундан иборатки, агар (23) қатор G соҳадаги ихтиёрӣ z нуқтада яқинлашувчи бўлса, у ҳолда ҳар қандай кичкина мусбат ϵ сон учун шундай катта мусбат N сонни топиш мумкинки, $n > N$ бўлганда

$$|R_n(z)| = |f(z) - S_n(z)| < \epsilon \quad (27')$$

тенгсизлик уринли бўлади. Бу тенгсизликнинг бажарилиши умуман олганда, икки нарсга боғлиқ: бир томондан ϵ га, иккинчи томондан, z га бериладиган қийматга боғлиқ. Шу сабабли изланаётган катта N сон ҳам ϵ билан z га боғлиқдир, яъни $N = N(\epsilon, z)$. Берилган ϵ га кура (27') тенгсизликнинг уринли бўлиши учун зарур $N(\epsilon, z)$ мавжуд бўлса, (23) қатор оддий яқинлашувчи дейилади.

Баъзан бундай ҳам бўлиб қолиши мумкин: G соҳанинг барча z нуқталари учун, z га боғлиқ бўлмаган шундай умумий $N^*(\epsilon)$ мусбат сонни топиш мумкинки, $N(\epsilon, z)$ нинг ҳамма қийматлари шундан катта бўлмайди, яъни:

$$N(\epsilon, z) < N^*(\epsilon).$$

Демак, $n > N^*(\epsilon)$ бўлганда (27') тенгсизлик G соҳадаги ҳамма z нуқталар учун бажарилади. Бундай ҳолда (23) қатор текис яқинлашувчи деб аталади. Берилган функционал қатор G соҳада оддий яқинлашувчи бўлатуриб, текис яқинлашмаслиги ҳам мумкин. Лекин, текис яқинлашувчи қатор, албатта, оддий ҳам яқинлашади. Бундан кейин „оддий“ деган сўзни тушириб қолдирамиз ва туғридан-туғри „яқинлашувчи“ деб ишлатаверамиз.

Мисол. Ушбу

$$a + az + az^2 + \dots + az^n + \dots \quad (28)$$

чексиз геометрик прогрессияни текширамиз, бунда a — бирор ўзгармас сон. Маълумки, геометрик прогрессия n та ҳадининг

Йиғиндиси қуйидаги формула билан аниқланади:

$$S_n = a + az + az^2 + \dots + az^n = \frac{a(1 - z^{n+1})}{1 - z}.$$

Бу формула 1 дан фарқи бўлган ихтиёрий z учун туғридир. Агар $|z| < 1$ бўлса, $\lim_{n \rightarrow \infty} z^{n+1} = 0$ ва $|z| > 1$ бўлса, $\lim_{n \rightarrow \infty} z^{n+1} = \infty$ бўлади. Шунга асосан:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a + az + az^2 + \dots + az^n) = \begin{cases} \frac{a}{1-z}, & |z| < 1 \text{ бўлса,} \\ \infty, & |z| > 1, a \neq 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Демак, (28) қатор $|z| < 1$ доира ичида яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси

$$f(z) = \frac{a}{1-z}$$

га тенг.

Бирлик доира ташқарисида эса, яъни $|z| > 1$ бўлганда қатор узоқлашади. $|z| = 1$ айланада ҳам (28) қатор узоқлашади, чунки бу ҳолда қатор яқинлашишининг зарурий шарғи бажарилмайди.

Энди (28) қаторнинг $|z| < 1$ да текис яқинлашиши ёки текис яқинлашмаслигини текшираимиз. Шу мақсадда қолдиқ ҳади-ни ёзиб оламиз:

$$R_n(z) = f(z) - S_n(z) = \frac{a}{1-z} - \frac{a(1-z)^{n+1}}{1-z} = \frac{az^{n+1}}{1-z}.$$

$$\left| \frac{az^{n+1}}{1-z} \right| < \varepsilon \quad (29)$$

тенгсизлик ёки

$$|z|^{n+1} < \frac{\varepsilon |1-z|}{|a|}, \text{ яъни } (n+1) \ln |z| < \ln \frac{\varepsilon |1-z|}{|a|}$$

бажарилиши учун

$$n+1 > \frac{\ln \frac{\varepsilon |1-z|}{|a|}}{\ln |z|}$$

тенгсизлик бажарилиши егарлидир ($|z| < 1$ да $\ln |z| < 0$ бўлгани учун тенгсизлик ишораси ўзгарди), бундан

$$n > \frac{\ln \frac{\varepsilon |1-z|}{|a|}}{\ln |z|} - 1. \quad (30)$$

Бу тенгсизликнинг ўнг томони $z \rightarrow 1$ да чексизликка интилади, шу сабабли $|z| < 1$ доиранинг барча нуқталари учун умумий ва (30) тенгсизликнинг ўнг томонидан катта бўлган $N(\varepsilon)$ миқдорни топиб бўлмайди, бу деган суз z га боғлиқ бўлмаган шундай $N(\varepsilon)$ ни топиб бўлмайдики, $n > N(\varepsilon)$ бўлганда $|z| < 1$ доиранинг барча нуқталари учун $|R_n(z)| < \varepsilon$ тенгсизлик қаноатлантирилсин. Демак, $|z| < 1$ доирада (28) қатор текис яқинлашмайди. $|z| < 1$ доирада ётувчи $|z| \leq 1 - \delta$, $\delta > 0$

доирада шу қаторни текшириб кураимиз. Исталганча кичик ϵ учун (30) тенгсизлик ўнг томонидаги каср мусбат бўлиб, $|1-z| > 1-|z|$ ва $|z| < 1-\delta$ бўлгани учун (30) ўша каср суратининг абсолют қийматининг энг катта қиймати $\ln \frac{\delta\epsilon}{|a|}$ га, махраж абсолют қийматининг энг кичик қиймати эса $|\ln(1-\delta)|$ га тенг. Демак, (30) тенгсизликнинг ўнг томони $|z| < 1-\delta$ доира нуқталари учун

$$N(\epsilon) = \frac{\ln \frac{\delta\epsilon}{|a|}}{\ln(1-\delta)} - 1$$

сондан катта бўлмайди, демак, $n > N(\epsilon)$ бўлганда (29) тенгсизлик $|z| < 1-\delta$ доиранинг барча нуқталарида бажарилади, яъни (28) қатор $|z| < 1-\delta$ доирада текис яқинлашади. Шундай қилиб, (28) қатор радиуси 1 дан исталганча кичик бўлган доирада текис яқинлашувчи бўлар экан.

Ҳақиқий ўзгарувчилар соҳасидагига ўхшаш комплекс ўзгарувчилар соҳасида ҳам берилган функционал қаторнинг текис яқинлашувчи эканлигини аниқлаб берадиган жуда содда белги (аломат) ҳам бор. Бу ерда ҳам шу белги Вейерштрасс белгиси деб аталади.

Текис яқинлашиш (Вейерштрасс) белгиси. Агар G соҳада

$$f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots \quad (23)$$

қаторнинг ҳар бир ҳадининг модули ушбу

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (31)$$

мусбат ҳадли яқинлашувчи сонли қаторнинг мос ҳадидан катта бўлмаса, у ҳолда (23) қатор G соҳада текис яқинлашади.

Исбот. Берилган (31) қаторнинг қолдиқ ҳади

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

ва (23) нинг қолдиқ ҳади

$$R_n(z) = f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots$$

бўлсин. Юқорида қўйилган шартга мувофиқ

$$|f_1(z)| \leq a_1, |f_2(z)| \leq a_2, \dots, |f_n(z)| \leq a_n, \dots$$

бўлгани сабабли

$$|R_n(z)| \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = r_n$$

бўлади. Берилган (31) қатор яқинлашувчи бўлгани учун $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$, яъни ҳар, қандай кичик мусбат ϵ сон учун шундай катта $N(\epsilon)$ мусбат сон топиш мумкинки, $n > N(\epsilon)$ бўлганда

$$r_n < \epsilon$$

бўлади. Шубҳасиз, бу ердаги N сон z га боғлиқ эмас, чунки (31) сонли қатордан иборат бўлиб, унда $z = x + iy$ иштирок этмайди.

Демак, $n > N(\varepsilon)$ бўлганда $|R_n(z)| < \varepsilon$ бўлади. Бу эса таъриф-га кўра, (23) қаторнинг текис яқинлашувчи эканини билдиради.

Даражали қаторларни текширишда биз мана шу текис яқинлашиш белгисидан куп фойдаланамиз.

Энди ҳақиқий узгарувчилар соҳасидагидек функционал қатор йиғиндиси $f(z)$ нинг функционал хоссаларига, чунончи унинг G соҳада узлуксиз, интегралланувчи ва дифференциалланувчи бўлишига оид бир неча муҳим теоремаларни исбот қиламиз.

Теорема. *Агар бирор G соҳада барча ҳадлари узлуксиз бўлган ушбу*

$$f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots$$

қатор ўша соҳада текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда қаторнинг $f(z)$ йиғиндиси ҳам G соҳада узлуксиз бўлади.

Исбот. Дастлаб $f(z)$ нинг G соҳадаги бирор ихтиёрий z_0 нуқтада узлуксизлигини кўрсатамиз. Унинг учун G га тегишли яна битта $z_0 + h$ нуқта олиб ушбу

$$S_n(z_0) = f_1(z_0) + f_2(z_0) + \dots + f_n(z_0)$$

ва

$$S_n(z_0 + h) = f_1(z_0 + h) + f_2(z_0 + h) + \dots + f_n(z_0 + h)$$

хусусий йиғиндиларни тузамиз. Бундан:

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = [f(z_0 + h) - S_n(z_0 + h)] + [S_n(z_0 + h) - S_n(z_0)] + [S_n(z_0) - f(z_0)]$$

ёки (26) га мувофиқ

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = R_n(z_0 + h) + [S_n(z_0 + h) - S_n(z_0)] - R_n(z_0)$$

Бундан ушбу

$$|f(z_0 + h) - f(z_0)| \leq |R_n(z_0 + h)| + |S_n(z_0 + h) - S_n(z_0)| + |R_n(z_0)| \quad (32)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Берилган (23) қатор, теореманинг шартига кўра, G соҳада текис яқинлашувчи бўлгани сабабли ҳар қандай кичик $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $N(\varepsilon)$ сонни топиш мумкинки, $n > N(\varepsilon)$ бўлганда $|R_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ бўлади. Мана шунга асосан, z_0 ва $z_0 + h$ нуқталар ҳам G га тегишли бўлгани учун

$$|R_n(z_0 + h)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |R_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (33)$$

Иккинчи томондан, (23) қаторнинг барча ҳадлари G соҳада узлуксиз бўлгани сабабли унинг n та ҳадининг $S_n(z)$ йиғиндиси ҳам узлуксиз бўлади. Демак, узлуксизлик таърифига асосан ҳар қандай кичик $\delta > 0$ сон учун шундай $\delta = \delta(\varepsilon)$ сон борки,

$$|h| < \delta \text{ бўлганда } |S_n(z_0 + h) - S_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (34)$$

бўлади. Демак, (33) ва (34) га асосан (32) дан:

$$|f(z_0 + h) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

У ҳолда берилган қатор йиғиндиси $f(z)$ функция $G \ni z_0$ да узлуксиз бўлади.

z_0 нуқта G нинг ихтиёрий нуқтаси булгани учун $f(z)$ функция G соҳада узлуксиздир. Шу билан теорема исбот бўлди. Бу теореманинг муҳим жойи шундаки, $f(z)$ нинг узлуксиз бўлиши учун (23) қатор текис яқинлашувчи бўлиши керак. Агар қатор оддий, яъни нотекис яқинлашувчи булса, унинг ҳар бир ҳади узлуксиз бўлса ҳам йиғиндиси узлуксиз бўлмаслиги мумкин.

Ушбу

$$z + (z^2 - z) + \dots + (z^n - z^{n+1}) + \dots \quad (35)$$

қаторни $|z| < 1$ доирада ва $z = 1$ нуқтада текшираимиз. Бу қатор биринчи n та ҳадининг йиғиндиси $S_n(z) = z^n$, $|z| < 1$ бўлса, етарли катта n да, яъни $n \rightarrow \infty$ да нолга интилади, агар $z = 1$ бўлса, у ҳолда $S_n(1) = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(1) = 1$.

Демак, (35) қаторнинг $S(z)$, йиғиндиси $|z| < 1$ доиранинг ичиди ётувчи ихтиёрий нуқтада нолга тенг, бу доира айланасининг $z = 1$ нуқтасида бирга тенг. (35) қаторнинг ҳадлари узлуксиз функциялардан иборат бўлишига қарамай, унинг йиғиндиси $z = 1$ нуқтада узилишга эга бўляпти. Бунинг сабаби (35) қаторнинг $|z| < 1$ да текис яқинлашмаслигидадир. (35) қаторнинг $|z| < 1$ да текис яқинлашувчи эмаслигини худди бундан олдинги мисолдагидек текширилади.

4-§. Функционал қаторни интеграллаш

Функционал қатор ҳақида 3-§ да қисқача тушунча бериб ўтган эдик. Бу параграфда биз функционал қаторни, маълум шартлар бажарилганда, ҳадлаб интеграллаш мумкинлиги ҳақида сўз юричамиз.

Ушбу

$$f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots \quad (36)$$

функционал қаторнинг ҳар бир ҳади G соҳада аниқланган ва узлуксиз функция бўлиб, қаторнинг ўзи шу соҳада текис яқинлашувчи булсин, дейлик. У ҳолда шу қаторнинг

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots \quad (37)$$

йиғиндиси ҳам G да узлуксиз бўлиши 3-§ охирида исбот қилинган эди. Энди қуйидаги теоремани исбот қиламиз.

Теорема. Агар

$$f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots$$

қаторнинг ҳар бир ҳади G соҳада узлуксиз ва қаторнинг ўзи шу соҳада текис яқинлашувчи булса, у ҳолда G соҳада ётувчи ҳар қандай Γ чизиқ бўйлаб қаторни ҳадлаб интеграллаш мумкин:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} f_1(z) dz + \int_{\Gamma} f_2(z) dz + \dots + \int_{\Gamma} f_n(z) dz + \dots \quad (38)$$

Буни (37) га мувофиқ

$$\int_{\Gamma} [f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots] dz = \int_{\Gamma} f_1(z) dz + \\ + \int_{\Gamma} f_2(z) dz + \dots + \int_{\Gamma} f_n(z) dz + \dots$$

қуринишда ёзиш ҳам мумкин. Теоремада икки шарт қўйилган бўлиб, улардан бири, қатор ҳадларининг G соҳада узлуксиз бўлиши ва иккинчиси, қаторнинг текис яқинлашишидир. Бу шартлардан бирортаси бажарилмай қолса, у ҳолда теорема умуман уринли бўлмайди, яъни (36) даги $f(z)$ дан бирор контур буйлаб олинган интеграл ўнг томондаги ҳар бир ҳаддан олинган интеграллар йиғиндисига тенг бўлавермайди. Бундай ҳодисани ҳақиқий ўзгарувчилар соҳасида ҳам учратганмиз.

Исбот. (36) қаторнинг S_n хусусий йиғиндисини олайлик.

$$S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z)$$

ва қаторнинг қолдиқ ҳадини

$$R_n(z) = f(z) - S_n(z) = f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots$$

орқали белгилайлик. Теорема шартига мувофиқ қатор текис яқинлашувчи бўлгани учун ҳар қандай кичик $\varepsilon > 0$ сон учун шундай мусбат $N(\varepsilon)$ сонни топиш мумкинки, $n > N(\varepsilon)$ бўлганда $|R_n(z)| = |f(z) - S_n(z)| < \varepsilon$ бўлади. Энди Γ чизиқнинг узунлигини l орқали белгиласак (83-чизма), интегралларнинг хосасига мувофиқ,

$$\left| \int_{\Gamma} [f(z) - S_n(z)] dz \right| = \left| \int_{\Gamma} R_n(z) dz \right| < \varepsilon l$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бунинг маъноси, $n \rightarrow \infty$ ҳолда, тенгсизлик чап томонининг limiti нолга тенг демакдир:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Gamma} f(z) dz - \int_{\Gamma} S_n(z) dz \right| = 0.$$

Лекин биринчи интегралда n иштирок этмайди, шунинг учун

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} S_n(z) dz = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{\Gamma} f_1(z) dz + \int_{\Gamma} f_2(z) dz + \right.$$

$$\left. + \dots + \int_{\Gamma} f_n(z) dz \right] = \int_{\Gamma} f_1(z) dz + \int_{\Gamma} f_2(z) dz + \dots + \\ + \int_{\Gamma} f_n(z) dz + \dots$$



83-чизма.

Шу билан теорема исбот бўлди. Сунгги тенгликни қуйидагича ёзиш ҳам мумкин:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} S_n(z) dz = \int_{\Gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz.$$

Агар Γ чизиқ G соҳа нчидаги ёпиқ конгурдан иборат бўлса, теорема қуйидагича тенглик билан ифода қилинади:

$$\oint_{\Gamma} [f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots] dz = \\ = \oint_{\Gamma} f_1(z) dz + \oint_{\Gamma} f_2(z) dz + \dots + \oint_{\Gamma} f_n(z) dz + \dots \quad (39)$$

5-§. Функционал қаторни дифференциаллаш

Аналитик функциялар қаторига доир К. Вейерштрасснинг¹ иккита машҳур теоремасини исбот қиламиз.

1-теорема. Агар бирор G соҳада аналитик функциялардан тузилган

$$f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots \quad (40)$$

қатор G да тўла ётувчи ихтиёрий ёпиқ $\bar{G}$, соҳада текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда 1) қаторнинг йиғиндис $f(z)$ G да аналитик функция бўлади; 2) қаторни исталган марта ҳадлаб дифференциаллаш мумкин:

$$f^{(k)}(z) = f_1^{(k)}(z) + f_2^{(k)}(z) + \dots + f_n^{(k)}(z) + \dots \quad (41)$$

3) дифференциаллашдан ҳосил бўлган барча қаторлар $\bar{G}$, соҳада текис яқинлашувчи бўлади.

Исбот. (40) қаторнинг ҳадлари G да аналитик (демак, узлуксиз) функциялар бўлиб, қатор $\bar{G}$, да текис яқинлашувчи бўлгани учун унинг йиғиндис $f(z)$ функция G га нисбатан ички бўлган ихтиёрий ёпиқ $\bar{G}$, соҳада узлуксиз, демак барча G да узлуксиз бўлади. Энди $f(z)$ нинг G да аналитиклигини кўрсатамиз. G нинг ихтиёрий нуқтаси z бўлсин. $\bar{G}$, нинг чегарасини Γ , билан белгилаб оламиз. $\bar{G}$, соҳа G га тегишли ихтиёрий соҳа бўлгани учун уни z нуқтани ўз ичига оладиган қилиб танлашимиз мумкин. Γ , нинг ихтиёрий нуқтаси ζ бўлсин ($\zeta - z \neq 0$).

Ушбу

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z} + \dots + \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} + \dots$$

қатор Γ , да текис яқинлашувчи бўлади, шунинг учун уни ҳадлаб

¹ Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (1815 — 1897) — машҳур немис математиги.

интеграллаш мумкин: $\frac{1}{2\pi i}$ га кўпайтириб, Γ_1 бўйлаб интеграллаймиз:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f_1(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f_2(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \dots + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f_n(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \dots$$

$f_n(z)$ функциялар G да аналитик бўлгани учун ўнг томондаги ҳар бир интегралга Кошининг формуласини татбиқ этсак, ушбу

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots = f(z)$$

тенглик ҳосил бўлади. Шундай қилиб, $f(z)$ функция Γ_1 да ўзлуксиз бўлиб, $f(z)$ Коши типдаги интеграл орқали ифода қилингани учун IV боб, 3-§ даги теоремага асосан z нуқтада аналитик функциядир. Лекин z нуқта G соҳанинг ихтиёрий нуқтаси бўлгани учун $f(z)$ функция G соҳада аналитикдир.

Теореманинг 2-қисмини исботлаш учун G ва G_1 ларнинг чегаралари орасидан битта ёпиқ γ контур олайлик (84-чизма). $\bar{G}_1$ билан γ нинг нуқталари орасидаги энг кичик масофа d бўлсин. γ нинг ихтиёрий нуқтаси ζ ва z эса $\bar{G}_1$ нинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. G да тўла ётувчи ихтиёрий ёпиқ соҳада (40) қатор текис яқинлашувчи бўлгани учун ушбу



84-чизма.

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} = \frac{f_1(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} + \frac{f_2(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} + \dots + \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} + \dots$$

қатор ҳам γ контурда текис яқинлашади, бунда k — ихтиёрий бутун мусбат сон. Бу тенгликнинг икки томонини $\frac{k!}{2\pi i}$ га кўпайтириб, интеграланса

$$\frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f_1(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} + \dots + \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f_n(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} + \dots$$

тенглик ҳосил бўлиб, аналитик функциянинг юқори тартибли ҳосилаларини ҳисоблаш формуласига мувофиқ

$$f^{(k)}(z) = f_1^{(k)}(z) + f_2^{(k)}(z) + \dots + f_n^{(k)}(z) + \dots$$

тенгликка эга бўламиз. Шу билан биз (40) қатор йиғиндисининг ҳосилалари шу қаторни ҳадлаб дифференциаллаш натижасида ҳосил бўлишини кўрсатдик. Энди теореманинг 3-қисмини, яъни (41) қаторнинг текис яқинлашувчи эканлигини исбот қиламиз. (40) қатор γ чизикда текис яқинлашгани сабабли

ҳар қандай кичик $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $N(\varepsilon)$ сонни топиш мумкинки, $n > N$ бўлганда $|f(\zeta) - S_n(\zeta)| < \varepsilon$ бўлади. Шартинизга мувофиқ γ даги ҳамма ζ лар учун:

$$|\zeta - z| > d.$$

У ҳолда интегралнинг хоссасига мувофиқ:

$$|f^{(k)}(z) - S_n^{(k)}(z)| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) - S_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \cdot \frac{\pi \cdot l}{d^{n+1}} = \varepsilon_1,$$

бунда l сон γ нинг узунлиги,

$$\varepsilon_1 = \frac{k!l}{2\pi d^{n+1}} \cdot \pi.$$

Тенгсизликнинг ўнг томони ҳар қандай кичик ε_1 мусбат сондан иборат булгани учун чап томондаги айирма лимити нолга тенг бўлади, демак, (41) қаторнинг $\bar{G}$ соҳада текис яқинлашмиш исбот қилинди. Шу билан 1-теорема тўла исбот қилинди.

Изоҳ. Агар (40) қатор G да текис яқинлашувчи бўлса, исбот қилинганга асосан (41) қатор барча нуқталари G да ёгувчи ихтиёрий $\bar{G}$ ёпиқ соҳада текис яқинлашувчи бўлар экан. Лекин бундан (41) қатор ҳам G да текис яқинлашувчи бўлади, деган хулоса чиқариш умуман олганда, нотўғри бўлади. Масалан,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ қатор $|z| < 1$ доирада текис яқинлашувчи бўлади,

чунки $\left| \frac{z^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ қатор эса яқинлашувчидир. Аммо

унинг ҳатто биринчи ҳосиласидан иборат $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$ қатор ҳам,

$|z| < 1$ доирада текис яқинлашмайди (оддий яқинлашади), лекин $|z| \leq r$ ($r < 1$) доирада эса текис яқинлашувчи бўлади.

2-теорема. Агар (40) қаторнинг ҳадлари G да аналитик бўлиб, $\bar{G}$ да узлуксиз бўлса ва G нинг чегарасида қатор текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (40) қатор барча G да текис яқинлашувчи бўлади.

Ҳақиқатан, G нинг чегарасидаги ζ нуқтани оламиз. Теореманинг шартига кура, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун $n > N(\varepsilon)$, $p > 1$ бўлганда

$$|f_n(\zeta) + f_{n+1}(\zeta) + \dots + f_{n+p}(\zeta)| < \varepsilon \quad (42)$$

бўлади.

$$f_n(\zeta) + f_{n+1}(\zeta) + \dots + f_{n+p}(\zeta)$$

функция G да аналитик ва $\bar{G}$ да узлуксиз бўлгани учун модульнинг максимум принципага асосан (42) тенгсизлик G соҳанинг барча z нуқталарида ҳам тўғри бўлади.

6-§. Даражали қаторлар

Функционал қаторнинг хусусий ҳоли бўлмиш даражали қатор тажрибада кўпроқ ишлатилади. $z - a$ айирмага нисбатан даражали қатор деб мана бу кўринишга эга бўлган

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots \quad (43)$$

қаторни айтилади. Бу қаторда қатнашаётган

$$a = \alpha + i\beta \text{ ва } c_n = \sigma_n + i\tau_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

комплекс сонлардир. Агар $a = 0$ бўлса, $z = x + iy$ узгарувчига нисбатан даражали бўлган ушбу

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \quad (44)$$

қаторга эга буламиз.

Даражали қаторларнинг яқинлашишига доир Абельнинг муҳим теоремаси билан танишиб ўтамиз.

Теорема. Агар (43) даражали қатор z_0 нуқтада яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу қатор $|z - a| < |z_0 - a|$ доиранинг ҳамма нуқталарида абсолют яқинлашади. Шунингдек, у ҳар қандай ёниқ $|z - a| \leq r$ доирада ҳам текис яқинлашади, бунда $r < |z_0 - a|$.

Исбот. Теореманинг шартига мувофиқ

$$c_0 + c_1(z_0 - a) + c_2(z_0 - a)^2 + \dots + c_n(z_0 - a)^n + \dots$$

сонли қатор яқинлашувчи бўлгани учун унинг умумий ҳади нолга ингилади, яъни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n (z_0 - a)^n = 0$$

ва демак, барча n лар учун

$$|c_n (z_0 - a)^n| < M.$$

Фараз эгайлик, z ушбу

$$|z - a| < r, \quad (r < |z_0 - a|)$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган ихтиёрий нуқта бўлсин. У ҳолда мана шу тенгсизликка ва (43) нинг умумий ҳадида асосланиб қуйидаги тенгсизликни ёза оламиз:

$$|c_n (z - a)^n| = |c_n (z_0 - a)^n| \cdot \left| \frac{z - a}{z_0 - a} \right|^n < M \left(\frac{r}{|z_0 - a|} \right)^n = M q^n, \quad (45)$$

бунда

$$q = \frac{r}{|z_0 - a|} < 1$$

деб юқорндаги мулоҳазани такрорлаймиз. Шу хилда чексиз лавом этилса, шундай R сонга эга буламизки (бундай R нинг мавжудлиги бир-бирига жойлашган кесмалар ҳақидаги леммадан келиб чиқади), натижада (43) қатор

$$|z - a| < R \quad (46)$$

доира ичида яқинлашиб, унинг ташқарисида узоқлашувчи бўлиб қолади. $|z - a| = R$ айлананинг ўзида эса қаторнинг яқинлашиш ёки узоқлашиш масаласи очиқ қолади. (Айлананинг бирор z^* нуқтасидаги яқинлашиш ёки узоқлашишни текширмоқчи бўлсак, у нуқтани (43) га қўйиб, ўзгармас ҳадли қатор ҳосил қилиб, сунгра уни текшириш лозим). Мана шундай хусусиятга эга бўлган R сон (43) қаторнинг яқинлашиш радиуси, (46) эса яқинлашиш доираси деб аталади.

Коши — Адамар формуласи¹

(43) қатор коэффициентларидан қуйидаги сонлар кетма-кетлигини тузамиз:

$$|c_1|, \sqrt{|c_2|}, \sqrt[3]{|c_3|}, \dots, \sqrt[n]{|c_n|}, \dots \quad (47)$$

Бу кетма-кетликнинг энг катта лимитини L орқали белгилаб оламиз, яъни

$$L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad (48)$$

(43) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $R = \frac{1}{L}$ формула билан аниқланади. (48) формулани Коши — Адамар формуласи дейилади.

Исбот. а) $L = 0$ бўлсин, бу ҳолда $R = \infty$ бўлиб, (43) қаторнинг ихтиёрий $z = z_0$ нуқтада яқинлашувчи булишини курсатиш керак. Бу ҳолда (47) кетма-кетлик нолга яқинлашади, шунинг учун ихтиёрий $z = z_0 \neq 0$ нуқтада ва $0 < \theta < 1$ да ушбу

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{\theta}{|z_0 - a|}$$

тенгсизлик n нинг исталганча катта қийматларидан бошлаб ўринли булади. Демак, бирор n дан бошлаб,

$$|c_n(z_0 - a)^n| < \theta^n$$

булади. Бундан, дарҳол (43) қаторнинг ихтиёрий z нуқтада абсолют яқинлашиши келиб чиқади.

¹ Адамар Жак (1865 — 1963) — атоқли француз математиги.

² Математик анализ курсида ҳар бир кетма-кетликнинг чекли ёки чексиз энг катта лимити мавжудлиги исботланади (Фихтенгольц, Дифференциал ва интеграл ҳисоб курси, 1-т., 42-б.).

б) $L = \infty$ ($R = 0$) бўлсин. Бу ҳолда (43) қаторнинг $z = a$ дан бошқа ҳар қандай нуқтада узоқлашувчи бўлишини кўрсатиш керак. (47) кетма-кетликнинг энг катта limiti чексиз бўлгани сабабли ихтиёрий $z \neq 0$ нуқта учун n нинг чексиз кўп $n = n_k$ қийматлари топилиб, булар учун

$$\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} > \frac{1}{|z-a|}$$

тенгсизлик бажарилади. Бундан

$$|c_{n_k}(z-a)^{n_k}| > 1$$

бўлиб, (43) қатор яқинлашувчи бўлишининг ушбу зарурий шарти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(z-a)^n = 0$$

ҳеч бир $z \neq a$ нуқтада бажарилмайди.

в) L чекли сон, яъни $0 < L < \infty$ бўлсин. Бу ҳолда (43) қаторнинг $|z-a| < \frac{1}{L}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталарда яқинлашувчи ҳамда $|z-a| > \frac{1}{L}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталарда узоқлашувчи бўлишни кўрсатиш керак.

$|z-a| < \frac{1}{L}$ бўлсин. L энг катта лимит бўлгани учун, бу лимитнинг хоссасига асосан, етарли катта n дан бошлаб

$$\sqrt[n]{|c_n|} < L + \epsilon, \epsilon > 0.$$

ϵ ни қуйидаги тенгсизликни қаноатлантирадиган қилиб танлаб оламиз:

$$\epsilon < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{|z-a|} - L \right).$$

У ҳолда олдинги тенгсизликни бундай ёзиш мумкин:

$$\sqrt[n]{|c_n|} < L + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{|z-a|} - L \right) = \frac{1+L|z-a|}{2|z-a|}$$

ёки

$$\sqrt[n]{|c_n|} |z-a| < \frac{1+L|z-a|}{2} = \theta < 1,$$

чунки $L|z-a| < 1$. Бундан

$$|c_n||z-a|^n < \theta^n.$$

Демак, (43) қатор $|z-a| < \frac{1}{L}$ доира абсолют яқинлашади.

Энди

$$|z-a| > \frac{1}{L}$$

бўлганидан ушбу

$$M + Mq + Mq^2 + \dots + Mq^n + \dots$$

чексиз камаювчи геометрик прогрессия ҳадларидан тузилган қатор яқинлашувчи. У ҳолда (45) га асосан, (43) қатор ушбу

$$|z - a| < r$$

доирада текис яқинлашувчи бўлади. Энди r ни $|z_0 - a|$ га истаганча яқинлаштириш мумкин бўлгани учун (43) қатор

$$|z - a| < |z_0 - a|$$

доирада абсолют яқинлашувчи бўлади. Шу билан Абель теоремаси исбот бўлди¹.

Сўнгги тенгсизликнинг геометрик маъноси шуки, бу тенгсизлик a марказли ва z_0 нуқтадан ўтувчи доирани ифодалаб, z лар унинг ички нуқталаридир, $|z - a| < r$ эса ўша доира ичидаги a марказли ихтиёрий доирадир. Демак, мана шу ички доираларда (43) қатор текис ва абсолют яқинлашади, лекин катта доира ичида эса фақат абсолют яқинлашади. Агар $a = 0$ бўлса, доира маркази координаталар бошида бўлади.

Натижа. Агар (43) қатор $z = z_0$ нуқтада узоқлашса, $|z - a| > |z_0 - a|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий нуқтада узоқлашади.

Равшанки, ҳар қандай (43) кўринишдаги даражали қатор $z = a$ нуқтада, яъни доиранинг марказида яқинлашувчи бўлади.

1-мисол. Ушбу

$$1 + z + 2^2 z^2 + 3^2 z^3 + \dots + n^2 z^n + \dots$$

даражали қатор фақат $z = 0$ нуқтада яқинлашувчи бўлади. Ҳақиқатан, ихтиёрий $z \neq 0$ нуқтада бирор етарли катта n дан бошлаб $n|z| > 2$ бўлгани учун $n \rightarrow \infty$ да текширилаётган қаторнинг умумий ҳади $n^2 z^n$ чексизликка интилади, чунки $|n^2 z^n| = (n|z|)^n > 2^n$. Бу тенгсизликдан қаторнинг ихтиёрий $z \neq 0$ нуқтада узоқлашувчи бўлиши келиб чиқади.

2-мисол. Ушбу

$$1 + z + \frac{z^2}{2^2} + \dots + \frac{z^n}{n^2} + \dots$$

қатор ихтиёрий z нуқтада абсолют яқинлашувчи бўлади. Ҳақиқатан, z қандай бўлмасин, бирор n дан бошлаб $\frac{|z|}{n} < \frac{1}{2}$ қилиб олиш мумкин бўлгани учун

$$\left| \frac{z^n}{n^n} \right| = \left(\frac{|z|}{n} \right)^n < \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

¹) Абель Нильс Генрих — норвегиялик машҳур математиклардан бири бўлиб, 1802 — 1829 йилларда яшаган.

бўлади. Шундай қилиб, қаралаётган қаторнинг маълум бир ҳадидан бошлаб барча ҳадлари чексиз камаювчи

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

прогрессиянинг мос ҳадларидан катта эмас. Демак, ихтиёрий ε нуқтада текшириладиган қатор абсолют яқинлашувчи бўлади.

Биз юқорида кўриб чиқилган мисолдан биламизки, даражали қатор бўлган чексиз камаювчи геометрик прогрессия $|z| < 1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталарда яқинлашувчи, бошқа нуқталарда узоқлашувчи бўлади.

Шундай қилиб, ихтиёрий (43) даражали қаторни текширганимизда уч ҳол бўлиши мумкин: 1) қатор фақат z нинг марказида ($z = a$) яқинлашади; 2) қатор барча чекли z нуқталарда яқинлашади; 3) қатор айрим нуқталарда яқинлашади, айрим нуқталарда эса узоқлашади.

Учинчи ҳолни тулароқ текширамиз.

7-§. Даражали қаторнинг яқинлашиш доираси ва радиуси. Коши — Адамар формуласи

Юқорида айтиб ўтилган учинчи ҳол рўй берган вақтда даражали қаторнинг яқинлашиш соҳасини аниқлаш масаласи билан шуғулланамиз. Бунинг учун (43) қатор z , нуқтада яқинлашувчи ва z , нуқтада узоқлашувчи бўлсин, деб фараз қиламиз. У ҳолда, Абель теоремасига мувофиқ, $|z - a| < |z_1 - a| = R_1$ доира ичида қатор яқинлашувчи ва $|z - a| > |z_2 - a| = R_2$ доира ташқарисида узоқлашади ($R_1 < R_2$) экани равшан. Қаторнинг ҳалқада яқинлашиши ёки узоқлашиши номаълумдир.

Агар $R_1 = R_2 = R$ бўлса, $|z - a| < R$ доира ичида қатор яқинлашиб, ташқарисида узоқлашади. Агар $R_1 \neq R_2$ бўлса, $\frac{R_1 + R_2}{2} = R$, деб белгилаймиз. Абель тео-

ремасига мувофиқ, $|z - a| = R$ айлананинг бирор z , нуқтасида (43) қатор яқинлашса, $|z - a| < R$ доира ичида ҳам яқинлашади. Аксинча, агар z , нуқтада узоқлашса, $|z - a| > R$ да ҳам узоқлашади. Шу билан биз R_1 ва R_2 радиусли доиралар орасидаги ҳалқани торайтира борамиз (85-чизма).

Фараз этайлик, $|z - a| < R$ доирада (43) қатор яқинлашувчи бўлсин. У вақтда

$$\frac{R_1 + R_2}{2} = R$$



85-чизма.

бўлсин. L нинг таърифидан ихтиёрий кичик $\varepsilon > 0$ ва n нинг чексиз кўп қийматларида

$$\sqrt[n]{|c_n|} > L - \varepsilon$$

бўлади. ε ни бундай танлаб оламиз:

$$\varepsilon < \left(L - \frac{1}{|z-a|} \right).$$

Бу ҳолда

$$\sqrt[n]{|c_n|} > L - \left(L - \frac{1}{|z-a|} \right) = \frac{1}{|z-a|}$$

ёки

$$|c_n| |z-a|^n > 1.$$

Охирги тенгсизлик n нинг чексиз кўп қийматлари учун ўринли бўлганидан $c_n (z-a)^n$ ҳад $n \rightarrow \infty$ да нолга интилиши мумкин эмас, яъни қатор узоқлашувчи. Шундай қилиб, Коши — Адамар формуласи барча ҳоллар учун исбот бўлди.

1-мисол. Ушбу

$$z + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^2} + \dots + \frac{z^n}{n^2} + \dots$$

қаторнинг яқинлашиш радиуси топилсин. Бунда

$$c_n = \frac{1}{n^2}, \quad L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 0.$$

Демак, $R = \infty$, яъни қатор текисликнинг ҳамма чекли нуқталарида яқинлашади.

2-мисол.

$$z + 2^{\ln 2} z^2 + \dots + n^{\ln n} z^n + \dots$$

Бунда

$$c_n = n^{\ln n}, \quad L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{\ln n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{\ln n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n \cdot \ln n}{n}} = 1, \text{ демак, } R = 1.$$

3-мисол.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n = z + \frac{2^2}{2!} z^2 + \frac{3^3}{3!} z^3 + \dots + \frac{n^n}{n!} z^n + \dots$$

Бу қаторнинг яқинлашиш радиусини ҳисоблашда Стирлинг формуласидан фойдаланамиз:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{\theta}{12n}} \quad (0 < \theta < 1).$$

Бунга асосан:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}}} = e.$$

Демак,

$$R = \frac{1}{e}.$$

4-мисол.

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

Бу мисолда:

$$c_n = \begin{cases} \text{агар } n \text{ квадрат сон бўлса, } 1; \\ \text{агар } n \text{ квадрат сон бўлмаса, } 0. \end{cases}$$

Шундай қилиб, $\sqrt[n]{|c_n|}$ миқдор 1 га ёки 0 га тенг. Шунинг учун (47) кетма-кетликнинг лимит нуқталари 0 ва 1 дан иборат. Демак,

$$L = 1 \text{ ва } R = 1.$$

Куп ҳолларда даражали қаторнинг яқинлашиш радиусини Даламбер аломатидан фойдаланиб топиш ҳам қулайдир. Масалан, 3-мисолда:

$$\left| \frac{c_{n+1} z^{n+1}}{c_n z^n} \right| = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n |z|.$$

Демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n |z| = e|z|.$$

Бундан, қатор $|z| < \frac{1}{e}$ да абсолют яқинлашувчилиги, $|z| > \frac{1}{e}$ да эса узоқлашувчилиги келиб чиқади, яъни унинг яқинлашиш радиуси $R = \frac{1}{e}$.

Шундай қилиб, агар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = L$$

бўлса, у ҳолда яқинлашиш радиуси:

$$R = \frac{1}{L}.$$

5-мисол.

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Худди шунга ўхшаш,

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

қаторларнинг ҳам яқинлашиш радиуси $R = \infty$, яъни бу қаторлар маркази O нуқтада жойлашган ҳар қандай катта доирада яқинлашувчидир.

8-§. Тейлор қатори

Ушбу

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots \quad (49)$$

даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $R > 0$ бўлсин, дейлик. Абель теоремасига мувофиқ бу қатор R' радиусли ($R' < R$) ҳар қандай доирада текис яқинлашувчидир. Қаторнинг ҳар бир ҳади чекли текисликда, жумладан юқорида айтилган доирада аналитик бўлгани учун Вейерштрасс теоремасига мувофиқ қатор йиғиндиси

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots \quad (50)$$

шу доирада аналитик бўлади ҳамда (50) дан истаганча ҳосила олиш мумкин бўлиб, ҳосилавий қаторлар $|z-a| \leq R'$ доирада текис яқинлашади.

$$f'(z) = c_1 + 2c_2(z-a) + 3c_3(z-a)^2 + \dots + nc_n(z-a)^{n-1} + \dots,$$

$$f''(z) = 2 \cdot 1 \cdot c_2 + 3 \cdot 2 \cdot c_3(z-a) + \dots + n(n-1)c_n(z-a)^{n-2} + \dots,$$

$$f^{(k)}(z) = k(k-1)(k-2)\dots 2 \cdot 1 \cdot c_k + (k+1)k\dots 3 \cdot 2 \cdot c_{k+1} \times \\ \times (z-a) + \dots$$

Булардаги $z = x + iy$ — яқинлашиш доираси ичидаги ихтиёрий нуқтадир. Хусусий ҳолда $z = a$ доира марказидан иборат бўлиб, сунгги тенгликлардан қуйидаги

$$f(a) = c_0, f'(a) = c_1, f''(a) = 2!c_2, \dots, f^{(k)}(a) = k!c_k, \dots$$

ёки

$$c_0 = f(a), c_1 = \frac{f'(a)}{1!}, c_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \dots, c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \dots \quad (51)$$

формулалар келиб чиқади. Мана шу қийматларни (50) тенгликка қўйилса

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots + \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots \quad (52)$$

ҳосил бўлиб, бу қатор $f(z)$ функциянинг Тейлор қатори деб аталади. (51) нинг ўнг томонидаги сонлар эса Тейлор коэффицентлари дейилади. Демак, ҳар қандай мусбат даражали қаторни Тейлор қаторига айлантириш мумкин. Шу билан қуйидаги теорема исбот қилинди.

Теорема. Даражали

$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots$ қатор йиғиндиси яқинлашиш доираси ичида аналитик функциядан иборат бўлиб, бу қатор ўз йиғиндисининг Тейлор қаторидир

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \text{ ва } \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$$

қаторлар a нуқтанинг $|z-a| < R$ атрофида битта $f(z)$ йиғиндига эга бўлсин, деб фараз қилайлик. У ҳолда исботланганга асосан $c_n = b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Бу эса даражали қаторга ёйишнинг ягоналик хоссасини ифодалайди.

Функцияни Тейлор қаторига ёйиш. Биз берилган ҳар қандай мусбат даражали қаторни Тейлор қаторига келтиришни ўргандик. Энди берилган функцияни даражали, яъни Тейлор қаторига ёйишни ўрганамиз. Бунинг учун уша функция маълум бир шартга бўйсунishi керак.

$f(z)$ функция, K айлана билан чегараланган $|z-a| < R$ доира ичида аналитик бўлсин, деб фараз этайлик. Мана шу K айлана ичидаги ихтиёрий нуқтани z билан белгилаб, маркази a нуқтага жойлашган R' радиусли ($R' < R$) бир C айлана чизайликки, z нуқта шунинг ичида қолсин (86-чизма).



86-чизма.

Берилган $f(z)$ функция C айланада ва унинг ичидаги доирада аналитик булгани учун Кошининг формуласи ўринлидир:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

бунда ζ нуқта C айлана устидаги ихтиёрий нуқта, z эса C ичидаги нуқтадир.

Қўйиладиган масала мана шу $f(z)$ аналитик функцияни $z-a$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйишдан иборат. Равшанки,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{(\zeta - a) \left(1 - \frac{z-a}{\zeta-a} \right)}$$

Энди, 86-чизмадан:

$$|z - a| < |\zeta - a|, \text{ демак, } q = \left| \frac{z - a}{\zeta - a} \right| < 1.$$

$$\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = 1 + \frac{z-a}{\zeta-a} + \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^2 + \dots + \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n + \dots \quad (54)$$

булиб, (53) га буни қўйсак, ушбу

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} + \frac{z-a}{(\zeta-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(\zeta-a)^3} + \dots + \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} + \dots \quad (55)$$

С ичидаги ёпиқ доирада абсолют ва текис яқинлашувчи қаторга эга бўламиз. Бу қаторнинг икки томонини $f(\zeta)$ аналитик функцияга купайтирилса ҳам у текис яқинлашувчи бўлиб қолаверади, чунки $|f(\zeta)|$ чеклидир. Шу сабабли уни ҳадлаб интеграллай оламиз:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - a} + (z-a) \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^2} + \\ &+ (z-a)^2 \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^3} + \dots + (z-a)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} + \dots \end{aligned}$$

Тенгликнинг чап томони Коши формуласига асосан $f(z)$ га тенг ва унг томонидаги интегралларни эса $f(z)$ нинг a нуқтадаги мос ҳосилалари билан алмаштирилса,

$$\begin{aligned} f(z) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (z-a) + \frac{f''(a)}{2!} (z-a)^2 + \dots + \\ &+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n + \dots \end{aligned} \quad (56)$$

Тейлор қатори ҳосил бўлади. Демак, (51) га асосан

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \quad (57)$$

($n = 0, 1, 2, \dots$) Тейлор коэффицентларини ҳисоблаш интеграл формулаларига эга бўламиз.

Хусусий ҳолда, $a = 0$ бўлиб (56) дан:

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + \dots \quad (58)$$

қатор ҳосил бўлади. Шундай қилиб, қуйидаги теорема исбот қилинди.

Теорема. Берилган a нуқтада аналитик бўлган ҳар қандай $f(z)$ функцияни шу нуқтанинг бирор атрофида $(z-a)$ нинг даражалари бўйича Тейлор қаторига ёйиш мумкин. Бу қа-

тор $f(z)$ аналитик бўлган $|z - a| < R$ доирада яқинлашувчидир.

Изоҳ. $f(z)$ функция $|z - a| = R$ айлананинг барча нуқталарида аналитик бўлиши мумкин эмас. Ҳақиқатан, акс ҳолда бу айлананинг ҳар бир ζ нуқтаси учун $|z - \zeta| < r_\zeta$ доира мавжуд бўлиб, $f(z)$ бу доирада аналитик бўлади. r радиус r_ζ радиусларнинг энг кичиги бўлсин (бундай r нинг мавжудлиги Гейне-Борель леммасидан келиб чиқади: агар ёпиқ ва чегараланган $\bar{G}$ соҳанинг ($\bar{G}$ урнига узлуксиз чизиқ олиш ҳам мумкин) ҳар бир z нуқтаси K_z доиранинг маркази бўлса, у ҳолда $\bar{G}$ соҳани қопловчи чекли сондаги шундай доиралар мавжуддир.

Бу леммани исботлаш учун $\bar{G}$ соҳани бирор Q_1 квадрат ичига жойлаштириб, сунгра ҳақиқий аргументли функциялар назариясидагига ўхшаш мулоҳазаларни юритиш кифоядир. У ҳолда равшанки, $f(z)$ функция $|z - a| < R + r$ доирада ҳам аналитик бўлади, демак, аввалги теоремага асосан, $f(z)$ функция Тейлор қаторининг яқинлашиш радиуси ҳам $R + r$ га тенг бўлиши керак. Бунинг бўлиши мумкин эмас, чунки шарт бўйича у радиус R га тенг эди. Шундай қилиб, $|z - a| = R$ айлананинг барча нуқталарида $f(z)$ функция аналитик бўлмас экан, яъни бу айланада функциянинг камида битта махсус нуқтаси бор. Бундан қуйидаги хулоса келиб чиқади: *а нуқтада аналитик бўлган $f(z)$ функция маркази а да ва чегараси а га энг яқин бўлган $f(z)$ функциянинг махсус нуқтасидан утувчи доирада Тейлор қатори билан ифодаланади.* Бу изоҳ $f(z)$ функция табиаи билан бу функция ёйилган даражали қатор яқинлашиш радиуси уртасидаги боғланишни очиб беради. У даражали қаторлар назарияси ўзининг тула ифодасини фақат комплекс соҳада топишини кўрсатади.

Масалан, математик анализдан маълумки,

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \quad (*)$$

қатор $|x| < 1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x лар учун яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси $\frac{1}{1+x^2}$ га тенг. Бу функция эса x ўзгарувчи $-\infty$ дан $+\infty$ гача ўзгарганда аниқланган.

Ҳақиқий ўзгарувчилар соҳасида (*) қаторнинг йиғиндиси барча x ларда аниқланган бўлишига қарамай, нима учун текширилаётган қатор $x \leq -1$ ва $x > 1$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи x нинг қийматларида яқинлашувчи бўлмайди, деган саволга жавоб бера олмаймиз. Агарда юқоридаги қаторни комплекс соҳада текширсак, бу саволга дарҳол жавоб берамиз, чунки $\frac{1}{1+z^2}$ функция учун $z = \pm i$ махсус нуқталар бўлади, шунинг натижасида текширилаётган қаторнинг яқинлашиш радиуси 1 га тенг. Одатда, $f(z)$ функция a нуқта атрофида ($z - a$)

нинг даражалари бўйича қаторга ёйилса, уни a нуқтада голоморф функция дейилади. Демак, $f(z)$ функциянинг a нуқтадаги голоморфлиги билан аналитиклиги ўзаро эквивалент тушунчалардир.

9-§. Элементар функцияларни даражали қаторларга ёйиш

Маълумки, e^z , $\sin z$ ва $\cos z$ функциялар текисликнинг ҳар қандай чекли O қисмида аналитик бўлгани учун маркази ноль нуқтада ётувчи ҳар қандай C айлана ичида ҳам аналитик бўлиб, уни қаторга ёйиш мумкин.

$$a) f(z) = e^z, f'(z) = (e^z)' = e^z, f''(z) = e^z, \dots, f^{(n)}(z) = e^z, \dots,$$

$f(0) = e^0 = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 1, \dots, f^{(n)}(0) = 1, \dots$
бўлгани сабабли, (58) га асосан:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

Шунингдек,

$$b) f(z) = \sin z, f'(z) = \cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right), f''(z) = -\sin z = \sin\left(z + \pi\right), \dots, f^{(n)}(z) = \sin\left(z + n \frac{\pi}{2}\right), \dots$$

бўлгани учун

$$f(0) = \sin 0 = 0, f'(0) = \sin \frac{\pi}{2} = 1, f''(0) = \sin \pi = 0, \dots$$

бўлиб, буларни (58) га қўйилса:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

Худди шу усулда $\cos z$ ни қаторга ёйиш мумкин:

$$b) f(z) = \cos z,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

а), б) ва в) мисоллардаги қаторларнинг яқинлашиш радиуси $R = \infty$ эканлигини кўрган эдик. Кўп вақт e^z , $\sin z$ ва $\cos z$ элементар функцияларнинг таърифи сифатида шу қаторлар қабул қилинади.

г) $f(z) = \ln z$ функцияни $z = 1$ га нисбатан қаторга ёйилсин.

$$f'(z) = (\ln z)' = \frac{1}{z} = z^{-1}, f''(z) = -z^{-2}, f'''(z) = 2z^{-3},$$

$$f^{IV}(z) = -2 \cdot 3 \cdot z^{-4}, f^V(z) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot z^{-5}, \dots$$

Умуман,

$$f^{(k)}(z) = (-1)^{k-1} (k-1)! z^{-k} (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Булардан:

$$f(1) = \ln 1 = 0, f'(1) = 1, f''(1) = -1, f'''(1) = 2, \\ f^{IV}(1) = -3!, \dots, f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1} (n-1)!, \dots$$

У ҳолда, (56) га мувофиқ:

$$\ln z = (z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 + \dots + (-1)^{n-1} \times \\ \times \frac{1}{n}(z-1)^n + \dots$$

Бунинг яқинлашиш доираси $|z-1| < 1$ дан иборат эканлигини текшириб кўриш қийин эмас.

д) $f(z) = \operatorname{arctg} z$ ни z га нисбатан даражали қаторга ёйилсин.

$$f'(z) = \frac{1}{1+z^2}, f''(z) = -\frac{2z}{(1+z^2)^2}, f'''(z) = -\frac{2(1-3z^2)}{(1+z^2)^3}, \dots$$

Булардан:

$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = 2!, f^{IV}(0) = 0, \dots$
ҳосил бўлиб, (58) га қўйгандан сўнг

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots$$

ёйилмага эришамиз.

Бу мисолни иккинчи усул билан ечиш қулайроқдир. Маълумки,

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + \dots + a^n + \dots,$$

агар $a = -z^2$ деб қабул қилсак,

$$\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots \quad (59)$$

қаторнинг абсолют ва текис яқинлашмоғи учун $|a| = |-z^2| = r < 1$ бўлиши етарли. Шу сабабли бу қаторни ҳадлаб интеграллаш қонунийдир, демак,

$$\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \int_0^z dz - \int_0^z z^2 dz + \int_0^z z^4 dz - \int_0^z z^6 dz + \dots = \\ = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots$$

Бу усулнинг қулайлиги шундаки, $f(z) = \operatorname{arctg} z$ дан юқори тартибли ҳосилаларнинг умумий формуласини излаб ўтиришнинг ҳожати йўқ.

е) $f(z) = \sqrt[m]{z}$ функция кўп қийматли бўлиб, унинг бир тармоғини $(z-1)$ га нисбатан даражали қаторга ёйилсин.

$$f(z) = z^{\frac{1}{m}}, f'(z) = \frac{1}{m} z^{\frac{1}{m}-1}, f''(z) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) z^{\frac{1}{m}-2}, \dots$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \left(\frac{1}{m} - 2 \right) \dots \left(\frac{1}{m} - n + 1 \right) z^{\frac{1}{m} - n}, \dots$$

Энди $z = 1$ қийматни қўйсақ,

$$f(1) = 1, f'(1) = \frac{1}{m}, f''(1) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - 1 \right), \dots$$

$$f^{(n)}(1) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \left(\frac{1}{m} - 2 \right) \dots \left(\frac{1}{m} - n + 1 \right), \dots$$

Буларни Тейлор қаторига қўйилса, ушбу

$$\begin{aligned} \sqrt[m]{z} &= 1 + \frac{1}{m}(z-1) + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \frac{(z-1)^2}{2!} + \dots + \\ &+ \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{m} - n + 1 \right) \frac{(z-1)^n}{n!} + \dots \end{aligned} \quad (60)$$

натижага эга бўлинади.

Шу масалани умумий равишда, яъни ҳамма тармоқлар учун қаторга ёйиш мумкин. Унинг учун ўзгарувчи z ни кўрсаткичли формада ёзиб оламиз:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi},$$

$$\begin{aligned} f(z) = \sqrt[m]{z} &= \sqrt[m]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[m]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{m} + \right. \\ &\left. + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{m} \right) = \sqrt[m]{r} e^{\frac{\varphi + 2k\pi}{m} i} = f(re^{i\varphi}), \end{aligned}$$

бунда $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Энди,

$$f(re^{i\varphi}) = r^{\frac{1}{m}} e^{\frac{i\varphi}{m}} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{m}}$$

тенгликнинг икки томонидан φ бўйича ҳосилалар оламиз, унинг учун чап томондаги $f(re^{i\varphi})$ нинг φ га нисбатан мураккаб функция эканлигини эсда сақлаймиз:

$$f'(re^{i\varphi}) \cdot rie^{i\varphi} = r^{\frac{1}{m}} e^{\frac{2k\pi i}{m}} \cdot e^{\frac{i\varphi}{m}} \cdot \frac{1}{m}.$$

Шу сабабли

$$f'(re^{i\varphi}) = \frac{1}{m} r^{\frac{1}{m}-1} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{m}} \cdot e^{\left(\frac{1}{m}-1\right)i\varphi}.$$

Бунинг икки томонидан яна φ бўйича ҳосила олайлик:

$$f''(re^{i\varphi}) \cdot rie^{i\varphi} = \frac{1}{m} r^{\frac{1}{m}-1} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{m}} \cdot e^{\left(\frac{1}{m}-1\right)i\varphi} \cdot \left(\frac{1}{m} - 1 \right) i,$$

буни соддалаштирилгандан сўнг

$$f''(re^{i\varphi}) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) r^{\frac{1}{m}-2} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{m}} \cdot e^{\left(\frac{1}{m}-2\right)i\varphi}$$

ва ҳоказо давом эттирилса:

$$f^{(p)}(re^{i\varphi}) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{m} - p + 1 \right) r^{\frac{1}{m}-p} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{m}} \cdot e^{\left(\frac{1}{m}-p \right) i\varphi}$$

($p = 1, 2, 3, \dots$).

Энди $z = 1$ бўлганда $|z| = r = 1$, $\varphi = 0$ бўлади. Шунинг учун

$$f^{(p)}(1) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{m} - p + 1 \right) e^{\frac{2k\pi i}{m}}$$

ва ҳоказо. Буларни Тейлор қаторига қўйилса умумий купайтирувчи

$$e^{\frac{2k\pi i}{m}}$$

қавс ташқарисига чиқиб, ушбу тенглик ҳосил бўлади:

$$\sqrt[m]{z} = e^{\frac{2k\pi i}{m}} \left[1 + \frac{1}{m}(z-1) + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \frac{(z-1)^2}{2!} + \dots \right]. \quad (61)$$

Хусусий ҳолда, $k = 0$ деб олсак, бундан (60) қатор келиб чиқади. Бу мисолдаги m ҳар қандай мусбат-сондир ($m \neq 0$).

к) $f(z) = \operatorname{ch} z$ гиперболик косинус z га нисбатан даражали қаторга ёйилсин.

Маълумки,

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

бундаги

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

ва

$$e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

Бунинг иккаласини қўшиб иккига бўлинса,

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots$$

л) $f(z) = \frac{1}{6-z}$ ни $z+1$ га нисбатан қаторга ёйилсин,

$$f(z) = (6-z)^{-1}, f'(z) = (6-z)^{-2}, f''(z) = 2(6-z)^{-3}, \dots$$

$$f'''(z) = 3!(6-z)^{-4}, \dots, f^{(n)}(z) = n!(6-z)^{-n-1}, \dots$$

Энди, $z = -1$ ни қўйиб чиқамиз:

$$f(-1) = \frac{1}{7}, f'(-1) = \frac{1}{7^2}, f''(-1) = \frac{2!}{7^3},$$

$$f'''(-1) = \frac{3!}{7^4}, \dots, f^{(n)}(-1) = \frac{n!}{7^{n+1}}, \dots$$

Тейлор қаторига қўйиб чиқилса,

$$\frac{1}{6-z} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2}(z+1) + \frac{1}{7^3}(z+1)^2 + \dots + \frac{1}{7^{n+1}}(z+1)^n + \dots$$

Бу қаторнинг яқинлашиш радиуси: $R=7$.

Шу мисолни қуйидагича ечиш осонроқ бўлур эди:

$$\frac{1}{6-z} = \frac{1}{7-(z+1)} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1-\frac{z+1}{7}} + \frac{1}{7} \left[1 + \frac{z+1}{7} + \left(\frac{z+1}{7} \right)^2 + \dots \right] = \frac{1}{7} + \frac{(z+1)}{7^2} + \frac{(z+1)^2}{7^3} + \dots$$

бунда

$$q = \left| \frac{z+1}{7} \right| < 1, \text{ яъни } |z+1| < 7$$

бўлиши шарт.

м) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ функция $z - \frac{\pi}{2}$ га нисбатан қаторга ёйилсин.

$$f'(z) = -\frac{\cos z}{\sin^2 z}, f''(z) = \frac{1 + \cos^2 z}{\sin^3 z}, \dots$$

(Бошқа ҳосилаларни топишни китобхонга қолдирамыз.)

Энди, z ўрнига $\frac{\pi}{2}$ ни қўйилса

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, f^{(III)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, f^{(IV)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5, \\ f^{(V)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, f^{(VI)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 61, \dots$$

Буларнинг ҳаммасини Тейлор қаторига қўйиб чиқамиз, у ҳолда

$$\frac{1}{\sin z} = 1 + \frac{1}{2!}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{5}{4!}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^4 + \frac{61}{6!}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^6 + \dots,$$

яқинлашиш радиуси: $R = \frac{\pi}{2}$.

10-§. Коши тенгсизлиги. Лиувилль теоремаси

Агар $f(z)$ функция бирор $|z-a| < R$ доира ичида аналитик бўлса, уни $(z-a)$ нинг даражалари бўйича Тейлор қаторига ёйишни олдин кўрган эдик. Ўша қаторнинг коэффициентлари (57) формулалар, яъни

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

орқали ифода қилиниши мумкин эди. Бундаги C маркази a нуқтада, радиуси $\rho = R' < R$ дан иборат айлана.

$f(z)$ функция Тейлор қаторининг $|z-a| < R$ яқинлашиш доирасида чегараланган, яъни $|f(z)| < M$ бўлсин деб фараз этайлик ($M > 0$). У ҳолда $|\zeta-a| = \rho$ ни эътиборга олсак, қуйидаги тенгсизликка эга бўлимиз:

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{\rho^{n+1}} \cdot 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n}.$$

Энди, ρ радиусни R радиусга истаганча яқинлаштириш мумкин бўлгани сабабли ушбу

$$|c_n| < \frac{M}{R^n}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (62)$$

Коши тенгсизликларига эга бўламиз. Маълумки, $n=0$) бўлса, сўнгги тенгсизликдан $|c_0| < M$ тенгсизлик келиб чиқади.

Агар текширилаётган $f(z)$ функция бутун текисликда аналитик бўлса, у ҳолда унинг яқинлашиш радиуси $R = \infty$ бўлиб, (62) тенгсизликдан

$$|c_0| < M, \quad |c_n| < 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

яъни $c_1 = c_2 = \dots = c_n = \dots = 0$ бўлиб, Тейлор қаторидан

$$f(z) = c_0$$

натижа келиб чиқади. Шундай қилиб, қуйидаги теорема исбот қилинди.

Лиувилль теоремаси. Агар $f(z)$ функция текислиكنинг барча нуқталарида аналитик ва чегараланган бўлса, у функция узгармас сондан иборатдир.

Изоҳ. Агар $f(z)$ функцияни даражали қаторга ёйганда у қатор текислиكنинг барча нуқталарида яқинлашувчи бўлса, $f(z)$ бутун функция дейилар эди. Демак, Лиувилль теоремасига кура, агар бутун функция чегараланган бўлса, у узгармас бўлади. Равшанки, e^z , $\cos z$, $\sin z$ лар бутун функциялар, лекин улар яқинлашиш доирасида чегараланмаганлиги учун айнан узгармас сонлар эмас.

11-§. Алгебранинг асосий теоремаси.

Лиувилль теоремасидан фойдаланиб олий алгебрадаги машҳур теоремани исбот қилиш мумкин.

Теорема. Ҳар қандай

$$P(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \dots + c_{n-1} z + c_n$$

купҳад ($n \geq 1$, $c_0 \neq 0$) камида битта нолга (илдизга) эга.

Исбот. Берилган $P(z)$ купҳадни бундай ёзамиз:

$$P(z) = z^n \left(c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots + \frac{c_{n-1}}{z^{n-1}} + \frac{c_n}{z^n} \right).$$

У ҳолда:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} P(z) = \infty \quad (63)$$

булиши аён, чунки c_n — ўзгармас сонлар ва $n = 1, 2, 3, \dots$. Теоремани исбот қилмоқ учун, аксинчасини, яъни текисликнинг бирорта ҳам z нуқтасида $P(z)$ нинг ноли йўқ, деб фараз қилайлик. У вақтда

$$f(z) = \frac{1}{P(z)} \quad (64)$$

функция бутун текисликда аналитик бўлади, яъни текисликнинг ҳар қандай z нуқтасида

$$f'(z) = - \frac{P'(z)}{[P(z)]^2}$$

ҳосила мавжуд, чунки бизнинг фаразиямизга мувофиқ бу касрнинг махражи нолга тенг бўла олмайди. Юқоридаги (63) лимитга асосан:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = - \frac{1}{\lim_{z \rightarrow \infty} P(z)} = 0.$$

Бундан, $f(z)$ функция чегараланган деган маъно келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, $f(z)$ функция нолга интилаётгани учун ($z \rightarrow \infty$ ҳолда) шундай мусбат R сонни топиш мумкинки, $|z| > R$ бўлганда $|f(z)| < 1$ бўлади. Агар $|z| < R$ доирадаги $|f(z)|$ нинг максимум қиймати M орқали белгиласак, у вақтда текисликдаги ҳар қандай z нуқта учун $|f(z)| < M + 1$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Шундай қилиб, бир томондан $f(z)$ функция бутун текисликда аналитик бўлса, иккинчи томондан шу текисликда чегараланган. Шу сабабли, Лиувилль теоремасига асосан, $f(z)$ функция айнан ўзгармас сонга тенг бўлади. Лекин $f(z)$ функция $z \rightarrow \infty$ да нолга интилаётгани учун биз айтган ўзгармас сон ўша нолнинг ўзгинасидир:

$$f(z) = \text{const} = 0.$$

$f(z)$ айнан ўзгармас сондан иборат бўлгани учун (64) тенгликка мувофиқ, $P(z)$ ҳам ўзгармас сон бўлиб қолади. Аммо $P(z)$ кўпхад бўлгани сабабли ўзгарувчидир. Демак, қарама-қаршиликка учрадик. Шу сабабли, P нинг ноли йўқ, деган фаразимиз нотўғри экан. $P(z)$ нинг ҳеч бўлмаганда битта ноли мавжуд. Шу билан теорема исботланди.

12-§. Функциянинг ноллари

Бирор G соҳада аналитик $f(z)$ функция берилган бўлиб, a ўша G нинг ички нуқталаридан бири бўлсин. Маълумки, маъна шу a нуқтанинг бирор атрофида $f(z)$ функцияни

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots$$

даражали қаторга ёйиш мумкин. Бундаги z ўрнига a қўйилса, $f(a) = c_0$ тенглик ҳосил бўлади.

Таъриф. Агар $c_0 = f(a) = 0$ бўлса a сон $f(z)$ функциянинг ноли деб аталади, яъни $f(z)$ функцияни нолга айлантирадиган ҳар қандай z нуқтани, шу функциянинг ноли дейилади. У ҳолда қаторнинг кўриниши бундай

$$f(z) = c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots$$

бўлиб қолади. Умуман, агарда

$$c_0 = 0, c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_{n-1} = 0,$$

аммо $c_n \neq 0$ бўлса, a сон $f(z)$ функциянинг n каррали ёки n тартибли ноли дейилади. Бу вақтда

$$f(z) = c_n(z-a)^n + c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \dots = (z-a)^n \varphi(z)$$

бўлиб,

$$\varphi(z) = c_n + c_{n+1}(z-a) + c_{n+2}(z-a)^2 + \dots$$

Бундан, 8-§ даги (57) формулаларга мувофиқ

$$\varphi(a) = c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \neq 0.$$

Демак, $f(z)$ функция n -тартибли a нолга эга бўлса, у ҳолда

$$f(a) = 0, f'(a) = 0, f''(a) = 0, \dots, f^{(n-1)}(a) = 0,$$

лекин $f^{(n)}(a) \neq 0$ бўлар экан. Бошқача айтганда, $f(z)$ функциянинг нолга тенг бўлмаган энг кичик $f^{(n)}(a)$ ҳосиласининг тартиби билан a нолнинг тартиби бир хил бўлади.

$\varphi(a) \neq 0$ бўлгани учун $\varphi(z)$ функция a нуқтанинг бирор

$$|z-a| < \delta$$

атрофида (доирада) ҳам нолга тенг бўлмаслигини кўрсатиш мумкин. Бунинг учун биз қуйидагича мулоҳаза қиламиз. $\varphi(z)$ функция, бирор доира ичида текис яқинлашувчи даражали қаторнинг йиғиндисидан иборат бўлгани туфайли аналитикдир, демак, у узлуксиз функциядир. Шу сабабли ҳар қандай $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сонни топиш мумкинки, $|z-a| < \delta$ бўлганда $|\varphi(z) - \varphi(a)| < \varepsilon$ бўлади. Агар биз

$$\varepsilon = \frac{|c_n|}{2} \text{ деб, } \varphi(a) = c_n \neq 0$$

ни эсга олсак, сўнгги тенгсизликни

$$|\varphi(z) - c_n| < \frac{|c_n|}{2}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бундан кўринадики $|z-a| < \delta$ атрофида $\varphi(z)$ функция нолга тенг бўла олмайди, чунки $\varphi(z) = 0$ деб фараз қилсак,

$$|-c_n| < \frac{|c_n|}{2}$$

каби нотўғри натижа келиб чиққан булур эди. Бу фикримиздан келиб чиқадиган муҳим хулоса шуки,

$$f(z) \equiv z - a)^n \varphi(z)$$

функция $|z - a| < \delta$ агрофда a дан бошқа ҳеч қанлай нолга эга эмас. Шундай қилиб, қуйидаги теорема исбот қилинди.

Теорема. Берилган $f(z)$ функция a нуқтада аналитик бўлиб, унинг ҳеч қандай атрофида айнан нолга тенг бўлмасин. У вақтда, агар a сон $f(z)$ функциянинг ноли бўлса, a нуқтанинг шундай атрофи мавжудки, унда $f(z)$ функциянинг бошқа ноллари йўқ.

Мана шу теоремадан қуйидаги муҳим натижа келиб чиқади.

Натижа. Агар $f(z)$ функция a нуқтада аналитик ва $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots$ нуқталар кетма-кетлиги $f(z)$ нинг нолларидан иборат бўлиб, a нуқтага яқинлашувчи бўлса, у ҳолда a нуқтанинг бирор атрофида $f(z) \equiv 0$ бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $f(z)$ функция a нуқтада аналитик, демак, узлуксиз бўлгани учун

$$f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 0,$$

яъни a сон $f(z)$ нинг нолдир. Энди, агар a нинг бирор атрофида $f(z) \neq 0$ деб фараз қилсак эди, юқоридаги теоремага қура, a нинг ҳеч қандай агрофида $f(z)$ нинг a дан бошқа ноллари йўқ, деган натижага келар эдик. Ҳолбуки, $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ нуқталарнинг кўпчилиги a нинг яқин атрофига жойлашган бўлиб, шартимизга мувофиқ,

$$f(z_1) = 0, f(z_2) = 0, \dots, f(z_n) = 0, \dots$$

Демак, a нинг бирор атрофида:

$$f(z) \equiv 0.$$

Теореманинг исботи шундан иборат.

Агар $n = 1$ бўлса, a сон $f(z)$ функциянинг оддий ноли дейилади. Олий алгебрада, функциянинг ноли дейиш урнига илдизи дейилади.

Умуман, берилган функция битта ҳам нолга эга бўлмаслиги ёки чексиз кўп нолларга эга бўлиши мумкин.

1-мисол. $f(z) = z^2 + 1$ нинг ноллари: $z_1 = a_1 = i, z_2 = a_2 = -i$ бўлиб, иккаласи ҳам оддий нолдир.

2-мисол. $f(z) = \sin z$ нинг ноллари $z = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ чексиз кўп ва барчаси ҳам оддийдир.

3-мисол. $f(z) = (z + i)^2 (z - 1)$ нинг ноллари $z_1 = -i, z_2 = -i$ бўлиб, улардан биринчиси учинчи тартибдир, иккинчиси оддий нолдир.

4-мисол. $f(z) = e^z$ нинг битта ҳам ноли йўқ, чунки z ўрнига ҳар қандай чекли сон қўйилса ҳам e^z нолга айланмайди.

A-нуқталар. A — ихтиёрий чекли комплекс сон бўлсин. Бирор G соҳада аналитик бўлган $f(z)$ функциянинг A -нуқталари деб, $f(z) = A$ тенгламанинг илдиэларини айтилади. Бу таърифдан хусусий ҳолда, яъни $A = 0$ да функция нолининг таърифи келиб чиқади.

13-§. Ягоналик теоремаси

Комплекс ўзгарувчили функциялар назариясида энг муҳим роль уйнайдиган теоремалардан бири қуйидагидан ибораг.

Теорема. Агар $f(z)$ ва $\varphi(z)$ функциялар G соҳада аналитик ва G нинг ички a нуқтасига яқинлашувчи $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ нуқталар кетма-кетлигида бу функцияларнинг мос қийматлари ўзаро тенг бўлса, у ҳолда G соҳанинг ҳаммасида

$$f(z) \equiv \varphi(z)$$

бўлади.

Исбот. Ушбу

$$\psi(z) = f(z) - \varphi(z)$$

айирмани текширайлик. Теорема шартига мувофиқ бу айирма G соҳада аналитик ва

$$\psi(z_n) = f(z_n) - \varphi(z_n) = 0, \quad n=1, 2, 3, \dots,$$

яъни z_n нуқталар $\psi(z)$ нинг нолларидир. Иккинчи томондан, $z_n \rightarrow a$ (a — лимит нуқта). Демак, олдинги теореманинг натижасига асосан a нинг бирор

$$|z - a| < \delta_0$$

атрофида $f(z) - \varphi(z) = \psi(z) \equiv 0$, яъни $f(z) \equiv \varphi(z)$ бўлади.

Энди G соҳанинг барча нуқталарида $\psi(z) \equiv 0$ эканлигини исбот қилиш учун G ичидан бирор ихтиёрий z , нуқта олампиз. a билан z_0 ни барча нуқталари G ичида ётувчи бирор силлиқ чизиқ Γ билан туташтирайлик (87-чизма). $|z - a| < \delta_0$ доира ичида Γ да ётувчи ихтиёрий бир a_1 нуқта олайлик. Шу доирада, a_1 га яқинлашувчи z_n нуқталар кетма-кетлигини топиш қийин эмас; демак, a_1 ҳам ўз навбатида лимит нуқтадир. Шу сабабли олдинги параграфдаги теореманинг натижасига асосан a_1 нинг шундай бир

$$|z - a_1| < \delta_1$$

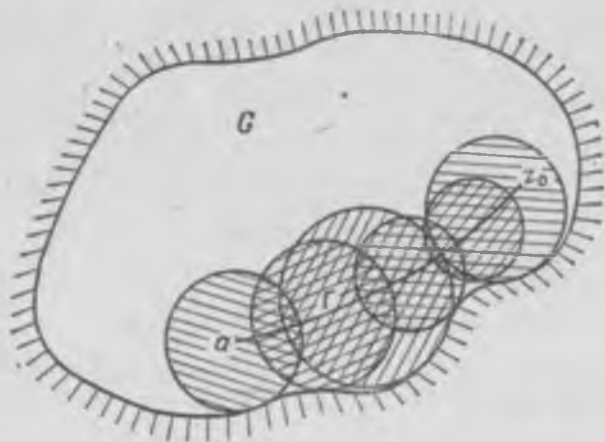
атрофи мавжудки, унда $\psi(z) \equiv 0$, яъни $f(z) \equiv \varphi(z)$ бўлади. a_1 ни $|z - a_1| < \delta_0$ айлана чегарасига яқин қилиб олинса, шубҳасиз, кейинги $|z - a_1| < \delta_1$ доиранинг бир қисми олдинги $|z - a| < \delta_0$ доира ташқарисига чиқиб кетади.

Энди, $|z - a_1| < \delta_1$, доира ичида ва Γ чизиқда ётувчи a_2 нуқта олсак, бу ҳам ўз навбатида лимит нуқта бўлиб қолади. Ҳалиги теореманинг натижасига мувофиқ, a_2 нуқтанинг ушбу

$$|z - a_2| < \delta_2$$

атрофида $\psi(z) \equiv 0$ бўлади. Шу усулда давом этсак, z_0 нуқтани ўз ичига олувчи (87-чизма)

$$|z - a_n| < \delta_n$$



87-чизма.

доиранинг ҳамма нуқталарида $\psi(z) \equiv 0$ бўлади. Хусусий ҳолда

$$\psi(z_0) = f(z_0) - \varphi(z_0) = 0,$$

яъни $f(z_0) = \varphi(z_0)$ бўлиб қолади. Шундай қилиб, G соҳанинг ихтиёрий z_0 нуқтасида $f(z)$ билан $\varphi(z)$ нинг қийматлари бир-бирига тенг экан.

Бу теоремадан қуйидаги икки натижа келиб чиқади.

1-натижа. G соҳада аналитик бўлган иккита $f(z)$ ва $\varphi(z)$ функция шу соҳага тегишли бирор нуқтанинг ихтиёрий кичик атрофида бир хил қийматларга эга бўлса, у ҳолда G соҳанинг барча нуқталарида $f(z) \equiv \varphi(z)$ бўлади.

2-натижа. G соҳада аналитик бўлган иккита $f(z)$ ва $\varphi(z)$ функциялар шу соҳага тегишли бирор кичик ёйда бир хил қийматларга эга бўлса, у ҳолда G соҳанинг барча нуқталарида $f(z) \equiv \varphi(z)$ бўлади.

Чунки иккала ҳолда ҳам теореманинг шартлари тўла бажарилади. Теореманинг маъноси шундаки, G соҳада иккита $f(z)$ ва $\varphi(z)$ функция берилган бўлса ҳам, аслида булар биттагина функция экан. Шу сабабчи бу теорема ягоналик теоремаси дейилади. Демак, иккита функциянинг бирор G соҳада тенглигини аниқлаш учун фақат G нинг бирор

қисмида уларнинг узаро тенглигини текшириш кифоя. Бу комплекс узгарувчи функцияларгагина хос бўлиб, биз уни ҳақиқий узгарувчили функциялар назариясида учратмаймиз.

Ягоналик теоремасидан бундай хулоса келиб чиқади: *бирор G соҳада аналитик бўлиб, айнан нолга тенг бўлмаган $f(z)$ функция G соҳанинг ҳар қандай қисмида ҳам, G да ётувчи бирор ёйда ҳам, G нинг ички нуқтасига яқинлашувчи кетма-кетликда ҳам нолга айланиши мумкин эмас.* Бундан қуйидаги лемма келиб чиқади.

Лемма. *G соҳада аналитик ва айнан нолга тенг бўлмаган $f(z)$ функция нолларининг чексиз кетма-кетлиги лимит нуқтага эга бўлса, у ҳолда бу лимит нуқта соҳанинг чегарасида ётади.*

Масалан, $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ функция чегараси O нуқтадан утувчи ҳар қандай соҳада ($0 < |z| < \infty$) аналитик, чунки бу функция учун O махсус нуқта. Бу функция $z = 0$ нуқтага яқинлашувчи $z_n = \frac{1}{n\pi}$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) нуқталар кетма-кетлигида нолга айланади.

14-§. Аналитик функцияларни даражали қаторга ёйишнинг баъзи бир усуллари

1. Даражали қаторларнинг қатори. Биламизки бирор $f(z)$ аналитик функциянинг Тейлор ёйилмасини топиш учун

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

формулалар ёрдами билан қатор коэффициентларини ҳисоблаш керак. Аммо $f(z)$ функциянинг кетма-кет ҳосилаларини ҳисоблаш ҳамма вақт ҳам осон бўлавермайди, буларни ҳисоблашдаги амаллар, мураккаб, баъзан бажарилиши қийин бўлиши мумкин. Лекин куп ҳолларда Тейлор ёйилмасини аввалдан маълум бўлган ёйилмалар ёрдами билан чиқариш мумкин. $f(z)$ функция бирор a нуқта $|z - a| < \rho$ атрофининг ичида текис яқинлашувчи аналитик функциялар қатори билан ифодаланган бўлсин, деб фараз қилайлик:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z). \quad (65)$$

У ҳолда Вейерштрасс теоремасига асосан қуйидагиларга эга бўламиз:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$$

ёки

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^{(k)}(a)}{k!}. \quad (66)$$

Бунда $\frac{1}{k!} f_n^{(k)}(a)$ ифода $f_n(z)$ функция Тейлор ёйилмасининг $(z-a)^k$ ҳади олдидаги коэффициенти, $\frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$ эса $f(z)$ Тейлор ёйилмасининг $(z-a)^k$ олдидаги коэффициенти.

Демак, аналитик функциялардан тузилган текис яқинлашувчи $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ қатор йиғиндиси $f(z)$ нинг мос Тейлор коэффициентлари ҳар бир $f_n(z)$ функциялар ёйилмасидаги бир хил даражали ҳадлар олдидаги коэффициентлар йиғиндисига тенг.

Мисол. Ушбу

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$$

қатор йиғиндисини текшираимиз. Бу қаторнинг ҳадлари $\frac{z^n}{1-z^n} = f_n(z)$ бирлик доирада z нинг аналитик функцияларидир. Шу билан бирга бу қатор бирлик доира ичида текис яқинлашувчи бўлади. Ҳақиқатан, $|z| < 1 - \delta = -\rho < 1$ бўлсин. У ҳолда $\left| \frac{z^n}{1-z^n} \right| < \frac{\rho^n}{1-\rho^n} < \frac{\rho^n}{1-\rho}$. Лекин $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{1-\rho}$ қа-

тор яқинлашувчи (чунки махражи ρ бўлган геометрик прогрессия) бўлгани учун берилган қатор бирлик доира ичида текис яқинлашувчи бўлади $f(z)$ функциянинг z^k ҳад олдидаги Тейлор коэффициентини топиш учун $\frac{z^n}{1-z^n}$ функциялар ёйилмасидаги z^k ҳад олдидаги коэффициентларнинг йиғиндисини ҳисоблаш керак.

$$\frac{z^n}{1-z^n} = z^n + z^{2n} + z^{3n} + \dots \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Агар k сон n га бўлинмаса, бундай ёйилманинг z^k ҳади олдидаги коэффициент нолга тенг, агар k сон n га бўлинса, у ҳолда бу коэффициент бирга тенг бўлади. Демак, $f(z)$ ёйилмасида z^k олдидаги коэффициент k нинг барча натурал бўлувчиларининг сони қадар бирлар йиғиндисига тенгдир. Буни биз $\tau(k)$ орқали белгилаб оламиз:

$$\tau(1) = 1, \tau(2) = 2, \tau(3) = 2, \tau(4) = 3, \tau(5) = 2, \tau(6) = 4, \dots$$

У ҳолда изланаётган ёйилма қуйидагича ёзилади:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau(k) z^k. \quad (67)$$

Вейерштрасс теоремасига асосан $f(z)$ функция бирлик доирада аналитик бўлгани учун топилган қатор бирлик доирада яқинлашувчи бўлади.

(67) қатор $z = 1$ да узоқлашади, чунки қатор $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(k)$ кўринишга эга бўлиб, унинг ҳадлари натурал сонлардан иборатдир. Бундан (67) қаторнинг яқинлашиш радиуси 1 га тенглиги келиб чиқади.

2. Мураккаб функциялар қатори. $f(z)$ функция ушбу

$$f(z) = F[\varphi(z)] \quad (68)$$

кўринишда ифодаланган бўлсин деб фараз қилайлик, бунда:

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots \quad (|z| < r) \quad (69)$$

ва

$$F(w) = A_0 + A_1(w - a_0) + A_2(w - a_0)^2 + \dots + A_m(w - a_0)^m + \dots \quad (70)$$

$$(|w - a_0| < R).$$

Шу билан бирга (69) ва (70) даражали қаторларнинг яқинлашиш радиуслари маълум. Фаразимизга асосан $z \rightarrow 0$ да $\varphi(z) \rightarrow a_0$, у ҳолда йсталган $R > 0$ учун шундай ρ ($0 < \rho \leq r$) сон курсатиш мумкинки, $|z| < \rho$ бўлганда $|\varphi(z) - a_0| < \kappa$ бўлади. Бу шартга кўра $w = \varphi(z)$ нуқта (70) қаторнинг яқинлашиш доирасига тегишли бўлади, демак, $f(z) = F(w) = F[\varphi(z)]$ функция $|z| < \rho$ да аналитик бўлади. Бунга асосан, $|z| < \rho$ да яқинлашувчи $f(z)$ функция z нинг даражалари бўйича қаторга ёйилади. Эндиги асосий масала шу қаторнинг коэффициентларини ҳисоблашдан иборат.

Ушбу

$$f(z) = F[\varphi(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} A_n [\varphi(z) - a_0]^n \quad (71)$$

қаторни текшираемиз, бу қатор $|z| < \rho$ да яқинлашувчи бўлишини ҳозиргина аниқладик. Қаторнинг текис яқинлашишидан фойдаланиш мақсадида ρ ни ундан катта бўлмаган ρ' ($0 < \rho' \leq \rho$) билан шундай алмаштирамизки, $|z| < \rho'$ доирада

$$|\varphi(z) - a_0| < \frac{R}{2}.$$

тенгсизлик бажарилсин. (70) қатор $|w - a_0| < \frac{R}{2}$ да текис яқинлашувчи бўлгани учун (71) қатор $|z| < \rho'$ да текис яқинлашади. Демак, $f(z)$ Тейлор қаторида z^k олдидаги коэффициентни $A_n [\varphi(z) - a_0]^n$ функциялар ёйилмасидаги бир хил коэффициентларнинг йиғиндисини олиб ҳосил қилиш мумкин. $A_n [\varphi(z) - a_0]^n$ ларнинг ёйилмалари $[\varphi(z) - a_0]$ учун тузилган қаторни ўзини-ўзига n марта кўпайтириш натижа-

сида ҳосил қилинади. Бу ҳолда ҳадлаб кўпайтириш қонунийдир, чунки даражали қатор ўзининг яқинлашиш доирасида абсолют яқинлашувчи бўлади.

Шундай қилиб, ушбу хулосага келамиз: $\varphi(z)$ — ноль нуқта атрофида, $F(z)$ эса $\alpha_0 = \varphi(0)$ нуқта атрофида аналитик бўлсин; $f(z) = F[\varphi(z)]$ функциянинг Тейлор қаторини ҳосил қилиш учун $w = \varphi(z)$ функциянинг (69) қаторини $F(w)$ функциянинг (70) қаторига қўйиб, зарурий даражага кўтариш, яъни қаторларни кўпайтиришни бажариш, сунгра z нинг бир хил даражалари қатнашган ҳадлар олдидаги коэффициентларни қушиш керак. Ҳосил бўлган қатор $f(z)$ функциянинг изланаётган Тейлор ёйилмаси бўлади. Бу қатор $|z| < \rho$ доирада яқинлашиши керак, бунда ρ ни шундай танлаб олинадики, $|z| < \rho$ да $|\varphi(z) - \alpha_0| < R$ бўлсин.

Даражали ёйилмаларни ҳосил қилишнинг баён қилинган йулини қаторни қаторга қўйиш дейилади.

Мисол.

$$f(z) = \sqrt{\cos z}.$$

Бу икки қийматли функциянинг $z = 0$ да 1 қиймат қабул қиладиган ноль нуқта атрофидаги тармоғини текшираемиз. Бу мисолга аввалги қондани қўллаш учун $f(z)$ ни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$f(z) = [1 - (1 - \cos z)]^{\frac{1}{2}}.$$

Бизнинг ҳолда:

$$w = \varphi(z) = 1 - \cos z = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \frac{z^8}{8!} + \dots \quad (|z| < \infty),$$

$$F(w) = (1 - w)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}w - \frac{1}{8}w^2 - \frac{1}{16}w^3 - \frac{5}{128}w^4 - \dots \quad (|w| < 1).$$

Демак,

$$\begin{aligned} f(z) = F[\varphi(z)] &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \frac{z^6}{720} - \dots \right) - \\ &- \frac{1}{8} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \dots \right)^2 - \frac{1}{16} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \dots \right)^3 - \dots \end{aligned}$$

Биринчи олтига даража олдидаги коэффициентларни ҳисоблаймиз:

$$\left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \dots \right)^2 = \frac{z^4}{4} - \frac{z^6}{24} + \dots, \quad \left(\frac{z^2}{2} - \dots \right)^3 = \frac{z^6}{8} - \dots.$$

Шуларга асосан:

$$f(z) = 1 - \frac{z^2}{4} - \frac{z^4}{96} - \frac{19z^6}{5760} - \dots$$

$f(z) = \sqrt{\cos z}$ функция $|z| < \frac{\pi}{2}$ доирада аналитик бўлгани учун, бу функциянинг қатори $|z| < \frac{\pi}{2}$ да яқинлашувчи бўлади.

3. Даражали қаторларни бўлиш. Иккита даражали қатор берилган бўлсин:

$$f_1(z) = a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_n(z-a)^n + \dots, \quad (72)$$

$$f_2(z) = b_0 + b_1(z-a) + \dots + b_n(z-a)^n + \dots \quad (73)$$

Бу қаторларнинг яқинлашиш радиуслари r ва ρ бўлиб, $f_2(a) = b_0 \neq 0$ бўлсин. σ орқали иккита r ва ρ сонлардан катта бўлмаганини белгилаб оламиз, яъни: $\sigma = \min(r, \rho)$ (агар $r = \rho$ бўлса, $\sigma = r = \rho$). У ҳолда $|z-a| < \sigma$ доирада иккала қатор ҳам яқинлашади. Агар бу доирада $f_2(z)$ функциянинг ноллари бўлса, радиуси σ дан кичик булган шундай доира оламизки, янги доирада $f_2(z)$ нолга айланмайди ($b_0 \neq 0$ шартга асосан a сон $f_2(z)$ функциянинг нол бўлмагани учун бундай доира мавжуд бўлади).

Бу доиранинг радиуси R бўлсин. $|z-a| < R$ доира ичида

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_n(z-a)^n + \dots}{b_0 + b_1(z-a) + \dots + b_n(z-a)^n + \dots} \quad (74)$$

нисбат, қасри дифференциаллаш қондасига асосан, аналитик функция бўлади. Шунинг учун $|z-a| < R$ доирада йиғиндисини $f(z)$ га тенг бўлган даражали

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots \quad (75)$$

қатор мавжуд. Бу қаторни (72) ва (73) қаторларнинг бўлини-маси деймиз. (72) ни (73) га бўлишни аниқмас коэффициентлар усули билан бажарамиз. Бунинг учун (74) муносабатни бундай ёзамиз:

$$[c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots] [b_0 + b_1(z-a) + \dots + b_n(z-a)^n + \dots] = a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_n(z-a)^n + \dots$$

Даражали қаторлар $|z-a| < R$ доирада абсолют яқинлашгани учун ҳадлаб кўпайтиришимиз мумкин:

$$\begin{aligned} c_0 b_0 + (c_0 b_1 + c_1 b_0)(z-a) + (c_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0)(z-a)^2 + \dots + \\ + (c_0 b_n + c_1 b_{n-1} + \dots + c_n b_0)(z-a)^n + \dots = \\ = a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_n(z-a)^n + \dots \end{aligned} \quad (76)$$

Бу тенглик чап ва унг томонидаги қаторларнинг йиғиндисини $|z-a| < R$ доирада ўзаро тенг бўлгани учун, даражали қаторларнинг ягоналик хоссасига асосан иккала қаторнинг мос коэффициентлари ўзаро тенг бўлади:

$$f_2(z) = \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

Бундан:

$$a_{2k} = 0, a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, b_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}, b_{2k+1} = 0, \\ k = 0, 1, 2, \dots$$

Бу коэффициентларни (77) системага қўйиб, ундан кетма-кет $c_0, c_1, c_2, \dots$ номуъалум коэффициентларни топишимиз мумкин ёки бу коэффициентларни (78) детерминант ёрдами билан ҳам ҳисобласак бўлади:

$$c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = \frac{1}{3}, c_4 = 0, c_5 = \frac{2}{15}, c_6 = 0, \\ c_7 = \frac{17}{315}, \dots$$

Демак, бу мисолда (75) ёйилма қўйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\lg z = z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \frac{17}{315} z^7 + \dots$$

15-§. Гармоник функцияни қаторга ёйиш

Аналитик ва гармоник функциялар орасидаги боғланишдан фойдаланиб, гармоник функцияни қаторга ёйиш қийин эмас.

$u(x, y)$ функция бирор $|z - z_0| < R$ доирада гармоник функция бўлсин. У ҳолда бу функция шу доирада абсолют яқинлашувчи қатор йиғиндиси сифатида ифодаланади:

$$u(x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} c_{m, n} (x - x_0)^m (y - y_0)^n. \quad (79)$$

Ҳақиқатан, IV бобнинг 10-§ даги теоремага асосан, $u(x, y)$ функцияни $|z - z_0| < R$ доирада аналитик бўлган $f(z)$ функциянинг ҳақиқий қисми деб қараш мумкин. Бу доирада $f(z)$ функцияни қўйидагича ифодалаш мумкин:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (80)$$

бунда $c_n = \alpha_n + i\beta_n$, α_n, β_n — ҳақиқий сонлар, (80) қатор улуғвий ҳадини бундай кўринишда ёзиб оламиз:

$$c_n (z - z_0)^n = (\alpha_n + i\beta_n) [(x - x_0) + i(y - y_0)]^n = \\ = (\alpha_n + i\beta_n) [(x - x_0)^n + i n (x - x_0)^{n-1} (y - y_0) - \\ - \frac{n(n-1)}{2!} (x - x_0)^{n-2} (y - y_0)^2 - \\ - i \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} (x - x_0)^{n-3} (y - y_0)^3 + \dots].$$

Бундан, ҳақиқий қисмини ажратсак, ушбу ифода ҳосил бўлади:

$$\alpha_n [(x - x_0)^n - \frac{n(n-1)}{2!} (x - x_0)^{n-2} (y - y_0)^2 + \dots] + \beta_n [-n(x - x_0)^{n-1} (y - y_0) + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} (x - x_0)^{n-3} (y - y_0)^3 - \dots]. \quad (81)$$

(80) қатор умумий ҳадининг ҳақиқий қисми абсолют қиймати бўйича ушбу

$$|c_n| |x - x_0| + |y - y_0|)^n$$

ифодадан катта бўлмайди (бунга ишонч ҳосил қилиш учун йиғиндининг абсолют қиймати қушилувчилар абсолют қийматларининг йиғиндисидан катта эмаслигини ҳамда $|\alpha_n|, |\beta_n| < |c_n|$ тенгсизликни эста олиш етарлидир).

Абель теоремасига асосан, (80) қатор ихтиёрий $|z - z_0| \leq r < R$ доирада абсолют яқинлашади, яъни $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$ қатор $r < R$ да

яқинлашади. У ҳолда умумий ҳади (81) дан иборат қатор $|x - x_0| + |y - y_0| < R$ соҳада абсолют яқинлашувчи бўлади. Бу қатор $u(x, y)$ функция ёйилмаси бўлиб, абсолют яқинлашгани учун унинг ҳадларини янгидан группалаб, талаб қилинган (79) қаторни ҳосил қиламиз. Агар қутби z_0 нуқтада бўлган ρ ва θ қутб координаталарини киритсак, (80) қатордан ҳақиқий ва мавҳум қисмларини ажратиб, гармоник функцияларнинг ёйилмасини қуйидагича ҳам ёзишимиз мумкин:

$$u(\rho, \theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta - \beta_n \sin n\theta) \rho^n, \quad (82)$$

$$v(\rho, \theta) = \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n \cos n\theta + \alpha_n \sin n\theta) \rho^n. \quad (83)$$

Бундаги $v(\rho, \theta)$ функция $f(z)$ нинг мавҳум қисми.

(82), (83) ёйилмаларнинг ҳар бир ҳади ҳам гармоник функциядир. Юқорида айтилганларга асосан, бирор аналитик функциянинг ҳақиқий қисми маълум бўлса, шу аналитик функциянинг ўзини аниқлаб берувчи формулани ҳам келтириб чиқариш мумкин.

$$\bar{c}_n = \alpha_n - i\beta_n \text{ ва } \alpha_n = \frac{c_n + \bar{c}_n}{2}, \beta_n = \frac{c_n - \bar{c}_n}{2i}$$

тенгликларни эътиборга олиб ва $u(x, y)$ функция қаторининг умумий ҳади бўлган (81) ифодада айрим оддий ўзгаришлар (масалан, $\alpha_n (x - x_0)^n = \frac{1}{2} (c_n + \bar{c}_n) (x - x_0)^n$ га ўхшаш) бажарилгандан сўнг, z_0 нуқта атрофида $u(x, y)$ нинг ёйилмасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$u(x, y) = \alpha_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| [(x - x_0) + i(y - y_0)]^n +$$

$$+ \bar{c}_n [(x - x_0) - i(y - y_0)]^n].$$

Бу қатор Абель теоремасига асосан x_0 ва y_0 га етарли яқин бўлган x ва y ларнинг комплекс қийматлари учун ҳам яқинлашувчи бўлади. Шунинг учун унда

$$x - x_0 = \frac{\zeta - z_0}{2}, \quad y - y_0 = \frac{\zeta - z_0}{2i}$$

(ζ нуқта z_0 га етарли яқин нуқта) деб олиш мумкин. У ҳолда

$$\begin{aligned} u\left(x_0 + \frac{\zeta - z_0}{2}, y_0 + \frac{\zeta - z_0}{2i}\right) &= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n (\zeta - z_0)^n - \\ &= z_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\zeta - z_0)^n - \frac{1}{2} c_0 = a_0 + \frac{1}{2} [f(\zeta) - c_0]. \end{aligned}$$

Бундан

$$f(\zeta) = 2u\left(x_0 + \frac{\zeta - z_0}{2}, y_0 + \frac{\zeta - z_0}{2i}\right) - 2a_0 + c_0.$$

Энди ζ нинг ўрнига z ёзамиз ҳамда

$$-2a_0 + c_0 = -\bar{c}_0, \quad x_0 + \frac{z - \bar{z}_0}{2} = \frac{z + \bar{z}_0}{2}, \quad y_0 + \frac{z - \bar{z}_0}{2i} = \frac{z - \bar{z}_0}{2i}$$

тенгликларни эътиборга олсак, ушбу формулага эга бўламиз:

$$f(z) = 2u\left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i}\right) - \bar{c}_0. \quad (84)$$

Агар $z_0 = 0$ бўлса,

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - \bar{c}_0. \quad (85)$$

Қуйидаги мисолларда ҳақиқий қисми гармоник $u(x, y)$ дан иборат аналитик функция аниқлансин:

1-мисол. $u(x, y) = x^2 - y^2$.

(85) формуладан фойдаланамиз:

$$f(z) = 2\left(\frac{z^2}{4} + \frac{z^2}{4}\right) + C = z^2 + C,$$

$f(0) = i$ бўлсин, у ҳолда $C = i$,

$$f(z) = z^2 + i.$$

2-мисол. $u(x, y) = x^2 - 3xy^2$.

(85) формуладан фойдаланамиз:

$$f(z) = 2\left(\frac{z^3}{8} - 3\frac{z}{2} \cdot \frac{z^2}{-4}\right) + C = z^3 + C.$$

3-мисол.

$$u = \ln(x^2 + y^2).$$

$z_0 = 1$ бўлсин, у ҳолда (84) формуладан фойдаланамиз:

$$f(z) + 2\ln \left[\frac{(z+1)^2}{4} - \frac{(z-1)^2}{4} \right] + C = 2\ln z + C.$$

4-мисол.

$$u = \frac{\sin 2x}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}, \quad z_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2 \sin \left(z + \frac{\pi}{2} \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{\pi}{2} - z \right) - \cos \left(z + \frac{\pi}{2} \right)} + C = \\ &= \frac{2 \sin \left(z + \frac{\pi}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - z \right) - \cos \left(z + \frac{\pi}{2} \right)} + C = \operatorname{ctg} z + C. \end{aligned}$$

Бу мисолларнинг ҳаммасида ҳам C — соф мавҳум ўзгармасдир.

М А Ш Қ Л А Р

Қуйидаги даражали қаторларнинг яқинлашиш радиуслари аниқлансин:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad 2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot z^n.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \cdot z^n, \quad 5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \cdot z^n, \quad 6. \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}.$$

$$7. \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot z^{n!}, \quad 8. \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}, \quad 9. \sum_{n=0}^{\infty} [3 + (-1)^n]^n \cdot z^n.$$

Қуйидаги функциялар z га нисбатан даражали қаторларга ёйилсин ҳам-да яқинлашиш радиуслари аниқлансин:

$$10. \operatorname{sh} z \quad 11. \sin^2 z, \quad 12. \frac{1}{az+b} \quad (b \neq 0).$$

$$13. \frac{z^2}{(z+1)^2}, \quad 14. \operatorname{Arctg} z \quad (\operatorname{Arctg} 0 = 0).$$

МАХСУС НУҚТАЛАР. ЛОРАН ҚАТОРИ

1-§. Манфий даражали қатор

Кўпинча $z - a$ га нисбатан манфий даражали

$$b_1(z-a)^{-1} + b_2(z-a)^{-2} + \dots + b_n(z-a)^{-n} + \dots \quad (1)$$

қатор ҳам ишлатилади. Бу қатордаги a ва $b_1, b_2, b_3, \dots$ коэффициентлар комплекс сонлардан иборатдир. Бу қаторнинг яқинлашиш соҳасини аниқлаш мақсадида вақтинча $Z = (z-a)^{-1} = \frac{1}{z-a}$ деб олсак, (1) қатор

$$b_1 Z + b_2 Z^2 + \dots + b_n Z^n + \dots$$

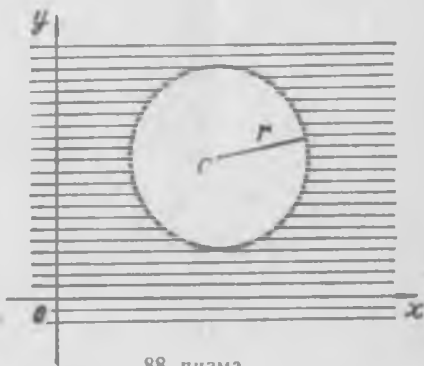
мусбат даражали қаторга айланади. Бу қаторнинг яқинлашиш соҳаси $|Z| < R$ доирадан иборат эканлиги бизга V бобдан маълум бўлиб,

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}, \quad R = \frac{1}{r}. \quad (2)$$

Энди Z ўрнига қиймати қўйилса

$$|Z| = \left| \frac{1}{z-a} \right| < R \text{ ёки } |z-a| > r \quad (3)$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Бу эса маркази a нуқтага жойлашган r радиусли айлана ташқарисидаги z нуқталар тўпламидир. Демак, манфий даражали (1) қаторнинг яқинлашиш соҳаси $|z-a| = r$ айлана ташқарисидан иборат экан (88-чизма). Хусусий $a=0$ ҳолда айлананинг маркази координаталар бошига жойлашган бўлади. Агар $r=0$ бўлса, яқинлашиш соҳаси текисликнинг, a дан бошқа, барча нуқталаридан иборат бўлади. Агар $r=\infty$ бўлса, қатор бирор нуқтада ҳам яқинлашмайди, яъни бутун текисликда ($z=\infty$ дан бошқа нуқталарда) узоқлашувчи бўлади.



88- чизма

Энди r ни чекли, яъни $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} < \infty$ деб ҳисоблай-

миз. У ҳолда берилган (1) қатор $|z-a| > r$ доира ташқарисида жойлашган ҳар қандай ёпиқ g соҳада яқинлашувчидир. Вейерштрасс теоремасига мувофиқ ўша соҳада қатор йиғиндиси бирор $\Phi(z)$ аналитик функцияга тенг бўлади:

$$\Phi(z) = \frac{b_1}{z-a} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{b_n}{(z-a)^n} + \dots \quad (1')$$

Равшанки, чексиз узоқлашган $z = \infty$ нуқтада бу функция $\Phi(\infty) = 0$ қийматга эга. Бу ҳолда $\Phi(z)$ функцияни чексиз узоқлашган нуқтада аналитик деб атаймиз. Демак, функциянинг чексиз узоқлашган нуқтада аналитик эканлигини билмоқчи бўлсак, уни (1) қаторга ёйиб, ўша қаторни $z = \infty$ нуқта атрофида яқинлашишини текшириш kifoya.

1-мисол. $\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots$

Бу мисолда $a = 0$, $b_1 = b_2 = \dots = b_n = \dots = 1$ бўлгани учун (2) га кўра $r = 1$. Демак, қаторнинг яқинлашиш соҳаси $|z| > 1$ дан иборат, яъни маркази O нуқтада бўлган $r = 1$ радиусли $|z| = 1$ айлана ташқарисидан иборатдир.

2-мисол. $\frac{5}{z+2} + \left(\frac{5}{z+2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{5}{z+2}\right)^n + \dots$

Бу мисолда

$$a = -2, b_n = 5^n (n = 1, \dots).$$

(2) га асосан $r = 5$. Демак, берилган қаторнинг яқинлашиш соҳаси $|z + 2| > 5$ дан иборатдир.

2-§. Лоран қатори

Мусбат ҳамда манфий даражали ҳадлардан тузилган қуйидаги умумий қатор билан танишайлик:

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots + b_1(z-a)^{-1} + b_2(z-a)^{-2} + \dots + b_n(z-a)^{-n} + \dots$$

ёки бу қаторни

$$\dots + c_n(z-a)^{-n} + \dots + b_3(z-a)^{-3} + b_1(z-a)^{-1} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots \quad (4)$$

кўрinishда ёзиш мумкин

Аслида бу қатор икки қисмдан иборатдир:

$$I_1 = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots, \quad (5)$$

бу эса Тейлор қатори бўлиб, (4) нинг тўғри қисми ва

$$I_2 = b_1(z-a)^{-1} + b_2(z-a)^{-2} + \dots + b_n(z-a)^{-n} + \dots \quad (6)$$

манфий даражали қатор бўлиб, (4) нинг бош қисми деб аталади.

Маълумки, Тейлор қаторининг яқинлашиш радиуси $R = \frac{1}{L}$ бўлиб,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Бу қатор $|z-a| < R$ доира ичида яқинлашувчи бўлиб, ташқарисида узоқлашади. (6) қаторнинг яқинлашиш радиуси (2) дан ибораг бўлиб, $|z-a| > r$ доира ташқарисида яқинлашади, доира ичида узоқлашади (5) ва (6) қаторларнинг яқинлашиш соҳаси $r < R$ бўлгандагина умумий нуқталарга эга бўлади.

Демак, (4) қаторнинг яқинлашиш соҳаси

$$r < |z - a| < R \quad (7)$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи K ҳалқадан иборат бўлиб, унинг ичида қатор абсолют яқинлашади (89- чизма). Ўша ҳалқанинг ичида ёғувчи ҳар қандай соҳада у текис яқинлашувчи экани ҳам шубҳасиз. Жумладан, шу ҳалқа ичида тула жойлашган торроқ

$$r' < |z - a| < R'$$

ҳалқа ичида (4) қатор текис яқинлашади ($r < r' < R' < R$). Шу сабабли у қатор йиғиндиси бирор $f(z)$ аналитик функцияни ифода қилади. Қулайлик учун $b_n = c_{-n}$ деб белгилайдилар, у ҳолда (4) қатор

$$f(z) = \dots + c_{-n}(z-a)^{-n} + \dots + c_{-2}(z-a)^{-2} + c_{-1}(z-a)^{-1} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots \quad (4')$$

ёки қисқароқ

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

формага эга бўлади. Мана шу қаторни математик Лоран¹ чуқур текширгани учун Лоран қатори дейилади.

Мабодо $c_{-1} = 0, c_{-2} = 0, \dots, c_{-n} = 0, \dots$ бўлса, бу қатордан Тейлор қатори келиб чиқади. Аксинча, агар $c_{-n} \neq 0, c_0 = c_1 = c_2 = \dots = 0$ бўлса, у ҳолда фақат манфий даражали ҳадлардан иборат қатор ҳосил бўлади. Демак, Тейлор қатори ҳам, манфий даражали қатор ҳам Лоран қаторнинг хусусий ҳоллари экан.

Агар $r < \rho < R$ бўлса, (4') қатор $|z-a| = \rho$ билан ифодаланган S айланада ҳам текис яқинлашади.

Бу қаторни $\frac{1}{2\pi i} (z-a)^{-k-1}$ га кўпай-

тирилса ҳам текис яқинлашаверади,

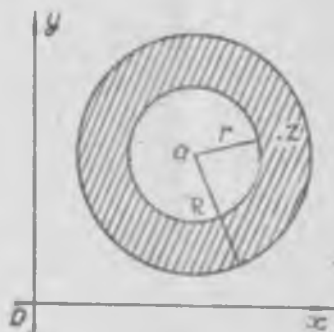
бунда k — ҳар қандай бутун сон. Шу сабабли у қаторни S бўйлаб интеграллаш қонунийдир:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{2\pi i} \oint_C (\zeta-a)^{n-k-1} d\zeta \quad (8)$$

Ўнг томондаги интеграллар

$$\oint_C (\zeta-a)^m d\zeta, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

¹ Лоран Пьер Альфонс (1813 — 1854) француз математиги бўлиб, унинг асли касби ҳарбий инженерлик бўлган.



89- чизма.

куринишга эга бўлиб, IV бобнинг 5-§ ига асосан, улар фақат $m = -1$ бўлгандагина нолдан фарқли бўлиб, қуйидаги қий-
матга эга:

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

Равшанки, бунинг учун $k = n$ бўлиши керак. Демак, (8) дан:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots). \quad (9)$$

Бу эса Лоран қаторидаги коэффициентларни қаторнинг $f(z)$ йигиндиси орқали ифода қилиб берадиган формуладир. Бундан шундай хулоса келиб чиқади: агар мос равишда бизга K_1 ва K_2 ҳалқаларда яқинлашувчи иккита

$$\varphi_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \text{ва} \quad \varphi_2(z) = \sum_{n=-\infty}^n b_n (z-a)^n$$

Лоран қатори берилган бўлиб, у ҳалқалар умумий $|z-a| = \rho$ айланага эга бўлса ва шу айлананинг барча нуқталарида ўша қаторларнинг йигиндилари бир-бирига тенг, яъни $\varphi_1(z) = \varphi_2(z)$ бўлса, у ҳолда $\varphi_1(z)$ ва $\varphi_2(z)$ функциялар учун тузилган (9) куринишдаги барча интеграллар узаро тенг бўлади. Шу сабаб-
ли $a_n = b_n$, яъни иккала қатор айнан бир хил бўлиб қолади. Хусусий ҳолда, агар K_1 ва K_2 ҳалқалар бир хил ва у ҳалқа-
даги ҳамма нуқталарда $\varphi_1(z) = \varphi_2(z)$ бўлса, буларга мос Лоран қаторлари ҳам айнан бир хил бўлади. Бу эса Лоран қато-
рига ёйишнинг ягоналик хоссасидир.

$$1\text{-мисол.} \dots + \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \dots +$$

$$+ \left(\frac{z}{2}\right)^n + \dots \text{ қаторнинг яқинлашиш соҳаси топилсин.}$$

$$I_1 = 1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z}{2}\right)^n + \dots = \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{2}{2-z},$$

агар $|q| = \left|\frac{z}{2}\right| < 1$, яъни $|z| < 2$ бўлса,

$$I_2 = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots = \frac{1}{z} \left[1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right] =$$

$$= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z-1},$$

агар $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, яъни $|z| > 1$ бўлса, берилган қатор

$$1 < |z| < 2$$

ҳалқа ичида абсолют ва текис яқинлашувчи бўлиб, унинг йигиндиси

$$\frac{2}{2-z} + \frac{1}{z-1} = \frac{z}{(2-z)(z-1)}.$$

3-§. Функцияни Лоран қаторига ёйиш

Олдинги параграфда биз тайёргина Лоран қатори билан танишдик. Энди эса берилган функцияни Лоран қаторига ёйишни урганамиз.

$f(z)$ функция доиравий K ҳалқа

$$r < |z - a| < R$$

да аналитик бўлсин, деб фараз қилайлик. Шу ҳалқа ичидаги ихтиёрий бир z нуқтани K' ҳалқа

$$r' < |z - a| < R'$$

ичига олайлик. Бу ҳолда $r < r' < R' < R$ деб тушуниш керак, шу сабабли K' ҳалқа K ҳалқа ичига тула жойлашгандир.

Энди, z нуқтани марказ қилиб шундай бир γ айлана $|\zeta - z| = \rho$ чизайликки, унинг барча нуқталари K' ҳалқа ичидан ташқари чиқмасин. У ҳолда $C_{R'} : |\zeta - a| = R'$, $C_{r'} : |\zeta - a| = r'$ ва γ айланалар билан чегараланган кўп боғламли G соҳада (90-чизма)

$$\psi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

функция аналитик бўлади. Коши теоремасига мувофиқ, G соҳанинг ташқи контури бўйлаб олинган интеграл ички контурлар бўйлаб олинган интеграллар йиғиндисига тенгдир:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R'}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R'}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Сўнгги ҳад Коши интегралидан иборат бўлгани учун $f(z)$ га тенг. Шунинг учун тенгликни бундай

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R'}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{r'}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad (10)$$

ёйиш мумкин. Мақсад, $f(z)$ функцияни $z - a$ га нисбатан қаторга ёйишдир. Унинг учун дастлаб (10) даги биринчи интегрални текшириб, қаторга ёямиз. Уша интеграл ишораси остидаги $\frac{1}{\zeta - z}$ касрни чексиз геометрик прогрессиянинг йиғиндиси кўринишига келтириб оламиз:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - a}{\zeta - a}} = \\ &= \frac{1}{\zeta - a} \left[1 + \frac{z - a}{\zeta - a} + \left(\frac{z - a}{\zeta - a} \right)^2 + \dots \right], \end{aligned} \quad (11)$$

бундаги

$$q = \left| \frac{z - a}{\zeta - a} \right| = \frac{|z - a|}{| \zeta - a |} = \frac{|z - a|}{R'} < 1,$$

чунки ζ нуқта $C_{R'}$ айлана устида, z эса айлана ичидадир. Энди (11) қатор умумий ҳадининг модулини кўрайлик:

$$\left| \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} \right| = \frac{q^n}{R'}.$$

Ўнг томондаги ҳадлардан тузилган ушбу

$$\frac{1}{R'} [1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots]$$



90- чизма.

мусбат ҳадли қатор яқинлашувчи бўлгани учун (11) қатор $C_{R'}$ айланада текис яқинлашади. Шу қаторни $\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R'}} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}$ га кўпайтиришдан ҳосил булган қатор ҳам уша айланада текис яқинлашади, чунки ҳалиги айланада $f(\zeta)$ нинг модули чегаралангандир. Демак,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R'}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R'}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \cdot (z - a)^n.$$

Текис яқинлашувчи мана шу қаторнинг икки томонидан $C_{R'}$ айлана бўйлаб интеграл олишга ҳақлимиз:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R'}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - a)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R'}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \dots + \\ &\quad + c_n(z - a)^n + \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

бунда:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R'}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Шундай қилиб, (10) тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи интегрални $z - a$ нинг мусбат даражалари бўйича қаторга ёйдик.

Энди (10) тенгликнинг ўнг томонидаги иккинчи интегрални ҳам худди шу усулда қаторга ёйиб чиқамиз. Ўша интеграл ишораси остидаги $-\frac{1}{\zeta - z}$ касрни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{(z - a) - (\zeta - a)} = \frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - a}{z - a}} = \\ &= \frac{1}{z - a} \left[1 + \frac{\zeta - a}{z - a} + \left(\frac{\zeta - a}{z - a} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\zeta - a}{z - a} \right)^n + \dots \right] = 1 \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^n}{(z - a)^{n+1}}, \quad (11')$$

бунда

$$q_1 = \left| \frac{\zeta - a}{z - a} \right| = \frac{r'}{|z - a|} < 1,$$

чунки ζ нуқта $C_{r'}$ айланада ва z эса унинг ташқарисидадир. (11') қатор ҳам $C_{r'}$ айланада текис яқинлашувчи бўлгани учун икки томонини $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ га кўпайтириб $C_{r'}$ бўйлаб интеграл олиш қонунийдир, демак,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{r'}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - a)^{n+1}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{r'}} (\zeta - a)^n f(\zeta) d\zeta = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} (z - a)^{-n} = c_{-1} (z - a)^{-1} + c_{-2} (z - a)^{-2} + \dots + \\ &\quad + c_{-n} (z - a)^{-n} + \dots, \end{aligned} \quad (12')$$

бунда:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{r'}} (\zeta - a)^{n-1} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{r'}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{-n+1}},$$

$n = 1, 2, 3, \dots$. Интегралларнинг (12) ва (12') лардаги қийматларини (10) га қўйилса,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - a)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n = \\ &= \dots + c_{-n} (z - a)^{-n} + \dots + c_{-1} (z - a)^{-1} + c_0 + c_1 (z - a) + \\ &\quad + \dots + c_n (z - a)^n + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

$f(z)$ функцияни Лоран қаторига ёйган бўламиз. Сўнгги тенгликдаги иккита йиғиндини битта қилишга асос шундаки, биз c_n ва c_{-n} коэффициентларга тегишли формулаларни қуйидагича битта қилиб ёздик:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots) \quad (14)$$

бундаги C ҳалқа орасида ётувчи маркази a нуқтага жойлашган ихтиёрий айланадир. Берилган $f(z)$ функцияни Лоран қаторига ёйиш учун унинг коэффициентларини (14) га асосланиб топиш кифоя. Лекин (14) нинг ўнг томонидаги интегрални ҳисоблаб чиқиш баъзан қийинчилик тугдиради. Бундай ҳолларда мисолнинг ўзига қараб сунъий йўллардан фойдаланиш

тавсия қилинади. Шундай қилиб, биз қуйидаги теоремани ис-
бог қилишга муваффақ бўлдик. Теоремани таърифлашдан ол-
дин Лоран қаторига тўлароқ таъриф бериб ўтиш мақсадга
мувофиқдир.

Таъриф. Коэффициентлари (14) формулалар орқали бе-
рилган (13) қатор $K(r < |z - a| < R)$ ҳалқадаги $f(z)$ функ-
циянинг Лоран қатори дейилади. $z - a$ га нисбатан мусбат
даражали ҳадларидан тузилган (12) қатор Лоран қаторининг
тўғри қисми ва манфий даражали ҳадларидан тузилган
(12') қатор унинг бош қисми дейилади.

Теорема. Агар $f(z)$ функция K ҳалқада бир қийматли
ва аналитик бўлса, у функцияни шу ҳалқада

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

Лоран қаторига ёйиш мумкин бўлиб, c_n коэффициентлар
(14) формулалар орқали топилади. Шу билан бирга K ни
 $f(z)$ нинг аналитиклигини кўрсатадиган энг катта ҳалқа
деб тушунамиз. Лоран қаторининг тўғри қисми бутун
 $|z - a| < R$ доирада ва бош қисми эса $|z - a| > r$ доира
ташқарисида яқинлашади. K ичидаги ҳар қандай ёпиқ
 $r' \leq |z - a| < R'$ ҳалқада Лоран қатори текис яқинла-
шади.

1-мисол. $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$ функция z нинг даражалари бўйича

Лоран қаторига ёйилсин.

Дастлаб берилган функцияни энг содда касрларга ажратиб оламиз:

$$z^2 - 3z + 2 = (z-1)(z-2); \quad \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}$$

Булардан одатдаги усул билан A ва B ларни топиб олинади, у ҳолда:

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

Равшанки, $f(z)$ функция $z = 1$ ва $z = 2$ нуқталарда чексизликка айла-
нади. Демак, қуйидаги учта доиравий ҳалқада $f(z)$ аналитик функция
бўлади:

- а) $|z| < 1$, яъни z нуқталар бирлик доира ичидан чиқмаслиги керак;
- б) $1 < |z| < 2$, яъни z нуқталар мана шу ҳалқа ичидан чиқмайди;
- в) $|z| > 2$, яъни z нуқталар мана шу доира ташқарисида бўлмоғи
керак. Биз берилган $f(z)$ функцияни мана шу учала соҳада учта Лоран
қаторига ёямиз.

а) $|z| < 1$ лар учун

$$-\frac{1}{z-1} - \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots \quad (a_1)$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \dots + \frac{z^n}{2^n} + \dots \right), \quad (a_2)$$

чунки:

$$\left| \frac{z}{2} \right| = \frac{|z|}{2} < \frac{1}{2} < 1.$$

У ҳолда:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \dots \right) + (1 + z + \\ &+ z^2 + \dots) = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) z + \left(1 - \frac{1}{2^3} \right) z^2 + \dots + \\ &+ \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) z^n + \dots \end{aligned}$$

Демак, $|z| < 1$ доирада $f(z)$ функция Тейлор қаторига ёйилар экан.

б) $1 < |z| < 2$.

Бу ҳолда (a_2) қатор ўз кучида қолади, чунки $\left| \frac{z}{2} \right| < 1$.

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots \right), \quad (a_3)$$

чунки $\left| \frac{1}{z} \right| < 1$. У ҳолда (a_2) ва (a_3) га мувофиқ

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{2} + \dots \right) - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right).$$

в) $|z| > 2$.

Бу ҳолда (a_3) қатор ўз кучида қолади, чунки $\left| \frac{1}{z} \right| < 1$.

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} + \dots + \frac{2^n}{z^n} + \dots \right), \quad (a_4)$$

чунки $\left| \frac{2}{z} \right| < 1$. У ҳолда (a_3) ва (a_4) га мувофиқ:

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^3} + \dots \right) - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{2^2-1}{z^3} + \frac{2^3-1}{z^4} + \dots + \frac{2^n-1}{z^{n+1}} + \dots \end{aligned}$$

Бу мисолда берилган $f(z)$ функция z га нисбатан Лоран қаторига ёйилади, яъни $1 < |z| < 2$ ҳалқанинг маркази $a=0$ координаталар бошидадир. Агар марказ, мисол учун, $a=1$ нуқтада бўлсин деб талаб қилинса, $f(z)$ функцияни $z-1$ га нисбатан Лоран қаторига ёйишга тугри келар эди.

2-мисол. $\sin \frac{1}{z}$ ва $\cos \frac{1}{z}$ функцияларнинг $z=0$ нукта атрофидаги Лоран ёйилмалари қуйидагича бўлишини аниқлаш қийин эмас:

$$\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{7!z^7} + \dots,$$

$$\cos \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \frac{1}{6!z^6} + \dots$$

Бу қаторлар $0 < |z| < \infty$ да яқинлашувчи бўлади.

3-мисол. Ушбу

$$\sin \frac{2z}{z-1}$$

функция $z=1$ нукта атрофида Лоран қаторига ёйилсин.
Берилган функцияни бундай ёзиб оламиз:

$$\sin \frac{2z}{z-1} = \sin \left(2 + \frac{2}{z-1} \right) = \sin 2 \cdot \cos \frac{2}{z-1} + \cos 2 \cdot \sin \frac{2}{z-1}.$$

Бундан, олдинди мисолга кўра дарҳол қуйидаги ёйилма келиб чиқади:

$$\sin 2 + \frac{2 \cos 2}{z-1} - \frac{2^3 \sin 2}{2!(z-1)^3} - \frac{2^5 \cos 2}{3!(z-1)^5} + \frac{2^7 \sin 2}{4!(z-1)^7} + \frac{2^9 \cos 2}{5!(z-1)^9} - \dots$$

4-§. Тўғри ва махсус нукталар

Функциянинг тўғри ва махсус нукталари ҳақидаги тушунча катта аҳамиятга эга бўлгани учун яна бир марта эслаб утамиз.

Таъриф. Агар $f(z)$ функция a нуктада аналитик бўлса, у ҳолда a нукта $f(z)$ нинг тўғри нуктаси дейилади.

Демак, бу таърифга мувофиқ, $f(z)$ функциянинг бирор a нуктаси тўғри ёки тўғри нукта эмаслигини билиш учун $f(z)$ нинг шу нуктада ва унинг атрофида $f'(z)$ ҳосиласини текшириб куриш керак. Агар ҳосила мавжуд бўлса, a нукта тўғри нукта бўлади.

1-мисол. $f(z) = e^z$ нинг ҳосиласи $f'(z) = (e^z)' = e^z$ бўлиб, z га ҳар қандай қиймат берилса ҳам $f'(z)$ аниқ қийматга эга. Демак, текисликнинг ҳамма чекли нукталари e^z учун тўғри нукталардир.

2-мисол. $f(z) = \frac{1}{z}$ нинг ҳосиласи $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ бўлиб, $z=0$ дан бошқа ҳар қандай z нукта тўғри нуктадир.

3-мисол. $f(z) = \operatorname{tg} z$ нинг ҳосиласи $f'(z) = \frac{1}{\cos^2 z}$ бўлиб, $z = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ дан бошқа барча z лар бу функция учун тўғри нукталардир ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), чунки $\cos(2n+1)\frac{\pi}{2} = 0$.

Таъриф. Берилган $f(z)$ функциянинг тўғри бўлмаган нуқтаси махсус нуқта дейилади.

Бу таърифга кўра, берилган $f(z)$ функция махсус нуқтада ҳосилага эга эмас.

4-мисол $f(z) = \operatorname{ctg} z$ нинг махсус нуқталари $z = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$), дан иборат.

5-мисол. $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ нинг махсус нуқталари $i, -i$ лардан иборат.

6-мисол. $f(z) = e^z$ нинг $z = \infty$ дан бошқа махсус нуқтаси йўқ.

7-мисол. $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$ функция учун $+1, -1$ нуқталар махсус нуқталардир.

5-§. Ажралган махсус нуқталар

Махсус нуқталарнинг хиллари жуда кўп бўлиб, улардан амалда кўп учрайдигани ажралган махсус нуқталардир.

Таъриф. Агар $f(z)$ функция a нуқтанинг бирор $0 < |z - a| < R$ атрофида аналитик бўлиб, a нуқтанинг ўзида аналитик бўлмаса, у ҳолда a нуқта $f(z)$ функциянинг ажралган (яккаланган) махсус нуқтаси дейилади.

Демак, бу таърифга кўра, a — ажралган махсус нуқта бўлса, $f(z)$ функция $|z - a| < R$ доира ичидаги $z = a$ марказдан бошқа ҳамма нуқталарда аналитикдир. Бошқача айтганда, $f(z)$ функция

$$r < |z - a| < R$$

доиравий ҳалқа ичида аналитик бўлиб, бундаги r исталганча кичик мусбат сондан иборат. Бу ҳалқани чизиш учун $|z - a| < R$ доиранинг $z = a$ марказини „ўйиб“ олиб ташлаш kifоя.

1-мисол. $\frac{1}{z}$ нинг ажралган махсус нуқтаси $z = 0$ дан иборат, чунки бу нуқтада функция ҳосилага эга бўлмай, унинг ҳар қандай $0 < |z| < R$ атрофида ҳосила мавжуд.

2-мисол. $\frac{1}{z + i}$ нинг ажралган махсус нуқтаси $z = -i$ дан иборат, чунки бу нуқтада берилган функция ҳосилага эга эмас, лекин унинг ҳар қандай $0 < |z + i| < R$ атрофида ҳосиласи мавжуд.

Ажралган махсус нуқталар уч типга, яъни қутулиб бўладиган (ёки четлаштириладиган) махсус нуқталар, қутблар ва муҳим махсус нуқталарга бўлинади.

Таъриф. Агар

а) $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$ бўлиб, A аниқ чекли сон бўлса, у ҳолда

a нуқта $f(z)$ функциянинг қутулиб бўладиган (ёки четлаштириладиган) махсус нуқтаси,

б) $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ бўлса, у ҳолда a нуқта $f(z)$ функциянинг қутби,

в) $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ мавжуд бўлмаса, a нуқта $f(z)$ нинг муҳим махсус нуқтаси дейилади.

Агар функция ажралган махсус нуқтага эга бўлса унинг қайси типга киришини асосан ўша функциянинг Лоран қатори ёрдами билан аниқланади.

6-§. Қутулиб бўладиган махсус нуқта

Функциянинг ажралган махсус нуқтасининг биринчи типга киришини қуйидаги теорема аниқлаб беради.

Теорема. $f(z)$ функциянинг ажралган a махсус нуқтаси қутулиб бўладиган махсус нуқта бўлишининг зарурий ва етарли шarti шу функциянинг a нуқта атрофидаги Лоран қаторига ёйилмаси бош қисмга эга бўлмаслигидан иборатдир:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots \quad (15)$$

Исбот. а) Лоран қаторининг бош қисми йўқ, яъни $f(z)$ функция (15) қаторга ёйилган деб, фараз этайлик. (15) нинг икки томонидан $z \rightarrow a$ фараз этиб лимитга ўтилса,

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0 \neq \infty$$

ҳосил бўлади. Бу эса, таърифга кўра, a нинг қутулиб бўладиган нуқта эканлигидан дарак беради.

б) $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$ деб фараз этайлик, бунда A — чекли сон бўлсин. Бундан шундай маъно чиқади: a нуқтанинг шундай кичик радиусли атрофи мавжудки, унда $f(z)$ функция чегараланган бўлади: $|f(z)| < M$, $M > 0$. Энди,

$$\rho < |z-a| < R$$

ҳалқада $f(z)$ ни Лоран қаторига ёйсақ, (14) формулага асосан:

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \right| < \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{\rho^{n+1}} \cdot 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n} = M\rho^{-n},$$

бунда γ радиуси ρ ва маркази a нуқтада бўлган айланадан иборат. Энди $n = -1, -2, -3, \dots$ фараз этиб $\rho \rightarrow 0$ да лимитга ўтилса, унг томони нолга тенг бўлади: $|c_n| = 0$. Демак,

$$c_{-1} = 0, c_{-2} = 0, \dots, c_{-n} = 0, \dots$$

га асосан (4') Лоран қаторининг бош қисми йўқолади. Шу билан теорема тўла исбот қилинди.

Бу теоремадан кўрнадик, бир томондан a нуқта махсус нуқта бўлгани учун $f(z)$ нинг a даги қиймати аниқ эмас, иккинчи томондан, агар a қутулиб бўладиган нуқта бўлса,

$$A = \lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0.$$

Шу сабабли, агар биз

$$f(a) = c_0$$

деб қабул қилсак, a нуқта махсусликдан озод қилинган (қутулган) бўлади. У вақтда Лоран қаторининг (15) қисми Тейлор қаторига айланиб, у $|z - a| < R$ доира ичида текис ва абсолют яқинлашади. Шу билан биз қуйидаги теоремани ҳам исбот қилдик.

Теорема. Агар $f(z)$ функция бирор ажралган махсус a нуқта атрофида чегараланган бўлса, у ҳолда a нуқта $f(z)$ учун қутулиб бўладиган махсус нуқта бўлади.

Мисол. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ функция $z = 0$ нуқтада аниқ эмас. $z \neq 0$ бўлганда

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{z} &= \frac{1}{z} \cdot \sin z = \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right) = \\ &= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots \end{aligned}$$

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \rightarrow a} \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots \right) = 1.$$

Демак, бу лимит чекли сондан иборат бўлгани учун $z = 0$ нуқта $\frac{\sin z}{z}$ учун қутулиб бўладиган махсус нуқта экан. Шу сабабли $f(0) = 1$ деб қабул қилсак, у ҳолда $f(z)$ функция $z = 0$ нуқтада аналитик бўлади.

7-§. Қутблар

Агар a нуқта $f(z)$ функциянинг қутби бўлса, у ҳолда қутбнинг таърифига кўра

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$$

тенгликка эга бўламиз. Бунинг маъноси шуки, a қутбнинг бирор $0 < |z - a| < R$ атрофида $f(z)$ функция нолга айланмайди, яъни ҳар қандай $M > 0$ сон учун a нинг шундай бир атрофини топиш мумкинки, унда

$$|f(z)| > M$$

бўлади. Мана шунга асосан

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$$

функция ўша атрофда аналитик бўлади, чунки унинг $f(z)$ махражи нолга тенг бўла олмайди. Ундан ташқари,

$$\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow a} f(z)} = 0$$

бўлгани сабабли $\varphi(z)$ функция учун a қутулиб бўладиган махсус нуқта бўлиб, $\varphi(a) = 0$ деб қабул қилишимиз мумкин. Натижада $\varphi(z)$ функция $|z - a| < R$ доирада аналитик бўлиб, a нуқта унинг нолидир. Шундай қилиб, агар a нуқта $f(z)$ учун қутб бўлса, $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ учун ноль экан.

Энди, аксинча, a нуқта $\varphi(z) \neq 0$ функциянинг ноли бўлсин дейлик, у вақтда ягоналик теоремасига мувофиқ a нуқтанинг бирор $0 < |z - a| < R$ атрофида бу функция a дан бошқа нолга эга бўла олмайди. Шу атрофда

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$$

функция аналитик бўлиб, a нуқта унинг қутбидир:

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z)} = \infty,$$

Натижада қуйидаги теорема исбот қилинди.

Теорема. Берилган a нуқтанинг $0 < |z - a| < R$ атрофида аналитик $f(z)$ функциянинг қутби a дан иборат бўлиши учун у

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$$

функциянинг ноли бўлиши зарур ва етарлидир.

Энди қутбнинг тартиби ҳақида сўз юритайлик.

Таъриф. $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ функция a нолининг тартибига $f(z)$ функция a қутбнинг тартиби дейилади.

Қуйидаги теоремани исбот қилайлик.

Теорема. $f(z)$ функциянинг ажралган махсус a нуқта-си қутб бўлиши учун $f(z)$ функциянинг a нуқта атрофида-ги Лоран қатори бош қисми ҳадларининг сони чекли бўли-ши зарур ва етарлидир:

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} +$$

$+ c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots$, (16)
бунда $c_{-k} \neq 0$.

Исбот. а) a нуқта $f(z)$ функциянинг k -тартибли қутби бўлсин, деб фараз қилайлик. У вақтда олдинги исбот қилинган

теоремага асосан a нуқта $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ функциянинг k -тартибли поли булади. Шу сабабдан $\varphi(z)$ ни қуйидаги қатор шаклида ёза оламиз:

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)} = c_k(z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1} + \dots = (z-a)^k \cdot \psi(z),$$

бунда

$$\psi(z) = c_k + c_{k+1}(z-a) + c_{k+2}(z-a)^2 + \dots$$

a нуқта атрофида аналитик ва $\psi(a) = c_k \neq 0$. Мана шуларга асосан a нинг бирор атрофида $\frac{1}{\psi(z)}$ функцияни Тейлор қаторига ёйиш мумкин:

$$\frac{1}{\psi(z)} = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots$$

У ҳолда юқоридаги ва сўнгги тенгликлардан:

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^k \psi(z)} = \frac{1}{(z-a)^k} [a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots] =$$

$$= \frac{a_0}{(z-a)^k} + \frac{a_1}{(z-a)^{k-1}} + \dots + \frac{a_{k-1}}{z-a} + a_k + a_{k+1}(z-a) + \dots \quad (17)$$

ёки булардаги a_k ларни c_k лар орқали белгиласак, (16) қаторга эга бўламиз. Демак, Лоран қаторидаги манфий даражали ҳадлар сони чекли экан.

б) Аксинча, $f(z)$ ни ажралган махсус a нуқта атрофида Лоран қаторига ёйганимизда бош қисмидаги ҳадлар сони чекли (k та) бўлсин, яъни Лоран қатори (16) кўринишга эга бўлсин, деб фараз қилайлик. Энди a нуқта $f(z)$ нинг k -тартибли қутби эканини исбот қиламиз.

Бунинг учун (16) нинг икки томонини $(z-a)^k$ га кўпайтирамиз

$$g(z) = (z-a)^k f(z) = c_{-k} + c_{-(k-1)}(z-a) + \dots + c_{-1}(z-a)^{k-1} + \dots, \quad (18)$$

Агар $g(a) = c_{-k}$ деб олсак, $g(z)$ функция a нуқтада аналитик бўлиб қолади. Биз k ни (16) қатордаги энг юқори манфий даражали ҳаднинг номери деб тушунамиз, у вақтда $c_{-k} \neq 0$ бўлиб, сўнгги тенгликдан

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z)}{(z-a)^k} = \infty$$

ҳосил бўлади, a нуқта $f(z)$ нинг қутбидан иборатдир.

Энди, (18) дан:

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^k \frac{1}{g(z)} = (z-a)^k \cdot \frac{1}{c_{-k} + c_{-(k-1)}(z-a) + \dots} =$$

$$= (z-a)^k [b_{-k} + b_{-k+1}(z-a) + b_{-k+2}(z-a)^2 + \dots]$$

тенглик ҳосил бўлиб, $\frac{1}{g(a)} = b_{-k} = \frac{1}{c_{-k}} \neq 0$ бўлгани учун a

нуқта $\frac{1}{f(z)}$ нинг k -тартибли ноли, $\frac{1}{g(z)}$ нинг эса k - тартибли қутби экан. Шу билан теорема тула исбот қилинди.

Функция қутбларини аниқлашга доир машқларда бу икки теорема катта ёрдам беради.

1-мисол. $f(z) = \frac{(z+1)(z-3)}{(z+2)^3(z^2+1)}$ функциянинг қутблари аниқлансин.

Унинг учун

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{(z+2)^3(z^2+1)}{(z+1)(z-3)}$$

функциянинг нолларини аниқлаймиз. Улар $z_1 = -2$ учинчи тартибли ноль, $z_2 = i$, $z_3 = -i$ оддий ноллардир. Демак, шулар $f(z)$ нинг қутблари бўлиб, биринчиси учинчи тартибли қутбдир.

$$2\text{-мисол. } f(z) = \frac{z^2}{1 - \cos z}$$

Бу функция $z = 0$ нуқтада аниқланган эмас. Равшанки,

$$1 - \cos z = 1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right) = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \dots$$

у ҳолда

$$f(z) = \frac{z^2}{1 - \cos z} = \frac{1}{\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots}$$

Бундан лимитга ўтайлик:

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 2.$$

Демак, $z = 0$ нуқта $f(z)$ нинг қутулиб бўладиган махсус нуқтасидир. Агар биз $f(0) = 2$ деб қабул қилсак, $z = 0$ нуқтада берилган функция аналитик бўлади.

Функциянинг бошқа махсус нуқталарини топиш учун касрнинг махражини нолга тенглаймиз:

$$1 - \cos z = 0 \text{ ёки } \cos z = 1.$$

Бунда $z = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) нуқталар ҳосил бўлиб, берилган функциянинг иккинчи тартибли қутбларидир, чунки $z = 2k\pi$ лар ушбу функциянинг нолларидир:

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1 - \cos z}{z^2} = 2 \left(\frac{\sin \frac{z}{2}}{z} \right)^2$$

$$3\text{-мисол. } f(z) = \frac{z}{e^z - 1}.$$

Бу функция $z = 0$ нуқтада аниқ эмас, чунки $f(0) = \frac{0}{0}$. Бунни аниқлаш учун e^z ни қаторга ёямиз:

$$e^z - 1 = \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots\right) - 1 = z + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = \frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots}$$

Бундан лимитга ўтилса,

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1,$$

яъни $z = 0$ қутулиб бўладиган махсус нуқта.

Энди бошқа махсус нуқталарни ҳам топиш учун каср махражининг ноқадрилини аниқлаймиз.

$$e^z - 1 = 0 \text{ ёки } e^z = 1;$$

бизга маълумки $e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = 1$, бунда $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Демак, $z = 2k\pi i$ нуқталар берилган функциянинг оддий қутбларидир.

8-§. Муҳим махсус нуқталар

Функциянинг ажралган махсус нуқталари уч типга ажралиши бизга маълум. қутулиб бўладиган (четлаштириладиган) нуқталар, қутблар ва муҳим махсус нуқталар. Одатда ажралган махсус нуқтанинг қайси типга киришини аниқлаш учун Лоран қаторига мурожаат қилинади. Агар a нуқта $f(z)$ функциянинг қутулиб бўладиган махсус нуқтаси бўлса, $f(z)$ функцияга тегишли Лоран қатори бош қисмга эга бўлмаслиги 6-§ да, шунингдек, агарда a нуқта $f(z)$ нинг қутби бўлса, Лоран қаторининг бош қисмидаги ҳадлар сони чекли бўлишини 7-§ да исбот қилдик. Мана шу икки теоремадан хулоса сифатида қуйидаги теорема келиб чиқиши шубҳасиздир.

Теорема. $f(z)$ функциянинг ажралган махсус a нуқта-си муҳим махсус нуқтадан иборат бўлиши учун шу функциянинг a нуқта атрофидаги Лоран қаторининг бош қисми чексиз кўп ҳадларга эга бўлиши зарур ва етарли:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

Хусусий ҳолда Лоран қаторининг тўғри қисми бўлмаслиги ҳам мумкин, яъни $c_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), бироқ $c_{-1} \neq 0$, $c_{-2} \neq 0, \dots, c_{-n} \neq 0, \dots$ бўлиши мутлақо шарт.

Мисол. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ функциянинг ажралган махсус нуқтаси $z = 0$ дан иборат эканлиги аён.

Энди

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots$$

га асосан берилган функцияни $z = 0$ атрофида қаторга ёйиш осон, бунинг учун $t = \frac{1}{z}$ деб олинса kifой:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots$$

Бу эса Лоран қаторининг бош қисмидан иборат бўлиб, ҳадлари чексиз кўп. Демак, ҳозирги теоремга мувофиқ, $z = 0$ берилган $e^{\frac{1}{z}}$ функциянинг муҳим махсус нуқтаси экан.

Ю. В. Сохоцкий теоремаси

Агар a нуқта $f(z)$ функциянинг муҳим махсус нуқтаси бўлса, таърифга кўра z нуқта a га ҳар қандай йўл билан интилганда ҳам $f(z)$ функция ҳеч қандай лимитга интилмайди яъни чекли лимитга ҳам, чексиз лимитга ҳам интилмайди. Бундан шундай маъно ҳам келиб чиқади: a нуқтага яқинлашувчи камида иккита шундай

$$z'_1, z'_2, \dots, z'_n, \dots \text{ ва } z''_1, z''_2, \dots, z''_n, \dots$$

кетма-кетликлар борки, $f(z)$ функциянинг уларга мос қийматларининг ушбу кетма-кетликларни

$$f(z'_1), f(z'_2), \dots, f(z'_n), \dots \text{ ва } f(z''_1), f(z''_2), \dots, f(z''_n), \dots$$

бир хил лимитга интилмайдилар, яъни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z'_n) = A; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(z''_n) = B$$

ва

$$A \neq B.$$

Функциянинг муҳим махсус нуқта атрофидаги хатти-ҳаракатини характерлаб берадиган қуйидаги муҳим теоремани исбот қиламиз.

Ю. В. Сохоцкий¹ теоремаси. Агар a нуқта $f(z)$ функциянинг муҳим махсус нуқтаси бўлса, у ҳолда ҳар қандай (чекли ёки чексиз) комплекс A сон учун a га яқинлашувчи шундай $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ нуқталар кетма-кетлигини топish мумкинки (мавжудки), натижада

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$$

бўлади.

Бу теореманинг моҳияти шундаки, муҳим махсус нуқтанинг ҳар қандай кичик атрофида $f(z)$ функциянинг қийматлари, олдиндан берилган, ҳар қандай чекли ёки чексиз сонга исталганча яқинлашади.

¹ Сохоцкий Юлиан Васильевич (1842 - 1929) - рус математиги. Бу теоремани 1868 йилда исботлаган.

Исбот. а) Дастлаб $A = \infty$ учун теореманинг тўғрилигини исбот қиламиз. a нуқта $f(z)$ нинг муҳим махсус нуқтаси бўлгани учун a нинг ҳеч қандай атрофида $f(z)$ функция чегараланган бўлмайди. Агар $f(z)$ чегараланган бўлса эди, a — қутулиб бўладиган нуқта бўлар эди. Демак, чегараланмаган бўлгани сабабли ҳар қандай натурал n сон учун $0 < |z - a| < \frac{1}{n}$ атрофда шундай z_n нуқта топиладики, унда $|f(z)| > n$ бўлади. Агар $n = 1, 2, 3 \dots$ деб олсак, ушбу

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$$

нуқталар кетма-кетлиги ҳосил бўлади ва

$$0 < |z_1 - a| < 1, 0 < |z_2 - a| < \frac{1}{2}, 0 < |z_3 - a| < \frac{1}{3}, \dots \quad (19)$$

атрофларга эга бўлиш билан бирга $n \rightarrow \infty$ да z_n нинг a га интилишини кўрамиз. Иккинчи томондан,

$$|f(z_1)| > 1, |f(z_2)| > 2, |f(z_3)| > 3, \dots$$

лардан кўрамизки, $f(z)$ нинг модули ортиб бормоқда. Шуларга асосан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \text{ ва } \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \infty$$

натижага эга бўламиз, $A = \infty$ эди, демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A = \infty.$$

Шундай қилиб, $A = \infty$ ҳол учун теорема исбот қилинди.

б) Фараз этайлик, $A \neq \infty$ бўлсин. Бу жойда икки ҳол бўлиши мумкин: 1) ҳар қандай $0 < |z - a| < \frac{1}{n}$ атрофда шундай z_n нуқта топилиши мумкинки, у нуқтада $f(z_n) = A$ бўлади. У ҳолда $n = 1, 2, 3, \dots$ деб олсак, $z_1, z_2, z_3, \dots$ кетма-кетлик ҳосил бўлиб, (19) га мувофиқ бу кетма-кетлик a га яқинлашади ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$$

бўлади.

2) a нуқтанинг шундай $0 < |z - a| < \frac{1}{N}$ атрофи бўлиши мумкинки, унда $f(z) \neq A$ бўлади, у ҳолда, сўнгги атрофда

$$\psi(z) = \frac{1}{f(z) - A} \quad (20)$$

аналитик функция бўлади, чунки

$$f(z) - A \neq 0.$$

a нуқта $\psi(z)$ функция учун ҳам муҳим махсус нуқта бўлади, чунки, аксинча, a нуқта қутулиб буладиган ёки қутб десак,

у ҳолда (20) га асосан чекли ёки чексиз $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(A + \frac{1}{\psi(z_k)} \right)$ лимит мавжуд бўлиб қолар эди, бунинг бўлиши мумкин эмас, чунки a нуқта $f(z)$ учун муҳим махсус нуқтадир. Демак, $\psi(z)$ учун a — муҳим махсус нуқта экан. У ҳолда а) ҳолга асосан, a нуқтага яқинлашувчи шундай $z_1, z_2, z_3, \dots$ кетма-кетлик мавжудки, натижада

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(z_n) = \infty$$

бўлади. Бундан, (20) га мувофиқ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(A + \frac{1}{\psi(z_n)} \right) = A$$

тенглик келиб чиқади. Шу билан теорема тўла исбот бўлди.

Мисол. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ функция учун координаталар боши муҳим махсус нуқта эканлигини кўрган эдик. Энди бу функция учун Сохоцкий теоремасининг тўғрилигини текшираемиз.

$A = \infty$ бўлсин. Бу ҳолда $z_k = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ теоремадаги $\{z_k\}$ кетма-кетлик ролини ўтайди, чунки $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} e^k = \infty$. Агар $A = 0$ бўлса, $z_k = -\frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \dots$ ларни олиш мумкин. чунки

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-k} = 0.$$

Ниҳоят, $A \neq 0$ чекли сон бўлсин. Ушбу

$$e^{\frac{1}{z}} = A$$

тенгламани ечиб, z_k ларни танлаб олиш мумкин.

$$\frac{1}{z} = \ln A, \quad z = \frac{1}{\ln A} = \frac{1}{\ln A + 2k\pi i}.$$

Демак, z_k лар учун

$$z_k = \frac{1}{\ln A + 2k\pi i}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

яради. Бу кетма-кетлик нолга яқинлашади, шу билан бирга

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{\ln A + 2k\pi i} = A.$$

§-9. Чексиз узоқлашган нуқта атрофи

Ҳозиргача биз ажралган махсус a нуқта атрофидаги бир қийматли $f(z)$ функциянинг ҳатти-ҳаракатини текширишда $z = a$ ни чекли ($z = a \neq \infty$) деб фараз қилган эдик. Ҳолбуки чексиз узоқлашган $z = \infty$ нуқта ҳам $f(z)$ нинг ажралган махсус нуқтаси бўлиши мумкин.

Агар бир қийматли $f(z)$ функция чексиз узоқлашган нуқ-
танинг бирор

$$R < |z| < \infty$$

атрофида ($z = \infty$ дан бошқа нуқталарда) аналитик бўлса, у
ҳолда $z = \infty$ нуқта $f(z)$ нинг ажралган махсус нуқта-
си деб аталади.

Бу нуқта ҳам 5-§ даги каби уч типга бўлинади:

а) агар $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A$, A — аниқ сон бўлса, $z = \infty$ қутулиб

буладиган махсус нуқта,

б) агар $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ бўлса, $z = \infty$ қутб,

в) агар $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ мавжуд бўлмаса, $z = \infty$ нуқта $f(z)$ функ-
циянинг муҳим махсус нуқтаси дейилади.

Мабодо $z = \infty$ нуқта $f(z)$ нинг ажралган махсус нуқтаси
бўлса унинг қайси типга киришини аниқлаш учун бу функ-
цияни $z = \infty$ нуқта атрофида Лоран қаторида ёйиш зарур.
Бунинг учун $z = \frac{1}{\zeta}$ алмаштиришдан фойдаланамиз. Бундан ку-
ринадики, $z = \infty$ нуқтага $\zeta = 0$ нуқта мос келади, чунки

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{\zeta} = \infty.$$

Шунга ясосан $R < \left| \frac{1}{\zeta} \right| < \infty$ дан $\zeta = 0$ нинг $|\zeta| < \frac{1}{R}$ атрофи
ҳосил бўлади.

Энди қуйидагича

$$f(z) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \varphi(\zeta)$$

белгилаб, $f(z)$ ни $z = \infty$ нуқта атрофида Лоран қаторига ёйиш
ўрнига $\varphi(\zeta)$ функцияни $\zeta = 0$ нуқтанинг ушбу

$$0 < |\zeta| < \frac{1}{R}$$

атрофида қаторга ёямиз. Шубҳасиз, $\zeta = 0$ нуқта $\varphi(\zeta)$ учун аж-
ралган махсус нуқта бўлади. Демак,

$$f(z) = \varphi(\zeta) = \dots + \frac{a_{-n}}{\zeta} + \dots + \frac{a_{-1}}{\zeta} + a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \dots \quad (21)$$

ёки ζ ўрнига $\frac{1}{z}$ қийматини қўйилса, $z = \infty$ нуқта атрофидаги
 $f(z)$ нинг

$$f(z) = \dots + a_{-n}z^n + \dots + a_{-1}z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (22)$$

Лоран қатори келиб чиқади.

Ўтган параграфлардан маълумки:

1) агар $\zeta = 0$ нуқта қутулиб бўладиган махсус нуқта бўлса, (21) қатор бош қисмга эга бўлмайди фақат тўғри қисмга эга бўлади), яъни

$$\varphi(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \dots$$

бўлади. У вақтда бунга мос қатор (22) да қуйидагидан иборат бўлади:

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (23)$$

Шу сабабли (23) қатор (22) нинг тўғри қисми дейилади.

2) агар $\zeta = 0$ нуқта $\varphi(\zeta)$ нинг k -тартибли қутби бўлса, (21) қатор қуйидаги

$$\varphi(\zeta) = \frac{a_{-k}}{\zeta^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{\zeta} + a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \dots$$

кўринишга эга бўлади. У ҳолда (22) даги мос қатор

$$f(z) = a_{-k}z^k + \dots + a_{-1}z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (24)$$

кўринишда ёзилади:

3) агар $\zeta = 0$ нуқта $\varphi(\zeta)$ нинг муҳим махсус нуқтаси бўлса, (21) нинг бош қисми тула бўлиши, яъни манфий даражалн ҳадлар сони чексиз кўп бўлиши керак. У ҳолда мос равишда (22) да мусбат даражалн ҳадлар сони чексиз кўп бўлиши керак. Шу сабабли (22) даги мана шу ҳадлар унинг бош қисми дейилади.

Агар биз $a_{-n} = c_n$ (демак, $a_n = c_{-n}$) деб белгиласак, (22) ушбу кўринишни олади:

$$f(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_nz^n + \dots + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}.$$

Булардан биринчи йиғинди $z = \infty$ атрофида Лоран қаторининг бош қисми, иккинчиси эса тўғри қисмидир.

Демак, агар ажралган махсус a нуқта чекли ($a \neq \infty$) бўлса, унинг атрофида $f(z)$ функцияни Лоран қаторига ёйганда бош қисми, ($z = \infty$) чексиз узоқлашган нуқта атрофида ёйилган Лоран қатори учун тўғри қисм бўлиб қолади. Шунингдек, биринчи қаторнинг тўғри қисми иккинчи қатор учун бош қисм бўлади. Бошқа сўз билан айтганда, бу иккала қатордаги қисмларнинг роллари алмашади. Шундай қилиб, атрофидаги теорема исбот қилинди.

Теорема. Агар чексиз узоқлашган $z = \infty$ нуқта қутулиб бўладиган махсус нуқта бўлса, $f(z)$ функциянинг шу нуқта атрофидаги z нинг даражалари бўйича Лоран қаторига ёйилмасида мусбат даражалн ҳадлари бўлмайди. Агар

$z = \infty$ қутб бўлса, у ҳолда бундай ҳадларнинг сони чекли, агар $z = \infty$ нуҳим махсус нуқта бўлса, у вақтда бундай ҳаолар сони чексиз кўп бўлади.

1-мисол. $f(z) = \frac{z^2}{2+z^2}$ функция учун $z = \infty$ ажралган махсус нуқта-дир, бунда $f(\infty) = \frac{\infty^2}{2 + \infty^2} = \frac{\infty}{\infty}$ аниқмас.

Мана шу $z = \infty$ нуқтанинг қайси типга киришини аниқлаймиз:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2}{2+z^2} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{2}{z^2} + 1} = \frac{1}{0+1} = 1$$

бу эса чекли сондир, демак, $z = \infty$ — қутулиб бўладиган махсус нуқта. Шу мисолни қаторга ёйиш усули билан ҳам ечиш мумкин:

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{2+z^2} &= \frac{1}{1+\frac{2}{z^2}} = \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{z^2}\right)} = 1 + \left(-\frac{2}{z^2}\right) + \left(-\frac{2}{z^2}\right)^2 + \left(-\frac{2}{z^2}\right)^3 + \\ &+ \dots = 1 - \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^4} - \frac{2^3}{z^6} + \dots, \end{aligned}$$

бунда $\left| -\frac{2}{z^2} \right| < 1$, яъни $|z| > \sqrt{2}$ фараз қилинади. Сўнгги қатор $z = \infty$ нуқта атрофидаги Лоран қатори бўлиб, фақат тўғри қисмдан иборатдир. Демак, $z = \infty$ қутулиб бўладиган махсус нуқта экан.

2-мисол $f(z) = 2 + z^3 + z^5$ функция учун $z = \infty$ нуқта қутб, чунки

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} (2 + z^3 + z^5) = \infty.$$

10-§. Бутун ва мероморф функциялар

1. Бутун функциялар

Биз V боб, 10-§ да бутун функция тушунчасини киритиб, чекли текисликда махсус нуқтага эга бўлмаган $f(z)$ аналитик функцияни бутун функция деб атаган эдик. Демак, бутун функция учун фақат чексиз узоқлашган нуқта махсус нуқта бўлиши мумкин. Бутун $f(z)$ функцияни $z = 0$ нуқта атрофида Тейлор қаторига ёямиз:

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \quad (25)$$

Бу қатор z нинг барча чекли қийматларида яқинлашувчидир, демак, (25) қатор бир вақтда $f(z)$ функциянинг $z = \infty$ нуқта атрофидаги Лоран ёйилмаси ҳам бўлади. Бундан шундай ҳулосага келамиз:

1) агар $f(z)$ бутун функция учун $z = \infty$ тўғри нуқта бўлса, $c_1 = c_2 = \dots = c_n = \dots = 0$ ва $f(z) = c_0$. Бу натижа Лиувилл теоремасига асосан ҳам дарҳол келиб чиқади.

2) агар $z = \infty$ нуқта бутун $f(z)$ функция учун k -тартибли қутб бўлса,

$$c_k \neq 0, c_{k+1} = c_{k+2} = \dots = 0$$

булади, демак,

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_k z^k,$$

яъни $f(z)$ k -тартибли кўпхаддир (бутун рационал функциядир).

3) агар $z = \infty$ нуқта $f(z)$ бутун функция учун муҳим махсус нуқта бўлса, у ҳолда $f(z)$ функция ёйилмасининг коэффицентларидан нолдан фарқлилари чексиз кўп булади. Бу ҳолда $f(z)$ кўпхаддан фарқли бўлиб, уни бутун трансцендент функция дейилади. Масалан, e^z , $\sin z$, $\cos z$ — трансцендент функциялардир.

Шундий қилиб, чексиз узоқлашган нуқта бутун функцияга тўғри, қутб ва муҳим махсус нуқта бўлишига қараб, бу функция мос равишда узгармас сон, кўпхад ва бутун трансцендент функциядан иборат булар экан.

2. Мероморф функциялар

Маълумки, $z = \infty$ чексиз узоқлашган нуқтани ўз ичига олмайдиган текислик чекли текислик дейилади. Бошқача айтганда, маркази ноль нуқтада жойлашган ҳар қандай чекли R катта радиусли донранинг ички нуқталари тўпламидир. Бундай текисликнинг аксини сферага туширилганда шимолий қутб ҳисобга кирмай қолади, яъни тўплагма кирмайди. Агарда $z = \infty$ нуқта ҳам текисликка киритилса, у кенгайтирилган текислик дейилиб, унинг акси сферанинг барча нуқталаридан иборат булади.

Таъриф. Чекли текисликда қутблардан бошқа махсус нуқталарга эга бўлмаган аналитик функцияни мероморф (ёки каср) функция дейилади.

Шу нарсага эътиборни жалб қилиб ўтамизки, ҳар қандай чегараланган соҳада мероморф функция фақат чекли сон қадар қутбларга эга бўлади. Ҳақиқатан, агар бундай соҳада функциянинг чексиз кўп қутблари мавжуд бўлганда эди, уларнинг бирор a нуқтага интилувчи кетма-кетлиги ҳам мавжуд бўлар эди. Бу a нуқта мероморф функция учун, қутбдан фарқли бўлган, ажралмаган махсус нуқта булади, чунки қутбнинг таърифига кўра у ажралган махсус нуқта бўлиши керак. Мероморф функциянинг таърифига асосан бундай бўлиши мумкин эмас. Ҳар бир рационал функция мероморф функцияга мисол бўла олади. Ҳақиқатан,

$$\frac{p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n}{q_0 z^m + q_1 z^{m-1} + \dots + q_n}$$

рационал функциянинг барча кенгайтирилган текисликдаги махсус нуқталари қутблардан иборат ($n > m$ бўлса, чексиз

узоқлашган нуқта $n - m$ - тартибли қутб, $n \leq m$ бўлса, чексиз узоқлашган нуқта — қутулиб бўладиган махсус нуқта бўлади, бу нуқтада функцияни керакли равишда аниқлаб олиб, нуқтани туғри нуқта ҳисоблашимиз мумкин).

Теорема. Агар аналитик $f(z)$ функция бутун кенгайтирилган текисликда қутблардан бошқа махсус нуқталарга эга бўлмаса, у ҳолда $f(z)$ рационал функциядир.

Исбот. Берилган $f(z)$ функция учун чексиз узоқлашган нуқта теореманинг шартига кўра фақат қутб бўлиши мумкин, у ҳолда чексиз узоқлашган нуқтанинг бирор $|z| > R$ атрофида $f(z)$ аналитик функциядир. $|z| \leq R$ доирада мероморф функция таърифидан чиқарилган хулосага асосан чекли сондагина қутблар мавжуд бўлиши мумкин; бу қутбларни $z_1, z_2, \dots, z_n$ орқали белгилаймиз; буларнинг тартиби мос равишда $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ бўлсин. Ҳар бир қутбнинг атрофида $f(z)$ функцияни Лоран қаторига ёямиз. z_j атрофидаги ёйилма қуйдагича бўлади:

$$f(z) = \frac{c_{-\beta_j}^{(j)}}{(z-z_j)^{\beta_j}} + \dots + \frac{c_{-1}^{(j)}}{z-z_j} + c_0^{(j)} + c_1^{(j)}(z-z_j) + \dots$$

Бу ёйилманинг бош қисмини $g_j(z)$ орқали белгилаб оламиз, яъни

$$g_j(z) = \frac{c_{-\beta_j}^{(j)}}{(z-z_j)^{\beta_j}} + \dots + \frac{c_{-1}^{(j)}}{z-z_j}.$$

Равшанки, $g_j(z)$ — рационал функциядир.

Энди $f(z)$ функциянинг $z = \infty$ нуқта атрофидаги Лоран ёйилмасининг бош қисмини $g(z)$ орқали белгилаймиз:

$$g(z) = A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_p z^p$$

(агар $f(z)$ учун $z = \infty$ туғри нуқта бўлса, $g(z)$ функция текширилмайди, чунки бу ҳолда бош қисм бўлмайди).

Ушбу

$$\varphi(z) = f(z) - g(z) - \sum_{j=1}^n g_j(z)$$

функцияни текшираимиз. Бу функция барча чекли $z \neq z_j$ ($j = \overline{1, n}$) нуқталарда чекли сондаги аналитик функцияларнинг йиғиндиси бўлгани учун аналитикдир. Бу функциянинг тузилишидан равшанки, ҳар бир z_j ва $z = \infty$ нуқта $\varphi(z)$ учун қутулиб бўладиган махсус нуқта бўлади, чунки унинг Лоран ёйилмасидаи бош қисм чиқариб ташланаяпти.

$\varphi(z)$ функцияни z , ва $z = \infty$ нуқталарда керакли равишда аннқлаб олиб, кенгайтирилган текисликда аналитик функция деб қарашимиз мумкин. Лиувилл теоремасига асосан:

$$\varphi(z) = \text{const.}$$

Бунга асосан:

$$f(z) = \text{const} + g(z) - \sum_{j=1}^n g_j(z).$$

Демак, $f(z)$ — рационал функция экан.

Шу билан бирга бу теорема ҳар қандай рационал функцияни оддий касрларга ёйиш мумкинлигини ҳам кўрсатади:

$$f(z) = A_0 + A_1 z + \dots + A_n z^n + \sum_{j=1}^n \left[\frac{c_j^{(j)}}{(z-z_j)^{j_j}} + \dots + \frac{c_j^{(1)}}{z-z_j} \right].$$

Энди мероморф $f(z)$ функция қутбларининг тўплами чексиз бўлган ҳолни кўрамиз. Ҳар қандай чегараланган соҳада мероморф функция қутбларининг сони чекли эканлигини эътиборга олиб, $f(z)$ мероморф функциянинг барча қутбларини маълум тартибда номерлаб чиқишимиз мумкин. Масалан, $f(z)$ нинг қутбларини z_j лар орқали белгиласак, буларни модулла-ри камаймайдиган тартибда номерлашимиз мумкин:

$$|z_1| \leq |z_2| < \dots < |z_j| < \dots$$

$f(z)$ функциянинг z_j қутби атрофидаги Лоран ёйилмасининг бош қисмини, худди юқоригидек, $g_j(z)$ билан белгилаймиз.

Текширилаётган ҳолда ҳам мероморф функция ёйилмасини ҳосил қилиш учун аввалгидай, яъни қутблар сони чекли бўлган ҳолдагидек, $f(z)$ функциядан барча $g_j(z)$ бош қисмлар йиғиндисини айириб, натижада, айирмада бутун функция ҳосил қилишга уриниб кўриш мумкин. Лекин бу ҳолда бош қисм-

лар тўплами чексиз бўлгани учун $\sum_{j=1}^{\infty} g_j(z)$ қаторнинг яқинла-

шиши тўғрисида, умуман, ҳеч нарса айтиб бўлмайди. Бу ерда келиб чиққан қийинчилик Миттаг — Леффлер¹ томонидан ҳал қилинган. У ҳамма вақт шундай $h_j(z)$ қўпҳадларни танлаб олиш мумкинлигини, натижада

$$\sum_{j=1}^n [g_j(z) - h_j(z)]$$

қатор ихтиёрий $|z| < R$ (агар бу доирадан унга тушган қутбларни чиқариб ташланса) доирада текис яқинлашишини кўрсатган.

¹ Магнус Миттаг — Леффлер (1846—1927) — швед математиги.

Унинг теоремаси қуйидагидан иборат.

Миттаг — Леффлер теоремаси Мероморф $f(z)$ функция учун $z = z_1, |z_1| \leq |z_2| \leq \dots < |z_p| < \dots$, нуқталар қутблардан иборат бўлиб, буларга мос бош қисмлар $g_p(z)$ бўлсин ва

$$h^{(p)}(z) = g_p(0) + g'_p(0)z + \dots + \frac{g^{(p)}_p(0)}{p!} z^p$$

ифодалар $g_p(z)$ ларнинг z нинг даражалари бўйича Тейлор ёйилмаларининг қисми бўлсин. Бу ҳолда бутун сонларнинг шундай $p_1, p_2, \dots, p_j, \dots$ кетма-кетлиги ва шундай бутун функция $h(z)$ мавжуд бўладики, булар учун барча $z \neq z_j$ нуқталарда ушбу

$$f(z) = h(z) + \sum_{j=1}^{\infty} [g_j(z) - h^{(p_j)}(z)] \quad (26)$$

ёйилма ўринли бўлади. (26) қатор $f(z)$ функция қутбларини ўз ичига олмаган ихтиёрий чекли $|z| < R$ доирада абсолют ва текис яқинлашувчи бўлади.

Бу теореманинг исботини келтирмай, кейинги бобда айрим мероморф функцияларни оддий касрларга қандай ёйиш мумкинлигини кўрсатамиз.

МАШҚЛАР

1. Берилган $\frac{1}{z-2}$ функция $|z| < 2$ бўлганда Лоран қаторига ёйилсин.
2. Берилган $\frac{1}{z(1-z)}$ функция $z = 1$ нуқта атрофида, яъни $0 < |z-1| < 1$ бўлганда Лоран қаторига ёйилсин.
3. Берилган $e^{\frac{1}{1-z}}$ функция $|z| > 1$ бўлганда Лоран қаторига ёйилсин.
4. Берилган $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$ функция $|z| > 3$ бўлганда Лоран қаторига ёйилсин.

Қуйидаги функцияларнинг махсус нуқталари топилиб, уларнинг турлари аниқлансин:

$$5. \frac{1}{(z^2 + i)^2}, \quad 6. e^{z-2i}, \quad 7. \frac{1}{\sin z}, \quad 8. \cos \frac{1}{z+i}, \quad 9. \frac{1 - \cos z}{z^2}.$$

ҚОЛДИҚЛАР НАЗАРИЯСИ ВА УНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

1-§. Функциянинг ажралган махсус нуқта атрофидаги қолдиғи¹

Маълумки, агар $f(z)$ функция a нуқтани ўз ичига олувчи бирор G соҳада аналитик бўлса, у ҳолда a нуқтани ўраб олган G ичида ётган ёпиқ Γ контур буйлаб олинган интеграл, Коши теоремасига мувофиқ, нолга тенг бўлади:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Агар a нуқта $f(z)$ нинг ажралган махсус нуқтаси бўлса, у вақтда бу интеграл нолга тенг бўлмаслиги ҳам мумкин. Мана шу интегралнинг қийматини топиш талаб қилинади.

a нуқта $f(z)$ функциянинг ажралган махсус нуқтаси бўлсин дейлик. У вақтда $f(z)$ ни $0 < |z - a| < R$ ҳалқада Лоран қаторига ёйиш мумкин:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \dots$$

Энди $0 < |z - a| < R$ ҳалқа ичида битта силлиқ ёпиқ Γ чизиқ олайлик, у a нуқтани ўраб олсин. Сўнгги қатор Γ контурда текис яқинлашувчи бўлгани учун уни ўша контур бўйича ҳадлаб интеграллаш мумкин. У ҳолда IV боб, 5- § га асосан

$$\oint_{\Gamma} (z-a)^k dz = \begin{cases} 0, & \text{агар } k \neq -1 \text{ бўлса,} \\ 2\pi i, & \text{агар } k = -1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлади. Демак,

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \cdot c_{-1}. \quad (1)$$

Хусусий ҳолда, Γ чизиқ C айланадан иборат бўлиб қолиши ҳам мумкин.

Таъриф. Агар $f(z)$ функция $0 < |z - a| < R$ ҳалқада аналитик бўлса, шу функциянинг ажралган махсус a нуқтага нисбатан қолдиғи деб

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz$$

¹ Қолдиқ термини русча „вычет“ деган сўздан олинган бўлиб, баъзи ўзбекча китобларда (масалан, Н. Х. Тешабоева, „Математик физика методлари“) чегирма деб ҳам ишлатилган.

интегралнинг қийматига айтилади ва

$$\text{қолд. } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz \quad (2)$$

кўринишда ёзилади.

Баъзан қолдиқни қуйидагича ёзадилар:

$$\text{Res } f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz^1$$

ёки

$$\text{Res } [f(z), a] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz. \quad (3)$$

Биз қолд. $f(z)$ символини ишлатамиз.

Агар (1) тенгликка эътибор қилсак,

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz = \text{қолд. } f(z) \quad (4)$$

эканини кўрамыз. Шундай қилиб, қолдиқни бошқача таърифлаш ҳам мумкин: $f(z)$ функциянинг ажралган махсус a нуқтага нисбатан қолдиғи деб, шу функциянинг a нуқта атрофидаги Лоран қатори $(z-a)^{-1}$ ҳадининг c_{-1} коэффицентини қабул қилиш мумкин.

Равшанки, агар a нуқта $f(z)$ функциянинг тўғри нуқтаси ёки қутулиб бўладиган (четлантириладиган) махсус нуқтаси бўлса, у ҳолда Лоран қаторининг бош қисми бўлмайди, яъни $c_{-1} = 0$, $c_{-2} = 0$, ... Бундан, (4) га кўра

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz = \text{қолд. } f(z) = c_{-1} = 0$$

бўлади. Демак, юқорида қайд қилинган икки турли нуқтада функциянинг қолдиғи нолга тенг бўлади. Энди $f(z)$ функциянинг қолдиқларига тегишли асосий теоремани исбот қиламиз.

Теорема. Агар $f(z)$ функция Γ чизиқ билан ўралган $\bar{G}$ ёпиқ соҳанинг ажралган махсус $a_1, a_2, \dots, a_k$ нуқталаридан бошқа ҳамма нуқталарида аналитик бўлса, у ҳолда $f(z)$ функциядан Γ бўйлаб олинган интегралнинг қиймати Γ ичидаги барча махсус a_k нуқталарга нисбатан функция қолдиқлари йиғиндисининг $2\pi i$ га кўпайтирилганига тенг:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^k \text{қолд. } f(z)^2.$$

¹ Res французча Residu сўзидан олинган бўлиб, „қолдиқ“ деган маънони беради.

² Кошининг умумлашган теоремасига асосан (IV боб, 4-§) $f(z)$ функция Γ да аналитик бўлмай, узлуксиз бўлса ҳам бу теорема ўз кучини сақлаб қолади.

Исбот. Функциянинг махсус нуқталарини марказ қилиб, шундай $C_1, C_2, \dots, C_k$ айланалар чизамизки, улар ўзаро кесишмасин ва бир-бирига уриниб ҳам қолмасин. Ундан ташқари, шу айланалардан бирортаси ҳам Γ дан ташқарига чиқиб кетмасин. Шундай айланаларни ҳақиқатан ҳам чизиш мумкин, чунки $a_1, a_2, \dots, a_k$ нуқталар бир-биридан ажралган ҳолда туради.

Юқоридаги $\Gamma, C_1, C_2, \dots, C_k$ чизиқлар билан чегараланган кўп боғламли ёпиқ соҳада $f(z)$ функция аналитик бўлгани учун Кошининг мураккаб контурга тегишли теоремасига асосан ташқи контур бўйлаб олинган интеграл ички контурлар бўйлаб олинган интеграллар йигиндисиغا тенг, демак,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} f(z) dz + \dots + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_k} f(z) dz.$$

Қолдиқларнинг таърифига мувофиқ, ўнг томондаги интегралларнинг ҳар бири махсус ажралган нуқтага нисбатан $f(z)$ функциянинг қолдигидир. Демак,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz &= \text{қолд. } f(z) \Big|_{z=a_1} + \text{қолд. } f(z) \Big|_{z=a_2} + \dots + \text{қолд. } f(z) \Big|_{z=a_k} \\ &= c_{-1}^{(1)} + c_{-1}^{(2)} + \dots + c_{-1}^{(k)} \end{aligned}$$

ёки

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i [\text{қолд. } f(z) \Big|_{z=a_1} + \text{қолд. } f(z) \Big|_{z=a_2} + \dots + \text{қолд. } f(z) \Big|_{z=a_k}]. \quad (5)$$

Шундай қилиб теорема исбот қилинди.

Бу теоремадан кўринадики, $f(z)$ функциядан ёпиқ Γ контур бўйлаб олинган интегрални ҳисоблаш учун Γ ичидаги ажралган махсус нуқталарга нисбатан барча қолдиқларни ҳисоблаб чиқиш талаб қилинади. Мабодо ажралган махсус нуқталар қутблардан иборат бўлса, уларга нисбатан қолдиқларни Лоран қаторларидан фойдаланмай, қуйида берилган осон йўл билан бевосита ҳисоблаш мумкин.

2-§. Қутбга нисбатан функциянинг қолдигини ҳисоблаш

1. Агар a нуқта $f(z)$ функциянинг оддий қутби бўлса, а атрофида $f(z)$ нинг Лоран қатори

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

кўринишда бўлур эди. Бунинг икки томонини $(z-a)$ га кўпайтириб лимитга ўтилса,

$$\lim_{z \rightarrow a} [(z-a) f(z)] = \lim_{z \rightarrow a} [c_{-1} + c_0(z-a) + c_1(z-a)^2 + \dots] = c_{-1}.$$

Демак, у ҳолда қолдиқ

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} [(z - a) f(z)] \quad (6)$$

формула билан аниқланади.

1-мисол. $f(z) = \frac{z^3}{z+2}$ функция $z = -2$ оддий қутбга эга бўлгани учун

$$c_{-1} = \text{қолд.} \left(\frac{z^3}{z+2} \right) = \lim_{z \rightarrow -2} [(z+2)f(z)] = \lim_{z \rightarrow -2} z^3 = (-2)^3 = -8.$$

2. Агар a нуқта $f(z)$ нинг k -тартибли қутби бўлса, унинг бу нуқтага нисбатан Лоран қатори

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \dots$$

кўринишда бўлиб, c_{-1} коэффициентни (қолдиқни) топиш учун тенгликнинг икки томонини $(z-a)^k$ га кўпайтириб, $(k-1)$ марта ҳосила оламиз:

$$\begin{aligned} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-a)^k f(z)] &= \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [c_{-k} + c_{-k+1}(z-a) + \dots + \\ &+ c_{-1}(z-a)^{k-1} + c_0(z-a)^k + c_1(z-a)^{k+1} + \dots] = \\ &= (k-1)! [c_{-1} + k!(z-a) + \dots] \end{aligned}$$

Энди $z \rightarrow a$ деб фараз қилиб лимитга ўтияс.

$$c_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-a)^k f(z)]. \quad (7)$$

2-мисол. $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$ функциянинг қутбларига нисбатан қолдиқларни топишсин.

Бу функция қутблари

$$z_1 = i \text{ ва } z_1 = -i$$

дан иборат бўлиб учинчи тартиблидир. Шу сабабли (7) формуладан фойдаланамиз, бунинг учун дастлаб берилган функцияни

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Аввал функциянинг $z = i$ га нисбатан қолдиғини топиб олайлик:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} [(z-i)^3 f(z)] &= \frac{d}{dz} [(z+i)^{-3}] = -3(z+i)^{-4}; \\ \frac{d^2}{dz^2} [(z-i)^3 f(z)] &= \frac{d}{dz} [-3(z+i)^{-4}] = 12(z+i)^{-5}. \end{aligned}$$

Бунинг икки томонини $\frac{1}{2i}$ га кўпайтириб лимитга ўтилса, $z = i$ га нисбатан қолдиқ келиб чиқади:

$$c_{-1}^{(1)} = \text{қолд. } f(z) = \frac{1}{2i} \cdot 12 \lim_{z \rightarrow i} [(z+i)^{-5}] = -\frac{6}{(2i)^5} = \frac{3}{16i} = -\frac{3i}{16}.$$

Функциянинг $z = -i$ га нисбатан қолдиғи ҳам худди шу усулда топилади:

$$(z+i)^3 f(z) = (z-i)^{-3}; \quad \frac{d^2}{dz^2} [(z+i)^3 f(z)] = 12(z-i)^{-5}.$$

$$c_{-1}^{(2)} \text{ қолд. } f(z) = \frac{1}{2i} \cdot 12 \lim_{z \rightarrow -i} [(z-i)^{-5}] = \frac{6}{(-2i)^5} = \frac{3i}{16}.$$

3-мисол. $f(z) = \frac{z^{2n}}{(z-1)^n}$ ($n > 0$ ва бутун сон) функциянинг қутбларига нисбатан қолдиқлари топилин.

Бу функция учун $z = 1$ нуқта n -тартибли қутбдир.

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-1)^n f(z)] = \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [z^{2n}] = 2n(2n-1) \dots (n+2)z^{n+1}$$

тенгlikнинг ўнг томонини $(n-1)!$ га бўлиб, лимитга ўтилса,

$$c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot 2n(2n-1) \dots (n+2) \lim_{z \rightarrow 1} z^{n+1} = \frac{(n+2)(n+3) \dots 2n}{(n-1)!} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}.$$

4-мисол. Тенгламаси $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ дан иборат бўлган C айлана бўйлаб олинган

$$\oint_C \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$$

интеграл ҳисоблансин

Берилган C айлана тенгламасини

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

кўринишга келтирсак, унинг маркази $a = 1 + i$ нуқтада ва радиуси $R = \sqrt{2}$ га тенг эканини кўрамыз. Берилган

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$$

функция учун $z = 1$ — иккинчи тартибли ва $z_2 = i$, $z_3 = -i$ оддий қутблар бўлади. Булардан $z_2 = -i$ нуқта C нинг ташқарисида бўлгани учун уни эътиборга олмаймиз.

Бу масалани ҳал қилиш учун, қолдиқларга доир асосий теоремани қўлаймиз. Дастлаб функциянинг $z = 1$ га нисбатан қолдиғини ҳисоблаймиз:

$$\frac{d}{dz} [(z-1)^2 f(z)] = \frac{d}{dz} [(z^2+1)^{-1}] = -(z^2+1)^{-2} \cdot 2z.$$

Бундан, (7) га мувофиқ, лимитга ўтилса,

$$c_{-1}^{(1)} = -2 \lim_{z \rightarrow 1} [z (z^2+1)^{-2}] = -2 \cdot \frac{1}{2^2} = -\frac{1}{2}.$$

Энди $z_2 = i$ га нисбатан қолдиқни топамиз:

$$(z-i)f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+i)}.$$

(6) га асосан лимитга ўтилса,

$$c_{-1}^{(2)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z-1)^2(z+i)} = \frac{1}{(i-1)^2 \cdot 2i} = \frac{1}{4}.$$

Демак,

$$\oint_C \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)} = 2\pi i (c_{-1}^{(1)} + c_{-1}^{(2)}) = 2\pi i \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi i}{2}.$$

3. Агар $f(z)$ функция

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

каср шаклида берилган бўлиб, оддий a қутбга эга бўлса, қолдиқни ҳисоблаш яна ҳам осонлашади. У ҳолда

$$\varphi(a) \neq 0, \psi(a) = 0, \psi'(a) \neq 0,$$

чунки $\psi(z)$ функция учун a оддий ноль. (6) га мувофиқ

$$(z-a)f(z) = \frac{(z-a)\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}}$$

дан лимитга ўтилса,

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)f(z)] = \frac{\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z)}{\lim_{z \rightarrow a} \frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)},$$

демак,

$$c_{-1} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \quad (8)$$

ёки c_{-1} ўрнига, қолдиқнинг таърифига мувофиқ, қийматини қўясак,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} dz = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \quad (8')$$

формулага эришамиз: бундаги Γ ёпиқ контур бўлиб, a оддий қутб шу контурнинг ичига жойлашган.

5-мисол. $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ функциянинг қолдиқлари топилсин.

Бунда $\varphi(z) \equiv 1$, $\psi(z) = \sin z$ бўлгани учун $f(z)$ нинг қўтблари $\psi(z)$ нинг ноллари, яъни

$$a_k = k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

дан иборат бўлиб, оддий ноллардир, чунки

$$\psi'(z) = \cos z, \quad \psi'(a_k) = \cos k\pi = (-1)^k.$$

Демак, (8) га мувофиқ:

$$c_{-1}^{(k)} = \frac{1}{(-1)^k} = (-1)^k.$$

Мисол учун, агар Γ ёпиқ чизиқ фақат $a_0 = 0$, $a_1 = \pi$ ва $a_2 = -\pi$ (яъни $k = 0, 1, -1$) нуқталаринигина ўз ичига олса, у ҳолда қолдиқлар ҳақидаги асосий теоремага мувофиқ:

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{\sin z} = 2\pi i (c_{-1}^{(0)} + c_{-1}^{(1)} + c_{-1}^{(-1)}) = 2\pi i [(-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^{-1}] = -2\pi i [1 - 1 - 1] = -2\pi i.$$

6-мисол. $f(z) = \frac{\cos z}{z-i}$ функция биргина оддий $a=i$ қўтбга эга бўлгани сабабли (8) га мувофиқ:

$$c_{-1} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} = \frac{\cos i}{1} = \cos i.$$

Маълумки,

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}).$$

Шунга кўра:

$$\cos i = \frac{1}{2} (e^{-1} + e^{+1}), \quad e = 2,71828 \dots$$

$$e^{-1} = \frac{1}{e} = 0,3679 \dots; \quad \cos i \approx 1,54308.$$

Демак, қолдиқ ушбуга тенг:

$$c_{-1} = \frac{1}{2} (e + e^{-1}).$$

Агар Γ ёпиқ чизиқ ўз ичига фақат $z=i$ қўтбни олса, у ҳолда

$$\oint_{\Gamma} \frac{\cos z}{z-i} dz = \pi i (e + e^{-1}).$$

7-мисол. $f(z) = \operatorname{tg} z$ нинг қолдиқлари топилсин.

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad \cos z = 0 \quad \text{дан} \quad z = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\varphi(z) = \sin z, \quad \psi(z) = \cos z, \quad \psi'(z) = -\sin z.$$

$z = a_k = (2k+1) \frac{\pi}{2}$ одвий кутблар бўлиб, (8) га кўра:

$$c_{-1}^{(k)} = \frac{\varphi(a_k)}{\psi'(a_k)} = \frac{\sin(2k+1) \frac{\pi}{2}}{-\sin(2k+1) \frac{\pi}{2}} = -1.$$

Демак, ҳамма қолдиқлар ўзаро тенг бўлиб, улар -1 га тенг экан.

Агар $k=0$, $k=-1$ деб олсак, у ҳолда $a_0 = \frac{\pi}{2}$, $a_{-1} = -\frac{\pi}{2}$ кутблар ҳосил бўлади.

Γ ёпиқ чизиқ ичида шу иккала кутбдан бошқа кутб йўқ, деб фараз этайлик, у вақтда асосий теоремага мувофиқ:

$$\oint_{\Gamma} \operatorname{tg} z \, dz = 2\pi i (c_{-1}^{(0)} + c_{-1}^{(-1)}) = 2\pi i (-1 - 1) = -4\pi i.$$

8-мисол. Тенгламаси $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$ бўлган Γ астроида бўйлаб олинган

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$$

интеграл ҳисоблансин.

$(z^2-1)^2=0$ дан: $z_1=1$, $z_2=-1$ лар иккинчи тартибли кутблар бўлиб, Γ ичига жойлашган, $z_3=3$ кутб эса Γ нинг ташқарисида ётади.

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2(z-3)^2}.$$

а) функциянинг $z_1=1$ га нисбатан қолдиғини излаймиз:

$$(z-1)^2 f(z) = [(z+1)(z-3)]^{-2}.$$

Икки томондан, бир марта ҳосила олиб, лимитга ўтилса,

$$c_{-1}^{(1)} = -4 \lim_{z \rightarrow 1} \{(z-1)[(z+1)(z-3)]^{-3}\} = 0.$$

б) Энди $z_2=-1$ га нисбатан қолдиқни излаймиз:

$$(z+1)^2 f(z) = [(z-1)(z-3)]^{-2}.$$

Бундан ҳам ҳосила олиб лимитга ўтилса:

$$c_{-1}^{(2)} = -4 \lim_{z \rightarrow -1} \{(z-2)[(z-1)(z-3)]^{-3}\} = \frac{3}{128}.$$

Демак,

$$I = 2\pi i (c_{-1}^{(1)} + c_{-1}^{(2)}) = 2\pi i \cdot \frac{3}{128} = \frac{3\pi i}{64}.$$

9-мисол. $I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left[\frac{z+2}{z^2-1} - \frac{18 \sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)(z^2+9)} \right] dz$ интеграл ҳисоблан-

син, бундаги C контур $|z-2|=3$ айланадан иборат бўлиб, унинг маркази $a=2$ нуқтада ва радиуси $R=3$.

Ишни осонлаштириш учун интегрални иккига ажратайлик:

$$I = I_1 - I_2, \text{ бунда}$$

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z+2}{e^z-1} dz \quad \text{ва} \quad I_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{18 \sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)(z^2+9)} dz.$$

Дастлаб биринчи интеграл белгиси остидаги функциянинг қутбларини топамиз:

$$e^z - 1 = 0, e^z = 1, z = 2k\pi i \text{ дан } a_k = 2k\pi i$$

оддий қутблар келиб чиқади, бунда $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Бу қутблардан фақат $a_0=0$ берилган C айлана ичиди бўлиб, қолганлари унинг ташқарисидадир. Шу сабабли $z=0$ нуқтага нисбатан қолдиқни (8) га асосан топ-сак:

$$c_{-1}^{(1)} = \frac{\varphi(a)}{\varphi'(a)} = \frac{2}{e^0} = 0.$$

Демак, қолдиқнинг таърифига мувофиқ: $I_1 = c_{-1}^{(1)} = 2$.

Энди I_2 интеграл белгиси остидаги функциянинг қутбларини топамиз:

$$\left(z - \frac{\pi}{2}\right)(z^2 + 9) = 0 \text{ дан } z = \frac{\pi}{2}, z = \pm 3i$$

бўлиб, $\pm 3i$ қутблар C нинг ташқарисидадир. $z = \frac{\pi}{2}$ га нисбатан қолдиқ (6) га мувофиқ:

$$c_{-1}^{(2)} = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\left(z - \frac{\pi}{2}\right) f(z) \right] = 18 \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin z}{z^2 + 9} = \frac{18}{\frac{\pi^2}{4} + 9} = \frac{72}{\pi^2 + 36} = I_2.$$

Натижада:

$$I = I_1 - I_2 = 2 - \frac{72}{\pi^2 + 36} = \frac{2\pi^2}{\pi^2 + 36}.$$

Агар $f(z)$ функция учун махсус нуқта қутб бўлмаса, у ҳолда махсус нуқтага нисбатан қолдиқни ҳисоблаш учун, таърифга кўра Лоран ёйилмасидан фойдаланиш керак.

10-мисол. $\sin \frac{3}{z-1}$ функциянинг $z=1$ нуқтага нисбатан қолдиғи топилисин. Лоран ёйилмаси қуйидагича бўлади:

$$\sin \frac{3}{z-1} = \frac{3}{z-1} - \frac{3^3}{3!(z-1)^3} + \dots$$

Бундан:

$$\text{қолд.} \sin \frac{3}{z-1} = 3.$$

11-мисол. $f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z-2}$ функциянинг $z=2$ нуқтага нисбатан қолдиги топилсин.

$$f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z-2} = z^3 \left[1 - \frac{z^3}{2(z-2)^2} + \frac{z^3}{4!(z-2)^4} - \frac{z^3}{6!(z-2)^6} + \dots \right]$$

$$\frac{1}{z-2} = \zeta \text{ деб олсак, } z = \frac{2\zeta + 1}{\zeta}.$$

У ҳолда

$$f(z) = \frac{(2\zeta + 1)^3}{\zeta^3} - \frac{1}{2!} \frac{(2\zeta + 1)^3}{\zeta^3} \cdot \zeta^3 +$$

$$+ \frac{1}{4!} \frac{(2\zeta + 1)^3}{\zeta^3} \cdot \zeta^4 - \frac{1}{6!} \frac{(2\zeta + 1)^3}{\zeta^3} \cdot \zeta^6 + \dots$$

Қолдиқни топиш учун ζ олдидаги коэффициентни топқшимиз керак. Ёйилмадан дарҳол аниқлаймиз:

$$\text{қ.м.д. } f(z) = -\frac{1}{2!} 3 \cdot 2^3 + \frac{1}{4!} = -\frac{143}{24}.$$

3-§. Функциянинг чексиз узоқлашган нуқтага нисбатан қолдиги

Чексиз узоқлашган $z = \infty$ нуқтанинг атрофи деб ҳар қандай R радиусли доиранинг ташқарисига айтилар эди. Уни биз

$$|z| > R \text{ ёки } R < |z| < \infty$$

кўринишда ёзар эдик. $f(z)$ функция учун $z = \infty$ нуқта ажралган махсус нуқта бўлсин дейлик. У ҳолда мана шу чексиз узоқлашган нуқта атрофида $f(z)$ функцияни Лоран қаторига ёйиш мумкин:

$$f(z) = \dots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

Бу қатор $|z| > R$ соҳада абсолют ва текис яқинлашувчи бўлгани учун ρ радиусли ($\rho > R$) ихтиёрый C айланада ҳам текис яқинлашади. Шу сабабли бу қатордан C бўйлаб интеграл олиш мумкин. C нинг мусбат йўналиши соат стрелкаси бўйича бўлади, чунки $z = \infty$ нуқта (умуман $|z| > R$ соҳа) чап томонимизда туриши керак. Маълумки, худди шу йўналиш $z = 0$ нуқтага (умуман, $|z| < R$ доирага) нисбатан манфий йўналиш бўлиб қолади, чунки $z = 0$ нуқта унғ томонимизда қолади.

Ушбу

$$\oint_C z^n dz = \begin{cases} \text{агар } n \neq -1 \text{ бўлса, } 0, \\ \text{агар } n = -1 \text{ бўлса, } 2\pi i \end{cases}$$

формуларга асосан сўнгги қатордан интеграл олинса,

$$\oint_C f(z) dz = c_{-1} \oint_C \frac{dz}{z} = -c_{-1} \oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i (-c_{-1}) \quad (9)$$

формула ҳосил бўлади.

Чекли $z = a \neq \infty$ нуқтага нисбатан функция қолдигининг таърифи бизга 1-§ дан маълум. Қуйидаги таъриф ҳам шунга ўхшаш киритилади.

Таъриф. Чексиз узоқлашган $z = \infty$ нуқтанинг бирор атрофида бир қийматли ва аналитик бўлган $f(z)$ функциянинг ўша нуқтага нисбатан қолдиги деб, Лоран қаторидаги $\frac{1}{z}$ ҳаднинг минус ишораси билан олинган коэффициентига айтилади:

$$\text{қолд. } f(z) = -c_{-1}.$$

Баъзан

$$-c_{-1} = \text{Res } f(\infty) \text{ ёки } -c_{-1} = \text{Res } [f(z), \infty]$$

қуринишда ҳам ёзадилар. Демак, мана шу таърифга кўра (9) тенгликдан қуйидаги формула ҳосил бўлади:

$$-c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz, \quad (10)$$

бундаги C нинг йўналиши $z = \infty$ нуқта атрофига нисбатан мусбатдир (лекин $z = 0$ га нисбатан манфий йўналиш). Мана шу (10) тенгликнинг ўнг томонига қараб, қолдиққа бошқача таъриф бериш ҳам мумкин.

Таъриф. Чексиз узоқлашган $z = \infty$ нуқтанинг бирор атрофида бир қийматли ва аналитик бўлган $f(z)$ функциянинг $z = \infty$ га нисбатан қолдиги деб ушбу

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$$

интегралга айтилади, бунда C етарли даражада катта радиусга эга бўлган айлана бўлиб, унинг йўналиши соат стрелкаси бўйича олинад.

Қолдиқ ҳақида сўзлаганимизда муҳим бир нарсга эътибор қилмоғимиз керак. Маълумки, $f(z)$ функцияни чекли a нуқта атрофида Лоран қаторига ёйганимизда у икки қисмдан иборат бўлиб, мусбат даражали ҳадларнинг йигиндиси унинг тўғри қисми ва манфий даражали ҳадларни йигиндиси бош қисми дейилар эди. Агар a — тўғри нуқта бўлса, Лоран қаторининг бош қисми бўлмайди, шу сабабли $c_{-1} = 0$ бўлур эди. Бошқача айтганда, Лоран қатори

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

дан иборат бўлади.

Аксинча, агар $f(z)$ функцияни $z = \infty$ чексиз узоқлашган нуқта атрофида Лоран қаторига ёйсак, бу ҳам икки қисмдан иборат бўлиб, мусбат даражали ҳадлар йиғиндиси унинг бош қисми, қолганлари эса тўғри қисми дейнлар эди. Агар $z = \infty$ тўғри нуқта бўлиб қолса, Лоран қаторининг бош қисми бўлмайди, фақат тўғри

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots$$

қисмигина қолади.

Бундан қўринадики, c_{-1} нолдан фарқли бўлиши ҳам мумкин. Иккала қолдиқнинг бир-биридан муҳим фарқи шундан иборатки, a — чекли ва тўғри нуқта бўлса, унга нисбатан қолдиқ $c_{-1} = 0$ бўлади; агар $z = \infty$ тўғри нуқта бўлса, унга нисбатан қолдиқ $-c_{-1} \neq 0$ бўлиши мумкин. Масалан, $f(z) = \frac{1}{z}$ функция учун $z = \infty$ тўғри нуқтадир. Шу билан бирга қолд. $f(z) = -1 \neq 0$

Энди қуйидаги теоремани исбот қилайлик.

Теорема. Агар кенгайтирилган текисликда бир қийматли ва аналитик $f(z)$ функция ажралган махсус нуқталардан бошқа хил махсус нуқтага эга бўлмаса, у ҳолда функциянинг ҳамма қолоиқлари йиғиндиси нолга тенг бўлади.

Исбот. Маркази координаталар бошида бўлган ва етарли даражада катта ρ радиусли шундай C айлана олаимизки, $f(z)$ нинг ҳамма ажралган махсус $a_1, a_2, \dots, a_k$ нуқталари C нинг ичида қолсин. Чексиз узоқлашган $z = \infty$ нуқта C нинг ташқарисида бўлиб, у нуқтада $f(z)$ функция аналитик бўлиши ҳам мумкин. У ҳолда, қолдиқларга доир асосий теоремага мувофиқ,

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \left[\text{қолд. } f(z) + \text{қолд. } f(z) + \dots + \text{қолд. } f(z) \right] \quad (11)$$

тенгликка эга бўламиз. Бундаги C нинг йўналиши соат стрелкаси ҳаракатининг йўналишига тескаридир, чунки махсус нуқталар чап томонда қолиши керак.

Иккинчи томондан, (10) га мувофиқ, $z = \infty$ нуқтага нисбатан $f(z)$ нинг қолдиғини қуйидагича ёзишга ҳақтимиз:

$$\oint_{C^-} f(z) dz = -c_{-1} \cdot 2\pi i = 2\pi i \cdot \text{қолд. } f(z)$$

ёки C нинг йўналишини ўзгартириб, тенгликнинг икки томонини (-1) га кўпайтирилса:

$$\oint_{C^+} f(z) dz = -2\pi i \cdot \text{қолд. } f(z). \quad (12)$$

Энди (11) тенгликдан (12) ни айирамиз:

$$2\pi i \left[\text{қолд. } f(z) + \text{қолд. } f(z) + \dots + \text{қолд. } f(z) \right] = 0$$

ёки икки томонини $2\pi i$ га бўлиб юборилса,

$$\text{қолд. } f(z) + \text{қолд. } f(z) + \dots + \text{қолд. } f(z) + \text{қолд. } f(z) = 0 \quad (13)$$

$z=a_1 \qquad z=a_2 \qquad z=a_k \qquad z=\infty$

ҳосил бўлиб, теорема тўла исбот бўлади.

Агар тенгликнинг чап томонидаги сўнгги ҳадни ўнг томонга ўтказсак, ҳамма чекли нуқталарга нисбатан қолдиқлар йингидисини излаш ўрнига $z = \infty$ нуқтага нисбатан қолдиқни топиб, тескари ишора билан олиш кифоя эканлини кураимиз. Баъзи мисолларни шу усул билан ечиш қулай бўлади.

4-§. Логарифмик қолдиқ. Аргумент принципи

1. Логарифмик қолдиқ. Бу тушунча қолдиқлар ёрдамида ушбу

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \varphi(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (14)$$

интегралнинг қийматини ҳисоблаш билан боғлиқдир. Бу ерда $f(z)$ силлиқ ёки булаклари силлиқ ёпиқ C контурда аналитик ва унинг ичида эса чекли сондаги қутблардан бошқа ҳамма нуқталарда аналитик функция, $f(z)$ функция C контурда нолдан фарқли, $\varphi(z)$ эса C да ва унинг ичида аналитик функция деб фараз қиламиз. C контурнинг ичида $a_1, a_2, \dots, a_k$ нуқталар $f(z)$ функциянинг мос равишда $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ тартибли ноллари, $b_1, b_2, \dots, b_m$ нуқталар эса мос равишда $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ тартибли қутблари бўлсин. У ҳолда:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi(a_i) - \sum_{j=1}^m \beta_j \varphi(b_j). \quad (15)$$

(15) формулани исботлаш учун (14) интегралга қолдиқлар назариясининг асосий теоремасини қўллаймиз. $F(z) = \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)}$ функциянинг C контур ичидаги махсус нуқталари фақат қутблар бўлиб, улар $f(z)$ функциянинг ноллари ёки қутбларидан иборат бўлади. $\varphi(z)$ ва $f(z)$ функциялар a_i нуқтанинг атрофида қуйидаги Тейлор ёйилмаларига эга:

$$\varphi(z) = \varphi(a_i) + \frac{\varphi'(a_i)}{1!} (z - a_i) + \dots; \quad f(z) = A_i (z - a_i)^{\alpha_i} + \dots$$

Демак,

$$f'(z) = A_i \alpha_i (z - a_i)^{\alpha_i - 1} + \dots \quad (A_i \neq 0)$$

$$F(z) = [\varphi(a_i) + \dots] \frac{A_i \alpha_i (z - a_i)^{\alpha_i - 1} + \dots}{A_i (z - a_i)^{\alpha_i} + \dots} = \frac{[\varphi(a_i) + \dots] [A_i \alpha_i + \dots]}{(z - a_i) [A_i + \dots]}.$$

Бундан кўринадики, $z = a_i$ нуқта $F(z)$ функция учун оддий қутб экан. Бу нуқтадаги $F(z)$ нинг қолдиғини (8) формулага асосан топамиз:

$$\text{қолд. } F(z) = \frac{\varphi(a_i)A_i a_i}{A_i} = a_i \varphi(a_i).$$

Агар $\varphi(a_i) = 0$ бўлса, бу қолдиқ нолга тенг бўлиб, $F(z)$ функция учун $z = a_i$ нуқта қутб бўлмайди.

Энди $f(z)$ функциянинг бирор b_j қутбини текшираемиз. Бу қутб атрофида ушбу ёйилмаларга эга бўламиз:

$$\varphi(z) = \varphi(b_j) + \dots,$$

$$f(z) = B_j(z - b_j)^{-\beta_j} + \dots, \quad f'(z) = -B_j(z - b_j)^{-\beta_j - 1} - \dots$$

Буларга асосан:

$$F(z) = [\varphi(b_j) + \dots] \frac{-B_j \beta_j (z - b_j)^{-\beta_j - 1} - \dots}{B_j (z - b_j)^{-\beta_j} + \dots}.$$

Охирги касрнинг сурат ва махражини $(z - b_j)^{\beta_j + 1}$ га кўпайтираемиз. У ҳолда:

$$F(z) = \frac{[\varphi(b_j) + \dots] [-B_j \beta_j] - \dots}{B_j (z - b_j) + \dots}.$$

Демак, $z = b_j$ нуқта $F(z)$ функция учун оддий қутб бўлиб, унинг бу нуқтадаги қолдиғи $-\beta_j \varphi(b_j)$ га тенг (худди олдингидай, агар $\varphi(b_j) = 0$ бўлса, қолдиқ нолга айланади).

Шундай қилиб, $F(z)$ функциянинг C контур ичида барча махсус нуқталарга нисбатан қолдиқларининг йиғиндиси

$$\sum_{i=1}^k a_i \varphi(a_i) - \sum_{j=1}^m \beta_j \varphi(b_j)$$

га тенг. Бу эса (15) формуланинг тўғрилигини исботлайди. Агар (14) интегралда $f(z)$ ўрнига $f(z) - A$ олинса, у ҳолда $a_1, \dots, a_k$ орқали $f(z)$ нинг нолларини эмас, балки A_i нуқталарини белгилаб олиш керак. Бунда юқорида юритилган мулоҳазаларда ҳеч қандай ўзгариш бўлмай, (15) формула ўз кучини сақлаб қолади, яъни

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z) - A} dz = \sum_{i=1}^k a_i \varphi(a_i) - \sum_{j=1}^m \beta_j \varphi(b_j). \quad (15')$$

Энди (15) формуланинг айрим хусусий ҳолларини кўриб ўтаемиз. а) $\varphi(z) = z$. Бу ҳолда формула қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^k a_i a_i - \sum_{j=1}^m \beta_j b_j.$$

б) $\varphi(z) = 1$. Бу ҳолда:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{l=1}^k \alpha_l - \sum_{j=1}^m \beta_j. \quad (16)$$

Бу ерда $\sum_{l=1}^k \alpha_l = N$ сон $f(z)$ функциянинг C контур ичидаги нолларининг сони, $\sum_{j=1}^m \beta_j = P$ эса ўша функциянинг контур ичидаги

қутбларининг сонидир. Бунда ҳар бир ноль ёки қутбнинг тартиби қанча бўлса, ўзи ҳам шунча марта ҳисобланади.

(16) тенгликнинг чап томонидаги интегрални $f(z)$ функциянинг C контурга нисбатан логарифмик қолдиғи дейилади, чунки $\frac{f'(z)}{f(z)}$ нисбат $\ln f(z)$ нинг ҳосиласи бўлиб уни логарифмик ҳосила ҳам дейдилар. Натижада биз, ушбу теоремага келдик.

Теорема. $f(z)$ функциянинг C контурга¹ нисбатан логарифмик қолдиғи $f(z)$ нинг C ичидаги ноллари сони билан қутблари сонининг айирмасига тенг (бунда ҳар бир ноль ёки ҳар бир қутбнинг тартиби қанча бўлса, ўзи ҳам шуича марта ҳисобланади).

2. Аргумент принципи. Логарифмик қолдиқнинг геометрик маъноси аниқлаш учун, уни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{d}{dz} [\ln |f(z)|] dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{d}{dz} |\ln |f(z)|| dz + \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{d}{dz} [\arg f(z)] dz, \end{aligned} \quad (17)$$

бунда $\ln$ ва $\arg$, бу функцияларнинг C контур бўйлаб узлуксиз ўзгарувчи қандайдир тармоқларини билдиради. C контурда ихтиёрий z_0 нуқтани олиб, бу нуқтани интеграллаш йўлининг бошланғич ва охири нуқтаси деб ҳисоблаймиз. Шу z_0 нуқтадан бошлаб C контурни тўла айланиш натижасида $\ln |f(z)|$ функция яна ўзининг аввалги қийматини қабул қилади.

Шунинг учун:

$$\oint_C \frac{d}{dz} [\ln |f(z)|] dz = \ln |f(z_0)| - \ln |f(z_0)| = 0.$$

z нуқта C контурни мусбат йўналишда айланиши натижасида $w = f(z)$ нуқта (w) текисликда бирор Γ ёпиқ эгри чизиқни чизади. Иккинчи томондан, агар Γ контур $w = 0$ нуқтани ай-

¹ C контур силлиқ ёки силлиқ бўлаклардан иборат ёпиқ чизиқ деб фазр қиламиз

ланиб ўтган бўлса, C ни тўла айланиш натижасида $\arg f(z)$ нинг қиймати ўзгаради. $\arg f(z_0)$ нинг z нуқта C контурни айланимасдан олдинги қийматини φ_0 орқали, айлангандан кейингисини φ_1 орқали белгилаб оламиз. У ҳолда:

$$\oint_C \frac{d}{dz} [\arg f(z)] dz = \varphi_1 - \varphi_0.$$

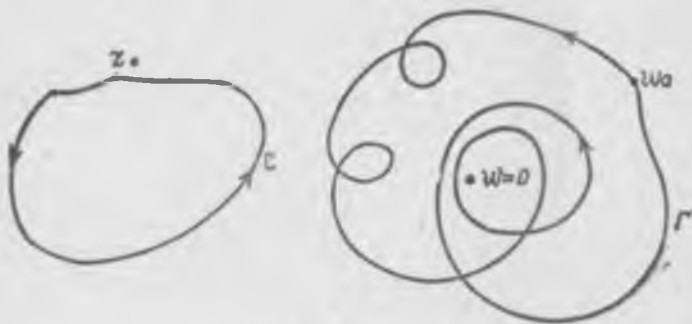
Демак,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2\pi},$$

$\varphi_1 - \varphi_0$ айирмани, одатда, $\text{Var}_C \arg f(z)$ (Varitlo — латинча ўзгариш демакдир) орқали ёки $\Delta_C \arg f(z)$ орқали белгиланади. Шундай қилиб,

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z) \quad (18)$$

миқдор — C ни айланиш натижасида $f(z)$ функция аргументи тўла ўзгаришининг 2π га бўлингандир, геометрик тилда эса z нуқта C контурни тўла айланганда $w = f(z)$ векторнинг охири координаталар боши $w = 0$ атрофида тўла айланишларининг сонини билдиради (тўла айланишлар сонини 2π га кўпайтмаси $\arg f(z)$ нинг ўзгаришини беради) (91-чизма).



91-а, б чизма.

(18) формулани аргумент принципи дейилади, яъни $f(z)$ функциянинг ёпиқ C контур ичидаги ноллари сони билан қутблари сонининг айирмаси, z нуқта C ни мусбат йўналишда айлангандаги $\arg f(z)$ ўзгаришининг 2π га нисбатига тенг; ёки $f(z)$ функция ёпиқ C контур ичидаги ноллари сони билан қутблари сонининг айирмаси, z нуқта C ни мусбат йўналишда чизганда $w = f(z)$ векторнинг координаталар боши атрофида айланишларининг сонига тенг.

Аргумент принципининг табиқий сифатида қуйидаги теоремани исбот қиламиз.

б) $\varphi(z) = 1$. Бу ҳолда:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{l=1}^k \alpha_l - \sum_{j=1}^m \beta_j \quad (16)$$

Бу ерда $\sum_{l=1}^k \alpha_l = N$ сон $f(z)$ функциянинг C контур ичидаги нолларининг сони, $\sum_{j=1}^m \beta_j = P$ эса ўша функциянинг контур ичидаги қутбларининг сонидир. Бунда ҳар бир ноль ёки қутбнинг тартиби қанча бўлса, ўзи ҳам шунча марта ҳисобланади.

(16) тенгликнинг чап томонидаги интегрални $f(z)$ функциянинг C контурга нисбатан логарифмик қолдиғи дейилади, чунки $\frac{f'(z)}{f(z)}$ нисбат $\ln f(z)$ нинг ҳосиласи бўлиб уни логарифмик ҳосила ҳам дейдилар. Натижада биз, ушбу теоремага келдик.

Теорема. $f(z)$ функциянинг C контурга¹ нисбатан логарифмик қолдиғи $f(z)$ нинг C ичидаги ноллари сони билан қутблари сонининг айирмасига тенг (бунда ҳар бир ноль ёки ҳар бир қутбнинг тартиби қанча бўлса, ўзи ҳам шунча марта ҳисобланади).

2. Аргумент принципи. Логарифмик қолдиқнинг геометрик маъносини аниқлаш учун, уни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{d}{dz} [\ln |f(z)|] dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{d}{dz} [\ln |f(z)|] dz + \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{d}{dz} [\arg f(z)] dz, \end{aligned} \quad (17)$$

бунда $\ln$ ва $\arg$, бу функцияларнинг C контур бўйлаб узлуксиз узгарувчи қандайдир тармоқларини билдиради. C контурда ихтиёрий z_0 нуқтани олиб, бу нуқтани интеграллаш йўлининг бошланғич ва охириги нуқтаси деб ҳисоблаймиз. Шу z_0 нуқтадан бошлаб C контурни тўла айланиш натижасида $\ln |f(z)|$ функция яна ўзининг аввалги қийматини қабул қилади.

Шунинг учун:

$$\oint_C \frac{d}{dz} [\ln |f(z)|] dz = \ln |f(z_0)| - \ln |f(z_0)| = 0.$$

z нуқта C контурни мусбат йўналишда айланиши натижасида $w = f(z)$ нуқта (w) текисликда бирор Γ ёпиқ эгри чизиқни чизади. Иккинчи томондан, агар Γ контур $w = 0$ нуқтани ай-

¹ C контур силлиқ ёки силлиқ бўлаклардан иборат ёпиқ чизиқ деб фарз қиламиз

ланпб ўтган бўлса, C ни тўла айланиш натижасида $\arg f(z)$ нинг қиймати ўзгаради. $\arg f(z_0)$ нинг z нуқта C контурни айланимасдан олдинги қийматини φ_0 орқали, айлангандан кейингисини φ_1 орқали белгилаб оламиз. У ҳолда:

$$\oint_C \frac{d}{dz} [\arg f(z)] dz = \varphi_1 - \varphi_0.$$

Демак,

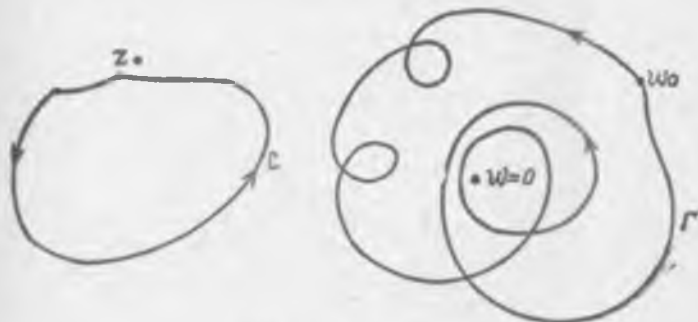
$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2\pi},$$

$\varphi_1 - \varphi_0$ айирмани, одатда, $V_{\arg C} \arg f(z)$ ($V_{\arg}$ — латинча ўзгариш демакдир) орқали ёки $\Delta_C \arg f(z)$ орқали белгиланади.

Шундай қилиб,

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z) \quad (18)$$

миқдор — C ни айланиш натижасида $f(z)$ функция аргументи тўла ўзгаришининг 2π га бўлингандир, геометрик тилда эса z нуқта C контурни тўла айланганда $w = f(z)$ векторнинг охири координаталар боши $w = 0$ атрофида тўла айланишларининг сонини билдиради (тўла айланишлар сонини 2π га кўпайтмаси $\arg f(z)$ нинг ўзгаришини беради) (91-чизма).



91- а, б чизма.

(18) формулани аргумент принципи дейилади, яъни $f(z)$ функциянинг ёпиқ C контур ичидаги ноллари сони билан қутблари сонининг айирмаси, z нуқта C ни мусбат йўналишда айлангандаги $\arg f(z)$ ўзгаришининг 2π га нисбатига тенг; ёки $f(z)$ функция ёпиқ C контур ичидаги ноллари сони билан қутблари сонининг айирмаси, z нуқта C ни мусбат йўналишда чизганда $w = f(z)$ векторнинг координаталар боши атрофида айланишларининг сонига тенг.

Аргумент принципининг таъбиқи сифатида қуйидаги теоремани исбот қиламиз.

Руше теоремаси. Агар $f(z)$ ва $\varphi(z)$ функциялар силлиқ ёки силлиқ булаклардан иборат C ёпиқ чизиқда ва унинг ичида аналитик бўлса ҳамда C да $|f(z)| > |\varphi(z)|$ шарт бажарилса, у ҳолда $f(z)$ ва $f(z) + \varphi(z)$ функцияларнинг C ичидаги нолларининг сони ўзаро тенг бўлади.

Исбот. $f(z) + \varphi(z)$ функцияни ушбу кўринишда ёзиб оламиз:

$$f(z) + \varphi(z) = f(z) \left[1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right].$$

Бундан

$$\arg [f(z) + \varphi(z)] = \arg f(z) + \arg \left[1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right]$$

бўлгани учун:

$$\Delta_C \arg [f(z) + \varphi(z)] = \Delta_C \arg f(z) + \Delta_C \arg \left[1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right].$$

А теореманинг шартига кўра C да $\left| \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right| < 1$ бўлгани учун z нуқта C бўйлаб ҳаракат қилганда $w = 1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}$ нуқта ҳамма вақт $|w - 1| < 1$ доира ичида ҳаракат қилади. $w = 0$ нуқта бу доирага тегишли бўлмагани учун z нуқта C контурни тўла айланиб чиққанда, w нинг аргументи ўзининг бошланғич қийматига қайтиб келади. Демак,

$$\Delta_C \arg \left[1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right] = 0 \text{ ва } \Delta_C \arg [f(z) + \varphi(z)] = \Delta_C \arg f(z). \quad (19)$$

C контурда $|f(z)| > |\varphi(z)|$ бўлгани учун $|f(z)| > 0$, $|f(z) + \varphi(z)| > |f(z)| - |\varphi(z)| > 0$ бўлади. Аргумент принципига асосан, $f(z)$ ва $f(z) + \varphi(z)$ функцияларнинг C контур ичида қутблари бўлмагани сабабли, уларнинг C нинг ичидаги нолларининг сони (19) тенгликка кўра бир хил бўлади.

1-мисол. Ушбу

$$z^6 - 5z^4 - 2z^2 + 1 = 0$$

тенгламанинг бирлик доира ичидаги нолларининг (илдизларининг) сони топилсин. Бу мисолни ечиш учун Руше теоремасидан фойдаланамиз. $-5z^4 + 1 = f(z)$, $z^6 - 2z^2 = \varphi(z)$ деб оламиз. $|z| = 1$ айланада

$$|f(z)| = |-5z^4 + 1| > 5|z|^4 - 1 = 4,$$

$$|\varphi(z)| = |z^6 - 2z^2| < |z|^6 + 2|z|^2 = 3.$$

Демак, $|z| = 1$ да $|f(z)| > |\varphi(z)|$. Руше теоремасига асосан $|z| < 1$ доирада $f(z) + \varphi(z) = z^6 - 5z^4 - 2z^2 + 1$ функция нолларининг сони $f(z) = -5z^4 + 1$ функция нолларининг сонига тенг. Охири функциянинг бирлик доирадаги нолларининг сони эса 6 га тенг. Шундай қилиб, берилган тенгламанинг бирлик доирадаги илдизларининг сони 6 га тенг.

2-мисол. Ушбу

$$z + e^{-z} = \lambda, \lambda > 1$$

тенгламанинг ўнг ярим текисликда бирдан-бир ҳақиқий илдиэга эга эканлигини исботлаймиз. Бунинг учун $(-iR, iR)$ кесма ва $|z| = R$ айлананинг ўнг ярмидан ҳосил бўлган контурни текшираимиз. $f(z) = z - \lambda$ ва $\varphi(z) = e^{-z}$ деб оламиз. $(-iR, iR)$ кесмада $z = iy$ бўлгани учун $|f(z)| = |iy - \lambda| > \lambda > 1$. $|\varphi(z)| = |e^{-iy}| = 1$; $|z| = R$, $\operatorname{Re} z = x > 0$ ярим айланада етарли катта R учун $(R = \lambda + 1$ деб олиш мумкин): $|f(z)| = |z - \lambda| > |z| - \lambda = R - \lambda > 1$, $|\varphi(z)| = e^{-x} < 1$.

Руше теоремасига асосан берилган тенгламанинг юқорида олинган контурнинг ичидаги илдиэларининг сони $z - \lambda = 0$ тенглама илдиэларининг сонига тенг, яъни фақат битта. Демак, барча ўнг ярим текисликда (R ни етарли катта қилиб олиш мумкинлиги сабабли) берилган тенглама битта илдиэга эга. Бу илдиэ ҳақиқий сондир, чунки $z = 0$ да тенгламанинг чап томони 1 га тенг ($1 < \lambda$), $z = x \rightarrow \infty$ да эса чексиз ўсади, демак, шундай $z = x$ топиладики, бунда тенгламанинг чап томони λ га тенг бўлади.

3-мисол. Алгебранинг асосий теоремаси. Олдин биз n -даражали ихтиёрий кўпҳаднинг камида битта илдиэи мавжудлигини исботлаган эдик, энди, n та илдиэи борлигини кўрсатамиз, яъни ихтиёрий n -даражали

$$P(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n \quad (n > 1, c_0 \neq 0)$$

кўпҳад n та илдиэга эга (ҳар бир илдиэнинг тартиби қанча бўлса, ўзини ҳам шунча ҳисоблаш керак).

$f(z) = c_0 z^n$, $\varphi(z) = c_1 z^{n-1} + \dots + c_n$ деб белгилаб оламиз. z^n ҳаднинг ҳаммаси нолга тенг бўлган n та илдиэи бор.

Руше теоремасидаги C контур сифатида $R > 1$ радиусли доира оламиз. $|z| = R$ да

$$|f(z)| = |c_0| R^n,$$

$$|\varphi(z)| \leq |c_1| R^{n-1} + \dots + |c_{n-1}| R + |c_n| \leq (|c_1| + \dots + |c_n|) R^{n-1}.$$

Демак, R ни ушбу

$$R > \frac{|c_1| + \dots + |c_n|}{c_0}$$

тенгсизликини қаноатлантирадиган қилиб танлаб олсак, $|z| = R$ да

$$|\varphi(z)| < |f(z)|$$

бўлади. Руше теоремасига асосан, $|z| < R$ доирада $P(z) = f(z) + \varphi(z)$ нолларининг сони $f(z)$ нолларининг сонига, яъни n та тенг. Лекин $\lim_{z \rightarrow \infty} P(z) =$

$= \infty$ бўлгани сабабли $P(z)$ кўпҳаднинг барча ноллари $|z| < R$ доирага (R ни етарли катта қилиб танлаш ҳисобига) тегишли дейишимиз мумкин. III у билан теорема исботланди.

5-§. $\operatorname{ctg} z$ ни оддий касрларга ёйиш

$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$ мероморф функция бўлиб, унинг учун $\sin z$ нинг ноллари, яъни $z_k = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) нуқталар оддий

қутблар бўлади. Бу нуқталардаги қолдиқларни бизга маълум (8) формула ёрдами билан ҳисоблаймиз.

$$\text{қолд. } \operatorname{ctg} z = \frac{|\cos z|}{(\sin z)'} \Big|_{z=k\pi} = 1.$$

Демак, $\operatorname{ctg} z$ функциянинг $z = k\pi$ қутбдаги бош қисми

$$\frac{1}{z - k\pi}$$

бўлади, хусусий ҳолда, $z = 0$ қутбдаги бош қисм $\frac{1}{z}$ дир. Шунинг учун

$$f(z) = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$$

функция $z = 0$ да қутулиб бўладиган махсус нуқтага эга бўлади. Бундан, $f(z)$ нинг тоқлигига ва $z = 0$ да узлуксизлигига асосан, $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$ келиб чиқади.

Агар текисликдан $k\pi$ марказли ва r радиусли $|z - k\pi| < r$ доирачаларни чиқариб ташласак (r — ихтиёрий берилган мусбат сон), $\operatorname{ctg} z$ бутун текисликда чегараланган бўлишини кўрсатиш мумкин. (92-чизма).



92- чизма.

$\operatorname{ctg} z$ функция даврий бўлиб, унинг даври π га тенг бўлгани учун $|z| < r$, $|z - \pi| < r$ ярим доирачалар чиқариб ташланган. $S: 0 \leq \operatorname{Re} z \leq \pi$ йўлда текшириш етарлидир, S йўлнинг ҳар қандай чегараланган қисмида $\operatorname{ctg} z$ узлуксиз, демак, узлуксиз функциялар хоссасига асосан модули бўйича чегараланган бўлади. Энди S йўлда $z = x + iy$ нуқта ихтиёрий равишда чексизликка интилганда $|\operatorname{ctg} z|$ нинг чегараланганлигини кўрсатиш қолди.

Шу мақсадда $\operatorname{ctg} z$ нинг ушбу ифодасидан фойдаланамиз:

$$\operatorname{ctg} z = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i \frac{e^{-y} e^{ix} + e^y e^{-ix}}{e^{-y} e^{ix} - e^y e^{-ix}}.$$

Бундан

$$|\operatorname{ctg} z| = \frac{|e^{-y} e^{ix} + e^y e^{-ix}|}{|e^{-y} e^{ix} - e^y e^{-ix}|}.$$

Демак,

$$|\operatorname{ctg} z| \leq \frac{e^y + e^{-y}}{|e^y - e^{-y}|} \quad (\text{чунки } |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||).$$

$y \rightarrow \pm \infty$ да охирги тенгликнинг ўнг томони 1 га интилади. Демак, y нинг барча етарли катта қийматларида ҳам, масалан, ушбу

$$|\operatorname{ctg} z| < 1,5$$

тенгсизлик ўринлидир.

Сўнгра маркази координаталар бошида ва радиуси $\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ га тенг бўлган C_n айланалар ўтказамиз. r ни етарли кичик ҳисобласак (масалан, $r < \frac{\pi}{2}$) ажратилган доирачалар бўйича ўтмайди. Ҳозиргина исбот қилинганига кўра бу айланаларда

$$|\operatorname{ctg} z| < M.$$

Ушбу

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

интегрални текширамыз, бунда интеграллаш C_n айлананинг мусбат йўналиши бўйича бажарилади, z эса $z_k = k\pi$ лардан фарқли бўлган C_n ичидаги ихтиёрий нуқтадир.

$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ функция учун C_n нинг ичида $\zeta = z$, $\zeta = z_k$ нуқталар оддий қутблар бўлиб, булардаги қолдиқлар

$$\begin{aligned} \text{қолд.}_{\zeta=z} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} &= \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)'} \Big|_{\zeta=z} = f(z); \quad \text{қолд.}_{\zeta=k\pi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \\ &= \frac{\zeta \cos \zeta - \sin \zeta}{\zeta(\zeta - z)(\sin \zeta)'} \Big|_{\zeta=k\pi} = \frac{1}{k\pi - z} \end{aligned}$$

бўлади. Қолдиқлар назариясидаги асосий теоремага кўра:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = f(z) + \sum_{k=-n}^n \frac{1}{k\pi - z}. \quad (20)$$

¹ Бунда йиғинди белгисидagi штрих $k=0$ га мос ҳад чиқариб ташланганини кўрсатади ($\zeta=0$ нуқта $f(\zeta)$ учун қутб эмас).

Охирги формулада z ни нолга интилтириб, $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$ эканлигини эътиборга олсак:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta} = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{k\pi}. \quad (21)$$

(20) формуладан (21) ни айирамиз:

$$\begin{aligned} f(z) &= - \sum_{k=-n}^n \frac{1}{k\pi - z} + \sum_{k=-n}^n \frac{1}{k\pi} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta} = \sum_{k=-n}^n \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right) + \frac{z}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta(\zeta - z)}. \end{aligned}$$

Демак,

$$f(z) = \sum_{k=-n}^n \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right) + \frac{z}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta(\zeta - z)}. \quad (22)$$

Бу тенгликнинг унг томонидаги интеграл $n \rightarrow \infty$ да нолга интилади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\zeta - z|} &\leq \frac{1}{|\zeta| - |z|} = \frac{1}{\rho_n - |z|}, \quad \text{бунда: } |\zeta| = \rho_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \\ \left| \frac{z}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta(\zeta - z)} \right| &< \frac{|z| M \cdot 2\pi \rho_n}{2\pi \rho_n (\rho_n - |z|)} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

(z тайин нуқта). (22) формулада n ни чексизга интилтириб, лимитга утсак:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right), \quad z \neq k\pi$$

ёки

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right), \quad z \neq k\pi \quad (23)$$

ёйилма ҳосил бўлади. Агар $|z| < R$ доирада қутбларни бўлган чекли сондаги қўшилувчиларни чиқариб ташланса, (23) қатор ўша доирада абсолют ва текис яқинлашади. Ҳақиқатан, (23) қатор умумий ҳадини баҳоласак:

$$\left| \frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right| = \left| \frac{z}{k\pi(z - k\pi)} \right| = \frac{1}{k^2\pi} \left| \frac{z}{\pi - \frac{z}{k}} \right| \leq \frac{R}{\pi \left(\pi - \frac{R}{|k|} \right)} \cdot \frac{1}{k^2}.$$

Исталганча катта k учун шундай чекли мусбат λ мавжудки,

$\frac{R}{\pi \left(\pi - \frac{R}{|k|} \right)} \leq \lambda$ бўлади. У ҳолда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ қатор яқинлашувчи бўл-

гани учун (23) қатор ихтиёрий $|z| < R$ доирада абсолют ва текис яқинлашади. Бунга асосан, (23) қаторда ҳадларнинг тартибини ўзгартиришимиз мумкин. k ва $-k$ индексли ҳадларни бирлаштириб, қуйидаги ёйилмани ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{z + k\pi} \right) \quad (24)$$

ёки

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}. \quad (24')$$

(24') формулада z ни πz га алмаштирсак, қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2}. \quad (25)$$

Энди (24') формулада z ни iz га алмаштираемиз, у ҳолда

$$\operatorname{ctg} iz = \frac{1}{iz} - i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + k^2\pi^2}$$

ёки $\operatorname{ctg} iz = -i \operatorname{cth} z$ формулани эътиборга олсак:

$$\operatorname{cth} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + k^2\pi^2}, \quad (26)$$

$$\frac{1}{e^z - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{z}{2}$$

тенгликдан

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + 4k^2\pi^2} - \frac{1}{2} \quad (27)$$

ёки

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = 1 + 2z^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 + 4k^2\pi^2} = 1 + 2z^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2\pi^2 \left(1 + \frac{z^2}{4k^2\pi^2} \right)} =$$

$$= 1 + 2z^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2\pi^2} \left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2 k^2} + \frac{z^4}{16k^4\pi^4} - \dots \right).$$

$$\frac{z}{e^z + 1} + \frac{z}{2} = 1 + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} z^3 - \frac{1}{8\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} z^5 + \dots \quad (28)$$

Иккинчи томондан, $\frac{z}{e^z - 1}$ функция даражали қаторларни бўлиш қондасига асосан қуйидаги ёйилмага эга:

$$\frac{z}{e^z - 1} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

Ушбу

$$e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

ёйилмани эътиборга олиб, олдинги ёйилмани бундай ёзамиз:

$$z = (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots) \left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \right).$$

Бундан:

$$c_0 = 1; \quad c_1 + c_0 \frac{1}{2!} = 0, \quad c_1 = -\frac{1}{2};$$

$$c_2 + \frac{c_1}{2!} + \frac{c_0}{3!} = 0, \quad c_2 = \frac{1}{12}; \quad c_3 = 0; \quad c_4 = -\frac{1}{720}, \dots$$

Одатда $c_n n!$ сонларни Бернулли сонлари дейилади ва B_n билан белгиланади, яъни $B_n = c_n n!$

Демак,

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = 1 + \frac{z^3}{12} - \frac{z^5}{720} + \dots \quad (28')$$

(28) ва (28') ёйилмаларни таққослаб, қуйидаги тенгликларни ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{12}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}, \dots$$

$\operatorname{tg} z = -\operatorname{ctg} \left(z - \frac{\pi}{2} \right)$ эканидан фойдаланиб, (24) дан $\operatorname{tg} z$ ёйилмаси учун формула чиқарамиз:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} z &= -\frac{1}{z - \frac{\pi}{2}} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - \frac{\pi}{2} - k\pi} + \frac{1}{z - \frac{\pi}{2} + k\pi} \right) = \\ &= -\frac{1}{z - \frac{\pi}{2}} - \frac{1}{z - \frac{3\pi}{2}} - \frac{1}{z + \frac{\pi}{2}} - \frac{1}{z - \frac{5\pi}{2}} - \frac{1}{z + \frac{3\pi}{2}} - \dots = \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - \frac{2k-1}{2}\pi} + \frac{1}{z + \frac{2k-1}{2}\pi} \right), \end{aligned}$$

яъни

$$\operatorname{tg} z = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \frac{(2k-1)^2\pi^2}{4}}. \quad (29)$$

$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{z}{2} + \operatorname{tg} \frac{z}{2} \right)$ бўлгани учун, (24) ва (29) лардан қуйидаги ёйилмага эга бўламиз:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin z} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\frac{z}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\frac{z}{2} - k\pi} + \frac{1}{\frac{z}{2} + k\pi} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\frac{z}{2} - \frac{2k-1}{2}\pi} + \frac{1}{\frac{z}{2} + \frac{2k-1}{2}\pi} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z-2\pi} + \frac{1}{z+2\pi} - \frac{1}{z-\pi} - \frac{1}{z+\pi} + \frac{1}{z-4\pi} + \\ &+ \frac{1}{z+4\pi} - \frac{1}{z-3\pi} - \frac{1}{z+3\pi} + \dots = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{z+k\pi} \right). \end{aligned}$$

Демак,

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}. \quad (30)$$

(23) қаторни дифференциаллаб (Вейерштрасс теоремасига кўра дифференциаллаш мумкин), ушбу ёйилмани топамиз:

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z-k\pi)^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z+k\pi)^2}. \quad (31)$$

6-§. Бутун функцияларни чексиз кўпайтмаларга ёйиш

1. Чексиз кўпайтмалар, асосий таъриф ва теоремалар. Барча ҳадлари нолдан фарқли

$$(1 + c_k)$$

комплекс сонлар кетма-кетлигидан тузилган ушбу

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + c_k) \quad (32)$$

символик кўпайтма чексиз кўпайтма дейилади. $1 + c_k$ ($k=1, 2, \dots$) эса кўпайтма ҳадлари (кўпайтувчилари), $P_n = \prod_{k=1}^n (1 + c_k)$

эса чексиз кўпайтманинг биринчи n та ҳади кўпайтмаси дейилади.

Таъриф. Агар P_n кўпайтма $n \rightarrow \infty$ да нолдан фарқли бўлган чекли P лимитга интилса; (32) чексиз кўпайтма яқинлашувчи дейилади ва

$$P = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + c_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (1 + c_k) \quad (33)$$

лимит чексиз кўпайтманинг қиймати деб қабул қилинади.

Агар чексиз кўпайтма ҳадларидан (кўпайтувчиларидан) баъзилари нолга тенг бўлиб, уша ҳадларни чиқариб ташлангандан сўнг, қолган чексиз кўпайтма яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (32) кўпайтма нолга яқинлашувчи дейилади. Бундай кўпайтма учун $P=0$ деб ҳисобланса, (33) тенглик ўз кучини сақлайди. Равшанки, бу таърифга кўра чекли кўпайтмаларнинг хоссалари чексиз кўпайтма учун ҳам сақланади, чунончи чексиз кўпайтма, кўпайтувчиларнинг камида биттаси нолга тенг бўлгандагина нолга тенг бўлади.

Ушбу

$$1 + c_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$$

тенгликдан чексиз кўпайтма яқинлашишининг зарурий шарти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$$

дан иборат эканлиги келиб чиқади.

Агар, ҳақиқий ўзгарувчининг функциялари соҳасидагидек,

$$\ln P_n = \sum_{k=1}^n \ln (1 + c_k) = S_n$$

деб олсак, ҳадлари $a_k = \ln (1 + c_k)$ дан иборат

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \ln (1 + c_k) \quad (34)$$

қатор ҳосил бўлади. (32) чексиз кўпайтма билан (34) қаторнинг яқинлашиши ўзаро боғлиқ эканини осонгина курсатиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам,

$$a) S_n = \sum_{k=1}^n \ln (1 + c_k)$$

логарифм тармоқларини, яъни $\ln(1+c_k)$ қийматларини мос равишда танлаб

$$S_n = \ln P_n - \sum_{k=1}^n \ln(1+c_k)$$

га эриша оламиз.

Агар $\ln(1+c_k)$ қийматларни қандайдир танлаганда

$$\sum_{k=1}^n \ln(1+c_k) \quad (34)$$

қатор яқинлашувчи, яъни $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ мавжуд булса, у ҳолда

$P_n = e^{S_n}$ кўпайтма $P = e^S$ лимитга интилади, яъни (32) чексиз кўпайтма ҳам яқинлашувчи бўлади. Бу ерда шуни таъкидлаб ўта-мизки, (34) қаторнинг яқинлашишидан, $k \rightarrow \infty$ да унинг умумий ҳади $\ln(1+c_k) \rightarrow 0$ экани келиб чиқади. Бундан бирор k дан бош-лаб $\ln \ln(1+c_k)$ нинг қийматлари $-\pi$ ва π орасидалиги келиб чиқади, яъни $\ln(1+c_k)$ — логарифмларнинг бош (асосий) қийматлари бўлади.

Аксинча, агар (32) чексиз кўпайтма яқинлашувчи, яъни $P_n \rightarrow P \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\ln(1+c_k)$ қийматларини шундай танлаб оламизки, исталган n учун $\sum_{k=1}^n \ln(1+c_k)$ йиғинди $\ln P_n$ нинг бош

қийматини берсин. У ҳолда $n \rightarrow \infty$ да S_n аниқ лимитга интилади. Демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln P_n = \ln P$$

мавжуд ва (34) қатор яқинлашувчи бўлади. Юқоридаги натижа-ни қуйидаги теорема шаклида ифодалаш мумкин.

1-теорема. Ушбу

$$P = \prod_{k=1}^{\infty} (1+c_k)$$

чексиз кўпайтманинг яқинлашувчи бўлиши учун $\ln(1+c_k)$ логарифмлар қийматларини мос равишда танлаб тузилган ушбу

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+c_k)$$

қаторнинг яқинлашувчи бўлиши зарур ва етарлидир, шу билан бирга

$$P = e^S.$$

Таъриф. Агар (34) қатор абсолют яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (32) чексиз кўпайтма ҳам абсолют яқинлашувчи дейилади.

Бу теоремага асосан қуйидаги теореманинг уринли экани келиб чиқади.

2-теорема. Абсолют яқинлашувчи кўпайтмада кўпайтувчилар тартибини ихтиёрий равишда ўзгартирганда ҳам кўпайтма қиймати ўзгармайди.

3-теорема. (32) чексиз кўпайтманинг абсолют яқинлашувчи бўлиши учун $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ қаторнинг абсолют яқинлашувчи бўлиши зарур ва етарлидир.

Ҳақиқатан ҳам, теореманинг шартига кўра $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0$ (қатор яқинлашган ҳолда ҳам, кўпайтма яқинлашган ҳолда ҳам) бўлгани учун, бирор k дан бошлаб $|c_k| < \frac{1}{2}$ бўлади. У ҳолда

$$\left| \frac{\ln(1+c_k)}{c_k} - 1 \right| = \left| -\frac{c_k}{2} + \frac{c_k^2}{3} - \dots \right| < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{1}{2}$$

бўлади, чунки

$$\ln(1+c_k) = c_k - \frac{c_k^2}{2} + \frac{c_k^3}{3} - \dots$$

Демак,

$$\frac{1}{2} < \left| \frac{\ln(1+c_k)}{c_k} \right| < \frac{3}{2}.$$

Қаторларни таққослашга онд теоремага асосан, $\sum_{k=1}^{\infty} |\ln(1+c_k)|$ ва

$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$ қаторларнинг иккаласи бир вақтда яқинлашади ёки узоқлашади. Бундан, юқоридаги таърифга кўра, бу қаторлар биринчисининг яқинлашишидан чексиз кўпайтманинг абсолют яқинлашиши келиб чиқади. Шу билан теорема исбот бўлди.

Энди функциялардан тузилган чексиз кўпайтмалар ҳақида тушунча берамиз.

Таъриф. Агар G соҳага тегишли исталган z_0 нуқтада ушбу

$$\prod_{k=1}^{\infty} [1 + f_k(z_0)]$$

сонлар чексиз кўпайтмаси яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\prod_{k=1}^{\infty} [1 + f_k(z)]$$

функционал кўпайтма G соҳада яқинлашувчи дёнилади.

Чексиз кўпайтмалар ҳақидаги бу қисқача маълумотдан сўнг бутун функцияларни чексиз кўпайтмаларга ёйиш масаласини ўрганамиз.

2. Вейерштрасс формуласи. Маълумки, ҳар қандай n -даражали кўпхад n та нолга эга бўлиб, бу кўпхадни нолларга мос

чизиқли купайтувчиларнинг купайтмаси сифатида ёзиш мумкин. Фараз қилайлик, $a_1, a_2, \dots, a_n$ сонлар $P(z)$ купҳаднинг координаталар бошидан фарқли ноллари бўлиб (булар орасида қаррали ноллари ҳам бўлиши мумкин), $z=0$ эса m -тартибли ноль бўлсин ($P(0) \neq 0$ бўлса, $m=0$ ҳисобланади). У ҳолда

$$P(z) = A' z^m (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n) = A z^m \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{a_k}\right),$$

бу ерда A' ва A — узгармас сонлар.

Бутун функция умуман нолларга эга бўлмаслиги (масалан, e^z) ҳам мумкин, чексиз куп нолларга эга бўлиши (масалан, $\sin z, \cos z$) ҳам мумкин. Бу пунктда нолларга эга бўлган ҳар бир бутун функцияни, купҳадга ўхшаш, купайтувчиларга ёйиш мумкинлиги масаласини ҳал қиламиз.

Аввало нолларга эга бўлмаган бутун функциянинг умумий ифодасини тузамиз.

Лемма. *Нолларга эга бўлмаган ҳар қандай бутун $f(z)$ функцияни*

$$f(z) = e^{g(z)} \quad (35)$$

куринишда тасвирлаш мумкин, бунда $g(z)$ ихтиёрий бутун функция

Ҳақиқатан ҳам, $f(z)$ функция нолларга эга бўлмагани учун

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = [\ln f(z)]'$$

ҳам бутун функция бўлади. Бу функцияни нолдан ихтиёрий z гача интеграллаб, яна бутун $g_1(z)$ функцияни ҳосил қиламиз:

$$g_1(z) = \int_0^z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \ln \frac{f(z)}{f(0)}.$$

Бундан

$$f(z) = f(0) e^{g_1(z)} = e^{g(z) + \ln f(0)} = e^{g(z)}$$

бу ерда $g(z) = g_1(z) + \ln f(0)$.

Энди $f(z)$ бутун функция чекли сондаги $0, 0, \dots, 0$ $a_1, \dots, a_n$

нолларга эга деб фараз қилайлик.

$$F(z) = z^m \left(1 - \frac{z}{a_1}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$

купҳад ҳам ўша нолларга эга бўлгани учун $\frac{f(z)}{F(z)}$ нисбат ноллари бўлмаган бутун функция бўлади, у ҳолда юқоридаги леммага асосан $f(z)$ функция учун қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$f(z) = e^{g(z)} z^m \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{a_k}\right). \quad (36)$$

Чексиз кўп нолларга эга бўлган бутун функциянинг (36) га ўхшаш ифодасини ҳосил қилиш учун аввал камида битта, берилган нолларга эга бўлган бутун функция тузиш керак. Қуйида бундай функциянинг доимо мавжудлигини исботлаймиз.

Теорема. *Нолдан фарқли, модуллари камаймайдиган $\{|a_n| < |a_{n+1}|\}$ тартибда жойлашган ва чексизга интилувчи ихтиёрий комплекс сонлар кетма-кетлиги $\{a_n\}$ учун, ноллари a_n лардан иборат $f(z)$ бутун функцияни тузиш мумкин, шу билан бирга, кетма-кетликда a_n қанча марта такрорланса, a_n нолнинг тартиби ҳам ушанча бўлади.*

Исбот. $\{p_n\}$ — манфий бўлмаган шундай бутун сонларнинг кетма-кетлиги бўлсинки,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{|a_n|} \right)^{p_n+1} \quad (*)$$

қатор ихтиёрий $R > 0$ учун яқинлашувчи бўлсин. Исталган $\{a_n\}$ кетма-кетлик учун p_n сифатида $p_n = [\ln n]$ ($[\ln n] - \ln n$ нинг бутун қисми) сонларни олиш мумкин. Ҳақиқатан, агар $n > N_0$ да $\frac{|a_n|}{R} > e$ бўлса, $\left(\frac{|a_n|}{R} \right)^{p_n+1} > e^{2([\ln n]+1)} > e^{2 \ln n} = n^2$ бўлади, бундан:

$\left(\frac{R}{|a_n|} \right)^{p_n+1} < \frac{1}{n^2}$. Демак, (*) яқинлашувчи бўлади. Айрим ҳолларда p_n сифатида ўзаро тенг сонларни ҳам олиш мумкин. Масалан, агар $|a_n| = n$ бўлса, $p_n = 1$ ($n=1, 2, \dots$) деб олиш мумкин, агар, $a_n = n^2$ бўлса, $p_n = 0$ ($n=1, 2, \dots$) дейиш kifоядир. Энди изланаётган бутун функция $f(z)$ ни ушбу

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{a_k} \right) e^{\frac{z}{a_k} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_k} \right)^2 + \dots + \frac{1}{p_k} \left(\frac{z}{a_k} \right)^{p_k}}$$

чексиз кўпайтма сифатида тасвирлаш мумкинлигини кўрсатамиз (агар $p_k = 0$ бўлса, у ҳолда мос даража кўрсаткични нолга тенг деб ҳисоблаш керак). R — ихтиёрий мусбат сон бўлсин. $N(R)$ орқали шундай натурал сонни белгилаймизки, $n > N(R)$

бўлганда $|a_n| > 2R$ бўлсин, $n > N(R)$ деб ҳисоблаб $\prod_{k=1}^n$ қисмий кўпайтмани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{a_k} \right) e^{\frac{z}{a_k} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_k} \right)^2 + \dots + \frac{1}{p_k} \left(\frac{z}{a_k} \right)^{p_k}} = \prod_{k=1}^{N(R)} \prod_{k=N(R)+1}^n, \quad (37)$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи кўпайтма нолларни берилган $a_1, a_2, \dots, a_{N(R)}$ дан иборат бутун функция бўлади; де-

мак. $|z| < 2R$ доирада бу кўпайтманинг ноллари теореманинг шартларига тўла жавоб беради. Иккинчи кўпайтмани қуйидагича ёзамиз:

$$\prod_{k=N(R)+1}^n = \prod_{k=N(R)+1}^n e^{\ln\left(1 - \frac{z}{a_k}\right) + \frac{z}{a_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p_k}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{p_k}} =$$

$$= e^{\sum_{k=N(R)+1}^n \left[\ln\left(1 - \frac{z}{a_k}\right) + \frac{z}{a_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p_k}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{p_k} \right]}.$$

Бу даража кўрсаткичдаги йиғиндининг умумий ҳадини баҳолаймиз. $|z| \leq R$ ва $|a_k| > 2R$ да $\left|\frac{z}{a_k}\right| < \frac{1}{2}$ бўлгани учун

$$\left| \ln\left(1 - \frac{z}{a_k}\right) + \frac{z}{a_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p_k}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{p_k} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{p_k+1}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{p_k+1} + \frac{1}{p_k+2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{p_k+2} + \dots \right| < \frac{|z|^{p_k+1}}{|a_k|^{p_k+1}} +$$

$$+ \frac{|z|^{p_k+2}}{|a_k|^{p_k+2}} + \dots < \left(\frac{R}{|a_k|}\right)^{p_k+1} \left(1 + \frac{R}{|a_k|} + \frac{R^2}{|a_k|^2} + \dots\right) =$$

$$= \left(\frac{R}{|a_k|}\right)^{p_k+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{R}{|a_k|}} < 2\left(\frac{R}{|a_k|}\right)^{p_k+1},$$

яъни

$$\left| \ln\left(1 - \frac{z}{a_k}\right) + \frac{z}{a_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p_k}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{p_k} \right| <$$

$$< 2\left(\frac{R}{|a_k|}\right)^{p_k+1} \quad (k > N(R)).$$

Бу тенгсизликдан ҳамда $\sum_{k=1}^n \left(\frac{R}{|a_k|}\right)^{p_k+1}$ қаторнинг яқинла-

шувчилигидан

$$\sum_{k=N(R)+1}^n \left[\ln\left(1 - \frac{z}{a_k}\right) + \frac{z}{a_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p_k}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{p_k} \right]$$

қаторнинг $|z| < R$ доирада абсолют ва текис яқинлашувчилиги келиб чиқади. Демак, бу қаторнинг йиғиндиси $\varphi_R(z)$ функция $|z| < R$ доирада бир қийматли аналитик функция бўлади.

(37) тенгликда $n \rightarrow \infty$ да лимитга ўтаемиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p_k}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{p_k}} = \prod_{k=1}^{N(R)} e^{\frac{z}{a_k}}. \quad (38)$$

Бу лимит $|z| < R$ доирада олдиндан берилган нолларга эга аналитик функциядир. Юқоридаги мулоҳазаларни етарли катта R радиусли доира учун ҳам татбиқ қилиш мумкин бўлгани учун

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k} + \dots + \frac{1}{p_k}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{p_k}} \quad (39)$$

чексиз кўпайтма барча чекли текисликда аввалдан берилган нолларга эга бўлган аналитик функцияга, яъни $f(z)$ бутун функцияга яқинлашади.

Бу кўпайтмадаги

$$\left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p_k}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{p_k}}$$

кўпайтувчиларни, одатда, бошланғич кўпайтувчилар ёки факторлар дейлади. Бошланғич кўпайтувчилар чизиқли

$\left(1 - \frac{z}{a_k}\right)$ кўпайтувчилардан ташқари $e^{\frac{z}{a_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2 + \dots}$ кўрсаткичли кўпайтувчиларга ҳам эга. Мана шу кўрсаткичли кўпайтувчилар (39) кўпайтманинг яқинлашувчилигини таъминлар экан.

1-мисол $a_n = n^2$ бўлсин. у ҳолда $p_n = 0$ деб олиш мумкин. Бу нолларга эга бўлган бутун функция қуйидагича ифодаланади:

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2}\right).$$

2-мисол. $\{a_n\}$ — кетма-кетлик 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, ... кўринишга эга бўлсин. Бу ҳолда $p_n = 1$ десак, етарли. Бу ҳол учун чексиз кўпайтма бундай бўлади:

$$f(z) = (1-z)e^z \left[\left(1 - \frac{z}{2}\right)e^{\frac{z}{2}}\right]^2 \left[\left(1 - \frac{z}{3}\right)e^{\frac{z}{3}}\right]^3 \dots$$

Энди $f(z)$ айнан нолдан фарқли, яъни $f(z) \neq 0$ ва чексиз кўп нолларга эга бўлган бутун функция бўлсин. Ҳар бир $|z| \leq R < \infty$ доирада бу функциянинг фақат чекли сондаги ноллари бўлгани

учун, бу нолларни модуларнинг қийматлари камаймайдиган тартибда (худди мероморф функциянинг қутбларига ўхшаш) жойлаштиришимиз мумкин:

$$0, 0, \dots, 0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

Агар $p_n > 0$ —шундай бутун сонлар бўлсаки, исталган $R > 0$ учун $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{p_n+1}$ қатор яқинлашса, у ҳолда исбот қилинган теоремага биноан ушбу

$$F(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n}}$$

функция бутун функция бўлиб, унинг ноллари $f(z)$ нинг ноллари билан бир хил бўлади, яъни $\frac{f(z)}{F(z)}$ нисбат нолларга эга бўлмаган бутун функция бўлади, демак, леммага асосан:

$$f(z) = e^{g(z)} \cdot z^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n}}, \quad (40)$$

бундаги $g(z)$ бутун функция. Бу формулани Вейерштрассе формуласи дейиладн.

Мисол $f(z) = \sin z$ функция учун (40) кўринишдаги ёйилма тузиладн. Ноллари $z = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $p_n = 1$ деб олиш кифоядир. Демак,

$$\sin z = e^{g(z)} \cdot z \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) e^{\frac{z}{n\pi}},$$

бу ердаги штрих $n=0$ индексга мос ҳад чиқариб ташланганини кўрсатади. Юқоридаги кўпайтмани, ҳадларни группалаб бундай ёзиш ҳам мумкин:

$$\sin z = e^{g(z)} \cdot z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Бу тенгликнинг ҳар икки томонидан логарифмик ҳосила олами:

$$(\ln \sin z)' = \operatorname{ctg} z = g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}.$$

Бу муносабатни (24) формула билан солиштириб, $g'(z) = 0$, $g(z) = \text{const}$ эканлигини аниқлаймиз:

$$\sin z = C \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

C ни аниқлаш учун олдинги формулани бундай ёзиб оламиз:

$$\frac{\sin z}{z} = C \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

$z \rightarrow 0$ да лимитга ўтсак, $C=1$ бўлади. Демак,

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

ёки

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right). \quad (41)$$

(41) формулада z ни πz га ҳамда iz га алмаштирсак, мос равишда қуйидаги формулалар ҳосил бўлади:

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

$$\frac{\sinh z}{z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Вейерштрасс формуласидан фойдаланиб, $f(z)$ *ихтиёрый мероморф функцияни иккита бутун функциянинг нисбати сифатида ифодалаш мумкин*. Ҳақиқатан, қайси нуқталарда $f(z)$ қутбларга эга бўлса, шу нуқталарда нолларга эга бўлган $f_2(z)$ бутун функция тузамиз, шу билан бирга ҳар бир нолнинг тартибини мос қутбнинг тартибига тенг қилиб оламиз. У ҳолда $f_2(z) f(z) = f_1(z)$ бутун функция бўлади.

Бундан:

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}.$$

Масалан, $\operatorname{tg} z$ ва $\operatorname{ctg} z$ функциялар иккита $\sin z$ ва $\cos z$ бутун функцияларнинг нисбати билан ифодаланади.

7-§. Қолдиқлар ёрдами билан қаторлар йиғиндисини ҳисоблаш

Айрим ҳолларда қолдиқлар ёрдами билан

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$$

кўринишдаги қаторлар йиғиндисини ҳисоблаш мумкин.

Аввало бундай қатор бирор контур бўйича олинган интеграл билан алмаштирилади. Бунинг учун $z = n$ нуқталар оддий қутблари бўлган ва чексизликнинг ҳақиқий ўқдан ташқари қисмида чегараланган функция танлаб олинади. Бундай функция сифатида $\pi \operatorname{ctg} \pi z$ ни олиш мумкин; $z = n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ нуқталар бу функция учун оддий қутблар бўлиб, шу нуқталарнинг ҳар бирига нисбатан олинган қолдиқ 1 га тенг. $\pi \cos \pi z$ ни ҳам олиш мумкин, бунинг учун ҳам $z = n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ нуқталар оддий қутблар бўлиб, ҳар бирига нисбатан олинган қолдиқ $(-1)^n$ га тенг, $m, m+1, \dots, n$ нуқталарни ўз ичига олган ёпиқ C контур билан чегараланган ёпиқ соҳанинг $m, m+1, \dots, n$ лардан фарқли чекли сондаги $a_1, a_2, \dots, a_k$ нуқталаридан бошқа барча нуқталарида $f(z)$ аналитик функция берилган бўлиб, $a_1, a_2, \dots, a_k$ бу функция учун қутблар бўлсин, деб фараз қилайлик.

Ушбу

$$\oint \pi \operatorname{ctg} \pi z f(z) dz$$

интегрални текширамыз. $\pi \operatorname{ctg} \pi z \cdot f(z)$ функция учун C контур ичида $m, m+1, \dots, n, a_1, \dots, a_k$ нуқталар махсус нуқталардир, яъни қутблардир. $m, m+1, \dots, n$ нуқталарга нисбатан бу функциянинг қолдиқлари $f(m), f(m+1), \dots, f(n)$ бўлади. Демак, қолдиқлар назариясининг асосий теоремасига кўра:

$$\oint_C \pi \operatorname{ctg} \pi z \cdot f(z) dz = 2\pi i [f(m) + f(m+1) + \dots + f(n) + \sum_{a_1, \dots, a_k} \text{қолд. } \pi \operatorname{ctg} z \cdot f(z)]. \quad (42)$$

$f(z)$ қутблари бутун сонлар бўлмаган рационал функция бўлиб, етарли катта $|z|$ ларда $f(z) = O(|z|^{-2})$ (яъни $|z|^2 f(z) = \text{const}$) бўлсин деб фараз қилайлик. C контур сифатида учлари $(n + \frac{1}{2}) \times (\pm 1, \pm i)$ нуқталарда бўлган квадратни оламыз. У ҳолда, C да $|\operatorname{ctg} \pi z| \leq M$ бўлгани сабабли

$$\left| \oint_C \pi \operatorname{ctg} \pi z \cdot f(z) dz \right| \leq MC_1 \oint_C \frac{dz}{|z|^2} < \frac{MC_1}{(n + \frac{1}{2})^2} \cdot 8 \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Бундан: $n \rightarrow \infty$ да $\oint_C \pi \operatorname{ctg} \pi z \cdot f(z) dz \rightarrow 0$.

Шундай қилиб, (42) тенгликда $n \rightarrow \infty$ да лимитга ўтсак, қуйидаги формула ҳосил бўлади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=-n}^n f(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = - \sum_{a_1, \dots, a_n} \text{қолд. } \pi \operatorname{ctg} \pi z \cdot t(z). \quad (43)$$

Агар $\pi \operatorname{ctg} z$ ўрнига $\pi \operatorname{cosec} \pi z$ ни олсак, юқоридаги усул билан қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = - \sum_{a_1, \dots, a_n} \text{қолд. } \pi \operatorname{cosec} \pi z \cdot f(z). \quad (44)$$

1-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2}$$

(a — бутун сон эмас) қаторнинг йиғиндиси ҳисоблансин. Бу мисолда $f(z) = \frac{1}{(a+z)^2}$ бўлиб, $z = a$ нуқта иккинчи тартибли қутбдир. Шу нуқтага нисбатан $\pi \operatorname{ctg} \pi z \cdot \frac{1}{(a+z)^2}$ функциянинг қолдиғини ҳисоблаймиз.

$$\text{қолд. } \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi z}{(a+z)^2} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{d}{dz} \left[(z+a)^2 \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi z}{(z+a)^2} \right] = -\pi^2 \operatorname{cosec}^2 \pi a.$$

(43) формулага асосан:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2} = \pi^2 \operatorname{cosec}^2 \pi a.$$

2-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin na}{a^2 - n^2}, \quad -\pi < a < \pi,$$

a — бутун сон эмас, қаторнинг йиғиндиси топилсин. Бу мисолда $f(z) = \frac{z \sin za}{a^2 - z^2}$ бўлиб, $z = \pm a$ нуқталар оддий қутблардир. (44) формуладан фойдаланиш учун, бу қутбларга нисбатан $\pi \operatorname{cosec} \pi z \cdot \frac{z \sin za}{a^2 - z^2}$ функциянинг қолдиқларини ҳисоблаш керак.

$$\text{қолд. } \pi \operatorname{cosec} \pi z \cdot \frac{z \sin za}{a^2 - z^2} = - \frac{\pi \sin za}{2 \sin \pi a}.$$

$z = -a$ нуқтадаги қолдиқ ҳам шу ифодага тенг.

Демак, (44) га асосан:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin na}{a^2 - n^2} = \frac{\pi \sin aa}{2 \sin \pi a} + \frac{\pi \sin aa}{2 \sin \pi a} = \frac{\pi \sin aa}{\sin \pi a},$$

лекин

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin na}{a^2 - n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin na}{a^2 - n^2}$$

бўлгани учун:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin na}{a^2 - n^2} = \frac{\pi \sin aa}{2 \sin \pi a}.$$

8-§. Қолдиқлар назарияси ёрдами билан аниқ интегралларни ҳисоблаш

Қолдиқлар назариясининг асосий теоремасига кўра, ёпиқ контур бўйлаб олинган интегрални ҳисоблаш ўрнига интеграл ишораси остидаги функциянинг шу контур ичида ётган махсус нуқталарга нисбатан қолдиқларини ҳисоблаш kifоядир. Кўп ҳолларда бу усул ёрдами билан ҳақиқий аргументли функциялардан олинган аниқ интегралларни ҳам ҳисоблаш мумкин. Бунинг учун аввал бу интегралларни ёпиқ контур бўйлаб олинган интегралларга алмаштирилади, сўнгра қолдиқлар ҳақидаги асосий теоремани қўлланилади.

1. Тригонометрик функцияли ифодаларни интеграллаш

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx \quad (45)$$

кўринишдаги интегрални текширамыз, бунда $R(\sin x, \cos x)$ функция $\sin x$ ва $\cos x$ га нисбатан рационал функциядир. Ҳақиқий ўзгарувчи x ўрнига комплекс ўзгарувчи $z = e^{ix}$ ни киритамиз. Равшанки, x 0 дан 2π гача ўзгарганда комплекс ўзгарувчи z бирлик доира чизади.

Эйлер формулаларига асосан:

$$\sin x = \frac{z - z^{-1}}{2i}; \quad \cos x = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

$$dx = \frac{1}{iz} dz.$$

Буларни (45) га қўйиб, рационал касрдан бирлик $C(|z|=1)$ айлана бўйлаб олинган интегрални ҳосил қиламыз. Бу интеграл эса

Бундан: $n \rightarrow \infty$ да $\oint_C \pi \operatorname{ctg} \pi z \cdot f(z) dz \rightarrow 0$.

Шундай қилиб, (42) тенгликда $n \rightarrow \infty$ да лимитга ўтсак, қуйидаги формула ҳосил бўлади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=-n}^n f(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = - \sum_{a_1, \dots, a_n} \text{қолд. } \pi \operatorname{ctg} \pi z \cdot f(z). \quad (43)$$

Агар $\pi \operatorname{ctg} z$ ўрнига $\pi \operatorname{cosec} \pi z$ ни олсак, юқоридаги усул билан қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = - \sum_{a_1, \dots, a_n} \text{қолд. } \pi \operatorname{cosec} \pi z \cdot f(z). \quad (44)$$

1-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2}$$

(a — бутун сон эмас) қаторнинг йиғиндиси ҳисоблансин. Бу мисолда $f(z) = \frac{1}{(a+z)^2}$ бўлиб, $z = a$ нуқта иккинчи тартибли қутбдир. Шу нуқтага нисбатан $\pi \operatorname{ctg} \pi z \cdot \frac{1}{(a+z)^2}$ функциянинг қолдигини ҳисоблаймиз.

$$\text{қолд. } \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi z}{(a+z)^2} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{d}{dz} \left[(z+a)^2 \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi z}{(z+a)^2} \right] = -\pi^2 \operatorname{cosec}^2 \pi a.$$

(43) формулага асосан:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2} = \pi^2 \operatorname{cosec}^2 \pi a.$$

2-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin n a}{a^2 - n^2}, \quad -\pi < a < \pi,$$

a — бутун сон эмас, қаторнинг йиғиндиси топиласин. Бу мисолда $f(z) = \frac{z \sin z}{a^2 - z^2}$ бўлиб, $z = \pm a$ нуқталар оддий қутблардир. (44) формуладан фойдаланиш учун, бу қутбларга нисбатан $\pi \operatorname{cosec} \pi z \cdot \frac{z \sin z}{a^2 - z^2}$ функциянинг қолдиқларини ҳисоблаш керак.

$$\text{қолд. } \pi \operatorname{cosec} \pi z \cdot \frac{z \sin z}{a^2 - z^2} = - \frac{\pi \sin a}{2 \sin \pi a}.$$

$z = -a$ нуқтадаги қолдиқ ҳам шу ифодага тенг.

Демак, (44) га асосан:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin na}{a^2 - n^2} = \frac{\pi \sin aa}{2 \sin \pi a} + \frac{\pi \sin aa}{2 \sin \pi a} = \frac{\pi \sin aa}{\sin \pi a}.$$

декин

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin na}{a^2 - n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin na}{a^2 - n^2}$$

бўлгани учун:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin na}{a^2 - n^2} = \frac{\pi \sin aa}{2 \sin \pi a}.$$

8-§. Қолдиқлар назарияси ёрдами билан аниқ интегралларни ҳисоблаш

Қолдиқлар назариясининг асосий теоремасига кўра, ёпиқ контур бўйлаб олинган интегрални ҳисоблаш ўрнига интеграл ишораси остидаги функциянинг шу контур ичида ётган махсус нуқталарга нисбатан қолдиқларини ҳисоблаш kifoyaдир. Кўп ҳолларда бу усул ёрдами билан ҳақиқий аргументли функциялардан олинган аниқ интегралларни ҳам ҳисоблаш мумкин. Бунинг учун аввал бу интегралларни ёпиқ контур бўйлаб олинган интегралларга алмаштирилади, сўнгра қолдиқлар ҳақидаги асосий теоремани қўлланилади.

1. Тригонометрик функцияли ифодаларни интеграллаш

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx \quad (45)$$

кўринишдаги интегрални текширамыз, бунда $R(\sin x, \cos x)$ функция $\sin x$ ва $\cos x$ га нисбатан рационал функциядир. Ҳақиқий ўзгарувчи x ўрнига комплекс ўзгарувчи $z = e^{ix}$ ни киритамиз. Равшанки, x 0 дан 2π гача ўзгарганда комплекс ўзгарувчи z бирлик доира чизади.

Эйлер формулаларига асосан:

$$\sin x = \frac{z - z^{-1}}{2i}; \quad \cos x = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

$$dx = \frac{1}{iz} dz.$$

Буларни (45) га қўйиб, рационал касрдан бирлик $C(|z|=1)$ айлана бўйлаб олинган интегрални ҳосил қиламыз. Бу интеграл эса

интеграл ишораси остидаги функциянинг бирлик айлана ичида-
ги махсус нуқталарга нисбатая қолдиқлар йигиндисининг $2\pi i$
га кўпайтирилганига тенгдир.

1-мисол. Ушбу

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t} \quad (a - \text{ҳақиқий сон ва } a > 1)$$

интегрални ҳисоблаймиз. Юқорида кўрсатилган алмаштиришларни бажариб
берилган интегрални қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$I = \oint_C \frac{\frac{1}{iz} dz}{a + \frac{z^2 + 1}{2z}} = \frac{2}{i} \oint_C \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \sum_{\text{қолд.}} \left(\frac{1}{z^2 + 2az + 1} \right),$$

Бирлик айлана ичидаги $\frac{1}{z^2 + 2az + 1}$ функциянинг махсус нуқталари
 $z_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ нуқталар оддий қутблар бўлади. Бу қутбларидан
 $a > 1$ бўлгани учун фақат $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$ С айлана ичида ётади. Шу
нуқтадаги қолдиқни ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \text{қолд.}_{z=z_1} \frac{1}{z^2 + 2az + 1} &= \frac{1}{(2z + 2a)_{z=z_1}} = \frac{1}{2(-a + \sqrt{a^2 - 1} + a)} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Демак,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

2-мисол. Интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t dt}{a + b \cos t} \quad (a > b > 0)$$

ҳисоблансин. Аввалгидай, тегишли алмаштиришларни бажарсак, интеграл
бундай кўринишни олади:

$$I = \oint_C \frac{\frac{(z^2 - 1)^2}{-4z^2}}{a + b \frac{z^2 + 1}{2z}} \cdot \frac{dz}{iz} = -\frac{1}{2i} \oint_C \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2(bz^2 + 2az + b)} dz,$$

Интеграл ишораси остидаги

$$f(z) = \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2(bz^2 + 2az + b)}$$

функция учун $z = 0$ нуқта икки каррали қутб, $z_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$
нуқталар эса оддий қутблар бўлади. Вулардан $z = 0$ ва z_1 бирлик С

айлана ичида ётади, $z_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$ эса C нинг ичида ётмайди. $z = 0$ ва $z = z_1$ нуқталарга нисбатан қолдиқларни ҳисоблаймиз:

$$\text{қолд. } f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[z^2 \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2 (bz^2 + 2az + b)} \right] = -\frac{2a}{b^2},$$

$$\text{қолд. } f(z) = \frac{(z^2 - 1)^2}{\{z^2(bz^2 + 2az + b)\}'} \Big|_{z=z_1} = \frac{2}{b^2} \frac{\sqrt{a^2 - b^2} (\sqrt{a^2 - b^2} - 2)^2}{(2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - b^2} - b^2)}.$$

Демак,

$$I = -\frac{1}{2i} \cdot 2\pi i \left[-\frac{2a}{b^2} + \frac{2}{b^2} \frac{\sqrt{a^2 - b^2} (\sqrt{a^2 - b^2} - a)^2}{(2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - b^2} - a^2)} \right] = \frac{2\pi}{b^2} (a - \sqrt{a^2 - b^2}).$$

Интегралларни юқоридагидек ҳисоблашда, ҳамма вақт ҳам берилган интегрални бирлик айлана бўйлаб олинган интеграллар билан алмаштириш шарт эмас. Баъзи ҳолларда радиуси бирдан фарқли айланалар бўйлаб олинган интеграллар билан алмаштириш қулай бўлади.

3-мисол.

$$I = \int_0^{\pi} \operatorname{ctg}(t - a) dt$$

интегрални ҳисоблаш керак, бунда $a = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, ($\beta = 0$ бўлса, интеграл узоқлашувчи бўлади). Ўзгарувчи t ни қуйидагича алмаштирамиз:

$$e^{2i(t-a)} = z.$$

Бундан:

$$dt = \frac{dz}{2iz}, \quad \operatorname{ctg}(t - a) = i \frac{e^{i(t-a)} + e^{-i(t-a)}}{e^{i(t-a)} - e^{-i(t-a)}} = i \frac{z+1}{z-1}.$$

t 0 дан π гача ўзгарганда z нуқта

$$|z| = |e^{2i(t-a)}| = e^{2\beta}$$

айланани чизади. Шунинг учун:

$$I = \oint_{|z|=e^{2\beta}} i \frac{z+1}{z-1} \cdot \frac{dz}{2iz} = \frac{1}{2} \oint_{|z|=e^{2\beta}} \frac{z+1}{z(z-1)} dz.$$

Интеграл ишораси остидаги функция учун $z=0$, $z=1$ лар оддий қутблар бўлади. Агар $\beta > 0$ бўлса, $e^{2\beta} > 1$ бўлиб, бу икки қутб ам $|z| = e^{2\beta}$ айлана ичида ётади. Бу қутбларга нисбатан қолдиқлар қуйидагилардан иборати

$$\text{қолд. } \frac{z+1}{z(z-1)} = -1, \quad \text{қолд. } \frac{z+1}{z(z-1)} = 2.$$

Демак,

$$I = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i (-1 + 2) = \pi i, \quad \beta > 0.$$

Агар $\beta < 0$ бўлса, $e^{2\beta} < 1$. Бу ҳолда фақат $z = 0$ қутб айлана ичида ётади.

$$I = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i (-1) = -\pi i, \beta < 0.$$

Бу икки ҳолни бирлаштириб, бундай ёзишимиз мумкин:

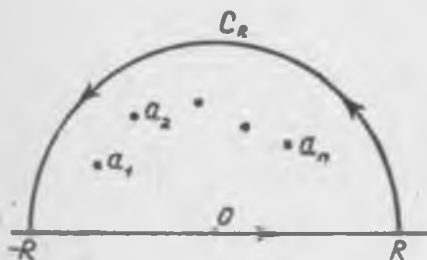
$$I = \int_0^{\bar{z}} \operatorname{ctg}(t-a) dt = \pi i \cdot \operatorname{sign} \beta,$$

$$\operatorname{Im} a = \beta \neq 0, \quad \operatorname{sign} \beta = \begin{cases} 1, & \beta > 0, \\ 0, & \beta = 0, \\ -1, & \beta < 0. \end{cases}$$

2. Айрим хосмас интегралларни ҳисоблаш.

$f(z)$ функция ҳақиқий ўқдан юқорида ётувчи чекли сондаги $a_1, \dots, a_n$ махсус нуқталардан ташқари барча юқори ярим текисликда ва ҳақиқий ўқда аналитик функция бўлсин. Шу билан бирга чексиз узоқлашган нуқта $f(z)$ функция учун камида иккинчи тартибли ноль бўлсин. Бу шартлар бажарилганда қуйидаги формула тўғри бўлади:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{a_1, \dots, a_n} \operatorname{қолд.} f(z). \quad (46)$$



93- чизма.

Ҳақиқатан, координаталар бошини марказ қилиб, юқори ярим текисликда етарли катта R радиусли шундай C_R ярим айлана чизамизки, $a_1, a_2, \dots, a_n$ махсус нуқталар шу ярим айлана ичида ётсин. Натижада, чегараси C_R дан ва ҳақиқий ўқнинг $(-R, R)$ кесмасидан ташкил топган ярим доира ҳосил бўлади (93- чизма). Қолдиқлар тўғрисидаги асосий теоремага кўра:

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a_1, \dots, a_n} \operatorname{қолд.} f(z).$$

Энди $R \rightarrow \infty$ да $\int_{C_R} f(z) dz \rightarrow 0$ ни кўрсатамиз. $f(z)$ функцияни чексиз узоқлашган нуқта атрофида Лоран қаторига ёямиз:

$$f(z) = \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + \dots$$

ёки

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \varphi(z), \quad \varphi(z) = c_{-2} + \frac{c_{-1}}{z} + \dots$$

$\varphi(z)$ функция учун чексиз узоқлашган нуқта тўғри нуқта (туғрироғи, қутулиб бўладиган махсус нуқта) бўлади, шу билан бирга $\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = c_{-2}$; демак, $\varphi(z)$ функция чексиз узоқлашган нуқта атрофида чегараланган, хусусий ҳолда, агар R етарли катта бўлса C_R ярим айланада чегараланган бўлади, яъни

$$|\varphi(z)| < M,$$

M — бирор мусбат чекли сон. U ҳолда

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| = \left| \int_{C_R} \frac{\varphi(z)}{z^2} dz \right| < \frac{M}{R^2} \cdot \pi R = \frac{M\pi}{R},$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

Демак,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

бўлгани учун (46) формула исбот бўлди.
1-мисол. Ушбу

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

интегрални текшираимиз. Интеграл ишораси остидаги $\frac{1}{(x^2+1)^2}$ функция учун чексиз узоқлашган нуқта олтинчи тартибли нолдир; $z = \pm i$ нуқталар бу функция учун учинчи тартибли қутб бўлиб, $z = i$ юқори ярим текисликда ётади. Шу нуқтага нисбатан қолдиқни ҳисоблаймиз:

$$\text{қолд.} \quad \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{2i} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z-i)^2}{(z^2+1)^2} \right] = \frac{3}{16i}.$$

Демак,

$$I = 2\pi i \cdot \text{қолд.} \quad \frac{1}{(z^2+1)^2} = 2\pi i \cdot \frac{3}{16i} = \frac{3\pi}{8}.$$

2-мисол. Ушбу

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2} \quad (a > 0)$$

интеграл ҳисоблансин. Бу мисолда $\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$ функция учун чексиз узоқлашган нуқта иккинчи тартибли ноль бўлиб, $z = \pm ai$ нуқталар иккинчи тартибли қутблардир.

Булардан $z = ai$ нуқта юқори ярим текисликда ётади:

$$\text{қолд.} \quad \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2} = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z-ai)^2 z^2}{(z-ai)^2 (z+ai)^2} \right] = \frac{1}{4ai}.$$

Демак,

$$l = 2\pi l - \text{қолд.} \frac{z^3}{(z^3 + a^3)^2} = 2\pi l \cdot \frac{1}{4al} - \frac{\pi}{2a}.$$

Худди юқоридагидек усул билан тригонометрик функциялар қатнашган интегралларни ҳам ҳисоблаш мумкин. Бундан ташқари $f(z)$ функция учун чексиз узоқлашган нуқта камида иккинчи тартибли ноль бўлмаса ҳам,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

интегрални айрим ҳолларда қолдиқлар ёрдами билан ҳисоблаш мумкин. Бу айтилганларга мисоллар келтиришдан олдин қуйидаги леммани исбот қиламиз:

3. Жордан леммаси. Агар $F(z)$ функция юқори ярим текисликда ва ҳақиқий ўқда $z \rightarrow \infty$ да 0 га текис интилса, у ҳолда ихтиёрий мусбат m сон учун

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(z) e^{imz} dz = 0, \quad (47)$$

бунда C_R — маркази координаталар бошида ва радиуси R га тенг бўлган юқори ярим текисликдаги ярим айланадир.

Исбот. Қутб координаталарга ўтсак, $z = Re^{i\varphi}$ бўлиб, (47) интеграл қуйидагича ёзилади:

$$\int_{C_R} F(z) e^{imz} dz = \int_0^{\pi} F(Re^{i\varphi}) e^{imR(\cos \varphi + i \sin \varphi)} iRe^{i\varphi} d\varphi.$$

Бундан $|ie^{imR \cos \varphi + i\varphi}| = 1$ бўлгани учун

$$\left| \int_{C_R} F(z) e^{imz} dz \right| \leq \int_0^{\pi} |F(Re^{i\varphi})| e^{-mR \sin \varphi} R d\varphi$$

ёки

$$\left| \int_{C_R} F(z) e^{imz} dz \right| \leq \max_{C_R} |F(z)| \int_0^{\pi} e^{-mR \sin \varphi} \cdot R d\varphi. \quad (48)$$

Ушбу

$$\int_0^{\pi} e^{-mR \sin \varphi} R d\varphi$$

интегралда интеграллаш оралиғини иккига ажратамиз: $(0, \frac{\pi}{2})$

ва $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, сўнгра $\frac{\pi}{2}$ дан π гача олинган интегралда ўзгарувчи φ ни $\pi - \varphi$ га алмаштириб, интегрални бундай ёзамиз:

$$\int_0^{\pi} e^{-mR \sin \varphi} \cdot R d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR \sin \varphi} R d\varphi. \quad (49)$$

δ ни $\frac{\pi}{2}$ дан кичик ихтиёрий мусбат сон десак, у ҳолда

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR \sin \varphi} R d\varphi = 2 \int_0^{\delta} e^{-mR \sin \varphi} R d\varphi + 2 \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR \sin \varphi} R d\varphi. \quad (50)$$

(49) ва (50) тенгликларга асосан, (48) тенгсизлиқни қуйидаги кўринишда ёза оламиз:

$$\left| \int_{C_R} F(z) e^{imz} dz \right| \leq 2 \max_{C_R} |F(z)| \left[\int_0^{\delta} e^{-mR \sin \varphi} R d\varphi + \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR \sin \varphi} R d\varphi \right]. \quad (51)$$

Агар $\delta \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ бўлса, $\sin \varphi \geq \sin \delta$ ва $e^{-mR \sin \varphi} < e^{-mR \sin \delta}$ бўлади, демак,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR \sin \varphi} R d\varphi \leq R e^{-mR \sin \delta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = c R e^{-mR \sin \delta}, \quad (52)$$

бунда $c = \frac{\pi}{2} - \delta$. Агар $0 \leq \varphi \leq \delta$ бўлса, $\cos \varphi > \cos \delta$, $\frac{\cos \varphi}{\cos \delta} \geq 1$ бўлади.

Демак,

$$\begin{aligned} R \int_0^{\delta} e^{-mR \sin \varphi} d\varphi &\leq R \int_0^{\delta} e^{-mR \sin \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos \delta} d\varphi = -R \left. \frac{e^{-mR \sin \varphi}}{mR \cos \delta} \right|_0^{\delta} = \\ &= \frac{1 - e^{-mR \sin \delta}}{m \cos \delta} < \frac{1}{m \cos \delta}. \end{aligned} \quad (53)$$

(52) ва (53) тенгсизлиқларга асосан, (51) тенгсизлиқни қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\left| \int_{C_R} F(z) e^{imz} dz \right| < \frac{2 \max |F(z)|}{m \cos \delta} + \frac{2cR}{e^{mR \sin \delta}} \max |F(z)|. \quad (54)$$

Лопиталь қондасидан фойдаланиб,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R}{e^{mR \sin \delta}} = 0$$

эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Лемманинг шартига кўра, $R \rightarrow \infty$ да φ ($0 < \varphi < \pi$) га нисбатан $|F(Re^{i\varphi})|$ нолга текис интилади, демак, (54) тенгсизлиқдан лемманинг туғрилиги келиб чиқади.

Энди $f(z)$ функция, ҳақиқий ўқдан юқорида ётувчи чекли сондаги $a_1, a_2, \dots, a_n$ махсус нуқталардан ташқари, юқори ярим текисликда ва ҳақиқий ўқда аналитик функция бўлиб, $f(z) = e^{imz} F(z)$ кўринишига эга бўлсин, шу билан бирга $F(z)$ функция Жордан леммасининг шартларини қаноатлантирсин,

дейлик. Бу ҳолда 2-пунктдагига ўхшаш ярим доира учун қолдиқларнинг асосий теоремасини қўласак, Жордан леммасига асосан, бу функция учун (46) формула келиб чиқади, яъни:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{imx} dx = 2\pi i \sum_{a_1, \dots, a_n} \text{қолд. } f(z)$$

ёки

$$\int_0^{\infty} [F(x) e^{imx} + F(-x) e^{-imx}] dx = 2\pi i \sum_{a_1, \dots, a_n} \text{қолд. } f(z). \quad (55)$$

Иккита хусусий ҳолни кўрамиз. $F(z)$ — жуфт функция бўлсин, яъни $F(-z) = F(z)$, бу ҳолда (55) формулани бундай ёзиш мумкин:

$$\int_0^{\infty} F(x) \cos mx dx = \pi i \sum_{a_1, \dots, a_n} \text{қолд. } f(z). \quad (56)$$

Агар $F(z)$ тоқ функция, яъни: $F(-z) = -F(z)$ бўлса (55) дан ушбу формула келиб чиқади:

$$\int_0^{\infty} F(x) \sin mx dx = \pi \sum_{a_1, \dots, a_n} \text{қолд. } f(z). \quad (57)$$

1-мисол. Ушбу

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{(x^2 + 1)^2} dx \quad (m > 0)$$

интегрални ҳисоблаймиз. Бу ҳолда

$$F(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$$

функция Жордан леммасининг шартларини қаноатлантиради ва у жуфт функциядир. Бу интегрални ҳисоблаш учун (56) формулани қўлашимиз мумкин.

$$f(z) = \frac{e^{imz}}{(z^2 + 1)^2}$$

функция учун $z = i$ нуқта юқори ярим текисликда бирдан-бир иккинчи тартибли қутбдир. Шу нуқтага нисбатан қолдиқни ҳисоблаймиз:

$$\text{қолд. } f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[(z - i)^2 \frac{e^{imz}}{(z - i)^2 (z + i)^2} \right] = \frac{e^{-m(m+1)}}{4i}.$$

Демак,

$$I = \pi i \text{ қолд. } f(z) = \pi i \cdot \frac{e^{-m(m+1)}}{4i} = \frac{\pi(m+1)}{4e^m}.$$

2-мисол. Ушбу

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4x + 20} dx$$

интеграл ҳисоблансин. Бу мисолда

$$F(z) = \frac{z}{z^2 + 4z + 20}$$

функция Жордан леммасининг шартларини қаноатлантиради,

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 + 4z + 20}$$

функция учун $z^2 + 4z + 20 = 0$ тенгламанинг $z_{1,2} = -2 \pm 4i$ илдизлари оддий қутблар бўлиб, $z_1 = -2 + 4i$ илдиз юқори ярим текисликда ётади. Берилган интегрални ҳисоблаш учун (46) формуладан фойдаланамиз. Бунинг учун $f(z)$ функциянинг $z = z_1$ нуқтага нисбатан қолдиғини ҳисоблаш керак:

$$\begin{aligned} \text{қолд. } f(z) &= \frac{ze^{iz}}{(z^2 + 4z + 20)'} \Big|_{z=z_1} = \frac{(-2 + 4i)e^{-2i-4}}{2(-2 + 4i) + 4} = \\ &= \frac{e^{-4}}{4} (2 \cos 2 + \sin 2) + i \frac{e^{-4}}{4} (\cos 2 - 2 \sin 2). \end{aligned}$$

Демак,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\cos x + i \sin x)}{x^2 + 4x + 20} dx &= 2\pi i \left[\frac{e^{-4}}{4} (2 \cos 2 + \sin 2) + \right. \\ &\left. + i \frac{e^{-4}}{4} (\cos 2 - 2 \sin 2) \right]. \end{aligned}$$

Бу тенгликнинг ҳар икки томонида ҳақиқий ва маъхум қисмларни таққослаб, берилган интегралнинг қийматини топамиз:

$$I = \frac{\pi}{2e^4} (2 \cos 2 + \sin 2).$$

3-мисол. Ушбу

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

интеграл ҳисоблансин.

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

функцияни текшираамиз. $z=0$ нуқта $f(z)$ функция учун махсус нуқта бўлганлиги сабабли 93-чизмада кўрсатилган контур бу ерда ярамайди. Бунинг эътиборга олиб, ушба чизмада кўрсатилган ярим доирадан исталганча кичик $|z| < r$, $y > 0$ доирани ажратиб, сўнгра r ни 0 га, R ни эса ∞ га интиштирамиз (шундай қилганда интеграл бош қиймат маъносида мавжуд бўлади). Ҳосил бўлган соҳада (94-чизма) $f(z)$ аналитик бўлади, демак, Коши теоремасига асосан:

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_R^{-R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Жордан леммасига кўра,

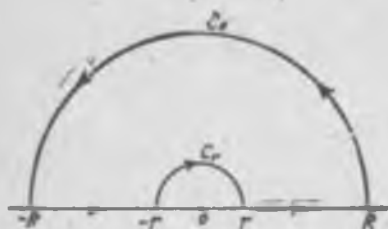
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{CR} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0,$$

C_r бўйича олинган интегрални $r \rightarrow 0$ да баҳолаш учун $f(z)$ функциянинг $z=0$ нукта атрофидаги Лоран ёйилмасини текширамиз:

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} \left(1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \dots \right) = \frac{1}{z} + P(z),$$

бунда $P(z)$ ёйилма $z=0$ нуктада узлуксиз функциядир. $r \rightarrow 0$ да C_r ярим айлананинг узунлиги нолга интилувчи бўлиб $P(z)$ функция чегараланган бўлгани учун,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} P(z) dz = 0.$$



94-чизма.

Демак,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\int_{C_r} \frac{dz}{z} + \right.$$

$$\left. + \int_{C_r} P(z) dz \right] = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{dz}{z}.$$

C_r ярим айлананинг тенгламаси $z = re^{i\varphi}$ ($\pi < \varphi < 0$) бўлгани учун

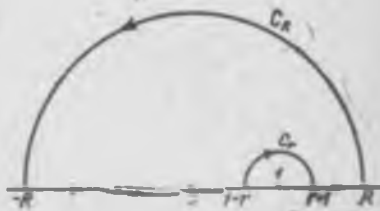
$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{dz}{z} = \int_{\pi}^0 d\varphi = -\pi i; \quad \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx = - \int_r^R \frac{e^{-ix}}{x} dx$$

тенгламани эътиборга олиб, $r \rightarrow 0$ ва $R \rightarrow \infty$ да қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx - \pi i = 0,$$

бундан

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$



95-чизма.

Бу интегрални $\pm i\infty$ орқали ҳам белгиланади.

4-мисол. Ушбу

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2+4)(x-1)}$$

интеграл ҳисоблансин. Дастлаб ушбу

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+4)(z-1)}$$

Бўрамчи функцияни текшираимиз. $z = 1$, $z = \pm 2l$ лар $f(z)$ учун махсус нукталар бўлгани сабабли, контурни 95-чизмада кўрсатиладиган қилиб оламиз. Бу контур билан чегараланган соҳада $f(z)$ функциянинг $z = 2l$ оддий қутби бор. Қолдиқлар назариясининг асосий теоремасига кўра

$$\int_{-R}^{1-r} \frac{e^{iz} dx}{(x^2+4)(x-1)} + \int_{C_r} \frac{e^{iz} dz}{(z^2+4)(z-1)} + \int_{1+r}^R \frac{e^{iz} dx}{(x^2+4)(x-1)} + \\ + \int_{C_R} \frac{e^{iz} dz}{(z^2+4)(z-1)} = 2\pi i \cdot \text{қолд. } f(z).$$

Жордан леммасига асосан: $R \rightarrow \infty$ да $\int_{C_R} \rightarrow 0$. $\int_{C_r}$ интегрални баҳолаш учун $f(z)$ функциянинг $z=1$ нукта атрофидаги Лоран ёйнамасидан фойдаланамиз. Бунда

$$\frac{e^{iz}}{e^i} = e^{i(z-1)} = 1 + [i(z-1)] + \frac{[i(z-1)]^2}{2!} + \dots$$

ёйламани ёътиборга оламиз:

$$f(z) = e^i \frac{1 + [i(z-1)] + \frac{[i(z-1)]^2}{2!} + \dots}{(z^2+4)(z-1)} = \frac{e^i}{5(z-1)} - e^i \frac{z+1}{5(z^2+4)} + \\ + e^i \frac{[i(z-1)] + \frac{[i(z-1)]^2}{2!} + \dots}{(z^2+4)(z-1)} = \frac{e^i}{5(z-1)} + P(z),$$

бундаги $P(z)$ ёйлама $z=1$ нуктада узлуксиз функциядир. 3-мисолдагидай.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} P(z) dz = 0.$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{e^i}{5} \int_{C_r} \frac{dz}{z-1} + \int_{C_r} P(z) dz \right] = \frac{e^i}{5} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{dz}{z-1}.$$

C_r ярим айлананинг тенгламаси $z-1 = re^{i\varphi}$ бўлгани сабабли

$$\frac{e^i}{5} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{dz}{z-1} = \frac{e^i}{5} i \int_{\pi}^0 d\varphi = -\pi i \frac{e^i}{5} = -\frac{\pi i}{5} (\cos 1 + i \sin 1).$$

Энди $z=2l$ нуктага нисбатан $f(z)$ функциянинг қолдиғини ҳисоблаймиз

$$\text{қолд. } f(z) = \frac{e^{iz}}{[(z^2+4)((z-1))']} \Big|_{z=2l} = \frac{(l-2)e^{-2}}{20}$$

Буларни эътиборга олиб, $r \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$ да қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{(x^2+4)(x-1)} = \frac{\pi i}{5} (\cos 1 + i \sin 1) = 2\pi i \frac{(1-2)e^{-2}}{20}.$$

Бу тенгликда маъхум қийматларни таққослаб, берилган интегралнинг қийматини топамиз:

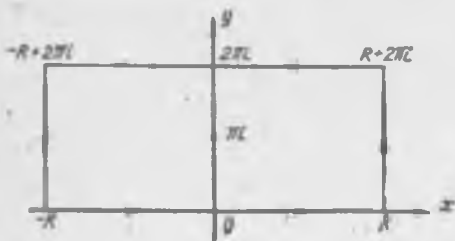
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2+4)(x-1)} = \frac{\pi}{5} (\cos 1 - e^{-2}).$$

5-мисол. Ушбу

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} dx}{1+e^x}$$

интеграл ҳисоблансин. Бу интегрални ҳисоблаш учун

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$$



96-чизма.

функцияни текшираимиз. Ўзгарувчи z га $2\pi i$ орттirma берилса, $f(z)$ функция e^{iaz} ўзгармас кўпайтувчига эга бўлади. Бунини эътиборга олиб, $f(z)$ ни 96-чизмада кўрсатилган тўртбурчак контури бўйича интеграллаймиз.

Бу контур ичида $f(z)$ нинг битта πi оддий қутби бор. Шу қутбга нисбатан қолдиқни ҳисоблаймиз:

$$\text{қолд. } f(z) = \frac{e^{az}}{(1+e^z)} \Big|_{z=\pi i} = -e^{a\pi i}.$$

Демак, қолдиқларга онд маълум теоремага кўра:

$$\int_{-R}^R f(z) dz + \int_R^{R+2\pi i} f(z) dz + \int_{R+2\pi i}^{-R+2\pi i} f(z) dz + \int_{-R+2\pi i}^{-R} f(z) dz = -2\pi i e^{-a\pi i}$$

$$\int_{-R}^R f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx, \quad \int_{R+2\pi i}^{-R+2\pi i} f(z) dz = - \int_{-R}^R \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}} dx =$$

$$= -e^{2\pi i a} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx.$$

R ва $R + 2\pi i$ ҳамда $-R + 2\pi i$ ва $-R$ оралиқларда $f(z)$ функцияни мос равишда қуйидагича баҳолаш мумкин:

$$|f(z)| = \left| \frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} \right| < \frac{e^{aR}}{e^R-1} = \frac{e^{(a-1)R}}{1-e^{-R}}, \text{ чунки } |1+e^{R+iy}| > e^R - 1.$$

$$|f(z)| = \left| \frac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}} \right| < \frac{e^{-aR}}{1-e^{-R}}, \text{ чунки } |1+e^{-R+iy}| > 1 - e^{-R}.$$

Демак, агар $0 < a < 1$ бўлса $R \rightarrow \infty$ да $\int_R^{R+2\pi i} \rightarrow 0$, $\int_{-R+2\pi i}^{-R} \rightarrow 0$.

Шундай қилиб, $R \rightarrow \infty$ да

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} dx}{1+e^x} - e^{2\pi i a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} dx}{1+e^x} = -2\pi i e^{2\pi i a},$$

бундан

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} dx}{1+e^x} = -2\pi i \frac{e^{2\pi i a}}{1-e^{2\pi i a}} = \pi \frac{2i}{e^{2\pi i a} - e^{-2\pi i a}} = \frac{\pi}{\sin \pi a} \quad (0 < a < 1).$$

Равшанки, $a < 0$ ва $a > 1$ учун берилган интеграл узоқлашувчи бўлади. Бу мисолдаги интегрални Эйлернинг $\Gamma(z)$ функцияси билан алоқадорлигини кўриш қийин эмас. Гамма-функция

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (58)$$

Бу интеграл $R(z) > 0$ да абсолют яқинлашувчи бўлиб, аналитик функцияни ифодалайди.

(58) интегралда t ни u^2 га алмаштирамиз:

$$\Gamma(z) = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{2z-1} du.$$

Агар сўнги интегралда z ни $1-z$ га алмаштирсак,

$$\Gamma(1-z) = 2 \int_0^{\infty} e^{-v^2} v^{1-2z} dv.$$

Булардан

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} \left(\frac{u}{v}\right)^{2z-1} dudv.$$

Охирги интегрални (u, v) текисликда $u > 0$, $v > 0$ соҳа бўйича олинган икки ўлчовли интеграл деб қарашимиз мумкин. u ва v ларни қутб координатларида ифодалаймиз:

$$u = \rho \cos \varphi, \quad v = \rho \sin \varphi.$$

У ҳола

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2} (\operatorname{ctg} \varphi)^{2z-1} \rho d\rho d\varphi.$$

Равшанки,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2} \rho d\rho = \frac{1}{2}.$$

Демак,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{ctg} \varphi)^{2z-1} d\varphi.$$

Агар ушбу

$$\varphi = \arccot \sqrt{x}, \quad d\varphi = -\frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

алмаштиришни киритсак, қуйдаги тенгликка эга бўламиз:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^{\infty} \frac{x^{z-1} dx}{1+x}.$$

Одирги интегралда $x=e^z$ алмаштиришни бажарамиз:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{z-1} dx}{1+x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{z\tau}}{1+e^z} dz = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (5\text{-мисол}).$$

Демак,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

6-мисол. Ушбу

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1-e^x} dx$$

интеграл ҳисоблансин. Бу интегрални



97-чизма.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} dx}{1-e^x} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{bx} dx}{1-e^x}$$

иккита интегралга ажратиш мумкин эмас, чунки $x=0$ нуқтада интеграл ишораси остидаги функциялар чексизликка айланиб, интеграллар узоқлашувчи бўлади. Агар $z = x + i\pi$ десак, $1 - e^z = 1 - e^{x+i\pi} = 1 + e^x$

ифода $x = 0$ да нолга айланмайди, шунинг учун берилган интегрални ҳи-
соблашда 5-мисолдан фойдаланиш мумкин.

$$f(z) = \frac{e^{az} - e^{bz}}{1 - e^z}$$

деб олиб, интеграллаш йўлини 97-чизмада кўрсатилгандай танлаб оламиз.
Бу контур билан ўралган соҳада $f(z)$ аналитик функция бўлгани учун,
Коши теоремасига асосан:

$$\int_{-R}^{-r} + \int_{C_r} + \int_r^{R+pi} + \int_R^{-R+pi} + \int_{R+pi}^{-R+pi} = 0, \quad (59)$$

$f(z)$ функция $z = 0$ нуқта атрофида қуйидаги ёйилма билан ифодаланади:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1 + az + \frac{(az)^2}{2!} + \dots - \left(1 + bz + \frac{(bz)^2}{2!} + \dots\right)}{1 - \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots\right)} = \\ &= \frac{a - b + \frac{a^2 - b^2}{2!} z + \dots}{-1 - \frac{z}{2!} - \dots} = (b - a) + c_1 z + \dots \end{aligned}$$

Демак, $z = 0$ нуқта $f(z)$ учун қутулиб бўладиган махсус нуқта бўлиб,
 $z \rightarrow 0$ да $f(z)$ чегараланган бўлади:

$$r \rightarrow 0 \text{ да } \int_{C_r} \rightarrow 0.$$

Худди 5-мисолдагидек, агар $0 < a < 1$ ва $0 < b < 1$ бўлса, (59) тенглик-
даги тўрттинчи ва олтинчи интеграллар $R \rightarrow \infty$ да нолга интилади. Шундай
қилиб, (59) тенгликда $r \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$ деб лимитга ўтсак, қуйидаги ҳосил
бўлади:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 - e^x} dx + \int_0^{\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 - e^x} dx + \int_{\infty}^{-\infty} \frac{e^{a(x+pi)} - e^{b(x+pi)}}{1 - e^{x+pi}} dx = 0$$

ёки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 - e^x} dx = e^{api} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} dx}{1 + e^x} - e^{bpi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{bx} dx}{1 + e^x}.$$

5-мисолдан фойдаланиб, охириги натижага эришамиз:

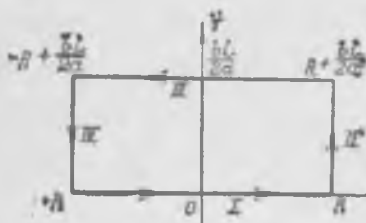
$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 - e^x} dx = \frac{\pi e^{api}}{\sin a\pi} - \frac{\pi e^{bpi}}{\sin b\pi} = \pi (\operatorname{ctg} a\pi - \operatorname{ctg} b\pi) \\ &\quad (0 < a < 1, 0 < b < 1) \end{aligned}$$

$$I = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx \quad (a > 0)$$

интеграл ҳисоблансин. Бу интегрални ҳисоблаш учун

$$f(z) = e^{-az^2}$$

функцияни текшираимиз. Бу функциядан ҳақиқий ўқ бўйича олинган интеграл Пуассон интегрални бўлиб, у ушбу қийматга эга:



98-чизма.

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$y = h$ тўғри чизиқда $f(z)$ функция ушбу

$$e^{-a(x+ih)^2} = e^{-ax^2} \cdot e^{-a^2x^2} (\cos 2ahx - i \sin 2ahx)$$

функцияга айланади, охириги функциянинг ҳақиқий қисми $h = \frac{b}{2a}$ бўлганда, берилган интеграл ншораси остидаги функциядан ўзгармас сонга фарқ қилади. Шу сабабли интеграллаш контурини 98-чизмадагидай танлаб оламиз. Коши теоремасига асосан

$$\int_I + \int_{II} + \int_{III} + \int_{IV} = 0. \quad (60)$$

Бунда $\int_I$ интегралда $x\sqrt{a} = t$ алмаштиришни бажариб, интеграл остидаги функциянинг жуфтлигидан ва Пуассон интегралидан фойдаланамиз:

$$\int_I = \int_{-R}^R e^{-ax^2} dx = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^{R\sqrt{a}} e^{-t^2} dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

$$\int_{III} = \int_{-R}^R e^{-a\left(x + \frac{bi}{2a}\right)^2} dx = -e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-R}^R e^{-ax^2} \cdot e^{-bxi} dx.$$

II ва IV кесмаларда $x = \pm R$ бўлгани учун

$$|e^{-az^2}| = e^{-a(R^2 - y^2)} < e^{\frac{b^2}{4a}} \cdot e^{-aR^2} \left(y < \frac{b}{2a} \right).$$

Демак, $a > 0$ бўлса, $R \rightarrow \infty$ да $\int_{II}$ ва $\int_{IV}$ интеграллар нолга интилади.

Шундай қилиб, (60) тенгликда $R \rightarrow \infty$ деб лимитга ўтамыз:

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} - e^{-\frac{\pi^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cdot e^{-ibx} dx = 0.$$

Бундан ҳақиқий қисмларни таққослаб, ноланган интегрални топамиз:

$$I = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{b^2}{4a}} (a > 0).$$

Юқоридаги тенгликда мавҳум қисмларни бирлаштирсак,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \sin bx dx = 0$$

натижага келамиз. Бундай бўлишини интеграл ишораси остидаги функция тоқ эканидан фойдаланиб чиқариш ҳам мумкин.

4. Куп қийматли функциялардан олинган интегралларни ҳисоблаш.

1-мисол. Ушбу

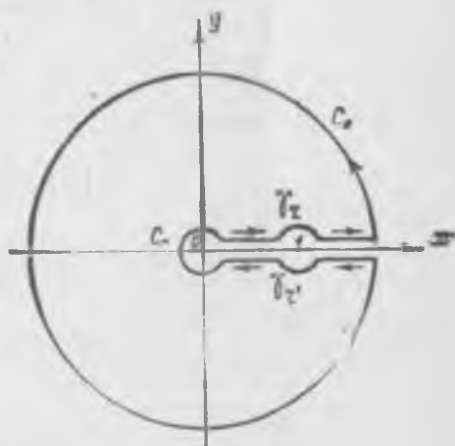
$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x^2(1-x)}}{(1+x)^3} dx$$

интеграл ҳисоблансин.

$$f(z) = \frac{\sqrt{z^2(1-z)}}{(1+z)^3}$$

функцияни текширамыз. Бу функциянинг $(0,1)$ кесма бўйича қирқилган текисликда учта бир қийматли тармоғи бор. Ҳақиқатан, 0 ва 1 нуқталарни ўз ичига олган ёпиқ контурни соат стрелкасига қарши тўла айланганда, $\arg z$ ва $\arg(z-1)$ лар $+2\pi$ орттирма қабул қилади, $\arg z^2(1-z)$ эса $2 \cdot 2\pi + 2\pi = 6\pi$ орттирмани қабул қилади, демак, $\sqrt{z^2(1-z)}$ функция бошланғич қийматига қайтиб келади. Биз $f(z)$ нинг $(0,1)$ кесманинг юқори чеккасида мусбат қийматлар қабул қилувчи тармоғини танлаб оламиз, бунинг учун $\arg z = \arg(1-z) = 0$ деб қабул қиламыз. 99-чизмада тасвирланган контурни оламиз.

I чеккада $\arg \sqrt{z^2(z-1)} = 0$, яъни $f(x) = \frac{\sqrt{x^2(1-x)}}{(1+x)^3}$ II чеккада, яъни $z=1$ нуқтани соат стрелкаси бўйича айлангандан сўнг, $\arg z$



99-чизма.

0 га тенглигича қолади, $\arg(1-z)$ эса -2π га тенг бўлиб қолади, $\arg \sqrt[3]{z^2(1-z)} = -\frac{2\pi}{3}$, $\arg f(z) = -\frac{2\pi}{3}$, яъни

$$f(z) = e^{-\frac{2\pi i}{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{z^2(1-z)}}{(1+z)^3}$$

бўлади.

Бу ерда ҳам қолдиқлар назариясининг асосий теоремасига асосан:

$$\int_1 + \int_{C_r'} + \int_{II} + \int_{C_R} + \int_{C_R} = 2\pi i. \quad \text{қолд. } f(z).$$

Равшанки C_r' ва C_r'' айланачалар бўйича олинган интеграллар $r \rightarrow 0$ да нолга интилади. $f(z)$ функциянинг ҳар бир тармоғи учун чексиз узоқлашган нуқта иккинчи тартибли ноль бўлгани сабабли етарли катта R да $\int_{C_R} = 0$ бўлади.

Шундай қилиб,

$$\int_1 + \int_{II} = \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(1+x)^3} dx + e^{-\frac{2\pi i}{3}} \int_1^0 \frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(1+x)^3} dx = (1 - e^{-\frac{2\pi i}{3}}) I.$$

$$I = \frac{2\pi i}{\left(1 - e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)} \quad \text{қолд. } f(z).$$

$z = -1$ нуқта $f(z)$ нинг учинчи тартибли қутби бўлгани сабабли

$$\text{қолд. } f(z) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^2}{dz^2} [1+z]^3 f(z) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \sqrt[3]{z^2(1-z)} \Big|_{z=-1},$$

$f(z)$ функциянинг тармоқларини алмаштирмаслик учун, қолдиқни ҳисоблашда бир оз эҳтиёт бўлиш керак. Бизнинг танлаб олган тармоғимиз $z = -1$ нуқтада $\arg z = \pi$, $\arg(1-z) = 0$ қийматлар билан характерланади, шу сабабли дифференциаллаш амали бажарилгандан сўнг, $z = e^{i\pi}$, $1-z = 2$ қийматларни қўйиш керак (аргумент билан боғлиқ бўлган шартларни алмаштирмаслик учун илдиэ остидаги қавани очиш мумкин эмас);

$$\begin{aligned} \text{қолд. } f(z) &= \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{9} z^{-\frac{4}{3}} (1-z)^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{9} z^{-\frac{1}{3}} (1-z)^{-\frac{2}{3}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{9} z^{\frac{2}{3}} (1-z)^{-\frac{5}{3}} \right]_{z=-1} = -\frac{1}{9} (e^{-\frac{4\pi i}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} + 2e^{-\frac{\pi i}{3}} \cdot 2^{-\frac{2}{3}} + \\ &\quad + e^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot 2^{-\frac{5}{3}}) = \frac{1}{9 \cdot 2^{\frac{2}{3}}} e^{-\frac{\pi i}{3}}. \end{aligned}$$

Демак,

$$I = \frac{2\pi i}{\left(1 - e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)} \cdot \frac{1}{9 \cdot 2^{\frac{5}{3}}} \cdot e^{-\frac{\pi i}{3}} = \frac{\pi}{9\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{4}}.$$

2-мисол. Ушбу

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx \quad (a \geq 0)$$

интеграл ҳисоблансин. Ёрдамчи

$$f(z) = \frac{\ln z}{z^2 + a^2}$$

функцияни олиб, интеграллаш контурини 100-чизмадагидай қилиб оламиз.

Агар $\ln z$ логарифмик функциянинг бош қийматини ($0 < \arg z < \pi$) тушунсак, текширилаётган контур ичида $f(z)$ функция бир қийматли бўлади. Бу функция учун $z = ai$ нуқта оддий қутбдир, шу қутбга нисбатан қолдиқни ҳисоблаймиз:

$$\text{қолд. } f(z) = \frac{\ln z}{(z^2 + a^2)'} \Big|_{z=ai} = \frac{\ln ai}{2ai} = \frac{\ln a + \frac{\pi i}{2}}{2ai}.$$

Қолдиқлар назариясининг асосий теоремасига кўра

$$\int_{-R}^{-r} + \int_{C_r} + \int_r^R + \int_{C_R} = 2\pi i \cdot \frac{\ln a + \frac{\pi}{2}}{2ai}.$$

C_R бўйича олинган интегрални баҳолаймиз: $z = Re^{i\varphi}$, $0 < \varphi < \pi$ да етарли катта R учун

$$|\ln z| = \sqrt{\ln^2 R + \varphi^2} < \sqrt{\ln^2 R + \pi^2} < 2 \ln R,$$

$$\frac{1}{|z^2 + a^2|} < \frac{1}{R^2 - a^2}.$$

демак,

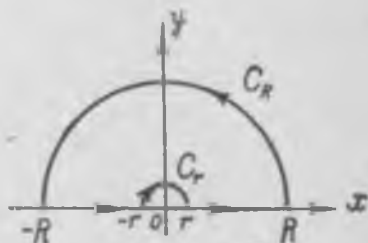
$$\left| \int_{C_R} \right| < \frac{2 \ln R}{R^2 - a^2} \cdot \pi R.$$

Бундан $R \rightarrow \infty$, $\int_{C_R} \rightarrow 0$.

Худди шунга ўхшаш $z = re^{i\varphi}$, $0 < \varphi < \pi$ да етарли кичик r учун

$$|\ln z| < 2 \ln \frac{1}{r},$$

$$\left| \int_{C_r} \right| < \frac{2 \ln \frac{1}{r}}{a^2 - r^2} \cdot \pi r,$$



100-чизма.

бу интеграл ҳам $r \rightarrow 0$ да нолга интилади. Биринчи интегралда $z = -x$ алмаштиришни бажарамиз:

$$\int_{-R}^{-r} = \int_r^R \frac{\ln x + \pi l}{x^2 + a^2} dx.$$

Шундай қилиб, $r \rightarrow 0$ ва $R \rightarrow \infty$ га интилганда лимитга ўтиб қуйидаги ифодага эришамиз:

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx + \pi l \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = 2\pi l \cdot \frac{\ln a + \frac{\pi}{2} l}{2al}.$$

Бундан:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \ln a; \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a}.$$

8-мисол. Ушбу

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1-x} dx \quad (0 < a < 1)$$

махсус ($x = 1$ махсус нуқта) интегралнинг бош қиймати ҳисоблансин. Бу интегрални ҳисоблаш учун

$$f(z) = \frac{z^{a-1}}{1-z} = \frac{e^{(a-1)\ln z}}{1-z}$$

ёрдмчи функцияни текшираемиз.

Интеграллаш йўлини 101-чизмада кўрсатилгандай танлаб оламиз. Бу контур ичида $f(z)$ аналитик функциядир. Коши теоремасига асосан

$$\int_{C_r} + \int_r^{1-r} + \int_{1-r}^R + \int_R^{1+r} + \int_{1+r}^r + \int_r^{1-r} = 0.$$

Кесимнинг пастки четида

$$f(xe^{2\pi l}) = e^{2\pi l a} f(x)$$

бўлгани сабабли, аввалги тенгликни бундай ёза оламиз:

$$\begin{aligned} \int_{C_r} f(z) dz + (1 - e^{2\pi l a}) \left[\int_r^{1-r} f(x) dx + \int_{1+r}^R f(x) dx \right] + \\ + \int_{1-r}^r f(z) dz + \int_r^{1-r} f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Равшанки, $r \rightarrow 0$ да $\int_{C_r} \rightarrow 0$ ва $R \rightarrow \infty$ да $\int_{C_R} \rightarrow 0$, ва γ_r буйича олинган интегралларда мес равишда

$$z^{a-1} = 1 + O(r)^1, \quad z^{a-1} = e^{(a-1)(\ln z + 2\pi i)} = e^{2\pi a i} + O(r);$$

$1 - z = re^{i\varphi}$, $dz = -ire^{i\varphi}d\varphi$, бунда φ 0 дан $-\pi$ гача (γ_r да) ва $-\pi$ дан -2π гача (γ_r' да) ўзгаради.

Демак,

$$\int_{\gamma_r} + \int_{\gamma_r'} = \pi i (1 + e^{2\pi a i}) + O(r).$$

(61) тенгликда $r \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$ да лимитга ўтиб қуйидаги инфодага эга буламиз:

$$(1 - e^{2\pi a i})I + \pi i (1 + e^{2\pi a i}) = 0.$$

Бундан:

$$I = \pi i \cdot \frac{e^{2\pi a i} + 1}{e^{2\pi a i} - 1} = \pi \operatorname{ctg} \pi a.$$

Машқлар

Қуйидаги функцияларнинг барча ажратилган махсус нуқталарига нисбатан қолдиқлари топилин:

1. $\frac{z^2 + 3}{z - 2}.$

2. $\frac{\cos z}{z - i}.$

3. $\frac{1}{(z^2 + 1)^3}.$

4. $\frac{1}{z^3 - z^2}.$

5. $\frac{z^{2n}}{(z+1)^n}$ ($n > 0$ — бутун сон).

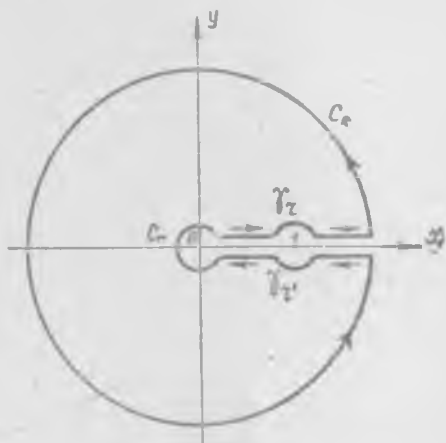
6. $\frac{\sin^3 z}{z^2}.$

7. $\operatorname{ctg}^2 z.$

8. $\sin \frac{z}{z+1}.$

Қўрсатма. $\sin \frac{z}{z+1} = \sin \left(1 - \frac{1}{z+1} \right).$

9. $\frac{1}{1 - e^z}.$



101-чизма.

¹ $O(r)$ орқали $r \rightarrow 0$ даги чексиз кичик миқдор белгиланади.

$$10. z^n \sin \frac{1}{z}.$$

Қуйидаги тенгламаларнинг $|z| < 1$ доирадаги илдиэлари сонини Руше теоремасидан фойдаланиб топилисн:

$$11. z^4 - 8z + 10 = 0.$$

$$12. z^3 - 2z^2 + z^2 - 8z - 2 = 0.$$

$$13. e^{z-\lambda} = z, \lambda > 1.$$

$\sin z$ ёйилмасидан фойдаланиб, қуйидаги ёйилмаларнинг тўғрилиги исботлансин.

$$14. \cos z = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2} \right).$$

$$\text{Кўрсатма: } \cos z = \frac{\sin 2z}{2\sin z}.$$

$$15. \sin z - \sin z_0 = (z - z_0) \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{(z + z_0)^2}{\pi^2(2n-1)^2} \right] : \left[1 - \frac{(z - z_0)^2}{\pi^2(2n)^2} \right].$$

$$16. \cos \pi z - \cos \pi z_0 = -\frac{1}{2} \pi^2 (z^2 - z_0^2) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(z + z_0)^2}{4n^2} \right) \left(1 - \frac{(z - z_0)^2}{4n^2} \right).$$

$$17. e^z - 1 = e^{\frac{z}{2}} \cdot z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{4n^2\pi^2} \right).$$

$$\text{Кўрсатма. } e^z - 1 = 2ie^{\frac{z}{2}} \sin \frac{z}{2}.$$

Қуйидаги қаторларнинг йиғиндилари топилисн:

$$18. \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(a+n)^2}, \quad a \text{ бутун сон эмас.}$$

$$19. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2}$$

Қуйидаги интеграллар ҳисоблансин:

$$20. \oint_C \frac{zdz}{\frac{1}{2} - \sin^2 z}, \text{ бунда } C \text{ — айлана: } |z| = 2.$$

$$21. \oint_C \frac{dz}{z^4 + 1}, \quad C \text{ — айлана: } x^2 + y^2 = 2x.$$

$$22. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + \cos t)^2}, \quad a > 1.$$

$$23. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2p \cos t + p^2} \quad (p - \text{комплекс сон}),$$

$$24. \int_0^{\pi} \operatorname{tg}(x + ia) dx \quad (a - \text{ҳақиқий сон}).$$

$$25. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2}$$

$$26. \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2 (x^2 + b^2)}$$

$$27. \int_0^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^2 + 9}$$

$$28. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x \, dx}{x^3 - 2x + 10}$$

$$29. \int_0^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x(x^2 + 1)^2}$$

$$30. \int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^3} \, dx, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

$$31. \int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)^3}}{(1+x)^2} \, dx.$$

$$32. \int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x \, dx}{x^2 + 1}$$

VIII БОБ

АНАЛИТИК ДАВОМ ЭТТИРИШ ВА КОНФОРМ АКСЛАНТИРИШНИНГ УМУМӢЙ ПРИНЦИПЛАРИ

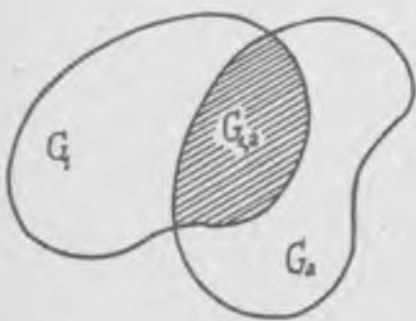
1-§. Аналитик давом эттириш

1-§. Аналитик давом эттириш тушунчаси. Тўла аналитик функция. Агар $f(z)$ функция бирор D соҳада аналитик бўлса, у ҳолда табиий равишда бундай савол туғилади: функциянинг аниқланиш соҳасини, унинг аналитиклигини сақлаган ҳолда

кенгайтириш мумкин эмасми, яъни G соҳани ўз ичига олган ва ундан кенгроқ шундай D соҳа тузиш мумкин эмасмикинки, $f(z)$ функция уша D соҳада аналитик бўлсин. Аналитик функциянинг аниқланиш соҳасини бундай кенгайтирилишини функциянинг аналитик давом эттирилиши дейилади. Аналитик давом эттиришга ҳақиқий ўзгарувчи e^x , $\sin x$ ва $\cos x$ (бу ерда G ҳақиқий ўқ) функциялардан бутун комплекс соҳада аналитик бўлган e^z , $\sin z$ ва $\cos z$ комплекс ўзгарувчи функцияларга ўтиш мисол бўла олади. Шубҳасиз охириги функциялар G соҳада мос ҳақиқий ўзгарувчи функциялардан иборат бўлади. Бу хилдаги ўтишга ушбу

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

даражали қаторларда ҳақиқий ўзгарувчи x ни комплекс ўзгарувчи z билан алмаштириб эришиш мумкин. Равшанки, бундай алмаштириш қаторларнинг яқинлашувини бузмайди. Шунинг учун ҳам бу қаторлар билан ифодаланган функциялар бутун текисликда аналитик бўлади. Фараз қилайлик, бизга иккита $f_1(z)$ ва $f_2(z)$ функциялар берилган бўлиб, булар мос равишда G_1 ва G_2 соҳаларда аналитик бўлсин. Бундан ташқари G_1 ва G_2 ларнинг умумий қисмидан иборат $G_{1,2}$ соҳада (102-чизма) $f_1(z) = f_2(z)$ бўлсин. У ҳолда аналитик функцияларнинг ягоналик хоссасига асосан, G_2 соҳада аналитик ва $G_{1,2}$ да $f_2(z) = f_1(z)$ қийматларни қабул қиладиган $f_2(z)$ функциядан бошқа функция мавжуд бўлмаганидек, G_1 да аналитик ва $G_{1,2}$ да $f_1(z) = f_2(z)$ қийматларни қабул қиладиган $f_1(z)$ дан бошқа функция мавжуд бўлмайди. Шундай қилиб, $f_2(z)$ функция $G_{1,2}$ даги қийматлари орқали, яъни $f_1(z)$ функция орқали тула аниқланади. Шунга ўхшаш $f_1(z)$ функция ҳам $f_2(z)$ воситаси билан тула аниқланади. Демак, G_1 ва G_2



102-чизма.

соҳалар 102-чизмада курсатилгандай бўлиб, $f_1(z)$ функция G_1 соҳада аналитик бўлса, у ҳолда ёки G_2 да аналитик ва $G_{1,2}$ да $f_1(z)$ билан бир хил бўлган биргина $f_2(z)$ функция мавжуд ёки G_2 да бундай функция мутлақо мавжуд эмас.

Агар шундай $f_2(z)$ функция мавжуд бўлса, G_1 соҳада берилган $f_1(z)$ функция $G_{1,2}$ соҳа орқали G_2 соҳага

аналитик давом эттириляпти деймиз. $f_2(z)$ функцияни $f_1(z)$ функциянинг G соҳада бевосита аналитик давоми дейилади.

Равшанки, $f_1(z)$ функция, ўз навбатида, $f_2(z)$ функциянинг

G_1 соҳага бевосита аналитик дазоми бўлади. $f_1(z)$ ва $f_2(z)$ функциялар бири иккинчиси орқали тула аниқланганлиги сабабли, уларни $G = G_1 + G_2$ кенгайтирилган соҳада аналитик бўлган битта $F(z)$ функциянинг элементлари деб қараш табиидир, яъни

$$F(z) = \begin{cases} G_1 & \text{да } f_1(z), \\ G_2 & \text{да } f_2(z). \end{cases}$$

Мисол. G_1 соҳа $|z| < 1$ доира, G_2 соҳа эса маркази $-i$ нуқтада ва радиуси $\sqrt{2}$ га тенг бўлган $|z + i| < \sqrt{2}$ доира бўлсин (103-чизма). G_1 соҳада

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

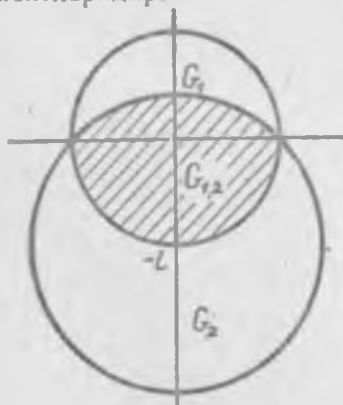
функция берилган бўлсин. G_2 соҳада аналитик ва G_1 да $f_1(z)$ функцияга тенг бўлган функция тузиш керак. Агар бундай функция мавжуд бўлса, у албатта ягонадир. Изланаётган функция бундай бўлади:

$$f_2(z) = \frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i}{1+i} \right)^n$$

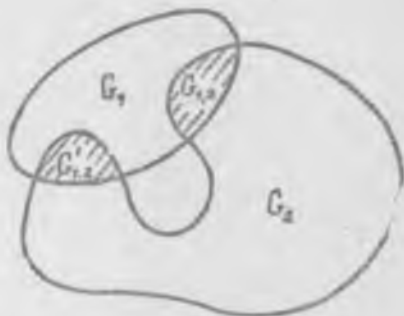
Ҳақиқатан, охириги қатор $\left| \frac{z+i}{1+i} \right| < 1$ да яъни $|z+i| < \sqrt{2}$ да яқинлашувчи ва унинг йигиндиси

$$f_2(z) = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z+i}{1+i}} = \frac{1}{1-z}$$

га тенг. Демак, $G_{1,2}$ соҳанинг барча нуқталарида $f_2(z) = f_1(z)$. Шундай қилиб, $f_1(z)$ ва $f_2(z)$ функциялар бири иккинчисининг бевосита аналитик давоми бўлиб, улар кенгайтирилган $G = G_1 + G_2$ соҳада аналитик бўлган битта $F(z) = \frac{1}{1-z}$ функциянинг элементларидир.



103-чизма.



104-чизма.

Биз юқорида айтиб утдикки, агар G_1 ва G_2 соҳалар 102 ёки 103-чизмалардагидай бўлса, яъни улар битта умумий қисмга эга бўлса, у ҳолда $f_1(z)$ функциянинг G_2 соҳага давоми ягона бўлади.

Аммо G_1 ва G_2 соҳалар (104-чизмада) курсатилгандай бир нечта умумий қисмга эга бўлса, $f_1(z)$ функциянинг $G_{1,2}$ ва $G'_{1,2}$ умумий қисмлари орқали G_2 соҳага давоми ҳам бир-биридан фарқли бўлиши мумкин.

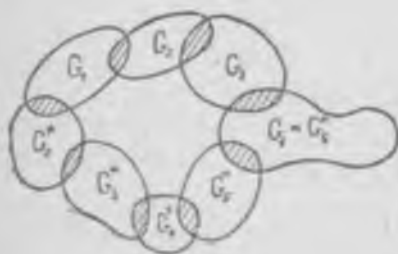
Агар G_1 ва G_2 соҳалар фақат битта умумий қисмга эга бўлса, юқорида айтилганларга кура, $F(z)$ функция бир қийматли бўлади. Агарда G_1 ва G_2 соҳалар бир нечта умумий қисмга эга бўлса, у ҳолда $F(z)$ функция кўп қийматли бўлиши ҳам мумкин (яъни G_2 соҳанинг z нуқталарида $f_2(z)$ функция турли қийматларга эга бўлиши мумкин). Аниқ мисолда шундай бўлишини бир оз кейин кўраемиз.

Энди, $G_1, G_2, \dots, G_n$ соҳалар занжири берилган бўлиб, ҳар бир жуфт (икки) қушни G_k ва G_{k+1} соҳалар умумий $G_{k,k+1}$ қисмга эга ва ҳар бир G_k соҳада $f_k(z)$ аналитик функция берилган бўлсин.

Таъриф. Агар ҳар бир $k = 1, 2, \dots, n-1$ учун $f_k(z)$ ва $f_{k+1}(z)$ функцияларнинг қийматлари $G_{k,k+1}$ соҳада бир хил бўлса, у ҳолда $f_n(z)$ функция $f_1(z)$ функциянинг $\{G_k\}$ соҳалар занжири орқали G_n соҳага аналитик давоми дейилади.

Бу ҳолда ҳам, тайин $G_1, G_2, \dots, G_n$ ва $G_{1,2}, G_{2,3}, \dots, G_{n-1,n}$ соҳаларда $f_1(z)$ функциянинг G_n соҳага аналитик давоми (агар у мумкин бўлса) бир қийматли (бирдан-бир) аниқланади. Лекин $\{G_k\}$ занжир ҳалқаларини ўзгартирганда ёки бирор $G_{k,k+1}$ лар ўзгарганда аналитик давомнинг қиймати ўзгариши мумкин. Занжирнинг охириги ҳалқаси бошланғичи билан бир хил бўлиб қолиши ҳам мумкин, масалан, 105-чизмада занжир $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, \dots, G_2, G_1$ дан иборат. Бу ҳолда, шу занжир орқали аналитик давом эттириш натижасида ҳосил бўлган функциянинг қиймати бошланғич функция билан бир хил бўлиши шарт эмас.

Юқорида айтилганларни мисолда тушунтириб ўтаемиз. G_1 соҳа $|z-1| < \frac{1}{2}$ доирадан иборат бўлиб, $f_1(z) = \int_1^z \frac{dz}{L}$ бўлсин, бунда



105-чизма.

L — шу доирадаги 1 ва z нуқталарни туташтирувчи йўлдир, у ҳолда

$$f_1(z) = \ln z = \ln |z| + i \arg z,$$

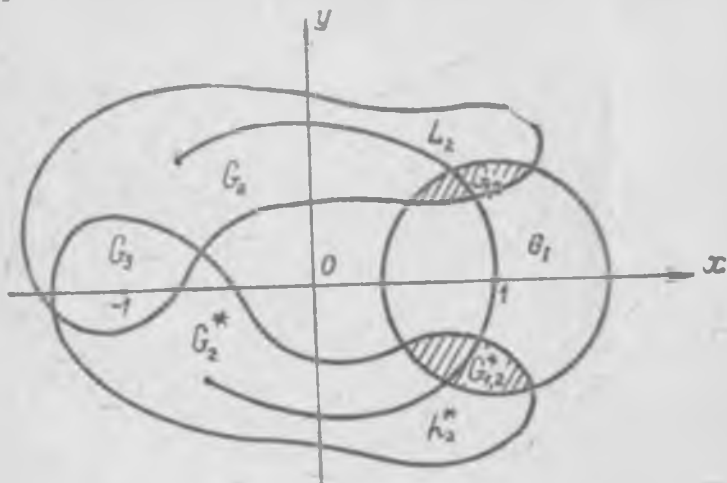
шу билан бирга $\arg z$ бош қийматни ифодалайди; юқори ярим доирада $\arg z$ мусбат қийматларни, пастки ярим доирада эса манфий қийматларни қабул қилади.

G_2 ва G_2^* 106-чизмада тасвирланган соҳалар бўлиб, G_1 уларнинг умумий қисми бўлсин. Равшанки, $f_1(z) = \ln z$ функциянинг G_2 ва G_2^* соҳаларга аналитик давоми ушбу функциялар бўлади:

$$f_1(z) = \int_{L_1}^z \frac{dz}{z}, \quad f_2^*(z) = \int_{L_2^*}^z \frac{dz}{z},$$

бу ерда L_1 ва L_2^* лар 1 нуқтани z нуқта билан туташтирувчи ва мос равишда G_1 ва G_2^* соҳаларга ўтиб кетган чизиқлардир.

Бу функциялар ҳам $\ln |z| + i \arg z$ га тенг бўлади, лекин $f_2(z)$, учун $\arg z$ мусбат қийматлар, $f_2^*(z)$ учун манфий қийматлар қабул қилади. G_1 соҳада бу функциялар $f_1(z) = \ln z$ функциянинг турли аналитик давомларини аниқлайди — чунки, масалан, $f_2(-1) = \pi i$, $f_2^*(-1) = -\pi i$. Шундай қилиб, аналитик давомлар, ҳақиқатан ҳам, соҳалар занжирларининг танланишига боғлиқ бўлиши мумкин экан. Бу мисол орқали юқорида айтилган бошқа фикрларни ҳам яққол тасаввур қилиш мумкин. G соҳа G_1 ва G_2^* соҳаларнинг нуқталаридан ташкил топган бўлсин. Бу соҳа



106-чизма.

G_1 билан иккита бир-бирига боғлиқ бўлмаган $G_{1,1}$ ва $G_{1,2}^*$ умумий қисмларга эга бўлсин. $f_1(z) = \ln z$ функциянинг G_1 соҳадан $G_{1,1}$ ва $G_{1,2}^*$ орқали G га бевосита аналитик давомлари бир-бирдан фарқ қилади; буларнинг биринчиси учун $\ln |z| + i \arg z$ мусбат қийматларни, иккинчиси учун манфий қийматларни қабул қилади. Ниҳоят, $f_1(z) = \ln z$ функциянинг G_1 соҳадан G_1, G_2, G_2^*, G_1^* занжир орқали яна G_1 соҳага аналитик давомини текшириб кўрайлик. Бундай аналитик давом эттириш натижасида G_1 соҳада янгидан ҳосил қилинган функция, равшанки, бошлан-

гич $f_1(z)$ функциядан узгармас $2\pi i$ қўшилувчи билан фарқ қилади. Шундай қилиб, юқорида киритилган аналитик давом эттириш тушунчаси тўла аналитик функция тушунчасини киритишга имкон беради.

Таъриф. Фараз қилайлик, бир қийматли ва аналитик $f_1(z)$ функция G_1 соҳада берилган бўлиб, уни шу соҳа ташқарисига давом эттириш мумкин бўлсин. Бу функцияни барча имкони бор соҳалар занжири бўйича мумкин бўлган қадар аналитик давом эттирамиз. Мана шундай давом эттиришлар натижасида ҳосил қилинган қийматларни, битта $F(z)$ функциянинг қийматлари деб (яъни: $F(z) = f_k(z)$, агар $z \in G_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ бўлса) қараймиз. Бундай функцияни тўла аналитик функция дейилади. Уни ташкил қилган бир қийматли аналитик функцияларни ($f_1(z)$ нинг давомларини) эса $F(z)$ нинг тармоқлари дейилади.

Аналитик давом эттириш бажарилаётган занжирнинг барча қисмларини ҳам битта G соҳага бирлаштирамиз. Бу G соҳа $F(z)$ функциянинг мавжудлик соҳаси дейилади. Равшанки, $F(z)$ функцияни умумий мавжудлик G соҳасида эмас, балки унинг қисмларида ҳам текшириш мумкин; бу ҳолда $F(z)$ тўғридан-тўғри аналитик функция бўлади. Аналитик функциянинг бундай таърифи II бобда берилган таърифнинг умумлаштирилишидан иборатдир, чунки бу таъриф, кўп қийматли функциялар учун ҳам ўринлидир.

2. Аналитик функцияни элементларига асосан тузиш. Аналитик функцияларни тузишнинг содда усули Вейерштрасс теоремидан тавсия этилган. Бу ерда биз шу усулнинг қисқача мазмунини билан танишамиз. G_1 соҳада $f_1(z)$ аналитик функция берилган бўлсин. G_1 соҳанинг ихтиёрий a_1 нуқтаси атрофида $f_1(z)$ функцияни ушбу

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a_1)^n \quad (1)$$

даражали қаторга ёйиб, унинг яқинлашиш радиусини R_1 билан белгилаймиз. Хусусий ҳолда, R_1 чексизга тенг, яъни (1) қатор бутун комплекс текисликда яқинлашувчи булиши мумкин. Бу ҳолда (1) қаторнинг йиғиндиси барча текисликда аналитик функция бўлиб, у $f_1(z)$ функциянинг G_1 соҳа ташқарисига давомидан иборат бўлади. Аналитик давом эттиришнинг ягоналигига асосан, $f_1(z)$ ни давом эттириш воситаси билан (1) қаторнинг йиғиндисидан бошқа функция ҳосил қилиш мумкин эмас.

Мисол. Ушбу

$$1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{2}{3!} z^3 - \dots - \frac{n-1}{n!} z^n + \dots$$

қатор барча текисликда яқинлашувчи бўлади. Бунинг йиғиндисини $f(z)$ орқали белгилаймиз. Сўнгра,

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$$

қаторни текшираимиз. Маълумки, бу қаторнинг яқинлашиш радиуси 1 га тенг. Охирги қаторнинг йиғиндисини $\varphi(z)$ билан белгилаб, $f(z) \varphi(z)$ функцияни $f_1(z)$ орқали белгилаб оламиз, яъни:

$$f_1(z) = f(z) \cdot \varphi(z).$$

Бу формула билан ифодаланган $f_1(z)$ функция фақат $|z| < 1$ доирада аниқлангандир. Энди $f_1(z)$ функцияни ноль нуқта атрофида ($a = 0$) қаторга ёямиз. Бу қаторни йиғиндилари $f(z)$ ва $\varphi(z)$ булган қаторларни кўпайтириш натижасида ҳосил қиламиз.

$$1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \dots - \frac{n-1}{n!} = \frac{1}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

тенгликни эътиборга олсак, $f_1(z)$ учун

$$f_1(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

ёйилма ҳосил бўлади. Бу қатор барча текисликда яқинлашади. Шундай қилиб, берилган $f_1(z)$ функция учун барча текисликда ўринли бўлган ёйилма ҳосил қилдик.

Агар R_1 чексизга тенг бўлмаса, у бирор мусбат чекли сон бўлади. (1) қаторнинг яқинлашиш доираси ичида, марказдан фарқли бўлган бирор a_2 нуқтани танлаб олиб, унинг атрофида қуйидаги ёйилмани тузамиз:

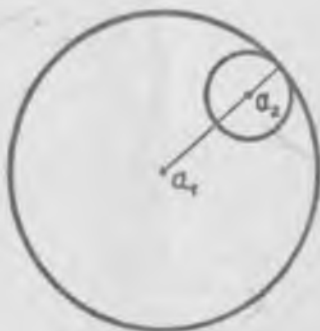
$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(2)}(z - a_2)^n, \quad (2)$$

бундаги

$$C_n^{(2)} = \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(a_2).$$

(2) қаторнинг яқинлашиш радиусини R_2 билан белгиласак, ушбу $R_2 > R_1 - |a_2 - a_1|$ тенгсизлик ўринлидир. Агар $R_2 = R_1 - |a_2 - a_1|$ бўлса, у ҳолда (2) қатор, функциянинг (1) қатор билан аниқланган нуқталардаги қийматларинигина беради. Бу ҳолда (1) ва (2) қаторлар

яқинлашиш доиралари айланаларининг уриниш нуқтаси, $f_1(z)$ функция орқали аниқланган функциянинг махсус нуқтаси бўлади (107-чизма). Агар $R_2 > R_1 - |a_2 - a_1|$ бўлса, у ҳолда R_2 радиусли доиранинг бир қисми R_1 радиусли доирадан ташқарига чиқиб кетади ва биз берилган яқинлашиш доира ташқарисига (a_1, a_2) радиус йуналиши буйича давом эттирилган $f_1(z)$ функцияга эга бўламиз (108-а чизма). Функциянинг биринчи элементи (1) ни имкони бор бўлган йуналишлар буйича давом эттирайлик; худди шундай янги элементлар ўз навбатида яна давом эттирилган бўлсин ва ҳ. к. Шу йўл билан (1) элементдан бошлаб, умуман айтганда, бора-бора кенгаяётган соҳада тўла аналитик $F(z)$ функцияга эга бўламиз. Айрим ҳолларда



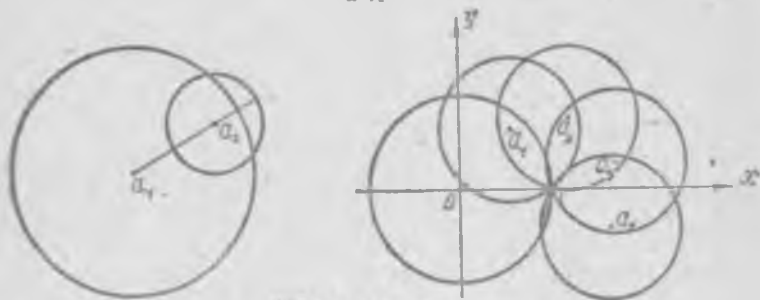
107-чизма.

(1) қаторни бирорта ҳам йўналиш бўйича давом эттириш мумкин бўлмай қолади.

Мисол. G_1 соҳа $|z| < 1$ доира ва

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{2^k}$$

бўлсин. $f_1(z)$ функция учун $z = 1$ нукта махсус нукта бўлади, чунки ҳақиқий $z = k$ лар учун, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$ бўлади. Дарҳақиқат,



108- а, б чизма.

$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{k=1}^n x^{2^k} = n$, демак, ихтиёрий n учун шундай $\delta(n)$ сон топи-

ладики, $x > 1 - \delta(n)$ бўлганда $\sum_{k=1}^n x^{2^k} > n - 1$ бўлади. Бун-

дан $f_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{2^k} > n - 1$, сўнгра ушбунни ёза оламиз:

$$f_1(z) = z^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (z^2)^{2^k} = z^2 + f_1(z^2),$$

бундан $z^2 = 1$, яъни: $z = \sqrt[2]{1}$ ($z = \pm 1$) нукталар ҳам $f_1(z)$ функция учун махсус нукталар бўлиши келиб чиқади. Худди юқоридагига ўхшаш

$$f_1(z) = z^2 + z^{2^2} + f_1(z^{2^2}), \dots, f_1(z) = z^2 + z^{2^2} + \dots + z^{2^n} + f_1(z^{2^n}),$$

демак, $z = \sqrt[2^n]{1}$ нукталар ҳам махсус нукталардир. Бу нукталар $|z| = 2$ айлана ичига чизилган 2^n бурчакнинг учларидир. Шундай қилиб, $f_1(z)$ функция махсус нукталарнинг тўплами $|z| = 1$ айланада зич тўпландир. Шу сабабли $f_1(z)$ функцияни ҳеч қайси йўналиш бўйича давом эттириш мумкин эмас. Бундай ҳолларда G_1 соҳани $f_1(z)$ функциянинг мавжудлик соҳаси, G_1 нинг чегарасини эса $f_1(z)$ функциянинг табиий чегараси дейилади. $f_1(z)$ функцияни эса тула аналитик функция дейилади. Даражали қаторни ҳамма йўналишлар бўйича давом эттириб бўлмайди, чунки яқинлашиш доираси айланасида ка-

мида битта махсус нуқта борлиги сабабли, бу махсус нуқта янги яқинлашиш доираси ичига тушиши мумкин эмас. Демак, махсус нуқталар йўқ бўлган йўналишлар бўйича давом эттирилади.

Давом эттириш вақтида янги доира ёрдами билан яна бошланғич доирага ҳам тушиб қолиши мумкин. Масалан, 108-б чизмада бошланғич доира маркази координаталар бошида ва радиуси бирга тенг бўлган доирадир, шу билан бирга унинг айланасида бирдан-бир $z = +1$ махсус нуқта бор. Бошланғич элементни кетма-кет давом эттиришда бешинчи доира биринчиси билан умумий қисмга эга; бу қисм штрих билан кўрсатилган. Бу умумий қисмга тегишли бўлган бошланғич яқинлашиш доира нуқталарида янги даражали қаторнинг қийматлари, бошланғич даражали қаторнинг қийматлари билан бир хил бўлиши ҳам мумкин, бўлмаслиги ҳам мумкин. Биринчи ҳолда, функция бир қийматли, иккинчи ҳолда эса кўп қийматли бўлади.

Кўп қийматли функцияларни геометрик тасвир қилиниши учун унинг элементлари яқинлашиш доираларидан Риман сирти ясаш мумкин. Бу сиртда функция бир қийматли бўлади. Бу сиртнинг қандай ясалишини элементар кўп қийматли функциялар воситаси билан III бобда кўрганмиз.

2-§. Симметрия принципи

Аввалги параграфда биз G_1 ва G_2 соҳалар умумий қисмга эга бўлган ҳолда, буларнинг биридан иккинчисига аналитик давом эттириш тушунчасини аниқладик. Энди биз бир хусусий ҳолда, яъни соҳалар умумий қисмга эга эмас, балки умумий чегарага эга бўлганда, бу аналитик давом эттиришни бажарадиган битта амалий усулни кўрсатамиз. Шу мақсадда, аввал узлуксиз давом эттириш принципи ёки Риман номи билан юритиладиган теоремани исбот қиламиз.

Теорема. Агар $f_1(z)$ ва $f_2(z)$ функциялар умумий нуқталарга эга бўлмаган G_1 ва G_2 соҳаларда аналитик бўлиб бу соҳаларнинг чегаралари умумий C қисмга эга булса ва бундан ташқари $f_1(z)$ ва $f_2(z)$ функциялар мос равишда $G_1 + C$ ва $G_2 + C$ да узлуксиз ва C да бир-бирига тенг булса, у ҳолда $f_2(z)$ функция $f_1(z)$ функциянинг G_2 соҳага бевосита аналитик давомидир, бошқача айтганда бу функциялар биргаликда $G_1 + C + G_2$ соҳада битта $F(z)$ аналитик функцияни аниқлайди.

Исбот. Теореманинг шартига кўра

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & G_1 \text{ да,} \\ f_1(z) = f_2(z), & C \text{ да,} \\ f_2(z), & G_2 \text{ да} \end{cases}$$

функция $G = G_1 + C + G_2$ соҳада узлуксиздир; бу функциядан G да ётувчи ихтиёрий ёпиқ Γ контур бўйлаб олинган интегралнинг нолга тенглигини кўрсатамиз. Агар Γ бутунлай G_1 ёки G_2 га тегишли бўлса, бу интеграл Коши теоремасига асосан нолга тенгдир. Агар Γ контур G_1 ва G_2 га тегишли бўлса, у ҳолда Γ_1 ва Γ_2 орқали Γ нинг мос равишда G_1 ва G_2 да ётувчи қисмларини ҳамда γ орқали C нинг Γ ичида ётувчи қисмини белгилаймиз (109-а чизма).

Коши теоремасига асосан:

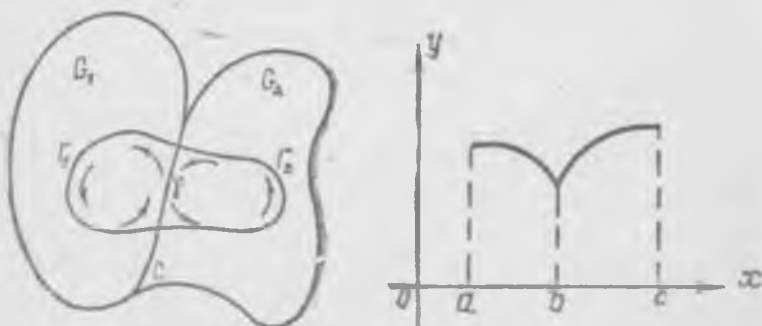
$$\oint_{\Gamma_1+\gamma} F(z) dz = 0, \quad \oint_{\Gamma_2+\gamma} F(z) dz = 0.$$

Бу тенгликни қўшиб,

$$\oint_{\Gamma_1+\gamma} F(z) dz + \oint_{\Gamma_2+\gamma} F(z) dz = \oint_{\Gamma_1+\Gamma_2} F(z) dz = \oint_{\Gamma} F(z) dz = 0$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан Морера теоремасига асосан $F(z)$ функциянинг G соҳада аналитиклиги келиб чиқади, яъни $f_2(z)$ функция $f_1(z)$ функциянинг аналитик давомидир.

Бундай теорема ҳақиқий соҳада, умуман, нотўғридир: агар иккита ҳақиқий узгарувчили $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар қўшни (a, b) ва (b, c) интервалларда дифференциаланувчи бўлиб, бу интервалларнинг умумий b нуқтасида узлуксиз ва тенг бўлсалар, бу функцияларни бирлаштириш натижасида ҳосил бўлган $F(x)$ функция (a, c) интервалда дифференциаланувчи бўлмаслиги ҳам мумкин. Масалан, қуйидаги графиги 109-б чизмада берилган $f(x)$ функция учун b бурчак нуқта бўлгани сабабли функциянинг бу нуқтада ҳосиласи мавжуд эмас.



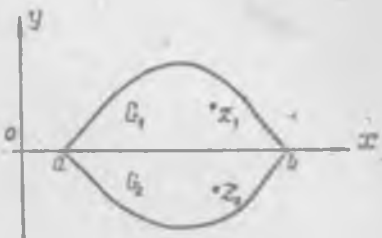
109-чизма.

Бунга $y = |x|$ функция ҳам мисол бўлади.

Симметрия принципи (Б. Риман ва Г. Шварц принципи). Агар $f(z)$ функция G_1 соҳада аналитик бўлиб, бу соҳа чегарасининг бир қисми қандайдир айлана γ ёйидан (ёки тўғри чизиқ γ кесмасидан) иборат бўлса, шу билан бирга $f_1(z)$ функция γ да узлуксиз бўлиб, ҳақиқий қийматларни қабул

қилса, у ҳолда ду функция γ орқали аналитик давом этади; $f_1(z)$ функция бу аналитик давомининг G_1 ташқарисидаги қийматлари γ га нисбатан симметрик бўлган нуқталарда $f_1(z)$ га қушма бўлади.

Исбот. Аввал γ ҳақиқий ўқнинг бирор (a, b) кесмасидан иборат бўлсин, дейлик. Аниқлик учун G_1 соҳа шу (a, b) кесмадан юқорида ётади, деб фараз қиламиз. Ҳақиқий ўққа нисбатан G_1 соҳага симметрик бўлган G_2 соҳа ясаймиз (110-чизма) ҳамда шу соҳада $f_2(z)$ функцияни қуйидаги қонда билан аниқлаймиз: бу соҳанинг ҳақиқий ўққа нисбатан z_1 нуқтага симметрик бўлган ҳар бир z_2 нуқтасида



110-чизма.

$$f_2(z_2) = \overline{f_1(\overline{z_2})} \quad \text{бўлсин, } z_2 = \overline{z_1} \quad (z_1 \in G_1)$$

бўлгани учун, олдинги тенгликни $f_2(z_2) = \overline{f_1(\overline{z_1})}$ кўринишда ёзса бўлади. Бундай хилда тузилган $f_2(z)$ функция G_2 соҳада аналитик бўлади. Ҳақиқатан, z_1 ва z_2 га бир вақтда берилган орттормани Δ орқали белгилаймиз; Δz_2 ва Δz_1 лар ўзаро қушма бўлади, яъни $\Delta z_2 = \overline{\Delta z_1}$;

$$\frac{f_2(z_2 + \Delta z_2) - f_2(z_2)}{\Delta z_2} = \frac{\overline{f_1(\overline{z_2 + \Delta z_2})} - \overline{f_1(\overline{z_2})}}{\Delta z_2} = \overline{\left(\frac{f_1(\overline{z_2} + \overline{\Delta z_2}) - f_1(\overline{z_2})}{\overline{\Delta z_2}} \right)},$$

бундан:

$$\lim_{\Delta z_2 \rightarrow 0} \frac{f_2(z_2 + \Delta z_2) - f_2(z_2)}{\Delta z_2} = \lim_{\Delta z_2 \rightarrow 0} \overline{\left(\frac{f_1(\overline{z_2} + \overline{\Delta z_2}) - f_1(\overline{z_2})}{\overline{\Delta z_2}} \right)} = \overline{f_1'(\overline{z_2})}$$

ёки

$$f_2(z_2) = \overline{f_1'(\overline{z_2})}.$$

Шундай қилиб, $f_2(z)$ функция G_2 соҳанинг ҳар бир нуқтасида чекли ҳосилага эга экан, демак, $f_2(z)$ функция G_2 соҳада аналитик. (a, b) кесмада $f_1(z)$ функциянинг қийматлари ҳақиқий бўлгани учун бу кесмада $f_1(z)$ ва $f_2(z)$ функциялар бир хил қиймаглар қабул қилади. Демак, исботланган теоремага асосан $f_2(z)$ функция $f_1(z)$ функциянинг (a, b) кесма орқали аналитик давомидир, яъни γ ҳақиқий ўқнинг (a, b) кесмасидан иборат бўлган ҳолда симметрия принципи исботланди.

Агар γ ҳақиқий ўқдан фарқли тўғри чизиқнинг кесмасидан иборат бўлса, $z' = az + b$ чизиқли алмаштириш ёрдами билан ҳақиқий ўқнинг кесмасига айлантиришимиз мумкин.

Агар γ бирор айлананинг ёйидан иборат бўлса у ҳолда уни $z_1 = \frac{az + b}{cz + d}$ каср чизиқли алмаштириш ёрдами билан ҳақиқий

Ўқнинг (a, b) кесмасига ўтказиш мумкин. Маълумки, бундай алмаштиришда γ ёйга нисбатан симметрик бўлган нуқталар (a, b) кесмага нисбатан симметрик бўлган нуқталарга ўтади. Демак, γ га нисбатан симметрик бўлган нуқталарда $f_1(z)$ билан унинг аналитик давомининг қийматлари ўзаро қўшма бўлади. Шундай қилиб, симметрия принципи тула исбот бўлди.

Бу принцип конформ акслантиришлар назариясида жуда кўп татбиқ қилинади. Ҳақиқатан, чегарасининг бир қисми қандайдир айлананинг γ ёйдан иборат шундай G_1 соҳа берилган бўлиб, γ га нисбатан G_1 га симметрик бўлган G_2 соҳа G_1 да бутунлай ташқарида ётсин. Фараз қилайлик, G_1 соҳа юқори ярим текисликка акслантирилаётган бўлиб, бу акслантиришни $w = f_1(z)$ функция бажараётган бўлсин. Бу ҳолда, симметрия принципига асосан, γ га нисбатан ўзаро симметрик бўлган нуқталарда $f_1(z)$ функцияга ўзаро қўшма қийматларни бериб, бу функциянинг γ орқали аналитик давомини ҳосил қиламиз.

$w = f_1(z)$ ёрдами билан акслантиришда γ ёйнинг акси w текислик ҳақиқий ўқининг бирор кесмасидан иборат бўлади. Шундай қилиб, γ орқали аналитик давом эттирилган $w = f_1(z)$ функция $G = G_1 + G_2$ γ соҳани, w текислиكنинг ҳақиқий ўқдан γ нинг аксидан ташқари нуқталарни чиқариб ташлагандан сўнг, қолган қисмига конформ акслантиради.

Мисол. Симметрия принципига асосан ушбу

$$y = 0, -\frac{\pi}{2} < x < 0$$

кесма бўйича қирқилган

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

йўлни юқори ярим текисликка акслантирилсин.

Еч и ш. III бобдан бизга маълумки, $t = \sin z$ функция

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y > 0$$

ярим йўлни юқори ярим текисликка акслантиради, шу билан бирга z текисликдаги $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ ва $(0, \frac{\pi}{2})$ кесмаларга мос равишда t текисликда $(-1, 0)$ ва $(0, 1)$ кесмалар тўғри келади. а'нз функцияни юқори

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y > 0$$

ярим йўлдан $(0, \frac{\pi}{2})$ кесма орқали давом эттирамиз. $\sin z$ функция барча текисликда аналитик бўлгани учун, унинг $(0, \frac{\pi}{2})$ кесма орқали давом

яца $\sin z$ бўлади. Симметрия принцигига асосан, $t = \sin z$ функция

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y < 0$$

қуйи ярим йўлни t текислигининг қуйи ярмига акслантиради. Шундай қилиб, $t = \sin z$ функция $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ кесма бўйича қирқилган

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

йўлни, ҳақиқий ўқи $(-\infty, 0)$ ва $(1, \infty)$ кесмалар бўйича қирқилган барча t текисликка акс эттиради. Охирги текислик эса

$$\zeta = \frac{t-1}{t}, w = \sqrt{\zeta} = \sqrt{\frac{t-1}{t}}$$

функция ёрдами билан юқори ярим текисликка акслантирилади. Демак, изланаётган функция қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$w = \sqrt{\frac{\sin z - 1}{\sin z}}$$

3-§. Конформ акслантиришнинг умумий принциплари

1. Аналитик функция ёрдамида соҳани акслантириш. $w = f(z) \neq \text{const}$ функция G соҳада бир қийматли ва аналитик бўлсин. Бу функциянинг G соҳада қабул қиладиган қийматларининг D тўплами ҳам соҳа бўлишини кўрсатамиз. Бунинг учун ҳар бир $w_0 = f(z_0) \in D$ нуқта ўзининг бирор атрофи билан D га тегишли бўлишини ва D нинг исталган икки нуқтасини D дан чиқиб кетмайдиган узлуксиз эгри чизик билан гуташтириш мумкинлигини кўрсатиш керак.

G соҳада шундай $C_0: |z - z_0| \leq \rho$ ёпиқ доира чизамизки, бу доира G га тегишли бўлиб, w_0 қийматни функция ўша доиранинг фақат z_0 нуқтасида қабул қилсин. Бунга ҳар доим ρ ни етарли кичик қилиб олиш натижасида эришиш мумкин, чунки акс ҳолда z_0 нуқтанинг ихтиёрий атрофида шундай нуқталар мавжуд бўлар эдики, бу нуқталарда $f(z)$ функция битта w_0 қийматни қабул қиларди, ягоналик теоремасига асосан бунинг бўлиши мумкин эмас ($f(z) \neq w_0$).

$\min_{|z-z_0|=\rho} |f(z) - w_0|$ ни μ орқали белгилаб оламиз; $f(z)$ узлуксиз ва $|z - z_0| = \rho$ айланада w_0 га тенг бўлмагани учун $\mu > 0$ бўлади. K_0 деб $|w - w_0| < \mu$ доирани белгилаймиз ва уни D га тегишли эканини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, $f(z) - w_0 = 0$ тенглама C_0 нинг ичида камида битта, чунончи $z = z_0$ илдизга эга (бу илдизнинг тартиби қанча бўлса, ўзини ҳам шунча ҳисоблаш керак): $w' \in K_0$ ва w_0 дан фарқли ($w' \neq w_0$) бўлсин; $|w' - w_0| < \mu$ ҳамда $|z - z_0| = \rho$ айланада $|f(z) - w_0| \geq \mu$ бўлгани сабабли, Руше теоремасига кўра бу айланадаги $|f(z) - w_0| + (w_0 - w') = 0$ тенглама илдизларининг сони $f(z) - w_0 = 0$

тенглама илдиэларининг сонига тенг, яъни камида битта илдиэга эга. Ўша илдиэлардан биттасини z' орқали белгиласак $f(z') = w'$ бўлади, яъни K_0 доиранинг ҳар бир w' нуқтаси $f(z)$ функциянинг C_0 ичида қабул қиладиган қийматидан иборат бўлар экан. Демак, K_0 доира D соҳага тегишли бўлади.

$w_1 = f(z_1)$ ва $w_2 = f(z_2) \in D$ тўпلامнинг ихтиёрий иккита нуқтаси бўлсин. z_1 ва z_2 нуқталар G га тегишли бўлгани учун: бу соҳанинг ичида z_1 ва z_2 ларни туташтирувчи узлуксиз, $z = \lambda(t)$, $\alpha < t < \beta$ ($\lambda(\alpha) = z_1$, $\lambda(\beta) = z_2$) кўринишдаги γ эгри чизиқ мавжуддир. Равшанки, у ҳолда $w = f(z) = f[\lambda(t)]$ ($\alpha < t < \beta$) функция графиги ҳам D тўпламга тегишли ва w_1 , w_2 ($w_1 = f(z_1) = f[\lambda(\alpha)]$, $w_2 = f(z_2) = f[\lambda(\beta)]$) нуқталарни туташтирувчи узлуксиз эгри чизиқ бўлади.

Юқоридаги натижаларни қуйидаги теорема сифатида таърифлаш мумкин.

Теорема. Айнан узгармас сонга тенг бўлмаган ($f(z) \neq \text{const}$) аналитик функция соҳани соҳага акслантиради.

2. Шварц леммаси. Агар $f(z)$ функция бирлик доирада аналитик бўлиб, $f(0) = 0$, $|f(z)| \leq 1$ шартларни қаноатлантирса, у ҳолда $|f'(0)| \leq 1$, $|f(z)| < |z|$ шартларни ҳам қаноатлантиради. Шу билан бирга $|f'(0)| = 1$ ёки $|f(z_0)| = |z_0|$ тенглик доиранинг камида битта нуқтасида бажарилса, $f(z)$ функция

$$f(z) = e^{i\alpha} z \quad (\alpha - \text{хақиқий сон})$$

кўринишдаги чизиқли функция бўлади.

Исбот. $f(z)$ функцияни $|z| < 1$ доирада даражали қатор билан ифодалашимиз мумкин, яъни:

$$f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots, \quad c_0 = f(0) = 0,$$

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z} = c_1 + c_2 z + \dots$$

функцияни текшираимиз. Бу функция $|z| < 1$ да аналитик бўлиб $\varphi(0) = c_1 = f'(0)$ шартни қаноатлантиради. $\varphi(z)$ функциянинг $|z| < 1$ доиранинг ихтиёрий z' нуқтасидаги қийматини аниқлаймиз. Агар ρ сон $|z'| < \rho < 1$ шартни қаноатлантирса, модулнинг максимум принципига асосан,

$$|\varphi(z')| < \max_{|z|=\rho} |\varphi(z)|$$

бўлади. Лекин

$$\max_{|z|=\rho} |\varphi(z)| = \max_{|z|=\rho} \left| \frac{f(z)}{z} \right| < \frac{1}{\rho},$$

чунки $|f(z)| \leq 1$. Бундан

$$|\varphi(z')| \leq \frac{1}{\rho}.$$

z' ни узгарттирмай, ρ ни 1 га интилтирсак,

$$|\varphi(z')| < 1$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Хусусий ҳолда $z' = 0$ учун

$$|\varphi(0)| = |f'(0)| \leq 1$$

ва $z' = z_0 \neq 0$ учун

$$|\varphi(z_0)| = \left| \frac{f(z_0)}{z_0} \right| \leq 1, \text{ яъни } |f(z_0)| \leq |z_0|.$$

Агарда $|f(z_0)| = |z_0|$, яъни $|\varphi(z_0)| = 1$ бўлса, у ҳолда максимум принцинга кура, бирлик доиранинг бирор z' нуқтасида $|\varphi(z)|$ бирга тенг бўлган максимумга эга булар эди. Бу фақат $\varphi(z) = \text{const} = e^{iz}$ учун ўринли (чунки $|\varphi(z)| = 1$. Демак, $f(z) = e^{iz}$.

Хулоса. Шварц леммасининг геометрик маъноси шундан иборатки, бу лемма шартларини қаноатлантирувчи $w = f(z)$ функция ёрдами билан акслантириш натижасида ҳар бир z нуқтанинг образи ёки унга кура координаталар бошига яқинроқ, ёки акслантириш координаталар боши атрофида айланишдан иборат бўлади.

3. Функция бир варақли бўлишининг локал (маҳаллий) критерийси.

Бу пунктда биз ёпиқ $C_0: |z - z_0| \leq \rho$ доирада $w = f(z)$ акслантиришни чуқурроқ урганамиз. Фараз қилайлик, $f'(z) = 0, \dots, f^{(p-1)}(z_0) = 0, f^{(p)}(z_0) \neq 0$ ($p > 2$) бўлсин. $f'(z)$ фақат z_0 нуқтадагина эмас, балки C_0 нинг бошқа нуқталарида ҳам нолга айланиши мумкин: лекин z_0 нуқта $f'(z)$ функция нолларининг лимит нуқтаси бўлмагани сабабли (акс ҳолда $f'(z) = 0, f(z) = \text{const}$ бўлади), ρ ни етарли кичик қилиб олиш мумкинки, C_0 доиранинг z_0 дан фарқли бўлган нуқталарида $f'(z)$ нолга айланмайди. Бу ерда ҳам 1-пунктдаги белгилашларни сақласак, ихтиёрий $w' \neq w_0, |w' - w_0| < \mu$ учун $f(z) - w' = 0$ тенглама илдизларининг сони $f(z) - w_0 = 0$ тенглама илдизларининг сонига тенг бўлади. Охирги тенгламанинг p та илдизи бор (z_0 сон p каррали илдиз); шу сабабли $f(z) - w' = 0$ тенглама ҳам p та илдизга эга бўлиб, улар оддий (карралимас) бўлади, чунки $z' \neq z_0$ (акс ҳолда $w' = f(z') = f(z_0) = w_0$ булар эди, ρ нинг танланишига асосан бундай бўлиши мумкин эмас). Демак, $f'(z') \neq 0$. Шундай қилиб, C_0 нинг ичида $f(z) - w' = 0$ тенглама p та ҳар хил $z_1, z_2, \dots, z_p$ илдизларга эга, яъни C_0 атрофда бир-биридан фарқли p та нуқта мавжуд бўлиб, бу нуқталарда $f(z)$ функция битта w' қийматни қабул қилади.

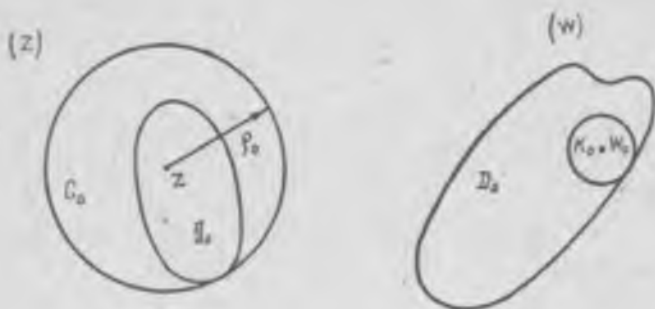
Бундан, G соҳанинг камида битта z_0 нуқтасида ҳосиласи нолга тенг бўлган $f(z)$ функция бу соҳада бир варақли бўлиши мумкин эмас деган хулосага келамиз. Бошқача айтганда, агар $f(z)$ функция G соҳада бир варақли бўлса, уша соҳанинг бирорта ҳам нуқтасида унинг ҳосиласи нолга айланмайди.

K_0 доирада $z = \varphi(w)$ функцияни даражали қаторга ёямиз:

$$z = \varphi(w) = c_0 + c_1(w - w_0) + \dots + c_n(w - w_0)^n + \dots \quad (3)$$

$$(|w - w_0| < r_0).$$

Бу қаторнинг c_n коэффициентларини аниқмас коэффициентлар усулидан фойдаланиб ҳисоблашимиз мумкин; бунинг учун $w - w_0 = f(z) - (z_0)$ ўрнига коэффициентлари маълум деб ҳисобланган



111-чизма.

$$f(z) - f(z_0) = a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

қаторни қўйиш керак. Масалан,

$$c_0 = z_0, \quad c_1 = \frac{1}{a_1}, \dots$$

Энди $f'(z_0) = \dots = f^{(p-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(p)}(z_0) \neq 0 \quad (p \geq 2)$ бўлсин. Бу ҳолда $|z - z_0| < \rho$ доирада яқинлашувчи бўлган ёйилма қуйидагича бўлади:

$$f(z) = a_0 + a_p(z - z_0)^p + \dots \quad (a_0 = f(z_0) = w_0, \quad a_p = \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!} \neq 0) \quad (4)$$

ёки

$$f(z) = a_0 + a_p(z - z_0)^p [1 + \alpha(z)],$$

бундаги

$$\alpha(z) = \frac{a_{p+1}}{a_p}(z - z_0) + \frac{a_{p+2}}{a_p}(z - z_0)^2 + \dots$$

функция $|z - z_0| < \rho_1$ доирада аналитикдир. Фараз қилайлик, ρ_1 ($0 < \rho_1 < \rho$) шундай бўлсинки, $|z - z_0| < \rho_1$ доирада $|\alpha(z)| < 1$

бўлсин; бу ҳолда $\beta(z) = [1 + \alpha(z)]^{\frac{1}{p}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/p}{n} [\alpha(z)]^n$ функ-

ция $|z - z_0| < \rho$ доирада бир қийматли ва аналитик бўлиб, $\beta(z_0) = 1$ шартни қаноатлантиради. Шу сабабли $\gamma(z) = (z - z_0)\beta(z)$ функция ҳам $|z - z_0| < \rho_1$ доирада бир қийматли ва аналитик бўлиб,

$\gamma'(z_0) = 1 \neq 0$ бўлади. Равшанки, $f(z)$ функция $\gamma(z)$ орқали қуйидагича ифодаланади:

$$w = f(z) = a_0 + a_p |\gamma(z)|^p. \quad (5)$$

Ушбу

$$\zeta = \gamma(z) = (z - z_0) + b_2 (z - z_0)^2 + \dots, \quad (6)$$

функцияни текширамыз ($\gamma(z)$ функция $|z - z_0| < r_1$ доирада аналитик бўлгани учун уни қатор билан ифодалаб ёздик).

Бунга $f'(z_n) \neq 0$ ҳолдаги $w = f(z)$ функция учун аниқланган натижаларни татбиқ қилишимиз мумкин. Демак, $|z - z_0| < r$ доирада z_0 нуқтани ўз ичига олувчи шундай g_0 соҳа мавжудки бу соҳа (6) функция воситаси билан бирор $|\zeta| < r_1$ дан иборат K_0 доирага ўзаро (икки ёқлама) бир қийматли ва конформ акслантирилади $\zeta = \gamma(z)$ функцияга тескари бўлган $z = \delta(\zeta)$ функция $|\zeta| < r_1$ доирада қуйидаги ёйилмага эга бўлади:

$$z = \delta(\zeta) = \zeta + c_2 \zeta^2 + \dots \quad (7)$$

(4) ёйилмани ҳосил қилиш учун аввал (6) алмаштиришни бажариб, сўнгра K_0 доирада

$$w = a_0 + a_p r^p \left(a_0 = w_0, a_p = \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!} \neq 0 \right) \quad (8)$$

алмаштиришни утказиш етарлидир.

(8) алмаштириш ўзаро бир қийматли бўлмайди; чунки K_0 доиранинг бир-биридан фарқли бўлган p та $\zeta, \zeta e^{\frac{2\pi i}{p}}, \dots, \zeta e^{\frac{2\pi i(p-1)}{p}}$ ($\zeta \neq 0$) нуқтаси битта $w = a_0 + a_p r^p$ нуқтага утади. Лекин доиранинг образини p варақли Риман сирти, яъни маркази $a_0 = w_0$ нуқтада бўлган p варақли доира сифатида ифодаланса, бу ерда ҳам тасвирнинг ўзаро бир қийматлилигига эришамиз. Бу p варақли доирани қуйидагича яшаш мумкин. K_0 доирани ўзаро тенг бўлган $2p$ та секторга бўламиз:

$$S_j: (j-1)\frac{\pi}{p} < \theta < j\frac{\pi}{p}, 0 < r < r_1, (j = 1, 2, \dots, 2p);$$

ҳар бир сектор учун (8) алмаштиришни бажарамиз. Натижада юқори ва қуйи D_j ярим доираларнинг $2p$ та нусхасини ҳосил қиламиз: $D_j: (j-1)\pi < \varphi < j\pi, 0 < r < r_1$ (φ ва r —координаталари боши w_0 нуқтада бўлган кутб координаталардир.) Энди ҳар бир D_j ярим доирани умумий $\varphi = j\pi$ ($0 < r < r_1$) радиус бўйича D_{j+1} ($j = 1, 2, \dots, 2p-1$) ярим доира билан улаш керак. Охириги D_{2p} ярим доира умумий $\varphi = 0$ ($0 < r < r_1$) радиус бўйича биринчи ярим доира билан уланади. (7) ва (8) формулалардан дарҳол

Функциянинг бир варақли булиши учун $f'(z) \neq 0$ ($z \in G$) шарт фақат зарурий шарт бўлиб, у етарли шарт бўлмайди. Масалан, e^z функциянинг ҳосиласи $(e^z)' = e^z$ ҳеч бир нуқтада нолга тенг эмас, e^z эса $z + 2k\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) нуқталарда бир хил қиймат қабул қилинади.

Аммо, $f'(z_0) \neq 0$ бўлса, z_0 нуқтанинг шундай $C_0: |z - z_0| \leq \rho_0$ атрофини тузиш мумкинки, бу атрофда $f(z)$ бир варақли бўлади.

Ҳақиқатан, z_0 нуқтанинг бирор $|z - z_0| < r$ атрофида $f(z)$ функциянинг ёйилмаси

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

бўлсин ($a_1 = f'(z_0) \neq 0$). Шу атрофда

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

қатор яқинлашувчи бўлади, демак, $\rho < r$ бўлганда $\sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| \rho^{n-1}$

қатор ҳам яқинлашувчи бўлиб, $\rho \rightarrow 0$ да унинг йиғиндиси нолга

интилади. ρ_0 ни ($0 < \rho_0 < r$) шундай танлаб олаемизки, $\sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| \rho_0^{n-1} <$

$< |a_1|$ тенгсизлик бажарилсин. У ҳолда $|z - z_0| < \rho_0$ ёпиқ доирада ётувчи ихтиёрий иккита z_1 ва z_2 ($z_1 \neq z_2$) нуқталар учун қуйидаги ифода ўринли бўлади:

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(z_1 - z_0)^n - (z_2 - z_0)^n] \right| = \\ &= |a_1(z_1 - z_2) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n [(z_1 - z_0)^{n-1} + \dots + (z_2 - z_0)^{n-1}](z_1 - z_2)| \geq \\ &> |z_1 - z_2| \left\{ |a_1| - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| [|z_1 - z_0|^{n-1} + \dots + |z_2 - z_0|^{n-1}] \right\} > \\ &> |z_1 - z_2| \left\{ |a_1| - \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| \rho_0^{n-1} \right\} > 0, \end{aligned}$$

яъни $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Шу билан $f(z)$ функциянинг ёпиқ $|z - z_0| < \rho_0$ доирада бир варақли бўлиши исботланди.

4. Аналитик функцияга тескари функция

$w = f(z)$ функция чексиз узоқлашган нуқтани уз ичига олмаган G соҳада бир қийматли, аналитик ва бир варақли бўлсин. Исботланганига асосан, бу функция G соҳами бирор D соҳага акслантиради. Қуйида бу функцияга тескари $z = \varphi(w)$ функциянинг ҳам D соҳада бир қийматли, аналитик ва бир варақли бўлишини кўрсатамиз.

а) $z = \varphi(w)$ тескари функциянинг бир қийматлилиги $w = f(z)$ туғри функциянинг бир варақлилигидан келиб чиқади.

Ҳақиқатан ҳам, агар $w = f(z)$ бир варақли бўлганида $z = \varphi(w)$ бир қийматли бўлмаса, яъни $D \ni w_0$ битта нуқтада $\varphi(w)$ функция узаро тенгмас икки $z_1 = \varphi(w_0)$, $z_2 = \varphi(w_0)$ ($z_1 \neq z_2$) қийматлар қабул қилса, $f(z_1) \neq f(z_2)$ бўлиши керак, бу эса $f(z)$ нинг бир варақлилигига зиддир. Демак, $z = \varphi(w)$ функция D соҳада бир қийматли.

б) Юқоридагига ўхшаш $f(z)$ нинг бир қийматлилигидан $\varphi(w)$ нинг бир варақлилиги келиб чиқади. Тескарисини фараз қилсак, яъни $f(z)$ бир қийматли бўлганда, $\varphi(w)$ бир варақли бўлмасин, бошқача айтганда $w_1 \neq w_2$ учун $\varphi(w_1) = \varphi(w_2) = z_0$ десак у ҳолда $G \ni z_0$ битта нуқтада бир қийматли $f(z)$ функция икки узаро тенгмас, $w_1 = f(z_0)$ ва $w_2 = f(z_0)$ қийматлар қабул қилиши керак. Бунинг бўлиши мумкин эмас. Демак, $z = \varphi(w)$ функция D соҳада бир варақли.

в) Энди $\varphi(w)$ функциянинг ихтиёрий $D \ni w_0$ нуқтада узлуксиз бўлишини кўрсатамиз, $\varphi(w_0) = z_0$ бўлсин; 1-пунктдагидай z_0 нуқта учун $C_0: |z - z_0| < \rho$ ёпиқ доирада тузамиз. Бу ҳолда $K_0: |w - w_0| < \mu$, $\mu = \min_{|z - z_0| < \rho} |f(z) - w_0| > 0$, доирага тегишли ҳар бир

w' нуқта, $f(z)$ функциянинг C_0 ичида ёғувчи бирор f' нуқтадаги қийматидан иборат бўлади, яъни агар $w' \in K_0$ бўлса, $f' = \varphi(w')$ нуқта C_0 нинг ичида ётади. Ихтиёрий мусбат ϵ сон учун $\rho < \epsilon$ сонни танлаб олсак, бу сонга мос $\mu = \mu(\rho)$ учун $|w' - w_0| < \mu$ бўлганда $|\varphi(w') - \varphi(w_0)| < \rho$ бўлади. Шу билан D соҳада $\varphi(w)$ нинг узлуксизлиги исбот бўлди.

г) Ниҳоят, $\varphi(w)$ функциянинг ихтиёрий $D \ni w_0$ нуқтада дифференциалланувчи бўлишини кўрсатамиз. $\varphi(w_0) = z_0$ бўлсин, $w \neq w_0$ учун, $w \rightarrow w_0$ да $\varphi(w) = z \rightarrow \varphi(w_0) = z_0$ бўлади ($z \neq z_0$), демак,

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

($f(z)$ бир варақли бўлгани учун $f'(z) \neq 0$). Шундай қилиб, юқорида айтилган фикр тўла исботланди. Бу натижадан фойдаланиб, бир қийматли аналитик (умуман айтганда, бир варақлимас) $w = f(z)$ функцияга бирор $w_0 = f(z_0)$ нуқта атрофида (яъни локал) тескари бўлган $z = \varphi(w)$ функцияни текшираемиз. Аввало $f'(z_0) \neq 0$ бўлсин; бу ҳолда 3-пунктда кўрсатилганига асосан, шундай $C_0: |z - z_0| < \rho_0$ доира мавжуддирки, бу доирада $f(z)$ бир варақли бўлади. Ундан ташқари бу доира $w = f(z)$ функция воситаси билан w текисликдаги w_0 нуқтани ўз ичига олувчи бирор D_0 соҳага узаро бир қийматли ва конформ аксланади.

Юқорида исбот қилганимизга кўра тескари $z = \varphi(w)$ функция D_0 соҳада бир қийматли, аналитик ва бир варақли бўлиб, $|w - w_0| < r_0$ ($r_0 - w_0$ нуқтадан D_0 соҳанинг чегарасигача бўлган масофа) билан ифодаланувчи Λ_0 доирани (z) текисликдаги z_0 нуқтани ўз ичига олувчи g_0 соҳага узаро бир қийматли ва конформ акслантиради (111-чизма).

w_0 нуқта атрофида $w = f(z)$ функцияга тескари бўлган $z = \varphi(w)$ функция келиб чиқади. Чунончи, (8) формуладан

$$\zeta = \left(\frac{1}{a_p}\right)^{\frac{1}{p}} (w - w_0)^{\frac{1}{p}} \quad (9)$$

(бу ерда $\left(\frac{1}{a_p}\right)^{\frac{1}{p}}$ учун илдизнинг аниқ бир қийматини олиш мумкин: битта w га мос келувчи ζ нинг турли қиймаглари w_0 нуқтанинг айланиши натижасида ҳосил бўлади).

(9) ни (7) га қўйиб, қуйидаги тенгликни топамиз:

$$z = \varphi(w) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (w - w_0)^{\frac{n}{p}} \quad (A_n = c_n \left(\frac{1}{a_p}\right)^{\frac{n}{p}}, c_1 = 1). \quad (10)$$

$|w - w_0| < r_p^p$ да яқинлашувчи бўлган (10) ёйилма w_0 нуқта $z = \varphi(w)$ функция учун $p - 1$ тартибли алгебраик тармоқланиш нуқтаси бўлишини кўрсатади. Юқорида ясалган p варақли доира эса w_0 нуқта атрофидаги $\varphi(w)$ функция Риман сиртининг бўлагидир: бу булак (10) функция билан z текисликда жойлашган бир варақли g_0 соҳага акслантирилади.

Шундай қилиб, бу пунктда қуйидаги теоремани исботладик.

Теорема. Бир қийматли аналитик $w = f(z)$ функцин билан G соҳани акслантиришда ҳар бир $z_0 \in G$ нуқта учун бу нуқтани ўз ичига олган ва G да ётувчи g_0 соҳани кўрсатиш мумкинки, $f(z)$ функция g_0 ни маркази $w_0 = f(z_0)$ нуқтада бўлган бир варақли (агар $f'(z_0) \neq 0$ бўлса) ёки кўп варақли (агар $f'(z_0) = 0$ бўлса) доирага ўзаро бир қийматли акслантиради.

Изоҳ. Агар z_0 ёки $w_0 = f(z_0) \in \infty$ га тенг бўлиб қолса, $z' = \frac{1}{z}$ ёки $w' = \frac{1}{f(z)}$ алмаштиришлар ёрдами билан бу ҳолларни юқорида текширилган ҳолга келтириш мумкин.

5. Конформ акслантириш назариясининг асосий теоремаси. Биз G соҳада аналитик функция воситаси билан амалга ошириладиган турли конформ акслантиришларни ўргандик. Чунончи бу функция бир варақли бўлган ихтиёрий G соҳани бошқа бирор D соҳага ўзаро бир қийматли ва конформ (биринчи турдаги) акслантиришини аниқладик. Энди конформ акслантириш назариясига оид умумийроқ мулоҳазалар билан танишамиз. Шу муносабат билан қуйидаги теоремаларга эътиборни жалб этамиз. Ўз вақтида Д. Е. Меньшов томонидан тубандаги тескари теорема исботланган эди:

Кенгайтирилган текисликдаги бирор G соҳани бошқа бир соҳага ўзаро бир қийматли ва конформ (биринчи турдаги) акслантириш G соҳадаги бирор бир варақли аналитик функция ёрдамида бажарилади

Конформ акслантириш назариясининг асосий масаласи қуйидагидан иборат. (z) ва (w) текисликларда берилган иккита бир боғламли G ва D соҳаларнинг бирини иккинчисига конформ акслантирувчи ва G да аналитик бўлган $w = f(z)$ функцияни тузишдан иборат.

Бу масалани ҳал қилишда, умумийликка зиён келтирмай, соҳаларнинг битгасини, масалан, D ни бирлик доирадан иборат деб қарашимиз мумкин, чунки ихтиёрий иккита бир боғламли G_1 ва G_2 соҳаларнинг бирини иккинчисига конформ акслантириш учун буларнинг ҳар бирини бирлик доирага конформ акслантириш етарлидир. Дарҳақиқат, $w = f_1(z)$ ва $w = f_2(\zeta)$ функциялар G_1 ва G_2 соҳаларни $|w| < 1$ доирага ўзаро бир қийматли ва конформ акслантирсин. $w = f_2(\zeta)$ функцияга тескари функция $\zeta = \varphi(w)$ бўлсин. Бу ҳолда $\zeta = \varphi \circ f_1(z)$ функция G_1 соҳани G_2 соҳага ўзаро бир қийматли ва конформ акслантиради. Конформ акслантириш назариясининг асосида Риманинг қуйидаги теоремаси ётади; шунинг учун бу теоремани конформ акслантириш назариясининг асосий теоремаси дейиш мумкин.

Риман теоремаси (1851 йил). *Чегараси биттадан ортиқ нуқтага эга бўлган ихтиёрий бир боғламли G соҳани бирлик доирага конформ акслантириш мумкин, шу билан бирга бу акслантиришни чексиз кўп усуллар билан амалга оширса бўлади.*

Гарчанд биз бу теореманинг исботини келтирмасак ҳам, G соҳага қуйилган шартларнинг муҳимлигини курсатиб ўтамиз. Шунини қайд этиш зарурки, кўп боғламли соҳани бир боғламли соҳага (масалан, бирлик доирага) ўзаро бир қийматли ва ўзлуксиз акслантириш мумкин эмас. Фараз қилайлик, кўп боғламли G соҳани бир боғламли D соҳага шундай акслантириш мумкин бўлсин. G соҳада шундай ёпиқ C эгри чизиқ олампизки, C нинг ичида G соҳанинг ташқи ёки чегаравий нуқталари бор бўлсин (бундай эгри чизиқ ҳамма вақт мавжуд бўлади). Текширилаётган акслантириш C ни D да ётувчи бирор ёпиқ Γ эгри чизиққа ўтказадим. Агар D соҳа ичида Γ нинг барча нуқталарини ўзлуксиз равишда бирор $D \ni w_0$ нуқтага яқинлаштира борсак, акслантириш ўзлуксиз бўлгани учун C эгри чизиқ G нинг ичида қолиб, ўзлуксиз равишда G нинг бирор нуқтасига тортила бориши керак, лекин бундай бўлиши мумкин эмас, чунки C контурнинг ичида G га тегишли бўлмаган нуқталар бор. Энди G соҳанинг чегараси битта ζ нуқтадан иборат, деб фараз қилайлик. Агар $\zeta \neq \infty$ десак $z' = \frac{1}{z - \zeta}$ алмаштириш билан ζ ни ∞ га ўтказиш

мумкин. Бундай алмаштириш ўтказдик, деб ҳисоблаймиз, у ҳолда G чекли текисликдан иборат бўлади. G ни $|w| < 1$ бирлик доирага конформ акслантирувчи $w = f(z)$ функция эса бутун чекли текисликда аналитик бўлиши керак, бундан ташқари у чегараланган: $|f(z)| < 1$ бўлади. Лиувилл теоремасига асосан, $f(z) = \text{const}$, яъни барча текисликни битта нуқтага акслантиради. Бу қарама-қаршиликдан чегараси фақат битта нуқтадан иборат.

рат соҳани доирага акслантиришнинг мумкин эмаслиги келиб чиқади. Теореманинг шартлари бажарилган ҳолда конформ акслантиришни чексиз куп усуллар билан амалга ошириш мумкин. Чунончи, G соҳани бирлик доирага конформ акслантирувчи $w = f(z)$ функцияни турли шартларга бўйсундирса бўлади. Масалан, G соҳанинг тайин z_0 нуқтасини доиранинг марказига ($f(z_0) = 0$) ўтишини талаб қилиш мумкин, бундан ташқари z_0 нуқтада эгри чизиқларга ўтказилган уринмалар йўналишлари ўзгартирмаслигини (бу деган сўз, $\arg f'(z_0) = 0$, яъни $f'(z_0)$ — ҳақиқий мусбат сон) талаб қилиш мумкин. Бундай қушимча шартлар бажарилганда, конформ акслантиришни амалга оширувчи функция бирдан-бир бўлади, яъни ушбу теорема ўринлидир.

Конформ акслантиришнинг ягоналик теорема си. G соҳани $|w| < 1$ билан ифодаланувчи бирлик K доирага конформ акслантирувчи ва $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$, $z_0 \in G$, шартларни қаноатлантирувчи функция ягонадир.

Исбот. Теореманинг шартини қаноатлантирувчи иккита $w_1 = f_1(z)$ ва $w_2 = f_2(z)$ функция мавжуд бўлсин, деб фараз қилайлик, $w_2 = f_2(z)$ га тескари бўлган $z = \varphi_2(w_2)$ функция $|w_2| < 1$ доирани G соҳага акслантиради, шу билан бирга $\varphi_2(0) = z_0$, $\varphi_2'(0) > 0$ бўлади. Шунинг учун $w_1 = f_1 \circ \varphi_2(w_2)$ функция $|w_2| < 1$ доирани ўзини ўзига шундай акслантирадики,

$$f_1[\varphi_2(0)] = 0, \quad \left. \frac{dw_1}{dw_2} \right|_{w_2=0} = \frac{dw_1}{dz} \bigg|_{z=z_0} \cdot \frac{dz}{dw_2} \bigg|_{w_2=0} = f_1'(z_0) : f_2'(z_0) > 0$$

бўлади. $|f_1[\varphi_2(w_2)]| < 1$ бўлгани сабабли $f_1[\varphi_2(w_2)]$ функцияга Шварц леммасини татбиқ қилиб,

$$0 < f_1'(z_0) : f_2'(z_0) < 1$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Юқоридаги мулоҳазада $f_1(z)$ ва $f_2(z)$ функцияларнинг ўринларини алмаштирсак, $0 < f_1'(z_0) : f_1'(z_0) < 1$ тенгсизликка эга бўламиз. Иккала тенгсизликни таққослаб қуйидаги тенгликка келамиз:

$$\left. \frac{dw_1}{dw_2} \right|_{w_2=0} = f_1'(z_0) : f_2'(z_0) = 1,$$

(яна Шварц леммасига асосан), бундан: $w_1 \equiv e^{ia} \cdot w_2$, лекин $\frac{dw_1}{dw_2} = 1$ бўлгани учун e^{ia} кўпайтувчи бу ҳолда бирга тенг бўлиши керак. Шундай қилиб, $f_1(z) = f_2(z)$.

Хулоса. Бу теореманинг $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$ шартлари шу нарсани курсатадики, конформ акслантириш учта ҳақиқий параметрга боглиқ бўлар экан, чунки $f(z_0) = 0$ тенглик иккита ҳақиқий тенгликка эквивалентдир. Конформ акслантиришни бирдан-бир аниқлаш мақсадида учта параметрга боглиқ бўлган бошқа шартлар ҳам ишлатилади.

Масалан, G соҳанинг битта ички ва битта чегара нуқтасининг образи бернляди:

$$f(z_0) = w_0, \quad f(z_1) = w_1$$

(z_0 , w_0 — ички, z_1 , w_1 — чегаравий нуқталар) ёки учта чегаравий нуқтанинг образи берилади:

$$f(z_k) = w_k (k = 1, 2, 3).$$

Бундай шартларни одатда конформ акслантиришни нормалайдиган шартлар дейилади.

6. Конформ акслантиришда чегараларнинг мослиги тушунчаси

Бу пунктда исботсиз бўлса ҳам Риман теоремасидан келтириб чиқариш мумкин бўлган конформ акслантиришдаги чегараларнинг мослигига оид теоремани келтирамиз.

Агар G соҳанинг чегараси ёпиқ Жордан чизиғидан иборат бўлса, G ни бирлик доирага акслантиришни бажарувчи $w = f(z)$ функция G нинг чегарасида узлуксиз бўлади ва бу чегарани бирлик доиранинг айланасига акслантириди.

Бу ҳолда тескари функция бирлик доирада аналитик бўлиб, ёпиқ доирада узлуксиз бўлади.

Теоремани қисқача бундай ёзиш мумкин.

Теорема Иккита G ва D ёпиқ Жордан чизиқлари билан чегараланган соҳаларни конформ акслантиришда, уларнинг чегаралари ўртасида ўзаро бир қийматли ва узлуксиз мослик ўрнатилди.

Конформ акслантиришнинг таъбиқида юқоридаги теоремага тескари бўлган қуйидаги принцип катта аҳамиятга эгадир.

Чегараларнинг мослиги принципи G ва D бир боғламли соҳалар S ва Γ эгри чизиқлар билан чегараланган бўлиб, $w = f(z)$ функция G да аналитик ва $\bar{G}$ да узлуксиз бўлсин ҳамда S ва Γ ўртасида айланиш йўналиши сақланган ҳолда ўзаро бир қийматли мослик ўрнатсин. У ҳолда $w = f(z)$ функция G соҳани D соҳага ўзаро бир қийматли конформ акслантиради.

Бу принципни исботлаш учун аргумент принциpidан фойдаланамиз¹. G соҳанинг S чегарасида $f(z)$ қабул қилмайдиган ихтиёрий w_0 комплекс қиймат учун (яъни D нинг w_0 нуқтаси учун) G нинг ичидаги $f(z)$ функция w_0 — нуқталарининг сони

$$N(w_0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg \{f(z) - w_0\}$$

га тенг, бунда $\Delta_C \arg \{f(z) - w_0\}$ миқдор z нуқта S контурни айланганда $\arg \{f(z) - w_0\}$ нинг тула ўзгаришидир (7-боб, 4-§ даги формулага қаралсин; $\bar{G}$ — да $f(z)$ қутбларнинг сони 0 га тенг).

¹ Бу принципни чиқаришда функциянинг соҳанинг чегарасида аналитиклигини талаб қилган эдик. Лекин функция чегарада фақат узлуксиз бўлганда ҳам Кошининг умумумлашган теоремасига кўра (4-боб, 4-§), бу принципнинг тўғрилигини кўриш қийин эмас.

рат соҳани доирага акслантиришнинг мумкин эмаслиги келиб чиқади. Теореманинг шартлари бажарилган ҳолда конформ акслантиришни чексиз куп усуллар билан амалга ошириш мумкин. Чунончи, G соҳани бирлик доирага конформ акслантирувчи $w = f(z)$ функцияни турли шартларга бўйсундирса бўлади. Масалан, G соҳанинг тайин z_0 нуқтасини доиранинг марказига ($f(z_0) = 0$) ўтишини талаб қилиш мумкин, бундан ташқари z_0 нуқтада эгри чизикларга ўтказилган уринмалар йўналишлари ўзгартирмаслигини (бу деган суз, $\arg f'(z_0) = 0$, яъни $f'(z_0)$ — ҳақиқий мусбат сон) талаб қилиш мумкин. Бундай қушимча шартлар бажарилганда, конформ акслантиришни амалга оширувчи функция бирдан-бир бўлади, яъни ушбу теорема ўринлидир.

Конформ акслантиришнинг ягоналик теоремаси. *Г соҳани $|w| < 1$ билан ифодаланувчи бирлик K доирага конформ акслантирувчи ва $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$, $z_0 \in G$, шартларни қаноатлантирувчи функция ягонадир.*

Исбот. Теореманинг шартини қаноатлантирувчи иккита $w_1 = f_1(z)$ ва $w_2 = f_2(z)$ функция мавжуд бўлсин, деб фараз қилайлик, $w_2 = f_2(z)$ га тескари булган $z = \varphi_2(w_2)$ функция $|w_2| < 1$ доирани G соҳага акслантирадн, шу билан бирга $\varphi_2(0) = z_0$, $\varphi_2'(0) > 0$ бўлади. Шунинг учун $w_1 = f_1[\varphi_2(w_2)]$ функция $|w_2| < 1$ доирани ўзини ўзига шундай акслантирадики,

$$f_1[\varphi_2(0)] = 0, \left. \frac{dw_1}{dw_2} \right|_{w_2=0} = \frac{dw_1}{dz} \bigg|_{z=z_0} \cdot \frac{dz}{dw_2} \bigg|_{w_2=0} = f_1'(z_0) : f_2'(z_0) > 0$$

бўлади. $|f_1[\varphi_2(w_2)]| < 1$ бўлгани сабабли $f_1[\varphi_2(w_2)]$ функцияга Шварц леммасини татбиқ қилиб,

$$0 < f_1'(z_0) : f_2'(z_0) < 1$$

тенгсизлиكنи ҳосил қиламиз.

Юқоридаги мулоҳазада $f_1(z)$ ва $f_2(z)$ функцияларнинг ўринларини алмаштирсак, $0 < f_1'(z_0) : f_2'(z_0) < 1$ тенгсизликка эга бўламиз. Иккала тенгсизлиكنи таққослаб қуйидаги тенгликка келамиз:

$$\left. \frac{dw_1}{dw_2} \right|_{w_2=0} = f_1'(z_0) : f_2'(z_0) = 1,$$

(яъна Шварц леммасига асосан), бундан: $w_1 \equiv e^{i\alpha} \cdot w_2$, лекин $\left. \frac{dw_1}{dw_2} \right|_{w_2=0} = 1$ бўлгани учун $e^{i\alpha}$ купайтувчи бу ҳолда бирга тенг бўлиши керак. Шундай қилиб, $f_1(z) = f_2(z)$.

Хулоса. Бу теореманинг $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$ шартлари шу нарсани кўрсатадики, конформ акслантириш учта ҳақиқий параметрга боғлиқ булар экан, чунки $f(z_0) = 0$ тенглик иккита ҳақиқий тенгликка эквивалентдир. Конформ акслантиришни бирдан-бир аниқлаш мақсадида учта параметрга боғлиқ булган бошқа шартлар ҳам ишлатилади.

Масалан, G соҳанинг битта ички ва битта чегара нуқтасининг образи берилади:

$$f(z_0) = w_0, f(z_1) = w_1$$

(z_0, w_0 — ички, z_1, w_1 — чегаравий нуқталар) ёки учта чегаравий нуқтанинг образи берилади:

$$f(z_k) = w_k \quad (k = 1, 2, 3).$$

Бундай шартларни одатда конформ акслантиришни нормал айдиган шартлар дейилади.

6. Конформ акслантиришда чегараларнинг мослиги тушунчаси

Бу пунктда исботсиз бўлса ҳам Риман теоремасидан келтириб чиқариш мумкин бўлган конформ акслантиришдаги чегараларнинг мослигига онд теоремани келтирамыз.

Агар G соҳанинг чегараси ёпиқ Жордан чизиғидан иборат бўлса, G ни бирлик доирага акслантиришни бажарувчи $w = f(z)$ функция G нинг чегарасида узлуксиз бўлади ва бу чегарани бирлик доиранинг айланасига акслантиради.

Бу ҳолда тескари функция бирлик доирада аналитик бўлиб, ёпиқ доирада узлуксиз бўлади.

Теоремани қисқача бундай ёзиш мумкин.

Теорема. *Иккита G ва D ёпиқ Жордан чизиқлари билан чегараланган соҳаларни конформ акслантиришда, уларнинг чегаралари уртасида ўзаро бир қийматли ва узлуксиз мослик ўрнатилди.*

Конформ акслантиришнинг тағбиқида юқоридаги теоремага тескари бўлган қуйидаги принцип катта аҳамиятга эгадир.

Чегараларнинг мослиги принципи G ва D бир боғламли соҳалар C ва Γ эгри чизиқлар билан чегараланган бўлиб, $w = f(z)$ функция G да аналитик ва $\bar{G}$ да узлуксиз бўлсин ҳамда C ва Γ ўртасида айланиш йўналиши сақланган ҳолда ўзаро бир қийматли мослик ўрнатсин. У ҳолда $w = f(z)$ функция G соҳани D соҳага ўзаро бир қийматли конформ акслантиради.

Бу принципни исботлаш учун аргумент принциpidан фойдаланамиз¹. G соҳанинг C чегарасида $f(z)$ қабул қилмайдиган ихтиёрй w_0 комплекс қиймат учун (яъни D нинг w_0 нуқтаси учун) G нинг ичидаги $f(z)$ функция w_0 — нуқталарининг сони

$$N(w_0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg \{f(z) - w_0\}$$

га тенг, бунда $\Delta_C \arg \{f(z) - w_0\}$ миқдор z нуқта C контурни айланганда $\arg \{f(z) - w_0\}$ нинг тўла ўзгаришидир (7-боб, 4-§ даги формулага қаралсин; G — да $f(z)$ қутбларининг сони 0 га тенг).

¹ Бу принципни чиқаришда функциянинг соҳанинг чегарасида аналитиклигини талаб қилган эдик. Лекин функция чегарада фақат узлуксиз бўлганда ҳам Кошининг умумлашган теоремасига кўра (4-боб, 4-§), бу принципнинг тўғрилигини кўриш қийин эмас.

C ва Γ контурлар нуқталарининг ўртасидаги ўзаро бир қийматли ўзлуксиз мосликка асосан:

$$\Delta_C \arg |f(z) - w_0| = \Delta_\Gamma \arg (w - w_0).$$

Аммо, равшанки, $\Delta_\Gamma \arg (w - w_0)$ миқдор Γ нинг ичида ётувчи барча w_0 нуқталар учун 2π га тенг, Γ дан ташқарида ётувчи барча нуқталар учун эса 0 га тенг. Демак, Γ нинг ичида ётувчи барча w_0 нуқталар учун $N(w_0) = 1$, лекин Γ дан ташқаридаги ҳамма нуқталар учун $N(w_0) = 0$. Шундай қилиб $w = f(z)$ функция D дан олинган ҳар қандай қийматни G да фақат бир марта қабул қилади ва бошқа ҳеч қандай қийматни қабул қилмайди, яъни G ни D га ўзаро бир қийматли (бир арақли) конформ акслантиради. Шу билан теорема исботланди.

4-§. Кристоффель — Шварц формуласи¹

(Ярим текисликни кўпбурчакка акслантириш)

1. Кристоффель — Шварц формуласини чиқаришнинг биринчи ўсули.

Ярим текисликни кўпбурчакка акслантирувчи формулани чиқаришдан аввал, соҳанинг бурчак нуқталарида конформ акслантиришнинг қандай бўлишини текшираимиз. Соддалик учун Δ соҳанинг w_0 бурчак нуқтаси атрофидаги чегараси туғри чизикли кесмалардан иборат бўлсин, деб фараз қиламиз; бу кесмалар орасидаги бурчакни $\alpha\pi$, $0 < \alpha < 2$ орқали белгилаб оламиз. $w = f(z)$ юқори ярим текисликни Δ соҳага конформ акслантирувчи функция бўлсин, шу билан бирга w_0 бурчак нуқтасига ҳақиқий ўқнинг z_0 нуқтаси мос келсин.

$f(z)$ функциянинг z_0 нуқта атрофидаги характерини аниқлаш мақсадида ёрдамчи $\omega = (w - w_0)^{\frac{1}{\alpha}}$ узгарувчи киригамиз.

Ушбу

$$\omega = [f(z) - w_0]^{\frac{1}{\alpha}} = \omega(z) \quad (11)$$

мураккаб функция z_0 нуқта атрофининг юқори ярим текисликка тегишли қисмини, $\omega = 0$ нуқта атрофининг ярим текисликларнинг бирортасига тегишли қисмига конформ акслантиради, шу билан бирга z текислик ҳақиқий ўқининг кесмасига туғри чизик кесмаси мос келади (112-чизма.)

Симметрия принципига асосан $\omega(z)$ функция z_0 нуқтанинг тула атрофига аналитик давом эттирилади, демак, қуйидаги Тейлор қатори билан ифодаланади:

$$\omega(z) = c'_1(z - z_0) + c'_2(z - z_0)^2 + \dots$$

¹ Эльвин Кристоффель (1829 — 1900) — немис математиги.

$\omega(z_0) = 0$ бўлгани учун $c_0' = 0$ бўлади, лекин $c_1' = \omega'(z_0) \neq 0$ чунки функция конформ акслантиришни амалга оширяпти. (11) дан фойдаланиб $f(z)$ функцияга қайтсак, уни z_0 нуқта атрофида бундай ифодалаш мумкин:

$$f(z) - w_0 = [\omega(z)]^\alpha,$$

$$f(z) = w_0 + (z - z_0)^\alpha [c_1 + c_2(z - z_0) + \dots]^\alpha$$



112-чиёзма.

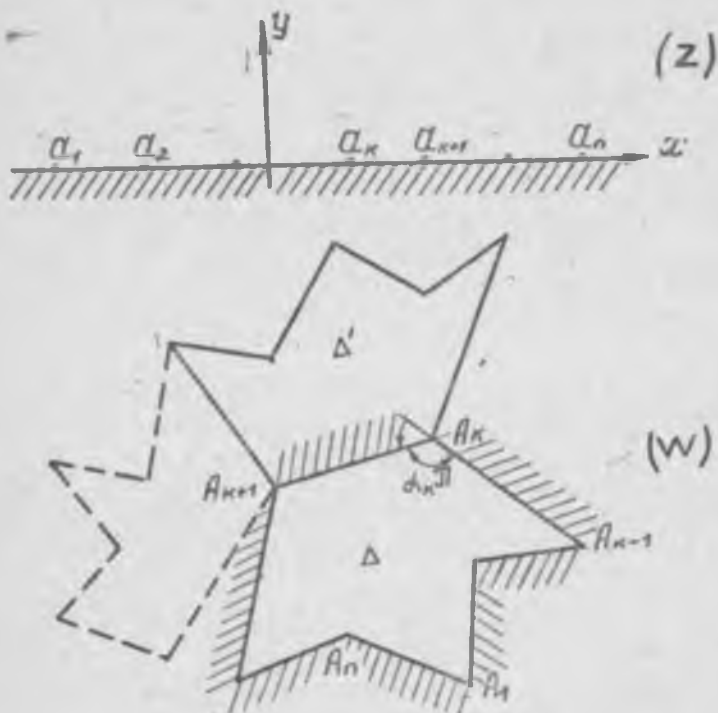
Ўрта қавсдаги ифода $z = z_0$ да нолдан фарқли бўлгани учун z_0 нуқтанинг бирор атрофида $[c_1 + c_2(z - z_0) + \dots]^\alpha$ функциянинг бир қийматли аналитик тармоғини ажратиш мумкин. Бу тармоқни Тейлор қаторига ёйиб, $f(z)$ функциянинг z_0 нуқта атрофидаги энг охириги ифодасига эга бўламиз:

$$f(z) = w_0 + (z - z_0)^\alpha [c_0 + c_1(z - z_0) + \dots]. \quad (12)$$

Бундан кўринадики, $\alpha > 1$ да $f'(z_0) = 0$, $\alpha < 1$ да $f'(z_0) = \infty$. Тескари $z = \varphi(w)$ акслантириш учун, аксинча, $\alpha < 1$ да $\varphi'(w_0) = 0$ ва $\alpha > 1$ да $\varphi'(w_0) = \infty$ бўлади. (12) формуладан яна шу нарса кўринадики, z_0 нуқта $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq 2$ да $f(z)$ функциянинг тармоқланиш нуқтаси бўлади. Энди юқори ярим текисликни купбурчакка акслантиришга ўгамиз. w текисликда $A_1, A_2, \dots, A_n$ ёпиқ купбурчак берилган бўлиб, унинг бурчаклари мос равишда миқдори $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$ катталиқка эга бўлсин. Риманнинг асосий теоремасига биноан текисликнинг юқорисини ўша Δ купбурчак ичига акслатувчи $w = f(z)$ функция мавжуд. Бизнинг асосий мақсадимиз ана шу функция аналитик ифодасини тузишдан иборатдир. Купбурчакнинг A_k учларига ҳақиқий ўқда ёғувчи $z = -a_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) нуқталар мос келсин дейлик, шу билан бирга бу a_k нуқталар бир-биридан чекли масофада ётади, деб ҳисоблаймиз, акс ҳолда биз бунга текисликда каср чизиқли алмаштиришни жорий этиш ёрдами билан эришишимиз мумкин. Бундан ташқари a_1 — чапдаги охириги нуқта, a_n эса ўнгдаги охириги нуқта бўлсин.

$w = f(z)$ функция ҳақиқий ўқнинг ихтиёрий (a_k, a_{k+1}) қисмида A_k, A_{k+1} кесмада ёғувчи қийматларни қабул қилгани учун симметрия принцигига асосан, $f(z)$ функция (a_k, a_{k+1}) кесма, буйича қуйи ярим текисликка аналитик давом ётади. Бу функциянинг аналитик давоми қуйи ярим текисликни A_k, A_{k+1} кесмага нисбаган Δ купбурчакка симметрик бўлган Δ' купбурчакка

конформ акслантиради. Ҳосил бўлган аналитик давомни яна бирор (a_k, a_{k+1}) кесма орқали юқори ярим z текисликка аналитик давом эттириш мумкин, шу билан бирга аналитик янги давом юқори ярим z текислиكنи Δ' кўпбурчакка A_k, A_{k+1} кесмага нисбатан симметрик бўлган Δ'' кўпбурчакка-конформ акслантиради (113-чизма). $A_n A_1$ томонга ҳақиқий ўқда a_n дан ∞ гача, сунгра ∞ дан a_1 га кетувчи кесма мос келади, z текисликдаги чексиз узоклашган нуқта $A_n A_1$ томонда ётувчи бирор нуқтага мос келади.



113-чизма.

Биз кўрсатилган типдаги ҳар турли аналитик давом эттиришларни бажардик, деб фараз қилайлик. Натижада, умуман айтганда чексиз кўп қийматли $w = F(z)$ аналитик функция ҳосил бўлиб, бунинг учун бошланғич $f(z)$ функция юқори ярим текисликдаги бир қийматли тармоқлардан биттаси булади.

$w = f_1(z)$, $w = f_2(z)$ функциялар $F(z)$ функциянинг юқори ярим текисликдаги ихтиёрий иккита тармоғи бўлсин. Бизнинг ясашимизга биноан, бу икки тармоқ юқори ярим текислиكنи иккита Δ_1 ва Δ_2 кўпбурчакларга конформ акслантиради.

Бу кўпбурчаклар бир-биридан томонларига нисбатан жўфт сондаги симметриялар билан фарқ қилади, чунки аввал юқори ярим текисликдаги бирор тармоқни ихтиёрий (a_k, a_{k+1}) кесма

орқали давом эттирилади, сунгра қуйи ярим текисликдаги аналитик давомни яна бирор кесма орқали юқори ярим текисликка аналитик давом эттириб, юқори ярим текисликдаги бошқа тармоқ ҳосил қилинади.

Лекин ихтиёрий иккита тўғри чизиққа нисбатан ҳар қандай бир жуфт симметрия бирор силжиш ва бурилишга олиб келади, бу ҳолда барча юқори ярим текисликда $f_2(z) = e^{i\theta} f_1(z) + a$, бунда θ ва a — ўзгармас. Худди шундай мулоҳаза $F(z)$ функциянинг қуйи ярим текисликдаги тармоқлари учун ҳам тўғри бўлади.

Ушбу

$$g(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{d}{dz} \ln f'(z)$$

функция юқори ярим текисликда аналитикдир, чунки $f'(z)$ конформ акслантиришни амалга ошираётган функциянинг ҳосиласи бўлгани сабабли нолдан фарқлидир. $F(z)$ функциянинг тармоқлари тўғрисида айтганларимизга асосан:

$$f_2'(z) = e^{i\theta} f_1'(z), \quad f_2(z) = e^{i\theta} f_1(z),$$

демак, $\frac{f_2'(z)}{f_2(z)} = \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$ бўлгани учун $g(z)$ функция $f(z)$ нинг турли аналитик давомларида бир қийматлилигинча қолади.

Шундай қилиб, $g(z)$ кўпбурчакнинг учларига мос келадиган нуқталардан бошқа барча юқори ярим текисликда бир қийматли аналитик функциядир. $g(z)$ нинг чексиз узоқлашган нуқтадаги аналитиклиги $z = \infty$ ни кўпбурчак учига эмас. $A_n A_1$ томонда ётувчи бирор нуқтага аксланишидан келиб чиқади.

$g(z)$ функциянинг $z = a_k$ нуқтадаги характерини аниқлаш учун $f(z)$ функциянинг бу нуқта атрофидаги бирор тармоғини олиб, (12) формуладан фойдаланамиз:

$$f(z) = A_k + (z - a_k)^{\alpha_k} \{c_0 + c_1(z - a_k) + \dots\}.$$

Бундан $g(z)$ функциянинг $z = a_k$ нуқта атрофидаги Лоран ёйилмасини ҳосил қилиш қийин эмас.

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha_k(z - a_k)^{\alpha_k - 1} c_0 + \dots}{A_k + (z - a_k)^{\alpha_k} \{c_0 + c_1(z - a_k) + \dots\}} = \\ &= \frac{1}{z - a_k} \cdot \frac{\alpha_k(z - a_k)^{\alpha_k - 1} c_0 + \dots}{A_k c_0 + (z - a_k)^{\alpha_k} \{c_1 c_0 + \dots\}}. \end{aligned}$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги иккинчи кўпайтувчи $z = a_k$ нуқтада аналитик бўлиб, унинг бу нуқтадаги қиймати $(z_k - 1)$ га тенг, яъни $z = a_k$ нуқта атрофида қуйидаги ёйилма ўриналидир:

$$g(z) = \frac{z_k - 1}{z - a_k} + c'_0 + c'_1(z - a_k) + \dots$$

Бу ёйилмадан $z = a_k$ нуқта $g(z)$ функция учун оддий қутб бўлиб, унинг қолдиғи $(z_k - 1)$ га тенглиги кўриниб турибди. Шун-

дай қилиб, $g(z)$ функция тула текисликда n та $(a_1, \dots, a_n)$ махсус нуқталарга эгадир. $g(z)$ функциядан унинг ўша махсус нуқталардаги ёйилмалари бош қисмларининг йиғиндисини айириб, қуйидаги функцияни ҳосил қиламиз:

$$G(z) = g(z) - \frac{a_1 - 1}{z - a_1} - \frac{a_2 - 1}{z - a_2} - \dots - \frac{a_n - 1}{z - a_n}.$$

Бу функция барча текисликда аналитик бўлади. Энди бу функция чексиз узоқлашган нуқтада қандай бўлишини текшираемиз. Юқоридагилардан бизга маълумки, $z = \infty$ да $f(z)$ функция $A_n A_1$ томонда ётувчи қийматни қабул қилади, демак, чексиз узоқлашган нуқта атрофида

$$f(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots,$$

ёйилмага эга бўламиз.

Бундан $g(z)$ функция учун қуйидаги ёйилма келиб чиқади.

$$g(z) = \frac{d_1}{z} + \frac{d_2}{z^2} + \dots,$$

яъни $z = \infty$ да $g(z)$ ва $G(z)$ нолга тенг. Лиувилл теоремасига асосан $G(z)$ узгармас сонга тенг, лекин $z = \infty$ да $G(z)$ нолга тенг бўлгани учун бу узгармас сон нолга тенгдир.

Шу сабабдан:

$$g(z) = \frac{d}{dz} \ln f'(z) = \frac{a_1 - 1}{z - a_1} + \frac{a_2 - 1}{z - a_2} + \dots + \frac{a_n - 1}{z - a_n}.$$

Бу тенгликни юқори ярим текисликда ётувчи ихтиёрий йул бўйича бир марта интеграллаймиз:

$$\ln f'(z) = (a_1 - 1) \ln(z - a_1) + (a_2 - 1) \ln(z - a_2) + \dots + (a_n - 1) \ln(z - a_n) + \ln C$$

ёки

$$f'(z) = C(z - a_1)^{a_1 - 1} (z - a_2)^{a_2 - 1} \dots (z - a_n)^{a_n - 1}.$$

Ниҳоят охириги тенгликни интеграллаб, қуйидаги Кристоффель — Шварц формуласига эга бўламиз:

$$f(z) = C \int_{z_1}^z (z - a_1)^{a_1 - 1} (z - a_2)^{a_2 - 1} \dots (z - a_n)^{a_n - 1} dz + C_1, \quad (13)$$

бу ерда z_0 , C ва C_1 — узгармаслар.

Бу формулани чиқаришда биз кўпбурчакнинг учларига мос келадиган ҳақиқий ўқнинг $a_1, \dots, a_n$ нуқгалари маълум, деб фараз қилдик. Лекин конкрет масалаларда фақат A_k лар берилиб, $z = a_k$ лар эса номаълум бўлади. Конформ акслантиришнинг ягоналиги туғрисидаги теореманинг шартларига асосан, учта ҳақиқий параметрни, яъни учта нуқтани (масалан, a_1, a_2 , ва a_3) ихтиёрий бериш мумкин, қолган a_k ($k=4, 5, \dots, n$) нуқталар ва C, C_1 узгармаслар масаланинг шартига кўра аниқланиши лозим.

Кристоффель — Шварц формуласига асосан, конкрет масалаларни ечишда рўй берадиган энг муҳим қийнчилик мана шундан иборатдир. (13) формулани чиқаришда, кўпбурчак $A_1, A_2, \dots, A_n$ учлари ҳақиқий ўқнинг бир-биридан чекли масофада ётувчи нуқталарига мос келади, деб фараз қилган эдик. Энди шу нуқталардан бигтаси, масалан, $a_n = \infty$ бўлсин. Бу ҳолни аввалги ҳолга келтириш учун $\zeta = -\frac{1}{z} + a_n$ алмаштиришни бажарамиз; бу алмаштириш $\operatorname{Im} z > 0$ ярим текислиكنи $\operatorname{Im} \zeta > 0$ ярим текисликка ва $a_1, \dots, a_n = \infty$ нуқталарни чекли $a'_1, \dots, a'_n$ нуқталарга ўтказади.

(13) формулани қўллаймиз:

$$w = C' \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\zeta - a'_1)^{a_1-1} (\zeta - a'_2)^{a_2-1} \dots (\zeta - a'_n)^{a_n-1} d\zeta + C_1 = \\ = C' \int_{\frac{1}{z_0}}^{\frac{1}{z}} \left(a'_n - a'_1 - \frac{1}{z} \right)^{a_1-1} \left(a'_n - a'_2 - \frac{1}{z} \right)^{a_2-1} \dots \left(-\frac{1}{z} \right)^{a_n-1} \frac{dz}{z^2} + C_1.$$

Ҳар бир қавсни умумий махражга келтириб ва ҳар биридан $a'_n - a'_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) кўпайтувчини қавсдан ташқарига чиқарамиз, у ҳолда:

$$w = C \int_{\frac{1}{z_0}}^{\frac{1}{z}} (z - a_1)^{a_1-1} (z - a_2)^{a_2-1} \dots (z - a_{n-1})^{a_{n-1}-1} \frac{dz}{z^{a_1+a_2+\dots+a_{n-1}+n+2}} + C_1,$$

бунда $a_k = \frac{1}{a'_n - a'_k}$ ҳақиқий ўзгармаслар, C — комплекс ўзгармас.

Кўпбурчак бурчаклари йиғиндисининг маълум хоссасига асосан:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = n - 2.$$

Демак,

$$w = C \int_{\frac{1}{z_0}}^{\frac{1}{z}} (z - a_1)^{a_1-1} (z - a_2)^{a_2-1} \dots (z - a_{n-1})^{a_{n-1}-1} dz + C_1. \quad (14)$$

Шундай қилиб, кўпбурчак учларининг бирортасига чексиз узоқлашган нуқта мос келса, Кристоффель — Шварц формуласида шу учга мос кўпайтувчи бўлмас экан.

Кристоффель — Шварц формуласини чиқаришнинг иккинчи усули. Энди IV боб, 10-§ даги Дирихле масаласининг (ярим текислик учун) ечилишига асосланиб, Кристоффель — Шварц формуласини чиқаришнинг қисқароқ усулини кўрсатамиз. Шу мақсадда юқори ярим текислиكنи кўпбурчакка конформ акслантирувчи $f(z)$ функция ҳосиласи логарифмининг мавҳум қисмини текширамиз:

$$u(z) = \operatorname{Im} \ln f'(z) = \arg f'(z).$$

$u(z)$ функция юқори ярим текисликда гармоник функциядир. Конформ акслантиришдаги ҳосила аргументнинг геометрик маъносига асосан, $(-\infty, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_n, \infty)$ кесмаларда $u(z)$ функ-

ция узгармас $u_0, u_1, \dots, u_n$ қиймагларни қабул қилади, чунки бу кесмалар купбурчакнинг томонларига ўтади. Бошқача айтганда $u_0, \dots, u_n$ лар $(-\infty, a_1), \dots, (a_n, \infty)$ кесмаларининг конформ акслантиришдаги бурилиш бурчакларидан иборагдир. $(-\infty, a_1)$ ва (a_n, ∞) кесмаларда $u_0 = u_n = \alpha$, бунда $\alpha = A_n A_1$ кесманинг ҳақиқий ўқ мусбат йўналиши билан ташкил этган бурчагидир. $A_k A_{k+1}$ кесма $A_{k-1} A_k$ кесмадан соат стрелкаси ҳаракатининг йўналишига қарши $(1 - \alpha_k) \pi$ бурчакка буриш натижасида (1.13-чизмага қаранг) ҳосил бўлгани учун $u(z)$ функция a_k нуқтадан ўтишда $(1 - \alpha_k) \pi$ миқдорга ошади, демак,

$$u_{k-1} - u_k = (\alpha_k - 1) \pi.$$

IV бо5, 10-§ даги формулани қўллаб қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} u(z) &= (\alpha_1 - 1) \varphi_1 + (\alpha_2 - 1) \varphi_2 + \dots + (\alpha_n - 1) \varphi_n + \alpha = \\ &= \alpha + \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) \arg(z - a_k). \end{aligned}$$

Маълум бўлган бу мавҳум қисм бўйича қуйидаги аналитик функцияни топамиз:

$$\ln f'(z) = \ln C_0 + i\alpha + \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) \ln(z - a_k).$$

Бундан потенциаллаш ва интеграллаш натижасида Кристоффель — Шварц формуласини ҳосил қиламиз:

$$f(z) = C_0 e^{i\alpha} \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} dz + C_1.$$

3. Юқори ярим текисликни тўртбурчакка акслантириш. Тўртбурчак учларининг координаталари қуйидагича бўлсин:

$$-\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1}{2} + i\omega_2, -\frac{\omega_1}{2} + i\omega_2,$$

бунда ω_1 ва ω_2 — тайин мусбат ҳақиқий сонлар. Бу тўртбурчакнинг учлари

$$0, \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1}{2} + i\omega_2, i\omega_2$$

нуқталарда бўлган ўн ярмини оламиз. Берилган тўртбурчакнинг бу қисми z юқори ярим текисликнинг ўнг томонига конформ акслантирилган бўлсин, дейлик. Шу билан бирга, ҳамма вақт (каср чизиқли алмаштириш ёрдами билан) $0, \frac{\omega_1}{2}, i\omega_2$ учлар $0, 1$ ва ∞ нуқталарга ўтади деб ҳисоблашимиз мумкин. Бунда тўртбурчакнинг $\frac{\omega_1}{2} + i\omega_2$ учи 1 ва ∞ нуқталар орасида ётувчи ҳақиқий ўқнинг бирор нуқтасига ўтади. Бу нуқтани $\frac{1}{k}$ орқали белгилаймиз, бунда $0 < k < 1$. Симметрия принципига асосан тўртбурчакнинг чап ярми z текисликнинг чап ярмига ўтади, шу билан бирга $-\frac{\omega_1}{2}, -\frac{\omega_1}{2} + i\omega_2$

лар мос равишда $z = -1$ ва $z = -\frac{1}{k}$ нуқталарга утади. Энди биз

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{k}, a_3 = -\frac{1}{k}, a_4 = -1 \text{ ва } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1}{2}$$

(114-чизма) деб, Кристоффель — Шварц формуласидан фойдаланишимиз мумкин:

$$\begin{aligned} w &= C \int_0^z (z-1)^{-\frac{1}{2}} (z+1)^{-\frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{k}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(z + \frac{1}{k}\right)^{-\frac{1}{2}} dz + C_1 = \\ &= C \int_0^z \frac{dz}{V(z^2-1)\left(z^2 - \frac{1}{k^2}\right)} = C \int_0^z \frac{dz}{V(1-z^2)(1-k^2z^2)} \quad (15) \end{aligned}$$

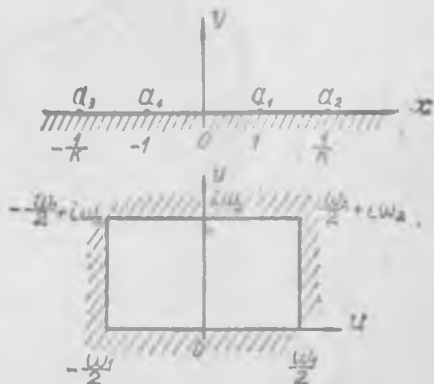
(z_0 ўзгармасни 0 га тенг қилиб олдик, бу билан умумиятликка эиён етмайди; 0 нуқтага 0 нуқта мос келгани учун $C_1=0$). C ва k ўзгармасларни аниқлаш учун $\frac{\omega_1}{2}$ ва $\frac{\omega_1}{2} + i\omega_2$ учларнинг $z=1$ ва $z=\frac{1}{k}$ нуқталарга ўтишидан (мослигидан) фойдаланиб, қуйидаги тенгликларни ёза оламиз:

$$\frac{\omega_1}{2} = C \int_0^1 \frac{dt}{V(1-t^2)(1-k^2t^2)} \quad (16)$$

$$\frac{\omega_1}{2} + i\omega_2 = C \int_1^{\frac{1}{k}} + C \int_0^{\frac{1}{k}},$$

бундан (16) га асосан:

$$\omega_2 = C \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{V(t^2-1)(1-k^2t^2)} \quad (17)$$



114-чизма,

(16 ва 17) формулалардан параметр k ни аниқлаш учун ушбу

$$\omega_1 : \omega_2 = 2 \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{V(t^2-1)(1-k^2t^2)} : \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{V(t^2-1)(1-k^2t^2)}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Демак, k тўртбурчак томонларининг нисбатига боғлиқ экан. Ўзгармас C эса тўртбурчакнинг улчамига, яъни ω_1 ва ω_2 га боғлиқ, (16) дан C ҳақиқий мусбат сон экани кўриниб турибди.

(15) интеграл элементар функциялар орқали ифодаланмайди, уни 1 турдаги эллиптик интеграл дейилади.

5-§. Якоби эллиптик функциялари ҳақида тушунча

Ушбу

$$z = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} \quad (18)$$

эллиптик интегралга тескари бўлган функция

$$w = \operatorname{sn}(z, k) \text{ ёки } w = \operatorname{sn} z^1$$

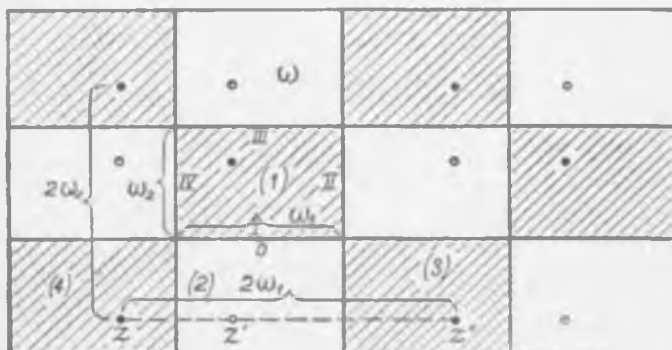
орқали белгиланади ва Якобининг *sn эллиптик функцияси* деб аталади. k сонни бу функциянинг модули дейилади.

(15) формулага асосан

$$w = \operatorname{sn}\left(\frac{z}{C}, k\right) = \operatorname{sn} \frac{z}{C}$$

функция 114- чизмада кўрсатилган тўртбурчакни юқори ярим текисликка конформ акслантиради. Биз бу тўртбурчакнинг ўлчамини $C=1$ шартни қаноатлантирадиган қилиб оламиз. Шу тўртбурчакни (1) рақами билан, унинг томонларини эса I, II, III ва IV рақамлар билан белгилаб оламиз (115- чизма).

Дастлаб (1) тўртбурчакда аниқланган $w = \operatorname{sn} z$ функцияни тўртбурчакнинг томонлари орқали, масалан, I орқали, (2) тўртбурчакка давом эттирамыз. Бу давом (2) ни қўйи ярим текисликка акслантиради. Сунгра бу давомни (2) тўртбурчакнинг II томони орқали (3) тўртбурчакка давом эттирсак, $w = \operatorname{sn} z$ функция (3) тўртбурчакни яна юқори ярим текисликка акслантиради ва ҳоказо. 115- чизма штрихланган тўртбурчаклар юқори ярим текисликка, штрихланмаганлари эса қўйи ярим текисликка акслантирилади).



115- чизма.

¹ Бу функцияни „эс эн z, k “ ёки „эс эн z “ деб ўқилади.

Шундай қилиб $w = \operatorname{sn} z$ функцияни барча текисликка давом эттирамиз. Бунда функция бир қиймагли булади, чунки бирор ёпиқ контурни айланиб чиқиш натижасида қайтадан масалан, (1) туртбурчакка қайтиб келсак, $\operatorname{sn} z$ нинг янги қийматлари эскилари билан бир хил бўлади (чунки булар ҳам (1) ни аввалги нормалаш билан юқори ярим текисликка акслантиради). Сўнгра, бу функция туртбурчакларнинг ичларида ва чегараларида $i\omega_2$ нуқтадан ва давом эттириш натижасида унга мос келган нуқталардан бошқа барча нуқталарда аналитик функция булади. $z = i\omega_2$ нуқта ва давом эттириш натижасида бунга мос келган нуқталар $w = \operatorname{sn} z$ функция учун қутб булади, чунки конформ акслантиришда булар $w = \infty$ нуқтага ўтади. Демак, $\operatorname{sn} z$ *мероморф* функция экан.

115-чизмада функциямиз $\operatorname{sn} z$ қийматларни қабул қиладиган нуқталар қора доирачалар билан, $\operatorname{sn} z$ қийматларни қабул қиладиган нуқталар эса оқ доирачалар билан белгиланган.

Ниҳоят, $\operatorname{sn} z$ функциянинг $2m\omega_1 + 2n i\omega_2$ кўринишидаги (бунда $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) даврларга эга эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун $2\omega_1$ ва $2i\omega_2$ сонлар давр бўлишини кўрсатиш етарлидир (одагда бу сонларни асосий даврлар дейилади). Чизмадан $\operatorname{sn} z' = \operatorname{sn} z$, $\operatorname{sn} z'' = -\operatorname{sn} z$, бундан $\operatorname{sn} z = \operatorname{sn} z''$ экани кўриниб турибди. Равшанки, $z'' = z + 2\omega_1$.

Демак, $\operatorname{sn}(z + 2\omega_1) = \operatorname{sn} z$. Худди шунга ўхшаш:

$$\operatorname{sn}(z + 2i\omega_2) = -\operatorname{sn} z.$$

Шундай қилиб, $\operatorname{sn} z$ икки даврли ($2\omega_1$ ва $2i\omega_2$) функция бўлиб даврларнинг нисбати соф мавҳум сондан иборат экан.

$\operatorname{sn} z$ функциянинг юқорида текширилган давомларидан [(18) формуладан ҳам], унинг тоқ функция эканлиги келиб чиқади:

$$\operatorname{sn}(-z) = -\operatorname{sn} z$$

ҳамда

$$\operatorname{sn} 0 = 0.$$

Бу хоссалар $\operatorname{sn} z$ функция билан оддий тригонометрик $\sin z$ функция орасида айрим ўхшашлик борлигини кўрсатади. (18) формуладан $k = 0$ бўлганда $z = \arcsin w$ ҳосил булади, демак, $\operatorname{sn}(z, 0)$ функция оддий синусга айланади.

$\operatorname{sn} z$ функция билан бир қаторда ушбу

$$\operatorname{cn} z = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 z}, \operatorname{dn} z = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z} \quad (19)$$

функциялар ҳам текширилади, булар ҳам Якобининг эллиптик функциялари деб аталади.

$k = 0$ бўлганда $\operatorname{sn} z$ функция оддий косинусга айланади ва $\operatorname{dn}(z, 0) = 1$ булади. $\operatorname{sn} z$ ва $\operatorname{dn} z$ ларнинг даврий функция экани ва асосий даврлари мос равишда $2\omega_1$, $\omega_1 + 2i\omega_2$ ва ω_1 , $4i\omega_2$ ларга

¹ „це эн z'' ва „де эн z'' “ деб ўқилади.

тенглигини осонгина курсатиш мумкин. Биз унга тухталмай, Якоби функциялари орасидаги айрим муносабатларни келтирамиз.
 $\operatorname{sn} z$ функцияни ифодаловчи (18) формуладан

$$\frac{dw}{dz} = \sqrt{1 - w^2} (1 - k^2 w^2)$$

ёки $w = \operatorname{sn} z$ ни бу формуладаги w ўрнига қўйсак, $\operatorname{sn} z$ ни дифференциаллаш формуласи ҳосил бўлади:

$$\frac{d \operatorname{sn} z}{dz} = \operatorname{cn} z \cdot \operatorname{dn} z. \quad (20)$$

Бошқа формулаларни топиш учун (19) тенгликлардан дарҳол келиб чиқадиган ушбу

$$\operatorname{sn}^2 z + \operatorname{cn}^2 z = 1, \quad k^2 \operatorname{sn}^2 z - \operatorname{dn}^2 z = 1$$

тенгликларни дифференциаллаймиз:

$$\frac{d \operatorname{cn} z}{dz} = -\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z, \quad \frac{d \operatorname{dn} z}{dz} = -k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z. \quad (21)$$

$k = 0$ да, (20) формула ва (21) нинг биринчиси $\sin z$ ва $\cos z$ функцияларни дифференциаллаш формулаларига айланади.

Ниҳоят, Якоби эллиптик функциялари учун қушиш формулаларини (исботсиз) келтирамиз:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sn}(z + \zeta) &= \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{cn} \zeta \operatorname{dn} \zeta + \operatorname{sn} \zeta \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 \zeta}, \\ \operatorname{sn}(z + \zeta) &= \frac{\operatorname{cn} z \operatorname{cn} \zeta - \operatorname{sn} z \operatorname{sn} \zeta \operatorname{dn} z \operatorname{dn} \zeta}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 \zeta}, \\ \operatorname{dn}(z + \zeta) &= \frac{\operatorname{dn} z \operatorname{dn} \zeta - k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{sn} \zeta \operatorname{cn} z \operatorname{cn} \zeta}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 \zeta} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$k = 0$ бўлганда (22) формулаларнинг биринчи икkitаси оддий синус ва косинус учун қушиш формулаларига айланади.

Шундай қилиб, юқорида биз танишган Якобининг эллиптик функциялари икки даврли мероморф функциялар экан.

Умуман, ҳар бир икки: $2\omega_1$ ва $2\omega_2$ даврли (бунда $2\omega_2 : 2\omega_1$ — нисбат мавҳум сон, лекин соф мавҳум бўлиши шарт эмас), $f(z)$ мероморф функция эллиптик функция деб ағалади.

Таърифга кўра:

$$f(z + 2\omega_1) = f(z), \quad f(z + 2\omega_2) = f(z), \quad (23)$$

бундан:

$$f(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2) = f(z) \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (24)$$

Изоҳ. Эллиптик функцияни таърифлашда $2\omega_2 : 2\omega_1$ нисбатни мавҳум сон деб олинади. Агар бу нисбат ҳақиқий сон бўлса, $f(z)$ функциянинг оддий даврли бўлишини ёки ўзгармас сондан иборат бўлишини курсатиш қийин эмас.

Энди икки даврликни тасвирлаш учун комплект текисликда тўртта нуқта оламир:

$$z_0, \quad z_0 + 2\omega_1, \quad z_0 + 2\omega_1 + 2\omega_2, \quad z_0 + 2\omega_2,$$

бу ерда: z_0 — ихтиёрий узгармас комплекс сон ва $2\omega_1 : 2\omega_2$ нисбат мавҳум сон бўлгани сабабли юқоридаги тўртта нуқта бирор параллелограммнинг учларини ифодалайди.

$z_0 + 2m\omega_1 + 2n\omega_2$ ни z_0 орқали белгилаб оламиз. Бу ҳолда:

$$z_0, z_0 + 2\omega_1, z_0 + 2\omega_2, z_0 + 2\omega_1 + 2\omega_2$$

нуқталар асосий $p = p_{00}$ параллелограммни бирор даврни тасвирловчи векторга силжитиш натижасида ҳосил бўлган p_{mn} параллелограммнинг учларидан иборат бўлади. m ва n га турли бутун қийматларни бериб, ўзаро конгруэнт¹ бўлган ва бугун текисликни қопловчи p_{mn} параллелограммлар турини ҳосил қиламиз (116-чизма).

p_{mn} параллелограммларни *даврлар параллелограммлари* дейилади. Айтилганларга асосан (24) тенглик $f(z)$ функциянинг барча конгруэнт нуқталарда бир хил қиймат қабул қилишини билдиради. Демак, эллиптик функцияни бутун текисликда ўзини қандай тугишини билиш учун уни битта параллелограммда ўрганиш етарлидир.

Эллиптик функциялар математика ва механиканинг кўп масалаларида татбиқ қилинади. Шу сабабли эллиптик функцияларни ўрганиш аналитик функциялар назариясининг таркиби, бир бўлимидан иборат бўлиб, унда бундай функциялар ҳар томонлама ўрганилади. Биз китобнинг ҳажмини эътиборга олиб эллиптик функциялар назариясига тўла тўхталмасдан, балки бу назариянинг иккита муҳим теоремасини келтириш билан чегараланамиз.

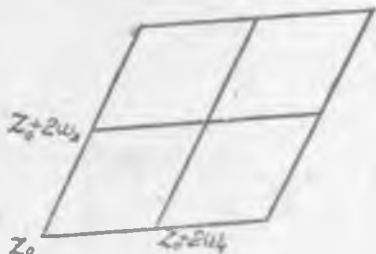
I-теорема *Эллиптик функциянинг ҳосиласи яна эллиптик функциядир.*

Ҳақиқатан, (23) тенгликларни дифференциаллаб, ихтиёрий z учун

$$f'(z + 2\omega_1) = f'(z), f'(z + 2\omega_2) = f'(z)$$

муносабатларга эга бўламиз. Бундан $f'(z)$ ҳосила учун ҳам $2\omega_1$ ва $2\omega_2$ ларнинг давр бўлиши келиб чиқади.

Иккинчи томондан $f'(z)$ ҳосила ҳам $f(z)$ каби бир қийматли бўлгани учун чекли масофада қутблардан бошқа махсус нуқталари бўлиши мумкин эмас, чунки $f(z)$ бирор нуқтада аналитик функция бўлса, унинг ҳосиласи $f'(z)$ ҳам шу нуқтада аналитик функция бўлади, агар бирор нуқта $f(z)$ нинг қутби бўлса, уша нуқта $f'(z)$ учун ҳам қутб бўлади. Демак, $f'(z)$



116-чизма.

¹ $z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2$ кўринишдаги нуқталар z нуқта билан конгруэнт дейилади. Агар M тўплам N тўпلامининг нуқталарига конгруэнт бўлган барча нуқталардан ташкил топган бўлса, M ва N тўпламлар конгруэнт дейилади.

ҳам иккита $2\omega_1$ ва $2\omega_2$ даврли мероморф функция экан. Таърифга асосан бу $f'(z)$ эллиптик функция бўлади.

2-теорема. *Ўзгармас сондан фарқли бўлган $f(z)$ эллиптик функция даврлар параллелограммида камида битта қутбга эга бўлади.*

Ҳақиқатан, агар қутблар йўқ, деб фараз қилсак, $f(z)$ функция даврлар параллелограммида (модули бўйича) чегараланган бўлади; демак, юқоридаги айтганларимизга асосан, $f(z)$ функция бутун текисликда аналитик ва чегараланган бўлади. Бундан эса, Лиувилл теоремасига асосан, $f(z)$ нинг ўзгармас сонга тенглиги келиб чиқади. Ҳосил бўлган қарама-қаршилик бизни теореманинг туғрилигига ишонтиради.

М А Ш Қ Л А Р

1. Ушбу

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

функция $z = a$ ($|a| < 1$) нукта атрофида Тейлор қаторига ёйилган a нинг қандай қийматларида бу ёйилма $f(z)$ функцияни аналитик давом эттиришга имкон беради?

2. Ушбу

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

даражали қаторнинг йигиндиси $z = -\frac{1}{2}$ нукта атрофида Тейлор қаторига ёйилган. $f(z)$ функция давом эттириладиган соҳа қандай бўлади?

Кўрсатма

$$\ln(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots$$

ёйилмадан фойдаланилсин.

3. Ушбу

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

функцияни

$$\ln 2 = \frac{1-z}{2} - \frac{(1-z)^2}{2 \cdot 2^n} - \frac{(1-z)^3}{3 \cdot 2^n} - \dots$$

қатор билан каттароқ соҳага давом эттириш мумкинлиги исботлансин.

4. Ушбу

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$$

даражали қатор билан ифодаланган $f(z)$ функцияни бирлик доира ташқариоига давом эттиришнинг мумкин эмаслиги исботлансин

Кўрсатма. Агар p ва q — узаро туб бутун сонлар бўлиб, $n > q$ бўлса,

$$\left(\frac{2p+1}{q} \right)^{n!} = p^{n!}.$$

5. Ўшбу

$$w = \int_0^z \frac{1}{z^3} (1-z)^{\frac{1}{3}-1} dz$$

функция юқори z ярим текисликни томонининг узунлиги $\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$ га тенг бўлган учбурчакка акслантириши исботлансин.

Кўрсатма. Учбурчак учлари га ҳақиқий ўқнинг 0,1 ва ∞ нуқталарини мос қилиб олиш мумкин.

6. Юқори ярим z текисликни

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} w < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} w > 0$$

йўлга акслантирувчи функция топилсин.

Кўрсатма. Бу йўлни учлари $A_1 = -\frac{\pi}{2}$, $A_2 = \frac{\pi}{2}$, $A_3 = \infty$ нуқталарда ва бурчаклари $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ ва 0 бўлган учбурчак сифатида қараш керак.

7. Бирлик доирани кўпбурчакка акслантирувчи функция топилсин.

Кўрсатма. Аввал юқори ярим текисликни $|t| < 1$ бирлик доирага

$$t = \frac{z-i}{z+i} \left(z = \frac{1+t+1}{t-t-1} \right)$$

формула билан акслатиб олиш керак.

8. Юқори z ярим текисликни w текисликдаги A учдаги бурчаги α ва томони d га тенг бўлган ромбга акслантирувчи функция топилсин. Нуқталарнинг мослиги қуйидаги схема билан берилган:

$$w(A=0, B=d, C=d+de^{i\alpha}, D=ae^{i\alpha}) \rightarrow z(0, 1, \infty, -1).$$

Бундай мослиқнинг мумкинлиги асослансин.

МАШҚЛАРНИНГ ЖАВОБЛАРИ

1 606

1. $\sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]$.
2. $\sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right]$.
3. $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$.
4. $2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right]$.
5. $\sqrt{29} [\cos (-68^{\circ} 10') + i \sin (-68^{\circ} 10')]$.
6. $\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$.
7. $2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$.
8. $\cos 0 + i \sin 0$
9. $2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$.
10. $\sqrt{29} \left[\cos \left(\pi + \arctg \frac{5}{2} \right) + i \sin \left(\pi + \arctg \frac{5}{2} \right) \right]$.
11. $\cos \pi + i \sin \pi$.
12. $2^{12} (1 + i)$
13. $2^q (1 - i \sqrt{3})$. 14. $(2 - \sqrt{3})^{12}$,
15. $2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{n\alpha}{2} + i \sin \frac{n\alpha}{2} \right)$.
16. $\frac{1 + i \operatorname{tg} n\alpha}{1 - i \operatorname{tg} n\alpha}$. 17. $2^n \left(\cos \frac{n\pi}{6} - i \sin \frac{n\pi}{6} \right)$.
18. $\cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \cdot \sin^4 x$.
19. $6 \cos^5 x \sin x - 20 \cos^3 x \sin^3 x + 6 \cos x \cdot \sin^5 x$.
20. $\frac{6 \operatorname{tg} x - 12 \operatorname{tg}^3 x + 6 \operatorname{tg}^5 x}{1 - 15 \operatorname{tg}^2 x + 15 \operatorname{tg}^4 x - \operatorname{tg}^6 x}$.
21. $\frac{1}{8} (\cos 4x - 2 \cos 2x + 3)$.

$$22. \frac{1}{16} (\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x).$$

$$23. 2 \cos \frac{2n\pi}{3}. \quad 24. \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3}.$$

$$25. \frac{1}{2} \left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4} \right).$$

$$26. \frac{1}{2} \left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4} \right).$$

$$27. \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3} \right).$$

$$28. \frac{1}{2} \left(2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4} \right).$$

$$29. \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{n-4}{3} \pi \right).$$

$$30. \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{8k+1}{12} \pi + i \sin \frac{8k+1}{12} \pi \right), \quad k=0, 1, 2.$$

$$31. \sqrt[6]{10} [\cos (113^\circ 51' + 120^\circ \cdot k) + i \sin (113^\circ 51' + 120^\circ \cdot k)], \quad k=0, 1, 2.$$

$$32. \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{8k-1}{12} \pi + i \sin \frac{8k-1}{12} \pi \right), \quad k=0, 1, 2.$$

$$33. \frac{1}{\sqrt[12]{2}} \left(\cos \frac{24k+19}{72} \pi + i \sin \frac{24k+19}{72} \pi \right), \quad k=0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$34. \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{2k+1}{4} \pi + i \sin \frac{2k+1}{4} \pi \right), \quad k=0, 1, 2, 3.$$

35. Маркази I нуқтада ва радиуси 5 бўлган айлананинг ичи, яъни доира.

36. Маркази — $3I$ нуқтада ва радиуси 4 бўлган доиранинг ташқариси (айлана ҳам шу соҳага киради).

37. $x = -6$ тўғри чизиқнинг чап томони

38. $y = 2$ тўғри чизиқ ва унинг юқорисидаги текислик.

39. Ҳақиқий ўқнинг мусбат томони билан φ ва ψ бурчак ташкил қилувчи тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг ичи, бурчакнинг учи координаталар бошига жойлашган.

40. $x + y = 1$ тўғри чизиқ билан чегараланган ва координаталар бошини ўз ичига олган ярим текислик.

41. Радиуси 2 ва маркази $3 + 4i$ нуқтада бўлган айлана.

42. Фокуслари — 2 ва $+2$ нуқталарда, катта ярим ўқи $\frac{5}{2}$ га тенг бўлган эллипс.

43. $x^2 - y^2 = a$ гиперболалар оиласи.

44. $xy = \frac{a}{2}$ гиперболалар оиласи.

II боб

$$1. \Phi = 0, k = \frac{3}{16}.$$

$$2. \Phi = \frac{\pi}{2}, k = 6.$$

$$3. \Phi = -2 \operatorname{arctg} \frac{4}{3}, k = 75. \quad 4. \Phi = -\frac{5\pi}{6}, k = 12.$$

5. $|z| > 1$ доира ташқариси қисқариб, $|z| < 1$ доира ичи чўзилиб тушади.

III боб

$$1. \frac{l}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right). \quad 2. \frac{1}{2} \left[\left(e + \frac{1}{e} \right) \cos l - l \left(e - \frac{1}{e} \right) \sin l \right].$$

$$3. \frac{\sin 4 - l \sin 2}{2(\cos^2 2 + \sin^2 1)} \quad 4. \frac{1}{2} \ln 13 + \left(2k\pi - \operatorname{arctg} \frac{3}{2} \right) l.$$

$$5. \frac{1}{2} \ln 13 + \left| (2k+1)\pi - \operatorname{arctg} \frac{3}{2} \right| l.$$

$$6. \cos(2k\pi \sqrt{2}) + l \sin(2k\pi \sqrt{2}).$$

$$7. 2^{\sqrt{2}} [\cos(2k+1)\pi \sqrt{2} + l \sin(2k+1)\pi \sqrt{2}].$$

$$8. e^{2k\pi} (\cos \ln 2 + l \sin \ln 2). \quad 9. e^{2k\pi}.$$

$$10. e^{\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi} \quad 11. 5 \cdot e^{\operatorname{arctg} \frac{4}{3} + 2k\pi} \left[\cos \left(\ln 5 - \operatorname{arctg} \frac{4}{3} \right) + \right.$$

$$\left. + l \sin \left(\ln 5 - \operatorname{arctg} \frac{4}{3} \right) \right], \text{ барча мисолларда } k = 0, \pm 1, \pm 2.$$

IV боб

$$1. -2(1-l). \quad 3. a) 1 + \frac{l}{3}; \quad 6) -\frac{\pi}{2}; \quad b) -\pi R^2.$$

$$4. a) -2; \quad 6) 0. \quad 5. \pi l. \quad 6. -2\pi l$$

$$7. -\frac{\pi}{3}. \quad 8. \frac{\pi}{54} \quad 9. -\frac{\pi}{54}. \quad 10. \frac{\pi l}{3e^3}. \quad 11. \frac{3\pi l}{8}.$$

$$12. -\frac{3\pi l}{8}. \quad 13. f(z) = z^2 + l. \quad 14. u = Cxy + B.$$

$$15. u = C \ln(x^2 + y^2) + B.$$

$$16. u = \frac{Cx}{x^2 + y^2} + B. \quad 17. u = C \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + B.$$

$$18. \text{Мавжуд эмас.} \quad 19. v(x, y) = 2xy + y + C.$$

$$20. v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} + C. \quad 21. v(x, y) = \arg z + C.$$

$$22. f(z) = z^2 + (5-l)z - \frac{l}{z} + Cl. \quad 23. f(z) = ze^z + 2l \cos z + z^3 -$$

$$-lz + Cl.$$

$$24. f(z) = \frac{1}{2z} + iz^2 + 3i + C.$$

$$25. f(z) = (1+i)z - 3i + C. \quad 26. f(z) = z^2 + 2 + Ci.$$

$$27. f(z) = ze^z - \frac{1}{z} + Ci.$$

V 605

$$1. R = 1. \quad 2. \infty. \quad 3. 0. \quad 4. 2. \quad 5. e \quad 6. 1. \quad 7. 1. \quad 8. 1. \quad 9. \frac{1}{4}.$$

$$10. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R = \infty. \quad 11. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n)!} \cdot z^{2n}, \quad R = \infty.$$

$$12. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n z^n}{b^{n+1}}, \quad R = \left| \frac{b}{a} \right|. \quad 13. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (n-1) z^n, \quad R = 1.$$

$$14. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad R = 1.$$

VI 606

$$1. -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2} \right)^n. \quad 2. -\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n.$$

$$3. 1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{24z^4} - \frac{19}{120z^5} + \dots \quad 4. \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{19}{z^4} + \frac{65}{z^5} + \dots$$

$$5. 3\text{-тартибли қутблар: } \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i). \quad 6. \text{Муҳим махсус нуқта: } z = 2i.$$

$$7. \text{Биринчи тартибли қутблар: } z = k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$8. \text{Муҳим махсус нуқта: } z = -i.$$

$$9. \text{Қутулиб бўладиган махсус нуқта: } z = 0.$$

VII 606

$$1. z = 2 \text{ да } 7. \quad 2. z = i \text{ да } \frac{1}{2} \left(e + \frac{1}{e} \right). \quad 3. z = i \text{ да } \frac{3}{16i}.$$

$$4. z = 0 \text{ да } 1; \quad z = \pm 1 \text{ да } -\frac{1}{2}. \quad 5. z = -1 \text{ да}$$

$$(-1)^{n+1} \frac{(n+2)(n+3) \dots (2n-1)2n}{(n-1)!}.$$

$$6. z = 6 \text{ да } -\frac{1}{2}. \quad 7. z = k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ да } 0.$$

$$8. z = 1 \text{ да } -\cos 1. \quad 9. z = 2k\pi i \text{ ларда } -1.$$

$$10. \text{Агар } n \text{ тоқ сон бўлса, } (n > 0 \text{ ёки } n < 0); \quad z = 0 \text{ да } 0; \text{ агар } n = 0$$

ёки $n > 0$ — жуфт бўлса $\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!}$.

11. 0. 12. 1. 13. 1 — мусбат ҳақиқий. 18. $\pi^2 \csc \pi a \cdot \operatorname{ctg} \pi a$.

19. $\frac{1}{2a^2} (1 + \pi a \operatorname{cth} \pi a)$. 20. $-\pi i$. 21. $-\frac{\pi \sqrt{2}}{2} i$.

22. $\frac{2\pi a}{\sqrt{(a^2-1)^3}}$. 23. Агар $|p| < 1$ бўлса, $\frac{2\pi}{1-p^2}$; агар $|p| > 1$ бўлса,

$\frac{2\pi}{p^2-1}$. 24. $\pi i \operatorname{sign} a$. 25. $\frac{\pi a}{2}$.

26. $\frac{\pi(2a+b)}{4a^2b(a+b)^2}$. 27. $\frac{\pi}{6e^2}$. 28. $\frac{\pi}{3} e^{-3} (\cos 1 - 3 \sin 1)$.

29. $\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{3}{2e}\right)$. 30. $\frac{b-a}{2} \pi$. 31. $\frac{3\pi}{64} \sqrt{2}$.

32. $\frac{\pi^2}{8}$.

VIII боб

1. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(1-a)^{n+1}}$, агарда a сон $(0, 1)$ интервалга тегишли бўл-

маса, бу ёйилма билан $f(z)$ функция $|z| < 1$ доирада бутунлай ётмайдиган $|z-a| < |1-a|$ доирага аналитик давом эттирилади.

2. $f(z) = \ln \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{(z+z')^n}{n}$, бу қаторнинг яқинлашиш доираси:

$\left|z + \frac{1}{2}\right| < \frac{3}{2}$ 6. $w = \arcsin z$.

7. $w = C \int_{t_0}^t (t-b_1)^{\alpha_1-1} (t-b_2)^{\alpha_2-1} \dots (t-b_n)^{\alpha_n-1} dt$ $t \in \mathbb{C}$,

бунда: $b_k = \frac{a_{k-1}}{a_{k+1}}$, $|b_k| = 1$.

8. $w = \frac{2d}{B\left(\frac{\alpha}{2}, 1-\alpha\right)} \int_0^z t^{\alpha-1} (1-t^2)^{-\alpha} dt$.

АДАБИЁТ

И. И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного ОГИЗ, Гостехиздат. „Наука“.

А. И. Маркушевич. Краткий курс теории аналитических функций, Физматгиз, 1961.

М. А. Лаврентьев ва Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного, 1960 йилги ва ундан кейинги нашрлари, 1965.

Б. А. Фукс ва Б. В. Шабат. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. Физматгиз, 1959.

В. И. Смирнов. Курс высшей математики, III том, 2-қисм.

Г. Л. Лунц ва Л. Э. Эльсгольц. Функции комплексного переменного, Физматгиз, 1958.

Е. Титчмарш. Теория функций, Госиздат технико-теоретической литературы, 1951.

Энциклопедия элементарной математики. III том, 1952.

Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции, ОГИЗ, 1941.

Г. Виттих. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. Госиздат физ-мат литературы, 1960.

М. А. Евграфов. Аналитические функции. „Наука“, Москва, 1965.

А. В. Бицадзе. Лекции по теории аналитических функций комплексного переменного, „Наука“, 1959.

Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. Физматгиз, 1960.

Н. М. Гюнтер ва Р. О. Кузьмин. Сборник задач по высшей математике, 3-том. Гостехиздат, 1963.

М У Н Д А Р И Ж А

Биринчи нашрига сўз боши	3
Иккинчи нашрига сўз боши	4

I б о б. Комплекс сонлар

1-§. Комплекс соннинг таърифи	5
2-§. Комплекс сонлар устида амаллар	7
3-§. Комплекс соннинг геометрик тасвири ва комплекс текислик	9
4-§. Комплекс соннинг тригонометрик шакли	10
5-§. Комплекс сонларни даражага кўтариш ва ялпиздан чиқариш	12
6-§. Соҳа тўғрисида тушунча. Жордан чизиги	26
7-§. Баъзи бир мисоллар	28
8-§. Кетма-кетликлар ва уларнинг лимитлари	34
9-§. Стереографик проекция. Чексиз узоқлашган нуқта	37
Машқлар	39

II б о б. Комплекс ўзгарувчининг функциялари ва уларнинг ҳосилалари

1-§. Комплекс ўзгарувчининг функциялари	40
2-§. Мураккаб ва тескари функциялар	45
3-§. Функциянинг лимити ва узлуксизлиги	46
4-§. Комплекс ўзгарувчи функциясининг ҳосиласи	52
5-§. Аналитик функциялар	56
6-§. Ҳосила аргументининг ва модулининг геометрик маъноси	57
7-§. Конформ акслантириш	60
Машқлар	64

III б о б. Элементар функциялар ва уларга мос конформ акслантиришлар

1-§. Чизикли функция	65
2-§. Каср чизикли функция	67
3-§. Кўрсаткичли функция	80
4-§. Тригонометрик функциялар	83
5-§. Гиперболик функциялар	86
6-§. Логарифмик функция ва ихтиёрий даражали функция	87
7-§. Тескари тригонометрик ва тескари гиперболик функциялар	94
8-§. Айрим элементар функцияларга мос акслантиришлар. Риман сирти ҳақида тушунча	97
Машқлар	115

IV б о б. Комплекс ўзгарувчининг функциясидан олинган интеграл

1-§. Интегралнинг таърифи	115
2-§. Интегралнинг асосий хоссалари	118
3-§. Интегрални ҳисоблаш	120
4-§. Коши теоремаси	124
5-§. Бошланғич функция ва аниқмас интеграл	139
6-§. Логарифмик функциянинг интеграл орқали ифодаси	147
7-§. Кошининг интеграл формуласи	149
8-§. Модулининг максимум принципи	153
9-§. Коши типдаги интеграл	155
10-§. Гармоник функциялар	168
Машқлар	186

V б о б. Комплекс ҳадли қаторлар

1-§. Сонли қаторлар	188
2-§. Қаторлар устида амаллар	193
3-§. Функционал қаторлар	197
4-§. Функционал қаторни интеграллаш	202
5-§. Функционал қаторни дифференциаллаш	204
6-§. Даражали қаторлар	207
7-§. Даражали қаторнинг яқинлашиш доираси ва радиуси. Коши— Адамар формуласи	209
8-§. Тейлор қатори	214
9-§. Элементар функцияларни даражали қаторларга ёйиш	218
10-§. Коши тенгсизлиги Лиувилл теоремаси	222
11-§. Алгебранинг асосий теоремаси	223
12-§. Функциянинг ноллари	224
13-§. Ягоналик теоремаси	227
14-§. Аналитик функцияларни даражали қаторга ёйишнинг баъзи бир усуллари	229
15-§. Гармоник функцияни қаторга ёйиш	235
Машқлар	238

VI б о б. Махсус нуқталар. Лоран қатори

1-§. Манфий даражали қатор	239
2-§. Лоран қатори	240
3-§. Функцияни Лоран қаторига ёйиш	243
4-§. Тўғри ва махсус нуқталар	248
5-§. Ажралган махсус нуқталар	249
6-§. Қутулиб бўладиган махсус нуқта	250
7-§. Қутблар	251
8-§. Муҳим махсус нуқталар	255
9-§. Чексиз узоқлашган нуқта атрофи	258
10-§. Бутун ва мероморф функциялар	261
Машқлар	265

VII б о б. Қолдиқлар назарияси ва унинг татбиқлари

1-§. Функциянинг ажралган махсус нуқта атрофидаги қолдиғи	266
2-§. Қутбга нисбатан функциянинг қолдиғини ҳисоблаш	268
3-§. Функциянинг чексиз узоқлашган нуқтага нисбатан қолдиғи	275
4-§. Логарифмик қолдиқ. Аргумент принципи	278
5-§. σ g ни оддий қасрларга ёйиш	283
6-§. Бутун функцияларни чексиз кўпайтмаларга ёйиш	289
7-§. Қолдиқлар ёрдами билан қаторлар йиғиндисини ҳисоблаш	299
8-§. Қолдиқлар назарияси ёрдами билан аниқ интегралларни ҳисоблаш	301
Машқлар	321

VIII б о б. Аналитик давом эттириш ва конформ акслантиришнинг умумий принциплари

1-§. Аналитик давом эттириш	323
2-§. Симметрия принципи	331
3-§. Конформ акслантиришнинг умумий принциплари	335
4-§. Кристоффель—Шварц формуласи	346
5-§. Якоби эллиптик функциялари ҳақида тушунча	354
Машқлар	358
Машқларнинг жавоблари	360
Адабиёт	365

На узбекском языке

*Шермат Ташматович Максудов,
Махмуд Салахиддинович Салахиддинов,
Сагди Хасанович Сиражиддинов*

ТЕОРИЯ ФУНКЦИИ
КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Исправленное второе издание

Учебное пособие для студентов
университетов
и пединститутов

Издательство „Уқитувчи“
Ташкент — 1979

Биринчи нашриник
махсус муҳаррири М. ХОЛИҚОВ

Редакторлар И. Аҳмиджонов, У. Хусанов
Бадний редактор Е. И. Соин
Техредактор Б. Гольдштейн
Корректор Ж. Нуриддинова

ИБ № 1091

Теришга берилди 9. 11. 1978 й. Босишга рухсат этилди 21. 06 1979 й. Формати 60×90¹/₁₆. Тип
коғози № 3. Кегли 10,8 шпонсиз. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 23.0. Нашр
24, 3. Тиражи 10000. Заказ № 175. Баҳоси 90 т.

„Уқитувчи“ нашриёти. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома 10—78

Нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари бўшқармасининг Морозов ном.
босмахонаси. Самарқанд, У. Турсунов кўчаси, 82. 1979 й.

Гипография им. Морозова, Областного управления по делам издательства, полиграфии и
книжной торговли, Самарканд, ул. У. Турсунова, 82.