И. И. Мельников, И. Н. Сергеев

КАК РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ на вступительных экзаменах

И. И. Мельников, И. Н. Сергеев

КАК РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
1990

ББК 22.10
М 48
УДК 511+512+517

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук *М. К. Потапов*,
канд. физ.-мат. наук *А. А. Фомин*

Мельников И. И., Сергеев И. Н.

М 48 Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. — 303 с.: ил.

ISBN 5—211—00319—5.

В книге изложены ключевые методы решения задач по математике, демонстрирующиеся на примере задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах в МГУ в последние годы. Большое внимание уделено объяснению логики решений, подробному анализу типичных ошибок абитуриентов, особенностям конкурсных задач на различных факультетах. Освещены следующие темы: решение алгебраических уравнений и неравенств, тригонометрические уравнения и неравенства, текстовые задачи, логарифмические и показательные уравнения и неравенства, задачи с параметрами, свойства функций и графики и др. Приводится большое количество задач для самостоятельного решения.

Для учащихся средних школ и абитуриентов, готовящихся к вступительным экзаменам по математике в вузы, может быть использована учителями средних школ.

М $\frac{4306020500-028}{077(02)-90}$ 163—89 ББК 22.10

ISBN 5—211—00319—5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Беря в руки эту книгу с ее многообещающим названием, читатель, вероятно, подумает, что перед ним — собрание рецептов для решения задач, предлагаемых обычно на вступительных экзаменах в вузы. Отчасти так оно и есть. Но именно отчасти, потому что претендовать на полноту охвата всех существующих рецептов настоящая книга никоим образом не может. Да и не в этом состоит ее основная цель.

С одной стороны, в книге делается попытка выделить, так сказать, ключевые подходы к решению задач, правильное применение которых, по мнению авторов, исключает ошибки. С другой стороны, здесь разобраны и отвергнуты наиболее популярные у поступающих рассуждения, правдоподобные с виду, но приводящие к определенным осложнениям и в конечном счете к ошибкам в экзаменационных работах. Иными словами, в книге рассказано не только о том, как надо, но также и о том, как не надо решать задачи по математике на вступительных экзаменах.

К обилию правил, советов и рекомендаций абитуриенту, содержащихся в различных главах книги, хотелось бы добавить еще четыре важных наставления, несоблюдение которых как раз и служит основной причиной ошибок на экзаменах (да простит нас читатель за несколько грубоватый тон самих наставлений).

1. *Не делай глупых ошибок,* т. е. тех очевидных ошибок в вычислениях, в знаках, в формулах и т. д., которые порождаются обыкновенной невнимательностью, несобранностью, неаккуратностью (§ 1.А, 1.Г, 4.Б, 5.Г; здесь и далее в скобках указаны параграфы настоящей книги, содержащие комментарии к наставлениям).

2. *Следи за областью допустимых значений* неизвестных, участвующих в решении задачи, особенно за изменением этой области при различных преобразованиях (§ 1.В, 2.Б, 2.Д, 3.Г, 4.А, 5.Б, 5.В, 9.А).

3. *Рассуждай логично* при выяснении вопросов о равносильности уравнений, неравенств, утверждений и т. п. или о том, какое из них является следствием другого (§ 1.Б, 2.В, 2.Е, 2.З, 3.Б, 3.Д, 6.Б, 6.Д, 7.Е).

4. *Думай, что делаешь* (полезно всегда, не только на вступительном экзамене): разберись, в чем именно состоит задание, и помни о нем на протяжении всего решения; применяй известные методы не механически, а творчески с учетом особенностей задачи (§ 1.Е, 2.А, 2.Ж, 3.А, 5.А, 5.Ж, 6.А, 7.А, 8.А, 8.Г, 9.В).

А теперь попытаемся ответить на некоторые вопросы, обычно волнующие абитуриентов перед экзаменом. В своих ответах руководствуемся установками, принятыми в Московском университете (в других вузах они могут быть в чем-то иными).

Каким образом оценивается письменная экзаменационная работа по математике? Довольно часто приходится наблюдать такую печальную картину: абитуриент, вернувшись с письменного экзамена, утверждает, что он сделал или написал все или почти все предложенные ему задачи, в то время как его работа впоследствии оказывается оцененной неудовлетворительно. Все дело в том, что экзаменационная комиссия и абитуриент подходят к оценке работы с разными мерками. Комиссия учитывает прежде всего не что иное, как общее количество решенных в работе задач, причем решенных правильно, а не неправильно. Абитуриент же порой предполагает, что положительную оценку можно заработать за половинчатые или вовсе не верные «решения».

Более трудным является вопрос о том, что такое правильное решение. Ответ на него мы не приводим тотчас же — он вытекает из всего дальнейшего содержания книги. Отметим здесь лишь то, что на правильность решения и, стало быть, на оценку не влияет рациональность или нерациональность использованного абитуриентом метода.

Каковы требования к оформлению письменных работ? Главным и, по существу, единственным требованием к решению задачи была и остается его математическая правильность. В соответствии с этим текст решения должен быть оформлен достаточно подробно и разборчиво. О допустимой степени подробности можно судить, например, по тем решениям, которые приведены в нашей книге (в некоторых случаях мы ограничились лишь обсуждением задач, и тогда подзаголовок «решение» отсутствует). Что же касается разборчивости текста, то, надо признаться, для некоторых поступающих эта сторона оформления работы представляет собой настоящую проблему. За небрежностью почерка или обилием исправлений зачастую скрывается неуверенность в знаниях или нечеткость в рассуждениях.

Как готовиться к письменному экзамену по математике? Некоторые считают, что для успешной сдачи экзамена нужно прорешать как можно больше задач из различных сборников, посвященных вступительным экзаменам. Нам кажется, что чрезмерное увлечение одним количеством не идет на пользу делу, поскольку переносит центр тяжести на бездумное и утомительное отрабатывание отдельных приемов. В настоящей книге содержится довольно обширная подборка разнообразных задач, многие из которых взяты непосредственно из вариантов вступительных экзаменов: в скобках после номера задачи указано, на каком факультете МГУ и в каком году предлагалась данная задача. Желающие порешать полные комплекты задач того или иного факультета найдут их в гл. 10.

Работать над этой книгой лучше всего следующим образом: сначала внимательно изучать теоретический материал какого-либо параграфа, а затем закрепить его на задачах, помещенных в конце параграфа. При этом, разумеется, какие-то параграфы или целые главы можно пропускать в зависимости от подготовленности читателя. Надеемся, что наша книга поможет абитуриенту подготовиться к вступительным экзаменам по математике и укрепит его веру в свои силы. Желаем успеха!

ГЛАВА 1. ЧИСЛА И ВЫРАЖЕНИЯ

§ 1.А. ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОШИБКАХ

Ни для кого не секрет, что многие поступающие относятся к арифметическим ошибкам весьма пренебрежительно, так сказать, свысока. По их мнению, гораздо важнее найти способ, как посчитать искомую величину в принципе. А всякие там «мелочи», связанные с возможными погрешностями, обычно в расчет не берутся. Довольно часто от абитуриентов, допустивших ошибки в письменных работах, можно услышать примерно такие оправдательные речи: «Да ведь это всего-навсего арифметическая ошибка, а задачу-то я сделал правильно!»

Оставив в стороне вопрос о происхождении таких взглядов на правильность решения задачи, отметим в этой связи, что любая ошибка есть ошибка независимо от причины ее возникновения: то ли из-за невнимательности (в частности, при переписывании), то ли из-за незнания таблицы умножения или вообще плохой памяти, то ли, наконец, просто из-за неразборчивого почерка. Чем бы ни объяснялась ошибка при решении, скажем, следующей задачи, признать эту задачу решенной правильно нельзя.

1.А.1 (психфак — 84). Вычислить, не используя микрокалькулятор:

$$\left(\frac{3\left(\frac{17}{90}-0,125:1\frac{1}{8}\right):480}{\left(7:1,8-2\frac{1}{3}:1,5\right):2\frac{2}{3}}\right)^{-1}:\left(\frac{679\cdot 10^{-2}}{0,7}+0,3\right).$$

Решение.

$$\left(\frac{3\left(\frac{17}{90}-\frac{1}{8}\cdot\frac{8}{9}\right)\cdot\frac{1}{480}}{\left(7\cdot\frac{5}{9}-\frac{7}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{8}}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{679}{70}+\frac{3}{10}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{3\cdot\frac{17-10}{90}\cdot\frac{1}{480}}{\frac{7(5-2)}{9}\cdot\frac{3}{8}}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{97+3}{10}\right)^{-1}=\left(\frac{3\cdot 7\cdot 9\cdot 8\cdot 100}{90\cdot 480\cdot 7\cdot 3\cdot 3\cdot 10}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{1}{180}\right)^{-1}=180.$$

Ответ: 180.

Далеко не всем на экзамене удалось безошибочно проделать указанные в задаче выкладки. И дело здесь, по-видимому, в отсутствии у абитуриентов необходимой культуры и навыков счета. Так, если между какими-то числами стоит знак умножения, то, по мнению поступающего, нужно непременно в явном виде найти произведение этих чисел, если стоит знак сложения, то нужно найти сумму и т. д. Такая непосредственность привела многих абитуриентов, решавших задачу 1.А.1 на экзамене, к увеличению количества действий и притом с довольно громоздкими числами. Некоторые даже пытались делить указанные в задаче числа столбиком, получив, разумеется, лишь приближенный ответ.

Вывод: *при вычислениях полезно не спешить сразу производить выкладки, а пытаться сначала по возможности их упростить или на чем-то сэкономить.* Наибольшего эффекта в этом отношении можно достигнуть с помощью таких преобразований, как сокращение дроби, вынесение множителей за скобки, а в некоторых случаях даже с помощью перестановки слагаемых местами.

Производить вычисления приходится в процессе решения практически любой задачи. Но особенно часто требуется искать корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c. Опыт показывает, что абитуриенты обычно торопятся посчитать отдельно значение дискриминанта

$$D=b^2-4ac$$

и только затем (при $D\geqslant 0$) ищут корни

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

Такой способ не всегда рационален.

1.А.2 (мехмат — 85). Решить уравнение

$$6\sin x-\frac{1}{6}=\sqrt{34\sin x-\frac{35}{36}}.$$

После замены $\sin x=y$ и возведения в квадрат обеих частей исходного уравнения получается уравнение

$$36y^2-36y+1=0.$$

Если «честно» найти дискриминант

$$D=36^2-4\cdot 36=1152,$$

то выражения для корней

$$y_{1,2}=\frac{36\pm\sqrt{1152}}{72}$$

без дополнительного их преобразования оказываются не слишком удобными с точки зрения проверки условий

$$34y-\frac{35}{36}\geqslant 0,\ 6y-\frac{1}{6}\geqslant 0,\ |y|\leqslant 1.$$

Получается двойная работа: исследуемое выражение сознательно усложняется с тем, чтобы впоследствии подвергнуться упрощению. Если же предусмотрительно провести выкладки чуть более экономно

$$y_{1,2}=\frac{36\pm\sqrt{36^2-4\cdot 36}}{2\cdot 36}=\frac{36\pm 6\sqrt{36-4}}{2\cdot 36}=\frac{6\pm 2\sqrt{16\cdot 2}}{12}=\frac{3\pm 2\sqrt{2}}{6},$$

то для полученных корней уже совсем нетрудно проверить оценку $|y|\leqslant 1$ (кстати, известное облегчение в некоторых случаях доставляет формула корней квадратного трехчлена с четным коэффициентом при неизвестной в первой степени). Что же касается остальных неравенств, подлежащих проверке, то первое из них выполняется для корней автоматически (см. задачу 2.3.1), а второе в данном случае является следствием уравнения, в силу которого имеем

$$6\left(6y-\frac{1}{6}\right)=36y-1=36y^2\geqslant 0.$$

Ответ: $(-1)^n\arcsin\frac{3\pm 2\sqrt{2}}{6}+\pi n,\quad n\in\mathbf{Z}.$

Надеемся, что нам удалось в какой-то степени зажечь читателя идеей об экономии усилий за счет побочных соображений.

1.А.3 (мехмат — 78). Разность

$$\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$$

является целым числом. Найти это число.

Подавляющее большинство абитуриентов на экзамене обозначили искомое число через x и получили уравнение

$$x^2=|40\sqrt{2}-57|+2\sqrt{|40\sqrt{2}-57|(40\sqrt{2}+57)}+40\sqrt{2}+57.$$

Далее, раскрыв знаки модуля (кстати, некоторые абитуриенты) сделали это неверно, но о модулях речь впереди, в § 1.Е)

$$|40\sqrt{2}-57|=57-40\sqrt{2},$$

многие правильно определили, что правая часть равна 100. И вот, когда уже все технические трудности были позади, началось что-то невообразимое. Одни абитуриенты, не долго думая, нашли, что $x=10$. Другие, памятуя, что уравнение $x^2=100$ равносильно «уравнению» $x=\pm 10$, включили в ответ оба значения: $+10$ и -10. И только третьи сообразили, что искомая разность определена однозначно и не может принимать сразу двух значений, а коль скоро уменьшаемое меньше вычитаемого, то сама разность отрицательна и ответ таков: —10.

Ошибки, допущенные абитуриентами при решении этой задачи, вряд ли можно отнести к разряду арифметических. Они носят скорее логический характер. Но ведь весь вопрос состоит не в том, чтобы грамотно классифицировать ошибки, а как раз в том, чтобы не допускать их вовсе. Основное предназначение настоящей книги — подсказать будущему абитуриенту, где его могут подстерегать неприятности при решении задач вступительных экзаменов и какими стандартными способами лучше безошибочно обходить возникающие при этом препятствия.

Задачи

1.А.4. Вычислить, не используя микрокалькулятор:

а) (психфак — 84) $\left(\frac{594\cdot 10^{-2}}{0.6}-0{,}9\right):\left(\frac{\left(27:1\frac{2}{7}+1{,}2:0{,}04\right):\frac{1}{70}}{\left(3\frac{1}{5}:4+1{,}5\cdot 0{,}4\right):0{,}02}\right)^{-1}$;

б) $\frac{\left(0{,}666\ldots+\frac{1}{3}\right):0{,}25}{0{,}12333\ldots:0{,}0925}+12{,}5\cdot 0{,}64$;

в) $\frac{\sqrt{6{,}3\cdot 1{,}7}\cdot\left(\sqrt{\frac{6{,}3}{1{,}7}}-\sqrt{\frac{1{,}7}{6{,}3}}\right)}{\sqrt{(6{,}3+1{,}7)^2-4\cdot 6{,}3\cdot 1{,}7}}$.

1.А.5. Решить уравнение:

а) $19x^2-570x+4199=0$;

б) $\frac{15{,}2\cdot 0{,}25-48{,}51:14{,}7}{x}=\frac{\left(\frac{13}{44}-\frac{2}{11}-\frac{5}{66}:2\frac{1}{2}\right)\cdot 1\frac{1}{5}}{3{,}2+0{,}8\left(5\frac{1}{2}-3{,}25\right)}$.

1.А.6. Вычислить значение выражения:

а) $\frac{1}{y(xyz+x+z)}-\frac{1}{x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}}:\frac{1}{x+\frac{1}{y}}$ при $x=3$, $y=\sqrt{3}$, $z=-\sqrt{5}$;

б) $x^8+\frac{1}{x^8}$, если $x+\frac{1}{x}=3$;

в) $\sqrt{(8-x)(5+x)}$, если $\sqrt{8-x}+\sqrt{5+x}=5$;

г) $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2}$, если $\sqrt{25-x^2}-\sqrt{15-x^2}=2$;

д) xy, если $x+y=\sqrt{26}$, $x-y=\sqrt{22}$.

1.А.7 (мехмат — 78). Разность

$$\sqrt{|12\sqrt{5}-29|}-\sqrt{12\sqrt{5}+29}$$

является целым числом. Найти это число.

1.А.8. Доказать рациональность числа:

а) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$;

б) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3/2}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3/2}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

Ответы

1.А.4. а) 459; б) 11; в) 1. **1.А.5.** а) 13; 17; б) 25. **1.А.6.** а) —1; б) 2207; в) 6; г) 5; д) 1. **1.А.7.** —6.

§ 1.Б. ЧИСЛОВЫЕ ОЦЕНКИ

Довольно часто в ходе решения задачи возникает необходимость сравнивать какие-либо числа между собой. Например, уже в задаче 1.А.3 потребовалось определить знак числа $40\sqrt{2}-57$, а в задаче 1.А.2 фактически понадобилось расположить в порядке возрастания числа $\dfrac{3\pm 2\sqrt{2}}{6}$ и ± 1. Обычно для грубой прикидки ответа на возникший вопрос используются приближенные вычисления. Так, если в указанных примерах положить $\sqrt{2}\approx 1{,}41$, то получаются оценки

$$40\sqrt{2}-57\approx 40\cdot 1{,}41-57=56{,}4-57<0,$$

$$\frac{3+2\sqrt{2}}{6}\approx\frac{3+2\cdot 1{,}41}{6}=\frac{5{,}82}{6}<1,$$

$$\frac{3-2\sqrt{2}}{6}\approx\frac{3-2\cdot 1{,}41}{6}=\frac{0{,}18}{6}>-1.$$

Казалось бы, все ясно. Однако одно из самых распространенных среди абитуриентов заблуждений состоит именно в попытке выдать такого типа выкладки за доказательства полученных оценок. Давайте разберемся в этих «доказательствах». Во-первых, сама запись $\sqrt{2}\approx 1{,}41$ без указания точности приближения, строго говоря, лишена смысла: ведь с равным успехом можно было написать $\sqrt{2}\approx 1{,}4$, $\sqrt{2}\approx 1$ или даже $\sqrt{2}\approx 0$. Во-вторых, с точки зрения логики ни в одной из трех выписанных выше цепочек пока не доказано ровным счетом ничего, что могло бы послужить аргументом для обоснования самих оценок. В самом деле, так как имеет место лишь неравенство $\sqrt{2} > 1{,}41$, то справедлива оценка

$$40\sqrt{2} - 57 > 40\cdot 1{,}41 - 57 = -0{,}6,$$

из которой никоим образом не следует отрицательность числа $40\sqrt{2} - 57$. Аналогичные, столь же бесплодные оценки, по существу, содержатся в двух других цепочках:

$$\frac{3+2\sqrt{2}}{6} > \frac{3+2\cdot 1{,}41}{6} = 0{,}97 < 1,$$

$$\frac{3-2\sqrt{2}}{6} < \frac{3-2\cdot 1{,}41}{6} = 0{,}03 > -1.$$

«Так, что же, — возразит читатель, — выходит, с помощью приближенных вычислений вообще нельзя ничего доказывать?» Никто этого не утверждает. Однако необходимо четко осознавать разницу между строгим доказательством и грубой прикидкой. Для доказательства представляют интерес только те *цепочки неравенств* вполне определенного смысла, которые действительно позволяют сравнивать первое и последнее из записанных в них выражений. Например, цепочка

$$40\sqrt{2} - 57 < 40\cdot 1{,}42 - 57 = 56{,}8 - 57 < 0$$

и впрямь служит доказательством отрицательности числа $40\sqrt{2} - 57$. Отметим, что большая точность приближений не является самоцелью — гораздо важнее следить за расстановкой в цепочке правильных знаков неравенств (зависящих от того, какое из приближений — сверху или снизу — берется в конкретном случае), например:

$$\frac{3+2\sqrt{2}}{6} < \frac{3+2\cdot 1{,}5}{6} = 1.$$

Описанный метод цепочек неравенств не всегда удобен, особенно если сравниваемые числа слишком близки друг к другу. Кроме того, он предполагает, что доказываемая оценка уже установлена заранее. Другой хорошо всем известный метод состоит в преобразовании предполагаемого неравенства по правилам, не нарушающим его знак, с целью *сведения к очевидному неравенству*.

1.Б.1 (ВМК-82). Какое из чисел больше:

$$\sqrt{5} \text{ или } 9^{\log_3 \sqrt{2} + \log_{1/9} 8/9}?$$

Преобразовав второе число к виду

$$3^{2\log_3 \sqrt{2}} \cdot 9^{-\log_9 8/9} = \frac{2}{8/9} = 2{,}25$$

(заметим, что без ошибок это удалось сделать на экзамене далеко не всем), многие абитуриенты оформили доказательство неравенства $\sqrt{5}<2{,}25$ следующим образом:

$$\sqrt{5}<\frac{9}{4}\rightarrow 4\sqrt{5}<9\rightarrow 16\rightarrow 16\cdot 5<9^2\rightarrow 80<81 \text{ — истинно.}$$

(Напомним, что символ $\Rightarrow$ обычно используется для обозначения логического следствия.)

Ответ: $9^{\log_3\sqrt{2}+\log_{\frac{1}{9}}\frac{8}{9}}$.

Несмотря на кажущуюся обоснованность сделанного вывода, в приведенном тексте нет и намека на доказательство! Точный логический анализ показывает, что возможность вывести из какого-либо утверждения верное следствие отнюдь не доказывает справедливость предпосылки. Например, возведением в квадрат обеих частей заведомо ложного равенства $-1=1$ можно получить истинное следствие $(-1)^2=1^2$. Однако исходное равенство не становится от этого сколько-нибудь более правдоподобным.

Для того чтобы в разобранном выше лжедоказательстве поставить логику «с головы на ноги», достаточно провести рассуждение в обратную сторону, т. е. из некоего истинного неравенства вывести требуемое:

$$80<81\rightarrow 16\cdot 5<9^2\rightarrow 4\sqrt{5}<9\rightarrow\sqrt{5}<\frac{9}{4}.$$

Не следует думать, что при доказательстве оценок необходимо пользоваться ровно одним из двух означенных методов. Единственным требованием к доказательству была и остается его математическая правильность. Разумеется, применимы различные способы, которые, как показывает опыт, так или иначе сводятся к серии оценок, доказываемых обычно разобранными выше методами.

1.Б.2. Какое из чисел больше:

$\log_4 3$ или $\sin 2$?

Трудно ожидать, чтобы преобразованиями неравенства

$\log_4 3 \vee \sin 2$

(здесь символ $\vee$ обозначает один, пока неизвестно какой из знаков $<$, $>$ или $=$) можно было получить какое-либо очевидное числовое неравенство: уж слишком разнородны выражения $\log_4 3$ и $\sin 2$. Запоминать же приближенные значения таких чисел специально для экзамена вряд ли под силу кому бы то ни было. В этой ситуации приходит на помощь следующая идея: *вставить между данными числами одно или несколько значений*, с которыми их уже относительно легко сравнивать. Например, годятся значения 0,8 и $\sin\frac{2\pi}{3}$.

Решение. $\log_4 3 < \frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2} < \sin 2$, так как:

1) $3^5 = 243 < 256 = 4^4 \Rightarrow 5\log_4 3 < 4$;

2) $(4\cdot 2)^2 = 64 < 75 = (5\sqrt{3})^2 \Rightarrow \frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\frac{\pi}{2} < 2 < \frac{2\pi}{3} < \pi \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{2\pi}{3} < \sin 2$.

Ответ: $\sin 2$.

1.Б.3. (экономфак — 78). Найти все корни уравнения

$$|x^2 + x - 1| = 2x - 1,$$

удовлетворяющие неравенству $x < \sqrt{3}/3$.

Решение. $\begin{cases} |x^2+x-1| = 2x-1, \\ x < \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$

Рассмотрим два случая:

1) $\begin{cases} x^2+x-1 \geqslant 0, \\ x^2+x-1 = 2x-1, \\ x < \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1 \geqslant 0, \\ x(x-1) = 0, \\ x < \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ решений нет,

так как $0^2 + 0 - 1 < 0$ и $1 > \sqrt{3}/3$;

2) $\begin{cases} x^2+x-1 < 0, \\ -(x^2+x-1) - 2x-1, \\ x < \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 > 0, \\ \left(x - \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x - \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right) = 0, \\ x < \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$, так как $2\cdot\frac{-3-\sqrt{17}}{2} - 1 < 0$,

$2\cdot\frac{-3+\sqrt{17}}{2} - 1 > 0$ (ибо $\sqrt{17} > 4$) и

$\frac{-3+\sqrt{17}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3}$ (действительно: $25 < 27 \Rightarrow 5 < 3\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 60 < 36\sqrt{3} \Rightarrow 9\cdot 17 < 4\cdot 3 + 2\cdot 9\cdot 2\sqrt{3} + 81 \Rightarrow (3\sqrt{17})^2 <$

$< (2\sqrt{3}+9)^2 \Rightarrow -9 + 3\sqrt{17} < 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{-3+\sqrt{17}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3}$).

Ответ: $\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$.

Решение этой задачи изобилует доказательствами различных, в том числе и довольно тонких, числовых оценок. Поэтому здесь немаловажное значение приобретает возможное сокращение количества проверяемых неравенств или хотя бы качественное их упрощение. В первом из разобранных выше случаев мы обошлись без решения неравенства $x^2+x-1\geqslant 0$ (равносильного неравенству $\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\geqslant 0\right)$ путем самой обыкновенной подстановки в него корней уравнения из той же системы. Во втором случае также удалось несколько облегчить работу с подобным неравенством, но с помощью замены его более простым: $2x-1>0$. Такая замена привела к равносильной системе в силу содержащегося в системе уравнения $-(x^2+x-1)=2x-1$.

Более подробно методы решения уравнений рассмотрены в гл. 2. Кроме того, при выводе оценок существенную роль может сыграть знание свойств монотонности тех или иных функций (см. гл. 8).

Задачи

1.Б.4. Какое из чисел больше:

а) (ВМК—82) $\sqrt[3]{18}$ или $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2-\frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}} 5}$;

б) (геол. ф-т—82) $\sqrt{1-2\sin\frac{3\pi}{2}}$ или $\sqrt[3]{5\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}$;

в) $\log_2 3$ или $\log_5 8$;

г) 2^{300} или 3^{200};

д) $\frac{9}{\sqrt{11}-\sqrt{2}}$ или $\frac{6}{3-\sqrt{3}}$;

е) $\sin 3$ или $\log_3 2$?

1.Б.5. Доказать неравенство:

а) $\log_4 9>\log_5 11$;

б) $\log_2 7+\left(3+\cos\frac{15}{7}\right)\cdot\log_7 2<4$;

в) $2\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}>1$;

г) $\sqrt[3]{2}>\sqrt[7]{5}$.

1.Б.6. Расположить в порядке возрастания числа:

а) $\sqrt{0{,}762}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\frac{22}{7}$, $\sqrt{10}$, π.

1.Б.7 (экономфак — 78). Найти все корни уравнения

$$1+x+|x^2-x-3|=0,$$

удовлетворяющие неравенству $x+\sqrt{14}/3>0$.

1.Б.8 (ВМК — 79). Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. В арифметической прогрессии первый член равен 3, разность равна 6. В геометрической прогрессии первый член равен 3, знаменатель равен $\sqrt{2}$. Выяснить, что больше: сумма первых шести членов арифметической прогрессии или сумма первых восьми членов геометрической прогрессии.

1.Б.9 (мехмат — 85). Из трех значений a: $-1{,}2$; $-0{,}67$; $-0{,}66$ найти те значения, при которых уравнение

$$(2^{a+4}+15(x+a))(1+2\cos(\pi(a+x/2)))=0$$

имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $0\leqslant x\leqslant 1$.

Ответы

1.Б.4. а) $\sqrt[3]{18}$; б) $\sqrt{1-2\sin\frac{3\pi}{2}}$; в) $\log_2 3$; г) 3^{200}; д) $\frac{6}{3-\sqrt{3}}$; е) $\log_3 2$.

1.Б.6. а) $\frac{17}{20}<\frac{\sqrt{3}}{2}<\sqrt{0{,}762}$; б) $\pi<\frac{22}{7}<\sqrt{2}+\sqrt{3}<\sqrt{10}$.

1.Б.7. $1-\sqrt{5}$.

1.Б.8. Сумма первых восьми членов геометрической прогрессии.
1.Б.9. $-1{,}2$; $-0{,}67$.

§ 1.В. УСЛОВИЯ, ПРИ КОТОРЫХ ВЫРАЖЕНИЕ ИМЕЕТ СМЫСЛ

При решении целого ряда задач приходится задумываться о том, для каких значений переменных данные выражения имеют смысл. К сожалению, не всегда на вступительных экзаменах абитуриенты демонстрируют полную ясность в этом далеко не праздном вопросе, а чаще всего просто забывают о нем. В настоящем параграфе обсудим наиболее коварные операции над числами, не выполнимые в принципе ни при каких обстоятельствах, но вызывающие порой неожиданные затруднения на экзаменах.

Сюда относится, прежде всего, давно набившее всем оскомину *деление на нуль*. Несмотря на то, что эта операция категорически запрещена, некоторые поступающие все же ухитряются в конкретных случаях незаметно ее произвести. Например, выражение типа $1:(1/x)$ иногда без всяких оговорок расшифровывается по известному правилу: чтобы поделить число на дробь, надо поделить его на числитель дроби и умножить на ее знаменатель. При этом полностью игнорируется вопрос о смысле самой дроби $1/x$ при $x=0$, поскольку окончательное выражение $\frac{1\cdot x}{1}=x$ имеет смысл уже при всех значениях x.

Подобная же картина наблюдается и при других действиях с выражениями, таких как сложение дробей или сокращение числителя дроби со знаменателем. Так, многие, нимало не смущаясь, полагают, что выражение $\frac{1}{x}-\frac{1}{x}$ тождественно равно нулю, а дробь $\frac{x}{x}$ — единице. В то же время достаточно лишь взглянуть на эти выражения, чтобы убедиться в их бессмысленности при $x=0$ (см. задачи 2.Б.2, 3.Г.2). Операцию деления полезно усматривать и тогда, когда она фигурирует, так сказать, в скрытом виде, как, например, в следующей задаче.

1.В.1. (мехмат — 84). Среди корней уравнения

$$\frac{\sin 2\pi x}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}=0$$

найти тот, который имеет наименьшее расстояние от числа $\sqrt{11}$ на числовой прямой.

На экзамене некоторые абитуриенты прежде всего принялись за поиск всех корней исходного уравнения, в чем мало кто преуспел. А между тем перед ними была поставлена более прозаическая задача: указать только один корень, ближайший к числу $\sqrt{11}$. Для этого достаточно было сначала последовательно перебрать корни $x=3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, $5, \ldots$ уравнения

$$\sin\pi x=0,$$

расположенные на числовой прямой справа от числа $\sqrt{11}$, до тех пор пока среди них не отыщется наименьшее значение x, при котором имеет смысл левая часть исходного уравнения. Затем, аналогично, можно было отыскать значение, ближайшее слева к числу $\sqrt{11}$, и, наконец, выяснить, на каком из двух найденных корней реализуется наименьшее расстояние.

Претворение в жизнь описанной программы действий потребовало от абитуриентов умения сравнивать конкретные числа (о чем подробно говорилось в § 1.Б) и определять, имеет ли смысл выражение

$$\frac{\sin 2\pi x}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$$

при вполне определенных значениях $x=3\frac{1}{2}$, 4 и $x=3$, $2\frac{1}{2}$. Вот тут-то и выяснилось, что последний вопрос [illegible] достаточно каверзным: отбросить следовало не только значение $x=3\frac{1}{2}$, при котором $1+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=0$, но также и значение $x=3$, при котором выражение $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}$ лишено смысла. Это обстоятельство сыграло роковую роль для многих абитуриентов, получивших неверный о т в е т 3 вместо верного: 4.

Следующим важным примером запрещенной операции является *извлечение квадратного корня из отрицательного числа*. Слабое, чисто формальное понимание этого запрещения зачастую приводит поступающих к недоразумениям при работе с радикалами. Так, увидев выражение $\sqrt{-x}$, некоторые моментально заключают: «Это выражение не имеет смысла, ибо под корнем стоит знак минус». Ну и что из того? Разве нельзя извлечь корень, скажем, из числа $-(-1)=1$ или вообще из $-x$ при $x\leqslant 0$? Если же попадется выражение $\sqrt{-x^2}$, то тут даже весьма искушенные абитуриенты иной раз, не задумываясь, утверждают: «Под корнем стоит отрицательное число». Именно не задумываясь, поскольку элементарный анализ подкоренного выражения показывает, что оно все же может оказаться неотрицательным, хотя и ровно при одном значении $x=0$.

1.В.2 (химфак — 83). Решить неравенство

$$\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\log_5\frac{x}{5}+\frac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right)\leqslant 0.$$

Р е ш е н и е. Левая часть неравенства имеет смысл только при тех значениях x, которые удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2-4x+3\geqslant 0, \\ 8x-2x^2-6\geqslant 0, \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3\geqslant 0, \\ x^2-4x+3\leqslant 0, \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-3)=0, \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Возможны два случая: 1) $x=1$, тогда неравенство выполнено, так как

$$\log_5\frac{1}{5}+1=-1+1\leqslant 0;$$

2) $x=3$, тогда неравенство не выполнено, так как

$$\log_5\frac{3}{5}+\frac{1}{3}>0$$

$$\left(\text{ибо}\quad 3\log_5\frac{3}{5}+1=\log_5\left(\frac{3^3}{5^3}\cdot 5\right)=\log_5\frac{27}{25}>\log_5 1=0\right).$$

Ответ: 1.

Для решения задачи 1.В.2 требовалось заметить, что два подкоренных выражения в исходном неравенстве отличаются друг от друга лишь отрицательным множителем, а значит, оба корня одновременно имеют смысл только в случае равенства их нулю. Анализ подкоренных выражений, конечно, не всегда столь непосредственно приводит к решению задачи, однако позволяет избежать досадных ошибок при работе с радикалами. Например, если выражение $(\sqrt{F(x)})^2$, определенное только при условии $F(x)\geqslant 0$, заменить выражением $F(x)$, то указанное условие отпадет само собой и впоследствии может оказаться забытым. Обратная же замена без каких-либо оговорок просто опасна, так как приводит к бессмыслице при тех значениях x, для которых $F(x)<0$. Аналогичное явление наблюдается для очень похожих с виду выражений $\sqrt{F(x)}\sqrt{G(x)}$ и $\sqrt{F(x)G(x)}$ первое из которых определено при условиях $F(x)\geqslant 0$ и $G(x)\geqslant 0$, а второе — при более слабом условии $F(x)G(x)\geqslant 0$ (наиболее опасен переход от второго выражения к первому, поскольку из неотрицательности произведения, вообще говоря, не следует неотрицательность каждого сомножителя).

Что касается корней других четных степеней, то ситуация с ними такая же, как с квадратным корнем. Однако нельзя забывать, что изложенные рассуждения ни в коем случае не переносятся на корни нечетных степеней, которые можно извлекать из любых чисел.

Многочисленные ошибки допускаются на экзаменах при преобразованиях логарифмов, причем не в последнюю очередь из-за плохого понимания того, что *логарифм можно брать только от положительного числа и только по положительному основанию, к тому же отличному от 1.* Разумеется, вряд ли кто из поступающих усомнится в том, что, скажем, выражения $\log_5(-1)$, $\log_{-2}3$ или $\log_1 1$ лишены смысла. Но об этом часто забывают, как только логарифмируются выражения, зависящие от неизвестной величины. Например, сплошь и рядом на экзаменах логарифм $\log_a(F(x))^2$ опрометчиво заменяется выражением $2\log_a F(x)$, что ведет к бессмыслице при тех значениях x, для которых $F(x)<0$. То же самое происходит при необдуманном переходе от логарифма $\log_a(F(x)\times$ $\times G(x))$ к сумме $\log_a F(x)+\log_a G(x)$. Несколько менее опасными являются обратные переходы, хотя и они нуждаются в определенных оговорках, связанных с восстановлением пропавших ограничений на x.

Некоторые абитуриенты пытаются «упростить» себе действия с логарифмами, используя формулы, в которых участвуют модули. Надо сказать, такой способ представляется малоэффективным. Кроме того, при работе с выражениями вида $\log_a|F(x)|$ нередко возникает искушение считать, что они имеют смысл якобы при всех значениях x (то же относится и к выражению $\log_a(F(x))^2$), поскольку, дескать, модуль (или квадрат) не может быть отрицательным. Заметим, что одной неотрицательности здесь мало — нужно исключить также и равенство нулю: $F(x)\neq 0$.

Вопросы о преобразованиях логарифмических уравнений и неравенств подробно рассмотрены в § 4.Б. Не менее коварной является операция потенцирования уравнения или неравенства, связанная с использованием основного логарифмического тождества. Так, заменяя выражение $a^{\log_a F(x)}$ выражением $F(x)$, абитуриенты регулярно забывают накладывать условие $F(x)>0$, гарантирующее возможность брать исчезнувший логарифм (см. § 4.А). Особенно много недоразумений возникает в тех случаях, когда основания логарифмов зависят от неизвестной величины (см. § 4.Г).

Наконец, одна из очень характерных ошибок на экзаменах связана *с выражениями типа* $\arcsin\alpha$, $\arccos\alpha$, *которые имеют смысл только при* $|\alpha|\leqslant 1$. Иногда поступающие, помня лишь о существовании каких-то ограничений на α, накладывают их на всякий случай всюду, где нужно и где не нужно, в том числе, например, и для выражений $\operatorname{arctg}\alpha$, $\operatorname{arcctg}\alpha$ (имеющих смысл всегда). Но чаще всего, видимо, по невнимательности или в надежде на «авось» положенные ограничения не проверяются вообще, а в ответ смело включаются выражения типа $\arccos\frac{-2-\sqrt{2}}{2}$ (см. задачу 5.Б.1). Причем отдельные абитуриенты, судя по их попыткам отстоять впоследствии свою правоту, не видят ничего предосудительного в том, что в их ответ попала этакая бессмысленная «абракадабра».

Задачи

1.В.3. Найти все значения x, при которых имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{1-\lg(x-1)}+\sqrt{\frac{4-x}{(x-2)^2}}$;

б) $\log_8\left(5-x-\frac{6}{x}\right)$;

в) $\frac{x}{\lg(x-2)}-\sqrt{9-x}$;

г) $\log_{(x+10)^2}7$.

1.В.4. Верно ли, что если при некотором значении x левая часть равенства имеет смысл, то при том же x имеет смысл и его правая часть:

а) $\sqrt{x^2+x}=\sqrt{x}\sqrt{x+1}$;

б) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+2}=\sqrt{x^2+x-2}$;

в) $\sqrt{x^2(x-1)}=x\sqrt{x-1}$;

г) $\lg(4-x^2)=\lg(2-x)+\lg(2+x)$;

д) $\ln(2-3x)^2=2\ln(2-3x)$;

е) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$;

ж) $\sqrt{(x^2+x+1)\cdot\log_2(x^2+3)}=\sqrt{x^2+x+1}\,\sqrt{\log_2(x^2+3)}$;

з) $\cos(\arccos x)=x$?

1.В.5. Найти все значения x, при которых одно из данных выражений имеет смысл, а другое — нет:

а) $\dfrac{\sqrt{x^2-3}\,(x-1)}{x-1}$ и $\sqrt{x^2-3}$;

б) $\sin(\arcsin x)$ и x;

в) $\arccos(\cos x)$ и x;

г) $\log_{(x^2+1)}(x^2+1)^{4x}$ и $4x$;

д) $\lg((x-2)(x-1))+\lg(x+3)$ и $\lg(x-2)+\lg((x-1)(x+3))$.

1.В.6. Решить неравенство:

а) $\sqrt{x-1}+\lg(1-x)<2$;

б) (химфак — 83)

$$\sqrt{x^2-7x+10}+9\log_4\frac{x}{8}\geqslant 2x+\sqrt{14x-20-2x^2}-13.$$

1.В.7 (мехмат — 84). Среди корней уравнения

$$\frac{\cos 2\pi x}{4+\operatorname{tg}\pi x}=0$$

найти тот, который имеет наименьшее расстояние от числа $\sqrt{13}$ на числовой прямой.

1.В.8 (мехмат — 82). Найти все значения x, для каждого из которых выражение

$$\sqrt{4x^4-3-x^8}\,(1-\cos(2\pi(2x+21x^2)))$$

имеет смысл и не обращается в нуль.

Ответы

1.В.3. а) $(1;2)\cup(2;4]$; б) $(-\infty;0)\cup(2;3)$; в) $(2;3)\cup(3;9]$; г) $(-\infty;-11)\cup(-11;-10)\cup(-10;-9)\cup(-9;\infty)$. 1.В.4. а) нет; б) да; в) нет; г) да; д) нет; е) нет; ж) да; з) да. 1.В.5. а) $\varnothing$; б) $(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$; в) $\varnothing$; г) 0; д) $(-3;1)$. 1.В.6. а) $\varnothing$; б) 2. 1.В.7. 13/4. 1.В.8. $1<x<\sqrt[4]{3}$, $x\neq\dfrac{-1+\sqrt{1+21n}}{21}$, $n=24, 25, \ldots$ $\ldots, 39$; $-\sqrt{3}<x<-1$, $x\neq\dfrac{-1-\sqrt{1+21m}}{21}$, $m=20, 21, \ldots, 33$.

§ 1.Г. РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ

Разложение на множители относится к числу важнейших операций над выражениями (см. § 2.Г, 3.Б) и возникает уже при работе с квадратным трехчленом. Далеко не все поступающие ясно осознают, что решающую роль среди преобразований *квадратного трехчлена* следует отнести именно разложению его на множители (если это возможно; в противном случае наибольшего эффекта удается достичь выделением полного квадрата, о котором речь пойдет в следующем параграфе).

Подчеркнем в связи с этим одно существенное, на наш взгляд, обстоятельство. Хотя в разложении квадратного трехчлена

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), \quad a\neq 0,$$

непосредственно участвуют его корни x_1, x_2, это преобразование не требует никаких дополнительных пояснений в письменной экзаменационной работе — лишь бы само разложение оказалось правильным (что проверяется путем обыкновенного перемножения полученных множителей с последующим приведением подобных членов). При этом совершенно не имеет значения, каким именно способом были найдены корни квадратного трехчлена, тем более что само разложение на множители иногда проще производить в уме, не прибегая к известной формуле.

1.Г.1. Разложить на множители выражение:

а) x^2+5x-6; б) $-x^2+5x-6$;

в) x^2+1-2x; г) x^4-2x^2-8;

д) $(x-1)^2-9$.

Для устного решения таких задач целесообразно научиться пользоваться следующим тождеством:

$$(x+\alpha)(x+\beta)=x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta.$$

Подчеркнем, что числа α, β являются не корнями квадратного трехчлена $x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$, а его «минус-корнями». Однако искать их в уме, глядя на выражение x^2+px+q, несколько удобнее, чем искать корни, поскольку произведение и сумма чисел α, β просто совпадают с коэффициентами q и p соответственно и находятся прямо перед глазами. При наличии у квадратного трехчлена целых корней (что, конечно, не всегда имеет место или, по меньшей мере, заранее не известно) процедуру поиска чисел α, β можно организовать так: *разложить модуль числа q в произведение $\alpha\beta$ двух натуральных чисел и записать сначала черновое (быть может, неверное) разложение*

$$«(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+px+q»,$$

после чего попытаться, если необходимо, изменить кое-где минусы на плюсы так, чтобы с учетом написанного выше тождества полу-

чилось верное разложение. Например, в задаче 1.Г.1 для выражения а) имеем $|q|=6=2\cdot 3=6\cdot 1$, поэтому можно записать два возможных черновых разложения

$$(x-2)(x-3),\ (x-6)(x-1),$$

в одном из которых удается исправить знаки на верные, а именно:

$$(x+6)(x-1)=x^2+(6-1)x+6\cdot(-1)=x^2+5x-6.$$

Досадные арифметические ошибки возникают из-за нетрадиционной записи квадратного трехчлена, сильно затрудняющей работу с ним (см. п. б) и в) задачи 1.Г.1). Советуем, не считая эту деталь малозначительной, всегда внимательно следить за тем, что бы в квадратном трехчлене первым шел член, содержащий x^2 (желательно, чтобы коэффициент при x^2 равнялся 1 или уж по крайней мере был положителен), затем содержащий x и, наконец, свободный член.

Характерно, что выражение д), уже представляющее собой разность квадратов, на экзамене многие раскладывают весьма нерациональным способом, раскрывая предварительно скобки и приводя подобные члены.

Ответ: а) $(x+6)(x-1)$; б) $-(x-2)(x-3)$;
в) $(x-1)^2$; г) $(x^2+2)(x-2)(x+2)$; д) $(x-10)(x-4)$.

Как показывает следующая задача, умение раскладывать на множители в уме позволяет иногда, причем не только в случае целых корней, существенно упростить выкладки.

1.Г.2 (психфак — 82). Решить уравнение

$$2\sin x-\sqrt[4]{3}=\left(\sqrt{2}-\sqrt[4]{12}\right)\sqrt{\sin x}.$$

Решение. Обозначим $\sqrt{\sin x}=y$:

$$\begin{cases} 2y^2-\sqrt[4]{3}=\left(\sqrt{2}-\sqrt[4]{12}\right)y, \\ y\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2+\left(\dfrac{\sqrt[4]{12}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)y-\dfrac{\sqrt[4]{3}}{2}=0, \\ y\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(y+\dfrac{\sqrt[4]{12}}{2}\right)\left(y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=0, \\ y\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Возвратимся к x:

$$\sqrt{\sin x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in\mathbf{Z}.$

Чтобы разложить на множители *кубический многочлен*, достаточно найти хотя бы один его корень x_0 и вынести за скобки множитель $x-x_0$ (такую возможность гарантирует теорема Безу). Для упрощения подбора этого корня в том случае, когда он имеет вид несократимой дроби $x_0=\frac{p}{q}$ $(p\in \mathbf{Z},\ q\in \mathbf{N})$, а коэффициенты многочлена — целые числа, полезно учитывать, что число p должно быть делителем свободного члена (если он отличен от нуля), а число q — делителем коэффициента при старшей степени x. Например, простой перебор значений $x=\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$ показывает, что многочлен x^3-4x^2+7x-6 имеет корень $x=2$, а значит, делится на $x-2$, откуда получаем разложение

$$x^3-4x^2+7x-6=(x^3-2x^2)+(-2x^2+4x)+(3x-6)=$$
$$=(x-2)(x^2-2x+3).$$

При извлечении квадратного корня из уравнения или неравенства (см. § 2.Е, 3.Д) употребляется формула

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y),$$

а в некоторых случаях могут пригодиться также и формулы

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2),$$
$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2).$$

К сожалению, в письменных экзаменационных работах то и дело появляются попытки изобрести аналогичную формулу и для суммы квадратов x^2+y^2. Наиболее распространено заблуждение о равенстве этого выражения квадрату суммы

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

(последнее выражение не равно x^2+y^2 при $xy\neq 0$, но о наличии слагаемого $2xy$ в этом выражении частенько забывают). Попадаются и такие работы, в которых не делается различия между разностью квадратов x^2-y^2 и квадратом разности

$$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2.$$

Существуют общие подходы к разложению на множители так называемых *однородных многочленов* второй степени

$$ax^2+bxy+cy^2\ (a\neq 0).$$

относительно переменных x и y. Никто не мешает рассматривать это выражение как квадратный трехчлен относительно x с коэффициентами и корнями (если они есть), зависящими от некоего параметра y. Однако не менее полезно связывать с указанным многочленом квадратный трехчлен относительно отношения $t=\frac{x}{y}$, который затем раскладывать на множители

$$ax^2+bxy+cy^2=y^2(at^2+bt+c)=ay^2(t-t_1)(t-t_2)=$$
$$=a(x-t_1y)(x-t_2y).$$

Отметим, что, хотя промежуточные преобразования при $y=0$ здесь не имеют смысла, окончательное разложение остается справедливым при всех значениях x и y. Это обстоятельство подсказывает, что сами выкладки лучше проводить в черновике (дабы не рассматривать два случая: $y=0$ и $y\neq 0$), а в чистовом решении помещать лишь итоговое разложение.

Аналогично однородный многочлен третьей степени

$$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$$

раскладывается на множители сведением его к кубическому многочлену at^3+bt^2+ct+d.

1.Г.3 (психфак — 85). Найти все значения a, при которых существует единственная пара целых чисел x, y, удовлетворяющая условиям:

$$-15x^2+11xy-2y^2=7,\ x<y,\ 2a^2x+3ay<0.$$

Основная идея решения этой не слишком простой задачи состоит именно в разложении на множители левой части уравнения, представляющей собой однородный многочлен второй степени

$$-15x^2+11xy-2y^2=-15\left(x-\frac{2}{5}y\right)\left(x-\frac{1}{3}y\right)=$$
$$=(2y-5x)(3x-y).$$

После этого остается заметить, что пара целых чисел $2y-5x$ и $3x-y$ дает в произведении 7, лишь когда она совпадает с одной из четырех пар $(1;\ 7)$, $(7;\ 1)$, $(-1;\ -7)$, $(-7;\ -1)$. Находя x и y в каждом из этих случаев, получаем, что условию $x<y$ удовлетворяют только две пары $(x,\ y)$: $(9;\ 26)$ и $(15;\ 38)$. Наконец, подставляя найденные пары в последнее неравенство задачи, находим те значения a, при которых справедливо ровно одно из двух неравенств

$$2a^2\cdot 9+3a\cdot 26<0\Leftrightarrow a\left(a+\frac{13}{3}\right)<0,$$

$$2a^2\cdot 15+3a\cdot 38<0\Leftrightarrow a\left(a+\frac{19}{5}\right)<0.$$

Ответ: $\left(-\frac{13}{3};\ -\frac{19}{5}\right]$.

1.Г.4 (ф-т почв. — 84). Найти все значения a, для которых уравнение

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sin x}}=\sin x$$

имеет решение.

На экзамене многие абитуриенты дважды возвели исходное уравнение в квадрат и, обозначив $\sin x=y$, получили систему:

$$\begin{cases} y^4-2ay^2-y+a^2-a=0, \\ 0\leqslant y\leqslant 1, \\ y^2-a\geqslant 0 \end{cases}$$

(не все, правда, включили в нее полный набор необходимых неравенств; см. § 2.З, 2.И). Далее, однако, многие пытались решить полученное уравнение четвертой степени относительно y. В данном же случае достаточно было заметить, что левая часть этого уравнения представляет собой квадратный трехчлен относительно a, который довольно просто раскладывается на множители

$$a^2-(2y^2+1)a+y^4-y=(a-y^2-y-1)(a-y^2+y).$$

Более того, первый множитель в силу неравенств $a-y^2\leqslant 0$ и $y>0$ не превосходит числа -1, а значит, не может быть равен 0. Таким образом, полученная система равносильна системе

$$\begin{cases} y^2-y-a=0, \\ 0\leqslant y\leqslant 1, \\ y^2-a\geqslant 0, \end{cases}$$

причем последнее неравенство в ней является следствием двух других соотношений $y^2-a=y>0$. Для получения ответа на поставленный в задаче вопрос остается лишь указать все значения a, при которых хотя бы один корень уравнения $y^2-y-a=0$ принадлежит отрезку $[0; 1]$ (см. § 8.Д).

Ответ: $\left[-\frac{1}{4}; 0\right]$.

Задачи

1.Г.5. Разложить на множители выражение:

а) $x^2+2x-35$;

б) $(x+8)^2-3$;

в) x^3-3x^2+5x-3;

г) $24x^3+14x^2-29x+6$;

д) x^4+4;

е) $2x^2-5xy-3y^2$;

ж) $2x^3-5x^2y-8xy^2+20y^3$;

з) $x^3+(a-1)x^2+ax+(a^2-a)$.

1.Г.6. Сократить дробь:

а) $\dfrac{x^2-3x-10}{x^2-5x-14}$;

б) $\dfrac{x^3-1}{x^4+x^2+1}$.

1.Г.7. Решить уравнение:

а) (психфак — 82) $\operatorname{tg} x-\sqrt[4]{3}=(\sqrt[4]{3}-1)\sqrt{\operatorname{tg} x}$;

б) (психфак — 79)

$$\sqrt{3+4\sqrt{6}-(16\sqrt{3}-8\sqrt{2})\cos x}=4\cos x-\sqrt{3};$$

в) (ф-т почв. — 81)

$$2\lg^2 x+(1-\sqrt{2})\lg x^2-2\sqrt{2}.$$

1.Г.8 (психфак — 85). Найти все значения a, при которых существует единственная пара целых чисел x, y, удовлетворяющая условиям:

$$3x^2+11xy+10y^2=7,\quad x+y>0,\quad 4a^2x-3ay<0.$$

1.Г.9 (ф-т почв. — 84). Найти все значения a, для которых уравнение

$$\sqrt{3a+\sqrt{3a+2x-x^2}}=2x-x^2$$

имеет решение.

1.Г.10 (филол. ф-т — 78). Число α подобрано так, что уравнение

$$\sqrt{x-\sqrt{3}}+\alpha^2x^2+2\alpha x(\sqrt{6}-\sqrt{3})=6\sqrt{2}-9$$

имеет решение. Найти это решение.

Ответы

1.Г.5. а) $(x+7)(x-5)$; б) $(x+8+\sqrt{3})(x+8-\sqrt{3})$; в) $(x-1)\times$ $\times(x^2-2x+3)$; г) $(2x+3)(3x-2)(4x-1)$; д) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+$ $+2)$; е) $(2x+y)(x-3y)$; ж) $(x+2y)(x-2y)(2x-5y)$; з) $(a+x^2)\times$ $\times(a+x-1)$. **1.Г.6.** а) $\dfrac{x-5}{x-7}$, $x\neq-2$; б) $\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$. **1.Г.7.** а) $\pi/3+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\pm\pi/4+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; в) 0, 1; $10^{\sqrt{2}}$. **1.Г.8.** $(-5/11;$ $-1/3]$. **1.Г.9.** $[-1/12; 0]$. **1.Г.10.** $\sqrt{3}$.

§ 1.Д. НЕКОТОРЫЕ ЭФФЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Для решения задач почти всегда требуется преобразовывать какие-либо выражения. При этом каждое преобразование производится с определенной целью и призвано приводить конкретное выражение к удобному для дальнейшего исследования виду. В настоящем параграфе будут рассмотрены некоторые не очень, на наш взгляд, популярные среди абитуриентов преобразования, которые ведут к резкому упрощению соответствующих выражений.

1. *Выделение полного квадрата.* Поступающим хорошо известны затруднения, которые возникают при работе с квадратным трехчленом, не имеющим корней. Например, чтобы полностью объяснить, почему решениями неравенства

$$4x^2-12x+11>0$$

из задачи 3.А.2 являются все числа, приходится упоминать и о дискриминанте квадратного трехчлена, и о его коэффициенте при x^2, и о знаке самого неравенства, да еще и о пресловутых ветвях параболы. Все это, конечно, несколько утомительно. Вот тут-то и приходит на помощь операция выделения полного квадрата

$$4x^2-12x+11=((2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3+3^2)+2=(2x-3)^2+2,$$

после которой остается лишь констатировать, что исходное неравенство выполняется автоматически.

Напомним, что основная идея этой операции состоит в том, чтобы организовать в квадратном трехчлене ax^2+bx+c полный квадрат, который должен вобрать в себя первые два слагаемых, зависящих от x (в отдельных случаях бывает удобно «поглотить», наоборот, последние два слагаемых или даже первое и третье слагаемые). Для трехчлена x^2+px+q это делается так: x^2 принимается за квадрат первого числа, $px=2x\cdot\frac{p}{2}$ — за удвоенное произведение первого числа на второе, а затем добавляется $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ — квадрат второго числа, «заимствованный» из свободного члена q. Если же коэффициент при x^2 отличен от 1, то его целиком или частично можно заранее вынести за скобку с тем, чтобы первое слагаемое в скобках имело вид $(\alpha x)^2$.

1.Д.1 (психфак — 78). Найти наибольшее значение функции

$$f(x)=\frac{10}{x^2+4\pi x+41}+\cos x.$$

Р е ш е н и е. 1. $x^2+4\pi x+41=(x+2\pi)^2-(2\pi)^2+41\geqslant 41-(2\pi)^2>0$, так как $(2\pi)^2<(2\cdot 3{,}2)^2=40{,}96<41$.

2. $f(x)=\dfrac{10}{(x-2\pi)^2-4\pi^2+41}+\cos x\leqslant\dfrac{10}{41-4\pi^2}+1.$

3. $f(2\pi)=\dfrac{10}{41-4\pi^2}+1.$

Ответ: $\dfrac{10}{41-4\pi^2}+1.$

2. *Выделение целой части.* Речь идет о преобразовании «неправильной» дроби

$$\frac{ax+b}{cx+d} \quad (c\neq 0)$$

в сумму «правильной» дроби (с тем же знаменателем и не зависящим от x числителем) и некоторой константы, которую как раз и называют целой частью. Основной трюк состоит в отщеплении от свободного члена b в числителе исходной дроби такого слагаемого, при котором дробь сокращается, поглощая в себе всю зависимость числителя от x. Например, после выделения целой части в дроби

$$\frac{2x-5}{3x+6}=\frac{(2x+4)-9}{3x+6}=\frac{2(x+2)}{3(x+2)}-\frac{9}{3(x+2)}=\frac{2}{3}-\frac{3}{x+2}$$

получается выражение, более приемлемое как для аналитического, так и для графического исследования (см. задачи 7.Д.2, 8.В.2, 8.Г.1).

3. *Переход к новому основанию* (см. также § 4.Г). В случае логарифма имеется в виду преобразование по формуле

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a},$$

в правой части которой фигурирует новое основание c, выбираемое из каких-либо соображений в каждом конкретном случае.

1.Д.2 (физфак — 82). Известно, что $\log_b a=\sqrt{3}$. Вычислить

$$\log_{\sqrt{a}/b}\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}.$$

Эта задача мгновенно решается переходом в искомом выражении к основанию b.

Решение. $$\log_{\sqrt{a}/b}\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\log_b\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}}{\log_b\dfrac{\sqrt{a}}{b}}=\frac{\dfrac{1}{3}\log_b a-\dfrac{1}{2}\log_b b}{\dfrac{1}{2}\log_b a-\log_b b}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1}=\frac{2\sqrt{3}-3}{3(\sqrt{3}-2)}=\frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{3(\sqrt{3}-2)}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $-\sqrt{3}/3$.

Не менее полезным в определенных ситуациях оказывается переход к новому основанию в показательных выражениях по формуле

$$a^b = c^{\log_c a \cdot b}.$$

Так, в следующей задаче ответ на поставленный вопрос становится совершенно очевидным после перехода в обеих степенях к удачно подобранному основанию.

1.Д.3 (геол. ф-т — 85). Какое из чисел больше:

$$2^{\log_3 5} - 0{,}1 \text{ или } 5^{\log_3 2}?$$

Решение. $2^{\log_3 5} - 0{,}1 = 3^{\log_3 2 \cdot \log_3 5} - 0{,}1 < 3^{\log_3 5 \cdot \log_3 2} = 5^{\log_3 2}$.

Ответ: $5^{\log_3 2}$.

Рассмотренные в настоящем пункте преобразования особенно актуальны в тех случаях, когда основание исходного логарифма или исходной степени зависит от переменной величины.

4. *Введение вспомогательного угла.* Это преобразование касается выражений типа

$$a \sin x + b \cos x$$

и позволяет приводить их к виду $A \sin(x+\varphi)$ или $A \cos(x+\varphi)$, где число φ как раз и называется вспомогательным углом, а число A равно $\sqrt{a^2+b^2}$. Более подробно о подборе числа φ рассказано в § 5.Е, а здесь ограничимся пока лишь упоминанием о том, что это делается с помощью формулы синуса или косинуса суммы (разности).

1.Д.4 (геол. ф-т — 79). Найти все числа c, при которых уравнение

$$5 \sin x + 2 \cos x = c$$

имеет решение.

Далеко не все поступающие догадались преобразовать левую часть уравнения, например, так:

$$5 \sin x + 2 \cos x = \sqrt{29} \sin(x+\varphi)$$

(конкретное значение φ в этом случае совершенно несущественно, важно знать только, что такое значение найдется, хотя, конечно, ошибки не будет, если его и указать: $\varphi = \operatorname{arctg} 2/5$). Для решения задачи после этого преобразования оставалось вспомнить о множестве значений функции $\sin(x+\varphi)$ и получить ответ: $[-\sqrt{29}; \sqrt{29}]$.

В заключение отметим, что в письменных работах нередко встречаются явно ошибочные преобразования. Основной причиной ошибок обычно оказывается либо неаккуратное использование известных формул, либо изобретение новых, правдоподобных с виду, но неверных преобразований.

Задачи

1.Д.5. Выделить полный квадрат в выражении:

а) x^2+6x;

б) $4x^2+4x+2$;

в) $2x^2+4x+1$.

1.Д.6. Выделить целую часть в выражении:

а) $\dfrac{5x+4}{x+1}$;

б) $\dfrac{2x-3}{3x-9}$;

в) $\dfrac{7-4x}{7x-2}$.

1.Д.7 (геол. ф-т — 85). Какое из чисел больше:

$$3^{\log_2 5}+10^{\frac{1}{3}\lg 2} \quad \text{или} \quad 5^{\log_2 3+\sqrt[10]{10}}?$$

1.Д.8 (ВМК — 84). Известно, что $\log_a b=7$. Вычислить $\log_b(a^2b)$.

1.Д.9 (физфак — 82). Известно, что $\log_p q=\sqrt{5}$. Вычислить

$$\log_{\sqrt{pq}}\frac{q}{\sqrt{p}}.$$

1.Д.10 (геол. ф-т — 79). Найти все значения c, при которых уравнение

$$7\sin x+3\cos x=c$$

имеет решение.

1.Д.11 (экономфак — 79). Решить неравенство

$$\frac{\log_5(x^2-4x-11)^2-\log_{11}(x^2-4x-11)^3}{2-5x-3x^2}\geqslant 0.$$

1.Д.12. Найти наименьшее значение функции:

а) $f(x)=24\cos x+7\sin x$;

б) $f(x)=\dfrac{3x^2-2}{x^2+1}$;

в) (психфак — 78) $f(x)=4x+\dfrac{9\pi^2}{x}+\sin x$ при $x>0$.

1.Д.13. (геогр. ф-т — 85). Найти все значения a, удовлетворяющие условию $-1<a<1$, при которых выражение

$$1+2\sqrt{x^2-2axy+y^2-6y+10}$$

принимает наименьшее значение только для одной пары чисел x, y.

Ответы

1.Д.5. а) $(x+3)^2-9$; б) $(2x+1)^2+1$; в) $2(x+1)^2-1$. **1.Д.6.** а) $5-\frac{1}{x+1}$; б) $\frac{2}{3}+\frac{1}{x-3}$; в) $-\frac{4}{7}+\frac{41}{7(7x-2)}$. **1.Д.7.** $3^{\log_2 5}+10^{\frac{1}{3}\lg 2}$. **1.Д.8.** 9/7. **1.Д.9.** $\frac{2\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$. **1.Д.10.** $[-\sqrt{58};\ \sqrt{58}]$. **1.Д.11.** $(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ 2-\sqrt{15})\cup[6;\ \infty)$. **1.Д.12.** а) -25; б) -2; в) $12\pi-1$. **1.Д.13.** $[-1/\sqrt{10};\ 1/\sqrt{10}]$.

§ 1.Е. МОДУЛИ

Многие поступающие испытывают буквально панический страх перед модулями, даже не пытаясь решать на экзамене совсем простые задачи, если только они содержат выражения под знаком модуля. По той же причине знаки модуля нередко принимаются, скажем, за круглые скобки. А между тем для успешного решения таких задач в большинстве случаев не требуется никаких хитростей, необходимо лишь правильно понимать и использовать о п р е д е л е н и е модуля:

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{если } x\geqslant 0;\\ -x, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

1.Е.1 (геол. ф-т — 79). Решить уравнение

$$|2x-3|=3-2x.$$

Наиболее распространенная среди абитуриентов ошибка возникла на экзамене из-за неправильного толкования модуля и проявилась в следующем «способе» его раскрытия:

$$|2x-3|=\begin{cases} 2x-3, & \text{если } x\geqslant 0;\\ 3-2x, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

На первый взгляд здесь как будто бы все учтено. Однако условия $x\geqslant 0$ и $x<0$ не имеют никакого отношения к раскрываемому модулю, поскольку роль величины x из приведенного выше определения модуля играет в данном случае целиком выражение $2x-3$.

Отдельные абитуриенты попытались разгадать в исходном уравнении некий тайный замысел, рассуждая так: «Уравнение представляет собой часть формулы

$$|2x-3|=\begin{cases} 2x-3, \text{ если } 2x-3\geqslant 0; \\ 3-2x, \text{ если } 2x-3<0, \end{cases}$$

справедливую в случае $2x-3<0$, поэтому оно равносильно неравенству $x<1{,}5$». Как показывает решение, основанное на аккуратном переборе случаев, в результате такого рассуждения потеряется корень 1,5.

Решение. Рассмотрим два случая:

$$1)\ \begin{cases} 2x-3<0, \\ 3-2x=3-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1{,}5, \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow x<1{,}5;$$

$$2)\ \begin{cases} 2x-3\geqslant 0, \\ 2x-3=3-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 1{,}5, \\ x=1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow x=1{,}5.$$

Ответ: $(-\infty;\ 1{,}5]$.

Перечислим некоторые полезные свойства модуля, вытекающие из его определения и справедливые для любых значений x и y:

1) $\lvert x\rvert\geqslant 0$;	6) $-x\leqslant\lvert x\rvert$;
2) $\lvert x\rvert^2=x^2$;	7) $\lvert x+x\rvert\leqslant\lvert x\rvert+\lvert y\rvert$;
3) $\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert$;	8) $\lvert x-y\rvert\leqslant\lvert x\rvert+\lvert y\rvert$;
4) $\lvert x\rvert=\lvert -x\rvert$;	9) $\lvert xy\rvert=\lvert x\rvert\cdot\lvert y\rvert$;
5) $x\leqslant\lvert x\rvert$;	10) $\lvert x/y\rvert=\lvert x\rvert/\lvert y\rvert$.

Первые два свойства могут применяться к решению уравнений и неравенств с модулями и позволяют в некоторых случаях обойтись без раскрытия модуля или существенно его упростить (см. задачи 2.З.3, 2.И.3). Третье свойство заслуживает особого разговора, поскольку оно служит камнем преткновения для многих абитуриентов, усвоивших лишь формальную связь между операциями извлечения квадратного корня и возведения в квадрат. «Эти операции взаимно обратны, — рассуждают частенько поступающие, — а значит, выражения $\sqrt{x^2}$ и $(\sqrt{x})^2$ просто совпадают с x». Для опровержения такого заманчивого тезиса достаточно рассмотреть случай $x<0$ и припомнить, что ни сам квадратный корень, ни подкоренное выражение не могут принимать отрицательных значений.

1.Е.2 (биофак — 82). Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y(x)=x+\sqrt{(x^2+6x+9)(x^2+2x+1)}$$

на отрезке $[-4;\ -5/4]$.

На экзамене исследуемое выражение, как правило, преобразовывалось к виду

$$x+\sqrt{((x+3)(x+1))^2},$$

а затем ошибочно заменялось выражением

$$x+(x+3)(x+1)=x^2+5x+3,$$

наибольшее (—1) и наименьшее $\left(-3\frac{1}{4}\right)$ значения которого на заданном отрезке не имели ничего общего с соответствующими значениями для исходной функции

$$y(x)=x+|(x+3)(x+1)|=$$
$$=\begin{cases} x^2+5x+3, & \text{если } -5\leqslant x\leqslant -3; \\ -(x^2+3x+3), & \text{если } -3<x\leqslant -\frac{5}{4}. \end{cases}$$

Ответ: —3/4 и —3.

Опыт вступительных экзаменов показывает, что абитуриенты весьма слабо используют *геометрическую интерпретацию модуля числа x как расстояния на числовой прямой от точки x до точки* 0. А ведь с помощью такой интерпретации некоторые простейшие уравнения и неравенства с модулями решаются мгновенно и к тому же в уме (см. решение задачи 3.Г.6).

1.Е.3. Решить уравнение или неравенство:

а) $|x|=5$;
б) $|x|\leqslant 1$;
в) $|x|>3$;
г) $2\leqslant |x|<4$;
д) $|x-7|=6$;
е) $|x+2|\leqslant 8$;
ж) $|x-3|+|x-1|=2$.

Для соотношений пунктов а)—г) довольно легко определяются те значения x, которые удалены от нуля на указанное в этих соотношениях расстояние. Далее, в задачах д) и е) полезную роль может сыграть дополнительное соображение о том, что модуль $|x-a|$ представляет собой расстояние от точки x до точки a. Наконец, последнее равенство на языке описываемой модели формулируется следующим образом: сумма расстояний от точки x до точек 1 и 3 равна 2. После такой расшифровки становится ясным, что этому свойству удовлетворяют все точки отрезка [1; 3] и только они (для точек, не принадлежащих отрезку, указанная сумма больше 2).

Ответ: а) —5; 5; б) [—1; 1]; в) $(-\infty; -3)\cup(3; \infty)$; г) $(-4; -2]\cup[2; 4]$; д) 1; 13; е) [—6; 10]; ж) [1; 3].

Задачи

1.Е.4. Доказать свойства модуля 1)—10), перечисленные выше в § 1.Е.

1.Е.5. Решить уравнение:

а) $|x|=1$;

б) $|x-2|=4$;

в) $|x-x^2|=-2$;

г) (геол. ф-т — 79) $4-5x=|5x-4|$;

д) $||4-x^2|+7|=7$;

е) $|x+4|=|x-6|$;

ж) $|x-2|=-|x^2-4|$;

з) $|x-1|+|x+3|=4$;

и) $x^2+|x^3-1|=0$;

к) $|x^3|-x^3=2$;

л) (геол. ф-т — 78) $|5x-13|-|6-5x|=7$;

м) $|1-\log_{1/6}x|+2=|3-\log_{1/6}x|$.

1.Е.6. Решить неравенство:

а) $|x|\leqslant 5$;

б) $|x-3|>1$;

в) $|x-2|+|2x+2|>3$;

г) $|x^2+3x-70|\geqslant 0$;

д) $2|15+2x-x^2|\leqslant -5$.

1.Е.7. Задать множество чисел в виде решений уравнения или неравенства с модулями:

а) -4; 4;

б) $(-7;\ 7)$;

в) 1; 9;

г) $[-1;\ 5]$;

д) $(-\infty;\ -9)\cup(1;\ \infty)$.

1.Е.8. Упростить выражение:

а) $\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1}$;

б) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

1.Е.9 (биофак — 82). Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y(x) = -2x + \sqrt{(x^2-10x+25)(x^2-4x+4)}$$

на отрезке [9/4; 6].

1.Е.10 (экономфак — 84). Найти наименьшее значение функции

$$y(x) = 2|x-3| + |3x-2|.$$

Ответы

1.Е.5. а) -1; 1; б) -2; 6; в) $\varnothing$; г) $(-\infty; 4/5]$; д) -2; 2; е) 1; ж) 2; з) $[-3; 1]$; и) $\varnothing$; к) -1; л) $(-\infty; 6/5]$; м) $[1/6; \infty)$. **1.Е.6.** а) $[-5; 5]$; б) $(-\infty; 2)\cup(4; \infty)$; в) $(-\infty; -1)\cup(-1; \infty)$; г) $(-\infty; \infty)$; д) $\varnothing$. **1.Е.7.** а) $|x|=4$; б) $|x|<7$; в) $|x-5|=4$; г) $|x-2|\leqslant 3$; д) $|x+4|>5$. **1.Е.8.** а) $|x^2+5x+5|$; б) 2 при $x\in[2; \infty)$; $2\sqrt{x-1}$ при $x\in[1; 2)$. **1.Е.9.** $-15/4$ и -10. **1.Е.10.** 14/3.

ГЛАВА 2. УРАВНЕНИЯ

§ 2.А. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ

Решение уравнений — едва ли не самый распространенный тип экзаменационных задач. Поэтому каждый, кто собирается сдавать экзамен по математике, должен совершенно четко понимать, что значит решить уравнение

$$F(x)=G(x).$$

Поясним, что в этой символической записи левая и правая части равенства представляют собой некоторые (а на экзамене вполне конкретные) выражения, которые могут зависеть от неизвестной величины x. Многие абитуриенты, судя по их работам на экзамене, рассуждают по поводу этого задания примерно так: «От меня требуется лишь провести какие-либо верные выкладки и получить какой-либо ответ, а дело экзаменаторов разбирать мои выкладки и выяснять, в какой степени мой ответ правилен».

Внесем ясность в этом вопросе. Прежде всего, в любой задаче ответ бывает либо правильным, либо неправильным, а всевозможные словосочетания типа «ответ в основном верен», «ответ слегка неточен» и т. д. на экзамене, как правило, означают, что задача попросту не решена.

Ответом в задании «решить уравнение...» является множество всех значений неизвестной, которые при подстановке в уравнение дают верное равенство. Указанные значения называются *решениями* или *корнями уравнения.*

Далее, что касается текста решения (письменного или устного), которым сопровождается ответ, то этот текст призван служить доказательством следующих двух фактов:

1) *все указанные в ответе значения удовлетворяют уравнению;*

2) *никаких других решений, помимо указанных в ответе, уравнение не имеет.*

Подчеркнем, что, во-первых, отсутствие ошибок в выкладках и даже правильность ответа сами по себе еще не означают, что предложенный текст представляет собой верное решение. Ведь с помощью этого текста абитуриент должен убедить экзаменатора (да и самого себя) в правильности полученного ответа. Во-вторых, любая нечеткость в рассуждениях, двусмысленность или недоговоренность в изложении решения, недостаточная подробность в обоснованиях и т. д. — словом, все, что требует каких-либо пояснений или добавлений (не говоря уже об исправлениях), портит впечатление о работе абитуриента и может служить основанием для снижения ему оценки на экзамене. Иными словами, правильное решение должно быть безошибочным, логически ясным и полным.

Решение любого уравнения предполагает умение преодолевать трудности двоякого рода. Это, с одной стороны, трудности чисто технического характера, связанные с поиском пути решения и выполнением необходимых операций над обеими частями уравнения, а с другой — логические трудности, возникающие при обосновании правильности ответа. Опыт вступительных экзаменов показывает, что большинство абитуриентов более или менее успешно справляются с техническими трудностями, зато довольно слабо представляют себе логическую сторону решения, а зачастую даже и не задумываются о ней.

Для пояснения мысли приведем образец безошибочного «решения» задачи 1.А.2, в свое время нередко встречавшегося в письменных работах.

Решение. $6\sin x - \frac{1}{6} = \sqrt{34\sin x - \frac{35}{36}}$.

$$36\sin^2 x - 2\sin x + \frac{1}{36} = 34\sin x - \frac{35}{36},$$

$$36\sin^2 x - 36\sin x + 1 = 0,$$

$$\sin x_{1,2} = \frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{6},$$

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Предлагаем читателю самостоятельно определить, как изменить предложенный текст, чтобы получить настоящее решение (см. § 1.А, 1.Б, 2.3).

§ 2.Б. КОРНИ И ДОПУСТИМЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

В ответе обычно либо предъявляется множество корней уравнения, либо, если возможно, просто перечисляются все элементы этого множества. Не исключены и другие формы записи ответа, связанные, например, с наличием каких-либо параметров.

2.Б.1. Решить уравнение (относительно x):

а) $x=1$; г) $\sin x=0$;

б) $1=1$; д) $ax=1$.

в) $1=0$;

Ответ: а) 1; б) $(\infty; \infty)$; в) $\varnothing$; г) πn, $n\in\mathbf{Z}$; д) $1/a$ при $a\neq 0$; $\varnothing$ при $a=0$.

Заметим, что в случае а) ответ может выглядеть и так: $\{1\}$. Однако «аналогичные» записи $\{(-\infty;\ \infty)\}$, $\{-\infty;\ \infty\}$ или $\{\varnothing\}$ в случаях б) или в) невозможны, поскольку в фигурные скобки можно заключать только элементы множества решений, т. е. числа. К сожалению, в ответах абитуриентов и по сей день встречаются такие и еще более фантастические и нелепые записи.

Некоторые считают, что равенства б) и в) нельзя называть уравнениями, так как они не содержат неизвестной в явном виде. Ну что же, это дело вкуса. Нам кажется, что умение решать и такие уравнения не может повредить абитуриенту (обратите внимание на уравнение д) в случае $a=0$). Более того, уравнения такого типа иногда возникают в процессе решения экзаменационных задач, а психологическая неподготовленность к ним может иметь отрицательные последствия. Например, некоторые абитуриенты, решавшие задачу 2.Ж.3, получили в одном из случаев уравнение $0=0$ и заключили, что последнее уравнение решений не имеет.

Среди всех значений неизвестной величины особую роль играют так называемые допустимые значения, т. е. такие, при которых и левая, и правая части исходного уравнения одновременно имеют смысл. Множество всех таких значений обычно называют *областью допустимых значений* (сокращение ОДЗ) уравнения.

Разумеется, среди значений, не входящих в ОДЗ, не может оказаться ни одного корня, поскольку эти значения фактически невозможно подставлять в уравнение, не говоря уже о проверке истинности получающегося равенства. Нечеткое понимание этого обстоятельства может привести к неверным выводам.

2.Б.2. Решить уравнение:

а) $\dfrac{0}{x}=0$; г) $2^{\log_2 x}=x$;

б) $\dfrac{x^2}{x}=0$; д) $\log_a x=1$;

в) $\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$; е) $\sqrt{x}-\sqrt{x}=0$.

Уравнения подобного типа часто вызывают у абитуриентов недоумение: «Ведь равенства в) и г) вообще не уравнения, а известные тождества, справедливые при всех значениях x». Некоторые полагают, что значение $x=0$ является корнем уравнения б), поскольку после сокращения дроби на x уравнение принимает вид $x=0$. Эти соображения либо совсем не учитывают ОДЗ, либо подменяют исходное уравнение другим, более удобным для подстановки найденных значений неизвестной.

Ответ: а) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$; б) $\varnothing$; в) $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; г) $(0;\ \infty)$; д) $(0;\ 1)\cup(1;\ \infty)$; е) $[0;\ \infty)$.

Отдельные поступающие считают допустимыми лишь такие значения неизвестной, при которых обе части не только имеют смысл, но и равны друг другу. При таком понимании получается, что ОДЗ уравнения и множество его корней — это одно и то же.

Другие поступающие склонны преувеличивать роль ОДЗ, рассуждая следующим образом: «Если с самого начала определить ОДЗ уравнения, то можно смело преобразовывать уравнение, беспокоясь лишь о том, чтобы полученные в результате значения неизвестной вошли в ОДЗ». Несостоятельность этого рассуждения видна из следующего примера.

2.Б.3 (геогр. ф-т — 82). Решить уравнение

$$\sqrt{2x^3+8x+7}-x=2.$$

ОДЗ этого уравнения задается неравенством $2x^2+8x+7\geqslant 0$, которое выполняется при $x\leqslant -2-\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $x\geqslant -2+\frac{\sqrt{2}}{2}$. Возводя обе части уравнения $\sqrt{2x^3+7x+7}=x+2$ в квадрат и производя естественные упрощения, получаем

$$x^2+4x+3=0.$$

Оба корня (—1 и —3) последнего уравнения входят в ОДЗ, однако исходному уравнению удовлетворяет только первый из них.

Ответ: —1.

Есть ли необходимость перед тем, как решать уравнение, выписывать, а тем более доводить до явного вида ОДЗ? Как мы увидим позднее (см. задачу 2.З.1), такой необходимости нет, хотя в общем-то и вреда от названных действий тоже нет. Известны случаи, когда использование ОДЗ позволяет довольно сильно сузить круг поиска (например, неравенство из задачи 1.В.2 имеет всего два допустимых значения неизвестной). Таким образом, знание ОДЗ необходимо ровно в той степени, в какой оно облегчает решение уравнения.

Гораздо важнее, на наш взгляд, внимательно следить за теми изменениями, которые претерпевает ОДЗ при переходе от одного уравнения к другому. И если в процессе преобразований некоторые ограничения на x перестают действовать, то имеет смысл их восстанавливать в системе с полученным уравнением. Что же касается сужения ОДЗ, то это явление крайне нежелательно из-за возможной потери корней.

Задачи

2.Б.4. Решить уравнение:

а) $-5=x$;

б) $x=x$;

в) $x=x+1$;

г) $\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$;

д) $\frac{1}{x}=\frac{1}{x}+1$;

е) $\frac{1}{1/x}=0$;

ж) $x/x=1$;

з) $x/x=0$;

и) $x+\sqrt{x}=\sqrt{x}-1$;   л) $\sqrt{x-1}=\sqrt{x-x^2}$;

к) $\sqrt{-x}=1$;   м) $\sqrt{-x^2}=1$.

2.Б.5. Найти ОДЗ для каждого уравнения из задачи 2.Б.4.

2.Б.6. Может ли оказаться так, что какое-либо значение неизвестной:

а) является корнем уравнения, но не входит в его ОДЗ;

б) не является корнем уравнения, но входит в его ОДЗ;

в) не является корнем уравнения и не входит в его ОДЗ?

2.Б.7. Какие ограничения на неизвестную величину достаточно наложить, чтобы компенсировать расширение ОДЗ при переходе от первого уравнения ко второму:

а) $\frac{x^2-4}{x-2}=4$ и $x+2=4$;

б) $\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}=\sqrt{3}$ и $x^2-1=3$;

в) $2\lg x\leqslant\lg(x+2)$ и $x^2=x+2$?

Ответы

2.Б.4. а) -5; б) $(-\infty;\ \infty)$; в) $\varnothing$; г) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$; д), е) $\varnothing$; ж) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$; з) $\varnothing$; и) $\varnothing$; к) -1; л) 1; м) $\varnothing$. **2.Б.5.** а)—в) $(\infty;\ \infty)$; г)—з) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$; и) $[0;\ \infty)$; к) $(-\infty;\ 0]$; л) 1; м) 0. **2.Б.6.** а) нет; б), в) да. **2.Б.7.** а) $x\neq2$; б) $x-1\geqslant0$; в) $x>0$.

§ 2.В. ЛОГИКА ОБОСНОВАНИЯ ОТВЕТА

Остановимся подробнее на способах доказательства того, что заданное уравнение имеет конкретный ответ (т. е. выполнены утверждения 1) и 2) из параграфа 2.А). Логически возможны три принципиально отличных друг от друга хода рассуждений, которые порождают соответственно три метода решения.

1. *Метод равносильных преобразований.* Этот метод наиболее удобен во многих случаях. Он состоит в приведении исходного уравнения к простейшему виду, представляющему собой уравнение, систему уравнений и неравенств или даже совокупность таких систем, для каждой из которых ответ выписывается без особого труда.

Главная же особенность этого метода заключается в том, что на каждом шагу в цепочке полученных преобразований *не происходит ни потери корней, ни приобретения посторонних решений* (т. е. значений, не являющихся корнями исходного уравнения). Таким образом, каковы бы ни были корни уравнения, все они, и только они остаются корнями после каждого преобразования.

Уравнения (системы или совокупности систем) называются *равносильными*, если множества их решений совпадают. Для обозначения равносильности используют знак $\Leftrightarrow$.

2.В.1 (ф-т почв. — 77). Решить уравнение

$$2\sqrt{x+5}=x+2.$$

Решение проведем методом равносильных преобразований:

$$2\sqrt{x+5}=x+2 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 4(x+5)=(x+2)^2, \\ x+2\geqslant 0, \\ x+5\geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(x+4)=0, \\ x\geqslant -2 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Ответ: 4.

Напомним, что решениями *системы* каких-либо условий, будь то уравнений или неравенств, являются те и только те значения неизвестной величины, которые удовлетворяют одновременно всем условиям этой системы.

Опыт вступительных экзаменов показывает, что метод равносильных преобразований пользуется наибольшей популярностью среди абитуриентов, но, к сожалению, его применение сопровождается огромным числом ошибок самого разнообразного характера. Наша задача — предоставить читателю возможность отработать некоторые безошибочные приемы этого метода и научиться самостоятельно разбираться в вопросах равносильности в каждом конкретном случае.

2. *Метод проверки.* В некоторых случаях следить за равносильностью преобразований бывает очень трудно (особенно при решении систем уравнений с несколькими неизвестными). В таких случаях уравнение хотя и приводится к простейшему виду, но от преобразований требуется лишь одно: *чтобы ни один из корней исходного уравнения не мог потеряться.*

При этом, однако, могут появиться посторонние решения, которые можно обнаружить с помощью проверки. Это делается так: каждое из найденных значений неизвестной подставляют в исходное уравнение и проверяют, действительно ли получается равенство.

2.В.2 (экономфак — 79). Решить уравнение

$$\sqrt{10-18\cos x}=6\cos x-2.$$

Метод проверки предполагает следующий ход решения. Возводя обе части уравнения в квадрат и упрощая полученное уравнение, имеем

$$6\cos^2 x-\cos x-1=0.$$

Отсюда получаем две серии корней

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, \quad n\in \mathbf{Z},$$

$$x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+2\pi m, \quad m\in \mathbf{Z}.$$

Проверка показывает, что исходному уравнению удовлетворяет лишь первая из них.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, \quad n\in \mathbf{Z}$.

Заметим, что указанная проверка не всегда достаточно проста, а иногда и вообще невозможна (если, например, проверяемые значения заполняют целый промежуток, что довольно часто бывает при решении неравенств). Кроме того, никакая проверка не избавляет нас от необходимости анализировать применяемые преобразования и не позволяет преобразовывать исходное уравнение каким угодно способом, поскольку потеря корней и в этом методе недопустима.

Некоторые абитуриенты считают, что проверку «на всякий случай» нужно включать в решение при любых обстоятельствах, даже когда применяются лишь равносильные преобразования. Это ошибочное мнение возникает из-за недостаточного понимания логики обоснования ответа.

3. *Метод подбора.* Иногда исходное уравнение никак не приводится к простейшему виду, и остается лишь подобрать (например, угадать) некоторые значения неизвестной, удовлетворяющие этому уравнению. Однако и такое, с позволения сказать, решение также можно довести до логического конца, если с помощью каких-либо соображений удастся доказать, что *уравнение не имеет других корней помимо уже найденных.* При этом для доказательства часто используются неравенства, связанные с монотонностью или ограниченностью функций, входящих в уравнение (см. § 8.Б).

Многие абитуриенты пренебрегают этим методом из-за некоторой его нетрадиционности и кажущейся неполноценности. Однако метод подбора не только логически безупречен, но и является единственно возможным для целого ряда задач.

Продемонстрируем этот метод на следующем примере (см. также задачи 1.В.2 и 8.Б.2).

2.В.3 (физфак — 78). Решить уравнение

$$\log_3(3^x-8)=2-x.$$

Решение. 1) Значение $x=2$ является корнем исходного уравнения.

2) Докажем, что других корней нет: при $x>2$ имеем

$$\log_3(3^x-8)>\log_3(3^2-8)=0>2-x,$$

при $\log_3 8 < x < 2$ имеем

$$\log_3(3^x-8) < \log_3(3^2-8) = 0 < 2-x,$$

а значения $x \leqslant \log_3 8$ не входят в ОДЗ уравнения.

Ответ: 2.

В заключение укажем на одну весьма распространенную логическую ошибку, которая характеризуется следующей ситуацией. Подобрав какой-либо корень уравнения, абитуриент в тексте решения пытается объяснить, как именно можно было догадаться, что найденное значение удовлетворяет уравнению. И ему невдомек, что этот факт достаточно всего лишь проверить, а вот объяснить-то надо совсем другое: откуда именно следует, что угаданный корень единственный.

Задачи

2.В.4. Решить уравнение методом проверки:

а) $\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$;

б) $\sqrt{x-2}\sqrt{x+4}=\sqrt{7}$;

в) (ф-т почв. — 77) $\sqrt{x^2+8}=2x+1$;

г) (геол. ф-т — 82) $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-2}$;

д) $\sqrt{8x+1}-\sqrt{2x-2}=\sqrt{7x+4}-\sqrt{3x-5}$;

е) $2\lg x=\lg(x+6)$;

ж) (мехмат — 82) $\log_x(2x^2-3x-4)=2$;

з) (экономфак — 79) $\sqrt{5-2\sin x}=6\sin x-1$.

2.В.5. Решить уравнение методом подбора:

а) $x+1=2^{-x}$;

б) $2x-1=\dfrac{1}{x^6}$;

в) (физфак — 78) $\log_7(6+7^{-x})=1+x$;

г) $2^x+3^x=5$;

д) $3^x+4^x=5^x$;

е) $x^2+1=\cos x$;

ж) $\sin x+x=0$.

Ответы

2.В.4. а) $\varnothing$; б) 3; в) 1; г) 1; д) 3; е) 3; ж) 4; з) $(-1)^n\pi/6+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **2.В.5.** а) 0; б) 1; в) 0; г) 1; д) 2; е) 0; ж) 0.

§ 2.Г. РАСЩЕПЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Прежде чем изучать возможные преобразования уравнений, надо хорошо себе представить главную их цель. Большинство абитуриентов решают уравнения как бы вслепую: они производят некоторые упрощения до тех пор, пока не станет понятно, как получить ответ. И мало кто ясно осознает при этом, что одним из решающих преобразований уравнения является приведение его к виду

$$F_1(x)F_2(x)\ldots F_n(x)=0. \qquad (1)$$

Подчеркнем, что речь здесь идет не о разложении на множители обеих частей уравнения, а о приведении уравнения к такому виду (1), в котором правая его часть есть именно ноль, а левая — произведение каких-либо выражений $F_1(x)$, $F_2(x)$ ... $F_n(x)$, зависящих от неизвестной величины x.

Для решения уравнения (1) советуем хорошенько усвоить следующее основное правило расщепления: *произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из его сомножителей равен нулю, а остальные при этом имеют смысл.*

Несмотря на кажущуюся очевидность и простоту основного правила расщепления, оно имеет очень важное значение для решения уравнений, а недооценка или недопонимание любого из положений в его формулировке приводят порой к самым неожиданным и в то же время массовым ошибкам на экзамене.

2.Г.1 (мехмат — 80). Решить уравнение

$$(x^2-4)\sqrt{x+1}=0.$$

На экзамене подавляющее большинство абитуриентов быстро обнаружили все значения x, при которых хотя бы один из сомножителей в левой части уравнения равен нулю, а именно: 2, —2, —1. Однако далеко не все заметили, что, хотя при $x=-2$ первый сомножитель и равен нулю, второй при этом значении x не имеет смысла. В то же время точное соблюдение основного правила гарантирует безошибочное решение. Исходное уравнение приводится к виду

$$(x-2)(x+2)\sqrt{x+1}=0,$$

а значит, равносильно следующей совокупности уравнений и систем:

1) $\begin{cases} x-2=0, \\ x+1\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2;$

2) $\begin{cases} x+2=0, \\ x+1\geqslant 0 \end{cases}$ решений нет;

3) $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1.$

Напомним, что решениями некоторой *совокупности* условий, будь то уравнений, неравенств или систем (объединяемых иногда знаком [), являются те и только те значения неизвестной, которые удовлетворяют хотя бы одному из этих условий. В некоторых случаях решения, происходящие от разных условий совокупности, помечают разными индексами, например:

$$x_1=2,\ x_3=-1.$$

Ответ: -1; 2.

Указанная выше ошибка является одной из самых распространенных на экзамене. Чаще всего она проявляется в тех случаях, когда помимо расщепления в решении имеются и другие, более содержательные, по мнению абитуриента, этапы, на которых сосредоточивается его внимание.

В стремлении избежать этой ошибки некоторые впадают в другую крайность, пытаясь внести в основное правило какие-либо изменения, делающие его более убедительным, понятным и, главное, безопасным. Например: «Для решения уравнения (1) достаточно перебрать все случаи, когда один из сомножителей равен нулю, а остальные в ноль не обращаются». Это «исправленное» правило отличается особой живучестью несмотря на явное расхождение его со здравым смыслом — разве произведение нескольких нулей не есть снова ноль?

2.Г.2. Решить уравнение

$$(x^2-5x+6)\sqrt{2-x}=0.$$

Приведя уравнение к виду

$$(x-2)(x-3)\sqrt{2-x}=0$$

и пользуясь правилом с «поправкой», получаем не имеющие ничего общего с истиной выводы: случай $x=2$ отпадает (имеются два нулевых сомножителя), а случай $x=3$ годится (нулю равен только один из сомножителей). На самом же деле, следуя основному правилу, получаем ответ: 2.

Заметим, что при решении уравнений (а тем более неравенств) процедуре нахождения корней квадратного трехчлена отводится лишь вспомогательная роль. Кстати, в большинстве случаев ее можно вообще не описывать в тексте решения, а проделывать на полях, в черновике или даже в уме (см. § 1.Г). Главная же цель работы с квадратным трехчленом — разложение на множители. При этом, если такое разложение невозможно, то следует проявлять особую осторожность и не спешить с выводами (см. задачу 3.А.2).

Правило расщепления применимо и в таком важном частном случае, когда уравнение приводится к виду

$$\frac{F(x)}{G(x)}=0. \qquad (2)$$

В этом случае левая часть есть произведение выражений $F(x)$ и $\frac{1}{G(x)}$, поэтому необходимо иметь в виду две особенности: *во-первых, дробь $\frac{1}{G(x)}$ ни при каком значении выражения $G(x)$ не может быть равна нулю; во-вторых, если $G(x)=0$, то эта дробь не имеет смысла.*

Числитель и знаменатель дроби в левой части уравнения (2), в свою очередь, могут представлять собой произведения каких-либо выражений. С учетом отмеченных выше особенностей читатель без особого труда сможет переформулировать основное правило и для более общего уравнения вида

$$\frac{F_1(x)\ \dots F_n(x)}{G_1(x)\dots G_m(x)}=0 \tag{3}$$

2.Г.3. Решить уравнение

$$\frac{(x^2+3x-4)(x^2+2x-3)}{\sqrt{9-x^2}\,(x^2+2x+3)}=0.$$

Решение. $\frac{(x+4)(x-1)^2(x+3)}{\sqrt{9-x^2}\,(x^2+2x+3)}=0.$

Уравнение равносильно совокупности систем:

1) $\begin{cases} x+4=0, \\ \sqrt{9-x^2}\neq 0, \\ x^2+2x+3\neq 0 \end{cases}$ решений нет;

2) $\begin{cases} (x-1)^2=0, \\ \sqrt{9-x^2}\neq 0, \\ x^2+2x+3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1;$

3) $\begin{cases} x+3=0, \\ \sqrt{9-x^2}\neq 0, \\ x^2+2x+3\neq 0 \end{cases}$ решений нет.

Ответ: 1.

Если в какую-либо систему (с одной неизвестной) входит хотя бы одно уравнение, которое можно решить, то нет никакой необходимости решать остальные уравнения или неравенства системы. Достаточно найти корни этого уравнения, а затем простой подстановкой проверить, какие из них удовлетворяют всем остальным условиям системы. Например, в решении задачи 2.Г.3 система 1) несовместна, поскольку при $x=-4$ выражение $\sqrt{9-x^2}$ не имеет смысла; при этом совершенно не требуется заниматься поиском корней квадратного трехчлена x^2+2x+3 (а точнее, объяснением, почему их нет).

Более того, как показывает опыт, какие-либо упрощения неравенства вида $G(x)\neq 0$ оказываются порой даже вредными. Дело в том, что указанное неравенство следует понимать так: выражение $G(x)$ должно иметь смысл и не должно обращаться в ноль. Однако первое из этих требований пропадает при некоторых упрощениях. Так, при решении задачи 2.Г.3 неравенство $\sqrt{9-x^2}\neq 0$ можно по ошибке заменить неравенством $9-x^2\neq 0$ (вместо правильного $9-x^2>0$), в результате чего появится постороннее решение -4. Характерная картина наблюдалась на экзамене при работе с неравенством

$$1+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\neq 0$$

из решения задачи 1.В.1, которое довольно естественно, хотя и без надобности, заменялось неравносильным ему условием

$$x\neq -\frac{1}{2}+2n, \quad n\in \mathbf{Z}.$$

Задачи

2.Г.4. Сформулировать отдельное правило расщепления для уравнения вида (2).

2.Г.5. Какие случаи нужно перебрать для решения уравнения (3)?

2.Г.6. Решить уравнение:

а) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+5}=0;$

б) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^3-3x^2+2x}=0;$

в) $\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^3+x^2-4x-4}=0;$

г) (мехмат — 80) $(9-x^2)\sqrt{2-x}=0;$

д) $\sqrt{4-x}\sqrt{x^2-49}\,(x+4)=0;$

е) $\dfrac{(x^2-36)(x+10)}{\sqrt{5x+8-x^2}}=0;$

ж) $(x^2-1)\log_2(x^2-x-1)=0;$

з) (экономфак — 83) $\sqrt{9-x^2}\,(2\sin 2\pi x+5\cos\pi x)=0;$

и) (ф-т почв. — 78)

$$\sqrt{x}\left(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}\right)=3^{2\sqrt{x^2-3}+1}-3^{\sqrt{x^2-3}+1}+6\sqrt{x}-18;$$

к) (биофак — 83)

$$(x-4)^2\log_4(x-1)-2\log_4(x-1)^2=(x-4)^2\log_{x-1}4-2\log_{x-1}16.$$

2.Г.4. Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда ее числитель равен нулю, а знаменатель при этом имеет смысл и не равен нулю. **2.Г.5.** Нужно перебрать все случаи, когда хотя бы один из сомножителей числителя равен нулю, все остальные сомножители числителя и знаменателя имеют смысл, а все сомножители знаменателя не равны нулю. **2.Г.6.** а) —2; —1; б) $\varnothing$; в) 1; г) —3; 2; д) —7; е) 6; ж) —1, 2; з) —3; —5/2; —3/2; —1/2; 1/2; 3/2; 5/2; 3; и) 2; 9; к) 5/4; 5; 6.

§ 2.Д. БЕЗОПАСНЫЕ С ВИДУ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Решать даже очень легкие уравнения, как правило, не удается без помощи преобразований, приводящих уравнения к более простому виду. Называем *преобразованиями* лишь такие действия, при которых левая и правая части уравнения либо вообще не меняются по величине, либо изменяются обязательно каким-нибудь одинаковым образом: например, обе части или умножаются на одно и то же выражение, или возводятся одновременно в некоторую степень, или логарифмируются по одинаковому основанию и т. д. При этом иногда пользуясь вольностью речи, говорим, что соответствующее действие производится не над обеими частями уравнения, а над самим уравнением.

1. *Лжепреобразования.* В результате ошибок самого разнообразного характера возможен переход к уравнению, не имеющему практически ничего общего с предыдущим. Часть таких ошибок представляет собой просто неверные выкладки, о происхождении которых говорилось в гл. 1.

В других случаях ошибки появляются из-за неодинаковости или неправомерности действий, совершаемых над левой и правой частями уравнения. Приведем несколько типичных примеров. Уравнения

$$3x=\frac{\pi}{6}+\pi n, \quad \sqrt[3]{x-1}=\sqrt{x+1},$$

$$3^{\log_3 x}=\log_2 5, \quad \sin 9x=\sin 3x$$

с помощью различных ошибочных преобразований «приводятся» соответственно к виду

$$x=\frac{\pi}{2}+3\pi n, \quad (x-1)^3=(x+1)^2,$$

$$\log_3 x=\frac{\log_3 5}{\log_3 2}, \quad \sin 3x=\sin x.$$

Читатель сможет самостоятельно разобраться в существе указанных здесь лжепреобразований. Заметим, что ошибок подобного рода можно избежать, если при каждом переходе от одного уравнения к другому внимательно следить за тем, чтобы над обеими частями уравнения одновременно производилась одна и та же четко обозначенная математическая операция.

2. *Упрощение левой и правой частей уравнения в отдельности.* Не любые упрощения приводят к равносильному уравнению, поскольку некоторые из них расширяют, а некоторые и сужают ОДЗ уравнения. Последняя возможность крайне опасна, так как она влечет за собой потерю корней.

2.Д.1. (геогр. ф-т — 77). Решить уравнение

$$\log_2(x+3)+\log_2(x-1)=\frac{1}{\log_5 2}.$$

Во время экзамена невнимательные абитуриенты быстро привели уравнение к виду

$$\log_2((x+3)(x-1))=\log_2 5,$$

но при этом не наложили каких-либо дополнительных ограничений на x в связи с расширением ОДЗ (достаточно было бы, например, добавить неравенство $x-1>0$), а в результате приобрели постороннее решение — 4.

Ответ: 2.

2.Д.2. Решить уравнение

$$\log_2((x+3)(x-1))=\log_2((2x+7)(x-1)).$$

Если представить обе части уравнения в виде суммы логарифмов (для последующего уничтожения некоторых из них), то полученное уравнение

$$\log_2(x+3)+\log_2(x-1)=\log_2(2x+7)+\log_2(x-1)$$

не будет иметь решений, в то время как исходное имеет корень —4. Это происходит вследствие сужения ОДЗ при указанном преобразовании уравнения.

Ответ: — 4.

Вопросы изменения области определения выражений при преобразованиях подробно рассмотрены в § 1.В (см. также задачу 2.Б.2, где «очевидные» упрощения левых частей некоторых уравнений так и просятся на бумагу).

3. *Прибавление к обеим частям уравнения (или вычитание из обеих его частей) одинаковых выражений.* Наиболее распространены следующие частные случаи этого преобразования: перенос какого-либо выражения из одной части уравнения в другую с противоположным знаком (и дальнейшее упрощение) или взаимное уничтожение одинаковых выражений в обеих частях уравнения.

Поступающие давно приучили себя к мысли, что названные преобразования равносильны всегда. Но это не так: они могут изменять ОДЗ уравнения, в результате чего иногда появляются посторонние решения.

2.Д.3 (геол. ф-т — 79). Решить уравнение

$$1+\lg(1+x^2-2x)-\lg(1+x^2)=2\lg(1-x).$$

Основная масса поступавших существенно упростила уравнение вычитанием из обеих его частей выражения

$$\lg(1+x^2-2x)=\lg(1-x)^2=2\lg(1-x)$$

(в справедливости проделанных выкладок на ОДЗ уравнения убедились многие). Однако далеко не все заметили, что один из корней полученного уравнения

$$1-\lg(1+x^2)=0 \Leftrightarrow 10=1+x^2 \Leftrightarrow (x+3)(x-3)=0$$

не является корнем исходного, так как не входит в его ОДЗ. Чтобы обеспечить равносильность совершенного преобразования, достаточно было восстановить ОДЗ исходного уравнения с помощью дополнительного неравенства, получив в итоге систему

$$\begin{cases}(x+3)(x-3)=0,\\ x<1.\end{cases}$$

Ответ: -3.

Подводя итог сказанному выше, подчеркнем, что рассмотренные преобразования кажутся на первый взгляд совершенно безобидными, т. е. применимыми в любой ситуации. Однако они могут повлечь за собой досадные недоразумения на экзамене, если совсем не задумываться над возможными последствиями или недооценивать их.

Задачи

2.Д.4. Равносильны ли уравнения:

а) $\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-3}=1$ и $x-2=1$;

б) $\dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}=0$ и $\operatorname{tg} x=0$;

в) $\lg((x+3)(x-1))=\lg(x-1)$ и $\lg(x+3)=0$;

г) $\sqrt{x^2+4x+4}=1$ и $x+2=1$;

д) $\sin 5x=\sin 2x$ и $5x=2x+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$;

е) $2^{\log_2(2x+1)}=\log_2 2^x$ и $2x+1=x$?

2.Д.5. Решить уравнение:

а) (геогр. ф-т — 77) $\log_3(x+4)+\log_3(x-1)=1+\dfrac{1}{\log_2 3}$;

б) (геол. ф-т — 79) $2+\lg(1+4x^2-4x)-\lg(19+x^2)=2\lg(1-2x)$;

в) $\sqrt{(x-1)^2}+1=(\sqrt{x-1})^2+x^2$;

г) $\dfrac{(5-x)\sqrt{5-x}-(x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}=3.$

2.Д.6 (ВМК — 83). Для каждого значения a решить уравнение

$$(x-3)(x+1)+3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=(a-1)(a+2)$$

и найти все значения a, при которых уравнение имеет ровно одно решение.

Ответы

2.Д.4. а) — е) нет. 2.Д. 5. а) 2; б) —9; в) 1; г) $\varnothing$.

2.Д.6. $1-\sqrt{a^2-2a+5}$, $1+\sqrt{a^2+4a+8}$ при $a<-2$; $1-\sqrt{a^2-2a+5}$, $1-\sqrt{a^2+4a+8}$ при $a\in[-2;\ -1/2)\cup(-1/2;\ 1]$; $1+\sqrt{a^2-2a+5}$, $1-\sqrt{a^2+4a+8}$ при $a>1$; $-3/2$ (один корень) при $a=-1/2$.

§ 2.Е. ОПАСНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В настоящем параграфе рассмотрим такие действия с уравнениями, которые очень часто приводят к грубым ошибкам на экзамене. Но главная особенность этих действий состоит в том, что их можно практически совсем не выполнять, а вместо того с помощью совершенно безопасных преобразований приводить уравнение к расщепляемому виду.

1. *Деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение.* Пусть уравнение имеет вид

$$H(x)F(x)=H(x)G(x), \tag{1}$$

т. е. некоторое выражение $H(x)$ выделено в качестве множителя в каждой из частей уравнения. Мы рекомендуем в этом случае поступать так: собрать все выражения в одной части уравнения и вынести общий множитель $H(x)$ за скобку, получив уравнение

$$H(x)(F(x)-G(x))=0,$$

а далее действовать согласно правилу расщепления (см. § 2.Г).

Но ведь куда легче, возразят иные читатели, просто поделить обе части уравнения (1) на выражение $H(x)$? Вместо ответа на этот вопрос приведем примеры.

2.Е.1 (геол. ф-т — 83). Решить уравнение:

а) $(x+1)\sqrt{16x+17}=(x+1)(8x-23)$;

б) $(x+1)\sqrt{x^2+x-2}=2x+2$.

Некоторые абитуриенты во время экзамена просто сократили обе части уравнения а) на $x+1$, потеряв при этом корень -1. На самом деле уравнение а) равносильно уравнению

$$(x+1)(\sqrt{16x+17}-(8x-23))=0,$$

которое, в свою очередь, равносильно совокупности уравнений и систем:

1) $\begin{cases} x+1=0, \\ 16x+17\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1;$

2) $\sqrt{16x+17}=8x-23 \Leftrightarrow \begin{cases} 16x+17=(8x-23)^2, \\ 8x-23\geqslant 0, \\ 16x+17\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-4)=0, \\ 8x\geqslant 23 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$

«Все гораздо проще, — подумает читатель. — Чтобы не потерять корней, я перед сокращением обеих частей уравнения на общий множитель найду те значения x, при которых этот множитель равен нулю». Именно так и поступили многие абитуриенты при решении уравнения б), а в результате приобрели постороннее решение -1. В то же время, действуя согласно рекомендации, они получили бы, что уравнение б) равносильно уравнению

$$(x+1)\left(\sqrt{x^2+x-2}-2\right)=0,$$

которое равносильно совокупности уравнений и систем:

1) $\begin{cases} x+1=0, \\ x^2+x-2\geqslant 0 \end{cases}$ решений нет;

2) $\sqrt{x^2+x-2}=2 \Leftrightarrow x^2+x-2=4 \Leftrightarrow (x+3)(x-2)=0.$

О т в е т: а) -1; 4; б) -3; 2.

2. *Умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение.* Потребность в таком преобразовании возникает обычно тогда, когда хотя бы одна из частей уравнения содержит выражение в знаменателе. Однако в этом случае нет никакой нужды избавляться от знаменателя, поскольку достаточно перенести все в одну сторону и привести к общему знаменателю, а затем воспользоваться правилом расщепления. Отклонение от указанного пути может привести к неверному решению уравнения.

2.Е.2. (биофак — 85). Решить уравнение

$$\frac{5}{x+1}+\frac{4x-6}{(x+1)(x+3)}=3.$$

Типичная ошибка поступающих состояла в умножении обеих частей уравнения на выражение $(x+1)(x+3)$, после чего возникало постороннее решение -1. Если же действовать, как указано выше, то исходное уравнение приобретает вид

$$\frac{x(x+1)}{(x+1)(x+3)}=0.$$

Попутно отметим, что на экзамене некоторые трудности вызвал вопрос: является ли значение -1 корнем последнего уравнения? Одни решили, что является, поскольку числитель дроби в левой части уравнения равен нулю. Другие незаметно ушли от решения этого вопроса, сократив дробь на $x+1$ (вопрос после такого сокращения мог и не отпасть, как это произошло, например, в уравнении б) задачи 2.Б.2). А ведь значение -1 попросту не входит в ОДЗ уравнения!

Ответ: 0.

3. *Извлечение квадратного корня из обеих частей уравнения*. В некоторых случаях уравнение сильно упрощается при таком преобразовании, поскольку предварительно может быть приведено к виду

$$(F(x))^2=(G(x))^2. \qquad (2)$$

На попытках неаккуратного избавления от квадратов в уравнении (2) основано большое число парадоксов. Дело в том, что уже очень правдоподобным кажется утверждение о равносильности этого уравнения уравнению

$$F(x)=G(x).$$

Тем не менее на экзаменах довольно часто возникают ошибки, связанные с неумением действовать в этой ситуации.

Бытует мнение (причем совершенно правильное), что уравнение (2) равносильно «уравнению»

$$F(x)=\pm G(x).$$

Однако далеко не все правильно отвечают на вопрос, какой все-таки знак — плюс или минус — в действительности должен быть поставлен. Одни, не задумываясь, повторяют знак плюс-минус в дальнейшем, другие пренебрегают им порой настолько, что забывают его писать.

Рекомендуем, не пользуясь этим преобразованием, переносить обе части уравнения (2) в одну сторону и раскладывать полученную разность квадратов на множители

$$(F(x)+G(x))(F(x)-G(x))=0,$$

действуя далее по правилу расщепления или, возможно, иначе. Другой способ извлечения корня описан в § 3.Г.

2.Е.3 (биофак — 82). Решить уравнение

$$\sin^2 x + \cos^2 3x = 1.$$

На экзамене исходное уравнение очень скоро почти всеми было приведено к виду

$$\sin^2 x = \sin^2 3x \tag{3}$$

(или $\cos^2 3x = \cos^2 x$), после чего началась невообразимая путаница. Одни ограничились в дальнейшем только уравнением

$$\sin x = \sin 3x,$$

другие окончательно растерялись при работе с равенством

$$\sin x = \pm \sin 3x,$$

в то время как уравнение (3), согласно нашей рекомендации, приводится к виду

$$(\sin x + \sin 3x)(\sin x - \sin 3x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x \cos x \cos 2x \sin x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 4x = 0.$$

Заметим, что в уравнении (3) можно было избавиться от квадратов и другим, чисто тригонометрическим путем.

Ответ: $\frac{\pi}{4} n, \quad n \in \mathbf{Z}.$

Таким образом, приходим к важному выводу: *операций умножения или деления уравнения на функцию от x, а также операции извлечения из уравнения квадратного корня следует по возможности избегать.* Особую роль этот вывод играет при решении неравенств (см. § 3.Г).

Теперь поговорим о некоторых исключениях. Первое очевидное замечание касается тех «функций от x», на которые, конечно, можно смело делить и умножать уравнение при каждом удобном случае — это ненулевые константы.

Далее, иногда умножению или делению на функцию от x придается иной смысл, нежели описанный в настоящем параграфе (например, при решении задач 2.Ж.1, 2.И.4, 2.И.5, 4.Б.4, 4.В.6, 5.В.4). Но уж тогда эти преобразования требуют известной осторожности.

Наконец, запрет на извлечение корня не нужно механически переносить на корни всех других степеней. В частности, при извлечении из уравнения корня нечетной степени (третьей, пятой и др.) получается уравнение, равносильное исходному. Если же вместо извлечения корня четной степени (четвертой и выше) использовать прием, аналогичный описанному выше, то можно натолкнуться на значительные трудности технического характера.

В заключение отметим, что к числу опасных можно отнести и ряд других преобразований, часть из которых будет рассмотрена в следующих главах.

Задачи

2.Е.4. Решить уравнение:

а) $\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{4}{x^2-4}$;

б) (биофак—85) $\dfrac{1-x}{(2-x)(x-3)}+1=\dfrac{1}{2-x}$;

в) (геол. ф-т—83) $x\sqrt{36x+1261}=18x^2-17x$;

г) (геол. ф-т—83) $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6$;

д) $\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{x+2}=\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{4-x}$;

е) (ф-т почв.—79) $\dfrac{2\lg x}{\lg x-1}=-\lg x+\dfrac{2}{\lg x-1}$;

ж) $\log_{x-1}1=\log_{x^2-3}(3-x)$;

з) (геогр. ф-т—84) $2\sin\dfrac{x}{2}\cos 2x=\sin\dfrac{x}{2}$;

и) (мехмат—80) $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}=1+\sin x$;

к) (биофак—82) $\sin^2 2x+\cos^2 x=1$;

л) $x^4=(5x+6)^2$;

м) $8x^6=1-3x+3x^2-x^3$;

н) $x^4=(x+2)^8$.

2.Е.5. Для каждого значения a решить уравнение

а) (геол. ф-т—79) $\dfrac{a}{2a-x}=3$;

б) $\dfrac{2a^2+x^2-6a}{a^3-x^3}+\dfrac{2x}{ax+a^2+x^2}-\dfrac{1}{x-a}=0$;

в) $\sqrt[4]{a-x}-\sqrt[4]{a+x}=2x$.

Ответы

2.Е.4. а) $\varnothing$; б) 1; в) 0; 3; г) 0; 5; д) -1; е) 0,01; ж) $\varnothing$; з) $2\pi n$, $\pm\pi/6+\pi m$, n, $m\in\mathbf{Z}$; и) $2\pi n$, $-\pi/2+2\pi m$, n, $m\in\mathbf{Z}$; к) $\pi n/3$, $n\in\mathbf{Z}$; л) -3; -2; -1; 6; м) -1; $1/2$; н) -4; -1. 2.Е.5. а) $5a/3$ при $a\neq0$; $\varnothing$ при $a=0$; б) $2-a$ при $a\neq0$; 1; $(-\infty; 0)\cup(0; \infty)$ при $a=0$; $\varnothing$ при $a=1$; в) 0 при $a>0$; $\varnothing$ при $a<0$.

§ 2.Ж. ПЕРЕБОР СЛУЧАЕВ

Некоторые уравнения по-разному преобразуются и исследуются при разных значениях неизвестной. Решение таких уравнений связано с перебором возможных случаев в зависимости от выполнения или невыполнения каких-либо условий на x.

2.Ж.1 (экономфак — 84). Решить уравнение

$$\sin 2x = 2\sqrt{3}\cos^2 x.$$

Решение. $2\sin x\cos x - 2\sqrt{3}\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos x(\sin x - \sqrt{3}\cos x) = 0.$$

Многие абитуриенты догадались, что уравнение $\sin x = \sqrt{3}\cos x$ упрощается делением обеих его частей на $\cos x$. Однако реализация этой догадки оказалась непростым делом из-за кажущегося противоречия: для деления на $\cos x$ нужно гарантировать, что выражение $\cos x$ отлично от нуля, но такую гарантию дать нельзя, так как тогда неминуемо будут потеряны корни уравнения $\cos x = 0$, являющиеся корнями исходного уравнения. Возникает необходимость рассмотреть два случая:

1) $\begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos x(\sin x - \sqrt{3}\cos x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z};$

2) $\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \cos x(\sin x - \sqrt{3}\cos x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi m, \; m \in \mathbf{Z}.$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n, \; \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad n, m \in \mathbf{Z}.$

Каким должен быть перебор случаев? Единственное, но непременное условие состоит в том, чтобы каждое значение x вошло хотя бы в один из рассматриваемых случаев. Короче, перебор должен быть исчерпывающим. При этом совсем не обязательно стремиться к несовместности или независимости друг от друга разбираемых случаев. Ведь любое значение неизвестной может быть рассмотрено и несколько раз. Например, в задаче 2.Г.2 при расщеплении уравнения

$$(x-2)(x-3)\sqrt{2-x} = 0$$

значение 2 оказывается решением одновременно в двух случаях (разумеется, это не означает, что и в ответ оно должно быть включено дважды). Заметим, что само правило расщепления — один из вариантов перебора случаев, в котором не рассматривается явно лишь единственный заведомо непригодный случай (когда все сомножители отличны от нуля).

Существенную роль идея перебора играет при решении уравнений с модулями, поскольку она заложена уже в самом определении модуля (см. § 1.Е). Такие уравнения решаются, как правило, самым обыкновенным перебором случаев, естественно возникающих *при раскрытии модулей.*

2.Ж.2 (мехмат — 84). Решить уравнение

$$x^2+3x+|x+3|=0.$$

Решение. Рассмотрим два случая:

1) $\begin{cases} x+3<0, \\ x^2+3x-x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-3, \\ (x+3)(x-1)=0 \end{cases}$ решений нет;

2) $\begin{cases} x+3\geqslant 0, \\ x^2+3x+x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant -3, \\ (x+3)(x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=-1. \end{array}\right.$

Ответ: -3; -1.

Эта задача позволила сразу выявить на экзамене тех абитуриентов, которые недостаточно четко усвоили идею перебора случаев. Часть из них правильно раскрыла модуль, выделив случаи $x+3<0$ или $x+3\geqslant 0$. Однако указанные условия оказались лишь формальной отпиской и довольно скоро были забыты, а в результате в ответ было ошибочно включено значение 1. Другая характерная ошибка заключалась в отбрасывании корня -3 во втором случае по той лишь причине, что он был отброшен в первом. В связи с этим подчеркнем, что при формировании ответа множества корней, полученные в каждом из разобранных случаев, нужно объединять, а не пересекать.

Если уравнение содержит несколько модулей, то и тогда можно обойтись перебором случаев, которых, правда, может оказаться довольно много. Каждый из случаев соответствует некоторой комбинации знаков тех выражений, которые стоят под модулями, причем часть из этих случаев сразу отпадает по причине их невозможности. Известное усовершенствование перебора представляет собой прием, использующийся в методе интервалов (см. § 3.В).

2.Ж.3 (геол. ф-т — 85). Решить уравнение

$$\frac{|x-2|}{|x-1|-1}=1.$$

Решение. Рассмотрим три случая:

1) $\begin{cases} x<1, \\ x<2, \\ \dfrac{2-x}{1-x-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1, \\ \dfrac{2}{-x}=0 \end{cases}$ решений нет;

2) $\begin{cases} 1\leqslant x<2, \\ \dfrac{2-x}{x-1-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\leqslant x<2, \\ \dfrac{2(2-x)}{x-2}=0 \end{cases}$ решений нет;

3) $\begin{cases} x\geqslant 2, \\ x\geqslant 1, \\ \dfrac{x-2}{x-1-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 2, \\ \dfrac{0}{x-2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x>2.$

Ответ: $(2; \infty)$.

В приведенном здесь решении задачи сразу опущен еще один случай, когда $x-2\geqslant 0$ и одновременно $x-1<0$, так как эти два неравенства несовместны. Несмотря на кажущуюся простоту задачи многие абитуриенты допустили ошибки как при раскрытии модулей, так и при решении получившихся систем. Особенно часто в ответ включалось значение 2, якобы удовлетворяющее уравнению

$$\frac{x-2}{x-2}=1,$$

которое после «упрощения» левой части превращалось в уравнение $1=1$ (см. также задачи 2.Б.2, 2.Д.2).

К вопросу о группировании значений выражения, стоящего под модулем, нужно относиться творчески: нулевое значение с равным успехом можно подключать как к положительным, так и к отрицательным значениям (ошибки не будет, если сделать это одновременно или, наоборот, рассмотреть нулевое значение отдельно). Но раз уж приходится перебирать различные случаи, то лучше сделать этот перебор сразу достаточно подробным, чтобы впоследствии не требовалось рассматривать еще и подслучаи.

2.Ж.4 (экономфак — 77). Решить уравнение

$$(x-2)^2|\cos x|=\cos x.$$

Решение. Рассмотрим три случая:

1) $\begin{cases} \cos x<0, \\ ((x-2)^2+1)\cos x=0 \end{cases}$ решений нет, так как $(x-2)^2+1\neq 0$ при любом значении x;

2) $\begin{cases} \cos x=0, \\ (x-2)^2\cdot 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in \mathbf{Z};$

3) $\begin{cases} \cos x>0, \\ ((x-2)^2-1)\cos x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x>0, \\ (x-3)(x-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1,$ так как $\cos 3<0<\cos 1$.

Ответ: 1; $\dfrac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in \mathbf{Z}$.

Для решения уравнений с модулями бывают полезны и другие приемы, описанные ниже в настоящей главе (см. задачи 2.З.3, 2.И.3).

Задачи

2.Ж.5. Решить уравнение:

а) (геол. ф-т — 80)

$\sin 2x+2\sin^2 x=0$;

б) (экономфак — 77) $\frac{\sin x}{(x-4)^2}+|\sin x|=0$;

в) (ВМК—79) $5^{|4x-6|}=25^{3x-4}$;

г) (геол. ф-т — 81)

$x^2-4x+|x-3|+3=0$;

д) (геол. ф-т — 80)

$x^2+4|x-3|-7x+11=0$;

е) $|x|+x^3=0$;

ж) (геол. ф-т — 85) $\frac{|x-3|}{|x-2|-1}=1$;

з) $||x-1|+2|=1$;

и) (экономфак — 80) $\log_3 \frac{1}{|x-1|-1}=1$;

к) (геол. ф-т — 78) $|3x-8|-|3x-2|=6$;

л) (мехмат — 84) $|2x+5|=|x|+2$;

м) $|x^2-4x+3|+|x^2-5x+6|=1$;

н) $|x-3|+|x-2|-|x-4|=3$.

2.Ж.6 (ВМК — 82). Для каждого значения a решить уравнение

$|x+3|-a|x-1|=4$.

2.Ж.7 (физфак — 84). Найти все значения a, при которых решения уравнения

$2|x-a|+a-4+x=0$

принадлежат отрезку $[0; 4]$.

Ответы

2.Ж.5. а) πn, $-\pi/4+\pi m$, n, $m\in\mathbf{Z}$; б) 5, πn, $n\in\mathbf{Z}$; в) 7/5; г) 2; 3; д) $\frac{11-\sqrt{29}}{2}$, $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$; е) -1; 0; ж) $(3; \infty)$; з) $\varnothing$; и) $-1/2$; 5/2; к) $(-\infty; 2/3]$; л) -7; -1; м) 2; 5/2; $\frac{9+\sqrt{17}}{4}$; н) -2; 4.

2.Ж.6. $[1; \infty)$ при $a=1$; $[-3; 1]$ при $a=-1$; $1, \frac{7+a}{a-1}$ при $a \in (-1; 1)$; 1 при $a \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$. 2.Ж.7. $[4/3; 2]$.

§ 2.3. ВОЗВЕДЕНИЕ В КВАДРАТ

Для решения уравнений нередко требуется возвести в квадрат левую и правую его части одновременно или, другими словами, возвести в квадрат уравнение. Так как из равенства выражений

$$F(x)=G(x) \tag{1}$$

обязательно следует равенство их квадратов

$$F^2(x)=G^2(x), \tag{2}$$

то при возведении уравнения в квадрат потери корней никогда не происходит.

Однако, как показывает практика, такое преобразование очень часто бывает неравносильным. Это связано прежде всего с тем, что уравнение (2) получается при возведении в квадрат не только уравнения (1), но также и уравнения

$$F(x)=-G(x).$$

Есть и другая причина неравносильности: при возведении в квадрат некоторых выражений области их определения расширяются (см. § 1.В).

Как же практически осуществлять возведение уравнения в квадрат, не приобретая при этом посторонних решений? Можно предложить массу рецептов, каждый из которых будет пригоден для возведения в квадрат уравнений определенного типа. Однако идти по пути перечисления всех возможных типов уравнений и заучивания соответствующих рецептов нам представляется неразумным, тем более что запомнить-то достаточно всего-навсего одно, но самое основное правило, которое исключает главную причину ошибок при возведении в квадрат уравнений (равно как и неравенств).

Возводить уравнение в квадрат запрещается при тех значениях неизвестной, при которых хотя бы одна из частей уравнения отрицательна.

2.3.1 (биофак — 77). Решить уравнение

$$\sqrt{6-4x-x^2}=x+4.$$

Решение. Поскольку левая часть исходного уравнения неотрицательна при всех допустимых значениях x, а правая может быть как отрицательной (при $x<-4$), так и неотрицательной (при $x \geqslant -4$), то мы вынуждены разобрать два случая:

1) $\begin{cases} x+4<0, \\ \sqrt{6-4x-x^2}=x+4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+4\geqslant 0, \\ \sqrt{6-4x-x^2}=x+4. \end{cases}$

Первая система не имеет решений, так как если бы оба условия этой системы были выполнены одновременно при каком-нибудь значении x, то возникло бы противоречие

$$\sqrt{6-4x-x^2}=x+4<0.$$

Обычно случай такого типа в явном виде даже не рассматривают в тексте решения: ведь сразу ясно, что он невозможен. Однако имеет смысл в порядке самоконтроля хотя бы в уме каждый раз проигрывать и этот логически возможный вариант (ни на минуту не забывая притом, что основное правило запрещает возводить уравнение в квадрат).

Во втором случае уравнение можно возвести в квадрат. Так как ОДЗ получающегося в результате уравнения ($x\in R$) будет шире, чем ОДЗ исходного ($6-4x-x^2\geqslant 0$), то вторая система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x+4\geqslant 0, \\ 6-4x-x^2=(x+4)^2, \\ 6-4x-x^2\geqslant 0. \end{cases}$$

Если внимательно вглядеться в эту систему, то можно заметить, что последнее ее неравенство является следствием уравнения:

$$6-4x-x^2=(x+4)^2\geqslant 0.$$

Такого рода обстоятельства в дальнейшем могут сослужить полезную службу, поскольку они позволяют больше не дописывать и не проверять некоторые из неравенств системы. В данном же случае ситуация настолько стандартная, что указанное неравенство можно было вообще не записывать с самого начала.

Итак, решая полученную систему, имеем

$$\begin{cases} x+4\geqslant 0, \\ (x+5)(x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$$

Ответ: -1.

Несмотря на простоту основного правила возведения в квадрат, практически на каждом экзамене, где предлагаются иррациональные уравнения, непременно возникают самые типичные ошибки. Так при решении задачи 2.3.1 некоторые просто игнорировали основное правило, возведя исходное уравнение в квадрат без каких-либо оговорок и не отбросив в конце постороннее решение — 5.

Другие попытались уклониться от применения основного правила, подменив необходимое условие возведения в квадрат условием вхождения неизвестной в ОДЗ (как отмечалось выше, последнее условие оказалось выполненным автоматически; см. также задачу 2.Б.3).

Наконец, наиболее тонкая ошибка, возникающая из-за неправильного толкования самого основного правила, состояла в следующем правдоподобном с виду рассуждении: «Исходное уравнение можно смело возводить в квадрат, поскольку левая часть неотрицательна, а правая часть в ней совпадает в силу самого уравнения». В том-то и дело, что неотрицательность правой части следует только из уравнения, а после возведения его в квадрат эта информация теряется, в результате чего появляется возможность приобретения посторонних решений. Основное правило необходимо понимать буквально. Любые попытки обойти это правило и, изловчившись, все же возвести в квадрат уравненне при запрещенных значениях x обычно заранее обречены на неудачу.

При решении некоторых уравнений операцию возведения в квадрат приходится применять по нескольку раз, уменьшая после каждого возведения число входящих в уравнение радикалов. Уравнение при этом постепенно обрастает различными неравенствами и превращается таким образом иногда в довольно громоздкую систему. Поэтому возникает необходимость постоянно разгружать эту систему, избавляясь от лишних условий. Кроме того, количество появляющихся условий можно уменьшать с помощью дополнительных соображений.

2.3.2 (геол. ф-т — 82). Решить уравнение

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}=\sqrt{x-2}.$$

Если возвести в квадрат исходное уравнение в том виде, в котором оно записано, то согласно правилу необходимо наложить условие

$$\sqrt{x+1}\geqslant\sqrt{2x-5},$$

которое означает неотрицательность левой части. Если же предварительно перебросить второй радикал из левой части уравнения в правую, то обе части полученного уравнения будут неотрицательны при всех допустимых значениях x и возведение в квадрат можно будет провести более экономно.

Решение. $\sqrt{x+1}=\sqrt{x-2}+\sqrt{2x-5} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=x-2+2\sqrt{(x-2)(2x-5)}+2x-5, \\ x+1\geqslant 0, \\ x-2\geqslant 0, \\ 2x-5\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-x=\sqrt{2x^2-9x+10} \\ x\geqslant 2{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16-8x+x^2=2x^2-9x+10, \\ 2{,}5\leqslant x\leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+2)=0, \\ 2{,}5\leqslant x\leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Ответ: 3.

Заметим, что сразу же после возведения уравнения в квадрат были добавлены условия неотрицательности выражений $x-2$ и $2x-5$ несмотря на то, что их произведение оставалось еще под корнем. Это обусловлено тем, что неравенство $(x-2)(2x-5)\geqslant 0$ не влечет за собой выполнения неравенств $x-2\geqslant 0$, $2x-5\geqslant 0$, как может показаться на первый взгляд (см. § 1.В).

По поводу задачи 2.3.2 отметим, что на экзамене многие абитуриенты, аккуратно возведя уравнение в квадрат первый раз, начисто забыли об основном правиле при втором возведении в квадрат, что объясняется, по всей видимости, причинами психологического свойства.

Рассмотрим еще одно любопытное применение операции возведения уравнения в квадрат. Речь пойдет об уравнениях с модулями. Заметим, во-первых, что после возведения в квадрат модуля какого-либо выражения знаки этого модуля можно отбросить, а во-вторых, что модуль любого выражения не может принимать отрицательных значений (см. § 1.Е).

2.3.3 (физфак — 83). Решить уравнение

$$|5x^2-3|=2.$$

Решение. Обе части уравнения неотрицательны, поэтому его можно возвести в квадрат, получив равносильное уравнение

$$(5x^2-3)^2=2^2,$$

в котором не стоит спешить раскрывать скобки, а тем более извлекать квадратный корень из обеих частей (см. § 2.Е). Перенося все в левую часть и пользуясь формулой разности квадратов, получаем

$$(5x^2-3-2)(5x^2-3+2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x\sqrt{5}-1)(x\sqrt{5}+1)=0.$$

Ответ: -1; $-\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\frac{\sqrt{5}}{5}$; 1.

В заключение отметим, что при возведении уравнения в целую степень выше второй нужно учитывать следующее: если степень нечетна, то уравнение получается равносильным исходному, а если степень четна, то рассуждения могут быть аналогичными таковым при возведении в квадрат.

Задачи

2.3.4. Решить уравнение:

а) (ф-т почв. — 77)

$\sqrt{x^3+8}=2x+1$;

б) (биофак — 77)

$\sqrt{1+4x-x^2}=x-1$;

в) (геогр. ф-т — 82)

$x+\sqrt{2x^2-7x+5}=1$;

г) (физфак — 85)

$\sqrt{x^4-2x-5}=1-x$;

д) (ВМК — 83) $|9-x^2|=5$;

е) $|3x-5|=|5-2x|$;

ж) $\dfrac{\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+2}}=\dfrac{3\sqrt{x-1}}{\sqrt{3x-2}}$;

з) $2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=2$;

и) (геол. ф-т — 82) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3}$;

к) $\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{2x^2+x-1}=\sqrt{x^2-1}$;

л) $\sqrt{5x+1}-\sqrt{6x-2}-\sqrt{x+6}+\sqrt{2x+3}=0$;

м) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$;

н) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$.

2.3.5. Для каждого значения a решить уравнение:

а) $\dfrac{a-2}{\sqrt{x+4}}=1$;

б) $x+\sqrt{a+\sqrt{x}}=a$.

Ответы

2.3.4. а) 1; б) 3; в) 1; г) $-\sqrt{3}$; д) $-\sqrt{14}$; -2; 2; $\sqrt{14}$; е) 0; 2; ж) 2; з) 1; и) 2; к) -1; 5; л) 5/4; 3; м) 5; н) 0. 2.3.5. а) a^2-4a при $a>2$; $\varnothing$ при $a\leqslant 2$; б) $\varnothing$ при $a\in(-\infty;0)\cup(0;1)$; 0 при $a=0$; $\dfrac{2a-1-\sqrt{4a-3}}{2}$ при $a\geqslant 1$.

§ 2.И. ЗАМЕНА НЕИЗВЕСТНОЙ

Если в уравнении неоднократно встречается некоторое фиксированное выражение, зависящее от неизвестной величины, то имеет смысл обозначить это выражение какой-либо буквой и попытаться решить уравнение сначала относительно введенной неизвестной, а потом относительно исходной. Такой прием бывает особенно полезным, если результатом замены неизвестной становится новое качество: например, уравнение превращается в квадратное, кубическое и т. д. или в нем исчезают некоторые несущественные на первом этапе решения детали.

2.И.1 (филол. ф-т — 84). Решить уравнение

$$8^x-4^x=2^x.$$

Решение. $(2^x)^3-(2^x)^2=2^x$.
Обозначим $y=2^x$:

$$\begin{cases} y^3-y^2=y, \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\left(y-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(y-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=0, \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \text{ так как } \frac{1-\sqrt{5}}{2}<0.$$

Возвратимся к x:

$$2^x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x=\log_2\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $\log_2\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Читатель, наверное, уже заметил, что в решении этой задачи после введения новой неизвестной y к уравнению было добавлено отсутствовавшее ранее условие $y>0$. Здесь нет ничего противоестественного: это условие в прежних обозначениях имеет вид $2^x>0$ и выполняется автоматически для всех x, поэтому его без ограничения общности можно считать с самого начала приставленным к исходному уравнению.

Абитуриенты, не дописавшие к уравнению неравенство $y>0$, были вынуждены впоследствии разбирать случаи $2^x=0$ или $2^x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Причем если с первым случаем большинство из них справилось успешно, то во втором некоторые по ошибке получили «корень» $\log_2\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, даже не задумавшись о его существовании. Это и естественно, ведь значение $y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ надо было куда-то девать.

Таким образом, приходим к полезному выводу: *когда вводится обозначение*

$$y=F(x), \tag{1}$$

желательно сразу отбросить все или хотя бы некоторые значения y, при которых уравнение (1) (*относительно x*) *не имеет решений.* Иными словами, полезно сразу указать область значений функции (1). Этот вывод позволяет на время забыть о происхождении новой неизвестной и помогает избавиться от дополнительных пояснений, лишних выкладок и возможных ошибок. Обратим внимание читателя также на недопустимость ситуации, когда область определения функции (1) уже, чем ОДЗ исходного уравнения.

Опыт показывает, что операция замены неизвестной пользуется большой популярностью. Дело часто обстоит так: как только поступающий видит, что уравнение допускает некую замену, он тотчас ее производит. При этом одна неизвестная заменяется другой, та в свою очередь — третьей и т. д. В итоге автор такой серии замен забывает, с какой неизвестной начал, и включает в ответ значения последней из введенных букв.

В связи с этим подчеркнем, что, во-первых, далеко не всегда замена бывает столь уж необходима. В частности, в задаче 2.И.1 можно обойтись и без нее, приведя уравнение к виду

$$2^x((2^x)^2-2^x-1)=0 \Leftrightarrow 2^x\left(2^x+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(2^x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=0$$

и заметив, что первые два сомножителя в левой части полученного уравнения положительны при всех x.

Во-вторых, если уж приходится прибегать к замене неизвестной, то стоит сразу подобрать ее так, чтобы она вбирала в себя по возможности большее количество неприятных деталей, затрудняющих решение.

2.И.2 (эконом. ф-т — 83). Решить уравнение

$$x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42.$$

Часть абитуриентов увидела замену $y=x^2$, другая догадалась обозначить $y=x^2+11$. При таких заменах новое уравнение остается иррациональным. Существенного упрощения уравнения достигли те абитуриенты, которые сразу ввели обозначение $y=\sqrt{x^2+11}$, а потом еще и добавили ограничение $y>0$ (справедливо и более сильное неравенство $y\geqslant\sqrt{11}$). Итак, в последнем случае имеем

$$\begin{cases} y^2+y-42=0, \\ y\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+7)(y-6)=0, \\ y\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow y=6.$$

Возвращаясь к x, получаем

$$\sqrt{x^2+11}=6 \Leftrightarrow x^2+11=36 \Leftrightarrow (x+5)(x-5)=0.$$

Ответ: —5; 5.

Для того чтобы найти удачную замену неизвестной, нередко требуется дополнительная творческая работа, которая впоследствии окупается простотой и изящностью решения. Решая нижеследующую задачу на экзамене, поступающие в основном обозначали $y=\sin x$, а затем раскрывали модуль с помощью перебора случаев. Приводим решение, основанное на другой замене и использующее те же свойства модуля, что и решение задачи 2.З.3.

2.И.3 (биофак — 82). Решить уравнение

$$4|\sin x|+2\cos 2x=3.$$

Решение.

$$4|\sin x|+2(1-2|\sin x|^2)=3.$$

Обозначим $y=|\sin x|$:

$$\begin{cases} 4y^2-4y+1=0, \\ y\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2y-1)^2=0, \\ y\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}.$$

Возвратимся к x:

$$|\sin x|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 x=\frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, \quad n\in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in \mathbf{Z}$.

2.И.4 (психфак — 81). Решить уравнение

$$\frac{4}{3}\log_3^2(5x-6)^3-\log_3(5x-6)^3\cdot\log_3 x^6=-6\log_3^2\frac{1}{x}.$$

Решение: В отличие от предыдущих задач здесь имеет прямой смысл ввести сразу две новые неизвестные

$$y=\log_3(5x-6), \; z=\log_3 x$$

(необходимо убедиться, что сужения ОДЗ при этом не происходит) и получить уравнение

$$12y^2-18zy=-6z^2 \Leftrightarrow 2y^2-3yz+z^2=0 \Leftrightarrow (y-z)(2y-z)=0.$$

Последний переход, представляющий собой тождественное преобразование левой части уравнения, большинство абитуриентов совершало весьма длинным путем: во-первых, устанавливалась невозможность равенства $z=0$ (ибо значение $x=1$ не входит в ОДЗ исходного уравнения), во-вторых, делалась замена $t=y/z$, в-третьих, решалось полученное квадратное уравнение $2t^2-3t+1=0$ и, в-четвертых, для каждого из корней $t_1=1$, $t_2=\frac{1}{2}$ производился обратный переход. Итак, возвращаясь к исходной неизвестной, имеем совокупность двух уравнений:

1) $\log_3(5x-6)=\log_3 x \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-6=x \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$;

2) $2\log_3(5x-6)=\log_3 x \Leftrightarrow \begin{cases} (5x-6)^2=x, \\ 5x-6>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\left(x-\frac{36}{25}\right)=0, \\ x>\frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{36}{25}.$$

Ответ: $\frac{3}{2}$; $\frac{36}{25}$.

При решении задачи 2.И.4 мы встретились с уравнением вида

$$a(F(x))^2+bF(x)G(x)+c(G(x))^2=0,$$

которое называется *однородным уравнением* (второй степени) относительно выражений $F(x)$ и $G(x)$, поскольку левая его часть представляет собой однородный многочлен относительно тех же выражений (см. § 1.Г, где подробно рассказано о способах разложения таких многочленов на множители).

Иногда замену переменной совершают в несколько непривычной форме, а именно вместо искомой неизвестной x в уравнение подставляют некоторое выражение, зависящее от новой неизвестной:

$$x=F(t). \tag{2}$$

Чтобы при такой *подстановке* не потерять корней, достаточно убедиться в следующем: каждому значению x из рассматриваемой области соответствует хотя бы одно значение t, удовлетворяющее равенству (2).

2.И.5 (биофак — 85). Сколько корней на отрезке [0; 1] имеет уравнение

$$8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)=1?$$

Если сделать подстановку $x=\cos t$, то каждому значению $x\in\in[0;1]$ будет соответствовать ровно одно значение $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ и наоборот. Поэтому число корней исходного уравнения на отрезке [0; 1] совпадает с числом корней уравнения

$$8\cos t(2\cos^2 t-1)(8\cos^4 t-8\cos^2 t+1)=1,$$

рассматриваемого на промежутке $\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$ (значение $t=0$ не является корнем последнего уравнения). Учитывая равенства

$$2\cos^2 t-1=\cos 2t,$$

$$8\cos^4 t-8\cos^2 t+1=2\cos^2 2t-1=\cos 4t,$$

получаем равносильное уравнение

$$8\cos t\cos 2t\cos 4t=1 \Leftrightarrow 8\sin t\cos t\cos 2t\cos 4t=$$

$$=\sin t \left(\text{ибо } \sin t\neq 0 \text{ при } t\in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right]\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 8t=\sin t\Leftrightarrow \sin\frac{7t}{2}\cdot\cos\frac{9t}{2}=0.$$

Рассмотрим два случая:

1) $\sin\frac{7t}{2}=0 \Leftrightarrow t=\frac{2\pi n}{7},\quad n\in\mathbf{Z};$

2) $\cos\frac{9t}{2}=0 \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi m}{9},\quad m\in\mathbf{Z}.$

Так как среди выписанных корней промежутку $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ принадлежат только три значения

$$t_1=\frac{2\pi}{7},\quad t_2=\frac{\pi}{9},\quad t_3=\frac{\pi}{3},$$

то получаем ответ: 3.

Задачи

2.И.6. Решить уравнение:

а) $x^4=2x^2+8;$

б) (филол. ф-т — 84) $27^x+9^x=3^{x+1};$

в) $2\sqrt{x-1}-5=\frac{3}{\sqrt{x-1}};$

г) (экономфак — 83) $x^2+13-2\sqrt{x^2+13}=35;$

д) $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6;$

е) $\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{12};$

ж) $(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)=24;$

з) $(x+3)^4+(x+5)^4=16;$

и) $\sin^2 x+\sin x=\left|\sin x+\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{4};$

к) (психфак — 81)

$$\frac{3}{2}\log_5^2(2x-3)^2+12\log_5^2\sqrt{x}=\log_5(2x-3)^3\log_5 x^3;$$

л) $4(x-1)\ln x-5\ln^2 x=x^2-2x+1.$

2.И.7 (физфак — 85). Для каждого значения a решить уравнение

$$4^x-2a(a+1)2^{x-1}+a^3=0.$$

2.И.8 (экономфак — 77). Найти все значения a, при которых уравнение

$$\log_3(9^x+9a^3)=x$$

имеет два решения.

2.И.9 (филол. ф-т — 77). Для каждого значения a определить число решений уравнения

$$\sqrt{2|x|-x^2}=a.$$

2.И.10 (биофак — 85). Сколько корней на отрезке $[0;\ 1]$ имеет уравнение

$$8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=1?$$

Ответы

2.И.6. а) $-2;\ 2$; б) $\log_3\frac{\sqrt{13}-1}{2}$; в) 10; г) $-6;\ 6$; д) 2; е) $-3;\ 1$; ж) $1-\sqrt{12};\ 0;\ 2;\ 1+\sqrt{12}$; з) $-3;\ -5$; и) $\pm\pi/6+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; к) $9/4;\ 3$; л) 1. **2.И.7.** $\log_2 a,\ 2\log_2 a$ при $a>0$; $\varnothing$ при $a=0$; $2\log_2(-a)$ при $a<0$. **2.И.8.** $\left(0;\ 1/\sqrt[3]{36}\right)$. **2.И.9.** 0 при $a\in(-\infty;\ 0)\cup(1;\ \infty)$; 3 при $a=0$; 4 при $a\in(0;\ 1)$; 2 при $a=1$. **2.И.10.** 4.

ГЛАВА 3. НЕРАВЕНСТВА

§ 3.А. ОСОБЕННОСТИ РАБОТЫ С НЕРАВЕНСТВАМИ

Для того чтобы научиться решать неравенства, следует прежде хорошо разобраться во всех вопросах, связанных с решением уравнений. При этом многие понятия и факты, относящиеся к уравнениям, оказываются применимыми и к неравенствам.

Напомним, что решить неравенство

$$F(x) \leqslant G(x) \quad (F(x) < G(x))$$

— это значит найти множество всех значений неизвестной величины x, которые при подстановке в неравенство дают верное соотношение. Такие значения называются *решениями* (но не корнями, в отличие от уравнений), а множество всех решений составляет *ответ*. Требования к тексту решения в случае неравенств остаются такими же, как и для уравнений (см. § 2.А; подразумеваем, что читатель уже ознакомился с содержанием всей гл. 2).

Все значения неизвестной, при которых левая и правая части неравенства одновременно имеют смысл, образуют *область допустимых значений*, или, короче, ОДЗ неравенства (подчеркнем, что допустимые значения совсем не обязательно удовлетворяют самому неравенству). Понятие ОДЗ играет важную вспомогательную роль при исследовании равносильности переходов от одного неравенства к другому. При преобразованиях неравенств, равно как и уравнений, нужно постоянно следить за тем, чтобы ОДЗ ни в коем случае не сужалась, а в случае ее расширения желательно сразу же добавлять необходимые ограничения на неизвестную величину.

Неравенства вида $F(x) \leqslant G(x)$ или, что то же, $G(x) \geqslant F(x)$ называют *нестрогими*, а неравенства $F(x) < G(x)$ или $G(x) > F(x)$ — *строгими*. Встречаются также и неравенства вида $F(x) \neq G(x)$. Наконец, для краткости и большей наглядности систему из двух неравенств иногда записывают в виде *двойного* неравенства. Например, запись $F(x) \leqslant G(x) < H(x)$ обозначает систему

$$\begin{cases} F(x) \leqslant G(x), \\ G(x) < H(x). \end{cases}$$

3.А.1. Решить неравенство (относительно x):

а) $1 < x \leqslant 5$; б) $0 \leqslant 0$;

в) $2^x \geqslant 0$; г) $\sqrt{x} > -1$;

д) $\frac{x}{x} \neq 2$.

Такие простые неравенства, часто возникающие в процессе решения более сложных, доставляют неприятности тем абитуриентам, которые не очень четко понимают смысл знаков неравенства и существо стоящей перед ними задачи.

В частности, по поводу неравенства б) можно услышать такое ошибочное высказывание: «Это неравенство несправедливо (ни при каком значении x), поскольку имеет место равенство $0=0$, а не неравенство». Рассуждая в таком же духе, можно дойти до того, что «неравенство в) также несправедливо, ибо $2^x>0$ при любом значении x». Для того чтобы избежать подобных недоразумений, достаточно лишь ясно понимать, что нестрогое неравенство справедливо как в случае соответствующего строгого неравенства, так и в случае равенства, но никак не в случае одновременного их выполнения.

При решении неравенств типа г) и д) поступающие главным образом обращают внимание на то, что ни при каком значении x эти неравенства не могут быть не выполнены, т. е. они выполняются как бы автоматически. При этом очень часто забывают отбрасывать те значения неизвестной, которые не входят в ОДЗ, и допускают тем самым грубые ошибки.

Ответ: а) $(1; 5]$; б), в) $(-\infty; \infty)$; г) $[0; \infty)$; д) $(-\infty; 0)\cup$ $\cup(0; \infty)$.

Внешнее сходство уравнений и неравенств, а также близость методов их решения создают у некоторых уверенность в том, что вместо неравенства лучше сначала рассмотреть равенство левой и правой части, а затем изучить их знаки. Хотя этот прием и позволяет правильно решать неравенства, но на практике он скорее приводит к неверному решению, нежели к его упрощению.

3.А.2. Решить неравенство

$$4x^2-12x+11>0.$$

Увидев квадратный трехчлен, абитуриент первым делом приравнивает его нулю и ищет корни. В данном случае уравнение

$4x^2-12x+11=0$ решений не имеет, из чего делается совершенно стандартный ошибочный вывод об отсутствии их и у неравенства. Однако если выделить в левой части неравенства полный квадрат (см. § 1.Д) $4x^2-12x+11=(2x-3)^2+2$, то получится совсем иной правильный ответ: $(-\infty; \infty)$.

3.А.3 (экономфак — 85). Решить неравенство

$$\frac{4x-1}{2-3x}\geqslant-\frac{5}{8}.$$

Если решить сначала уравнение $\frac{4x-1}{2-3x}+\frac{5}{8}=0$, получив его единственный корень $-\frac{2}{17}$, то может сложиться впечатление, что для получения ответа достаточно из двух промежутков $\left(-\infty;\right.$

$-\frac{2}{17}\Big]$ или $\Big[-\frac{2}{17};\ \infty\Big)$ выбрать верный. Проверка значения $x=0$ показывает, что второй из промежутков годится, так как исходное неравенство при $x=0$ обращается в верное числовое неравенство $-\frac{1}{2}\geqslant-\frac{5}{8}$. Однако такое рассуждение в корне неверно, поскольку оно не учитывает всех факторов, влияющих на знак выражения $\frac{4x-1}{2-3x}+\frac{5}{8}=\frac{17x+2}{2-3x}$, сводя их фактически к знаку числителя. Истинный ответ в этом случае таков: $\Big[-\frac{2}{17};\ \frac{2}{3}\Big]$.

Логическая сторона решения неравенств более содержательна по сравнению с уравнениями: ведь теперь изучать приходится не только равенства выражений, но и знаки между ними. Кроме того, целый ряд преобразований, пригодных к уравнениям, в применении к неравенствам имеет свои особенности (о которых речь пойдет ниже в § 3.Г, Д). Отметим здесь, что многие преобразования, которые лишь расширяют ОДЗ уравнения или приводят к приобретению посторонних корней (например, отбрасывание знаменателя, возведение в квадрат и др.), при работе с неравенствами могут повлечь за собой потерю решений, а то и вообще принципиально неверный ответ. Опыт показывает, что метод проверки (см. § 2.В) для решения неравенств практически непригоден. Рекомендуется использовать по возможности метод равносильных преобразований, которому и посвящена настоящая глава. Другой метод, развивающий идею подбора, разобран в гл. 8.

Задачи

3.А.4. Решить неравенство:

а) $3\leqslant x<2$;

б) $1+x<2\leqslant 3-x$;

в) $x-1<x+1$;

г) $\frac{1}{x}+1>\frac{1}{x}$;

д) $\sqrt{-x}\leqslant\sqrt{x}$;

е) $\sqrt{x-1}\neq-1$;

ж) $3^{-x^2}\leqslant 0$;

з) $\lg^2 x^2\geqslant 0$;

и) $-\pi/2\leqslant\arcsin x\leqslant\pi/2$;

к) $3x<3+x^2$;

л) $x^2+2x-8\neq 0$;

м) (экономфак — 80) $\log_5(26-3^x)>2$.

3.А.5. Для каких неравенств из задачи 3.А.4 множество решений совпадает с ОДЗ?

3.А.6 (психфак — 77). Для каждого значения a решить неравенство

$$a^2-9^{x+1}-8\cdot 3^x\cdot a>0.$$

3.А.7 (экономфак — 77). Найти все значения a, при которых неравенство

$$25y^2+\frac{1}{100}\geqslant x-axy+y-25x^2$$

выполняется для любых чисел x, y, удовлетворяющих условию $|x|=|y|$.

Ответы

3.А.4. а) $\varnothing$; б) $(-\infty;\ 1)$; в) $(-\infty;\ \infty)$; г) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$; д) 0; е) $[1;\ \infty)$; ж) $\varnothing$; з) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$; и) $[-1;\ 1]$; к) $(-\infty;\ \infty)$; л) $(-\infty;\ -4)\cup(-4;\ 2)\cup(2;\ \infty)$; м) $(-\infty;\ 0)$. **3.А.5.** в), г), д), е), з), и), к). **3.А.6.** $\varnothing$ при $a=0$; $(-\infty;\ -2+\log_3 a)$ при $a>0$; $(-\infty;\ \log_3(-a))$ при $a<0$. **3.А.7.** 50.

§ 3.Б. РАСЩЕПЛЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ

Как и в случае уравнения, ключевой момент в решении неравенства — преобразование его к виду, в котором левая часть представляет собой произведение каких-либо выражений $F_1(x)$, ..., $F_n(x)$, а правая — равна нулю. При этом правило расщепления для строгого неравенства можно сформулировать так: *произведение отрицательно в тех и только в тех случаях, когда нечетное число его сомножителей отрицательно, а остальные положительны; произведение положительно в тех случаях, когда четное (в частности, нулевое) число его сомножителей отрицательно, а остальные положительны.*

Это правило восходит к известной школьной поговорке «минус на минус дает плюс» и поэтому легко восстанавливается: грубо говоря, ситуация определяется количеством отрицательных сомножителей. Однако, как показывает опыт вступительных экзаменов, абитуриенты часто путаются при расщеплении неравенства, выписывая либо не все возможные, либо вовсе не те случаи и получая в результате неверный ответ.

3.Б.1 (ф-т почв. — 80). Решить неравенство

$$(2^x-4)(x^2-2x-3)>0.$$

Решение. $(2^x-4)(x+1)(x-3)>0.$
Неравенство равносильно совокупности систем:

1) $\begin{cases} 2^x-4>0, \\ x+1>0, \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>3;$

2) $\begin{cases} 2^x-4>0, \\ x+1<0, \\ x-3<0 \end{cases}$

решений нет;

3) $\begin{cases} 2^x-4<0, \\ x+1<0, \\ x-3>0 \end{cases}$

решений нет;

4) $\begin{cases} 2^x-4<0, \\ x+1>0, \\ x-3<0 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<2.$

Ответ: $(-1; 2)\cup(3; \infty)$.

Существенно большая путаница возникает при расщеплении нестрогих неравенств. Основная причина появления ошибок здесь — логически неверное сочетание сформулированного выше правила расщепления строгого неравенства и правила расщепления уравнения (см. § 2.Г).

3.Б.2 (ВМК — 78). Решить неравенство

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\geqslant 0.$$

Приведем наиболее типичное ошибочное рассуждение, встречавшееся в письменных работах: «Поскольку квадратный корень всегда неотрицателен, то исходное неравенство равносильно неравенству $x-1\geqslant 0$». Действительно, выражение $\sqrt{x^2-x-2}$ не может быть отрицательным ни при каком значении x. Но ведь если оно равно нулю, то совершенно безразлично, чему при этом равно выражение $x-1$, — неравенство-то будет справедливо. Абитуриенты, добавившие к полученному выше множеству решений значения x, при которых квадратный корень равен нулю, получили также неверный ответ. Это объясняется тем, что неравенство $\sqrt{x^2-x-2}\geqslant 0$ справедливо не при всех, а лишь при допустимых значениях x, т. е. при $(x-2)(x+1)\geqslant 0$.

А ведь здесь нечего мудрить! Всех неприятностей можно избежать, воспользовавшись верным правилом расщепления нестрогого неравенства, формулировку которого нетрудно получить, если в соответствующем правиле для строгого неравенства каждое строгое неравенство заменить нестрогим: *произведение неположительно в тех и только тех случаях, когда нечетное число его сомножителей неположительно, а остальные — неотрицательны;*

произведение неотрицательно в тех и только в тех случаях, когда четное число его сомножителей неположительно, а остальные — неотрицательны.

Решение. Неравенство равносильно совокупности систем:

1) $\begin{cases} x-1\geqslant 0, \\ \sqrt{x^2-x-2}\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 1, \\ (x-2)(x+1)\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 1, \\ x\geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow x\geqslant 2;$

2) $\begin{cases} x-1\leqslant 0, \\ \sqrt{x^2-x-2}\leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant 1, \\ (x-2)(x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$

Ответ: $\{-1\}\cup[2;\infty)$.

Обратим внимание читателя на то, что в решении задачи 3.Б.2 система

$$\begin{cases} x\geqslant 1, \\ (x-2)(x+1)\geqslant 0 \end{cases}$$

без каких-либо пояснений заменена равносильной системой

$$\begin{cases} x\geqslant 1, \\ x\geqslant 2. \end{cases}$$

Этот переход может показаться на первый взгляд недостаточно обоснованным в свете требований, предъявляемых к чистовому решению. Ведь, по идее, положено было расщепить систему на две:

1а) $\begin{cases} x\geqslant 1, \\ x\leqslant -1, \text{ решений нет;} \\ x\leqslant 2 \end{cases}$

1б) $\begin{cases} x\geqslant 1, \\ x\geqslant -1, \Leftrightarrow x\geqslant 2. \\ x\geqslant 2 \end{cases}$

Следующее, по сути дела, устное рассуждение избавляет от этой малоприятной процедуры: так как из первого неравенства системы следует, что значение x должно быть больше нуля, то множитель $x+1$ и подавно должен быть больше нуля, а значит, второе неравенство $(x-2)(x+1)\geqslant 0$ при этом условии равносильно неравенству $x-2\geqslant 0$. Подобные рассуждения позволяют в некоторых случаях сильно упростить и сократить решение системы (см. также замечание к задаче 2.Г.3).

Таким образом, для расщепления неравенства следует сначала аккуратно выписать все случаи, когда это неравенство справедливо, а затем решить каждую из имеющихся систем, объединив в ответе полученные множества решений. При этом попытки сэкономить работу на каких-то случаях, кажущихся при беглом изучении невозможными, особенно попытки заменить нестрогие неравенства строгими, чаще всего оборачиваются потерей решений.

Аналогично расщепляются неравенства, в которых какие-либо выражения стоят в знаменателе дроби.

3.Б.3 (мехмат — 81). Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1} \geqslant 0.$$

Заметим, что неравенство $\frac{1}{F(x)} \geqslant 0 \left(\frac{1}{F(x)} \leqslant 0\right)$ равносильно неравенству $F(x)>0$ (соответственно $F(x)<0$), т. е. равенство $F(x)=0$ никак нельзя подключать к решению, а равенство $\frac{1}{F(x)}=0$ вообще невозможно. Об этом забыла часть абитуриентов, решавших данную задачу на экзамене и добавивших в ответ значение $4+\sqrt{2}$ (многие также потеряли решение 5 по причине, о которой говорилось при разборе задачи 3.Б.2).

Решение. Неравенство равносильно совокупности систем:

$$1)\ \begin{cases} \sqrt{x-5} \geqslant 0, \\ \log_{\sqrt{2}}(x-4)-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 5, \\ x-4>\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x>4+\sqrt{2};$$

$$2)\ \begin{cases} \sqrt{x-5} \leqslant 0, \\ \log_{\sqrt{2}}(x-4)-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5, \\ \log_{\sqrt{2}}(x-4)<1 \end{cases} \Leftrightarrow x=5.$$

Ответ: $\{5\} \cup (4+\sqrt{2};\ \infty)$.

Задачи

3.Б.4. Применить правило расщепления к неравенству:

а) $F(x)\,G(x)>0$;

б) $F(x)\,G(x) \geqslant 0$;

в) $\frac{F(x)}{G(x)} \geqslant 0$.

3.Б.5. Сколько случаев нужно перебрать при расщеплении неравенства

$F_1(x)\ \ldots\ F_n(x) \geqslant 0$:

а) если действовать по правилу расщепления нестрогого неравенства;

б) если рассмотреть отдельно случай равенства, а затем случай строгого неравенства?

3.Б.6. Решить неравенство:

а) (ф-т почв. — 80) $(3^x-3)(x^2-5x+6)<0$;

б) (ВМК—78) $(x-3)\sqrt{x^3+x-2}\geqslant 0$;

в) $\frac{(8-x)}{(x-5)^2}>0$;

г) (химфак—84) $\frac{\log_2^2 x}{x^2-2}\geqslant 0$;

д) (мехмат—81) $\frac{\sqrt{2x-3}}{\log_{\sqrt{2}}(x^2-3x+3)}\geqslant 0$;

е) $\frac{\cos^2 x-4\cos x+3}{3-x}\leqslant 0$.

3.Б.7 (экономфак — 83). Для каждого неотрицательного a решить неравенство

$$a^3x^4+6a^2x^2-x+9a+3\geqslant 0.$$

Ответы

3.Б.4. а) Неравенство равносильно совокупности систем:

1) $\begin{cases} F(x)>0, \\ G(x)>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} F(x)<0, \\ G(x)<0; \end{cases}$

б) неравенство равносильно совокупности систем:

1) $\begin{cases} F(x)\geqslant 0; \\ G(x)\geqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} F(x)\leqslant 0, \\ G(x)\leqslant 0; \end{cases}$

в) неравенство равносильно совокупности систем:

1) $\begin{cases} F(x)\geqslant 0, \\ G(x)>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} F(x)\leqslant 0, \\ G(x)<0. \end{cases}$

3.Б.5. а) 2^{n-1}; б) $2^{n-1}+n$. **3.Б.6.** а) $(-\infty;\ 1)\cup(2;3)$; б) $\{-2;1\}\cup[3;\ \infty)$; в) $(-\infty;\ 5)\cup(5;\ 8)$; г) $\{1\}\cup(\sqrt{2};\ \infty)$; д) $\{3/2\}\cup(2;\ \infty)$; е) $x>3$; $x=2\pi n$, $n\in Z\cap(-\infty;\ 0]$. **3.Б.7.** $(-\infty;\ 3]$ при $a=0$;

$$\left(-\infty;\ \frac{1-\sqrt{1-12a}}{2a}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{1-12a}}{2a};\ \infty\right) \text{ при}$$

$$a\in\left(0;\ \frac{1}{12}\right);\ (-\infty;\ \infty) \text{ при } a\geqslant\frac{1}{12}.$$

§ 3.В. МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ

При расщеплении неравенства число сомножителей в левой части (подразумевается, что правая часть равна нулю) иногда бывает довольно велико, в результате чего перебор случаев становится трудоемким. В такой ситуации на помощь приходит идея организации перебора случаев путем разбиения значений неизвестной на группы по определенному принципу.

На числовой оси выделяют интервалы, на которых каждый из сомножителей левой части расщепляемого неравенства имеет постоянный знак (в настоящей книге под интервалом понимается любой промежуток вида $(a; b)$, $(a; \infty)$; $(-\infty; b)$ или $(-\infty; \infty)$). В этом и состоит метод интервалов, который позволяет свести решение неравенства к выбору подходящих интервалов и изучению концевых точек.

При использовании метода интервалов чрезвычайно полезной оказывается графическая иллюстрация, которую смело можно считать составной частью решения и помещать в чистовике. Обычно на числовой оси отмечаются точки, в которых рассматриваемое выражение равно нулю или теряет смысл (последние точки лучше отмечать особым образом, например обводить кружком). У каждого из получившихся интервалов ставят плюс или минус в зависимости от того, какой знак имеет выражение на данном интервале, а затем выписывают ответ.

3.В.1 (ф-т почв. — 82). Решить неравенство

$$x^4-10x^2+16\geqslant 0.$$

Решение. $x^4-10x^2+16\geqslant 0 \Leftrightarrow (x^2-8)(x^2-2)\geqslant 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+2\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})\geqslant 0 \text{ (рис. 3.1).}$$

Ответ: $(-\infty; -2\sqrt{2}]\cup[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]\cup[2\sqrt{2}; \infty)$.

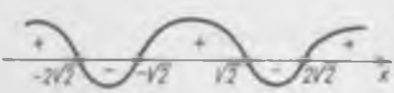

Рис. 3.1

Рис. 3.2

Процедуру расстановки знаков на числовой оси можно существенно упростить, если принять во внимание следующее наблюдение: *выражение*

$$(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x-x_n)^{k_n} \qquad (1)$$

имеет положительный знак на самом правом интервале (т. е. при значениях x, бо́льших каждого из отмеченных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$), *а при переходе через точку* x_i (если двигаться справа налево по числовой оси) *выражение* (1) *меняет знак на противоположный при нечетном значении показателя* k_i *и не меняет — при четном*. Обратим внимание читателя на то, что в представлении (1) чи́сла $x_1, x_2, \dots, x_n$ должны быть различны и каждый из сомножителей должен иметь вид $(x-x_i)^{k_i}$, а не $(x_i-x)^{k_i}$. При этом целые показатели k_i могут принимать и отрицательные значения, что соответствует случаю, когда выражение (1) представляет собой дробь.

3.В.2 (мехмат — 77). Решить неравенство

$$x \leqslant 3 - \frac{1}{x-1}.$$

Приведя неравенство к виду

$$\frac{(x-2)^2}{x-1} \leqslant 0,$$

поступающие затем наделали массу самых разнообразных ошибок из-за неаккуратного применения метода интервалов. Некоторые расставили на соответствующем рисунке чередующиеся знаки у интервалов $(2;\infty)$, $(1;2)$, $(-\infty;1)$. Другие расставили правильные знаки, но посчитали, что знак плюс у двух первых интервалов можно распространить на весь интервал $(1;\infty)$, а в результате потеряли решение 2. Наконец, третьи включили в ответ не только значение 2, но и значение 1, не входящее в ОДЗ. Подчеркнем в связи с этим, что использование метода интервалов требует не спешки, а внимательности и четкости как при расстановке знаков, так и при изучении концевых точек. В данном случае графическую иллюстрацию см. на рис. 3.2.

Ответ: $(-\infty;1)\cup\{2\}$.

Метод интервалов пригоден не только для выражений вида (1). Он допускает обобщение на выражения самого разного вида и по существу делает расщепление неравенства более легким и наглядным.

3.В.3 (ф-т почв. — 80). Решить неравенство

$$(4x^2-16x+7)\log_2(x-3)>0.$$

Решение. $(x-0{,}5)(x-3{,}5)\log_2(x-3)>0$ (рис. 3.3).

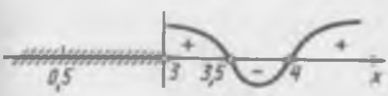

Рис. 3.3

Рис. 3.4

Поясним, что на рис. 3.3 зачеркнуты все значения $x \leqslant 3$, не входящие в ОДЗ; число 4 возникло в результате исследования знака сомножителя $\log_2(x-3)$, положительного при $x>4$ и отрицательного при $3<x<4$.

Ответ: $(3;3{,}5)\cup(4;\infty)$

Наконец, идея метода интервалов успешно работает и при решении неравенств с модулями (равно как и уравнений с модулями; см. § 2.Ж): *числовая ось разбивается на промежутки так,* *чтобы модуль любого из выражений в неравенстве раскрывался одинаково для всех значений x из данного промежутка.* Ограничимся разбором одного примера с модулями (см. также неравенство из задачи 3.Г.2).

3.В.4 (экономфак — 84). Решить неравенство

$$2|x-4|+|3x+5|\geqslant 16.$$

Решение. Рассмотрим три случая:

1) $\begin{cases} x<-\dfrac{5}{3}, \\ 2(4-x)-(3x+5)\geqslant 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-\dfrac{5}{3}, \\ x\leqslant -\dfrac{13}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x\leqslant -\dfrac{13}{5};$

2) $\begin{cases} -\dfrac{5}{3}\leqslant x<4, \\ 2(4-x)+(3x+5)\geqslant 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{5}{3}\leqslant x<4, \\ x\geqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3\leqslant x<4;$

3) $\begin{cases} x\geqslant 4, \\ 2(x-4)+(3x+5)\geqslant 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 4, \\ x\geqslant \dfrac{19}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x\geqslant 4.$

Ответ: $\left(-\infty; -\dfrac{13}{5}\right] \cup [3; \infty)$.

При решении этой совсем нетрудной задачи на экзамене обнаружилось неумение многих абитуриентов без ошибок раскрывать модули. Условия на неизвестную величину, означающие ее принадлежность рассматриваемому промежутку, часто забывались сразу же после их выписывания (так в третьем случае некоторые получили неравенство $x\geqslant \dfrac{19}{5}$ вместо $x\geqslant 4$). Часть абитуриентов не заметила, что множество $[3; 4)\cup[4; \infty)$ представляет собой один промежуток, и записала его в ответ в «сыром» виде.

Задачи

3.В.5. Решить неравенство:

а) (ф-т почв. — 82) $x^4-5x^2+6\geqslant 0$;

б) $(x+3)^2(x-2)(5+x)^3<0$;

в) (мехмат — 77) $x+3<-\dfrac{1}{x+1}$;

г) (химфак — 80) $\dfrac{x+7}{x-2}>x-1$;

д) $\dfrac{(4-x)^3(x+3)(-x-1)^2(x-2)^2}{(-5-x)^4(16-4x)^3}\leqslant 0$;

е) (ф-т почв. — 80) $(4x^2-8x-5)\log_3(x+1)<0$;

ж) (мехмат — 81) $\dfrac{\log^2_{\sqrt{2}}(x-3)}{x^2-4x-5} \geqslant 0$;

з) (геогр. ф-т — 77) $2|x-1| \leqslant x+3$;

и) (геол. ф-т — 77) $x^2-|5x-3|-x<2$;

к) (геол. ф-т — 82) $\dfrac{2x+5}{|x+1|} \geqslant 1$;

л) (экономфак — 84) $3|x-2|+|5x+4| \leqslant 10$;

м) (психфак — 79) $\dfrac{3}{|x+3|-1} \geqslant |x+2|$;

н) (геол. ф-т — 85) $\dfrac{||x-3||}{|x-2|-1} \geqslant 1$.

3.В.6. Для каждого значения a решить неравенство:

а) $\dfrac{2a}{x}-\dfrac{1}{x-1}>1$;

б) $|x-a| \geqslant x-1$;

в) $\dfrac{x^2-2x+2|a|}{x^2-a^2}>0$.

3.В.7. При каких значениях a неравенство

$$\frac{x^2-ax-2}{x^2-3x+4}>-1$$

выполняется для всех чисел x?

Ответы

3.В.5. а) $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \cup [\sqrt{3}; \infty)$; б) $(-5; -3) \cup (-3; 2)$; в) $(-\infty; -2) \cup (-2; -1)$; г) $(-\infty; -1) \cup (2; 5)$; д) $(-\infty; -5) \cup (-5; -3] \cup [-1; 4)$; е) $(-1; -1/2) \cup (0; 5/2)$; ж) $\{4\} \cup (5; \infty)$; з) $[-1/3; 5]$; и) $(-5; 3+\sqrt{8})$; к) $[-2; -1) \cup (-1; \infty)$; л) $[-1; 0]$; м) $[-5; -4) \cup (-2; -2+\sqrt{3}]$; н) $(-\infty; 1) \cup (3; \infty)$.

3.В.6. а) $(a+\sqrt{a^2-2a}; 1)$ при $a<0$; $(0; 1)$ при $a \in [0; 2]$; $(a-\sqrt{a^2-2a}; a+\sqrt{a^2-2a})$ при $a>2$; б) $(-\infty; \infty)$ при $a \leqslant 1$; $\left(-\infty; \dfrac{a+1}{2}\right]$ при $a>1$; в) $(-\infty; -|a|) \cup (|a|; \infty)$ при $a \neq 0$; $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$ при $a=0$. **3.В.7.** $(-7; 1)$.

§ 3.Г. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НЕРАВЕНСТВ

Применяя какие-либо преобразования неравенств, необходимо проявлять особую осторожность, поскольку, находясь в плену привычных действий с уравнениями, очень легко забыть о специфике неравенств. Так, например, помимо описанных в п. 1 § 2.Д преобразований к разряду *лжепреобразований* неравенств относится переход от неравенства $-F(x)<-G(x)$ к неравенству $F(x)<G(x)$ (вместо положенного $F(x)>G(x)$), очень часто встречающийся в письменных экзаменационных работах и происходящий из-за обыкновенной невнимательности их авторов.

В стремлении как-то упростить решение неравенств абитуриенты порой придумывают *специальные приемы*, допуская неверные преобразования, которые на первый взгляд кажутся достаточно правдоподобными.

3.Г.1. (ф-т почв. — 79). Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_3(x^2-7x+12)}<\frac{1}{\log_3 20}.$$

Многие сочли возможным обратить дроби в обеих частях неравенства, поменяв его знак, и получили неравенство

$$\log_3(x^2-7x+12)>\log_3 20\Leftrightarrow x^2-7x+12>20\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x-8)(x+1)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>8,\\x<-1.\end{array}\right.$$

При этом у некоторых закралось сомнение в правомерности такого перехода в случае, когда левая часть неравенства отрицательна. Но они тут же успокоили себя, заметив, что в новом неравенстве она уже не может быть отрицательной в силу самого этого неравенства (аналогичная картина наблюдалась при решении задачи 3.Д.3). Благодаря такому преобразованию были потеряны два интервала решений, при которых

$$\log_3(x^2-7x+12)<0\Leftrightarrow 0<x^2-7x+12<1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(x-3)(x-4)>0,\\ \left(x-\frac{7-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right)<0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{7-\sqrt{5}}{2}<x<3,\\ 4<x<\frac{7+\sqrt{5}}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;-1)\cup\left(\frac{7-\sqrt{5}}{2};3\right)\cup\left(4;\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right)\cup(8;\infty)$.

Известная осторожность нужна и при *упрощении обеих частей неравенства*, а также при *прибавлении к ним или вычитании из них одинаковых выражений* (см. также п. 2, 3 § 2.Д). Главная причина ошибок при указанных преобразованиях — незамеченное изменение ОДЗ.

3.Г.2 (мехмат — 85). Решить неравенство

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{|x|-1}\geqslant\frac{2}{x-1}.$$

Основная масса поступающих, рассмотрев два случая $x<0$ и $x\geqslant 0$, получила соответственно неравенства $-\frac{1}{x+1}\leqslant\frac{2}{x-1}$ и $\frac{1}{x+1}\geqslant 0$. Однако далеко не все заметили, что во втором случае при взаимном уничтожении выражений $\frac{2}{x-1}$ в обеих частях неравенства произошло расширение ОДЗ за счет потери условия $x-1\neq 0$. В результате такого преобразования было приобретено постороннее решение 1. На самом деле исходное неравенство равносильно совокупности систем:

1) $\begin{cases} x<0, \\ \dfrac{x+\frac{1}{3}}{(x+1)(x-1)}\leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-1, \\ -\frac{1}{3}\leqslant x<0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x\geqslant 0, \\ \dfrac{1}{x+1}\geqslant 0, \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0, \\ x\neq 1. \end{cases}$

Ответ: $(-\infty;\ -1)\cup\left[-\frac{1}{3};\ 1\right)\cup(1;\infty)$.

3.Г.3 (геол. ф-т — 82). Решить неравенство

$$\log_3((x+2)(x+4))+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)<\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}7.$$

Преобразовав исходное неравенство

$$\log_3((x+2)(x+4))-\log_3(x+2)<\log_3 7,$$

многие абитуриенты заметили, что первый из логарифмов можно записать в виде суммы $\log_3(x+2)+\log_3(x+4)$, так как в неравенстве присутствуют логарифмы выражений $x+2$ и $(x+2)(x+4)$, а значит, каждое из выражений $x+2$ и $x+4$ принимает положительное значение. Но далее последовало упрощение левой части неравенства, расширяющее его ОДЗ:

$$\log_3(x+4)<\log_3 7\Leftrightarrow 0<x+4<7\Leftrightarrow -4<x<3.$$

При этом не все абитуриенты добавили к полученному неравенству условие $x+2>0$, восстанавливающее пропавшее ограничение на x. Правильный ответ: $(-2; 3)$.

Преобразования, представляющие явную опасность уже для уравнений (см. § 2.Е), тем более нежелательны при работе с неравенствами. К таким преобразованиям относим *умножение или деление неравенства на какое-либо выражение, зависящее от неизвестной величины* (как отмечалось выше, умножение или деление даже на ненулевую константу может привести к ошибкам, если эта константа отрицательна), а также *извлечение квадратного корня из обеих частей неравенства*. Указанных преобразований следует всячески избегать, заменяя их стандартным расщеплением неравенства.

3.Г.4 (психфак — 82). Решить неравенство

$$\frac{2x-3}{4-x}>\frac{1}{x}.$$

Решение.

$$\frac{2x-3}{4-x}-\frac{1}{x}>0\Leftrightarrow\frac{2x^2-2x-4}{x(4-x)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x+1)(x-2)}{x(x-4)}<0 \text{ (рис. 3.4).}$$

Ответ: $(-1; 0)\cup(2; 4)$.

Заметим, что если при решении задачи 3.Г.4 вместо приведения к общему знаменателю просто умножить неравенство на $x(4-x)$, то получится неравенство $2x^2-2x-4<0$, не равносильное исходному.

3.Г.5 (мехмат — 83). Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5}\geqslant\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}.$$

Каких только ошибок не наделали абитуриенты в этой задаче! Всех так и подмывало избавиться от одинаковых радикалов, стоящих в обеих частях неравенства. Некоторые просто отбросили эти радикалы, поскольку они неотрицательны и якобы вообще не влияют на ход решения неравенства. Другие все же догадались рассмотреть случай $6+x-x^2=0$, после чего начисто забыли об этих радикалах, в том числе и об условиях их существования. Наконец, ошибки появлялись и при решении получившегося неравенства $\frac{1}{2x+5}\geqslant\frac{1}{x+4}$. А ведь эта задача предполагала лишь умение правильно расщеплять неравенства.

Решение. $\sqrt{6+x-x^2}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{2x+5}\right)\leqslant 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\sqrt{-(x+2)(x-3)}\,\frac{x+1}{(2x+5)(x+4)}\leqslant 0.$$

Неравенство равносильно совокупности систем:

1) $\begin{cases} (x+2)(x-3) \leqslant 0, \\ \dfrac{x+1}{(2x+5)(x+4)} \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant -1$ (рис. 3.5);

2) $\begin{cases} (x+2)(x-3) = 0, \\ \dfrac{x+1}{(2x+5)(x+4)} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$

Ответ: $[-2; -1] \cup \{3\}$.

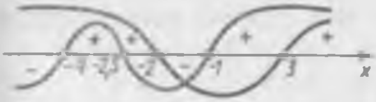

Рис. 3.5

Рис. 3.6

Не менее коварной является операция извлечения квадратного корня из обеих частей неравенства. Действуя «по аналогии» с уравнениями, поступающие часто, не задумываясь, переходят, скажем, от неравенства

$$(F(x))^2 \geqslant (G(x))^2 \qquad (1)$$

к неравенству $F(x) \geqslant \pm G(x)$ (а еще чаще прямо к неравенству $F(x) \geqslant G(x)$), после чего начинают выяснять, какой из знаков — плюс или минус — нужно сохранить, а какой отбросить. Этот вопрос оказывается непомерно сложным, поскольку на самом-то деле ни один из знаков, вообще говоря, не годится. Проблема полностью проясняется, если применить правило расщепления к неравенству $(F(x)-G(x))(F(x)+G(x)) \geqslant 0$, равносильному исходному неравенству (1). Именно так рекомендуется поступать в каждом конкретном случае.

Читатели, которые достаточно уверенно обращаются с модулями, могут иногда облегчить описанную процедуру, если воспользуются следующим правилом: *квадраты двух выражений связаны друг с другом знаком равенства или неравенства тогда и только тогда, когда тем же знаком связаны модули этих выражений.* Согласно этому правилу неравенство (1) равносильно неравенству $|F(x)| \geqslant |G(x)|$.

3.Г.6. Решить неравенство

$(\log_5 x^2)^2 < 4.$

Решение.

$(\log_5 x^2)^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow (\log_5 x^2 - 2)(\log_5 x^2 + 2) < 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2 < \log_5 x^2 < 2 \text{ (рис. 3.6)} \Leftrightarrow \frac{1}{25} < x^2 < 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} < |x| < 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{5} < x < 5, \\ -5 < x < -\frac{1}{5}. \end{array}\right.$$

(По поводу последнего перехода см. § 1.Е.)

Ответ: $\left(-5;\ -\frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5};\ 5\right)$.

Аналогичные соображения имеют место при извлечении корней других четных степеней (извлекать корни нечетных степеней из неравенств или уравнений можно без особых предосторожностей).

Задачи

3.Г.7. Решить неравенство:

а) (физфак—78) $\frac{1}{1-x} < \frac{3}{x+3}$;

б) (психфак—82) $\frac{2x-3}{x} < \frac{3-2x}{x(x+1)}$;

в) (экономфак—85) $\frac{4x-1}{3x+1} \geqslant 1$;

г) $\frac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 1$;

д) (мехмат—83) $\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \leqslant \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}$;

е) (ВМК—82) $\frac{3(4x^2-9)}{\sqrt{3x^2-3}} \leqslant 2x+3$;

ж) (мехмат—85) $\frac{1}{x-1} + \frac{3}{|x|+1} \geqslant \frac{1}{|x|-1}$;

з) (геол. ф-т—82) $\log_{1/2}((x+1)(x+3)) + \log_2(x+3) > -2\log_4 11$;

и) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} \geqslant \cos^2 x$;

к) $1 \leqslant (x-1)^2 < 4$;

л) $x^2(x+2) \geqslant 9(4-3x)^2$;

м) $(x^2+3x)(2x+3) \geqslant 16\,\frac{2x+3}{x^2+3x}$;

н) $27x \leqslant (2\sqrt[3]{x}+1)^3$.

3.Г.8 (физфак — 82). Найти все значения a, при которых решения уравнения

$$10x-15a=13-5ax+2a$$

больше 2.

3.Г.9. Для каждого натурального значения n решить неравенство

$$(x+3)^n<(x-5)^n.$$

Ответы

3.Г.7. а) $(-3;\ 0)\cup(1;\ \infty)$; б) $(-2;\ -1)\cup(0;\ 3/2)$; в) $(-\infty;\ -1/3)\cup[2;\ \infty)$; г) $(-\infty;\ -7)\cup(-4;\ -2)$; д) $[-4;\ 1]\cup\{2\}$; е) $[-3/2;\ -1)\cup(1;\ 2]$; ж) $(-\infty;\ -3]\cup(-1;\ 1)\cup(1;\ \infty)$; з) $(-1;\ 10)$; и) $x\neq\pi/2+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; к) $(-1;\ 0]\cup[2;\ 3)$; л) $(-\infty;\ -12]\cup[1;\ 3]\cup[4;\ \infty)$; м) $[-4;\ -3)\cup[-3/2;\ 0)\cup[1;\ \infty)$; н) $(-\infty;\ 1]$. **3.Г.8.** $(-\infty;\ -2)\cup(1;\ \infty)$. **3.Г.9.** $\varnothing$ при n нечетном; $(-\infty;\ 1)$ при n четном.

§ 3.Д. НЕРАВЕНСТВА С РАДИКАЛАМИ

Неравенства, содержащие радикалы, обычно решаются с помощью возведения обеих частей в квадрат. И если для уравнений такое преобразование никогда не приводит к потере корней, то для неравенств аналогичный вывод сделать нельзя: при возведении в квадрат, к примеру, обеих частей неравенства $x\geqslant-1$ получается неравенство $x^2\geqslant1$, которое не содержит среди своих решений ни одно число из интервала $(-1;\ 1)$, в то время как исходному неравенству все такие числа удовлетворяют. В связи с этим особое значение приобретает следующее основное правило: *возводить неравенство в квадрат запрещается при тех значениях неизвестной, при которых хотя бы одна из частей неравенства отрицательна.*

3.Д.1 (биофак — 80). Решить неравенство

$$\sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x.$$

Согласно основному правилу возводить заданное неравенство в квадрат можно только в случае, когда правая его часть неотрицательна. Поэтому приходится разбирать два случая:

$$1)\ \begin{cases}8-2x\geqslant0,\\ \sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x;\end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases}8-2x<0,\\ \sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x.\end{cases}$$

В первом случае возводим неравенство в квадрат и добавляем ограничение на x, связанное с расширением ОДЗ:

$$\begin{cases} x \leqslant 4, \\ -x^2+6x-5 > (8-2x)^2, \\ -x^2+6x-5 \geqslant 0. \end{cases}$$

Заметим, что добавленное неравенство в данном случае вытекает из предыдущего неравенства последней системы, так как

$$-x^2+6x-5 > (8-2x)^2 \geqslant 0,$$

а значит, нет необходимости ни дописывать его в дальнейшем, ни тем более решать. Таким образом, получаем

$$\begin{cases} x \leqslant 4, \\ (x-3)\left(x-\frac{23}{5}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x \leqslant 4.$$

Во втором случае возводить неравенство в квадрат не только нельзя, но и незачем, поскольку оно выполняется *автоматически:*

$$\sqrt{-x^2+6x-5} \geqslant 0 > 8-2x.$$

Это означает, что неравенство выполняется не при всех вообще значениях x, удовлетворяющих условию $8-2x<0$, а лишь при тех из них, которые входят в ОДЗ. Поэтому имеем систему

$$\begin{cases} x > 4, \\ -x^2+6x-5 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, \\ (x-1)(x-5) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < x \leqslant 5.$$

Объединяя множества решений первого и второго случая, получаем ответ: $(3; 5]$.

Решая задачу 3.Д.1 на экзамене, наименее подготовленные абитуриенты возвели неравенство в квадрат без каких-либо оговорок и получили ответ $\left(3; \frac{23}{5}\right)$, не содержащий целый отрезок решений $\left[\frac{23}{5}; 5\right]$. Некоторые из них даже учли ОДЗ неравенства, думая, что этого достаточно для равносильности перехода (как мы видели, после возведения неравенства в квадрат условие вхождения неизвестной в ОДЗ становится излишним). Другие правильно рассмотрели первый случай, но во втором случае также пытались возвести неравенство в квадрат, умножив его предварительно на -1 и добившись тем самым, чтобы правая часть неравенства стала неотрицательной (но ведь при этом левая часть перестала быть неотрицательной, а следовательно, возводить в квадрат было все равно нельзя!). Наконец, многие заметили, что во втором случае неравенство выполняется автоматически, но забыли про ОДЗ и получили посторонние решения. Пробиться через всю эту систему преград оказалось для абитуриентов нелегким делом.

3.Д.2. Решить неравенство

$$4x-6>\sqrt{6x-2x^2}.$$

Приведем образец неверного рассуждения абитуриентов: «Применение правила возведения в квадрат облегчается в данном случае тем обстоятельством, что левая часть неравенства неотрицательна, ибо она больше правой, которая также неотрицательна. Поэтому данное неравенство можно смело возводить в квадрат». Здесь мы видим попытку подменить исследование знаков левой и правой частей неравенства при различных значениях неизвестной величины исследованием знака самого неравенства. Для спасения такого рассуждения потребовалось бы в решении всюду дописывать исходное неравенство — ведь именно оно обеспечивает неотрицательность левой части. А это фактически означало бы проверку всех решений, которых в данном случае бесконечно много.

Решение. Рассмотрим два случая:

$$1)\ \begin{cases} 4x-6\geqslant 0,\\ 4x-6>\sqrt{6x-2x^2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 1,5,\\ (4x-6)^2>6x-2x^2\geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\geqslant 1,5,\\ (x-1)(x-2)>0,\\ x(x-3)\leqslant 0;\end{cases} \Leftrightarrow 2<x\leqslant 3;$$

$$2)\ \begin{cases} 4x-6<0,\\ 4x-6>\sqrt{6x-2x^2}\end{cases}$$

решений нет, так как иначе

$$4x-6<0\leqslant\sqrt{6x-2x^2}\leqslant 4x-6.$$

Подчеркнем, что в отличие от решения задачи 3.Д.1 ограничение, добавленное в случае 1) в связи с расширением ОДЗ после возведения неравенства в квадрат, уже не вытекает из полученного неравенства. Кроме того, в случае 2) неравенство отнюдь не выполняется автоматически, а наоборот, не имеет решений. Эти отличия обусловлены знаком исходного неравенства и могут служить причиной ошибок, если относиться к решению не творчески, а чисто механически.

Ответ: (2; 3].

3.Д.3. (психфак — 83). Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x}<1.$$

Некоторые абитуриенты рассудили так: «Дробь меньше единицы тогда и только тогда, когда ее числитель меньше знаменателя, а значит, исходное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{51-2x-x^2}<1-x$. Часть этих абитуриентов, чувствуя что-то неладное в таком выводе, обратили также внимание на неотрицательность левой части полученного неравенства и на знак самого этого неравенства, гарантирующий, по их мнению, положительность выражения $1-x$, т. е. знаменателя исходной дроби. После этого они успокоились и получили, естественно, неверный ответ, поскольку в случае $1-x<0$ исходное неравенство выполняется автоматически. Подобные специальные приемы решения неравенств (см. также задачу 3.Г.1) в случае их неаккуратного исполнения чреваты опасными последствиями. В то же время данная задача решается стандартными методами.

Решение. $\dfrac{\sqrt{51-2x-x^2}-(1-x)}{1-x}<0.$

Неравенство равносильно совокупности систем:

$$1)\ \begin{cases}\sqrt{51-2x-x^2}<1-x,\\ 1-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\leqslant 51-2x-x^2<(1-x)^2,\\ 1-x>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1+\sqrt{52})(x+1-\sqrt{52})\leqslant 0,\\ (x-5)(x+5)>0,\\ x<1\end{cases}\Leftrightarrow -1-\sqrt{52}\leqslant x<-5;$$

$$2)\ \begin{cases}\sqrt{51-2x-x^2}>1-x,\\ 1-x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}51-2x-x^2\geqslant 0,\\ 1-x<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1+\sqrt{52})(x+1-\sqrt{52}),\\ x>1\end{cases}\Leftrightarrow 1<x\leqslant -1+\sqrt{52}.$$

Ответ: $[-1-\sqrt{52};\ -5)\cup(1;\ -1+\sqrt{52}]$.

Задачи

3.Д.4. Решить неравенство:

а) (физфак—79) $\sqrt{x^2+x-2}>x$;

б) (ф-т почв.—81) $\sqrt{2x+2}\geqslant x-3$;

в) (химфак—79) $x+2<\sqrt{x+14}$;

г) (биофак—80) $x+4<\sqrt{-x^2-8x-12}$;

д) (геол. ф-т—84) $\sqrt{x^2-3x+2}\leqslant 3x-3$;

е) (экономфак—83) $4(x-1)<\sqrt{(x+5)(3x+4)}$;

ж) (психфак—83) $\dfrac{\sqrt{27-2x-x^2}}{3-x}<1$;

з) (ВМК—82) $\dfrac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x} \geqslant 2$;

и) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2} > \sqrt{2x+4}$;

к) $\sqrt{4-\sqrt{1-x}} > \sqrt{2-x}$;

л) $\sqrt{4-x^2}+\dfrac{|x|}{x} \geqslant 0$;

м) (биофак—83) $8+6\,|3-\sqrt{x+5}| > x$;

н) (химфак—78) $\sqrt{2(5^x+24)}-\sqrt{5^x-7} \geqslant \sqrt{5^x+7}$.

3.Д.5. Какие из неравенств а)—ж) задачи 3.Д.4 в результате механического возведения в квадрат:

1) приобретают посторонние решения, не входящие в ОДЗ исходного неравенства;

2) приобретают посторонние решения, входящие в ОДЗ исходного неравенства;

3) теряют решения?

3.Д.6. Для каждого значения a решить неравенство:

а) $a\sqrt{x+1} < 1$;

б) $\sqrt{x+a^2} \leqslant |x-a|$.

Ответы

3.Д.4. а) $(-\infty;\ -2]\cup(2;\ \infty)$; б) $[-1;\ 7]$; в) $[-14;\ 2)$; г) $[-6;\ -4+\sqrt{2})$; д) $\{1\}\cup[2;\ \infty)$; е) $(-\infty;\ -5]\cup[-4/3;\ 4)$; ж) $[-1-\sqrt{28};\ 1-\sqrt{10})\cup(3;\ -1+\sqrt{28}]$; з) $(-\infty;\ 0)\cup[1;\ 2]$; и) $[-2;\ \infty)$; к) $\left(\dfrac{\sqrt{13}-5}{2};\ 1\right]$; л) $[-\sqrt{3};\ 0)\cup(0;\ 2]$; м) $[-5;\ 20)$; н) $[\log_5 7;\ 2]$. **3.Д.5.** 1) д), ж); 2) д), ж); 3) а)—г), е), ж). **3.Д.6.** а) $[-1;\ \infty)$ при $a\leqslant 0$; $[-1;\ 1/a^2-1)$ при $a>0$; б) $[-a^2;\ 0]\cup[1-2a;\ \infty)$ при $a\in(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 1/2)$; $\{0\}\cup[1;\ \infty)$ при $a=0$; $[-1/4;\ \infty)$ при $a=1/2$; $[-a^2;\ 1-2a]\cup(0;\ \infty)$ при $a\in(1/2;\ 1)\cup(1;\ \infty)$; $\{-1\}\cup[0;\ \infty)$ при $a=1$.

ГЛАВА 4. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ И ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

§ 4.А. ЛОГАРИФМИРОВАНИЕ И ПОТЕНЦИРОВАНИЕ

Практически на всех письменных экзаменах по математике поступающим предлагаются задания, которые требуют умения решать уравнения или неравенства, содержащие неизвестную величину под знаком логарифма или в показателе степени. Опыт вступительных экзаменов показывает, что многие абитуриенты, не зная, как подступиться к таким уравнениям или неравенствам, производят над ними не совсем осознанные, а то и просто бессмысленные действия и допускают по ходу дела многочисленные ошибки.

В настоящем параграфе рассмотрим преобразования, которые приводят, на наш взгляд, к наиболее сильному упрощению логарифмических и показательных уравнений и неравенств. Такие преобразования, как правило, необходимы для того, чтобы в конце концов получить ответ в задаче. Поэтому важно научиться выполнять их в той или иной форме легко и безошибочно.

1. *Отбрасывание в левой и правой частях уравнения или неравенства одного и того же основания степени.* Это преобразование предполагает, что обе части уравнения или неравенства являются степенями какого-либо положительного числа a, не равного 1, т. е. левая часть имеет вид $a^{F(x)}$, а правая — вид $a^{G(x)}$. Тогда можно перейти к уравнению или соответственно неравенству с левой частью $F(x)$ и правой частью $G(x)$. Такой переход основан на свойстве монотонности показательной функции и всегда представляет собой равносильное преобразование. Отметим одно очень важное обстоятельство, связанное в случае неравенства с величиной числа a: *если основание меньше* 1, *то при его отбрасывании знак неравенства необходимо поменять.*

4.А.1. Решить уравнение или неравенство:

а) $7^x=1$; б) $2^8=2^{x+1}-2^x$;

в) $1^{x-1}<1^x$; г) $\left(\frac{1}{3}\right)^x<9^{x+3}$;

д) $\left(\frac{1}{5}\right)^x\geqslant-\frac{1}{5}$.

Не понимая происхождения рассматриваемого преобразования, иные абитуриенты смело отбрасывают основание 7 одной лишь левой части уравнения а) или основание 2 каждой из трех степеней в уравнении б) и получают соответственно уравнение $x=1$

или уравнение $8=x+1-x$ $\left(\text{а то еще и похлеще: } 8=\frac{x+1}{x}\right)$. Прежде чем отбрасывать основания степени в уравнениях а) или б), нужно сначала привести правые части этих уравнений к виду $1=7^0$ или соответственно $2^{x+1}-2^x=2^x$.

Другая характерная ошибка возникает из-за попытки распространить рассматриваемое преобразование на случай $a=1$ и проявляется, например, в переходе от неравенства в) к неравенству $x-1<x$.

Решая неравенство г), некоторые приводят его к виду $\left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2(x+3)}$ и получают «равносильное» неравенство $x<-2(x+3)$ вместо правильного $x>-2(x+3)$ $\left(\text{ибо } \frac{1}{3}<1\right)$. Во избежание ошибок такого рода необходимо внимательно следить за величиной отбрасываемого основания (в данном случае удобнее было бы перейти к основанию 3, а не $\frac{1}{3}$).

Пожалуй, наибольшие трудности вызывают у абитуриентов задания последнего типа (см. также замечания к задачам 2.И.1, 4.В.4). Одни считают, что неравенство д) равносильно неравенству $x\geqslant-1$, другие — неравенству $x\leqslant-1$, а на самом деле правая часть неравенства д) не совпадает не только с числом $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$, но и вообще ни с какой степенью числа $\frac{1}{5}$, так как она попросту отрицательна.

Ответ: а) 0; б) 8; в) $\varnothing$; г) $(-2;\ \infty)$; д) $(-\infty;\ \infty)$.

Для приведения уравнения или неравенства к рассматриваемому виду иногда полезно заметить связь между основаниями различных степеней.

4.А.2 (химфак — 82). Решить неравенство

$$(\sqrt{2}+1)^{\frac{6x-6}{x+1}}\leqslant(\sqrt{2}-1)^{-x}.$$

Решение. Так как $(\sqrt{2}-1)^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\sqrt{2}+1$, то неравенство приводится к виду:

$$(\sqrt{2}+1)^{\frac{6x-6}{x+1}}\leqslant(\sqrt{2}+1)^x\Leftrightarrow\frac{6x-6}{x+1}\leqslant x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-2)(x-3)}{x+1}\geqslant0 \text{ (рис. 4.1).}$$

Ответ: $(-1;\ 2]\cup[3;\ \infty)$.

2. *Отбрасывание в левой и правой частях уравнения или неравенства логарифма по одному и тому же основанию.* Если левая часть уравнения или неравенства имеет вид $\log_a F(x)$, а правая — вид $\log_a G(x)$, то можно перейти к уравнению или соответственно

неравенству, левая и правая части которого равны $F(x)$ и $G(x)$. При этом, как и в случае преобразования, рассмотренного в п. 1, нужно помнить о следующем: *при отбрасывании в неравенстве логарифма по основанию, меньшему* 1, *знак неравенства необходимо поменять.* Этот факт вытекает из свойства монотонности логарифмической функции.

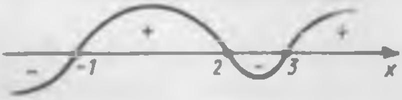

Рис. 4.1

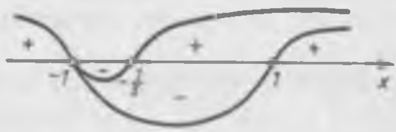

Рис. 4.2

Указанное преобразование обычно приводит к расширению ОДЗ, поскольку выражения, стоявшие прежде под знаками логарифма, после отбрасывания этих знаков могут принимать, вообще говоря, и неположительные значения. Игнорирование этого факта очень часто является причиной грубых ошибок на экзамене. В связи с этим особое значение приобретает следующее основное правило: *к уравнению или неравенству, полученному в результате отбрасывания логарифма, следует добавить условия положительности обеих его частей.* Заметим, что в действительности по меньшей мере одно (не всегда любое) из двух добавленных согласно основному правилу условий непременно можно отбросить, если внимательно приглядеться к полученной системе.

4.А.3 (филол. ф-т — 83). Решить неравенство

$$\log_5(x-1)=\log_5\frac{x}{1+x}.$$

Некоторые абитуриенты, недостаточно ясно представляющие основную цель преобразований логарифмических уравнений, занялись предварительным «упрощением» правой части уравнения. Основная же масса абитуриентов спокойно отбросила логарифмы и получила уравнение

$$x-1=\frac{x}{1+x}\Leftrightarrow\frac{x^2-x-1}{x+1}=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Однако часть из них не наложила никаких ограничений на x ни в процессе решения, ни после нахождения ответа и приобрела таким образом посторонний корень $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. В данном случае из двух условий $x-1>0$ и $\frac{x}{1+x}>0$ достаточно сохранить лишь одно, скажем, первое, так как второе уже вытекает из него в силу полученного уравнения:

$$\frac{x}{1+x}=x-1>0.$$

Ответ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4.А.4. (химфак — 82). Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{3x+1}{x+1}\geqslant -1.$$

Решение.

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{3x+1}{x+1}\geqslant \log_{\frac{1}{2}}2 \Leftrightarrow 0<\frac{3x+1}{x+1}\leqslant 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x+1}{x+1}>0, \\ \frac{x-1}{x+1}\leqslant 0 \text{ (рис. 4.2).} \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{3};\,1\right]$.

Среди решавших задачу 4.А.4 на экзамене не все смогли без ошибок представить правую часть неравенства в виде $-1=\log_{\frac{1}{2}}2$. Далее, при отбрасывании логарифмов некоторые не учли, что $\frac{1}{2}<1$, и не поменяли знак неравенства. Наконец, многие забыли добавить ограничение $\frac{3x+1}{x+1}>0$ или решили, что по «аналогии» с уравнениями равносильность перехода обеспечивается положительностью правой (большей!) части полученного неравенства, т. е. числа 2. Это, конечно, неверно и в данном случае приводит к приобретению посторонних решений, заполняющих промежуток $\left(-1;\,-\frac{1}{3}\right]$.

В следующей задаче абитуриенты, правильно отбросив первый логарифм и, видимо, ослабив бдительность, не заметили, что основание второго логарифма уже меньше 1, и не поменяли знак неравенства при его отбрасывании.

4.А.5 (геол. ф-т — 78). Решить неравенство

$$\log_3\log_{\frac{9}{16}}(x^2-4x+3)\leqslant 0.$$

Решение.

$$\log_3\log_{\frac{9}{16}}(x^2-4x+3)\leqslant\log_3 1 \Leftrightarrow 0<\log_{\frac{9}{16}}(x^2-4x+3)\leqslant 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{9}{16}} 1 < \log_{\frac{9}{16}}(x^2-4x+3) \leqslant \log_{\frac{9}{16}} \frac{9}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{16} \leqslant x^2-4x+3 < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-2+\sqrt{2}\right)\left(x-2-\sqrt{2}\right)<0, \\ \left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{13}{4}\right) \geqslant 0 \text{ (рис. 4.3).} \end{cases}$$

Ответ: $\left(2-\sqrt{2};\ \frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{13}{4};\ 2+\sqrt{2}\right)$.

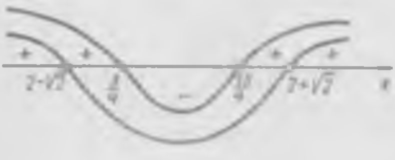

Рис. 4.3

Рис. 4.4

3. *Непосредственное логарифмирование и потенцирование уравнения или неравенства.* Эти операции производятся следующим образом: выбирается подходящее положительное число a, отличное от 1, и к каждой из двух частей уравнения или неравенства дописывается либо логарифм по основанию a (при логарифмировании), либо просто число a в качестве основания степени (при потенцировании). При этом если $a<1$ и операция производится над неравенством, то знак неравенства меняется.

Логарифмирование и потенцирование представляют по существу другую форму преобразований, описанных в п. 1 и 2 соответственно. Действительно, отбрасывание основания степени можно осуществить взятием от обеих частей уравнения или неравенства логарифмической функции, а отбрасывание логарифма — взятием показательной функции.

4.А.6 (физфак — 81). Решить неравенство

$$5^{\log_3 \frac{2}{x+2}} < 1.$$

Решение.

$$\log_5 5^{\log_3 \frac{2}{x+2}} < \log_5 1 \Leftrightarrow \log_3 \frac{2}{x+2} < 0 \Leftrightarrow 3^{\log_3 \frac{2}{x+2}} < 3^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{2}{x+2} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2>0, \\ \frac{x}{x+2} > 0. \end{cases}$$

Ответ: $(0;\ \infty)$.

Бытует мнение о том, что операции непосредственного логарифмирования универсальны, так как применять их якобы можно не задумываясь в любых случаях без каких бы то ни было предосторожностей. Это не совсем так. Во-первых, логарифмировать уравнение или неравенство можно лишь при тех значениях неизвестной, при которых обе его части положительны (или уж по крайней мере одна, «меньшая» в случае неравенства). Например, логарифмирование неравенства д) из задачи 4.А.1 невозможно, да и не нужно, ибо неравенство выполняется автоматически. Во-вторых, при потенцировании, как правило, возникают выражения вида $a^{\log_a F(x)}$, которые с помощью основного логарифмического тождества (см. п. 1 § 4.Б) мгновенно преобразуются к виду $F(x)$. Одна из самых распространенных ошибок состоит как раз в том, что при использовании основного логарифмического тождества (раз это тождество, так чего же, мол, опасаться?) не принимается во внимание возможное расширение ОДЗ, которое в данном случае обязывает добавить ограничение $F(x)>0$. Таким образом, неприятности, связанные с расширением ОДЗ при отбрасывании логарифмов, никуда не исчезают, а, наоборот, появляются в более завуалированном виде на следующем этапе.

Обычно абитуриенты не отдают себе отчета в том, что именно в действительности делают: то ли отбрасывают логарифм, то ли дописывают основание — потенцируют и все тут. А рассуждают в процессе решения, скажем, задачи 4.А.6 примерно так: «Пропотенцируем неравенство $\log_3 \frac{2}{x+2} < 0$ по основанию 3. Тогда левая часть будет равна $\frac{2}{x+2}$, а правая — 1, т. е. неравенство примет вид $\frac{2}{x+2} < 1$». При таком выполнении потенцирования всякая необходимость изучать изменение ОДЗ «отпадает» сама собой, зато в ответ попадает целый интервал $(-\infty; -2)$ посторонних решений.

Вывод один: при логарифмировании и потенцировании нужна определенная дисциплина мышления. Нам представляется наиболее безопасным ход рассуждений, описанный в п. 1 и 2 настоящего параграфа.

Задачи

4.А.7. Решить уравнение:

а) (ВМК—79) $3^{|3x-4|} = 9^{2x-2}$;

б) $2^{x^2} = -2^{-x^2}$;

в) (химфак—80) $\log_7 \frac{x+3}{21} = \log_7 \frac{2}{3x-6}$;

г) (филол. ф-т—83) $\log_3 \frac{x+1}{3} = \log_3 \frac{x}{2-x}$;

д) (экономфак—80) $\log_2 (|x+1|-2) = -2$.

4.А.8. Решить неравенство:

а) (физфак—80) $2^{x-1} > \left(\frac{1}{16}\right)^{1/x}$;

б) (экономфак—80) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-9x^2-8x+3} < 7^{-7x^2}$;

в) (ф-т почв. —79) $2^{\sqrt{x^2-3x+3}} > 2^{\sqrt{x}}$;

г) (химфак—82) $(\sqrt{5}+2)^{x-1} \geqslant (\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}$;

д) (физфак—81) $\log_{0.5} 2^{\frac{1}{x+1}} > 0$;

е) (экономфак—84) $\log_{1/2} \frac{6x+1}{5x^2+2} \leqslant 0$;

ж) (геол. ф-т—83) $\log_{12}(6x^2-48x-54) \leqslant 2$;

з) (химфак—82) $\log_{1/4} \frac{x-3}{x+3} \geqslant -\frac{1}{2}$;

и) (геол. ф-т—78) $\log_{8/3} \log_{1/2}(x^2-x-6) \geqslant 0$;

к) (экономфак — 83) $\log_3(x^2-2) < \log_3\left(\frac{3}{2}|x|-1\right)$;

л) (ф-т почв.—84) $\log_3\left|1-\frac{1}{x-1}\right| < 1$;

м) (биофак—82) $\log_{1/2}\left(1+x-\sqrt{x^2-4}\right) \leqslant 0$;

н) (филол. ф-т—85) $\log_{1/3}\left(x+\sqrt{x-1}\right) > -1$.

4.А.9. (филол. ф-т—82). Найти все значения x, удовлетворяющие одновременно двум условиям:

1) $\log_{1/3}\sqrt{x+6} \leqslant \log_{1/3}(x+4)$;

2) $x+\frac{1}{2}$ —целое число.

Ответы

4.А.7. а) 8/7; б) $\varnothing$; в) 4; г) $\sqrt{3}-1$; д) $-3\frac{1}{4}$; $1\frac{1}{4}$. **4.А.8.** а) $(0; \infty)$; б) $(-3/4; 1/4)$; в) $[0; 1)\cup(3; \infty)$; г) $[-2; -1)\cup\cup[1; \infty)$; д) $(-\infty; -1)$; е) $[1/5; 1]$; ж) $[-3; -1)\cup(9; 11]$; з) $(-\infty; -9)\cup(3; \infty)$; и) $\left[(1-3\sqrt{3})/2; -2\right)\cup\left(3; (1+3\sqrt{3})/2\right]$; к) $\left(-2; -\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2}; 2\right)$; л) $(-\infty; 1/2)\cup(5/4; 2)\cup(2; \infty)$; м) $[2; \infty)$; н) $[1; 2)$. **4.А.9.** $-3\frac{1}{2}$; $-2\frac{1}{2}$.

Опыт проверки письменных экзаменационных работ говорит о том, что их авторы, решая логарифмические и показательные уравнения или неравенства, совершают первые же приходящие на ум преобразования, продиктованные, как правило, возможностью применить ту или иную формулу. При этом поступающие демонстрируют не всегда удовлетворительное знание самих формул, а также неумение разобраться в вопросах расширения или сужения ОДЗ и в связанных с ними вопросах приобретения и потери решений. Но самое главное, чего зачастую недостает поступающим, — это ясного представления о цели производимых ими упрощений.

Решая логарифмические и показательные уравнения или неравенства, прежде всего следует подумать о том, нельзя ли привести данное уравнение или неравенство к виду, удобному для логарифмирования или потенцирования (см. п. 1 и 2 § 4.А). В настоящем параграфе рассматриваются случаи, когда приведение к такому виду можно осуществить. Другие случаи будут разобраны в § 4.В, 4.Г.

1. *Представление выражения в виде логарифма или степени с заданным основанием.* Пусть некоторые части уравнения или неравенства уже представляют собой логарифмы или степени с некоторым основанием a (здесь и ниже считаем число a положительным и отличным от 1), а другие — еще нет. В этой ситуации могут оказаться полезными преобразования, опирающиеся на формулы

$$F(x)=\log_a a^{F(x)},$$

$$\log_b F(x)=\frac{\log_a F(x)}{\log_a b},$$

а для тех значений x, при которых $F(x)>0$, возможно использование основного логарифмического тождества

$$F(x)=a^{\log_a F(x)}.$$

Применяя эти преобразования, можно, например, получить равенства: $0=\log_5 1$, $1=\log_3 3=3^0$, $-2=\log_2 \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}=2^{-2}$, $\log_{\sqrt{7}} x= =2\log_7 x$ и т. п. В таких простых случаях не всегда необходимо употребление указанных формул — достаточно бывает одного лишь знания определения логарифма данного числа по основанию a (как степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить данное число) и умения его находить. Опыт показывает, что абитуриенты далеко не всегда успешно справляются с такими преобразованиями.

4.Б.1 (геол. ф-т — 83). Решить неравенство

$$\log_{\sin\pi/3}(x^2-3x+2)\geqslant 2.$$

Решение.

$$\log_{\sin\pi/3}(x^2-3x+2) \geqslant \log_{\sin\pi/3}\sin^2\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < x^2-3x+2 \leqslant \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2)>0, \\ (x-0{,}5)(x-2{,}5)\leqslant 0 \end{cases} \text{(рис. 4.4)}.$$

Ответ: $[0{,}5;\ 1)\cup(2;\ 2{,}5]$.

Отметим, что многие из решавших задачу 4.Б.1 на экзамене не заметили, что $\sin\frac{\pi}{3}<1$, а также не добавили ограничение $x^2-3x+2>0$ после потенцирования неравенства. Решая задачу 4.Б.2, абитуриенты в основном применяли формулы из п. 2 и 3 настоящего параграфа, без которых, как видно из предлагаемого решения, можно было в данной задаче вполне обойтись.

4.Б.2 (геол. ф-т — 81). Решить уравнение

$$3\log_3 x - \log_9 x = 5.$$

Решение. $3\log_3 x - \dfrac{\log_3 x}{\log_3 9} = 5 \Leftrightarrow \dfrac{5}{2}\log_3 x = 5 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 9 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=9$.

Ответ: 9.

2. *Преобразование суммы или разности логарифмов, произведения или частного степеней.* Эти преобразования производятся с помощью формул

$$\log_a F(x) + \log_a G(x) = \log_a (F(x)\,G(x)),$$

$$\log_a F(x) - \log_a G(x) = \log_a \frac{F(x)}{G(x)},$$

$$a^{F(x)}a^{G(x)} = a^{F(x)+G(x)},$$

$$\frac{a^{F(x)}}{a^{G(x)}} = a^{F(x)-G(x)},$$

$$a^{F(x)}b^{F(x)} = (ab)^{F(x)}$$

и позволяют объединять несколько выражений в один логарифм или соответственно в одну степень. Применение первых двух формул осложняется тем, что в левой их части под знаком логарифма находится каждое из выражений $F(x)$ и $G(x)$, а в правой — только их произведение или частное, которое может быть положительным также и при отрицательных значениях $F(x)$ и $G(x)$. Поэтому при переходе от суммы или разности логарифмов к логарифму произведения или частного следует добавлять ограничения на неизвестную величину, связанные с расширением ОДЗ.

Количество таких ограничений зависит от вида самих выражений $F(x)$ и $G(x)$, но в любом случае заведомо достаточно потребовать положительности обоих этих выражений (на самом деле даже одного из них, коль скоро их произведение или частное все еще находится под знаком логарифма).

4.Б.3. (мехмат — 82). Решить уравнение

$$\log_2(x^2-3)-\log_2(6x-10)+1=0.$$

На экзамене многие абитуриенты быстро привели уравнение к виду

$$\log_2\frac{2(x^2-3)}{6x-10}=0,$$

не добавив больше никаких условий и не проверив в конце полученные значения x. Рассуждали же эти абитуриенты следующим образом: «Из уравнения видно, что выражения x^2-3 и $6x-10$ положительны, поэтому дробь $\frac{x^2-3}{6x-10}$ также положительна, а значит, можно применить формулу разности логарифмов». Рассуждение конечно, справедливо, но оно лишь объясняет, почему ни один из корней не будет потерян. Однако следить нужно и за тем, чтобы не приобрести посторонних корней. Об этом как раз и забыли упомянутые абитуриенты, в результате чего они приобрели лишний корень 1 (см. также задачу 2.Д.1).

Заметим, что в исходном уравнении удобно сначала перенести второй из логарифмов в правую часть — тогда после отбрасывания логарифмов не появится никаких выражений в знаменателе. Кроме того, преобразовывая сумму $\log_2(x^2-3)+1=\log_2 2(x^2-3)$, можно не накладывать никаких ограничений на x, поскольку выражения x^2-3 и $2(x^2-3)$ положительны при одних и тех же значениях x.

Решение. $\log_2(x^2-3)+\log_2 2=\log_2(6x-10) \Leftrightarrow \log_2 2(x^2-3)=$
$=\log_2(6x-10) \Leftrightarrow x^2-3=3x-5>0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2)=0 \\ x>\dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: 2.

Еще большую осторожность следует проявлять при преобразовании логарифма произведения (частного) в сумму (разность) логарифмов. Такое преобразование может сузить ОДЗ и, следовательно, привести к потере решений (см. задачи 2.Д.2, 3.Г.3). И если это так, то лучше постараться обойтись без него.

В следующей задаче затруднения у поступающих вызвало неравенство $5^{x-1}\cdot 3>3^{x-2}\cdot 25$, которое можно решить, поделив обе части на функцию 3^x (положительную при всех значениях x). Более общий метод описан в § 4.Г.

4.Б.4 (физфак — 82). Решить неравенство

$$5^x-3^{x+1}>2(5^{x-1}-3^{x-2}).$$

Решение.

$$5^x-2\cdot5^{x-1}>3^{x+1}-2\cdot3^{x-2}\Leftrightarrow 5^{x-1}\cdot3>3^{x-2}\cdot25\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{5}{3}\right)^{x-1}>\left(\frac{5}{3}\right)^2\Leftrightarrow x-1>2.$$

Ответ: $(3;\ \infty)$.

В письменных работах нередко появляются довольно странные преобразования, связанные с нечетким знанием формул, а также с желанием упростить выражения несмотря на неприменимость к ним известных формул. Так, произведение логарифмов «преобразуется» в логарифм суммы или произведения, сумма степеней — в степень с произведением или суммой показателей и т. п.

3. *Внесение множителя под знак логарифма и возведение степени в степень.* Эти операции предполагают использование формул

$$F(x)\log_a G(x)=\log_a G(x)^{F(x)},\quad (a^{G(x)})^{F(x)}=a^{G(x)\,F(x)}.$$

Не следует забывать о том, что если выражение $F(x)$ представляет собой четное число, то в левой части первой формулы выражение $G(x)$ обязано быть положительным, в то время как в правой части этой формулы оно должно быть всего лишь не равным нулю. Таким образом, при внесении множителя под знак логарифма может расширяться ОДЗ, в связи с чем возникает необходимость добавлять ограничения на неизвестную величину.

4.Б.5. (ф-т почв. — 85). Решить уравнение

$$\lg(x+4)=-2\lg\frac{1}{2-x}.$$

Поступающие, не задумываясь над расширением ОДЗ, преобразовали уравнение к виду

$$\lg(x+4)=\lg(2-x)^2$$

и получили корни $x_1=5$ и $x_2=0$, первый из которых хотя и удовлетворяет преобразованному уравнению, но не входит в ОДЗ исходного. Дело в том, что при внесении множителя 2 под знак логарифма произошло расширение ОДЗ, а значит, необходимо было добавить условие $2-x>0$, восстанавливающее пропавшее ограничение на x.

Ответ: 0.

Еще более коварной является обратная операция — вынесение показателя степени за знак логарифма (ведущее иногда к сужению ОДЗ; см. задачу 4.В.5).

В письменных работах иногда встречаются грубые ошибки, связанные с применением неверных формул. Например, множитель, стоящий перед логарифмом, «вносится» под знак логарифма опять-таки в виде множителя, аналогично множитель из показателя степени «выносится» в виде множителя перед ее основанием и т. д.

4.Б.6 (психфак — 80). Решить уравнение

$$(\sqrt{3})^{\operatorname{tg}2x}-\frac{3\sqrt{3}}{3^{\operatorname{tg}2x}}=0.$$

Решение.

$$(3^{1/2})^{\operatorname{tg}2x}=3^{1+1/2-\operatorname{tg}2x} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\operatorname{tg}2x=\frac{3}{2}-\operatorname{tg}2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}2x=1 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{4}+\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n, \quad n\in\mathbf{Z}$.

Далеко не все поступающие предложили такое, идейно простое решение задачи 4.Б.6, поскольку сразу ухватились за возможность ввести новую неизвестную $y=(\sqrt{3})^{\operatorname{tg}2x}$ и получить уравнение $y-\frac{3\sqrt{3}}{y^2}=0 \Leftrightarrow y^3=3\sqrt{3} \Leftrightarrow y=\sqrt{3}$. В связи с этим отметим еще раз, что наиболее простым методом решения показательных и логарифмических уравнений или неравенств является их логарифмирование или потенцирование. Применение остальных методов становится оправданным лишь в случае невозможности решить задачу без них.

Задачи

4.Б.7. Решить уравнение:

а) (экономфак — 81) $3\cdot2^{x+1}+5\cdot2^x-2^{x+2}=21$;

б) (экономфак — 83) $2^{x+2}\cdot5^{x+2}=2^{3x}\cdot5^{3x}$;

в) (психфак — 80) $2^{\cos2x}-\frac{1}{2\cdot2^{\cos2x}}=0$;

г) (геол. ф-т — 81) $5\log_{\sqrt{5}}x-\log_5x=18$;

д) (мехмат — 82) $\log_3(x^2-6)=\log_3(x-2)+1$;

е) (экономфак — 84) $\log_2(4x-2)=7-\log_2(2x+5)$;

ж) (ф-т почв. — 77) $2\lg\left(x+\frac{1}{2}\right)-\lg(x-1)=\lg\left(x+\frac{5}{2}\right)+\lg2$;

з) (химфак — 83) $\log_2(x^2+3)+\log_{1/2}5=2\log_{1/4}(x-1)-\log_2(x+1)$;

и) (биофак — 81) $3\log_8(x-2)=\log_2\sqrt{2x-1}$;

к) (ф-т почв. — 85) $\lg(9-x)=-2\lg\frac{1}{x+3}$;

л) (геол. ф-т — 79) $1+\lg(1+x^2+2x)-\lg(6+x^2)=2\lg(1+x)$.

4.Б.8. Решить неравенство:

а) (физфак — 82) $7^x-2^{x+2}<5\cdot 7^{x-1}-2^{x-1}$;

б) $3^{72}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}>1$;

в) (геол. ф-т — 83) $\log_{\sin\pi/6}(x^2-4x+3)\geqslant -3$;

г) (физфак — 85) $\log_{1/9}x+\log_3 9x<3$;

д) (физфак — 83) $\frac{3}{2}\log_4\sqrt[3]{x}-\frac{1}{2}\log_2 x>1$;

е) (психфак — 80) $\log_{1/2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\log_{1/2}(x-1)\geqslant 1$;

ж) (филол. ф-т — 79) $\log_{1/2}(4-x)\geqslant\log_{1/2}2-\log_{1/2}(x-1)$;

з) (экономфак — 82)

$$2\log_{25}((1+x)(3-x))-\frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}}(1+x)>\log_{1/5}\frac{1}{2};$$

и) (геогр. ф-т — 83)

$$\log_2\left(\sqrt{x^2-4x}+3\right)>\log_{1/2}\frac{2}{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x+1}+1}+1.$$

4.Б.9. Число a подобрано так, что неравенство

$$\log_a(x^2-x-2)>\log_a(-x^2+2x+3)$$

имеет решение 9/4. Решить это неравенство.

Ответы

4.Б.7. а) $\log_2 3$; б) 1; в) $\pm\pi/3+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; г) 25; д) 3; е) $-1+\sqrt{73}/2$; ж) 3/2; з) $\sqrt{2}$; и) 5; к) 0; л) 2. **4.Б.8.** а) $(-\infty; 2)$; б) $[0; 64)$; в) $[-1; 1)\cup(3; 5]$; г) $(0; 9)$; д) $(0; 1/16)$; е) $(1; 3/2]$; ж) $(1; 2]\cup[3; 4)$; з) $(-1; 1)$; и) $[-1; 0]$. **4.Б.9.** $(2; 5/2)$.

§ 4.В. СПОСОБЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ

В предыдущих главах мы уже встречались с расщеплением логарифмических и показательных уравнений и неравенств (см. задачи 2.И.1, 2.И.4, 3.Б.1, 3.Б.3, 3.В.3, 3.Г.6). Напомним, что для расщепления уравнения или неравенства нужно предварительно перенести все в одну его часть и разложить полученное выражение на множители.

4.В.1. (физфак — 84). Решить неравенство

$$2^{x+3}-x^3\cdot 2^x\leqslant 16-2x^3.$$

Решение.

$$2^x(8-x^3)\leqslant 2(8-x^3)\Leftrightarrow (2^x-2)(x^3-8)\geqslant 0.$$

Неравенство равносильно совокупности систем:

1) $\begin{cases} 2^x\leqslant 2^1 \\ x^3\leqslant 2^3 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant 1 \\ x\leqslant 2 \end{cases}\Leftrightarrow x\leqslant 1;$

2) $\begin{cases} 2^x\geqslant 2^1 \\ x^3\geqslant 2^3 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 1 \\ x\geqslant 2 \end{cases}\Leftrightarrow x\geqslant 2.$

Ответ: $(-\infty;\ 1]\cup[2;\ \infty)$.

Расщепление в этой задаче можно было упростить, применив *обобщенный метод интервалов* (см. задачу 2.В.3). В некоторых задачах расщепление сопровождается более детальным разбором случаев.

4.В.2 (экономфак — 85). Решить неравенство

$$x\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{2}-x\right)\geqslant |x|.$$

На экзамене абитуриенты в большинстве своем рассматривали два случая:

1) $\begin{cases} x<0, \\ \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{2}-x\right)\leqslant -1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x\geqslant 0, \\ \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{2}-x\right)\geqslant 1. \end{cases}$

При этом в первом случае не все догадались поменять знак неравенства после деления его на $x<0$. Стандартные ошибки делались и при потенцировании полученных неравенств: неверно представлялись числа 1 и -1 в виде логарифма по основанию 1/5, при отбрасывании логарифмов не менялись знаки неравенств и не добавлялись условия, связанные с расширением ОДЗ.

Однако главная, логическая ошибка была сделана уже в самом начале. Ведь в случае $x>0$ исходное неравенство приводится к виду

$$x\left(\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{2}-x\right)-1\right)\geqslant 0,$$

а значит, при его расщеплении помимо случая 2) возникает еще один случай

$$3)\ \begin{cases} x\geqslant 0,\\ x\leqslant 0,\\ \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{2}-x\right)\leqslant 1, \end{cases}$$

который дает решение 0. Именно это решение и было потеряно абитуриентами даже при безукоризненном исследовании первых двух случаев.

Эта задача призвана лишний раз предостеречь читателей от деления неравенства на функцию и от всяческих «усовершенствований» основного правила расщепления неравенства (см. § 3.Б, 3.Г).

Ответ: $(-\infty;\ -4{,}5]\cup\{0\}\cup[0{,}3;\ 0{,}5)$.

Одним из основных приемов, облегчающих расщепление логарифмических и показательных уравнений или неравенств, можно считать *замену неизвестной* (явную или неявную; см. § 2.И). Новая неизвестная подбирается по возможности так, чтобы относительно нее уравнение или неравенство уже не было ни логарифмическим, ни показательным. В результате такой замены операции логарифмирования и потенцирования отодвигаются как бы на задний план, возникая только при нахождении значений исходной неизвестной по заданным значениям новой. Введению новой неизвестной обычно предшествует некоторая предварительная обработка исходного уравнения или неравенства с использованием формул параграфа 4.Б (причем переходы по этим формулам осуществляются как в одну, так и в другую сторону), а иногда и преобразований параграфа 4.А.

4.В.3 (химфак — 77). Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1}-36^x)\geqslant -2.$$

Отдельные абитуриенты, воспитанные лишь на банальных примерах, растерялись на экзамене, увидев, что после замены $y=6^x$ неравенство не перестает быть логарифмическим. Другие наделали большое количество стандартных ошибок при потенцировании этого неравенства (см. предыдущую задачу). Неверно решались и неравенства $6^x>0$, $6^x\geqslant 5$, возникшие в конце решения.

Решение. $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1}-36^x)\geqslant\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}5 \Leftrightarrow 0<6\cdot 6^x-(6^x)^2\leqslant 5.$

Обозначим $y=6^x$:

$$0<6y-y^2\leqslant 5\Leftrightarrow \begin{cases} y(y-6)<0,\\ (y-1)(y-5)\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<y\leqslant 1,\\ 5\leqslant y<6. \end{array}\right.$$

Возвратимся к x:

$$\left[\begin{array}{l} 6^x \leqslant 6^0, \\ 6^{\log_6 5} \leqslant 6^x < 6^1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant 0, \\ \log_6 5 \leqslant x < 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0] \cup [\log_6 5;\ 1)$.

Как уже отмечалось при решении задач 2.И.1 и 2.И.2, полезную роль могут сыграть дополнительные условия на новую неизвестную, указывающие с той или иной точностью область ее значений. В связи с этим напомним, что выражение $a^{F(x)}$ не может принимать неположительных значений. Забывшие об этом абитуриенты при решении следующей задачи долго бились над неравенством $7^{x-\frac{1}{8}x^2} < -1$ и получали самые нелепые ответы.

4.В.4 (химфак — 85). Решить неравенство

$$7^{x-\frac{1}{8}x^2} < 7^{1-x}\left(\sqrt[8]{7}\right)^{x^2} + 6.$$

Решение. Обозначим $y = 7^{x-\frac{1}{8}x^2}$:

$$\begin{cases} y < \dfrac{7}{y} + 6, \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(y-7)(y+1)}{y} < 0, \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < y < 7.$$

Возвратимся к x:

$$7^{x-\frac{1}{8}x^2} < 7^1 \Leftrightarrow x - \frac{1}{8}x^2 < 1 \Leftrightarrow \left(x-4+2\sqrt{2}\right)\left(x-4-2\sqrt{2}\right) < 0.$$

Ответ: $\left(-\infty;\ 4-2\sqrt{2}\right) \cup \left(4+2\sqrt{2};\ \infty\right)$.

Преобразовывая выражения с логарифмами, необходимо внимательно следить за изменением ОДЗ и не допускать таких действий, которые ведут к сужению ОДЗ (а значит, к возможной потере решений). Это замечание относится и к применению основного логарифмического тождества, и к переходу от логарифма произведения к сумме логарифмов, особенно к вынесению показателя логарифмируемой степени за знак логарифма (см. § 4.Б).

4.В.5 (ВМК — 84). Решить неравенство

$$\sqrt{7-\log_2 x^2} + \log_2 x^4 > 2.$$

Поступающие, как правило, выбирали в качестве новой неизвестной величину $\log_2 x$, которая определена лишь при $x > 0$, в то время как выражения $\log_2 x^2$, $\log_2 x^4$ определены при всех значениях $x \neq 0$, и нет никаких видимых признаков того, что неизвестная x в исходном неравенстве не может быть отрицательной. Та-им образом, при этой замене неизвестной произошло явное сужение ОДЗ, повлекшее за собой потерю всех отрицательных решений.

А ведь никто не мешает без всяких искусственных ограничений на x, обозначить $y=\log_2 x^2$ и получить неравенство $\sqrt{7-y}+2y>4 \Leftrightarrow \sqrt{7-y}>4-2y$, равносильное совокупности систем:

$$1)\ \begin{cases} 4-2y\geqslant 0, \\ 7-y>(4-2y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\leqslant 2, \\ \left(y-\frac{3}{4}\right)(y-3)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{4}<y\leqslant 2;$$

$$2)\ \begin{cases} 4-2y<0, \\ 7-y\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2<y\leqslant 7.$$

К аналогичному результату можно прийти, если, воспользовавшись идеей задачи 2.3.3, преобразовать $\log_2 x^2=\log_2|x|^2=2\log_2|x|$, $\log_2 x^4=\log_2|x|^4=4\log_2|x|$ и обозначить новой буквой величину $\log_2|x|$, определенную при прежних значениях x. Как мы видели, однако, такие уловки здесь совершенно излишни.

Возвращаясь к x, можно получить

$$\frac{3}{4}<\log_2 x^2\leqslant 7 \Leftrightarrow 2^{\frac{3}{4}}<x^2\leqslant 2^7 \Leftrightarrow 2^{\frac{3}{8}}<|x|\leqslant 2^{\frac{7}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{\frac{3}{8}}<x\leqslant 2^{\frac{7}{2}}, \\ 2^{\frac{3}{8}}<-x\leqslant 2^{\frac{7}{2}}. \end{array}\right.$$

В приведенном нами решении двойного неравенства $2^{\frac{3}{4}}<x^2\leqslant 2^7$ использовано то же правило извлечения корня из неравенства, что и в решении задачи 3.Г.6. Разумеется, можно было обойтись и без него, но в таком случае потребовалась бы большая аккуратность (см. § 3.Г.).

Ответ: $[-2^{7/2};\ -2^{3/8})\cup(2^{3/8};\ 2^{7/2}]$.

Обратим внимание читателя на следующую психологическую особенность работы с логарифмическими и показательными уравнениями и неравенствами. Абитуриенты почему-то считают, что главная роль в решении таких задач отводится именно действиям с логарифмическими и показательными выражениями, а все остальные операции по сравнению с ними являются менее значительными. Так вот, по нашему убеждению, так называемых мелочей в каких-либо задачах не бывает. Например, неверное возведение в квадрат или извлечение корня при решении задачи 4.В.5 представляют собой ничуть не менее грубую ошибку, чем, скажем, сужение ОДЗ при переходе к неизвестной $\log_2 x$. Любую задачу нужно решать правильно от начала и до конца, не расслабляясь после прохождения трудного, по мнению, абитуриента, этапа.

При разборе решения задачи 2.И.4 нами был выделен класс уравнений, называемых *однородными* (аналогичный термин можно распространить и на неравенства). Расщепление уравнений, однородных относительно логарифмических или показательных выражений, можно производить стандартным способом (см. § 1.Г), использующим деление на квадрат одного из двух выражений и введение новой неизвестной, равной отношению этих выражений. В решении следующей задачи деление на квадрат выражения $3^{1/x}$ упрощает также решение уравнения, получаемого после расщепления, а правомерность этого деления обеспечена неравенством $3^{1/x}>0$ (однако можно обойтись и без деления; см. 4.Г.1).

4.В.6 (геол. ф-т — 82). Решить уравнение

$$9\cdot 4^{1/x}+5\cdot 6^{1/x}=4\cdot 9^{1/x}.$$

Решение.

$$9\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{1/x}\right)^2+5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{1/x}-4=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{1/x}+1\right)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{1/x}-\frac{4}{9}\right)=0\Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{1/x}=\left(\frac{2}{3}\right)^2\Leftrightarrow\frac{1}{x}=2.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Задачи

4.В.7. Решить уравнение:

а) (геогр. ф-т — 77) $4^x-2^{x+1}=3$;

б) (психфак — 83) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}=2^{5-x}+9$;

в) (геол. ф-т — 82) $5\cdot 25^{1/x}+3\cdot 10^{1/x}=2\cdot 4^{1/x}$;

г) (геогр. ф-т — 79) $4^{\log_9 x}-5\cdot 2^{\log_9 x}+2^{\log_3 9}=0$;

д) (физфак — 78) $\log_2(2^x-7)=3-x$;

е) (физфак — 80) $3\sqrt{\log_3 x}-\log_3 3x-1=0$;

ж) (ф-т почв. — 79)

$$\frac{6\log_{32}^2 x-11\log_{32} x-2}{\log_{32} x-2}=2+\log_{32} x;$$

з) (ф-т почв. — 78)

$$x^2\log_6\sqrt{5x^2-2x-3}-x\log_{1/6}(5x^2-2x-3)=x^2+2x;$$

и) (психфак — 81) $\frac{1}{3}\log_2(3x-4)^6\log_2 x^3=8\log_2^2\sqrt{x}+\log_2^2(3x-4)^2$;

к) (биофак — 84)

$$\sqrt{4+2\log_2\left(1-\frac{8x}{[(2x+1)^2}\right)}=\log_2\frac{2x+1}{2x-1}+2\log_2\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

4.В.8. Решить неравенство:

а) (психфак — 85) $4\cdot 4^x<7\cdot 2^x+2$;

б) (геол. ф-т — 77) $\frac{11\cdot 3^{x-1}-31}{4\cdot 9^x-11\cdot 3^{x-1}-5}\geqslant 5$;

в) (биофак — 78) $9^{\sqrt{x^2-3}}+3<3^{\sqrt{x^2-3}-1}\cdot 28$;

г) (химфак — 85) $5^{2x-\frac{1}{3}x^4}<5^{2-2x}\left(\sqrt[3]{5}\right)^{x^4}+24$;

д) (химфак — 77) $\log_{1/\sqrt{5}}(5^{x+1}-25^x)\geqslant -2$;

е) (филол. ф-т — 81) $\log_5^2(6-x)-2\log_{1/\sqrt{5}}(6-x)+\log_3 27\geqslant 0$;

ж) (биофак — 85) $\frac{1}{\log_5(3-2x)}-\frac{1}{4-\log_5(3-2x)}<0$;

з) (ВМК — 84) $-3+\log_2 x^6<\sqrt{7+\log_2 x^3}$;

и) (экономфак — 85) $|x|\log_{1/3}(x+5/9)+x>0$;

к) (физфак — 84) $x^4+3^{x+4}>x^4\cdot 3^x+81$;

л) (геогр. ф-т — 78) $\sqrt{8+2^{\sqrt{3-x}+1}-4^{\sqrt{3-x}}+2^{\sqrt{3-x}+1}}>5$.

4.В.9. Найти все значения a, при которых уравнение имеет четыре решения:

$$\log_3 x^3=\sqrt{\log_3 x^6}+a.$$

Ответы

4.В.7. а) $\log_2 3$; б) $2-2\log_2 3$; в) -1; г) 1; 9; д) 3; е) 3; 81; ж) 2; з) $-13/5$; -2; 3; и) 1; 2; 16/9; к) 3/2. **4.В.8.** а) $(-\infty;\ 1)$; б) $(-\infty;\ -\log_3 2]\cup[1-\log_3 5;\ \log_3 5-1)$; в) $\left(-\sqrt{7};\ -\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3};\ \sqrt{7}\right)$; г) $\left(-\infty;\ 3-\sqrt{3}\right)\cup\left(3+\sqrt{3};\ \infty\right)$; д) $(-\infty;\ \log_5 2]\cup[\log_5 3;\ 1)$; е) $(-\infty;\ -119]\cup[1;\ 6)$; ж) $(-311;\ -11)\cup(1;\ 3/2)$; з) $(-2;\ -2^{7/2}]\cup[2^{-7/2};\ 2)$; и) $(-5/9;\ -2/9]\cup[0;\ 22/9]$; к) $(-\infty;\ -3]\cup[0;\ 3]$; л) $[-1;\ 3)$. **4.В.9.** $(-1;\ 0)$.

§ 4.Г. ПЕРЕХОД К НОВОМУ ОСНОВАНИЮ

В предыдущих параграфах мы уже сталкивались с ситуацией, когда в одном уравнении или неравенстве присутствуют логарифмические или показательные выражения, имеющие разные основания. Опыт вступительных экзаменов показывает, что наиболее простым и привычным для абитуриентов является случай, когда все основания представляют собой различные, но легко угадываемые степени одного и того же числа a. Тогда переход во всех выражениях к основанию a не вызывает особых затруднений (см. задачи 4.А.2, 4.Б.2, 4.Б.6). Если же основания не связаны указанным образом (см. задачи 4.Б.4, 4.В.6), то некоторые абитуриенты даже не берутся за задачу из-за психологической неподготовленности к такой ситуации. А между тем для решения подобных задач не требуется никаких дополнительных знаний. Предполагается лишь умение переходить в той или иной форме к новому основанию.

4.Г.1 (геол. ф-т — 82). Решить уравнение

$$2^{2x+5}-3^{x+\frac{9}{2}}=3^{x+\frac{7}{2}}-4^{x+4}.$$

Решение.

$$2^{2x+5}+2^{2x+8}=3^{x+\frac{9}{2}}+3^{x+\frac{7}{2}}\Leftrightarrow 9\cdot 2^{2x+5}=$$

$$=4\cdot 3^{x+\frac{7}{2}}\Leftrightarrow \log_2 9+(2x+5)=2+\left(x+\frac{7}{2}\right)\log_2 3\Leftrightarrow x(2-\log_2 3)=$$

$$=-3+\frac{3}{2}\log_2 3\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}.$$

Ответ: $-\frac{3}{2}$.

Итак, уравнение из задачи 4.Г.1 удается привести к виду $9\cdot 2^{2x+5}=4\cdot 3^{x+\frac{7}{2}}$ и решить путем непосредственного логарифмирования по основанию 2 (с равным успехом его можно логарифмировать по основанию 3 или любому другому). Фактически же за этим преобразованием скрывается переход к основанию 2 в левой части, равной $2^2\cdot(2^{\log_2 3})^{x+\frac{7}{2}}=2^{2+\left(x+\frac{7}{2}\right)\log_2 3}$, с последующим отбрасыванием этого основания.

Поступающие, разумеется, обнаружили и другой способ решения задачи 4.Г.1, использующий деление уравнения, скажем, на функцию $3^{x+\frac{9}{2}}$ (см. также решение задачи 4.Б.4). Зато в следующей задаче избежать перехода к новому основанию мало кому удалось.

4.Г.2 (психфак — 78). Решить уравнение

$$\log_3 \frac{3}{x} \log_2 x - \log_3 \frac{x^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}.$$

Решение. $(1-\log_3 x)\ \dfrac{\log_3 x}{\log_3 2} - 3\log_3 x + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\ \dfrac{\log_3 x}{\log_3 2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\log_3^2 x - \log_3 x\,(1 - 6\log_3 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x \left(\log_3 x - \frac{1}{2} + 3\log_3 2\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = \log_3 1, \\ \log_3 x = \log_3 \dfrac{\sqrt{3}}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{8}. \end{array}\right.$$

Ответ: $1;\ \dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

Многие абитуриенты даже не рискнули перейти в уравнении задачи 4.Г.2 к одному основанию (2 или 3 или к любому другому), испугавшись появления выражений вида $\log_3 2$. В связи с этим уместно подчеркнуть, что подобные выражения ничем не хуже других, таких как $\sqrt{2}$, π, 3^{57}, $\sin 1$ и т. п. Более того, кое-что все же мы умеем проделывать с ними, не прибегая к приближенным вычислениям: например, доказывать равенства типа $\log_6 2 + \log_6 3 = 1$. Поэтому бояться логарифмов нечего, и если даже им суждено появиться в ответе, то в этом нет ничего противоестественного.

Отдельного разговора заслуживают логарифмы, основаниями которых являются функции от неизвестной величины. При работе с ними нужно иметь в виду следующее важное обстоятельство: *выражение, стоящее в основании логарифма, по определению может быть только положительным и к тому же не равным 1.* Это означает, что значения неизвестной, при которых указанные условия не выполнены, попросту не входят в область определения. Одна из типичных ошибок на экзаменах происходит как раз по причине расширения ОДЗ уравнения или неравенства в результате потенцирования по основанию, зависящему от x.

4.Г.3 (геогр. ф-т — 80). Решить уравнение

$$\log_{x-1} 3 = 2.$$

Большинство абитуриентов преобразовали уравнение к виду $3 = (x-1)^2$ и выписали корни $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$. Однако многие из них не заметили (а это не бросается в глаза), что корень $1-\sqrt{3}$ является посторонним. Чем же объясняется неравносильность перехода? Все дело в том, что при отбрасывании логарифмов в уравнении

$$\log_{x-1} 3 = \log_{x-1} (x-1)^2$$

происходит расширение ОДЗ, поскольку выражение $x-1$, стоящее в основании логарифмов, после их отбрасывания уже может принимать и отрицательные значения.

Ответ: $1+\sqrt{3}$.

Самый надежный способ предостеречься от ошибок, связанных с расширением ОДЗ (а также, как мы увидим ниже, и от других ошибок), — это перейти к другому основанию, роль которого может сыграть произвольное конкретное число a (положительное и не равное 1). Отметим, что сама формула перехода

$$\log_{F(x)} G(x)=\frac{\log_a G(x)}{\log_a F(x)}$$

представляет собой тождество в абсолютном смысле этого слова, поскольку левая и правая ее части определены в точности при одних и тех же значениях x (некоторые ошибочно полагают, что переход от левой части к правой производится с помощью операции логарифмирования по основанию a. Ничего подобного: эти части тождественно совпадают друг с другом). Это обстоятельство позволяет, не прибегая ни к каким мерам предосторожности, в любой ситуации переходить к заранее выбранному основанию a. Задумываться остается лишь о том, чтобы само число a имело право служить основанием логарифма.

Например, уравнение задачи 4.Г.3 преобразовывается следующим образом

$$\frac{\lg 3-2\lg(x-1)}{\lg(x-1)}=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\lg 3=\lg(x-1),\\ \lg(x-1)\neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{3}=x-1.$$

Напомним, что неравенство $\lg(x-1)\neq 0$ следует понимать так: выражение $\lg(x-1)$ имеет смысл и не равно 0. Решать это неравенство в данном случае не нужно, так как оно легко проверяется (более того, при решении такого рода неравенств можно наделать ошибок; см. замечание к задаче 2.Г.3).

Особое значение указанный способ приобретает при решении неравенств.

4.Г.4 (биофак — 79). Решить неравенство

$$\log_{x+1}(x^2+x-6)^2>4.$$

Менее внимательные абитуриенты привели неравенство к виду $(x^2+x-6)^2>(x+1)^4$, забыв обо всем на свете, в том числе и о зависимости знака полученного неравенства от величины $x+1$. В этом таится одно из коварств операции потенцирования по основанию, зависящему от x.

Другие рассмотрели два случая: $x+1>1$ и $x+1<1$, но все-таки упустили из виду возможное расширение ОДЗ, не наложив ограничения $x+1>0$. Некоторые даже подключили к одному из случаев равенство $x+1=1$, находясь в плену идеи о том, что перебор случаев должен быть исчерпывающим (еще одно коварство!).

Наконец, были допущены также стандартные ошибки, о которых говорилось в § 3.Г, 4.В: из полученного неравенства неверно извлекался квадратный корень или, на более раннем этапе, показатель 2 неверно выносился за знак логарифма в левой части исходного неравенства.

А между тем решение, использующее переход к новому основанию, равному, скажем, 10, сводит все логические трудности к вопросам обыкновенного расщепления неравенства.

Решение. $\dfrac{\lg(x^2+x-6)^2-4\lg(x+1)}{\lg(x+1)}\geqslant 0.$

Неравенство равносильно совокупности систем:

$$1)\ \begin{cases}\lg(x+1)>0,\\ \lg(x^2+x-6)^2\geqslant\lg(x+1)^4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>1,\\ (x^2+x-6)^2\geqslant(x+1)^4\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ ((x^2+x-6)-(x+1)^2)((x^2+x-6)+(x+1)^2)\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ (x+7)\left(x+\dfrac{5}{2}\right)(x-1)\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x\leqslant 1;$$

$$2)\ \begin{cases}\lg(x+1)<0,\\ \lg(x^2+x-6)^2\leqslant\lg(x+1)^4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x+1<1,\\ 0<(x^2+x-6)^2\leqslant(x+1)^4\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<0,\\ x^2+x-6\neq 0,\\ \left((x+7)\,x+\dfrac{5}{2}\right)(x-1)\geqslant 0,\end{cases}$$

решений нет.

Ответ: (0; 1].

Аналогично обстоит дело со степенями, в которых и основания и показатели являются функциями от неизвестной величины (именно функциями, а не числами). Такие степени принято считать *определенными только для тех значений неизвестной, при которых их основания положительны*, если, конечно, не оговорено противного.

4.Г.5 (ВМК — 81). Решить уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{3x-5}}=(3x-5)^{\log_{\frac{1}{25}}(2+5x-x^2)}$$

Поступающие быстро привели уравнение к виду

$$(3x-5)^{-\frac{1}{2}}=(3x-5)^{\log_{\frac{1}{25}}(2+5x-x^2)}$$

и отбросили основания степеней в левой и правой частях, получив уравнение

$$\log_{\frac{1}{25}} 5=\log_{\frac{1}{25}}(2+5x-x^2) \Leftrightarrow x^2-5x+3=0.$$

При этом некоторые обратили внимание на то, что один из двух корней $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{13}}{5}$ не входит в ОДЗ исходного уравнения, т. е. не удовлетворяет неравенству

$$3x-5>0.$$

И тем не менее такой способ решения содержит ошибку, связанную с логарифмированием (а ведь именно эта операция здесь фактически произведена) по основанию, зависящему от x. Дело в том, что значение x, при котором это основание равно 1, является особым. Логарифмировать по такому основанию не только нельзя, но, впрочем, и не нужно, поскольку равенство выполняется автоматически, т. е. при одном лишь условии вхождения указанного значения x в ОДЗ исходного уравнения. Таким образом, поступающими был пропущен еще один случай:

$$\begin{cases} 3x-5=1, \\ 2+5x-x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Логически вернее и гораздо безопаснее было бы логарифмировать уравнение по любому конкретному основанию a (например, равному 10):

$$-\frac{1}{2}\log_a(3x-5)=\log_{\frac{1}{25}}(2+5x-x^2)\cdot\log_a(3x-5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_a(3x-5)\left(\log_{\frac{1}{25}}(2+5x-x^2)+\frac{1}{2}\right)=0.$$

После такой операции задача решается простым расщеплением уравнения (см. § 2.Г), т. е. рассмотрением двух случаев:

1) $\begin{cases} \log_a(3x-5)=0, \\ 2+5x-x^2>0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{25}}(2+5x-x^2)=-\frac{1}{2}, \\ 3x-5>0. \end{cases}$

Ответ: 2; $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$.

В задаче 4.Г.5 выражение вида $F(x)^{G(x)}$ заметно упростилось в результате логарифмирования по основанию a обеих частей уравнения. Такое преобразование не всегда возможно. Поэтому более общий способ упрощения представляет собой переход к основанию a (положительному и не равному 1) по формуле

$$F(x)^{G(x)}=a^{G(x)\log_a F(x)}.$$

Как увидим в § 9.А, такой переход оказывается полезным также и при дифференцировании рассматриваемого выражения.

4.Г.6. Решить неравенство

$$2\cdot x^{2\lg(x-1)}\geqslant 1+(x-1)^{\lg x}.$$

Решение.

$$2\cdot 10^{2\lg(x-1)\lg x}\geqslant 1+10^{\lg(x-1)\lg x}.$$

Обозначим $y=10^{\lg(x-1)\lg x}$:

$$\begin{cases}2y^2-y-1\geqslant 0,\\ y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2y+1)(y-1)\geqslant 0,\\ y>0\end{cases}\Leftrightarrow y\geqslant 1.$$

Возвратимся к x:

$$10^{\lg(x-1)\lg x}\geqslant 10^0\Leftrightarrow \lg(x-1)\lg(x)\geqslant 0.$$

Неравенство равносильно совокупности систем:

1) $\begin{cases}\lg(x-1)\geqslant 0,\\ \lg x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow x\geqslant 2;$

2) $\begin{cases}\lg(x-1)\leqslant 0,\\ \lg x\leqslant 0,\end{cases}$

решений нет.

Ответ: $[2;\ \infty)$.

Задачи

4.Г.7. Решить уравнение:

а) (геол. ф-т — 82) $5^{x+\frac{1}{2}}-9^x=3^{2x-2}-5^{x-\frac{1}{2}}$;

б) $5^x\cdot 8^{\frac{x-1}{x}}=500$;

в) (филол. ф-т — 78)

$$\log_9(x^2-5x+6)^2=2^{-1}\log_{\sqrt{3}}\frac{x-1}{2}+\log_3|x-3|;$$

г) (психфак — 78) $\log_5\dfrac{x^3}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\log_5 x}{\log_5\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$;

д) (геогр. ф-т — 80) $\log_{x+1}2=2$;

е) (геогр. ф-т — 81) $\log_3(2x+1)=2\log_{2x+1}3+1$;

ж) (мехмат — 82) $\log_x(2x^2-3x-4)=2$;

з) (экономфак — 82) $\log_{1-2x^2} x=\frac{1}{4}-\frac{6}{\log_2(1-2x^2)^4}$;

и) (ВМК — 81) $\frac{1}{\sqrt{2x-1}}=(2x-1)^{\log_{1/4}(1+7x-2x^2)}$;

к) (экономфак — 79)

$$\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)+\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)=4;$$

л) (биофак — 83)

$$2\log_{x-2}\sqrt{3}+(x-4)^2\log_3(x-2)=(x-4)^2\log_{x-2}3+2\log_3\sqrt{x-2}.$$

4.Г.8. Решить неравенство:

а) (физфак — 81) $\log_{\frac{1}{x-1}} 0{,}4>0$;

б) (физфак — 77) $\log_7 x-\log_x\frac{1}{7}\geqslant 2$;

в) (геогр. ф-т — 85) $\log_{3x-1} 2x>1$;

г) (геол. ф-т — 78) $\log_x\frac{4x+1}{6(x-1)}<0$;

д) (биофак — 79) $\log_{9x^2}(6+2x-x^2)\leqslant\frac{1}{2}$;

е) (биофак — 81) $(2^x+3\cdot 2^{-x})^{2\log_2 x-\log_2(x+6)}>1$;

ж) $\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x-2}<100$;

з) $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}\leqslant 2$;

и) $(x^2+x+1)^x<1$;

к) $x^{\log_x(x+3)^2}\leqslant 16$;

л) $3^{x^2+2}+3^{x^2}\leqslant 2\cdot 5^{x^2+1}$.

4.Г.9 (экономфак — 85). Указать все значения a, при которых уравнение

$$\log_2 x+\log_a x+\log_4 x=4$$

имеет решения. Найти все эти решения.

4.Г.7. а) $3/2$; б) 3; $-\log_5 2$; в) $5/3$; г) $\sqrt[3]{5/9}$; д) $\sqrt{2}-1$; е) $-1/3$; 4; ж) 4; з) $1/2$; и) 1; $\frac{7+\sqrt{41}}{4}$; к) $-1/4$; л) $2\frac{1}{3}$; 5.

4.Г.8. (а $(2;\ \infty)$; б) $(1;\ \infty)$; в) $(2/3;\ 1)$; г) $(7/2;\ \infty)$; д) $(1-\sqrt{7};\ -1] \cup (-1/3;\ 0) \cup (0;\ 1/3) \cup [2;\ 1+\sqrt{7})$; е) $(3;\ \infty)$; ж) $(1;\ 100)$; з) $[1/4;\ 4]$; и) $(-\infty;\ -1)$; к) $(0;\ 1)$; л) $\{0\} \cup [\log_5 3;\ \infty)$.

4.Г.9. $x=2^{\frac{2\log_2 a}{3\log_2 a+2}}$ при $a \in (0;\ 2^{-2/3}) \cup (2^{-2/3};\ 1) \cup (1;\ \infty)$

ГЛАВА 5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

§ 5.А. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ КРУГ

Основной моделью, позволяющей наглядно проиллюстрировать понятие тригонометрической функции, является тригонометрический круг. Он же представляет собой некий инструмент для решения простейших тригонометрических уравнений и неравенств и может рассматриваться в некоторых случаях как составная часть решения (такая же роль отводится, скажем, иллюстрации в методе интервалов; см. § 3.В).

Опыт вступительных экзаменов показывает, что абитуриенты часто пренебрегают тригонометрическим кругом, делая упор на заучивание формул для решения простейших уравнений и надеясь таким образом решить все проблемы. Однако использование одних лишь формул иногда затрудняет получение правильного ответа в задаче, не говоря уже о многочисленных ошибках и дополнительных хлопотах, возникающих именно из-за отсутствия иллюстрации к решению. Приведем краткое описание используемой нами в дальнейшем модели.

1. *Тригонометрический круг* — круг единичного радиуса на плоскости с фиксированной системой координат, начало которых совпадает с центром круга.

2. *Числовая ось* представляет собой не прямую, как обычно, а числовую окружность, которая получается в результате наматывания прямой на тригонометрический круг подобно тому, как нитка наматывается на катушку. При этом на окружности стандартным образом фиксируются точка отсчета, соответствующая числу 0, и положительное направление обхода, соответствующее движению по числовой оси в сторону возрастания числовых значений (рис. 5.1).

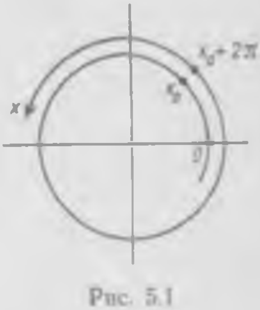

Рис. 5.1

Для успешной работы с тригонометрическим кругом необходимо ясно представлять себе следующее обстоятельство: хотя каждое число однозначно изображается точкой на окружности, по своему изображению оно восстанавливается уже неоднозначно. Дело в том, что при обходе по окружности на целое число оборотов мы попадаем в исходную точку, а значит, каждой точке окружности наравне с некоторым числом x_0 соответствует и любое число вида $x_0+2\pi n$, где $n\in\mathbf{Z}$.

5.А.1. Указать все числа, соответствующие точкам окружности, изображенным на рис. 5.2, а)—ж).

Такие задачи сплошь и рядом возникают на заключительном этапе решения тригонометрических уравнений. Кажущаяся их простота нередко подкупает абитуриентов, стремящихся сделать все в уме и в результате допускающих ошибки.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; б) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; в) $\pm\frac{\pi}{3}+$ $+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; г) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; д) $\pm\frac{\pi}{12}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; е) $\pi+2\pi n,\ -\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ n,\ m\in\mathbf{Z}$; ж) $\frac{2\pi}{3}n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Возможны и другие формы записи ответа (см. § 5.Б).

Рис. 5.2

3. *Ось косинусов* совпадает с осью абсцисс, а косинус числа x_0 можно определить как абсциссу точки, соответствующей на окружности числу x_0 (рис. 5.3).

При решении простейших тригонометрических уравнений вида $\cos x=\alpha$ возникает задача о нахождении всех чисел x, косинус которых равен заданному значению α. Многие считают, что вполне достаточно просто заучить формулу корней

$$x=\pm\arccos\alpha+2\pi n,\quad n\in\mathbf{Z},$$

и совершенно, дескать, необязательно понимать, что означают выражения $\pm\arccos\alpha$, $2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$ (напомним, что $\arccos\alpha$ — это тот из корней уравнения $\cos x=\alpha$, который принадлежит отрезку $[0;$

Рис. 5.3

Рис. 5.4

$\pi]$). Такой подход к решению этой задачи вызывает трудности уже при самом элементарном исследовании корней, скажем, при исследовании на монотонность. Попробуйте, глядя только на формулу корней, расположить их в порядке возрастания! А с помощью тригонометрического круга это делается очень просто. Достаточно заметить, что, двигаясь по окружности в положительном направлении, встречаем корни в следующем порядке: $\ldots$, $-\arccos\alpha$, $+\arccos\alpha$, $-\arccos\alpha+2\pi$, $+\arccos\alpha+2\pi$, $\ldots$ (в случае $\alpha=\pm1$ в этой последовательности каждое значение повторяется дважды).

5.А.2 (химфак — 80). Решить уравнение

$$2\cos^2 3x-\cos 3x=0.$$

Решение.

$$\cos 3x(2\cos 3x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 3x=0,\\ \cos 3x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z},\\ 3x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi m,\ m\in\mathbf{Z}\end{array}\right.\quad\text{(рис. 5.4).}$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ \pm\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{2\pi}{3}m,\ n,\ m\in\mathbf{Z}$.

Пользуясь общей формулой для решения первого из двух уравнений полученной выше совокупности, некоторые абитуриенты выписывали равенство $3x=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n$, не испытывая при этом никакого чувства неудовлетворенности. Другие же, понадеявшись на свою память, получали различные неверные равенства типа $3x=\pi n$, $3x=2\pi n$ и т. п. Нам кажется, что использование тригонометрического круга даже в таких простых ситуациях целесообразно хотя бы потому, что оно позволяет не забивать голову частными случаями общей формулы корней и к тому же исключает возможные ошибки.

4. *Ось синусов* совпадает с осью ординат, а синус числа x_0 равен по определению ординате точки x_0 на числовой окружности (рис. 5.3). Для решения уравнения $\sin x=\alpha$ достаточно отложить на оси синусов число α и отметить все точки окружности, которые соответствующим образом проектируются в указанную точку оси синусов, после чего задача сводится к описанию множества чисел, задаваемых отмеченными точками окружности (при этом число, принадлежащее отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, называется $\arcsin\alpha$). Хорошо известна общая формула

$$x=(-1)^n\arcsin\alpha+\pi n,\qquad n\in\mathbf{Z},$$

которая, как показывает опыт экзаменов, еще более трудна для восприятия и дальнейшей работы, чем аналогичная формула для уравнения $\cos x=\alpha$. Исследование ответа существенно облегчается привлечением тригонометрического круга. Например, с его помощью легко устанавливается факт возрастания корней с ростом значений n, т. е. в последовательности

$$\ldots,\ \arcsin\alpha,\ \pi-\arcsin\alpha,\ 2\pi+\arcsin\alpha,\ 3\pi-\arcsin\alpha,\ \ldots$$

в случае $\alpha\neq\pm1$ (при $\alpha=\pm1$ каждый из корней в этой последовательности повторяется дважды).

5.А.3 (физфак — 77). Решить уравнение

$\sin^2 x=3/4$.

Решение. $\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}\ \text{(рис. 5.5)}.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Отметим, что при решении этой задачи часть абитуриентов неверно извлекла корень из исходного уравнения, получив уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и потеряв в результате часть корней (см. п. 3 § 2.Е). Большие затруднения вызвали также и попытки применить общую формулу к уравнению $\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. В этом смысле преимущества использования тригонометрического круга несомненны. Другой способ состоит в приведении исходного уравнения к виду $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ (см. § 5.В).

Рис. 5.5

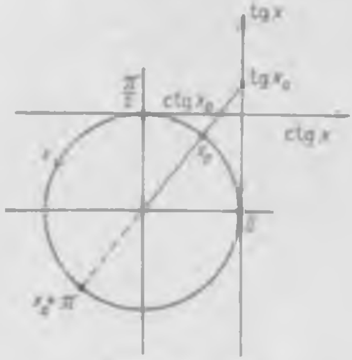

Рис. 5.6

5. *Ось тангенсов* проходит через точку 0 числовой окружности параллельно оси ординат, а тангенс числа x_0 равен ординате точки пересечения оси тангенсов с прямой, проходящей через точку x_0 окружности и начало координат (рис. 5.6). На тригонометрическом круге очень хорошо видно, что, например, выражение $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не имеет смысла: соответствующая прямая просто не пересекается с осью тангенсов.

Решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$ можно изобразить так: отложим точку с ординатой a на оси тангенсов и проведем прямую через эту точку и начало координат, тогда точки пересечения с числовой окружностью задают искомые значения x (значение из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ называется $\operatorname{arctg} a$). Подчеркнем, что ни в коем случае нельзя ограничиваться лишь одной точкой пересечения, забывая продолжить прямую до пересечения ее с окружностью во второй точке и таким образом теряя решения. Общая формула корней достаточно проста

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

причем корни возрастают с ростом значений n.

5.А.4 (физфак — 77). Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}.$$

Решение. $\left(\operatorname{tg} x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\operatorname{tg} x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x=\frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \operatorname{tg} x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z} \text{ (рис. 5.7).}$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Рис. 5.7

Рис. 5.8

В этой задаче поступавшие также допускали стандартную ошибку при извелечении корня из уравнения, получая уравнение $\operatorname{tg} x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. *Ось котангенсов* строится аналогично оси тангенсов: она проходит через точку $\frac{\pi}{2}$ числовой окружности параллельно оси абсцисс, а котангенс числа x_0 равен абсциссе точки пересечения оси котангенсов с той же прямой (см. рис. 5.6). Решение уравнения $\operatorname{ctg} x=\alpha$ изображается тоже аналогично и задается формулой

$$x=\operatorname{arcctg}\alpha+\pi n,\ n\in\mathbf{Z},$$

где $\operatorname{arcctg}\alpha\in[0;\ \pi]$.

«Что бы там ни говорили, — подумает скептически настроенный читатель, — по-моему, совсем не обязательно в очевидных случаях рисовать тригонометрический круг. Вполне достаточно хорошенько запомнить формулы для корней простейших тригонометрических уравнений». Конечно, это правильно, но, вероятно, каждый согласится, что достаточно содержательный рисунок никак не повредит, а скорее поможет решению уравнения или тем более неравенства. Он позволяет автору решения застраховаться от самых разнообразных типичных ошибок, а в некоторых случаях упрощает обоснование решения или помогает выработать гипотезу об ответе на поставленный в задаче вопрос (см. § 5.Ж, 5.3).

Иногда с помощью тригонометрического круга можно отвергнуть какую-либо ложную версию, касающуюся корней тригонометрических уравнений или неравенств. Так, при решении, скажем, уравнений вида $\sin F(x)=\sin G(x)$ поступающие часто пользуются довольно правдоподобным с виду утверждением: «Если синусы двух чисел равны, то сами числа отличаются друг от друга на $2\pi n$, где $n\in\mathbf{Z}$». Это заблуждение можно сразу же развеять, если только представить себе тригонометрический круг и ситуацию, когда два числа с одинаковыми синусами задаются разными точками окружности (симметричными относительно оси синусов; рис. 5.3).

Задачи

5.А.5. Найти соотношения между числами x и y, если соответствующие им точки тригонометрической окружности:

а) совпадают;

б) диаметрально противоположны;

в) симметричны относительно оси абсцисс;

г) симметричны относительно оси ординат.

5.А.6. С помощью тригонометрического круга установить, какие из перечисленных выше (в § 5.А) тригонометрических функций являются четными, нечетными, ограниченными, периодическими.

5.А.7. Решить уравнение:

а) (физфак — 77) $\cos^2 x=1/2$;

б) (геол. ф-т — 81) $5\sin^2 x=2-\cos^2 x$;

в) $\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x}{4}=1$;

г) (химфак — 80) $\sqrt{2}\sin^2 5x-\sin 5x=0$;

д) (геогр. ф-т — 84) $2\cos\frac{x}{2}\sin 3x=\cos\frac{x}{2}$;

е) (мехмат — 80) $\sin 2x=\sqrt{3}\sin x$;

ж) (ВМК — 80) $\sin 2x-\sqrt{3}\cos x=0$;

з) (физфак — 78) $5\sin 2x-2\sin x=0$;

и) $\sin x=\cos x$;

к) $\operatorname{tg} x=\operatorname{ctg} x$;

л) $\sin x=\operatorname{tg} x$;

м) $|\cos x|=|\operatorname{ctg} x|$.

5.А.5. а) $x-y=2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; б) $x-y=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; в) $x+y=2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; г) $x+y=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

5.А.6. Функция $\cos x$ четна, а функции $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ нечетны; ограничены только $\sin x$ и $\cos x$; периодичны все тригонометрические функции.

5.А.7. а) $\pi/4+\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbf{Z}$; б) $\pm\pi/6+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; в) $1+2n,\ n\in\mathbf{Z}$; г) $\frac{\pi}{5}n,\ (-1)^m\pi/20+\frac{\pi}{5}m,\ n,\ m\in\mathbf{Z}$; д) $\pi+2\pi n,\ (-1)^m\pi/18+\frac{\pi}{3}m,\ n,\ m\in\mathbf{Z}$; е) $\pi n,\ \pm\pi/6+2\pi m,\ n,\ m\in\mathbf{Z}$; ж) $\pi/2+\pi n,\ (-1)^m\pi/3+\pi m,\ n,\ m\in\mathbf{Z}$; з) $\pi n,\ \pm\arccos 1/5+2\pi m,\ n,\ m\in\mathbf{Z}$; и) $\pi/4+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; к) $\pi/4+\frac{\pi}{2}n,\ k\in\mathbf{Z}$; л) $\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; м) $\pi/2+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

§ 5.Б. НЕПРИЯТНОСТИ В ОТВЕТЕ

Существуют различные точки зрения по вопросу о том, к какому виду необходимо приводить ответ в тригонометрических задачах. В связи с этим подчеркнем, что единственным требованием к ответу является его математическая правильность.

5.Б.1 (физфак — 82). Решить уравнение

$$\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}+\sqrt{2}\cos\frac{x}{4}=0.$$

Решение. $\cos^2\frac{x}{4}-\frac{1}{2}+\sqrt{2}\cos\frac{x}{4}=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(\cos\frac{x}{4}-\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{4}-\frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos\frac{x}{4}=\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ \text{так как}\ \frac{-2-\sqrt{2}}{2}<-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{4}=\pm\arccos\frac{2-\sqrt{2}}{2}+2\pi n,\quad n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $\pm 4\arccos\frac{2-\sqrt{2}}{2}+8\pi n,\quad n\in\mathbf{Z}.$

Одной из характерных ошибок на экзамене было включение в ответ серии значений $\pm 4\arccos\frac{-2-\sqrt{2}}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbf{Z}$, которые не имеют смысла. Этого можно было избежать, если попытаться просто изобразить точку $\frac{-2-\sqrt{2}}{2}$ на оси косинусов. Уверены, что ни один из абитуриентов во время экзамена ни на минуту не сомневался, что выражение $\cos\frac{x}{4}$ не может принимать значений, меньших -1. Эта досадная ошибка возникла из-за отсутствия элементарного толчка, побуждающего абитуриента проверить оценку $\frac{-2-\sqrt{2}}{2}<-1$. Таким толчком, как нам кажется, мог бы послужить тригонометрический круг (рис. 5.8).

Другая ошибка абитуриентов была связана со стремлением усовершенствовать ответ на самом последнем этапе решения задачи. Именно выражение $4\arccos\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ было преобразовано к виду $2\arccos(2-\sqrt{2})$ $\left(\text{или } \arccos\left(4-2\sqrt{2}\right)\right)$. При этом в ответ на вопрос о справедливости «тождества $2\arccos\alpha=\arccos 2\alpha$» можно было услышать: «А почему бы и нет?» В том-то и дело, что нет, причем по той же причине, по какой неверно «тождество $\cos 2\alpha=2\cos\alpha$».

Вообще, преобразовывая выражения, содержащие знаки «арк-функций», нужно проявлять предельную осторожность, а еще лучше их не трогать без надобности. Особенно коварной является запись вида $\arccos(-\alpha)$ (см. задачу 5.В.1), в которой абитуриентов так и подмывает избавиться от минуса, да к тому же непременно с грубыми ошибками. Характерным является заблуждение о четности функции $\arccos\alpha$ (якобы вследствие четности косинуса). Поясним, что функция $\arccos\alpha$ не является ни четной, ни нечетной, но зато удовлетворяет тождеству

$$\arccos\alpha+\arccos(-\alpha)=\pi,$$

которое можно установить также с помощью тригонометрического круга. В связи с этим отметим также, что из нечетности функций $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ следует, что вынесение минуса за знак обратных к ним функций не приводит к ошибкам при решении простейших тригонометрических уравнений. Тем не менее во всех перечисленных случаях выносить указанный минус в ответе совершенно необязательно.

К недостаткам ответа в экзаменационных задачах не следует относить детали, связанные лишь с формой его записи и зависящие в большей степени от вкуса того или иного абитуриента, а также от метода решения задачи. В этом смысле совершенно безразлично, будут выписаны в ответе, скажем, к задаче 5.А.3 две серии корней $(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n$, $(-1)^{m+1}\frac{\pi}{3}+\pi m$, $n, m\in\mathbf{Z}$, или они будут разбиты на четыре серии $\pi/3+2\pi n$, $-\pi/3+2\pi m$, $2\pi/3+2\pi k$, $-2\pi/3+2\pi l$, n, m, k, $l\in\mathbf{Z}$, или же значения будут сгруппированы еще как-нибудь. Важно лишь одно — отсутствие ошибок.

Наблюдательный читатель, наверное, заметил, что мы постарались записать ответ к задаче 5.А.3 в наиболее компактной форме. Это естественное стремление, по-видимому, не стоит скидывать со счетов. Чтобы подчеркнуть мысль о компактности ответа (а заодно и о полезности тригонометрического круга), приведем решение следующей задачи.

5.Б.2 (мехмат — 80). Решить уравнение

$$\frac{\sin 2x}{1+\sin x}=-2\cos x.$$

Решение. $\dfrac{2\sin x\cos x+2\cos x+2\sin x\cos x}{1+\sin x}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)}{\sin x+1}=0.$$

Уравнение равносильно совокупности систем (рис. 5.9):

1) $\begin{cases}\cos x=0,\\ \sin x\neq -1;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\sin x=-\dfrac{1}{2},\\ \sin x\neq -1.\end{cases}$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi}{3}n,\quad n\in \mathbf{Z}.$

Рис. 5.9

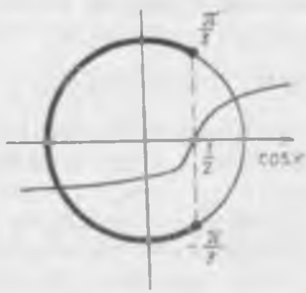

Рис. 5.10

Перечислим те бесспорные *недостатки* (но не ошибки!), которые свидетельствуют о некоторой незавершенности решения задачи:

1) *наличие в ответе табличных значений под знаками обратных тригонометрических функций,* т. е. записей типа $\arcsin\dfrac{1}{2}$;

2) *явное дублирование каких-либо значений,* т. е. включение в ответ нескольких серий решений, одна из которых фактически полностью содержится в остальных, например: $\dfrac{\pi}{2}+\pi n$

$\dfrac{\pi}{4}m$, $n, m\in \mathbf{Z}$, или $\pm\pi+2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$.

Причиной указанных недостатков является прежде всего неуверенное знание таблицы основных значений тригонометрических функций или, соответственно, неумение проанализировать полученный ответ. Для их устранения можно предложить воспользоваться все тем же тригонометрическим кругом, который позволяет грубо представить себе искомый корень по заданному табличному значению или подтвердить предположение о дублировании.

В § 5.3 рассмотрены типичные ошибки при выписывании ответа в тригонометрических неравенствах.

Задачи

5.Б.3. С помощью тригонометрического круга выяснить, при каких значениях α справедливо тождество:

а) $\arcsin(-\alpha) = -\arcsin\alpha$;

б) $\arccos(-\alpha) = \pi - \arccos\alpha$;

в) $\operatorname{arctg}(-\alpha) = -\operatorname{arctg}\alpha$;

г) $\operatorname{arcctg}(-\alpha) = \pi - \operatorname{arcctg}\alpha$;

д) $\arcsin\alpha = \pi/2 - \arccos\alpha$;

е) $\operatorname{arctg}\alpha = \pi/2 - \operatorname{arcctg}\alpha$.

5.Б.4. Решить уравнение:

а) (мехмат — 80) $\sin x = \sqrt{5}\cos\frac{x}{2}$;

б) (физфак — 78) $2\sin x + 3\sin 2x = 0$;

в) (экономфак — 85) $\sqrt{3}\sin x = 2\operatorname{ctg} x$;

г) (физфак — 82) $4\sin 2x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$;

д) (геогр. ф-т — 81) $2\cos x + 3\cos 2x = 3$;

е) $2\sin 2x\cos x = \sin x$;

ж) (психфак — 85) $2\cos^2 x - \sin x = 1$;

з) (мехмат — 80) $\frac{\sin 2x}{1-\cos x} = 2\sin x$;

и) $\sin 2x = 2\sin x$;

к) $(\sin 4x + 1)(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{ctg} x - 1) = 0$;

л) (геол. ф-т — 82) $\sin\left(\frac{4}{3}\pi\sin x\right) = \frac{1}{2}$.

5.Б.3. а), б), д) при $\alpha \in [-1; 1]$; в), г), е) при $\alpha \in (-\infty; \infty)$. **5.Б.4.** а) $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; б) πn, $\pm \arccos(-1/3) + 2\pi m$, n, $m \in \mathbf{Z}$; в) $\pm \arccos \sqrt{3}/3 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; г) $\frac{1}{2}\left((-1)^n \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) + \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; д) $\pm \arccos \frac{-1+\sqrt{37}}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; е) $\frac{\pi}{3} n$, $n \in \mathbf{Z}$; ж) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} n$, $n \in \mathbf{Z}$; з) $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} n$, $n \in \mathbf{Z}$; и) πn, $n \in \mathbf{Z}$; к) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n$, $n \in \mathbf{Z}$; л) $(-1)^n \arcsin \frac{1}{8} + \pi n$, $(-1)^m \arcsin \frac{5}{8} + \pi m$, $(-1)^{k+1} \times \arcsin \frac{7}{8} + \pi k$, n, m, $k \in \mathbf{Z}$.

§ 5.В. КАК ОРИЕНТИРОВАТЬСЯ В ФОРМУЛАХ ТРИГОНОМЕТРИИ

Обилие тригонометрических формул, содержащихся в многочисленных методических и справочных пособиях для поступающих в вузы, приводит к тому, что будущие абитуриенты идут по пути лихорадочного коллекционирования и заучивания всех встречающихся им формул без разбора. Поскольку количество формул при таком подходе постоянно возрастает, достигая в конечном счете нескольких десятков, то ориентироваться в столь огромном перечне становится все труднее, да и надеяться на память при этом уже не приходится (напомним, что пользование шпаргалками на вступительных экзаменах категорически запрещено).

1. Среди формул тригонометрии можно выделить наиболее употребительный минимум, который необходимо хорошо помнить и уметь активно применять в различных ситуациях. Сюда относятся прежде всего следующие (основные) *тригонометрические тождества*:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

В письменных работах нередко используются такие разновидности указанных тождеств, которые не могут применяться без каких-либо специальных оговорок: например, равенства $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ или $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$, справедливые лишь при значениях x, для которых $\cos x \geqslant 0$ или, соответственно, $\sin x \geqslant 0$. Более правильными, но все же недостаточно приемлемыми для уравнений следует признать и такие варианты этих формул, как $\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$ или $\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$, особенно если в них не уточнено, при каких значениях x берется знак плюс, а при каких — минус.

5.В.1 (экономфак — 84). Решить уравнение

$\cos 2x = \sqrt{3}\sin 2x - 1.$

Некоторые абитуриенты, не видя других способов решения этого уравнения (см. п. 4 и § 5.Е), заменили левую его часть выражением $\pm\sqrt{1-\sin^2 2x}$, после чего возвели обе части в квадрат и получили уравнение

$$1-\sin^2 2x = 3\sin^2 2x - 2\sqrt{3}\sin 2x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x\left(\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0, \\ \sin 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$$

Довести до правильного ответа такое решение практически никому не удалось, хотя это и возможно. Фактически исходное уравнение было возведено в квадрат, что привело к приобретению посторонних корней, но отнюдь не к потере истинных. Следовательно, для завершения решения достаточно было проверить все полученные значения $x = \frac{\pi}{2}n$, $x = (-1)^m\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}m$, $n, m \in \mathbb{Z}$, скажем, подстановкой в исходное уравнение, а это в данном случае не слишком приятная процедура.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{6} + \pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, мы столкнулись выше с формулами, применение которых для решения уравнений весьма нежелательно и если вообще возможно, то лишь с соблюдением крайних мер предосторожности. Другими примерами таких формул служат следующие равенства:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \quad \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1, \quad \operatorname{tg} x \cos x = \sin x$$

и т. п. Возможности для использования этих равенств существенно ограничены тем, что в них области определения левых и правых частей не совпадают. Поэтому соответствующие преобразования уравнений будут неаккуратными до тех пор, пока не будет изучен вопрос о сужении или расширении ОДЗ (см. преобразование правой части уравнения из задачи 5.В.3).

Довольно обширный класс формул составляют группы соотношений, общий вид которых нужно знать, а частные детали уметь выводить или восстанавливать по ходу дела. Например, полезно знать в принципе о существовании прямой зависимости между выражениями $\operatorname{tg}^2 x$ и $\cos^2 x$ (или $\sin^2 x$), а также между $\operatorname{ctg}^2 x$ и $\sin^2 x$ (или $\cos^2 x$). Однако заучивать формулы типа

$$1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1+\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

нет никакой необходимости, поскольку они представляют собой элементарные следствия основных тригонометрических тождеств и без особого труда устанавливаются в каждом конкретном случае: например,

$$\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x.$$

2. Фундаментальную роль в тригонометрии играют *формулы синуса и косинуса суммы или разности*:

$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y,$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$$

(в обеих частях любого равенства берутся одновременно либо верхние знаки, либо нижние). Знание этих общих тождеств нам представляется безусловно обязательным для каждого абитуриента, так как из них вытекает огромное количество частных соотношений, употребляемых в самых разных экзаменационных задачах. Конечно, равенства для разности аргументов, в свою очередь, легко выводятся из равенств для суммы с учетом нечетности синуса и четности косинуса, а значит, хорошенько запомнить-то достаточно только формулы синуса и косинуса суммы аргументов.

3. Особого разговора заслуживает *формула тангенса суммы или разности*

$$\operatorname{tg}(x\pm y)=\frac{\operatorname{tg}x\pm\operatorname{tg}y}{1\mp\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y},$$

которая в отличие от предыдущих формул уже не является абсолютным тождеством и таит в себе некую опасность. Дело в том, что при переходе от левой части этого равенства к правой происходит сужение области определения, а при обратном переходе — расширение. Действительно, для существования выражения $\operatorname{tg}(x\pm y)$ никак не требуется, чтобы существовали отдельно $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{tg}y$ (отрадно хотя бы то, что если знаменатель правой части отличен от нуля, то левая часть уже имеет смысл).

5.В.2. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

Если применить указанную выше формулу (разумеется, здесь вполне можно было бы, да и лучше бы обойтись без нее), то получится уравнение

$$\frac{\operatorname{tg}x-1}{1+\operatorname{tg}x}=1\Leftrightarrow\frac{-2}{1+\operatorname{tg}x}=0,$$

не имеющее решений. Потеря корней в данном случае происходит именно вследствие сужения ОДЗ, т. е. из-за отбрасывания значений $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$, при которых выражение $\operatorname{tg} x$ не определено, а исходное уравнение обращается в верное числовое равенство.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

4. *Формулы синуса и косинуса двойного аргумента*

$$\sin 2x=2\sin x\cos x,$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$

получаются просто как формулы синуса и косинуса суммы двух равных аргументов. Они используются настолько часто, что совсем не вредно знать их без запинки. Обратим внимание читателей на следующие весьма распространенные среди поступающих равенства: $\sin x=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$, $\cos x=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$, которые (ср. с аналогичными равенствами п. 1)) лучше не применять к уравнениям без исследования вопроса о том, какой из знаков — плюс или минус — в действительности имеет место при различных значениях x. Необходимо совершенно четко фиксировать только абсолютно верные варианты таких тождеств

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},$$

которые, кстати, носят название *формул понижения степени.*

5. На одну доску с формулами синуса и косинуса двойного аргумента не следует ставить *формулу тангенса двойного аргумента*

$$\operatorname{tg} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}.$$

В ней, как и в формуле тангенса суммы или разности, левая и правая части имеют разные области определения: правая часть, в отличие от левой, не имеет смысла при $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. Игнорирование этого обстоятельства при решении уравнения приводит к сужению или расширению его ОДЗ и по этой причине, возможно, к неверному ответу.

Аналогично обстоит дело и с двумя другими формулами так называемой *универсальной подстановки*

$$\sin 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x},\quad \cos 2x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

5.В.3 (геол. ф-т — 78). Решить уравнение

$$\operatorname{tg} 2x+\sin 2x=\frac{8}{3}\operatorname{ctg} x.$$

Многие абитуриенты, не задумываясь, применили формулы универсальной подстановки и получили уравнение

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}+\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{8}{3\operatorname{tg} x}.$$

Затем некоторые привели все к общему знаменателю и попросту отбросили его без какого-либо обоснования:

$$2\operatorname{tg}^4 x+3\operatorname{tg}^2 x-2=0 \Leftrightarrow (\operatorname{tg}^2 x+2)\left(\operatorname{tg}^2 x-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x=\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Но дело даже не в отсутствии обоснования (полученные значения в конце концов можно было проверить, подставив в исходное уравнение или убедившись в справедливости неравенств $\operatorname{tg}^2 x\neq 1$, $\operatorname{tg} x\neq 0$), а в том, что при таком решении оказались потерянными все корни вида $\frac{\pi}{2}+\pi m$, $m\in\mathbf{Z}$. Это произошло именно из-за неправомерности первоначальной замены выражений $\sin 2x$, $\operatorname{tg} 2x$, а также $\operatorname{ctg} x$ соответствующими выражениями, содержащими $\operatorname{tg} x$ и, стало быть, сужающими ОДЗ уравнения. В данном случае можно было обойтись стандартными и совершенно безопасными преобразованиями.

Решение. $\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+\sin 2x=\frac{8\cos x}{3\sin x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{6\sin^2 x\cos x\,(1+\cos 2x)-8\cos x\cos 2x}{\cos 2x\sin x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x\,(3\,(1-\cos^2 2x)-8\cos 2x)}{\cos 2x\sin x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x\left(\cos 2x-\frac{1}{3}\right)(\cos 2x+3)}{\cos 2x\sin x}=0.$$

Уравнение равносильно совокупности систем:

а) $\begin{cases}\cos x=0,\\ \cos 2x\neq 0,\\ \sin x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in\mathbf{Z},$

ибо если $\cos x=0$, то $\cos 2x=2\cos^2 x-1=-1$ и $\sin^2 x=1-\cos^2 x=1$;

б) $\begin{cases}\cos 2x=\frac{1}{3},\\ \cos 2x\neq 0,\\ \sin x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow 2x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi m,\quad m\in\mathbf{Z},$

ибо если $\cos 2x=\frac{1}{3}$, то $\cos 2x\neq 0$ и $2\sin^2 x=1-\cos 2x=\frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+\pi m,\ n,\ m\in\mathbf{Z}$.

Аккуратное применение универсальной подстановки в ряде случаев бывает весьма уместным. Поэтому полезно научиться безошибочно решать уравнения с ее помощью, рассматривая два случая в зависимости от того, имеет или не имеет смысл выражение $\operatorname{tg} x$. Например, в задаче 5.В.1 можно выделить два случая:

1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \text{ не имеет смысла}, \\ \cos 2x=\sqrt{3}\sin 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in\mathbf{Z}, \\ \cos(\pi+2\pi n)=\sqrt{3}\sin(\pi+2\pi n)-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z};$$

2) $\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{2\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}-1 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg} x-\sqrt{3}/3}{1+\operatorname{tg}^2 x}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x=\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\pi m,\ m\in\mathbf{Z}.$$

Остальные формулы тригонометрии разобраны в следующем параграфе.

Задачи

5.В.4. Выяснить, какой знак (плюс или минус) нужно взять в следующей формуле перед квадратным корнем в зависимости от значения x:

а) $\sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$;

б) $\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$;

в) $\sin x=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$;

г) $\cos x=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$;

д) $\operatorname{tg} x=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}$;

е) $\operatorname{ctg} x=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1-\sin 2x}}$.

5.В.5. Найти все значения x, при которых левая часть тождества имеет смысл, а правая — нет:

а) $\operatorname{tg} x = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$;

б) $\operatorname{tg} x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$;

в) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$;

г) $\operatorname{ctg} x = \frac{1 + \cos 2x}{\sin 2x}$;

д) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$;

е) $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$;

ж) $\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$;

з) $\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

5.В.6. Решить уравнение:

а) (экономфак — 81) $3 \sin^2 x - \cos^2 x - 1 = 0$;

б) (психфак — 77) $2 \operatorname{tg}^2 x - 4 \cos^2 x = 7$;

в) (физфак — 84) $\operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{2 - \sin x} = 0$;

г) (биофак — 78) $\sin^2 2x - \cos^2 x + \frac{3}{4} = 0$;

д) (ф-т почв. — 84) $2 \sin^2 x = 1 + \sqrt{3} + \cos 2x$;

е) (геогр. ф-т — 85) $3 \cos x - \cos 2x = 1$;

ж) (экономфак — 84) $3 - 12 \sin^2 x - 2 \cos 4x = -\frac{5}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$;

з) (геол. ф-т — 78) $\cos 2x = 2 \operatorname{tg}^2 x - \cos^2 x$;

и) $\frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x} = 1$.

Ответы

5.В.4. Знак плюс нужно взять, если точка x на тригонометрической окружности лежит: а), в) в I или II четверти; б), г) в I или IV четверти; д), е) в I или III четверти; в противном случае нужно взять минус. **5.В.5.** а), в) $\varnothing$; б), д) πn, $n \in \mathbf{Z}$; г), е)—з) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **5.В.6.** а) $\pi/4 + \frac{\pi}{2} n$, $n \in \mathbf{Z}$; б) $\pm \pi/3 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; в) $(-1)^n \times$

$\times \arcsin \frac{1-\sqrt{3}}{2}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; г) $\pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{21}-1}{4}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; д) $\pm 5\pi/12+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; е) $\pi/2+\pi/n,\ n \in \mathbf{Z}$; ж) $\pm \frac{1}{2} \arccos \frac{17-\sqrt{385}}{16}+$ $+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; з) $\pm \frac{1}{2} \arccos 1/3+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; и) $\varnothing$.

§ 5.Г. ФОРМУЛЫ, КОТОРЫЕ НЕОБЯЗАТЕЛЬНО ЗАПОМИНАТЬ

Формулы предыдущего параграфа составляют как бы фундамент, на котором можно выстроить огромный массив новых, не менее важных формул (в этом фундаменте, в свою очередь, можно выделить еще более узкий набор и вывести из него все остальное). В настоящем параграфе разберем ряд тождеств, отличающихся тем, что их можно не выводить, а восстанавливать, помня лишь внешнюю их структуру.

1. *Формулы приведения* призваны представлять любую тригонометрическую функцию аргумента $\frac{\pi}{2} n \pm x \, (n \in \mathbf{Z})$ в виде той или иной тригонометрической функции аргумента x. Это можно делать по следующему правилу: а) если число n четно, то исходная функция не меняется, а если нечетно, то она после приведения меняется на кофункцию (т. е. синус меняется на косинус, косинус на синус и т. д.); б) перед полученным в итоге выражением ставится плюс или минус в зависимости от знака преобразуемого выражения для «острого угла» x (при этом бывает чрезвычайно удобен тригонометрический круг, на котором хорошо видно, какой знак имеет данная тригонометрическая функция в соответствующей четверти).

Таким образом получаются, например, следующие формулы приведения:

$$\sin(\pi+x) = -\sin x, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = \operatorname{ctg} x.$$

Заметим, что первое из этих тождеств является непосредственным следствием формулы синуса суммы

$$\sin(\pi+x) = \sin \pi \cos x + \cos \pi \sin x = 0 \cdot \cos x - 1 \cdot \sin x = -\sin x.$$

Однако второе тождество получить естественным образом из формулы тангенса разности уже не представляется возможным, поскольку выражение $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{2}$ не определено. Для аккуратного доказательства этого тождества достаточно применить соответствующие формулы отдельно к числителю и знаменателю дроби

$$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)} = \frac{-\cos x}{-\sin x}.$$

В некоторых случаях (см. § 5.Д) требуется привести заданную тригонометрическую функцию непременно к кофункции, возможно, другого аргумента. Для этого могут оказаться полезными *формулы дополнительного угла*, основанные на следующем свойстве: если $x+y=\frac{\pi}{2}$, то

$$\sin x=\cos y, \ \operatorname{tg} x=\operatorname{ctg} y$$

(«углы» x и y в данном случае взаимно дополняют друг друга до «прямого угла» $\pi/2$).

2. Для расщепления (см. § 5.Д) тригонометрических уравнений и неравенств нередко используются *формулы суммы и разности синусов или косинусов*:

$$\sin x \pm \sin y=2\sin\frac{x\pm y}{2}\cos\frac{x\mp y}{2},$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

(в обеих частях первого тождества берутся либо верхние, либо нижние знаки). Довольно легко запоминается, что в правых частях каждой из этих формул стоит коэффициент 2 и фигурируют полусумма и полуразность аргументов левых частей. Но вот что касается самих функций от этих выражений (и возможного знака минус перед ними), то здесь у поступающих регулярно возникают трудности. А между тем уточнить плохо запомнившиеся правые части формул совсем не сложно, если в предполагаемых тождествах сделать подстановку $y=x$ или $y=-x$, а то и просто $y=0$ или $x=0$.

Пусть, например, мы хотим восстановить формулу для суммы синусов, которая имеет следующий вид:

$$\sin x+\sin y=\pm 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)g\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

где каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ представляет собой либо синус, либо косинус, а перед произведением в правой части стоит либо плюс, либо минус. Основная идея состоит в том, что восстанавливаемое тождество должно быть верным для любых частных значений x и y. Положим $y=x$ в этой пока не определенной формуле. Получим равенство

$$2\sin x=\pm 2f(x)g(0),$$

которое также должно быть тождеством. Отсюда можно заключить, что функция $g(x)$ есть непременно $\cos x$ (иначе $g(0)=$ $=\sin 0=0$ и было бы справедливым заведомо неверное тождество $2\sin x=0$). Далее, заключаем $f(x)=\sin x$ (если $f(x)=\cos x$, то получилось бы также неверное тождество $2\sin x = 2\cos x$), а знак плюс-минус представляет собой просто плюс (иначе мы имели бы неверное тождество $2\sin x = -2\sin x$). Таким образом, все неопределенности устранены и формула окончательно восстановлена.

Разумеется, описанную процедуру реставрации не нужно помещать в чистовике решения — ведь формула должна быть просто известной абитуриенту. Более того, такая процедура не может служить доказательством, ибо она опирается на недоказываемый в данном рассуждении факт, что правая часть тождества имеет указанный вид. Однако любой абитуриент, освоивший описанный прием, испытает несомненное удовольствие, так как ему не нужно будет впредь засорять свою память излишне детализованной информацией.

5.Г.1. Найти подстановку, восстанавливающую формулу:

а) $\sin x - \sin y = \pm 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) g\left(\frac{x-y}{2}\right)$;

б) $\cos x + \cos y = \pm 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) g\left(\frac{x-y}{2}\right)$;

в) $\cos x - \cos y = \pm 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) g\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

Ответ: а) $y = -x$; б), в) $y = 0$.

Если, скажем, в случае в) из тождества

$$\cos x - 1 = -2\sin^2 \frac{x}{2} = \pm 2f\left(\frac{x}{2}\right) g\left(\frac{x}{2}\right)$$

(полученного в результате применения указанной в ответе подстановки) пока не очень ясно, что $f(x) = g(x) = \sin x$ и впереди стоит минус, то можно для подстраховки сделать еще какие-либо подстановки из числа названных выше. Обычно для устранения сомнений бывает достаточно одной-двух ключевых подстановок.

3. Некоторые упрощения тригонометрических выражений возможны с помощью *преобразований произведения тригонометрических* функций по формулам:

$$2\sin x\cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y);$$

$$2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y);$$

$$2\sin x\sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y).$$

Для практических нужд вполне достаточно помнить лишь структуру этих формул, а недостающие детали можно восстановить при помощи тех же подстановок, что перечислены в п. 2.

Например, для восстановления формулы

$$2\sin x\cos y = \pm f(x+y) \pm g(x-y)$$

достаточно положить $y=0$. Тогда получится тождество

$$2\sin x=\pm f(x)\pm g(x),$$

из которого должно быть ясно, что $f(x)=g(x)=\sin x$ и оба знака — плюсы.

5.Г.2. Найти подстановку, восстанавливающую формулу:

а) $2\cos x\cos y=\pm f(x+y)\pm g(x-y)$;

б) $2\sin x\sin y=\pm f(x+y)\pm g(x-y)$.

Ответ: а), б) $y=x$.

4. Описанный прием не может заслонить самого надежного способа восстановления формулы, а именно ее фактического вывода. Тем более не хотелось бы, чтобы этот прием использовался для различных «спекуляций», основанных на следующей идее: «если формула верна для некоторых частных значений аргументов, то она верна и вообще». Например, в качестве лжеобоснования неверной формулы

$$2\sin x\sin y=\cos(x+y)-\cos(x-y)$$

можно предложить подстановку $y=0$, обращающую формулу в верное равенство, но конечно же не доказывающую саму формулу.

Перечисленных в настоящем и предыдущем параграфах формул тригонометрии в основном хватает для решения тригонометрических уравнений и неравенств на экзаменах. Однако в некоторых задачах возникает необходимость применить какие-либо *дополнительные формулы*. Запоминать их специально для таких задач не нужно, но знать об их существовании и уметь выводить их в экзаменационной обстановке, разумеется, полезно. Сюда относятся формулы синуса или косинуса тройного аргумента, суммы и разности тангенсов или котангенсов и т. п. Для успешного вывода подобных формул требуется лишь четкое и неформальное знание основных формул, например:

$$\sin 3x=\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x=\sin x(2\cos^2 x-1)+$$
$$+2\cos^2 x\sin x=\sin x(4\cos^2 x-1)=\sin x(3-4\sin^2 x),$$

$$\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{\sin x\cos y-\cos x\sin y}{\cos x\cos y}=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}.$$

Опыт вступительных экзаменов показывает, что абитуриенты не всегда уверенно владеют такими приемами и в мало-мальски необычной ситуации начинают изобретать новые формулы, доселе неизвестные и, как правило, не существующие в природе. Так, иногда встречаются ошибочные преобразования вида

$$\sin 3x=3\sin x\cos x,$$
$$\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y=\operatorname{tg}(x-y),$$
$$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=1.$$

В связи с этим подчеркнем, что при выводе новых формул следует пользоваться никак не внешней их аналогией с известными, но только верными преобразованиями. Используемые для вывода основные формулы в целях самоконтроля лучше выписывать в черновике в общем виде, убеждаясь каждый раз в их истинности, а если возникает сомнение, то проверяя их на частных значениях аргументов.

Задачи

5.Г.3. Найти подстановки, восстанавливающие формулы:

а) $2\sin^2 x = \pm 1 \pm \cos 2x$;

б) $2\cos^2 x = \pm 1 \pm \cos 2x$;

в) $\cos(x+y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y$;

г) $\sin 2x = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\, x}{1 \pm \mathrm{tg}^2 x}$;

д) $\cos 2x = \dfrac{1 \pm \mathrm{tg}^2 x}{1 \pm \mathrm{tg}^2 x}$.

5.Г.4. Решить уравнение:

а) (ф-т почв. — 80) $2 - \cos 2x + 2\sqrt{2}\cos(x + \pi/2) = 0$;

б) (химфак — 81) $\sin^2 x/2 + \dfrac{1}{2}\cos 2x + 2 = 4\sin\left(x - \dfrac{7\pi}{2}\right)$;

в) (физфак — 81) $\dfrac{1 - \cos x}{\cos\dfrac{\pi + x}{2}} = 2$;

г) (ф-т почв. — 84) $4\cos^2(x + \pi/4) = 2 - \sqrt{2} - 4\sin 2x$;

д) (экономфак — 84) $\cos(\pi/4 - x) + \sin(3\pi/4 + x) = \sqrt{2}$;

е) (геогр. ф-т — 79) $\sin(x - \pi/6) - \sin(x + 2\pi/3) = \cos(x + \pi/4)$;

ж) (геогр. ф-т — 78) $\cos x - 2\cos 3x + \cos 5x = 0$;

з) (физфак — 83) $\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$;

и) (химфак — 85) $4(\sin 4x - \sin 2x) = \sin x(4\cos^2 3x + 3)$;

к) (биофак — 80) $\sin 5x - 1 = 2\sin x \cos 4x$;

л) (биофак — 83) $2\cos x \cos 2x - (1 - 2\sqrt{2})\sin 2x = 2(1 - \sqrt{2})\cos x$;

м) (филол. ф-т — 84) $\cos\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2} + \cos x = 0{,}5$.

5.Г.5. Найти все пары чисел a, b, для которых при любом значении x выполняется равенство:

а) $\sin(ax+b)=a\sin x+b$;

б) (психфак — 78) $a(\cos x-1)+b^2=\cos(ax+b^2)-1$.

Ответы

5.Г.3. а) $x=\pi/2$; б) $x=0$; в) $x=y=\pi/2$; г, д) $x=\pi/6$.

5.Г.4. а) $(-1)^n\pi/4+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; б) $\pm\pi/3+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; в) $3\pi+4\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; г) $(-1)^{n+1}\pi/8+\frac{\pi}{2}n$, $n\in\mathbf{Z}$; д) $2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; е) $\pi/4+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; ж) $\pi/6+\frac{\pi}{3}n$, πm, $n, m\in\mathbf{Z}$; з) $\frac{\pi}{4}n$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi m$, $n, m\in\mathbf{Z}$; и) πn, $\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}m$, $n, m\in\mathbf{Z}$; к) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}n$, $n\in\mathbf{Z}$; л) $\pi/2+\pi n$, $(-1)^{m+1}\pi/6+\pi m$, $n, m\in\mathbf{Z}$; м) $\pm\pi/3+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

5.Г.5. а) $(-1;\ 1)$, $(0;\ 1)$, $(1;\ 1)$; б) $(0;\ 0)$, $(1;\ 0)$.

§ 5.Д. РАСЩЕПЛЕНИЕ И СВЕРТЫВАНИЕ

Расщепление в тригонометрии (впрочем, и не только в тригонометрии; см. § 2.Г, 3.Б, 4.В) — основной прием сведения уравнений и неравенств к простейшим. Однако в тригонометрических задачах имеется определенная специфика, связанная с тем, что в большинстве задач расщепление можно производить не одним, а несколькими способами, использующими те или иные формулы тригонометрии. Недооценка поступающими этого момента нередко приводит к тому, что они бросаются решать задачу первым же приходящим на ум методом вместо того, чтобы сначала оглядеться и подумать: нет ли в данной задаче другого, более удобного пути решения.

К одному из самых распространенных типов тригонометрических уравнений следует, пожалуй, отнести уравнения, допускающие *переход к одной функции одного и того же аргумента*. Такие уравнения обычно легко расщепляются после соответствующей замены переменной.

5.Д.1 (геол. ф-т — 78). Решить уравнение

$$-5\cos 4x=2\cos^2 x+1.$$

На экзамене часть абитуриентов, дважды применив формулу косинуса двойного угла, перешла в левой части уравнения сначала к аргументу $2x$, потом к x и получила уравнение четвертой степени (биквадратное) относительно $\cos x$:

$$20\cos^4 x-19\cos^2 x+13=0.$$

Наверное, нет необходимости доказывать, что проще было бы перейти в обеих частях исходного уравнения к аргументу $2x$, в результате чего уравнение стало бы квадратным относительно $\cos 2x$. Подчеркнем, что совсем не обязательно стремиться к тому, чтобы все функции, встречающиеся в уравнении, зависели непременно от x (а не от $2x$, или от $\frac{x}{2}$, или от какого-то другого аргумента). Это стремление, свойственное абитуриентам, привело их в данном случае к более сложному уравнению. Общая тенденция, проявляющаяся в тригонометрических преобразованиях, такова: при измельчении аргумента степень выражения увеличивается, а при укрупнении — уменьшается.

Решение. $-5(2\cos^2 2x-1)=(1+\cos 2x)+1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 10\cos^2 2x+\cos 2x-3=0 \Leftrightarrow \left(\cos 2x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos 2x+\frac{3}{5}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}; \\ 2x=\pm\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)+2\pi m,\ m\in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)+\pi m,\ n,\ m\in \mathbf{Z}$.

Отметим, что в последней серии корней некоторые абитуриенты преобразовали выражение $\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$ к виду $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}$ (были и другие, не более верные варианты: $\mp\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}$, $\pm\arccos\frac{3}{10}$ и т. п.; см. также задачу 5.Б.1), допустив тем самым стандартную ошибку.

Расщепление далеко не всегда производится столь гладко, как в предыдущей задаче: свести все выражения к одной функции одного аргумента иногда не удается. Абитуриенты, не привыкшие к такой ситуации, теряются в экзаменационной обстановке и производят искусственные и порой неверные преобразования, например, деля уравнение на общий для обеих его частей множитель (см. § 2.Е). Так, в следующей задаче многим на экзамене чем-то очень помешал множитель $\sin x$, механическое отбрасывание которого повлекло за собой потерю серии корней πn, $n\in\mathbf{Z}$.

5.Д.2 (психфак — 84). Решить уравнение

$$2(\cos x-1)\sin 2x=3\sin x.$$

Решение: $2(\cos x-1)\cdot 2\sin x\cos x=3\sin x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin x(4\cos^2 x-4\cos x-3)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)\left(\cos x-\frac{3}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0, \\ \cos x=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi n,\ n\in \mathbf{Z}; \\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi m,\ m\in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\pi n,\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi m,\ n,\ m\in \mathbf{Z}$.

Сильное замешательство среди абитуриентов вызывают уравнения, в которых тригонометрические функции взяты в необычно высоких степенях. Психологически неподготовленные к такой ситуации абитуриенты начинают путаться в хорошо известных им формулах или изобретать новые, в большинстве случаев неверные. А между тем, помимо хорошо известных способов понижения степени (см. § 5.В п. 4), в некоторых случаях удается сильно упростить выражения прямо с помощью основного тригонометрического тождества $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

5.Д.3 (геогр. ф-т — 80). Решить уравнение

$$\sin^8 x-\cos^8 x=\frac{1}{2}\cos^2 2x-\frac{1}{2}\cos 2x.$$

Решение. $(\sin^4 x-\cos^4 x)(\sin^4 x+\cos^4 x)=\frac{1}{2}\cos^2 2x-\frac{1}{2}\cos 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)((\sin^2 x+\cos^2 x)^2-$

$-2\sin^2 x\cos^2 x)=\frac{1}{2}\cos^2 2x-\frac{1}{2}\cos 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\cos 2x\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)=\frac{1}{2}\cos^2 2x-\frac{1}{2}\cos 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos 2x\,(2-\sin^2 2x+\cos 2x-1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2 2x\,(\cos 2x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=0, \\ \cos 2x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}; \\ 2x=\pi+2\pi m,\ m\in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n,\ \frac{\pi}{2}+\pi m,\ n,\ m\in \mathbf{Z}$.

Важный класс тригонометрических уравнений составляют так называемые *однородные уравнения различных степеней относительно выражений* $\sin x$ *и* $\cos x$:

$a\sin x+b\cos x=0$ (первой степени),

$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$ (второй степени; см. обсуждение задачи 2.И.4),

$a\sin^3 x+b\sin^2 x\cos x+c\sin x\cos^2 x+d\cos^3 x=0$ (третьей степени) и т. д. Уравнения такого вида решаются фактически с помощью перехода к новой переменной $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$. Однако, о чем нередко забывают абитуриенты, введение функции $\operatorname{tg} x$ сужает ОДЗ уравнения, поэтому перед делением на выражение $\cos x$ в соответствующей степени необходимо отдельно рассмотреть случай $\cos x=0$ (см., например, задачу 2.Ж.1). Так, механическое деление на $\cos^2 x$ уравнения из задачи 5.В.1 приводит к потере корней первого из разбираемых ниже случаев:

$$\cos 2x=\sqrt{3}\sin 2x-1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x-1=2\sqrt{3}\sin x\cos x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x(\cos x-\sqrt{3}\sin x)=0.$$

Рассмотрим два случая:

1) $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$;

2) $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \cos x=\sqrt{3}\sin x\end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x=\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\pi m,\ m\in \mathbf{Z}.$

Не имея возможности описать все разнообразие уравнений, сводящихся к однородным, ограничимся здесь лишь замечанием о том, что уравнение вида

$$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=d$$

также приводится к однородному с помощью следующего преобразования его правой части: $d=d\sin^2 x+d\cos^2 x$.

5.Д.4 (геол. ф-т — 85). Решить уравнение

$$5\sin^2 x-4\sin x\cos x-\cos^2 x=4.$$

Решение. $5\sin^2 x-4\sin x\cos x-\cos^2 x=4\sin^2 x+4\cos^2 x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x-4\sin x\cos x-5\cos^2 x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(\sin x-5\cos x)=0.$$

Рассмотрим три случая:

1) $\begin{cases}\cos x=0,\\ \sin^2 x=0.\end{cases}$

Решений нет, ибо если $\cos x=0$, то $\sin^2 x=1-\cos^2 x=1$.

2) $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \sin x+\cos x=0\end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$

3) $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \sin x-5\cos x=0\end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x=5 \Leftrightarrow x=\operatorname{arctg} 5+\pi m,\ m\in \mathbf{Z}.$

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg} 5+\pi m,\ n, m\in \mathbf{Z}.$

Обыкновенным расщеплением решается уравнение вида

$$\sin F(x) = \sin G(x)$$

для произвольных выражений $F(x)$ и $G(x)$. Об этом часто забывают поступающие, изощряясь в изобретении различных критериев равенства синусов или косинусов (см. § 5.А). А между тем для расщепления такого уравнения достаточно воспользоваться формулой разности синусов:

$$2\sin\frac{F(x)-G(x)}{2}\cos\frac{F(x)+G(x)}{2} = 0.$$

Аналогично с помощью формулы разности косинусов расщепляется уравнение вида

$$\cos F(x) = \cos G(x)$$

и даже вида

$$\sin F(x) = \cos G(x)$$

(после предварительного преобразования левой части по формуле дополнительного угла

$$\sin F(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - F(x)\right);$$

см. § 5.Г, п. 1).

5.Д.5 (филол. ф-т — 80). Решить уравнение

$$\sin x = \cos 2x.$$

Это уравнение, конечно, можно решить переходом к функции $\sin x$ в правой части: $\sin x = 1 - 2\sin^2 x$. Мы же намеренно пойдем несколько необычным путем, который, как отмечалось выше, приводит к цели и в более общей ситуации.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos 2x \Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}; \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} m, \ m \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Пожалуй, можно уже выписывать ответ, однако полезно заметить, что первая серия решений полностью содержится во второй и потому может быть отброшена. Нужно ли при ее отбрасывании что-либо обосновывать в тексте решения? Да, нужно. И делается это логически не так уж просто: для каждого значения $n \in \mathbf{Z}$ следует указать то значение $m \in \mathbf{Z}$, при котором корень $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} m$

второй серии совпадает с корнем $\frac{-\pi}{2}+2\pi n$ первой серии. Искомое значение m определяется из равенства

$$\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}m=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,$$

откуда $m=-1+3n$, а мы, таким образом, получаем окончательный ответ: $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}m,\ m\in\mathbf{Z}$.

В тригонометрии идея расщепления постоянно граничит с противоположной по смыслу идеей *свертывания*, которая проявляется прежде всего в следующем: *при расщеплении уравнения на более мелкие элементарные составляющие имеет смысл попытаться укрупнить эти составляющие, уменьшив их количество.* Важно, чтобы получающиеся более крупные составляющие были также элементарными, а это возможно именно благодаря использованию богатого арсенала тригонометрических формул.

Так, при решении задачи 5.Д.1 мы замечали, что удобнее свернуть биквадратное уравнение относительно $\cos x$ в квадратное относительно $\cos 2x$. Любопытный трюк был использован в решении задачи 2.Е.3: исходное уравнение, преобразованное к виду

$$\sin 2x\cos x\cos 2x\sin x=0,$$

удалось свернуть в уравнение $\sin 4x=0$. В результате появилась возможность безболезненно, не прибегая к выписыванию явных выражений для соответствующих серий корней, объединить их в одной формуле и устранить дублирование некоторых значений в окончательном ответе.

Тот же трюк позволяет в задаче 5.Д.5 отбросить первую из полученных выше серий корней следующим образом (см. формулы приведения и синуса тройного аргумента в § 5.В):

$$\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}+\pi\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\left(4\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin\left(3\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=0.$$

Благодаря свертыванию удается резко упрощать тригонометрические суммы или произведения специального вида. Например, при решении задачи 2.И.5 уравнение

$$8\cos t\cos 2t\cos 4t=1$$

было домножено на $\sin t$ и свернуто в уравнение

$$\sin 8t=\sin t.$$

Другой пример подобного свертывания демонстрируется в § 5.Е, где объясняется, как с помощью метода введения вспомогательного угла можно свернуть любую линейную комбинацию синуса и косинуса одного и того же аргумента.

Говоря о расщеплении тригонометрических уравнений, нельзя не упомянуть о важных случаях своеобразного расщепления уравнения не в совокупность, как обычно, а в систему уравнений. Как правило, такое расщепление связано со свойством ограниченности некоторых тригонометрических функций (см. § 8.Б).

Задачи

5.Д.6. Решить уравнения:

а) (геол. ф-т — 78) $\cos 4x=\sin^2 x-3/4$;

б) (физфак — 85) $2\cos^2 \dfrac{x}{2}-1=\cos 2x$;

в) (психфак — 84) $\sqrt{3}(\cos 2x+1)=2\cos x(2-\cos 2x)$;

г) (ВМК — 85) $4-\cos(2\pi(13x+9)^2)=5\sin(\pi(13x+9)^2)$;

д) (биофак — 81) $\sin(3x-5\pi/2)=\sin(6x-3\pi)$;

е) (филол. ф-т — 81) $\sin(2x-7\pi/2)+\sin(3\pi/2-8x)+\cos 6x=1$;

ж) (филол. ф-т — 79) $\sin x+\sin 3x+4\cos^3 x=0$;

з) (геол. ф-т — 85) $4\sin^2 x+4\sin x\cos x+6\cos^2 x=3$;

и) (ф-т почв. — 79) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\sin 2x=(\sqrt{3}-1)\cos^2 x+1$;

к) (химфак — 78) $9\cos^4 x-\sin^4 x=2\sin^2 2x$;

л) (геогр. ф-т — 80) $\cos^6 x+\sin^6 x=\dfrac{15}{8}\cos 2x-\dfrac{1}{2}$;

м) (ВМК — 84) $6\cos 5x\cos 7x+\dfrac{1}{3}=\cos 2x(8\cos 4x-1)+2\cos 6x$;

н) (геол. ф-т — 77) $\sin^2(2+3x)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+2x\right)=$

$=\cos^2(2-5x)+\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-6x\right)$.

5.Д.7 (мехмат — 78). Найти все решения уравнения

$$4^{\cos 2x}+4^{\cos^2 x}=3,$$

принадлежащие отрезку [3/4; 1].

5.Д.8 (экономфак — 80). Указать все целые значения k, при которых уравнение

$$5-4\sin^2 x-8\cos^2\frac{x}{2}=3k$$

имеет решения. Найти все эти решения.

Ответы

5.Д.6. а) $\pm\pi/6+\pi n$, $\pm\arccos(-3/4)+\pi m$, n, $m\in\mathbf{Z}$; б) $\frac{2\pi}{3}n$, $n\in\mathbf{Z}$; в) $\pi/2+\pi n$, $\pm\pi/6+2\pi m$, n, $m\in\mathbf{Z}$; г) $-\frac{9\pm\sqrt{1/2+2n}}{13}$, $n=0, 1, 2, \ldots$; д) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n$, $(-1)^m\pi/18+\frac{\pi}{3}m$, $n, m\in\mathbf{Z}$; е) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $\frac{\pi m}{3}$, $n, m\in\mathbf{Z}$; ж) $\pi/2+\pi n$, $-\pi/4+\pi m$, n, $m\in\mathbf{Z}$; з) $-\mathrm{arctg}\,3+\pi n$, $-\pi/4+\pi m$, n, $m\in\mathbf{Z}$; и) $\pi/4+\pi n$, $\pi/3+\pi m$, n, $m\in\mathbf{Z}$; к) $\pm\pi/4+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; л) $\pm\pi/6+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; м) $\pm\frac{1}{6}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{\pi}{3}n$, $n\in\mathbf{Z}$; н) $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{8}n$, $\frac{\pi}{4}-2+\pi m$, $\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}+\frac{\pi}{3}k$, n, m, $k\in\mathbf{Z}$. **5.Д.7.** $\pi/4$. **5.Д.8.** $\pi/2+\pi n$, $2\pi m$, n, $m\in\mathbf{Z}$, при $k=-1$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, при $k=0$; $\pm\arccos\frac{1-\sqrt{7}}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, при $k=1$.

§ 5.Е. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ УГОЛ

Начнем с того, что решим задачу 5.В.1 наиболее изящным, на наш взгляд, способом:

$$\cos 2x=\sqrt{3}\sin 2x-1\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos 2x\cos\frac{\pi}{3}-\sin 2x\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{3}=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

В основе предложенного решения лежит метод введения вспомогательного угла, равного в данном случае $\pi/3$ (см. § 1.Д). Как показывает опыт вступительных экзаменов, этот метод вызывает затруднения у многих абитуриентов. Он весьма эффективен и заслуживает особого внимания, тем более что техническая его реализация не всегда бывает проста.

Главная идея заключается в попытке *свернуть заданную линейную комбинацию синуса и косинуса одного и того же аргумента* с помощью формулы синуса или косинуса суммы (разности) этого аргумента с так называемым *вспомогательным углом*. Делается это сравнительно несложно для выражения вида

$$F(x)=a\sin x+b\cos x$$

в том случае, если сумма квадратов коэффициентов a и b равна 1. Тогда достаточно подобрать угол φ, удовлетворяющий либо системе

$$\begin{cases}\cos\varphi=a,\\ \sin\varphi=b,\end{cases}$$

либо системе

$$\begin{cases}\sin\varphi=a,\\ \cos\varphi=b.\end{cases}$$

Для первой системы годится, например, значение $\varphi=\arccos a$ (если $b>0$) или $\varphi=-\arccos a$ (если $b<0$), при котором получаем

$$F(x)=\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi=\sin(x+\varphi).$$

Аналогично второй системе удовлетворяет значение φ, равное $\pm\arccos b$ (в соответствии со знаком коэффициента a), при котором

$$F(x)=\cos x\cos\varphi+\sin x\sin\varphi=\cos(x-\varphi).$$

Иногда бывает удобно в качестве вспомогательного угла φ взять $\arcsin a$, $\arcsin b$, $\operatorname{arctg}\frac{a}{b}$, $\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ и т. д. Однако всегда необходимо внимательно следить за знаками получающихся чисел $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, которые могут не совпасть со знаками соответствующих коэффициентов a или b.

5.Е.1 (химфак — 79). Решить уравнение

$$\sin 2x=1+\sqrt{2}\cos x+\cos 2x.$$

Решение. $2\sin x\cos x=\sqrt{2}\cos x+2\cos^2 x\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\cos x(2\sin x-2\cos x-\sqrt{2})=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos x\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}; \\ x-\frac{\pi}{4}=(-1)^m\frac{\pi}{6}+\pi m,\ m\in\mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{4}+(-1)^m\frac{\pi}{6}+\pi m,\ n,\ m\in\mathbf{Z}$.

В процессе решения этой задачи возникла необходимость свернуть выражение $2\sin x-2\cos x$, в котором сумма квадратов коэффициентов $a=2$ и $b=2$ не равна 1. Это делается стандартным приемом — делением сворачиваемого выражения на число $A=\sqrt{a^2+b^2}$, после чего сумма квадратов новых коэффициентов $\frac{a}{A}$ и $\frac{b}{A}$, как показывает проверка, уже становится равной 1.

В некоторых случаях коэффициенты линейной комбинации синуса и косинуса выглядят несколько отпугивающе, но и тогда описанный в настоящем параграфе метод может сослужить полезную службу.

5.Е.2 (филол. ф-т — 85). Для каждого значения b решить уравнение

$$3\cos x\sin b-\sin x\cos b-4\cos b=3\sqrt{3}.$$

Решение. Обозначим $f(b)=(3\sin b)^2+(\cos b)^2=9\sin^2 b+\cos^2 b=9-8\cos^2 b>0$, тогда исходное уравнение приводится к виду

$$\sqrt{f(b)}\left(\frac{3\sin b}{\sqrt{f(b)}}\cos x-\frac{\cos b}{\sqrt{f(b)}}\sin x\right)=3\sqrt{3}+4\cos b.$$

Левая часть этого уравнения согласно идее введения вспомогательного угла не превосходит величины $\sqrt{f(b)}=\sqrt{9-8\cos^2 b}$, а правая не меньше той же величины, так как она положительна и

$$(3\sqrt{3}+4\cos b)^2-(9-8\cos^2 b)=6(\sqrt{3}+2\cos b)^2\geqslant 0,$$

причем равенство возможно лишь в случае $\cos b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. В этом случае имеем уравнение

$$\sqrt{3}\sin b\cos x+\frac{1}{2}\sin x=1\Leftrightarrow\cos(x-\arccos(\sqrt{3}\sin b))=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\arccos(\sqrt{3}\sin b)+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Так как $|\sin b|=\sqrt{1-\cos^2 b}=\frac{1}{2}$, то

$$\arccos(\sqrt{3}\sin b)=\left|\begin{array}{l} \frac{\pi}{6},\ \text{если } \sin b=\frac{1}{2}; \\ \frac{5\pi}{6},\ \text{если } \sin b=-\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

$$\text{Ответ:}\quad \begin{array}{l} \dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z},\ \text{при } b=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbf{Z}; \\ \dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z},\ \text{при } b=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbf{Z}; \end{array}$$

при остальных значениях b решений нет.

Задачи

5.Е.3. С помощью тригонометрического круга доказать, что система

$$\begin{cases} \sin x=a, \\ \cos x=b \end{cases}$$

имеет решение тогда и только тогда, когда $a^2+b^2=1$.

5.Е.4. Решить уравнение:

а) (экономфак — 84) $\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=\sqrt{3}$;

б) (биофак — 79) $\cos 3x=1-\sqrt{3}\sin 3x$;

в) (химфак — 82) $\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}$;

г) (химфак — 79) $\sin 2x+\cos 2x=1+\sqrt{6}\sin x$;

д) (геол. ф-т — 85) $2\sin x+7\cos x=\dfrac{\sqrt{53}}{2}$;

е) $\cos x=\sin x-1$;

ж) (биофак — 77)

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{6}\sin\left(\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=2\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)-2\cos\left(\frac{x}{6}+\frac{2\pi}{3}\right).$$

5.Е.5 (геол. ф-т — 79). Найти все значения c, при которых уравнение

$$4\sin x+9\cos x=c$$

имеет решение.

5.Е.6 (геол. ф-т — 79). Найти все значения α, при которых уравнение

$$x^2+\frac{6x}{\sqrt{\sin\alpha}}+\frac{9\sqrt{3}}{\cos\alpha}+36=0$$

имеет единственное решение.

5.Е.7 (филол. ф-т — 85). Для каждого значения a решить уравнение

$$4\cos x\sin a+2\sin x\cos a-3\cos a=2\sqrt{7}.$$

5.Е.8 (психфак — 81). Найти все решения уравнения

$$\cos 7x-\sqrt{3}\sin 7x=-\sqrt{2},$$

удовлетворяющие условию $0{,}4\pi<x<6\pi/7$.

Ответы

5.Е.4. а) πn, $\pi/6+\pi m$, n, $m\in\mathbf{Z}$; б) $\frac{2\pi}{3}n$, $\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}m$, n, $m\in\mathbf{Z}$; в) $\pi/8+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; г) πn, $\pi/4+(-1)^{m+1}\pi/3+\pi m$, n, $m\in\mathbf{Z}$; д) $-\operatorname{arctg}7/2+(-1)^n\pi/6+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; е) $\pi+2\pi n$, $\pi/2+2\pi m$, n, $m\in\mathbf{Z}$; ж) $\pi+\frac{3\pi}{2}n$, $(-1)^{m+1}\frac{3\pi}{10}+\frac{6\pi}{5}m$, n, $m\in\mathbf{Z}$. **5.Е.5.** $[-\sqrt{97};\sqrt{97}]$. **5.Е.6.** $5\pi/6+2\pi n$, $\pi/18+2\pi m$, $13\pi/18+2\pi k$, $n, m, k\in\mathbf{Z}$. **5.Е.7.** $-\pi/6+$ $+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, при $a=\pi-\arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}+2\pi m$, $m\in\mathbf{Z}$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, при $a=\pi+\arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}+2\pi m$, $m\in\mathbf{Z}$; при остальных значениях a решений нет. **5.Е.8.** $35\pi/84$, $53\pi/84$, $59\pi/84$.

§ 5.Ж. ОТБОР КОРНЕЙ

Весьма распространены на вступительных экзаменах задачи, в которых требуется провести некоторое исследование корней тригонометрического уравнения. В результате такого исследования, как правило, какая-то часть полученных корней выбирается или, наоборот, отбрасывается на основании явно или неявно указанного в задаче признака.

Наименее хлопотная ситуация возникает тогда, когда отбор корней удается провести без непосредственного их выписывания. При этом требуются лишь минимальные затраты усилий, связанные с выводом определенных следствий из уравнения с помощью формул тригонометрии. Таким способом, например, при решении задачи 5.В.3 удается доказать справедливость условий $\cos 2x\neq0$, $\sin x\neq0$, исходя из равенства $\cos x=0$ или $\cos 2x=1/3$. Указанный прием нам представляется более предпочтительным с точки зрения его обоснования, нежели исследование, опирающееся на решение уравнения.

5.Ж.1 (физфак — 80). Найти все корни уравнения

$$\sin x\cos\frac{\pi}{8}+\cos x\sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2},$$

расположенные в промежутке $[-3\pi/2;\ \pi]$.

Абитуриенты довольно легко привели уравнение к виду

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2},$$

а многие даже отобрали требуемые в задаче корни из серии

$$x=-\frac{\pi}{8}+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z},$$

получив правильный о т в е т: $-\frac{31\pi}{24},\ \frac{\pi}{24},\ \frac{17\pi}{24}.$

Однако, как ни странно, далеко не все упомянутые абитуриенты хорошо себе представляли, как обосновать правильность полученного ответа: некоторые из них поместили в чистовике набор бессвязных оценок, другие не предложили никакого обоснования вообще, наконец, третьи даже не рискнули выписать ответ.

Каким же образом следует доводить решение до конца, да и что именно нужно обосновывать в тексте решения? В обосновании или в проверке нуждаются два утверждения: во-первых, что все перечисленные в ответе корни принадлежат указанному в задаче промежутку, а во-вторых, что никакие из оставшихся корней ему не принадлежат.

Самый простой и наглядный способ обоснования использует идею *монотонности корней уравнения* вида

$$\sin x=\alpha,\ \cos x=\alpha,\ \operatorname{tg} x=\alpha \text{ или } \operatorname{ctg} x=\alpha$$

и состоит в том, чтобы прежде всего упорядочить по возрастанию корни исследуемой серии (см. § 5.А, где объяснено, как увидеть монотонность на тригонометрическом круге). В задаче 5.Ж.1 корни выписанной выше серии возрастают с ростом номера $n\in\mathbf{Z}$. А раз так, то остается лишь удостовериться в справедливости оценок

$$-\frac{\pi}{8}+(-1)^{-2}\frac{\pi}{6}-2\pi<-\frac{3\pi}{2}\leqslant-\frac{\pi}{8}+(-1)^{-1}\frac{\pi}{6}-\pi,$$

$$-\frac{\pi}{8}+(-1)^{1}\frac{\pi}{6}+\pi\leqslant\pi<-\frac{\pi}{8}+(-1)^{2}\frac{\pi}{6}+2\pi.$$

Доказательство этих оценок и завершает отбор корней (как оформлять такие доказательства рассказано в § 1.Б).

Другой способ состоит в *решении неравенств*, которым должны удовлетворять искомые корни. Ситуация осложняется в случае таких неудобных выражений, которые зачастую появляются при решении уравнений $\sin x=\alpha$ или $\cos x=\alpha$, и тогда имеет смысл разбивать множество корней на отдельные, более пригодные для исследования серии. Например, в задаче 5.Ж.1 можно выделить две серии

$$x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbf{Z};$$

$$x=-\frac{\pi}{8}+\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z},$$

и честно решить (относительно целочисленных неизвестных m и k соответственно) два двойных неравенства

$$-\frac{3\pi}{2}\leqslant-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{6}+2\pi m\leqslant\pi\Leftrightarrow-\frac{13}{48}\leqslant m\leqslant\frac{23}{48}\Leftrightarrow m=0,$$

$$-\frac{3\pi}{2}\leqslant-\frac{\pi}{8}+\frac{5\pi}{6}+2\pi k\leqslant\pi\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\frac{53}{48}\leqslant k\leqslant\frac{7}{48}\Leftrightarrow k=-1;\ 0.$$

Итак, из первой серии рассматриваемому промежутку принадлежит только корень $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{24}$, а из второй серии — корни $-\frac{\pi}{8}+\frac{5\pi}{6}-2\pi=-\frac{31\pi}{24}$ и $-\frac{\pi}{8}+\frac{5\pi}{6}=\frac{17\pi}{24}$.

5.Ж.2 (экономфак — 83). Решить уравнение

$$\sqrt{4-x^2}(\sin 2\pi x-3\cos\pi x)=0.$$

Каких только ошибок не наделали поступающие при решении этой задачи! Прежде всего следует отметить ошибки расщепления: забывались корни первого сомножителя левой части уравнения, не принималась в расчет область его определения и т. п. (см. § 2.Г). Ну и, конечно же, много неприятностей доставил абитуриентам предполагаемый в задаче (но явно не оговоренный) отбор корней. Некоторые употребили общую формулу корней для уравнения $\cos\pi x=0$ (по этому поводу см. преимущества использования тригонометрического круга в § 5.А, Б) и были вынуждены рассматривать две серии его корней:

$$x=\frac{1}{2}+2m,\ m\in\mathbf{Z},\ \text{и}\ x=-\frac{1}{2}+2k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Решение. $\sqrt{4-x^2}(2\sin\pi x\cos\pi x-3\cos\pi x)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(2-x)(2+x)}\cos\pi x\left(\sin\pi x-\frac{3}{2}\right)=0.$$

Уравнение равносильно совокупности уравнений и систем:

$$1)\ (2-x)(2+x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=-2;\end{array}\right.$$

$$2)\ \begin{cases} \cos \pi x=0 \\ -2\leqslant x\leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}+n,\ n\in \mathbf{Z}; \\ -2\leqslant \frac{1}{2}+n\leqslant 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}+n,\ n\in \mathbf{Z}; \\ -2\frac{1}{2}\leqslant n\leqslant 1\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow x=\frac{1}{2}+n,\ n=-2,\ -1,\ 0,\ 1.$$

Ответ: $-2,\ -1\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\frac{1}{2},\ 2.$

Вместо фактического решения неравенства системы 2) достаточно было привести, скажем, следующее объяснение:

$$x=-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \text{так}$$

как $\ldots<-\frac{5}{2}<-2\leqslant-\frac{3}{2}<-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}<\frac{3}{2}\leqslant 2<\frac{5}{2}<\ldots.$

В некоторых задачах для обоснования отбора корней требуется предварительно выработать гипотезу о том, по какому принципу производить отбор, а затем в чистовике изложить доказательство этого принципа, разбирая, если необходимо, различные случаи.

5.Ж.3 (экономфак — 83). Решить уравнение

$$\operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg} 5x.$$

Многие абитуриенты воспользовались следующим, казалось бы, совершенно очевидным утверждением: «Тангенсы двух чисел равны тогда и только тогда, когда разность этих чисел кратна π». Это утверждение содержит неточность, ибо в заключительной его части никак не учитывается область определения тангенса, а применительно к данному уравнению оно дает неверный ответ: $x=\frac{\pi}{2}n,\ n\in \mathbf{Z}$. Положение можно было бы исправить добавлением условий $3x\neq\frac{\pi}{2}+\pi m,\ 5x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ m,\ k\in \mathbf{Z}$, необходимых и достаточных для существования левой и правой частей уравнения (заметим, что неравенство $5x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$ вытекает из условий $3x\neq\frac{\pi}{2}+\pi m$ и $5x-3x=\pi n$). Однако никакие ухищрения не дают здесь каких бы то ни было ощутимых преимуществ по сравнению с самым обыкновенным расщеплением.

Решение. $\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=\frac{\sin 5x}{\cos 5x}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin 5x\cos 3x-\cos 5x\sin 3x}{\cos 3x\cos 5x}=0\Leftrightarrow\frac{\sin 2x}{\cos 3x\cos 5x}=0.$$

Рассмотрим два случая:

$$1)\ \begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+\pi l,\ l\in\mathbf{Z}; \\ \cos 3x\cos 5x\neq 0 \end{cases}$$

решений нет, ибо

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+3\pi l\right)=0,$$

$$2)\ \begin{cases} x=\pi n,\ n\in\mathbf{Z}; \\ \cos 3x\cos 5x\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow x=\pi n,\ n\in\mathbf{Z},$$

ибо $\cos 3\pi n\cos 5\pi n\neq 0$.

Ответ: πn, $n\in\mathbf{Z}$.

5.Ж.4 (филол. ф-т — 77). Найти наименьший положительный корень уравнения

$$\cos\pi x^2=\cos\pi(x^2+2x+1).$$

Характерная ошибка поступающих состояла в замене исходного уравнения якобы равносильной ему совокупностью уравнений

$$\pi x^2=\pi(x^2+2x+1)+2\pi n,\quad n\in\mathbf{Z},$$

а то и вовсе одним уравнением, получающимся при $n=0$. В данном случае лучше применить стандартное расщепление (см. § 5.Д).

Решение. $\cos(\pi x^2)-\cos(\pi(x^2+2x+1))=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\sin\left(\frac{\pi}{2}(2x+1)\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}(2x^2+2x+1)\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2x+1=2n,\ n\in\mathbf{Z}; \\ 2x^2+2x+1=2m,\ m\in\mathbf{Z} \end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=n-\frac{1}{2},\ n\in\mathbf{Z}; \\ x=\frac{-1+\sqrt{4m-1}}{2},\ m\in\mathbf{N}; \\ x=\frac{-1-\sqrt{4m-1}}{2},\ m\in\mathbf{N}. \end{array}\right.$$

Наименьший положительный корень равен $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$:

1) в первой серии он равен $\frac{1}{2}$, ибо

$$\ldots < 0 - \frac{1}{2} < 0 < 1 - \frac{1}{2} < 2 - \frac{1}{2} < \ldots;$$

2) во второй серии он равен $\frac{-1+\sqrt{3}}{2} < \frac{1}{2}$, ибо

$$\sqrt{3} < 2 \text{ и } 0 < \frac{-1+\sqrt{3}}{2} < \frac{-1+\sqrt{7}}{2} < \ldots;$$

3) в третьей серии все корни отрицательны.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Случаи, когда для отбора требуется умение работать с тригонометрическими неравенствами, разобраны в следующем параграфе.

Задачи

5.Ж.6. Решить уравнение:

а) (экономфак—83) $\sqrt{25-4x^2}\,(3\sin 2\pi x + 8\sin \pi x) = 0$;

б) (геол. ф-т—80) $\frac{2-3\sin x - \cos 2x}{6x^2 - \pi x - \pi^2} = 0$;

в) (экономфак—77) $\frac{\cos x}{(x+3/2)^2} = |\cos x|$;

г) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{\sin^2 x}{\sin x + 1}}$;

д) $x^{\frac{5}{4} - 2\cos 3x} = \sqrt[4]{x}$;

е) (экономфак—83) $\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{ctg} 5x$;

ж) (ВМК—83) $\frac{1+2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x}{2\sin x \cos x - 1} = 1$;

з) (геол. ф-т—82) $\frac{\sin 4x}{\cos 6x} = 1$.

5.Ж.7. Найти все корни уравнения:

а) (биофак—85) $5\cos 2x + 7\cos(x+\pi/2) + 1 = 0$, принадлежащие отрезку $[\pi/2;\ 3\pi/2]$;

б) (филол. ф-т — 85) $2\sin^2 x=\sqrt{3}\sin x$, удовлетворяющие условию $-5<x<-3$;

в) (физфак — 80) $\cos x\cos\pi/5+\sin x\sin\pi/5=\frac{\sqrt{3}}{2}$, принадлежащие отрезку $[-\pi/4;\ 9\pi/4]$;

г) (мехмат — 78) $\log_2|\operatorname{tg} x|+\log_4\frac{\cos x}{2\cos x+\sin x}=0$, принадлежащие отрезку $[9/4;\ 3]$;

д) (ВМК — 81) $|\cos x|+\sin(2x+3)=0$, удовлетворяющие условию $|x|<3\pi/2$.

5.Ж.8 (филол. ф-т — 77). Найти наименьший положительный корень уравнения

$$\sin(\pi x^2)=\sin(\pi(x^2+2x)).$$

5.Ж.9 (ВМК — 79). Найти все целые корни уравнения

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}(3x-\sqrt{9x^2+160x+800})\right)=1.$$

Ответы

5.Ж.6. а) $-5/2;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 5/2$; б) $(-1)^n\pi/6+\pi n,\ \pi/2+2\pi m,\ n, m\in\mathbf{Z},\ m\neq 0$; в) $-\frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; г) $0,\ -\pi/6$; д) $\frac{\pi}{9}$; 1; $\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}n,\ n\in\mathbf{N}$; е) $\pi/2+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; ж) $3\pi/4+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; з) $\frac{\pi}{20}+\frac{\pi}{5}n,\ n\neq 5m+1,\ n, m\in\mathbf{Z}$. **5.Ж.7.** а) $5\pi/6$; б) $-4\pi/3,\ -\pi$; в) $\pi/30,\ 11\pi/30,\ 61\pi/30$; г) $3\pi/4$; д) $-\pi/6-1+\pi n,\ \pi/2-1+\pi m,\ n, m=-1, 0, 1$. **5.Ж.8.** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **5.Ж.9.** $-31;\ -7$.

§ 5.3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Последние годы на вступительных экзаменах тригонометрические неравенства практически не предлагаются. Однако такие неравенства рано или поздно появляются в процессе решения некоторых задач (см. задачу 5.Е.2). При этом в наиболее простых случаях решать возникающие неравенства не требуется. Сюда относятся прежде всего ситуации, когда действие неравенств заканчивается уже на раннем этапе решения.

5.3.1 (экономфак — 85). Решить уравнение

$$\sqrt{\sin x}=\sqrt{1-2\sin^2 x}.$$

После возведения уравнения в квадрат одни абитуриенты забыли об изменении ОДЗ, другие добавили слишком много неравенств, затруднив себе дальнейшую работу. Хотелось бы обратить особое внимание читателей на один заведомо неудачный, на наш взгляд, подход к решению этой задачи, состоявший в попытке выписать явный ответ для неравенства $\sin x > 0$ или, что еще хуже, $1-2\sin^2 x > 0$. Как правило, абитуриенты либо делали это неверно, либо не могли затем правильно воспользоваться полученными соотношениями.

Решение. $\sqrt{\sin x}=\sqrt{1-2\sin^2 x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1-2\sin^2 x, \\ \sin x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x+1)\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)=0, \\ \sin x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$.

В более сложных случаях может оказаться чрезвычайно полезным умение *изображать решения тригонометрического неравенства на тригонометрическом круге.* Для простейших неравенств вида $\sin x < a$, $\cos x < a$, $\operatorname{tg} x < a$, $\operatorname{ctg} x < a$, или им аналогичных, достаточно отметить на соответствующей оси (синусов, косинусов. тангенсов, котангенсов; см. § 5.А) множество $(-\infty;\ a]$, а затем построить на числовой окружности множество точек, в которых соответствующая тригонометрическая функция принимает отмеченные значения. Например, на рис. 5.10 жирной линией выделено множество точек окружности, удовлетворяющих неравенству $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$. Что же касается аналитической записи выделенного множества, то заметим, во-первых, что в ней, как правило, не бывает необходимости, во-вторых, сама запись

$$\frac{\pi}{3}+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3}+2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

достаточно сложна для восприятия (попробуйте, глядя на выписанную формулу, определить, является ли решением, скажем, значение $x=-\pi$) и, в-третьих, при получении этой записи можно наделать ошибок. Довольно часто в письменных работах можно встретить нелепые записи типа $\frac{\pi}{3}+2\pi n \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{3}+2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$, или даже $x \leqslant \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$, которые смело выдаются их авторами за ответ.

5.3.2. Изобразить на тригонометрическом круге все решения неравенства или системы:

а) $\sin x<\frac{1}{2}$; б) $\operatorname{tg} x\geqslant 1$; в) $\operatorname{ctg} x\leqslant 0$; г) $\cos^2 x\geqslant\frac{1}{2}$; д) $\operatorname{tg}^2 x>\frac{1}{3}$; е) $\begin{cases}\sin x\geqslant-\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \cos x\geqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$

Ответ см. на рис. 5.11, а)—е) соответственно.

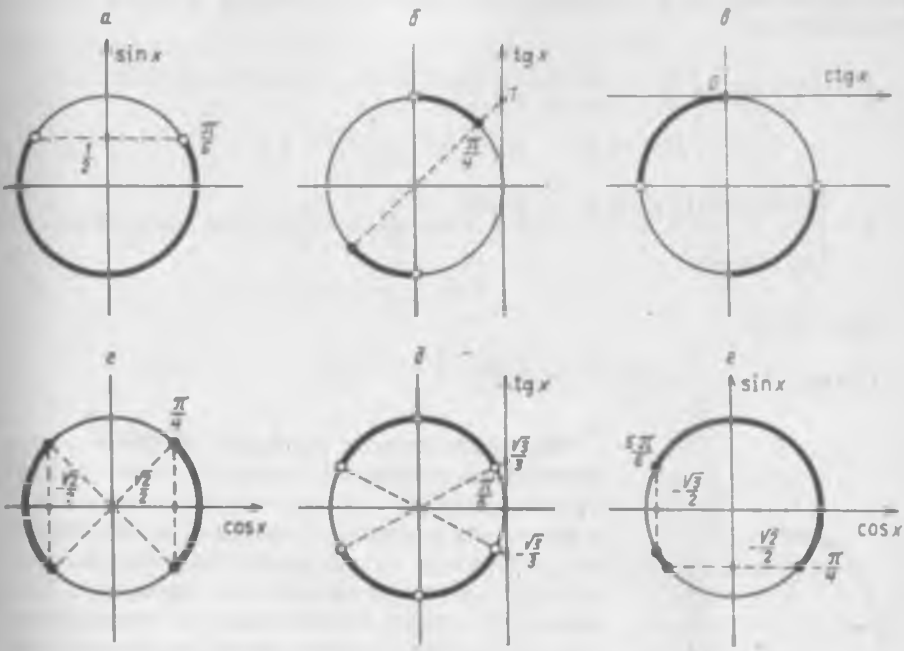

Рис. 5.11

5.3.3 (ф-т почв.— 85). Найти все корни уравнения

$$(1+\operatorname{tg}^2 x)\sin x-\operatorname{tg}^2 x+1=0,$$

удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x<0$.

Некоторые абитуриенты так или иначе преобразовали уравнение к виду

$$(\sin x-1)\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)=0,$$

но, решив его, далее так и не сдвинулись с места. Другие рассудили следующим образом: «Коль скоро в задаче явно фигурирует неравенство, то ничего не поделаешь, нужно его сначала решить».

Разумеется, отбор из корней

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ x=(-1)^{m+1}\frac{\pi}{6}+\pi m,\quad n,\ m\in\mathbf{Z},$$

тех значений, которые удовлетворяют неравенствам

$$\pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$$

(хотя бы при одном значении k), — задача не из приятных. Такой способ решения мало кого привел к успеху на экзамене. Формальный подход к поставленной задаче оказался в этом случае бесплодным.

Решение. $\begin{cases} \left(1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)\sin x - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = 0, \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x - 1)\left(\sin x + \dfrac{1}{2}\right) = 0, \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$$ (см. рис. 5.12).

Ответ: $-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$.

Рис. 5.12

В приведенном решении одним из элементов обоснования является тригонометрический круг, на котором изображены множества решений уравнения и неравенства системы и из которого сразу видно, как образуется пересечение этих множеств. Однако в случае необходимости последнюю систему можно решить и аналитически следующим образом (заметим, что тригонометрический круг при этом помогает хотя бы выработать гипотезу о принципе отбора корней).

Рассмотрим три случая:

1) $\begin{cases} \sin x = 1, \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases}$ решений нет, ибо если $\sin x = 1$, то $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 0$, и $\operatorname{tg} x$ не существует;

2) $\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$

так как $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n\right) = \operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) < 0;$

3) $\begin{cases} x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m, \quad m \in \mathbf{Z}; \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases}$ решений нет, так как $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m\right) = \operatorname{tg}\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) > 0.$

В следующей задаче многие абитуриенты буквально растерялись во время экзамена из-за отсутствия видимой связи между решениями возведенного в квадрат уравнения, равносильного уравнению $\sin 2x=\frac{1}{2}$ (кстати, далеко не всем удалось привести исходное уравнение к такому виду), и неравенством $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$ (некоторые добавили также никак не необходимое неравенство $1+8\sin 2x\cos^2 2x\geqslant 0$; см. § 3.Д).

5.3.4 (геогр. ф-т — 77). Решить уравнение

$$2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1+8\sin 2x\cos^2 2x}.$$

Решение. $\begin{cases} 4\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=1+8\sin 2x\cos^2 2x, \\ 2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-2\cos\left(6x+\frac{\pi}{2}\right)=1+4\sin 4x\cos 2x, \\ \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+2\sin 6x=2(\sin 6x+\sin 2x), \\ \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x=\frac{1}{2}, \\ \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 0. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1) $\begin{cases} x=\frac{\pi}{12}+\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}; \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+3\pi n+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+\pi n,\ n=0,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \ldots,$

так как $\sin\left(\frac{\pi}{2}+3\pi n\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)=(-1)^n$;

2) $\begin{cases} x=\frac{5\pi}{12}+\pi m, \quad m\in\mathbf{Z}; \\ \sin\left(\frac{5\pi}{4}+3\pi m+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{12}+\pi m,\ m=\pm 1,\ \pm 3,\ \ldots,$

так как $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+3\pi m\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\pi m\right)=(-1)^{m+1}$.

Ответ: $\frac{\pi}{12}+2\pi n,\ \frac{5\pi}{12}+\pi(2m+1),\quad n,\ m\in\mathbf{Z}$.

Задачи

5.3.5. Решить уравнение:

а) (психфак — 82) $\sqrt[4]{3}\,\mathrm{tg}\,x-1=(\sqrt[4]{3}-1)\sqrt{\mathrm{tg}\,x}$;

б) (экономфак — 79) $\sqrt{37-48\,\mathrm{ctg}\,x}=8\,\mathrm{ctg}\,x-5$;

в) (мехмат — 85) $6\cos x-1/3=\sqrt{32\cos x-17/9}$;

г) (психфак — 79) $\sqrt{2+\sqrt{6}-(6\sqrt{2}-2\sqrt{3})\sin x}=2\sin x-\sqrt{2}$;

д) (экономфак — 85) $\sqrt{-\cos x}=\sqrt{-1+2\sin^2 x}$;

е) (ф-т почв. — 82) $\sqrt{2-3\cos 2x}=\sqrt{\sin x}$;

ж) (ф-т почв. — 77) $|\mathrm{tg}\,x|=\mathrm{ctg}\,x-\dfrac{1}{\cos x}$;

з) (биофак — 82) $1+2|\cos x|\sin x=0$;

и) (мехмат — 77) $3^{\frac{1}{2}+\log_3\cos x}+6^{\frac{1}{2}}=9^{\frac{1}{2}+\log_9\sin x}$;

к) (мехмат — 82) $\sqrt{2\sin x\sin 2x}=\sqrt{5\cos x+4\sin 2x}$;

л) (геогр. ф-т — 77) $\sqrt{\dfrac{1-4\cos^2 3x}{8\cos(2x-2\pi/3)}}=\cos(2x-\pi/6)$;

м) (мехмат — 83)

$$\log_5\left(\cos\frac{x}{3}+3\,\mathrm{tg}\,x-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)+\log_{1/5}\left(\cos\frac{x}{2}+\mathrm{tg}\,2x-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=0.$$

5.3.6. Найти все корни уравнения:

а) (ф-т почв. — 85) $\cos x+(1+\cos x)\,\mathrm{tg}^2 x-1=0$, удовлетворяющие неравенству $\mathrm{tg}\,x>0$;

б) (мехмат — 79) $1-5\sin x-2\cos^2 x=0$, удовлетворяющие неравенству $\cos x>0$;

в) (химфак — 77) $2-\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=4\cos^2 3x$, удовлетворяющие неравенству $\cos(2x-\pi/4)>0$.

5.3.7 (геол. ф-т — 84). Найти $\mathrm{ctg}\,2\alpha$, если $\cos 2\alpha>-12/13$ и $\mathrm{tg}\,\alpha<-5$.

Ответы

5.3.5. а) $\pi/4+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; б) $\mathrm{arcctg}\,3/4+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; в) $\pm\arccos\dfrac{3-\sqrt{7}}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; г) $(-1)^n\pi/3+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; д) $\pm 2\pi/3+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; е) $(-1)^n\pi/6+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; ж) $5\pi/6+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; з) $(-1)^{n+1}\pi/4+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; и) $5\pi/12+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; к) $\pi/2+\pi n$, $-\pi/6+2\pi m$, $n, m\in\mathbf{Z}$; л) πn, $n\in\mathbf{Z}$; м) $\pi/6+4\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **5.3.6.** а) $\pi/3+\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; б) $\pi/6+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; в) $5\pi/48+\pi n$, $17\pi/48+\pi m$, $7\pi/24+\pi k$, $n, m, k\in\mathbf{Z}$. **5.3.7.** 12/5.

ГЛАВА 6. СИСТЕМЫ

§ 6.А. СИСТЕМА КАК ЕДИНОЕ ЦЕЛОЕ

Начнем разговор с некоторых прописных истин. Если какие-либо условия — равенства, неравенства и т. п. — включены в систему, то они предполагаются выполненными *одновременно*. Это означает, что *решениями* системы могут быть только такие значения неизвестной или такие наборы значений (если неизвестных несколько), которые удовлетворяют сразу всем условиям системы. Решить систему — значит найти все ее решения. Как и в случае одного уравнения (или одного неравенства), в процессе решения системы, во-первых, должен быть получен правильный ответ, во-вторых, должно быть дано полное обоснование его правильности.

6.А.1. Решить систему:

а) $\begin{cases} x=1, \\ y=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2=1, \\ y=0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2^x<0, \\ y=0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2\geqslant 0, \\ y^2\geqslant 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2\geqslant 0, \\ y=x; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \sin x=0, \\ \lg y=1. \end{cases}$

В таких простых системах наибольшие хлопоты доставляет, конечно, выписывание ответа, поскольку исходные уравнения и неравенства особых трудностей не вызывают. Например, некоторые считают, что ответ к системе в) таков: «$x\in\varnothing$, $y=0$». Этот ошибочный вывод проистекает из-за нечеткого понимания того, что такое решение системы. Ведь в данном случае ни одна пара (x, y) не удовлетворяет системе в), ибо ей уже не удовлетворяет ни одно значение x. Многие не видят разницы между системами г) и д), полагая, что в обеих системах x и y произвольны (по поводу системы д) рассуждают обычно так: «y совпадает с x, причем x произвольно, следовательно, и y произвольно»).

Ответ: а) $(1; 0)$; б) $(-1; 0)$, $(1; 0)$; в) $\varnothing$; г) $(x; y)$, $x\in(-\infty; \infty)$, $y\in(-\infty; \infty)$; д) (x, x), $x\in(-\infty; \infty)$; е) $(\pi n; 10)$, $n\in Z$.

Уже с первых слов о системе можно заключить, что она представляет собой более сложный объект, чем, скажем, просто уравнение или неравенство. Опыт вступительных экзаменов показывает, что абитуриенты зачастую рассматривают систему как некий конгломерат разрозненных условий, занесенных формально под фигурную скобку. Такая психология абитуриентов может вооружить их лишь единственным подходом к решению системы, а именно последовательным исключением входящих в нее неизвестных. А между тем взгляд на систему как на единое целое позволяет иной раз получить более изящное решение.

6.А.2 (физфак — 80). Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+x=-1, \\ \dfrac{x}{x+y}=-2. \end{cases}$$

В письменных экзаменационных работах были представлены в основном стандартные способы решения этой системы: одна неизвестная с помощью одного из уравнений системы выражалась через другую неизвестную, а полученное выражение подставлялось в другое уравнение системы.

Если внимательно присмотреться к исходной системе, то можно заметить, что в ней сумма чисел $\dfrac{1}{x+y}$ и x равна -1 (первое уравнение), а их произведение равно -2 (второе уравнение). Для решений этой системы и только для них, согласно теореме Виета и обратной к ней, пара чисел $\dfrac{1}{x+y}$ и x является парой корней квадратного трехчлена

$$t^2+t-2=(t+2)(t-1).$$

Таким образом, возможны ровно два случая:

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}=-2, \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=-\dfrac{3}{2}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}=1, \\ x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2, \\ y=3. \end{cases}$

Ответ: $\left(1;\ -\dfrac{3}{2}\right)$, $(-2;\ 3)$.

В рассмотренной только что системе из задачи 6.А.2 довольно несложно находится подходящая зависимость между неизвестными, позволяющая получить одно уравнение с одной неизвестной. Такой способ пригоден для целого ряда систем (подробнее об этом см. § 6.Г), что нередко порождает у поступающих иллюзию о возможности применять этот способ всегда и везде, и если же он почему-то не приводит к цели, то, стало быть, за предложенную задачу вообще не стоит и браться. В связи с этим подчеркнем, что каждая система требует своего индивидуального, творческого подхода, который всегда представляет собой конкретное исследование.

Те же слова в равной степени относятся и к отдельным уравнениям и неравенствам.

Однако само по себе умение решать уравнения и неравенства еще не дает возможности механически распространять это умение и на системы. Причина здесь кроется прежде всего в более содержательной логике, которая заложена в самом понятии системы и связана с одновременностью выполнения всех ее условий.

6.А.3 (геогр. ф-т — 82). Решить систему

$$\begin{cases} \log_{2-x}(2-y)>0, \\ \log_{4-y}(2x-2)>0. \end{cases}$$

Заметим сразу, что из данной системы никакие зависимости между x и y не выводятся. Это обстоятельство сразу же отпугнуло на экзамене часть абитуриентов, привыкших пользоваться лишь заранее заготовленными методами. Другая часть абитуриентов все-таки взялась за дело и получила некий абстрактный набор неравенств, слабо связанных между собой, хотя и не лишенных смысла. Нашлись даже абитуриенты, которые добрались до системы приблизительно следующего вида (конечно, при этом некоторые условия были ими потеряны, см. § 4.Г):

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<2-x<1, \\ 0<2-y<1, \end{cases} \\ \begin{cases} 2-x>1, \\ 2-y>1, \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<4-y<1, \\ 0<2x-2<1, \end{cases} \\ \begin{cases} 4-y>1, \\ 2x-2>1, \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

однако вконец запутались при расшифровке этого нагромождения знаков системы и совокупности. По этому поводу отметим, что увлечение такими знаками без ясного понимания смысла получающейся формальной записи мало кого привело к упрощению решения.

Для решения исходной системы достаточно разобрать четыре логически возможных случая:

1) $$\begin{cases} 0<2-x<1, \\ 0<2-y<1, \\ 0<4-y<1, \\ 0<2x-2<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x<2, \\ 1<y<2, \\ 3<y<4, \\ 1<x<1{,}5, \end{cases}$$

решений нет;

2) $$\begin{cases} 2-x>1, \\ 2-y>1, \\ 0<4-y<1, \\ 0<2x-2<1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1, \\ y<1, \\ 3<y<4, \\ 1<x<1{,}5, \end{cases}$$

решений нет;

3) $\begin{cases} 0<2-x<1, \\ 0<2-y<1, \\ 4-y>1, \\ 2x-2>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x<2, \\ 1<y<2, \\ y<3, \\ x>1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1{,}5<x<2, \\ 1<y<2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2-x>1, \\ 2-y>1, \\ 4-y>1, \\ 2x-2>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1, \\ y<1, \\ y<3, \\ x>1{,}5, \end{cases}$

решений нет.

Ответ: (x, y), $x\in(1{,}5; 2)$, $y\in(1; 2)$.

Разумеется, первые два из разобранных выше случаев можно было заранее отбросить по той причине, что в силу ОДЗ первого неравенства системы необходимо выполнение условия $2-y>0$, противоречащего неравенству $4-y<1$. Аналогично можно было отвергнуть и последний случай, так как условие $2x-2>0$ противоречит неравенству $2-x>1$. Но главное, на наш взгляд, пока не в том, чтобы наиболее экономным путем избавиться от разбора тех или иных случаев (в конце концов все выписанные выше неравенства элементарны), а в том, чтобы четко осознать специфику работы с системами, состоящую в неразрывной связи между всеми ее условиями.

Задачи

6.А.4. Решить систему:

а) $\begin{cases} x^2=1, \\ x\leqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2=1, \\ y\leqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y+z=6, \\ y+z=5, \\ z=3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} xy+4=0, \\ x+y+3=0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} xy=4, \\ x+y=3; \end{cases}$

е) (физфак — 80)

$\begin{cases} \dfrac{1}{2x-y}+y=-5, \\ \dfrac{y}{2x-y}=6; \end{cases}$

ж) (ВМК — 85) $\begin{cases} 9^x-3\cdot 5^y=3, \\ 9^x\cdot 5^y=18; \end{cases}$

з) (геол. ф-т — 80)

$\begin{cases} \log_2(x^2+y^2)=5, \\ 2\log_4 x+\log_2 y=4; \end{cases}$

и) (геогр. ф-т — 82)

$\begin{cases} \log_{x-1}(5-y)<0, \\ \log_{2-y}(4-x)<0; \end{cases}$

к) $\begin{cases} 2\sin 3x=1, \\ |x|<1; \end{cases}$

л) $\begin{cases} \operatorname{tg} x=\operatorname{tg} y, \\ 0\leqslant x<y<2\pi. \end{cases}$

6.А.5. Найти все значения a, при которых:

а) (физфак — 77) любое решение системы

$$\begin{cases} x+y=a, \\ 2x-y=3 \end{cases}$$

удовлетворяет неравенству $x>y$;

б) (геол. ф-т — 78) существует хотя бы одно решение системы

$$\begin{cases} x^2+(5a+2)x+4a^2+2a<0, \\ x^2+a^2=4; \end{cases}$$

в) (геогр. ф-т — 78) существует только одно решение системы

$$\begin{cases} |x^2-5x+4|-9x^2-5x+4+10x|x|=0, \\ x^2-2(a-1)x+a(a-2)=0. \end{cases}$$

6.А.6 (ВМК—85). Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2/2-2y^2+2z^2+10z+6y+\sqrt{3}x/2-17}+$$
$$+\sqrt{3x^2-2\sqrt{3}(\cos\pi y+\cos\pi z)x+4}=0.$$

Ответы

6.А.4. а) -1; б) $(-1;\ y)$, $(1;\ y)$, $y\in(-\infty;\ 0]$; в) $(1;\ 2;\ 3)$; г) $(-4;\ 1)$, $(1;\ -4)$; д) $\varnothing$; е) $(-7/4;\ -3)$, $(-7/6;\ -2)$; ж) $(1;\ \log_5 2)$; з) $(4;\ 4)$; и) $(x;\ y)$, $x,\ y\in(1;\ 2)$; к) $\pi/18$, $5\pi/18$; л) $(x;\ x+\pi)$, $x\in[0;\ \pi/2)\cup(\pi/2;\ \pi)$. **6.А.5.** а) $(-\infty;\ 6)$; б) $(-\sqrt{2};\ -16/17)\cup\cup(0;\ \sqrt{2})$; в) $\{-1\}\cup(1;\ 3)\cup(4;\ 6]$. **6.А.6.** $\left(-2\sqrt{3}/3;\ 1;\ 1\right)$, $\left(-2\sqrt{3}/3;\ 7;\ -9\right)$.

§ 6.Б. РАВНОСИЛЬНОСТЬ СИСТЕМ

Напомним, что системы (равно как и уравнения или неравенства) называются *равносильными*, если множества их решений совпадают. Преобразование какой-либо системы, приводящее к равносильной системе, также обычно называют равносильным. Ранее уже говорилось, что метод равносильных преобразований не всегда удобен при решении систем, хотя и позволяет сравнительно просто обосновать правильность полученного ответа. Трудность здесь состоит прежде всего в том, что для решения систем нередко требуются заведомо неравносильные преобразования, и тогда на помощь приходят другие методы (см. § 2.В, 6.Д).

Не так уж редко, однако, на экзаменах предлагаются системы, которые можно решать, применяя лишь равносильные преобразования. К сожалению, абитуриенты часто не пользуются этим обстоятельством, взваливая на себя дополнительную работу по проверке полученного ответа или попросту игнорируя указанную сторону решения и допуская в результате логические ошибки. В письменных экзаменационных работах зачастую в тексте решения какой-либо системы фигурируют некие отрывочные и беспорядочные записи, из которых непонятным образом рождается ответ. Такие решения напоминают скорее черновик, чем чистовик, и вряд ли могут быть признаны логически безупречными.

Какие же стандартные преобразования систем гарантируют их равносильность? Прежде чем заниматься перечислением этих преобразований, имеет смысл запомнить принцип обратимости: *преобразование одной системы к другой является равносильным, если каждое условие второй системы следует из первой системы, и наоборот, каждое условие первой следует из второй.* Рассмотрим некоторые частные приемы, вытекающие из сформулированного принципа.

1. Если в системе *одно уравнение или неравенство заменить равносильным ему набором условий,* а все остальные условия системы сохранить без изменения, то полученная система будет равносильна исходной. Этот прием позволяет, в частности, умножать любое уравнение на ненулевое число.

2. Если какое-либо уравнение системы выражает одну неизвестную через все остальные, то это *выражение можно подставить в любые другие условия системы* вместо указанной неизвестной, что приведет к равносильной системе. О некоторой модификации этого приема будет рассказано позднее (§ 6.Г).

6.Б.1 (химфак — 77). Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{x+y-1}=1, \\ \sqrt{x-y+2}=2y-2. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} x+y-1=1, \\ x-y+2=4y^2-8y+4, \\ 2y-2\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y, \\ 4y^2-6y=0, \\ y\geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y, \\ y(2y-3)=0, \\ y\geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1{,}5, \\ x=2-1{,}5. \end{cases}$$

Ответ: (0,5; 1,5).

3. Если *к уравнению системы прибавить другое уравнение этой системы,* оставив все остальные условия без изменения, то полученная система будет равносильна исходной. Заметим, что прибавляемое уравнение можно предварительно умножить на любое число, в частности на -1, что будет означать фактическое вычитание этого уравнения. Поясним также, что под сложением (умножением и т. п.) уравнений понимаем сложение (умножение и т. п.) их левых частей и правых в отдельности. Результатом та-

кой операции является снова уравнение. Аналогичные операции для неравенств не приводят, вообще говоря, к равносильным системам. Например, система $\begin{cases} x>0, \\ y>0 \end{cases}$ отнюдь не равносильна системе $\begin{cases} x>0, \\ x+y>0, \end{cases}$ поскольку, скажем, пара (2; —1) удовлетворяет второй системе, но не удовлетворяет первой.

6.Б.2 (филол. ф-т — 77). Решить систему

$$\begin{cases} x\log_2 3+\log_2 y=y+\log_2 x, \\ x\log_3 12+\log_3 x=y+\log_3 y. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} x\log_2 3+\log_2 y=y+\log_2 x, \\ \dfrac{x\log_2 12}{\log_2 3}+\dfrac{\log_2 x}{\log_2 3}=y+\dfrac{\log_2 y}{\log_2 3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x\log_2 3+\log_2 y=y+\log_2 x, \\ x(2+\log_2 3)+\log_2 x=y\log_2 3+\log_2 y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x\log_2 3+\log_2 y=y+\log_2 x, \\ x(2+2\log_2 3)=y(1+\log_2 3) \end{cases} \Leftrightarrow \text{(сумма первого и второго уравнений)}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} y=2x, \\ x\log_2 3+\log_2 2x=2x+\log_2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2-\log_2 3)=\log_2 2, \\ x>0, \\ y=2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x=\dfrac{1}{2-\log_2 3}\left(\dfrac{1}{2-\log_2 3}>0, \text{ ибо } 2=\log_2 4>\log_2 3\right), \\ y=\dfrac{2}{2-\log_2 3}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2-\log_2 3};\ \dfrac{2}{2-\log_2 3}\right)$.

В приведенном тексте решения задачи 6.Б.2 при сложении уравнений были взаимно уничтожены выражения $\log_2 x$ и $\log_2 y$, что изменило ОДЗ обоих уравнений. Однако условия $x>0$ и $y>0$ не были добавлены при этом, так как ОДЗ всей системы не изменилось: в другом уравнении системы указанные выражения по-прежнему фигурировали (чуть позднее условие $x>0$ все же было наложено и проверено для полученного решения, но это было сделано своевременно).

4. Принцип обратимости позволяет производить и более сложные и эффективные преобразования, которые не столь популярны

среди поступающих. Например, *переход к сумме и разности двух уравнений* представляет собой равносильное преобразование:

$$\begin{cases} F_1=G_1, \\ F_2=G_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1+F_2=G_1+G_2, \\ F_1-F_2=G_1-G_2 \end{cases}$$

(здесь через F_1, F_2, G_1, G_2 обозначены некоторые выражения, зависящие от неизвестных системы). Действительно, из первой системы, разумеется, следует каждое уравнение второй системы и, в свою очередь, из второй системы следует как первое уравнение первой системы (являющееся полусуммой уравнений второй системы), так и второе (являющееся их полуразностью).

6.Б.3 (геол. ф-т — 81). Решить систему

$$\begin{cases} \sin x\cos y=-\frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x\operatorname{ctg} y=1. \end{cases}$$

На экзамене многие абитуриенты преобразовали второе уравнение системы к виду

$$\frac{\sin x\cos y}{\cos x\sin y}=1,$$

а затем в силу первого уравнения и к виду

$$\cos x\sin y=-\frac{1}{2}.$$

Далее пути абитуриентов разошлись. Некоторые, сложив первое и преобразованное второе уравнения, получили уравнение $\sin(x+y)=-1$ и решили его относительно $x+y$, а затем занялись довольно муторным исключением одной из двух неизвестных. Другие догадались также наряду с суммой уравнений взять их разность, получив уравнение

$$\sin(x-y)=0$$

и решив его относительно $x-y$. Таким образом, была получена система

$$\begin{cases} x+y=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}, \\ x-y=\pi m, \quad m\in\mathbf{Z}, \end{cases}$$

из которой было найдено

$$\begin{cases} 2x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n+\pi m, \\ 2y=-\frac{\pi}{2}+2\pi n-\pi m. \end{cases}$$

И вот на последнем этапе возник совсем не праздный вопрос: надо или не надо проверять полученные значения неизвестных. Почти все абитуриенты решили, что надо, и потратили на проверку немало усилий (причем не все провели эту проверку достаточно аккуратно, а некоторые отделались указанием на то, что они якобы где-то ее провели). На самом же деле никакой проверки в данном случае можно не делать, так как все преобразования (при надлежащем, конечно, оформлении текста решения) были равносильны, а именно дважды был произведен переход к сумме и разности уравнений.

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n+\frac{\pi}{2}m;\ -\frac{\pi}{4}+\pi n-\frac{\pi}{2}m\right)$, $n, m \in \mathbf{Z}$.

Итак, вывод напрашивается сам собой: следить за равносильностью преобразований при решении систем так же полезно, как и при решении уравнений и неравенств.

Задачи

6.Б.4. Доказать, что если четверка чисел, α, β, γ, δ удовлетворяет условию $\alpha\delta \neq \beta\gamma$, то системы

$$\begin{cases} F_1=G_1, \\ F_2=G_2, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha F_1+\beta F_2=\alpha G_1+\beta G_2, \\ \gamma F_1+\delta F_2=\gamma G_1+\delta G_2 \end{cases}$$

равносильны.

6.Б.5. Решить систему:

а) (химфак—77) $\begin{cases} \sqrt{x+3y+1}=2, \\ \sqrt{2x-y+2}=7y-6; \end{cases}$

б) (ф-т почв.—85) $\begin{cases} 2x+2^y=-1, \\ -20x+3{,}5\cdot 2^{y+1}=146; \end{cases}$

в) (ф-т почв.—83) $\begin{cases} \sqrt{y}+\lg x^2=2, \\ y+4\lg x=28; \end{cases}$

г) (геол. ф-т—79) $\begin{cases} \sqrt{2}\,y+\sqrt{12}\operatorname{ctg} x=4, \\ 2\sqrt{2}\,y-\sqrt{27}\operatorname{ctg} x=1; \end{cases}$

д) (мехмат—79) $\begin{cases} \dfrac{2}{2x-y}+\dfrac{3}{x-2y}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2}{2x^2-y}-\dfrac{1}{x-2y}=\dfrac{1}{18}; \end{cases}$

е) (филол. ф-т—77) $\begin{cases} x+\log_2 y=y\log_2 3+\log_2 x, \\ x\log_2 72+\log_2 x=2y+\log_2 y; \end{cases}$

ж) (экономфак—79) $\begin{cases} 2x^2+y^2-4x+2y=1, \\ 3x^2-2y^2-6x-4y=5; \end{cases}$

з) (геол. ф-т — 81) $\begin{cases} \sin x \sin y = 1/4, \\ 3 \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} y; \end{cases}$

и) $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = x-4, \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = y-4; \end{cases}$

к) (экономфак — 77) $\begin{cases} y^{1-\frac{2}{5}\log_x y} = x^{\frac{2}{5}}, \\ 1 + \log_x \left(1 - \dfrac{3y}{x}\right) = \log_x 4. \end{cases}$

6.Б.6 (психфак — 83). Указать все значения a, при которых система

$$2\cos x + a \sin y = 1,$$
$$\log_2 \sin y = \log_2 a \log_a (2 - 3\cos x),$$
$$\log_a z + \log_a \left(\frac{1}{2a} - 1\right) = 0$$

имеет решения. Найти эти решения.

6.Б.7 (биофак — 80). Найти все те решения уравнения

$$3\sin^3 x - 3\cos^2 x + 7\sin x - \cos 2x + 1 = 0,$$

которые являются также решениями уравнения

$$\cos^2 x + 3\cos x \sin 2x - 8\sin x = 0.$$

Ответы

6.Б.5. а) $(0;\ 1)$; б) $(-4{,}5;\ 3)$; в) $(0{,}01;\ 36)$; г) $(\pi/3 + \pi n,\ \sqrt{2})$, $n \in \mathbf{Z}$; д) $(5;\ -2)$; е) $\left(\dfrac{1}{2\log_2 3 - 1};\ \dfrac{2}{2\log_2 3 - 1}\right)$; ж) $(1+\sqrt{2};\ -1)$, $(1-\sqrt{2};\ -1)$; з) $(\pm\pi/6 - \pi(m+n);\ \pm\pi/6 + \pi(m-n))$, $m, n \in \mathbf{Z}$; и) $(10;\ 6)$, $(8;\ 8)$; к) $(16;\ 4)$. **6.Б.6.** $\left(\pm \arccos\dfrac{1-2a}{2-3a} + 2\pi n;\ (-1)^m \times\right.$ $\left.\times \arcsin\dfrac{1}{2-3a} + \pi m;\ \dfrac{2a}{1-2a}\right)$, $n, m \in \mathbf{Z}$, при $a \in (0;\ 1/4) \cup (1/4;\ 1/3]$. **6.Б.7.** $(-1)^n \arcsin 1/3 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

§ 6.В. РАСЩЕПЛЕНИЕ СИСТЕМЫ

Подобно тому как расщепляется уравнение или неравенство, производится и расщепление системы в случае, если хотя бы одно ее уравнение или неравенство удается привести к соответствующему виду (см. § 2.Г, 3.Б). При этом все остальные условия переносятся в каждую систему из получающейся совокупности.

6.В.1 (мехмат — 84). Решить систему

$$\begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3 \cdot 2^{y+3x}, \\ \sqrt{3x^2 + 1 + xy} = \sqrt{x+1}. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} 2^{3x+1}+2^{y-2}=3\cdot 2^{y+3x}, \\ 3x^2+1+xy=x+1, \\ x+1\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{3x+1}+2^{y-2}=3\cdot 2^{y+3x}, \\ x(3x+y-1)=0, \\ x\geqslant -1. \end{cases}$$

Система равносильна совокупности систем:

1) $$\begin{cases} x=0, \\ 2+2^{y-2}=3\cdot 2^{y}, \\ 0\geqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ 11\cdot 2^{y}=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=\log_2\frac{8}{11}; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} 3x=1-y, \\ 3x\geqslant -3, \\ 2^{2-y}+2^{y-2}=3\cdot 2^{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=1-y, \\ 1-y\geqslant -3, \\ (2^{2-y})^2-6\cdot 2^{2-y}+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x=1-y, \\ 2-y\geqslant -2, \\ \left(2^{2-y}-(3+\sqrt{8})\right)\left(2^{2-y}-(3-\sqrt{8})\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x=1-y, \\ 2^{2-y}\geqslant \frac{1}{4}, \\ 2^{2-y}=3+\sqrt{8}, \text{ так как } 3-\sqrt{8}<\frac{1}{4} \ (\text{ибо } 121<128\Rightarrow \\ \qquad\qquad \Rightarrow 3\cdot 4-1<4\sqrt{8}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2-\log_2(3+\sqrt{8}), \\ x=\frac{1}{3}\left(\log_2(3+\sqrt{8})-1\right). \end{cases}$$

Ответ: $\left(0;\ \log_2\frac{8}{11}\right)$, $\left(\frac{1}{3}\log_2\frac{3+\sqrt{8}}{2};\ 2-\log_2(3+\sqrt{8})\right)$.

Характерно, что на экзамене многие абитуриенты, видимо, по невнимательности (или из-за страстного желания выразить y через x) выпустили из рассмотрения случай $x=0$ и вследствие этого потеряли одно решение системы. Другие абитуриенты не добавили условие $x+1\geqslant 0$ (или $3x^2+1+xy\geqslant 0$) после возведения в квадрат второго уравнения исходной системы, расширив тем самым ОДЗ этого уравнения и приобретя лишнее решение. Наконец, некоторые абитуриенты все же добавили указанное условие, но либо не проверили его для получившихся двух значений $x=\frac{1}{3}\log_2\frac{3\pm\sqrt{8}}{2}$, либо не смогли превратить его в условие на y (это сделано, например, в приведенном выше тексте решения задачи 6.В.1).

В следующей задаче расщеплению системы предшествует некоторая предварительная ее обработка.

6.В.2 (ВМК — 77). Решить систему

$$\begin{cases} \sin^2(-2x)-\left(3-\sqrt{2}\right)\operatorname{tg}5y=\left(3\sqrt{2}-1\right)/2, \\ \operatorname{tg}^2 5y+\left(3-\sqrt{2}\right)\sin(-2x)=\left(3\sqrt{2}-1\right)/2. \end{cases}$$

Если обозначить $u=\sin(-2x)$, $v=\operatorname{tg}5y$, то исходная система приобретет вид

$$\begin{cases} u^2-\left(3-\sqrt{2}\right)v=\left(3\sqrt{2}-1\right)/2, \\ v^2+\left(3-\sqrt{2}\right)u=\left(3\sqrt{2}-1\right)/2, \\ |u|\leqslant 1. \end{cases}$$

Ни одно из двух уравнений само по себе не расщепляется. Именно этот момент вызвал наибольшее затруднение на экзамене, где в основном предпринимались попытки исключить из системы одну неизвестную (приводящие к малоприятному уравнению четвертой степени). В данном случае расщепляется разность уравнений полученной системы

$$u^2-v^2-\left(3-\sqrt{2}\right)(u+v)=0 \Leftrightarrow (u+v)\left(u-v-3+\sqrt{2}\right)=0.$$

Таким образом, система равносильна совокупности систем:

1) $\begin{cases} v=-u, \\ u^2+\left(3-\sqrt{2}\right)u=\left(3\sqrt{2}-1\right)/2, \\ |u|\leqslant 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} v=u-3+\sqrt{2}, \\ u^2-\left(3-\sqrt{2}\right)\left(u-3+\sqrt{2}\right)=\left(3\sqrt{2}-1\right)/2, \\ |u|\leqslant 1, \end{cases}$

каждая из которых уже вполне приспособлена для решения.

Ответ: $\left((-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{2}n;\ -\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{5}m\right)$, $n, m\in\mathbf{Z}$.

Задачи

6.В.3. Решить систему:

а) (психфак — 81) $\begin{cases} x-y+\sqrt{x^2-4y^2}=2, \\ x^5\sqrt{x^2-4y^2}=0; \end{cases}$

б) (психфак — 80) $\begin{cases} 2u+v=7, \\ |u-v|=2; \end{cases}$

в) (экономфак — 80) $\begin{cases} 3x^2+2xy-9x-4y+6=0, \\ 5x^2+2xy-12x-4y+4=0; \end{cases}$

г) (филол. ф-т — 82) $\begin{cases} x^2-4xy+y^2=3, \\ y^2-3xy=2; \end{cases}$

д) (мехмат — 84) $\begin{cases} \log_6(3+2x)\cdot\log_6(6-y)=1+\log_6(4x+y), \\ \sqrt{x^2+3y}=x+y; \end{cases}$

е) (мехмат — 81) $\begin{cases} \sqrt{\sin x}\cos y=0, \\ 2\sin^2 x-\cos 2y-2=0; \end{cases}$

ж) (ВМК — 77) $\begin{cases} \cos^2 4x+\dfrac{\sqrt{26}-2}{2}\operatorname{tg}(-2y)=\dfrac{\sqrt{26}-1}{4}, \\ \operatorname{tg}^2(-2y)-\dfrac{\sqrt{26}-2}{2}\cos 4x=\dfrac{\sqrt{26}-1}{4}; \end{cases}$

з) (химфак — 85) $\begin{cases} |x-y|-\log_2^2(|x|+y+1)+6=0, \\ (x-y)^2-6(x-y)\log_2(|x|+y+1)+ \\ \quad +5\log_2^2(|x|+y+1)=0; \end{cases}$

и) (химфак — 79) $\begin{cases} y\sin x=\log_2\left|\dfrac{y\sin x}{1+3y}\right|, \\ |y|\leqslant 1, \\ (6y^2+2y)(4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x})=25y^2+6y+1; \end{cases}$

к) (биофак — 79)

$$\begin{cases} (\sqrt{3}+1)(1+\cos(xy)\sin(xy))=(\sqrt{3}+1)\sin^2(xy)+\cos(2xy), \\ x^2y^2-y^2+1=0, \\ 1/x^2+y^2\leqslant 6; \end{cases}$$

л) (биофак — 84)

$$\begin{cases} y^4-4y^3-16y^2-8xy-4x^2+32y+64=0, \\ \sin(5\pi x)-\sqrt{x(x-6)+13}\cos\left(\pi\left(y^2+2x+\dfrac{1}{2}\right)\right)+ \\ \quad +\sin(\pi(2y^2-x))=0; \end{cases}$$

м) (ф-т почв. — 79) $\begin{cases} y^2-4xy+4y-1=0, \\ 3x^2-2xy-1=0, \\ xy>0. \end{cases}$

6.В.4. (геогр. ф-т — 84). Найти все значения α, при которых система

$$\begin{cases} y(\alpha x+1)+13x-\alpha(1+y)=0, \\ x-xy+|2+y|=0 \end{cases}$$

имеет решения.

6.В.3. а) $(4;\ 2)$, $(4/3;\ -2/3)$; б) $(3;\ 1)$, $(5/3;\ 11/3)$; в) $(-1/2;\ 9/4)$, $(2;\ y)$, $y\in(-\infty;\ \infty)$; г) $\left(-\sqrt{2}/2;\ \sqrt{2}/2\right)$, $\left(\sqrt{2}/2;\ -\sqrt{2}/2\right)$; д) $(3/22;\ 0)$, $\left(\frac{1}{2}6^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}-\frac{3}{2};\ 6-6^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)$; е) $((-1)^n\pi/4+\pi n;\ \pi/2+\pi m)$, $n,\ m\in\mathbf{Z}$; ж) $\left(\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n;\ -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}m\right)$, $n,\ m\in\mathbf{Z}$; з) $(5;\ 2)$, $(93/2;\ 33/2)$; и) $(\pi/2+2\pi n;\ -1)$, $n\in\mathbf{Z}$; к) $\left(-\pi/\sqrt{\pi^2+16};\ \sqrt{\pi^2+16}/4\right)$, $\left(\pi/\sqrt{\pi^2+16};\ -\sqrt{\pi^2+16}/4\right)$, $\left(-\pi/\sqrt{\pi^2+9};\ \sqrt{\pi^2+9}/3\right)$, $\left(\pi/\sqrt{\pi^2+9};\ -\sqrt{\pi^2+9}/3\right)$; л) $(4-y^2/2;\ y)$, $y\in(-\infty;\ \infty)$; $\left((n-\left(1\pm\sqrt{5+n/2}\right)^2)/2;\ 1\pm\sqrt{5+n/2}\right)$, $n\in\mathbf{Z}\cap[-10;\ \infty)$; м) $(1;\ 1)$.

6.В.4. $(-\infty;\ -10)\cup(1/2,\ \infty)$.

§ 6.Г. ПОДСТАНОВКА

О подстановке как об основном приеме для исключения неизвестных в системе знают, пожалуй, все поступающие. Более того, обычно подстановка считается чуть ли не панацеей от всех бед, универсальным, хотя и «топорным» приемом, позволяющим решать практически любую систему. «Что может быть проще, — рассуждают многие поступающие, — чем выразить какую-либо неизвестную через остальные и подставить полученное выражение везде, где только можно?»

В настоящем параграфе разберем вопрос о том, какие препятствия и подводные камни поджидают авторов такого рассуждения при реализации намеченного плана действий. Во-первых, не всегда возможно непосредственно из какого-либо условия исходной системы выразить одну неизвестную через другие (см. задачу 6.А.3). Во-вторых, если это и возможно, то не факт, что полученная в результате первой пришедшей на ум подстановки система окажется проще исходной (см. задачу 6.В.2). В-третьих, сама процедура выражения неизвестной через остальные бывает сопряжена с некими дополнительными хлопотами, возникающими из-за вынужденного деления на что-то (см. задачу 6.А.2), извлечения квадратного корня из чего-то и т. д.

6.Г.1 (экономфак — 79). Решить систему

$$\begin{cases} 3x^2+2y^2-3x+5y=3,\\ 4{,}5x^2+3y^2-3x+8y=7. \end{cases}$$

Из любого уравнения системы можно сразу выразить как x через y, так и y через x. Но о таком способе решения даже и говорить не хочется, поскольку при этом возникает довольно сложное уравнение с радикалами. В данном случае имеет смысл внимательно изучить оба уравнения системы, сравнить их друг с другом и заметить, что коэффициенты при квадратах неизвестных у них пропорциональны. Это наблюдение позволяет избавиться от указанных квадратов с помощью вычитания утроенного первого уравнения из удвоенного второго

$$y+3x=5.$$

Теперь уже подстановка $y=5-3x$, скажем, в первое уравнение системы приводит к желаемому результату.

Ответ: $(2;\ -1)$, $\left(\frac{12}{7};\ -\frac{1}{7}\right)$.

Таким образом, подстановка подстановке рознь — не всегда разумно хвататься за первую же бросающуюся в глаза, так сказать, лобовую подстановку, но иногда бывает полезно потратить усилия на поиск более удобного способа решения.

В заключение поговорим об одной простой, но важной, на наш взгляд, модификации подстановки. Речь пойдет о ситуациях, когда нет необходимости выражать в явном виде одну неизвестную через другие, а достаточно ограничиться *частичной подстановкой* вместо некоторого выражения F равного ему (в силу какого-либо уравнения $F=G$, входящего в систему) выражения G. Так, при решении задачи 6.Б.3 к сильному упрощению системы привела подстановка $\sin x\cos y=-\frac{1}{2}$ в уравнение

$$\frac{\sin x\cos y}{\cos x\sin y}=1.$$

Заметим, что здесь была произведена именно частичная подстановка: вместо всего блока $\sin x\cos y$ была подставлена константа при сохранении в прежнем виде остальных выражений, входящих в уравнение.

Никто не собирался выражать ни x через y (одна лишь мысль о такой подстановке приводит в содрогание), ни даже $\sin x$ через $\cos y$. Да и зачем же, спрашивается, нужна двойная работа — сначала разъединять неизвестные, а потом собирать их в исходном выражении?

6.Г.2 (ф-т почв. — 80). Решить систему

$$\begin{cases} x+y=7, \\ (x^2-y^2)(x-y)=175. \end{cases}$$

На экзамене задача решалась в основном прямой подстановкой $x=7-y$ или $y=7-x$, приводящей к квадратному уравнению. Тем не менее заслуживает внимания также и следующий, технически более изящный способ решения, основанный на частичной подстановке (см. также задачу 6.А.2).

Решение.

$$\begin{cases} x+y=7, \\ (x+y)(x-y)^2=175. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7, \\ 7(x-y)^2=175 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7, \\ (x-y)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7, \\ (x+y)^2-4xy=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7, \\ 49-4xy=25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7, \\ xy=6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=6, \\ y=1, \end{cases} \\ \begin{cases} x=1, \\ y=6. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: (6; 1), (1; 6).

Задачи

6.Г.3. Решить систему:

а) (физфак — 79) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \dfrac{1}{9}, \\ y-x=2; \end{cases}$

б) (психфак — 82) $\begin{cases} 2x+y=x^2+y^2-12, \\ 2^{x-2y}=256; \end{cases}$

в) (геол. ф-т — 83) $\begin{cases} \cos 4x + \sin 2y = -2, \\ x-y=2\pi; \end{cases}$

г) (филол. ф-т — 77) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 5-2\sqrt{6}, \\ x+y=\pi/4; \end{cases}$

д) (économфак — 79) $\begin{cases} 2x^2+y^2+x-2y=1, \\ 5x^2+2{,}5y^2+3x-4y=4; \end{cases}$

е) (ф-т почв. — 80) $\begin{cases} x-y=6, \\ x^3-y^3=126; \end{cases}$

ж) (филол. ф-т — 80) $\begin{cases} y-x=5, \\ zx=(z-4)y+30, \\ 2zx=(2z-4)y; \end{cases}$

з) (филол. ф-т — 83) $\begin{cases} y^2=4^x+8, \\ 2^{x+1}+y+1=0; \end{cases}$

и) (мехмат — 80) $\begin{cases} x^3-\sqrt{y}=1, \\ 5x^6-8x^3\sqrt{y}+2y=0; \end{cases}$

к) (экономфак — 77) $\begin{cases} x^{y+4x}=y^{5(y-x/3)}, \\ x^3=y^{-1}, \\ x>0, \\ y>0; \end{cases}$

л) (экономфак — 79) $\begin{cases} 4\sin y - 6\sqrt{2}\cos x = 5 + 4\cos^2 y, \\ \cos 2x = 0; \end{cases}$

м) (психфак — 77) $\begin{cases} (1 + 2\log_{|xy|} 2)\log_{x+y}|xy| = 1, \\ x - y = 2\sqrt{3}. \end{cases}$

6.Г.4. Найти все значения a, при которых система:

а) (физфак — 81) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a \end{cases}$

имеет единственное решение;

б) (экономфак — 78) $\begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)y = 6a - 2, \\ x + y = 1 \end{cases}$

не имеет ни одного решения.

Ответы

6.Г.3. а) $(-2; 0)$; б) $(2; -3)$, $(3{,}2; -2{,}4)$; в) $(7\pi/4 + \pi n; -\pi/4 + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$; г) $(-5\pi/24 + \pi n; \pi/24 - \pi n)$, $(\pi/24 + \pi m; 5\pi/24 - \pi m)$, n, $m \in \mathbf{Z}$; д) $(-1; 2)$, $(7/9; 10/9)$; е) $(5; -1)$, $(1; -5)$; ж) $(10; 15; 6)$; з) $(0; -3)$; и) $(\sqrt[3]{4}, 9)$; к) $(1; 1)$, $(2; 1/8)$; л) $(\pm 3\pi/4 + 2\pi n; (-1)^m \pi/6 + \pi m)$, n, $m \in \mathbf{Z}$; м) $\left(\frac{2\sqrt{3} + 3}{2}; \frac{3 - 2\sqrt{3}}{2}\right)$.

6.Г.4. а) $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$; б) $-2/3$.

§ 6.Д. МЕТОД ПРОВЕРКИ

Разобранный в § 6.Б метод равносильных преобразований системы позволяет как бы убивать сразу двух зайцев: искать все предполагаемые решения и одновременно избавляться от посторонних. В некоторых случаях бывает удобно эти две операции расчленить, т. е. сначала доказать, что решения системы обязаны удовлетворять каким-то очень жестким условиям (например, принадлежать конкретному, причем конечному множеству), а затем проверить, какие значения неизвестных, удовлетворяющие найденным условиям, в действительности задают решения системы. В этом и состоит метод проверки (см. § 2.В).

6.Д.1 (ф-т почв. — 79). Решить систему

$$\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0, \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим выражение, стоящее в левой части первого уравнения, и выделим в нем полный квадрат (см. § 1.Д), считая его квадратным трехчленом относительно x с коэффициентами, зависящими от y (для удобства вычислений предварительно умножим уравнение на 10):

$$100x^2-20xy-380x+50y^2-60y+410=$$

$$=((10x)^2-2\cdot 10x(y+19)+(y+19)^2)-(y^2+38y+361)+$$

$$+50y^2-60y+410=(10x-(y+19))^2+49y^2-98y+49=$$

$$=(10x-y-19)^2+49(y-1)^2.$$

Таким образом, из первого уравнения системы получаем следствие

$$\begin{cases} 10x-y-19=0, \\ y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1, \\ x=2. \end{cases}$$

Для завершения решения системы остается проверить, что набор (2; 1) удовлетворяет обоим уравнениям системы, т. е. справедливы два равенства:

$$10\cdot 4+5-2\cdot 2-38\cdot 2-6+41=0,$$

$$3\cdot 4-2+5\cdot 2-17\cdot 2-6+20=0.$$

Заметим, что первое равенство можно было не проверять, так как более тщательный анализ произведенных выше преобразований убеждает нас в самой настоящей равносильности первого уравнения и полученной системы.

Ответ: (2; 1).

Система из задачи 6.Д.1 может быть решена многими способами, но все они сводятся к одному — *получению каких-либо простых и содержательных следствий,* способствующих нахождению значений x и y.

В ряде задач следствия из исходной системы имеют вид неравенств, каждое из которых сужает круг возможных значений неизвестных. Если же оценок набирается достаточно много, то может случиться так, что неизвестные окажутся полностью определены. Не последнюю роль для получения каких бы то ни было неравенств играет умение выделить полный квадрат.

6.Д.2 (геогр. ф-т — 81). Решить систему

$$\begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0, \\ 2x^2-4x+3+y^3=0. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0, \\ 2x^2-4x+3+y^3=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} y\neq 0 \text{ (иначе } -2x=0 \text{ и } 2x^2-4x+3=0, \text{ что невозможно)},\\ (xy)^2-2xy\cdot\dfrac{1}{y}+\left(\dfrac{1}{y}\right)^2=\dfrac{1}{y^2}-y^2,\\ 2(x^2-2x+1)=-1-y^3\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left(xy-\dfrac{1}{y}\right)^2=\dfrac{1-y^4}{y^2},\\ 2(x-1)^2=-1-y^3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1-y^4\geqslant 0,\\ -1-y^3\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-1\leqslant y\leqslant 1,\\ y\leqslant -1\end{cases}\Rightarrow y=-1.$$

Следовательно, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases}x^2y^2-2x+y^2=0,\\ 2x^2-4x+3+y^2=0,\\ y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+1=0,\\ 2x^2-4x+2=0,\\ y=-1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2=0,\\ y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1,\\ y=-1.\end{cases}$$

Ответ: $(-1;\ 1)$.

«Позвольте, — воскликнет читатель, познакомившись с приведенным выше решением задачи 6.Д.2, — а где же, собственно, обещанная проверка?» Проверки нет. Она заменена следующим рассуждением: так как из исходной системы следует равенство $y=-1$, то в нее это равенство можно смело добавить, а полученная в результате система будет равносильна исходной (см. принцип обратимости из § 6. Б). Такое рассуждение позволяет сразу найти x и заодно проверить получающийся ответ (ведь пока что было найдено только значение y, а значит, и проверять-то было нечего).

Таким образом, проверка как таковая не всегда столь уж необходима. Ее можно понимать в более широком смысле. Да и делать ее необязательно в конце решения, а, например, на промежуточном его этапе, избавляясь тем самым от двойной работы, связанной с попеременным выполнением взаимно обратных операций.

6.Д.3 (психфак — 84). Решить систему

$$\begin{cases}4^{x+y-1}+3\cdot 4^{2y-1}\leqslant 2,\\ x+3y\geqslant 2-\log_4 3.\end{cases}$$

Решение. $\begin{cases}4^{x+y-1}+3\cdot 4^{2y-1}\leqslant 2,\\ 4^{x+3y}\geqslant 4^{2-\log_4 3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4^{x+y}+3\cdot 4^{2y}\leqslant 8,\\ 4^{x+y}\cdot 3\cdot 4^{2y}\geqslant 16.\end{cases}$

Обозначим $u=4^{x+y}$, $v=3\cdot 4^{2y}$:

$$\begin{cases} u+v\leqslant 8, \\ uv\geqslant 16, \\ u>0, \\ v>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (u+v)^2\leqslant 64, \\ -4uv\leqslant -64 \end{cases} \Rightarrow (u+v)^2-4uv\leqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (u-v)^2\leqslant 0 \Rightarrow u=v.$$

Следовательно, система равносильна следующей:

$$\begin{cases} u+v\leqslant 8, \\ uv\geqslant 16, \\ u=v, \\ u>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u\leqslant 8, \\ u^2\geqslant 16, \\ u=v, \\ u>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<u\leqslant 4, \\ u\geqslant 4, \\ u=v \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=4, \\ v=u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4, \\ v=4. \end{cases}$$

Возвращаемся к x и y:

$$\begin{cases} 4^{x+y}=4, \\ 3\cdot 4^{2y}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1, \\ 2y=1-\log_4 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log_4 3, \\ x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_4 3 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_4 3;\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log_4 3\right)$.

Для решения систем иногда применяется и метод подбора (см. § 2.В).

Задачи

6.Д.4. Вытекают ли из системы

$$\begin{cases} F_1=G_1, \\ F_2=G_2 \end{cases}$$

следующие соотношения:

а) $F_1+F_2=G_1+G_2$;

б) $F_1-F_2=G_1-G_2$;

в) $F_1F_2=G_1G_2$;

г) $F_1/F_2=G_1/G_2$;

д) $F_1G_2=G_1F_2$?

6.Д.5. Вытекают ли из системы

$$\begin{cases} F_1\geqslant G_1, \\ F_2\geqslant G_2 \end{cases}$$

следующие соотношения:

а) $F_1+F_2>G_1+G_2$;

б) $F_1-F_2\geqslant G_1-G_2$;

в) $F_1-G_2>G_1-F_2$;

г) $F_1F_2>G_1G_2$;

д) $F_1/F_2\geqslant G_1/G_2$?

6.Д.6. Верен ли переход:

а) $\begin{cases} F=G, \\ G=H \end{cases} \Rightarrow F=H$;

б) $\begin{cases} F\geqslant G, \\ G\geqslant H \end{cases} \Rightarrow F\geqslant H$;

в) $\begin{cases} F\geqslant G, \\ G\geqslant F \end{cases} \Leftrightarrow F=G$;

г) $\begin{cases} F_1\geqslant G_1, \\ F_2\geqslant G_2, \\ F_1+F_2\leqslant G_1+G_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1=G_1, \\ F_2=G_2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} F\geqslant 0, \\ F+G\leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F\geqslant 0, \\ G\leqslant 0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} F\geqslant G, \\ F\geqslant -G \end{cases} \Leftrightarrow F\geqslant |G|$?

6.Д.7. Решить систему:

а) $\begin{cases} xy-z, \\ xz=4y, \\ yz=9x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x+1)(y+2)=y+3, \\ x+1=(y+3)(x+4); \end{cases}$

в) $\begin{cases} x(y+z)=20, \\ y(x+z)=18, \\ z(x+y)=14; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=\sqrt{60y/x}, \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=\sqrt{2{,}4x/y}; \end{cases}$

д) (ф-т почв. — 79)

$$\begin{cases} x^2-2xy+2y^2+2x-8y+10=0, \\ 2x^2-7xy+3y^2+13x-4y-7=0; \end{cases}$$

е) (психфак — 84)

$$\begin{cases} 3^{x+2y-1}+2\cdot 3^{3y-1}\leqslant 2, \\ x+5y\geqslant 2-\log_3 2; \end{cases}$$

ж) (психфак — 79)

$$\begin{cases} 2\log_{1-x}(-xy-2x+y+2)+\log_{2+y}(x^2-2x+1)=6, \\ \log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4)=1; \end{cases}$$

з) (геогр. ф-т — 83)

$$\begin{cases} 2^{|x^2-2x-3|-\log_2 3}=3^{-y-4}, \\ 4|y|-|y-1|+(y+3)^2\leqslant 8; \end{cases}$$

и) (геогр. ф-т — 81)

$$\begin{cases} y^2-xy+1=0, \\ x^2+2x=-y^2-2y-1; \end{cases}$$

к) (геогр. ф-т — 80)

$$\begin{cases} \left|y+\frac{1}{x}\right|+\left|\frac{13}{6}+x-y\right|=\frac{13}{6}+x+\frac{1}{x}, \\ x^2+y^2=97/36, \\ x<0, \\ y>0; \end{cases}$$

л) (химфак — 78)

$$\begin{cases} y+2=(3-x)^3, \\ (2z-y)(y+2)=9+4y, \\ x^2+z^2=4x, \\ z\geqslant 0. \end{cases}$$

6.Д.8 (химфак — 83). Указать все целые значения m, при которых система

$$\begin{cases} x^2-4(2x-2-2m-m^2)=y(8-2x-y), \\ x^2-12x+40+y(y-2x+12)=4m(m-1) \end{cases}$$

имеет решения. Найти эти решения.

6.Д.9 (мехмат — 78). Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} x^2+2xy-7y^2 \geqslant \dfrac{1-a}{a+1}, \\ 3x^2+10xy-5y^2 \leqslant -2 \end{cases}$$

имеет решение.

Ответы

6.Д.4. а)—в), д) да; г) нет. 6.Д.5. а), в) да; б), г), д) нет. 6.Д.6. а)—г), е) да; д) нет. 6.Д.7. а) $(0; 0; 0)$, $(2; 3; 6)$, $(-2; -3; 6)$, $(2; -3; -6)$, $(-2; 3; -6)$; б) $(-1; -3)$; в) $(4; 3; 2)$, $(-4; -3; -2)$; г) $(10; 6)$; д) $(2; 3)$; е) $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\right.$ $\left.\times\log_3 2; \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\log_3 2\right)$; ж) $(-2; 1)$; з) $(-1; -3)$, $(3; -3)$; и) $(-2; -1)$; к) $(-3/2; 2/3)$, $(-2/3; 3/2)$; л) $(4; -3; 0)$, $(2; -1; 2)$. 6.Д.8. $(6+\sqrt{2}; \sqrt{2}-2)$, $(6-\sqrt{2}; -2-\sqrt{2})$, $(4+\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(4-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$. 6.Д.9. $(-\infty; -1)$.

ГЛАВА 7. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

§ 7.А. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Текстовые задачи по своему содержанию наиболее близки к практической деятельности человека. Они проверяют не только умение решать уравнения, неравенства или системы, но и выводить сами исходные соотношения, придавать математический смысл описанным в условии ситуациям и, наоборот, разумный реальный смысл выведенным числовым соотношениям — словом, все то, что по существу необходимо любому будущему специалисту. В связи с этим текстовые задачи довольно часто предлагаются на вступительных экзаменах в любые вузы.

Что же собой представляют текстовые задачи с математической точки зрения? Подчеркнем, что пока речь пойдет о стандартной, в известном смысле, текстовой задаче, в которой описывается определенная ситуация, и нужно найти ту или иную величину, однозначно задаваемую условием задачи (о других разновидностях текстовой задачи будет рассказано в § 7.Е). От абитуриента на экзамене требуется найти эту величину, причем не просто угадать или, тем более, указать предположительное значение искомой величины, но доказать, что найденное значение единственно возможное. Доказательством служит текст решения, в котором обычно условие задачи переводится на язык уравнений, неравенств и т. п., содержащих одну или несколько неизвестных величин и позволяющих вывести ответ на поставленный в задаче вопрос. Ответ к текстовой задаче, на наш взгляд, должен даваться по возможности в более краткой и ясной форме.

7.А.1. Автобус вез несколько пассажиров. На остановке из автобуса вышли 6 человек и 20 человек зашли в автобус. На следующей остановке вышли 4 человека и зашли 10 человек, после чего число пассажиров в автобусе оказалось равным квадрату исходного числа пассажиров. Сколько пассажиров было в автобусе первоначально?

Решение. Пусть x — количество пассажиров, находящихся в автобусе первоначально. Тогда

$$\begin{cases} x-6+20-4+10=x^2 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-5)(x+4)=0, \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x=5.$$

Ответ: 5.

В приведенном решении доказано, что если условие задачи выполнено, то искомая величина может быть равна только 5. «Минуточку! Проверка показывает, что ответ неверен, — возразит догадливый читатель. — Как же это могло случиться, что при наличии в автобусе ровно 5 пассажиров из него вышли 6 человек?» С другой стороны, полученный ответ единствен, он вытекает из условия задачи и, стало быть, является верным ответом к задаче. Именно это и требовалось доказать, именно в этом состоит математическая постановка стандартной текстовой задачи. Заниматься же объяснением того, как могла произойти описанная в задаче ситуация (на первой остановке, например, мог временно выйти также и водитель автобуса), абитуриент не обязан. В условии ясно сказано, сколько и когда вышло и зашло человек, а значит, положение дел было именно таковым, и этому надо верить. Надеемся все же, что на экзамене подобная двусмысленная ситуация никогда не возникнет — об этом должны побеспокоиться составители задачи.

Попутно мы затронули важный вопрос о роли проверки ответа при решении текстовой задачи. Некоторые поступающие считают, что проверка является обязательным элементом обоснования правильности ответа. Не пытаясь разубеждать их в этом, отметим, однако, что, по нашему глубокому убеждению, *проверка единственного ответа в стандартной текстовой задаче не нужна*. С точки зрения логики абитуриенту достаточно лишь обоснованно отбросить все не удовлетворяющие условию значения неизвестной величины. И если в результате останется ровно одно значение, то оно автоматически включается в ответ: ведь какое-то значение неизвестная величина должна была принимать в реальной (точнее, мыслимой) ситуации, сформулированной в задаче.

Проверка ответа отнимает у абитуриентов немало сил, требуя от них порой дополнительной изобретательности, а иногда она по существу просто невозможна. Поэтому понимание того факта, что проверка не необходима, существенно облегчает решение многих задач и, в частности, следующей, где для проверки имеется слишком мало данных.

7.А.2 (психфак — 78). Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда велосипедист и мотоциклист находились в одной точке, пешеход был на расстоянии 10 км впереди них. В тот момент, когда мотоциклист догнал пешехода, велосипедист отставал от них на 5 км. На сколько километров мотоциклист будет обгонять пешехода в тот момент, когда пешехода настигнет велосипедист?

На экзамене подавляющее большинство абитуриентов ввело 5—6 неизвестных (типа: x, y и z — скорости (в км/ч) пешехода, велосипедиста и мотоциклиста соответственно, t_1, t_2 и t_3 — моменты времени (в ч), когда в одной точке находились велосипедист и мотоциклист, мотоциклист и пешеход и, соответственно, будут находиться пешеход и велосипедист). Составив систему, содержащую три независимых уравнения, многие принялись за поиск всех введенных ими неизвестных, которые в данном случае определить было невозможно, и, следовательно, все такие попытки были заранее обречены на провал. Часть абитуриентов заметила, что искать-то надо лишь одну величину (при указанных выше обозначениях требовалось найти величину $z(t_3-t_2)-x(t_3-t_2)$ из системы

$$\begin{cases} z(t_2-t_1)=x(t_2-t_1)+10, \\ y(t_2-t_1)=x(t_2-t_1)+5, \\ y(t_3-t_2)=x(t_3-t_2)+5, \end{cases}$$

что, разумеется, не сразу видно, как сделать). Однако и упомянутые абитуриенты также весьма слабо преуспели в этом деле, вконец запутавшись в выкладках. Тем не менее из полученной системы ответ, конечно, можно найти (переобозначив для удобства $u=y-x$, $v=z-x$, $\tau=t_2-t_1$, $\theta=t_3-t_2$, получаем

$$\begin{cases} v\tau=10, \\ u\tau=5, \\ u\theta=5 \end{cases} \rightarrow v\theta=\frac{v\tau\cdot u\theta}{u\tau}=10,$$

т. е. искомая величина равна 10).

Ответ: 10.

В связи с обсуждением задачи 7.А.2 отметим, что не следует пренебрегать таким методом решения текстовых задач, как *прямое вычисление искомой величины* (без составления уравнений или неравенств) с помощью последовательных умозаключений, оперирующих одними лишь известными значениями.

Так, задача 7.А.2 допускает следующее устное, по сути, решение, основанное на исследовании относительного движения: когда велосипедист продвинулся относительно пешехода на 5 км, мотоциклист продвинулся относительно пешехода на 10 км (догнав его); поэтому, когда велосипедист продвинется относительно пешехода еще на 5 км (догнав его), мотоциклист относительно пешехода продвинется еще на 10 км вперед — это и есть ответ задачи.

Абитуриенты незаслуженно обходят стороной названный метод, хотя его применение часто оказывает полезную услугу уже на этапе перевода условия задачи на язык соотношений, существенно упрощая получающуюся при этом систему.

Задачи

7.А.3. Цена на товар была повышена на 25%. На сколько процентов надо после этого ее снизить, чтобы получить первоначальную цену товара?

7.А.4 (физфак — 78). Руда содержит 40% примесей, а выплавленный из нее металл содержит 4% примесей. Сколько получится металла из 24 т руды?

7.А.5. Ежегодный прирост населения города составляет 20%. Через сколько лет население города удвоится?

7.А.6. Выработка продукции за год работы предприятия возросла на 8%, а за следующий год она увеличилась на 47%. Найти средний годовой прирост продукции за этот период.

7.А.7. Автомобиль с грузом ехал из одного города в другой со скоростью 60 км/ч, а возвращался обратно порожняком со скоростью 100 км/ч. Найти среднюю скорость автомобиля.

7.А.8. Поезд прошел мимо наблюдателя за 6 с, а по мосту длиной 350 м проходил в течение 20 с. Найти скорость и длину поезда.

7.А.9 (психфак — 78). Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был на расстоянии 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обогнал пешехода в тот момент, когда пешехода настиг мотоциклист?

7.А.10. Два парохода плыли по морю навстречу друг другу с одинаковыми скоростями. В тот момент, когда между ними оставалось 3 км, от одного из них навстречу другому отошел катер со скоростью, вдвое большей скорости парохода. Дойдя до встречного парохода, катер немедленно повернул в обратную сторону и далее продолжал курсировать между пароходами до тех пор, пока они не встретились. Сколько километров прошел в итоге катер?

7.А.11 (геол. ф-т — 80). В гору ехал автомобиль. В первую секунду после достижения пункта A он проехал 30 м, а в каждую следующую секунду он проезжал на 2 м меньше, чем в предыдущую. Через 9 с после того, как автомобиль достиг пункта A, навстречу ему выехал автобус из пункта B, находящегося на расстоянии 258 м от пункта A. В первую секунду автобус проехал 2 м, а в каждую следующую секунду он проезжал на 1 м больше, чем в предыдущую. Какое расстояние проехал автобус до встречи с автомобилем?

7.А.12 (геол. ф-т — 80). Магазин радиотоваров продал в первый рабочий день месяца 105 телевизоров. Каждый следующий рабочий день дневная продажа возрастала на 10 телевизоров, и месячный план — 4000 телевизоров — был выполнен досрочно, причем в целое число рабочих дней. После этого ежедневно продавалось на 13 телевизоров меньше, чем в день выполнения месячного плана. На сколько процентов был перевыполнен месячный план продажи телевизоров, если в месяце 26 рабочих дней?

7.А.13 (экономфак — 80). Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй — 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30% цинка. Определить, сколько килограммов олова содержится в получившемся новом сплаве.

7.А.14. В соревновании участвовало несколько команд, каждая из которых провела по одной игре со всеми остальными. Сколько команд участвовало в соревновании, если всего было проведено 45 игр?

7.А.15 (филол. ф-т — 78). В Изумрудном городе автобусные билеты имеют шестизначные номера от 000001 до 999999. Школьники считают билет счастливым, если первые три его цифры нечетны и различны, вторые три цифры четны, причем цифры 7 и 8 не стоят рядом. Сколько всего существует различных номеров счастливых билетов?

Ответы

7.А.3. 20%. **7.А.4.** 15 т. **7.А.5.** 4. **7.А.6.** 26%. **7.А.7.** 75 км/ч. **7.А.8.** 90 км/ч; 150 м. **7.А.9.** 2. **7.А.10.** 3. **7.А.11.** 20 м. **7.А.12.** 42,3%. **7.А.13.** 170. **7.А.14.** 10. **7.А.15.** 7200.

§ 7.Б. РАБОТА С НЕИЗВЕСТНЫМИ

Одним из важных этапов решения текстовой задачи следует признать выбор неизвестных. От того, насколько удачен этот выбор, иногда существенно зависит сложность предстоящей работы над задачей. Поэтому имеет смысл поговорить об этом подробнее.

Основное элементарное соображение состоит в том, что набор неизвестных должен быть достаточным для перевода условия задачи на язык соотношений с целью нахождения искомой величины. Сюда же следует отнести и пожелание компактности вводимого набора: лишних неизвестных, без которых можно обойтись, лучше не заводить, ибо они только загромождают получающуюся систему и затрудняют ее исследование. Это понимают обычно все абитуриенты. Но именно стремление к излишней компактности приводит порой к логическим ошибкам на экзамене.

7.Б.1 (ф-т почв. — 83). Поле разделено на три участка. За день вспаханы половина первого участка и 3/4 второго участка, а третий участок, который составляет четвертую часть всего поля, вспахан полностью. Вспаханная за день площадь поля в два раза больше площади второго участка. Какую часть площади поля составляет площадь, вспаханная за день?

Часть абитуриентов рассуждала так: «Поскольку площадь поля не дана, то пусть она равна, например, 1 га». И несмотря на то что эти абитуриенты получили правильный ответ, их решение нельзя было признать безупречным. Главной логической ошибкой было ограничение общности поставленной задачи, выразившееся в рассмотрении одного лишь частного случая. Ведь полученный этими абитуриентами результат следовало читать так: если в дополнение к условиям задачи предположить, что площадь поля равна 1 га, то искомая величина равна тому-то. А если площадь поля на самом деле другая? Да и какая необходимость, собственно говоря, в наложенном ограничении? Ведь задача решается и в общей постановке.

Р е ш е н и е. Пусть площадь поля равна s га, площадь первого участка — x га, площадь второго участка — y га. Тогда

$$\begin{cases} x+y+\dfrac{s}{4}=s, \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{3y}{4}+\dfrac{s}{4}=2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3s}{4}-y, \\ \dfrac{3s}{8}-\dfrac{y}{2}+\dfrac{3y}{4}+\dfrac{s}{4}=2y \end{cases} \Rightarrow 5s=14y.$$

Часть поля, вспаханная за день, равна

$$\frac{2y}{s}=\frac{5\cdot 2y}{14y}=\frac{5}{7}.$$

Ответ: 5/7.

В связи с задачей 7.Б.1 возникает естественный вопрос: в каких единицах в данном случае нужно измерять площадь? Что изменится, если избрать не гектары, а другие единицы? В этом вопросе давным-давно полная ясность: достаточно, чтобы единицы измерения были полностью систематизированы, т. е. чтобы на протяжении всего решения однородные величины выражались в одних и тех же, а разнородные — в согласованных друг с другом единицах. Можно представить себе, какая бы получалась неразбериха, если бы над неизвестными понадобилось выполнить действия типа x (км) $+y$ (м) или t (мин) $\cdot v$ (км/ч).

Таким образом, в задаче 7.Б.1 гектары не играют принципиальной роли. С равным успехом можно было использовать ары, квадратные метры и любые другие единицы площади. Наиболее радикальное решение вопроса о выборе единиц состоит в том, чтобы мерить площадь сразу «полями», т. е. принять за единицу измерения площадь самого поля. Тогда величины x и y означали бы те доли этой единицы, которые составляют соответственно первый и второй участки. При этом решение задачи даже несколько упростилось бы.

Заметим, что в системе, составленной при решении задачи 7.Б.1, содержалось три неизвестных, но всего два уравнения. Это обстоятельство обескуражило некоторых абитуриентов, уверивших себя в том, что количество уравнений обязательно должно совпадать с количеством неизвестных. В противном случае, по их мнению, неизвестные найти нельзя, а значит, и задачу не решить. Как мы видели, задача тем не менее была решена, хотя значения неизвестных невозможно было найти в принципе. Такое положение дел является частым на вступительных экзаменах, и к нему надо быть готовым. Бывают, однако, и прямо противоположные ситуации, как, например, в следующей задаче.

7.Б.2 (геогр. ф-т — 77). Грузовик и гоночный автомобиль выехали одновременно из пункта A и должны прибыть в пункт C. Грузовик, двигаясь с постоянной скоростью, доехал до пункта C, проделав путь, равный 360 км. Гоночный автомобиль поехал по окружной дороге и сначала доехал до пункта B, расположенного в 120 км от пункта A, двигаясь со скоростью, вдвое большей скорости грузовика. После пункта B он увеличил свою скорость на 40 км/ч и проехал путь от пункта B до пункта C, равный 1000 км.

Он прибыл в пункт C на 1 ч 15 мин позднее грузовика. Если бы гоночный автомобиль весь свой путь от пункта A до пункта C ехал с той же скоростью, что и от пункта B до пункта C, то в пункт C он прибыл бы на 1 ч позднее грузовика. Найти скорость грузовика.

Обозначив через x скорость (в км/ч) грузовика, абитуриенты получили систему из двух уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{120}{2x} + \dfrac{1000}{2x+40} = \dfrac{360}{x} + \dfrac{5}{4}, \\ \dfrac{1120}{2x+40} = \dfrac{360}{x} + 1 \end{cases}$$

с одной неизвестной. Некоторые абитуриенты оставили задачу совсем, решив, что они чего-то не поняли, но так и не нашли ошибки в своих рассуждениях (ведь ошибки никакой не было). Другие стали решать каждое из двух уравнений, выбрав их общий корень. Третьи упростили работу, решив только одно уравнение и проверив, какой из его корней удовлетворяет другому уравнению. А можно было не решать ни одного из этих уравнений, если только взглянуть на систему как на единое целое (см. § 6.А):

$$\begin{cases} \dfrac{500}{x+20} - \dfrac{300}{x} = \dfrac{5}{4}, \\ \dfrac{560}{x+20} - \dfrac{360}{x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{100}{x+20} - \dfrac{60}{x} = \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{60}{x+20} - \dfrac{60}{x} = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{40}{x+20} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 60.$$

Ответ: 60 км/ч.

Весь фокус основан на той самой идее (см. § 7.А), что для решения достаточно доказать непригодность всех значений исходной величины, кроме одного, составляющего ответ к задаче. А раз так, то зачем же, спрашивается, искать другие значения неизвестной, и, в частности, другие корни уравнений системы?

7.Б.3 (экономфак — 79). Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года 5/6 некоторого количества денег положили в первый банк, а оставшуюся часть — во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равна 670 денежным единицам, к концу следующего года — 749 денежным единицам. Было подсчитано, что если бы первоначально 5/6 исходного капитала положили во второй банк, а оставшуюся часть в первый банк, то по истечении одного года сумма вклада в эти банки стала бы равной 710 денежным единицам. В предположении, что исходное количество денег первоначально целиком положено в первый банк, определить величину вклада по истечении двух лет.

Находясь в плену первой фразы, стоящей в условии задачи, многие абитуриенты решили, что наиболее естественно в данной задаче обозначить буквами, скажем x и y, неизвестные проценты, на которые за год вырастает вклад в первом и втором банке соответственно. Тогда за год вклад умножается на коэффициент $1+$ $+x/100$ в первом банке и на $1+y/100$ — во втором. В дальнейшем эти коэффициенты пришлось возводить в квадрат и, вообще, неизвестные x и y всюду участвовали только в приведенной выше комбинации чисел (не заметившие этого абитуриенты столкнулись с непреодолимыми трудностями). Куда проще было обозначить через x и y сами эти коэффициенты. Тогда, если z — исходное количество денег, то имеет место система

$$\begin{cases} \frac{5}{6} zx + \frac{1}{6} zy = 670, \\ \frac{5}{6} zx^2 + \frac{1}{6} zy^2 = 749, \\ \frac{1}{6} zx + \frac{5}{6} zy = 710, \end{cases}$$

из которой нужно найти величину zx^2.

Сама по себе система также вызвала затруднение у ряда абитуриентов в основном из-за неумения проводить выкладки экономно и аккуратно (в частности, к довольно неприятным вычислениям привел их метод исключения неизвестных). Здесь можно было сначала сосчитать значения $zx = 660$ и $zy = 720$ из первого и третьего уравнения системы, затем отношение $\frac{x}{y} = \frac{zx}{zy} = \frac{11}{12}$, а после частичной подстановки во второе уравнение

$$550x + 120y = 749$$

— сами числа $x = 1{,}1$ и $y = 1{,}2$ и, наконец, искомую величину $zx^2 = zx \cdot x = 726$.

Ответ: 726 денежных единиц.

Заметим, что неизвестная величина z в приведенном выше наброске решения задачи 7.Б.3 хотя и могла быть найдена, но так и осталась неизвестной — все усилия были направлены только на поиск значения zx^2 (если бы удалось найти это значение еще проще, без вычисления x и y, то лучше было бы так и сделать). Таким образом, вводимые неизвестные носят иногда ярко выраженный вспомогательный характер, т. е. призваны помочь нахождению искомой величины. Именно помочь, а не помешать, как это порой случается на экзаменах.

7.Б.4 (химфак — 81). Из города A в город B выехал автомобиль. Одновременно с ним из пункта C, расположенного между A и B, в город A выехал второй автомобиль. Первый прибыл в B одновременно с прибытием второго в A. Затем автомобили одновременно выехали навстречу друг другу, встретившись в пункте

D, и одновременно прибыли первый в A, второй в B. Каждый автомобиль ехал со своей постоянной скоростью, но второй сделал остановку на пути от C к A, а первый — остановку той же продолжительности на пути от B к D. Найти расстояние между C и D, если известно, что расстояние от A до C равно 270 км, а расстояние от C до B равно 180 км.

Обычно абитуриенты считают, что при выборе неизвестных целесообразно сначала выяснить, нельзя ли в качестве одной неизвестной взять саму искомую величину. И если можно, то это непременно делается. Так и поступили в основном абитуриенты, решавшие на экзамене задачу 7.Б.4, что привело их к необходимости разбора двух вариантов расположения пункта D: между пунктами A и C или между пунктами B и C. Неудачный выбор неизвестной сделал решение логически излишне сложным. Конечно, более тонкая интерпретация расстояния между пунктами C и D позволяет ограничиться одним вариантом, если придать разумный смысл знаку полученного расстояния. Однако можно и не прибегать к подобным ухищрениям, а попросту обозначить через s расстояние (в км) между пунктами A и D.

Существенные трудности вызвало у абитуриентов также и составление уравнений, особенно из-за наличия остановок неизвестной, хотя и одинаковой продолжительности на разных участках пути. Но и эту неприятность можно было обойти, разбив оба пути автомобилей на два участка: до пункта D и от пункта D до конечных пунктов. Так, если обозначить через x и y скорости (в км/ч) первого и второго автомобилей, то будет справедлива система

$$\begin{cases} \dfrac{450+(450-s)}{x}=\dfrac{270+s}{y}, \\ \dfrac{s}{x}=\dfrac{450-s}{y}, \end{cases}$$

из которой, к примеру, делением первого уравнения на второе можно получить уравнение для s (кстати, это уравнение можно вывести сразу, не вводя букв для скоростей), а затем найти $s=250$.

Ответ: 20 км.

Задачи

7.Б.5 (ф-т почв. — 83). Три тракторные бригады вместе вспахивают поле за 4 дня. Это же поле первая и вторая бригады вместе вспахивают за 6 дней, а первая и третья вместе — за 8 дней. Во сколько раз больше площадь, вспахиваемая за день второй бригадой, по сравнению с площадью, вспахиваемой за день третьей бригадой?

7.Б.6 (ф-т почв. — 78). Имеются два слитка золота с серебром. Процентное содержание золота в первом слитке в два с половиной раза больше, чем процентное содержание золота во втором слитке. Если сплавить оба слитка вместе, то получится слиток, в котором будет 40% золота. Найти, во сколько раз первый слиток тяжелее второго, если известно, что при сплавке равных по весу частей первого и второго слитков получается слиток, в котором содержится 35% золота.

7.Б.7 (геогр. ф-т — 77). Парусник и пароход одновременно вышли из порта A и должны прибыть в порт D. Парусник, двигаясь с постоянной скоростью, прибыл в порт D, пройдя путь 1200 км. Пароход заходил в порты B и C, причем до порта B, расположенного от порта A на расстоянии 480 км, он плыл со скоростью, вдвое большей скорости парусника. Затем он увеличил свою скорость на 4 км/ч и прошел путь между портами B и C, равный 1420 км, и далее путь между портами C и D, равный 1460 км. На стоянке в портах C и B он затратил 1 сутки. В порт D пароход прибыл на двое суток позднее парусника. Если бы пароход плыл из порта A до порта B с той же скоростью, что и из порта B до порта D, то он прибыл бы в порт D на 1 сутки 20 ч позднее парусника. Найти скорость парусника.

7.Б.8 (химфак — 78). Из пункта A в пункт B выехал грузовой автомобиль. Через 1 ч из пункта A в пункт B выехал легковой автомобиль, который прибыл в пункт B одновременно с грузовым автомобилем. Если бы грузовой и легковой автомобили одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу, то они бы встретились через 1 ч 12 мин после выезда. Сколько времени провел в пути от A до B грузовой автомобиль?

7.Б.9 (химфак — 81). На полпути между городами M и N, расстояние между которыми 280 км, расположен поселок P. Из M и P одновременно выехали навстречу друг другу автобус и грузовик: автобус — из M, грузовик — из P. Автобус прибыл в N одновременно с прибытием грузовика в M. Затем обе машины одновременно выехали навстречу друг другу, встретились в пункте B и прибыли одновременно: автобус в M, а грузовик в N. Найти расстояние от города M до пункта B, если известно, что автобус и грузовик двигались каждый со своей постоянной скоростью и оба сделали остановки одинаковой продолжительности: автобус — на пути от N к B, а грузовик — на пути от P к M.

7.Б.10 (экономфак — 77). Из пункта A в пункт B по течению отплывает лодка. Одновременно с ней из B против течения отправляется катер, который, прибыв в A, не останавливаясь, следует обратно в B, а из B также без остановки отправляется в A. На этом последнем участке маршрута катер опять встречает лодку, которая прошла к этому моменту 3/4 пути от A до B. Скорость лодки при движении по течению в 9 раз больше ее скорости при движении против течения. Во сколько раз скорость катера, движущегося по течению, больше скорости лодки, движущейся по течению?

7.Б.11 (экономфак — 79). Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года 3/5 некоторого количества денег положили в первый банк, а оставшуюся часть —

во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равна 590 денежным единицам, к концу следующего года 701 денежной единице. Было подсчитано, что если бы первоначально 3/5 исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть — в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равной 610 денежным единицам. Какова в этом случае была бы сумма вкладов в эти банки к концу второго года?

7.Б.12 (филол. ф-т — 85). Коля, Петя, Миша и Ваня ловили рыбу. Оказалось, что количества рыб, пойманных Колей, Петей и Мишей, образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Если бы Коля поймал на две рыбы меньше, а Ваня — на двенадцать рыб меньше, то количества рыб, пойманных Колей, Петей, Мишей и Ваней, образовывали бы в указанном порядке арифметическую прогрессию. Сколько рыб поймал Миша, если известно, что он поймал на восемнадцать рыб меньше Вани?

7.Б.13 (биофак — 79). Два насоса различной мощности, работая вместе, наполняют бассейн за 4 ч. Для наполнения бассейна наполовину первому насосу требуется времени на 4 ч больше, чем второму насосу для наполнения бассейна на три четверти. За какое время может наполнить бассейн каждый из насосов в отдельности?

7.Б.14. (геол. ф-т — 77). В бак может поступать вода через одну из двух труб. Через первую трубу бак можно наполнить на 1 ч быстрее, чем через вторую трубу. Если бы емкость бака была больше на 2 м^3, а пропускная способность второй трубы была бы больше на 4/3 м^3/ч, то для наполнения бака через вторую трубу понадобилось бы столько же времени, сколько требуется для пропуска 2 м^3 воды через первую трубу. Какова емкость бака, если известно, что за время его наполнения через вторую трубу через первую трубу могло бы поступить 3 м^3 воды?

7.Б.15. В бассейн может поступать вода через пять труб. Первые три трубы, работая вместе, наполняют бассейн за 3 ч, четвертая и пятая вместе с первой — за 2 ч, третья и четвертая — за 6 ч, вторая и пятая — за 4 ч. За сколько времени наполняют бассейн все пять труб вместе?

7.Б.16. Из двух пунктов одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода. Определить, через сколько времени они встретятся, зная следующее: если бы один из пешеходов шел вдвое быстрее, то встреча произошла бы на полчаса раньше, а если бы вдвое быстрее шел только другой — то на 48 мин раньше.

Ответы

7.Б.5. 3/2. **7.Б.6.** 2. **7.Б.7.** 10 км/ч. **7.Б.8.** 3 ч. **7.Б.9.** 160 км. **7.Б.10.** 32/9. **7.Б.11.** 749 денежных единиц. **7.Б.12.** 18. **7.Б.13.** 16 ч и 5 ч 20 мин. **7.Б.14.** 2 м^3. **7.Б.15.** 1 ч 36 мин. **7.Б.16.** 2 ч.

§ 7.В. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ

Читая несколько раз условие текстовой задачи на экзамене и, если это нужно, делая для себя какие-либо пометки, рисунки и т. п., поступающий может детально усвоить описанный в задаче сюжет и наметить круг ключевых неизвестных, заданием которых этот сюжет достаточно полно определяется. Далее для неизвестных предстоит составить необходимые соотношения. Каков же механизм этой работы?

Прежде всего, для решения целого класса задач необходимо знание определенных закономерностей, зависимостей между различными величинами. Сюда относятся задачи на движение, на выполнение работы и на смеси. О них и пойдет речь в настоящем параграфе. В основе физических явлений, описываемых этими задачами, лежат такие понятия, как *скорость, производительность и концентрация,* между которыми есть немало общего. Их объединяет то, что каждая из названных характеристик получается делением одной интересующей нас величины на другую, а в результате она приобретает понятный и естественный физический смысл: скорость показывает длину пути, проходимого за единицу времени, производительность — количество работы, производимой за единицу времени, а концентрация — массу (объем) данного вещества в единице массы (объема) смеси. Кроме того, для этих трех характеристик в задаче обычно делаются одинаковые предположения об их неизменности до тех пор, пока не оговорено противное. Так, движение, как правило, считается равномерным, работа обычно производится с постоянной производительностью, а смеси рассматриваются почти всегда однородные.

Наконец, для подсчета величин, связанных со скоростью, производительностью и концентрацией, достаточно лишь составить *пропорцию,* из которой сразу станет ясно, что на что нужно поделить или помножить. Например, нахождение массы данного вещества по его концентрации x и массе смеси m производится с помощью следующего рассуждения: в 1 кг смеси содержится x кг данного вещества, а в m кг смеси в m раз больше, т. е. mx кг данного вещества. Впрочем при наличии известной сноровки в таких вопросах ответ кажется очевидным и без всяких пропорций.

7.В.1 (психфак — 82). Из пункта A в пункт B вышел пешеход, и одновременно из пункта B в пункт A выехал мотоциклист. Встретив в пути пешехода, мотоциклист сразу же развернулся, довез пешехода до пункта B, а затем тотчас же снова поехал в пункт A, куда и беспрепятственно добрался. В результате мотоциклист затратил на дорогу до пункта A в два с половиной раза больше времени, чем если бы он ехал из пункта B в пункт A, не подвозя пешехода. Во сколько раз медленнее пешеход добрался бы до пункта B, если бы весь путь от A до B он прошел пешком?

Если обозначить через s расстояние (в км) между пунктом A и B, а через x и y скорости (в км/ч) пешехода и мотоциклиста соответственно, то вся картина описанных в задаче передвижений будет полностью определена. Теперь остается выудить из условия как можно больше равенств и неравенств. Как ни странно, в задаче по существу содержится лишь одно число 2,5, которое порождает единственное равенство

$$\frac{s}{x+y}+\frac{s}{x+y}+\frac{s}{y}=\frac{5}{2}\cdot\frac{s}{x+y}\Rightarrow\frac{x}{y}=3x$$

$\left(\right.$здесь $\frac{s}{x+y}$ — время движения мотоциклиста до встречи с пешеходом, такое же время мотоциклист затратил на обратный путь, а $\frac{s}{y}$ — время, за которое мотоциклист прошел путь от B до $A$$\left.\right)$. Что же касается неравенств, то в условии просматриваются только оценки типа $s>0$, $x>0$, $y>0$, для которых пока не видно применения.

Итак, получилось одно уравнение с тремя неизвестными (что завело в тупик отдельных абитуриентов на экзамене; кстати, в некоторых работах вместо неизвестной s было введено время t (в часах) движения до встречи, однако не везде было получено уравнение

$$3t+\frac{xt}{y}=\frac{5}{2}\left(t+\frac{xt}{y}\right)$$

прежде всего из-за путаницы в вопросах подсчета пути или времени, о которых говорилось выше). Искомая величина

$$\frac{s/x}{2\cdot s/(x+y)}=\frac{x+y}{2x}=\frac{4x}{2x}=2$$

тем не менее однозначно вычисляется.

Ответ: 2.

В задачах на движение нередко приходится складывать или вычитать скорости. Как мы уже видели, сближение двух движущихся навстречу друг другу объектов происходит с суммарной скоростью. Аналогичные операции возникают, когда рассматривается движение с учетом, например, течения реки (см. задачу 7.В.2) или выполняется работа одновременно несколькими производителями (см. задачу 7.В.3).

7.В.2 (химфак — 79). От пристани A вниз по течению реки одновременно отплыли пароход и плот. Пароход, доплыв до пристани B, расположенной в 324 км от пристани A, простоял там 18 ч и отправился назад в A. В тот момент, когда он находился в 180 км от A, второй пароход, отплывший из A на 40 ч позднее первого, нагнал плот, успевший к этому времени проплыть 144 км. Считая, что скорость течения реки постоянная, скорость плота равна скорости течения реки, а скорости пароходов в стоячей воде постоянны и равны между собой, определить скорости пароходов и течения реки.

Решение. Пусть x и y — скорости (в км/ч) пароходов и течения реки соответственно. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{144}{x+y} = \dfrac{144}{y} - 40, \\ \dfrac{324}{x+y} + 18 + \dfrac{324-180}{x-y} = \dfrac{144}{y}, \\ x > y > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{18}{x+y} = \dfrac{18}{y} - 5, \\ \dfrac{18}{x+y} + 1 + \dfrac{8}{x-y} = \dfrac{8}{y}, \\ x > y > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{18}{x+y} = \dfrac{18}{y} - 5, \\ \dfrac{5}{y} + \dfrac{4}{x-y} = 2, \\ y > 0, \\ x - y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5y^2}{18-5y}, \\ \dfrac{5}{y} + \dfrac{2(18-5y)}{y(5y-9)} = 2, \\ y > 0, \\ \dfrac{y(5y-9)}{18-5y} > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5y^2}{18-5y}, \\ 10y^2 - 33y + 9 = 0, \\ \dfrac{5y-9}{5y-18} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5y^2}{18-5y}, \\ (y-3)(y-0,3) = 0, \\ \dfrac{9}{5} < y < \dfrac{18}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3, \\ x = 15. \end{cases}$$

Ответ: 15 и 3 км/ч.

Многие абитуриенты, правильно составив систему к задаче 7.В.2, испугались больших вычислений, возникающих в процессе приведенной выше подстановки, и, не найдя никакого другого пути решения системы, сочли ее непосильной для себя. В подобных случаях иногда помогает удачная *замена неизвестных.*

7.В.3 (биофак — 77). Две бригады рабочих начали работу в 8 ч. Сделав вместе 72 детали, они стали работать раздельно. В 15 ч выяснилось, что за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая. На другой день первая бригада делала в 1 ч на одну деталь больше, а вторая бригада в 1 ч на одну деталь меньше. Работу бригады начали вместе в 8 ч и, сделав 72 детали, снова стали работать раздельно. Теперь за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая, уже к 13 ч. Сколько деталей в 1 ч делала каждая бригада?

Решение. Пусть первая и вторая бригады делали по x и y деталей в час соответственно. Тогда

$$\begin{cases} \left(7-\dfrac{72}{x+y}\right)x=\left(7-\dfrac{72}{x+y}\right)y+8, \\ \left(5-\dfrac{72}{x+y}\right)(x+1)=\left(5-\dfrac{72}{x+y}\right)(y-1)+8, \\ x>y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(7-\dfrac{72}{x+y}\right)(x-y)=8, \\ \left(5-\dfrac{72}{x+y}\right)(x-y+2)=8, \\ x>y. \end{cases}$$

Обозначим $u=5-\dfrac{72}{x+y}$, $v=x-y$:

$$\begin{cases} (u+2)v=8, \\ u(v+2)=8, \\ v>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u-v=0, \\ (v^2+2v-8)=0, \\ v>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=v, \\ (v+4)(v-2)=0, \\ v<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v=2, \\ u=2. \end{cases}$$

Возвратимся к x и y:

$$\begin{cases} x-y=2, \\ 5-\dfrac{72}{x+y}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=2, \\ x+y=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=13, \\ y=11. \end{cases}$$

Ответ: 13 и 11.

Читатели, наверное, заметили, что в предложенных выше текстах решений задач 7.В.2 и 7.В.3 нет практически никаких объяснений того, как выводились сами системы. Можно ли так поступать на экзамене? Все зависит от степени сложности рассуждений, необходимых для вывода соотношений. Если эти рассуждения, так сказать, одношаговые, т. е. осуществляют непосредственный перевод условия задачи на язык формул, то пояснения не нужны. Если же выводу соотношений предшествуют некоторые существенные выкладки или умозаключения, то их необходимо помещать в текст решения. Так, связь между условием следующей задачи и помещенным ниже уравнением представляется нам малопонятной без дополнительных пояснений.

7.В.4 (экономфак — 79). Из сосуда, до краев наполненного чистым глицерином, отлили 2 л глицерина, а к оставшемуся глицерину долили 2 л воды. После перемешивания снова отлили 2 л смеси и долили 2 л воды. Наконец, опять перемешали, отлили 2 л смеси и долили 2 л воды. В результате этих операций объем воды в сосуде стал на 3 л больше объема оставшегося в нем глицерина. Сколько литров глицерина и воды оказалось в сосуде в результате проделанных операций?

На экзамене серьезные трудности у поступающих возникли как при исследовании концентрации глицерина в процессе перемешивания, так и при решении получающегося кубического уравнения (см. § 1.Г).

Решение. Пусть объем сосуда равен x л. Тогда после первого переливания глицерина осталось $(x-2)$ л, а его концентрация стала равной $(x-2)/x$; после второго переливания глицерина осталось $(x-2)\frac{x-2}{x}$ л, а его концентрация стала равной $\frac{(x-2)^2}{x^2}$; после третьего переливания глицерина осталось $(x-2)\frac{(x-2)^2}{x^2}$ л. Поэтому

$$\begin{cases} \frac{(x-2)^3}{x^2}+\left(\frac{(x-2)^3}{x^2}+3\right)=x, \\ x>2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-2)^3+3x^2-x^3=0, \\ x>2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3-9x^2+24x-16=0, \\ x>2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x-4)^2=0, \\ x>2 \end{cases} \Rightarrow x=4,$$

следовательно, осталось $\frac{(x-2)^3}{x^2}=0{,}5$ л глицерина и $4-0{,}5=$ $=3{,}5$ л воды.

Ответ: 0,5 и 3,5.

В некоторых задачах помимо разобранных выше закономерностей используются свойства целых чисел, произвольных множеств, функций и их графиков, а иногда даже теоремы из геометрии.

7.В.5 (геогр. ф-т — 85). Из пунктов A и B, находящихся друг от друга на расстоянии 120 км, по прямолинейным дорогам, сходящимся в пункте C под углом, величина которого равна 60°, одновременно выехали грузовик и автобус соответственно со скоростью 40 и 60 км/ч. Автобус прибыл в пункт C на 1 ч раньше грузовика. Найти время движения автобуса.

Решение. Пусть t — время (в ч) движения автобуса. Используя теорему косинусов для треугольника ABC, получаем

$$\begin{cases} 120^2=(60t)^2+(40(t+1))^2-2\cdot 60t\cdot 40(t+1)\cdot\frac{1}{2}, \\ t>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7t^2+2t-32=0, \\ t>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (t-2)(7t+16)=0, \\ t>0 \end{cases} \Rightarrow t=2.$$

Ответ: 2 ч.

Задачи

7.В.6 (филол. ф-т — 81). Каждый из рабочих должен был изготовить 36 одинаковых деталей. Первый рабочий приступил к выполнению своего задания на 4 мин позже второго, но 1/3 задания они выполнили одновременно. Полностью выполнив свое задание, первый рабочий после двухминутного перерыва снова приступил к работе и к моменту выполнения задания вторым рабочим изготовил еще две детали. Сколько деталей в час изготавливал каждый рабочий?

7.В.7 (биофак — 77). Объем грунта, который вынимает в 1 ч первый экскаватор, меньше, чем вынимает в 1 ч второй экскаватор. Оба экскаватора начали работать вместе и вырыли котлован объемом 240 м^3. Потом первый экскаватор стал рыть второй котлован, а второй экскаватор продолжал рыть первый котлован. Через 7 ч после начала их работы объем первого котлована оказался на 480 м^3 больше объема второго котлована. На другой день второй экскаватор вынимал в 1 ч на 10 м^3 больше, а первый в 1 ч вынимал на 10 м^3 меньше. Вырыв вместе котлован в 240 м^3, первый экскаватор стал рыть другой котлован, а второй продолжал рыть первый. Теперь объем первого котлована стал на 480 м^3 больше объема второго котлована уже через 5 ч после начала работы экскаваторов. Сколько м^3 грунта в 1 ч вынимает каждый экскаватор?

7.В.8 (психфак — 82). Мастер, работая вместе с учеником, помог выполнить часть задания, а затем прекратил свою работу. Оставшуюся часть задания ученик закончил один. В результате время, затраченное на выполнение задания, оказалось в три раза меньше времени, необходимого ученику для выполнения этого задания им одним. Во сколько раз мастер затратил бы больше времени, выполняя один все задание, по сравнению с тем временем, которое он затратил на помощь ученику?

7.В.9 (химфак — 79). Пункты A, B, C удалены от пункта M соответственно на 60, 55 и 56 км. Одновременно из этих пунктов в пункт M вышли три пешехода: первый — из A, второй — из B, третий — из C. Первый прошел весь путь с постоянной скоростью и прибыл в M на 2 ч раньше второго и третьего, прибывших одновременно. Второй пешеход, пройдя 40 км с той же скоростью, что и первый, сделал остановку на 1 ч. Остаток пути он прошел со скоростью, которая меньше скорости третьего пешехода на столько же, на сколько скорость третьего меньше скорости первого. Третий пешеход весь путь прошел с постоянной скоростью. Определить скорости первого и третьего пешеходов.

7.В.10 (биофак — 79). Из двух пунктов, расстояние между которыми 2400 км, навстречу друг другу выезжают одновременно пассажирский и скорый поезда. Каждый из них идет с постоянной скоростью, и в некоторый момент времени они встречаются. Если бы оба поезда шли со скоростью скорого поезда, то их встреча произошла бы на три часа раньше фактического момента встречи. Если бы оба поезда шли со скоростью пассажирского поезда, то их встреча произошла бы на 5 ч позже фактического момента встречи. Найти скорости поездов.

7.В.11 (биофак — 78). В реку впадает приток. Пароход отходит от пристани A на притоке, идет вниз по течению 80 км до реки, далее по реке вверх против течения до пристани B, затратив 18 ч на весь путь от A до B. Затем пароход возвращается обратно. Время обратного движения от B до A по тому же пути равно 15 ч. Собственная скорость парохода, т. е. скорость парохода в стоячей воде, равна 18 км/ч. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Каково расстояние от пристани A до пристани B и какова скорость притока?

7.В.12 (геогр. ф-т — 85). Две реки с прямолинейными руслами и одинаковой скоростью течения впадают в одном и том же месте в озеро, образуя между собой угол 60°. От двух причалов, расположенных на разных реках и отстоящих друг от друга на расстоянии 28 км, одновременно вышли байдарка и лодка, скорости которых в стоячей воде соответственно равны 10 и 3 км/ч. Байдарка достигла озера через 2 ч, а лодка — через 4 ч. Найти скорость течения реки.

7.В.13. Две точки движутся по окружности длиной 120 м с постоянными скоростями. Если они движутся в разных направлениях, то встречаются через каждые 15 с. При движении в одном направлении одна точка достигает другую через каждые 60 с. Найти скорости точек.

7.В.14 (ВМК — 80). Две точки движутся с постоянными скоростями по разным окружностям, которые лежат в одной плоскости и имеют общий центр. Направление движения одной точки — по часовой стрелке, другой — против часовой стрелки. В момент начала движения обе точки и центр окружностей лежат на одной прямой, а расстояние между точками равно 16/7 см. После старта расстояние между точками сначала уменьшалось, а через 11 с составляло 207/7 см. Кроме того, с интервалом в 11 с было зафиксировано два момента, когда расстояние равнялось 158/7 см, а в промежутке между этими моментами расстояние ни разу не принимало значение 158/7 см. Найти минимальное расстояние между точками.

7.В.15 (геол. ф-т — 79). Сплавляя два одинаковых по весу куска чугуна с разным содержанием хрома, получили сплав, в котором содержалось 12 кг хрома. Если бы первый кусок был в два раза тяжелее, то в сплаве содержалось бы 16 кг хрома. Известно, что содержание хрома в первом куске на 5% меньше, чем во втором. Найти процентное содержание хрома в каждом куске чугуна.

7.В.16 (геогр. ф-т — 81). Имеются два раствора серной кислоты в воде: первый — 40%-й, второй — 60%-й. Эти два раствора смешали, после чего добавили 5 кг чистой воды и получили 20%-й раствор. Если бы вместо 5 кг чистой воды добавили 5 кг

80%-го раствора, то получился бы 70%-й раствор. Сколько было 40%-х и 60%-х растворов?

7.В.17 (экономфак — 79). Имеются два бака: первый бак наполнен чистым глицерином, второй — водой. Взяли два трехлитровых ковша, зачерпнули первым ковшом глицерин из первого бака, а вторым ковшом — воду из второго бака, после чего первый ковш влили во второй бак, а второй ковш влили в первый бак. Затем после перемешивания снова зачерпнули первым ковшом смесь из первого бака, вторым ковшом — смесь из второго бака и влили первый ковш во второй бак, а второй ковш — в первый бак. В результате половину объема первого бака занял чистый глицерин. Найти объемы баков, если известно, что их суммарный объем в 10 раз больше объема первого бака.

Ответы

7.В.6. 20 и 18. **7.В.7.** 100 и 140. **7.В.8.** 3/2. **7.В.9.** 5 и 4 км/ч. **7.В.10.** 60 и 100 км/ч. **7.В.11.** 290 км; 2 км/ч. **7.В.12.** 4 км/ч. **7.В.13.** 3 и 5 м/с. **7.В.14.** 12/7 см. **7.В.15.** 5 и 10%. **7.В.16.** 1 и 2 кг. **7.В.17.** 10 и 90 л.

§ 7.Г. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕРАВЕНСТВ

Прежде всего упомянем об одном типе неравенств, которые неявно используются при решении текстовых задач практически на каждом шагу: начиная от вывода соотношений и кончая вычислением искомой величины. Речь идет о неравенствах, позволяющих в большинстве случаев смело делить на какие-либо неизвестные величины. Обычно условие сформулированной текстовой задачи считается соответствующим некоторой реальной ситуации (а значит, справедливым хотя бы при каких-то значениях неизвестных), и действует негласное соглашение о невырожденности этого условия. Это означает, например, что если через трубу наполняется бассейн, то вместимость бассейна выражается положительной величиной, как, между прочим, и пропускная способность трубы и т. д. (разумеется, бывают и критические ситуации, когда, казалось бы, нереальные значения неизвестных вдруг допускают вполне разумное объяснение, как, например, это было в задаче 7.А.1). В силу указанного соглашения никому не придет в голову пояснять, скажем, в решении задачи 7.Б.1, что деление на площадь поля и впрямь возможно, поскольку, мол, эта площадь не равна нулю.

На подобные очевидные детали обычно никто не обращает внимания ни при делении выражений на выражения, зависящие от неизвестных, ни при сокращении уравнений на такие выражения, ни даже при делении уравнений на уравнения. И все же здесь опять-таки нужна известная осторожность, так как при неаккуратном выполнении таких операций есть риск необоснованно отбросить постороннее решение или, что гораздо более опасно (см. § 2.Е), нечаянно потерять одно из настоящих решений.

Теперь поговорим о более содержательном применении неравенств. В сравнительно широком классе экзаменационных задач возникает следующая ситуация: система уравнений, составленная по условию задачи, задает помимо истинного значения искомой величины также одно или несколько ложных значений, которые не удовлетворяют некоторым оценкам, вытекающим из физического смысла задачи. Обычно абитуриенты рассматривают такие значения отдельно и приводят их к противоречию с тем или иным естественным условием задачи. Нам представляется, однако, более удобным *отбрасывать ложные значения* в процессе решения системы, а не на последнем его этапе (см. решения задач 7.А.1, 7.8.2, 7.В.3, 7.В.4). Для этого, конечно, в черновике заранее выясняется, какие конкретно неравенства не выполнены для посторонних решений системы, и затем только эти неравенства уже включаются в систему с самого начала в чистовике. Они становятся как бы исходными данными задачи и могут, если угодно, видоизменяться в ходе решения системы, превращаясь в оценки для искомой величины.

7.Г.1 (геол. ф-т — 81). Для составления смеси из двух жидкостей A и B были взяты два сосуда: первый емкостью 10 л, второй — 20 л. Сначала в оба сосуда было налито всего 15 л жидкости A. Затем первый сосуд был дополнен доверху жидкостью B и было произведено перемешивание. После этого второй сосуд был дополнен доверху смесью из первого сосуда. После того как в первый сосуд было добавлено жидкости A столько, сколько было в него ее налито сначала, отношения количества жидкости A ко всему объему имеющейся жидкости в сосуде для первого и второго сосудов стали равными. Сколько литров жидкости A было налито первоначально в первый сосуд?

Решение. Пусть в первый сосуд вначале было налито x л жидкости A. После доливания $(10-x)$ л жидкости B концентрация жидкости A в нем стала равной $x/10$. Во второй сосуд было отлито $20-(15-x)=5+x$ л этой смеси, а в первом ее осталось $10-(5+x)=5-x$ л. После добавления жидкости A в первый сосуд в нем стало $5-x+x=5$ л смеси. Поэтому

$$\begin{cases} \frac{1}{5}\left(\frac{x}{10}(5-x)+x\right)=\frac{1}{20}\left((15-x)+\frac{x}{10}(5+x)\right), \\ 5-x\geqslant 0 \end{cases} \to$$

$$\to\begin{cases} x^2-13x+30=0, \\ x\leqslant 5 \end{cases} \to\begin{cases} (x-3)(x-10)=0, \\ x\leqslant 5 \end{cases} \to x=3.$$

Ответ: 3.

Конечно, далеко не всем абитуриентам удалось на экзамене разобраться в сложной «кухне» переливаний, описанных в условии задачи 7.Г.1. Но даже составив верное уравнение и найдя два значения $x_1=3$, $x_2=10$, некоторые абитуриенты не смогли достаточно четко объяснить, почему второе значение не годится. Они попытались (и это правильный шаг) мысленно произвести со значением x_2 всю последовательность переливаний и сразу же натолкнулись на кажущееся противоречие: с одной стороны, в первом 10-литровом сосуде уже было налито 10 л жидкости A, с другой стороны, в условии задачи сказано, что затем сосуд был дополнен жидкостью B. И все же приведенное противоречие нельзя признать совершенно убедительным. Оно скорее относится к разряду несогласованностей между словами и делами и могло бы означать, что указанное дополнение является в этом случае фиктивным. Как мы видели выше, существует более сильная мотивировка, а именно: после отливания в первом сосуде осталось $5-x$ л смеси, каковое количество не может быть отрицательным.

У читателя может сложиться впечатление, что в текстовой задаче обязательно содержится информация, которая порождает некое уравнение, а неравенствам отводится, так сказать, лишь второстепенная, отборочная роль. То, что это не всегда так, показывает следующая задача, за которую часть абитуриентов даже не бралась на экзамене.

7.Г.2 (геол. ф-т — 83). Автобус проходит путь AE, состоящий из участков AB, BC, CD, DE длиной 10, 5, 5, 6 км соответственно. При этом согласно расписанию, выезжая из пункта A в 9 ч, он проходит пункт B в $9\frac{1}{5}$ ч, пункт C — в $9\frac{3}{8}$ ч, пункт D — в $9\frac{2}{3}$ ч. С какой постоянной скоростью v должен двигаться автобус, чтобы сумма абсолютных величин отклонений от расписания прохождения пунктов B, C, D и времени движения автобуса от A до E при скорости v не превосходила 51,7 мин?

Решение. Итак, требуется найти такую скорость автобуса v (км/ч), для которой справедлива система неравенств

$$\begin{cases} \left|\frac{10}{v}-\frac{1}{5}\right|+\left|\frac{15}{v}-\frac{3}{8}\right|+\left|\frac{20}{v}-\frac{2}{3}\right|+\frac{26}{v}\leqslant\frac{517}{600}, \\ v>0. \end{cases}$$

Первое неравенство системы можно решить стандартным методом интервалов (см. § 3.В), причем числа в нем подобраны так, что оно имеет единственное положительное решение $v=50$.

Ответ: 50 км/ч.

Наконец, наибольшие трудности у поступающих вызывают текстовые задачи, в которых приходится решать неравенства с несколькими неизвестными, особенно в тех случаях, когда значения неизвестных ниоткуда не берутся, кроме как из самих этих неравенств.

7.Г.3 (филол. ф-т — 77). В двух ящиках находится более 29 одинаковых деталей. Число деталей в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем в 3 раза превышает число деталей во втором ящике. Утроенное число деталей в первом ящике превышает удвоенное число деталей во втором ящике, но менее чем на 60. Сколько деталей в каждом ящике?

Предположив (с точностью до обозначений), что в первом и втором ящиках находятся x и y деталей соответственно, абитуриенты без особого труда составили систему неравенств

$$\begin{cases} x+y>29, \\ x-2>3y, \\ 3x>2y, \\ 2y+60>3x, \end{cases}$$

получающихся при переводе на язык соотношений всех условий задачи подряд (имеется в виду, что x, $y \in \mathrm{N}$). Но вот что делать дальше с такой системой, многим абитуриентам было неясно.

Для исследования подобных систем можно применять все тот же *метод исключения неизвестных* (разумеется, не всегда приводящий к ответу). Несмотря на то что выразить одну неизвестную через остальные из неравенства обычно нельзя, зато попытаться хотя бы оценить ее через остальные иногда полезно, причем оценить непременно с двух сторон: снизу и сверху. И если это удается, то в силу транзитивности неравенств получается следствие, состоящее в том, что выражение, осуществляющее нижнюю оценку, не превосходит выражения, осуществляющего верхнюю оценку. Полученное неравенство уже не будет содержать ту неизвестную, которая оценивалась.

Попробуем исключить из выписанной выше системы, например, неизвестную x:

$$\begin{cases} 29-y<x, \\ 3y+2<x, \\ (2/3)\,y<x, \\ x<\frac{2}{3}y+20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 29-y<\frac{2}{3}y+20, \\ 3y+2<\frac{2}{3}y+20, \\ \frac{2}{3}y<\frac{2}{3}y+20 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 5y>27, \\ 7y<54, \\ 0<20 \end{cases} \rightarrow 5\frac{2}{5}<y<7\frac{5}{7}.$$

Получив неравенство на y (в частности, неравенство $y<8$), многие абитуриенты воспользовались идеей о конечном переборе значений $y \in \mathrm{N}$ и опробовали каждое значение $y=6$; 7 (или даже $y=1$; 2; 3; 4; 5; 6; 7) прямой подстановкой его в исходную систему. Все системы условий на x оказались бесплодными, кроме одной, дающей о т в е т: 24 и 7.

В данном случае можно было обойтись без перебора вообще, если использовать более тонкие оценки, вытекающие из свойств целых чисел (см. § 7.Д). А пока мы еще раз обратим внимание на основную мысль о возможности выводить следствия из системы неравенств. Заметим, что, по существу, исключать неизвестные из системы удается и без использования транзитивности неравенств, но с помощью их сложения. При этом необходимо проследить только за тем, чтобы складываемые неравенства были одного знака и чтобы в результате одна из неизвестных пропадала. Например, утроив первое неравенство исходной системы и сложив его с последним, получим неравенство

$$3x+3y+2y+60>3x+87 \Leftrightarrow 5y>27,$$

которое уже ранее нам встречалось. Однако описанный выше прием с транзитивностью неравенств позволяет выводить следствия более целенаправленно и методично.

Задачи

7.Г.4. (ф-т почв. — 82). Из пункта A в пункт B отправился скорый поезд. Одновременно навстречу ему из B в A вышел товарный поезд, который встретился со скорым через 2/3 ч после отправления. Расстояние между пунктами A и B равно 80 км, поезда двигались с постоянными скоростями. С какой скоростью двигался скорый поезд, если 40 км он шел на 3/8 ч дольше, чем товарный поезд шел 5 км?

7.Г.5 (геогр. ф-т — 78). Пароход, отчалив от пристани A, спустился вниз по течению реки на 60 км до устья впадающего в реку притока и поднялся вверх по притоку (против течения) на 20 км до пристани B. Весь путь от A до B пароход прошел за 7 ч. Скорость течения реки и скорость течения притока равны 1 км/ч. Найти собственную скорость парохода. (Собственная скорость — скорость в неподвижной воде.)

7.Г.6 (химфак — 77). Из пункта A в пункт B доставлена почта. Сначала ее вез мотоциклист; проехав 2/3 расстояния от пункта A до пункта B, он передал почту ожидавшему его велосипедисту, который и доставил ее в пункт B (время, потребовавшееся на передачу почты, считается равным нулю). При этом почта была доставлена из пункта A в пункт B за промежуток времени, необходимый, чтобы проехать от пункта A до пункта B со скоростью 40 км/ч. Известно, что если бы мотоциклист и велосипедист выехали из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу, то они встретились бы через промежуток времени, необходимый для проезда от пункта A до пункта B со скоростью 100 км/ч. Найти скорость мотоциклиста, считая, что она больше скорости велосипедиста.

7.Г.7 (экономфак — 77). Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. В тот момент, когда он проехал 1/4 пути между A и B, из B в A выехал мотоциклист, который, прибыв в A, не задерживаясь, повернул обратно и одновременно с велосипедистом прибыл в B. Время движения мотоциклиста до первой встречи с велосипедистом равно времени движения мотоциклиста из A в B. Считая скорости мотоциклиста при движении из A в B и из B в A различными, найти, во сколько раз скорость мотоциклиста при движении из A в B больше скорости велосипедиста.

7.Г.8 (филол. ф-т — 79). Три автоматические линии выпускают одинаковую продукцию, но имеют разную производительность. Производительность всех трех одновременно действующих линий в 1,5 раза выше производительности первой и второй линий, работающих одновременно. Сменное задание для первой линии вторая и третья линии, работая одновременно, могут выполнить на 4 ч 48 мин быстрее, чем его выполняет первая линия; это же задание вторая линия выполняет на 2 ч быстрее по сравнению с первой линией. Найти время выполнения первой линией своего сменного задания.

7.Г.9 (ВМК — 81). Три сенокосилки участвовали в покосе травы с поля площадью 25 га. За 1 ч первая сенокосилка скашивает 3 га, вторая — на b га меньше первой, а третья — на $2b$ га больше первой. Сначала работали одновременно первая и вторая сенокосилки и скосили 11 га, а затем оставшуюся часть площади скосили, работая одновременно, первая и третья сенокосилки. Определить значение b $(0<b<1)$, при котором все поле скошено за 4 ч, если работа велась без перерыва.

7.Г.10 (филол. ф-т — 77). В двух бригадах вместе более 27 человек. Число членов первой бригады более чем в 2 раза превышает число членов второй бригады, уменьшенное на 12. Число членов второй бригады более чем в 9 раз превышает число членов первой бригады, уменьшенное на 10. Сколько человек в каждой бригаде?

7.Г.11 (филол. ф-т — 78). Двум бригадам общей численностью 18 человек было поручено организовать в течение 3 сут непрерывное круглосуточное дежурство по одному человеку. Первые двое суток дежурили члены первой бригады, распределив между собой это время поровну. Известно, что во второй бригаде три девушки, а остальные — юноши, причем девушки дежурили по 1 ч, а все юноши распределили между собой остаток дежурства поровну. При подсчете оказалось, что сумма продолжительностей дежурств каждого юноши второй бригады и любого члена первой бригады меньше 9 ч. Сколько человек в каждой бригаде?

7.Г.12. Три друга решили купить одну книгу. Первому не хватало для покупки книги 14 коп, второму — 37 коп, а третьему — 25 коп. Когда они сложили свои деньги вместе, то полученной суммы им также не хватило. Сколько стоит книга?

7.Г.13 (экономфак — 78). Груз вначале погрузили в вагоны вместимостью по 80 т, но один вагон оказался загружен не полностью. Тогда весь груз переложили в вагоны вместимостью по 60 т, однако понадобилось на 8 вагонов больше и при этом все равно один вагон остался не полностью загруженным. Наконец, груз переложили в вагоны вместимостью по 50 т, однако понадобилось еще на 5 вагонов больше, при этом все такие вагоны были загружены полностью. Сколько тонн груза было?

7.Г.14 (геол. ф-т — 81). Для приготовления смеси из двух жидкостей A и B были взяты два сосуда емкостью по 15 л каждый, в которых находилось всего 15 л жидкости A. Затем первый сосуд доверху долили жидкостью B и было произведено перемешивание. После этого второй сосуд дополнили доверху смесью из первого сосуда. Затем из второго сосуда отлили в первый 6 л получившейся смеси. После этого в первом сосуде оказалось жидкости A на 1 л больше, чем во втором. Сколько литров жидкости A было первоначально во втором сосуде?

7.Г.15 (геол. ф-т — 83). По расписанию автобус должен проходить путь AD, состоящий из отрезков AB, BC, CD длиной 5, 1, 4 км соответственно, за 1 ч. При этом, выезжая из пункта A в 10 ч, он проходит пункт B в 10 ч 10 мин, пункт C — в 10 ч 34 мин. С какой постоянной скоростью v должен двигаться автобус, чтобы время, за которое автобус проходит половину пути от A до D (со скоростью v), сложенное с суммой абсолютных величин отклонений от расписания при прохождении пунктов B и D, превышало абсолютную величину отклонения от расписания при прохождении пункта C не более чем на 28 мин?

Ответы

7.Г.4. 80 км/ч. **7.Г.5.** 11 км/ч. **7.Г.6.** 80 км/ч. **7.Г.7.** 4. **7.Г.8.** 8. **7.Г.9.** 1/2. **7.Г.10.** 11 и 17. **7.Г.11.** 9. **7.Г.12.** 37 коп. **7.Г.13.** 1750. **7.Г.14.** 5. **7.Г.15.** 30 км/ч.

§ 7.Д. СПЕЦИФИКА ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Начнем с некоторых уточнений в решении задачи 7.Г.3. Из условий этой задачи можно вывести систему более сильных неравенств по сравнению с приведенными в § 7.Г, а именно:

$$\begin{cases} x+y\geqslant 30, \\ x-3\geqslant 3y, \\ 3x\geqslant 2y+1, \\ 2y+59\geqslant 3x. \end{cases}$$

Надеемся, что отличия новой системы от старой хорошо видны. В их основе лежит следующая идея: *если целое число a больше другого целого числа b, то справедлива оценка $a\geqslant b+1$.* Этой идеей в простейшем варианте мы уже пользовались ранее при разборе той же задачи 7.Г.3, когда из неравенств $5\frac{2}{5}<y<7\frac{5}{7}$ для целочисленной неизвестной y заключили, что либо $y=6$, либо $y=7$.

Теперь благодаря сделанным уточнениям полученная нами система дает ответ без всякого перебора значений y. Действительно, исключая из нее неизвестную x, получаем

$$\begin{cases} 90-3y\leqslant 3x, \\ 9y+9<3x, \\ 2y+1\leqslant 3x, \\ 3x\leqslant 2y+59 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 90-3y\leqslant 2y+59, \\ 9y+9\leqslant 2y+59, \\ 2y+1\leqslant 2y+59 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5y\geqslant 31, \\ 7y\leqslant 50, \\ 1\leqslant 59 \end{cases} \Rightarrow 6<y<8 \Rightarrow y=7,$$

а затем подставляем $y=7$ в исходную систему

$$\begin{cases} x\geqslant 23, \\ x\geqslant 24, \\ 3x\geqslant 15, \\ 3x\leqslant 73 \end{cases} \Rightarrow 24\leqslant x<25 \Rightarrow x=24.$$

Вывод ясен: использование свойств целых чисел на более раннем, а не только на заключительном этапе решения бывает полезным при работе с текстовыми задачами. При этом без какихлибо серьезных дополнительных усилий удается избавиться от лишних хлопот.

Существенного эффекта в некоторых случаях можно достигнуть, заметив *делимость (нацело) неизвестных величин на какиелибо числа.*

7.Д.1 (психфак — 77). В первой коробке находилось некоторое количество красных шаров, а во второй — синих, причем число красных шаров составляло 15/19 от числа синих шаров. Когда из коробок удалили 3/7 красных шаров и 2/5 синих, то в первой коробке осталось менее 1000 шаров, а во второй — более 1000 шаров. Сколько шаров было первоначально в каждой коробке?

Во многих экзаменационных работах дело, по существу, сдвинулось не далее обозначения исходного числа шаров в первой и во второй коробках через x и y соответственно и составления системы

$$\begin{cases} x=\dfrac{15}{19}y, \\ \dfrac{4}{7}x<1000, \\ \dfrac{3}{5}y>1000. \end{cases}$$

Действуя по стандарту, абитуриенты попытались решить систему

$$\begin{cases} x = \frac{15}{19} y, \\ \frac{4}{7} \cdot \frac{15}{19} y < 1000, \\ y > 1666\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{19} y, \\ y < 2216\frac{2}{3}, \\ y > 1666\frac{2}{3} \end{cases}$$

и, конечно, не выдержали изнурительного перебора значений y от 1667 до 2216. Даже те, кто догадался сократить работу, грубо говоря, в 19 раз, заметив, что y делится на 19, также бросили эту затею.

Дело в том, что в записанной системе никак не отражены важнейшие условия задачи, состоящие в целочисленности выражений x, y, $4x/7$, $3y/5$, а также в силу первого уравнения системы и выражений $15y/19$, $19x/15$. Из этих условий, в частности, вытекает, что искомое значение y должно делиться на 5 и 19, а значит, и на произведение $5 \cdot 19 = 95$. А это дает сокращение перебора не в 19, а в 95 раз, т. е. приводит к разбору всего шести возможностей. С такой обозримой за время экзамена работой как раз и справились некоторые абитуриенты. Однако и они, как выясняется, остановились на полпути. Можно было обойтись без перебора вовсе, если воспользоваться для начала заменой неизвестных $y = 5 \cdot 19y_1$, $x = 7 \cdot 15x_1$, для которых справедлива система

$$\begin{cases} 7 \cdot 15x_1 = \frac{15}{19} \cdot 5 \cdot 19y_1, \\ \frac{4}{7} \cdot 7 \cdot 15x_1 < 1000, \\ \frac{3}{5} \cdot 5 \cdot 19y_1 > 1000, \\ x_1, y_1 \in \mathrm{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x_1 = 5y_1, \\ 3x_1 < 50, \\ 3 \cdot 19y_1 > 1000, \\ x_1, y_1 \in \mathrm{N}, \end{cases}$$

а затем, учитывая, что (в силу первого уравнения этой системы) x кратно пяти, а y — семи, сделать еще одну замену $x_1 = 5x_2$, $y_1 = 7y_2$. Теперь уже система становится однозначно разрешимой:

$$\begin{cases} 7 \cdot 5x_2 = 5 \cdot 7y_2, \\ 3 \cdot 5x_2 < 50, \\ 3 \cdot 19 \cdot 7y_2 > 1000, \\ x_2, y_2 \in \mathrm{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = y_2, \\ x_2 < 4, \\ y_2 > 2, \\ x_2, y_2 \in \mathrm{N} \end{cases} \Rightarrow x_2 = y_2 = 3.$$

Таким образом, искомые значения равны:

$x = 7 \cdot 15x_1 = 7 \cdot 15 \cdot 5x_2 = 7 \cdot 15 \cdot 5 \cdot 3 = 1575$,

$y = 5 \cdot 19y_1 = 5 \cdot 19 \cdot 7y_2 = 5 \cdot 19 \cdot 7 \cdot 3 = 1995$.

Ответ: 1575 и 1995.

При разборе задачи 7.Д.1 мы познакомились с простым, но весьма полезным приемом, позволяющим, с одной стороны, учесть уже замеченную делимость и, с другой стороны, сосредоточить внимание на дальнейшей работе с новой, более простой системой. Фактически этот прием помог нам заметить делимость искомого значения y еще и на 7 (помимо отмеченной ранее делимости на 95) и сократить перебор в 665 раз, сводя его к рассмотрению единственно возможного варианта.

У читателя может сложиться впечатление, что в экзаменационных задачах от перебора, следуя нашим советам, можно избавиться всегда. Это всего лишь впечатление. В некоторых текстовых задачах в самом деле необходим *перебор*, но не лобовой, а разумный, экономный, использующий различные побочные соображения.

7.Д.2 (экономфак — 83). На факультет от школьников подано на 600 заявлений больше, чем от производственников. Девушек среди школьников в 5 раз больше, чем девушек среди производственников, а юношей среди школьников больше, чем юношей среди производственников, в n раз, причем $6<n<12$ (n — целое число). Определить общее количество заявлений, если среди производственников юношей на 20 больше, чем девушек.

Первое, что бросилось в глаза некоторой части поступающих, это конечность множества значений параметра n, позволяющая путем последовательного их перебора выяснить, какое из них годится, а там уж и ответить на вопрос задачи. В реализации такой программы действий мало кто преуспел. Это и понятно: ведь пришлось решать семь однотипных задач. Разумеется, сначала полезно порешать задачу в общей постановке.

Анализ условия задачи показывает, что для перевода формулировки на язык формул достаточно помимо неизвестной величины n ввести еще одну неизвестную, обозначив, скажем, через x какую-либо категорию подавших заявлений. Но вот какую из них удобнее выбрать? Памятуя из предыдущей задачи о том, что нам, возможно, придется подмечать делимость значения x на какие-либо числа, а затем менять неизвестную на более «мелкую», но по-прежнему целочисленную, приходим к выводу: лучше всего обозначить через x количество девушек-производственниц. Тогда целочисленность и положительность количества заявлений от каждой из остальных категорий не вызывает сомнения, если только выполнено единственное условие — значение x натурально. Итак, приходим к уравнению:

$$x+(x+20)+600=5x+n(x+20) \rightarrow x=\frac{620-20n}{n+3}.$$

Остается выбрать число $n \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, для которого величина (см. § 1.Д)

$$\frac{620-20n}{n+3}=\frac{-20(n+3)+60+620}{n+3}=$$
$$=-20+\frac{680}{n+3}=-20+\frac{2^3\cdot 5\cdot 17}{n+3}$$

принимает натуральное значение. Учитывая, что $9 \leqslant n+3 \leqslant 15$ и число $2^3 \cdot 5 \cdot 17$ делится на $n+3$, получаем равенство $n+3=10$ (для этого вывода как раз и понадобился перебор всех делителей числа 680 на предмет их принадлежности отрезку [9; 15]). Поэтому $n=7$, $x=48$ и общее количество заявлений равно

$$x+(x+20)+5x+n(x+20)=x(n+7)+20(n+1)=832.$$

Ответ: 832.

Задачи

7.Д.3 (физфак —83). После деления некоторого двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 7 и в остатке 6. После деления этого же двузначного числа на произведение его цифр в частном получается 3 и в остатке 11. Найти это двузначное число.

7.Д.4. (психфак — 84). Второй член арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел, равен 2, а сумма квадратов третьего и четвертого ее членов меньше 4. Найти первый член прогрессии.

7.Д.5. Произведение натурального числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, равно 2430. Найдите эти числа.

7.Д.6 (психфак — 79). Найти все тройки целых чисел u, v, w, для которых выполняется условие

$$3(u-3)^2+6v^2+2w^2+3v^2w^2=33.$$

7.Д.7 (ф-т почв. — 77). Рота солдат прибыла на парад в полном составе прямоугольным строем по 24 человека в ряд. По прибытии оказалось, что не все солдаты могут участвовать в параде. Оставшийся для парада состав роты перестроили так, что число рядов стало на 2 меньше прежнего, а число солдат в каждом ряду стало на 26 больше числа новых рядов. Известно, что если бы все солдаты участвовали в параде, то роту можно было бы выстроить так, чтобы число солдат в каждом ряду равнялось числу рядов. Сколько солдат было в роте?

7.Д.8 (ВМК — 82). На заводе было несколько одинаковых прессов, штампующих детали, и завод выпускал 6480 деталей в день. После реконструкции все прессы заменили на более производительные, но также одинаковые, а их количество увеличилось на три. Завод стал выпускать в день 11 200 деталей. Сколько прессов было первоначально?

7.Д.9 (психфак — 77). Производительность первого автомобильного завода не превышает 950 машин в сутки. Производительность второго автомобильного завода первоначально составляла 95% от производительности первого завода. После ввода дополнительной линии второй завод увеличил производство машин в сутки на 23% от числа машин, выпускаемых в сутки на первом заводе, и стал их выпускать более 1000 штук в сутки. Сколько автомобилей за сутки выпускал каждый завод до реконструкции второго завода? Предполагается, что каждый завод в сутки выпускает целое количество машин.

7.Д.10 (геол. ф-т — 84). Трое мальчиков хотели вместе купить две одинаковые игрушки. Сложив все имеющиеся у них деньги, дети не могли купить даже одну игрушку. Если бы у первого мальчика было вдвое больше денег, то им на покупку двух игрушек не хватило бы 34 коп. Когда третьему мальчику добавили денег в размере, в два раза большем, чем у него было, то после покупки игрушек у детей оставалось 6 коп. Сколько стоили игрушки, если первоначально у второго мальчика было на 9 коп больше, чем у первого?

7.Д.11 (экономфак — 83). Строительный отряд состоит из 32 бойцов, каждый из которых владеет одной или двумя строительными профессиями: каменщик, бетонщик, плотник. Бойцов, владеющих профессией плотника, в отряде в два раза больше, чем бойцов, владеющих профессией бетонщика, и в n раз меньше, чем бойцов, владеющих профессией каменщика, причем $3 \leqslant n \leqslant 20$ (n — целое число). Сколько бойцов в отряде владеет только одной профессией, если число бойцов, владеющих двумя профессиями, на два больше, чем число бойцов, владеющих профессией плотника?

7.Д.12 (экономфак — 84). Две бригады землекопов вырыли по одинаковому котловану. Вторая бригада работала на полчаса больше первой. Если бы в первой бригаде было на 5 человек больше, то она могла бы закончить работу на 2 ч раньше. Определить число землекопов в каждой бригаде, если производительность у них одинакова.

7.Д.13. Три комбайна разной производительности убрали урожай с участка за 1 ч 12 мин. За сколько часов убрал бы урожай каждый из них в отдельности, если известно, что это число часов целое (для каждого комбайна)?

7.Д.14 (экономфак — 80). На прямой дороге расположены последовательно пункты A, B, C, D. Расстояния от пункта A до пунктов B, C и D находятся в отношении $1:2:4$. В направлении от A к D по дороге через равные промежутки времени с одной и той же скоростью едут автобусы. Из A в D вышли в разное время три пешехода и пошли по дороге с одной и той же скоростью. Первого пешехода после выхода из пункта A и до прихода в пункт B обогнали 3 автобуса. Второго пешехода после выхода из пункта A и до прихода в пункт C обогнали 4 автобуса: известно, что когда он выходил из пункта A, через пункт A не проезжал очередной автобус. Третий пешеход вышел из A и прибыл в D, когда через эти пункты проезжали очередные автобусы. Сколько автобусов обогнали третьего пешехода в пути между A и D?

Ответы

7.Д.3. 83. **7.Д.4.** 3. **7.Д.5.** 54 и 45. **7.Д.6.** (6; 1; 0), (6; —1; 0), (0; 1; 0), (0; —1; 0). **7.Д.7.** 144. **7.Д.8.** 5. **7.Д.9.** 900 и 855. **7.Д.10.** 70 коп. **7.Д.11.** 26. **7.Д.12.** 25 и 24. **7.Д.13.** 2; 4; 12. **7.Д.14.** 8.

§ 7.Е. НЕПРИВЫЧНАЯ ЛОГИКА

Абитуриенты, привыкшие решать текстовые задачи только по раз и навсегда заведенным канонам, очень легко попадают впросак, как только для исследования задачи нужно хоть немного поразмыслить, перебрав все логически возможные варианты.

Такая ситуация возникает прежде всего, когда уже при переводе условия задачи на язык соотношений между неизвестными величинами возникает *альтернатива*, от разрешения которой зависят сами эти соотношения.

7.Е.1 (экономфак — 85). Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Не позже чем через 1 ч 20 мин вслед за ним вышел второй. В пункт B сначала пришел один из пешеходов, а другой достиг B не раньше чем через 2 ч после этого. Если бы пешеходы вышли одновременно, то они прибыли бы в пункт B с интервалом не более чем в 40 мин. Определить, сколько времени требуется каждому пешеходу на путь от A до B, если скорость одного из них в 2 раза больше скорости другого.

Обозначив через t время (в мин) движения того из пешеходов, который шел быстрее, абитуриенты столкнулись со следующими неопределенностями: во-первых, не понятно, какой из пешеходов — первый или второй — на самом деле шел быстрее; во-вторых, кто из них пришел в пункт B раньше. Вот уж действительно получается «либо будет, либо нет, либо дождик, либо снег». Многие абитуриенты устранили эту загвоздку очень просто, решив без всяких оговорок и объяснений, что первый пешеход шел быстрее и пришел раньше. Именно эта ситуация, как мы выясним ниже, имеет место в задаче, однако даже при наличии правильного ответа такое, с позволения сказать, решение на вступительном экзамене не годится. Одной интуиции здесь недостаточно — необходимо строго доказать, что другие случаи невозможны.

Сначала заметим, что из условия задачи вытекает неравенство

$$2t-t\leqslant 40\Rightarrow t\leqslant 40.$$

Далее рассмотрим четыре случая:

1) пусть первый пешеход шел t мин и пришел первым, тогда

$$\begin{cases} t+120\leqslant 2t+80, \\ t\leqslant 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t\geqslant 40, \\ t\leqslant 40 \end{cases} \Rightarrow t=40;$$

2) пусть первый пешеход шел t мин и пришел вторым, тогда $t \geqslant 2t+120 \Rightarrow t \leqslant -120$, что невозможно;

3) пусть второй пешеход шел t мин и пришел первым, тогда

$$\begin{cases} 2t \geqslant t+120, \\ t \leqslant 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geqslant 120, \\ t \leqslant 40, \end{cases} \text{ что невозможно;}$$

4) пусть второй пешеход шел t мин и пришел вторым, тогда $2t+120 \leqslant t+80 \Rightarrow t \leqslant -40$, что невозможно.

Ответ: 40 мин и 1 ч 20 мин.

Замешательство среди поступающих вызывают такие задачи, в которых требуется не найти, как обычно принято, какие-либо величины, а только сравнить их между собой, или, вообще, выяснить, какой из двух (или более) взаимоисключающих друг друга случаев имеет место в условиях задачи.

7.Е.2 (геол. ф-т — 83). Согласно расписанию катер проходит по реке, скорость течения которой 5 км/ч, путь из A в D длиной 15 км за 1 ч. При этом, выходя из пункта A в 12 ч, он прибывает в пункты B и C, отстоящие от A на расстоянии 11 км и 13 км соответственно, в 12 ч 20 мин и в 12 ч 40 мин. Известно, что если бы катер двигался из A в D без остановок с постоянной скоростью v (относительно воды), то сумма абсолютных величин отклонений от расписания прибытия в пункты B, C, D не превышала бы уменьшенного на полчаса времени, необходимого катеру для прохождения 5 км со скоростью v в стоячей воде. Какой из пунктов находится выше по течению: A или D?

«Поскольку в задаче даже не спрашивается, чему равна неизвестная скорость v, то для решения этой задачи достаточно просто написать ответ, который кажется более правдоподобным», — решили отдельные абитуриенты и действительно ограничились одним (иногда угаданным) ответом без каких бы то ни было объяснений. Надеемся, что читателю уже давно понятно, что на вступительном экзамене такие «решения» даже в случае совпадения данного в них ответа с верным нельзя признать правильными.

Другие абитуриенты рассмотрели два случая в зависимости от расположения пунктов A и D и составили соответственно две системы неравенств:

1) если пункт D находится выше пункта A, то

$$\begin{cases} \left|\dfrac{11}{v-5}-\dfrac{1}{3}\right|+\left|\dfrac{13}{v-5}-\dfrac{2}{3}\right|+\left|\dfrac{15}{v-5}-1\right| \leqslant \dfrac{5}{v}-\dfrac{1}{2}, \\ v>5; \end{cases}$$

2) если пункт A находится выше пункта D, то

$$\begin{cases} \left|\dfrac{11}{v+5}-\dfrac{1}{3}\right|+\left|\dfrac{13}{v+5}-\dfrac{2}{3}\right|+\left|\dfrac{15}{v+5}-1\right| \leqslant \dfrac{5}{v}-\dfrac{1}{2}, \\ v>0. \end{cases}$$

Затем они сосредоточили свои усилия на решении этих систем (относительно v) и получили в первом случае пустое множество, а во втором — промежуток $(0; 1]$ (разумеется, как при решении, так и при составлении систем были допущены многочисленные ошибки, но сейчас речь идет не о том). И наконец, когда до ответа на поставленный в задаче вопрос было, как говорится, рукой подать, часть абитуриентов все же не смогла сделать однозначный вывод из полученных ими результатов, включив в ответ так или иначе значения v, которые в данном случае находить не требовалось. Настоящий ответ выглядит совсем просто: A.

Правильным ли было решение этих абитуриентов? Конечно, техническая сторона дела ими была ухвачена верно, однако с точки зрения логики их решение оказалось избыточным. Для получения ответа к задаче вполне достаточно доказать невозможность одного из двух перечисленных выше случаев, поскольку тогда может выполняться только другой случай.

«А вдруг и второй случай тоже невозможен? Или возможен, но не при любых значениях $v>0$», — возразит читатель. Это возражение не лишено смысла. Однако мы напомним о взгляде на текстовую задачу как на описание реальной картины, т. е. ситуации, которая (по утверждению составителей задачи) хотя бы мысленно, но осуществима. Поэтому из текста задачи следует, что один из случаев непременно имеет место. Что же касается величины v, то в принципе от ее значения могло бы зависеть, какой именно случай выполняется. Но коль скоро первый из них отпадает вообще, то конкретное значение v уже не играет роли и ответ однозначен. Кстати, доказательство несовместности первой системы можно провести и не решая саму систему, так как из нее вытекает следующее:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{15}{v-5}-1\right| \leqslant \dfrac{10-v}{2v}, \\ v>5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{15}{10-5}-1 \leqslant \dfrac{10-5}{2\cdot 5}, \\ 5<v\leqslant 10 \end{cases}$$

решений нет.

Несколько иная логика применяется к действительно нестандартным задачам, в которых *не утверждается ничего о единственности и даже о существовании значений искомых величин*, удовлетворяющих заданным условиям. Как правило, это явно оговаривается в той или иной форме в самой постановке задачи. В таких случаях в отличие от того, что было до сих пор, уже недостаточно вывести следствие из составленной системы, а необходимы рассуждения в обе стороны, которые можно проводить, например, с помощью знакомых нам равносильных преобразований.

7.Е.3 (психфак — 84). Найти все натуральные трехзначные числа, каждое из которых обладает следующими двумя свойствами:

1) первая цифра числа в 3 раза меньше суммы двух других его цифр;

2) разность между самим числом и числом, получающимся из него перестановкой двух последних его цифр, неотрицательна и делится на 81 без остатка.

Решение. Пусть x, y и z — цифры, стоящие в разрядах сотен, десятков и единиц искомого числа, а n — частное от деления на 81 указанной в свойстве 2) разности. Тогда $x, y, z, n \in \mathbb{Z}$; $1 \leqslant x \leqslant 9$; $0 \leqslant y, z \leqslant 9$; $n \geqslant 0$, и при этих ограничениях условия задачи принимают вид

$$\begin{cases} 3x = y + z, \\ 100x + 10y + z - (100x + 10z + y) = 81n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = y + z, \\ y - z = 9n. \end{cases}$$

Так как $y - z \leqslant 9$, то $n \leqslant 1$ и возможны два случая: 1) $n = 1$, т. е.

$$\begin{cases} 3x = y + z, \\ y = z + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 9, \\ z = 0; \end{cases}$$

2) $n = 0$, т. е.

$$\begin{cases} 3x = y + z, \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2y, \\ y = z, \end{cases}$$

при этом y делится на 3, следовательно, возможны четыре случая:

2а) $\begin{cases} y = 0, \\ 3x = 2y, \\ y = z \end{cases}$ решений нет, ибо $x \neq 0$;

2б) $\begin{cases} y = 3, \\ 3x = 2y, \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \\ z = 3; \end{cases}$

2в) $\begin{cases} y = 6, \\ 3x = 2y, \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = 6, \\ z = 6; \end{cases}$

2г) $\begin{cases} y = 9, \\ 3x = 2y, \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ y = 9, \\ z = 9. \end{cases}$

Ответ: 233, 390, 466, 699.

Абитуриенты, решавшие задачу 7.Е.3 на экзамене, допускали различные ошибки, в частности, почему-то забывали рассмотреть первый из перечисленных выше случаев. Однако хотелось бы обратить особое внимание на логический пробел, содержащийся в огромном количестве предложенных абитуриентами решений. В работах, как правило, из составленной системы выводились следствия, т. е. фактически доказывалось, что если число $\overline{xyz}$ удовлетворяет условиям задачи, то это число принадлежит множеству $\{233, 390, 466, 699\}$. Но ведь где гарантия, что и наоборот, все числа из этого множества годятся? Нужна их проверка.

Конечно, в техническом отношении наибольшая нагрузка в решении задачи приходится на поиск указанных четырех чисел, а их проверка как раз элементарна. И все же с точки зрения логики такое решение без проверки не является полным: из условия задачи также вытекает, к примеру, что все искомые числа обязательно принадлежат множеству $\{100, 101, \ldots, 999\}$, которое, однако, большей частью состоит из посторонних значений.

Отдельного разговора заслуживают такие нестандартные текстовые задачи, в которых требуется найти не все значения неизвестных величин, а, скажем, *наибольшие или наименьшие* возможные их значения при заданных условиях.

7.Е.4 (геогр. ф-т — 79). В школьной газете сообщается, что процент учеников некоторого класса, повысивших во втором полугодии успеваемость, заключен в пределах от 2,9% до 3,1%. Определить минимально возможное число учеников в таком классе.

Многие абитуриенты, обозначив через n и m число всех и соответственно повысивших успеваемость учащихся класса, не продвинулись далее записи двойного неравенства

$$0{,}029 \leqslant \frac{m}{n} \leqslant 0{,}031.$$

Нашлись и такие абитуриенты, которые различными путями набрели на оценку $n \geqslant 33$ (ее можно вывести так:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{m}{n} \geqslant 0{,}029,\\[2mm] \dfrac{m}{n} \leqslant 0{,}031\end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} m \geqslant 1,\\[2mm] n \geqslant \dfrac{m}{0{,}031}\end{array}\right. \to n \geqslant \frac{1}{0{,}031} \to n > 32 \to n \geqslant 33,$$

ибо числа m и n — целые), после чего они сразу же записали о т в е т: 33.

А рассуждали они примерно следующим образом: «Мы доказали, что число n не может быть меньше 33, поэтому значение 33 — наименьшее». Казалось бы, все предельно ясно и убедительно, да к тому же и ответ, как выяснится ниже, получился правильный. На самом деле, логика при этом рассуждении только односторонняя. Откуда заранее известно, что из условия задачи не вытекает еще и более сильная оценка на n, скажем, $n \geqslant 34$ — ведь тогда у величины n было бы сразу два наименьших значения 33 и 34? Почему само значение $n=33$ возможно? В том-то и дело, что одной лишь оценки снизу для решения недостаточно. Нужно проверить, что полученная оценка достигается, т. е. что при $n=33$ можно подобрать такое натуральное значение m, для которого действительно выполняются условия задачи:

$$0{,}029 \leqslant \frac{m}{33} \leqslant 0{,}031.$$

Как показывает проверка, неравенства выполнены уже при $m=1$, а значит, минимально возможное значение n и впрямь равно 33.

К разговору о наибольших и наименьших значениях каких-либо величин мы вернемся позднее, в § 8.В и 9.Г, где рассматриваются функции и их производные.

Задачи

7.Е.5 (психфак — 84). Найти все натуральные трехзначные числа, каждое из которых обладает следующими двумя свойствами:

— первая цифра числа в 3 раза меньше последней его цифры;

— сумма самого числа с числом, получающимся из него перестановкой второй и третьей его цифр, делится на 8 без остатка.

7.Е.6 (ВМК — 78). Совокупность A состоит из различных натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A.

7.Е.7 (филол. ф-т — 79). Пусть m и n — натуральные числа, причем m/n — правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3n-m}{5n+2m}$, если известно, что она сократима?

7.Е.8 (геогр. ф-т — 79). При подведении итогов соревнования вычислено, что процент числа членов бригады, перевыполнивших план, заключен в пределах от 92,5 до 93,5%. Определить минимально возможное число членов такой бригады.

7.Е.9 (экономфак — 83). В магазине продаются красные и синие карандаши. Красный карандаш стоит 17 коп., синий карандаш — 13 коп. На покупку карандашей можно затратить не более 4 руб. При покупке число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей более чем на пять. Необходимо купить максимально возможное суммарное количество красных и синих карандашей, при этом красных карандашей нужно купить как можно меньше. Сколько красных и сколько синих карандашей можно купить при указанных условиях?

7.Е.10 (экономфак — 84). Из строительных деталей двух видов можно собрать три типа домов. Для сборки 12-квартирного дома необходимо 70 деталей первого и 100 деталей второго вида. Для сборки 16-квартирного дома требуется 110 и 150, а для дома на 21 квартиру нужно 150 и 200 деталей первого и второго вида соответственно. Всего имеется 900 деталей первого и 1300 деталей второго вида. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир в них было наибольшим?

7.Е.11. Требуется на лодке проплыть по течению реки 12 км и вернуться в исходную точку. Скорость течения равна 1 км/ч. В каких пределах должна лежать собственная скорость лодки, чтобы вся поездка заняла от 4 до 6 ч?

7.Е.12 (экономфак — 85). Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Не позже чем через 40 мин вслед за ним вышел второй. Известно, что в пункт B один из них пришел раньше другого не менее чем на 1 ч. Если бы пешеходы вышли одновременно, то они бы пришли в пункт B с интервалом не более чем в 20 мин. Определить, сколько времени требуется каждому пешеходу на путь от A до B, если скорость одного из них в 1,5 раза больше скорости другого.

7.Е.13 (геол. ф-т — 83). Согласно расписанию пароход проходит по реке, скорость течения которой 6 км/ч, путь из A в D длиной 18 км за 1 ч. При этом, выходя из пункта A в 10 ч, он прибывает в пункты B и C, отстоящие от A на расстоянии 14 и 17 км соответственно, в 10 ч 12 мин и в 10 ч 18 мин. Известно, что если бы пароход двигался из A в D без остановок с постоянной скоростью v (относительно воды), то сумма абсолютных величин отклонений от расписания прибытия в пункты B, C и D не превышала бы уменьшенного на полчаса времени, необходимого пароходу для прохождения 6 км со скоростью v в стоячей воде. Какой из пунктов находится выше по течению: A или D?

7.Е.14 (ВМК — 77). Города A, B, C, D, расположенные так, что четырехугольник $ABCD$ — выпуклый, соединены прямолинейными дорогами AB, BC, CD, AD и AC. Их длины соответственно равны 6,14, 5,15 и 15 км. Из одного из этих городов одновременно вышли три туриста, идущие без остановок с постоянными скоростями. Маршруты всех туристов различны, причем каждый из них состоит из трех дорог и проходит через все города. Первый и второй туристы перед прохождением третьих дорог своих маршрутов встретились в одном городе, а третий закончил маршрут на 1 ч раньше туриста, закончившего маршрут последним. Найти скорости туристов, если скорость третьего больше скорости второго и на 1/2 км/ч меньше скорости первого, причем скорости всех туристов заключены в интервале от 5 до 8 км/ч.

7.Е.15 (геол. ф-т — 78). Пункт A стоит в поле на расстоянии 8 км от дороги. На дороге, которая является прямой линией, стоит пункт B. Скорость движения автомобиля по дороге в два раза больше, чем по полю. Известно, что если ехать из A по прямой до некоторой находящейся на дороге точки C, отличной от B, а затем по дороге до B, то при любом выборе точки C на это уйдет не меньше времени, чем потребуется, если ехать из A в B напрямик по полю. Чему равно расстояние от A до B?

Ответы

7.Е.5. 153; 226; 379. **7.Е.6.** 6; 10; 14; 30; 42; 70; 105; 210. **7.Е.7.** 11. **7.Е.8.** 14. **7.Е.9.** 14 и 19. **7.Е.10.** 1 дом 16-квартирный и 12 домов 12-квартирных. **7.Е.11.** От $2+\sqrt{5}$ до $3+\sqrt{10}$ км/ч. **7.Е.12.** 40 и 60 мин. **7.Е.13.** *A*. **7.Е.14.** 7; $6\frac{1}{3}$; $6\frac{1}{2}$ км/ч. **7.Е.15.** 8 км $< AB <$ $< 16\sqrt{3}/3$ км.

ГЛАВА 8. ФУНКЦИИ

§ 8.А. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

Последние годы на вступительных экзаменах по математике все чаще предлагают задачи, в которых существенная роль отводится работе с функциями, а от абитуриентов требуется показать как знание свойств основных элементарных функций, так и умение исследовать различные функции, указанные в условиях задачи или введенные самими абитуриентами.

Прежде всего для решения таких задач следует хорошенько разобраться в самом понятии функции. Напомним, что функция $y(x)$ считается заданной, если имеется возможность установить три ее атрибута: *область определения* D, *область значений* E *и закон*, по которому для каждого элемента $x \in D$ указан соответствующий элемент $y \in E$. В школьном курсе обычно рассматриваются только числовые функции числового аргумента, т. е. случаи, когда множества D и E — подмножества числовой прямой $\mathbf{R} = (-\infty; +\infty)$. Довольно часто при этом сама функция задается с помощью формулы, в которой она приравнивается конкретному выражению, и, если не оговорено противное, область определения такой функции считается естественной, т. е. состоящей из всех значений аргумента, при которых заданное выражение имеет смысл (см. § 1.8).

8.А.1 (ВМК — 83). Найти область определения функции $y(x) = \sqrt{16-x^2}\log_2(x^2-5x+6)$.

Решение. Область определения функции $y(x)$ совпадает с множеством решений системы

$$\begin{cases} 16-x^2 \geqslant 0, \\ x^2-5x+6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)(x-4) \leqslant 0, \\ (x-2)(x-3)>0 \end{cases} \text{(рис. 8.1).}$$

Ответ: $[-4; 2) \cup (3; 4]$.

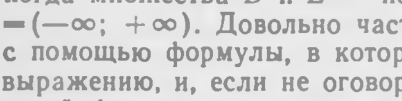

Рис. 8.1

Нередко, однако, на область определения функции накладываются дополнительные ограничения, которые воспринимаются некоторыми абитуриентами не как что-то присущее самой функции, а как нечто несущественное, второстепенное (см. задачи 9.А.2, 9.Б.2). Что же касается области значений функции, то она в большинстве случаев не является в задачах самостоятельным предметом исследования, хотя принципиальная возможность ее нахождения обязательно имеется (если, конечно, функция задана). Обычно интерес представляют лишь экстремальные — наибольшие и наименьшие — значения функции, а иногда для них бывает достаточно получить отдельные оценки.

8.А.2 (геол. ф-т — 81). Показать, что функция

$$y(x)=\sin^2 x-12\sin x\cos x+3\cos^2 x-2\sqrt[3]{66}$$

может принимать неотрицательные значения.

На экзамене многие абитуриенты свели задачу к решению неравенства $y(x)\geqslant 0$ или уравнения $y(x)=0$ и, разумеется, мало преуспели в таком сложном деле. Подчеркнем, что здесь от абитуриентов не требовалось искать все значения x, при которых функция принимает неотрицательные значения, — достаточно было указать хотя бы одно такое число x или доказать просто его существование, даже не предъявляя конкретного числа.

Преобразуем заданное выражение для функции $y(x)$ по формулам тригонометрии (см. § 1.Д, 5.В, 5.Е):

$$y(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}-6\sin 2x+3\,\frac{1+\cos 2x}{2}-2\sqrt[3]{66}=$$

$$=\cos 2x-6\sin 2x+2-2\sqrt[3]{66}=$$

$$=\sqrt{37}\left(\frac{1}{\sqrt{37}}\cos 2x-\frac{6}{\sqrt{37}}\sin 2x\right)+2-2\sqrt[3]{66}=$$

$$=\sqrt{37}\cos(\varphi+2x)+2-2\sqrt[3]{66},\ \text{где}\ \varphi=\operatorname{arctg} 6.$$

Теперь ясно, что для доказательства требуемого в задаче утверждения достаточно убедиться в справедливости неравенства $y(x)\geqslant 0$ для такого значения x, при котором $\cos(\varphi+2x)=1$ (годится, например, число $x=-\varphi/2$), т. е. проверить неравенство

$$\sqrt{37}+2-2\sqrt[3]{66}\geqslant 0,$$

вытекающее, скажем, из следующего рассуждения (см. § 1.Б):

$$\left(\frac{298}{49}\right)^2=\left(6+\frac{4}{49}\right)^2=36+\frac{48}{49}+\frac{16}{49^2}<36+\frac{48{,}5}{49}<37\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 298<49\sqrt{37}\Rightarrow 8\cdot 66<8+3\cdot 4\sqrt{37}+3\cdot 2\cdot 37+37\sqrt{37}=$$

$$=\left(2+\sqrt{37}\right)^3\Rightarrow 2\sqrt[3]{66}<2+\sqrt{37}.$$

Опыт показывает, что поступающие не видят особого смысла в самом *обозначении функции*, считая его чрезмерно абстрактным и уделяя внимание в основном работе с конкретными выражениями для функции. Однако нечеткое понимание обозначения $y(x)$ оборачивается порой на экзамене неграмотной записью решения, а в некоторых случаях и довольно грубыми ошибками.

8.A.3 (химфак — 82). Решить неравенство

$$f(g(x))<g(f(x)),$$

где $f(x)=2^x-1$, $g(x)=2x+1$.

Чего только не понаписали абитуриенты при решении этой задачи! Характерно, что многие вообще не нашли никакой разницы между обозначениями $f(g(x))$ и $f(x)\cdot g(x)$ и принялись решать неверное неравенство

$$(2^x-1)(2x+1)<(2x+1)(2^x-1).$$

А ведь запись $f(g(x))$ следует понимать так: вместо аргумента функции $f(x)$, т. е. вместо x в выражении 2^x-1, нужно подставить целиком выражение для функции $g(x)$, равное $2x+1$. Аналогично запись $g(f(x))$ означает, что аргумент x функции $g(x)$ заменяется выражением $f(x)$. Только при таком понимании этих двух записей можно получить верное неравенство

$$2^{2x+1}-1<2(2^x-1)+1\Leftrightarrow 2^{2x+1}-2\cdot 2^x<0\Leftrightarrow 2^x(2^x-1)<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x-1<0\Leftrightarrow 2^x<2^0\Leftrightarrow x<0.$$

Ответ: $(-\infty; 0)$.

На первый взгляд может показаться, что все задачи, в которых сколько-нибудь значительное место занимают функции как таковые или их обозначения, слишком искусственны и придумываются лишь специально для экзаменов. Бытует даже мнение, что для решения обычных уравнений, неравенств и систем вполне хватает знания стандартных свойств выражений и их преобразований, а рассматривать всякие там функции совершенно бесполезно. Во многих случаях это действительно так, но все-таки не всегда. Например, в следующей задаче *использование удачно подобранной функции* существенно облегчает решение и упрощает его запись.

8.A.4 (мехмат — 77). Решить систему

$$\begin{cases} y^3-9x^2+27x-27=0,\\ z^3-9y^2+27y-27=0,\\ x^3-9z^2+27z-27=0.\end{cases}$$

На экзамене некоторые абитуриенты, пользуясь так называемыми очевидными соображениями симметрии, сразу же заключили, что значения x, y и z в решении системы должны быть равны, после чего довольно быстро был найден ответ: $(3; 3; 3)$.

Смеем заметить, что упомянутый факт равенства значений x, y, z далеко не очевиден (из соображений симметрии в действительности следует только то, что вместе с любым решением $(x; y; z)$ в ответ входят и решения $(y; z; x)$, $(z; x; y)$, но этого недостаточно для обоснования равенств $x=y=z$, если не известно, что решение единственно). Докажем этот факт.

Рассмотрим функцию

$$f(t)=9t^2-27t+27$$

и заметим, что в силу представления

$$f(t)=9(t-3/2)^2+27/4$$

она возрастает при $t>3/2$ и не принимает значений, меньших 27/4, откуда $f(t)\geqslant 27/4>(3/2)^3$. Тогда система имеет вид

$$\begin{cases} y^3=f(x), \\ z^3=f(y), \\ x^3=f(z), \end{cases}$$

причем для ее решений справедливы оценки

$$y^3=f(x)>(3/2)^3\Rightarrow y>3/2$$

и аналогично $z>3/2$, $x>3,2$. Рассмотрим два случая:

1) $x<y\Rightarrow y^3=f(x)<f(y)=z^3\Rightarrow y<z\Rightarrow z^3=f(y)<$
$<f(z)=x^3\Rightarrow z<x,$

что невозможно (ибо неравенства $x<y<z<x$ несовместны);

2) $x\geqslant y\Rightarrow y^3=f(x)\geqslant f(y)=z^3\Rightarrow y\geqslant z\Rightarrow$
$\Rightarrow z^3=f(y)\geqslant f(z)=x^3\Rightarrow z\geqslant x,$

откуда $x=y=z$ (ибо $x\geqslant y\geqslant z\geqslant x$).

В приведенном доказательстве с помощью функции $f(t)$, зависящей от некоего отвлеченного аргумента t, удалось обнаружить полезные свойства уравнений системы и сильно сократить само изложение рассуждений. Таким образом, решение задачи 8.А.4 доведено до логического конца (см. метод проверки, § 2.В, 6.Д).

Задачи

8.А.5. Найти область определения функции:

а) $y(x)=\dfrac{1-\cos^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}$;

б) $y(x)=\arcsin\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$;

в) (ВМК—83) $y(x)=\sqrt{x^2-25}+\lg(42+x-x^2)$;

г) (филол. ф-т—80) $y(x)=\sqrt{\log_2(x^2-3)}$;

д) $y(x)=\lg\log_{\sin x}(2-x)$.

8.А.6. Найти область значений функции:

а) $y(x)=\lg\sqrt{x}$;

б) $y(x)=3^{|x|+1}$;

в) $y(x)=x^3+2x^2+7$;

г) $y(x)=|\sin x+10\cos x+\pi^2|$;

д) $y(x)=\dfrac{4x+5}{x-2}$;

е) $y(x)=5^{x^2}\cdot 2^{1-x^2}$.

8.А.7 (геол. ф-т — 81). Показать, что функция

$$y(x)=\sin^2 x-14\sin x\cos x-5\cos^2 x+3\sqrt[3]{33}$$

принимает только положительные значения.

8.А.8. Решить неравенство:

а) $f(f(x))<(f(x))^2$, где $f(x)=2x^2-1$;

б) (химфак — 82) $f(g(x))<g(f(x))$, где $f(x)=2^x$, $g(x)=4^x$;

в) $f(x)+f(f(x))+f(g(x))>\pi$, где $f(x)=\sin x$, $g(x)=\operatorname{tg} x$.

8.А.9 (мехмат — 77). Решить систему

$$\begin{cases} 2y^3+2x^2+3x+3=0,\\ 2z^3+2y^2+3y+3=0,\\ 2x^3+2z^2+3z+3=0.\end{cases}$$

8.А.10 (ВМК — 81). Для каждого значения a решить уравнение

$$(1+(a+2)^2)\log_3(2x-x^2)+(1+(3a-1)^2)\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=$$
$$=\log_3(2x-x^2)+\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right).$$

8.А.11 (экономфак — 78). Найти все значения a, при которых неравенство

$$a(4-\sin x)^4-3+\cos^2 x+a>0$$

выполнено для всех x.

8.А.12 (геол. ф-т — 79). Найти все неотрицательные значения x, при которых из неравенств

$$abx\geqslant 4a+7b+x,\ a\geqslant 0,\ b\geqslant 0$$

следует неравенство $ab\geqslant 5$.

8.А.5. а) $x \neq \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$, б) $[0; 2)$; в) $(-6; -5] \cup [5; 7)$; г) $(-\infty; -2] \cup [2; \infty)$; д) $(1; \pi/2) \cup (\pi/2; 2)$. 8.А.6. а) $(-\infty, \infty)$; б) $[3; \infty)$; в) $(-\infty; \infty)$; г) $[0; \sqrt{101+\pi^2}]$; д) $(-\infty; 4) \cup (4; \infty)$; е) $(0; \infty)$. 8.А.8. а) $(-1; 0) \cup (0; 1)$; б) $(-\infty; 1)$; в) $\varnothing$. 8.А.9. $(-1; -1; -1)$. 8.А.10. 1 при $a=1/3$; $\varnothing$ при $a \neq 1/3$. 8.А.11. $(3/82; \infty)$. 8.А.12. $(0; \sqrt{35}]$.

§ 8.Б. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

Наиболее употребимы при решении задач на вступительных экзаменах такие свойства функций, как ограниченность и монотонность, несколько реже используется периодичность и четность. Подчеркнем, что одним из важных свойств функций является также и непрерывность, однако практически все функции, изучаемые в школьном курсе (кроме некоторых экзотических функций типа $[x]$ и $\{x\}$), непрерывны, так что упоминать в каждом случае об этом нет необходимости (см. задачи 8.Г.2 и обсуждение задачи 1.7 и § 8.Д). Тем не менее следить за непрерывностью, конечно, нужно, иначе исследование функции может оказаться неполным или даже неверным. Настоящий параграф посвящен вопросу о том, как именно «работают» в задачах свойства функций.

8.Б.1 (геол. ф-т — 83). Решить систему

$$\begin{cases} 3\sin 3x + \cos y = -4, \\ x + y = 3\pi/2. \end{cases}$$

Многие абитуриенты на экзамене, осуществив подстановку $y = \frac{3\pi}{2} - x$ в первом уравнении системы, получили уравнение

$$3\sin 3x - \sin x = -4,$$

а дальше свели его (с помощью формулы синуса тройного аргумента, см. § 5.Г) к кубическому уравнению относительно $\sin x$. Однако здесь уместно было воспользоваться *ограниченностью* синуса и применить следующее, ставшее уже стандартным, рассуждение: так как для всех значений x справедливы неравенства $3\sin 3x \geqslant -3$, $-\sin x \geqslant -1$, то равенство в неравенстве $3\sin 3x + (-\sin x) \geqslant (-3) + (-1)$ возможно только в случае одновременного выполнения двух равенств $3\sin 3x = -3$, $-\sin x = -1$. Таким образом, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} \sin 3x = -1, \\ \sin x = 1, \\ y = \dfrac{3\pi}{2} - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1, \\ y = \dfrac{3\pi}{2} - x \end{cases}$$

(равносильность последних двух систем можно обосновать так: если $\sin x=1$, то $\cos x=0$ и $\sin 3x=\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x=2\cos^2 x-1=-1$).

Ответ: $(\pi/2+2\pi n;\ \pi-2\pi n)$, $n\in\mathbf{Z}$.

Итак, знание точных оценок для области значений функции позволяет в некоторых ситуациях получить дополнительную информацию о значениях аргументов. Как мы уже видели при разборе задач 8.А.4 и 2.В.3, не меньшую ценность представляет порой наличие у исследуемых функций свойств *монотонности*, т. е. возрастания или убывания.

8.Б.2 (психфак — 82). Решить уравнение

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2-2x-2)=\log_{2+\sqrt{3}}(x^2-2x-3).$$

Если сделать подстановку $x^2-2x-3=(2+\sqrt{3})^y$, то уравнение примет вид

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}((2+\sqrt{3})^y+1)=y\Leftrightarrow(2+\sqrt{3})^y+1=$$

$$=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^y\Leftrightarrow\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^y+\left(\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^y=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^y+\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^y=1.$$

Последнее уравнение уже обладает следующим свойством: левая его часть $F(y)$ представляет собой сумму двух убывающих функций от y $\left(\text{ибо } \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}<\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}<1\right)$, а значит, и сама является убывающей функцией. Это весьма характерное для метода подбора (см. § 2.В) обстоятельство дает право утверждать, что функция $F(y)$ каждое свое значение, в том числе и значение 1, принимает ровно один раз, следовательно, уравнение $F(y)=1$ не может иметь более одного корня. Так как при $y=2$ уравнение превращается в верное равенство, то единственный корень как раз и равен 2. Возвращаясь к x, получаем квадратное уравнение

$$x^2-2x-3=(2+\sqrt{3})^2.$$

Ответ: $1+\sqrt{11+4\sqrt{3}}$, $1-\sqrt{11+4\sqrt{3}}$.

При исследовании тригонометрических уравнений или неравенств к определенным упрощениям может привести использование *периодичности* тригонометрических функций.

8.Б.3 (мехмат — 83). Решить уравнение

$$\log_2\left(\cos 2x+\cos\frac{x}{2}\right)+\log_{1/2}\left(\sin x+\cos\frac{x}{2}\right)=0.$$

Решение. $\log_2\left(\cos 2x+\cos\frac{x}{2}\right)=\log_2\left(\sin x+\cos\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 2x+\cos\frac{x}{2}=\sin x+\cos\frac{x}{2},\\ \sin x+\cos\frac{x}{2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-2\sin^2 x-\sin x=0,\\ \sin x+\cos\frac{x}{2}>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(\sin x+1)\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)=0,\\ \cos\frac{x}{2}>-\sin x.\end{cases}$$

Система равносильна совокупности систем:

1) $\begin{cases}\sin x+1=0,\\ \cos\frac{x}{2}>-\sin x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=-1,\\ \cos\frac{x}{2}>1\end{cases}$ решений нет;

2) $\begin{cases}\sin x-\frac{1}{2}=0,\\ \cos\frac{x}{2}>-\sin x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=\frac{1}{2},\\ \cos\frac{x}{2}>-\frac{1}{2}.\end{cases}$

На промежутке $[0;\ 4\pi]$ уравнение $\sin x=1/2$ имеет 4 корня:
$x_1=\pi/6$, $x_2=5\pi/6$, $x_3=\pi/6+2\pi$, $x_4=5\pi/6+2\pi$,

из которых неравенству $\cos\frac{x}{2}>-\frac{1}{2}$ удовлетворяют только x_1, x_2, x_4:

$$\cos\frac{x_1}{2}=\cos\frac{\pi}{12}>0>-\frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{x_2}{2}=\cos\frac{5\pi}{12}>0>-\frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{x_3}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)<\cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{x_4}{2}=\cos\left(\frac{5\pi}{12}+\pi\right)>\cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}.$$

Так как число 4π — период функций $\sin x$ и $\cos\frac{x}{2}$ $\left(\text{ибо } \cos\frac{x+4\pi}{4}=\right.$ $\left.=\cos\left(\frac{x}{2}+2\pi\right)=\cos\frac{x}{2}\right)$, система 2) имеет 3 серии решений:

$x_1+4\pi n$, $x_2+4\pi m$, $x_4+4\pi k$, $n, m, k\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $\frac{5\pi}{6}+4\pi m$, $n, m\in\mathbf{Z}$.

Заметим, что в процессе решения задачи 8.Б.3 на экзамене многие абитуриенты наложили два условия $\sin x+\cos\frac{x}{2}>0$ и $\cos 2x+\cos\frac{x}{2}>0$ и, не заметив, что одно из них в силу уравнения $\cos 2x+\cos\frac{x}{2}=\sin x+\cos\frac{x}{2}$ — следствие другого, занялись проверкой обоих условий, чем существенно усложнили себе работу. Некоторые абитуриенты, напротив, не наложили никаких ограничений вообще и тем самым приобрели посторонние решения. Наконец, большие трудности на экзамене вызвал отбор корней, который в нашем решении сведен к разбору всего лишь четырех конкретных значений именно благодаря наличию общего периода у рассматриваемых функций.

8.Б.4 (химфак — 82).

Найти все значения параметра p, при которых уравнение

$$(x-p)^2\cdot(p(x-p)^2-p-1)=-1$$

имеет больше положительных корней, чем отрицательных.

Приведем решение, в котором не последнюю роль играют соображения *четности* функций.

Сделаем замену $y=p-x$, тогда уравнение примет вид

$$py^4-(p+1)y^2+1=0,$$

а поставленная задача будет формулироваться так: найти все значения p, при которых количество корней уравнения (относительно y), меньших p, больше, чем количество корней, больших p. Так как функция $F(y)$, стоящая в левой части уравнения, является четной (т. е. $F(-y)=F(y)$), то корни этого уравнения расположены на числовой оси симметрично относительно точки O. Из этого факта можно сделать следующие выводы:

1) если $p<0$, то корней, меньших p, не больше, чем отрицательных корней, которых столько же, сколько положительных, которых, в свою очередь, не больше, чем корней, больших p. Следовательно, ни одно из значений $p<0$ не удовлетворяет условию задачи;

2) если $p>0$, то для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы уравнение имело хотя бы один корень на отрезке $[-p;\ p]$ (ибо число корней, больших p, заведомо равно числу корней, меньших p). Иными словами, уравнение

$$pz^2-(p+1)z+1=0 \Leftrightarrow (z-1)\left(z-\frac{1}{p}\right)=0,$$

получающееся в результате замены $z=y^2$, должно иметь корень на отрезке $[0;\ p^2]$, а это значит, что либо $1<p^2$, либо $\frac{1}{p}\leqslant p^2$, т. е. в любом случае $p>1$.

Ответ: $[1;\ \infty)$.

Задачи

8.Б.5. Решить уравнение:

а) $3^{-x^2}\cos x=1$;

б) (психфак — 82)

$$\log_{\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}}(x^2-4x-2)=\log_{\frac{1}{2-\sqrt{3}}}(x^2-4x-3);$$

в) (ВМК — 85) $3\cos(2\pi(5x+3)^2)-7=4\cos(\pi(5x+3)^2)$;

г) (ф-т почв. — 81)

$$\frac{3+2\cos(x-y)}{2}=\sqrt{3+2x-x^2}\cos^2\frac{x-y}{2}+\frac{\sin^2(x-y)}{2};$$

д) (ВМК — 83)

$$\sqrt{2-|y|}\left(5\sin^2x-6\sin x\cos x-9\cos^2x+3\sqrt[3]{33}\right)=$$

$$=(\arcsin x)^2+(\arccos x)^2-\frac{5}{4}\pi^2;$$

е) (мехмат — 83)

$$\log_{1/3}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos 2x\right)+\log_3\left(\sin\frac{x}{2}-\sin x\right)=0;$$

ж) $4\sin\pi x=6\{x\}-3$.

8.Б.6. Решить систему:

а) (геол. ф-т — 83) $\begin{cases}4\cos 3x-\cos 2y=-5,\\ x+2y=\pi;\end{cases}$

б) $\begin{cases}(\sin x)^{y+\frac{1}{y}}+(\cos x)^{y+\frac{1}{y}}=1,\\ 0<x<y<\pi/2.\end{cases}$

8.Б.7 (ф-т почв. — 83). Найти все значения a из интервала $(2;\ 5)$, при которых уравнение

$$\log_2(3-|\sin ax|)=\cos(\pi x-\pi/6)$$

имеет хотя бы одно решение из отрезка $[2;\ 3]$.

8.Б.8. Найти все значения a, при которых:

а) (экономфак — 77) система

$$\begin{cases}x^2+y^2=2(1+a),\\ (x+y)^2=14\end{cases}$$

имеет два решения;

б) (химфак — 80) число решений уравнения

$$3(x^2+a^2)=1-(9a^2-2)x$$

не превосходит числа решений уравнения

$$x+(3a-2)^2 3^x=(8^a-4)\log_3\left(3^a-\frac{1}{2}\right)-3x^3;$$

в) (мехмат — 83) система

$$\begin{cases} \left|12\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}}-5\right|-\left|12\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}}-7\right|+ \\ +\left|24\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}}+13\right|=11-\sqrt{\sin\frac{\pi(x-2y-1)}{2}}, \\ 2(x^2+(y-a)^2)-1=2\sqrt{x^2+(y-a)^2-3/4} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение;

г) уравнение

$$(x\operatorname{tg}x+1)\sqrt{|x|-a}=\frac{ax^2+1}{\cos x}$$

имеет нечетное число корней;

д) (химфак — 82) уравнение

$$((x-a)^2-2a-4)(x-a)^2=-2a-3$$

имеет отрицательных корней больше, чем положительных;

е) (ВМК — 79) уравнение

$$\left(a-x^2-\cos\frac{11\pi x}{4}\right)\sqrt{8-ax}=0$$

имеет на отрезке [—2; 3] нечетное число корней.

8.Б.9 (психфак — 80). Доказать, что для любых значений p и t справедливо неравенство

$$2(2p-1)^4+1+(1-2(2p-1)^4)\sin 2t\geqslant 0,$$

и найти все пары (p, t), для которых оно обращается в равенство.

Ответы

8.Б.5. а) 0; б) $2-\sqrt{14+4\sqrt{3}}$, $2+\sqrt{14+4\sqrt{3}}$; в) $\frac{-3-\sqrt{1+2n}}{5}$, $\frac{-3+\sqrt{1+2n}}{5}$, $n=0, 1, 2, \ldots$; г) $(1; 1+\pi/2+\pi n)$, $n\in\mathbf{Z}$; д) $(-1; 2)$, $(-1; -2)$; е) $-\pi/6+2\pi n$, $7\pi/6+4\pi m$, $n, m\in\mathbf{Z}$; ж) $5/6+2n$, $7/6+2m$, $n, m\in\mathbf{Z}$. **8.Б.6.** а) $(\pi+2\pi n; -\pi n)$, $n\in\mathbf{Z}$; б) $(x; 1)$, $x\in(0; 1)$. **8.Б.7.** $9\pi/13$; $15\pi/13$. **8.Б.8.** а) 5/2; б) 2/3; в) $6n-1$, $6n$, $6n+2$, $6n+3$, $n\in\mathbf{Z}$; г) —1; д) $(-\infty; -1)$; е) $(-\infty; -4]\cup\{1\}\cup[8/3; 4)\cup(4; \infty)$. **8.Б.9.** $(1/2; -\pi/4+\pi n)$, $n\in\mathbf{Z}$.

Опыт вступительных экзаменов последних лет показывает, что когда перед поступающими возникает вопрос о наибольшем или наименьшем значении какой-либо величины, они, как правило, торопятся посчитать производные, даже если в этом нет никакой нужды. Одна из целей настоящего параграфа состоит в том, чтобы показать неединственность такого подхода, а в некоторых случаях и его неоправданность.

8.В.1 (филол. ф-т — 78). Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=\sin^2 x+\cos x-1/2.$$

Решение. Так как

$$f(x)=1-\cos^2 x+\cos x-1/2=3/4-(\cos x-1/2)^2,$$

то

1) $f(x)\leqslant 3/4$ при всех x;

2) $f(x)\geqslant 3/4-(3/2)^2=-3/2$ при всех x (ибо $|\cos x|\leqslant 1$);

3) $f(\pi/3)=3/4-(\cos\pi/3-1/2)^2=3/4$;

4) $f(\pi)=3/4-(\cos\pi-1/2)^2=-3/2$.

Ответ: 3/4 и —3/2.

Если решать эту задачу с помощью производных (а именно так в основном и поступали абитуриенты на экзамене), то потребуется преодолевать препятствия, связанные с тем, что функция $f(x)$ определена не на отрезке, а на всей числовой прямой (см. § 9.Б). Да и вообще, использование такого мощного аппарата в данном случае можно сравнить разве что с пальбой из пушки по воробьям, поскольку, как мы видели, задача достаточно просто решается обычными средствами — стандартными преобразованиями и применением свойств ограниченности и монотонности хорошо известных функций.

Анализируя изложенное выше решение задачи 8.В.1, читатель может зафиксировать, что *для нахождения наибольшего (или наименьшего) значения функции нужно установить в точности два факта: во-первых, что некоторое число ограничивает сверху (соответственно снизу) сразу все значения функции, а во-вторых, что это число само является значением функции хотя бы при одном значении аргумента.* Таким образом, выделяем два логически необходимых элемента, которые сопровождают фактически любое исследование на максимум или минимум и о которых мы уже говорили при обсуждении задачи 7.Е.4. Теперь более подробно остановимся на вопросе о том, какую реальную помощь может оказать использование функций для нахождения наибольших и наименьших значений каких-либо величин.

8.В.2 (экономфак — 78). Имеются три сплава. Первый сплав содержит 70% олова и 30% свинца, второй — 80% олова и 20% цинка, третий — 50% олова, 10% свинца и 40% цинка. Из них необходимо изготовить новый сплав, содержащий 15% свинца. Какое наибольшее и наименьшее процентное содержание олова может быть в этом сплаве?

Обозначив на экзамене через x, y, z сплавляемые количества (скажем в кг) первого, второго и третьего сплавов, абитуриенты довольно быстро составили единственное уравнение

$$\frac{0,3x+0,1z}{x+y+z}=0,15,$$

в силу которого исключили неизвестную x в выражении

$$F=\frac{0,7x+0,8y+0,5z}{x+y+z}=\frac{0,7(y+z/3)+0,8y+0,5z}{(y+z/3)+y+z}=\frac{45y+22z}{60y+40z}.$$

И вот в этот момент многие абитуриенты по-настоящему растерялись — столь сильна была у них уверенность, что после стандартных манипуляций с данными задачи непременно должна получиться обычная функция, а не какой-то конгломерат, содержащий две неизвестные. Никто, однако, не мешал абитуриентам временно зафиксировать, например, положительное значение z и рассмотреть полученное выражение как функцию от y:

$$F(y)=\frac{45y+30z-8z}{60y+40z}=\frac{3}{4}-\frac{2z}{15y+10z},\quad y\in[0;\ \infty)$$

(здесь использовано преобразование выделения целой части; см. § 1.Д). Теперь уже видно, что эта функция — возрастающая и, стало быть, принимает наименьшее значение

$$F(0)=\frac{3}{4}-\frac{2z}{10z}=0,55,$$

не зависящее, кстати, от значения $z>0$.

Что же касается наибольшего значения функции $F(y)$, то с ним ситуация несколько сложнее: такого значения просто нет, поскольку опять же в силу возрастания этой функции ни одно конкретное ее значение $F(y_0)$ не может претендовать на роль наибольшего, ведь значение $F(y_0+1)$ будет еще больше. Тем не менее из выписанного выше представления для функции $F(y)$ можно выудить очень полезную информацию, а именно справедливость оценки $F(y)<3/4$. Отметим одно немаловажное обстоятельство, из-за которого можно попасть впросак при неаккуратном использовании подобных неравенств. Дело в том, что полученная оценка неулучшаема, т. е. константу 3/4 в ней нельзя заменить на меньшую, поскольку величина $\frac{2z}{15y+10z}$ в представлении для $F(y)$ может быть сделана сколь угодно близкой к нулю прн достаточно больших значениях y. Однако неулучшаемость этой оценки не дает права утверждать, что константа 3/4 представляет собой наибольшее значение функции $F(y)$. Это значение, как отмечалось выше, недостижимо.

Выход из создавшегося положения состоит в исследовании временно забытого нами случая $z=0$, когда величина F независимо от значения $y>0$ как раз равна 3/4. Полученных выводов вполне хватает для окончательного выяснения поставленных в задаче вопросов.

Ответ: 75 и 55%.

В некоторых задачах, решаемых по-прежнему без производных, исследование функций на экстремум сильно упрощается в результате использования *неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим неотрицательных чисел a и b*:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab},$$

равенство в котором возможно тогда и только тогда, когда $a=b$. Не имея навыков работы с этим довольно простым неравенством, поступающие нередко забывают о нем на экзамене и доставляют себе тем самым массу лишних хлопот. Такая картина наблюдалась, например, при решении следующей задачи.

8.В.3 (мехмат — 81). В два различных сосуда налиты растворы соли, причем в 1-й сосуд налито 5 кг, а во 2-й — 20 кг. При испарении воды процентное содержание соли в 1-м сосуде увеличилось в p раз, а во 2-м сосуде — в q раз. Известно, что $pq=9$. Какое наибольшее количество воды могло при этом испариться из обоих сосудов вместе?

Решение. Пусть из 1-го сосуда испарилось x кг воды, а из 2-го — y. Вес первого раствора уменьшился в p раз, а 2-го — в q, поэтому условие задачи записывается в виде системы

$$\begin{cases} 5=p(5-x), \\ 20=q(20-y), \\ pq=9, \\ p>1, \\ q>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-\dfrac{5}{p}, \\ y=20-\dfrac{20}{q}, \\ pq=9, \\ 1<p<9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-\dfrac{5}{p}, \\ y=20-\dfrac{20p}{9}, \\ pq=9, \\ 1<p<9. \end{cases}$$

Найдем наибольшее значение величины

$$x+y=5-\frac{5}{p}+20-\frac{20p}{9}=25-\frac{5}{p}-\frac{20p}{9}=f(p)$$

на промежутке $p\in(1;\,9)$:

$$1)\ f(p)=25-\left(\frac{5}{p}+\frac{20p}{9}\right)\leqslant 25-2\sqrt{\frac{5}{p}\cdot\frac{20p}{9}}=$$

$$=25-2\cdot\frac{10}{3}=18\frac{1}{3};$$

2) $f(3/2)=25-\frac{10}{3}-\frac{10}{3}=18\frac{1}{3}$.

Ответ: $18\frac{1}{3}$ кг.

Упомянутое выше свойство средних позволило в решении задачи 8.В.3 не только оценить сверху изучаемую величину $f(p)$, но и сразу же указать значение p, при котором неравенство обращается в равенство. Это значение находится из условия

$$\frac{5}{p}=\frac{20p}{9} \Leftrightarrow p^2=\frac{9}{4}.$$

Разумеется, функцию $f(p)$ можно было исследовать и с помощью производной. Мы не собираемся умалять достоинств такого метода по отношению к широкому классу функций — об этом речь впереди (см. § 9.Б). А пока остановимся подробнее на вопросе о творческом отношении не только к нахождению экстремальных значений, но и к выбору самих функций, участвующих в решении поставленной задачи. Как уже отмечалось ранее (см. задачи 1.Г.4, 8.А.4), иногда бывает полезно взглянуть на возникшую ситуацию как бы другими глазами и «увидеть» новые зависимости между величинами или ввести в рассмотрение совершенно неожиданные функции.

8.В.4 (филол. ф-т — 80). Найти все значения a из промежутка $[1; \infty)$, при которых больший из корней уравнения

$$x^2-6x+2ax+a-13=0$$

принимает наибольшее значение

Подавляющее большинство абитуриентов на экзамене стали решать задачу «в лоб», а именно выразили больший из корней уравнения через a

$$x(a)=3-a+\sqrt{a^2-7a+22}$$

и принялись исследовать полученную функцию на максимум. Нетрудно догадаться, что лишь немногие довели это исследование до конца.

К существенному упрощению решения задачи приводит введение функции $a(x)$, которая каждому возможному (необязательно большему) корню x ставит в соответствие то значение параметра a, при котором уравнение имеет этот самый корень x. Рассматриваемая функция в силу уравнения может быть задана формулой

$$a(x)=\frac{-x^2+6x+13}{2x+1},$$

причем значение $x=-1/2$ заведомо не входит в область ее определения, поскольку ни при каком значении a уравнение не имеет корня $-1/2$:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2-6\left(-\frac{1}{2}\right)+2a\left(-\frac{1}{2}\right)+a-13=-9\frac{1}{4}\neq 0.$$

Что же нам известно дополнительно об этой функции? Мы знаем, что область ее значений содержится в множестве $[1; \infty)$. А интересует нас область ее определения, которая задается неравенством

$$a(x)\geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{-x^2+6a+13}{2x+1}\geqslant 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-6)(x+2)}{2x+1}\leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2}<x\leqslant 6, \\ x\leqslant -2. \end{array}\right.$$

Таким образом, для возможных корней уравнения получена оценка сверху $x\leqslant 6$, причем значение $x=6$ достигается при $a=a(6)=1$, т. е. действительно является наибольшим. Наконец, остается уточнить одну деталь: корень $x=6$ является именно большим из двух корней уравнения при $a=1$, поскольку второй его корень также удовлетворяет условию $a(x)=1$, а значит, и неравенству $x\leqslant 6$.

Ответ: 1.

Задачи

8.В.5. Верно ли, что:

а) любая функция имеет наибольшее значение;

б) любая ограниченная сверху функция имеет наибольшее значение;

в) если некоторое число ограничивает сверху все значения функции и совпадает с одним из них, то это число — наибольшее значение функции;

г) если некоторое число M ограничивает сверху все значения функции и никакое меньшее число их не ограничивает, то число M является наибольшим значением функции;

д) если некоторое число — наибольшее значение функции, то во всех точках, кроме одной, функция принимает значения, меньшие этого числа;

е) любая функция каждое значение между своим наибольшим и наименьшим значениями принимает хотя бы в одной точке?

8.В.6. Найти наибольшее значение функции

а) $y(x)=4x-x^2+6$;

б) $y(x)=\log_{1/2}(\sin x^2+3)$;

в) (геогр. ф-т — 81) $y(x)=x/2+\sin^2 x$ на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$;

г) $y(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ на отрезке $[0; 3]$;

д) $y(x)=x^3-x+1$ на отрезке $[0; 3]$.

8.В.7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y(x)=x-|x|$ на отрезке $[-1; 1]$;

б) (филол. ф-т — 84) $y(x)=-x^2+3|x+1|+2$ на отрезке $[-2; 2]$;

в) (психфак — 85) $y(x)=|x^2+x|+|x^2-3x+2|$ на отрезке $[-1/2; 3/2]$.

8.В.8. Найти все значения x, для которых функция принимает наименьшее значение:

а) (ВМК — 82) $f(x)=3-2\sin^2 2x-2\cos 2x$;

б) $f(x)=5\sin 2x+7\cos 2x$;

в) $f(x)=|\operatorname{tg} x|+|\operatorname{ctg} x|$.

8.В.9 (физфак — 78). Исследовать на экстремум функцию

$$y(x)=\sqrt{2x^2-x+2}.$$

8.В.10 (экономфак — 78). Имеются три сплава. Первый сплав содержит 30% никеля и 70% меди, второй — 10% меди и 90% марганца, третий — 15% никеля, 25% меди и 60% марганца. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 40% марганца. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание меди может быть в этом новом сплаве?

8.В.11 (мехмат — 81). В двух различных сосудах содержались смеси воды и песка, причем в 1-м сосуде было 1000 кг смеси, а во 2-м — 1960 кг. В оба сосуда добавили воды. При этом процентное содержание песка в смесях уменьшилось в k раз в 1-м сосуде и в l раз во 2-м. Известно, что $kl=9-k$. Найти наименьшее количество воды, которое могло быть долито в оба сосуда вместе.

8.В.12 (филол. ф-т — 80). Найти все значения a из промежутка $(-\infty; -4)$, при которых меньший из корней уравнения

$$x^2+ax-3x-2a-2=0$$

принимает наименьшее значение.

8.В.13. Доказать неравенство:

а) $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$ при $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$;

б) $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$ при $x>0$.

Ответы

8.В.5. а), б), г)—е) нет; в) да. **8.В.6.** а) 10; б) -1; в) $1+\pi/4$; г) 24; д) 25. **8.В.7.** а) 0 и -2; б) $7\frac{1}{4}$ и 1; в) 4 и 3/2. **8.В.8.**

а) $\pm\pi/6+\pi n$, $n\in Z$; б) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5}{7}-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; в) $\pi/4+\pi n$, $n\in Z$. 8.В.9. $y_{\min}=y(1/4)=\sqrt{15/8}$. 8.В.10. 40% и $43\frac{1}{3}$%. 8.В.11. 3480 кг. 8.В.12. —4.

§ 8.Г. ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФИЧЕСКИХ ИЛЛЮСТРАЦИЙ

Несмотря на то что задачи на построение графиков как таковые сравнительно редко предлагаются на вступительных экзаменах, использование хотя бы схематических графических иллюстраций в некоторых случаях помогает определить направление исследований, а иногда и позволяет сразу подобрать ключ к решению задачи. Как уже говорилось в § 3.Б, 5.А, для определенных типов задач даже примитивный рисунок, далекий от настоящего графика, дает возможность избежать различного рода ошибок и более простым способом получить ответ к уравнению или неравенству.

Опыт вступительных экзаменов показывает, что поступающие довольно неохотно прибегают к построению графиков, видимо, из-за слабой подготовки в этом вопросе. Какие же навыки нужны абитуриенту, чтобы свободно строить графики функций? Нужно, во-первых, хорошо знать свойства и графики основных функций; во-вторых, уметь производить стандартные преобразования графиков в соответствии с преобразованиями самих функций. Сюда относятся сдвиги, растяжения (сжатия) вдоль осей координат, а также отражения относительно этих осей или относительно биссектрисы угла между ними.

8.Г.1 (мехмат — 79). Решить неравенство

$$\frac{6}{2x+1}>\frac{1+\log_2(2+x)}{x}.$$

Многие абитуриенты на экзамене пытались решить неравенство методом равносильных преобразований, но их усилия оказались напрасными. В этой ситуации приходит на выручку метод подбора (см. § 2.В). Какая-то часть значений неизвестной удовлетворяет неравенству, и такие значения нужно просто угадать. А так как их окажется бесконечно много, то обыкновенной подстановкой их в неравенство факт пригодности этих значений подтвердить не удается — его придется доказывать иначе. Другая же часть значений неизвестной неравенству не удовлетворяет, что также нуждается в доказательстве.

«Но ведь нас никто не учил угадывать решения, особенно если их много», — подумает читатель. Конечно, это упражнение «трансцендентное», как, между прочим, и само исходное неравенство. Но для его выполнения несомненную пользу оказывает умение строить графики. Так, зная график функции $y=1/x$, путем последовательного применения операций отражения относительно оси ординат, сжатия с коэффициентом 2 вдоль оси абсцисс, растяжения с коэффициентом 3 вдоль оси ординат и сдвигов по оси абсцисс на $-1/2$ и по оси ординат на 3 можно получить график функции (см. § 1.Д)

$$y_1(x)=\frac{6x}{2x+1}=3-\frac{3}{2(x+1/2)},$$

изображенный на рис. 8.2. Аналогично сдвигом графика функции $y=\log_2 x$ на -2 по оси абсцисс и на 1 по оси ординат получается график функции

$$y_2(x)=1+\log_2(2+x),$$

изображенный также на рис. 8.2.

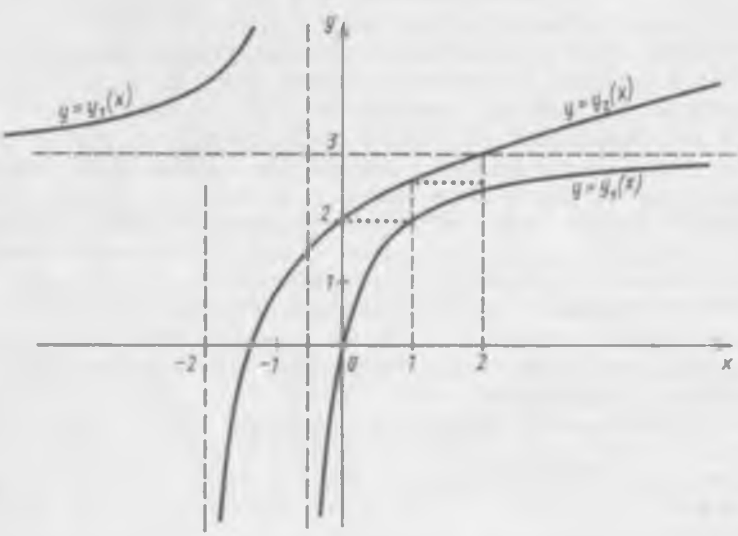

Рис. 8.2

Теперь заметим, что при $x>0$ исходное неравенство имеет вид $y_1(x)>y_2(x)$, а при $-1/2<x<0$ и $-2<x<-1/2$ — вид $y_1(x)<<y_2(x)$ (остальные значения не входят в ОДЗ неравенства). Поэтому, глядя на рис. 8.2 и учитывая, что большим значениям функции на графике соответствуют точки, расположенные «выше» по оси ординат, можно предположить о т в е т: $(-1/2;\ 0)$.

Для доказательства истинности сделанного предположения используем все тот же рис. 8.2, из которого хорошо видно, что, например, на интервале $(-2;\ -1/2)$ между значениями $y_1(x)$ и $y_2(x)$ можно вставить константу 3. Заметим, что идея о вставке подходящих промежуточных значений с равным успехом работает при доказательстве как числовых (см. § 1.Б), так и функциональных оценок. Однако та же идея на промежутке $(-1/2;\ \infty)$ в чистом виде не проходит, поскольку единой константы, разделяющей выражения для функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ целиком при всех значениях $x>-1/2$, не существует. Если же рассмотреть отдельно промежутки $(-1/2;\ 0)$, $(0;\ 1]$, $(1;\ 2]$ и $(2;\ \infty)$, то на каждом из них уже удается доказать неравенство $y_1(x)<y_2(x)$.

Решение. Рассмотрим пять случаев:

1) пусть $-2<x<-1/2$, тогда

$$\frac{6x}{2x+1}=3-\frac{3}{2x+1}>3>1+\log_2 2>1+\log_2(2+x),$$

т. е. неравенство не выполнено;

2) пусть $-1/2<x<0$, тогда

$$\frac{6x}{2x+1}<0<1+\log_2\left(2-\frac{1}{2}\right)<1+\log_2(2+x),$$

т. е. неравенство выполнено;

3) пусть $0<x\leqslant 1$, тогда

$$\frac{6x}{2x+1}=3-\frac{3}{2x+1}\leqslant 3-\frac{3}{3}=2<1+\log_2(2+x),$$

т. е. неравенство не выполнено;

4) пусть $1<x\leqslant 2$, тогда

$$\frac{6x}{2x+1}=3-\frac{3}{2x+1}\leqslant 3-\frac{3}{5}<1+\log_2 3<1+\log_2(2+x)$$

$\left(\text{ибо } 2^7=128<243=3^5\Rightarrow 7<5\log_2 3\Rightarrow\frac{12}{5}<1+\log_2 3\right)$, т. е. неравенство не выполнено;

5) пусть $x>2$, тогда

$$\frac{6x}{2x+1}=3-\frac{3}{2x+1}<3=1+\log_2 4<1+\log_2(2+x),$$

т. е. неравенство не выполнено.

Использование графиков, по существу, помогло нам в задаче 8.Г.1 разрешить целый ряд проблем технического характера: начиная от угадывания ответа и кончая разбиением оси абсцисс на удобные для исследования промежутки. В следующей задаче график наглядно демонстрирует некоторые качественные свойства исследуемой функции и тем самым показывает, из каких соображений нужно искать ответ на поставленный вопрос.

8.Г.2 (химфак — 84). Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$\frac{1}{2}|a-2|\cdot|x+a-4|+\left(\frac{a^2-4a+3}{|a-2|}-|a-2|\right)\cdot|x-2|+$$
$$+\frac{1}{2}|a-2|\cdot|x-a|\leqslant 1$$

выполняется ровно для двух различных значений x.

Обозначим $y=x-2$ и рассмотрим функцию, равную разности левой и правой частей неравенства:

$$f(y)=\frac{1}{2}|a-2|\cdot|y+a-2|+\frac{1}{2}|a-2|\cdot|y-a+2|+$$
$$+\left(\frac{(a-3)(a-1)}{|a-2|}-|a-2|\right)\cdot|y|-1.$$

Далее, обозначим $b=a-2$, тогда

$$f(y)=\frac{1}{2}|b|(|y+b|+|y-b|)+\left(\frac{b^2-1}{|b|}-|b|\right)\cdot|y|-1.$$

Наконец, обозначим $c=|b|$, тогда $c>0$ и

$$f(y)=\frac{c}{2}(|y+c|+|y-c|)-\frac{|y|}{c}-1.$$

Из четности функции $f(y)$ вытекает, что решения неравенства $f(y)<0$ расположены на числовой оси симметрично относительно точки 0. Следовательно, это неравенство имеет ровно два решения в том и только в том случае, если одно из них положительно, а другое отрицательно. Итак, неравенство $f(y)<0$ должно иметь единственное, причем положительное решение на промежутке $[0; \infty)$. Построим график функции

$$z=\frac{c}{2}(y+c+|y-c|)-\frac{y}{c}-1$$

при $y>0$. Для этого рассмотрим два промежутка: $0<y<c$ и $y>c$, на каждом из которых функция линейна. Подставляя вместо y концевые значения 0 и c, получаем две точки графика $(0; c^2-1)$ и $(c; c^2-2)$, которые соединяем отрезком прямой (рис. 8.3). На этом промежутке функция убывает независимо от значения c, так как $f(0)>f(c)$. При $y>c$ имеем

$$z=\frac{c}{2}(y+c+y-c)-\frac{y}{c}-1=\left(c-\frac{1}{c}\right)y-1,$$

поэтому график функции на этом промежутке будет представлять собой соответствующую часть прямой, проходящей через точки $(0; -1)$ и $(c; c^2-2)$, причем функция возрастает, если $f(c)>-1$. Решениями неравенства $f(y)<0$ являются абсциссы тех и только тех точек графика $z=f(y)$, которые лежат или на оси абсцисс или «под» ней. Из наглядных свойств этого графика (рис. 8.3—8.6, где $c=2$, $\sqrt{2}$, 1, $\sqrt{2}/2$) становится ясным, что нас может заинтересовать лишь расположение, изображенное на рис. 8.4, при котором $f(c)=0$. Теперь дело за доказательством.

1) Пусть $f(c)=0$. Тогда при $y\in[0; c]$ функция $f(y)$ убывает, а при $y\in[c; \infty)$ — возрастает. Поэтому $f(y)>f(c)=0$ при всех значениях $y\neq c$, т. е. $f(y)<0\Leftrightarrow y=c$.

2) Пусть $f(c)>0$. Тогда аналогично $f(y)>f(c)>0$ и неравенство $f(y)<0$ решений не имеет.

3) Пусть $f(c)<0$. Тогда вследствие непрерывности функции $f(y)$ неравенство $f(y)<0$ выполнено для всех значений y из некоторой достаточно малой окрестности значения c, и поэтому имеет более одного решения.

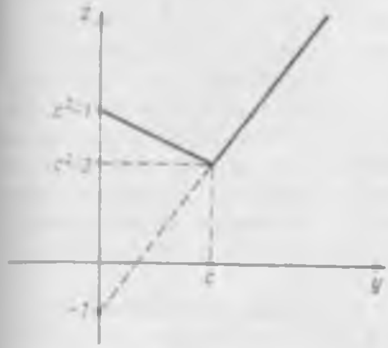

Рис. 8.3

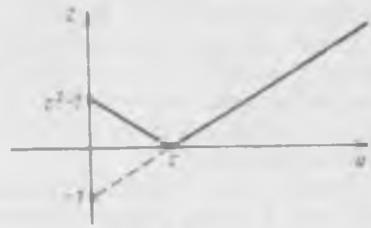

Рис. 8.4

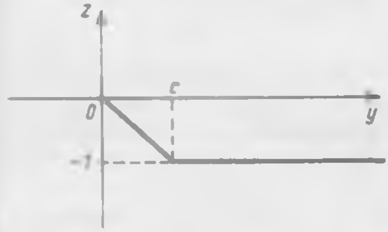

Рис. 8.5

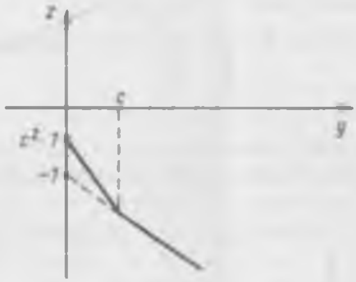

Рис. 8.6

Возвращаясь к исходному параметру a, получаем

$$0=f(c)=c^2-2=|b|^2-2=(a-2)^2-2=(a-2-\sqrt{2})(a-2+\sqrt{2}),$$

откуда немедленно следует **о т в е т**: $2-\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$.

Заметим, что использованные нами переобозначения неизвестной и параметров хотя и придают решению некоторый лоск, но в принципе не обязательны. Так, график функции, равной левой части исходного неравенства, вполне можно было построить без всяких ухищрений, посчитав ее значения в точках предполагаемого излома ($x=4-a$, 2, a) и выписав формулы для каждого из промежутков, на которые разбивается ось абсцисс указанными точками. При этом неизбежен небольшой перебор случаев, связанный с возможным расположением этих точек на оси. И все же одно можно утверждать с уверенностью: строить график с помощью сдвигов, растяжений и складываний графиков модуля в данном случае нецелесообразно, поскольку при таком подходе трудно ручаться даже за приблизительное качественное сходство построенного графика с оригиналом.

У читателя, по всей видимости, давно появилось такое смутное подозрение: «Что, собственно, мудрить, выписывая аналитические доказательства тех фактов, которые со всей очевидностью следуют из графика? Зачем в решении задачи 8.Г.2 доказывать необходимость и достаточность условия $f(c)=0$, когда все и так ясно из рисунков 8.3—8.6? И уж совсем непонятно, для чего понадобилось изощряться в придумывании хитроумных оценок при решении задачи 8.Г.1. Ведь на рис. 8.2 построены довольно точные графики исследуемых функций, которые не вызывают никаких сомнений, а если кому и придет в голову проверять справедливость утверждаемых неравенств, пусть возьмет наиболее «подозрительные» точки графиков и убедится, что даже для них эти неравенства выполнены».

Чтобы раз и навсегда покончить с подобными мыслями, отметим, что в силу ограниченности наших графических возможностей абсолютно точный график в принципе построить нельзя. Более того, слепо доверять рисунку, как показывает следующая задача, бывает просто опасно.

8.Г.3. Верно ли, что уравнение $\log_{1/16} x=\left(\frac{1}{16}\right)^x$ имеет ровно один корень?

Поскольку в задаче не требуется решать уравнение, то для получения ответа на поставленный вопрос достаточно оценить количество точек пересечения графиков функций

$$y_1(x)=\log_{1/16} x \text{ и } y_2(x)=\left(\frac{1}{16}\right)^x.$$

Обычно поступающие вполне довольствуются схематичными графиками, изображенными на рис. 8.7, и моментально заключают, что «на вопрос задачи следует дать положительный ответ».

Давайте подставим в уравнение значение $x=1/2$:

$$y_1\left(\frac{1}{2}\right)=\log_{1/16}\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{16}\right)^{1/2}=y_2\left(\frac{1}{2}\right).$$

«Замечательно, — воскликнет автор рис. 8.7, — единственный корень уравнения даже удалось указать явно!» И вот, когда уже предъявлено «бесспорное» решение задачи, вдруг выясняется, что значение $x=1/4$ также удовлетворяет уравнению:

$$y_1\left(\frac{1}{4}\right)=\log_{1/16}\frac{1}{4}=\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{16}\right)^{1/4}=y_2\left(\frac{1}{4}\right).$$

Такой поворот событий заставляет поступающего несколько раз безуспешно перепроверять произведенные выкладки и внимательно всматриваться в график. Однако на графике не видно двух найденных аналитически точек пересечения (1/2; 1/4) и (1/4; 1/2). Более того, ни одна из них, как показывает проверка, не лежит на биссектрисе первого квадранта, задаваемой уравнением $y=x$ и непременно содержащей одну точку пересечения графиков. Для доказательства последнего утверждения заметим, что функция $y=$ $=(1/16)^x-x$ убывает и непрерывна, причем принимает как положительное (при $x=0$), так и отрицательное (при $x=1$) значения, следовательно, она однажды принимает и значение 0. Итак, гра-

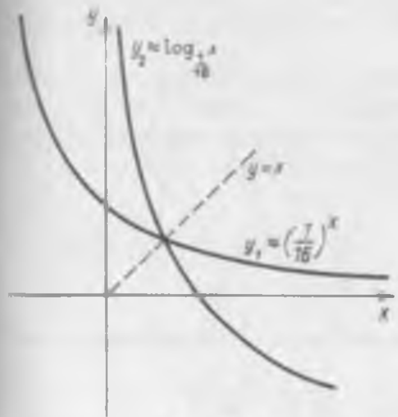

Рис. 8.7

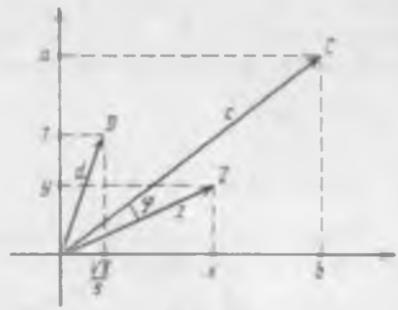

Рис. 8.8

фик функции $y_2(x)$ пересекает биссектрису, а так как функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ взаимно обратны, то из соображений симметрии относительно биссектрисы получаем, что график функции $y_1(x)$ также пересекает биссектрису в той же точке, т. е. одна общая точка графиков с абсциссой, удовлетворяющей уравнениям $y_1(x)=x=$ $=y_2(x)$, лежит на биссектрисе. Таким образом, ответ на вопрос задачи: нет.

Вывод напрашивается сам собой: «Не верь глазам своим!» Надеемся, что нам удалось окончательно разубедить читателя в том, что графики могут служить надежным доказательством каких-либо утверждений. К сожалению, на вступительных экзаменах нередко встречаются пояснения типа «из графика видно, что...». В связи с этим подчеркнем, что любой рисунок лишь иллюстрация к решению или наводящее соображение, хотя в некоторых стандартных ситуациях, например при использовании метода интервалов или тригонометрического круга, рисунок принято считать одним из элементов решения.

Иногда графическая иллюстрация придает условию задачи совершенно неожиданный смысл, позволяя переформулировать исходную задачу на иной лад и в результате привлечь к решению какие-либо факты из тех разделов математики, которые поначалу никакого отношения к задаче не имели. Особенно эффективным бывает использование геометрического материала в отдельных задачах аналитического характера.

8.Г.4 (экономфак — 85). Среди всех решений (x, y, a, b) системы

$$\begin{cases} x^2+y^2=3, \\ a^2+b^2=25, \\ xb+ya \geqslant 5\sqrt{3} \end{cases}$$

найти такие, при которых выражение $x+a$ принимает наибольшее значение.

С каждой парой чисел x, y свяжем вектор $z=OZ$ с координатами (x, y), а с каждой парой чисел a, b — вектор $c=OC$ с координатами $(a; b)$ (см. рис. 8.8). Теперь исходную систему можно переписать на векторном языке

$$\begin{cases} |z|=\sqrt{3}, \\ |c|=5, \\ cz \geqslant 5\sqrt{3}. \end{cases}$$

Обозначив $\varphi=\angle COZ$ и воспользовавшись представлением скалярного произведения в виде

$$cz=|c|\cdot|z|\cdot\cos\varphi,$$

получим равносильную систему

$$\begin{cases} |z|=\sqrt{3}, \\ |c|=5, \\ 5\sqrt{3}\cos\varphi \geqslant 5\sqrt{3}. \end{cases}$$

Последнее условие этой системы в силу неравенства $\cos\varphi\leqslant 1$ равносильно уравнению $\cos\varphi=1$, которое означает одинаковую направленность векторов c и z. Таким образом, исходной системе удовлетворяют те и только те значения x, y, a, b, для которых

$$\begin{cases} a^2+b^2=25, \\ x=\dfrac{\sqrt{3}}{5}b, \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{5}a. \end{cases}$$

Думается, что без привлечения наглядных геометрических соображений эта задача решается существенно сложнее. По крайней мере, на экзамене абитуриенты исследовали систему только с помощью векторов. Правда, почему-то многие не догадались использовать тот же прием для нахождения условий, при которых величина $x+a$ достигает максимума, и не смогли довести решение до конца.

Выражение $x+a=\frac{\sqrt{3}}{5}b+a$ представляет собой скалярное произведение вектора c и вектора $d=OD$ с координатами $(\sqrt{3}/5;\ 1)$ и абсолютной величиной $\sqrt{28}/5$ (см. рис. 8.8). Поэтому величина

$$x+a=cd=5\cdot\frac{\sqrt{28}}{5}\cos\angle COD$$

принимает наибольшее значение, когда векторы c и d одинаково направлены, т. е. когда

$$\begin{cases} a=\left(1:\frac{\sqrt{28}}{5}\right)\cdot 5=\frac{25}{\sqrt{28}}, \\ b=\left(\frac{\sqrt{3}}{5}:\frac{\sqrt{28}}{5}\right)\cdot 5=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{28}}, \\ x=\frac{\sqrt{3}}{5}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{28}}=\frac{3}{\sqrt{28}}, \\ y=\frac{\sqrt{3}}{5}\cdot\frac{25}{\sqrt{28}}=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{28}}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{3}{\sqrt{28}};\ \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{28}};\ \frac{25}{\sqrt{28}};\ \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{28}}\right)$.

Задачи

8.Г.5. Построить графики функций $\log_{1/16}x$ и $(1/16)^x$, подтверждающие ответ к задаче 8.Г.3.

8.Г.6. Как нужно преобразовать график функции $y=f(x)$, чтобы получить из него график функции:

а) $y=f(x)+1$;

б) $y=f(x+1)$;

в) $y=2f(x)$;

г) $y=f(2x)$;

д) $y=-f(x)$;

е) $y=f(-x)$;

ж) $y=|f(x)|$;

з) $y=f(|x|)$;

и) $x=f(y)$?

8.Г.7. Решить неравенство:

а) (мехмат—79) $\frac{6-3^{x+1}}{x}>\frac{10}{2x-1}$;

б) $\pi(\cos x+3)<2x$.

8.Г.8. Найти все значения a, при которых:

а) (экономфак — 83) уравнение

$$x-a=2|2|x|-a^2|$$

имеет три корня. Найти эти корни;

б) (химфак – 84) неравенство

$$-\frac{1}{2}|a+3|\cdot|x+a+6|+\left(|a+3|-\frac{a^2+6a+8}{|a+3|}\right)\cdot|x+3|-$$

$$-\frac{1}{2}|a+3|\cdot|x-a|\geqslant-2$$

выполняется ровно для двух значений x;

в) (филол. ф-т – 84) система

$$\begin{cases} y\geqslant x^2+2a, \\ x\geqslant y^2+2a \end{cases}$$

имеет единственное решение;

г) (мехмат – 80) неравенство

$$\log_{1/a}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+1\right)\log_5(x^2+ax+6)+\log_a 3\geqslant 0$$

имеет единственное решение;

д) (филол. ф-т – 82) количество пар целых чисел n, m, удовлетворяющих условию

$$a^2|n|\leqslant\sqrt{2}\,(a^2-m^2),$$

минимально.

8.Г.9 (геол. ф-т — 82). Построить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$y=4-\left|y-\frac{6}{x}\right|-2\left|\frac{3}{x}-1\right|,$$

и среди точек этого множества найти те, у которых координата y принимает наибольшее значение.

8.Г.10 (геол. ф-т — 81). Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости условием

$$|x|+|y-1|<4.$$

8.Г.11 (экономфак — 85). Среди всех решений (a, b, c, d) системы

$$\begin{cases} a^2+b^2=9, \\ c^2+d^2=16, \\ ad+bc\geqslant 12 \end{cases}$$

найти такие, при которых выражение $b+d$ принимает наименьшее значение.

8.Г.12. Найти все пары чисел x, y, при которых выражение

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

принимает свое наименьшее значение.

Ответы

8.Г.5. См. рис. 8.9. **8.Г.6.** а) поднять на 1; б) сдвинуть на 1 влево; в) растянуть в 2 раза по вертикали при неподвижной оси абсцисс; г) сжать в 2 раза по горизонтали при неподвижной оси ординат; д) отразить симметрично относительно оси абсцисс; е) отразить симметрично относительно оси ординат; ж) отразить симметрично относительно оси абсцисс часть графика, лежащую ниже этой оси; з) заменить часть графика, лежащую слева от оси ординат, графиком, симметричным части графика, лежащей справа от этой оси; и) отразить симметрично относительно биссектрисы первого квадранта. **8.Г.7.** а) $(0;\ 1/2)$; б) $[\pi;\ 3\pi/2]\cup[2\pi;\ \infty)$. **8.Г.8.** а) $-2,\ 6/5,\ 10/3$ при $a=-2$; $-1/5,\ 0,\ 1/3$ при $a=-1/2$; б) $-3-\sqrt{3}$; $-3+\sqrt{3}$; в) $1/8$; г) 2; д) $(\sqrt{2}/2;\ 1)\cup(\sqrt{2};\ 2)$. **8.Г.9.** $(x;\ 3)$, $x\in[2;\ 3]$; см. рис. 8.10. **8.Г.10.** 32. **8.Г.11.** $(-12/5;\ -9/5;\ -12/5;\ -16/5)$. **8.Г.12.** $(x;\ 1-x)$, $x\in[0;\ 1]$.

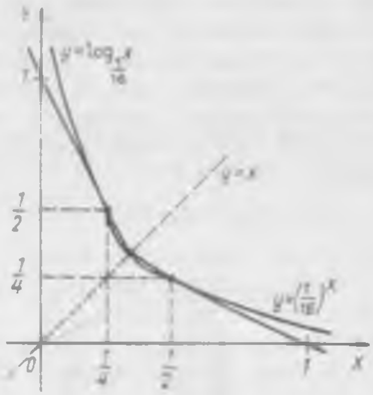

Рис. 8.9

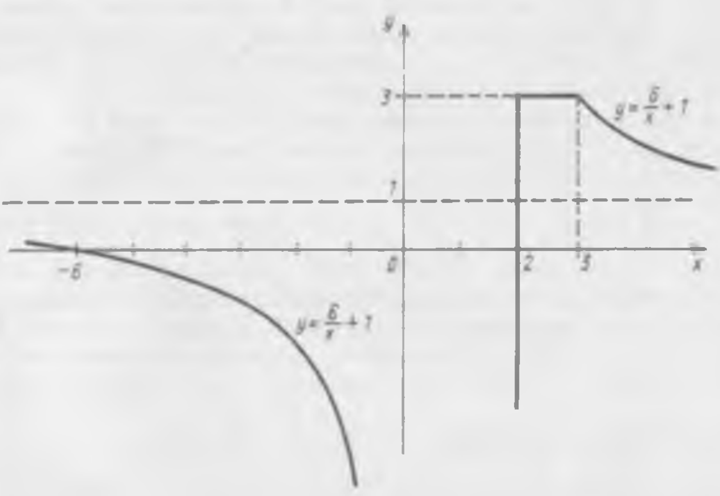

Рис. 8.10

§ 8.Д. КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

Практически в каждом варианте задач на вступительных экзаменах имеются задачи, так или иначе связанные с квадратным трехчленом. В этом смысле квадратный трехчлен — одна из самых важных функций, поэтому безукоризненное знание его свойств требуется от каждого поступающего. Простейшие задачи, опирающиеся на формулы корней квадратного трехчлена или на свойство его знакопостоянства при отсутствии таковых, рассматривались нами ранее (см. § 1.Г, 1.Д, 3.А). В настоящем параграфе подробно остановимся на вопросах о существовании корней, их количестве и расположении на числовой оси. Для решения таких вопросов далеко не всегда нужен прямой и утомительный подсчет корней, зато предполагается от поступающих владение определенными методами работы с функциями и их графиками.

8.Д.1 (ВМК — 80). Найти все значения a, при которых уравнение

$$(3a-1)x^2+2ax+3a-2=0$$

имеет два различных корня.

Основательно усвоив хорошо известную истину о том, что квадратный трехчлен имеет два различных корня тогда и только тогда, когда его дискриминант положителен, многие абитуриенты на экзамене бодро провели выкладки

$$(2a)^2-4(3a-1)(3a-2)>0 \Leftrightarrow 8a^2-9a+2<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(a-\frac{9-\sqrt{17}}{16}\right)\left(a-\frac{9+\sqrt{17}}{16}\right)<0 \Leftrightarrow \frac{9-\sqrt{17}}{16}<a<\frac{9+\sqrt{17}}{16}$$

и включили в ответ все полученные значения a. При этом в ответе оказалось также и значение $a=1/3$, при котором левая часть уравнения уже не является квадратным трехчленом. Некоторые абитуриенты, заметив, что к указанному значению параметра предыдущее высказывание неприменимо, рассудили так: «По определению квадратного уравнения коэффициент при x^2 не должен равняться нулю, следовательно, случай $3a-1=0$ нужно с самого начала отбросить». И хотя это рассуждение дает верный о т в е т: $\left(\frac{9-\sqrt{17}}{16};\ \frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};\ \frac{9+\sqrt{17}}{16}\right)$, оно показывает лишь формальное знание определения квадратного уравнения. В отброшенном случае уравнение и в самом деле перестает быть квадратным, о чем ни в коем случае нельзя забывать. Однако в условии задачи на этот счет нет никаких оговорок, поэтому значение $a=1/3$ нужно не отбросить, а рассмотреть наравне с другими: уравнение

$$\frac{2}{3}x+1-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

имеет только один корень, т. е. значение $a=1/3$ действительно не удовлетворяет требуемому в задаче условию.

Полезную роль при исследовании функции

$$y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$$

может сыграть знание наглядных свойств ее графика: *симметричности параболы и корней функции относительно вертикальной прямой $x=-b/2a$, проходящей через вершину параболы; направления ветвей параболы, зависящего от знака коэффициента a; монотонности на промежутках $\left[-\frac{b}{2a};\ \infty\right)$, $\left(-\infty;\ -\frac{b}{2a}\right]$ и непрерывности этой функции*. Так, например, для нахождения условий совместности системы

$$\begin{cases} t^2-t-a=0, \\ 0\leqslant t\leqslant 1 \end{cases}$$

из задачи 1.Г.4 совсем не обязательно искать корни уравнения и подставлять их в неравенство, а достаточно заметить следующее:

1) дискриминант квадратного трехчлена

$$y(t)=t^2-t-a$$

должен быть неотрицательным, т. е. необходимо условие

$$1+4a\geqslant 0,$$

означающее, что вершина параболы имеет неположительную ординату $y(1/2)$ (см. рис. 8.11);

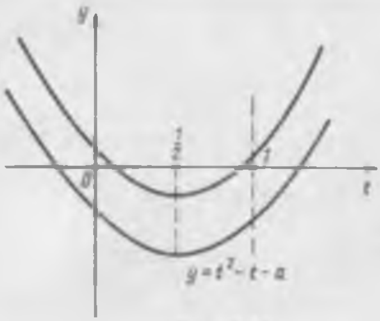

Рис. 8.11

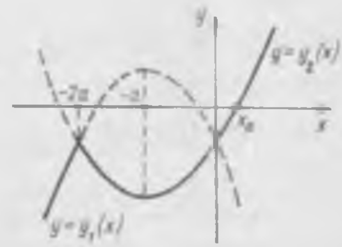

Рис. 8.12

2) корни трехчлена симметричны относительно середины (точка 1/2) отрезка [0; 1], поэтому они одновременно расположены либо на этом отрезке, если

$$y(0)=-a\geqslant 0,$$

либо вне его, если $y(0)<0$ (на рис. 8.11 хорошо видно, как значение $y(0)$ влияет на наличие корня на отрезке [0; 1/2] при условии, что $y(1/2)\leqslant 0$; в частности, если $y(0)>0$ и $y(1/2)<0$, то на отрез-

1) Пусть $y(-2a)<0$, тогда $a>1$, $-2a<-a$ и в силу свойств квадратных трехчленов $y_1(x)$ и $y_2(x)$ (см. рис. 8.12) функция $y(x)$ уже имеет один корень $x_0>-a$, а значит, для выполнения требования задачи необходимо и достаточно, чтобы значение $y(-2a)$ было меньше 0, т. е. $a>1$.

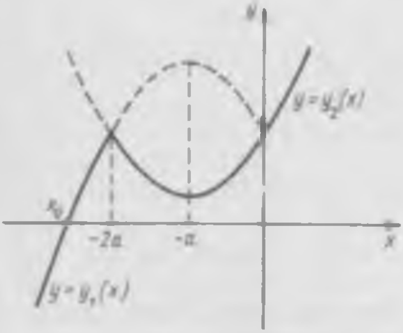

Рис. 8.13

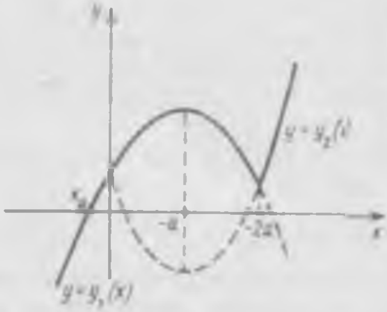

Рис. 8.14

2) Пусть $y(-2a)>0$, тогда $a<1$ и возможны два случая:

2а) если $0<a<1$, то $-2a<-a$ и функция $y(x)$ уже имеет один корень $x_0<-2a$ (см. рис. 8.13), а значит, для выполнения требования задачи необходимо и достаточно, чтобы значение $y(-a)$ было положительным, т. е. чтобы дискриминант квадратного трехчлена $y_2(x)$ был отрицателен:

$$\begin{cases} a^2+a-1<0, \\ 0<a<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}<a<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \\ 0<a<1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0<a<\frac{-1+\sqrt{5}}{2};$$

2б) если $a<0$, то $-a<-2a$ и функция $y(x)$ на всей числовой оси имеет ровно один корень $x_0<-a$ (см. рис. 8.14, где $y(-2a)>$ >0).

Ответ: $\left(-\infty; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup (1; \infty)$.

8.Д.4 (биофак — 77). Найти все те значения s, при которых корни уравнений $x^2+\dfrac{3x}{s}+2s=0$, $x^2+\dfrac{12x}{s}-s=0$ не перемежаются, т. е. оба уравнения имеют по два корня и между корнями хотя бы одного из уравнений нет ни одного корня другого уравнения.

Проанализировав сформулированное в задаче требование, означающее, что корни данных уравнений на числовой оси не перемежаются, многие абитуриенты правильно определили, что нужно исключить лишь следующие варианты расположения корней, так сказать, через один:

$$x_1<x_3<x_2<x_4 \text{ или } x_3<x_1<x_4<x_2,$$

где x_1, x_2 и x_3, x_4 — корни квадратных трехчленов $f(x)=x^2+\frac{3x}{s}+2s$ и $g(x)=x^2+\frac{12x}{s}-s$ соответственно.

Далее, некоторые абитуриенты, пользуясь рассмотренными выше приемами, установили (см. рис. 8.15, 8.16), что в первом

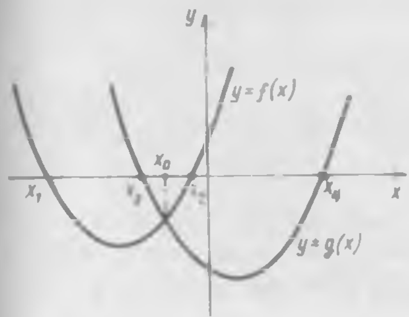

Рис. 8.15

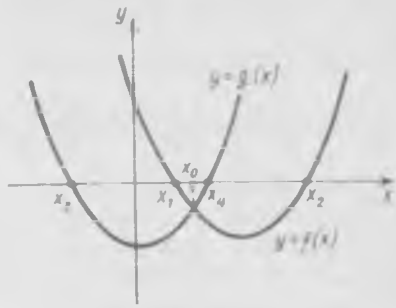

Рис. 8.16

случае $f(x_3)<0$ и $f(x_4)>0$, а во втором $f(x_3)>0$ и $f(x_4)<0$. Таким образом, в обоих случаях справедливо неравенство $f(x_3)f(x_4)<0$, которое является необходимым и достаточным условием того, что корни перемежаются. Однако после подстановки довольно громоздкого выражения

$$x_{3,4}=-\frac{6}{s}\pm\sqrt{\frac{36}{s^2}+s}$$

в указанное неравенство получилось очень сложное условие на s. Здесь можно было применить теорему Виета, согласно которой

$$x_3x_4=-s,$$

$$x_3+x_4=-\frac{12}{s},$$

и, учитывая равенства $g(x_3)=g(x_4)=0$, получить

$$f(x_3)\,f(x_4)=\left(x_3^2+\frac{3}{s}x_3+2s\right)\left(x_4^2+\frac{3}{s}x_4+2s\right)=$$

$$=\left(s-\frac{12}{s}x_3+\frac{3}{s}x_3+2s\right)\left(s-\frac{12}{s}x_4+\frac{3}{s}x_4+2s\right)=$$

$$=\left(3s-\frac{9}{s}x_3\right)\left(3s-\frac{9}{s}x_4\right)=9s^2-27(x_3+x_4)+$$

$$+\frac{81}{s^2}x_3x_4=9s^2+27\cdot\frac{12}{s}-\frac{81}{s^2}s=9s^2+\frac{243}{s}=\frac{9}{s}(s^3+3^3).$$

ке [0; 1/2] непрерывная функция $y(x)$ обязательно имеет корень). Таким образом, искомые условия выглядят так:

$$\begin{cases} 1+4a\geqslant 0, \\ -a\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant 0.$$

Конечно, в данной задаче мы получили, так сказать, грошовую экономию выкладок, поскольку непосредственные оценки для корней также довольно быстро приводят к ответу. Однако трудно не согласиться с тем, что неравенства с радикалами, возникающими при вычислении корней, — штука малоприятная и весьма коварная (см. § 3.Д).

Использование свойств квадратного трехчлена в некоторых задачах связано с перебором различных случаев: *в зависимости от расположения вершины параболы, от значений функции в отдельных ключевых точках и т. д.* При этом сам перебор случаев нередко требует от поступающих определенного запаса терпения п аккуратности, недостаток которой может повлечь за собой неточности в ответе или логическую неполноту его обоснования.

8.Д.2 (психфак — 77). Найти все значения a, при которых имеется хотя бы одна пара чисел (x, y), удовлетворяющая условиям:

$$\begin{cases} x^2+(y+3)^2<4, \\ y=2ax^2. \end{cases}$$

Решение. Исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} y=2ax^2, \\ x^2+(2ax^2+3)^2-4<0 \end{cases}$$

и имеет решение тогда и только тогда, когда совместна система

$$\begin{cases} t+(2at+3)^2-4<0, \\ t\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(t)<0, \\ t\geqslant 0, \end{cases}$$

где обозначено $t=x^2$, $f(t)=4a^2t^2+(12a+1)t+5$.

1) Пусть $a=0$, тогда система несовместна, ибо при $t\geqslant 0$ имеем $f(t)=t+5>0$.

2) Пусть $a\neq 0$, тогда обозначим $t_0=-\dfrac{12a+1}{8a^2}$ и рассмотрим два случая:

2а) если $t_0<0$, то система несовместна, ибо при $t>0$ имеем $f(t)>f(0)=5>0$;

2б) если $t_0>0$, то совместность системы равносильна тому, что наименьшее значение квадратного трехчлена $f(t)$, равное $f(t_0)$, меньше 0, т. е. его дискриминант положителен.

Получаем систему

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ -(12a+1) > 0, \\ (12a+1)^2 - 80a^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a+1 < 0, \\ 64a^2 + 24a + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < -\dfrac{1}{12}, \\ \left(a - \dfrac{-3-\sqrt{5}}{16}\right)\left(a - \dfrac{-3+\sqrt{5}}{16}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a < -\frac{3+\sqrt{5}}{16},$$

так как $-\dfrac{3+\sqrt{5}}{36} < -\dfrac{3}{16} < -\dfrac{1}{12} < -\dfrac{1}{16} < -\dfrac{3-\sqrt{5}}{16}$.

Ответ: $\left(-\infty;\ -\dfrac{3+\sqrt{5}}{16}\right)$.

Логически более сложны задачи, в которых участвует несколько квадратных трехчленов и речь идет о взаимном расположении или общем количестве их корней на различных промежутках. Описанные выше приемы в таких задачах дают явное преимущество перед стандартным подходом. К сожалению, они не пользуются особой популярностью среди абитуриентов, предпочитающих расписывание громоздких, изобилующих сложными выкладками (и многочисленными ошибками) текстов, в то время как существуют технически несложные и идейно прозрачные решения.

8.Д.3 (биофак — 78). Найти все значения a, при которых уравнение

$$x|x+2a|+1-a=0$$

имеет единственное решение.

Обозначим левую часть уравнения через $y(x)$, тогда

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) = -x^2 - 2ax + 1 - a & \text{при} \quad x < -2a, \\ y_2(x) = x^2 + 2ax + 1 - a & \text{при} \quad x \geqslant -2a, \end{cases}$$

причем вершины обеих парабол, соответствующих квадратным трехчленам $y_1(x)$ и $y_2(x)$, имеют абсциссу $-a$.

Абитуриенты на экзамене после раскрытия модуля решили, что единственное решение возможно лишь тогда, когда дискриминант одного из квадратных трехчленов $y_1(x)$, $y_2(x)$ равен 0, а другого — меньше 0. Это ложное решение возникло из-за формального отношения к задаче. Другие абитуриенты занялись поиском корней функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ на соответствующих промежутках, но очень скоро, осознав всю мучительность такого лобового метода исследования, оставили эту затею. А между тем можно было догадаться, что наиболее важную роль в задаче играет значение функции $y(x)$ в точке $-2a$:

$$y(-2a) = y_1(-2a) = y_2(-2a) = 1-a.$$

Итак, корни перемежаются тогда и только тогда, когда выполнено условие $s \in (-3; 0)$.

Впрочем, тот же результат можно было получить гораздо проще, без теоремы Виета, но с помощью нехитрого усовершенствования того же приема. Достаточно было заметить, что в известном смысле ключевой точкой является единственная точка пересечения графиков функций $f(x)$ и $g(x)$, абсцисса x_0 которой удовлетворяет условию

$$f(x_0)=g(x_0) \Leftrightarrow x_0^2+\frac{3}{s}x_0+2s=x_0^2+\frac{12}{s}x_0-s \Leftrightarrow x_0=\frac{s^2}{3},$$

а корни перемежаются тогда и только тогда, когда

$$f(x_0)<0 \Leftrightarrow \left(\frac{s^2}{3}\right)^2+\frac{3}{5}\cdot\frac{s^2}{3}+2s<0 \Leftrightarrow -3<s<0$$

(см. рис. 8.15, 8.16).

К сожалению, об этом не догадался никто из абитуриентов — они остановились фактически на полпути, так и не расставшись с мыслью об обязательном изучении значений одного квадратного трехчлена на корнях другого.

Для завершения решения задачи остается теперь указать значения параметра s, при которых оба данных уравнения имеют по два корня,

$$\begin{cases} \dfrac{9-8s^3}{s^2}>0, \\ \dfrac{144+4s^3}{s^2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt[3]{36}<s<\dfrac{\sqrt[3]{9}}{2}, \\ s\neq 0, \end{cases}$$

отбросив найденные ранее значения s, при которых корни перемежаются.

Ответ: $\left(-\sqrt[3]{36};\ -3\right] \cup \left(0;\ \dfrac{\sqrt[3]{9}}{2}\right)$.

Задачи

8.Д.5. С помощью дискриминанта $D=b^2-4ac$ квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ с положительным коэффициентом a, абсциссы $x_0=-b/2a$ вершины соответствующей параболы и значений функции $f(x)$ в отдельных точках сформулировать необходимые и достаточные условия для того, чтобы этот квадратный трехчлен:

а) не имел корней;

б) имел единственный корень;

в) имел два корня, расположенные по разные стороны от числа d;

г) имел два корня, между которыми лежит отрезок $[d_1; d_2]$;

д) имел два корня, большие числа d;

е) имел два корня на отрезке $[d_1; d_2]$;

ж) имел два корня, расположенные по одному на каждом из двух непересекающихся интервалов $(d_1; d_2)$ и $(d_3; d_4)$;

з) не имел корней, больших числа d;

и) не имел корней на отрезке $[d_1; d_2]$;

к) имел хотя бы один корень, больший числа d;

л) имел хотя бы один корень на отрезке $[d_1; d_2]$;

м) имел ровно один корень, больший числа d;

н) имел ровно один корень на интервале $(d_1; d_2)$.

8.Д.6. Найти все значения a, при которых:

а) (ВМК – 80) уравнение

$$(2a-1)x^2+ax+2a-3=0$$

имеет не более одного корня;

б) (психфак – 77) имеется хотя бы одна пара чисел, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} x^2+(y-2)^2<1, \\ y=ax^2; \end{cases}$$

в) (экономфак – 77) неравенство

$$3-|x-a|>x^2$$

имеет хотя бы одно неотрицательное решение;

г) (экономфак – 78) неравенство

$$a^2+2a-\sin^2 x-2a\cos x>2$$

выполняется для любого x;

д) (химфак – 81) неравенство

$$(a^3+(1-\sqrt{2})a^2-(3+\sqrt{2})a+3\sqrt{2})x^2+2(a^2-2)x+a>-\sqrt{2}$$

выполняется для любого $x>0$;

е) (филол. ф-т – 77) уравнение

$$|1-ax|=1+(1-2a)x+ax^2$$

имеет единственный корень;

ж) (биофак – 78) уравнение

$$x^2+4x-2|x-a|+2-a=0$$

имеет ровно два решения;

з) (психфак – 81) наименьшее значение квадратного трехчлена

$$4x^2-4ax+(a^2-2a+2)$$

на отрезке $x\in[0; 2]$ равно 3;

и) (биофак – 83) оба неравенства

$$2a\cos 2(x-y)+8a^2\cos(x-y)+8a^2(a+1)+5a<0,$$

$$x^2+y^2+1>2ax+2y+a-a^2$$

выполняются для любых x и y;

к) (биофак — 77) корни уравнений

$$x^2+4x+4a=0 \text{ и } x^2+3x+6a=0$$

не перемежаются, т. е. оба уравнения имеют по два корня и между корнями хотя бы одного из уравнений нет ни одного корня другого уравнения;

л) (геол. ф-т — 77) существует хотя бы одно общее решение неравенств

$$x^2+4ax+3a^2>1+2a \text{ и } x^2+2ax<3a^2-8a+4.$$

8.Д.7 (филол. ф-т — 77). Для каждого значения a определить число решений уравнения

$$|x^2-2x-3|=a.$$

8.Д.8 (психфак — 78). Известно, что для некоторой квадратичной функции

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

выполнены неравенства

$$f(-1)<1, \quad f(1)>-1, \quad f(3)<-4.$$

Определить знак коэффициента a.

Ответы

8.Д.5. а) $D<0$; б) $D=0$; в) $f(d)<0$; г) $\left\{\begin{array}{l} f(d_1)<0, \\ f(d_2)<0; \end{array}\right.$ д) $\left\{\begin{array}{l} f(d)>0, \\ D>0, \\ x_0>d; \end{array}\right.$

е) $\left\{\begin{array}{l} f(d_1)\geqslant 0, \\ f(d_2)\geqslant 0, \\ D>0, \\ d_1<x_0<d_2; \end{array}\right.$ ж) $\left\{\begin{array}{l} f(d_1)f(d_2)<0, \\ f(d_3)f(d_4)<0; \end{array}\right.$ з) $D<0$, или $\left\{\begin{array}{l} f(d)\geqslant 0, \\ x_0\leqslant d; \end{array}\right.$

и) $D<0$, или $\left\{\begin{array}{l} f(d_1)>0, \\ x_0\leqslant d_1, \end{array}\right.$ или $\left\{\begin{array}{l} f(d_2)>0, \\ x_0\geqslant d_2, \end{array}\right.$ или $\left\{\begin{array}{l} f(d_1)<0, \\ f(d_2)<0; \end{array}\right.$ к) $f(d)<0$, или $\left\{\begin{array}{l} D\geqslant 0, \\ x_0>d; \end{array}\right.$ л) $f(d_1)f(d_2)\leqslant 0$, или $\left\{\begin{array}{l} f(d_1)>0, \\ f(d_2)>0, \\ D\geqslant 0, \\ d_1<x_0<d_2; \end{array}\right.$ м) $f(d)<0$, или $\left\{\begin{array}{l} f(d)>0, \\ D=0, \\ x_0>d, \end{array}\right.$ или $\left\{\begin{array}{l} f(d)=0, \\ x_0>d; \end{array}\right.$ н) $f(d_1)f(d_2)<0$, или $\left\{\begin{array}{l} f(d_1)=0, \\ d_1<x_0<\dfrac{d_1+d_2}{2}, \end{array}\right.$

или $\left\{\begin{array}{l} f(d_2)=0, \\ \dfrac{d_1+d_2}{2}<x_0<d_2. \end{array}\right.$

8.Д.6. а) $\left(-\infty;\ \frac{16-2\sqrt{19}}{15}\right] \bigcup \left\{\frac{1}{2}\right\} \bigcup \left[\frac{16+2\sqrt{19}}{15};\ \infty\right)$; б) $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2};\ \infty\right)$; в) $(-13/4;\ 3)$; г) $(-\infty;\ -2-\sqrt{6}) \bigcup (\sqrt{2};\ \infty)$; д) $[-\sqrt{2};\ 1) \bigcup [\sqrt{2};\ \infty)$; е) 0; 1; ж) $(-\infty;\ -7/3) \bigcup (-2;\ \infty)$; з) $1-\sqrt{2}$; $5+\sqrt{10}$; и) $(-\infty;\ -1-\sqrt{2}/4] \bigcup (-1/2;\ 0)$; к) $(-\infty;\ -3] \bigcup [0;\ 3/8)$; л) $(-\infty;\ 1/2) \bigcup (3/2;\ \infty)$.

8.Д.7. 0 при $a \in (-\infty;\ 0)$; 2 при $a \in \{0\} \cup (4,\ \infty)$; 3 при $a=4$; 4 при $a \in (0;\ 4)$. **8.Д.8.** Отрицательный.

ГЛАВА 9. ПРОИЗВОДНЫЕ

§ 9.А. ВОПРОСЫ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ

При решении целого ряда задач на вступительных экзаменах возникает необходимость искать производные исследуемых функций. Опыт показывает, что далеко не всегда поступающие показывают удовлетворительное знание формул и стандартных методов дифференцирования, а иногда за производимыми выкладками не совсем ясно представляют себе, что именно они вычисляют.

9.А.1. Продифференцировать функцию:

а) $y(x)=x-\frac{2}{x}+3\sqrt[6]{x^4}$; г) $y(x)=\sin 7x\cdot\cos\frac{\pi}{7}$;

б) $y(x)=5^{4-x^2}$; д) $y(x)=|x-1|$;

в) $y(x)=\lg\frac{x-6}{x}$; е) $y(x)=x\,|x|$.

В выражении для функции из п. а) некоторые рассматривают второе слагаемое $-2/x$ как дробь и берут производную по правилу дифференцирования дроби $\left(-\frac{2}{x}\right)'=-\frac{(2)'x-2(x)'}{x^2}=$ $=-\frac{0\cdot x-2\cdot 1}{x^2}=\frac{2}{x^2}$, что представляется нерациональным, поскольку в данном случае константу 2 вместе со знаком минус можно вынести за знак производной, оставив под ним только степенную функцию x^{-1}. Что же касается третьего слагаемого в выражении а), то в отношении его при отрицательных значениях x нас поджидает неприятность: с одной стороны, имеем

$$(3\sqrt[6]{x^4})'=3(x^{2/3})'=3\cdot\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{2}{\sqrt[3]{x}}<0,$$

а с другой стороны, вроде бы получаем

$$(3\sqrt[6]{x^4})'=3(x^{4/6})'=3\cdot\frac{4}{6}x^{-2/6}=\frac{2}{\sqrt[6]{x^2}}>0.$$

Конечно, здесь мы оказались жертвами слишком вольного обращения со степенной функцией с рациональным показателем, которая в принципе определяется лишь на положительной полуоси, в связи с чем как сама эта функция, так и ее производная при доопределении на отрицательную полуось нуждаются в дополнительных комментариях. В данном случае при $x<0$ имеем

$$(3\sqrt[6]{x^4})'=(3\sqrt[6]{(-x)^4})'=(3(-x)^{2/3})'=-3\cdot\frac{2}{3}(-x)^{-1/3}=\frac{2}{\sqrt[3]{x}}.$$

При дифференцировании функций б) и в) поступающие часто путают, в каком случае надо умножать на логарифм основания, а в каком — делить. Особенно типична ситуация, когда производная берется лишь от «внешней» функции — показательной или логарифмической — и не умножается затем на производную от показателя или от логарифмируемого выражения соответственно, как это предписывает правило дифференцирования сложной функции. Кроме того, не всегда оказывается замеченным то обстоятельство, что, скажем, выражение $\frac{6}{x(x-6)\ln 10}$ для производной функции $\lg\frac{x-6}{x}$ имеет смысл при всех значениях x, отличных от 0 и 6, тогда как исходная функция определена лишь при $x<0$ или $x>6$.

Беря производную от функции из п. г), многие зачем-то применяют правило дифференцирования произведения, причем постоянную величину $\cos\frac{\pi}{7}$ смело дифференцируют по π: „$\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)'=-\frac{1}{7}\sin\frac{\pi}{7}$", демонстрируя свое чисто формальное представление о существе операции дифференцирования.

Наконец, по вопросу о дифференцируемости функций типа д) и е) бытуют самые разнообразные ошибочные мнения. Некоторые считают, что эти функции не дифференцируемы вовсе, поскольку даже в школьном учебнике модуль фигурирует в качестве образца функции, не имеющей производной. Другие дифференцируют такие функции, как будто знаков модуля вообще нет. Третьи правильно раскрывают знак модуля и все равно делают ошибку

$$|x-1|'=\begin{cases}(x-1)'=1 & \text{„при } x\geqslant 1\text{"},\\ (1-x)'=-1 & \text{при } x<1,\end{cases}$$

подключая к одному из случаев значение $x=1$, хотя ни в какой целой окрестности точки 1 функция $|x-1|$ не совпадает ни с функцией $x-1$, ни с функцией $1-x$. Особого разговора заслуживает функция из п. е), которая дифференцируема во всех точках несмотря на то, что к ней непосредственно неприменимо правило взятия производной от произведения. Действительно, в некоторой окрестности всякой точки $x_0>0$ имеем $x|x|=x^2$, откуда $y'(x_0)=2x_0$; в некоторой окрестности всякой точки $x_0<0$ аналогично имеем $x|x|=-x^2$, откуда $y'(x_0)=-2x_0$; в точке $x_0=0$ находим производную прямо с помощью определения

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(\Delta x)-y(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\,|\Delta x|-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0.$$

Ответ: а) $2\left(x+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$; б) $-2x\,5^{4-x^2}\cdot\ln 5$;

в) $\frac{6}{x(x-6)\ln 10}$, $x\in(-\infty;\,0)\cup(6;\,\infty)$; г) $7\cos\frac{\pi}{7}\cos 7x$;

д) $\frac{|x-1|}{x-1}$; е) $2|x|$.

Как мы видели при обсуждении предыдущей задачи, не последнюю роль в вопросе дифференцируемости функции играет ее область определения. Из определения производной вытекает, что она не может быть определена в тех точках, в которых не определена сама исходная функция. Более того, *для дифференцируемости функции в какой-либо точке необходимо (но не достаточно), чтобы функция была определена в целой окрестности этой точки и к тому же была бы непрерывна в этой точке.*

9.А.2. Найти все значения x, при которых равна нулю производная функции:

а) (биофак — 83) $y(x)=3x^3\ln x-36x\ln x-7x^3+108x$;

б) $y(x)=\ln x-\frac{x^2}{2}$;

в) $y(x)=\sqrt{x^3}$;

г) $y(x)=[x]$.

При решении задачи для функции из п. а) поступающие быстро сосчитали производную

$$y'(x)=(9x^2-36)\ln x+(3x^3-36x)\cdot\frac{1}{x}-21x^2+108=$$

$$=9(x^2-4)\ln x-18x^2+72=9(x+2)(x-2)(\ln x-2)$$

и, не смущаясь, включили в ответ наряду с другими также и значение $x=-2$, при котором производная не только не равна 0, но и просто не определена (см. § 2.Г). По-другому обстоит дело с функцией из п. б), производная которой

$$y'(x)=\frac{1}{x}-x=\frac{1-x^2}{x}=\frac{(1-x)(1+x)}{x}$$

похоже обращается в 0 при $x=1$ и $x=-1$, однако значение -1 оказывается посторонним, так как исходная функция определена лишь при $x>0$. Далее, в п. в) единственной подозрительной на включение в ответ точкой, в которой обнуляется производная

$$y'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x},$$

является точка $x=0$, но и она не годится, поскольку слева от нее на числовой оси исходная функция не определена (речь в этой точке может идти только о правосторонней производной). Наконец, для целой части $[x]$, равной наибольшему целому числу, не превышающему x, производная равна 0 всюду, за исключением целочисленных точек, в которых функция терпит разрывы, а значит, недифференцируема, как бы ни было сильно искушение доопределить и в них производную тем же нулем.

Ответ: а) 2, e^2; б) 1; в) $\varnothing$; г) $x\neq n$, $n\in\mathbf{Z}$.

В техническом отношении операция дифференцирования в большинстве случаев не вызывает особых затруднений — она предполагает от поступающих знание таблицы производных и набора правил дифференцирования. Хотя иногда эту операцию удается несколько упростить благодаря предварительным преобразованиям выражений.

9.А.3. Продифференцировать функцию:

а) $y(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$;

б) $y(x)=\ln\dfrac{3\sqrt{x-1}}{x}$;

в) $y(x)=x^x$;

г) $y(x)=\log_x(x+1)$.

Пожалуй, одной из наиболее трудоемких процедур при нахождении производной следует признать дифференцирование дроби. В связи с этим нередко возникает естественное желание преобразовать дробь к более удобному для дифференцирования виду. Например, выражение а) можно предварительно преобразовать так (см. § 5.В):

$$\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}=\frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}=\operatorname{tg}^2 x$$

или (см. § 1.Д) так:

$$\frac{2-1-\cos 2x}{1+\cos 2x}=\frac{2}{1+\cos 2x}-1=2(1+\cos 2x)^{-1}-1.$$

Особенного эффекта в этом отношении удается иногда достичь при дифференцировании логарифма:

$$\left(\ln\frac{3\sqrt{x-1}}{x}\right)'=\left(\ln 3-\ln x+\frac{1}{2}\ln(x-1)\right)'=0-\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x-1)}.$$

Заметим, между прочим, что указанное преобразование логарифма не привело к сужению области его определения (а после дифференцирования эта область даже расширилась). Подобный же прием для дифференцирования, скажем, функции из п. в) задачи 9.A.1 требует известной осторожности, поскольку преобразование

$$\lg \frac{x-6}{x} = \lg (x-6) - \lg x$$

сужает область определения, так что в этом случае похоже игра не стоит свеч.

Работе с функциями типа в) и г) очень часто сопутствуют довольно грубые ошибки. Так, многие дифференцируют функцию x^x либо как степенную, либо как показательную, а функцию $\log_x(x+1)$ как логарифмическую с постоянным основанием. Но одного лишь понимания ошибочности перечисленных действий недостаточно для решения задачи — нужно уметь представлять такие функции в виде, приемлемом для дифференцирования (см. § 1.Д):

$$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x},$$

$$\log_x(x+1) = \frac{\ln (x+1)}{\ln x}.$$

Ответ: а) $\frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$; б) $\frac{2-x}{2x(x-1)}$; в) $x^x(\ln x + 1)$;

г) $\left(\frac{1}{x+1} - \frac{\log_x(x+1)}{x}\right) \cdot \frac{1}{\ln x}$.

Задачи

9.A.4. Верно ли, что:

а) если функция определена в целой окрестности некоторой точки, то она дифференцируема в этой точке;

б) если функция недифференцируема в некоторой точке, то она не является непрерывной в этой точке;

в) если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке?

9.A.5. Продифференцировать функцию:

а) $y(x) = \frac{x + 3x^2}{x^3}$;

б) $y(x) = e^{2x}(\cos^2 x - 2)$;

в) $y(x) = \ln (7 \sqrt[7]{x+1})$;

г) $y(x) = \sin \frac{x}{\pi} + \sin \frac{\pi}{5}$;

д) $y(x) = \operatorname{tg} \sin x$;

е) $y(x)=\log_{\sqrt{x}}(x-2)^4$;

ж) $y(x)=(x^2+1)^x$;

з) $y(x)=|x^2-2x+8|$;

и) $y(x)=|x^2+2x-8|$;

к) $y(x)=\sqrt[3]{|x|^5}$;

л) $y(x)=\{x\}$;

м) $y(x)=[x]+\{x\}$.

9.А.6. Найти все значения x, при которых производная функции:

а) (ф-т почв. — 80) $y(x)=4x-\sin 2x+4\sqrt{2}\cos x$ равна нулю;

б) (геогр. ф-т — 78) $y(x)=\sin x-\frac{2}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x$ равна нулю;

в) (биофак — 83) $y(x)=3x^3\ln x-45x\ln x-7x^3+135x$ равна нулю;

г) $y(x)=\sqrt{(x-1)^4(x-2)^3}$ равна нулю;

д) (геогр. ф-т — 82) $y(x)=3-2\sin(2x-\pi/8)$ равна $2\sqrt{2}$;

е) $y(x)=\ln(3x^2+x)$ равна $1/x^2$.

9.А.7. Какой функцией (четной, нечетной, периодической) является производная:

а) четной функции;

б) нечетной функции;

в) периодической функции?

Ответы

9.А.4. а) нет; б) нет; в) да. **9.А.5.** а) $-\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^2}$; б) $2e^{2x}(\cos^2 x-$ $-2-\sin x\cos x)$; в) $\frac{1}{7(x+1)}$, $x>-1$; г) $\frac{1}{\pi}\cos\frac{x}{\pi}$; д) $\frac{\cos x}{\cos^2\sin x}$; е) $\frac{8}{\ln x}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{\log_x(x-2)}{x}\right)$; ж) $(x^2+1)^x\left(\ln(x^2+1)+\frac{x}{x^2+1}\right)$; з) $2(x-1)$; и) $2(x+1)$ при $x\in(-\infty;-4)\cup(2;\infty)$; $-2(x+1)$ при $x\in(-4;2)$; к) $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$ при $x\geqslant 0$; $-\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$ при $x<0$; л) 1 при $x\neq n$, $n\in\mathbf{Z}$; м) 1. **9.А.6.** а) $(-1)^n\pi/4+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; б) $\pi/6+\frac{\pi}{3}n$, πm, $n, m\in\mathbf{Z}$; в) $\sqrt{5}$, e^3; г) $\varnothing$; д) $\pm 3\pi/8+\pi/16+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; е) $(1+$ $+\sqrt{7})/6$. **9.А.7.** а) нечетной; б) четной, в) периодической.

§ 9.Б. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Применение аппарата производных полезно для решения многих экзаменационных задач, в которых возникает необходимость исследовать какую-либо функцию на экстремум или на монотонность. Основное, достаточно наглядное соображение (см. рис. 9.1), позволяющее связать свойства функции со значениями ее производной, состоит в следующем: *если производная функции $y(x)$ в точке x_0 положительна, то существует такая окрестность этой точки, в которой для всех точек x, лежащих слева от x_0, выполнено неравенство $y(x)<y(x_0)$, а для точек, лежащих справа,— неравенство $y(x)>y(x_0)$.*

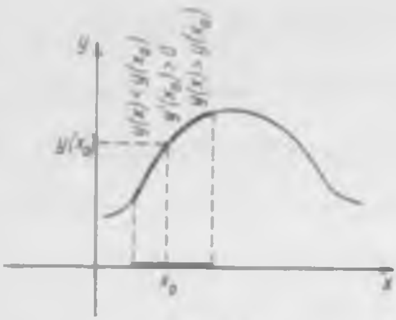

Рис. 9.1

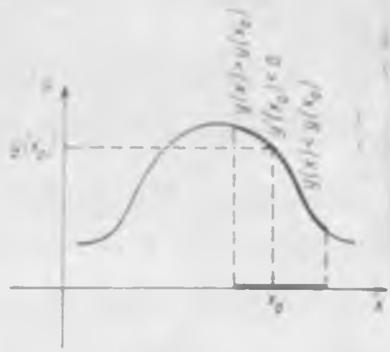

Рис. 9.2

Аналогичные неравенства можно записать в случае $y'(x_0)<0$ (см. рис. 9.2), а затем и получить достаточное условие возрастания ($y'(x)>0$) или убывания ($y'(x)<0$), т. е. монотонности, функции на промежутке, а также необходимое условие того, что точка x_0 является точкой максимума или минимума, т. е. экстремума (производная в точке x_0 либо не существует, либо равна нулю).

9.Б.1 (химфак — 84). Найти все точки максимума функции

$$f(x)=x^2(6\sin 2x-8\cos 2x)+x(6\cos 2x+8\sin 2x)+3\sin 2x-4\cos 2x.$$

Найдя производную данной функции

$$f'(x)=2x(6\sin 2x-8\cos 2x)+x^2(12\cos 2x+16\sin 2x)+$$
$$+(6\cos 2x+8\sin 2x)+x(-12\sin 2x+16\cos 2x)+$$
$$+6\cos 2x+8\sin 2x=4(x^2+1)(3\cos 2x+4\sin 2x)$$

и приравняв ее нулю, абитуриенты так или иначе получили уравнение (см. § 5.Д)

$$3\cos 2x+4\sin 2x=0\Leftrightarrow \operatorname{tg} 2x=-3/4.$$

Но даже решив это уравнение, многие столкнулись с «непосильной» задачей: определить, какие из решений

$$x=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbf{Z},$$

задают точки максимума, а какие — нет. А между тем с самого начала достаточно было преобразовать производную к виду (см. § 1.Д)

$$f'(x)=20(x^2+1)\left(\frac{3}{5}\cdot\cos 2x+\frac{4}{5}\sin 2x\right)=$$

$$=20(x^2+1)\sin(2x+\operatorname{arctg}3/4)$$

и заметить по тригонометрическому кругу (рис. 9.3), что она меняет знак с плюса на минус только при переходе аргумента

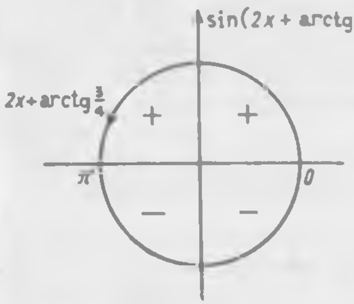

Рис. 9.3

Рис. 9.4

$2x+\operatorname{arctg}3/4$ через точки $\pi+2\pi n$, а значит, все точки максимума задаются серией уравнений

$$2x+\operatorname{arctg}3/4=\pi+2\pi n,$$

зависящих от параметра $n\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Вывод ясен: для детального изучения точек экстремума нужно не только уметь решать уравнение $f'(x)=0$, а также *преобразовывать производную к виду, удобному для исследования ее знака*, особенно в окрестности точек, подозрительных на экстремум. К сожалению, обычно такие операции с производной весьма неумело выполняются во многих письменных экзаменационных работах. Так, вместо преобразования производной с последующим использованием, скажем, обыкновенного метода интервалов, или его обобщения (см. § 3.В), абитуриенты нередко сильно усложняют себе работу решением неравенств типа $f'(x)>0$ и $f'(x)<0$ или подстановкой отдельных значений аргумента в выражение для производной. Понятно, что подобные действия не вызывают особого восторга у самих абитуриентов, которые, естественно, хватаются за любую возможность их избежать.

9.Б.2 (геол. ф-т — 78). Найти наименьшее значение функции

$$y(x)=x\ln x-x\ln 5$$

на отрезке [1; 5].

Часть абитуриентов рассудила так: «Поскольку производная равна нулю только в одной точке $x=5/e$, то это, конечно, и есть интересующая нас точка минимума, а значит, наименьшее значение функции равно $y(5/e)=-5/e$». И хотя ответ оказался правильным, такое «обоснование» нельзя признать сколько-нибудь удовлетворительным. Ведь речь в задаче идет не о точках минимума и тем более не о точках экстремума, а о наименьшем значении функции на отрезке (которое некоторые ошибочно отождествляют со значением в точке минимума). А ведь оно с равным успехом могло достигаться и в любом из концов заданного отрезка, т. е. при $x=1$ или при $x=5$.

Другая часть абитуриентов, идя по пути наименьшего сопротивления, занялась исследованием трех значений функции $y(1)=-\ln 5$, $y(5/e)=-5/e$ и $y(5)=0$, среди которых обязательно содержится искомое наименьшее значение. Однако далеко не всем удалось выяснить, какое из чисел больше: $-\ln 5$ или $-5/e$. Неравенство $-\ln 5>-5/e$ можно доказать с помощью, например, следующей цепочки оценок (см. § 1.Б):

$$e^5>2{,}7^2\cdot 2{,}7^2\cdot 2{,}7>7\cdot 7\cdot 2{,}7>125=5^3>5^e\Rightarrow 5=$$

$$=\ln e^5>\ln 5^e=e\ln 5.$$

Лишь некоторые абитуриенты, не поленившись изучить знаки производной, сразу же определили, что при $1<x<5/e$ производная отрицательна, а при $5/e<x<5$ — положительна. Следовательно, функция $y(x)$ убывает на отрезке $[1;\ 5/e]$, возрастает на отрезке $[5/e;\ 5]$ и, стало быть, в точке $5/e$ принимает свое наименьшее значение (см. иллюстрацию на рис. 9.4, где соответствующими стрелками отмечены промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$).

Ответ: $-5/e$.

Обратим внимание читателя на одно обстоятельство. В последнем рассуждении мы нигде не использовали значения производной в концах отрезка, но совершенно правомерно присоединили эти точки, равно как и критическую точку, к промежуткам монотонности. Здесь неявно учитывалась непрерывность исходной функции. Что же касается возможности дифференцировать эту функцию в точках 1 и 5, то лучше все же к ней без необходимости не прибегать, так как формально в условии задачи областью определения функции является лишь отрезок [1; 5] (см. задачу 9.А.2, п. в)).

Говоря об области определения, заметим, что многие рассматривают ее не как один из атрибутов самой функции, а как нечто не относящееся к делу. Например, при решении задачи 8.В.3 поступающие исследовали на максимум функцию

$$f(p)=25-\left(\frac{5}{p}+\frac{20p}{9}\right),$$

посчитав ее производную

$$f'(p)=\frac{5}{p^2}-\frac{20}{9}=\frac{5(3-2p)(3+2p)}{9p^2}$$

и совершенно забыв о ее области определения или ограничившись оценкой $p>0$. С другой стороны, условие этой задачи реализуется для значений p из интервала (1; 9) и только для них, а точка максимума $p=3/2$, вообще говоря, могла оказаться и не принадлежащей этому интервалу, что коренным образом изменило бы ситуацию.

9.Б.3 (экономфак — 77). Найти наименьшее из расстояний от точки M с координатами (0; -2) до точек (x; y), таких, что $y=$ $=\frac{16}{\sqrt{3}\cdot x^2}-2$, $x>0$.

Учитывая, что расстояние между точками (0; -2) и (x; y) равно

$$\sqrt{x^2+(y+2)^2},$$

а при каждом значении $x>0$ величина y вычисляется по указанной в условии задачи формуле, превращаем расстояние в функцию от $x\in(0;\infty)$

$$f(x)=\sqrt{x^2+\frac{16^2}{3x^4}}.$$

Задача нахождения наименьшего значения этой функции может быть решена путем непосредственного дифференцирования. Именно по этому пути и пошла основная масса абитуриентов, причем многие допустили стандартную ошибку, о которой говорилось выше: нашли единственную критическую точку $x=2$ и мгновенно «получили» наименьшее значение функции

$$f(2)=\sqrt{2^2+\frac{2^8}{3\cdot 2^4}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

(в данном случае область определения функции не является отрезком, поэтому даже сам факт существования ее наименьшего значения нуждается в обосновании; см. обсуждение задачи 8.Б.2).

Подчеркнем еще одну особенность упомянутого пути решения. Дело в том, что выражение для исследуемой функции $f(x)$ кажется неоправданно громоздким из-за наличия в нем квадратного корня, который не исчезает ни при каких тождественных преобразованиях выражения. Но ведь никто не мешает временно огбросить этот самый корень, рассмотрев новую функцию — квадрат расстояния

$$g(x)=(f(x))^2=x^2+\frac{2^8}{3x^6}.$$

Свое наименьшее значение функция $g(x)$ будет принимать в той же точке, что и функция $f(x)$, поскольку справедливы соотношения

$$g(x)=h(f(x)),\ f(x)\geqslant 0,$$

а функция $h(f)=f^2$ возрастает на промежутке $f\in[0;\ \infty)$. Для решения этой задачи теперь остается провести несложное исследование знака производной

$$g'(x)=2x-\frac{2^8\cdot 6}{3x^7}=\frac{2(x^8-2^8)}{x^7}$$

(положительной при $x>2$ и отрицательной при $0<x<2$) и заключить, что наименьшее значение функции $g(x)$ достигается при $x=2$.

Ответ: $4\sqrt{3}/3$.

Как мы только что видели, исследование на экстремум можно упростить благодаря *удачному выбору самой функции*. При этом бывает полезно временно отступить от поставленной задачи, отнестись к ее условию не догматически, а с определенной долей творчества. Так, в следующей задаче исследование исходной функции сильно затруднено отсутствием рациональных корней у многочлена, стоящего под модулем (см. § 1.Г, 1.Е). А между тем для получения ответа совсем не требуется раскрывать модуль (что безуспешно пытались делать абитуриенты на экзамене) — избавиться от него позволяет введение новой функции, тесно связанной с исходной.

9.Б.4 (ф-т почв. — 82). Найти наибольшее значение функции

$$f(x)=|x^3+6x^2+9x+1|$$

на отрезке $[-3;\ 1]$.

Решение. Обозначим $g(x)=x^3+6x^2+9x+1$, $x\in[-3;\ 1]$, тогда при $-3<x<1$ $g'(x)=3x^2+12x+9=3(x+3)(x+1)$, т. е. $g'(x)=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=-1$. Так как $g(-3)=1$, $g(-1)=-3$, $g(1)=17$, то наибольшее и наименьшее значения функции $g(x)$ равны 17 и -3.

1) Если $g(x)\geqslant 0$, то $g(x)\leqslant 17$ и

$$f(x)=|g(x)|=g(x)\leqslant 17,$$

причем $f(1)=g(1)=17$.

2) Если $g(x)<0$, то $g(x)\geqslant -3$ и

$$f(x)=|g(x)|=-g(x)\leqslant 3<17.$$

Поэтому наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-3;\ 1]$ равно 17.

Ответ: 17.

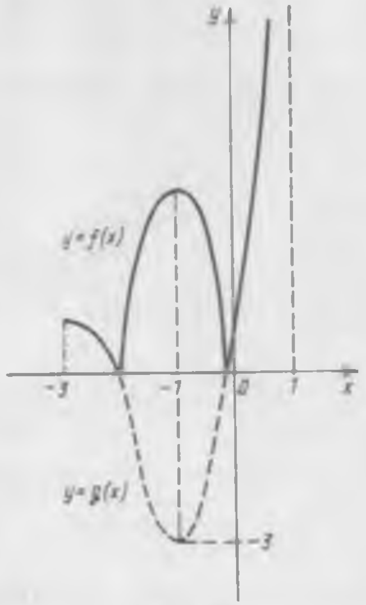

Рис. 9.5

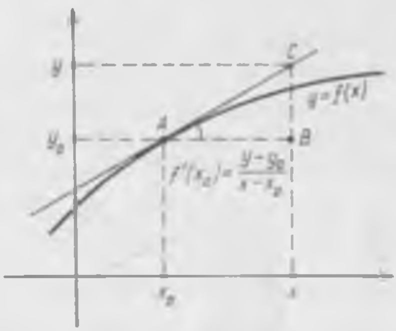

Рис. 9.6

Немаловажную роль для установления наглядных связей между значениями функций $f(x)$ и $g(x)$ могут сыграть их графики (см. рис. 9.5), о которых речь шла в § 8.Г и пойдет в § 9.В.

Задачи

9.Б.5. Верно ли, что:

а) если функция имеет положительную производную во всех точках своей области определения, то она — возрастающая;

б) если функция имеет положительную производную во всех точках некоторого интервала, то она возрастает на этом интервале;

в) если функция имеет положительную производную во всех точках интервала $(a;\ b)$ и непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то она возрастает на этом отрезке;

г) если функция имеет неотрицательную производную во всех точках числовой прямой, то она — неубывающая;

д) если дифференцируемая функция возрастает, то ее производная положительна во всех точках;

е) если функция имеет нулевую производную в некоторой точке, то эта точка является точкой экстремума;

ж) в точке экстремума дифференцируемой функции производная этой функции равна нулю;

з) свое наибольшее значение функция может принимать только в точке максимума;

и) свое наибольшее значение функция, определенная на отрезке, может принимать только в точке максимума или на конце отрезка;

к) если при переходе через некоторую точку производная функции меняет знак с плюса на минус, то эта точка является точкой максимума?

9.Б.6. Найти все точки:

а) (ВМК — 79) экстремума функции

$$f(x)=x^3+6x^2-3x+3$$

на интервале $(-5;\ 1/5)$;

б) (химфак — 84) минимума функции

$$f(x)=x^2(45\sin 3x-9\cos 3x)+x(30\cos 3x+6\sin 3x)+$$

$$+(80\sin 3x-16\cos 3x);$$

в) (ф-т почв. — 77) максимума и минимума, а также промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x)=xe^{-3x}.$$

9.Б.7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

а) (геогр. ф-т — 79) $y(x)=x^3+3x^2-72x+90$ на отрезке $[-5;\ 5]$;

б) (биофак — 80) $y(x)=2x^3-3x^2-36x+10$ на отрезке $[-5;\ 4]$;

в) (филол. ф-т — 83) $f(x)=24x-\cos 12x-3\sin 8x$ на отрезке $[-\pi/6;\ \pi/6]$;

г) (экономфак—79) $y(x)=|x^2+2x-3|+\dfrac{3}{2}\ln x$ на отрезке $[1/2;\ 4]$.

9.Б.8. Найти наименьшее значение функции:

а) (геогр. ф-т—84) $f(x)=x+\ln\dfrac{1}{x-2}$ при $x>2$;

б) (геол. ф-т—78) $y(x)=\dfrac{1}{2}x\ln x-x\ln 2$ на отрезке $[1;\ 4]$;

в) (экономфак — 85) $y(x)=\dfrac{2x^2+x+1}{2x^2-x+2}$;

г) (ф-т почв. — 82) $f(x)=-|x^3-6x^2+9x-3|$ на отрезке $[-1;\ 4]$.

9.Б.9 (мехмат — 77). Доказать, что для функции $f(x)=\cos x \sin 2x$ справедливо неравенство

$$\min_{x\in[-\pi;\pi]} f(x) > -7/9.$$

9.Б.10. Найти все значения a, при которых:

а) (экономфак — 78) функция

$y(x)=8ax-a\sin 6x-7x-\sin 5x$

возрастает и не имеет критических точек на всей прямой;

б) функция $f(x)=x^3+3(a-7)x^2+3(a^2-9)x-1$ имеет положительную точку максимума;

в) уравнение $x^3+ax+2=0$ имеет три корня;

г) уравнение $|\ln x|=ax$ имеет три корня.

9.Б.11 (экономфак — 77). Найти наименьшее из расстояний от точки M с координатами (2; 0) до точек $(x; y)$, таких, что $y=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{27}(x-2)}$.

9.Б.12 (химфак — 83). Найти координаты точки, лежащей на графике функции $y=1+\cos x$ при $0<x<\pi$ и наименее удаленной от прямой $x\sqrt{3}+2y+4=0$.

9.Б.13 (химфак — 80). На координатной плоскости рассматриваются всевозможные треугольники ABC, у которых $\angle C=90°$, вершина A имеет координаты (−4; 0), вершина C лежит на отрезке [0; 4] оси абсцисс, а вершина B лежит на параболе $y=4x-x^2$. Какие координаты должна иметь вершина B, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей?

Ответы

9.Б.5. а) нет; б) да; в) да; г) да; д) нет; е) нет; ж) да; з) нет; и) да; к) да. 9.Б.6. а) $-2-\sqrt{5}$; б) $-\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 5+\frac{2\pi}{3}n$, $n\in \mathbf{Z}$; в) 1/3 — точка максимума; функция возрастает при $x<1/3$ и убывает при $x>1/3$. 9.Б.7. а) 400 и −86; б) 54 и −135; в) $4\pi-1+\frac{3\sqrt{3}}{2}$ и $-4\pi-1-\frac{3\sqrt{3}}{2}$; г) $21+3\ln 2$ и 0. 9.Б.8. а) 3; б) $-2/e$; в) 7/23; г) −19. 9.Б.10. а) $(6;\infty)$; б) $(-\infty;-3)\cup(3;29/7)$; в) $(-\infty;-3)$; г) $(0;1/e)$. 9.Б.11. $\sqrt{3}/3$. 9.Б.12. (0; 2). 9.Б.13. $(4\sqrt{3}/3;\ 16(\sqrt{3}-1)/3)$.

§ 9.В. КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ

Напомним, что если некоторая кривая представляет собой график функции, дифференцируемой в точке x_0, то к этой кривой можно провести *касательную*, которая проходит через точку графика с абсциссой x_0 и имеет угловой коэффициент, равный значению производной в точке x_0. Для того чтобы вывести уравнение касательной, достаточно вспомнить, что угловой коэффициент прямой совпадает с тангенсом угла наклона этой прямой к оси абсцисс (определенный в соответствии с п. 5 из § 5.А). Таким образом из геометрических соображений получаем *уравнение касательной* к графику функции $y=f(x)$ в точке (x_0, y_0) этого графика (см. рис. 9.6, где $\operatorname{tg}\angle BAC=f'(x_0)$):

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0),$$

или

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Несмотря на простоту и наглядность полученного вывода, поступающие часто путаются в уравнениях касательных, надеясь в большей степени на свою память, чем на возможность проконтролировать себя с помощью указанных соображений. И уж совсем нелепо выглядят попытки выписывать эти уравнения по одной лишь той причине, что в условии задачи фигурирует слово касательная. Так поступили некоторые абитуриенты при решении следующей задачи, наделав в результате массу ошибок или вконец запутавшись в изобилии соотношений и входящих в них букв.

9.В.1 (биофак — 79). Найти все значения x, при которых касательные к графикам функций

$$y(x)=3\cos 5x \text{ и } y(x)=5\cos 3x+2$$

в точках с абсциссой x параллельны.

Решение. Параллельность касательных означает равенство их угловых коэффициентов:

$$(3\cos 5x)'=(5\cos 3x+2)' \Leftrightarrow -15\sin 5x=-15\sin 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 5x-\sin 3x=0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos 4x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \cos 4x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi n,\ n\in \mathbf{Z},\\ 4x=\dfrac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in \mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\pi n, \dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{4}m,\ n, m\in \mathbf{Z}$.

В целом ряде экзаменационных задач от поступающих требуется умение искать точки пересечения касательных с осями координат или друг с другом, а также вычислять площади графически заданных фигур. Для этого можно воспользоваться следующими наблюдениями: *точки оси абсцисс имеют нулевую ординату, а точки оси ординат — нулевую абсциссу; абсцисса точки пересечения графиков двух функций находится из равенства соответствующих ординат; если одна из сторон треугольника параллельна какой-либо координатной оси, то соответствующая высота треугольника равна его проекции на другую ось.*

9.В.2 (филол. ф-т — 82). К графику функции $y(x)=-8x-x^2$ проводятся две касательные в точках с абсциссами -6 и 1. Найти площадь треугольника, образованного осью ординат и этими касательными.

Уравнение касательной в точке с абсциссой $x_0=-6$ выглядит так:

$$y-y(-6)=y'(-6)(x-(-6)),$$

т. е. $y=4x+36$, а в точке с абсциссой $x_0=1$ — соответственно $y=-10x+1$. Касательные пересекаются с осью ординат в точках $y=36$ и $y=1$, а друг с другом — в точке с абсциссой, удовлетворяющей уравнению

$$4x+36=-10x+1 \Leftrightarrow x=-5/2.$$

Основание описанного в условии задачи треугольника, лежащее на оси ординат, имеет длину $36-1=35$, а соответствующая высота, параллельная оси абсцисс, — длину $0-(-5/2)=5/2$. Поэтому искомая площадь равна $\frac{1}{2}\cdot 35\cdot\frac{5}{2}=\frac{175}{4}$.

Заметим, что некоторые абитуриенты на экзамене не смогли аналитически обосновать, как они находили координаты вершин, треугольника или его площадь. Они просто изобразили этот треугольник и записали о т в е т: 175/4.

Немалые трудности в связи с проведением касательных вызывают на экзаменах такие задачи, в которых, скажем, не указаны или не зафиксированы точки касания, из-за чего поступающие зачастую не могут толком разобраться, какие из букв, входящих в уравнения, даны, какие ищутся, а какие являются переменными величинами. Для решения задач такого типа нужно проявить неформальное понимание логического смысла введенных символов, а также обыкновенную внимательность.

9.В.3 (ВМК — 78). Найти уравнение прямой, проходящей через точку с координатами (1/2; 2), касающейся графика функции $y(x)=-\frac{x^2}{2}+2$ и пересекающей в двух различных точках график функции $y(x)=\sqrt{4-x^2}$.

Наиболее характерная ошибка абитуриентов состояла в том, что точка (1/2; 2), данная в условии и не лежащая на графике функции $y(x)=-\frac{x^2}{2}+2$, принималась за точку касания. Составив уравнение касательной

$$y-y_0=(-x_0)(x-x_0),$$

абитуриенты «по привычке» подставляли $x_0=1/2$, $y_0=2$, $y=-\frac{x^2}{2}+2$ и находили x, тогда как следовало поступить как раз наоборот — подставить $x=1/2$, $y=2$, $y_0=-\frac{x_0^2}{2}+2$ и получить уравнение, означающее, что касательная проходит через точку $(1/2;\ 2)$:

$$\frac{x_0^2}{2}=-x_0\left(\frac{1}{2}-x_0\right)\Leftrightarrow x_0(x_0-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0,\\ x_0=1.\end{array}\right.$$

Найденные абсциссы $x_0=0$ и $x_0=1$ точек касания задают уравнения двух касательных $y=2$ и $y=-x+5/2$, про каждую из которых остается выяснить, пересекает ли она график функции $y(x)=\sqrt{4-x^2}$ в двух точках, т. е. имеет ли уравнение $2=y(x)$ и соответственно $-x+5/2=y(x)$ два решения (см. § 2.3, 1.Б):

1) $2=\sqrt{4-x^2}\Leftrightarrow 4=4-x^2\Leftrightarrow x=0;$

$$2)\ -x+\frac{5}{2}=\sqrt{4-x^2}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-5x+\dfrac{25}{4}=4-x^2,\\ -x+\dfrac{5}{2}\geqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2x^2-5x+\dfrac{9}{4}=0,\\ x\leqslant\dfrac{5}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left(x-\dfrac{5-\sqrt{7}}{4}\right)\left(x-\dfrac{5+\sqrt{7}}{4}\right)=0,\\ x\leqslant\dfrac{5}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5-\sqrt{7}}{4},\\ x=\dfrac{5+\sqrt{7}}{4},\ \text{так как}\ \dfrac{5-\sqrt{7}}{4}<\dfrac{5+\sqrt{7}}{4}<\dfrac{5+5}{4}=\dfrac{5}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $y=-x+5/2$.

Таким образом, работа с касательными к графикам предполагает от поступающих не только умение дифференцировать функции, но и уверенное владение богатым арсеналом графических, аналитических и логических средств, о которых говорилось в предыдущих главах настоящей книги.

Задачи

9.В.4 (биофак — 79). Найти все значения x, при каждом из которых касательная к графику функции

$y(x)=\cos 7x+7\cos x$

в точке с абсциссой x параллельна касательной к этому же графику в точке с абсциссой $\pi/6$.

9.В.5. Найти уравнения касательных к графику функции $y(x)=x^2-2x$ в точках его пересечения с осью абсцисс.

9.В.6 (филол. ф-т — 80). К параболе $y=4-x^2$ в точке с абсциссой $x_0=1$ проведена касательная. Найти точку пересечения этой касательной с осью ординат.

9.В.7 (психфак — 82). Найти координаты точки пересечения двух касательных, проведенных к графику функции $y(x)=\cos \pi x$: первая — в точке с абсциссой 1/6, а вторая — в точке с абсциссой 7/6.

9.В.8 (физфак — 79). Найти координаты точек пересечения с осью абсцисс тех касательных к графику функции $y(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$, которые образуют угол $3\pi/4$ с осью абсцисс.

9.В.9. На параболе взяты две точки с абсциссами 1 и 3. Через эти точки проведена секущая. Найти абсциссу точки параболы, в которой касательная параллельна проведенной секущей.

9.В.10. В точке M с координатами (1; 8) к графику функции $y=\sqrt{(5-x^{2,3})^3}$ проведена касательная. Найти длину ее отрезка, заключенного между осями координат.

9.В.11 (психфак — 77). На графике функции $y(x)=x^3-3x^2-7x+6$ найти все точки, касательная в каждой из которых к этому графику отсекает от положительной полуоси Ox вдвое меньший отрезок, чем от отрицательной полуоси Oy. Определить длины отсекаемых отрезков.

9.В.12 (психфак — 80). Вычислить площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y(x)=\dfrac{x}{2x-1}$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

9.В.13 (филол. ф-т — 82). К графику функции $y(x)=3x-x^2$ проводятся две касательные. Первая касательная проводится в точке с абсциссой $x_0=2$, вторая — в точке максимума данной функции. Найти площадь треугольника, образованного осью ординат и этими двумя касательными.

9.В.14 (биофак — 82). Найти уравнения всех тех касательных к графику функции $y(x)=\dfrac{x^3+1}{y}$, каждая из которых вместе с осями координат ограничивает треугольник площади 1/2.

9.В.15 (мехмат — 80). Касательная к графику функции $y(x)=\sqrt[3]{x^2}$ такова, что абсцисса c точки касания принадлежит отрезку [1/2; 1]. При каком значении c площадь треугольника, ограниченного этой касательной, осью Ox и вертикальной прямой $x=2$, будет наименьшей? Чему равна эта наименьшая площадь?

9.В.16 (ВМК — 78). Найти уравнение прямой, проходящей через точку с координатами (1; 3), касающейся графика функции $y(x)=8\sqrt{x}-7$ и пересекающей в двух различных точках график функции $y(x)=x^2+4x-1$.

9.В.17. Найти уравнения общих касательных к параболам $y=x^2$ и $y=-x^2+3x-2$.

9.В.18. Найти угол между касательными, проведенными из точки (0; —2) к параболе $y=x^2$.

9.В.4. $\frac{\pi}{4}n,\quad n\in Z$. **9.В.5.** $y=-2x$, $y=2x-4$. **9.В.6.** (0; 5). **9.В.7.** $\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{\pi};\ -\frac{\pi}{4}\right)$. **9.В.8.** (8; 0), (0; 0). **9.В.9.** (2; 4). **9.В.10.** $5\sqrt{5}$. **9.В.11.** (3; —15); $\frac{21}{2}$ и 21. **9.В.12.** 2. **9.В.13.** 49/32. **9.В.14.** $y=x+1$, $y=\frac{9}{\sqrt[3]{25}}x-\frac{3}{\sqrt[3]{25}}$. **9.В.15.** $\frac{4}{5}$; $\frac{24}{25}\sqrt[3]{10}$. **9.В.16.** $y=2x+1$. **9.В.17.** $y=\frac{3+\sqrt{7}}{2}x-\frac{8+3\sqrt{7}}{8}$, $y=\frac{3-\sqrt{7}}{2}x-\frac{8-3\sqrt{7}}{8}$.
9.В.18. $\pi-2\operatorname{arctg}\sqrt{8}$.

ГЛАВА 10. ВАРИАНТЫ ПИСЬМЕННЫХ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ В МГУ 1986 и 1987 годов

§ 10.А. МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

1986 год

10.А.1. Решить уравнение

$$2\cos\left(\sqrt{x}+\pi\right)+1=0.$$

10.А.2. Окружность радиуса 1 см касается окружности радиуса 3 см в точке C. Прямая, проходящая через точку C, пересекает окружность меньшего радиуса в точке A, а большего радиуса — в точке B. Найти длину отрезка AC, если длина отрезка AB равна $2\sqrt{5}$ см.

10.А.3. Решить неравенство

$$\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}\log_2 x} \geqslant 2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x}.$$

10.А.4. Путь из села в город идет сначала по грунтовой дороге, а затем по шоссе. Из села в город в 7 ч утра выехал автомобилист, и одновременно с ним из города в село выехал мотоциклист. Мотоциклист двигался по шоссе быстрее, чем по грунтовой дороге, в $1^2/_3$ раза, а автомобилист — в $1^1/_2$ раза (движение обоих по шоссе и по грунтовой дороге считать равномерным). Они встретились в 9 ч 15 мин, автомобилист приехал в город в 11 ч, а мотоциклист приехал в село в 12 ч 15 мин. Определить, сможет ли автомобилист приехать в город до 11 ч 15 мин, если он весь путь из села в город будет ехать с первоначальной скоростью.

10.А.5. Найти все значения a, при которых для любого значения b система

$$\begin{cases} bx-y-az^2=0, \\ (b-6)x+2by-4z=4 \end{cases}$$

имеет по крайней мере одно решение $(x;\ y;\ z)$.

10.А.6. В основании пирамиды $SABCD$ лежит четырехугольник $ABCD$, у которого стороны AD и BC параллельны, длина стороны AB равна 4 см, длина стороны BC равна 8 см, а величина угла ABC равна 60°. Длина ребра SB равна $8\sqrt{2}$ см. Найти объем пирамиды, если известно, что через прямые AD и BC можно провести две плоскости, не совпадающие с основанием пирамиды и пересекающие пирамиду по равным четырехугольникам.

1987 год

10.А.7. Решить уравнение

$$\cos\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{2}.$$

10.А.8. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{6}-\sqrt{2}}(x^2+4x+11-4\sqrt{3})<2.$$

10.А.9. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 4 см, причем $AC=BC$. На прямой AB взята точка D, удаленная от прямых AC и BC на расстояния 11 и 3 см соответственно. Найти косинус угла DBC.

10.А.10. Два поезда выехали одновременно в одном направлении из городов A и B, расположенных на расстоянии 60 км друг от друга, и одновременно прибыли на станцию C. Если бы один из них увеличил свою скорость на 25 км/ч, а другой — на 20 км/ч, то они также прибыли бы одновременно на станцию C, но на 2 ч раньше. Найти скорости поездов.

10.А.11. Найти все пары значений a и b, для которых система

$$\begin{cases} x^2-y^2+a(x+y)=x-y+a, \\ x^2+y^2+bxy-1=0 \end{cases}$$

имеет не менее пяти решений $(x;\ y)$.

10.А.12. Сфера касается ребер AS, BS, BC и AC треугольной пирамиды $SABC$ в точках K, L, M и N соответственно. Найти длину отрезка KL, если $MN=7$ см, $NK=5$ см, $LN=2\sqrt{29}$ см и $KL=LM$.

Ответы

10.А.1. $(\pi/3+2\pi n)^2$, $n\in\mathbf{Z}$. **10.А.2.** $\sqrt{5}/2$ см. **10.А.3.** $(0;\ 2^{-2\sqrt{2}}]\cup[2^{2\sqrt{2}};\ \infty)$. **10.А.4.** Нет. **10.А.5.** $[-1/4,\ 1/3]$. **10.А.6.** $160\sqrt{3}/3$ см. **10.А.7.** $(-1)^n\arcsin\dfrac{3}{\pi(\pm1+6m)}+\pi n$, $n, m\in\mathbf{Z}$. **10.А.8.** $(-3,\ -1)$. **10.А.9.** $3/4$. **10.А.10.** 50 и 40 км/ч. **10.А.11.** $(1;\ -2)$, $(-1;\ -2)$, $(a;\ 2)$, $a\in(-\infty;\ \infty)$. **10.А.12.** 9 см.

§ 10.Б. ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

1986 год

10.Б.1. Решить неравенство

$$\log_3(x+2)+\log_3(x-4)-1\leqslant 0.$$

10.Б.2. Найти координаты точки, лежащей на прямой $3x-5y=17$ и наименее удаленной от начала координат.

10.Б.3. В академическом собрании сочинений, включающем менее 20 томов, число томов с художественными произведениями кратно числу томов с письмами, которых в свою очередь в три раза меньше, чем томов с публицистикой. Если число томов с художественными произведениями увеличить в два раза, то их станет на 14 больше, чем томов с письмами. Сколько томов с публицистикой содержит собрание сочинений?

10.Б.4. В окружности радиуса $R=4$ проведены хорда AB и диаметр AK, образующий с хордой угол $\pi/8$. В точке B проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение диаметра AK в точке C. Найти длину медианы AM треугольника ABC.

10.Б.5. Решить уравнение

$$\sin 3x - 2\sin 18x \cdot \sin x = 3\sqrt{2} - \cos 3x + 2\cos x.$$

10.Б.6. Найти значения c и d, при которых наибольшее значение функции

$$y(x) = \left| 4\,\frac{3^x + 3^{-x} - 2}{3^x + 3^{-x} + 2} + (c + 2d)\,2\,\frac{3^x - 1}{3^x + 1} + 2c + d \right|$$

на отрезке $[-1;\ 1]$ является наименьшим.

1987 год

10.Б.7. Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{x} + 3y = 9, \\ x - 1 = (\sqrt{x} + 1)\,y. \end{cases}$$

10.Б.8. Существуют ли значения a, для которых

$$a^2 - 4a + \sqrt{3} = -a\sqrt{2}\,?$$

Если такие значения существуют, то сколько их?

10.Б.9. Решить неравенство

$$\log_{(x+1)^2} 8 + 3\log_4 (x+1) \geqslant 9\,\frac{1}{4}.$$

10.Б.10. Решить уравнение

$$(2 + 3\cos 2x)\left(\sqrt{2\cos 2x + 3\sin x + 3} - 2\sin x + 1\right) = 0.$$

10.Б.11. С завода на стройку нужно перевезти 24 больших и 510 маленьких бетонных блоков. Доставка блоков осуществляется автомашинами, каждая из которых вмещает 44 маленьких блока и имеет грузоподъемность 10 т. Вес маленького блока — 0,2 т, большой блок весит 3,6 т и занимает место 14 маленьких. Найти минимальное количество рейсов, достаточное для перевозки всех блоков.

10.Б.12. В пирамиде $ABCD$ проведено сечение $KMLN$ так, что точка K лежит на ребре AD, точка M — на ребре DC, точка N — на ребре AB, точка L — на ребре BC, O — точка пересечения диагоналей KL и MN четырехугольника $KMLN$. Сечение $KMLN$ делит пирамиду на две части. Найти отношение объемов этих частей, если известны следующие соотношения между длинами отрезков:

$$4\cdot OL=3\cdot OK,\ 25\cdot ON=24\cdot OM,$$

$$DK\cdot NA-KA\cdot BN=KA\cdot NA.$$

Ответы

10.Б.1. $(4;\ 1+2\sqrt{3}]$. **10.Б.2.** $(3/2;\ -5/2)$. **10.Б.3.** 6. **10.Б.4.** $2\sqrt{9+6\sqrt{2}}$. **10.Б.5.** $3\pi/4+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **10.Б.6.** $(-1/3,\ 1/6)$. **10.Б.7.** $(9;\ 2)$. **10.Б.8.** Нет. **10.Б.9.** $(0;\ \sqrt[6]{2}-1]\cup[63;\ \infty)$. **10.Б.10.** $(-1)^n\arcsin\sqrt{5/6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **10.Б.11.** 20. **10.Б.12.** 213/67.

§10.В. ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

1986 год

10.В.1. Решить уравнение $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4-x^2}{2}}=8^x$.

10.В.2. Решить неравенство

$$x-1>\frac{4x}{3-x}.$$

10.В.3. Решить систему

$$\begin{cases} 3^y=x, \\ 2\sin x+\sin 2x=2\cos^2\frac{x}{2}. \end{cases}$$

10.В.4. Решить уравнение

$$x\log_2 x^2+1=2x+2\log_4 x.$$

10.В.5. В треугольной пирамиде $SABC$ на ребре SB взята точка M, делящая отрезок SB в отношении 3:5, считая от точки S. Через точки A и M параллельно медиане BD треугольника ABC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

10.В.6. В треугольнике ABC проведены высота AH длины h, медиана AM длины l и биссектриса AN. Точка N — середина отрезка MH. Найти расстояние от вершины A до точки пересечения высот треугольника ABC.

1987 год

10.В.7. Решить неравенство

$$\frac{1}{2x} \geqslant \frac{1}{1-x}.$$

10.В.8. Решить уравнение

$$4^{\sin x} + 2^{5-2\sin x} = 18.$$

10.В.9. Известно, что $\sin\alpha = -\sqrt{5}/3$, $\pi < \alpha < 4\pi/3$. Найти $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

10.В.10. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\log_{1/2}(3x^2 - 2x)}.$$

10.В.11. Внутри прямоугольного треугольника ABC (угол B — прямой) взята точка D так, что площади треугольников ABD и BDC соответственно в три и четыре раза меньше площади треугольника ABC. Длины отрезков AD и DC равны соответственно a и c. Найти длину отрезка BD.

10.В.12. Шар радиуса 2 вписан в правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ с вершиной S. Второй шар радиуса 1 касается первого шара, основания пирамиды и боковых граней BSC и CSD. Найти объем пирамиды и величину двугранного угла при боковом ребре SC.

Ответы

10.В.1. -1; 4. 10.В.2. $(3;\ \infty)$. 10.В.3. $((-1)^n \pi/6 + \pi n;\ \log_3((-1)^n \pi/6 + \pi n))$, $(\pi + 2\pi m,\ \log_3(\pi + 2\pi m))$, $n, m = 0, 1, \ldots$. 10.В.4. 1/2; 2. 10.В.5. 9/25. 10.В.6. $\frac{l^2 - h^2}{2h}$. 10.В.7. $(0; 1/3] \cup (1; \infty)$. 10.В.8. $(-1)^n \pi/6 + \pi/n$, $n \in \mathbb{Z}$. 10.В.9. $-2/3$ и $-\sqrt{5}$. 10.В.10. $[-1/3;\ 0) \cup (2/3;\ 1]$. 10.В.11. $\sqrt{(3a^2 + 8c^2)/35}$. 10.В.12. 1024/9 и $\arccos(-9/25)$.

§ 10.Г. ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

1986 год

10.Г.1. Решить уравнение

$$\log_2(x-3) = 1 - \log_8(x-2).$$

10.Г.2. Четыре одинаковых насоса, работая вместе, наполнили нефтью первый танкер и треть второго танкера (другого объема) за 11 ч. Если бы три насоса наполнили первый танкер, а затем один из них наполнил четверть второго танкера, то работа заняла бы 18 ч. За сколько часов три насоса могут наполнить второй танкер?

10.Г.3. Найти все значения x из интервала $(0; \pi/2)$, при которых производная функции

$$f(x)=\sin x \sin(\pi/2-x)(\sin(\pi/2-x)-\sin x)$$

обращается в нуль.

10.Г.4. На стороне AB треугольника ABC взята точка E, а на стороне BC — точка D так, что длина отрезка AE равна 2, а длина отрезка CD равна 1. Прямые AD и CE пересекаются в точке O. Найти площадь четырехугольника $BDOE$, если длина каждой из сторон AB и BC равна 8, а длина стороны AC равна 6.

10.Г.5. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 1-\sqrt{|x-1|}=\sqrt{7|y|}, \\ 49y^2+x^2+4a=2x-1 \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

1987 год

10.Г.6. Решить уравнение

$$(1-2\sin x)\sin x=\sin 2x+\cos x.$$

10.Г.7. Решить неравенство

$$4\log_2 x+\log_2\frac{x^2}{8(x-1)}\leqslant 4-\log_2(x-1)-\log_2^2 x.$$

10.Г.8. Стороны треугольника лежат на осях координат и на касательной к графику функции $y=x^2+2x+1$ в точке, абсцисса которой a удовлетворяет условию $-1/2<a<0$. Найти значение a, при котором площадь треугольника будет наибольшей.

10.Г.9. Основанием четырехугольной пирамиды $FABCD$ является квадрат $ABCD$. На ребре AF взята точка E, такая, что отрезок CE перпендикулярен ребру AF. Проекция O точки E на основание пирамиды лежит на отрезке AC и делит его в отношении $AO:OC=\gamma$. Найти разность объемов пирамид $FABCD$ и $EABD$, если известно, что $\angle ADF=90°$, а $AB=a$.

10.Г.10. Найти все значения p, при которых множество решений неравенства

$$(p-x^2)(p+x-2)<0$$

не содержит ни одного решения неравенства

$$x^2<1.$$

Ответы

10.Г.1.4. 10.Г.2.8. 10.Г.3. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}$; $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}$. 10.Г.4. $189\sqrt{55}/88$. 10.Г.5. 1/16, 1/128. 10.Г.6. $(-1)^{n+1}\pi/6+\pi n$, $\pi/4+\pi m$, $n, m\in\mathbf{Z}$. 10.Г.7. (1; 2]. 10.Г.8. $-1/3$. 10.Г.9. $\frac{a^3\sqrt{2}(\gamma+2)}{6\sqrt{\gamma}(\gamma+1)}$. 10.Г.10. $(-\infty;\ 0]\cup[3;\ \infty)$.

§ 10.Д. БИОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

1986 год

10.Д.1. Найти наибольший отрицательный корень уравнения

$\sin(x+\pi/3)+\cos(x+\pi/6)+\sqrt{3}=0$.

10.Д.2. Решить неравенство

$3^x<1+12\cdot 3^{-x}$.

10.Д.3. Из пункта A по одному и тому же маршруту одновременно выехали грузовик и легковой автомобиль. Скорость легкового автомобиля постоянна и составляет 6/5 скорости грузовика. Через 30 мни вслед за ними из того же пункта выехал мотоциклист со скоростью 90 км/ч. Найти скорость легкового автомобиля, если известно, что мотоциклист догнал грузовик на 1 ч раньше, чем легковой автомобиль.

10.Д.4. В треугольнике ABC длина стороны AB равна $5\sqrt{2}/2$, длина стороны BC равна $5\sqrt{5}/4$. Точка M лежит на стороне AB, точка O лежит на стороне BC, причем прямые MO и AC параллельны. Отрезок BM в 1,5 раза длиннее отрезка AM. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MO в точке P, лежащей между точками M и O, причем радиус окружности, описанной около треугольника AMP, равен $\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Найти длину стороны AC.

10.Д.5. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=8,\\ 2x^2+4xy+5y^2=a^4-4a^3+4a^2-12+\sqrt{105}\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

1987 год

10.Д.6. Решить уравнение $7\sin(2x-5\pi/2)+9\cos x+1=0$.

10.Д.7. Из пункта A по реке отправляется плот. Одновременно навстречу ему отправляется катер из пункта B, расположенного ниже по течению относительно пункта A. Встретив плот, катер сразу поворачивает и идет вниз по течению. Какую часть пути от A до B пройдет плот к моменту возвращения катера в пункт B, если скорость катера в стоячей воде вчетверо больше скорости течения реки.

10.Д.8. Решить неравенство

$$\frac{3\log_{0,5} x}{2-\log_{0,5} x} \geqslant 2\log_{0,5} x+1.$$

10.Д.9. Площадь трапеции $ABCD$ равна 30. Точка P — середина боковой стороны AB. Точка R на боковой стороне CD выбрана так, что $2CD=3RD$. Прямые AR и PD пересекаются в точке Q. Найти площадь треугольника APQ, если $AD=2BC$.

10.Д.10. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 9x^2-6xy+y^2+6x-13y+3=0, \\ 13x^2+6xy+10y^2+16x+2y-4ax-6ay+a^2-2a+3=0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответы

10.Д.1. $-\pi$. 10.Д.2. $(-\infty;\ \log_3 4]$. 10.Д.3. 72 км/ч. 10.Д.4. 15/4. 10.Д.5. $(-\infty;\ -1]\cup[3;\ \infty)$. 10.Д.6. $\pm 2\pi/3+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. 10.Д.7. 2/5. 10.Д.8. $(0,25;\ 0,5]\cup[2;\ \infty)$. 10.Д.9. 10/3. 10.Д.10. $[2/3-\sqrt{2},\ 2/3+\sqrt{2}]$.

§ 10.Е. ФАКУЛЬТЕТ ПОЧВОВЕДЕНИЯ

1986 год

10.Е.1. Решить уравнение

$$2\cos(x+\pi/6)=\sqrt{3}\cos x.$$

10.Е.2. Решить неравенство

$$\log_3(1-2x)>\log_3(5x-2).$$

10.Е.3. Два трактора равной мощности, работая одновременно, вспахали поле за 2 ч 40 мин. Если бы первый трактор увеличил скорость вспашки в два раза, а второй — в полтора раза, то поле было бы вспахано за 1 ч 30 мин. За какое время вспахал бы поле первый трактор, работая с первоначальной скоростью?

10.Е.4. Найти площадь треугольника, образованного осью ординат и двумя касательными, проведенными из точки A $(-1;\ 0)$ к графику функции $y=x^2+4x+7$.

10.Е.5. В треугольнике ABC точка D делит сторону AB пополам, а точка E лежит на стороне BC, причем длина отрезка BE в 3 раза меньше длины стороны BC. Отрезки AE и CD пересекаются в точке O. Найти длину стороны AB, если длина отрезка AE равна 5, длина отрезка OC равна 4, а величина угла AOC равна $120°$.

1987 год

10.Е.6. Решить уравнение

$$5 \sin 2x = \sin 9x - \sin 5x.$$

10.Е.7. Решить неравенство

$$\sqrt{2x+3} > x.$$

10.Е.8. Один турист преодолевает расстояние 20 км на 2,5 ч быстрее, чем другой. Если бы первый турист уменьшил свою скорость на 2 км/ч, а второй увеличил бы свою скорость в 1,5 раза, то они затратили бы на тот же путь одинаковое время. Найти скорость второго туриста.

10.Е.9. Окружность радиуса 2 касается внешним образом другой окружности в точке A. Общая касательная к обеим окружностям, проведенная через точку A, пересекается с другой их общей касательной в точке B. Найти радиус второй окружности, если длина отрезка AB равна 4.

10.Е.10. Найти такое значение x из промежутка $-1 < x < 2$, что точка с абсциссой x и ординатой

$$y = \sqrt{4 - 2x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3}$$

удалена на наименьшее расстояние от начала координат.

Ответы

10.Е.1. πn, $n \in Z$. **10.Е.2.** $(2/5;\ 3/7]$. **10.Е.3.** 8 ч. **10.Е.4.** 4. **10.Е.5.** $2\sqrt{7}$. **10.Е.6.** $\pi n/2$, $n \in Z$. **10.Е.7.** $[-1{,}5;\ 3]$. **10.Е.8.** 4 км/ч. **10.Е.9.** 8. **10.Е.10.** 1.

§ 10.Ж. ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

1986 год

10.Ж.1. Решить уравнение

$$\sin(x + \pi/6) = \sin x.$$

10.Ж.2. Длины сторон AB, BC и AC треугольника ABC образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найти отношение высоты треугольника ABC, опущенной из вершины A на сторону BC, к радиусу вписанной окружности.

10.Ж.3. Решить уравнение

$$\frac{2\cdot 6^x-4^x-15}{6^x-9^x-5}=3.$$

10.Ж.4. Студенческий строительный отряд оборудовал прямоугольную спортплощадку площадью 0,1 га, установив с противоположных более длинных сторон трибуны, а с двух других сторон — проволочную сетку. Стоимость установки одного погонного метра трибун и сетки равна соответственно 7 и 3 руб. На установку трибун и сетки израсходовано 820 руб. Найти длины сторон спортплощадки.

10.Ж.5. Пусть $a>0$, $b>0$. Найти решения неравенства

$$\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2}}>\frac{1}{x}-\frac{1}{b}.$$

10.Ж.6. При всех значениях параметра $p<9$ найти решения уравнения

$$3\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{15}\sin x-\frac{3\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{7}\sin^2 x+\frac{3\pi}{14}\right)+$$
$$+\cos^2\left(\frac{5\pi}{14}-\frac{\pi}{7}\cos 2x\right)=6\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{15}\sin x+\frac{2\pi}{5}\right)-p$$

на отрезке $[0;\ 2\pi]$.

1987 год

10.Ж.7. Найти диагональ ромба, если его сторона равна стороне равностороннего треугольника с площадью $25\sqrt{3}$ см², а другая диагональ равна 16 см.

10.Ж.8. Решить уравнение

$$2\sin^2 x-3\cos x=0.$$

10.Ж.9. Решить неравенство

$$\frac{1}{x-1}\geqslant -2.$$

10.Ж.10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x+y=30, \\ \log_3 x+\log_3 y=3. \end{cases}$$

10.Ж.11. Двое рабочих изготовили 60 одинаковых деталей. Первые 30 деталей каждый из них делал с постоянной производительностью, которая у второго рабочего была на 20% выше. Затем первый рабочий стал делать больше на 2 детали в 1 ч, а второй на 3 детали в 1 ч. Первый рабочий затратил на выполнение всего задания не менее 5 ч 30 мин, а второй — не более 4 ч

30 мин. Сколько деталей в 1 ч делал второй рабочий при выполнении первой половины задания?

10.Ж.12. На продолжении ребра ST правильной четырехугольной пирамиды $SPQRT$ с вершиной S взята точка B так, что расстояние от этой точки до плоскости SPQ равно $9\sqrt{7}/2$ см. Найти длину отрезка BT, если $QR=12$ см, а $SP=10$ см.

Ответы

10.Ж.1. $5\pi/12+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **10.Ж.2.** 3. **10.Ж.3.** $\log_{3/2}\left((1+\sqrt{3})/6\right)$. **10.Ж.4.** 50 и 20 м. **10.Ж.5.** $(-a;\ 0)\cup\left(0;\ \dfrac{2a^2b}{a^2+b^2}\right)$ при $a<b$; $[-a;\ 0)\cup(0;\ a]$ при $a>b$. **10.Ж.6.** $3\pi/2$ при $p=9$; $\varnothing$ при $p<9$. **10.Ж.7.** 12 см. **10.Ж.8.** $\pm\pi/3+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **10.Ж.9.** $(-\infty;\ 1/2]\cup(1;\ \infty)$. **10.Ж.10.** $(9;\ 3)$, $(1;\ 27)$. **10.Ж.11.** 12. **10.Ж.12.** 5 см.

§ 10.3. ГЕОГРАФИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

1986 год

10.3.1. Решить неравенство

$$\frac{x-3}{x^2+2x-5}>\frac{1}{2}.$$

10.3.2. Решить уравнение

$$\log_x\sqrt{3}-\log_{x^2}27=\frac{1}{2}.$$

10.3.3. Три цистерны одинакового объема начинают одновременно заполняться водой, причем в первую поступает 100 л воды в 1 мин, во вторую — 60 и в третью — 80. Известно, что в начальный момент первая цистерна пуста, вторая и третья частично заполнены и что все три цистерны будут заполнены одновременно. Во сколько раз количество воды в начальный момент времени во второй цистерне больше, чем в третьей?

10.3.4. Внутри треугольника ABC взята точка K. Известно, что длина отрезка AK равна 1, длина отрезка KC равна $\sqrt{3}$, а величины углов AKC, ABK и KBC равны 120, 15 и 15° соответственно. Найти длину отрезка BK.

10.3.5. Для каждого значения a, удовлетворяющего неравенствам $0<a<2$, найти наименьшее значение выражения $x^2+y^2-2a(x+y)$ при условии $\cos(\pi xy/2)=1$.

1987 год

10.3.6. Решить уравнение

$$7^x-14\cdot 7^{-x}=3^{\log_3 2}+3.$$

10.3.7. Решить неравенство

$y^2+3|y|<10.$

10.3.8. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность радиуса $2\sqrt{5}$ см, отсекающая от прямой BC отрезок $4\sqrt{5}$ см и касающаяся прямой AC в точке A. Из точки B проведен перпендикуляр к прямой BC до пересечения с прямой AC в точке F. Найти площадь треугольника ABC, если $BF=2$ см.

10.3.9. Найти все решения системы

$$\begin{cases} \sin(2x+y)=0, \\ \cos(x+y)=1, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям

$$-\pi<x<\pi, \ -2\pi<y<-\pi.$$

10.3.10. Найти все натуральные значения b, при которых выражение $1/(x+y+3)$ имеет смысл для всех пар чисел (x, y), где $x<0$ и $y<0$, для которых выражение $\lg(xy-b)$ также имеет смысл.

Ответы

10.3.1. $(-1-\sqrt{6}; -1+\sqrt{6})$. **10.3.2.** 1/9. **10.3.3.** 2. **10.3.4.** $\sqrt{3(2+\sqrt{3})}$. **10.3.5.** $-a^2$ при $a\leqslant 4-2\sqrt{2}$; $-8(a-1)$ при $a\geqslant 4-2\sqrt{2}$. **10.3.6.** 1. **10.3.7.** $(-2; 2)$. **10.3.8.** $5\sqrt{5}/3$ см. **10.3.9.** $(-\pi; -\pi)$, $(0; -2\pi)$, $(\pi; -\pi)$. **10.3.10.** 3, 4, 5 ....

§ 10.И. ФИЛОСОФСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

(отделение прикладной социологии)

1986 год

10.И.1. Решить систему

$$\begin{cases} 2x+5y=-4, \\ 5x+11y=3. \end{cases}$$

10.И.2. Найти площадь ромба $ABCD$, если тангенс угла ABC равен $\sqrt{15}$, а длина диагонали AC равна 4 см.

10.И.3. Решить уравнение

$2\cos^2 x+3\sin x=0.$

10.И.4. Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_2 x-4}>\frac{1}{\log_2 x}.$$

10.И.5. Найти все пары целых чисел x, y, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-12x+20y+65<0, \\ 4x+2y>3. \end{cases}$$

Ответы

10.И.1. $\left(19\frac{2}{3};\ -8\frac{2}{3}\right)$. **10.И.2.** $8\sqrt{3}$ см. **10.И.3.** $(-1)^{n+1}\pi/6+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **10.И.4.** $(0;\ 1)\cup(16;\ \infty)$. **10.И.5.** $(3;\ -4)$, $(4;\ -5)$.

§ 10.К. ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

(отделение политической экономии)

1986 год

10.К.1. Решить уравнение

$$5^{x+1}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}.$$

10.К.2. Решить систему

$$\begin{cases} 3x+4\sin y=-11, \\ -2x+5\sin y=\dfrac{7}{2}. \end{cases}$$

10.К.3. Решить уравнение

$$\sqrt{3x+4}\,(9x^2+21x+10)=0.$$

10.К.4. В прямоугольнике $ABCD$, где $AB=6$, $AD=3\left(1+\sqrt{2}/2\right)$, расположены две окружности. Окружность радиуса 2 с центром в точке K касается сторон AB и AD. Окружность радиуса 1 с центром в точке L касается стороны CD и первой окружности. Найти площадь треугольника CLM, если M — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на прямую, проходящую через точки K и L.

10.К.5. Линию, связывающую города А и Б, обслуживают самолеты трех типов. Каждый самолет первого, второго, и третьего типов может принять на борт соответственно 230, 110 и 40 пассажиров, а также 27, 12 и 5 контейнеров. Все самолеты линии могут принять на борт одновременно 760 пассажиров и 88 контейнеров. Найти число действующих на линии самолетов каждого типа, зная, что их общее число не превосходит 8.

10.К.6. В пирамиде $SABC$ ребра SC, BC, и AC равны соответственно $\frac{1}{6}\sqrt{93}$, 3 и 4. Известно, что угол ABC тупой, ребро SC

перпендикулярно плоскости основания ABC, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $8/\sqrt{15}$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину S, точку пересечения медиан треугольника ABC и центр окружности, вписанной в этот треугольник.

1987 год

10.К.7. Решить уравнение

$$\cos 2x + 3\sqrt{2}\sin x - 3 = 0.$$

10.К.8. В магазине продано 12 т орехов трех сортов по цене соответственно 2, 4 и 6 руб. за 1 кг на общую сумму 42 тыс. руб. Известно, что количества тонн проданных орехов соответственно первого, второго и третьего сортов образуют арифметическую прогрессию. Сколько тонн орехов каждого сорта продано в магазине?

10.К.9. Решить неравенство

$$\frac{|2-x|-x}{|x-3|-1} \leqslant 2.$$

10.К.10. Решить неравенство

$$\frac{1}{2}\log_{x-1}(x^2-8x+16)+\log_{4-x}(-x^2+5x-4) > 3.$$

10.К.11. В треугольнике ABC точка K на стороне AB и точка M на стороне AC расположены так, что $\frac{AK}{KB}=\frac{3}{2}$, а $\frac{AM}{MC}=\frac{4}{5}$. Найти отношение, в котором прямая, проходящая через точку K параллельно BC, делит отрезок BM.

Ответы

10.К.1. 1/2. 10.К.2. $(-3;\ (-1)^{n+1}\pi/6+\pi n)$, $n\in\mathbf{Z}$. 10.К.3. $-4/3$; $-2/3$. 10.К.4. $3(4\sqrt{2}-5)/4$. 10.К.5. 2, 2 и 2. 10.К.6. $\sqrt{3}$. 10.К.7. $(-1)^n\pi/4+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. 10.К.8. 5,5; 4 и 2,5 т. 10.К.9. $(-\infty;\ 2)\cup\{3\}\cup(4;\ \infty)$. 10.К.10. $(2;\ 5/2)\cup(5/2;\ 3)$. 10.К.11. 18/7.

§ 10.Л. ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

(отделение экономической кибернетики и планирования народного хозяйства)

1986 год

10.Л.1. Решить уравнение

$$2^{|x+1|}=(\sqrt{2})^{-2x+3}.$$

10.Л.2. Решить систему

$$\begin{cases} 6\sin x+7\log_y 3=-10. \\ -5\sin x+2\log_y 3=0{,}5. \end{cases}$$

10.Л.3. Решить неравенство

$$\sqrt{-25x^2+15x-2}\,(8x^2-6x+1)\geqslant 0.$$

10.Л.4. В окружность радиусом $2\sqrt{7}$ вписана трапеция $ABCD$, причем ее основание AD является диаметром, а угол BAD равен $\pi/3$. Хорда CE пересекает диаметр AD в точке P такой, что $AP:PD=1:3$. Найти площадь треугольника BPE.

10.Л.5. В течение нескольких дней двое рабочих изготовляли специальные детали, причем ежедневная выработка деталей у каждого рабочего была постоянной. В итоге за все эти дни второй рабочий изготовил на k деталей больше, чем первый, где число k удовлетворяет неравенствам $127<k<132$. Если бы первый рабочий увеличил ежедневную выработку в 2 раза, то за то же количество дней он изготовил бы на 77 деталей больше, чем второй. Сколько дней рабочие изготовляли детали? Какова была ежедневная выработка у каждого из них?

10.Л.6. В наклонной треугольной призме $PQRP_1Q_1R_1$ площадь боковой грани PP_1R_1R равна 64 см², а косинусы двугранных углов при ребрах PP_1 и QQ_1 равны соответственно $\sqrt{10}/4$ и $1/4$. В эту призму помещена треугольная призма $DEFD_1E_1F_1$ так, что вершины D, E, F лежат на отрезках PQ, QR, RP, а вершины D_1, E_1, F_1 — на отрезках P_1Q_1, Q_1R_1, R_1P_1 соответственно. Известно, что призма $DEFD_1E_1F_1$ имеет наименьшую площадь боковой поверхности среди всех так расположенных призм. Найти площадь боковой поверхности призмы $DEFD_1E_1F_1$.

1987 год

10.Л.7. Решить уравнение

$$(2\sin x-1)\sqrt{\cos(x+\pi/4)}=0.$$

10.Л.8. В магазине продано 10,5 т орехов трех сортов по цене соответственно 2, 4 и 6 руб. за 1 кг на общую сумму 33 тыс. руб. Известно, что количества тонн проданных орехов соответственно первого, второго и третьего сортов образуют геометрическую прогрессию. Сколько тонн орехов каждого сорта продано в магазине?

10.Л.9. Решить неравенство

$$\frac{|2-x|-x}{|x-3|-1}\leqslant 2.$$

10.Л.10. Решить неравенство

$$\frac{1}{2}\log_{x-1}(x^2-8x+16)+\log_{4-x}(-x^2+5x-4)>3.$$

10.Л.11. В треугольнике ABC точка K на стороне AB и точка M на стороне AC расположены так, что $\frac{AK}{KB}=\frac{2}{3}$ и $\frac{AM}{MC}=\frac{4}{5}$. Найти отношение, в котором точка пересечения прямых KC и BM делит отрезок BM.

10.Л.12. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5x^2+3a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответы

10.Л.1. 1/4. **10.Л.2.** $((-1)^{n+1}\pi/6+\pi n;\ 1/3)$, $n\in\mathbf{Z}$. **10.Л.3.** $[1/5;\ 1/4]\cup\{2/5\}$. **10.Л.4.** $3\sqrt{3}$. **10.Л.5.** 11; 19 и 31 деталь. **10.Л.6.** 72 см². **10.Л.7.** $\pi/6+2\pi n$, $\pi/4+\pi m$, n, $m\in\mathbf{Z}$. **10.Л.8.** 6; 3 и 1,5 т. **10.Л.9.** $(-\infty;\ 2)\cup\{3\}\cup(4;\ \infty)$. **10.Л.10.** $(2;\ 5/2)\cup(5/2;\ 3)$. **10.Л.11.** 27/10. **10.Л.12.** 4/3.

§ 10.М. ФИЛОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

(отделение структурной и прикладной лингвистики)

1986 год

10.М.1. Решить неравенство

$$x-3+\frac{4}{x+1}>0.$$

10.М.2. Решить уравнение

$$\cos 2x+\sin^2 x=\cos x.$$

10.М.3. Из заготовки, имеющей форму круглого цилиндра с диаметром основания 20 см и высотой h, вытачивается шар с диаметром h. При каком значении h объем удаляемой части заготовки максимален?

10.М.4. В трапеции $ABCD$ сторона AB параллельна CD. Диагонали трапеции BD и AC пересекаются в точке O, причем треугольник BOC — равносторонний. Найти длину стороны BC, если длина стороны AB равна 5 см, а длина стороны CD равна 3 см.

10.М.5. Имеются два ящика с яблоками, причем в первом ящике 15 яблок, а во втором — 16. Разрешается проводить в любом порядке и любом количестве следующие операции:

а) увеличить на 2 число яблок в первом ящике и одновременно увеличить на 1 их число во втором;

б) увеличить на 1 число яблок в первом ящике и одновременно увеличить на 2 их число во втором;

в) уменьшить на 1 число яблок в первом ящике и одновременно увеличить на 2 их число во втором;

г) уменьшить на 2 число яблок в первом ящике и одновременно уменьшить на 1 их число во втором.

Можно ли, совершая такие действия, добиться того, чтобы одновременно в первом ящике оказалось 50 яблок, а во втором — 25? Ответ обосновать.

1987 год

10.М.6. Решить уравнение

$$2\cos 2x+4\cos x=\sin^2 x.$$

10.М.7. Решить уравнение

$$\log_{5-x^2}(2x^2-8x-2)=1+\log_{5-x^2}2.$$

10.М.8. Решить неравенство

$$\sqrt{2x^2+15x-17}>x+3.$$

10.М.9. Медианы AM и BE треугольника ABC пересекаются в точке O. Точки O, M, E, C лежат на одной окружности. Найти AB, если $BE=AM=3$ см.

10.М.10. Решить неравенство $\dfrac{9}{3x+2}>\dfrac{1+\log_3(x+6)}{x}$.

Ответы

10.М.1. $(-1;\ 1)\cup(1;\ \infty)$. **10.М.2.** $\pi/2+\pi n$, $2\pi m$, $n, m\in \mathbf{Z}$. **10.М.3.** $10\sqrt{2}$ см. **10.М.4.** 15/7 см. **10.М.5.** Нет. **10.М.6.** $\pm\arccos\dfrac{\sqrt{19}-2}{5}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **10.М.7.** -1. **10.М.8.** $(-\infty;\ -8{,}5]\cup\left(\dfrac{\sqrt{185}-9}{2};\ \infty\right)$. **10.М.9.** $2\sqrt{3}$ см. **10.М.10.** $(-2/3;\ 0)$.

§ 10.Н. ФАКУЛЬТЕТ ПСИХОЛОГИИ

1986 год

10.Н.1. Найти $\operatorname{tg}^2 2\alpha$, если $\sin\alpha=-2/\sqrt{11}$.

10.Н.2. Решить уравнение

$$\sqrt{35-5x}=9-2x.$$

10.Н.3. Решить неравенство

$$\frac{6-\lg x^4}{3+2\lg x^2}<2.$$

10.Н.4. В три сосуда налито по 1 кг различных растворов поваренной соли. Если смешать 200 г первого раствора и 100 г второго раствора, то в полученной смеси будет содержаться столько же соли, сколько ее содержится в 100 г третьего раствора. Количества соли в трех растворах, взятые в порядке номеров растворов, образуют геометрическую прогрессию. Сколько граммов второго раствора нужно взять, чтобы в них содержалось столько же соли, сколько ее содержится в 100 г третьего раствора?

10.Н.5. В треугольник ABC вписана окружность. Касательная к этой окружности, параллельная стороне BC, пересекает сторону AC в точке E и сторону AB в точке D. Периметры треугольников ABC и ADE равны соответственно 40 и 30 см, величина угла ABC равна α. Найти радиус окружности.

10.Н.6. Найти наибольшее из значений, которые принимает выражение $x+3y$, если x и y удовлетворяют неравенству

$$x^2+xy+4y^2\leqslant 3.$$

1987 год

10.Н.7. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии на 3/2 больше, чем сумма ее первых трех членов. Пятый член прогрессии равен ее третьему члену, умноженному на 4. Найти ее четвертый член, если известно, что знаменатель прогрессии положителен.

10.Н.8. Решить уравнение

$$\log_3(x^2-2x-1)-\log_3\left(x-\frac{1}{2}\right)=1.$$

10.Н.9. Бригада маляров белила потолки в классе и в актовом зале школы, причем площадь потолка в актовом зале в три раза больше, чем площадь потолка в классе. В той части бригады, которая работала в актовом зале, было на 6 маляров больше, чем в той части, которая работала в классе. Когда побелка всего потолка в актовом зале закончилась, та часть бригады, которая была в классе, еще работала. Какое наибольшее число маляров могло быть в бригаде, если все они начали работать одновременно и работали с одинаковой производительностью?

10.Н.10. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{3}{4}-\cos x}=\sqrt{\frac{3}{4}-\cos 3x}.$$

10.Н.11. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC, COD, AOD равны соответственно 20, 40, 60 м². Найти угол BAO, если известно, что $AB=15$ м, $AO=8$ м, а угол BOA больше 31°.

10.Н.12. Доказать, что все решения неравенства

$$\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x^3-1}>2$$

удовлетворяют неравенству

$$x+2\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x^4-2x^2+1}>1+2\sqrt[3]{x^2-1}.$$

Ответы

10.Н.1. 112/9. **10.Н.2.** 2. **10.Н.3.** $(-\infty;\ -1)\cup(-10^{-3/4};\ 0)\cup(0;\ 10^{-3/4})\cup(1;\ \infty)$. **10.Н.4.** 200 г. **10.Н.5.** $\dfrac{15\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{3+4\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$. **10.Н.6.** $2\sqrt{2}$. **10.Н.7.** 1/2. **10.Н.8.** 4. **10.Н.9.** 10. **10.Н.10.** $\pi/2+\pi n,\ \pi+2\pi m,\ n,\ m\in Z$. **10.Н.11.** 30°.

Учебное издание

Мельников Иван Иванович
Сергеев Игорь Николаевич

КАК РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ
НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ

Редактор *Л. А. Николова*
Художественный редактор *Ю. М. Добрянская*
Технический редактор *Г. Д. Колоскова*
Корректоры *В. П. Кададинская, Н. И. Коновалова*

ИБ № 2962

Сдано в набор 28.03.89.
Подписано в печать 13.02.90
Формат 60×90/16
Бумага тип. № 2.
Гарнитура литературная.
Высокая печать.
Усл. печ. л. 19,0. Уч.-изд. л. 19,16.
Тираж 40 000 экз. Заказ 73. Изд. № 779.
Цена 95 коп.

Ордена «Знак Почета» издательство
Московского университета.
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.

Типография ордена «Знак Почета» изд-ва МГУ.
119899, Москва, Ленинские горы