Б. М. МАКАРОВ, М. Г. ГОЛУЗИНА,
А. А. ЛОДКИН, А. Н. ПОДКОРЫТОВ

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ПО ВЕЩЕСТВЕННОМУ АНАЛИЗУ

*Допущено Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебного пособия для студентов университетов,
обучающихся по специальностям
«Математика» и «Прикладная математика»*

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1992

ББК 22.161
М15
УДК 517(075.8)

Макаров Б. М., Голузина М. Г., Лодкин А. А., Подкорытов А. Н. **Избранные задачи по вещественному анализу:** Учеб. пособие для вузов.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992.— С. 432.— ISBN 5-02-013951-3.

Особое внимание уделяется темам, связанным с классическими разделами анализа (асимптотика, вычисление интегралов и сумм рядов, выпуклые функции). Многие задачи могут быть использованы как материал для занятий в студенческом кружке. Большинство задач сопровождается указаниями или решениями.

Для студентов младших курсов университетов, физико-математических факультетов педагогических институтов и технических вузов с расширенным курсом математики, а также для преподавателей высшей математики.

Ил. 40. Библиогр. 43 назв.

Рецензенты:
кафедра математического анализа механико-математического факультета Новосибирского государственного университета (заведующий кафедрой академик *Ю. Г. Решетняк*).
член-корреспондент РАН *Л. Д. Кудрявцев*

Учебное издание

МАКАРОВ Борис Михайлович, ГОЛУЗИНА Мария Геннадиевна, ЛОДКИН Андрей Александрович, ПОДКОРЫТОВ Анатолий Наумович

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ПО ВЕЩЕСТВЕННОМУ АНАЛИЗУ

Заведующий редакцией *А. И. Баева*
Редактор *А. Ф. Лапко*
Художественный редактор *Г. М. Коровина*
Технический редактор *С. Я. Шкляр*
Корректор *М. И. Дронова*

ИБ № 32528

Сдано в набор 24.12.90. Подписано к печати 13.03.92. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 22,68. Усл. кр.-отт. 22,68. Уч.-изд. л. 23,06. Тираж 3680 экз. Заказ № 627. С—043.

Издательско-производственное и книготорговое объединение «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Четвертая типография издательства «Наука»
630077 г. Новосибирск, 77, Станиславского, 25

М $\frac{1602070000\text{-}043}{053(02)\text{-}92}$ 33-91

ISBN 5-02-013951-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

1*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Этот задачник предназначен в первую очередь для студентов, желающих углубить свои знания по математическому анализу, и преподавателей, ведущих семинарские занятия и кружки на математических факультетах университетов. От обычно используемых задачников он отличается несколько большей трудностью задач, среди которых имеется ряд известных теорем анализа. Несмотря на это, для решения задач I—VII глав и § 1 главы X не требуется особой подготовки, и в значительной части задачи доступны уже студентам первого курса во втором семестре. Все необходимые для решения этих задач сведения содержатся в стандартных университетских учебниках по математическому анализу, в частности, в книгах В. А. Зорича [7], Л. Д. Кудрявцева [16], У. Рудина [23] и Г. М. Фихтенгольца [29]. Задачи глав VIII и IX и § 2 главы X предъявляют несколько бо́льшие требования к уровню подготовки читателя и предполагают его знакомство с основными понятиями теории меры. Соответствующие сведения можно найти в последней главе упомянутого учебника У. Рудина и, в более полном виде, в книгах А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина [14] и Б. З. Вулиха [4].

Содержание первых семи глав, включающих около двух третей всех задач, не выходит за рамки классических тем анализа (функции, производная, интеграл, асимптотика). Как здесь, так и в последующих главах, мы не стремились к максимальной общности и, оказавшись перед необходимостью выбирать между более и менее общей формулировкой задачи, часто отдавали предпочтение последней. Главы VIII—X менее традиционны для задачника по анализу. Кроме вкусов авторов, критерием при отборе материала для этих глав служила программа курса математического анализа, принятая в Ленинградском университете. Задачи, выходящие за ее рамки и относящиеся к теории функций вещественной переменной (несмотря на всю условность этого разделения), в задачник не включались. Так, например, мы не использовали много привлекательных задач, решение которых опирается на теорему Лебега о дифференцировании интеграла по переменному верхнему пределу. В книге также почти не нашли отражения задачи, связанные с комплексным анализом. Читателей, интересующихся этим кругом вопросов, мы отсылаем к широко известному сборнику Г. Полиа и Г. Сеге [21] и к книге Е. Титчмарша [27].

Мы стремились объединять задачи, посвященные отдельным темам или методам, в циклы, в пределах которых можно было бы шаг за шагом исчерпать тот или иной круг вопросов с достаточной полнотой. Отчасти из-за этого нам не удалось избежать известной неоднородности в степени трудности соседних задач, которая на протяжении одного цикла может заметно возрастать. Поэтому нередко более трудные задачи сменяются сравнительно простыми, и читатель, не решив какой-либо задачи, не должен чувствовать себя обескураженным и вполне может надеяться на успех при решении последующих задач.

Краткие, а часто и подробные решения большинства задач приведены во второй части задачника. Однако мы рекомендуем читателю не торопиться использовать эту часть книги и не упускать шанс придумать лучшее решение, чем то, которое там приведено.

Литература по анализу и, в частности, учебники и сборники задач содержат необъятный материал, и мы думаем, что лишь немногие из предлагаемых задач могут претендовать на оригинальность. Мы видели нашу цель прежде всего в том, чтобы попытаться систематизировать и ввести в повседневный обиход задачи, содержащиеся (иногда в неявном виде) в труднодоступных (особенно для студентов) источниках, а также в математическом фольклоре. Искушенный читатель заметит наряду с традиционным материалом заимствования из «Математического просвещения» «American mathematical Mothly», сборников [19], [22], [24]—[26], [38] и др. Литературными ссылками задачи сопровождаются лишь в исключительных случаях.

Общее редактирование задачника осуществлялось Б. М. Макаровым.

Мы выражаем искреннюю благодарность нашим друзьям и коллегам А. Б. Александрову, Д. А. Владимирову, Е. Д. Глускину, Ю. Г. Дуткевичу, В. В. Жуку, К. П Кохасю, М. Ю. Любичу, Г. И. Натансону, А. В. Осипову, А. И. Плоткину, О. И. Рейнову, Б. А. Самокишу, С. В. Хрущеву и Д. В. Якубовичу, многочисленные советы и критические замечания которых оказали нам большую помощь. Мы обязаны им также рядом изящных задач.

В задачнике принята следующая система нумерации задач и ссылок. В пределах одной главы задачи нумеруются двумя числами, первое из которых обозначает номер параграфа, а второе — номер задачи в параграфе. При ссылках на задачу из другой главы сначала указывается (римской цифрой) номер главы. Например, задача VII.2.5 — это задача 2.5 из главы VII.

Мы будем признательны всем читателям за отзывы и замечания.

Авторы

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;
$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;
$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел;
$\overline{\mathbb{R}}$ — расширенное множество вещественных чисел;
$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел;
$\mathbb{R}^n$ — арифметическое n-мерное пространство;
$\varnothing$ — пустое множество;
$A \times B$ — прямое (декартово) произведение множеств A и B;
card (A) — мощность множества A;
$f(A)$ — образ множества A при отображении f;
$f^{-1}(A)$ — полный прообраз множества A при отображении f;
$\overline{A}$ — замыкание подмножества A пространства $\mathbb{R}^n$;
$B(x;\ r)$ — открытый шар с центром в точке x и радиусом r;
$B^n(r)$ — шар $B(0;\ r)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$;
B^n — шар $B^n(1)$;
S^{n-1} — единичная сфера с центром в нуле в пространстве $\mathbb{R}^n$;
$f\downarrow$, $f\uparrow$ — обозначение характера монотонности функции f (невозрастание, неубывание);

$f\downarrow A$, $f\uparrow A$ — обозначение равенств $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ $(A \in \overline{\mathbb{R}})$ для невозрастающей (неубывающей) функции f;

$f(x) = O(g(x))$ при $x \in A$ (или на множестве A) — обозначение для соотношения $|f(x)| \leqslant C|g(x)|$ для всех $x \in A$, где C — некоторое положительное число;

$f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$ $\left(\text{или } f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))\right)$ — обозначение для соотношения $f(x) = O(g(x))$ на некоторой окрестности точки a;

$f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$ $\left(\text{или } f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)\right)$ — обозначение для соотношения $f(x) = \varphi(x)g(x)$, где $\varphi(x) \underset{x\to a}{\to} 1$;

$f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$ $\left(\text{или } f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))\right)$ — обозначение для соотношения $f(x) = \varphi(x)g(x)$, где $\varphi(x) \underset{x\to a}{\to} 0$;

$\{a_n\}_{n \geqslant c}$ — последовательность (отображение, заданное на множестве целых чисел, больших или равных $c \in \mathbb{R}$);

$\sum\limits_{n \geqslant c} a_n$ — обозначение ряда и его суммы;

$f_n(x)$ $f(x)$ на A — обозначение равномерной схдимости последовательности функций $\{f_n\}_{n\geqslant c}$ к функции f на множестве A;

В обозначениях, связанных с последовательностями: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $a_n \sim b_n$ при $n\to\infty$ и т. д. мы часто опускаем указание $n\to\infty$ и пишем: $\lim a_n$, $a_n \sim b_n$ и т. д.; $\{a_n\}$ — обозначение для $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$; $\sum a_n$ — обозначение для $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$;

$C(X)$ — множество функций, непрерывных на множестве X;

$C^r(\Delta)$ — множество функций, r раз непрерывно дифференцируемых на промежутке $\Delta\subset\mathbb{R}$ $(0\leqslant r\leqslant+\infty)$;

$\mathrm{Lip}_\alpha(\Delta)$ — множество функций f, удовлетворяющих условию $f(x)-f(y)=O(|x-y|^\alpha)$ на квадрате $\Delta\times\Delta\subset\mathbb{R}^2$ (условие Липшица на промежутке $\Delta\subset\mathbb{R}$ с показателем $\alpha>0$);

Lip_α — множество $\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R})$;

$\mathscr{L}^0(A)$ — множество измеримых по Лебегу почти везде конечных функций, определенных на (измеримом) подмножестве A пространства $\mathbb{R}^n$;

$\mathscr{L}^r(A)$ — множество таких функций f из $\mathscr{L}^0(A)$, что функция $|f|^r$ суммируема на множестве A;

$\mathscr{L}^\infty(A)$ — множество таких функций f из $\mathscr{L}^0(A)$, что истинный супремум $|f|$ конечен;

$\operatorname{vrai\,sup}\limits_A f$ — истинный супремум функции f из $\mathscr{L}^0(A)$;

λ_n — мера Лебега в пространстве $\mathbb{R}^n$;

λ — мера λ_1;

α_n — объем (n-мерная мера Лебега) шара B^n;

$[x]$ — целая часть вещественного числа x;

$x \bmod y$ — обозначение для числа $x-\left[\dfrac{x}{y}\right]y$ $(x, y\in\mathbb{R}, y>0)$;

п. в.— сокращение слов «почти везде».

Часть I. ЗАДАЧИ

Глава I. ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Множества

Двоичной последовательностью называется последовательность, «состоящая из нулей и единиц», т. е. последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}$, где $\varepsilon_k = 0$ или 1 при любом $k \in \mathbb{N}$. Множество всевозможных двоичных последовательностей мы будем обозначать буквой Ξ.

Говоря о множествах, элементами которых, в свою очередь, являются множества, мы будем использовать термин «система множеств».

1.1. Пусть $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ — система всевозможных подмножеств множества $\mathbb{N}$. Докажите, что

а) множества Ξ и $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ равномощны;

б) множества Ξ и $\Xi \times \Xi$ равномощны.

1.2. Докажите, что множество Ξ имеет мощность континуума.

1.3. Докажите, что множества $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ имеют мощность континуума.

1.4. Докажите, что множество всех последовательностей вещественных чисел имеет мощность континуума.

1.5. Докажите, что множество непрерывных функций, заданных на отрезке $[a; b]$, имеет мощность континуума.

1.6. Существует ли система $\mathfrak{A}$ подмножеств множества $\mathbb{N}$, удовлетворяющая условиям:

а) $\mathfrak{A}$ имеет мощность континуума;

б) $\operatorname{card}(A \cap B) < +\infty$ для любых $A, B \in \mathfrak{A}$?

1.7. Существует ли система $\mathfrak{A}$ подмножеств множества $\mathbb{N}$, удовлетворяющая условиям:

а) $\mathfrak{A}$ имеет мощность континуума;

б) для любого числа t и любых множеств $A, B \in \mathfrak{A}$ неравенство $|a - b| < t$ справедливо лишь для конечного числа точек $a \in A$, $b \in B$?

1.8. Существует ли система $\mathfrak{A}$ подмножеств множества $\mathbb{N}$, удовлетворяющая условиям:

а) $\mathfrak{A}$ имеет мощность континуума;

б) система $\mathfrak{A}$ упорядочена по включению, т. е. из любых двух множеств, входящих в $\mathfrak{A}$, одно содержится в другом?

1.9. Пусть $\mathscr{F}(\mathbb{N}) = \{A \subset \mathbb{N} \mid \operatorname{card}(A) < +\infty\}$ — система всех конечных подмножеств множества $\mathbb{N}$. Докажите, что

а) система $\mathscr{F}(\mathbb{N})$ счетна;

б) существует такая биекция $\varphi\colon \mathscr{F}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$, что $\varphi(A) \leqslant \varphi(B)$, если $A \subset B$ $(A, B \in \mathscr{F}(\mathbb{N}))$.

1.10. а) Введем в множестве $\mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$ отношение эквивалентности, считая, что $x \sim y$, если $x/y \in \mathbb{Q}$ Докажите, что пересечение каждого класса эквивалентности с любым (непустым) содержащимся в $\mathbb{R}_+$ интервалом непусто.

б) Введем на окружности $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ отношение эквивалентности, считая, что $z \sim \zeta$, если $z/\zeta = e^{2\pi i\theta}$, где $\theta \in \mathbb{Q}$. Докажите, что множество предельных точек любого класса эквивалентности совпадает с S^1.

1.11. Пусть $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Множества $A, B \subset S^1$ называются конгруэнтными, если существует такое число $\alpha \in \mathbb{R}$, что $B = \{ze^{i\alpha} \mid z \in A\}$, т. е. множество B «получается из множества A поворотом на угол α».

Докажите, что существует такая последовательность $\{E_n\}$ попарно не пересекающихся и конгруэнтных множеств, что $S^1 = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} E_n$.

1.12. Докажите, что на плоскости можно расположить континуум попарно не пересекающихся пятерок, но лишь не более чем счетное множество восьмерок.

1.13. Птичьим следом будем называть множество на плоскости, являющееся объединением трех (лежащих на различных лучах) отрезков, имеющих общий конец — вершину следа (рис. 1). Докажите, что на плоскости можно расположить лишь не более чем счетное множество попарно не пересекающихся птичьих следов.

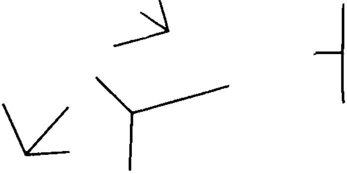

Рис. 1

1.14. Под Т-образной фигурой будем понимать объединение двух взаимно перпендикулярных отрезков, середина одного из которых является концом другого. Оцените сверху число N попарно не пересекающихся Т-образных фигур, образованных отрезками единичной длины и содержащихся в квадрате со стороной a.

1.15. Докажите, что в пространстве можно расположить лишь не более чем счетное множество попарно не пересекающихся «обручей» — цилиндрических колец фиксированного радиуса (толщина обручей равна нулю).

1.16. После проигрыша всех соревнований Балде бесы (которых было бесконечно много) решили заняться физкультурой и организовали спортивные секции. В каждую секцию входило лишь конечное число бесов, но секций было так много, что в любой бесконечной компании бесов можно было указать по крайней мере двух, записавшихся в одну секцию. Докажите, что за исключением конечного числа бесов лентяев каждый из бесов был записан в бесконечное множество секций.

1.17. Пусть последовательность $\{A_n\}$ конечных подмножеств множества $\mathbb{N}$ густо покрывает $\mathbb{N}$, т. е. для любого бесконечного множества $B \subset \mathbb{N}$ найдется такой номер m, что $\operatorname{card}(B \cap A_m) \geqslant 2$. Докажите, что

а) натуральные числа, принадлежащие лишь конечному числу множеств A_n, образуют конечное множество;

б) существует такое бесконечное множество $E \subset \mathbb{N}$, что для любого числа $k \in E$ справедливо включение $E \setminus \bigcup\limits_{n \in \Delta_k} A_n \subset \{1, 2, \ldots, k-1\}$, где $\Delta_k = \{n \in \mathbb{N} \mid k \in A_n\}$.

1.18. Если $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ — две последовательности конечных множеств, каждая из которых густо покрывает $\mathbb{N}$ (см. задачу 1.17), то найдутся такие номера p и q, что $\operatorname{card}(A_p \cap B_q) \geqslant 2$.

1.19. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ и $(x+y)/2 \in E$ для любых $x, y \in E$.

а) Верно ли, что $E \supset [500;\ 1000]$, если $E \supset [0;\ 1]$ и $1990 \in E$?

б) Докажите, что если $\operatorname{Int} E \neq \varnothing$, то E — промежуток.

1.20. Найдите все предельные точки множеств

а) $\{n^{-1} + m^{-1} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$; б) $\{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$;

в) $\{\sqrt{m} - \sqrt{n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$; г) $\left\{\dfrac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{N}\right\}$.

1.21. Пусть $E \subset (0;\ +\infty)$, $E \neq \varnothing$. Докажите, что если $x/2 \in E$ и $\sqrt{x^2+y^2} \in E$ для любых $x, y \in E$, то $\bar{E} = [0;\ +\infty)$.

1.22. Пусть $E \subset \mathbb{R}^2$. Докажите, что

а) если семейство открытых кругов $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ таково, что $E \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$, то существует такое не более чем счетное множество $A_0 \subset A$, что $E \subset \bigcup_{\alpha \in A_0} B_\alpha$;

б) существует не более чем счетное подмножество множества E, замыкание которого содержит E.

1.23. а) Множество называется дискретным, если любая его точка изолированная. Докажите, что всякое дискретное множество на плоскости не более чем счетно, а его замыкание не может иметь внутренних точек.

б) Точку a множества $E \subset \mathbb{R}$ будем называть полуизолированной, если существует такое $\varepsilon > 0$, что по крайней мере один из интервалов $(a-\varepsilon;\ a)$, $(a;\ a+\varepsilon)$ не содержит точек множества E. Докажите, что множество полуизолированных точек любого множества $E \subset \mathbb{R}$ не более чем счетно.

1.24. Пусть $E \subset \mathbb{N}$, $\operatorname{card} E = +\infty$. Докажите существование такого числа $a > 1$, что бесконечно много чисел $[a^k]$ $(k \in \mathbb{N})$ содержится в E.

1.25. Пусть G — открытое не ограниченное сверху множество в $\mathbb{R}$. Существует ли такое положительное число x_0, что множество G содержит бесконечно много точек вида nx_0 $(n \in \mathbb{N})$?

1.26. Пусть $\{G_n\}$ — последовательность открытых неограниченных сверху подмножеств множества $\mathbb{R}$. Докажите, что существует такое число $x_0 > 0$, что каждое из множеств G_n содержит бесконечно много точек вида mx_0 $(m \in \mathbb{N})$.

Канторовым множеством K называется пересечение множеств $K_n \subset \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$, которые определяются следующим образом. Множество K_1 получается удалением из сегмента $[0;\ 1]$ средней трети — интервала $(1/3;\ 2/3)$. Иными словами, K_1 есть объединение двух сегментов

$$\Delta_0 = [0;\ 1/3] \quad \text{и} \quad \Delta_1 = [2/3;\ 1],$$

которые мы будем называть сегментами первого ранга.

Множество K_2 получается удалением средних третей из сегментов первого ранга, т. е. является объединением четырех сегментов

$$\Delta_{00} = [0;\ 1/9], \quad \Delta_{01} = [2/9;\ 1/3], \quad \Delta_{10} = [2/3;\ 7/9], \quad \Delta_{11} = [8/9;\ 1],$$

которые мы будем называть сегментами второго ранга.

Дальнейшее построение продолжается по индукции: множество K_{n+1} получается удалением средних третей из сегментов n-го ранга. «Нумерацию» сегментов n-го ранга удобно производить с помощью индексов $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, где ε_j может принимать значения 0 и 1. Индексы сегментов 1-го и 2-го рангов уже указаны, дальнейшая индексация производится по индукции. Пусть сегменты n-го ранга уже снабжены индексами, $\Delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}$ — один из них. Два сегмента $(n+1)$-го ранга, получающиеся после удаления средней трети сегмента $\Delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}$, «нумеруются» так: левый обозначается $\Delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n 0}$, а правый — $\Delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n 1}$. Множество K_{n+1} есть объединение всевозможных сегментов $(n+1)$-го ранга.

1.27. Докажите, что

а) множество K имеет мощность континуума;

б) множество K замкнуто и не имеет изолированных точек;

в) сумма длин интервалов, составляющих множество $[0; 1] \setminus K$, равна единице.

1.28. Пусть K — канторово множество.

а) Докажите, что число t принадлежит K в том и только том случае, когда оно представимо в виде $t = \sum 2\varepsilon_j 3^{-j}$, где ε_j равно нулю или единице;

б) опишите множества

$$K + K = \{s + t \mid s, t \in K\} \quad \text{и} \quad K - K = \{s - t \mid s, t \in K\}.$$

1.29. Пусть множество $E \subset \mathbb{R}$ обладает свойством: для любых точек $x, y \in E$, $x < y$, существует такая точка $z \in E$, что $x < z < y$. Обязательно ли замыкание множества E содержит внутреннюю точку?

1.30. Постройте дискретное множество на плоскости, замыкание которого имеет мощность континуума. Существует ли дискретное множество на прямой с таким свойством? (Определение дискретного множества см. в задаче 1.23.)

1.31. Пусть K есть пересечение множеств $K_n \subset \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$, которые определяются следующим образом. Множество K_1 получается удалением из сегмента $\Delta = [a; b]$ непустого интервала $\delta = (p, q)$, концы которого не совпадают с a и b. Иными словами, K_1 есть объединение двух сегментов $\Delta_0 = [a; p]$ и $\Delta_1 = [q; b]$, которые мы будем называть сегментами первого ранга.

Множество K_2 получается после удаления из сегментов Δ_0 и Δ_1 интервалов δ_0, δ_1, концы которых не совпадают с концами Δ_0 и Δ_1 соответственно. Множество $\Delta_\varepsilon \setminus \delta_\varepsilon$ ($\varepsilon = 0, 1$) состоит из двух сегментов, из которых левый мы обозначим $\Delta_{\varepsilon 0}$, а правый — $\Delta_{\varepsilon 1}$. Таким образом, K_2 есть объединение четырех сегментов Δ_{00}, Δ_{01}, Δ_{10}, Δ_{11}, которые мы будем называть сегментами второго ранга. Дальнейшее построение продолжается по индукции. Пусть построено множество K_n, состоящее из сегментов n-го ранга. «Нумерацию» сегментов n-го ранга удобно производить с помощью индексов $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, где ε_j может принимать значение 0 или 1. Индексы сегментов первого и второго рангов уже указаны, дальнейшая индексация производится следующим образом. При построении сегментов $(n+1)$-го ранга из каждого сегмента n-го ранга $\Delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}$ удаляется непустой интервал $\delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}$, концы которого не совпадают с концами сегмента $\Delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}$. Разность $\Delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n} \setminus \delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}$ состоит из двух сегментов $(n+1)$-го ранга, из которых левый обозначается $\Delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n 0}$, а правый — $\Delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n 1}$. Множество K_{n+1} есть объединение всех сегментов $(n+1)$-го ранга. Если множество $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ не имеет внутренних точек, то оно называется обобщенным канторовым множеством.

Докажите, что

а) множество K имеет мощность континуума;

б) множество K замкнуто и не имеет изолированных точек;

в) K — обобщенное канторово множество в том и только том случае, когда $l_n \to 0$, где l_n — максимальная длина сегментов n-го ранга.

1.32. Пусть $\{\Delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}\}$, где $n \in \mathbb{N}$, ε_j может принимать значения 0 или 1,— семейство непустых ограниченных интервалов, удовлетворяющих условиям

1) $\Delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n} \supset \Delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n 0} \cup \Delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n 1}$;

2) при каждом $n \in \mathbb{N}$ интервалы $\Delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}$ и $\Delta_{\varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_n}$ не пересекаются, если $(\varepsilon_1; \ldots; \varepsilon_n) \neq (\varepsilon'_1; \ldots; \varepsilon'_n)$.

Положим $G_n = \bigcup_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0;1\}} \Delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}$. Докажите, что множество $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ имеет мощность континуума.

1.33. Докажите, что непустой интервал нельзя представить в виде объединения последовательности попарно не пересекающихся замкнутых множеств.

1.34. Докажите, что плоскость нельзя покрыть последовательностью замкнутых кругов без общих внутренних точек.

1.35. Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty, (a; b) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Докажите, что замыкание хотя бы одного множества E_n имеет внутреннюю точку.

1.36. Докажите, что множество иррациональных чисел не является объединением последовательности замкнутых множеств.

1.37. Пусть $\nu = \{n_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел,

$$E_\nu = \left\{\sum \varepsilon_k 2^{-n_k} \,\middle|\, \varepsilon_k = 0 \text{ или } 1\right\}.$$

а) Докажите, что множество E_ν замкнуто и не имеет изолированных точек.

б) Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

1) E_ν не содержит внутренних точек;

2) $n_{k+1} > 1 + n_k$ бесконечно много раз;

3) разложение $t = \sum \varepsilon_k 2^{-n_k}$ (где $\varepsilon_k = 0$ или 1) единственно.

§ 2. Неравенства

2.1. Докажите, что для любой конечной последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ вещественных чисел найдется такой номер $m \in \{0; 1; \ldots; n\}$, что

$$\left|\sum_{1 \leqslant k \leqslant m} a_k - \sum_{m < k \leqslant n} a_k\right| \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |a_k|$$

(при $m = 0$ считаем, что равна нулю первая сумма, а при $m = n$ — вторая).

2.2. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ — конечная последовательность положительных чисел и $M = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k$, $m = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k$. Докажите, что

а) $2n\sqrt{\dfrac{m}{M}} \leqslant \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \dfrac{a_k}{M} + \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \dfrac{m}{a_k} \leqslant n\left(1 + \dfrac{m}{M}\right)$;

б) $n^2 \leqslant \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \dfrac{1}{a_k} \leqslant n^2 \dfrac{(m+M)^2}{4mM}$.

2.3. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^n$ — конечная последовательность неотрицательных чисел, причем $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 1$. Докажите неравенства

а) $\dfrac{1}{1-S} \geqslant \prod\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (1 + a_k) \geqslant 1 + S$;

б) $\dfrac{1}{1+S} \geqslant \prod\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (1 - a_k) \geqslant 1 - S$.

Левые неравенства строгие, если $S > 0$. Правые неравенства строгие, если среди чисел $\{a_k\}_{k=1}^n$ по крайней мере два положительны.

2.4. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^n$ — конечная последовательность вещественных чисел, причем $a_k > -1$ при $k = 1, \ldots, n$. Докажите, что

а) если $S = a_1 + \ldots + a_n \geqslant 0$, то $\prod\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (1 + a_k) \leqslant 1 + \dfrac{S}{1!} + \ldots + \dfrac{S^n}{n!}$; равенство возможно лишь в тех случаях, когда $n = 1$ или $a_1 = \ldots = a_n = 0$;

б) если $\sigma = \dfrac{a_1}{1+a_1} + \ldots + \dfrac{a_n}{1+a_n} \geqslant 0$, то $1 + \dfrac{\sigma}{1!} + \ldots + \dfrac{\sigma^n}{n!} \leqslant \prod\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (1 + a_k)$; равенство возможно лишь в случае, когда $a_1 = \ldots = a_n = 0$.

2.5. Пусть $\{p_n\}$ — последовательность простых чисел, занумерованных в порядке возрастания ($p_1 = 2$). Докажите неравенства

а) $\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^{-1} \left(1 - \dfrac{1}{3}\right)^{-1} \ldots \left(1 - \dfrac{1}{p_m}\right)^{-1} > \sum\limits_{1 \leqslant n \leqslant p_m} \dfrac{1}{n}$;

б) $1 + \sum\limits_{1 \leqslant n \leqslant m} \dfrac{1}{p_n} > \ln \ln p_m$.

2.6. Для конечных последовательностей вещественных чисел $\{a_k\}_{k=1}^n$ и $\{b_k\}_{k=1}^n$ символами $\{\widehat{a}_k\}_{k=1}^n$ и $\{\widehat{b}_k\}_{k=1}^n$ (соответственно $\{\breve{a}_k\}_{k=1}^n$ и $\{\breve{b}_k\}_{k=1}^n$) обозначим неубывающие (соответственно невозрастающие) перестановки этих последовательностей. Докажите неравенства

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \breve{a}_k \widehat{b}_k \leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k b_k \leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \widehat{a}_k \widehat{b}_k.$$

2.7. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^n$ и $\{b_k\}_{k=1}^n$ — конечные последовательности вещественных чисел. Докажите неравенства

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \breve{a}_k \widehat{b}_k \leqslant \frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} b_k \leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \widehat{a}_k \widehat{b}_k.$$

При решении следующих задач может оказаться полезным *преобразование Абеля*

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{1\leqslant k<n} (a_k - a_{k+1}) B_k,$$

где $B_k = b_1 + \ldots + b_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Это равенство особенно удобно использовать в тех случаях, когда последовательность $\{a_k\}_{k=1}^n$ монотонна.

2.8. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^n$ и $\{b_k\}_{k=1}^n$ — конечные последовательности вещественных чисел, причем последовательность $\{a_k\}_{k=1}^n$ не возрастает и неотрицательна. Докажите неравенства

а) $a_1 \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} (b_1 + \ldots + b_k) \leqslant \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k b_k \leqslant a_1 \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} (b_1 + \ldots + b_k)$;

б) $\left|\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k b_k\right| \leqslant a_1 \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |b_1 + \ldots + b_k|$;

в) $m \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k \leqslant \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k b_k \leqslant M \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k$,

где

$$m = \min_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{k}(b_1 + \ldots + b_k) \text{ и } M = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{k}(b_1 + \ldots + b_k).$$

При этом множитель M нельзя заменить на меньший, а множитель m — на больший.

2.9. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^n$ и $\{b_k\}_{k=1}^n$ — конечные неотрицательные последовательности, причем последовательность $\{a_k\}_{k=1}^n$ не возрастает. Рассмотрим такой номер $m \in \{1; 2; \ldots; n\}$, что $m \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} b_k \geqslant \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} b_k$. Докажите, что

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k b_k \leqslant \left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} b_k\right) \sum_{1\leqslant k\leqslant m} a_k.$$

Если $m \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} b_k = \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} b_k$, то

$$\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} b_k\right) \sum_{n-m<k\leqslant n} a_k \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k b_k.$$

2.10. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^n$ — конечная последовательность вещественных чисел. Докажите, что

а) $0 \leqslant \frac{1}{n} \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k^2 - \left(\frac{1}{n} \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k\right)^2 \leqslant \frac{\Delta^2}{12}(n^2 - 1)$, где $\Delta = \max\limits_{1\leqslant k<n} |a_k - a_{k+1}|$;

б) если последовательность $\{a_k\}_{k=1}^n$ монотонна, то

$$\frac{\delta}{12}(n^2-1)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}a_k^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}a_k\right)^2,$$

где $\delta=\min\limits_{1\leqslant k<n}|a_k-a_{k+1}|$.

В каких случаях эти неравенства обращаются в равенства?

2.11. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^n$ — неубывающая выпуклая (или невозрастающая вогнутая) последовательность вещественных чисел. Докажите неравенства

$$\frac{1}{3n^2}\sum_{1\leqslant k<n}(n-k)^3(a_{k+1}-a_k)^2\leqslant\frac{1}{n}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}a_k^2-$$
$$-\left(\frac{1}{n}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}a_k\right)^2\leqslant\frac{1}{3n^2}\sum_{1\leqslant k<n}(k+1)^3(a_{k+1}-a_k)^2.$$

Если последовательность $\{a_k\}_{k=1}^n$ не возрастает и выпукла (или не убывает и вогнута), то знаки неравенств следует заменить на противоположные.

2.12. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^n$ и $\{b_k\}_{k=1}^n$—конечные последовательности неотрицательных чисел. Докажите, что

а) если $\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(b_k-a_k)=\Delta\geqslant 0$, то $\sqrt[n]{b_1\ldots b_n}\geqslant$
$$\geqslant\Delta+\sqrt[n]{a_1\ldots a_n};$$

б) $\sqrt[n]{(a_1+b_1)\ldots(a_n+b_n)}\geqslant\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}+\sqrt[n]{b_1\ldots b_n}$.

2.13. Докажите, что функции $x\mapsto\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ и $x\mapsto$ $\mapsto\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ строго монотонны на каждом из промежутков $(-\infty;\ -1)$ и $(0;\ +\infty)$.

2.14. Докажите, что

а) $(n/e)^n<n!$ при $n\in\mathbb{N}$; б) $n!<n(n/e)^n$ при $n\geqslant 11$.

Из этих неравенств следует, что $n!=(n/e)^n n^{\alpha_n}$, $0<$ $<\alpha_n<1$. Более точные представления факториала рассматриваются в задачах II.2.10 и II.2.11.

2.15. Докажите, что при любом $x\in[0;\ 1]$ справедливы неравенства

а) $2\leqslant(1+x)^p+(1-x)^p\leqslant 2^p\quad(p\geqslant 1)$;

б) $(1+x)^p+(1-x)^p\leqslant 2^{p-1}(1+x^p)\quad(p\geqslant 2)$;

в) $(1+x)^p+(1-x)^p\leqslant 2\left(1+x^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1}\quad(p\geqslant 2)$;

Какое из неравенств б) и в) сильнее другого?

г) $(1+x)^2+(p-1)(1-x)^2 \leqslant 4^{1-\frac{1}{p}}(1+x^p)^{2/p}(1 \leqslant p \leqslant 2)$.

2.16. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $t \in [0;\ n]$. Докажите неравенства

а) $0 \leqslant e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{t^2}{n} e^{-t}$ при $n \geqslant 1$;

б) $\frac{t^2}{n^2} e^{-t} \leqslant e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$ при $n \geqslant 2$;

в) $e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{t}{2\sqrt{n}} e^{-t}$ при $n \geqslant 36$.

г) Докажите, что $0 \leqslant \left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n}-e^{-t} \leqslant \frac{t^2}{n} e^{-t}$ при $n \geqslant 1$ и $t \in [0;\ \sqrt{n}]$.

2.17. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $t \in [0;\ n]$. Докажите неравенства

$$0 \leqslant e^{-t^2/(2n)}-e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{1}{\sqrt{en}}.$$

В следующей задаче рассматриваются соотношения, которые дополняют классические неравенства

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad \ln(1+x) < x < e^x-1,$$
$$\operatorname{arctg} x < x < \arcsin x.$$

2.18. Докажите неравенства

а) $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$ при $x > -1,\quad x \neq 0$;

б) $\dfrac{x}{1+\frac{2}{\pi}x} < \operatorname{arctg} x$ при $x > 0$;

в) $x^2 < \ln(1+\operatorname{tg}^2 x) < \sin x \operatorname{tg} x$ при $x \in (0;\ \pi/2)$;

г) $3x-x^3 < 2\sin(\pi x/2)$ при $x \in (0;\ 1)$;

д) $x^3 < \sin^2 x \operatorname{tg} x$ при $x \in (0;\ \pi/2)$.

е) Справедливо ли на промежутке $(0;\ \pi/2)$ неравенство $x^{3+\varepsilon} < (\sin x)^{2+\varepsilon} \operatorname{tg} x$ при каком-нибудь фиксированном положительном ε?

2.19. Докажите неравенства

а) $(e^x-1)\ln(1+x) > x^2$ при $x > 0$;

б) $\operatorname{tg} x \operatorname{arctg} x > x^2$ при $x \in (0;\ \pi/2)$;

в) $((1+x)^p-1)((1+x)^{1/p}-1) > x^2$ при $x > 0$ и $p > 0$, $p \neq 1$. Что будет при $p < 0$?

г) $((1-x)^p-1)(1-(1+x)^{1/p}) > x^2$ при $x \in (0;\ 1)$ и $p < -1$. Что будет при $p \in (-1;\ 0)$?

2.20. Докажите неравенства

$$\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\arcsin x < x^2 < \sin x \arcsin x \quad \text{при} \quad x \in (0;\ 1).$$

В задачах 2.21—2.27 рассматриваются интегральные неравенства, которые являются аналогами уже рассмотренных сумматорных неравенств. Их доказательство можно получить двумя путями: или предельным переходом в сумматорном неравенстве, или модификацией доказательства, использованного в дискретном случае. Отметим также, что с помощью предельного перехода неравенства из задач 2.23 и 2.24 переносятся на случай несобственных интегралов по промежутку вида $[a;\ +\infty)$.

2.21. Пусть функция f интегрируема на промежутке $[a;\ b]$, $0 < m = \inf f$, $M = \sup f$. Тогда справедливы неравенства

$$\text{а) } 2\sqrt{\frac{m}{M}}(b-a) \leqslant \frac{1}{M}\int_a^b f(x)\,dx + m\int_a^b \frac{dx}{f(x)} \leqslant \left(1+\frac{m}{M}\right)(b-a);$$

$$\text{б) } (b-a)^2 \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \leqslant (b-a)^2\frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

2.22. Пусть функции f и g монотонны на промежутке $[a;\ b]$. Если монотонность одного типа, то справедливы неравенства

$$\int_a^b f(x)\,g(a+b-x)\,dx \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx.$$

Если монотонность разного типа, то знаки неравенств заменяются на противоположные.

2.23. Пусть функции f и g интегрируемы на промежутке $[a;\ b]$, причем $f\downarrow$, $f \geqslant 0$. Для $x \in [a;\ b]$ положим

$$G(x) = \int_a^x g(t)\,dt.$$

Тогда справедливы неравенства

а) $f(a)\inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b} G(x)\leqslant\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx\leqslant f(a)\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} G(x)$;

б) $\left|\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right|\leqslant f(a)\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|G(x)|$;

в) $$\left(\inf_{a<x\leqslant b}\frac{G(x)}{x-a}\right)\int\limits_a^b f(x)\,dx\leqslant\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\left(\sup_{a<x\leqslant b}\frac{G(x)}{x-a}\right)\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

2.24. Пусть функции f и g интегрируемы на промежутке $[a;\ b]$, причем $f\downarrow$ и $0\leqslant g\leqslant 1$. Положим $c=\int\limits_a^b g(x)\,dx$. Тогда

$$\int\limits_{b-c}^{b} f(x)\,dx\leqslant\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx\leqslant\int\limits_a^{a+c} f(x)\,dx.$$

2.25. Пусть $f\in C^1([a;b])$, $\delta=\min\limits_{[a;b]}|f'|$, $\Delta=\max\limits_{[a;b]}|f'|$. Тогда

$$\frac{1}{12}(b-a)^2\delta^2\leqslant\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f^2(x)\,dx-\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx\right)^2\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{12}(b-a)^2\Delta^2.$$

Равенство выполняется лишь для линейных функций.

2.26. Если непрерывно дифференцируемая функция f не убывает и выпукла (или не возрастает и вогнута) на промежутке $[0;\ 1]$, то

$$\frac{1}{3}\int\limits_0^1(1-x)^3(f'(x))^2\,dx\leqslant\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx-\left(\int\limits_0^1 f(x)\,dx\right)^2\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{3}\int\limits_0^1 x^3(f'(x))^2\,dx.$$

Для неубывающей вогнутой (или невозрастающей выпуклой) функции знаки неравенств заменяются на противоположные. Равенство возможно лишь для линейной функции.

2.27. Пусть функции f и g положительны и интегрируемы на промежутке $[a;\ b]$. Тогда справедливы неравенства

а) $\exp\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \ln f(x)\,dx\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (аналог неравенства Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом);

б) $\exp\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \ln f(x)\,dx\right) + \exp\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \ln g(x)\,dx\right) \leqslant$

$\leqslant \exp\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \ln (f(x)+g(x))\,dx\right)$ (аналог неравенства Минковского — см. задачу 2.12 б)).

2.28. Пусть $0 < a < b$ и K — множество всех таких неотрицательных и не возрастающих на промежутке $[a;\ b]$ функций f, что

$$af(a) = bf(b) \quad \text{и} \quad \int\limits_a^b f(x)\,dx = 1.$$

Докажите, что для любых функций f и g из K справедливо неравенство

$$\int\limits_a^b \max(f(x);\ g(x))\,dx \leqslant \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Для каких функций достигается равенство?

§ 3. Иррациональность

3.1. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Докажите эквивалентность утверждений

а) $x \notin \mathbb{Q}$;

б) существует бесконечно много несократимых дробей p/q ($q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$) таких, что $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$;

в) существует такая последовательность $\{p_k/q_k\}_{k \geqslant 1}$ несократимых дробей ($q_k \in \mathbb{N}, p_k \in \mathbb{Z}$), что $q_k \to +\infty$ и $x - \frac{p_k}{q_k} = o\left(\frac{1}{q_k}\right)$ при $k \to +\infty$, В последующих задачах используется обозначение $\delta(x) = x - [x]$ — дробная часть вещественного числа x.

3.2. Пусть $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Докажите, что последовательность $\{\delta(nx)\}$ плотна на $(0;\ 1)$.

3.3. а) Докажите, что последовательности $\{\sin n^2\}$ и $\{\sin 4^n\}$ не имеют пределов,

б) докажите, что если последовательность $\{\sin(\theta \cdot 2^n)\}$ имеет предел, то он равен нулю и $\theta = \pi p 2^{-q}$, где $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$.

3.4. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Докажите эквивалентность утверждений

а) $x \in \mathbb{Q}$; б) множество $\{\delta(n^{1992}x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ конечно.

3.5. Покажите на примерах, что последовательность $\{\delta(10^n x)\}$ может быть всюду плотной и может быть нигде не плотной на $(0;\ 1)$.

3.6. Найдите множества частичных пределов последовательностей

а) $\{\sin n^{2/3}\}$; б) $\left\{\sqrt[4]{n} \sin \sqrt{n}\right\}$;

в) $\{\sin(\pi n^{3/2})\}$; г) $\{\sin \ln n\}$;

д) $\{\sin(\pi n \ln n)\}$.

3.7. Найдите множества частичных пределов последовательностей

а) $\{\delta(nx)\}$, где $x \in \mathbb{Q}$; б) $\{\delta(nx)\}$, где $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

в) $\{\delta(n^\alpha)\}$, где $\alpha \in (0;\ 1)$; г) $\{\delta(n^{5/2})\}$.

3.8. Существует ли такое вещественное число x, что

$$\delta(x^n) \in [1/3;\ 2/3]$$

для всех номеров n?

3.9. Пусть $f \in C([0;\ 1])$ и $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Докажите, что

$$\frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} f(\delta(kx)) \to \int_0^1 f(t)\, dt \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

3.10. Пусть $x = (x_1; \ldots; x_m) \in \mathbb{R}^m \setminus \mathbb{Q}^m$. Докажите, что существуют такие целые числа $p_1, \ldots, p_m$ и натуральное число q, что

$$|x_i - p_i/q| < q^{-(1+1/m)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

при этом знаменатель q можно взять сколь угодно большим.

3.11. Пусть $\alpha_n = \min\limits_{m \in \mathbb{Z}} |\sqrt{2} - m/n|$, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что

а) $(2n)^{-2} < \alpha_n < (2n)^{-1}$;

б) если строго возрастающая последовательность номеров $\{n_j\}$ такова, что $\alpha_{n_j} \leqslant C/n_j^2 \, (j \in \mathbb{N})$, где C — фиксированное число, то $\{n_j\}$ растет по крайней мере как геометрическая прогрессия: $n_{j+1}/n_j \geqslant 1 + 1/8C$ (таким образом, оценка снизу в неравенстве а) груба для большинства номеров).

В задачах 3.12—3.18 $\{\varepsilon_k\}$ — произвольная последовательность из $+1$ и -1, $\{n_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел.

3.12. Докажите, что сумма ряда $\sum \varepsilon_k 2^{-n_k}$ иррациональна, если

$$\overline{\lim}\,(n_{k+1} - n_k) = +\infty.$$

3.13. Пусть $\underline{\lim} \dfrac{n_1 n_2 \ldots n_k}{n_{k+1}} = 0$. Докажите, что

а) сумма ряда $\sum \dfrac{(-1)^k}{n_k}$ иррациональна;

б) если $\dfrac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant Q > 1$ при $k \in \mathbb{N}$, то сумма ряда $\sum \dfrac{\varepsilon_k}{n_k}$ иррациональна.

3.14. Пусть $\overline{\lim} \sqrt[2^k]{n_k} = +\infty$. Докажите, что

а) сумма ряда $\sum \dfrac{(-1)^k}{n_k}$ иррациональна;

б) если $\dfrac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant Q > 1$ при $k \in \mathbb{N}$, то сумма ряда $\sum \dfrac{\varepsilon_k}{n_k}$ иррациональна.

3.15. Пусть α — алгебраическое число степени не выше n (т. е. α является корнем алгебраического многочлена степени n с целыми коэффициентами). Докажите, если α иррационально, то существует такое число $c_\alpha > 0$, что $|\alpha - p/q| > c_\alpha q^{-n}$ для всех $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$.

3.16. Пусть $\overline{\lim} \sqrt[3^k]{n_k} = +\infty$. Докажите, что

а) число $\sum \dfrac{(-1)^k}{n_k}$ не является квадратичной иррациональностью;

б) если $\dfrac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant Q > 1$ при $k \in \mathbb{N}$, то число $\sum \dfrac{\varepsilon_k}{n_k}$ не является квадратичной иррациональностью.

3.17. Докажите трансцендентность чисел $\sum \varepsilon_k 2^{-k!}$ (лиувиллевы числа).

3.18. Пусть $\overline{\lim} \sqrt[k!]{n_k} > 1$. Докажите, что

а) сумма ряда $\sum \frac{(-1)^k}{n_k}$ является трансцендентным числом;

б) если $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant Q > 1$ при $k \in \mathbb{N}$, то сумма ряда $\sum \frac{\varepsilon_k}{n_k}$ является трансцендентным числом.

3.19. Пользуясь разложениями $e = \sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!}$ и $e^{-1} = \sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!}$, докажите, что:

а) число e иррационально;

б) $Ae^2 + Be + C \neq 0$, если A, B, C — целые числа, не равные нулю одновременно.

3.20. Иррациональность числа π.

а) Пусть

$$I_n = \frac{1}{n!} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t \, dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Докажите, что $I_n = P_n(\pi^2)$, где P_n — алгебраический многочлен степени не выше n с целыми коэффициентами;

б) выведите отсюда, что π^2 (а следовательно, и π) — иррациональное число.

3.21. Иррациональность значений экспоненты в рациональных точках.

а) Пусть

$$J_n(x) = \frac{1}{n!} \int\limits_{-x}^{x} (x^2 - t^2)^n e^t \, dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Докажите, что

$$J_n(x) = A_n(x) e^x + B_n(x) e^{-x},$$

где A_n, B_n — алгебраические многочлены степени n с целыми коэффициентами;

б) выведите отсюда, что $e^r \notin \mathbb{Q}$, если $r \in \mathbb{Q}, r \neq 0$.

3.22. Иррациональность значений тангенса в рациональных точках.

а) Пусть

$$I_n(x) = \frac{1}{n!} \int\limits_{-x}^{x} (x^2 - t^2)^n \cos t \, dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Докажите, что $I_n(x) = C_n(x) \cos x + S_n(x) \sin x$, где C_n, S_n — алгебраические многочлены степени не выше n с целыми коэффициентами;

б) выведите отсюда, что $\operatorname{tg} r \notin \mathbb{Q}$, если $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$.

Глава II. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Вычисление пределов

1.1. Пусть $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k \sqrt{k} \right|$. Найдите предел $\lim x_n$.

1.2. Пусть $x_n = \sqrt{n} \frac{(n-1)!!}{n!!}$. Найдите $\sup x_n$, $\inf x_n$, $\overline{\lim}\, x_n$, $\underline{\lim}\, x_n$.

1.3. Найдите пределы

а) $\lim \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant 2n} 2^{-k} \cos \sqrt{\frac{k}{n}}$; б) $\lim \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant 2n} 2^{-nk/(n+k)}$.

1.4. Вычислите предел последовательности $\{x_n\}$, где

$$x_n = \frac{\sqrt{n^{3n}}}{n!} \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \sin\left(\frac{k}{n^{3/2}}\right).$$

1.5. Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $x_n = \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\frac{a+k}{n}\right)^n$. Найдите предел $\lim x_n$.

1.6. Пусть $S_n = \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\frac{k}{n}\right)^k$.

а) Найдите предел $\lim S_n$;

б) выясните характер монотонности последовательности $\{S_n\}$;

в) верно ли, что $S_n \leqslant 2$ при любом $n \in \mathbb{N}$?

1.7. Вычислите предел $\lim \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}$.

1.8. Пусть последовательность натуральных чисел $\{k_n\}$ такова, что $k_n/n \to p$, $k_n \leqslant n$. Вычислите предел $\lim \frac{1}{n} \ln C_n^{k_n}$.

1.9. Найдите пределы

а) $\lim \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant 2n} \frac{k}{k^2+n^2}$;

б) $\lim \frac{1}{n^2} \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n} \sqrt{k(n-k)}$;

в) $\lim \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant 2n} \frac{k}{k+n^2}$;

г) $\lim \sum\limits_{n\leqslant k\leqslant 2n} \sin\frac{\pi}{k}$;

д) $\lim \sum\limits_{1\leqslant k<n} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$.

1.10. Найдите пределы

а) $\lim\sin(2\pi en!)$; б) $\lim n\sin(2\pi en!)$;

в) $\lim n^2\sin(2\pi en!)$; г) $\lim n^p\sin(\pi(\sqrt{2}+1)^n)$.

1.11. Пусть неубывающая положительная последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел a. Докажите, что сходимость ряда $\sum(a-x_n)$ равносильна соотношению $x_1\cdot x_2\ldots x_n \sim Ca^n$ при некотором $C>0$.

1.12. Пусть $a>0$ и $x_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}$ (n корней). Докажите, что

а) $x_n\to l_a=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4a}\right)$; б) $l_a-x_n\sim\frac{C_a}{(2l_a)^n}$ при некотором $C_a>0$. Чему равно C_2?

1.13. Пусть $x_n=\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6}}}$ (n корней). Докажите, что $2-x_n\sim\frac{C}{(12)^n}$ при некотором $C>0$.

1.14. Пусть $p>1$ и $x_n=\sqrt[p]{1+\sqrt[p]{1+\ldots+\sqrt[p]{1}}}$ (n корней). Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к положительному корню уравнения $x^p-x-1=0$.

1.15. Пусть $p>1$ и $\{c_n\}$ — неотрицательная последовательность. Положим $x_n=\sqrt[p]{c_1+\sqrt[p]{c_2+\ldots+\sqrt[p]{c_n}}}$ для $n\in\mathbb{N}$. Докажите, что сходимость последовательности $\{x_n\}$ равносильна ограниченности сверху последовательности $\left\{\frac{1}{p^n}\ln c_n\right\}$.

1.16. Докажите, что

а) $3=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\ldots}}}}$;

б) $3=\sqrt{5+\sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+4\sqrt{9+\ldots}}}}}$;

в) $\cos x=$

$$=\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos\frac{3x}{2}\sqrt{\sin^2\frac{x}{4}+\cos\frac{3x}{4}\sqrt{\sin^2\frac{x}{8}+\ldots}}}$$

при $|x|\leqslant\pi/2$;

г) $9=\sqrt{3u_2u_4+u_4\sqrt{3u_4u_6+u_6\sqrt{3u_6u_8+\ldots}}}$, где $\{u_n\}$ — последовательность чисел Фибоначчи: $u_1=u_2=1$ и $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ при $n\geqslant 2$;

д) $2x^2=\sqrt{2xT_0T_1+T_1\sqrt{2xT_1T_2+T_2\sqrt{2xT_2T_3+\ldots}}}$ при $x\geqslant 1$;

здесь $\{T_n\}$ — последовательность значений многочленов Чебышёва в точке x: $T_0=1$, $T_1=x$, $T_{n+1}=2xT_n-T_{n-1}$.

1.17. Пусть $x_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n}}}$. Докажите, что $x_n\to a\in\mathbb{R}$ и $\sqrt[n]{a-x_n}\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{e}{n}}$.

1.18. Докажите, что $x_n\to 0$, если $x_{n+1}-\frac{1}{2}x_n\to 0$.

1.19. а) Докажите, что $\overline{\lim}\left(\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n\geqslant e$ для любой положительной последовательности $\{a_n\}$.

б) Для любого числа $a\geqslant e$ укажите такую положительную последовательность $\{a_n\}$, что $\left(\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n\to a$.

1.20. Пусть $\{a_n\}$ такая последовательность вещественных чисел, что $a_{n+m}\leqslant a_n+a_m$. Докажите, что существует предел $\lim(a_n/n)\in\overline{\mathbb{R}}$ и он равен $\inf(a_n/n)$.

1.21. Пусть последовательность вещественных чисел $\{x_n\}$ такова, что $x_{n+1}-x_n\to 0$. Докажите, что множеством ее частичных пределов является промежуток с концами $\underline{\lim}\,x_n$ и $\overline{\lim}\,x_n$.

1.22. Пусть последовательность вещественных чисел $\{x_n\}$ такова, что $x_{n+1}+x_n\to 0$. Докажите, что множество ее частичных пределов либо бесконечно, либо содержит не более двух точек.

1.23. Пусть последовательность вещественных чисел $\{x_n\}$ такова, что $x_n - x_{n-2} \to 0$. Докажите, что $\frac{1}{n} x_n \to 0$.

1.24. а) Приведите пример такой ограниченной расходящейся последовательности $\{x_n\}$, что $x_{n+1} - x_n \to 0$.

б) Существует ли такая ограниченная последовательность $\{x_n\}$, что $x_{n+1} - x_n \to 0$, но последовательность $\left\{\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right\}$ не имеет предела?

1.25. Пусть $\{x_n\}$ — такая последовательность вещественных чисел, что при любом $C > 1$ существует предел $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{[C^n]}$. Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел.

§ 2. Усреднение последовательностей

2.1. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность вещественных чисел. Докажите, что $\frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n) \to L$, если $x_n \to L$. Обратное утверждение справедливо лишь при условии

$$\sum_{1 < k \leqslant n} k(x_k - x_{k-1}) = o(n).$$

2.2. Пусть $a_n \geqslant 0$ и $A_n = \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k \to +\infty$. Для произвольной последовательности $\{x_n\}$ вещественных чисел положим

$$\tilde{x}_n = \frac{1}{A_n} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k x_k.$$

Докажите, что

$$\underline{\lim}\, x_n \leqslant \underline{\lim}\, \tilde{x}_n \leqslant \overline{\lim}\, \tilde{x}_n \leqslant \overline{\lim}\, x_n.$$

В частности, $\tilde{x}_n \to a$, если $x_n \to a$ (при $a_n = 1$ отсюда следует первое утверждение задачи 2.1).

2.3. Пусть A — бесконечное подмножество множества $\mathbb{N}$,

$$A = \{n_1; n_2; \ldots\}, \quad p_n = \operatorname{card}\{m \in A \mid m \leqslant n\}.$$

Если существует предел $\theta(A) = \lim \frac{1}{n} p_n$, то он называется плотностью множества A (или плотностью последовательности $\{n_k\}$). Докажите, что а) $\theta(A) = \lim(k/n_k)$;

б) для любого числа $\alpha \in [0;\ 1]$ существует такое множество $A \subset \mathbb{N}$, что $\theta(A) = \alpha$.

2.4. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность вещественных чисел. Докажите, что

а) если $x_n \to a \in \mathbb{R}$, то $\frac{1}{n} \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k - a| \to 0$;

б) если при некотором $a \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение $\frac{1}{n} \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k - a| \to 0$, то существует такая последовательность $\{n_k\}$ плотности 1 (см. задачу 2.3), что $x_{n_k} \to a$;

в) если последовательность $\{x_n\}$ ограничена и для некоторой последовательности $\{n_k\}$ плотности 1 $x_{n_k} \to a$, то $\frac{1}{n} \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k - a| \to 0$.

2.5. Пусть $0 < a_n < 1$ при $n \in \mathbb{N}$.

а) Покажите на примерах, что существование одного из пределов $\lim \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n)$ и $\lim \frac{1}{n}\left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)$ не связано с существованием другого;

б) пусть

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \to a \quad \text{и} \quad \frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n} \to b.$$

Докажите, что $a^2 \leqslant b \leqslant a$ и что b может принимать любые значения между a^2 и a.

2.6. Пусть $y_{n-1} < y_n$ и $\lim y_n = +\infty$. Если последовательность вещественных чисел $\{x_n\}$ такова, что существует предел $\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\frac{x_n}{y_n} \to l$ (теорема Штольца — дискретный аналог правила Лопиталя). Сформулируйте и докажите подобное утверждение для неопределенностей типа $\frac{0}{0}$.

2.7. Докажите, что

а) $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k} \sim \ln n$;

б) $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} k^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha > -1)$;

в) $\sum\limits_{k \geqslant n} k^\alpha \sim -\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha < -1)$;

г) $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{\ln k}{k^\alpha} \sim \frac{\ln n}{1-\alpha} n^{1-\alpha} \quad (\alpha < 1);$

д) $\sum\limits_{k\geqslant n} \frac{\ln k}{k^\alpha} \sim \frac{\ln n}{\alpha-1} n^{1-\alpha} \quad (\alpha > 1).$

2.8. Докажите, что

а) $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} k^{\alpha k} \sim n^{\alpha n} \quad (\alpha > 0),$

б) $\sum\limits_{k\geqslant n} k^{\alpha k} \sim n^{\alpha n} \quad (\alpha < 0);$

в) $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a^k k! \sim a^n n! \quad (a > 0);$

г) $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} (k!)^{-\alpha/k} \sim \frac{e^\alpha}{1-\alpha} n^{1-\alpha} (\alpha < 1);$

д) $\sum\limits_{k\geqslant n} (k!)^{-\alpha/k} \sim \frac{e^\alpha}{\alpha-1} n^{1-\alpha} \quad (\alpha > 1).$

Результаты задач 2.9, 2.10 играют большую роль в математическом анализе. Они будут использоваться при решении многих последующих задач.

2.9. Докажите, что

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

Число $\gamma = 0{,}5772\ldots$ называется постоянной Эйлера.

2.10. Докажите, что

$$\ln(n!) = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \ln k = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + C + o(1).$$

С помощью формулы Валлиса покажите, что $C = \frac{1}{2}\ln(2\pi)$, откуда следует формула Стирлинга:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n.$$

2.11. Докажите, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n e^{1/(12n+1)} < n! < \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n e^{1/(12n)}.$$

В частности,

$$n! = \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

2.12. Докажите, что при $n \to +\infty$

а) $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} k^p = \frac{1}{1+p} n^{1+p} + \alpha_p + o(1)$, если $p \in (-1;\ 0]$;

б) $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} k^p = \frac{1}{1+p} n^{1+p} + \frac{1}{2} n^p + \beta_p + o(1)$, если $p \in (0; 1]$;

в) $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} k^p = \frac{1}{1+p} n^{1+p} + \frac{1}{2} n^p + \frac{p}{12} n^{p-1} + \gamma_p + o(1)$, если $p \in (0; 2]$.

2.13. Докажите, что при $n \to +\infty$

а) $\sum\limits_{1 < k \leqslant n} \frac{1}{k} \ln^p k = \frac{\ln^{1+p} n}{1+p} + C + o(1)$, если $p > -1$;

б) $\sum\limits_{1 < k \leqslant n} \frac{1}{k \ln k} = \ln(\ln n) + C' + o(1)$;

в) $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{\sqrt[k]{k!}} = e \ln n + C'' + o(1)$.

2.14. Докажите, что

а) $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} k \ln k = \frac{1}{2}\left(n^2 + n + \frac{1}{6}\right) \ln n - \frac{1}{4} n^2 + C_1 + o(1)$;

б) $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \ln k! = \frac{1}{2}\left(n^2 + 2n + \frac{1}{2}\right) \ln n - \frac{3}{4} n^2 + \left(\frac{1}{2} \ln 2\pi - 1\right) n + C_2 + o(1)$.

§ 3. Рекуррентные последовательности

3.1. Пусть $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_{n+2} = \frac{1}{3}(x_n + 2x_{n+1})$ $(n \in \mathbb{N})$. Докажите, что существует предел $\lim x_n$, и найдите его.

3.2. Пусть $x_0 = a$, $x_1 = b$. Найдите предел $\lim x_n$ в следующих случаях:

а) $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_{n-1} + \frac{1}{n} x_{n-2}$ $(n = 2; 3; \ldots)$;

б) $x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) x_n + \frac{1}{2n} x_{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

3.3. Пусть $x_1 \in \mathbb{R}$ и $x_{n+1} = \left(2 + \frac{2}{n}\right) x_n - 1$.

а) Для каких значений x_1 последовательность $\{x_n\}$ расходится? Какова асимптотика $\{x_n\}$?

б) Для каких x_1 последовательность $\{x_n\}$ сходится? Чему равен $\lim x_n$?

3.4. Пусть $b \in \mathbb{R}, a_n \to a \in \mathbb{R}$ и $x_{n+1} = a_n + bx_n$. Докажите, что

а) $x_n \to \frac{a}{1-b}$, если $|b| < 1$;

б) $x_n \to \frac{a}{1-b}$, если $|b| > 1$ и $x_1 + \sum \frac{a_k}{b^k} = 0$;

в) $x_n \sim Sb^{n-1}$, если $|b| > 1$ и $S = x_1 + \sum \frac{a_k}{b^k} \neq 0$.

3.5. Пусть последовательность $\{x_n\}$ и число $p \in \mathbb{R}$ таковы, что $x_{n+1} \leqslant px_n + (1-p)x_{n-1}$ для любого $n = 2, 3, \ldots$ Докажите, что если $p > 0$, то существует предел $\lim x_n \in \overline{\mathbb{R}}$, а при $p \leqslant 0$ это утверждение неверно для некоторых последовательностей.

3.6. Пусть положительная последовательность $\{x_n\}$ и число $p \in \mathbb{R}$ таковы, что $x_{n+1} \leqslant x_n^p x_{n-1}^{1-p}$ при $n = 2, 3, \ldots$ Докажите, что если $p \in (0;\ 2)$, то последовательность $\{x_n\}$ сходится, а для $p \notin (0;\ 2)$ это утверждение неверно для некоторых последовательностей.

3.7. Пусть последовательность неотрицательных чисел $\{x_n\}$ такова, что $x_n \leqslant (x_{n-1} + x_{n-2})/n^2$ для $n = 3, 4, \ldots$ Докажите, что $x_n = O(1/n!)$.

3.8. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $0 < \beta < \alpha/k$, $\{x_n\}$ — неотрицательная последовательность. Докажите, что

а) если $x_n = O\left(\frac{x_{n-1} + \ldots + x_{n-k}}{\ln^\alpha n}\right)$, то $x_n = O\left((\ln n)^{-\beta n}\right)$

б) если $x_n = O\left(\frac{x_{n-1} + \ldots + x_{n-k}}{n^\alpha}\right)$, то $x_n = O\left(n^{-\beta n}\right)$;

в) если $x_n = O\left(\frac{x_{n-1} + \ldots + x_{n-k}}{e^{\alpha n}}\right)$, то $x_n = O\left(e^{-\beta n^2/2}\right)$;

г) если $x_n = O\left(\frac{x_{n-1} + \ldots + x_{n-k}}{(n!)^\alpha}\right)$, то $x_n = O\left(n^{-\beta n^2/2}\right)$.

3.9. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $A_n \uparrow +\infty$, $n\left(1 - \frac{\ln A_{n-1}}{\ln A_n}\right) \to \theta \geqslant 0$ и $\{x_n\}$ — такая неотрицательная последовательность, что

$$x_n = O\left(\frac{1}{A_n}(x_{n-1} + \ldots + x_{n-k})\right).$$

Докажите, что $x_n = O\left(A_n^{-\beta n}\right)$, если $0 < \beta k < 1/(1+\theta)$.

3.10. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $A_n \uparrow +\infty$, $A_1 > 1$ и $\{x_n\}$ — такая неотрицательная последовательность, что $x_n \leqslant \leqslant \frac{1}{A_n}(x_{n-1} + \ldots + x_{n-k})$ при $n > k$. Докажите, что

$$x_n = O\left(e^{s_n}(A_1 \ldots A_n)^{-1/k}\right), \quad \text{где} \quad s_n = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{1}{\sqrt[k]{A_j} - 1}.$$

В частности, $x_n = O((1+\varepsilon)^n (A_1 \ldots A_n)^{-1/k})$ для любого $\varepsilon > 0$; если же ряд $\sum \frac{1}{\sqrt[k]{A_n}}$ сходится, докажите, что $x_n = = O((A_1 \ldots A_n)^{-1/k})$.

3.11. Пусть $k \in \mathbb{N}, \alpha > 0, \{x_n\}$ — неотрицательная последовательность. Докажите, что

а) если $\quad x_n \leqslant \dfrac{x_{n-1} + \ldots + x_{n-k}}{(\ln n)^\alpha}$, то $x_n = O\left(\left(\dfrac{1+\varepsilon}{\ln n}\right)^{\frac{\alpha}{k}n}\right)$ для любого $\varepsilon > 0$;

б) если $\quad x_n \leqslant \dfrac{x_{n-1} + \ldots + x_{n-k}}{n^\alpha}$, то $x_n = =O\left((n!)^{-\alpha/k} \exp\left(\dfrac{k}{\alpha - k} n^{(k-\alpha)/k}\right)\right)$ при $0 < \alpha < k$, $x_n = =O(1/(n-1)!)$ при $\alpha = k$, $x_n = O\left((n!)^{-\alpha/k}\right)$ при $\alpha > k$;

в) если $x_n \leqslant \dfrac{x_{n-1} + \ldots + x_{n-k}}{e^{\alpha n}}$, то $x_n = O\left(e^{-\frac{\alpha}{2k}n(n+1)}\right)$;

г) если $x_n \leqslant \dfrac{x_{n-1} + \ldots + x_{n-k}}{(n!)^\alpha}$, то $x_n = O\left(\left(\dfrac{e^{n/2}}{n!}\right)^{\frac{\alpha}{2k}n}\right)$.

Глава III. ФУНКЦИИ

§ 1. Непрерывность и разрывы функций

1.1. Опишите множества функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, обладающих одним из следующих свойств ($\varepsilon, \delta, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$):

а) $\forall \varepsilon \quad \exists \delta > 0 \, (|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$;

б) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta \quad (|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$;

в) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \, (x_1 - x_2 < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$;

г) $\forall\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ (|x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon)$;

д) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ (|x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|>\varepsilon)$;

е) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ (|x_1-x_2|<\varepsilon \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\delta)$;

ж) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ (|f(x_1)-f(x_2)|>\varepsilon \Rightarrow |x_1-x_2|>\delta)$;

з) $\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ (|x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon)$;

и) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ (x_1-x_2<\delta \Rightarrow f(x_1)-f(x_2)<\varepsilon)$.

1.2. Пусть функция f определена на $\mathbb{R}$. Докажите эквивалентность следующих свойств функции f:

а) функция f непрерывна на $\mathbb{R}$;

б) множество $f^{-1}(G)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)\in G\}$ открыто для любого открытого множества $G\subset\mathbb{R}$;

в) множество $f^{-1}(F)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)\in F\}$ замкнуто для любого замкнутого множества $F\subset\mathbb{R}$;

г) для любого $c\in\mathbb{R}$ открыты множества $f^{-1}((-\infty;c))$ и $f^{-1}((c;+\infty))$;

д) для любого $c\in\mathbb{R}$ замкнуты множества $f^{-1}((-\infty;c])$ и $f^{-1}([c;+\infty))$.

ж) Достаточно ли условие «для любого $c\in\mathbb{R}$ множество $f^{-1}(\{c\})$ замкнуто» для непрерывности функции f?

1.3. Докажите, что любая функция, определенная на множестве $E\subset\mathbb{R}$, имеет не более чем счетное множество точек разрыва первого рода.

1.4. Пусть $E_{\text{л}}$, $E_{\text{п}}$ — счетные множества, содержащиеся в $[0;1]$, $E_{\text{л}}\cap E_{\text{п}}=\varnothing$. Определите на $[0;1]$ функцию, которая в точках $E_{\text{л}}$ непрерывна только слева, в точках $E_{\text{п}}$ только справа и непрерывна в остальных точках отрезка $[0;1]$.

1.5. Пусть $D_{\text{л}}(f)$ $(D_{\text{п}}(f))$ — множество точек, в которых определенная на $\mathbb{R}$ функция f разрывна слева (соответственно справа). Верно ли, что если одно из этих множеств не более чем счетно, то и другое также не более чем счетно?

1.6. Пусть f_0 — функция Дирихле:

$$f_0(x)=\begin{cases}1 & \text{при } x\in\mathbb{Q},\\ 0 & \text{при } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

а) Докажите, что $f_0(x)=\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2n}(2\pi x m!)$ при любом $x\in\mathbb{R}$.

б) Существует ли такая последовательность непрерывных на $\mathbb{R}$ функций $\{f_n\}$, что $f_0(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ при любом $x\in\mathbb{R}$?

1.7. Докажите, что множество точек разрыва произвольной функции, определенной на промежутке $\Delta \subset \mathbb{R}$, есть множество типа F_σ, т. е. объединение последовательности замкнутых множеств. Верно ли это, если функция определена на произвольном метрическом пространстве?

1.8. Определите на $\mathbb{R}$ функцию с заданным множеством точек разрыва E, если:

а) E — замкнутое множество;

б) $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, где E_n — замкнутое множество для любого $n \in \mathbb{N}$.

1.9. Определите на интервале $(0; 1)$ такую функцию, что любой непустой интервал $\Delta \subset (0; 1)$ содержит континуум ее точек непрерывности и точек разрыва.

1.10. Докажите, что функция f, определенная на промежутке $\langle a; b\rangle$, непрерывна тогда и только тогда, когда

а) функция f обладает свойством Коши (т. е. образ каждого промежутка $\langle p; q\rangle \subset \langle a; b\rangle$ является промежутком) и

б) множество $f^{-1}(\{y\})$ замкнуто для любого $y \in \mathbb{R}$.

1.11. Докажите, что определенная на отрезке $[a; b]$ функция непрерывна тогда и только тогда, когда ее график связен и замкнут.

1.12. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, функция f определена на E и имеет в каждой неизолированной точке множества E локальный экстремум. Докажите, что тогда множество $f(E)$ не более чем счетно. Верно ли это, если E — сепарабельное метрическое пространство? произвольное метрическое пространство?

1.13. Опишите все непрерывные на отрезке $[a; b]$ функции, имеющие в каждой точке интервала $(a; b)$ локальный экстремум.

1.14. Пусть функция f определена и взаимно однозначна на промежутке $(a; b)$ и непрерывна в точке $c \in (a; b)$.

а) Обязательно ли функция f^{-1} непрерывна в точке $f(c)$? Всегда ли f^{-1} имеет односторонние пределы в точке $f(c)$?

б) Будет ли функция f^{-1} непрерывна в точке $f(c)$ при условии, что f строго монотонна?

1.15. Пусть $f \in C(\langle a; b\rangle)$. Докажите, что функция f взаимно однозначна тогда и только тогда, когда она строго монотонна.

1.16. Пусть положительная функция f определена и дифференцируема на промежутке $[a;\ +\infty)$. Докажите, что если $\inf\limits_{x\geqslant a} f'(x)/f(x) > 0$, то

а) $f(x) = o(f((1+\delta)x))$ при $x \to +\infty$ для любого $\delta > 0$;

б) $f^{-1}(z) \sim f^{-1}(\varepsilon z)$ при $z \to +\infty$ для любого $\varepsilon > 0$.

1.17. Докажите, что если $f \in C([0;\ +\infty))$ и для любого $x \geqslant 0$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(nx)$, то существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Докажите это, если предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(nx)$ существует лишь для точек x из некоторого непустого замкнутого множества без изолированных точек.

1.18. Определите на $[0;\ +\infty)$ функцию f, удовлетворяющую условиям:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} f(nx) = 0$ для любого $x \in [0;\ +\infty)$;

б) f ограничена на любом конечном промежутке и имеет разрывы только первого рода;

в) множество частичных пределов функции f на бесконечности заполняет $\mathbb{R}$ (ср. с задачей 1.17).

1.19. Определите на $[0;\ +\infty)$ функцию, удовлетворяющую условиям:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} f(nx) = 0$ для любого $x \in [0;\ +\infty)$;

б) множество значений f на любом непустом интервале $\Delta \subset [0;\ +\infty)$ заполняет $\mathbb{R}$ (ср. с задачей 1.17).

1.20. Докажите, что если $f \in C([0;\ +\infty))$ и $f(x+h) - f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ для любого $h \in \mathbb{R}$, то $f(x+h) - f(x) \rightrightarrows 0$ при $x \to +\infty$ на любом конечном промежутке, и, следовательно, функция f равномерно непрерывна на $[0;\ +\infty)$.

1.21. Пусть $\delta > 0$, $f \in C([0;\ 1])$. Будем говорить, что график f имеет горизонтальную хорду длиной δ, если найдется такая точка $x \in [0;\ 1-\delta]$, что $f(x) = f(x+\delta)$. Докажите, что если $f(0) = f(1)$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется горизонтальная хорда длиной $1/n$. Покажите, что для хорд другой длины это, вообще говоря, неверно.

1.22. Докажите, что если $f \in C(\mathbb{R})$ и $f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) \to 0$ при $h \to +\infty$ для любого $x \in \mathbb{R}$, то f — линейная функция.

1.23. Будем говорить, что функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна по Чезаро, если из условия

$$\frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n) \to x_0$$

следует, что

$$\frac{1}{n}(f(x_1)+\ldots+f(x_n))\to f(x_0).$$

Опишите все функции, непрерывные по Чезаро.

1.24. Пусть $f(x)=\prod\limits_{k\geqslant 0}(1+x^{4^k})$ при $0\leqslant x<1$. Докажите, что:

а) существуют такие $C_1>0$, $C_2>0$, что $C_1\leqslant \leqslant\sqrt{1-x}f(x)\leqslant C_2$ для всех $x\in[0;\ 1)$;

б) функция $\sqrt{1-x}f(x)$ не монотонна на промежутке $[0;\ 1)$;

в) функция $\sqrt{1-x}f(x)$ не имеет предела при $x\to \to 1-0$.

1.25. Существует ли непрерывная на промежутке $[0;\ 1]$ функция, у которой все множества постоянства счетны (равномощны $\mathbb{N}$)?

1.26. Пусть функция f определена и раздельно непрерывна на квадрате $Q=[0;\ 1]\times[0;\ 1]$. Докажите, что найдется такая последовательность $\{f_n\}$ функций, непрерывных на Q, что $f_n(x;\ y)\to f(x;\ y)$ при любых $x,\ y\in[0;\ 1]$ (т. е. f — функция первого класса Бэра на Q).

1.27. Пусть функция f определена и раздельно непрерывна на $\mathbb{R}^2$. Докажите, что если f обращается в нуль на всюду плотном в $\mathbb{R}^2$ множестве (т. е. множестве, замыкание которого совпадает с $\mathbb{R}^2$), то $f\equiv 0$.

§ 2. Полунепрерывные функции

Пусть $\Delta\subset\mathbb{R}$ — произвольный промежуток. Функция f, определенная на Δ и принимающая, может быть, значение $-\infty$ $(+\infty)$, называется *полунепрерывной снизу* (*сверху*), если

$$f(a)\leqslant\varliminf_{x\to a}f(x)\quad\left(f(a)\geqslant\varlimsup_{x\to a}f(x)\right)$$

для любой точки $a\in\Delta$.

2.1. Пусть функция f определена на $\mathbb{R}$. Докажите, что следующие свойства функции f эквивалентны (сравните с задачей 1.2):

а) функция f полунепрерывна снизу;

б) множество $f^{-1}((c;\ +\infty))$ открыто для любого $c\in\mathbb{R}$;

в) множество $f^{-1}((-\infty;\ c])$ замкнуто для любого $c\in\mathbb{R}$;

г) если $x_n \to a$, то $f(a) \leqslant \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} f(x_n)$;

д) для любой точки $a \in \mathbb{R}$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность V точки a, что $f(x) \geqslant f(a) - \varepsilon$ при $x \in V$.

2.2. Докажите, что

а) характеристическая функция множества $E \subset \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу тогда и только тогда, когда множество E открыто;

б) функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определяемая равенством

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \\ 1/n, & \text{если } x = m/n, \text{ где } n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z} \text{ и } m/n \text{ —} \\ & \qquad\qquad\qquad \text{несократимая дробь,} \end{cases}$$

полунепрерывна сверху.

2.3. Докажите, что если функция полунепрерывна снизу на отрезке $[a;\ b]$ и принимает лишь конечные значения, то она достигает наименьшего значения на $[a;\ b]$ (и, следовательно, ограничена снизу). Верно ли, что она ограничена сверху?

2.4. Пусть g — произвольная функция, определенная на промежутке $\Delta \subset \mathbb{R}$, $f(x) = \varliminf\limits_{y \to x} g(y)$, $(x \in \Delta)$. Докажите, что функция f полунепрерывна снизу.

2.5. Пусть $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство полунепрерывных снизу функций, определенных на промежутке $\Delta \subset \mathbb{R}$, и пусть $f(x) = \sup\limits_{\alpha \in A} f_\alpha(x) < +\infty$ для любого $x \in \Delta$. Докажите, что функция f полунепрерывна снизу. Верно ли это для функции $h = \inf\limits_{\alpha \in A} f_\alpha$? Будет ли функция h полунепрерывна снизу, если семейство $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ конечно? счетно?

2.6. Докажите, что функция $f\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу, если и только если

$$f = \sup \{g \mid g \in C([a;\ b]),\ g \leqslant f\}.$$

§ 3. Непрерывные и дифференцируемые функции

3.1. Пусть

$$\Delta_h^1 f(x) = \Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x),\quad \Delta_h^{m+1} f(x) = \Delta_h\left(\Delta_h^m f(x)\right).$$

Докажите, что функция $f \in C(\mathbb{R})$ является полиномом степени не выше m тогда и только тогда, когда $\Delta_h^{m+1} f(x) = 0$ при любых $x, h \in \mathbb{R}$.

3.2. Пусть $f \in C^1([0;\ +\infty))$. Докажите, что $f'(x) + f(x) \to L \in \mathbb{R}$ при $x \to +\infty$ тогда и только тогда, когда $f(x) \underset{x \to +\infty}{\to} L$ и f' равномерно непрерывна на $[0;\ +\infty)$.

3.3. Пусть функция f дифференцируема на отрезке $[a;\ b]$. Докажите, что если $f'(a)f'(b) < 0$, то существует такая точка $c \in (a;\ b)$, что $f'(c) = 0$.

3.4. Пусть функция f диффренцируема на $[a;\ b]$. Докажите, что если множество

$$(f')^{-1}(x) = \{y \in [a;\ b] \mid f'(y) = x\}$$

замкнуто при любом $x \in \mathbb{R}$, то $f \in C^1([a;\ b])$.

3.5. Пусть функция f определена на промежутке $[a;\ b]$. Докажите, что $f \in C^1([a;\ b])$ тогда и только тогда, когда отношение $\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x))$ стремится при $h \to 0$ к конечному пределу равномерно на $[a;\ b]$.

3.6. Пусть $f \in C((a;\ b))$ и для любого $x \in (a;\ b)$ существует конечный предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{2h}(f(x+h) - f(x-h)) = g(x).$$

а) Докажите, что если $g \geqslant 0$ на $(a;\ b)$, то функция f возрастает, а если $g \equiv 0$, то функция f постоянна.

б) Докажите, что если $g \in C((a;\ b))$, то $f \in C^1((a;\ b))$.

3.7. Пусть функции f, g определены на интервале $(a;\ b)$ и удовлетворяют условию: для любой точки $x \in (a;\ b)$ существует такое положительное число $\delta_x > 0$, что $f(x+h) - f(x-h) = 2hg(x)$ при $0 < h < \delta_x$. Докажите, что если функция f дифференцируема, то она является многочленом не выше второй степени. Верно ли это, если функция f непрерывна? Если обе функции f, g непрерывны на $(a;\ b)$?

3.8. Пусть $F \subset \mathbb{R}$ — замкнутое множество без внутренних точек. Докажите, что существует такая строго возрастающая функция $f \in C^1(\mathbb{R})$, что $f'(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in F$.

3.9. Пусть $f \in C([0;\ 1])$. Эквивалентны ли утверждения:

а) функция f постоянна на $[0;\ 1]$;

б) $\forall x \in (0;1)\, \exists \{x_n\}$: $x_n \to x$, $x_n > x$, $\dfrac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \to 0$;

в) $\forall x \in (0;1)\, \exists \{x_n\}$: $x_n \to x$, $x_n \neq x$, $\dfrac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \to 0$.

Пусть функция f определена на промежутке $\langle a; b\rangle \subset \mathbb{R}$. *Вариацией* $\operatorname*{Var}\limits_a^b(f)$ функции f на $\langle a; b\rangle$ называется наименьшая верхняя граница всевозможных сумм $\sum\limits_{1 \leqslant k < n} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$, где $x_k < x_{k+1}$, $x_k \in \langle a; b\rangle$, $k = 1, \ldots, n$. Функция f называется *функцией ограниченной вариации на* $\langle a; b\rangle$, если $\operatorname*{Var}\limits_a^b(f) < +\infty$. Символом $V(\langle a; b\rangle)$ будем обозначать множество всех функций, имеющих ограниченную вариацию на $\langle a; b\rangle$.

3.10. Пусть $f \in V([a; b])$, $g(x) = \operatorname*{Var}\limits_a^x(f)$ $(x \in (a; b])$, $g(a) = 0$. Докажите, что если функция f непрерывна в точке $c \in [a; b]$, то и функция g непрерывна в этой точке.

3.11. Пусть $f \in C^1([a; b])$. Докажите, что $\operatorname*{Var}\limits_a^b(f) = \int\limits_a^b |f'(x)|\,dx$.

3.12. Пусть $1 < \alpha < 2$, $f(x) = x^2 \cos(x^{-\alpha})$ при $0 < x \leqslant 1$, $f(0) = 0$. Докажите, что $f \in V([0; 1])$, f дифференцируема на $[0; 1]$, но функция $g(x) = \operatorname*{Var}\limits_a^x(f)$ не дифференцируема в нуле. Существует ли $g'(0)$ при $\alpha = 1$?

3.13. Пусть $\alpha, \beta > 0$, $f(x) = x^\alpha \cos(x^{-\beta})$ при $0 < x \leqslant 1$, $f(0) = 0$. Докажите, что

а) $f \in V([0; 1])$, если и только если $\alpha > \beta$;

б) $f \in \mathrm{Lip}_1([0; 1])$, если и только если $\alpha \geqslant \beta + 1$;

в) если $\alpha < \beta + 1$, то $f \in \mathrm{Lip}_\gamma([0; 1])$, где $\gamma = \alpha/(\beta + 1)$.

3.14. Пусть $0 < \gamma < 1$. Постройте функцию $f \in \mathrm{Lip}_\gamma([0; 1])$, не имеющую ограниченной вариации ни на каком невырожденном промежутке $\Delta \subset [0; 1]$.

3.15. Укажите такие функции $f, g \in C([0; 1])$, что

а) $f \in V([0; 1])$ и $f \notin \mathrm{Lip}_\alpha([0; 1])$ при любом $\alpha > 0$;

б) $g \notin V([0; 1])$ и $g \in \mathrm{Lip}_\alpha([0; 1])$ при любом $\alpha < 1$.

3.16. Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и 2π-периодична,

$$\varphi(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-t)}{\sqrt{|t|}}\,dt \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Докажите, что $\varphi \in \mathrm{Lip}_{1/2}$, точнее, что

$$|\varphi(u)-\varphi(v)| \leqslant 8|u-v|^{1/2} \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

Пусть при $x \in [0;\ 1]$

$$f(x) = \sup\left\{\sum_{k\geqslant 1} \frac{\varepsilon_k}{2^k} \,\middle|\, \sum \frac{2\varepsilon_k}{3^k} \leqslant x,\ \varepsilon_k = 0 \text{ или } 1\right\}.$$

График функции f изображен на рис. 2. Функцию f называют *канторовой функцией* (а ее график — «канторовой лестницей»).

3.17. Докажите, что

а) если $x = \sum\limits_{k\geqslant 1} 2\dfrac{\varepsilon_k}{3^k}$, где $\varepsilon_k = 0$ или 1, то $f(x) = \sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{\varepsilon_k}{2^k}$;

б) $f \in C([0;\ 1])$;

в) на средней трети каждого промежутка $\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}$, определенного при построении канторова множества (см. § I.1), функция f постоянна и принимает значение

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{\varepsilon_k}{2^k} + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

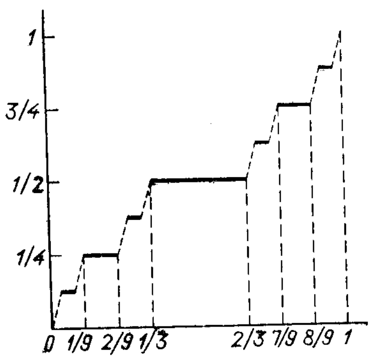

Рис. 2

3.18. Найдите длину графика канторовой функции.

3.19. При каких $\alpha > 0$ канторова функция входит в класс $\mathrm{Lip}_\alpha([0;\ 1])$?

3.20. Пусть K — обобщенное канторово множество, $\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}$ — сегменты n-го ранга, участвующие в определении множества K (см. определение обобщенного канторова множества в задаче I.1.31). Пусть, далее, $a = \inf K$, $b = \sup K$, $\delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}$ — интервалы, удаляемые из сегментов $\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}$ при построении сегментов $(n+1)$-го ранга. Определим на $[a;\ b]$ функцию φ следующим образом:

$$\varphi(a) = 0,\ \varphi(x) = 1/2, \text{ если } x \in [a;\ b] \setminus (\Delta_0 \cup \Delta_1);$$

$$\varphi(x) = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{\varepsilon_k}{2^k} + \frac{1}{2^{n+1}}, \text{ если } x \in \delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n};$$

$$\varphi(x) = \sup\{\varphi(t) \mid a < t < x,\ t \notin K\}, \text{ если } x \in K,\ a < x.$$

Функцию φ будем называть канторовой функцией, соответствующей множеству K.

а) Докажите, что функция φ возрастает и непрерывна на $[a; b]$.

б) Докажите, что для любой точки $x_0 \in K$ и любого числа $h > 0$ справедливо неравенство

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0 - h) > 0$$

(функция φ возрастает в любой точке множества K).

3.21. Пусть $F \subset \mathbb{R}$ — замкнутое множество без изолированных точек. Докажите, что существует такая функция $f \in C(\mathbb{R})$, что

а) $f'(x) = 0$ при любом $x \in \mathbb{R} \setminus F$;

б) $f(x+h) - f(x-h) > 0$ при любом $x \in F$ и любом $h > 0$.

Говорят, что функция f, определенная на промежутке Δ, содержащем точку c, принадлежит классу $\mathrm{Lip}(\alpha; c)$ $(\alpha > 0)$, если существуют такие положительные числа L и δ, что $|f(x) - f(c)| \leqslant L|x-c|^\alpha$ для любой точки x из пересечения $\Delta \cap (c - \delta; c + \delta)$.

3.22. Пусть $\alpha > 0$, $f \in C^1(\Delta)$, $N_0 = \{x \in \Delta \mid f'(x) = 0\}$ — множество критических точек функции f. Докажите, что

а) если $f' \in \mathrm{Lip}(\alpha; c)$ для любой точки $c \in \Delta$, то

$$N_0 = \{x \in \Delta \mid f \in \mathrm{Lip}(1 + \alpha;\ x)\};$$

б) если функция f дважды дифференцируема на Δ, то

$$N_0 = \{x \in \Delta \mid f \in \mathrm{Lip}(2;\ x)\}.$$

§ 4. Непрерывные отображения

4.1. Пусть $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m$ $(z \in \mathbb{C})$. Докажите, что образ $P(F)$ любого замкнутого множества $F \subset \mathbb{C}$ снова есть замкнутое множество. Верно ли это для произвольного многочлена от двух переменных?

4.2. Пусть

$$\Gamma_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1,\ z \neq -1\};\quad \varphi(z) = \operatorname{Im} z/(1 + \operatorname{Re} z).$$

Докажите, что φ есть взаимно однозначное отображение Γ_0 на $\mathbb{R}$. Найдите φ^{-1}.

4.3. Существует ли разбиение отрезка $[0; 1]$ на два непересекающихся множества A и B, каждое из которых можно отобразить на другое взаимно однозначно и взаимно непрерывно (гомеоморфно)?

4.4. Определим на отрезке $[0;\ 1]$ функции φ и ψ следующим образом. Пусть $t \in [0; 1], t = \sum 3^{-k}\alpha_k$, где $\alpha_k = 0,\ 1,\ 2$. Тогда $\varphi(t) = \sum 3^{-k}\beta_k$, где $\beta_1 = \alpha_1$; $\beta_2 = \alpha_2$, если α_2 — четное число, $\beta_2 = 2 - \alpha_3$, если α_2 — нечетное число; $\beta_n = \alpha_{2n-1}$, если $\alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2n-2}$ — четное число, и $\beta_n = 2 - \alpha_{2n-1}$, если $\alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2n-2}$ — нечетное число $(n \geqslant 2)$. Аналогично $\psi(t) = \sum 3^{-k}\gamma_k$, где $\gamma_1 = \alpha_2$, если α_1 — четное число, и $\gamma_1 = 2 - \alpha_2$, если α_1 — нечетное число; $\gamma_n = \alpha_{2n}$, если $\alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2n-1}$ — четное число, и $\gamma_n = 2 - \alpha_{2n}$, если $\alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2n-1}$ — нечетное число $(n \geqslant 1)$.

а) Докажите, что функции φ и ψ корректно определены и непрерывны.

б) Пусть f: $[0; 1] \to \mathbb{R}^2$ — отображение с координатными функциями φ и ψ $(f(t) = (\varphi(t);\ \psi(t))$ при $t \in [0;\ 1])$. Докажите, что f отображает отрезок $[0;\ 1]$ на квадрат $[0;\ 1] \times [0;\ 1]$. Схематически отображение f описано на рис. 3. Каждый из отрезков Δ_k, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 9$,

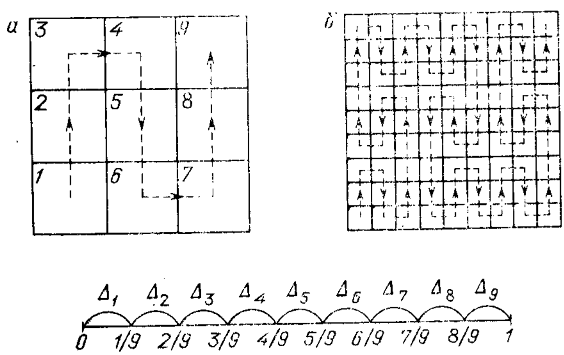

Рис. 3

отображается на квадрат с тем же номером (рис. 3, *а*). На рисунке 3, *б* показан обход единичного квадрата при разбиении отрезка на 9^2 частей.

в) Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} \varphi(t) = \xi, \\ \psi(t) = \eta \end{cases}$$

имеет не более четырех решений при любых $\xi,\ \eta \in [0;\ 1]$.

Укажите ξ, η, для которых эта система имеет четыре решения.

г) Докажите, что множества постоянства функций φ и ψ (т. е. множества $\varphi^{-1}(\{c\})$ и $\psi^{-1}(\{c\})$, $c \in \mathbb{R}$) не имеют изолированных точек.

д) Докажите, что $\varphi, \psi \in \mathrm{Lip}_{1/2}([0;\ 1])$, но $\varphi, \psi \notin \mathrm{Lip}_\alpha([0;\ 1])$, если $\alpha > 1/2$.

4.5. Непрерывное отображение отрезка на квадрат называется кривой Пеано. Пусть u и v — координатные функции произвольной кривой Пеано, заданной на отрезке $[0;\ 1]$. Докажите, что если $u, v \in \mathrm{Lip}_\alpha([0;\ 1])$, то $\alpha \leqslant 1/2$. (Таким образом, гладкость координатных функций кривой Пеано, построенной в предыдущей задаче,— наилучшая из возможных.)

4.6. Докажите, что любые два обобщенных канторовых множества гомеоморфны, т. е. между ними можно установить взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие.

§ 5. Функциональные уравнения

5.1. Опишите все функции $f \in C(X)$, удовлетворяющие уравнению $f(2x) = f(x)$ при любом $x \in X$, в следующих случаях:

а) $X = \mathbb{R}$; б) $X = (0;\ +\infty)$.

5.2. Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Докажите, что:

а) $f(rx) = rf(x)$ $(r \in \mathbb{Q},\ x \in \mathbb{R})$;

б) если функция f ограничена сверху на некотором непустом интервале, то она линейна, т. е. $f(x) = ax$ $(x \in \mathbb{R})$, где $a = f(1)$;

в) если функция f разрывна хотя бы в одной точке, то ее график есть плотное в $\mathbb{R}^2$ множество.

5.3. Опишите все монотонные функции $f\colon (0;\ +\infty) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнению $f(xy) = f(x) + f(y)$ $(x,\ y > 0)$.

5.4. Опишите все функции $f \in C(\mathbb{R})$, удовлетворяющие уравнению

$$f(xy) = xf(y) + yf(x)$$

при любых $x, y \in \mathbb{R}$.

5.5. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющие системе уравнений

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \quad f(xy)=f(x)f(y)$$

при $x, y\in\mathbb{R}$.

5.6. Пусть $n\in\mathbb{N}, n>1$. Опишите все такие функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, что $f(x+y^n)=f(x)+(f(y))^n$ при любых $x, y\in\mathbb{R}$.

5.7. Пусть функция $f\in C(\mathbb{R})$ при некотором $\sigma>0$ удовлетворяет условию

$$|f(x)+f(y)-f(x+y)|\leqslant\sigma$$

при любых $x, y\in\mathbb{R}$. Докажите, что f представима в виде суммы линейной функции и функции, не превосходящей σ по абсолютной величине.

5.8. Пусть функция $f\in C(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию

$$f(x)+f(y)=f(\sqrt{x^2+y^2})$$

при любых $x, y\in\mathbb{R}$. Докажите, что $f(x)=ax^2$ при любом $x\in\mathbb{R}$, где $a=f(1)$.

5.9. Пусть функция $f\in C(\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям $f\neq 0$, $f(x)f(y)=f(\sqrt{x^2+y^2})$ при любых $x, y\in\mathbb{R}$. Докажите, что $f(x)=e^{ax^2}$ при любом $x\in\mathbb{R}$ (a — фиксированное число).

5.10. Пусть $a>b>0$. Опишите все такие функции $f\in C((0;\ +\infty))$, что разность $f(ax)-f(bx)$ не зависит от $x\in(0;\ +\infty)$.

5.11. а) Опишите все функции $\varphi\in C((0;\ 1])$, удовлетворяющие условию $\varphi(x^2)=2\varphi(x)$ при $0<x\leqslant 1$.

б) Опишите все неубывающие функции $f\in C((0;1))$, удовлетворяющие условию $f(x^2)=(f(x))^2$ при $0<x<1$.

5.12. Найдите такую непрерывную строго возрастающую функцию $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, что $f(x^2)=(f(x))^4$ при любом $x\in\mathbb{R}$.

5.13. Пусть $\overline{B}=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\leqslant 1\}$. Найдите все непрерывные взаимно однозначные отображения f круга $\overline{B}$ на себя, удовлетворяющие условию $f(z^2)=(f(z))^2$ для всех $z\in\overline{B}$.

5.14. Докажите, что существует единственная монотонная функция $f\colon [0;1]\to\mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям

$$f(x)=2f(x/3) \quad \text{и} \quad f(x)+f(1-x)=1$$

при любом $x\in[0;\ 1]$.

5.15. Найдите все функции $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющие условиям

$$f(x;\ y) = f(y;\ x)$$

и

$$f(x; y) + f(y; z) + f(z; x) = 3f\left(\frac{x+y+z}{3}; \frac{x+y+z}{3}\right)$$

при любых $x, y, z \in \mathbb{R}$.

5.16. Для каких непрерывных функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ найдется такая функция $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, что $f(xy) = g(x;\ f(y))$ $(x, y \in \mathbb{R})$?

Пусть G и G' — произвольные группы (с мультипликативной записью групповой операции). Отображение $\varphi\colon G \to G'$ называется *гомоморфизмом*, если оно сохраняет групповую операцию, т. е. если $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ для любых $x, y \in G$. Если S^1 — группа комплексных чисел, равных по модулю единице, то гомоморфизм группы G в группу S^1 называется *характером* группы G.

5.17. Найдите общий вид характеров в группах: а) $\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; в) $\mathbb{Z}_m$ (группа вычетов по модулю m).

5.18. Найдите общий вид непрерывных характеров в группах (аддитивных): а) $\mathbb{R}$; б) $\mathbb{R}^n$; в) $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$; г) $\mathbb{C}$ и группах (мультипликативных); д) S^1; е) $\mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$; ж) $\dot{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

5.19. Опишите все непрерывные гомоморфизмы φ группы G в группу G' в следующих случаях (используются обозначения, введенные в предыдущей задаче):

а) $G = \mathbb{R}$, $G' = \mathbb{R}$; б) $G = \mathbb{R}$, $G' = \mathbb{R}_+$;

в) $G = \mathbb{R}_+$, $G' = \mathbb{R}$; г) $G = \mathbb{R}_+$, $G' = \mathbb{R}_+$;

д) $G = \mathbb{R}$, $G' = S^1$; е) $G = \dot{\mathbb{C}}$, $G' = \dot{\mathbb{C}}$.

Глава IV. РЯДЫ

§ 1. Сходимость

1.1. Сходится ли ряд*) $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$, где $\varepsilon_n = 0$, если в десятичной записи числа n имеется цифра 9, и $\varepsilon_n = 1$ в противном случае?

---

*) Напомним, что $\sum a_n$ — обозначение для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

1.2. Сходятся ли ряды:

а) $\sum \frac{|\cos 2^n|}{n}$; б) $\sum \frac{|\sin(n+\ln n)|}{n}$; в) $\sum \frac{|\sin n^2|}{n}$?

1.3. Докажите, что ряд $\sum \frac{\cos(b \ln n)}{n^a}$ сходится лишь при $a>1$.

1.4. При каких $p>0$ сходятся ряды

а) $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{(\ln n)^{-2p}}{n^p+p^{-\sqrt[p]{\ln n}}}$; б) $\sum \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$; в) $\sum \arccos^p \frac{\nu(n)}{\nu(n+1)}$,

где $\nu(n)$ — число цифр в десятичной записи числа n?

1.5. Сходятся ли ряды

а) $\sum \frac{\tau(n)}{n^2}$; б) $\sum \frac{1}{p_n}$; в) $\sum \frac{\varphi(n)}{n^2}$; г) $\sum \frac{1}{np_n-(n-1)p_{n-1}}$?

Здесь $\tau(n)$ — число делителей числа n, p_n — n-е простое число, $\varphi(n)$ — число взаимно простых с n чисел, меньших n.

1.6. Докажите, что при $a>1$ ряд

$$\sum \frac{1}{n^a} \frac{1}{|\sin(\pi\sqrt{2}n)|}$$

сходится.

1.7. Сходятся ли двойные ряды:

а) $\sum\limits_{n,m\geqslant 1} \frac{1}{n^2+m^2}$; б) $\sum\limits_{n,m\geqslant 1} \frac{\min(n;m)}{n^3+m^3}$;

в) $\sum\limits_{n,m\geqslant 1} \frac{\max(n;m)}{n^4+m^4}$; г) $\sum\limits_{n,m\geqslant 1} \frac{nm}{n^5+m^5}$;

д) $\sum\limits_{n,m\geqslant 1} \frac{\varepsilon(n;m)}{n^2+m^2}$; е) $\sum\limits_{n,m\geqslant 1} \frac{\text{НОД}(n;m)}{n^3+m^3}$;

ж) $\sum\limits_{n,m\geqslant 1} \frac{\text{НОК}(n;m)}{n^4+m^4}$; з) $\sum\limits_{n,m\geqslant 1} \frac{1}{(\text{НОК}(n;m))^p}$, $p>1$?

Здесь НОК$(n;\ m)$ — наименьшее общее кратное чисел n и m; НОД$(n;\ m)$ — наибольший общий делитель чисел n и m; $\varepsilon(n;\ m)=1$, если числа n и m взаимно просты, $\varepsilon(n;\ m)=0$ в противном случае.

1.8. Проверьте, что сумма ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-$$
$$-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\ldots$$

(группа членов $\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^n}$ повторяется 2^n раз) равна 1. Укажите перестановку, после которой сумма ряда станет равной -1.

§ 2. Свойства числовых рядов, связанные с монотонностью

2.1. Пусть $a_n>0$, $a_n\uparrow$. Докажите, что сходимость ряда $\sum \arccos^2(a_n/a_{n+1})$ равносильна ограниченности последовательности $\{a_n\}$.

2.2. Пусть $a_n\downarrow 0$. Докажите, что

а) ряды $\sum a_n$ и $\sum 2^n a_{2^n}$ сходятся или расходятся одновременно;

б) если $\sum a_n=+\infty$, то $\sum \min(a_n;1/n)=+\infty$;

в) если $\sum a_n/n=+\infty$, то $\sum (1/n)\min(a_n;1/\ln n)=+\infty$

В решении многих последующих задач используется преобразование Абеля для рядов: если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ таковы, что последовательность $\{a_nB_n\}$ сходится (здесь $B_n=b_1+\ldots+b_n$), то ряды $\sum a_nb_n$ и $\sum (a_n-a_{n+1})B_n$ сходятся или расходятся одновременно. В случае, когда ряд $\sum b_n$ сходится, может оказаться полезным другой вариант этого утверждения: если последовательность $\{a_n\beta_n\}$ сходится (здесь $\beta_n=b_n+b_{n+1}+\ldots$), то ряды $\sum a_nb_n$ и $\sum (a_n-a_{n+1})\beta_{n+1}$ сходятся или расходятся одновременно. Доказательства этих утверждений легко получить, применяя преобразование Абеля (см. гл. I, § 2) к суммам $\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant N} a_nb_n$. Преобразование Абеля особенно удобно применять в случае монотонной последовательности $\{a_n\}$.

2.3. Пусть $a_n\downarrow 0$. Докажите, что $\sum a_n<+\infty$ тогда и только тогда, когда $a_n=o(1/n)$ и $\sum (a_n-a_{n+1})n<+\infty$.

2.4. Пусть $a_n\downarrow 0$. Докажите, что $\sum (a_n/n)<+\infty$ тогда и только тогда, когда $a_n=o(1/\ln n)$ и $\sum (a_n-a_{n+1})\ln n<+\infty$.

2.5. Пусть $p>1$ и $a_n\downarrow 0$. Докажите, что из сходимости ряда $\sum \frac{a_n^{p-1}}{n^{1/p}}$ вытекает сходимость ряда $\sum a_n^p$. Существенна ли монотонность?

2.6. Пусть $a_n \downarrow 0$. Докажите, что

а) если ряд $\sum a_n x_n$ сходится, то $a_n \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k = o(1)$;

б) если $a_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то существует такая неотрицательная последовательность $\{x_n\}$, что $a_n \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k = o(1)$ и $\sum a_n x_n = +\infty$.

Существенна ли монотонность $\{a_n\}$ в утверждениях а) и б)?

2.7. Пусть $a_n \downarrow 0$ и ряд $\sum x_n$ сходится. Докажите, что ряд $\sum a_n x_n$ сходится и $\sum\limits_{k \geqslant n} a_k x_k = o(a_n)$.

2.8. Пусть $p > 0$, $q, Q \in \mathbb{N}$, $Q > 1$. Пусть $\{a_n\}$ — неотрицательная последовательность и $A_n = a_1 + \ldots + a_n$. Докажите эквивалентность следующих утверждений:

а) $\sum \dfrac{a_n}{n^p} < +\infty$; б) $\sum \dfrac{A_{n^q}}{n^{1+pq}} < +\infty$;

в) $\sum \dfrac{A_{Q^n}}{Q^{pn}} < +\infty$.

2.9. Докажите, что ряд $\sum \dfrac{x_n}{n^{1+\varepsilon}}$ сходится, если $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{x_n\}$ такова, что $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k \to 0$. Всегда ли сходимость абсолютная? Всегда ли сходится ряд $\sum (x_n/n)$?

2.10. Пусть $a_n \downarrow 0$, $b_n \downarrow 0$ и $\sum a_n = \sum b_n = +\infty$. Всегда ли расходится ряд $\sum \min(a_n; b_n)$?

2.11. Пусть $a_n \geqslant 0$ и $S_n = a_1 + \ldots + a_n$, $S_n \to \infty$. Докажите, что

а) $\sum \dfrac{a_n}{S_n} = +\infty$; б) $\sum \dfrac{a_n}{S_n^{1+\varepsilon}} < +\infty$ при любом $\varepsilon > 0$.

2.12. Пусть $a_n \geqslant 0, \sum a_n < +\infty$ и $\alpha_n = \sum\limits_{k \geqslant n} a_k$. Докажите, что

а) $\sum \dfrac{a_n}{\alpha_n} = +\infty$; б) $\sum \dfrac{a_n}{\alpha_n^{1-\varepsilon}} < +\infty$ при $\varepsilon > 0$;

в) $\sum \dfrac{a_n}{e^{\alpha_n}} < 1$.

г) Всегда ли $\sum \dfrac{a_n}{\sqrt{\alpha_{n+1}}} < +\infty$?

2.13. Пусть $p \geqslant 1$, $a_n \geqslant 0$ и $r_n = \sum\limits_{k \geqslant n} a_k^p < +\infty$. Докажите, что

а) $\sum a_n \leqslant 4 \sum \sqrt[p]{r_n/n}$;

б) если $r_n = O(n^{-\alpha})$ для некоторого $\alpha > 0$, то

$$\sum_{k \geqslant n} a_k^q = O\left(n^{1 - \frac{\alpha+1}{p} q}\right)$$

для любого $q > p/(\alpha + 1)$.

2.14. Пусть $\{a_n\}$ — положительная монотонная последовательность, $a_n \neq 1$ для всех номеров n и $a_n \to a < +\infty$. Докажите, что ряд

$$\sum \frac{1}{n} \frac{\frac{a_{n-1}}{a_n} - 1}{1 - \sqrt[n]{a_n}}$$

расходится, если $a = 0$ или $a = 1$, и сходится в остальных случаях. Что будет при $a = +\infty$?

2.15. Пусть f — положительная возрастающая на промежутке $[1; +\infty)$ функция и $f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Докажите, что ряды

$$\sum \frac{1}{f(n)} \quad \text{и} \quad \sum \frac{1}{n^2} f^{-1}(n)$$

сходятся одновременно (f^{-1} — обратная к f функция).

2.16. Пусть функция f убывает к нулю на промежутке $[0; +\infty)$; последовательность $\{a_n\}$ неотрицательна и ограничена, $\sum a_n = +\infty$. Докажите, что ряды $\sum f(n)$ и $\sum a_n f(a_1 + \ldots + a_n)$ сходятся или расходятся одновременно.

2.17. Пусть $a_n \downarrow 0$ и $\sum a_n = A$. Для произвольного множества $\nu \subset \mathbb{N}$ суммой частичного ряда, соответствующего ν, будем называть величину $A(\nu) = \sum\limits_{n \in \nu} a_n$ (по определению $A(\varnothing) = 0$). Докажите эквивалентность следующих утверждений:

а) суммы всех частичных рядов заполняют промежуток $[0; A]$;

б) $a_n \leqslant a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ для всех номеров n.

2.18. Существует ли такой ряд $\sum a_n$, что $a_n \downarrow 0$ и суммы всех его частичных рядов (см. 2.17) заполняют канторово множество?

2.19. Пусть $a_n \downarrow 0$ и $\sum a_n = +\infty$. Докажите, что существует такая последовательность номеров $\{n_k\}$, что $n_k < n_{k+1}$, $a_{n_k} < 1/k$ и $\sum a_{n_k} = +\infty$. Можно ли отказаться от монотонности $\{a_n\}$?

2.20. а) Докажите, что если ряд $\sum a_n$ сходится, то найдется такая последовательность $\lambda_n \uparrow +\infty$, что ряд $\sum a_n\lambda_n$ сходится.

б) Пусть ряд $\sum a_n$ расходится, $\lambda_n \to +\infty$. Всегда ли будет расходиться ряд $\sum \lambda_n a_n$? Что будет, если $\lambda_n \uparrow +\infty$?

2.21. Пусть $\{t_n\}$ — последовательность положительных чисел.

а) Докажите, что ряд $\sum \frac{1}{n}\frac{1+t_{n+1}}{t_n}$ расходится.

б) Верно ли, что ряд $\sum a_n \frac{1+t_{n+1}}{t_n}$ расходится, если $a_n \downarrow 0$ и $\sum a_n = +\infty$?

§ 3. Различные утверждения о рядах

3.1. Существует ли такая последовательность $\{a_n\}$, $a_n \neq 0$, что ряды $\sum a_n$ и $\sum \frac{1}{n^2 a_n}$ сходятся? Можно ли подобрать положительную последовательность $\{a_n\}$?

3.2. Пусть ряд $\sum a_n$ сходится. Может ли расходиться ряд $\sum a_n^3$? $\sum a_n^{1989}$?

3.3. Пусть $a_n > 0$ и $\sum a_n < +\infty$. Докажите, что

а) $\sum (a_n)^{1-1/n} < +\infty$; б) $\sum \frac{a_n}{\ln(1+n)} \ln\frac{1}{a_n} < +\infty$.

3.4. Пусть $0 < a_n < 1$. Докажите, что из сходимости ряда $\sum \frac{a_n}{\ln a_n}$ следует сходимость ряда $\sum \frac{a_n}{\ln(1+n)}$. Верно ли обратное утверждение, если $a_n \downarrow 0$? Можно ли отказаться от монотонности?

3.5. Пусть $a_n \geqslant 0$ и $\sum \frac{a_n}{n} < +\infty$. Докажите, что существует такая последовательность номеров $\{n_k\}$ плотности 1 (см. задачу II.2.3), что $a_{n_k} \to 0$.

3.6. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

а) $\sum |a_n| < +\infty$;

б) для любой последовательности номеров $\{n_k\}$ плотности 0 (см. задачу II.2.3) ряд $\sum a_{n_k}$ сходится.

3.7. Пусть ряд $\sum a_n$ абсолютно сходится и $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_{kn}=0$ для любого $k\in\mathbb{N}$. Докажите, что $a_n=0$ для любого n.

3.8. Докажите, что если ряд $\sum a_n x_n$ сходится для любой последовательности $\{x_n\}$, стремящейся к нулю, то $\sum|a_n|<+\infty$.

3.9. Докажите, что следующие два свойства последовательности $\{\lambda_n\}$ эквивалентны:

а) $\sum|\lambda_n-\lambda_{n+1}|<+\infty$;

б) если ряд $\sum a_n$ сходится, то и ряд $\sum\lambda_n a_n$ сходится.

3.10. Пусть функция φ монотонна и ограничена на промежутке $[0;\ +\infty)$. Докажите, что $\sum\varphi(\varepsilon n)\,a_n \underset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} \varphi(+0)\sum a_n$ для любого сходящегося ряда $\sum a_n$.

3.11. Постройте положительную последовательность $\{a_n\}$ со свойствами:

а) $a_n\to 0$; б) $\sum a_n=+\infty$; в) если $a_{n_k}\downarrow 0$, то $\sum a_{n_k}\leqslant 2$.

3.12. Постройте положительную последовательность $\{a_n\}$ со свойствами:

а) $a_n\to 0$; б) $\sum a_n=+\infty$;

в) если возрастающая последовательность номеров $\{n_k\}$ такова, что $\sup\limits_{k\geqslant j}\dfrac{a_{n_k}}{a_{n_j}}<+\infty$, то ряд $\sum a_{n_k}$ сходится.

3.13. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность положительных чисел. Положим $A_n=a_1+\ldots+a_n$, $\alpha_n=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+1}}+\ldots$ Докажите, что следующие шесть утверждений эквивалентны:

а) $A_n=O(a_n)$; б) $\alpha_n=O(1/a_n)$;

в) $\dfrac{A_n}{A_{n+1}}\leqslant q_1<1$ для всех $n\in\mathbb{N}$;

г) $\alpha_1<+\infty$ и $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\leqslant q_2<1$ для всех $n\in\mathbb{N}$;

д) $a_1^p+\ldots+a_n^p=O\left(a_n^p\right)$, если $p>0$;

е) $\dfrac{1}{a_n^p}+\dfrac{1}{a_{n+1}^p}+\ldots=O\left(\dfrac{1}{a_n^p}\right)$, если $p>0$.

Из утверждений а) — е) следует утверждение ж) для любого $Q > 1$ существует такой номер $L = L_Q$, что $\frac{a_{n+L}}{a_n} \geqslant Q$ при $n \in \mathbb{N}$, т. е. последовательность $\{a_n\}$ распадается на L подпоследовательностей $\{a_n^{(l)}\} = \{a_{nL+l}\}$ $(l = 0, 1, \ldots, L-1)$, каждая из которых растет не медленнее геометрической прогрессии: $\frac{a_{n+1}^{(l)}}{a_n^{(l)}} \geqslant Q$.

Докажите, что если последовательность $\{a_n\}$ монотонна, то ж) $\Rightarrow$ а). Верно ли это утверждение для немонотонных последовательностей?

3.14. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность положительных чисел. Положим $A_n = a_1 + \ldots + a_n$, $\alpha_n = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} + \ldots$ Докажите, что следующие семь утверждений эквивалентны:

а) $A_{n-1} = o(a_n)$; б) $\alpha_{n+1} = o(1/a_n)$;

в) $A_{n-1} = o(A_n)$; г) $\alpha_1 < +\infty$ и $\alpha_{n+1} = o(\alpha_n)$;

д) $a_1^p + \ldots + a_{n-1}^p = o(a_n^p)$, если $p > 0$;

е) $\frac{1}{a_{n+1}^p} + \frac{1}{a_{n+2}^p} + \ldots = o\left(\frac{1}{a_n^p}\right)$, если $p > 0$;

ж) $a_{n-1} = o(a_n)$.

Из утверждений а) — ж) следует утверждение

з) $\sqrt[n]{a_n} \to +\infty$. Покажите на примерах, что з) $\not\Rightarrow$ а) даже для монотонных последовательностей; если же $\sqrt[n]{a_n} \uparrow +\infty$, то утверждения а) — ж) выполняются.

3.15. Пусть $p > 1$, $a_n \geqslant 0$ и $A_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Докажите, что

а) $\sum A_n^p \leqslant \frac{p}{p-1} \sum a_n A_n^{p-1}$; б) $\sum A_n^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum a_n^p$.

3.16. Пусть $a_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и ряд $\sum a_n$ сходится. Докажите, что ряд $\sum \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ сходится, а ряд $\sum \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ расходится.

3.17. Пусть функция f определена на $\mathbb{R}$. Докажите, что следующие свойства функции f эквивалентны:

а) $f(x) = O(x)$ при $x \to 0$;

б) для любого абсолютно сходящегося ряда $\sum a_n$ ряд $\sum f(a_n)$ абсолютно сходится;

в) для любого абсолютно сходящегося ряда $\sum a_n$ ряд $\sum f(a_n)$ сходится.

3.18. Пусть функция f определена на $\mathbb{R}$. Если для любого сходящегося ряда $\sum a_n$ ряд $\sum f(a_n)$ сходится, то $f(x) = Cx$ в некоторой окрестности нуля.

3.19. Пусть счетное множество Q содержится в интервале $(0; 1)$, $\inf Q = 0$, $\sup Q = 1$. Докажите, что для любого числа $x \in (0; 1)$ можно так занумеровать множество $Q = \{q_1; q_2; \ldots\}$, что

$$x = \sum \frac{q_n}{2^n}.$$

§ 4. Вычисление сумм рядов

В задачах 4.1—4.11 вычислите суммы рядов (суммы 4.7—4.9 выражаются через постоянную Эйлера — см. задачу II.2.9).

4.1. $\sum 3^n \sin^3 \frac{x}{3^n}$.

4.2. $\sum (-1)^n \frac{\cos^3 (3^n x)}{3^n}$.

4.3. $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{C_{1+n}^{1+r}}$ $\quad (r \in \mathbb{N})$.

4.4. $\sum \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} z^n$ $\quad (|z| < 4)$.

4.5. $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} a_n(m)$, где $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ и $a_n(m) = 1$, если n не делится на m, $a_n(m) = 1 - m$, если n делится на m.

4.6. $\sum n (\operatorname{ch} 2n - 1) e^{-n^2}$.

4.7. $\sum\limits_{n \geqslant 2} \left(\frac{1}{n} \sum\limits_{m \geqslant 2} m^{-n} \right)$.

4.8. $\sum \frac{(-1)^n}{n} \ln n$.

4.9. $\sum \frac{(-1)^n}{n} [\log_2 n]$.

4.10. $\sum \frac{1}{n} \int\limits_{2\pi n}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

4.11. $\sum \frac{1}{n} \int\limits_{\pi n}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

4.12. Докажите, что

$$\sum_{n>N} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{\pi} \frac{(2N)!!}{(2N-1)!!} \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2N} x \, dx.$$

В частности,

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

4.13. Пусть $s > 1$. Докажите, что

а) $\sum \frac{1}{n^s} = \lim\limits_{n\to\infty} (1-2^{-s})^{-1}(1-3^{-s})^{-1} \ldots (1-p_n^{-s})^{-1}$;

б) $\sum \frac{\lambda(n)}{n^s} = \lim\limits_{n\to\infty} (1+2^{-s})^{-1}(1+3^{-s})^{-1} \ldots (1+p_n^{-s})^{-1}$,

где $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, ...— простые числа, занумерованные в порядке возрастания; $\lambda(n) = 1$, если число простых делителей числа n (с учетом их кратности) четно, $\lambda(n) = -1$ в противном случае ($\lambda(1) = 1$).

4.14. Докажите, что

$$\prod \left(1 - \frac{1}{p_n^2}\right) = \frac{6}{\pi^2}.$$

4.15. Докажите, что при $|t| < 1$

а) $\sum \frac{t^n}{1-t^n} = \sum \tau(n) t^n$;

б) $\sum \frac{nt^n}{1-t^n} = \sum \sigma(n) t^n$, где $\tau(n)$ — число делителей, $\sigma(n)$ — сумма делителей числа n.

§ 5. Функциональные ряды

5.1. При каких p, $q > 0$ и $x, y \in \mathbb{R}$ сходится ряд $\sum \left| \cos\frac{x}{n^p} + \sin\frac{y}{n^{2p}} \right|^{n^q}$?

5.2. Пусть $\lambda_n \to 0$. Сходится ли ряд $\sum \lambda_n e^{-|x-n|}$ равномерно на $\mathbb{R}$? Оцените $\sup\limits_x \left| \sum \lambda_n e^{-|x-n|} \right|$ при условии, что $|\lambda_n| \leqslant 1$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

5.3. Сходится ли ряд $\sum \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^n)}$ равномерно на $[0; +\infty)$? Оцените $\sup\limits_{x\geqslant 0} \sum \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^n)}$.

5.4. Сходится ли ряд $\sum \min\left(xn!; \frac{1}{xn!}\right)$ при $x>0$? Сходится ли он равномерно на $(0; +\infty)$? Оцените $\sup\limits_{x>0} \sum \min\left(xn!; \frac{1}{xn!}\right)$.

5.5. Пусть $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n > 0$, $a_n = O(b_n)$, $\sum b_n = +\infty$, и пусть ряд

$$B(t) = \sum_{n\geqslant 0} b_n t^n$$

сходится при $|t|<1$. Докажите, что ряд

$$A(t) = \sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$$

сходится при $|t|<1$ и

$$\varliminf \frac{a_n}{b_n} \leqslant \varliminf_{t\to 1-0} \frac{A(t)}{B(t)} \leqslant \varlimsup_{t\to 1-0} \frac{A(t)}{B(t)} \leqslant \varlimsup \frac{a_n}{b_n}$$

(сравните с задачей II.2.2). В частности, если $a_n \sim cb_n$, $c \neq 0$, то $A(t) \sim cB(t)$ при $t \to 1-0$; если $a_n = o(b_n)$, то $A(t) = o(B(t))$ при $t \to 1-0$.

5.6. Докажите, что если ряд $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ сходится, то $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n t^n \to \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ при $t \to 1-0$ (теорема Абеля).

5.7. Если частичные суммы S_n ряда $\sum\limits_{n\geqslant 0} \overline{a_n}$ таковы, что существует конечный предел

$$\lim \frac{S_1 + \ldots + S_n}{n} = l,$$

то ряд

$$A(t) = \sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$$

сходится при $|t|<1$ и $A(t) \underset{t\to 1-0}{\longrightarrow} l$. Таким образом, метод Абеля суммирования рядов (вычисление предела $\lim\limits_{t\to 1-0} \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n t^n$) сильнее метода средних арифметических (метод Чезаро).

5.8. Пусть $b_n \geqslant 0$, $\sum b_n = +\infty$ и ряд

$$B(t) = \sum_{n\geqslant 0} b_n t^n$$

сходится при $|t|<1$. Если последовательность $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ такова, что существует конечный предел

$$\lim (a_0+\ldots+a_n)/(b_0+\ldots+b_n)=l,$$

то ряд

$$A(t)=\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$$

сходится при $|t|<1$ и $A(t)/B(t)\to l$ при $t\to 1-0$.

5.9. Пусть последовательность $\{a_n\}$ такова, что $a_n>-1$ при $n\in\mathbb{N}$ и

$$\Pi(1+a_n)=A\in(0;+\infty).$$

Докажите, что при $|t|<1$ сходится произведение

$$\Pi(1+a_n t^n)=A(t)$$

и $A(t)\to A$ при $t\to 1-0$, если $\sum a_n^2<+\infty$. Можно ли отказаться от условия $\sum a_n^2<+\infty$?

5.10. Пусть $\alpha>1/2$. Докажите, что

а) ряд $\sum n^{-\alpha}\sin(\pi x\sqrt{n})$ сходится при любом $x\in\mathbb{R}$;

б) при $1/2<\alpha<1$ сходимость равномерная на $[a;\,A]$, $0<a<A$, но неравномерная на $[0;\,A]$;

в) при $\alpha=1$ сходимость равномерная на $[0;\,A]$, $A>0$.

5.11. Пусть

$$f(x)=\sum \frac{1}{n}\sin\frac{x}{4^n}.$$

Докажите, что

$$0<\varlimsup_{x\to+\infty}(|f(x)|/\ln\ln x)<+\infty,\quad \varliminf_{x\to+\infty}|f(x)|=0.$$

5.12. Пусть $f(x)=\sum a_n|\sin nx|$, где $a_n\geqslant 0$ и $\sum a_n<+\infty$. Докажите, что $f\in \mathrm{Lip}_1$ тогда и только тогда, когда $\sum n a_n<+\infty$.

5.13. Пусть последовательность многочленов $\{P_n\}$ удовлетворяет условиям:

а) степень P_n не выше $m\in\mathbb{N}$ для всех $n\in\mathbb{N}$;

б) существует конечный предел $P(x)=\lim P_n(x)$ для всех $x\in[\alpha;\,\beta]$, $\alpha<\beta$.

Докажите, что P является многочленом степени не выше m и $P_n\rightrightarrows P$ на любом конечном промежутке.

5.14. Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $f_n \in C((a;\ b))$, $f_n \geqslant 0$ $(n \in \mathbb{N})$ и $f = \sum f_n$. Докажите, что если функция f непрерывна на $(a;\ b)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

§ 6. Тригонометрические ряды

6.1. Пусть $\{A_n\}$, $\{\varphi_n\}$ — числовые последовательности, $A_n \to +\infty$. Докажите, что в любом непустом интервале найдется такая точка x, что $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} \cos(A_n x + \varphi_n) = 1$.

6.2. Докажите, что $a_n,\ b_n \to 0$, если

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx \to 0$$

при $n \to +\infty$ для любых $x \in [\alpha;\ \beta]$, $\alpha < \beta$.

6.3. Укажите такое множество $E \subset [0;\ 2\pi]$ мощности континуум и такую последовательность $B_n \to +\infty$, что $\sin B_n x \rightrightarrows 0$ на E.

6.4. Докажите, что $\sum(|a_n| + |b_n|) < +\infty$, если $\sum |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leqslant \mathrm{const}$ на $[\alpha; \beta]$, $\quad \alpha < \beta$.

6.5. Докажите, что при $x \in (0;\ \pi)$

$$S_n(x) = \sin x + \ldots + \sin nx = O(\min(n;\ 1/x));$$

$$C_n(x) = \cos x + \ldots + \cos nx = O(\min(n;\ 1/x)).$$

6.6. Вычислите пределы

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\ln A} \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin Ax|}{\sin x}\,dx \quad \text{и} \quad \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\ln A} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 Ax}{\sin x}\,dx.$$

Какова асимптотика интегралов (см. 6.5)

$$L_n = \int_{-\pi}^{\pi} |C_n(x)|\,dx, \qquad \tilde{L}_n = \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x)|\,dx?$$

6.7. Докажите, что ряд $\sum \dfrac{\exp(i\pi n(x - \ln[\sqrt{n}]))}{\sqrt{n}}$ расходится для любого $x \in \mathbb{R}$.

6.8. Вычислите суммы рядов:

а) $\sum \dfrac{\sin nx}{n}$; б) $\sum \dfrac{\cos nx}{2n-1}$;

в) $\sum (-1)^n \dfrac{\sin nx}{n}$; г) $\sum \dfrac{\sin nx}{2n-1}$.

6.9. Докажите, что

а) $\frac{\pi}{2}|\sin x| = 1 - 2\sum \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$;

б) $\frac{\pi}{2}|\cos x| = 1 - 2\sum (-1)^n \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$.

В задачах 6.10—6.21 последовательность $\{\lambda_n\}$ убывает к нулю. При решении этих задач может оказаться полезным преобразование Абеля (см. § 2).

6.10. Докажите, что ряды $\sum \lambda_n \cos nx$ и $\sum \lambda_n \sin nx$ сходятся равномерно на любом замкнутом промежутке, не содержащем точек $2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

6.11. Докажите, что при $x \in (0;\ \pi)$

$$\sum_{n\geqslant N} \lambda_n \sin nx = O(\lambda_N/x), \qquad \sum_{n\geqslant N} \lambda_n \cos nx = O(\lambda_N/x).$$

6.12. Докажите, что ряды $\sum\limits_{n\geqslant 1} \lambda_n \sin nx \sin mx$ и $\sum\limits_{n\geqslant 1} \lambda_n \cos nx \sin mx$ ($m \in \mathbb{Z}$) равномерно сходятся на $\mathbb{R}$.

6.13. Докажите, что если $g(x) = \sum \lambda_n \sin nx$ для $x \in \mathbb{R}$, то

$$\lambda_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x) \sin mx\, dx.$$

6.14. Докажите, что равномерная сходимость ряда $\sum \lambda_n \sin nx$ на $\mathbb{R}$ равносильна соотношению $\lambda_n = o(1/n)$.

6.15. Докажите, что равномерная ограниченность частичных сумм ряда $\sum \lambda_n \sin nx$ равносильна соотношению $\lambda_n = O(1/n)$.

6.16. Пусть $\lambda_n = O(1/n)$ и функция φ абсолютно интегрируема на промежутке $[a;\ b]$. Докажите, что ряд $\sum \lambda_n \varphi(x) \sin nx$ можно почленно интегрировать на промежутке $[a;\ b]$. Используя результат задачи 6.8.а), вычислите сумму ряда $\sum n^{-2}$.

6.17. Пусть $f(x) = \sum \lambda_n \cos nx$. Докажите, что $\int_0^{\pi} |f(x)|\, dx < +\infty$, если $\sum \frac{1}{n}\lambda_n < +\infty$.

6.18. Пусть $g(x) = \sum \lambda_n \sin nx$. Докажите, что $\int\limits_0^\pi |g(x)|\,dx < +\infty$ тогда и только тогда, когда $\sum \frac{1}{n}\lambda_n < +\infty$.

6.19. Пусть $\sum \frac{1}{n}\lambda_n < +\infty$, $f(x) = \sum \lambda_n \cos nx$, $g(x) = \sum \lambda_n \sin nx$, $\varphi \in C([0;\ \pi])$. Докажите, что ряды $\sum \lambda_n \varphi(x) \cos nx$ и $\sum \lambda_n \varphi(x) \sin nx$ можно почленно интегрировать на $[0;\ \pi]$. В частности,

$$\int\limits_0^\pi f(x) \cos mx\,dx = \frac{\pi}{2}\lambda_m \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

6.20. Докажите, что при $x \in (0;\ \pi)$

а) $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{\sin kx}{k} > 0$; б) $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{\cos kx}{k} \geqslant -1$.

6.21. а) Пусть $g(x) = \sum \frac{\lambda_n}{n} \sin nx$. Докажите, что $g \geqslant 0$ на $[0;\ \pi]$.

б) Пусть $f(x) = \frac{\lambda_0}{2} + \sum \lambda_n \cos nx$. Докажите, что если последовательность $\{\lambda_n\}_{n \geqslant 0}$ выпукла и $\lambda_n \to 0$, то $f \geqslant 0$ на $\mathbb{R}$ и $\int\limits_0^\pi f(x)\,dx < +\infty$.

6.22. Пусть $S_n(x)$ — n-я частичная сумма ряда $f(x) = \sum \frac{\sin nx}{n}$, $M_n = \max\limits_x S_n(x)$. Докажите, что

$$M_n = S_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \uparrow G = \int\limits_0^\pi \frac{\sin u}{u}\,du > \frac{\pi}{2} = f(+0)$$

(явление Гиббса).

6.23. Пусть $f(x) = \sum\limits_{|k| \leqslant N} c_k e^{ikx}$. Докажите, что $|c_k| \leqslant \frac{M}{2}\left(\frac{\pi}{|k|}\right)^\alpha$ при $k = \pm 1, \ldots, \pm N$, если $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|^\alpha$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

6.24. Пусть $f(x)=\sum 2^{-n}\cos 4^n x$. Докажите, что $f\in \mathrm{Lip}_{1/2}$, но $f\notin \mathrm{Lip}_\alpha$ при $\alpha>1/2$.

6.25. Пусть $f(x)=\sum A^{-n}\sin 3^n x$, где $A\in(1;3)$. Докажите, что $f\in\mathrm{Lip}_\alpha$, где $\alpha=\log_3 A$, но $f\notin\mathrm{Lip}_\beta$ при $\beta>\alpha$.

6.26. Пусть $f(x)=\sum 3^{-n}\sin 3^n x$. Докажите, что $f\in\mathrm{Lip}_\alpha$ при любом $\alpha\in(0;1)$. Верно ли, что $f\in\mathrm{Lip}_1$?

6.27. Пусть $f(x)=\sum 2^{-n}\sin(2\pi n!x)$. Докажите, что

а) $f\notin\mathrm{Lip}_\alpha$ при любом $\alpha\in(0;1]$;

б) функция f не дифференцируема ни в одной точке.

6.28. Докажите, что следующие три свойства тригонометрического ряда

$$\sum_{n\geqslant 0}\left(a_n\cos(2^n x)+b_n\sin(2^n x)\right)$$

эквивалентны:

а) $\sum\limits_{n\geqslant 0}(|a_n|+|b_n|)<+\infty$;

б) частичные суммы

$$S_N(x)=\sum_{0\leqslant n\leqslant N}\left(a_n\cos(2^n x)+b_n\sin(2^n x)\right)$$

равномерно ограничены на некотором промежутке $[a;b]$, $a<b$;

в) частичные суммы $S_N(x)$ равномерно ограничены на $\mathbb{R}$.

6.29. Рассмотрим две последовательности алгебраических многочленов $\{P_k\}_{k\geqslant 0}$ и $\{Q_k\}_{k\geqslant 0}$ (многочлены Рудина — Шапиро), которые определяются рекуррентно следующим образом: $P_0=Q_0=1$,

$$P_{n+1}(z)=P_n(z)+z^{2^n}Q_n(z),\quad Q_{n+1}(z)=P_n(z)-z^{2^n}Q_n(z)$$
$$(n=0,1,2,\ldots).$$

Докажите, что

а) степень многочленов P_n и Q_n равна 2^n-1;

б) все коэффициенты многочленов P_n и Q_n равны ± 1;

в) если $|z|=1$, то $|P_n(z)|^2+|Q_n(z)|^2=2^{n+1}$.

6.30. Пусть R_N $(N=0,1,2,\ldots)$ — естественная проекция множества всех алгебраических многочленов на множество многочленов степени не выше N (R_N аннулирует одночлены, степень которых больше N, и не меняет одночлены, степень которых не превосходит N). Докажите, что при $|z|=1$ и при любых $N,n\in\mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$|R_N(P_n)(z)|\leqslant 10\sqrt{N},\quad |R_N(Q_n)(z)|\leqslant 10\sqrt{N}.$$

6.31. Докажите, что существует ряд $\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon_k e^{ik\theta}$, где $\varepsilon_k=\pm 1$, для всех частичных сумм $S_m(\theta)$ которого справедливы неравенства

а) $\max\limits_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}|S_m(\theta)|\leqslant 10\sqrt{m}$;

б) $\int\limits_0^{2\pi}|S_m(\theta)|\,d\theta\geqslant\sqrt{m/3}.$

6.32. Используя последовательность $\{\varepsilon_k\}_{k\geqslant 0}$ из задачи 6.31, убедитесь в том, что существует непрерывная функция f вида $f(\theta)=\sum_{k\geqslant 0}a_k e^{ik\theta}$ такая, что $\sum|a_k|^p=+\infty$ для любого $p<2$.

6.33. Пусть последовательность $\{\varepsilon_k\}\subset\mathbb{C}$ удовлетворяет условию (ср. с задачей 6.31)

$$\max_{\theta\in\mathbb{R}}\left|\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\varepsilon_k e^{ik\theta}\right|=O(\sqrt{n}).$$

Докажите, что при $\alpha>0$

а) $\max\limits_{\theta\in\mathbb{R}}\left|\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\dfrac{\varepsilon_k}{k^{0,5-\alpha}}e^{ik\theta}\right|=O(n^{\alpha})$;

б) $\max\limits_{\theta\in\mathbb{R}}\left|\sum\limits_{k\geqslant n}\dfrac{\varepsilon_k}{k^{0,5+\alpha}}e^{ik\theta}\right|=O(n^{-\alpha})$;

в) функция $f(\theta)=\sum\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{\varepsilon_k}{k^{0,5+\alpha}}e^{ik\theta}$ входит в класс Lip_α.

6.34. Докажите, что существует такая функция $f\in\mathrm{Lip}_{1/2}$ вида $f(\theta)=\sum_{k\geqslant 1}c_k e^{ik\theta}$, что $\sum_{k\geqslant 1}|c_k|=+\infty$ (ср. с задачей IX.4.13).

Глава V. ИНТЕГРАЛ

§ 1. Несобственные интегралы от функций одной переменной

В задачах 1.1—1.11 исследуйте сходимость интегралов.

1.1. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{|\sin x|\,dx}{e^{x^2}\sin^2 x}$. 1.2. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^p\sin^2 x}$.

1.3. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^q\,dx}{1+x^p|\sin x|^r}$. 1.4. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^q\,dx}{e^{x^p}|\sin x|^r}$.

1.5. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x^p|\,dx}{x^q}$.

1.6. $\int\limits_1^{+\infty} |\sin(x^p + \ln^q x)| \frac{dx}{x}$.

1.7. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^q |\sin x|^p}$.

1.8. $\int\limits_1^{+\infty} x^p |\sin x|^{x^q}\,dx$.

1.9. $\int\limits_0^{+\infty} \cos(x^3 - x)dx$.

1.10. $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^p + ax + b)dx$, $p > 1$.

1.11. $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x \ln x)\,dx$.

1.12. Вытекает ли из сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходимость интегралов

а) $\int\limits_1^{+\infty} f^3(x)\,dx$; б) $\int\limits_1^{+\infty} |f(x)| \frac{dx}{x^2}$?

1.13. Пусть $f(x) = x^{-\varepsilon} \int\limits_0^x t^{-2} \ln|1 - t^2|\,dt$ $(x > 0)$. При каком $\varepsilon > 0$ сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$?

1.14. Вычислите интеграл Фруллани $\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx$, где функция f непрерывна на $[0; +\infty)$ и удовлетворяет одному из условий:

а) интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$ сходится;

б) при некотором $T > 0$ для всех $x \geqslant 0$ справедливо равенство $f(x + T) = f(x)$;

в) существует конечный предел $l = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

1.15. Пусть интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. Докажите, что а) для любого $\varepsilon > 0$ сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x} f(x)\,dx$;

б) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x} f(x)\,dx \to \int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ при $\varepsilon \to +0$

(ср. с теоремой Абеля — задача IV.5.6).

В задачах 1.16—1.38 вычислите интегралы. Некоторые из них выражаются через постоянную Эйлера γ (см. задачу II.2.9).

1.16. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \ln|1 - x^2|\,dx$. **1.17.** $\int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx$.

1.18. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1 - x}\,dx$. **1.19.** $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1 + x}\,dx$.

1.20. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx$. **1.21.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax}\,dx \quad (a > 0)$.

1.22. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$. **1.23.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3}\,dx$.

1.24. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - \cos x}{x}\,dx$. **1.25.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(e^{iax} - 1)(e^{ibx} - 1)}{x^2}\,dx$

$(a, b \in \mathbb{R})$.

1.26. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{e^x}\,dx$. **1.27.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{e^x}\,dx$.

1.28. $\int\limits_0^1 \frac{1 - \cos x}{x}\,dx - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$.

1.29. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(x^p) - \cos(x^q)}{x}\,dx \quad (p, q > 0)$.

1.30. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\exp(-x^p) - \exp(-x^q)}{x}\,dx \quad (p, q > 0)$.

1.31. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(1-x)\ln^2(1-x)}\,dx.$ **1.32.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+e^x}\,dx.$

1.33. Используя результат задачи I.2.16.а), докажите, что

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{n}\,\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} + o(1).$$

С помощью формулы Стирлинга найдите значение интеграла Эйлера — Пуассона $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

1.34. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x^p}\,dx$, где $p=\frac{k}{2}-1$, $k=0,1,2,3,4,5$.

1.35. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x^2+1/2)^2}\,dx.$ **1.36.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+a^2/x^2)}\,dx.$

1.37. а) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$; б) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx.$

1.38. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\pi(x)}{x^3-x}\,dx$, где $\pi(x)$ — число простых чисел, не превосходящих x.

§ 2. Вычисление кратных интегралов

В задачах 2.1—2.7 требуется вычислить данные интегралы.

2.1. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} |\ln x-\ln y|\, e^{-(x+y)}\,dx\,dy.$

2.2. а) $\displaystyle\int_{[0;1]^n} \max(x_1;\ldots;x_n)\,dx_1\ldots dx_n$;

б) $\displaystyle\int_{[0;1]^n} \min(x_1;\ldots;x_n)\,dx_1\ldots dx_n$;

в) $\displaystyle\int\limits_{[1;+\infty)^n} \frac{dx_1 \ldots dx_n}{x_1 \ldots x_n (\max(x_1; \ldots; x_n))^\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$.

2.3. $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2/2}\, dx.$

2.4. а) $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2} |ax + by| \frac{dx\, dy}{e^{(x^2+y^2)/2}};$

б) $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} |(x; a)|^p \frac{dx}{e^{\|x\|^2/2}}$ $(a \in \mathbb{R}^n, p > -1)$.

2.5. $\displaystyle\iiint\limits_{\|y\| \leqslant 1} \frac{dy_1\, dy_2\, dy_3}{\|x - y\|}$ $(x \in \mathbb{R}^3)$.

2.6. $\displaystyle\iiiint\limits_{x^2+y^2+u^2+v^2 \leqslant 1} e^{x^2+y^2-u^2-v^2}\, dx\, dy\, du\, dv.$

2.7. $\displaystyle\int\limits_{(Ax,x) \leqslant 1} e^{(Ax,\, x)} dx$ $(x \in \mathbb{R}^4$, A — положительно определенная матрица$)$.

2.8. Пусть

$$A = \left\{x = (x_1; x_2; x_3; x_4) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} \leqslant x_1\right\}.$$

Для каких $t \in \mathbb{R}^4$ конечен интеграл

$$K(t) = \int\limits_A e^{-(x,t)}\, dx?$$

Чему он равен?

В задачах 2.9—2.13, говоря о случайном выборе точек, мы подразумеваем, что вероятность выбрать точку, принадлежащую некоторому множеству, пропорциональна его мере (длине, площади, объему).

2.9. На отрезке $[a; b]$ случайным образом выбираются две точки. Найдите среднее значение M расстояния между ними. Какова вероятность P того, что это расстояние больше M?

2.10. На отрезке $[0; a]$ случайным образом выбираются три числа. Какова вероятность того, что они являются длинами некоторого треугольника?

2.11. На отрезке $[-a;\ a]$ случайным образом выбираются две точки u, v.

а) Что вероятнее: корни уравнения $z^2+uz+v=0$ лежат на вещественной оси (вероятность $P_1(a)$) или корни этого уравнения не лежат на вещественной оси (вероятность $P_2(a)$)? К чему стремятся вероятности $P_1(a)$, $P_2(a)$ при $a\to+\infty$?

б) Какова вероятность того, что биквадратное уравнение $z^4+uz^2+v=0$ имеет как вещественные, так и комплексные корни?

2.12. В единичном круге случайным образом выбираются две точки. Каково среднее значение S площади круга, построенного на соединяющем их отрезке как на диаметре?

2.13. На окружности радиуса R случайным образом выбираются две точки. Найдите

а) среднее значение L длины соединяющей их хорды;

б) среднее значение α угла ($\leqslant\pi$), образованного проведенными в эти точки радиусами.

2.14. Пусть $p<1$ и

$$\Phi(x;y)=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}\left((x-u)^2+(y-v)^2\right)^{-p/2}du\,dv,$$

$$\Psi(x;y)=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}\ln\left((x-u)^2+(y-v)^2\right)du\,dv.$$

Докажите, что $\Phi,\Psi\in C^1(\mathbb{R}^2)$, и найдите Ψ.

2.15. Пусть

$$A=\left\{x=(x_1;\ldots;x_n)\in\mathbb{R}^n\,\middle|\,\sum_{1\leqslant k\leqslant n}x_k/k\leqslant 1, x_1,\ldots;x_n\geqslant 0\right\}.$$

Докажите, что при любом $t\in\mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\int\limits_A\ldots\int e^{-t(x_1+\ldots+x_n)}\,dx_1\ldots dx_n=\left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right)^n.$$

2.16. Докажите, что при $m,n\in\mathbb{N}$, $m\leqslant n$, $a>0$, справедливо равенство

$$\int\limits_{[0;1]^n}\frac{dx}{(a+x_1+\ldots+x_n)^m}=\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\,(n-m)!}\Delta_n\left(a^{n-m}\ln a\right),$$

где $\Delta_1 f(a)=\Delta f(a)=f(a+1)-f(a)$, $\Delta_n f(a)=\Delta(\Delta_{n-1}f(a))$.

2.17. Пусть a_k $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ — положительные числа.

а) Докажите, что для любой неотрицательной и непрерывной на $[0;\ +\infty)$ функции f справедливо равенство

$$\int\limits_{[0;1]^n}\ldots\int f(a_1+(a_2-a_1)x_1+(a_3-a_2)x_1x_2+\ldots$$

$$\ldots+(a_0-a_n)x_1\ldots x_n)\quad x_1^{n-1}x_2^{n-2}\ldots x_{n-1}\,dx_1\ldots dx_n=$$

$$=\int\limits_{Q_n}\ldots\int f(a_0+(a_1-a_0)x_1+(a_2-a_0)x_2+\ldots$$

$$\ldots+(a_n-a_0)x_n)\,dx_1\ldots dx_n,$$

где

$$Q_n=\left\{(x_1;\ldots;x_n)\in\mathbb{R}^n\,\middle|\,\sum_{1\leqslant k\leqslant n}x_k\leqslant 1,\ x_1\geqslant 0,\ \ldots,x_n\geqslant 0\right\}.$$

б) Вычислите интегралы

$$\int\limits_{[0;1]^n}\ldots\int\frac{x_1^{n-1}x_2^{n-2}\ldots x_{n-1}\,dx_1\ldots x_n}{(a_1+(a_2-a_1)x_1+(a_3-a_2)x_1x_2+\ldots+(a_0-a_n)x_1\ldots x_n)^{n+1}},$$

$$\int\limits_{Q_n}\ldots\int\frac{dx_1\ldots dx_n}{(a_0+(a_1-a_0)x_1+(a_2-a_0)x_2+\ldots+(a_n-a_0)x_n)^{n+1}}.$$

2.18. Докажите, что

а) если функция f непрерывна и неотрицательна на $\mathbb{R}$, то

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}f(ax+by)\frac{dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f((|a|+|b|)\,u)\,\frac{du}{1+u^2}$$

$(a,b\in\mathbb{R})$,

б) при $0<p<1$ и $a_k\in\mathbb{R}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ справедливо равенство

$$\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|(a,x)|^p\frac{dx}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)\ldots\left(1+x_n^2\right)}=$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{2}\,p\right)^{-1}\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|\right)^p.$$

2.19. Пусть $f\in C^2([0;\ 1]\times[0;\ 1])$. Найдите предел

$$\lim_{n\to+\infty}n^2\left(\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x;y)\,dx\,dy-\frac{1}{n^2}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\sum_{1\leqslant j\leqslant n}f\left(\frac{k-1/2}{n};\ \frac{j-1/2}{n}\right)\right).$$

Глава VI. АСИМПТОТИКА

§ 1. Асимптотика интегралов

1.1. Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$; $f,\ g \in C([a;\ b))$, $g > 0$. Докажите, что

а) если $\int\limits_a^b g(t)\,dt = +\infty$ и $f(t) \sim g(t)$ при $t \to b-0$, то

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt \sim \int\limits_a^x g(t)\,dt \text{ при } x \to b-0;$$

б) если $\int\limits_a^b g(t)\,dt = +\infty$ и $f(t) = o(g(t))$ при $t \to b-0$, то

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt = o\left(\int\limits_a^x g(t)\,dt\right) \text{ при } x \to b-0;$$

в) если $\int\limits_a^b g(t)\,dt < +\infty$ и $f(t) \sim g(t)$ при $t \to b-0$, то

$$\int\limits_x^b f(t)\,dt \sim \int\limits_x^b g(t)\,dt \quad \text{при} \quad x \to b-0;$$

г) если $\int\limits_a^b g(t)\,dt < +\infty$ и $f(t) = o(g(t))$ при $t \to b-0$, то

$$\int\limits_x^b f(t)\,dt = o\left(\int\limits_x^b g(t)\,dt\right) \text{ при } x \to b-0.$$

1.2. Найдите асимптотику при $t \to 1-0$ интегралов

а) $\mathcal{J}(t) = \int\limits_0^t \frac{dx}{1-x^a} \quad (a \neq 0)$;

б) $\mathcal{K}(t) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-t^2x^2)}}$;

в) $\mathcal{L}(t) = \int\limits_0^\pi \frac{dx}{1-2t\cos x + t^2}$.

1.3. Найдите асимптотику при $A \to +\infty$ следующих интегралов:

а) $\displaystyle\int\limits_{A}^{2A} \frac{dx}{\ln x}$; б) $\displaystyle\int\limits_{0}^{A} e^{e^{-x}}\,dx$;

в) $\displaystyle\int\limits_{\pi}^{A} |\sin x|\, e^{a/x}\,dx \quad (a \in \mathbb{R})$; г) $\displaystyle\int\limits_{A}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$;

д) $\displaystyle\int\limits_{A}^{+\infty} x^a e^{-x}\,dx \quad (a \in \mathbb{R})$.

1.4. Найдите асимптотику при $A \to +\infty$ следующих интегралов:

а) $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-x^p/A}\,\frac{dx}{x} \quad (p > 0)$; б) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} e^{Ax^2}\,dx$;

в) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} e^{x - x^2/A}\,dx$; г) $\displaystyle\int\limits_{2}^{+\infty} e^{-x/A}\ln^p x\,dx \quad (p \in \mathbb{R})$.

1.5. Найдите асимптотику при $n \to +\infty$ интегралов $(n \in \mathbb{N})$

а) $\displaystyle\alpha_n = \int\limits_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \frac{\sin x}{x^p}\,dx \quad (p \neq 0)$;

б) $\displaystyle\beta_n = \int\limits_{\pi n}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\,dx \quad (p > 0)$;

в) $\displaystyle\gamma_n = \int\limits_{\pi n}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx \quad (p > 0)$.

1.6. Докажите, что при $\varepsilon \to +0$

а) $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{1+\varepsilon}}\,dx \sim \frac{1}{2\varepsilon}$; б) $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^{1+\varepsilon}}\,dx \sim \frac{1}{2\varepsilon}$;

в) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\varepsilon}}\,dx \to 1$; г) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\varepsilon}}\,dx \sim \frac{\pi}{2}\,\varepsilon$.

1.7. Докажите, что при $p \to +\infty$

а) $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^p)\,dx \sim \pi/(2p)$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \cos(x^p)\,dx \to 1$.

1.8. Пусть функция φ непрерывна на $\mathbb{R}$ и имеет период $T > 0$, причем $C_\varphi = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \varphi(t)\,dt \neq 0$. Докажите, что

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^{1+\varepsilon}}\,dt \sim \frac{C_\varphi}{\varepsilon} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

1.9. Докажите, что при $A \to +\infty$

а) $\int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin Ax}{\sin x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}A + O(1)$;

б) $\int\limits_0^{1} \frac{\cos Ax}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2A}} + O\left(\frac{1}{A}\right)$;

в) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x\,dx}{1+\cos^2 Ax} \to \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$;

г) $\int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin Ax}{\sin x}\right)^4 dx = \frac{\pi}{3}A^3 + O(A)$.

1.10. Найдите асимптотику при $A \to +\infty$ следующих интегралов:

а) $\int\limits_0^{A} \frac{\sin^2 x}{x^p}\,dx \quad (p \leqslant 1)$;

б) $\int\limits_1^{A} \frac{|\sin x|^p\,|\cos x|}{x}\,dx \quad (p > -1)$;

в) $\int\limits_0^{A} \frac{|\sin x|}{x^p}\,dx \quad (p \leqslant 1)$;

г) $\int\limits_A^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p}\,dx \quad (p > 1)$.

1.11. Пусть функция f убывает к нулю на $[a; +\infty)$, а функция φ непрерывна на $\mathbb{R}$ и имеет период $T>0$, причем $\int\limits_0^T \varphi(t)\,dt = 0$. Докажите, что

$$\left|\int\limits_A^{+\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt\right| \leqslant f(A)\int\limits_0^T |\varphi(t)|\,dt \quad \text{при} \quad A \geqslant a.$$

1.12. Пусть функция f убывает к нулю на $[a; +\infty)$, а функция φ непрерывна на $\mathbb{R}$ и имеет период $T>0$. Докажите, что

$$\int\limits_a^A f(t)\,\varphi(t)\,dt \doteq C_\varphi \int\limits_a^A f(t)\,dt + I + O(f(A)),$$

где

$$C_\varphi = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \varphi(t)\,dt, \qquad I = \int\limits_a^{+\infty} (\varphi(t) - C_\varphi)\,f(t)\,dt.$$

1.13. Пусть функция f неотрицательна и монотонна на $[a; +\infty)$, а функция φ непрерывна на $\mathbb{R}$ и имеет период $T>0$, причем

$$C_\varphi = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \varphi(t)\,dt \neq 0.$$

Докажите, что

а) если $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty$ и $\int\limits_A^{A+1} f(t)\,dt = o\left(\int\limits_a^A f(t)\,dt\right)$, то

$$\int\limits_a^A f(t)\,\varphi(t)\,dt \sim C_\varphi \int\limits_a^A f(t) \quad \text{при} \quad A \to +\infty;$$

б) если $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt < +\infty$ и $\int\limits_A^{A+1} f(t)\,dt = o\left(\int\limits_A^{+\infty} f(t)\,dt\right)$, то

$$\int\limits_A^{+\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt \sim C_\varphi \int\limits_A^{+\infty} f(t)\,dt \quad \text{при} \quad A \to +\infty.$$

1.14. Пусть $f \in C([a; b])$, а функция φ непрерывна на $\mathbb{R}$ и имеет период $T>0$; $C_\varphi = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \varphi(t)\,dt$. Докажите,

что
$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^b f(t)\,\varphi(At)\,dt = C_\varphi\int_a^b f(t)\,dt.$$

1.15. Пусть $f\in C([a;\ b]\times[-1;\ 1])$. Докажите, что
$$I(A)=\int_a^b f(x,\sin Ax)\,dx \underset{A\to+\infty}{\to} \frac{1}{2\pi}\int_a^b\left(\int_0^{2\pi} f(x,\sin t)\,dt\right)dx.$$

1.16. Найдите асимптотику при $\varepsilon\to+0$ следующих интегралов:

а) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x(1-x^{-\varepsilon})}\,dx$; б) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x(x^{\varepsilon}-1)}\,dx$.

1.17. Докажите, что при $\varepsilon\to+0$

а) $\displaystyle\int_0^1 x^{\varepsilon x}\,dx = 1-\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{27}+O(\varepsilon^3)$;

б) $\displaystyle\int_0^1 e^{-\varepsilon/\sqrt{x}}\,dx = 1-2\varepsilon-\varepsilon^2\ln\varepsilon+O(\varepsilon^2)$;

в) $\displaystyle\int_0^1 e^{-\varepsilon/(x\ln^2(x/e))}\,dx = 1-\varepsilon-\frac{\varepsilon}{\ln\varepsilon}+o\left(\frac{\varepsilon}{\ln\varepsilon}\right)$.

1.18. Пусть функция f положительна и интегрируема на промежутке $(0;\ 1)$ и для некоторого числа p из промежутка $(1;\ 2]$ конечен интеграл $\displaystyle\int_0^1 |\ln f(x)|^p\,dx$. Докажите, что
$$\int_0^1 f^{\varepsilon}(x)\,dx = 1+\varepsilon\int_0^1 \ln f(x)\,dx + O(\varepsilon^p),\quad \varepsilon\to+0.$$

1.19. Докажите, что

а) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{|\sin nx|}{x}\,dx\sim\frac{2}{\pi}\ln n$; б) $\displaystyle\int_0^{\pi}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sin kx|\frac{dx}{x}\sim\ln n$;

в) $\displaystyle\int_0^{\pi}\max_{2\leqslant k\leqslant n}\frac{|\sin kx|}{\ln k}\frac{dx}{x}\sim\ln\ln n$.

§ 2. Метод Лапласа

2.1. Пусть $f \in C([0;\ \pi/2])$. Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^{\pi/2} x f(x) \cos^n x\, dx.$$

2.2. Пусть $\theta > 0$ и $C_\theta = \int_0^\theta e^{-t^2}\, dt$. Докажите, что при $A \to +\infty$

а) $\displaystyle\int_0^{\theta/\sqrt{A}} (1 - x^2)^A\, dx \sim \frac{C_\theta}{\sqrt{A}}$; б) $\displaystyle\int_0^{\theta/\sqrt{A}} \frac{dx}{(1 + x^2)^A} \sim \frac{C_\theta}{\sqrt{A}}$.

2.3. Пусть $\theta > 0$. Найдите асимптотику при $A \to +\infty$ интеграла

$$\int_0^{\theta/\sqrt{A}} \cos^A x\, dx.$$

2.4. Убедитесь в том, что асимптотика при $A \to +\infty$ следующих интегралов не зависит от параметра $\theta > 0$:

а) $\displaystyle\int_0^\theta (1 - x^2)^A\, dx$ $(\theta \leqslant 1)$; б) $\displaystyle\int_0^\theta \frac{dx}{(1 + x^2)^A}$;

в) $\displaystyle\int_0^\theta \cos^A x\, dx$ $(\theta \leqslant \pi/2)$; г) $\displaystyle\int_0^\theta \frac{dx}{(1 + x + x^2)^A}$;

д) $\displaystyle\int_0^\theta \left(\frac{\ln(1 + x)}{x}\right)^A dx$; е) $\displaystyle\int_0^\theta \left(\frac{\sin x}{x}\right)^A dx$ $(\theta \leqslant \pi)$;

ж) $\displaystyle\int_0^\theta \ln^A (e - x)\, dx$ $(\theta \leqslant e - 1)$.

2.5. Найдите асимптотику при $A \to +\infty$ следующих интегралов:

а) $\displaystyle\int_0^1 (1 - x^p)^A\, dx$ $(p > 0)$; б) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^p)^A}$ $(p > 0)$;

в) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^p \cos^A x\, dx$ $(p > -1)$.

Характерная особенность задач 2.2—2.5 заключается в явлении локализации — асимптотика интеграла зависит от поведения подынтегральной функции лишь в окрестности одной точки. Этот эффект отчетливо проявляется и в более общей ситуации при изучении важных интегралов вида

$$\Phi(A) = \int_a^b \varphi^A(x)\,dx,$$

где функция φ неотрицательна и кусочно монотонна. При больших значениях параметра A график функции φ^A имеет резко выраженные «горбы» в окрестностях тех точек, в которых функция φ имеет строгий локальный максимум. Разбивая при необходимости промежуток $[a;\ b]$ на несколько промежутков, можно считать, что φ монотонна на $[a;\ b]$. При этом достаточно рассмотреть лишь случай, когда φ убывает. Тогда значения функции φ^A в точках, далеких от точки a, пренебрежимо малы по сравнению с ее значениями в точках, близких к a, которые и дают основной вклад в интеграл $\Phi(A)$. Для нахождения главной части $\Phi(A)$ остается аппроксимировать в окрестности точки a функцию φ более простой и вычислить получившийся интеграл. В реализации изложенной схемы и заключается метод Лапласа исследования интегралов вида $\Phi(A)$, а также их модификаций.

Чаще всего встречается случай, когда разность $\varphi(a) - \varphi(x)$ является бесконечно малой степенного типа, т. е.

$$\varphi(a) - \varphi(x) \underset{x \to a+0}{\sim} C(x-a)^\sigma \qquad (C,\ \sigma > 0).$$

Он исследуется в задаче 2.6. Получающийся при этом результат называют асимптотической формулой Лапласа (в задаче 2.6 ради краткости формулировки предположено, что $\varphi(a) = 1$). Читатель без труда сформулирует аналогичное утверждение, если функция φ возрастает на $[a;\ b]$ и

$$\varphi(b) - \varphi(x) \underset{x \to b-0}{\sim} C\ (b - x)^\sigma.$$

Отсюда сразу вытекает асимптотическая формула Лапласа и для кусочно монотонной функции.

2.6. Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, функция φ положительна и убывает на $[a; b)$, $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx < +\infty$ и

$$1 - \varphi(x) \underset{x \to a+0}{\sim} C(x-a)^{1/p} \qquad (C,\ p > 0).$$

Докажите, что

$$\Phi(A) = \int\limits_a^b \varphi^A(x)\,dx \underset{A \to +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(1+p)}{(AC)^p}.$$

В частности, $\Phi(A) \sim 1/(AC)$ при $p = 1$, $\Phi(A) \sim \frac{1}{2}\sqrt{\pi/AC}$ при $p = 1/2$.

2.7. Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, функция φ положительна и убывает на $[a; b)$, $\int\limits_a^b \varphi(x)dx < +\infty$ и $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{1-\varphi(x)}{(x-a)^{1/p}} = +\infty$ при некотором $p > 0$. Докажите, что $\int\limits_a^b \varphi^A(x)\,dx = o\left(A^{-p}\right)$ при $A \to +\infty$.

2.8. Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, функции f и g абсолютно интегрируемы на промежутке $(a; b)$, $f > 0$ и $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a+0$. Пусть, далее, функция φ неотрицательна и строго убывает на $[a; b)$. Докажите, что

$$\int\limits_a^b g(x)\,\varphi^A(x)\,dx \underset{A\to+\infty}{\sim} \int\limits_a^b f(x)\,\varphi^A(x)\,dx.$$

2.9. Найдите асимптотику при $A \to +\infty$ следующих интегралов:

а) $\int\limits_0^\pi \sin^A x\,dx$;

б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{(1+x^2)^A}\,dx$ $(a \in \mathbb{R})$;

в) $\int\limits_0^A e^x (A-x)^A\,dx$;

г) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\frac{dx}{e^{Ax}}$ $(p < 2)$;

д) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\left((1+x)^{1+x}(1-x)^{1-x}\right)^A}$;

е) $\int\limits_0^{\pi/2} (\cos x)\, e^{-A\sqrt{\sin 2x}}\,dx$;

ж) $\int\limits_0^{+\infty} e^{A(x-x^p)}\,dx$ $(p > 1)$;

з) $\int\limits_0^1 x^{Ax}dx$.

2.10. Найдите асимптотику при $n \to +\infty$ ($n \in \mathbb{N}$) следующих интегралов:

а) $\int\limits_0^{\pi} (a + \cos x)^n \, dx$ $(a > 0)$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx$;

в) $\int\limits_0^2 (1 - 4x + 2x^2)^n \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

В следующих задачах рассматриваются интегралы вида $\Phi(A) = \int\limits_a^b f_A(x) \, dx$, где функция f_A, не будучи уже функцией вида, рассмотренного в задаче 2.6, сохраняет, однако, ее характерную особенность: с ростом A график функции f_A имеет все более резко выраженный «горб» в окрестности той точки x_A, в которой f_A достигает наибольшего значения. Хотя результат задачи 2.6 здесь не применим, тем не менее идея решения сохраняется: представив функцию f_A в виде $e^{\ln f_A}$ и заменив в некоторой окрестности точки x_A функцию $\ln f_A$ ее тейлоровским разложением, а интеграл по промежутку $(a;\ b)$ — интегралом по окрестности точки x_A, находим главную часть $\Phi(A)$. Основную трудность при этом представляет выбор окрестности. С одной стороны, она должна быть не слишком большой, так как в противном случае скажется погрешность, вызванная применением формулы Тейлора. С другой стороны, для нейтрализации второй погрешности, возникающей при замене интеграла по промежутку $(a;\ b)$ интегралом по окрестности, ее нельзя брать слишком малой. Удачный выбор окрестности, который позволил бы хорошо оценить обе указанные погрешности, и составляет главное содержание решения.

Отметим также, что в случае, когда $x_A \to x_0$ при $A \to +\infty$, может оказаться более удобным рассматривать тейлоровское разложение функции $\ln f_A$ в окрестности точки x_0.

2.11. Найдите асимптотику при $A \to +\infty$ следующих интегралов:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)^A \frac{dx}{e^{x\sqrt{A}}}$; б) $\int\limits_0^1 (Ax)^{px} \, dx$ $(p > 0)$;

в) $\int\limits_0^A e^{x^p}(A-x)^A\,dx\ \ (0<p<1)$.

2.12. Докажите, что для любого вещественного числа p

$$\int\limits_0^1 |\ln x|^p (1-x)^A\,dx \underset{A\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^p A}{A}.$$

2.13. Докажите, что при $A\to+\infty$

а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(Ax)^x} \sim \frac{1}{\ln A}$; б) $\int\limits_0^{1/2} x^{Ax}\,dx \sim \frac{1}{A\ln A}$.

В следующих задачах изучаются асимптотические свойства Г-*функции Эйлера*

$$\Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt,\qquad x>0.$$

2.14. Докажите *формулу Стирлинга* $\Gamma(1+x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x}\,(x/e)^x$.

2.15. Докажите, что $\Gamma(x+c) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^c\Gamma(x)$ для любого $c\in\mathbb{R}$.

2.16. Докажите, что $\int\limits_0^x t^x e^{-t}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\Gamma(1+x)$.

2.17. Пусть φ — положительная функция, определенная на $(0;+\infty)$. Докажите следующие утверждения:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)-x}{\sqrt{x}}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\Gamma(1+x)}\int\limits_0^{\varphi(x)} t^x e^{-t}\,dt=\frac{1}{2}$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)-x}{\sqrt{x}}=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\Gamma(1+x)}\int\limits_0^{\varphi(x)} t^x e^{-t}\,dt=1$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)-x}{\sqrt{x}}=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\Gamma(1+x)}\int\limits_0^{\varphi(x)} t^x e^{-t}\,dt=0$.

§ 3. Асимптотика сумм

3.1. Пусть $a_n > 0$, $a_n \to 0$. Докажите, что

а) если $\sum a_n = +\infty$ и $b_n \sim a_n$, то $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} b_k \sim \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k$;

б) если $\sum a_n = +\infty$ и $b_n = o(a_n)$, то $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} b_k = o\left(\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k\right)$;

в) если $\sum a_n < +\infty$ и $b_n \sim a_n$, то $\sum\limits_{k\geqslant n} b_k \sim \sum\limits_{k\geqslant n} a_k$;

г) если $\sum a_n < +\infty$ и $b_n = o(a_n)$, то $\sum\limits_{k\geqslant n} b_k = o\left(\sum\limits_{k\geqslant n} a_k\right)$.

3.2. Пусть $a_n \downarrow 0$, $\gamma \geqslant 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Докажите, что

а) если $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} k^\alpha a_k = O(n^\gamma)$, то $a_n = O(n^{\gamma-\alpha-1})$;

б) если $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} k^\alpha a_k = o(n^\gamma)$, то $a_n = o(n^{\gamma-\alpha-1})$;

в) если $\sum\limits_{k\geqslant n} k^\alpha a_k = O(n^{-\gamma})$, то $a_n = O(n^{-\gamma-\alpha-1})$;

г) если $\sum\limits_{k\geqslant n} k^\alpha a_k = o(n^{-\gamma})$, то $a_n = o(n^{-\gamma-\alpha-1})$.

3.3. Пусть $\gamma > 0$ и $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} k^\alpha x_k \sim n^\gamma$. Докажите, что

а) если $\gamma > \alpha$, то $S_n = x_1 + \ldots + x_n \sim \dfrac{\gamma}{\gamma-\alpha} n^{\gamma-\alpha}$;

б) если $\gamma = \alpha$, то $S_n = x_1 + \ldots + x_n \sim \gamma \ln n$;

в) если $\gamma < \alpha$, то ряд $\sum x_n$ сходится и

$$\sigma_n = \sum_{k\geqslant n} x_k \sim \frac{\gamma}{\alpha-\gamma} n^{\gamma-\alpha}.$$

3.4. Пусть $\gamma > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и ряд $\sum k^\alpha x_k$ сходится, причем $\sum\limits_{k\geqslant n} k^\alpha x_k \sim n^{-\gamma}$. Докажите, что

а) если $\gamma < -\alpha$, то $S_n = x_1 + \ldots + x_n \sim \dfrac{\gamma}{|\alpha+\gamma|} n^{-\alpha-\gamma}$;

б) если $\gamma = -\alpha$, то $S_n = x_1 + \ldots + x_n \sim \gamma \ln n$;

в) если $\gamma > -\alpha$, то ряд $\sum x_n$ сходится и

$$\sigma_n = \sum_{k\geqslant n} x_k \sim \frac{\gamma}{\alpha+\gamma} n^{-\alpha-\gamma}.$$

3.5. Пусть $a_n \downarrow 0$, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \sim \dfrac{n^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, где $0 < \gamma < 1$.

а) Докажите, что $a_n \sim n^{-\gamma}$.

б) Можно ли утверждать, что $a_n \sim 1/n$, если $S_n \sim \ln n$?

3.6. Пусть $a_n \downarrow 0$ и $\sum a_n < +\infty$, причем $\sum\limits_{k\geqslant n} a_k \sim n^{-\gamma}$, где $\gamma > 0$. Докажите, что $a_n \sim \gamma n^{-1-\gamma}$.

3.7. Пусть $\alpha > 0$ и $x_n = \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n^\alpha} \frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$. Докажите, что $x_n \sim \min(1;\ \alpha)\ln n$.

3.8. Пусть $\tau(k)$ — число делителей натурального числа k. Докажите, что

$$T(n) = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \tau(k) = n(\ln n + 2\gamma - 1) + O(\sqrt{n}).$$

Здесь γ — константа Эйлера (см. задачу II.2.9).

3.9. Пусть $\alpha_n \downarrow 0$, $\sum \alpha_n < +\infty$ и $f(t) = t\sum \frac{\alpha_n}{1+t^2\alpha_n}$ при $t \geqslant 0$. Докажите, что поведение функции f при $t \to +\infty$ тесно связано с поведением последовательности $\{n\sqrt{\alpha_n}\}$, точнее, существует такое число $C > 0$, что справедливы неравенства

а) $\sup\limits_{t\geqslant 0} f(t) \leqslant C \sup n\sqrt{\alpha_n}$;

б) $\varlimsup\limits_{t\to+\infty} f(t) \leqslant C \varlimsup n\sqrt{\alpha_n}$;

в) $\varliminf n\sqrt{\alpha_n} \leqslant C \varliminf\limits_{t\to\infty} f(t)$.

3.10. Пусть $f\colon [0;+\infty)\to\mathbb{R}$ — неотрицательная невозрастающая функция, $\varphi(h) = h\sum f(kh)$, $h > 0$. Докажите, что

$$\lim_{h\to+0} \varphi(h) = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Верно ли это, если функция f непрерывна, но не монотонна?

3.11. Определите асимптотику следующих сумм при $t \to +\infty$:

а) $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2+t^2}$; б) $\sum\limits_{k\geqslant 1} e^{-k^2/t}$.

3.12. Пусть $f(p) = \sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ при $p > 0$. Докажите, что $f(p) = \frac{1}{2} + O(p)$.

3.13. Пусть функция f неотрицательна и убывает на $[1; +\infty)$. Докажите, что

а) если $\int\limits_1^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty$, то

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} f(k) = \int\limits_1^{n+1} f(t)\,dt + C + o(1), \quad 0\leqslant C\leqslant f(1),$$

в частности, $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} f(k) \sim \int\limits_1^{n} f(t)\,dt$;

б) если $\int\limits_1^{+\infty} f(t)\,dt < +\infty$, то

$$\sum_{k\geqslant n} f(k) = \int\limits_n^{+\infty} f(t)\,dt + O(f(n)),$$

в частности, если $f(x) = o\left(\int\limits_x^{+\infty} f(t)\,dt\right)$ при $x\to+\infty$, то

$$\sum_{k\geqslant n} f(k) \sim \int\limits_n^{+\infty} f(t)\,dt.$$

3.14. Если функция f монотонна на $[m; n]$ $(m, n\in\mathbb{Z})$, то

$$\left|\sum_{m\leqslant k\leqslant n} f(k) - \int\limits_m^n f(t)\,dt\right| \leqslant \max(|f(n)|; |f(m)|).$$

В частности, если f монотонна на $[1; +\infty)$, $\int\limits_1^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty$ и $f(x) = o\left(\int\limits_1^{x} f(t)\,dt\right)$ при $x\to+\infty$, то

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} f(k) \sim \int\limits_1^{n} f(t)\,dt.$$

3.15. Пусть $M, N\in\mathbb{Z}$, $M\leqslant N$, функция f (вообще говоря, комплекснозначная) интегрируема на промежутке $[M-1/2; N+1/2]$, и пусть

$$\Delta = \sum_{M\leqslant k\leqslant N} f(k) - \int\limits_{M-1/2}^{N+1/2} f(t)\,dt.$$

а) Докажите, что $|\Delta| \leqslant \frac{1}{2} \operatorname*{Var}_{M-1/2}^{N+1/2}(f)$. В частности, если f монотонна, то

$$|\Delta| \leqslant \frac{1}{2} |f(N+1/2) - f(M-1/2)|.$$

б) Если $f \in C^2([M-1/2; N+1/2])$, то

$$\Delta = -\frac{1}{2} \int\limits_{M-1/2}^{N+1/2} \left(t - [t] - \frac{1}{2}\right)^2 f''(t)\, dt,$$

и, следовательно,

$$|\Delta| \leqslant \frac{1}{8} \int\limits_{M-1/2}^{N+1/2} |f''(t)|\, dt.$$

В частности, если f выпукла или вогнута, то

$$|\Delta| \leqslant \frac{1}{8} \left| f'\left(N + \frac{1}{2}\right) - f'\left(M - \frac{1}{2}\right)\right|.$$

3.16. Докажите, что

$$\prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \sim A \frac{e^{2\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \text{ и } \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right) \sim$$

$$\sim B \sqrt[3]{n} e^{\frac{3}{2}(n^{2/3} - n^{1/3})}$$

для некоторых положительных чисел A и B.

3.17. Пусть $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ и

$$\binom{n-\alpha}{n} = \frac{(n-\alpha)(n-\alpha-1)\ldots(1-\alpha)}{n!}.$$

Докажите, что существует такое число $C_\alpha \neq 0$, что $\binom{n-\alpha}{n} \sim \frac{C_\alpha}{n^\alpha}$.

3.18. Докажите, что

а) $\sqrt[n^2]{1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \ldots n^n} \sim \sqrt{n}/\sqrt[4]{e}$;

б) $\sqrt[n^3]{1!\,(2!)^2\,(3!)^3 \ldots (n!)^n} \sim \sqrt[3]{n}/e^{4/9}$;

в) $\sqrt[n]{1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \ldots n^n} \sim (n/\sqrt{e})^{n/2} \sqrt{n}$.

3.19. Пусть $\alpha > 0$. Докажите, что при $n \to +\infty$ $(n \in \mathbb{N})$

а) $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} k^{\alpha k/n} \sim \dfrac{n^{1+\alpha}}{\alpha \ln n}$; б) $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} k^{-\alpha k/n} \sim \dfrac{n}{\alpha \ln n}$;

в) $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (k!)^{-\alpha/n} \sim \dfrac{n}{\alpha \ln n}$; г) $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} k^{\alpha n} \sim \dfrac{n^{\alpha n}}{1 - e^{-\alpha}}$.

3.20. Докажите, что $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \dfrac{n^k}{k!} \sim \dfrac{1}{2} e^n$.

3.21. Докажите, что $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \sqrt{C_n^k} \sim \sqrt[4]{2\pi n}\, 2^{n/2}$.

3.22. Пусть $N \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ и $\operatorname{Re} z > 0$. Докажите, что

$$\sum_{n \geqslant N} \frac{1}{n} e^{-z\sqrt{n}} = e^{-z\sqrt{N}} \left(\frac{2}{z} + O\left(\frac{1}{N} + \frac{|z|}{\sqrt{N}}\right)\right),$$

где константа в O-члене не зависит от z и N.

3.23. Пусть $N \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ и $\operatorname{Re} z > 0$. Докажите, что

$$\sum_{n \geqslant N} e^{-z\sqrt{n}} = \frac{2}{z} e^{-z\sqrt{N-1/2}} \left(\sqrt{N-1/2} + \frac{1}{z} + z^2 O\left(1 + \frac{|z|^2}{\sqrt{N}}\right)\right),$$

где константа в O-члене не зависит от z и N.

3.24. Пусть $\alpha \in (0;\ 1)$. Докажите, что при $x \to +0$

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\cos nx}{n^\alpha} = \frac{A}{x^{1-\alpha}} + O(1)$$

и

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin nx}{n^\alpha} = \frac{B}{x^{1-\alpha}} + O(1),$$

где A, B — положительные числа, зависящие от α.

3.25. Докажите, что существует такое число $\alpha_0 \in (0;\ 1)$, что для любого $\alpha \geqslant \alpha_0$ частичные суммы ряда $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{\cos nx}{n^\alpha}$ равномерно ограничены снизу, а для любого $\alpha \in (0;\ \alpha_0)$ это неверно.

Что можно сказать об ограниченности снизу частичных сумм ряда

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin nx}{n^\alpha}, \qquad x \in [0, \pi]?$$

3.26. Пусть $\psi \in C^1([a;\ +\infty))$, ψ, $\psi' > 0$ и $\psi = O(\psi')$ на $[a;\ +\infty)$. Докажите, что

$$\int\limits_a^{+\infty} e^{-\varepsilon\psi(t)}\, dt = \psi^{-1}(1/\varepsilon) + O(1) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

3.27. Найдите асимптотику при $t \to 1-0$ сумм рядов *)

а) $\sum \frac{1}{n} t^{\ln^p n}$ $(p>0)$; б) $\sum t^{\ln^p n}$ $(p>1)$;

в) $\sum t^{n^p}$ $(p>0)$; г) $\sum t^{a^n}$ $(a>1)$;

д) $\sum t^{(an)^n}$ $(a>0)$; е) $\sum t^{n!}$.

3.28. Найдите асимптотику при $t \to 1-0$ сумм рядов

а) $\sum n^p t^n$ $(p>-1)$; б) $\sum\limits_{n\geqslant 2} (\ln n)^p t^n$ $(p \in \mathbb{R})$.

3.29. Найдите асимптотику при $t \to 1-0$ сумм рядов

а) $\sum \frac{t^n}{1+t^n}$; б) $\sum \frac{nt^n}{1+t^n}$;

в) $\sum \frac{t^n}{(1+t^n)^2}$; г) $\sum \frac{nt^n}{(1+t^n)^2}$;

д) $\sum \frac{t^n}{1-t^n}$; е) $\sum \frac{nt^n}{1-t^n}$;

ж) $\sum \frac{t^n}{(1-t^n)^2}$; з) $\sum \frac{nt^n}{(1-t^n)^2}$;

и) $\sum \frac{(-1)^n t^n}{1-t^n}$; к) $\sum \frac{(-1)^n nt^n}{1-t^n}$;

л) $\sum \frac{(-1)^n t^n}{(1-t^n)^2}$; м) $\sum \frac{(-1)^n nt^n}{(1-t^n)^2}$.

3.30. Найдите асимптотику при $t \to 1-0$ сумм рядов

а) $\sum \frac{t^n}{1+t^{2n}}$; б) $\sum \frac{t^n}{(1+t^{2n})^2}$; в) $\sum \frac{nt^n}{1-t^{2n}}$;

г) $\sum \frac{t^n}{1-t^{2n}}$; д) $\sum \frac{t^n}{(1-t^{2n})^2}$.

3.31. Найдите асимптотику при $t \to 1-0$ сумм рядов

а) $T(t) = \sum \tau(n) t^n$; б) $S(t) = \sum \sigma(n) t^n$,

где $\tau(n)$ — число делителей, $\sigma(n)$ — сумма делителей числа n.

---

*) Напомним, что $\sum a_n$ — обозначение ряда $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$.

§ 4. Асимптотика неявных функций и рекуррентных последовательностей

4.1. Пусть $z(t) = \int\limits_t^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du$ $(t \in \mathbb{R})$, $t(z)$ — обратная к $z(t)$ функция. Докажите, что $t(z) \sim \sqrt{2\ln(1/z)}$ при $z \to +0$.

4.2. Пусть x_n — корень уравнения $x = \operatorname{tg} x$, лежащий в интервале $(\pi n;\ \pi(n+1))$, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что

$$x_n = \pi n + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

4.3. Докажите, что каждое из следующих уравнений определяет в некоторой окрестности точки $(a;\ b)$ бесконечно дифференцируемую неявную функцию y, и найдите коэффициенты разложения

$$y(x) = b + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$$

а) $ye^y - x = 0$, $\quad a = b = 0$, $\quad n = 3$;

б) $y^2 + \ln^2 y - x = 0$, $\quad a = b = 1$, $\quad n = 3$;

в) $xy + e^{xy} - x = 0$, $\quad a = 1,\ b = 0$, $\quad n = 3$;

г) $y \ln y - x = 0$, $\quad a = 0,\ b = 1$, $\quad n = 3$;

д) $e^{xy} + x^2 + y - 1 = 0$, $\quad a = b = 0$, $\quad n = 6$;

е) $\operatorname{arctg}(x+y) - x - 2y = 0$, $\quad a = b = 0$, $\quad n = 6$.

4.4. Докажите, что уравнение Кеплера $y = M + x\sin y$, где M — фиксированный положительный параметр, определяет в окрестности точки $(0;\ M)$ бесконечно дифференцируемую функцию y, причем $y(x) = M + x\sin M + x^2\dfrac{\sin 2M}{2} + O(x^3)$ при $x \to 0$.

4.5. Убедитесь в том, что область определения неявных функций, рассматриваемых в задаче 4.3, содержит полуось $[\alpha;\ +\infty)$, и докажите, что при $x \to +\infty$

а) $y(x) = \ln x - \ln\ln x + \dfrac{\ln\ln x}{\ln x} + o\left(\dfrac{\ln\ln x}{\ln x}\right)$;

б) $y(x) = \sqrt{x} - \dfrac{\ln^2 x}{8\sqrt{x}} + \dfrac{\ln^4 x}{128x\sqrt{x}} + o\left(\dfrac{\ln^4 x}{x\sqrt{x}}\right)$;

в) $y(x) = \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{\ln x}{x^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\ln^2 x}{x^3} + o\left(\dfrac{\ln^2 x}{x^3}\right)$;

г) $y(x) = \dfrac{x}{\ln x} + \dfrac{x\ln\ln x}{\ln^2 x} + \dfrac{x(\ln\ln x)^2}{\ln^3 x} + O\left(\dfrac{x\ln\ln x}{\ln^3 x}\right)$;

д) $y(x) = -x^2 + 1 - e^{x-x^3} + O\left(xe^{2(x-x^3)}\right)$;

е) $y(x) = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

4.6. Пусть $x_n = h(x_{n-1})$, где $h(x) = \frac{x}{(1+ax^p)^{1/p}}$ при $x \geqslant 0$ (a и p — положительные постоянные). Докажите, что

$$x_n \sim \frac{1}{(an)^{1/p}} \quad (x_0 > 0).$$

4.7. Пусть $x_0 = 10^{-3}$, $x_n = x_{n-1} - x_{n-1}^2$ ($n \in \mathbb{N}$). Докажите, что $x_{1000} \approx \frac{1}{2} 10^{-3}$ с точностью 10^{-6}.

4.8. Найдите асимптотику рекуррентных последовательностей $x_n = f(x_{n-1})$, $x_0 > 0$, в следующих случаях:

а) $f(x) = x(1-x)$, $x_0 < 1$; б) $f(x) = \sin x$, $x_0 < \pi$;

в) $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$; г) $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

д) $f(x) = \ln(1+x)$; е) $f(x) = 1 - e^{-x}$;

ж) $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$; з) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$.

4.9. Пусть C, p, $x_0 > 0$ и $x_n = x_{n-1} + Cx_{n-1}^{1-p}$. Докажите, что

а) $x_n \sim (Cpn)^{1/p}$; б) $x_n = (Cpn)^{1/p}\left(1 + \frac{p-1}{2p^2}\frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

4.10. Постройте такую положительную на $(0; +\infty)$ функцию f, что рекуррентная последовательность $x_n = f(x_{n-1})$, $x_0 > 0$, удовлетворяет соотношению $x_n \sim 1/\ln n$.

4.11. Пусть $x_0 \in (-1; 2)$, $x_n = x_{n-1}(x_{n-1} - 1)$ ($n \in \mathbb{N}$). Найдите асимптотику последовательности $\{x_n\}$.

4.12. Пусть $a_0 = 1$, $a_n = a_{n-1} + \left(\sum\limits_{0 \leqslant k < n} a_k\right)^{-1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Докажите, что $a_n \sim \sqrt{2 \ln n}$.

4.13. Пусть $|p| < 1$, $a_0 = 1$, $a_n = a_{n-1} + \left(\sum\limits_{0 \leqslant k < n} a_k\right)^{-p}$ ($n \in \mathbb{N}$). Найдите асимптотику последовательности $\{a_n\}$.

4.14. Пусть $p \in \mathbb{R}$, $a_0 = 1$, $a_n = a_{n-1} + \left(\sum\limits_{0 \leqslant k < n} a_k^p\right)^{-1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Найдите асимптотику последовательности $\{a_n\}$.

§ 1. Выпуклость

Функция $f\colon \langle a;\ b\rangle \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой* (*строго выпуклой*), если для всех точек $x_1,\ x_2 \in \langle a;\ b\rangle$ и чисел $\lambda_1,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1$, выполняется неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

$$(f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2))$$

при $x_1 \neq x_2$. Если функция $(-f)$ выпукла, то функция f называется *вогнутой.*

1.1. Докажите, что выпуклая функция f удовлетворяет *неравенству Иенсена*

$$f\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant n} \lambda_j x_j\right) \leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \lambda_j f(x_j)$$

для любых

$$x_1,\ \ldots,\ x_n \in \langle a;\ b\rangle,\quad \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n \in [0;\ 1],\quad \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \lambda_j = 1.$$

1.2. Пусть функция f задана на промежутке $\langle a,\ b\rangle$, $x_1 < x < x_3$ — точки из $\langle a;\ b\rangle$. Рассмотрим хорды, соединяющие точки графика f с абсциссами $x_1,\ x_2;\ x_1,\ x_3$ и $x_2,\ x_3$. Угловые коэффициенты этих хорд суть соответственно

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},\quad \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},\quad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Докажите, что для выпуклости функции f необходимо и достаточно, чтобы для любой тройки точек $x_1 < x_2 < x_3$ из $\langle a;\ b\rangle$ выполнялось неравенство

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

(лемма о трех хордах). Проверьте, что указанное выше двойное неравенство равносильно тому, что

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \\ 1 & x_3 & f(x_3) \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

1.3. Пусть функция f, заданная на промежутке Δ, удовлетворяет неравенству

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$$

для всех $x_1, x_2 \in \Delta$. Докажите, что:

а) f удовлетворяет *неравенству Иенсена*

$$f\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant n}\lambda_j x_j\right)\leqslant\sum_{1\leqslant j\leqslant n}\lambda_j f(x_j),\quad x_j\in\Delta\qquad (j=1,\ \ldots,\ n)$$

для любых рациональных $\lambda_j\in[0;\ 1]$, $\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\lambda_j=1$;

б) если функция f непрерывна, то она выпукла.

1.4. Докажите, что условие непрерывности в задаче 1.3.б) можно заменить следующим: функция f ограничена сверху на каком-нибудь непустом интервале $(p;\ q)\subset\Delta=\langle a;\ b\rangle$ (или даже на $(p;\ q)\setminus\mathbb{Q}$).

1.5. Докажите, что для функции $f\colon (a;\ b)\to\mathbb{R}$ равносильны три утверждения:

а) f выпукла;

б) надграфик

$$\Gamma^+=\{(x;\ y)\in\mathbb{R}^2\mid x\in(a;\ b),\ y\geqslant f(x)\}$$

функции f — выпуклое множество;

в) через каждую точку графика функции f можно провести опорную для надграфика прямую (т. е. такую прямую, что все точки надграфика лежат выше нее).

1.6. Докажите, что если f — выпуклая на $[0;\ 1]$ функция, то функция $\varphi(x)=f(x)+f(1-x)$ убывает на $[0;\ 1/2]$.

1.7. Докажите, что если функция, заданная на промежутке, выпукла локально, то она выпукла.

1.8. Докажите, что выпуклая функция f, заданная на $\langle a;\ b\rangle$, непрерывна на $(a;\ b)$ и имеет там конечные возрастающие односторонние производные $f'_-(x)$, $f'_+(x)$, а $f'(x)$ существует всюду, за исключением не более чем счетного множества точек. Докажите, что $f\in \mathrm{Lip}_1(\Delta)$ для любого замкнутого промежутка $\Delta\subset(a;\ b)$.

1.9. Докажите, что функция $f\in C((a;\ b))$ выпукла тогда и только тогда, когда для всех $x\in(a;\ b)$ выполняется неравенство

$$L_f(x)=\varlimsup_{h\to 0}h^{-2}(f(x+h)-2f(x)+f(x-h))\geqslant 0.$$

В частности, если $L_f(x)=0$ при всех $x\in(a;\ b)$, то f — линейная функция; если f дважды дифференцируема в $(a;\ b)$, то она выпукла тогда и только тогда, когда $f''\geqslant 0$ в $(a;\ b)$.

1.10. Докажите, что для выпуклости функции $f\in C(\langle a;\ b\rangle)$ необходимо и достаточно, чтобы для всех $x\in(a;\ b)$ и таких $h>0$, что $x+h,\ x-h\in\langle a;\ b\rangle$, выполнялось неравенство

$$f(x)\leqslant\frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h}f(t)\,dt.$$

1.11. Всякая выпуклая на $[a;\ b]$ непрерывная функция является пределом равномерно сходящейся убывающей последовательности:

а) кусочно линейных выпуклых функций;

б) дважды непрерывно дифференцируемых выпуклых функций.

1.12. Докажите, что если функция f выпукла и строго монотонна, то f^{-1} либо выпукла, либо вогнута.

1.13. Пусть функция f выпукла на $[a;\ b]$, функция g выпукла и возрастает на $[c;\ d]$. Докажите, что если имеет смысл суперпозиция $g\circ f$, то она выпукла.

1.14. Пусть $f\in C((0;\ +\infty))$. Докажите, что тогда функции $xf(x)$, $f(1/x)$ выпуклы или нет одновременно.

1.15. Пусть функция f выпукла на $\mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$. Докажите, что f постоянна.

1.16. Пусть функция f выпукла на $[a;\ +\infty)$. Докажите, что существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=l\in\overline{\mathbb{R}}$, причем $l>-\infty$.

1.17. Пусть функция f возрастает и вогнута на $[0;\ +\infty)$, $f(0)=0$. Докажите, что для всех $x,\ y>0$ выполняется неравенство $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$.

1.18. Докажите, что если функция $f\colon [0;\ \infty)\to\mathbb{R}$ дифференцируема, вогнута и неотрицательна, то $xf'(x)\leqslant f(x)$ для всех $x\geqslant 0$.

1.19. Докажите, что если f — выпуклая функция на $[a;\ \infty)$, то функция $\varphi(x)=f(b+x)-f(x)$ возрастает $(b>0)$.

1.20. Пусть f выпукла и возрастает на $[0;\ \infty)$, $f(0)=0$. Докажите, что для любых чисел $a_0\geqslant a_1\geqslant\ldots$

$\ldots \geqslant a_n \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k f(a_k) \geqslant f\left(\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k a_k\right).$$

1.21. Последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ называется выпуклой (вниз), если $\Delta^2 a_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n \geqslant 0$, т. е. $a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n+2})$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что если последовательность $\{a_n\}$ выпукла, то:

а) $a_{n+p} \leqslant (pa_{n+p+q} + qa_n)/(p+q)$ $(p, q \in \mathbb{N})$;

б) последовательность $\{a_n\}$ монотонна или существует такой номер $m > 1$, что $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_m \leqslant a_{m+1} \leqslant \leqslant a_{m+2} \leqslant \ldots$

1.22. Пусть $\{a_n\}_{n \geqslant 0}$ — ограниченная выпуклая последовательность (см. задачу 1.21). Докажите, что:

а) $a_n \downarrow a \in \mathbb{R}$; б) $a_n - a_{n-1} = o(1/n)$;

в) $\sum\limits_{n \geqslant 0} (n+1)\Delta^2 a_n = a_0 - a$.

1.23. Пусть $f \in C([0;\ 1])$, $f \geqslant 0$, $P = \int\limits_0^1 f(x)\,dx$, $M = \max f$. Докажите следующие неравенства:

а) если f вогнута, то

а′) $\int\limits_0^1 xf(x)\,dx \leqslant \frac{2}{3} P$; а″) $\int\limits_0^1 x^2 f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{2} P$;

б) если f вогнута и монотонна, то

б′) $\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx \leqslant \frac{4}{3} P^2$; б″) $\int\limits_0^1 f^3(x)\,dx \leqslant 2P^3$;

в) если f выпукла и $\min f = 0$, то

в′) $\int\limits_0^1 xf(x)\,dx \geqslant \frac{2}{3} \frac{P^2}{M}$; в″) $\int\limits_0^1 x^2 f(x)\,dx \geqslant \frac{2}{3} \frac{P^3}{M^2}$;

г) если f выпукла, монотонна и $\min f = 0$, то

г′) $\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx \leqslant \frac{2}{3} MP$; г″) $\int\limits_0^1 f^3(x)\,dx \leqslant \frac{1}{2} M^2 P$.

Все восемь неравенств имеют простой механический смысл. Например, неравенства б) означают, что среди равновеликих подграфиков функций данного класса наибольшим статическим моментом и наибольшим моментом инерции относительно оси x обладают треугольники.

1.24. Пусть функция f не убывает на $[0;\ 1/2]$ и $f(1-x)=f(x)$ на $[0;\ 1]$. Докажите, что для любой выпуклой на $[0;\ 1]$ функции φ справедливо неравенство

$$\int\limits_0^1 f(x)\,\varphi(x)\,dx \leqslant \int\limits_0^1 f(x)\,dx \int\limits_0^1 \varphi(x)\,dx.$$

1.25. Докажите, что для того, чтобы интеграл $\int\limits_0^1 f(x)\,\varphi(x)\,dx$ был неотрицательным для любой выпуклой на $[0;\ 1]$ функции φ, необходимо и достаточно, чтобы функция f удовлетворяла условиям:

а) $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 0$; б) $\int\limits_0^1 xf(x)\,dx = 0$;

в) $\int\limits_0^a (a-x)\,f(x)\,dx \geqslant 0$ для любого $a \in (0;\ 1)$.

1.26. Пусть функция f неотрицательна на $(0;\ +\infty)$ и $f(x)\to 0$ при $x\to+\infty$. Докажите следующие неравенства:

а) если f убывает, $a>0$, то $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\sin ax\,dx \geqslant 0$;

б) если f выпукла, то $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\cos ax\,dx \geqslant 0$.

В обоих случаях знак равенства возможен лишь для $f\equiv 0$.

1.27. а) Пусть $a_n,\ \lambda_n \geqslant 0$ $(n\in\mathbb{N})$;

$$f(x)=\sum a_n e^{-\lambda_n x}.$$

Докажите, что $\ln f$ — выпуклая функция на $\mathbb{R}$.

б) Положительная функция f называется *логарифмически выпуклой*, если функция $\ln f$ выпукла. Докажите, что логарифмически выпуклая функция выпукла и что сумма логарифмически выпуклых функций логарифмически выпукла.

1.28. Пусть $f\in C((0;\ +\infty))$, $f(1)=1$.

а) Докажите, что эквивалентны утверждения

1) $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad f(x)f(y) \geqslant f(xy)$
$(x,\ y \in (0;\ \infty))$;

2) существует такое $p \in [0;\ 1]$, что $f(x) = x^p \quad (x \in \in (0;\ \infty))$.

Убедитесь, что условие 1) нельзя заменить условием

1') $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}, \qquad f(x)f(y) \leqslant f(xy)$
$(x,\ y \in (0;\ \infty))$.

б) Докажите, что эквивалентны утверждения

3) $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad f(x)f(y) \leqslant f(xy)$
$(x,\ y \in (0;\ \infty))$;

4) существует такое $p \in (-\infty;\ 0] \cup [1;\ +\infty)$, что $f(x) = x^p \quad (x \in (0;\ \infty))$.

1.29. Пусть

$$a_j,\ b_j \geqslant 0, \qquad j = 1, \ldots, n;$$

$$p,\ q > 1, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Докажите *неравенство Гёльдера*

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} a_j b_j \leqslant \left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} a_j^p\right)^{1/p} \left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} b_j^q\right)^{1/q}.$$

1.30. Пусть $x_j > 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad p \neq 0$. Положим

$$\varkappa(p) = \left(\frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} x_j^p\right)^{1/p}.$$

Докажите, что:

а) $\varkappa$ монотонно возрастает;

б) $\lim\limits_{p \to 0} \varkappa(p) = (x_1 \ldots x_n)^{1/n}$;

в) $\lim\limits_{p \to +\infty} \varkappa(p) = \max\{x_1;\ \ldots;\ x_n\}$;

г) $\lim\limits_{p \to -\infty} \varkappa(p) = \min\{x_1;\ \ldots;\ x_n\}$;

д) функция $\varphi(p) = (\varkappa(p))^p$ логарифмически выпукла на $(0;\ +\infty)$.

Сформулируйте аналоги этих утверждений для неотрицательной функции из $C([0;\ 1])$.

1.31. Пусть f — кусочно непрерывная функция, $f\colon\ [a;\ b] \to [m;\ M]$, φ — выпуклая на $[m;\ M]$ функция,

p — непрерывная и неотрицательная функция на $[a;\ b]$, причем $\int\limits_a^b p(x)\,dx = 1$. Докажите, что тогда:

а) $\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \varphi(f(x))\,dx$;

б) $\varphi\left(\int\limits_a^b f(x)\,p(x)\,dx\right) \leqslant \int\limits_a^b \varphi(f(x))\,p(x)\,dx$;

в) если $f > 0$, то

$$\left(\int\limits_a^b \frac{p(x)}{f(x)}\,dx\right)^{-1} \leqslant \exp\left(\int\limits_a^b p(x)\ln f(x)\,dx\right) \leqslant \int\limits_a^b p(x)\,f(x)\,dx.$$

1.32. Пусть $A_0, A_1, \ldots, A_n$ — вершины вписанного в окружность выпуклого многоугольника, причем вершины A_0 и A_n фиксированы. Как выбрать точки $A_1, \ldots, A_{n-1}$, чтобы периметр и площадь многоугольника были наибольшими (при заданном n)?

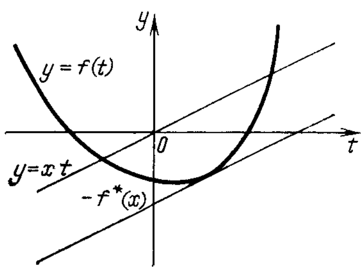

Рис. 4

1.33. Точечный источник света, помещенный в точке $(0;\ b)$, $b > 0$, освещает область, которая является подграфиком неотрицательной выпуклой функции $f \in C^1([0;\ \infty))$, $f(0) > b$. Лучи света отражаются от графика f и от оси x по известному закону. Будет ли освещена вся область, если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$?

Пусть f — выпуклая функция, $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$. *Преобразованием Лежандра* функции f называется функция

$$f^*(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}} (xt - f(t)) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Величина $f^*(x)$ показывает, насколько нужно опустить проходящую через начало координат прямую с угловым коэффициентом x, чтобы она стала опорной к надграфику функции f (рис. 4).

1.34. Докажите, что если функция f: $\mathbb{R}\to(-\infty;\infty]$ выпукла, то

а) f^* выпукла;

б) множество $D(f)=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)<+\infty\}$ — промежуток, и если точка t не лежит на границе $D(f)$, то $f(t)=\sup\{g(t)\mid g$ — линейная функция, $g\leqslant f\}$;

в) $(f^*)^*(t)=f(t)$, если t не принадлежит границе $D(f)$;

г) выполняется *неравенство Юнга* $f(t)+f^*(x)\geqslant xt$ для всех x, $t\in\mathbb{R}$;

д) функция f^* конечна в интервале

$$\Delta=(\inf f'(t);\ \sup f'(t)),$$

где infimum и supremum вычисляются по тем точкам $t\in D(f)$, в которых существует $f'(t)$. Для $x\in\Delta$ supremum в определении $f^*(x)$ достигается;

е) если $s_-=f'_-(t)<f'_+(t)=s_+$, то f^* линейна на промежутке $[s_-;\ s_+]$; если f линейна на промежутке $[a;\ b]$, то f^* не дифференцируема в точке $p=f'(t)$, $t\in(a;\ b)$;

ж) если $D(f)=\langle a;\ b\rangle$, а f — строго выпуклая и дифференцируемая в $(a;\ b)$, то f' непрерывна на $(a;\ b)$; f^* дифференцируема на интервале $\Delta=\{f'(t)\mid t\in(a;\ b)\}$ и при этом функции f' и $(f^*)'$ взаимно обратны;

з) если $f\leqslant g$, то $f^*\geqslant g^*$.

1.35. Докажите, что если функция φ строго возрастает и непрерывна на $[0;\ +\infty)$, $\varphi(0)=0$, $\psi=\varphi^{-1}$, то для $a\in[0;\ +\infty)$, $b\in[0;\ \sup\varphi)$ выполняется неравенство

$$ab\leqslant\int_0^a\varphi(t)\,dt+\int_0^b\psi(t)\,dt.$$

1.36. Найдите преобразование Лежандра и напишите неравенство Юнга (см. задачу 1.34 г)) для следующих функций:

а) $f(t)=t^2/2$; б) $f(t)=|t|^p/p$ $(p\geqslant 1)$;

в) график f — выпуклая ломаная;

г) $f(t)=\begin{cases}-t^p/p, & \text{если } t\geqslant 0,\\ +\infty, & \text{если } t<0\ (0<p<1);\end{cases}$

д) $f(t)=\begin{cases}-\sqrt{a^2-t^2}, & \text{если } |t|\leqslant a,\\ +\infty, & \text{если } |t|>a\ (a>0);\end{cases}$

e) $f(t)=\begin{cases} -\frac{1}{2}-\ln t, & \text{если } t>0, \\ +\infty, & \text{если } t\leqslant 0; \end{cases}$

ж) $f(t)=e^t$.

1.37. Рассмотрим совокупность W пар $(f;\ g)$ выпуклых функций на $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $xy\leqslant\leqslant f(x)+g(y)$ для всех $x,\ y\in\mathbb{R}$. Назовем пару $(f_0;\ g_0)\in\in W$ экстремальной, если из соотношений $f\leqslant f_0$, $g\leqslant g_0$, $(f;\ g)\in W$ следует, что $f=f_0$, $g=g_0$. Докажите, что пара $(f_0;\ g_0)$ экстремальна тогда и только тогда, когда $f_0^*==g_0$, $g_0^*=f_0$.

1.38. Укажите примеры функций, удовлетворяющих условию $f^*(x)=f(-x)$ $(x\in\mathbb{R})$. Докажите, что единственной функцией, совпадающей со своим преобразованием Лежандра, является функция $f(t)=t^2/2$.

§ 2. Гладкие функции

2.1. Докажите, что если функция f дифференцируема m раз на интервале $(a;\ b)$ и $x,\ x+mh\in(a;\ b)$, то

$$\Delta_h^m f(x)=h^m f^{(m)}(x+\theta h),$$

где $0<\theta<m$ (определение $\Delta_h^m f(x)$ см. в задаче III.3.1).

2.2. Пусть $a_k,\ b_k,\ c_k\in\mathbb{R}$, $c_k\neq 0$ при $k=1,\ \ldots,\ n$. Докажите, что если $f\in C(\mathbb{R})$,

$$f(x)=\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k f(b_k x+c_k y)$$

при всех $x,\ y\in\mathbb{R}$, то $f\in C^\infty(\mathbb{R})$.

2.3. Докажите, что для любой функции $f\in C^\infty([a;\ b])$ и любых чисел $\varepsilon>0$, $n\in\mathbb{N}$ найдется такой многочлен P, что $|f^{(k)}(x)-P^{(k)}(x)|<\varepsilon$ для всех $x\in[a;\ b]$, $k==0,\ 1,\ \ldots,\ n$.

2.4. Пусть $f\in C^\infty(\mathbb{R})$, $f\not\equiv 0$. Докажите, что если функция f обращается в нуль на некотором непустом интервале, то $\sup\limits_{n,x}|f^{(n)}(x)|=+\infty$.

2.5. Пусть $f(x)=\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} P_k(x)e^{Q_k(x)}$, где $P_k,\ Q_k$ $(k==1,\ \ldots,\ n)$ — вещественные многочлены, $x\in\mathbb{R}$. Докажите, что f имеет конечное число нулей.

2.6. Пусть $f \in C^\infty([0; +\infty))$, $f(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Докажите, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ функция $f^{(n)}$ обращается в нуль.

2.7. Пусть $f \in C^2((0; 1])$ и $f(x) = o(1)$, $f''(x) = O(x^{-2})$ при $x \to +0$. Докажите, что $f'(x) = o(x^{-1})$ при $x \to +0$.

2.8. Пусть f, g — гладкие четные $2T$-периодические функции, убывающие на промежутке $[0; T]$. Докажите, что их свертка, т. е. функция $h(t) = \int\limits_{-T}^{T} f(x) g(t-x)\,dx$, обладает теми же свойствами.

2.9. Пусть f n раз дифференцируема на $[0; 1]$, $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$. Докажите, что для некоторого x выполняется неравенство

$$|f^{(n)}(x)| \geqslant n!2^{n-1}|f(0) - f(1)|.$$

2.10. Пусть Δ — интервал, $f \in C^2(\Delta)$, $M_k = \sup\limits_{\Delta}|f^{(k)}(x)|$, $k = 0, 1, 2$.

а) Докажите, что в случае $\Delta = \mathbb{R}$ выполняется неравенство $M_1 \leqslant \sqrt{2}\sqrt{M_0 M_2}$ и что константа $\sqrt{2}$ не может быть уменьшена.

б) Получите аналогичное неравенство в случае, когда $\Delta = \mathbb{R}_+$.

в) Докажите, что если $\Delta = [0; 2]$, $M_0, M_2 \leqslant 1$, то $M_1 \leqslant 2$ (оценка точная).

г) Изучите вопрос для произвольного промежутка $\Delta = [a; b]$.

2.11. Докажите, что если $f \in C^2([0; \infty))$ и $\int\limits_0^\infty |f(x)|\,dx < \infty$, то выполняются неравенства:

а) $|f(0)|^2 \leqslant 2\int\limits_0^\infty |f(x)|\,dx \int\limits_0^\infty |f''(x)|\,dx$;

б) $\sqrt{2} f(0) \leqslant \int\limits_0^\infty (|f(x)| + |f''(x)|)\,dx$.

Являются ли эти оценки точными?

2.12. Найдите $\min \int\limits_0^1 |f''(x)|^2\,dx$ при условии, что $f \in C^2([0; 1])$, $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) = a$.

2.13. Пусть $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Докажите, что если для каждого $x \in \mathbb{R}$ найдется такое число $n \in \mathbb{N}$, что $f^{(n)}(x) = 0$, то f — многочлен.

2.14. Пусть $\{a_n\}$ — произвольная последовательность вещественных чисел. Докажите, что найдется функция $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ вида

$$f(x) = \sum \alpha_n x^n \left(1 + \beta_n x^{2n}\right)^{-1},$$

для которой $f^{(n)}(0) = a_n \quad (n \in \mathbb{N})$.

2.15. Пусть $a = (a_1; \ldots; a_n) \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Докажите, что если $f(a) = 0$, то

$$f(x) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} (x_j - a_j)\, g_j(x),$$

где

$$x = (x_1; \ldots; x_n), \quad g_j \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n),$$

$$g_j(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \quad (j = 1, \ldots, n).$$

2.16. Пусть $a \in \mathbb{R}^n$ и пусть F — отображение множества $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям $\left(f, g \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)\right)$:

а) $F(f+g) = F(f) + F(g)$;

б) $F(\alpha f) = \alpha F(f) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$;

в) $F(fg) = F(f)g(a) + f(a)F(g)$.

Докажите, что $F(f) = \sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} c_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ для некоторых $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

2.17. Пусть f, g — неотрицательные непрерывные функции, заданные на $[0; \infty)$. Докажите, что если для некоторого числа $C \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$f(t) \leqslant C + \int_0^t f(x)\, g(x)\, dx, \qquad t \geqslant 0,$$

то

$$f(t) \leqslant C \exp\left(\int_0^t g(x)\, dx\right)$$

для всех $t \geqslant 0$ (*неравенство Гронуолла*).

Выведите отсюда, что если $h \in C^1([0; \infty))$, $h(0) = 0$, число $M \geqslant 0$ и $|h'(t)| \leqslant M|h(t)|$ при $t \geqslant 0$, то $h \equiv 0$.

Функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ называется *положительно определенной*, если

$$\sum_{j,k=1}^{m} f(t_j - t_k)\, z_j \bar{z}_k \geqslant 0 \tag{1}$$

для любых векторов $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}^n$, $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$ и любого $m \in \mathbb{N}$.

Функция f называется *условно положительно определенной*, если неравенство (1) выполняется при дополнительном условии, что $z_1 + \ldots + z_m = 0$.

2.18. Докажите, что

а) функция $f(t) = e^{i(a;t)}$ $(t \in \mathbb{R}^n)$, где $a \in \mathbb{R}^n$, — положительно определенная;

б) функция $f(t) = A\cos(a; t) + B$ $(t \in \mathbb{R}^n)$, где $a \in \mathbb{R}^n$, A, $B \in \mathbb{R}$, $A > 0$,— условно положительно определенная.

2.19. Докажите, что если μ — конечная мера в $\mathbb{R}^n$, то функция

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x;t)}\, d\mu(x) \qquad (t \in \mathbb{R}^n)$$

(преобразование Фурье меры μ) положительно определена.

2.20. Докажите, что функции

$$f(t) = e^{-|t|}, \quad g(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad (t \in \mathbb{R})$$

положительно определены.

2.21. Докажите, что

а) функция $f(t) = -\|t\|^2$ $(t \in \mathbb{R}^n)$ — условно положительно определенная;

б) при $0 < p < 2$ функции $f(t) = -\|t\|^p$ $(t \in \mathbb{R}^n)$ условно положительно определены.

2.22. Докажите, что если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ положительно определена, то

а) $\bar{f}$ положительно определена;

б) f ограничена;

в) из непрерывности в нуле следует равномерная непрерывность f.

2.23. Докажите, что если функция $f(t) = e^{s\varphi(t)}$ положительно определена при всех $s > 0$, то функция $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ является условно положительно определенной.

Пусть $\Delta=[a;\ b]$, $f\in C^3(\Delta)$, $f'(x)\neq 0$ $(x\in\Delta)$. *Производная Шварца* Sf функции f определяется формулой

$$Sf(x)=\frac{f'''(x)}{f'(x)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2=\frac{6}{(f'(x))^2}\det\begin{pmatrix} f'(x) & \frac{1}{2!}f''(x) \\ \frac{1}{2!}f''(x) & \frac{1}{3!}f'''(x)\end{pmatrix}.$$

2.24. Проверьте, что для вещественных функций, удовлетворяющих перечисленным выше условиям, справедливы утверждения:

а) если суперпозиция $f\circ g$ определена, то

$$S(f\circ g)(x)=Sf(g(x))(g'(x))^2+Sg(x);$$

б) если $h(x)=\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ и суперпозиция $g=h\circ f$ определена, то $Sg(x)=Sf(x)$;

в) если $Sf(x)<0$ для всех $x\in\Delta$, то для любого $n\in$ $\in$ также $S(f^n)(x)<0$ $(x\in\Delta)$;

г) если $Sf(x)<0$, то $S(f^{-1})(y)>0$ в точке $y=f(x)$;

д) для того чтобы выполнялось неравенство $Sf(x)<0$ $(x\in\Delta)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $g=|f'|^{-1/2}$ была выпуклой;

е) если $Sf(x)<0$ для всех $x\in\Delta$, то функция $|f'|$ не имеет строго положительного локального минимума в $(a;\ b)$ (*«принцип минимума модуля»*).

Почему важна именно отрицательность (а не положительность) шварциана, можно узнать из задач X.1.37—40.

2.25. а) Проверьте, что функции $f(x)=\sin x$, $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $f(x)=xe^{-x}$, $f(x)=e^{-x^2}$, $f(x)=Ax^2+Bx+C$ удовлетворяют условию $Sf(x)<0$, если $f'(x)\neq 0$, а функции $f(x)=x+x^3$, $f(x)=\operatorname{tg} x$, $f(x)=\operatorname{ctg} x$ — нет $(x,\ A,\ B,\ C\in\mathbb{R})$.

б) Проверьте, что любой многочлен f степени $n\geqslant 2$, все нули которого вещественны, удовлетворяет условию $Sf(x)<0$, если $f'(x)\neq 0$.

2.26. Пусть

$$R(w;\ x;\ y;\ z)=\frac{(z-w)(y-x)}{(z-y)(x-w)}$$

(w, x, y, z — попарно различные числа). Докажите, что если $f\in C^1(\Delta)$, f' кусочно монотонна и для любых точек $x_1<x_2<x_3<x_4$, принадлежащих одному интервалу мо-

нотонности функции f, выполняется неравенство

$$R(f(x_1);\ f(x_2);\ f(x_3);\ f(x_4)) > R(x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4),$$

то функция $|f'|$ не имеет строго положительного локального минимума во внутренних точках.

§ 3. Многочлены Бернштейна

3.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Для $x \in \mathbb{R}$ положим

$$S_{n,r}(x) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} (k - nx)^r.$$

Докажите, что

а) $S_{n,r+1}(x) = x(1-x)\left(S'_{n,r}(x) + nrS_{n,r-1}(x)\right)$, $r \in \mathbb{N}$;

б) $S_{n,0}(x) = 1$; $\quad S_{n,1}(x) = 0$; $\quad S_{n,2}(x) = nx(1-x)$;

$$S_{n,3}(x) = nx(1-x)(1-2x);$$

$$S_{n,4}(x) = nx(1-x)(1+3(n-2)x(1-x)).$$

3.2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$. Для $x \in [0;\ 1]$ положим

$$\sigma_{n,\delta}(x) = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \delta}} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Докажите, что:

а) $\sigma_{n,\delta}(x) \leqslant 1/(4\delta^2 n)$;

б) $\sigma_{n,\delta}(x) \leqslant 1/(4\delta^4 n^2)$;

в) $\sigma_{n,\delta}(x) \leqslant \dfrac{17}{\delta\sqrt{n}} e^{-2n\delta^2}$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Многочлен

$$B_n(f;\ x) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} C_n^k f(k/n)\, x^k (1-x)^{n-k}$$

называется *многочленом Бернштейна* функции f: $[0;\ 1] \to \mathbb{R}$.

3.3. Найдите многочлены Бернштейна следующих функций:

а) $f(x) = x^m$, $m = 0,\ 1,\ 2$; $\quad$ б) $f(x) = a^x$, $a > 0$.

3.4. Пусть функция f определена на промежутке $[0;\ 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что

а) $B_n(f;\ 0) = f(0)$ и $B_n(f;\ 1) = f(1)$;

б) $B_n(f^2;\ x) \geqslant B_n^2(f;\ x)$ для всех $x \in [0;\ 1]$.

3.5. Докажите, что:

а) если функция f возрастает (убывает) на промежутке $[0;\ 1]$, то многочлен Бернштейна $B_n(f)$ возрастает (убывает) на $[0;\ 1]$;

б) если функция f выпукла (вогнута) на $[0;\ 1]$, то $B_n(f)$ — выпуклый (вогнутый) на $[0;\ 1]$ многочлен.

3.6. Пусть функция f определена и ограничена сверху на промежутке $[0;\ 1]$. Докажите, что

а) $B_n(f;\ x) \leqslant \sup\limits_{[0;1]} f$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in [0;\ 1]$;

б) если интервал Δ содержится в промежутке $[0;\ 1]$, то $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} B_n(f;\ x) \leqslant \sup\limits_{\Delta} f$ для всех $x \in \Delta$;

в) если интервалы Δ и Δ' таковы, что $\bar{\Delta} \subset \Delta' \subset [0;\ 1]$ и $\sup\limits_{\Delta'\setminus\Delta} f < \sup\limits_{\Delta} f$, то можно указать столь большой номер $N = N(f;\ \Delta;\ \Delta')$, что $B_n(f;\ x) < \sup\limits_{\Delta} f$ для всех $x \in \Delta$ и $n > N$.

3.7. Пусть функции f и g ограничены на промежутке $[0;\ 1]$ и совпадают в окрестности точки $x_0 \in [0;\ 1]$. Докажите, что последовательности $\{B_n(f;\ x_0)\}$ и $\{B_n(g;\ x_0)\}$ сходятся или расходятся одновременно и в случае сходимости имеют общий предел.

3.8. Пусть функция f ограничена на промежутке $[0;\ 1]$. Докажите, что

а) если f непрерывна в точке $x_0 \in [0;\ 1]$, то $B_n(f;\ x_0) \to f(x_0)$;

б) если f непрерывна в каждой точке замкнутого промежутка Δ, $\Delta \subset [0;\ 1]$, то $B_n(f) \rightrightarrows f$ на Δ;

в) если $x_0 \in (0;\ 1)$ — точка разрыва первого рода функции f, то

$$B_n(f;\ x_0) \to \frac{1}{2}\left(f(x_0+0) + f(x_0-0)\right).$$

3.9. Пусть $f \in C([0;\ 1])$. Докажите, что

а) если $\int\limits_0^1 f(x)\,x^n\,dx = 0$ для $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, то $f \equiv 0$;

б) если $\int\limits_0^1 f(x)\left(x^{n+1}(1-x)^2\right)''dx = 0$ для $n \in \mathbb{N}$, то f линейная функция.

3.10. Пусть $f \in C([0;\ 1])$ и $\int\limits_0^1 f(x)\,g''(x)\,dx = 0$ для любой функции $g \in C^2([0;\ 1])$, равной нулю в окрестностях точек 0 и 1. Докажите, что f — линейная функция.

3.11. Пусть $f\in C([0;\ \pi])$ и $\varepsilon>0$. Докажите, что существует тригонометрический многочлен T вида $T(t)=\sum\limits_{0\leqslant n\leqslant N} a_n\cos nt$ такой, что $|f(t)-T(t)|<\varepsilon$ для всех $t\in[0;\ \pi]$.

3.12. а) Пусть $f\in C([0;\ 1]\times[0;\ 1])$. Для $n\in\mathbb{N}$ и $x,\ y\in\mathbb{R}$ положим

$$\mathscr{B}_n(f;\ x,\ y)=$$
$$=\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\ \sum_{0\leqslant j\leqslant n} C_n^kC_n^jf\left(\frac{k}{n};\ \frac{j}{n}\right)x^ky^j(1-x)^{n-k}(1-y)^{n-j}.$$

Докажите, что $\mathscr{B}_n(f)\rightrightarrows f$ на $[0;\ 1]\times[0;\ 1]$ при $n\to+\infty$.

б) Пусть $f\in C([0;\ \pi]\times[0;\ \pi])$ и $\varepsilon>0$. Докажите, что существует тригонометрический многочлен T вида

$$T(u;\ v)=\sum_{0\leqslant k\leqslant N}\ \sum_{0\leqslant j\leqslant N} a_{k,j}\cos ku\cos jv$$

такой, что $|f(u;\ v)-T(u;\ v)|<\varepsilon$ для всех $u,\ v\in[0;\ \pi]$.

3.13. Пусть $f\in C^r([0;\ 1])$. Докажите, что $B_n^{(r)}(f)\rightrightarrows f^{(r)}$ на $[0;\ 1]$.

3.14. а) Пусть $f\in \mathrm{Lip}_\alpha[0;\ 1]$. Докажите, что для всех $n\in\mathbb{N}$ и $x\in[0;\ 1]$ справедливо неравенство

$$|B_n(f;\ x)-f(x)|\leqslant M\left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{\alpha/2},$$

где M — некоторая положительная постоянная, зависящая только от функции f.

б) Пусть $\alpha\in(0;\ 1]$ и $f_\alpha(x)=|x-1/2|^\alpha$. Докажите, что для всех $n\in\mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$|B_n(f_\alpha;\ 1/2)-f_\alpha(1/2)|\geqslant\frac{1}{4}n^{-\alpha/2}.$$

3.15. а) Если функция f выпукла на промежутке $[0;\ 1]$, то $B_n(f;\ x)\geqslant f(x)$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и $x\in[0;\ 1]$.

б) Если непрерывная на промежутке $[0;\ 1]$, функция f такова, что $B_n(f;\ x)\geqslant f(x)$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и $x\in\in[0;\ 1]$, то f выпукла на $[0;\ 1]$.

3.16. Пусть $f\in C^2([0;\ 1])$. Докажите, что

$$B_n(f;\ x)-f(x)=\frac{x(1-x)}{2n}(f''(x)+\varepsilon_n(x)),$$

где последовательность функций $\{\varepsilon_n\}$ равномерно на $[0;\ 1]$ сходится к нулю (формула Е. В. Вороновской).

3.17. Пусть $f \in C([0;\ 1])$, $g \in C^2([0;\ 1])$ и функция g равна нулю вне интервала $(a;\ b)$, где $0 < a < b < 1$. Докажите, что

$$\sum_{0 < k < n} \left(B_n\left(f;\ \frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) g\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 f(x)\,(x(1-x)\,g(x))''\,dx.$$

3.18. Пусть функция $f\colon [0;1] \to \mathbb{R}$ такова, что $\sup\limits_{0 < x < 1} |B_n(f;\ x) - f(x)| = o(1/n)$. Докажите, что функция f линейна.

3.19. Пусть $f \in C([0;\ 1])$. Докажите, что условие $f(0),\ f(1) \in \mathbb{Z}$ необходимо и достаточно для того, чтобы функция f являлась пределом равномерно сходящейся на $[0;\ 1]$ последовательности алгебраических многочленов с целыми коэффициентами.

3.20. Пусть функция f определена на промежутке $[0;\ 1]$. Докажите, что

$$B_n(f;\ x) = f(0) + \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} x^k C_n^k \Delta_k^n f(0),$$

где

$$\Delta_1^n f(y) = f\left(y + \frac{1}{n}\right) - f(y),$$

$$\Delta_{k+1}^n f(y) = \Delta_1^n\left(\Delta_k^n f(y)\right), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

3.21. Пусть $f(x) = x^m$ $(x \in \mathbb{R})$, $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Докажите, что

а) $B_n(f) \rightrightarrows f$ на любом конечном промежутке;

б) $|B_n(f;\ x)| \leqslant \max(1;\ |x|^m)$ при любом $x \in \mathbb{R}$.

3.22. Пусть $f(x) = \sum\limits_{m \geqslant 0} c_m x^m$ для $x \in (-R;\ R)$, где $R > 1$. Докажите, что

а) $B_n(f) \rightrightarrows f$ на любом промежутке $[-r;\ r]$, если $0 < r < R$;

б) если $c_m \geqslant 0$ для любого m, то $B_n(f) \geqslant f$ на $[0;\ 1]$ и $B_n(f) \leqslant f$ на $[1;\ R)$.

3.23. а) Докажите, что при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ многочлены $x^k(1-x)^{n-k}$, $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$, образуют базис в пространстве многочленов, степень которых не превышает n.

б) Докажите, что коэффициенты a_n^k разложения многочлена P степени m по таким базисам при $n \geqslant m$, образующие таблицу

$$\begin{array}{ccccccccc} & & a_m^0 & & a_m^1 & \ldots & a_m^{m-1} & & a_m^m \\ & a_{m+1}^0 & \cdot & a_{m+1}^1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{m+1}^m & & a_{m+1}^{m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^0 & a_n^1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_n^{n-1} & a_n^n, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

удовлетворяют равенствам

$$a_{n+1}^0 = a_n^0, \quad a_{n+1}^{n+1} = a_n^n, \quad a_{n+1}^k = a_n^{k-1} + a_n^k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

(ср. с равенствами для биномиальных коэффициентов C_n^k).

в) Докажите, что условие $P(x) > 0$ при $x \in (0;\ 1)$ необходимо и достаточно для того, чтобы при достаточно большом n числа a_n^k, $k = 0, 1, \ldots, n$; не обращались одновременно в нуль и были неотрицательны.

§ 4. Почти периодические функции и последовательности

Будем писать $x \overset{\varepsilon}{=} y$, если $|x - y| < \varepsilon$, и $x \overset{\varepsilon}{=} y \pmod 1$, если существует такое целое k, что $|x - y - k| < \varepsilon$.

Множество $X \subset \mathbb{R}$ назовем *относительно плотным*, если существует такое $L > 0$, что в каждом промежутке длины L найдется хотя бы одно число из X.

4.1. Докажите, что если λ — иррациональное число, то для любых $a \in [0;\ 1)$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое $n \in \mathbb{Z}$, что $n\lambda \overset{\varepsilon}{=} a \pmod 1$. Проверьте, что множество таких n относительно плотно на прямой (ср. с задачей I.3.2).

4.2. а) Докажите, что если λ_1, $\lambda_2 \neq 0$ и отношение λ_1/λ_2 иррационально, то для любых a_1, $a_2 \in [0;\ 1)$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое $t \in \mathbb{R}$, что

$$\lambda_1 t \overset{\varepsilon}{=} a_1 \pmod 1, \qquad \lambda_2 t \overset{\varepsilon}{=} a_2 \pmod 1. \tag{1}$$

Обратно, если система (1) разрешима относительно t при любых a_1, a_2, ε, то λ_1/λ_2 иррационально.

б) Докажите, что при иррациональных λ_1, λ_2, λ_1/λ_2 существует относительно плотное на прямой множество целых решений системы (1).

4.3. Какому условию должны удовлетворять числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, чтобы система уравнений

$$\lambda_i t \overset{\varepsilon}{=} 0 \pmod 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, k,$$

имела при любом $\varepsilon > 0$ решение t, удовлетворяющее условию $|t| > |\lambda_i|^{-1}$ для некоторого i?

4.4. Какому условию должны удовлеворять числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, чтобы система уравнений

$$\lambda_i t \overset{\varepsilon}{=} a_i \pmod 1, \qquad i = 1, \ldots, k,$$

для произвольных $a_1, \ldots, a_k \in [0; 1)$ и $\varepsilon > 0$ имела

а) вещественное решение t;

б) относительно плотное множество решений?

4.5. Какому условию должны удовлетворять числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, чтобы система уравнений

$$\lambda_i m \overset{\varepsilon}{=} a_i \pmod 1, \qquad i = 1, \ldots, k,$$

для произвольных $a_1, \ldots, a_k \in [0; 1)$ и $\varepsilon > 0$ имела

а) целое решение m;

б) относительно плотное множество целых решений?

4.6. Пусть $f(x) = \sin(ax + b) + \sin(cx + d)$, $x \in \mathbb{R}$, причем $ac \neq 0$. Докажите, что если функция f не равна тождественно нулю, то она припимает значения разных знаков.

Определенная на $\mathbb{R}$ комплекснозначная функция f называется *равномерно почти периодической* (*р. п. п.*), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $L = L(\varepsilon) > 0$, что в каждом интервале длины L найдется по крайней мере одно число τ (ε-почти период), для которого

$$|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{при всех} \quad x \in \mathbb{R}.$$

4.7. Докажите, что каждый тригонометрический квазимногочлен

$$f(x) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k e^{i\lambda_k x} \qquad (\lambda_k \in \mathbb{R},\ a_k \in \mathbb{C})$$

обладает свойством равномерной почти периодичности. Проверьте, что f периодичен тогда и только тогда, когда множители $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ попарно соизмеримы (т. е. их отношения рациональны).

4.8. Пусть $f \in C(\mathbb{R}^n)$ — функция, имеющая период 1 по каждому аргументу, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ — рационально независимые числа, $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$. Докажите, что функция

$$\varphi(t) = f(\alpha_1 t - \beta_1; \ldots; \alpha_n t - \beta_n), \qquad t \in \mathbb{R},$$

равномерно почти периодична.

4.9. Докажите, что если f — р. п. п. функция, а числа $L(\varepsilon)$ ограничены при малых ε, то f периодична.

4.10. Докажите, что р. п. п. непрерывная на $\mathbb{R}$ функция равномерно непрерывна на прямой и ограничена. Существуют ли неограниченные р. п. п. функции? Следует ли непрерывность из ограниченности?

4.11. Докажите, что предел равномерно сходящейся на $\mathbb{R}$ последовательности р. п. п. функций — р. п. п. функция.

4.12. Докажите, что если у р. п. п. функции производная существует и равномерно непрерывна, то она также является р. п. п. функцией.

4.13. Докажите, что если первообразная F непрерывной р. п. п. функции f ограничена, то она также является р. п. п. функцией.

4.14. Пусть $f \in C(\mathbb{R})$, $h \in \mathbb{R}$, $f_h(x) = f(x+h)$. Докажите, что функция f обладает свойством р. п. п. тогда и только тогда, когда для каждой числовой последовательности $\{h_n\}$ из последовательности $\{f_{h_n}\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся на $\mathbb{R}$ подпоследовательность (компактность семейства сдвигов).

4.15. Докажите, что сумма и произведение непрерывных р. п. п. функций — снова р. п. п. функция.

4.16. Докажите, что для каждой непрерывной р. п. п. функции существует среднее значение

$$M(f) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x)\,dx.$$

4.17. Докажите, что

а) $\langle f, g\rangle = M(f\bar{g})$, где f, g — непрерывные р. п. п. функции, а функционал M определен в предыдущей задаче, обладает свойствами скалярного произведения (в частности, $\langle f, f\rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $f \equiv 0$);

б) функции $\varphi_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, образуют несчетное ортогональное относительно этого скалярного произведения семейство;

в) величины $c_{\lambda_k} = M(f\varphi_{\lambda_k})$ $(\lambda_k \in \mathbb{R},\ k = 1, \ldots, n)$ удовлетворяют неравенству

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} |c_{\lambda_k}|^2 \leqslant M(|f|^2)$$

(неравенство Бесселя для системы $\{\varphi_\lambda\}$). Выведите отсюда, что $c_\lambda \neq 0$ лишь для счетного множества значений

7

λ. Может ли это множество быть произвольным счетным подмножеством $\mathbb{R}$?

4.18. Пусть $\{a_n\}$, $a_n \in \{0;\ 1;\ 2\}$,— непериодическая последовательность. Последовательности $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ определим следующим образом:

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad a_n = 0, \\ 1, & \text{если} \quad a_n \neq 0; \end{cases} \qquad c_n = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad a_n = 2, \\ 0, & \text{если} \quad a_n \neq 2. \end{cases}$$

Докажите, что хотя бы одна из последовательностей $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ непериодична.

Назовем двоичную последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, *почти периодической*, если для любого «слова» $(\varepsilon_{k+1};\ \ldots;\ \varepsilon_{k+l})$ (будем также писать $\varepsilon_{k+1}\varepsilon_{k+2}\ldots\varepsilon_{k+l}$) из ε существует такое число $L \in \mathbb{N}$, что множество

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \varepsilon_{n+j} = \varepsilon_{k+j},\ j = 1,\ \ldots,\ l\}$$

пересекается со всеми отрезками натурального ряда длины L. Аналогично определяется почти периодичность для двусторонних последовательностей $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

4.19. Пусть $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — почти периодическая последовательность, $f(x) = \varepsilon_{[x]}$ $(x \in \mathbb{R}$, $[x]$— целая часть числа $x)$. Является ли f р. п. п. функцией?

4.20. Верно ли, что для всякой почти периодической последовательности $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ существует предел чезаровских средних $\lim\limits_{n} \dfrac{1}{2n+1} \sum\limits_{-n\leqslant k\leqslant n} \varepsilon_k$?

4.21. Пусть $S = \{(x;\ y) \mid kx \leqslant y \leqslant k(x+1)+1\}$ — полоса в $\mathbb{R}^2$, k — иррациональное число, а $\Sigma = S \cap \mathbb{Z}^2$ — множество целых точек в S. Докажите, что ортогональные проекции точек из Σ на сторону полосы (рис. 5) разбивают ее на отрезки, длины которых принимают ровно два значения a и b. Перенумеровав отрезки целыми числами в порядке их расположения на прямой, положим $\varepsilon_i = 0$, если i-й отрезок имеет длину a, и $\varepsilon_i = 1$ — в противном случае. Докажите, что последовательность $\{\varepsilon_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ почти периодична.

4.22. Рассмотрим последовательность

$$\varepsilon = \{\varepsilon_k\} = 0\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\ldots$$

(*последовательность Морса*), формально определяемую равенствами $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_k = 1 - \varepsilon_{k-2^n}$ при $2^n < k \leqslant 2^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Докажите, что она почти периодична.

4.23. Пусть для конечной последовательности («слова»)

$$A = \varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n$$

из нулей и единиц A^0 означает A, $A^1 = \bar\varepsilon_1\bar\varepsilon_2\ldots\bar\varepsilon_n$, где $\bar\varepsilon_k = 1 - \varepsilon_k$. Определим последовательность ε, задавая ее начальные отрезки A_p, которые определяются рекуррентно: A_0 — любое слово: $A_0 = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$,

$$A_1 = A_0A_0^{\xi_1}A_0^{\xi_2}\ldots A_0^{\xi_l},$$

где $\xi_1\ldots\xi_l$ — некоторое слово из нулей и единиц,

$$A_2 = A_1A_1^{\eta_1}A_1^{\eta_2}\ldots A_1^{\eta_m}, \qquad \eta_k \in \{0;\ 1\},$$

и т. д. Таким образом, A_0 служит началом A_1, A_1 — началом A_2 и т. д. Бесконечная последовательность $\{A_p\}$ определяет некоторую последовательность ε. Докажите, что ε периодична или почти периодична.

4.24. *Последовательностью складок* называется последовательность $s = \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ нулей и единиц, начальные отрезки которой A_n длины $2k-1$ $(k = 2^n, n \in \mathbb{N})$ имеют вид $s_1s_2 \ldots s_{k-1}\bar{s}_{2n}\bar{s}_{k-1} \ldots \bar{s}_1$ (где $\bar{s}_j = 1 - s_j$). Название последовательности объясняется тем, что со словом A_n можно связать последовательность складок бумажной полоски, образующихся на ней в результате $n+1$-кратного ее сгибания (сначала

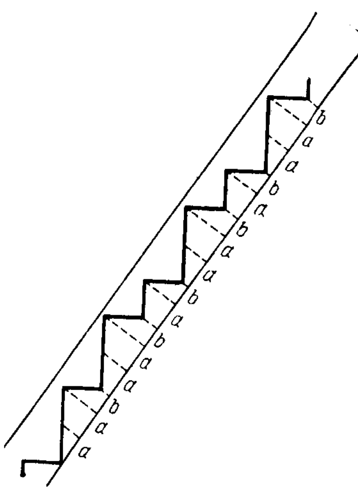

Рис. 5

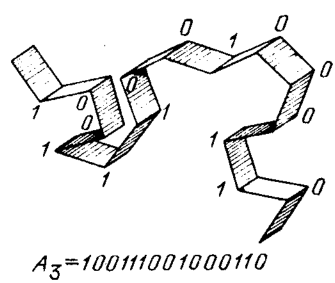

Рис. 6

пополам, потом еще раз пополам и т. д.). Если, двигаясь по полоске, каждой складке, приводящей к повороту налево, поставить в соответствие единицу, а складке «поворот направо» — нуль, то получится A_n (рис. 6).

Последовательность s однозначно определяется заданием чисел s_{2n}, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Докажите, что всякая последовательность складок почти периодична, но не периодична, даже если ограничиться членами с достаточно большими номерами.

4.25. Докажите, что последовательности складок (см. задачу 4.24) обладают следующим свойством (*почти периодичность по Безиковичу*): для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся такое число $L > 0$ и такие числа $\tau_m \in \mathbb{N}$ $(m \in \mathbb{N})$, что

а) если $\nu(\Delta)$ — число тех τ_m, которые попадают в интервал $\Delta \subset \mathbb{R}^+$, то $\nu(\Delta_1) < 2\nu(\Delta_2)$ для всех интервалов длины L;

б) для каждого $m \in \mathbb{N}$

$$\overline{\lim}\, \frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} |s_{j+\tau_m} - s_j| < \varepsilon;$$

в) $\overline{\lim\limits_{n}}\, \overline{\lim\limits_{p}}\, \frac{1}{np} \sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum\limits_{1 \leqslant m \leqslant p} |s_{j+\tau_m} - s_j| < \varepsilon.$

4.26. Докажите, что если $x_n = (-1)^{s_n}$, $n \in \mathbb{N}$, где $\{s_n\}$ — последовательность складок, то при любом $t \in \mathbb{R}$ существует предел

$$c_t = \lim \frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k e^{-2\pi k t i}$$

(*коэффициент Фурье*), причем

$$c_t = -i(-1)^l\, 2^{-(m+1)} x_{2^m}, \text{ если } t = (2l+1)\, 2^{-(m+2)},$$
$$m \geqslant 0,$$

и $c_t = 0$ в остальных случаях. Убедитесь, что справедливо «*равенство Парсеваля*»

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|^2 = \sum_{0 \leqslant t < 1} |c_t|^2.$$

4.27. Рассмотрим двоичную последовательность

$$r = \{r_n\}_{n \in \mathbb{N}} = 000100100001110100010010111000010 \ldots$$

(*последовательность Рудина — Шапиро*), начальные отрезки A_n которой, имеющие длину 2^n, имеют вид $A_n = C_n D_n$, где C_n и D_n — слова длины 2^{n-1}, причем $A_1 = C_1 D_1 = 00$, а при $n > 1$ A_n, C_n, D_n определяются рекуррентно: $C_n = A_{n-1}$, $D_n = C_{n-1} D_{n-1}^1$, $A_n = C_n D_n$ (D_{n-1}^1 получается из D_{n-1} заменой $0 \leftrightarrow 1$).

Докажите почти периодичность этой последовательности. Заметим, что последовательность $\{(-1)^{r_n}\}$ является последовательностью коэффициентов многочленов Рудина — Шапиро (см. задачу IV.6.29).

Глава VIII. МЕРА И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

В этой главе слово «мера» означает меру Лебега в $\mathbb{R}^m$ или на сфере $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| = 1\}$. Мера Лебега в $\mathbb{R}^m$ обозначается символом λ_m, а при $m = 1$ — буквой λ.

§ 1. Мера Лебега

1.1. Пусть $E_k \subset (0; 1)$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant N} \lambda(E_k) > N - 1$. Докажите, что $\lambda\left(\bigcap\limits_{1 \leqslant k \leqslant N} E_k\right) > 0$.

1.2. Пусть $E \subset S^1$, $z_1, \ldots, z_N \in S^1$, μ — мера Лебега на S^1 («длина дуги»). Докажите, что если

$$\mu(E) > 2\pi(1 - 1/N),$$

то повернутое надлежащим образом множество E содержит все точки $z_1, \ldots, z_N$, т. е. найдется такая точка $z_0 \in S^1$, что $z_0 z_k \in E$ при $k = 1, 2, \ldots, N$.

1.3. а) Докажите, что если $E \subset \mathbb{R}^m$, $\lambda_m(E) > 1$, то найдутся две (различные) точки $x, x' \in E$, у которых разности соответствующих координат суть целые числа.

б) Пусть $V \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклое центрально симметричное относительно нуля множество, $\lambda_m(V) > 2^m$. Докажите, что V содержит точку $a \neq 0$ с целыми координатами.

в) Пусть $V \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклое центрально симметричное относительно нуля множество, $\lambda_m(V) > N 2^m$, где N — некоторое натуральное число. Докажите, что V содержит по крайней мере $2N$ отличных от нуля точек с целыми координатами.

1.4. Какова мера множества тех точек из интервала $(0; 1)$, у которых при разложении в десятичную дробь

а) на заданном месте стоит цифра 4;

б) стоящая на заданном месте цифра является простым числом;

в) на двух заданных местах стоят заданные цифры;

г) на двух заданных местах стоят цифры разной четности?

1.5. Какова мера множества чисел из интервала $(0;\ 1)$, в десятичной записи которых присутствует цифра 0?

1.6. Пусть $E_k \subset (0;\ 1)$ $(k \in \mathbb{N})$. Верно ли, что существует такая подпоследовательность $\{E_{k_j}\}$, что $\lambda\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_{k_j}\right) > 0$, если выполнено одно из условий

а) $\overline{\lim}\, \lambda(E_k) = 1$; б) $\underline{\lim}\, \lambda(E_k) > 3/4$?

1.7. Пусть $\alpha_k > 0$, $\sum \alpha_k < \infty$. Рассмотрим множество

$$A = \left\{ x \in (0;\ 1) \;\middle|\; \begin{matrix} \text{неравенство } |x - p/q| < \alpha_q/q, \text{ где } p \in \mathbb{Z}, \\ q \in \mathbb{N}, \text{ имеет бесконечно много решений} \end{matrix} \right\}.$$

Докажите, что $\lambda(A) = 0$.

1.8. Пусть $0 < \theta < 1$, $E \subset \mathbb{R}^m$, $0 < \lambda_m(E) < \infty$. Докажите, что найдется такой куб Δ, что $\theta\lambda_m(\Delta) < \lambda_m(E \cap \Delta)$.

1.9. Пусть $E,\ E_0 \subset \mathbb{R}$ произвольные измеримые множества положительной меры. Докажите, что

а) точка 0 — внутренняя для множества $E - E = \{x - y \mid x,\ y \in E\}$;

б) в E найдутся две (различные) точки, расстояние между которыми рационально;

в) множества $E + E_0$, $E \cdot E_0$ имеют внутренние точки.

1.10. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $\lambda(E) > 0$. Докажите, что если $\frac{1}{2}(x + y) \in E$ для любых точек $x,\ y \in E$, то E — промежуток (ср. с задачей I.1.19).

1.11. Пусть $\nu = \{n_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, и пусть

$$E_\nu = \left\{ \sum \varepsilon_k 2^{-n_k} \,\middle|\, \varepsilon_k = 0 \text{ или } 1 \right\}$$

(см. задачу I.1.34).

а) Когда $\lambda(E_\nu) = 0$?

б) Докажите, что если

$$\overline{\lim}\, (n_{k+1} - n_k) \geqslant 2 + \log_2 m \quad (m \in \mathbb{N}),$$

то множество $E^{(m)} = E_\nu + E_\nu + \ldots + E_\nu$ (m слагаемых) имеет меру нуль.

в) Пусть

$$H = \left\{ \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} r_k x_k \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\ r_k \in \mathbb{Q},\ x_k \in E_\nu,\ k = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

Докажите, что если $\overline{\lim}\, (n_{k+1} - n_k) = \infty$, то $\lambda(H) = 0$.

1.12. Пусть

$$E = \left\{ \sum_{k \geqslant 1} \frac{\varepsilon_k}{k!} \,\middle|\, \varepsilon_k = 0 \text{ или } 1 \right\}.$$

Докажите, что E — замкнутое множество, не имеющее внутренних точек, и $\lambda(E) = 0$. Верно ли, что мера множества $E + E + \ldots + E$ (m слагаемых) равна нулю при любом $m \in \mathbb{N}$?

Пусть Δ — замкнутый промежуток длины l_0. Зададим последовательность $\{l_n\}_{n \geqslant 0}$ положительных чисел, удовлетворяющих условию $2l_n < l_{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Рассмотрим множество $E_1 \subset \Delta$, содержащее концы промежутка Δ и состоящее из двух замкнутых промежутков Δ_0 и Δ_1 длины l_1 каждый. Промежутки Δ_0 и Δ_1 назовем промежутками первого ранга. Заменяя l_1 на l_2 и повторяя ту же операцию с промежутками Δ_0 и Δ_1 вместо Δ, мы получим четыре промежутка Δ_{00}, Δ_{01}, Δ_{10}, Δ_{11} второго ранга ($\Delta_{00} \cup \Delta_{01} \subset \Delta_0$; $\Delta_{10} \cup \Delta_{11} \subset \Delta_1$), объединение которых обозначим через E_2. Аналогично строятся промежутки третьего, четвертого и т. д. рангов. Объединение 2^n промежутков ранга n обозначим через E_n. Множество $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ называется *множеством канторовского типа*, построенным с помощью *определяющей последовательности* $\{l_n\}_{n \geqslant 0}$ на промежутке Δ (ср. с построением канторова множества и обобщенного канторова множества на с. 12—14).

1.13. а) Какова определяющая последовательность для канторова множества?

б) Какова определяющая последовательность для множества из задачи 1.12?

в) Когда множество из задачи 1.11 будет множеством канторовского типа? Какова в этом случае определяющая его последовательность?

1.14. Постройте множество $E \subset [0; 1]$ канторовского типа, имеющее положительную меру. Покажите, что мера такого множества может быть сколь угодно близка к единице.

1.15. Докажите существование такого множества $A \subset [0; 1]$, что для любого (непустого) интервала $\Delta \subset (0; 1)$ $\lambda(A \cap \Delta) > 0$ и $\lambda(\Delta \setminus A) > 0$.

1.16. Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклое компактное множество, A_ε — ε-окрестность множества A, т. е. множество

$\bigcup\limits_{x\in A} B(x;\varepsilon)$. Докажите, что $\lambda_2(A_\varepsilon)=a+b\varepsilon+c\varepsilon^2$, и найдите коэффициенты a, b, c.

1.17. Докажите, что всякое (непустое) открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ может быть представлено в виде объединения последовательности попарно не пересекающихся шаров и множества нулевой меры.

1.18. Пусть $\{E_n\}$ — последовательность попарно конгруэнтных подмножеств множества S^1, удовлетворяющая условиям (см. задачу I.1.11):

$$S^1=\bigcup_{n\geqslant 1} E_n,\qquad E_n\cap E_m=\varnothing \quad \text{при} \quad n\neq m \quad (n, m\in\mathbb{N}).$$

Докажите, что множества E_n неизмеримы.

1.19. Под *сдвигом на* θ *по модулю* 1 будем понимать отображение $x\mapsto\{x+\theta\}$ $(x\in[0;1))$, где $\{y\}$ — дробная часть числа y. Заменяя поворот на угол $2\pi\theta$ сдвигом на θ по модулю 1, постройте по аналогии с задачами I.1.11 и 1.18 неизмеримое подмножество промежутка $[0;1)$.

1.20. Используя результат задачи 1.19, покажите, что всякое множество $E\subset\mathbb{R}^1$, имеющее положительную меру, содержит неизмеримое подмножество.

1.21. Пусть $\mathfrak{A}$ — система подмножеств множества $\mathbb{N}$, удовлетворяющая условиям:

1) если $\operatorname{card}(A)=\operatorname{card}(\mathbb{N}\setminus A)=\infty$, то $A\in\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{N}\setminus A\notin\mathfrak{A}$;

2) если $A\in\mathfrak{A}$, $C\subset\mathbb{N}$, $\operatorname{card}(C)<\infty$, то $A\cup C\in\mathfrak{A}$ и $A\setminus C\in\mathfrak{A}$.

(Существование такой системы множеств можно доказать с помощью леммы Цорна (см., например, [13], с. 55).)

Докажите, что множество $E=\left\{\sum\limits_{k\in A}2^{-k}\,\middle|\,A\in\mathfrak{A}\right\}$ неизмеримо.

1.22. Будем говорить, что *множество* $E\subset\mathbb{R}^m$ *порождает паркет*, если его сдвиги на всевозможные векторы с целочисленными координатами покрывают $\mathbb{R}^m$, не налегают друг на друга, т. е.

$$\mathbb{R}^m=\bigcup_{l\in\mathbb{Z}^m}(l+E),\qquad (l+E)\cap(l'+E)=\varnothing$$

при $l\neq l'$ $(l, l'\in\mathbb{Z}^m)$.

Докажите, что мера измеримого множества, порождающего паркет, равна единице.

1.23. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$, $\lambda_m(E) > 0$, A — счетное плотное в $\mathbb{R}^m$ множество. Докажите, что

$$\lambda_m\left(\mathbb{R}^m \setminus \bigcup_{a \in A} (a + E)\right) = 0.$$

§ 2. Измеримые функции

Символом $\mathscr{L}^0(E)$ мы обозначаем множество всех измеримых по Лебегу почти везде конечных функций, определенных на (измеримом) множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Две функции из $\mathscr{L}^0(E)$ называются *эквивалентными* на множестве $E_0 \subset E$, если они совпадают почти везде на E_0. Символом χ_A обозначается характеристическая функция множества $A \subset \mathbb{R}^n$.

2.1. Пусть $f \in \mathscr{L}^0(E)$, $|f| \leqslant 1$ почти везде (п. в.) на $E \subset \mathbb{R}^n$. Докажите, что если $|f| < 1$ на множестве положительной меры, то найдутся не эквивалентные друг другу функции $f_1, f_2 \in \mathscr{L}^0(E)$, удовлетворяющие условиям $|f_1| \leqslant 1$ п. в. на E, $|f_2| \leqslant 1$ п. в. на E, $f = (f_1 + f_2)/2$.

2.2. Приведите пример определенной на $\mathbb{R}$ монотонной функции, не эквивалентной непрерывной функции ни на каком (непустом) интервале.

2.3. Функция Дирихле (равная единице в рациональных точках и нулю в иррациональных точках вещественной прямой) разрывна в каждой точке, но эквивалентна непрерывной функции. Существует ли такая функция из $\mathscr{L}^0([0;\ 1])$, что любая эквивалентная ей на $[0;\ 1]$ функция разрывна в каждой точке этого промежутка?

2.4. Пусть K — канторово множество, f — канторова функция (см. задачу III.3.17), и пусть

$$g(x) = (x + f(x))/2 \qquad (x \in [0;\ 1]).$$

Докажите, что

а) функция g строго возрастает;

б) $\lambda(g(K)) > 0$;

в) найдется такое (измеримое!) множество $H \subset K$, что множество $g(H)$ неизмеримо.

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $f \in \mathscr{L}^0(E)$, и пусть при любом $t \in \mathbb{R}$ мера множества $E(f < t) = \{x \in E \mid f(x) < t\}$ конечна. Функция

$$F(t) = \lambda_n E(f < t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

называется *функцией распределения функции* f (на множестве E). Функции, имеющие одинаковые функции распределения, называются *равноизмеримыми*.

2.5. Докажите, что функция распределения непрерывна слева. Когда она непрерывна в точке $t_0 \in \mathbb{R}$?

2.6. Найдите функции распределения на $[0;\ 2\pi]$ функций

а) $\sin x$; б) $\cos x$; в) $\sin(3x/2)$; г) $\sin(2x - \pi/4)$.

2.7. Равноизмеримы ли функции $\sin x$ и $\sin(nx + \alpha)$ ($n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$) на множествах а) $[0;\ 2\pi]$; б) $[0;\ \pi]$?

2.8. Пусть F — функция распределения функции $f \in \mathscr{L}^0((0, T))$.

а) Найдите функции распределения функций $f + C$, $Cf (C > 0)$, f^3.

б) Пусть $\tilde{f}$ — продолжение функции f на множество $\mathbb{R}$ с периодом T, $g(x) = \tilde{f}(x - C)$ $(x \in (0;\ T))$. Найдите функцию распределения функции g.

2.9. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda_n(E) = 1$, $f \in \mathscr{L}^0(E)$.

а) Докажите, что существует единственное число t_0 такое, что

$$\lambda_n E(f \geqslant t_0) \geqslant 1/2 \quad \text{и} \quad \lambda_n E(f \geqslant t_0 + \varepsilon) < 1/2$$

для любого $\varepsilon > 0$.

б) Докажите, что $\lambda_n E(f \leqslant t_0) \geqslant 1/2$.

в) Число M, удовлетворяющее неравенствам

$$\lambda_n E(f \geqslant M) \geqslant 1/2, \qquad \lambda_n E(f \leqslant M) \geqslant 1/2$$

называется *медианой* функции f. Единственна ли медиана?

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda_n(E) < +\infty$, $f \in \mathscr{L}^0(E)$. Положим

$$f^*(\tau) = \inf\{t \mid \lambda_n E(f > t) \leqslant \tau\}, \quad \tau \in [0;\ \lambda_n(E)].$$

Функция f^* называется *невозрастающей перестановкой* функции f.

2.10. Докажите, что функции f и f^* равноизмеримы. Предполагая, что функция распределения F функции f непрерывна и строго возрастает, выясните, как связаны F и f^*.

2.11. Найдите невозрастающие перестановки следующих функций:

а) $\sin x$ на $[0;\ 2\pi]$; б) $\sin(x/2)$ на $[0;\ 2\pi]$; в) $\operatorname{tg} x$ на $(0;\ \pi)$.

2.12. Найдите невозрастающую перестановку функции

$$f(x;\ y) = x^2 + y^2 \qquad (x^2 + y^2 \leqslant 1).$$

2.13. Пусть $f(x) = \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \dfrac{a_k}{x - c_k}$, где $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, … …, $a_n > 0$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Докажите, что при любом $t > 0$

$$\lambda\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > t\} = A/t, \qquad \lambda\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < -t\} = A/t,$$

где $A = \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k$.

§ 3. Суммируемые функции

В этом параграфе все рассматриваемые множества и функции предполагаются измеримыми. Множество функций, суммируемых по мере Лебега на множестве $E \subset \mathbb{R}^m$, обозначается символом $\mathscr{L}(E)$; для обозначения интеграла по мере Лебега от функции f по множеству E мы, как правило, используем символ $\int\limits_E f(x)\,dx$. Характеристическая функция множества A обозначается символом χ_A.

3.1. Пусть объединение любых трех множеств семейства $E_1, E_2, \ldots, E_N$ совпадает с промежутком $[0;\ 1]$. Положим

$$S_1 = \sum_{1 \leqslant k \leqslant N} \lambda(E_k), \qquad S_2 = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant N} \lambda(E_j \cap E_k).$$

Выразите через S_1 и S_2 интеграл

$$I = \int_0^1 \Bigl(\sum_{1 \leqslant k \leqslant N} \chi_{E_k}(x)\Bigr)^3 dx.$$

3.2. Пусть каждая точка промежутка $[0;\ 1]$ принадлежит по крайней мере k множествам семейства $E_1, E_2, \ldots, E_N$. Докажите, что для некоторого n справедливо неравенство $\lambda(E_n) \geqslant k/N$.

3.3. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$, $\lambda_m(E) < \infty$, $f \in \mathscr{L}^0(E)$. Докажите эквивалентность следующих условий:

а) $f \in \mathscr{L}(E)$; б) $\sum\limits_{k \geqslant 1} \lambda_m(E(|f| \geqslant k)) < \infty$;

в) $\sum\limits_{k \geqslant 1} k\lambda_m(E(k \leqslant |f| < k+1)) < \infty$.

3.4. Пусть множества $E_k \subset \mathbb{R}^m$ $(k \in \mathbb{N})$ попарно различны, $\sum\limits_{k \geqslant 1} \lambda_m(E_k) < \infty$, и пусть

$$A_n = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x \in E_k \text{ в точности при } n \text{ значениях } k\},$$

$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x \in E_k \text{ не менее, чем при } n \text{ значениях } k\}.$$

Докажите, что множества A_n, B_n измеримы и

$$\lambda_m(B_n) = \sum_{k \geqslant n} \lambda_m(A_k),$$

$$\sum_{n \geqslant 1} n\lambda_m(A_n) = \sum_{n \geqslant 1} \lambda_m(B_n) = \sum_{n \geqslant 1} \lambda_m(E_n).$$

3.5. а) Докажите, что ряд $\sum 2^{-n}|x - r_n|^{-1/2}$, где $\{r_n\}$ — произвольная числовая последовательность, сходится почти везде на $\mathbb{R}$.

б) Постройте функцию из $\mathscr{L}^0(\mathbb{R})$, не суммируемую ни на каком (непустом) интервале.

3.6. Может ли всюду дифференцируемая на $[0; 1]$ функция иметь производную, не суммируемую на $[0; 1]$?

3.7. При каких $p \in \mathbb{R}$ функция f суммируема на заданном множестве в следующих случаях:

а) $f(x) = x^{-p}(-1)^{[x]}$, $\quad x \in (1; +\infty)$;

б) $f(x) = x^{-p}\sin x$, $\quad x \in (0; +\infty)$;

в) $f(x) = x^{-p}(-1)^{[1/x]}$, $\quad x \in (0; 1)$;

г) $f(x) = e^{-x^p \sin^2 x}$, $\quad x \in (0; +\infty)$;

д) $f(x) = \dfrac{x^p}{1 + x^6 \sin^2 x}$, $\quad x \in (0; +\infty)$.

3.8. Суммируемы ли указанные ниже функции f на множестве $[-1; 1] \times [-1; 1]$? Найдите повторные интегралы

$$\int_{-1}^{+1} \left(\int_{-1}^{+1} f(x; y)\, dy \right) dx, \qquad \int_{-1}^{+1} \left(\int_{-1}^{+1} f(x; y)\, dx \right) dy,$$

если

а) $f(x; y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$; $\qquad$ б) $f(x; y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;

в) $f(x; y) = \dfrac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$; $\qquad$ г) $f(x; y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$

(во всех случаях значение $f(0;\ 0)$ может быть определено произвольным образом).

3.9. При каких $p \in \mathbb{R}$ функция

$$f(x;\ y) = |1 - xy|^{-p} \quad ((x;\ y) \in \mathbb{R}^2)$$

суммируема на множестве E в случаях

а) $E = [0;\ 1] \times [0;\ 1]$; б) $E = [0;\ 2] \times [0;\ 2]$;

в) $E = \{(x;\ y) \in [0;\ 1] \times [0;\ 1] \mid (x-2)^2 + y^2 \geqslant 2,$
$x^2 + (y-2)^2 \geqslant 2\}$.

3.10. а) Пусть $p > 0$, $E \subset \mathbb{R}^m$. Докажите, что если $\lambda_m(E) = \lambda_m(B(0;\ r))$, то

$$\int_E \frac{dy}{\|x-y\|^p} \leqslant \int_{B(0;r)} \frac{dz}{\|z\|^p}$$

при любом $x \in \mathbb{R}^m$.

б) Докажите, что

$$\left| \int_E e^{ix}\, dx \right| \leqslant 2 \sin(\lambda(E)/2)$$

для любого множества $E \subset [0;\ 2\pi]$.

в) Докажите, что

$$\left| \iint_E \frac{dx\, dy}{x + iy} \right| \leqslant \sqrt{\pi \lambda_2(E)}$$

для любого множества $E\ (E \subset \mathbb{R}^2)$ конечной меры.

3.11. Пусть $p,\ t > 0$, $E \subset \mathbb{R}^m$, $f \in \mathscr{L}^0(E)$. Докажите, что

$$\lambda_m E(|f| \geqslant t) \leqslant t^{-p} \int_E |f(x)|^p\, dx.$$

В частности, при $p = 2$ мы получаем *неравенство Чебышёва*:

$$\lambda_m E(|f| \geqslant t) \leqslant t^{-2} \int_E |f(x)|^2\, dx.$$

3.12. Докажите, что если $|f|^p \in \mathscr{L}(E)$ $(E \subset \mathbb{R}^m)$, то

$$\lambda_m E(|f| \geqslant t) = o(t^{-p}) \text{ при } t \to +\infty.$$

Приведите пример, показывающий, что обратное утверждение неверно.

3.13. Пусть $p > 0$, $E \subset \mathbb{R}^m$, $f \in \mathscr{L}^0(E)$ и $\lambda_m E(|f| \geqslant t) = O(t^{-p})$ при $t \to +\infty$. Докажите, что если $\lambda_m(E) < +\infty$, то $|f|^{p-\varepsilon} \in \mathscr{L}(E)$ при любом $\varepsilon \in (0;\ p)$.

3.14. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$, $f \in \mathscr{L}(E)$. Докажите, что

$$\int_E |f(x)|^p\, dx \xrightarrow[p \to +0]{} \lambda_m E\,(|f| \neq 0).$$

3.15. Пусть $f,\ g \in \mathscr{L}^0(E)$, $f,\ g \geqslant 0$. Докажите, что если

$$\int_E g(x)\, dx = 1, \qquad \int_E g(x) f(x)\, dx < +\infty,$$

то

$$\left(\int_E f^p(x)\, g(x)\, dx \right)^{1/p} \xrightarrow[p \to +0]{} e^{\int_E g(x) \ln f(x) dx}.$$

Можно ли отказаться от условия $\int_E g(x) f(x)\, dx < +\infty$?

3.16. Пусть $x \in \mathbb{R}$, $x = [x] + \sum \varepsilon_k 2^{-k}$, где $\varepsilon_k = \varepsilon_k(x) = 0$ или 1,— двоичное представление числа x.

а) Найдите интегралы $\int_0^1 \varepsilon_k(x)\, dx$, $\int_0^1 \varepsilon_k(x)\, \varepsilon_m(x)\, dx$, $(k,\ m \in \mathbb{N},\ k \neq m)$;

б) Найдите интеграл $\int_0^1 \left| \sigma_n(x) - \frac{1}{2} \right|^2 dx$, где $\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \varepsilon_k(x)$;

в) докажите, что $\int_0^1 \left| \sigma_n(x) - \frac{1}{2} \right|^4 dx = O(n^{-2})$.

3.17. Пусть $x \in \mathbb{R}$, $x = [x] + \sum \varepsilon_k 10^{-k}$, где $\varepsilon_k = \varepsilon_k(x) = 0, 1, \ldots, 9$ — десятичное представление числа x. Пусть j — одна из цифр $0, 1, \ldots, 9$, и пусть

$$a_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varepsilon_1(x) = j, \\ 0, & \text{если } \varepsilon_1(x) \neq j. \end{cases}$$

Найдите интегралы $(k, m \in \mathbb{N}, k \neq m)$

а) $\int_0^1 a_j\left(10^{k-1} x\right) dx$,

б) $\int_0^1 a_j\left(10^{k-1} x\right) a_j\left(10^{m-1} x\right) dx$.

3.18. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0, 1$; $x = \sum_{k \geqslant 1} \varepsilon_k(x) 10^{-k}$ — десятичное представление числа x, $x \in (0, 1)$. Положим

$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{если } \varepsilon_n(x) \neq 0 \text{ при любом } n; \\ 1, & \text{если первое } \varepsilon_n(x) \neq 0 \text{ имеет четный номер;} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Докажите, что функция f измерима, и найдите $\int_0^1 f(x)\,dx$.

3.19. При построении канторова множества из промежутка $[0; 1]$ последовательно удалялись интервалы длины $1/3$, $1/9$ и т. д. (см. с. 12). Пусть $f(x) = n$ на интервалах длины 3^{-n}, $f(x) = 0$ на канторовом множестве.

а) Докажите, что функция f измерима и найдите $\int_0^1 f(x)\,dx$.

б) Найдите функцию распределения F функции f и невозрастающую перестановку f^* функции f (см. определения перед задачами 2.5, 2.10).

3.20. Пусть K — замкнутое подмножество промежутка $[a; b]$,

$$\rho(x) = \inf\{|x - t| \mid t \in K\}$$

— расстояние от точки $x \in \mathbb{R}$ до множества K. Докажите, что при любом $s > 0$ функция

$$I_s(y) = \int_a^b \frac{\rho^s(x)\,dx}{|x - y|^{s+1}} \qquad (y \in K)$$

суммируема на K.

3.21. Докажите равенства $(0 < a \leqslant \infty)$

а) $$\int\limits_{[-a;a]^m} f\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant m} |x_k|\right) dx = m2^m \int_0^a t^{m-1} f(t)\,dt;$$

б) $$\int\limits_{[-a;a]^m} f(x)\,dx = \int_0^a t^{m-1} \left(\int\limits_{\max|y_k|=1} f(ty)\,d\lambda_{m-1}(y) \right) dt,$$

где функция f предполагается неотрицательной, λ_{m-1} — $(m-1)$-мерная мера Лебега на границе куба $[-1; 1]^m$.

Ниже символ μ_{m-1} обозначает меру Лебега (площадь поверхности) на сфере $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| = 1\}$. Площадь сферы, т. е. величина $\mu_{m-1}(S^{m-1})$, обозначается символом σ_{m-1}.

3.22. Докажите по индукции справедливость равенств

$$\text{а)} \int\limits_{S^{n-1}} f(x_1; \ldots; x_{n-1}; x_n)\, d\mu_{n-1}(x) =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \left\{ \int\limits_{S^{n-2}} f(u_1 \sin\theta, \ldots, u_{n-1}\sin\theta, \cos\theta)\, d\mu_{n-2}(u) \right\} d\theta$$

$$(n \geqslant 3);$$

$$\text{б)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int\limits_0^{\infty} t^{n-1} \left\{ \int\limits_{S^{n-1}} f(t\omega)\, d\mu_{n-1}(\omega) \right\} dt \quad (n \geqslant 2),$$

где функция f предполагается суммируемой соответственно на S^{n-1} или $\mathbb{R}^n$. Заметим, что формула а) остается справедливой и при $n = 2$, если под S^0 понимать границу отрезка $[-1; 1]$, т. е. двухточечное множество $\{-1; 1\}$, а меру μ_0 считать состоящей из единичных нагрузок, помещенных в точках $+1$ и -1.

3.23. а) Пусть $T = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|x\| \leqslant r(x/\|x\|)\}$, r — неотрицательная непрерывная функция, определенная на S^{n-1}.

Докажите, что $\lambda_n(T) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\int\limits_{S^{n-1}} r^n(\omega)\, d\mu_{n-1}(\omega)$.

б) Пусть A — ограниченная окрестность нуля в пространстве $\mathbb{R}^n$,

$$p(x) = \sup\{\, |(x; y)| \mid y \in A\}, \qquad V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) \leqslant 1\}.$$

Докажите, что

$$\lambda_n(V) = \frac{1}{n} \int\limits_{S^{n-1}} \frac{d\mu_{n-1}(x)}{p^n(x)}.$$

При решении задач 3.24—3.26 полезно использовать формулу (см. задачу 3.22)

$$\int\limits_{a < \|x\| < b} f(\|x\|)\, dx = n\alpha_n \int\limits_a^b f(t)\, dt,$$

где f — (измеримая) неотрицательная на промежутке $\langle a;\ b\rangle$ $(0 \leqslant a < b \leqslant \infty)$ функция, $\alpha_n = \lambda_n(B(0;\ 1))$.

3.24. Пусть E — (измеримое) подмножество полуоси $(0;\ +\infty)$, $A_E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \in E\}$. Докажите, что

$$\lambda_n(A_E) = n\alpha_n \int\limits_E t^{n-1}\, dt.$$

В задачах 3.25, 3.26 и других символом γ_n обозначена *стандартная гауссовская мера* в $\mathbb{R}^n$, т. е. мера с плотностью $(2\pi)^{-n/2} e^{-\|x\|^2/2}$.

3.25. Вычислите $I_n(r) = \gamma_n(B(0;\ r))$ $(r > 0)$.

3.26. Пусть $a > 0$, K_a — конус в пространстве $\mathbb{R}^4$:

$$K_a = \{(x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leqslant a^2 x_1^2\}.$$

Найдите $\gamma_4(K_a)$.

3.27. Вычислите объем обобщенного тора $T \in \mathbb{R}^4$:

$$T = \left\{(x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \left(x_1;\ \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}\right) \in B \subset \mathbb{R}^2\right\},$$

где B — круг с центром в точке $(0;\ a)$ и радиусом $R \leqslant a$.

3.28. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^2$ задано компактное подмножество A, лежащее в верхней полуплоскости. Если T_0 — тело, получаемое вращением в $\mathbb{R}^3$ множества A вокруг оси x_1, то по теореме Гульдина $\lambda_3(T_0) = \lambda_2(A)\, 2\pi y_c$, где y_c — ордината центра тяжести множества A. Считая, что $\mathbb{R}^2$ канонически вложено в $\mathbb{R}^4$, рассмотрим тело T, «получающееся при вращении A вокруг оси x_1 в $\mathbb{R}^4$»:

$$T = \left\{(x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \left(x_1;\ \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}\right) \in A\right\}.$$

Докажите, что справедлива следующая модификация теоремы Гульдина:

$$\lambda_4(T) = \lambda_2(A) \cdot 4\pi\rho^2,$$

где ρ — радиус инерции множества A относительно оси x_1, т. е. положительное число, определяемое равенством

$$\rho^2 = (\lambda_2(A))^{-1} \iint\limits_A y^2\, dx\, dy.$$

3.29. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^2$ задано компактное множество A, лежащее в полуплоскости $x_2 \geqslant 0$. Считая, что $\mathbb{R}^2$ канонически вложено в $\mathbb{R}^n$, рассмотрим множество T — «тело, получающееся при вращении A вокруг оси x_1 в $\mathbb{R}^n$»:

$$T = \left\{(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n) \in \mathbb{R}^n \middle| \left(x_1;\ \sqrt{x_2^2 + \ldots + x_n^2}\right) \in A\right\}.$$

Докажите, что

а) $\lambda_n(T) = \sigma_{n-2} \iint\limits_A x_2^{n-2}\, dx_1\, dx_2$;

б) $\gamma_n(T) = \dfrac{\sigma_{n-2}}{(2\pi)^{n/2}} \iint\limits_A e^{-\left(x_1^2+x_2^2\right)/2} x_2^{n-2} dx_1\, dx_2$,

где $\gamma_n(T)$ — «гауссовский объем множества T» (γ_n — мера в $\mathbb{R}^n$ с плотностью $(2\pi)^{-n/2} e^{-\|x\|^2/2}$).

3.30. Найдите меру множества

$$A_n(p) = \left\{(x_1;\ \ldots;\ x_n) \in \mathbb{R}^n \middle| \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|^p \leqslant 1\right\} \qquad (p > 0).$$

3.31. а) Вычислите интеграл

$$I = \sigma_{n-1}^{-1} \int\limits_{S^{n-1}} |(x;\ a)|^p\, d\mu_{n-1}(x);$$

б) докажите, что при $m, n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $m + q > 0$, справедливо равенство

$$\sigma_{n-1}^{-1} \int\limits_{S^{n-1}} \left(x_1^2 + \ldots + x_m^2\right)^{q/2} d\mu_{n-1}(x) = \frac{\Gamma((m+q)/2)}{\Gamma((n+q)/2)} \cdot \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(m/2)}$$

$$\left(\underset{m\to\infty}{\sim} (m/n)^{q/2}\right).$$

3.32. Пусть a, $b \in S^{n-1}$, θ — угол между векторами a, $b\,(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$. Докажите, что

$$\int\limits_{S^{n-1}} \operatorname{sign}(a, x) \operatorname{sign}(b, x)\, d\mu_{n-1}(x) = \left(1 - \frac{2}{\pi}\theta\right)\sigma_{n-1}.$$

3.33. Пусть

$$I_n = \int\limits_0^\infty \gamma_n(B(0;\ r))(1 - \gamma_n(B(0;\ r)))\, dr.$$

Докажите, что

а) $I_n = \dfrac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\|x\| - \|y\||\, d\gamma_n(x)\, d\gamma_n(y)$;

б) $I_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (2\pi)^{-1/2}$.

3.34. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — открытое звездное относительно нуля множество, $q_A(x) = \inf\{t > 0 \mid t^{-1}x \in A\}$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ — *калибровочная функция* множества A, и пусть μ — такая вероятностная мера на $\mathbb{R}^n$, что

$$\int_{\mathbb{R}_n} |(x, y)|\, d\mu(x) < +\infty \quad \text{при любом } y \in \mathbb{R}^n.$$

Докажите, что

$$\int_0^{+\infty} \mu(tA)(1 - \mu(tA))\, dt =$$
$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |q_A(x) - q_A(y)|\, d\mu(x)\, d\mu(y) < +\infty.$$

3.35. Пусть функция f суммируема в кубе $Q = [0;\ 1)^m$ и имеет период 1 по каждой переменной. Докажите, что

а) при сдвиге Q на любой вектор интеграл $\int_Q f(x)\, dx$ не изменяется, т. е. при любом $a \in \mathbb{R}^m$

$$\int_Q f(x)\, dx = \int_{a+Q} f(x)\, dx, \quad \text{где} \quad a + Q = \{a + y \mid y \in Q\};$$

б) если A — произвольная целочисленная матрица размера $m \times m$ с определителем, равным единице, то

$$\int_Q f(x)\, dx = \int_{A(Q)} f(x)\, dx.$$

Верно ли это утверждение, если определитель матрицы A равен единице, но ее элементы могут не быть целыми числами?

3.36. Пусть T — произвольное выпуклое компактное тело в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что если $(n-1)$-мерный объем проекции T на любую гиперплоскость не меньше S, то $\operatorname{diam} T \leqslant n \frac{V}{S}$, где $V = \lambda_n(T)$.

3.37. Пусть $T \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое компактное центрально симметричное относительно нуля тело, $Э$ — эллипсоид максимального объема, содержащийся в T:

$$Э \subset T, \quad \lambda_n(Э) = \sup\{\lambda_n(\mathscr{E}) \mid \mathscr{E} \subset T, \quad \mathscr{E} \text{ — эллипсоид}\}.$$

Докажите, что $T \subset \sqrt{n}\, Э$.

3.38. Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — замкнутое ограниченное множество положительной (плоской) меры. Определим функцию φ равенством

$$\varphi(z) = \iint\limits_K \frac{d\xi\, d\eta}{z-(\xi+i\eta)} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Докажите, что

а) $\varphi \in C(\mathbb{C})$, $\quad z\varphi(z) \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_2(K)$;

б) функция φ голоморфна вне K.

3.39. Отождествляя естественным образом пространство $\mathbb{C}^2$ с $\mathbb{R}^4$, рассмотрим на сфере S^3 функции $\varphi_{m,n}$ (m, $n=0, 1, 2, \ldots$), определяемые равенствами

$$\varphi_{m,n}(\zeta_1; \zeta_2) = \zeta_1^m \zeta_2^n.$$

а) Вычислите интегралы

$$\int\limits_{S^3} |\varphi_{m,n}(\zeta_1; \zeta_2)|^2\, d\mu_3(\zeta_1; \zeta_2) \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots);$$

б) докажите, что система $\{\varphi_{m,n}\}_{m,n=0}^{\infty}$ ортогональна;

в) докажите, что если ряд $\sum\limits_{m,n\geqslant 0} a_{m,n}\varphi_{m,n}$ равномерно сходится на $\overline{B^4}$ и его сумма равна f, то справедливо следующее обобщение интегральной формулы Коши:

$$f(\zeta_1; \zeta_2) = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{S^3} \frac{f(z_1; z_2)}{\left(1-\zeta_1\bar{z}_1-\zeta_2\bar{z}_2\right)^2}\, d\mu_3(z_1; z_2),$$

где $(\zeta_1; \zeta_2) \in B^4$, $B^4 = \{(\zeta_1; \zeta_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 < 1\}$.

§ 4. Интеграл Стилтьеса

В задачах 4.1—4.4 функция h определена на промежутке, по которому берется интеграл в правой части равенства, измерима и неотрицательна.

4.1. а) Пусть $0 \leqslant a < b \leqslant \infty$,

$$E = \left\{(x_1; \ldots; x_m) \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, a \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant m} |x_k| \leqslant b\right\}.$$

Докажите, что

$$\int\limits_E h\left(\max_{1\leqslant k\leqslant m} |x_k|\right) dx = m2^m \int\limits_a^b t^{m-1} h(t)\, dt;$$

б) докажите, что

$$\int\limits_{[1;+\infty)^m} h\left(\max_{1\leqslant k\leqslant m} |x_k|\right) dx = m \int\limits_1^\infty (t-1)^{m-1} h(t)\, dt.$$

4.2. а) Пусть

$$O_m(r) = \left\{(x_1; \ldots; x_m) \in \mathbb{R}^m \,\Big|\, \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} |x_k| \leqslant r\right\}.$$

Докажите, что

$$\int_{O_m(r)} h\left(\sum_{1 \leqslant k \leqslant m} |x_k|\right) dx = \frac{2^m}{(m-1)!} \int_0^r t^{m-1} h(t)\, dt;$$

б) пусть $a_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$

$$E = \left\{(x_1; \ldots; x_m) \in \mathbb{R}^m \,\Big|\, \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} a_k x_k \geqslant 1,\ x_1 \geqslant 0, \ldots, x_m \geqslant 0\right\}.$$

Вычислите интеграл $\int\limits_E e^{-\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} a_k x_k} dx.$

4.3. а) Пусть $0 \leqslant a < b \leqslant \infty$,

$$E = \{x \in \mathbb{R}^m \mid a \leqslant \|x\| \leqslant b\}.$$

Докажите, что

$$\int_E h(\|x\|)\, dx = m\alpha_m \int_a^b t^{m-1} h(t)\, dt;$$

б) пусть $p > 0$,

$$A(p) = \left\{(x_1; \ldots; x_m) \in \mathbb{R}^m \,\Big|\, \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} |x_k|^p \leqslant 1\right\}.$$

Докажите, что

$$\int_{\mathbb{R}^m} h\left(\left(\sum_{1 \leqslant k \leqslant m} |x_k|^p\right)^{1/p}\right) dx = mC_m(p) \int_0^\infty t^{m-1} h(t)\, dt,$$

где $C_m(p) = \lambda_m(A(p))$ (по поводу значения $C_m(p)$ см. задачу 3.30).

4.4. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$,

$$g_E(t) = \lambda_m(E \cap B(0; t)) \qquad (t > 0).$$

Докажите, что

а) $\displaystyle\int_E h(\|x\|)\, dx = \int_0^\infty h(t)\, dg_E(t);$

б) если $g_E \in C^1([0; +\infty))$, то

$$\int_E h(\|x\|)\, dx = \int_0^\infty h(t)\, g_E'(t)\, dt.$$

4.5. Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклое ограниченное множество,

$$\rho(x) = \inf \{\|x - y\| \mid y \in A\}$$

— расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^2$ до множества A. Найдите интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-\rho(x)}\, dx$.

4.6. Пусть σ — канторова функция (см. задачу III.3.17). Вычислить интегралы

а) $\int\limits_0^1 x\, d\sigma(x)$; б) $\int\limits_0^1 x^2\, d\sigma(x)$;

в) $\int\limits_0^1 \sigma(x)\, dx$; г) $\int\limits_0^1 \sigma(x)\, d\sigma(x)$;

д) $\int\limits_0^1 \sigma(1 - x)\, d\sigma(x)$.

4.7. Пусть K — канторово множество, σ — канторова функция. При каких $p \in \mathbb{R}$ конечны интегралы

а) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{d\sigma(x)\, d\sigma(y)}{(x^2 + y^2)^{p/2}}$,

б) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{d\sigma(x)\, d\sigma(y)}{((x - u)^2 + (y - v)^2)^{p/2}}$, где $(u, v) \in K \times K$?

4.8. Пусть K — канторово множество, σ — канторова функция. Определим функцию φ равенством

$$\varphi(z) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{d\sigma(\xi)\, d\sigma(\eta)}{z - (\xi + i\eta)} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Докажите, что

а) $\varphi \in C(\mathbb{C})$, $z\varphi(z) \xrightarrow[z \to \infty]{} 1$;

б) функция φ голоморфна вне множества $K \times K$ (ср. с задачей 3.38).

§ 5. ε-энтропия и меры Хаусдорфа

Рассмотрим подмножество A пространства $\mathbb{R}^n$ и положительное число ε. Множество $C \subset \mathbb{R}^n$ называется *ε-сетью* множества A, если $A \subset \bigcup_{x \in C} B(x; \varepsilon)$. Пусть

$$N(A;\ \varepsilon) = \min\{\operatorname{card}(C) \mid C \text{ — } \varepsilon\text{-сеть множества } A\}$$

— минимальная мощность ε-сети множества A. Если множество A ограничено, то $N(A;\ \varepsilon) < \infty$ при любом $\varepsilon > 0$. Функция $H(A;\ \varepsilon) = \log_2 N(A;\ \varepsilon)$ называется *ε-энтропией* множества A.

5.1. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *ε-различимым*, если расстояние между любыми двумя его точками не меньше ε. Пусть

$$M(A;\ \varepsilon) = \max\{\operatorname{card}(E) \mid E \subset A, \text{ множество } E \ \varepsilon\text{-различимо}\}$$

— максимальная мощность ε-различимого подмножества множества A. Докажите, что

$$N(A;\ \varepsilon) \leqslant M(A;\ \varepsilon) \leqslant N(A;\ \varepsilon/2).$$

5.2. Пусть A — ограниченное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$.

а) Докажите, что если A имеет внутреннюю точку, то

$$H(A;\ \varepsilon) \sim n \log_2(1/\varepsilon) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0;$$

б) напомним, что *внешней мерой* $\lambda_n^*(A)$ множества $A \subset \mathbb{R}^n$ называется величина

$$\lambda_n^*(A) = \inf\{\lambda_n(G) \mid A \subset G, G \text{ — открытое подмножество множества } \mathbb{R}^n\}.$$

Докажите, что если $\lambda_n^*(A) > 0$, то $N(A;\ \varepsilon) \geqslant C\varepsilon^{-n}$, где C — некоторая положительная постоянная.

5.3. Найдите асимптотику (при $\varepsilon \to +0$) ε-энтропии множеств

а) $\{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$; б) $\{n^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$;

в) $\{2^{-n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$; г) $\{n^{-\alpha} \mid n \in \mathbb{N}\}$ $(\alpha > 0)$;

д) $\left\{\dfrac{1}{\ln(n+1)} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Метрической размерностью (*метрическим порядком*) ограниченного подмножества A пространства $\mathbb{R}^n$ называется величина $M\text{-}\dim A = \overline{\lim\limits_{\varepsilon\to+0}} \dfrac{H(A;\varepsilon)}{\log_2(1/\varepsilon)}$ $\Bigl($соответственно $r(A) = \underline{\lim\limits_{\varepsilon\to+0}} \dfrac{H(A;\varepsilon)}{\log_2(1/\varepsilon)}\Bigr)$.

5.4. Найдите метрические размерности и метрические порядки графиков следующих функций:

а) $f(x) = \sin \pi x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$;

б) $f(x) = \sin(\pi/x)$, $0 < x \leqslant 1$.

5.5. Найдите метрические размерности и метрические порядки следующих множеств:

а) $A \times [-1; 1] \subset \mathbb{R}^2$, где $A = \{n^{-1/2} \mid n \in \mathbb{N}\}$;

б) графика функции $f(x) = \sin(\pi/x^2)$, $0 < x \leqslant 1$;

в) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S\left(n^{-1/2}\right)$, где $S(r)$ — окружность с центром в нуле и радиусом r.

5.6. Найдите метрические размерности и метрические порядки следующих множеств:

а) $A \times [-1; 1] \subset \mathbb{R}^2$, где $A = \{1/\ln(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$;

б) графика функции $f(x) = \sin(\pi e^{1/x})$, $0 < x \leqslant 1$;

в) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S(1/\ln(n+1))$.

5.7. Найдите метрическую размерность и метрический порядок канторова множества.

5.8. Найдите асимптотику ε-энтропии множества

$$A = \left\{ \sum_{k\geqslant 0} \frac{\varepsilon_k}{k!} \,\middle|\, \varepsilon_k = 0 \text{ или } 1 \right\}.$$

5.9. Определим возрастающую последовательность $\{n_k\}$ натуральных чисел, положив $n_k = k + m!$, если $m! \leqslant k < (m+1)!$, и рассмотрим множество

$$A = \left\{ \sum \varepsilon_k 2^{-n_k} \,\middle|\, \varepsilon_k = 0 \text{ или } 1 \right\}.$$

Пусть, далее, $A_l = A + A + \ldots + A$ (арифметическая сумма, состоящая из l слагаемых). Докажите, что

а) $M\text{-}\dim(A) = 1$, $r(A) = 1/2$;

б) $\lambda(A_l) = 0$ при любом $l \in \mathbb{N}$.

5.10. Пусть Ψ: $[0; +\infty) \to [0; +\infty)$ — строго возрастающая функция такая, что $\Psi(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$. Рассмотрим множество

$$A = \{ \sum \varepsilon_k 2^{-\Psi(k)} \mid \varepsilon_k = 0 \text{ или } 1 \}.$$

Докажите, что

$$H(A; \varepsilon) \sim \Psi^{-1}(\log_2(1/\varepsilon)) \text{ при } \varepsilon \to +0.$$

5.11. Найдите метрическую размерность и метрический порядок множества

$$A = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{array}{ll} x = \sum \varepsilon_k 2^{-k}, \ \varepsilon_k = 0, 1, & \text{при любом } k \text{ цифры } \varepsilon_k, \eta_k \\ y = \sum \eta_k 3^{-k}, \ \eta_k = 0, 1, 2, & \text{имеют одинаковую четность} \end{array} \right\}$$

(*кривая Хиронака*).

5.12. Пусть $A \subset \mathbb{R}^1$; $A_l = A + A + \ldots + A$ (l слагаемых). Докажите, что

а) если $r(A) = 0$, то $\lambda(A_l) = 0$ для любого $l \in \mathbb{N}$;

б) если $r(A) < l^{-1}$, то $\lambda(A_l) = 0$;

в) верно ли, что если $r(A) > 1/2$, то $\lambda(A + A) > 0$? (Рассмотрите множество из задачи 5.3, д).)

Меры Хаусдорфа. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, p, $\varepsilon > 0$. Положим

$$\mu_p(A; \varepsilon) = \inf \left\{ \sum_{k \geqslant 1} r_k^p \,\middle|\, A \subset \bigcup_{k \geqslant 1} B(x_k, r_k), \quad r_k < \varepsilon \right\}.$$

Отметим, что в определении $\mu_p(A; \varepsilon)$ инфимум вычисляется по всевозможным счетным покрытиям множества A шарами, в том числе и такими, центры которых не принадлежат множеству A. Функция μ_p, определенная на системе всех подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ равенством

$$\mu_p(A) = \sup \{\mu_p(A; \varepsilon) | \varepsilon > 0\} = \lim_{\varepsilon \to +0} \mu_p(A; \varepsilon),$$

называется *p-мерной* (*внешней*) *мерой Хаусдорфа*.

5.13. Пусть $p > 0$. Докажите, что

а) если множество A счетно, то $\mu_p(A) = 0$;

б) если $A \subset A'$, то $\mu_p(A) \leqslant \mu_p(A')$;

в) если $A \subset \bigcup_{k \geqslant 1} A_k$, то $\mu_p(A) \leqslant \sum_{k \geqslant 1} \mu_p(A_k)$;

г) если множества A, B находятся на положительном расстоянии друг от друга, т. е.

$$d = \inf \{\|x - y\| \,|\, x \in A, \ y \in B\} > 0,$$

то

$$\mu_p(A \cup B) = \mu_p(A) + \mu_p(B)$$

и

$$\mu_p(A \cup B; \ \varepsilon) = \mu_p(A; \ \varepsilon) + \mu_p(B; \ \varepsilon) \ \text{ при } \varepsilon < d/2.$$

5.14. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Докажите, что

а) если $0 < p < n$ и $\mu_p(A) < \infty$, то $\lambda_n(A) = 0$;

б) $\mu_n(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda_n(A) = 0$.

5.15. Пусть $A \subset S^{n-1}$, ν_{n-1} — лебегова мера на S^{n-1} («площадь поверхности»). Докажите, что

а) если $0 < p < n-1$ и $\mu_p(A) = 0$, то $\nu_{n-1}(A) = 0$;

б) $\mu_{n-1}(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $\nu_{n-1}(A) = 0$.

5.16. Докажите, что

а) если $0 < p < q$, то $\mu_p(A) \geqslant \mu_q(A)$;

б) если $0 < \mu_p(A) < \infty$, то $\mu_q(A) = 0$ при $q > p$ и $\mu_q(A) = \infty$ при $q < p$.

Число $p = \inf\{q \mid \mu_q(A) = 0\} = \sup\{q \mid \mu_q(A) = \infty\}$ называется *хаусдорфовой размерностью* множества A. Мы будем обозначать его символом $\dim_H(A)$.

5.17. а) Докажите, что для ограниченного множества $A \subset \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $\dim_H(A) \leqslant r(A) = \varlimsup_{\varepsilon \to +0} \dfrac{H(A;\varepsilon)}{\log_2(1/\varepsilon)}$;

б) пусть $A_k \subset \mathbb{R}^n$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Докажите, что

$$\dim_H\Big(\bigcup_{k \geqslant 1} A_k\Big) = \sup_k \dim_H(A_k).$$

5.18. *Диаметром* ограниченного множества $C \subset \mathbb{R}^n$ называется число

$$\operatorname{diam}(C) = \sup\{\|x - y\| \mid x, y \in C\}.$$

Пусть $p > 0$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Определим модифицированную p-мерную меру Хаусдорфа $\tilde{\mu}_p(A)$ следующим образом:

$$\tilde{\mu}_p(A) = \sup_{\varepsilon > 0}\Big\{\inf\Big(\sum_{k \geqslant 1} (\operatorname{diam}(C_k))^p \,\Big|\, A \subset \bigcup_{k \geqslant 1} C_k,\ \operatorname{diam}(C_k) < \varepsilon\Big)\Big\}.$$

Докажите, что

$$\mu_p(A) \leqslant \tilde{\mu}_p(A) \leqslant 2^p \mu_p(A)$$

и, следовательно, в определении хаусдорфовой размерности вместо μ_p можно использовать $\tilde{\mu}_p$.

5.19. Найдите хаусдорфову размерность p и вычислите $\mu_p(A)$ для следующих множеств:

а) $A = [a; b]$; б) $A = S^1$;

в) $A = [0; 1] \times [0; 1]$; г) $A = [0; 1]^n$.

5.20. Найдите хаусдорфову размерность p и вычислите $\mu_p(K)$ для канторова множества K. Докажите, что функция φ, определяемая равенством

$$\varphi(x) = 2^{-p}\mu_p(K \cap [0;\ x]) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

совпадает с канторовой функцией.

5.21. Найдите $\dim_H(A)$ и $M\text{-}\dim(A)$ для следующих множеств

а) $A = K$, K — канторово множество;

б) $A = A_0$, где $A_0 = \left\{1 + \frac{1}{\ln(n+1)} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$;

в) $A = K \cup A_0$.

Напомним теперь понятие *множества канторовского типа*, необходимое в последующих задачах (ср. с определением канторова множества и обобщенного канторова множества, в § 1 гл. I). Пусть $\{l_n\}_{n\geqslant 0}$ — последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию $2l_n < l_{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$). *Множеством канторовского типа с определяющей последовательностью* $\{l_n\}_{n\geqslant 0}$ назовем пересечение множеств K_n, которые строятся следующим образом. Пусть Δ — произвольный промежуток, длина которого равна l_0. Удалим из промежутка Δ симметричный относительно его середины интервал δ так, чтобы каждый из сегментов, составляющих множество $\Delta \setminus \delta$, имел длину l_1. Левый из этих сегментов обозначим Δ_0, правый — Δ_1. Сегменты Δ_0 и Δ_1 будем называть сегментами первого ранга. Положим $K_1 = \Delta_0 \cup \Delta_1$. Пусть множество K_n, являющееся объединением 2^n промежутков n-го ранга длины l_n, уже построено. Из каждого сегмента $\Delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}$ n-го ранга удалим симметричный относительно его середины интервал $\delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}$ так, чтобы каждый из сегментов, составляющих множество $\Delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n} \setminus \delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}$, имел длину l_{n+1}. Левый из этих сегментов обозначим символом $\Delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n 0}$, правый — $\Delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n 1}$. Сегменты $\Delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \varepsilon_{n+1}}$ будем называть сегментами $(n+1)$-го ранга и положим

$$K_{n+1} = \bigcup_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n+1} \in \{0;1\}} \Delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \varepsilon_{n+1}}.$$

Множество канторовского типа, построенное на отрезке $[0;\ 1]$ по определяющей последовательности $\{2^{-np}\}_{n\geqslant 0}$, где $p > 1$, будем обозначать символом $K(p)$. Заметим, что при $p = \log_2 3$ множество $K(p)$ есть классическое канторово множество.

5.22. Пусть $E \subset [0;\ 1]$ — множество канторовского типа, $0 < \mu_p(E) < \infty$, σ_E — соответствующая E канторовская функция. Докажите, что

$$\mu_p(E \cap [0;\ x]) = \mu_p(E)\sigma_E(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

5.23. Пусть $0 < p \leqslant 1$, $E \subset \mathbb{R}$ — множество канторовского типа, l_n — длина промежутков n-го ранга. Докажите, что

а) если $\varliminf 2^n l_n^p = 0$, то $\mu_p(E) = 0$;

б) если $\varliminf 2^n l_n^p > 0$, то $\mu_p(E) > 0$;

в) $\mu_p(E) = \infty$ тогда и только тогда, когда $2^n l_n^p \to \infty$.

г) Докажите, что $\dim_H(E \times E) = 2\dim_H(E)$.

5.24. Пусть A — множество из задачи 5.9.

а) Убедитесь, что A — множество канторовского типа, и найдите его определяющую последовательность $\{l_n\}_{n\geqslant 0}$.

б) Найдите хаусдорфову размерность p множества A.

в) Найдите $\varlimsup 2^n l_n^p$.

5.25. Пусть A, B — множества канторовского типа с определяющими последовательностями $\left\{\dfrac{1}{n+1} 3^{-n}\right\}_{n\geqslant 0}$ и $\{\sqrt{n+1}\, 3^{-n}\}_{n\geqslant 0}$ соответственно, и пусть $p = \dim_H(A)$, $q = \dim_H(B)$. Докажите, что

а) $p = q = \log_3 2$ (напомним, что $\log_3 2$ — хаусдорфова размерость канторова множества);

б) $\mu_p(A) = 0$, $\mu_p(B) = +\infty$, и, следовательно, при любом $t > 0$ величины $\mu_t(A)$, $\mu_t(B)$ могут принимать лишь значения 0 или $+\infty$.

5.26. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $E \subset \{0;\ 1;\ \ldots;\ n-1\}$, $m = \operatorname{card}(E)$, $1 \leqslant m < n$. Найдите хаусдорфову размерность множества

$$A = \left\{\sum_{k\geqslant 1} a_k n^{-k} \,\middle|\, a_k \in E \text{ при любом } k \in \mathbb{N}\right\}.$$

5.27. Пусть

$$A = \left\{\sum_{k\geqslant 1} a_k 10^{-k} \,\middle|\, a_k \in \{0; 1; 2; 3; 4\} \text{ при любом } k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Найдите $\dim_H(A)$ и $\dim_H(A+A)$ и убедитесь, что $\dim_H(A) > 1/2$, но $\dim_H(A+A) < 1$.

5.28. Пусть K — множество канторовского типа, $\dim_H(K) > 1/2$. Докажите, что существует такая непрерывная функция $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, что $\lim\limits_{z\to\infty} z\varphi(z) = 1$ и φ голоморфна вне множества $K \times K$.

§ 6. Асимптотика интегралов высокой кратности

В этом параграфе символы $B^n(r)$ и $S^{n-1}(r)$ обозначают соответственно n-мерный (открытый) шар и $(n-1)$-мерную сферу с центром в нуле и радиусом r. Если радиус равен единице, то мы будем просто писать B^n, S^{n-1}. Меры Лебега в $\mathbb{R}^n$ и S^{n-1} обозначаются соответственно символами λ_n (объем) и μ_{n-1} (площадь поверхности). Объем шара B^n обозначается α_n, а площадь сферы S^{n-1} — σ_{n-1}. Символом γ_n обозначается стандартная гауссовская мера в $\mathbb{R}^n$, т. е. мера с плотностью $(2\pi)^{-n/2}e^{-\|x\|^2/2}$. Если $x = (x_1; \ldots; x_n)$ — n-мерный вектор, $0 < p < +\infty$, то $\|x\|_p$ есть, по определению, $\left(\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|^p\right)^{1/p}$, а $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$. Для обозначения евклидовой нормы вектора x, т. е. величины $\|x\|_2$, мы, как и прежде, будем использовать обозначение $\|x\|$, опуская индекс. Наконец, под средним значением функции f, суммируемой по мере μ на множестве E $(0 < \mu E < +\infty)$, мы, как обычно, понимаем величину $\frac{1}{\mu E}\int\limits_E f\,d\mu$.

При решении ряда задач этого параграфа удобно пользоваться формулой (см. задачу VIII.3.22.б))

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int\limits_0^\infty r^{n-1}\left(\int\limits_{S^{n-1}} f(r\omega)\,d\mu_{n-1}(\omega)\right)dr, \quad f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n). \quad (*)$$

6.1. Докажите, что

а) $\displaystyle\frac{1}{\alpha_n}\int\limits_{B^n(r)} x_1^2\,dx = \frac{r^{n+2}}{n+2}$; б) $\displaystyle\frac{1}{\alpha_n}\int\limits_{B^n(r)} |x_1|\,dx \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\,r^{n+1}$;

в) $\displaystyle\frac{1}{\alpha_n}\int\limits_{B^n(r)} |x_1|^p\,dx \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\Gamma(1+p)}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{n}\right)^{p/2} r^{n+p} \quad (p > -1)$.

6.2. Толщина арбузной корки равна 1/20 радиуса арбуза (считаемого шаром). Какой процент от объема арбуза составляет корка а) в трехмерном пространстве? б) в 100-мерном пространстве?

6.3. Попавшую в 1000-мерное пространство Алису спросили, как делать тонкие стеклянные обручи (сферические пояса), чтобы их ширина равнялась 1/10 диаметра. «Нет ничего проще,— ответила Алиса,— нужно выдувать сферы, а потом отрезать лишнее» (рис. 7). Каков будет процент отходов при этой технологии?

6.4. В шаре B^n случайным образом выбирается точка $x=(x_1; \ldots; x_n)$. Что вероятнее при больших n: $|x_1| < 10^{-3}$ или $|x_1| > 10^{-3}$? (Предполагается, что вероятность попадания точки в данное множество пропорциональна мере множества.)

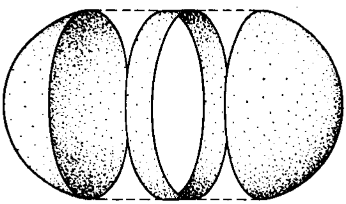

Рис. 7

6.5. На сфере S^{n-1} случайным образом выбирают две точки. Пусть L_n — среднее значение расстояния между ними. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} L_n$.

6.6. Пусть P_n — нормированная мера Лебега на сфере $S^{n-1}(\sqrt{n})$. Докажите, что координаты на этой сфере «асимптотически распределены по нормальному закону», т. е. что при любых $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} P_n \{(x_1; \ldots; x_n) \in S^{n-1}(\sqrt{n}) \mid a < x_n < b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_a^b e^{-t^2/2}\, dt.$$

6.7. Пусть функция f непрерывна на замкнутом шаре $\overline{B^n}$, $M = \max\limits_{\overline{B^n}} |f|$ и при любых $\omega \in S^{n-1}$ и $r \in [0; 1]$ справедлива оценка $|f(r\omega) - f(\omega)| \leqslant h(1-r)$, где h — возрастающая непрерывная на промежутке $[0; 1]$ функция, обращающаяся в нуль в нуле. Докажите, что среднее значение функции f на шаре B^n и на сфере S^{n-1} близки в следующем смысле: при любом $\varepsilon \in (0; 1/2)$ справедливо неравенство

$$\left| \alpha_n^{-1} \int\limits_{B^n} f(x)\, dx - \sigma_n^{-1} \int\limits_{S^{n-1}} f(\omega)\, d\mu_{n-1}(\omega) \right| \leqslant 2\left(M(1-\varepsilon)^n + h(\varepsilon)\right).$$

6.8. Докажите, что при любом $q \in \mathbb{R}$ интегралы $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x_1 \ldots x_n|^{q/n}\, d\gamma_n(x)$ имеют при $n \to \infty$ конечный положительный предел.

6.9. Докажите, что при любых $q \in \mathbb{R}, 0 < p < \infty$

$$\alpha_n^{-1} \int\limits_{B^n} \|x\|_p^q \, dx \underset{n\to\infty}{\sim} \sigma_{n-1}^{-1} \int\limits_{S^{n-1}} \|x\|_p^q \, d\mu_{n-1}(x).$$

6.10. Пусть $\tilde{\gamma}_n$ — мера в $\mathbb{R}^n$ с плотностью

$$(n/2\pi)^{n/2} e^{-(n\|x\|^2)/2};$$

а) убедитесь, что $\tilde{\gamma}_n(\mathbb{R}^n) = 1$;

б) найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{\gamma}_n(B^n)$;

в) докажите, что $\int\limits_{|\|x\|-1|>\varepsilon} d\tilde{\gamma}_n(x) < 2\sqrt{n}\cdot e^{-n\varepsilon^2/2}$ при $0 < \varepsilon < 1$.

6.11. Докажите, что при любых $q \in \mathbb{R}, 0 < p \leqslant \infty$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \|x\|_p^q \, d\tilde{\gamma}_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sigma_{n-1}^{-1} \int\limits_{S^{n-1}} \|x\|_p^q \, d\mu_{n-1}(x)$$

(определение меры $\tilde{\gamma}_n$ см. в задаче 6.10).

6.12. Докажите, что $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \|x\|^q \, d\gamma_n(x) \underset{n\to\infty}{\sim} n^{q/2} \quad (q \in \mathbb{R})$.

6.13. Докажите, что при любом $q \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \|x\|_\infty^q \, d\gamma_n(x) \underset{n\to\infty}{\sim} (2\ln n)^{q/2}.$$

Символ $a_n \asymp b_n$, где $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ — положительные числовые последовательности, используемый в задачах 6.14, 6.15 и некоторых других, означает, что

$$0 < \inf_n \frac{a_n}{b_n} \leqslant \sup_n \frac{a_n}{b_n} < \infty.$$

В аналогичном смысле это обозначение используется нами не только для последовательностей, но и для произвольных семейств положительных чисел.

6.14. Пусть $q \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leqslant m \leqslant n, \quad m + q > 0$, $x = (x_1; \ldots; x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$I_{m,n} = \sigma_{n-1}^{-1} \int\limits_{S^{n-1}} \max_{1\leqslant k\leqslant m} |x_k|^q \, d\mu_{n-1}(x).$$

Докажите, что

а) $I_{m,n} \asymp \left(\frac{\ln m}{n}\right)^{q/2}$; б) $I_{m,n} \underset{m\to\infty}{\sim} \left(\frac{2\ln m}{n}\right)^{q/2}$.

6.15. Докажите, что при любых $q \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$

$$I_n(p; q) = \int_{\mathbb{R}^n} \| x \|_p^q \, d\gamma_n(x) \asymp n^{q/p}.$$

(Рассмотрите последовательно случаи
а) $q > 0$, $0 < p \leqslant 2$; б) $0 < q \leqslant p$, $p \geqslant 2$;
в) $2 \leqslant p \leqslant q$; г) $q < 0$.)

6.16. Докажите, что при любых $q \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$

$$\sigma_{n-1}^{-1} \int_{S^{n-1}} \| x \|_p^q \, d\mu_{n-1}(x) \asymp n^{q(1/p - 1/2)}.$$

6.17. Докажите, что радиус r_n шара $B^n(r_n)$, объем которого равен единице, выражается формулой

$$r_n = \sqrt{\frac{n}{(2\pi e)}} \left(1 + a \frac{\ln n}{n} + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

и найдите a и b.

6.18. а) Шар $B^n(r)$ касается всех ребер n-мерного куба $[-1; 1]^n$. Сравните при больших n объем куба и объем шара.

б) Куб $[-1; 1]^n$ разбивается координатными плоскостями на 2^n кубов. В каждый из них мы вписываем шар, а затем рассматриваем шар $B^n(\rho)$, касающийся внешним образом всех шаров, вписанных в кубы. При каких n справедливо включение $B^n(\rho) \subset [-1; 1]^n$? Что больше при больших n: объем куба $[-1; 1]^n$ или объем шара $B^n(\rho)$?

6.19. Найдите асимптотику радиуса ρ_n шара $B^n(\rho_n)$, гауссовский объем которого равен $1/2$.

6.20. Пусть a_n, b_n, c_n — средние значения функции $1/\|x\|_1$ на множествах O_n, B^n, $[-1; 1]^n$ соответственно, где O_n есть n-мерный октаэдр:

$$O_n = \left\{(x_1; \ldots; x_n) \,\middle|\, \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| \leqslant 1\right\}.$$

Докажите, что $a_n = \dfrac{n}{n-1}$, $b_n \asymp 1/\sqrt{n}$, $c_n = 1/n$.

6.21. Пусть I_n, J_n, K_n — средние значения функции $\|x\|^2/\|x\|_1$ на множествах O_n, B^n, $[-1; 1]^n$ соответственно. Докажите, что

а) $I_n \sim 2/n$; б) $J_n \asymp 1/\sqrt{n}$; в) $K_n \asymp 1$.

6.22. Пусть $O_n + \varepsilon B^n$ — ε-окрестность октаэдра O_n.

а) Найдите предел
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\lambda_n\left(O_n+\varepsilon B^n\right)}{\alpha_n}\right)^{1/n}.$$

б) Найдите при $n\to+\infty$ асимптотику отношения
$$\frac{\lambda_n\left(O_n+\varepsilon B^n\right)}{\alpha_n}.$$

6.23. Докажите, что $\lambda_n(A_n)\sim 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+1}$, где
$$A_n=\left\{(x_1;\ldots;x_n)\in\mathbb{R}^n\,\middle|\,\begin{matrix}x_1+x_2\leqslant 1, & x_2+x_3\leqslant 1,\ldots & \ldots,x_{n-1}+x_n\leqslant 1\\ x_1\geqslant 0, & x_2\geqslant 0,\ldots & \ldots,x_n\geqslant 0\end{matrix}\right\}.$$

6.24. Пусть V_n — центрально симметричное относительно нуля выпуклое множество, содержащееся в кубе $(-1;\ 1)^n$. Докажите, что если $\lambda_n(V_n)>(3/2)^n$, то при достаточно большом n множество $2V_n$ содержит такую точку $a=(a_1;\ \ldots;\ a_n)$ с целочисленными координатами, что $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|>n/10$.

6.25. Докажите, что

а) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_{[0;1]^n}\|x\|\,dx\underset{n\to\infty}{\to}\frac{1}{\sqrt{3}}$;

б) $\displaystyle\int\limits_{[0;1]^n}f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)dx\underset{n\to\infty}{\to}f\left(\frac{1}{2}\right)\qquad (f\in C([0;\ 1]))$;

в) $\displaystyle\int\limits_{[0;1]^n}f\left(\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}\right)dx\underset{n\to\infty}{\to}f\left(e^{-1}\right)\ (f\in C([0;\ 1]))$;

г) $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n}f\left(\frac{|x_1|+\ldots+|x_n|}{n}\right)d\gamma_n(x)\underset{n\to\infty}{\to}f\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)$
$$\left(f\in C\left(\mathbb{R}^n\right),\sup|f|<\infty\right).$$

6.26. Пусть $f\geqslant 0$, $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=1$, $0<p<\infty$. Докажите, что

а) $\displaystyle\int\limits_{\|x\|_p\leqslant c}\ldots\int f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)\,dx_1\ldots dx_n\underset{n\to\infty}{\to}0$

при любом $c>0$;

б) $\int\limits_{\|x\|_p \leqslant n^\theta} f(x_1) f(x_2) \ldots f(x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ при любом

$\theta \in (0;\ 1/p)$;

в) можно ли в п. б) заменить n^θ на $(\omega_n n)^{1/p}$, где $\omega_n > 0$, $\omega_n \to 0$?

6.27. Докажите, что для любого n и любого вектора $a \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$A_p\|a\| \leqslant \left(2^{-n}\int\limits_{Q_n} |(x, a)|^p\, dx\right)^{1/p} \leqslant B_p\|a\|,$$

где $Q_n = [-1;\ 1]^n$, A_p, B_p — положительные постоянные, зависящие только от p (ср. с задачей 3.31.а)).

Глава IX. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

В этой главе, как и в предыдущей, символ λ_m обозначает меру Лебега в пространстве $\mathbb{R}^m$ ($\lambda = \lambda_1$), символом $\mathscr{L}^0(E)$ обозначается множество всех измеримых почти везде конечных функций, определенных на множестве E.

Мы предполагаем, что читатель знаком с основными фактами теории функций (теоремы Лебега и Рисса о связи между сходимостями по мере и почти везде, теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, теорема о почленном интегрировании положительных функциональных рядов, неравенство Бесселя, теорема Рисса — Фишера, полнота тригонометрической системы функций). Некоторые из перечисленных теорем постоянно используются в решениях (например, теорема о почленном интегрировании положительных рядов), без других (например, теорем Лебега и Рисса) сама постановка ряда задач, как нам кажется, не может быть понята с достаточной полнотой, даже если эти теоремы формально не используются в решениях.

§ 1. Сходимости по мере и почти везде

1.1. Сходятся ли указанные ниже функциональные последовательности $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ по мере и почти везде на промежутках Δ? Имеют ли они суммируемые мажоранты?

а) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $\Delta=(0;\ 1)$;

б) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $\Delta=(1;+\infty)$;

в) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $\Delta=(0;\ 1)$;

г) $f_n(x) = n^2xe^{-nx^2}$, $\Delta=(1;\ +\infty)$;

д) $f_n(x) = \dfrac{n^2x}{n^4+x^2}$, $\Delta=(1;+\infty)$;

е) $f_n(x) = \dfrac{1}{\ln(n+1)}\cdot\dfrac{nx}{1+n^2x^4}$, $\Delta=(0;\ 1)$;

ж) $f_n(x) = |x-1/n|^{1/2}$, $\Delta=(0;\ 1)$.

1.2. Пусть $a\in\mathbb{R}$, $\{a\}=a-[a]$ — дробная часть числа a, и пусть f_n — характеристическая функция промежутка с концами $\{\ln n\}$, $\{\ln(n+1)\}$ $(n\in\mathbb{N})$ (если $\{\ln(n+1)\}<\{\ln n\}$, то мы считаем f_n тождественным нулем). Докажите, что

а) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x)=1$ при любом $x\in(0;\ 1)$;

б) $f_{[C^k]}(x)\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$ почти везде на $(0;\ 1)$ при любом $C>1$. (Ср. этот результат с результатом задачи II.1.25.)

1.3. Постройте такую последовательность $\{g_n\}\subset\mathscr{L}^0(0;\ 1)$, что $g_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ по мере, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} g_n(x)=+\infty$ п. в. на $(0;\ 1)$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} g_n(x)=-\infty$ п. в. на $(0;\ 1)$.

1.4. Пусть функции f_n $(n\in\mathbb{N})$ монотонны на промежутке $(0;\ 1)$ и $f_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}f$ по мере. Докажите, что функция f совпадает почти везде с монотонной функцией f_0 и $f_n(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}f_0(x)$ в точках непрерывности f_0.

1.5. Пусть $f_n(x)=|\sin(A_nx+\varphi_n)|^{p_n}$, где $x\in(0;\ 2\pi)$, а $\{A_n\}$, $\{\varphi_n\}$, $\{p_n\}$ — вещественные числовые последовательности, удовлетворяющие условиям $\underline{\lim}\,|A_n|>0$, $p_n\to+\infty$. Докажите, что $f_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ по мере на $(0;\ 2\pi)$. Обязательно ли $f_n(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ почти везде на $(0;\ 2\pi)$? Рассмотрите пример

$$f_n(x)=\left|\cos\sqrt{m}\left(x-\frac{k\pi}{m}\right)\right|^m,\quad \text{где}\quad m=[\sqrt{n}],\ k=n-m^2.$$

1.6. Пусть $\{A_n\}$, $\{\varphi_n\}$ — вещественные числовые последовательности, $A_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$. Докажите, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sin(A_n x + \varphi_n) = 1 \quad \text{п. в. на } \mathbb{R},$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \sin(A_n x + \varphi_n) = -1 \quad \text{п. в. на } \mathbb{R}.$$

1.7. Докажите, что

$$n^{1/3} \int_0^\infty e^{-x} \sin^n(nx + \varphi_n)\, dx \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

для любой последовательности $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{R}$.

1.8. Пусть $\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subset \mathscr{L}^0(\mathbb{R})$, $a > 0$. Докажите, что если

$$\sum_{n\geqslant 1} \lambda\{x \in \mathbb{R} \mid f_n(x) > a\} < \infty,$$

то

$$\varlimsup_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant a \text{ п. в. на } \mathbb{R}.$$

1.9. Пусть $\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subset \mathscr{L}^0(\mathbb{R})$, $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $\varepsilon_n > 0$. Докажите, что если

$$\sum_{n\geqslant 1} \lambda\{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x)| \geqslant \varepsilon_n\} < \infty,$$

то

а) $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ п. в. на $\mathbb{R}$;

б) для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $e \subset \mathbb{R}$, что $\lambda(e) < \varepsilon$ и $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ на $\mathbb{R} \setminus e$.

1.10. Докажите, что сходимость почти везде «устойчива» в том смысле, что если $\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subset \mathscr{L}^0(0;\,1)$, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ п. в. на $(0;\,1)$, то существует такая последовательность $\{A_n\}_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{R}$, что $A_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, $A_n f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ п. в. на $(0;\,1)$. Останется ли это утверждение верным, если заменить интервал $(0;\,1)$ на $\mathbb{R}$?

1.11. Пусть $\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subset \mathscr{L}^0(0;\,1)$, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$ п. в. на $(0;\,1)$. Докажите, что существует функция $g \in \mathscr{L}^0(0;\,1)$ («регулятор сходимости») и последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{R}$ такие, что $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon_n g(x)$ п. в. на $(0;\,1)$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Останется ли это утверждение верным, если заменить интервал $(0;\,1)$ на $\mathbb{R}$?

1.12. Докажите, опираясь на результат предыдущей задачи, теорему Д. Ф. Егорова: если $\{f_n\}_{n\geqslant 1}\subset\mathscr{L}^0(0;\ 1)$, $f_n(x)\underset{n\to\infty}{\to} f(x)$ п. в. на $(0;\ 1)$, то для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такое множество $e\subset(0;\ 1)$, что $\lambda(e)<\varepsilon$ и $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ на $(0;\ 1)\setminus e$. Останется ли эта теорема верной, если заменить интервал $(0;\ 1)$ на $\mathbb{R}$?

1.13. Пусть $\{f_n\}_{n\geqslant 1}\subset\mathscr{L}^0(0;\ 1)$. Докажите, что $f_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ по мере тогда и только тогда, когда для любой подпоследовательности $\{f_{n_k}\}$ найдется, в свою очередь, подпоследовательность $\left\{f_{n_{k_j}}\right\}$, сходящаяся к нулю почти везде на $(0;\ 1)$.

1.14. Пусть $\{f_n\}_{n\geqslant 1}\subset\mathscr{L}^0(\mathbb{R})$, $g\in\mathscr{L}^0(\mathbb{R})$, $|f_n(x)|\leqslant g(x)$ п. в. на $\mathbb{R}$ при любом $n\in\mathbb{N}$. Докажите, что если функция g удовлетворяет условию

$$\lambda\{x\in\mathbb{R}\mid g(x)>\varepsilon\}<\infty \quad \text{при любом} \quad \varepsilon>0, \tag{1}$$

то из сходимости последовательности $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ к нулю почти везде на $\mathbb{R}$ следует, что $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ по мере. Верно ли это, если условие (1) нарушено?

1.15. Пусть

$$\{f_{n,k}\}_{n,k\geqslant 1}\subset\mathscr{L}^0(0;\ 1),\ \{f_n\}_{n\geqslant 1}\subset\mathscr{L}^0(0;\ 1),\ f_0\in\mathscr{L}^0(0;\ 1),$$

и пусть

$$f_{n,k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f_n \quad \text{по мере}, \quad f_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_0 \quad \text{по мере.}$$

Докажите, что найдется такая строго возрастающая последовательность номеров $\{k_n\}_{n\geqslant 1}$, что $f_{n,k_n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_0$ по мере («теорема о диагональной последовательности»). Верно ли аналогичное утверждение, если сходимость по мере заменить

а) равномерной сходимостью на $(0;\ 1)$?

б) сходимостью почти везде на $(0;\ 1)$?

в) поточечной сходимостью на $(0;\ 1)$?

§ 2. Сходимость в среднем. Закон больших чисел

В этом параграфе буква E везде обозначает измеримое подмножество пространства $\mathbb{R}^m$ конечной (лебеговой) меры. Символ $\mathscr{L}^r(E)$ $(\mathscr{L}^\infty(E))$, где r — положительное число, обозначает множество функций из $\mathscr{L}^0(E)$, удовлетворяющих условию

$$\int_E |f(x)|^r\,dx < \infty \qquad \left(\|f\|_\infty \equiv \operatorname*{vrai\,sup}_{x\in E} |f(x)| < \infty\right).$$

Символом $\|f\|_r$ обозначается величина $\left(\int_E |f(x)|^r\,dx\right)^{1/r}$.

Мы будем говорить, что $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0$ в пространстве $\mathscr{L}^r(E)$ (сходимость в среднем с показателем r), если $\|f_n - f_0\|_r \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2.1. Пусть $f \in \mathscr{L}^r(E)$. Докажите, что

а) если $0 < s < r$, то $f \in \mathscr{L}^s(E)$;

б) если $\lambda_m(E) = 1$, то функция $s \mapsto \|f\|_s$ возрастает на промежутке $(0; r]$.

2.2. Пусть $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$, $\{g_n\}_{n\geqslant 1} \subset \mathscr{L}^r(E)$, f_0, $g_0 \in \mathscr{L}^r(E)$. Докажите, что

а) если $\|f_n - f_0\|_r \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0$ по мере;

б) если $\|f_n - f_0\|_r \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\|g_n - g_0\|_r \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то $\|f_ng_n - f_0g_0\|_{r/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2.3. Пусть $\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subset \mathscr{L}^1(E)$. Докажите, что если $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ по мере и $\sup\limits_n \|f_n\|_1 < \infty$, то

$$\int_E \sqrt{|f_n(x)\,g(x)|}\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

для любой функции $g \in \mathscr{L}^1(E)$.

2.4. Пусть $\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subset \mathscr{L}^2(E)$, $f_0 \in \mathscr{L}^2(E)$. Докажите, что если $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0$ по мере и $\|f_n\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \|f_0\|_2$, то $\|f_n - f_0\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2.5. Пусть f, $g \in \mathscr{L}^0(E)$, $0 < \alpha < \lambda_m(E)$. Положим $J_\alpha(f) = \inf\{t \mid \lambda_m\{x \in E \mid |f(x)| > t\} < \alpha\}$. Величина $J_\alpha(f)$ называется *квантилью* (ср. определение $J_\alpha(f)$ с определением невозрастающей перестановки функции f перед задачей VIII.2.10; квантиль $J_{1/2}(f)$ есть медиана функции $|f|$ — см. задачу VIII.2.9). Докажите, что

а) $J_\alpha(f) \leqslant J_\beta(f)$ при $0 < \beta < \alpha$;

б) $J_\alpha(af) = |a|J_\alpha(f)$ при любом $a \in \mathbb{R}$;

в) $J_\alpha(f+g) \leqslant J_{\alpha/2}(f) + J_{\alpha/2}(g)$;

г) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0$ по мере (f_n, $f_0 \in \mathscr{L}^0(E)$) тогда и только тогда, когда $J_\alpha(f_n - f_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ при любом α, $0 < \alpha < \lambda_m(E)$.

2.6. Пусть $M \subset \mathscr{L}^2(E)$, и пусть $\|f\|_2 \leqslant C\|f\|_1$ для любой функции $f \in M$. Докажите, что а) если $0 < r < 1$, то найдется такое число $\theta = \theta(r)$, что $\|f\|_1 \leqslant C^{\theta}\|f\|_r$ для любой функции $f \in M$;

б) найдется такое число $\alpha = \alpha(C) > 0$, что $\|f\|_1 \leqslant \leqslant 2\lambda_m(E) J_\alpha(f)$ для любой функции $f \in M$;

в) если $\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subset M$, то $\|f_n\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ тогда и только тогда, когда $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ по мере.

2.7. Пусть $\{f_n\} \subset \mathscr{L}^2(E)$ и при некоторых C, $\delta > 0$ и любом $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства $\|f_n\|_2 \leqslant C$, $\|f_n\|_1 \geqslant \geqslant \delta$. Докажите, что если ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n f_n(x)$ почти везде на E сходится абсолютно, то $\sum\limits_{n\geqslant 1} |a_n| < \infty$.

2.8. Докажите, что если ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1} |a_n \sin(nx + \varphi_n)|$ сходится на множестве положительной меры, то $\sum\limits_{n\geqslant 1} |a_n| < \infty$.

2.9. Пусть $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ — ортогональная система в $\mathscr{L}^2(E)$,

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} f_k.$$

Докажите, что если

$$\frac{1}{n^2} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \|f_k\|_2^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

то $\sigma_n \to 0$ по мере. (Различные варианты этого утверждения носят название закона больших чисел.)

2.10. Докажите сходимость по мере на интервале $(-\pi; \pi)$ следующих последовательностей $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$:

а) $f_n(x) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \sin^2 kx$;

б) $f_n(x) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \sqrt[3]{k} \sin kx$;

в) $f_n(x) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^k \sin^2 kx$;

г) $f_n(x) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \left(1 - \dfrac{k}{n}\right) \sin^2 kx$.

2.11. Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} k \sin^2 kx\right) dx.$$

2.12. Пусть $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ — ортогональная система в $\mathscr{L}^2(E)$, $|f_n(x)| \leqslant M$ почти везде на E при любом $n \in \mathbb{N}$, и пусть $\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} f_k$. Докажите, что

а) $\sum_{k\geqslant 1} \|\sigma_{k^2}\|_2^2 < \infty$;

б) $\sigma_n(x) \to 0$ почти везде на E.

(Последнее утверждение часто формулируют, говоря, что для последовательности $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ справедлив усиленный закон больших чисел.)

2.13. Пусть $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ — ортогональная система в $\mathscr{L}^2(E)$, $\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} f_k$. Докажите, что если $\sum_{n\geqslant 1} n^{-3/2}\|f_n\|_2^2 < \infty$, то $\sigma_n(x) \to 0$ п. в. на E, т. е. для последовательности $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ справедлив усиленный закон больших чисел. Докажите, кроме того, что функция $g = \sup_n |\sigma_n|$ принадлежит $\mathscr{L}^2(E)$.

2.14. Пусть $\varepsilon_n(x)$ — n-й знак двоичного разложения числа $x \in (0;\ 1)$,

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \varepsilon_k(x).$$

Докажите, что

а) $\sigma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1/2$ по мере;

б) $\sigma_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1/2$ п. в. на $(0;\ 1)$.

Последнее означает, что для почти всех чисел из промежутка $(0;\ 1)$ нули и единицы в их двоичном разложении встречаются одинаково часто.

2.15. Зафиксируем одну из цифр $0, 1, \ldots, 9$, скажем m, и пусть $c_m(x) = 1$, если десятичное разложение числа $x - [x]$ имеет вид $0, m\ldots$, и $c_m(x) = 0$ в противном случае. Положим

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{0\leqslant k< n} c_m(10^k x).$$

Используя тот же метод, что и в предыдущей задаче, докажите, что

а) $\sigma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1/10$ по мере;

б) $\sigma_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1/10$ п. в. на $(0;\ 1)$.

Число $x \in (0;\ 1)$ называется *нормальным*, если при любом $p \in \mathbb{N}$ его разложение в p-ичную дробь содержит все «цифры» (числа 0, 1, ..., $p-1$) одинаково часто. Известно, например (см. [12]), что число

$$x = 0{,}1234567891011\ldots 19202122\ldots$$

нормально (десятичное разложение x состоит из выписанных одно за другим всех натуральных чисел (в десятичной записи)).

2.16. Обобщая задачи 2.14 и 2.15, докажите, что почти все числа интервала (0; 1) нормальны.

2.17. Пусть $f \in \mathscr{L}^2(0;\ 1)$, $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 0$. Для произвольных $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ положим

$$E_n(\varepsilon) = \left\{(x_1;\ \ldots;\ x_n) \in (0;\ 1)^n \,\middle|\, \frac{1}{n}\Big|\sum_{1\leqslant k\leqslant n} f(x_k)\Big| > \varepsilon\right\}.$$

Докажите, что $\lambda_n(E_n(\varepsilon)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

2.18. Пусть $\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subset \mathscr{L}^2(0;\ 1)$, $\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Для произвольных $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ положим

$$E_n(\varepsilon) = \left\{(x_1;\ \ldots;\ x_n) \in (0;\ 1)^n \,\middle|\, \frac{1}{n}\Big|\sum_{1\leqslant k\leqslant n} f_k(x_k)\Big| > \varepsilon\right\}.$$

Докажите, что $\lambda_n(E_n(\varepsilon)) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, если

$$\frac{1}{n^2}\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \|f_n\|_2^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2.19. Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R})$, $\sup\limits_{\mathbb{R}} |\varphi| < \infty$. Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{1}{n}\|x\|^2\right) e^{-\pi\|x\|^2}\,dx.$$

2.20. Пусть $\{a_n\}_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{R}$, $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ — ортонормированная последовательность в $\mathscr{L}^2(E)$, $S_n = \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k f_k$. Докажите, что если $\sum\limits_{n\geqslant 1} \sqrt{n}\, a_n^2 < \infty$, то

а) $\sum\limits_{k\geqslant 1} \|S - S_{k^2}\|_2^2 < \infty$, где $S = \sum\limits_{k\geqslant 1} a_k f_k$;

б) ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n f_n(x)$ сходится почти везде на E;

в) $\sup\limits_n |S_n| \in \mathscr{L}^2(E)$.

§ 3. Функции Радема́хера. Неравенство Хинчина

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\Delta_{n,k} = (k/2^n;\ (k+1)/2^n)$. Определим функцию r_n на множестве $\mathbb{R}$ равенством

$$r_n(x) = (-1)^k \text{ при } x \in \Delta_{n,k}, \quad r_n(k/2^n) = 0.$$

Функции r_n называются *функциями Радемахера*.

3.1. а) Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого набора $\{\varepsilon_k\}_{1 \leqslant k \leqslant n}$, где числа ε_k принимают значения $+1$ или -1, найдется такая точка $t \in (0;\ 1)$, что $r_k(t) = \varepsilon_k$ при $k = 1, 2, \ldots, n$. Какова мера множества таких точек?

б) Докажите, что $r_1(t+1) = r_1(t)$, $r_n(t) = r_1(2^{n-1}t)$ $(t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$.

в) Пусть $a_n(x)$ — n-й знак двоичного разложения числа $x \in (0;\ 1)$. Докажите, что $a_n(x) = (1 - r_n(x))/2$ почти везде на $(0;\ 1)$.

г) Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n \geqslant 1} 2^{-n} r_n(x)$ $(x \in (0;\ 1))$.

3.2. Докажите, что

а) $$\int_0^1 \varphi(r_1(t);\ \ldots;\ r_n(t))\, dt = 2^{-n} \sum_{\varepsilon_1 = 0,1;\ldots;\varepsilon_n = 0,1} \varphi(\varepsilon_1;\ \ldots;\ \varepsilon_n);$$

б) $$\int_0^1 \varphi_1(r_1(t))\, \varphi_2(r_2(t)) \ldots \varphi_n(r_n(t))\, dt = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \int_0^1 \varphi_k(r_1(t))\, dt.$$

3.3. Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — попарно различные натуральные числа. Докажите, что

а) $$\int_0^1 \varphi\left(r_{m_1}(t);\ r_{m_2}(t);\ \ldots;\ r_{m_n}(t)\right) dt = \int_0^1 \varphi(r_1(t);\ r_2(t);\ \ldots;\ r_n(t))\, dt;$$

б) $$\int_0^1 r_{m_1}(t)\, r_{m_2}(t) \ldots r_{m_n}(t)\, dt = 0;$$

в частности, $\{r_n\}_{n \geqslant 1}$ — ортонормированная система в $\mathscr{L}^2(0;\ 1)$.

3.4. Вычислите интегралы

а) $\int\limits_0^1 e^{it\sum\limits_{k\geqslant 1} r_k(x)/2^k}\,dx$; б) $\int\limits_0^1 e^{it\sum\limits_{k\geqslant 1} 3^{-k}r_k(x)}\,dx$;

в) $\int\limits_0^1 e^{z\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} c_k r_k(x)}\,dx \quad (z,\ c_k \in \mathbb{C})$.

г) Докажите, что если $t,\ a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \to 0$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n^2 = \infty$, то

$$\int\limits_0^1 e^{it\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k r_k(x)}\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ при } t\neq 0.$$

3.5. Докажите, что для любых чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ справедливы неравенства

а) $\int\limits_0^1 \Big|\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} c_k r_k(x)\Big|^4 dx \leqslant A\Big(\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |c_k|^2\Big)^2$;

б) $\Big(\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |c_k|^2\Big)^{1/2} \leqslant B\int\limits_0^1 \Big|\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} c_k r_k(x)\Big|\,dx$,

где A, B — абсолютные постоянные.

3.6. Докажите, что для любых чисел $c_{kj}\ (k,\ j \in \mathbb{N})$ справедливы неравенства

а) $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \Big|\sum\limits_{1\leqslant k,j\leqslant n} c_{kj} r_k(t)\, r_j(s)\Big|^4 dt\,ds \leqslant A\Big(\sum\limits_{1\leqslant k,j\leqslant n} |c_{kj}|^2\Big)^2$;

б) $\Big(\sum\limits_{1\leqslant k,j\leqslant n} |c_{kj}|^2\Big)^{1/2} \leqslant$

$$\leqslant B\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \Big|\sum\limits_{1\leqslant k,j\leqslant n} c_{kj} r_k(t)\, r_j(s)\Big|\,dt\,ds,$$

где A, B — абсолютные постоянные.

3.7. Докажите, что

а) $\{r_j r_k\}_{1\leqslant j<k}$ есть ортонормированная система в $\mathscr{L}^2(0;\ 1)$;

б) для любых чисел c_{jk} $(1\leqslant j<k)$ справедливы неравенства

$$\int\limits_0^1 \Big|\sum\limits_{1\leqslant j<k\leqslant n} c_{jk} r_j(x)\, r_k(x)\Big|^4 dx \leqslant A\Big(\sum\limits_{1\leqslant j<k\leqslant n} |c_{jk}|^2\Big)^2,$$

$$\Big(\sum\limits_{1\leqslant j<k\leqslant n} |c_{jk}|^2\Big)^{1/2} \leqslant B\int\limits_0^1 \Big|\sum\limits_{1\leqslant j<k\leqslant n} c_{jk} r_j(x)\, r_k(x)\Big|\,dx,$$

где A, B — абсолютные постоянные.

3.8. Докажите, что для любых чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ справедливы неравенства

а) $$\int\limits_0^{2\pi}\Big|\sum_{1\leqslant k\leqslant n} c_k \sin 2^k x\Big|^4 dx \leqslant A\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}|c_k|^2\Big)^2;$$

б) $$\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}|c_k|^2\Big)^{1/2} \leqslant B\int\limits_0^{2\pi}\Big|\sum_{1\leqslant k\leqslant n} c_k \sin 2^k x\Big| dx,$$

где A, B — абсолютные постоянные.

3.9. Докажите, опираясь на результаты задач 3.5—3.8, что для любого $t>0$ и любых чисел c_k, c_{jk} справедливы неравенства

а) $$\lambda\Big\{x\in(0;\,1)\,\Big|\,\Big|\sum_{1\leqslant k\leqslant n} c_k r_k(x)\Big|>t\Big\}\leqslant A_1 t^{-4}\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}|c_k|^2\Big)^2;$$

б) $$\lambda\Big\{x\in(0;\,1)\,\Big|\,\Big|\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} c_{jk} r_j(x) r_k(x)\Big|>t\Big\}\leqslant$$
$$\leqslant A_2 t^{-4}\Big(\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}|c_{jk}|^2\Big)^2;$$

в) $$\lambda\Big\{x\in(0;\,2\pi)\,\Big|\,\Big|\sum_{1\leqslant k\leqslant n} c_k \sin 2^k x\Big|>t\Big\}\leqslant$$
$$\leqslant A_3 t^{-4}\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}|c_k|^2\Big)^2,$$

где A_1, A_2, A_3 — абсолютные постоянные.

3.10. Пусть $\sigma_n(x)=\frac{1}{n}\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} r_k(x)$ $(x\in(0;\,1))$. Докажите, что

а) $\sum\limits_{n\geqslant 1}\lambda\{x\in(0;\,1)\,|\,\sigma_n(x)\geqslant n^{-1/5}\}<\infty$;

б) $\sum\limits_{n\geqslant 1}|\sigma_n(x)|^4<\infty$ п. в. на $(0;\,1)$.

Каждое из утверждений а), б) влечет равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(x)=0$ почти везде на $(0;\,1)$, которое известно под названием усиленного закона больших чисел. Используя связь между функциями Радемахера и знаками двоичного разложения (см. задачу 3.1. в)), выведите отсюда, что двоичное разложение почти каждого числа содержит «поровну» нулей и единиц (см. задачу 2.14).

3.11. Пусть C — произвольная квадратная $(n\times n)$-матрица, A — множество всевозможных векторов в $\mathbb{R}^n$, координаты которых равны ± 1. Докажите, что

а) $\sum\limits_{x,y\in A}(Cx, y)^4 \leqslant K_1 2^{-2n}\left(\sum\limits_{x,y\in A}(Cx, y)^2\right)^2$;

б) $\left(\sum\limits_{x,y\in A}(Cx, y)^2\right)^{1/2} \leqslant K_2 2^{-n}\sum\limits_{x,y\in A}|(Cx, y)|$,

где K_1, K_2 — абсолютные постоянные.

3.12. Пользуясь теоремой единственности для преобразования Фурье конечных борелевских мер, найдите функции распределения следующих функций:

а) $f(x) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k\geqslant 1} 3^{-k} r_k(x) \qquad (x \in (0, 1))$;

б) $f(x) = \sum\limits_{k\geqslant 1} 2^{-k} r_{m_k}(x) \qquad (x \in (0; 1))$, где $\{m_k\}_{k\geqslant 1}$ — произвольная (не обязательно возрастающая) последовательность попарно различных натуральных чисел.

3.13. Пусть Δ — один из промежутков $\Delta_{m,i}$ (см. определение функций Радемахера). Докажите, что при $m \leqslant n$ ($m, n \in \mathbb{N}$, $t > 0$, $a_k \in \mathbb{R}$) справедливы неравенства

а) $\int\limits_\Delta \left|\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant m} a_k r_k(x)\right| dx \leqslant \int\limits_\Delta \left|\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k r_k(x)\right| dx$;

б) $\int\limits_\Delta e^{t\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant m} a_k r_k(x)} dx \leqslant \int\limits_\Delta e^{t\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k r_k(x)} dx$.

Кроме того, если $E = \left\{x \in (0; 1) \,\middle|\, \left|\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant m} a_k r_k(x)\right| > t\right\}$, то

в) $\int\limits_E \left|\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant m} a_k r_k(x)\right| dx \leqslant \int\limits_E \left|\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k r_k(x)\right| dx$;

г) $\int\limits_E e^{t\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant m} a_k r_k(x)} dx \leqslant \int\limits_E e^{t\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k r_k(x)} dx$.

3.14. Используя неравенство $\operatorname{ch}(s) \leqslant e^{s^2/2}$ ($s \in \mathbb{R}$), докажите, что при $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$, $c_1, c_2, \ldots \in \mathbb{C}$ справедливы неравенства

а) $\lambda\left\{x \in (0; 1) \,\middle|\, \left|\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k r_k(x)\right| > t\right\} \leqslant 2e^{-t^2/(2A^2)}$,

где $A^2 = \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k^2$;

б) $\lambda\left\{x \in (0; 1) \,\middle|\, \left|\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} c_k r_k(x)\right| > t\right\} \leqslant 4e^{-t^2/(4c^2)}$,

где $c^2 = \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |c_k|^2$.

Кроме того,

в) если $E = \left\{x \in (0;\ 1) \mid \sup\limits_{1 \leqslant m \leqslant n} \left| \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} a_k r_k(x) \right| > t \right\}$, то $\lambda(E) \leqslant A/t$, $\lambda(E) \leqslant 2e^{-t^2/(2A^2)}$, где $A^2 = \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k^2$;

г) если $\sum\limits_{k \geqslant 1} a_k^2 < \infty$, $g(x) = \sup\limits_{n \geqslant 1} \left| \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k r_k(x) \right|$, то $\int\limits_0^1 e^{sg^2(x)} dx < \infty$ для любого числа $s > 0$.

3.15. Докажите, что если $\sum\limits_{k \geqslant 1} |a_k|^2 < \infty$, то ряд $\sum\limits_{k \geqslant 1} a_k r_k(x)$ сходится почти везде.

3.16. Докажите, что если ряд $\sum\limits_{k \geqslant 1} a_k r_k$ сходится по мере на каком-нибудь множестве положительной меры, то $\sum\limits_{k \geqslant 1} |a_k|^2 < \infty$.

3.17. Докажите, что эквивалентны утверждения

а) $\sum\limits_{k \geqslant 1} |a_k|^2 < \infty$;

б) ряд $\sum\limits_{k \geqslant 1} a_k r_k$ сходится в $\mathscr{L}^p(0;\ 1)$ при некотором $p \in (0;\ 2)$;

в) ряд $\sum\limits_{k \geqslant 1} a_k r_k$ сходится по мере на множестве $(0;\ 1)$;

г) ряд $\sum\limits_{k \geqslant 1} a_k r_k$ сходится почти везде на множестве $(0;\ 1)$.

3.18. Докажите, что если ряд $\sum\limits_{k \geqslant 1} a_k \sin 2^k x$ сходится по мере на каком-нибудь множестве положительной меры, то $\sum\limits_{k \geqslant 1} |a_k|^2 < \infty$.

3.19. Пусть $\sum\limits_{k \geqslant 1} |a_k|^2 < \infty$. Докажите, что

а) если $\operatorname{vrai\,sup}\limits_{x \in \Delta} \left| \sum\limits_{k \geqslant 1} a_k r_k(x) \right| < \infty$ для некоторого (непустого) промежутка Δ, то $\sum\limits_{k \geqslant 1} |a_k| < \infty$;

б) если $\operatorname{vrai\,sup}\limits_{x \in \Delta} \left| \sum\limits_{k \geqslant 1} a_k \sin 2^k x \right| < \infty$ для некоторого (непустого) промежутка Δ, то $\sum\limits_{k \geqslant 1} |a_k| < \infty$.

В задачах 3.20, 3.21 мы будем рассматривать систему *функций Хаара* $\{h_m\}_{m\geqslant 0}$. Эта система определяется следующим образом. Каждое натуральное число m единственным образом представимо в виде $m=2^n+k$, где n, k — целые неотрицательные числа $0\leqslant k<2^n$. По определению полагаем $h_0(x)=1$ для любого $x\in(0;\ 1)$;

$$h_m(x)=\begin{cases} 2^{n/2} & \text{при } k/2^n<x<(k+1/2)/2^n, \\ -2^{n/2} & \text{при } (k+1/2)/2^n<x<(k+1)/2^n, \\ 0 & \text{при прочих значениях } x\in(0;\ 1). \end{cases}$$

3.20. Докажите, что

а) $\{h_m\}_{m\geqslant 0}$ — ортонормированная система в $\mathscr{L}^2(0;\ 1)$;

б) если $E=\left\{x\in(0;\ 1)\,\middle|\,\left|\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant m}a_kh_k(x)\right|>t\right\}$, то при $n\geqslant m$

$$\int\limits_E\left|\sum_{0\leqslant k\leqslant m}a_kh_k(x)\right|dx\leqslant\int\limits_E\left|\sum_{0\leqslant k\leqslant n}a_kh_k(x)\right|dx;$$

в) если $E=\left\{x\in(0;\ 1)\,\middle|\,\max\limits_{0\leqslant m\leqslant n}\left|\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant m}a_kh_k(x)\right|>t\right\}$, то $\lambda(E)=At^{-1}$, где $A=\left(\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n}|a_k|^2\right)^{1/2}$;

г) если $\sum\limits_{k\geqslant 1}|a_k|^2<\infty$, то ряд $\sum\limits_{k\geqslant 0}a_kh_k(x)$ сходится почти везде на $(0;\ 1)$.

3.21. Опираясь на то, что ряд Фурье по системе Хаара любой суммируемой на промежутке $(0;\ 1)$ функции f сходится к ней в $\mathscr{L}^1(0;\ 1)$, докажите, что

а) он сходится почти везде на $(0;\ 1)$;

б) если $E=\left\{x\in(0;\ 1)\,\middle|\,\sup\limits_n|S_n(x)|>t\right\}$, где S_n — n-я частичная сумма ряда Фурье функции f по системе Хаара, то $\lambda(E)\leqslant\|f\|_1t^{-1}$.

3.22. Используя результат задачи 3.14, докажите, что при любом $p>0$ и любых $a_1, a_2, \ldots, a_n\in\mathbb{R}$ справедливо *неравенство Хинчина*

$$A_p\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}a_k^2\right)^{1/2}\leqslant\left\|\sum_{1\leqslant k\leqslant n}a_kr_k\right\|_p\leqslant B_p\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}a_k^2\right)^{1/2},$$

где A_p, B_p — положительные постоянные, зависящие лишь от p, и $\varlimsup\limits_{p\to+\infty}\left(B_p/\sqrt{p}\right)\leqslant e^{-1/2}$. Точное значение величин A_p, B_p найдено в [37].

3.23. Докажите, что утверждения а) — г) задачи 3.17 эквивалентны утверждению

д) ряд $\sum\limits_{k\geqslant 1} a_k r_k$ сходится в $\mathscr{L}^p(0;\ 1)$ при любом p из $(0;\ +\infty)$.

3.24. Докажите, что для любого тригонометрического многочлена $\sum\limits_{|k|\leqslant n} c_k e^{ikx}$ $(n \geqslant 2)$

а) можно указать такие числа $\varepsilon_k = \pm 1$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm n)$, что

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{|k|\leqslant n} \varepsilon_k c_k e^{ikx} \right| dx \geqslant c \left(\sum_{|k|\leqslant n} |c_k|^2 \right)^{1/2},$$

где $c > 0$ — абсолютная постоянная;

б) можно указать такие числа $\varepsilon_k = \pm 1$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm n)$, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{|k|\leqslant n} \varepsilon_k c_k e^{ikx} \right| \leqslant 10 \sqrt{\ln n} \left(\sum_{|k|\leqslant n} |c_k|^2 \right)^{1/2}.$$

3.25. Докажите, что при любом $a > 2$ найдутся такие числа $p_n > 0$, что ряд

$$\sum_{n\geqslant 2} \left(\frac{|r_1(x) + \ldots + r_n(x)|}{\sqrt{an\ln n}} \right)^{p_n}$$

будет сходиться почти везде. Выведите отсюда, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{|r_1(x) + \ldots + r_n(x)|}{\sqrt{2n\ln n}} \leqslant 1$$

почти везде.

3.26. Пусть $\{n_j\}_{j\geqslant 1}$ — произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел. Докажите, что

$$\varlimsup_{j\to+\infty} \frac{|r_1(x) + r_2(x) + \ldots + r_{n_j}(x)|}{\sqrt{2n_j \ln j}} \leqslant 1 \text{ почти везде на } (0;\ 1).$$

Если $j = O(\ln n_j)$, то мы получаем отсюда весьма слабый вариант закона повторного логарифма:

$$\varlimsup_{j\to+\infty} \frac{|r_1(x) + r_2(x) + \ldots + r_{n_j}(x)|}{\sqrt{2n_j \ln\ln n_j}} \leqslant 1 \text{ почти везде на } (0;\ 1).$$

§ 4. Ряд и преобразование Фурье

4.1. Вычислите свертку функций $f_{c_1} * f_{c_2}$ в следующих случаях $(c > 0)$:

а) $f_c(x) = \dfrac{1}{c\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2c^2)} \qquad (x \in \mathbb{R});$

б) $f_c(x) = (2\pi c^2)^{-n/2} e^{-\|x\|^2/(2c^2)} \qquad (x \in \mathbb{R}^n);$

в) $f_c(x) = \dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{c}{c^2 + x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$

4.2. Пусть $0 < \alpha < 1$, f, g_α — 2π-периодические (измеримые) функции,

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\mathbb{R}} |f(x)| < \infty, \qquad g_\alpha(x) = |x|^{-\alpha} \text{ при } |x| \leqslant \pi.$$

Докажите, что функция

$$\varphi(x) = \int_0^{2\pi} f(y) g_\alpha(x - y)\, dy \qquad (x \in \mathbb{R})$$

входит в класс $\mathrm{Lip}_{1-\alpha}$.

В задачах 4.3—4.16 символом $\widehat{f}(n)$ обозначаются коэффициенты Фурье суммируемой на промежутке $(-\pi;\ \pi)$ функции f относительно ортогональной системы $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

4.3. а) Пусть $f,\ g \in \mathscr{L}^2(-\pi;\ \pi)$, $h = fg$. Докажите, что если $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n) = 0$ при $n < 0$, то и $\widehat{h}(n) = 0$ при $n < 0$.

б) Пусть $f \in \mathscr{L}^\infty(-\pi;\ \pi)$, $\Phi = e^f$. Докажите, что если $\widehat{f}(n) = 0$ при $n < 0$, то и $\widehat{\Phi}(n) = 0$ при $n < 0$.

4.4. Пусть $f \in \mathscr{L}^1(-\pi;\ \pi)$. Докажите, что $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < \infty$ тогда и только тогда, когда

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} g(y) h(x - y)\, dy \text{ почти везде на } (-\pi;\ \pi),$$

где g, h — 2π-периодические функции, входящие в класс $\mathscr{L}^2(-\pi;\ \pi)$.

4.5. Пусть $f \in \mathscr{L}^\infty(-\pi; \pi)$. Докажите, что числа $\widehat{f}(n)/\sqrt{|n|}$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$) являются коэффициентами Фурье функции, входящей в класс $\mathrm{Lip}_{1/2}$.

4.6. Докажите, что если $0 < \alpha \leqslant 1$ и f — 2π-периодическая функция, входящая в класс Lip_α, то $\widehat{f}(n) = O(1/|n|^\alpha)$.

4.7. Докажите, что если f — функция ограниченной вариации на промежутке $[-\pi; \pi]$, то $\widehat{f}(n) = O(1/n)$.

4.8. Пусть $f(x) = x \cos(1/x)$ при $0 < |x| < \pi$, $f(0) = 0$. Докажите, что хотя функция f не является функцией ограниченной вариации на $[-\pi; \pi]$ (см. задачу III.3.13.а)), но $\widehat{f}(n) = O(1/n)$.

4.9. Пусть $0 < \alpha < 1$, $a_n = O(n^{-(1+\alpha)})$. Докажите, что функция $f(x) = \sum\limits_{n \geqslant 1} a_n e^{inx}$ $(x \in \mathbb{R})$ входит в класс Lip_α. Верно ли это при $\alpha = 1$?

4.10. Пусть $f(x) = \sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} \sin(2^{n!}|x|)$ $(x \in \mathbb{R})$. Докажите, что ряд Фурье функции f расходится в точке $x = 0$.

Пусть $f \in \mathscr{L}^1(-\pi; \pi)$, $S_n(x) = \sum\limits_{|k| \leqslant n} \widehat{f}(k) e^{ikx}$ $(|x| \leqslant \pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots)$ — частичная сумма ряда Фурье функции f. Положим

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + \ldots + S_{n-1}(x)}{n}.$$

Суммы σ_n называются *суммами Чезаро — Фейера*. Легко убедиться, что

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y) \cdot \frac{\sin^2 n \dfrac{x-y}{2}}{\sin^2 \dfrac{x-y}{2}}\, dy.$$

4.11. Докажите, что последовательность сумм Чезаро — Фейера, соответствующая 2π-периодической непрерывной функции, сходится к ней равномерно на $\mathbb{R}$.

4.12. Пусть f — 2π-периодическая функция, $f \in \mathrm{Lip}_\alpha$, где $0 < \alpha < 1$. Докажите, что

а) $|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant C/n^\alpha$ при любом $x \in \mathbb{R}$, где C — постоянная, зависящая от α и f, но не от x;

б) $\|f - S_n\|_2 = O(n^{-\alpha})$, где S_n — n-я частичная сумма ряда Фурье функции f.

4.13. Пусть f — 2π-периодическая функция, $f \in \mathrm{Lip}_\alpha$. Докажите, что если $\alpha > 1/2$, то $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < \infty$. При $\alpha = 1/2$ утверждение становится неверным (см. задачу IV.6.34).

4.14. Пусть $f \in \mathscr{L}^1(-\pi; \pi)$. Докажите, что если $\|f - \sigma_n\|_1 = o(1/n)$, то $f \equiv \mathrm{const}$ почти везде.

4.15. Пусть $f \in \mathscr{L}^2(-\pi; \pi)$. Рассмотрим функцию $\tilde{f}$, определяемую равенством

$$\tilde{f}(x) = -i \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \operatorname{sign}(n) e^{inx} \qquad (x \in (-\pi; \pi)).$$

Докажите, что функция $\tilde{f}$ вещественна, если вещественна функция f.

Функция $\tilde{f}$ называется *сопряженной* к f. С одним из многочисленных применений этого важного понятия читатель может познакомиться в двух следующих задачах, заимствованных из [41].

4.16. Пусть $1 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ — натуральные, а $a_0, a_1, \ldots, a_m$ — произвольные комплексные числа, и пусть

$$f_k(x) = \sum_{2^{k-1} \leqslant j < 2^k} a_j e^{in_j x}$$

(мы считаем, что $a_j = 0$ при $j > m$). Пусть, далее,

$$g_k = |f_k|, \quad h_k = g_k - i\tilde{g}_k \quad \text{и} \quad F_\varepsilon = \sum_{k \geqslant 1} f_k e^{-\varepsilon \sum\limits_{j \geqslant k} h_j},$$

где ε — произвольное положительное число, $\tilde{g}_k$ — функция, сопряженная к g_k (см. определение в задаче 4.15). Докажите, что

а) $|F_\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon^{-1}$ при любом $x \in (-\pi; \pi)$;

б) если $2^{p-1} \leqslant q < 2^p$, то

$$|\widehat{F}_\varepsilon(n_q) - a_q| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \geqslant p} \|f_k\|_2 \sum_{j \geqslant k} \|f_j\|_2.$$

4.17. Пусть $1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ ($n_j \in \mathbb{N}$). Докажите, что для любых комплексных чисел $c_1, c_2, \ldots, c_m$ справедливо неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{1\leqslant j\leqslant m} c_j e^{in_jx}\right| dx \geqslant \gamma \sum_{1\leqslant j\leqslant m} \frac{|c_j|}{j},$$

где γ — положительная абсолютная постоянная ($\gamma \geqslant 10^{-2}$).

Преобразованием Фурье функции $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$ называется функция $\widehat{f}$, определяемая равенством

$$\widehat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\, e^{-i(s,t)}\, dt \qquad (s \in \mathbb{R}^n),$$

где (s, t) — скалярное произведение векторов $s, s,\ t \in \mathbb{R}^n$.

4.18. Вычислите преобразования Фурье функций, указанных в задаче 4.1.

4.19. Найдите преобразования Фурье функций Эрмита $h_n(x) = e^{x^2/2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)}$ $(x \in \mathbb{R},\ n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Преобразованием Фурье конечной меры μ, заданной по крайней мере на борелевских подмножествах пространства $\mathbb{R}^n$, называется функция $\widehat{\mu}$, определяемая равенством

$$\widehat{\mu}(s) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(s,t)}\, d\mu(t) \qquad (s \in \mathbb{R}^n),$$

где (s, t) — скалярное произведение векторов $s, t \in \mathbb{R}^n$.

Преобразование Фурье меры в $\mathbb{R}^1$, порожденной неубывающей ограниченной функцией g, обозначается символом $\widehat{g}$.

4.20. Пусть F — функция распределения функции $f \in \mathscr{L}^0(E)$, где $E \subset \mathbb{R}^m$, $\lambda_m(E) < \infty$. Докажите, что

$$\widehat{F}(s) = \int_E e^{-isf(x)}\, dx \qquad (s \in \mathbb{R}).$$

4.21. Пусть $\widehat{\sigma}(s) = \int_0^1 e^{-ist}\, d\sigma(t)$ $(s \in \mathbb{R})$, где σ — канторова функция (см. задачу III.3.17). Докажите, что $\widehat{\sigma}(s) \nrightarrow 0$ при $s \to \infty$.

4.22. Пусть $\sigma_1(x) = \int_0^1 \sigma(x-y)\, d\sigma(y)$ $(x \in \mathbb{R})$, где σ —

канторова функция ($\sigma(x)=0$ при $x<0$, $\sigma(x)=1$ при $x>1$). Докажите, что

а) σ_1 строго возрастает на промежутке $[0; 2]$;

б) $\widehat{\sigma}_1(s)\not\to 0$ при $s\to\infty$.

Решения задач 4.23—4.27 опираются на следующие теоремы единственности:

Если $f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$ и $\widehat{f}\equiv 0$, то $f(x)=0$ п. в. в $\mathbb{R}^n$.

Если μ — конечная борелевская мера в $\mathbb{R}^n$ и $\widehat{\mu}\equiv 0$, то $\mu=0$ (см., например, [20], с. 302).

4.23. Докажите, что если свертка суммируемой на $\mathbb{R}^n$ функции f с функцией $e^{-\|x\|^2}$ тождественно равна нулю, то $f(x)=0$ п. в.

4.24. Пусть при $t>0$

$$g(t)=\sup\left\{\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon_k 2^{-k}\;\middle|\;\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon_k 2^{-(2k-1)}\leqslant t,\ \varepsilon_k=0 \text{ или } 1\right\},$$

$$g(t)=0 \text{ при } t<0.$$

Докажите, что

а) $g\in C(\mathbb{R})$;

б) $g'(t)=0$ почти везде на $\mathbb{R}$;

в) $\widehat{g}(s)=e^{-is/3}\prod_{n\geqslant 1}\cos\left(s4^{-n}\right)$;

г) $$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)\,dg(2t)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ x & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1 & \text{при } x>1.\end{cases}$$

4.25. Пусть $\nu=\{n_k\}_{k\geqslant 1}$ — произвольная строго возрастающая последовательность натуральных чисел, $\nu_1=\{n_{2k-1}\}_{k\geqslant 1}$, $\nu_2=\{n_{2k}\}_{k\geqslant 1}$. Пусть, далее,

$$g(t)=\left\{\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon_k 2^{-k}\;\middle|\;\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon_k 2^{-n_k}\leqslant t,\ \varepsilon_k=0 \text{ или } 1\right\} \text{ при } t>0,$$

$$g(t)=0 \text{ при } t<0,$$

функции g_1 и g_2 строятся аналогичным образом с помощью последовательностей ν_1 и ν_2 соответственно. Докажите, что

а) $g\in C(\mathbb{R})$;

б) $g_1'(t)=0$ почти везде на $\mathbb{R}$, $g_2'(t)=0$ почти везде на $\mathbb{R}$;

в) Убедитесь, что функция g «делима» в том смысле, что

$$g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x-t)\,dg_2(t) \text{ при любом } x\in\mathbb{R}.$$

4.26. Докажите, что если две конечные борелевские меры в $\mathbb{R}^n$ принимают одинаковые значения на всевозможных полупространствах (т. е. множествах вида $\{x\in\mathbb{R}^n \mid (x;\,a)\geqslant c\}$, где $a\in\mathbb{R}^n$, $c\in\mathbb{R}$), то они совпадают.

4.27. Найдите общий вид вероятностной борелевской меры в пространстве $\mathbb{R}^n$, инвариантной относительно ортогональных преобразований и являющейся в то же время произведением двух мер, сосредоточенных на нетривиальных ортогональных подпространствах.

Глава X. ИТЕРАЦИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ОТРЕЗКА

§ 1. Топологическая динамика

1.1. Пусть для функции $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ при любом $n\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство $f(n+1)>f(f(n))$. Докажите, что $f(n)=n$ при любом $n\in\mathbb{N}$.

1.2. Существует ли непрерывная функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ удовлетворяющая уравнению $f\circ f=F$ в следующих случаях:

а) $F(x)=-x$; б) $F(x)=e^x$; в) $F(x)=x^2-2$?

Обозначим через Id_X (или просто Id) тождественное отображение множества X в себя (т. е. $\mathrm{Id}(x)=x$ для любого x из X). Отображение $h\colon X\to X$ назовем *инволюцией*, если $h\circ h=\mathrm{Id}_X$.

1.3. Пусть $f(x)=x+1$, $g(x)=x-1$ $(x\in\mathbb{R})$. Подберите две инволюции h и k таким образом, чтобы выполнялись соотношения $h\circ k=f$, $k\circ h=g$.

1.4. Докажите, что каждая биекция есть композиция двух инволюций.

Неподвижной точкой отображения $f\colon X\to X$ называется такая точка $x\in X$, что $x=f(x)$.

1.5. Докажите, что непрерывное отображение $f\colon \Delta\to\mathbb{R}$, где Δ — некоторый промежуток, обладает неподвижной точкой в каждом из следующих случаев:

а) $\Delta=[a;\ b]$, $f(\Delta)\subset\Delta$;

б) $\Delta=[a;\ b]$, $f(\Delta)\supset\Delta$;

в) f — инволюция.

1.6. Пусть функция $f\in C([a;\ b])$ монотонно возрастает, $f([a;\ b])\subset[a;\ b]$. Докажите, что для каждого $x_0\in$ $\in[a;\ b]$ последовательность $x_n=f(x_{n-1})(n\in\mathbb{N})$ сходится к неподвижной точке. Верно ли это, если f — убывающая функция?

1.7. Пусть $f\in C(\mathbb{R})$. Для $x_0\in\mathbb{R}$ положим $x_1=f(x_0)$, $x_k=f(x_{k-1})\,(k\in\mathbb{N})$. Докажите, что если для некоторого $x_0\in\mathbb{R}$ последовательность $\left\{\frac{1}{n}\sum\limits_{0\leqslant k<n}x_k\right\}$ ограничена, то f обладает неподвижной точкой. Верно ли это для непрерывного отображения f: $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$?

1.8. Докажите, что конечная группа аффинных преобразований плоскости обладает неподвижной точкой (общей для всех преобразований группы).

Отображения f: $\Delta_1\to\Delta_1$ и g: $\Delta_2\to\Delta_2$ (Δ_1, Δ_2 — интервалы на прямой) называются *топологически сопряженными*, если существует такая непрерывная биекция (*гомеоморфизм*) h: $\Delta_2\to\Delta_1$, что $f=h\circ g\circ h^{-1}$ (т. е. $h\circ g=f\circ h$). В этом случае будем употреблять обозначение $f\backsim g$, а отображение h будем называть *сопрягающим*.

В задачах 1.9—1.12 предполагается, что отображения непрерывны, заданы на интервалах и переводят их в себя.

1.9. Докажите, что отношение топологической сопряженности есть отношение эквивалентности, т. е.

а) $f\backsim f$;

б) $f\backsim g$ тогда и только тогда, когда $g\backsim f$;

в) если $f_1\backsim f_2$, $f_2\backsim f_3$, то $f_1\backsim f_3$.

1.10. Докажите, что топологически сопряженные отображения одновременно обладают или нет следующими свойствами:

а) взаимная однозначность;

б) монотонность определенного типа;

в) односторонняя ограниченность (без уточнения ее типа);

г) ограниченность.

1.11. Докажите, что топологически сопряженные отображения имеют а) одинаковое количество промежутков монотонности;

б) одинаковое количество неподвижных точек.

1.12. Докажите, что если $f \backsim g$, то промежутки, на которых выполняется неравенство $f(x) > x$, переводятся сопрягающим отображением h в промежутки, на которых выполняется такое же или противоположное строгое неравенство для отображения g (в зависимости от характера монотонности отображения h). Докажите, что если f и g заданы на $\mathbb{R}$ и одно из отображений f, g нечетно, то биекцию h можно считать возрастающей.

1.13. Выясните, будут ли определенные на $\mathbb{R}$ отображения f и g топологически сопряжены в следующих случаях:

а) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^{2n}$ $(n = 2, 3, \ldots)$;

б) $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$;

в) $f(x) = \cos x$, $g(x) = -\cos x$;

г) $f(x) = \sin x$, $g(x) = -\sin x$;

д) $f(x) = x + \sin x$, $g(x) = x + \cos x$.

1.14. а) Пусть $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + ax + b\,(x \in \mathbb{R})$. Опишите множество тех пар $(a; b)$, для которых $f \backsim g$.

б) Для каких $a \in \mathbb{R}$ можно указать такое $b \in \mathbb{R}$, что отображения $f(x) = 1 - ax^2$ и $g(x) = bx(1-x)\,(x \in \mathbb{R})$ топологически сопряжены? Опишите множество всех возникающих при этом чисел b.

в) Докажите, что отображения g и $\tilde{g}$: $[0; 1] \to [0; 1]$, $g(x) = 2\tilde{g}(x) = 3x(1-x)$, не являются топологически сопряженными.

г) Для какого $a \in \mathbb{R}$ и для какого промежутка $\Delta = [p; q] \subset \mathbb{R}$ отображение f: $\Delta \to \Delta$, $f(x) = 1 - ax^2$ топологически сопряжено с отображением g: $[0; 1] \to [0; 1]$ вида $g(x) = bx(1-x)$?

1.15. Докажите топологическую сопряженность непрерывных отображений f, g: $[-1; 1] \to [-1; 1]$, задаваемых следующим образом:

а) $f(x) = 1 - 2|x|$, $g(x) = 1 - 2x^2$ $(x \in [-1; 1])$;

б) $f = f_n\,(n \in \mathbb{N})$ — «пилообразное» отображение, принимающее значения $(-1)^{k+n}$ в точках $-1 + \frac{2k}{n}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, и линейное в промежутках между ними (рис. 8), а $g = T_n$ — многочлен Чебышёва, задаваемый соотношением $T_n(\cos t) = \cos nt$ (рис. 9);

в) докажите, что функции из п. а) сопряжены как отображения из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

1.16. Пусть f: $[a_1; b_1] \to [a_1; b_1]$, g: $[a_2; b_2] \to [a_2; b_2]$ — гомеоморфизмы отрезков, не имеющие неподвижных внутренних точек. Докажите, что $f \backsim g$. Проверьте, что утверждение останется в силе, если отрезки заменить открытыми интервалами.

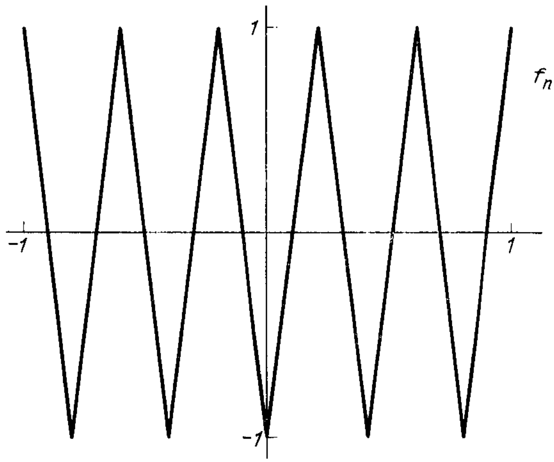

Рис. 8

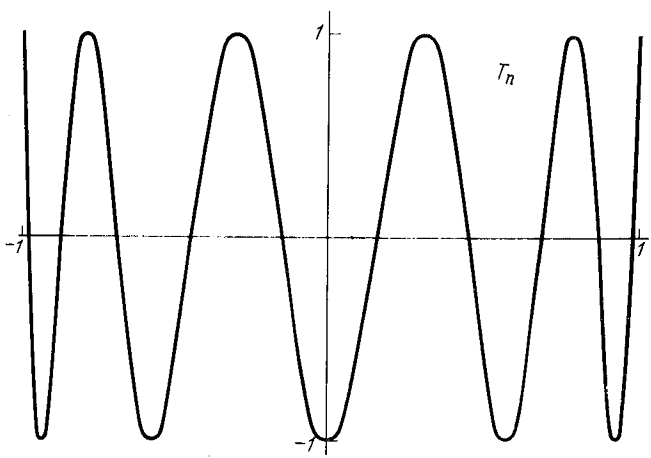

Рис. 9

1.17. Расклассифицируйте, с точностью до топологической сопряженности, гомеоморфизмы отрезка на себя, имеющие конечное множество неподвижных точек, в число которых входят концы отрезка.

Пусть f — отображение промежутка $\Delta \subset \mathbb{R}$ в себя,

$$f^0(x) = x,\ f^1(x) = f(x),\ f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) \text{ при } n > 1.$$

Будем говорить, что *метод последовательных приближений* с начальной точкой $x_0 \in \Delta$ *сходится*, если существует предел $\lim x_n$, где $x_n = f^n(x_0)$.

1.18. Пусть функция $f \in C([a;\ b])$ возрастает. Докажите, что метод последовательных приближений сходится для любой начальной точки $x_0 \in [a;\ b]$, если

а) $f(x) < x$ при $x > a$, $f(a) = a$;

б) $f(x) > x$ при $x < b$, $f(b) = b$.

1.19. Докажите сходимость метода последовательных приближений для любой начальной точки $x_0 \in \Delta$ и найдите $\lim x_n$ для следующих отображений f:

а) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $\Delta = \mathbb{R}$;

б) $f(x) = \sqrt{x+2}$, $\Delta = [-2;\ +\infty)$;

в) $f(x) = (x-2)/2$, $\Delta = \mathbb{R}$;

г) $f(x) = \dfrac{x(x^2+3c^2)}{3x^2+c^2}$ $(c > 0)$, $\Delta = \mathbb{R}$;

д) $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$, $\Delta = (0;\ +\infty)$;

е) $f(x) = \dfrac{2}{\pi} \arcsin \dfrac{2x}{x^2+1}$, $\Delta = (0;\ +\infty)$;

ж) $f(x) = c/(2+x)$ $(c > 0)$, $\Delta = [0;\ +\infty)$.

1.20. Выясните, при каких начальных точках x_0 из области задания отображения f сходится метод последовательных приближений, и найдите $\lim x_n$ в следующих случаях:

а) $f(x) = x + \sin x$;

б) $f(x) = x(x-1)$;

в) $f(x) = 1 + ax^2$ $(0 < a \leqslant 1/4)$;

г) $f(x) = 1 - ax^2$ $(0 < a \leqslant 3/4)$;

д) $f(x) = x^2 + c$ $(|c| \leqslant 1/4)$;

е) $f(x) = x^2 + (1-2c)x + c^2$ $(c \in \mathbb{R})$;

ж) $f(x) = \begin{cases} 1/(4-3x) & \text{при } x \neq 4/3, \\ 1/3 & \text{при } x = 4/3; \end{cases}$

з) $f(x) = \begin{cases} 2x^3/(3x^2-1), & \text{если } |x| \neq 1/\sqrt{3}, \\ \pm 1, & \text{если } x = \pm 1/\sqrt{3}. \end{cases}$

Будем называть неподвижную точку x^* отображения f *притягивающей*, если для x_0, взятых из некоторой окрестности точки x^*, последовательность $x_n = f^n(x_0)$ сходится к x^*. Если для некоторой окрестности U неподвижной точки x^* и произвольной точки $x_0 \in U$, $x_0 \neq x^*$, найдется такой номер n_0, что $x_{n_0} \notin U$, то x^* называется *отталкивающей*.

1.21. Пусть x^* — неподвижная точка отображения f, причем f дифференцируемо в x^*. Докажите, что

а) если $|f'(x^*)| < 1$, то x^* — притягивающая;

б) если $|f'(x^*)| > 1$, то x^* — отталкивающая;

в) покажите на примерах, что неподвижная точка может быть ни притягивающей, ни отталкивающей.

1.22. При каких значениях параметра a и при каких $x_0 \in \mathbb{R}$ последовательность итераций $x_n = f^n(x_0)$ сходится, если

а) $f(x) = 1 + ax$;

б) $f(x) = 1 - a|x|$ $(a > 0)$;

в) $f(x) = 1 - ax^2$ $(a > 0)$;

г) $f(x) = a^x$ $(a > 0)$.

Пусть φ — дифференцируемая функция, заданная на промежутке Δ, N_φ — отображение, заданное в тех точках $x \in \Delta$, где $\varphi'(x) \neq 0$, формулой

$$N_\varphi(x) = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}.$$

Легко видеть, что неподвижные точки отображения N_φ совпадают с корнями функции φ. Будем говорить, что *итерационный процесс Ньютона с начальной точкой* x_0 *сходится к* c, если

$$x_k = N_\varphi^k(x_0) \to c.$$

1.23. Пусть $\varphi \in C^2(\Delta)$, $c \in \Delta$, $\varphi(c) = 0$, $|\varphi'(x)| > m > 0$ для $x \in \Delta$. Докажите, что если точка x_0 достаточно близка к c, то

а) итерационный процесс Ньютона, начатый в x_0, сходится к c;

б) имеет место «суперсходимость»: $|x_k - c| \leqslant Mq^{2^k}$, где $M > 0$, $0 < q < 1$, $k \in \mathbb{N}$.

1.24. Докажите, что если $\varphi \in C^n(\Delta)$, $c \in \Delta$, $\varphi(c) = \varphi'(c) = \ldots = \varphi^{(n-1)}(c) = 0$, $\varphi^{(n)}(c) \neq 0$, то для начальных точек x_0, достаточно близких к c, итерационный процесс Ньютона сходится к c, причем $|x_k - c| \leqslant Mq^k$ ($M > 0$, $0 < q < 1$).

1.25. Пусть $\varphi \in C^2([a; b])$ — такая функция, что $\varphi\varphi'' > 0$ в $(a; b)$ и $\varphi(a) = \varphi''(b) = 0$ (или $\varphi(b) = \varphi''(a) = 0$). Проверьте, что для любой начальной точки из $[a; b]$ итерационный процесс Ньютона сходится к корню φ.

1.26. Пусть P — многочлен, имеющий лишь простые вещественные корни. Докажите, что если x_0 — точка перегиба P (т. е. $P''(x_0) = 0$), то итерационный процесс Ньютона, начатый в точке x_0, сходится к корню P, причем так могут быть найдены все корни, за исключением минимального и максимального.

Назовем множество $\{x_n = f^n(x_0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ *траекторией точки* x_0. Если траектория конечна, то, очевидно, существует такое $n \in \mathbb{N}$, что точки $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ попарно различны, а $x_n = x_0$, $x_{n+1} = x_1, \ldots$ В этом случае x_0 называется *периодической точкой*, число n — ее *периодом*, а набор $(x_0; x_1; \ldots; x_{n-1})$ — *n-циклом*. Будем говорить, что *n-цикл притягивающий*, если точка x_0 — притягивающая неподвижная точка для f^n, и *отталкивающий*, если x_0 — отталкивающая неподвижная точка f^n.

1.27. Пусть $(x_0^*; x_1^*; \ldots; x_{n-1}^*)$ — n-цикл отображения f. Докажите, что

а) если $|(f^n)'(x_0^*)| < 1$, то для x_0, взятых из некоторой окрестности x_0^*, выполняется соотношение

$$f_{mn+k}(x_0) \xrightarrow[m\to\infty]{} x_k^*, \qquad k = 0, \ldots, n-1;$$

б) если $|(f^n)'(x_0^*)| > 1$, то для некоторого $\varepsilon > 0$ и любого

$$x_0 \in (x_0^* - \varepsilon; x_0^* + \varepsilon), \quad x_0 \neq x_0^*,$$

найдется такой номер m, что

$$|f^m(x_0) - x_k^*| \geqslant \varepsilon \qquad \text{для всех } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

1.28. Пусть f — непрерывное отображение отрезка Δ в себя, $I_0, I_1, I_2, \ldots$ — конечная или бесконечная последовательность отрезков, причем $I_0 \subset \Delta$, $I_{n+1} \subset f(I_n)$ при любом $n \geqslant 0$. Докажите, что

а) существует такая последовательность отрезков $K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \ldots$, $K_0 \subset I_0$, что $f^n(K_n) = I_n$ ($n \geqslant 0$);

б) существует такая точка $x \in \Delta$, для которой $x_n = f^n(x) \in I_n$ при любом n.

1.29. Докажите, что если непрерывное отображение отрезка в себя имеет 4-цикл, то оно имеет также 2-цикл.

1.30. Пусть f: $\Delta \to \Delta$ — непрерывное отображение отрезка в себя. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

а) существуют такая точка $a \in \Delta$, что точки $b = f(a)$, $c = f^2(a)$, $d = f^3(a)$ удовлетворяют неравенствам $d \leqslant a < b < c$ или $c < b < a \leqslant d$;

б) в Δ существует точка, имеющая период три;

в) для любого $m \in \mathbb{N}$ в Δ существует точка, имеющая период m.

Импликация б) $\Rightarrow$ в) (и задача 1.29) являются частными случаями следующей теоремы А. Н. Шарковского [30]. Пусть f: $\Delta \to \Delta$ — непрерывное отображение ($\Delta = [a;\ b]$). Рассмотрим натуральный ряд, упорядоченный следующим образом:

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \ldots,\ 2^n, \ldots,\ 2^m\cdot 7,\ 2^m\cdot 5,\ 2^m\cdot 3,\ \ldots$$
$$\ldots,\ 2\cdot 7,\ 2\cdot 5,\ 2\cdot 3,\ \ldots,\ 7,\ 5,\ 3.$$

Если p стоит в этом ряду левее q и f обладает q-циклом, то f обладает также p-циклом.

1.31. Докажите, что при $n \geqslant 2$ многочлен Чебышёва T_n, заданный на отрезке $[-1;\ 1]$ (см. задачу 1.15), обладает циклами произвольного порядка.

1.32. Найдите значения параметра a, при которых отображение $f(x) = 1 - a|x|$ $(x \in \mathbb{R})$ обладает а) 2-циклом; б) 4-циклом; в) 3-циклом, и выясните, когда эти циклы являются притягивающими.

1.33. Пусть $f(x) = 1 - ax^2$ $(x \in \mathbb{R})$. Найдите нижнюю границу значений параметра a, при которых f имеет

а) притягивающий 2-цикл; б) отталкивающий 2-цикл; в) 4-цикл; г) 3-цикл.

1.34. Пусть

$$f(x) = bx(1-x)\ (x \in [0;\ 1]),\ 0 < b \leqslant 4.$$

Найдите нижнюю границу значений параметра b, при которых f имеет

а) притягивающий 2-цикл; б) отталкивающий 2-цикл; в) 4-цикл; г) 3-цикл.

1.35. Пусть $x_0 \in (0;\ 1)$ — неподвижная точка непрерывного отображения f: $[0;\ 1] \to [0;\ 1]$. Докажите, что если в точке x_0 односторонние производные $f'_{\pm}(x_0)$ отрицательны и $f'_{+}(x_0) f'_{-}(x_0) > 1$, то f имеет 2-цикл. В частности, 2-цикл существует, если $f'(x_0) < -1$.

1.36. Пусть g — кусочно гладкое отображение отрезка $[0; 1]$ в себя. Докажите, что если $|g'(x)| \geqslant a > 1$ во всех точках, где производная существует, то g имеет 2^n-цикл при любом $n \in \mathbb{N}$. Покажите на примере, что это неверно, если гладкость отображения нарушается в счетном множестве точек.

В задачах 1.37—1.39 мы будем рассматривать отображения отрезка $\Delta = [a; b]$ в себя, принадлежащие классу $C^3(\Delta)$ и такие, что производная Шварца Sf (см. задачи VII.2.24, VII.2.25 и определение перед ними) отрицательна в тех точках x, которые не являются критическими точками f (т. е. там, где $f'(x) \neq 0$). Класс таких отображений обозначим через $S(\Delta)$.

1.37. Пусть $f \in S(\Delta)$ и множество критических точек f конечно. Докажите, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ преобразование f может обладать лишь конечным числом n-циклов.

1.38. Пусть $f \in S(\Delta)$, $g = f^n$ $(n \geqslant 1)$, $x < y < z$ — последовательные неподвижные точки отображения g. Докажите, что если отрезок $[x; y]$ не содержит критических точек g, то $g'(y) > 1$.

1.39. Пусть отображение $f \in S(\Delta)$ имеет единственную критическую точку $c \in (a; b)$. Докажите, что каждый притягивающий цикл отображения f притягивает траекторию одной из точек a, c, b и, следовательно, f может иметь не более трех притягивающих циклов.

1.40. Докажите, что отображение вида $f(x) = 1 - ax^2$ $(x \in \mathbb{R})$ при $a \leqslant 2$ не может иметь более одного притягивающего цикла, а при $a = 2$ имеет n-цикл для любого $n \in \mathbb{N}$, но ни один из них не является притягивающим.

1.41. Пусть φ — непрерывное отображение окружности в себя, имеющее неподвижную точку и 3-цикл.

а) Докажите, что φ имеет также n-циклы при всех $n > 3$.

б) Обязательно ли φ имеет 2-цикл?

1.42. Пусть f — непрерывная возрастающая функция на прямой, удовлетворяющая условию

$$f(x+1) = f(x) + 1.$$

Докажите, что

а) отображение $z=e^{2\pi i x}\mapsto \varphi(z)=e^{2\pi i f(x)}$ задает гомеоморфизм окружности $S^1=\{z \mid |z|=1\}$, сохраняющий порядок следования любых трех точек, и произвольный сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности может быть задан таким образом;

б) если предел

$$\lim \frac{f^n(x)}{n}=\alpha$$

существует для некоторого $x_0\in\mathbb{R}$, то он существует и для любого $x\in\mathbb{R}$;

в) если отображение φ^m имеет неподвижную точку при некотором $m\in\mathbb{N}$, то предел α существует и является рациональным числом;

г) если никакая степень φ не имеет неподвижных точек, то предел α существует и является иррациональным числом;

д) если две различные функции f_1 и f_2 определяют один гомеоморфизм φ, то соответствующие пределы α_1 и α_2 отличаются на целое число.

Определенное таким образом для произвольного сохраняющего ориентацию гомеоморфизма $\varphi\colon S^1\to S^1$ число $\alpha \bmod 1$ называется *числом вращения* этого *гомеоморфизма*. Это понятие введено А. Пуанкаре.

§ 2. Преобразования с инвариантной мерой

Пусть X — измеримое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, μ — σ-конечная мера, заданная на измеримых (по Лебегу) подмножествах множества X. Неотрицательная измеримая функция f называется *плотностью меры* μ, если

$$\mu(A)=\int_A f(x)\,d\lambda_n(x)$$

для произвольного измеримого множества $A\subset X$ (в этом случае принято обозначение $d\mu=f d\lambda_n=f dx$). Две плотности порождают одну и ту же меру тогда и только тогда, когда они совпадают почти везде на X. По известной теореме Радона — Никодима мера μ имеет плотность тогда и только тогда, когда она *абсолютно непрерывна* (относительно меры Лебега), т. е. когда $\mu(A)=0$, если $\lambda_n(A)=0$ (см. [14]). Говорят, что мера μ *эквивалентна* мере Лебега, если $\mu(A)=0$ тогда и только тогда, когда $\lambda_n(A)=0$. Будем говорить, что отображение $T\colon X\to X$ *сохраняет меру* μ, или что мера μ *инвариантна* относительно T, если $\mu(A)=\mu(T^{-1}(A))$ для любого измеримого множества $A\subset X$. Если ν — мера, заданная на измеримых подмножествах множества $Y\subset\mathbb{R}^m$, то говорят, что ν — *образ меры* μ при отображении $T\colon X\to Y$, если $\nu(B)=\mu(T^{-1}(B))$ для любого измеримого множества $B\subset Y$ (будем в этом случае писать $\nu=T\mu$).

2.1. Проверьте, что следующие преобразования сохраняют меру Лебега:

а) $T(x)=(2x)\bmod 1$ $(x\in[0;\ 1])$;

б) $T(z)=z^n$ $(z\in\mathbb{C},\ |z|=1)$, $n\in\mathbb{N}$;

в) $T(x)=x-\dfrac{1}{x}$ $(x\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$.

2.2. Проверьте, что преобразование

$$T(x;\ y)=\left((2x)\bmod 1;\ \frac{1}{2}(y+[2x])\right),\quad (x;\ y)\in[0;\ 1)\times[0;\ 1)$$

(«преобразование пекаря») сохраняет меру Лебега λ_2.

2.3. Пусть $X=[0;\ 1)\times[0;\ 1)$, $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ — целочисленная матрица, причем $\det A=\pm 1$. Определим преобразование $T_A\colon X\to X$ формулами $T_A(x_1;\ x_2)=(y_1;\ y_2)$,

$$y_1=(a_{11}x_1+a_{12}x_2)\bmod 1,\quad y_2=(a_{21}x_1+a_{22}x_2)\bmod 1,$$

где $(x_1;\ x_2)\in X$. Докажите, что

а) T_A взаимно однозначно;

б) T_A сохраняет меру Лебега.

Отображение $(x_1;\ x_2)\mapsto\left(e^{2\pi i x_1};\ e^{2\pi i x_2}\right)$ позволяет отождествить X с тором $T^2=S^1\times S^1$ и T_A с автоморфизмом T^2 как группы. Это дает право назвать преобразование T_A *автоморфизмом тора*.

Упомянем принципиальный результат: на всякой компактной группе G существует нетривиальная конечная мера μ, инвариантная относительно сдвигов:

$$\mu(gA)=\mu(Ag)=\mu(A),$$

где

$$A\subset G,\ g\in G,\ gA=\{gx\,|\,x\in A\},\ Ag=\{xg\,|\,x\in A\}.$$

Эта мера определена однозначно (с точностью до постоянного множителя) и называется *мерой Хаара*. Ее единственностью можно воспользоваться при решении следующей задачи.

2.4. Пусть отображение T_A: $X \to X$ — такое же, как в предыдущей задаче, но $\det A \in \mathbb{Z}$, $|\det A| > 1$. Такое отображение (уже не взаимно однозначное) называется *эндоморфизмом тора*. Докажите, что оно сохраняет меру Лебега.

2.5. Проверьте, что отображение

$$T(x) = \frac{1}{x} \bmod 1 \qquad (x \in (0;\ 1])$$

сохраняет меру $d\mu = \dfrac{A}{1+x}\,dx$.

2.6. Найдите абсолютно непрерывную инвариантную меру

а) для отображения T_n: $[-1;\ 1] \to [-1;\ 1]$, где T_n — многочлен Чебышёва (см. задачу 1.15.б);

б) для отображения f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $f(x) = 1 - 2x^2$.

2.7. Докажите, что отображение T обладает инвариантной (соответственно конечной инвариантной, абсолютно непрерывной инвариантной) мерой тогда и только тогда, когда этим свойством обладает некоторая его степень T^n $(n \in \mathbb{N})$.

2.8. Пусть T: $[a;\ b] \to [a;\ b]$ — строго монотонное непрерывное преобразование. Докажите, что оно обладает абсолютно непрерывной инвариантной мерой.

2.9. Пусть отображение T: $[a;\ b] \to [a;\ b]$ кусочно монотонное и гладкое. Докажите, что если оно обладает притягивающим циклом (см. § 1), то T не сохраняет никакую конечную меру, эквивалентную лебеговой.

2.10. Существует ли нетривиальная мера на $\mathbb{R}$, инвариантная относительно всех

а) гомотетий H_a: $x \mapsto ax$ $(a \neq 0)$;

б) аффинных преобразований $A_{a,b}$: $x \mapsto ax + b$ $(a,\ b \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$?

В случае утвердительного ответа приведите пример.

2.11. Существует ли нетривиальная мера на $(0;\ +\infty)$, инвариантная относительно всех преобразований вида

а) T_p: $x \mapsto x^p$ $(p \neq 0)$; б) $S_{b,p}$: $x \mapsto bx^p$ $(p \neq 0,\ b > 0)$?

В случае утвердительного ответа приведите пример.

Мера μ в $\mathbb{R}^n$ называется *квазиинвариантной относительно сдвигов*, если для каждого $a \in \mathbb{R}^n$ условие $\mu(A) = 0$ равносильно условию $\mu(A+a)=0$.

2.12. Докажите, что

а) если мера μ в $\mathbb{R}^n$ эквивалентна лебеговой мере λ_n, то μ квазиинвариантна относительно сдвигов;

б) если μ квазиинвариантна относительно сдвигов, причем мера любого ограниченного множества конечна, то μ эквивалентна λ_n.

2.13. Пусть T — такое преобразование множества $X \subset \mathbb{R}^n$ в себя, что образ $T\lambda_n$ меры λ_n обсолютно непрерывен относительно λ_n, и пусть f — произвольная суммируемая на X функция.

а) Докажите, что существует такая функция $f^* \in \mathscr{L}^1(X)$, что

$$\int\limits_{T^{-1}(A)} f(x)\,dx = \int\limits_A f^*(x)\,dx \qquad (A \subset X), \tag{1}$$

и при этом f^* определяется однозначно с точностью до значений на множестве меры нуль.

Соответствие P: $f \mapsto f^*$ называется *оператором Перрона — Фробениуса*, связанным с T.

б) Если $X \subset \mathbb{R}^n$ — область, T — гладкое взаимно однозначное отображение, причем $\det T'(x) \neq 0$ $(x \in X)$, то

$$Pf(Tx) = \frac{f(x)}{|\det T'(x)|} \qquad (x \in X).$$

в) Если $X=[0;\ 1]$, T кусочно дифференцируемо и множество $T^{-1}(x)$ конечно $(x \in X)$, то

$$Pf(y) = \sum_{x \in T^{-1}(y)} \frac{f(x)}{|T'(x)|}$$

во всех точках, для которых определена правая часть равенства.

г) Если $X=[0;\ 1]$, $f \in C([0;\ 1])$ и T кусочно монотонно, то

$$Pf(x) = \frac{d}{dx} \int\limits_{T^{-1}([0;x])} f(t)\,dt.$$

д) Для того чтобы мера $d\mu = f dx$ была инвариантна относительно T, необходимо и достаточно, чтобы для почти всех $x \in X$ выполнялось равенство $Pf(x)=f(x)$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_i = [(i-1)/n;\ i/n]$ $(i = 1, \ldots, n)$. Рассмотрим неотрицательные функции на $[0;\ 1)$, постоянные на промежутках Δ_i. Каждая такая функция задается вектором $c = (c_1;\ \ldots;\ c_n)$ значений, которые она принимает на $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$. Будем для наглядности такую функцию обозначать через f_c. Множество неотрицательных векторов в $\mathbb{R}^n$ обозначим через $\mathbb{R}^n_+$.

2.14. Пусть T: $[0;\ 1) \to [0;\ 1)$ — произвольное преобразование.

а) Докажите, что для каждой функции вида $f_c\left(c \in \mathbb{R}^n_+\right)$ существует единственная функция $f_d\left(d \in \mathbb{R}^n_+\right)$, удовлетворяющая равенствам

$$\int\limits_{T^{-1}(\Delta_i)} f_c(x)\,dx = \int\limits_{\Delta_i} f_d(x)\,dx, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

причем вектор d имеет вид $d = \pi c$, где $\pi = (p_{ij})^n_{i,j=1}$ — некоторая матрица, определяемая преобразованием T.

Отображение $c \mapsto \pi c$ — дискретный (конечномерный) вариант оператора Перрона — Фробениуса.

б) Найдите матрицу π и докажите, что $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} p_{ij} = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$.

в) Докажите, что существует такой вектор $v \in \mathbb{R}^n_+$, $v \neq 0$, что $\pi v = v$ (с этой целью рассмотрите последовательность векторов $v^{(m)} = \frac{1}{m} \sum\limits_{0 \leqslant k < m} \pi^k u$, $u \in \mathbb{R}^n_+$).

2.15. а) Пусть T: $[0;\ 1] \to [0;\ 1]$ — отображение, задаваемое формулой

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{при} \quad x \leqslant 1/2, \\ 3/2 - x & \text{при} \quad x > 1/2. \end{cases}$$

Найдите общий вид абсолютно непрерывной инвариантной относительно T меры.

б) Пусть T: $[0;\ 1) \to [0;\ 1)$ — отображение, задаваемое формулой

$$T(x) = \begin{cases} x + 1/3 & \text{при} \quad x \leqslant 2/3, \\ 2 - 2x & \text{при} \quad x > 2/3. \end{cases}$$

Укажите какую-нибудь абсолютно непрерывную инвариантную относительно T меру.

в) Пусть T: $[0;\ 1] \to [0;\ 1]$ — отображение, задаваемое формулой $T(x) = x/2$. Найдите неподвижную точку

v_n для дискретного оператора Перрона — Фробениуса (при четном n) и докажите отсутствие инвариантной конечной абсолютно непрерывной меры для T. К чему сходятся меры $d\mu_n = f_{v_n}dx$ при $n \to \infty$, если их нормировать условием $\mu_n([0; 1)) = 1$?

2.16. Пусть $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$. Найдите абсолютно непрерывную меру, инвариантную относительно всех конформных автоморфизмов Ω, т. е. отображений

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ где } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ и } \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} > 0.$$

2.17. Пусть $P = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ и для каждой точки $(a; b) \in P$ определим преобразования $L_{a,b}$ и $R_{a,b}$ полуплоскости P в себя:

$$L_{a,b}(x; y) = (ax; ay + b), \quad R_{a,b}(x; y) = (ax; bx + y).$$

Найдите абсолютно непрерывные меры μ_L и μ_R на P, инвариантные относительно всех преобразований $L_{a,b}$ и $R_{a,b}$ соответственно.

Отметим, что преобразования, о которых идет речь, отвечают преобразованиям левого и правого сдвига на группе (по умножению) матриц

$$M_{x,y} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ((x, y) \in P),$$

т. е. преобразованиям

$$M_{x,y} \mapsto M_{a,b}M_{x,y}; \qquad M_{x,y} \mapsto M_{x,y}M_{a,b}.$$

Меры μ_L и μ_R называются *мерами Хаара* (*левой* и *правой*) для этой группы.

2.18. Докажите, что если преобразование T: $[a; b] \to [a; b]$ сохраняет некоторую конечную абсолютно непрерывную меру, то T топологически сопряжено с некоторым преобразованием того же промежутка, сохраняющим меру Лебега.

Существование инвариантной меры (не обязательно абсолютно непрерывной) часто устанавливается с помощью следующей *теоремы Боголюбова — Крылова*:

Для всякого непрерывного отображения компактного множества в себя существует конечная инвариантная мера.

2.19. Докажите, что если T — гомеоморфизм окружности S^1 с иррациональным числом вращения α (см. задачу 1.42), то T связан с поворотом T_α окружности на угол α $(T_\alpha(e^{2\pi ix}) = e^{2\pi i(x+\alpha)})$ следующим образом: $h \circ T =$

$= T_\alpha \circ h$ для некоторого непрерывного отображения h: $S^1 \to S^1$.

В дальнейшем будем предполагать, что мера μ конечна и удовлетворяет условию нормировки $\mu(X) = 1$ (такие меры называются *вероятностными*).

Пусть T — преобразование множества X. Множество $A \subset X$ называется *инвариантным*, если $T^{-1}(A) = A$. Преобразование T, сохраняющее меру μ, называется *эргодическим*, если для каждого инвариантного множества $A \subset X$ справедливо одно из двух: либо $\mu(A) = 0$, либо $\mu(X \setminus A) = 0$.

2.20. Измеримую функцию f, заданную на множестве X с мерой μ, назовем *инвариантной* относительно преобразования T, если $f(Tx) = f(x)$ для почти всех x. Докажите, что для эргодичности T необходимо и достаточно, чтобы всякая инвариантная измеримая функция совпадала с константой почти везде.

2.21. Эргодичны ли следующие преобразования:

а) $T(x) = (x + \alpha) \bmod 1$, $X = [0; 1)$, $\mu = \lambda$;

б) $T(x) = (2x) \bmod 1$, $X = [0; 1)$, $\mu = \lambda$;

в) $T(z) = z^n$ $(n \in \mathbb{N})$, $z \in X = S^1$, μ — лебегова мера на окружности;

г) T — автоморфизм тора (см. задачу 2.3);

д) T — эндоморфизм тора (см. задачу 2.4)?

2.22. Пусть X — множество в $\mathbb{R}^n$, которое является замыканием множества своих внутренних точек, T — преобразование X, сохраняющее меру Лебега. Докажите, что если T эргодично, то для почти всех $x \in X$ траектория точки x всюду плотна.

2.23. Пусть $X = [0; 1)^n$ — n-мерный тор ($n \in \mathbb{N}$), S — сдвиг $x \mapsto y = S(x)$, задаваемый формулой $y_k = (x_k + \alpha_k) \bmod 1$, $k = 1, \ldots, n$. При каких значениях $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ сдвиг эргодичен?

2.24. Докажите, что отображения отрезка $[0; 1]$ в себя, задаваемые формулами

$$T(x) = (2x) \bmod 1, \quad S(x) = 1 - |2x - 1|,$$

метрически сопряжены. (Преобразования T: $X \to X$ и S: $Y \to Y$, сохраняющие меры μ и ν соответственно, называются *метрически сопряженными*, если существует такое измеримое отображение h: $X \to Y$, что $h\mu = \nu$ и $S \circ h(x) = h \circ T(x)$ для почти всех $x \in X$.)

2.25. Докажите, что отображение T отрезка $[-1;\ 1]$ в себя, сохраняющее меру μ, эргодично, если

а) $T(x) = 1 - 2|x|, \qquad d\mu = \frac{1}{2}\,dx;$

б) $T(x) = 1 - 2x^2, \qquad d\mu = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\,dx;$

в) $T = T_n$ — многочлен Чебышёва (см. задачу 1.15.б)), $d\mu = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

2.26. Докажите, что если $T\colon X \to X$ — преобразование, сохраняющее вероятностную меру μ, а f — положительная функция, то $\sum f\left(T^k(x)\right) = +\infty$ для почти всех (относительно μ) $x \in X$.

Основной теоремой теории преобразований с инвариантной мерой (или «эргодической теории») является *эргодическая теорема Биркгофа — Хинчина* (см. [3], [15]):

Пусть T — сохраняющее вероятностную меру μ преобразование множества X, f — измеримая функция, причем

$$\int\limits_X |f(x)|\,d\mu(x) < +\infty.$$

Тогда для почти каждого (в смысле меры μ) $x \in X$ существует предел

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{0 \leqslant k < n} f\left(T^k(x)\right) = \bar{f}(x). \tag{$*$}$$

При этом функция $\bar{f}$ инвариантна и

$$\int\limits_X \bar{f}(x)\,d\mu(x) = \int\limits_X f(x)\,d\mu(x).$$

Если T эргодично, то $\bar{f}$ оказывается константой (см. задачу 2.20), равной $\int\limits_X f(x)\,d\mu(x)$ (т. е. среднему значению f на X). Предел в левой части равенства $(*)$ называют *средним значением f вдоль траектории точки x*.

2.27. Пусть $T\colon X \to X$ — эргодическое преобразование, сохраняющее вероятностную меру μ, A — измеримое подмножество в X. Пусть $\varepsilon_n = 0$, если $T^n(x) \notin A$, $\varepsilon_n = 1$, если $T^n(x) \in A$ $(n \geqslant 0)$. Докажите, что для почти всех

$x \in X$ существует предел

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{0 \leqslant k < n} \varepsilon_k$$

(среднее число попаданий траектории в множество A), и найдите его.

Вероятностные меры μ_1, μ_2 на X называются *взаимно сингулярными*, если существует такое множество $A \subset X$, что $\mu_1(A) = 1$, $\mu_2(A) = 0$.

2.28. Пусть μ_1 и μ_2 — две вероятностные меры на X, T — преобразование, эргодическое относительно как μ_1, так и μ_2. Докажите, что меры μ_1 и μ_2 либо совпадают, либо взаимно сингулярны.

2.29. Рассмотрим иррациональный сдвиг

$$S(x) = (x + \alpha) \bmod 1 \qquad (x \in [0;\ 1) = X,\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}).$$

Он эргодичен согласно 2.21.а). По эргодической теореме для любой суммируемой функции f на X и для почти всех $x \in X$ выполняется равенство

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{0 \leqslant k < n} f\left(S^k(x)\right) = \int_0^1 f(x)\,dx. \tag{1}$$

а) Докажите, что если $f \in C([0;\ 1])$, то для сдвига S можно утверждать большее, а именно, что равенство (1) справедливо для любого $x \in [0;\ 1)$. (Предположите вначале, что $f(0) = f(1)$, а затем рассмотрите общий случай.)

б) Докажите, что если $\Delta = \langle a;\ b\rangle \subset [0;\ 1)$, $\chi_\Delta(x) = 1$ при $x \in \Delta$, $\chi_\Delta(x) = 0$ при $x \notin \Delta$, то

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{0 \leqslant k < n} \chi_\Delta\left(S^k(x)\right) = b - a$$

для всех $x \in [0;\ 1)$.

Если $\{S^k(x)\}$ заменить произвольной последовательностью $\{x_k\}$, то свойство б) называют *равномерной распределенностью* этой последовательности (см. [21]).

2.30. Пусть

$$x = \sum \frac{x_k}{2^k}, \qquad x_k \in \{0;\ 1\}$$

— двоичное разложение числа $x \in [0;\ 1)$. Докажите, что для почти всех $x \in [0;\ 1)$ существует предел

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{0 \leqslant k < n} x_k$$

(частота появления единицы) и найдите его. Ответьте на аналогичный вопрос для разложений в p-ичную дробь.

2.31. Докажите, что если преобразование $T\colon X \to X$, сохраняющее вероятностную меру μ, обладает свойством

$$\lim \mu(A \cap T^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B) \quad (A,\ B \subset X) \qquad (*)$$

(*свойство перемешивания* относительно меры μ), то T эргодично.

2.32. Докажите, что преобразование $T(x) = (2x) \bmod 1$ ($x \in [0;\ 1)$) перемешивающее (относительно меры Лебега).

2.33. Пусть $p \in (0;\ 1)$, $q = 1 - p$, μ_p — мера на отрезке $[0;\ 1]$, задаваемая на отрезках с двоично-рациональными концами следующим образом: если $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0;\ 1\}$,

$$\Delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n} = \{x \in [0;\ 1] \mid x_k = \varepsilon_k \quad (k = 1, \ldots, n)\}$$

(здесь $x = \sum (x_k/2^k)$ — двоичное разложение числа x), то

$$\mu_p(\Delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}) = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} p^{1-\varepsilon_k} q^{\varepsilon_k},$$

а на остальные отрезки мера распространяется по аддитивности. Проверьте, что

а) преобразование $T(x) = (2x) \bmod 1$ перемешивающее относительно меры μ_p (см. задачу 2.31);

б) $\mu_{1/2} = \lambda$;

в) меры μ_p и λ взаимно сингулярны при $p \neq 1/2$;

г) μ_{p_1} взаимно сингулярна с μ_{p_2} при $p_1 \neq p_2$.

2.34. Пусть a_k — первая цифра десятичной записи числа 2^k ($k = 0, 1, \ldots$), т. е. $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, $a_4 = 1$, … Какова частота появления в этой последовательности цифры $p \in \{1;\ 2;\ \ldots;\ 9\}$?

Как известно, всякое число x из промежутка $(0;\ 1]$ можно однозначно представить в виде *непрерывной дроби*

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}},$$

что также записывается в виде $x = [a_1;\ a_2;\ \ldots]$, где $a_1 = a_1(x)$, $a_2 = a_2(x)$, …— натуральные числа. Такая дробь содержит конечное число членов в том и только том случае, когда x рационально. Конечная цепная дробь $[a_1;\ \ldots;\ a_n]$ однозначно записывается в виде несократимой дроби p_n/q_n. Бесконечная цепная дробь является пределом конечных:

$$[a_1;\ a_2;\ \ldots] = \lim [a_1;\ \ldots;\ a_n] = \lim (p_n/q_n),$$

число

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n(x)}{q_n(x)}$$

называется *подходящей дробью.* Несложно проверяется, что

$$\left| x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \right| \leqslant \frac{1}{q_n(x)\, q_{n+1}(x)}.$$

С разложением чисел в цепную дробь связано *преобразование Гаусса*

$$T(x) = \frac{1}{x} \operatorname{mod} 1 \quad (x \in (0;\ 1]).$$

Действительно, пусть $x = [a_1;\ a_2;\ \ldots]$, $y = [a_2;\ a_3;\ \ldots]$. Тогда $x = 1/(a_1 + y)$, откуда следует, что $y = T(x)$. С помощью T числа a_n записываются так:

$$a_1(x) = [1/x],\ a_2(x) = a_1(T(x)),\ \ldots,\ a_n(x) = a_1(T^{n-1}(x)).$$

Преобразование Гаусса сохраняет *меру Гаусса*

$$d\mu = \frac{A}{1+x}\, dx$$

(задача 2.5). Мера μ вероятностная при $A = 1/\ln 2$.

2.35. а) Для преобразования Гаусса T установите справедливость при некотором $C > 0$ неравенства

$$\frac{1}{C}\, \mu(A)\, \mu(B) \leqslant \mu\left(T^{-n}(A) \cap B\right) \leqslant C \mu(A)\, \mu(B),$$

где $A,\ B \subset (0;\ 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Выведите отсюда эргодичность преобразования T.

б) Докажите, что для почти всех $x = [a_1;\ a_2;\ \ldots]$

1) относительная частота, с которой число $k \in \mathbb{N}$ встречается среди чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots$, равна

$$\frac{1}{\ln 2} \ln \frac{(k+1)^2}{k(k+2)};$$

2) $\lim \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = +\infty$;

3) $\lim \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} = \prod\limits_{k \in \mathbb{N}} \left(1 + \dfrac{1}{k^2 + 2k}\right)^{\ln k/\ln 2}$;

4) $\lim \sqrt[n]{q_n} = \exp(\pi^2/(12 \ln 2))$, где q_n — знаменатель n-й подходящей дроби.

Часть II. УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

Глава I. ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Множества

1.1. б) Рассмотрите отображение $\varepsilon \mapsto (\varepsilon'; \varepsilon'')$, где $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon' = \{\varepsilon_{2k-1}\}$, $\varepsilon'' = \{\varepsilon_{2k}\}$, и убедились в том, что это биекция.

1.2. Используйте разложение чисел отрезка $[0;\ 1]$ в двоичные дроби.

1.3. Используйте результаты задач 1.2 и 1.1. б).

1.4. Замените множество $\mathbb{R}$ множеством Ξ двоичных последовательностей и докажите, что оно равномощно множеству $\Xi^{\mathbb{N}} = \Xi \times \Xi \times \Xi \ldots$ Для этого рассмотрите отображение

$$\varepsilon = \{\varepsilon_n\} \mapsto \{\eta^{(1)};\ \eta^{(2)};\ \ldots\} \in \Xi^{\mathbb{N}},$$

где $\eta^{(k)} = \{\eta_1^{(k)}; \eta_2^{(k)}; \ldots\}$, $\eta_j^{(k)} = \varepsilon_{2^{k-1}(2j-1)}$ $(k,\ j \in \mathbb{N})$, и убедитесь в том, что это биекция (ср. с решением задачи 1.1. б)).

1.5. Используйте результат задачи 1.4, опираясь на то, что непрерывная на $[a;\ b]$ функция определяется своими значениями в рациональных точках.

1.6. Замените множество $\mathbb{N}$ множеством $\mathbb{Q}$ и рассмотрите систему сходящихся последовательностей рациональных чисел с попарно различными пределами.

1.7. Используйте результат задачи 1.6, заменив множество $\mathbb{N}$ множеством $\{2;\ 2^2;\ 2^3;\ \ldots\}$.

1.8. Замените множество $\mathbb{N}$ множеством $\mathbb{Q}$ и рассмотрите систему множеств вида $(-\infty;\ \alpha) \cap \mathbb{Q}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.9. Рассмотрите множество $\mathcal{F}_n = \{A \in \mathcal{F}(\mathbb{N}) \mid \max A = n\}$ $(n \in \mathbb{N})$, докажите, что $\operatorname{card}(\mathcal{F}_n) = 2^{n-1}$. Полагая $\varphi(\varnothing) = 0$, определите φ по индукции с помощью равенства $\varphi(A) = 2^{n-1} + \varphi(A \setminus \{n\})$ $(A \in \mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N})$ и убедитесь в том, что так определенная функция φ обладает всеми требуемыми свойствами.

1.11. Опираясь на аксиому выбора, образуйте множество E_1, выбирая по одной точке из каждого класса эквивалентности, описанного в задаче 1.10.б). Рассмотрите всевозможные повороты множества E_1 на углы $2\pi\theta$, где $\theta \in \mathbb{Q}$, $0 < \theta < 1$.

1.12. Сопоставьте восьмерке пару точек с рациональными координатами, взяв по одной точке внутри каждой из ее петель.

1.13. Рассмотрите вначале птичьи следы, у которых длины составляющих отрезков отделены от нуля. Используйте ту же идею, что и в задаче 1.12, беря точки с рациональными координатами во всех трех углах, соответствующих птичьему следу, достаточно близко к его вершине.

1.14. С каждой T-образной фигурой свяжем полукруг радиуса 1/4, построенный так, как показано на рис. 10. Покажите, что эти

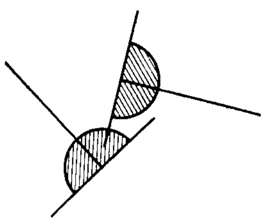

Рис. 10

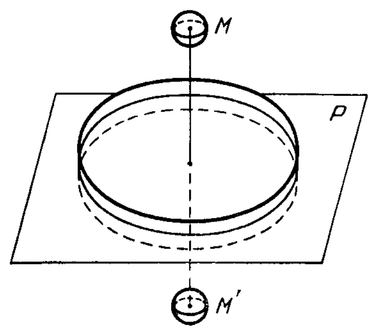

Рис. 11

полукруги попарно не пересекаются. Складывая их площади, получаем: $\frac{1}{2}\pi(1/4)^2 N \leqslant a^2$, т. е. $N \leqslant \frac{32}{\pi} a^2 < 11a^2$.

1.15. Пусть P — плоскость симметрии обруча O, перпендикулярная его оси. На этой оси зафиксируем симметричные относительно плоскости P точки M и M', расстояние между которыми равно диаметру обруча. Рассмотрим шары с центрами в точках M и M' и радиусом δ (рис. 11). Будем называть эти шары сопутствующими обручу O. Будем рассматривать обручи, ширина которых не меньше числа $\varepsilon > 0$. Докажите, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что если оба шара, сопутствующие обручу O, пересекаются с шарами, сопутствующими обручу O', то и сами обручи O и O' пересекаются.

1.16. См. решение задачи 1.17. а).

1.17. а) Пусть $\Delta_m = \{n \in \mathbb{N} \mid A_n \ni m\}$. Рассуждая от противного, рассмотрите такое бесконечное множество $M = \{m_1; m_2; \ldots\} \subset \mathbb{N}$, что $\operatorname{card}(\Delta_{m_j}) < +\infty$ при любом $j \in \mathbb{N}$. Убедитесь, что в некотором бесконечном подмножестве множества M не может быть двух точек, входящих в одно и то же множество A_n.

б) Пусть $\Delta_k = \{n \mid k \in A_n\}$. В силу п. а) найдется такой номер m_1, что множество $E_1 = \bigcup\limits_{n \in \Delta_{m_1}} A_n$ бесконечно. Заменяя $\mathbb{N}$ на E_1, A_n на $A_n' = A_n \cap E_1$ и снова используя утверждение а), мы видим, что найдется такой номер $m_2 > m_1$, что множество $E_2 = \bigcup\limits_{n \in \Delta_{m_2}} A_n'$ бесконечно. Используя индукцию, мы построим множество $E = \{m_1; m_2; \ldots\}$, которое и является искомым.

1.18. Рассмотрите множество E из п. б) задачи 1.17 и убедитесь в том, что если $\operatorname{card}(E \cap B_q) \geqslant 2$, то найдется такой номер p, что $\operatorname{card}(A_p \cap B_q) \geqslant 2$.

1.19. б) Сначала с помощью индукции докажите, что если $x, y \in E$, $k = 0, 1, \ldots, 2^n$, то $\frac{k}{2^n} x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right) y \in E$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $[p; q] \subset E$, $a \in E$, и пусть для определенности $a > q$. Докажем, что $[p; a] \subset E$. Пусть $c := \sup\{x > p \mid [p; x) \subset E\}$. Ясно,

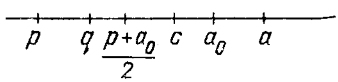

Рис. 12

что $[p; c) \subset E$. Допустим, что $c < a$. Рассмотрим такую точку $a_0 \in E$, что $c < a_0$, $\frac{1}{2}(p + a_0) < c$ (рис. 12). Тогда

$$E \supset \left\{ \frac{x + a_0}{2} \,\middle|\, x \in (p; c) \right\} = \left(\frac{p + a_0}{2}; \frac{c + a_0}{2} \right),$$

и, следовательно, $E \supset \left[p; \frac{c + a_0}{2}\right)$, что противоречит определению c, поскольку $\frac{1}{2}(c + a_0) > c$.

1.21. Убедитесь, что вместе с каждой точкой a множество E содержит все точки вида $a\sqrt{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, а также содержит сколь угодно малые числа.

1.22. а) Пусть $\mathscr{E}$ — система всевозможных кругов, у которых координаты центра и радиус рациональны. Ясно, что если $x \in B_\alpha$, то найдется такой круг $B' \in \mathscr{E}$, что $x \in B' \subset B_\alpha$. Для каждого круга из $\mathscr{E}$ зафиксируем произвольным образом содержащий его круг B_α (если такой круг существует). Убедитесь, что система выбранных таким образом кругов является искомой.

б) При каждом $n \in \mathbb{N}$ найдите такое не более чем счетное множество $E_n \subset E$, что $E \subset \bigcup\limits_{x \in E_n} B(x; 1/n)$. Рассмотрите $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

1.23. Докажите счетность множества

$$E_n = \{x \in E \mid E \cap B(x;\ 1/n) \setminus \{x\} = \varnothing\}.$$

б) Докажите счетность каждого из множеств

$$E_n^+ = \{x \in E \mid E \cap (x;\ x + 1/n) = \varnothing\},$$

$$E_n^- = \{x \in E \mid E \cap (x - 1/n;\ x) = \varnothing\}.$$

Для этого проверьте, что для различных точек $x, x' \in E_n^+$ (или $x, x' \in E_n^-$) промежутки $(x;\ x + 1/n)$, $(x';\ x' + 1/n)$ (соответственно $(x - 1/n;\ x)$, $(x' - 1/n;\ x')$) не пересекаются.

1.24. Примените результат задачи 1.25 к множеству $G = \bigcup\limits_{n \in E} (\ln n;\ \ln(n+1))$.

1.25. Заметим сначала, что если $0 < p < q$, то найдется такое число c, что $[c;\ +\infty) \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (np;\ nq)$.

Пусть $0 < p < q$, $m \in \mathbb{N}$. Используя сделанное замечание, мы видим, что существуют числа $x_1 \in (p;\ q)$ и $n_1 \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие условиям: $n_1 > m$, $n_1 x_1 \in G$. Следовательно, найдется такой невырожденный сегмент $[p_1;\ q_1] \subset [p;\ q]$, что $n_1 x \in G$ при любом $x \in [p_1;\ q_1]$. Заменяя $[p;\ q]$ на $[p_1;\ q_1]$, m на n_1 и повторяя рассуждения, мы построим такой невырожденный сегмент $[p_2;\ q_2] \subset [p_1;\ q_1]$ и натуральное число $n_2 > n_1$, что $n_2 x \in G$ при любом $x \in [p_2;\ q_2]$. Продолжая этот процесс, мы получим последовательность вложенных промежутков, общая точка которых будет искомой.

1.26. Рассуждайте так же, как и при решении задачи 1.25, заменяя на каждом шаге множество G множеством G_k так, чтобы каждое из них использовалось бесконечно много раз (например, в такой последовательности: $G_1, G_2, G_1, G_2, G_3, G_1, G_2, G_3, G_4, \ldots$).

1.27. а) Убедитесь в том, что канторово множество равномощно множеству двоичных последовательностей (см. задачу 1.2).

1.28. б) Используйте результат пункта а).

1.29. Рассмотрите, например, множество $E = K \setminus \mathbb{Q}$, где K — канторово множество.

1.32. Убедитесь в том, что A содержит множество, имеющее мощность континуума. Для этого рассмотрите множества

$$Q_n = \bigcup_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0,1\}} \overline{\Delta}_{\varepsilon_1 0 \varepsilon_2 0 \ldots \varepsilon_{n-1} 0 \varepsilon_n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

где $\overline{\Delta}$ обозначает замыкание промежутка Δ, и докажите, как и в задаче 1.27. а), что множество $Q = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Q_n$ равномощно множеству двоичных последовательностей. Проверьте, что множество $Q \setminus A$ не более чем счетно.

1.33. Допустим, что интервал $(a;\ b)$ ограничен и $\{F_n\}$ — последовательность попарно не пересекающихся непустых замкнутых множеств, содержащихся в $(a;\ b)$. Докажем, что $(a;\ b)\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n=\varnothing$. Пусть $p=\inf F_1$, $q=\sup F_1$. Тогда интервалы $\Delta_0=(a;\ p)$, $\Delta_1=(q;\ b)$ непусты и множества $F_n^0=F_n\cap\Delta_0$, $F_n^1=F_n\cap\Delta_1$ замкнуты. Заменяя $(a;\ b)$ на Δ_0 и множества F_n на непустые множества F_n^0, мы построим интервалы Δ_{00} и Δ_{01}. Проведя это построение для интервала Δ_1, мы получим интервалы Δ_{10} и Δ_{11}. Интервалы Δ_{00}, Δ_{01}, Δ_{10}, Δ_{11} не пересекаются с множеством $F_1\cup F_2$ и друг с другом. Продолжая этот процесс по индукции, мы построим семейство интервалов $\{\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}\}$, удовлетворяющее условиям задачи 1.32, а также удовлетворяющее равенству $\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}\cap\bigcup\limits_{k=1}^{n}F_k=\varnothing$ при любом n и любых $\varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_n$. Теперь остается сослаться на утверждение задачи 1.32.

1.34. Найдите прямую, не содержащую точек касания данных кругов. Используйте результат задачи 1.33.

1.35. Пусть $\overline{E}_n$ — замыкание множества E_n. Рассуждая от противного, постройте такую последовательность вложенных сегментов $\Delta_n\subset(a;\ b)$, что $\Delta_n\cap\overline{E}_n=\varnothing$ при любом $n\in\mathbb{N}$.

1.36. Используйте результат задачи 1.35.

§ 2. Неравенства

2.1. Пусть $S_m=\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant m}a_k-\sum\limits_{m<k\leqslant n}a_k$. Ясно, что $S_0=-S_n$. Пользуясь тем, что последовательность $\{S_m\}_0^n$ меняет знак, подберите такой номер p, что S_p и S_{p-1} имеют разные знаки, и покажите, что хотя бы одно из чисел $|S_p|$ и $|S_{p-1}|$ не превосходит $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|$.

2.2. а) Воспользуйтесь неравенствами

$$2\sqrt{\frac{m}{M}}\leqslant\frac{a_k}{M}+\frac{m}{a_k}\leqslant1+\frac{m}{M}.$$

б) Правая часть неравенства сразу следует из правой части неравенства а). Левая часть доказывается по индукции. Отметим также, что левая часть неравенства б) является частным случаем неравенства 2.7 при $b_k=1/a_k$.

2.3. Правые неравенства легко доказываются по индукции. Для доказательства левых неравенств достаточно заметить, что $\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(1+a_k)\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(1-a_k)\leqslant1$, и воспользоваться правыми неравенствами.

2.4. а) Воспользуйтесь неравенством Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом и биномом Ньютона.

б) Воспользуйтесь неравенствами $1+a \geqslant e^{a/(1+a)}$ и $e^{\sigma} \geqslant 1 + \frac{\sigma}{1!} + \ldots + \frac{\sigma^n}{n!}$ при $a > -1$, $\sigma \geqslant 0$.

2.5. а) Представьте каждый сомножитель левой части в виде суммы геометрической прогрессии и перемножьте полученные ряды.

б) Пользуясь неравенствами а) и $\ln(1+t) \leqslant t$, имеем

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant p_m} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \sum_{1 \leqslant n \leqslant p_m} \frac{1}{n} \leqslant \prod_{1 \leqslant k \leqslant m} \left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1} = \prod_{1 \leqslant k \leqslant m} \left(1+\frac{1}{p_k-1}\right).$$

Логарифмируя, получаем

$$\ln\ln(1+p_m) = \ln\left(\sum_{1 \leqslant n \leqslant p_m} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} \ln\left(1+\frac{1}{p_k-1}\right) \leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} \frac{1}{p_k-1} \leqslant 1 + \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} \frac{1}{p_k}.$$

2.6. Достаточно доказать только правое неравенство (левое неравенство следует из правого, примененного к последовательностям $\{a_k\}_1^n$ и $\{-b_k\}_1^n$). При этом можно считать, что последовательность $\{b_k\}_1^n$ не убывает — этого можно добиться, изменяя нумерацию. Допустив, что для некоторых номеров $j < i$ выполнено неравенство $a_j > a_i$, докажите, что перестановка чисел a_j и a_i в последовательности $\{a_k\}_1^n$ увеличит сумму $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k b_k$.

Эти неравенства имеют простое механическое истолкование. Пусть имеется n гирь весом $a_1, \ldots, a_n$ и на рычаге, вращающемся в вертикальной плоскости вокруг неподвижной точки O, имеется n крюков, удаленных от точки O на расстояния $b_1, \ldots, b_n$. Тогда $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k b_k$ — статический момент этой системы. Он максимален, если вес гирь растет при удалении от точки O. Если же вес гирь убывает, то статический момент будет минимальным.

2.7. Для доказательства правого неравенства рассмотрите двойную сумму

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\widehat{a}_k - \widehat{a}_j\right)\left(\widehat{b}_k - \widehat{b}_j\right)$$

и воспользуйтесь тем, что ее слагаемые неотрицательны.

Левое неравенство доказывается аналогично или может быть выведено из правого, примененного к последовательностям $\{a_k\}$ и $\{-b_k\}$.

2.8. Для доказательства неравенств а) и в) воспользуйтесь преобразованием Абеля. Неравенство б) следует из неравенства а).

Множитель M нельзя уменьшить: зафиксируем $j\in\{1;\ \ldots;\ n\}$ и рассмотрим последовательность $a_k=1$ при $1\leqslant k\leqslant j$, $a_k=0$ при $j<k\leqslant n$. Тогда

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k b_k = b_1+\ldots+b_j\leqslant Mj = M\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k.$$

Следовательно, $M\geqslant(b_1+\ldots+b)/j$ для любого $j\in\{1;\ \ldots;\ n\}$.

2.9. Для доказательства первого неравенства воспользуйтесь преобразованием Абеля и неравенством

$$b_1+\ldots+b_k\leqslant\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n} b_j\right)\min(k;\ m).$$

Второе неравенство следует из первого, примененного к последовательностям $\{a_1-a_{n-k+1}\}_1^n$ и $\{b_{n-k+1}\}_1^n$.

2.10. Воспользуйтесь тождеством

$$\frac{1}{n}\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k\right)^2=\frac{1}{2n^2}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\ \sum_{1\leqslant j\leqslant n}(a_k-a_j)^2.$$

Для оценки двойной суммы сверху примените неравенство $|a_k-a_j|\leqslant\Delta|k-j|$, а для оценки снизу — неравенство $|a_k-a_j|\geqslant\geqslant\delta|k-j|$ (оно следует из монотонности последовательности $\{a_k\}_1^n$). Отметим, что неравенство б) справедливо и для немонотонной последовательности, если положить $\delta=\min\limits_{j\neq k}\left|\dfrac{a_k-a_j}{k-j}\right|$.

2.11. Решение аналогично решению предыдущей задачи, но вместо неравенств $\delta|k-j|\leqslant|a_k-a_j|\leqslant\Delta|k-j|$ используются неравенства $(j-k)(a_{k+1}-a_k)\leqslant a_j-a_k\leqslant(j-k)(a_j-a_{j-1})$ при $1\leqslant k<j\leqslant n$.

2.12. а) С помощью неравенства Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом докажите, что производная функции $\varphi(x)=\sqrt[n]{(a_1+x)\ldots(a_n+x)}$ не меньше единицы.

б) Используя неравенство а), докажите сначала частный случай, когда $a_k=1$ при $k=1,\ \ldots,\ n$. Общий случай сводится к частному, если положить $b_k=c_k a_k$ при $k=1,\ \ldots,\ n$.

2.13. Для выяснения знака производных воспользуйтесь неравенствами $t/(1+t)<\ln(1+t)<t$ при $t>-1$, $t\neq0$.

2.14. Неравенства доказываются по индукции. Для обоснования индукционного перехода воспользуйтесь неравенствами $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, которые вытекают из результата предыдущей задачи. Для доказательства неравенства б) при $n = 11$ воспользуйтесь тем, что $e < 11/4$.

2.15. Неравенство в) сильнее неравенства б), так как

$$\theta(x) = 2^{p-2}(1+x^p) - \left(1 + x^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1} \geqslant 0.$$

Это следует из легко проверяемых соотношений $\theta(1) = 0$ и $\theta'(x) \leqslant 0$.

в) При $p = 2$ неравенство очевидно. Для $p > 2$ положим $q = \frac{p}{p-1}$, $q \in (1; 2)$ и докажем, что функция $f(x) = \frac{(1+x)^p + (1-x)^p}{(1+x^q)^{p/q}}$ свое наибольшее значение на промежутке $[0; 1]$ принимает на концах этого промежутка. Для этого убедимся в том, что функция f сначала убывает, а затем возрастает, т. е. $f'(x) < 0$ при $x \in (0; c)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (c; 1)$, где c — некоторая точка промежутка $(0; 1)$. Ясно, что

$$f'(x) = \frac{p(1-x^2)^{p-1}}{(1+x^q)^{1+p/q}} \left(\frac{1-x^{q-1}}{(1-x)^{p-1}} - \frac{1+x^{q-1}}{(1+x)^{p-1}}\right).$$

Так как нас интересует знак $f'(x)$, то мы будем изучать функцию

$$g(x) = \frac{1-x^{q-1}}{(1-x)^{p-1}} - \frac{1+x^{q-1}}{(1+x)^{p-1}}.$$

Положим $r = p-1$, $t = 1/x$ и заметим, что $q - 1 = 1/r$, $r > 1$. Тогда

$$g(x) = -\frac{t^{q-p}}{(t+1)^{p-1}}\varphi(t),$$

где

$$\varphi(t) = t^{1/r} + 1 - \left(\frac{t+1}{t-1}\right)^r (t^{1/r} - 1), \qquad t > 1.$$

Ясно, что

$$\varphi(t) \underset{t \to 1+0}{\to} -\infty, \qquad \varphi(t) \underset{t \to +\infty}{\to} 2.$$

Теперь нам достаточно проверить, что функция φ возрастает. Несложные преобразования дают нам, что

$$\varphi'(t) = \frac{(t+1)^{r-1}}{(t-1)^r} t^{-\sigma}(U(t) - V(t)),$$

где

$$\sigma = 1 - \frac{1}{r}, \qquad U(t) = 2r\frac{t - t^\sigma}{t-1} \text{ и } V(t) = \frac{t+1}{r}\left(1 - \left(\frac{t-1}{t+1}\right)^r\right).$$

Заметим, что $\lim\limits_{t\to 1+0} U(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} V(t) = 2$. Поэтому для доказательства неравенства $\varphi'(t) > 0$ достаточно убедиться в том, что обе функции U, V строго возрастают (в этом случае $V(t) < < 2 < U(t)$ при $t > 1$). Так как $U'(t) = \dfrac{2rt^{\sigma}}{(t-1)^2}\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{\sigma}{t} - t^{-\sigma}\right)$ и функция $\alpha(t) = \dfrac{1}{r} + \dfrac{\sigma}{t} - t^{-\sigma}$ положительна при $t > 1$ ($\alpha(1) = 0$ и $\alpha'(t) = \sigma(t^{-1-\sigma} - t^{-2}) > 0$), то $U'(t) > 0$ при $t > 1$. Рассмотрим теперь функцию V. Поскольку $rV'(t) = 1 - \left(1 + \dfrac{2r}{t-1}\right)\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)^r$, нам остается убедиться в том, что функция $\beta(t) = \left(\dfrac{t+1}{t-1}\right)^r - 1 - - \dfrac{2r}{t-1}$ положительна при $t > 0$. Это вытекает из очевидных соотношений $\beta(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ и

$$\beta'(t) = \frac{2r}{(t-1)^2}\left(1 - \left(\frac{t+1}{t-1}\right)^{r-1}\right) < 0.$$

г) Докажите, что производная функции

$$\varphi(t) = 4^{1-\frac{1}{p}}(1+x^p)^{\frac{2}{p}} - (1+x)^2 - (p-1)(1-x)^2$$

отрицательна на промежутке $(0; 1)$. Для этого полезно представить $\varphi'(x)$ в виде $x\psi(1/x)$ и исследовать знак функции ψ на $(1; +\infty)$.

2.16. а) Левое неравенство вытекает из соотношения $\ln(1+x) \leqslant x$, $x > -1$. Для доказательства правого неравенства проверьте, что функция $\varphi(t) = \dfrac{t^2}{n} + e^t\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$ возрастает на промежутке $[0; n]$. Для этого представьте $\varphi'(t)$ в виде $\varphi'(t) = = t\psi(t)$ и покажите, что $\psi(t) \geqslant \psi(1) > 0$.

б) Надо проверить, что функция $\varphi(t) = \dfrac{t^2}{n^2} + e^t\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$ не превосходит единицы на промежутке $[0; n]$. Поскольку на концах промежутка это неравенство выполнено, то достаточно установить, что $\varphi(t) \leqslant 1$, если $\varphi'(t) = 0$, т. е. $e^t\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^{n-1} = \dfrac{2}{n}$. Но в этом случае

$$\varphi(t) = \frac{t^2}{n^2} + \frac{2}{n}\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leqslant 1, \qquad t \in [0; n], \quad n \geqslant 2.$$

в) Можно считать, что $t \in [0; 2\sqrt{n})$. Пусть $t = \theta\sqrt{n}$, где $\theta \in \in [0; 2)$. Тогда доказываемое неравенство равносильно неравенству

$$1-e^{\theta\sqrt{n}}\left(1-\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right)^n \leqslant \frac{\theta}{2}, \text{ т. е.}$$

$$0 \leqslant \varphi_n(\theta) = \theta\sqrt{n}+n\ln(1-\theta/\sqrt{n})-\ln(1-\theta/2).$$

Дифференцируя по n, покажем, что $\varphi_n \leqslant \varphi_{n+1}$:

$$\frac{d\varphi_n}{dn}=\frac{\theta}{2\sqrt{n}}+\ln\left(1-\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right)+\frac{\theta}{2(\sqrt{n}-\theta)}=\frac{1}{2}\psi\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right),$$

где $\psi(u)=u+2\ln(1-u)+\frac{u}{1-u}$. Поскольку $\psi(0)=0$ и $\psi'(u)=$ $=\left(\frac{u}{u+1}\right)^2 \geqslant 0$, то $\psi(u)\geqslant 0$, т. е. $\varphi_n \leqslant \varphi_{n+1}$. Осталось доказать, что $\varphi_{36}(\theta)\geqslant 0$ на промежутке $[0; 2)$. Так как $\varphi_{36}'(\theta)=\frac{6\theta^2-13\theta+6}{(6-\theta)(2-\theta)}$, то

$$\min_{[0;2)} \varphi_{36}=\varphi_{36}(3/2)=9+36\ln(3/4)+\ln 4=0{,}0297\ \ldots$$

Отметим, что неравенство в) выполнено при $n\geqslant 30$, но не выполняется при $n\leqslant 29$.

2.17. Левое неравенство следует из соотношения $\ln(1-x)\leqslant$ $\leqslant -x-\frac{x^2}{2}$ при $0<x<1$. Для доказательства правого неравенства рассмотрим функцию $\varphi(t)=e^{-t^2/(2n)}-e^t(1-t/n)^n$. Так как $\varphi(0)\leqslant 1/\sqrt{en}$ и $\varphi(n)\leqslant 1/\sqrt{en}$, то достаточно доказать, что $\varphi(t)\leqslant$ $\leqslant 1/\sqrt{en}$, если $\varphi'(t)=0$, т. е. $e^{-t^2/(2n)}=e^t(1-t/n)^{n-1}$. Но в этом случае

$$\varphi(t)=\frac{t}{n}e^{-t^2/(2n)}\leqslant\frac{1}{\sqrt{en}}.$$

2.18. а) Доказывая неравенство $\varphi(x)=\frac{x^2}{1+x}-\ln^2(1+x)\geqslant 0$, представьте функцию φ' в виде $\varphi'(x)=(1+x)\psi(x)$ и проверьте, что $\operatorname{sign}\psi(x)=\operatorname{sign}x$.

б) Изучите характер монотонности функции

$$\varphi(x)=\operatorname{arctg}x-\frac{x}{1+\frac{2}{\pi}x}$$

и воспользуйтесь тем, что $0=\varphi(0)=\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$.

г) Рассмотрите функцию $\varphi(x)=2\sin(\pi x/2)+x^3-3x$ при $x\in[0;\ 1]$. Исходя из графика φ''', последовательно постройте графики функций φ'', φ' и φ.

д) Рассмотрите функцию $\varphi(x) = \sin^2 x \operatorname{tg} x - x^3$ и последовательно докажите, что $\varphi''' > 0$, $\varphi'' > 0$, $\varphi' > 0$, $\varphi > 0$ $(\varphi'''(x) = (6 + 8\cos^2 x)\operatorname{tg}^4 x)$.

е) Сравните тейлоровские разложения функций $\cos x$ и $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{3+\varepsilon}$.

2.19. Эти неравенства являются частными случаями неравенства

$$f(x)f^{-1}(y) \geqslant xy, \qquad (*)$$

где $x, y > 0$, $y \leqslant f(x)$ и функция f такова, что $\frac{f(x)}{x}\uparrow$. Неравенство $(*)$ следует из неравенства $\frac{f(x)}{x} \geqslant \frac{f(z)}{z}$ при $z = f^{-1}(y) \leqslant x$. В неравенстве в) при $p < 0$ следует изменить знак. Для доказательства достаточно заметить, что при $p < 0$ справедливы неравенства

$$|(1 + x)^p - 1| \leqslant |p|x \quad \text{и} \quad |(1 + x)^{1/p} - 1| < x/|p|.$$

При $p \in (-1, 0)$ неравенство г) справедливо для x, близких к единице, но в окрестности нуля оно не выполнено — для доказательства достаточно рассмотреть тейлоровское разложение функции, стоящей в левой части неравенства.

2.20. Правое неравенство является частным случаем неравенства $(*)$. Левое неравенство является частным случаем неравенства, обратного к неравенству $(*)$:

$$f(x)f^{-1}(y) \leqslant xy, \qquad (**)$$

где $x > 0$, $y \geqslant f(x)$ и положительная функция f такова, что $\frac{f(x)}{x}\uparrow$. Неравенство $(**)$ следует из неравенства $\frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{f(z)}{z}$ при $z = f^{-1}(y) \geqslant x$.

2.28. См. [34]. Достаточно доказать неравенство для ступенчатых функций из K. Если $f_1, f_2 \in K$, то $f = \alpha f_1 + (1 - \alpha) f_2 \in K$ для любого числа α из промежутка $(0; 1)$. Легко видеть, что для любой функции g

$$\max(f; g) \leqslant \alpha \max(f_1; g) + (1 - \alpha)\max(f_2; g).$$

Поэтому

$$\int_a^b \max(f(x); g(x))\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \max\left(\int_a^b \max(f_1(x); g(x))\,dx; \int_a^b \max(f_2(x); g(x))\,dx\right).$$

Если число «ступенек», отвечающих функции $f \in K$, больше двух, то такую функцию легко представить в виде полусуммы двух других функций из K. Действительно, пусть $C_1 \geqslant C_2 \geqslant \ldots \geqslant C_n > 0$ — все значения функции f, $n \geqslant 3$. Тогда можно так подобрать числа $\varepsilon, \delta > 0$, что функции $f_\pm$, имеющие те же промежутки постоянства и принимающие на них значения $C_1(1 \pm \varepsilon)$, $C_2(1 \mp \delta)$, $C_3, \ldots, C_{n-1}$, $C_n(1 \pm \varepsilon)$, попадают в K. Это приводит к тому, что интеграл $\int\limits_a^b \max(f(x); g(x))\,dx$ достигает максимального значения на функциях, состоящих из двух ступенек. Каждая такая функция имеет вид $f_s = C_1\chi_{[a;s)} + C_2\chi_{[s;b]}$, где $s \in (a;\ b)$, а коэффициенты C_1 и C_2 однозначно определяются из условия $f_s \in K$: $C_1 = \frac{b}{s(b-a)}$, $C_2 = \frac{a}{s(b-a)}$. Если $a < t < s < b$, то

$$\int\limits_a^b \max\left(f_t(x); f_s(x)\right) dx = \frac{1}{b-a}\left(2b - b\frac{t}{s} - a\frac{s}{t}\right).$$

Правая часть максимальна при $s/t = \sqrt{b/a}$ и равна в этом случае $2\sqrt{b}/(\sqrt{a} + \sqrt{b})$.

§ 3. Иррациональность

3.1. а) $\Rightarrow$ б) Достаточно доказать, что для любого числа $Q \in \mathbb{N}$ найдутся такие целые числа p и q, что $1 \leqslant q \leqslant Q$ и $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qQ}$ (так как правая часть неравенства стремится к нулю при $Q \to +\infty$, а левая часть по условию а) положительна, то отсюда следует, что найдутся решения неравенства $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$ со сколь угодно большими знаменателями q).

Зафиксировав число $Q \in \mathbb{N}$, разобьем промежуток $[0;\ 1)$ на Q конгруэнтных промежутков $\left[0; \frac{1}{Q}\right), \left[\frac{1}{Q}; \frac{2}{Q}\right), \ldots, \left[1 - \frac{1}{Q}; 1\right)$ и рассмотрим точки $\delta_n = nx - [nx]$ при $n = 0, 1, \ldots, Q$. Ясно, что $\delta_n \in [0;\ 1)$. Поскольку число этих точек больше числа промежутков, то по крайней мере один из них содержит две точки δ_k и δ_j, $0 \leqslant k < j \leqslant Q$. Следовательно,

$$1/Q > |\delta_j - \delta_k| = |jx - [jx] - kx + [kx]|.$$

Взяв $q = j - k$ и $p = [jx] - [kx]$, получим, что $\frac{1}{Q} > |qx - p|$.

в) $\Rightarrow$ а) Допустив, что $x = p/q$, где $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$, получим $pq_k - qp_k \to 0$ при $k \to +\infty$. Так как $pq_k - qp_k \in \mathbb{Z}$, то отсюда следует, что $pq_k - qp_k = 0$, т. е. $p/q = p_k/q_k$ для всех достаточно больших номеров k, а это противоречит условию.

3.2. Воспользуйтесь результатом задачи 3.1.

3.3. а) Достаточно доказать, что последовательность $\{\sin 4^n\}$ не имеет предела. Допустим, что это не так: $\sin 4^n \to l$. Если $l = 0$, то $4^n = \pi k_n + \varepsilon_n$, $4^{n+1} = \pi k_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$, где $k_n, k_{n+1} \in \mathbb{Z}$ и $\varepsilon_n \to 0$. Следовательно, $0 = \pi(4k_n - k_{n+1}) + 4\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}$. Поэтому для достаточно больших n имеем $4k_n = k_{n+1}$, т. е. $k_n = A\,4^n$, где $A \in \mathbb{Q}$. Но тогда из равенства $4^n = \pi k_n + \varepsilon_n$ вытекает, что $1 = \pi A$. Это невозможно, так как число π иррационально (см. задачу 3.13).

Если $l \neq 0$, то из равенства $\sin 4^{n+1} = 4 \sin 4^n \cos 4^n \times \times (1 - 2\sin^2 4^n)$ получаем, что существует предел последовательности $\{\cos 4^n\}$. Следовательно, $4^n = 2\pi k_n + \varphi + \varepsilon_n$, где $0 < |\varphi| < \pi$, $k_n \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_n \to 0$. Так как $4^{n+1} = 2\pi k_{n+1} + \varphi + \varepsilon_{n+1}$, то $0 = 2\pi(4k_n - k_{n+1}) + 3\varphi + 4\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}$, а это возможно лишь при $\varphi = \pm 2\pi/3$. Поэтому для достаточно больших n разность $4k_n - k_{n+1}$ постоянна и равна либо 1 (если $\varphi = -2\pi/3$), либо -1 (если $\varphi = 2\pi/3$). В первом случае по индукции легко показать, что $k_n = A \cdot 4^n + 1/3$, где $A \in \mathbb{Q}$. Но тогда из равенства $4^n = 2\pi k_n - \dfrac{2\pi}{3} + \varepsilon_n$ следует, что $\pi \in \mathbb{Q}$. Случай $\varphi = 2\pi/3$ рассматривается аналогично.

б) Представьте число θ в виде $\theta = \pi m + \pi \sum \varepsilon_k 2^{-k}$, где $m = [\theta/\pi]$, $\varepsilon_k = 0$ или 1.

3.5. Рассмотрите числа 0,101001000100001000001... (после n-й единицы следует n нулей) и 0,1234567891011121314151617181920... (выписываются все натуральные числа в десятичной записи).

3.6. В случаях а), б), г) можно использовать результат задачи II.1.21. В случае в) рассмотрите числа $n = (2k)^4 + j$, $j = 1, \ldots, 4k$. Считая число k большим, покажите с помощью формулы Тейлора, что $\sin(\pi n^{3/2}) = \sin\left(\dfrac{3\pi}{32}\dfrac{j^2}{k^2}\right) + O\left(\dfrac{1}{k^3}\right)$.

3.7. б) Воспользуйтесь результатом задачи 3.2.

в) Воспользуйтесь результатом задачи II.1.21.

г) Используйте тот же прием, что и в решении задач 3.6. в).

3.8. Докажем, что для любого промежутка $[p; q]$, $0 \leqslant p < q \leqslant \leqslant 1$, существует такое число $x \in \mathbb{R}$, что $\delta(x^n) \in [p; q]$ при $m \in \mathbb{N}$. Для этого подберем такое число $m \in \mathbb{N}$, что числа $a = m + p$ и $b = m + q$ удовлетворяют неравенству

$$a(q - p) \geqslant 2. \qquad (*)$$

Ясно, что $\delta(y) \in [p; q]$ для всех $y \in [a; b]$. Из неравенства $(*)$

следует, что $b^2 - a^2 \geqslant 2$. Поэтому промежуток $[a^2,\ b^2]$ содержит промежуток вида $[m_1 + p;\ m_1 + q]$, где $m_1 \in \mathbb{N}$. Пусть $[a_1;\ b_1] \subset \subset [a;\ b]$ — такой промежуток, что $a_1^2 = m_1 + p$ и $b_1^2 = m_1 + q$. Ясно, что $\delta(y^2) \in [p;\ q]$ для всех $y \in [a_1;\ b_1]$. Из неравенства $(*)$ следует, что длина промежутка $\left[a_1^3;\ b_1^3\right]$ не меньше двух:

$$b_1^3 - a_1^3 \geqslant a_1\left(b_1^2 - a_1^2\right) = a_1(q - p) \geqslant a(q - p) \geqslant 2.$$

Поэтому промежуток $\left[a_1^3; b_1^3\right]$ содержит промежуток вида $[m_2 + p;\ m_2 + q]$, где $m_2 \in \mathbb{N}$. Пусть $[a_2;\ b_2] \subset [a_1;\ b_1]$ — такой промежуток, что $a_2^3 = m_2 + p, b_2^3 = m_2 + q$. Ясно, что $\delta(y^3) \in \in [p;\ q]$ для всех $y \in [a_2;\ b_2]$. В силу неравенства $(*)$ длина промежутка $\left[a_2^4;\ b_2^4\right]$ не меньше двух:

$$b_2^4 - a_2^4 \geqslant a_2\left(b_2^3 - a_2^3\right) = a_2(q - p) \geqslant a(q - p) \geqslant 2.$$

Продолжая построение по индукции, получим последовательность вложенных промежутков $\{[a_k;\ b_k]\}$. Искомая точка берется из их пересечения.

В заключение отметим, что числа x, удовлетворяющие условию задачи, образуют множество мощности континуум. Для доказательства достаточно незначительно изменить решение, заменив неравенство $(*)$ неравенством $a(q - p) \geqslant 3$. Это позволяет на каждом шаге удваивать число промежутков, обладающих требуемыми свойствами. В результате получаем обобщенное канторово множество, все точки которого удовлетворяют условию задачи.

3.9. Непосредственные вычисления доказывают утверждение для функций f вида $f(t) = \cos(2\pi m t)$ $(m = 0,\ 1.\ 2,\ \ldots)$. Отсюда следует справедливость утверждения для всех функций f вида $f(t) = \sum\limits_{0 \leqslant m \leqslant M} a_m \cos(2\pi m t)$. Остается воспользоваться теоремой Вейерштрасса (см. VII.3.11).

3.10. Используйте ту же идею, что и при доказательстве утверждения а) $\Rightarrow$ б) задачи 3.1: для любого числа $Q \in \mathbb{N}$ существуют такие целые числа $q,\ p_1,\ \ldots,\ p_m$, что $1 \leqslant q \leqslant Q^m$ и $|x_j - p_j/q| < 1/qQ$ при $j = 1,\ \ldots,\ m$. Для доказательства разбейте куб $[0;\ 1)^m$ на Q^m конгруэнтных непересекающихся кубов и рассмотрите точки $\delta_n = (\delta(nx_1);\ \ldots;\ \delta(nx_m)) \in [0;\ 1)^m$ при $n = 0,\ 1,\ \ldots,\ Q^m$.

3.11. а) Правое неравенство очевидно. Допустив, что $\left|\sqrt{2} - \frac{m}{n}\right| \leqslant \frac{1}{4n^2}$ для некоторых $m, n \in \mathbb{N}$, получим

$$\left|2 - \frac{m^2}{n^2}\right| \leqslant \frac{\sqrt{2} + \frac{m}{n}}{4n^2} \leqslant \frac{2\sqrt{2} + \frac{1}{4}}{4n^2} < \frac{1}{n^2}.$$

Следовательно, $|2n^2 - m^2| < 1$, что невозможно.

б) Из неравенств

$$\alpha_{n_j} = \left|\sqrt{2} - \frac{m_j}{n_j}\right| \leqslant \frac{C}{n_j^2} \text{ и } \alpha_{n_{j+1}} = \left|\sqrt{2} - \frac{m_{j+1}}{n_{j+1}}\right| \leqslant \frac{C}{n_{j+1}^2}$$

следует, что

$$|\sqrt{2}(n_{j+1} - n_j) - (m_{j+1} - m_j)| \leqslant 2C/n_j,$$

т. е.

$$\alpha_{n_{j+1}-n_j} \leqslant \frac{2C}{n_j(n_{j+1} - n_j)}.$$

Так как $\alpha_n > 1/4n^2$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то

$$\frac{1}{4(n_{j+1} - n_j)^2} < \alpha_{n_{j+1}-n_j} \leqslant \frac{2C}{n_j(n_{j+1} - n_j)},$$

откуда следует доказываемое неравенство.

3.12—3.14. Проверив, что остаток ряда мажорируется первым слагаемым этого остатка, покажите, что выполнено утверждение в) задачи 3.1.

3.15. Пусть P — такой алгебраический многочлен степени n с целыми коэффициентами, что $P(\alpha) = 0$. Достаточно рассмотреть дроби p/q столь близкие к α, что $|\alpha - p/q| < 1$ и $P(p/q) \neq 0$. Поскольку $q^n P(p/q) \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, то $|P(p/q)| \geqslant q^{-n}$. С другой стороны, разложив многочлен $P(t)$ по степеням $t - \alpha$, получим

$$|P(p/q)| = \left|\sum_{1\leqslant k\leqslant n} c_k (p/q - \alpha)^k\right| \leqslant |p/q - \alpha| \sum_{1\leqslant k\leqslant n} |c_k|.$$

Таким образом, $q^{-n} \leqslant |P(p/q)| \leqslant \mathrm{const}\,|p/q - \alpha|$. Доказанное утверждение называется теоремой Лиувилля.

3.16. б) Положим $\alpha = \sum \frac{\varepsilon_k}{n_k}$ и докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют решения неравенства $|\alpha - p/q| < \varepsilon/q^2$ со сколь угодно большим $q \in \mathbb{N}$. Так как $\alpha \notin \mathbb{Q}$ (см. задачу 3.14), то по теореме Лиувилля отсюда следует, что число α не является квадратичной иррациональностью.

Поскольку $\left|\alpha - \sum_{1\leqslant k\leqslant m} \frac{\varepsilon_k}{n_k}\right| \leqslant \frac{C_Q}{n_{m+1}}$, то достаточно доказать, что $\lim \frac{n_1^2 \ldots n_m^2}{n_{m+1}} = 0$. Допустив противное, получим, что $n_{m+1} \leqslant$ $\leqslant C n_1^2 \ldots n_m^2$. Положим $L_m = n_1 n_2 \ldots n_m$. Тогда последнее неравенство примет вид $L_{m+1} \leqslant C L_m^3$, и поэтому

$$n_{m+1} \leqslant L_{m+1} \leqslant C(CL_{m-1})^3 \leqslant \ldots \leqslant C^{1+3+\ldots+3^m} L_1^{3^m} \leqslant (CL_1)^{3^{m+1}}.$$

Следовательно, $\sqrt[3^{m+1}]{n_{m+1}} \leqslant CL_1$, что противоречит условию.

3.17. См. решение следующей задачи.

3.18. б) Рассуждения, аналогичные решению задачи 3.16, показывают, что из равенства $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[N^k]{n_k}=+\infty$ при некотором $N\in\mathbb{N}$, $N>1$, следует, что сумма ряда $\sum\frac{\varepsilon_k}{n_k}$ не является алгебраическим числом степени N. Осталось заметить, что из условия $\overline{\lim}\sqrt[k!]{n_k}>1$ следует, что $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[N^k]{n_k}=+\infty$ для всех $N\in\mathbb{N}$.

3.19. а) Ясно, что $e-\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{k!}=\frac{\theta_n}{(n+1)!}$, где $0<\theta_n<3$. Допуская, что $e=p/q$, где $p, q\in\mathbb{N}$, и умножая на $qn!$, получаем

$$pn!-qn!\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{k!}=\frac{q\theta_n}{n+1}>0.$$

Левая часть этого равенства есть натуральное число, а правая стремится к нулю с ростом n, что ведет к противоречию.

б) Если $Ae^2+Be+C=0$, то $Ae+Ce^{-1}\in\mathbb{Z}$. Это возможно лишь при $A=C=0$ — доказательство аналогично решению задачи а).

3.20. а) Интегрируя по частям, проверьте, что

$$I_{n+1}=(4n+2)\,I_n-\pi^2 I_{n-1}\qquad (n\in\mathbb{N}).$$

б) Допустим противное: $\pi^2=p/q$, где $p, q\in\mathbb{N}$. Тогда

$$q^nP_n(p/q)=q^nI_n>0.$$

Это равенство ведет к противоречию, так как его левая часть есть натуральное число, а правая стремится к нулю с ростом n.

Полученный результат, как и результаты двух следующих задач, установлен (другим способом) еще Ламбертом. В книге [32] читатель найдет историю и развернутое изложение этой темы.

3.21. Решение аналогично решению предыдущей задачи.

3.22. а) Решение аналогично решению задачи 3.20. а).

б) Допустим противное: $\operatorname{tg} r=p/q$, где $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$. Пусть $r=a/b$, где $a, b\in\mathbb{N}$. Тогда

$$C_n(a/b)\cos r+S_n(a/b)\sin r=I_n(r).$$

Отсюда следует, что

$$qb^nC_n\left(\frac{a}{b}\right)+b^nS_n\left(\frac{a}{b}\right)p=\frac{qb^n}{\cos r}I_n(r).$$

Левая часть этого равенства есть целое число, а правая стремится к нулю с ростом n. Чтобы придти к противоречию, остается убедиться в том, что $I_n(r) \neq 0$ для достаточно больших n. Если $r \leqslant \pi/2$, то это очевидно. Пусть $r > \pi/2$. Тогда

$$n!\, I_n(r) = 2\int_0^{\pi/2} (r^2 - t^2)^n \cos t\, dt + O\left(\left(r^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)^n\right) \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^{\pi/3} r^n (r-t)^n\, dt + O\left((r^2 - \pi^2/4)^n\right) \sim \frac{r^{2n+1}}{(n+1)}.$$

Глава II. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Вычисление пределов

1.2. Проверьте, что последовательности $\{x_{2k}\}$ и $\{x_{2k-1}\}$ возрастают. Для вычисления их пределов можно воспользоваться формулой Валлиса.

1.3. Покажите, что рассматриваемые суммы мало отличаются от суммы геометрической прогрессии.

1.4. Запишите x_n в виде $x_n = \prod\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \dfrac{\sin(k/n^{3/2})}{(k/n^{3/2})}$ и изучите $\ln x_n$, используя формулу Тейлора.

1.5. Первая половина слагаемых дает бесконечно малый вклад. Поэтому

$$x_n = \sum_{n/2 < k \leqslant n} \left(\frac{a+k}{n}\right)^n + o(1) = \sum_{0 \leqslant j < n/2} \left(1 + \frac{a-j}{n}\right)^n + o(1) =$$

$$= \sum_{0 \leqslant j < n/2} e^{a-j}\left(1 + O\left(\frac{(a-j)^2}{n}\right)\right) + o(1) = \sum_{j \geqslant 0} e^{a-j} + o(1).$$

1.6. а) Основной вклад дают последние слагаемые:

$$\sum_{n-\sqrt[3]{n} \leqslant k \leqslant n} \left(\frac{k}{n}\right)^k = \sum_{0 \leqslant j \leqslant \sqrt[3]{n}} \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{n-j} =$$

$$= \sum_{0 \leqslant j \leqslant \sqrt[3]{n}} e^{-j}\left(1 + O\left(\frac{j^2}{n}\right)\right) = \sum_{j \geqslant 0} e^{-j} + o(1).$$

Сумма остальных слагаемых бесконечно мала, так как

$$\max_{1 < k < n - \sqrt[3]{n}} \left(\frac{k}{n}\right)^k = \frac{4}{n^2}.$$

б) Представьте разность $S_n - S_{n+1}$ в виде $U_n + V_n$, где

$$U_n = \left(\frac{1}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{27}{n^3}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{4}{(n+1)^2} + \frac{27}{(n+1)^3} + \frac{256}{(n+1)^4}\right),$$

$$V_n = \sum_{4<k\leqslant n} \left(\left(\frac{k}{n}\right)^k - \left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{k+1}\right).$$

Неравенство $V_n \geqslant 0$ получите, используя убывание на $(0;\ \infty)$ функции $f(x) = \left(\frac{x}{a+x}\right)^x$ при любом $a > 0$. Проверьте, что $U_n > 0$ при $n \geqslant 8$. Неравенства между S_n при $1 \leqslant n \leqslant 8$ установите непосредственно.

1.7. Для исследования величины $(n+1)(n+2)\ldots(n+n) = (2n)!/n!$ воспользуйтесь результатом задачи I.2.14. Другое решение получим, если заметим, что $\ln \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}}{n}$ является интегральной суммой, соответствующей интегралу $\int\limits_0^1 \ln(1+x)\,dx$.

1.8. Воспользуйтесь результатом задачи I.2.14.

1.9. В задачах а)—г) надо воспользоваться тем, что рассматриваемые суммы мало отличаются от интегральных сумм. В задаче д) покажите, что сумма заключена между интегралами

$$\int\limits_{1/n}^{1-1/n} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} \quad \text{и} \quad \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

1.10. а)—в) Используйте равенство $e = \sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}$.

г) Сравните $(\sqrt{2}+1)^n$ с целым числом $(\sqrt{2}+1)^n + (1-\sqrt{2})^n$.

1.11. Сходимость последовательности $\left\{\frac{x_1}{a}\cdot\frac{x_2}{a}\ldots\frac{x_n}{a}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ к положительному пределу равносильна сходимости ряда $\sum \ln\frac{x_n}{a} = \sum \ln\left(1 - \frac{a-x_n}{a}\right)$.

1.12. а) Сходимость последовательности вытекает из ее монотонности и неравенства $x_n \leqslant 1 + \sqrt{a}$, которое доказывается по индукции. Для вычисления предела воспользуйтесь тождеством $x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$.

б) Поскольку $l_a^2 = a + l_a$, то

$$l_a - x_n = \frac{l_a^2 - x_n^2}{l_a + x_n} = \frac{l_a - x_{n-1}}{l_a + x_n},$$

и, следовательно,

$$l_a - x_n = (l_a - x_1) \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} (l_a + x_k)^{-1}.$$

Поэтому

$$\sum (l_a - x_n) \leqslant (l_a - x_1) \sum \frac{1}{l_a^n} < +\infty,$$

и можно воспользоваться результатом задачи 1.11:

$$l_a - x_n = (l_a - x_1) \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} (l_a + x_k)^{-1} \sim \frac{C_a}{(2l_a)^n}.$$

При $a = 2$ нетрудно убедиться в том, что $x_n = 2\cos(\pi/2^{n+1})$, и поэтому $2 - x_n \sim \pi^2/4^{n+1}$.

1.13. Поскольку

$$2 - x_n = \frac{8 - x_n^3}{4 + 2x_n + x_n^2} =$$

$$= \frac{2 - x_{n-1}}{4 + 2x_n + x_n^2} = \ldots = (2 - x_1) \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(4 + 2x_k + x_k^2\right)^{-1},$$

то $2 - x_n = O(4^{-n})$. Пользуясь результатом задачи 1.11, получаем, что

$$\prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(4 + 2x_k + x_k^2\right) \sim \mathrm{const}\,(12)^n.$$

1.14. Монотонность последовательности $\{x_n\}$ очевидна. Ограниченность следует из неравенства $x_n \leqslant \sqrt[p]{1 + x_n} \leqslant \sqrt[p]{2x_n}$, т. е. $x_n \leqslant 2^{1/(p-1)}$.

1.15. Если $x_n \to C < +\infty$, то $x_n = \sqrt[p]{c_1 + \ldots + \sqrt[p]{c_n}} \leqslant C$ и следовательно, $\sqrt[p]{\sqrt[p]{\ldots \sqrt[p]{c_n}}} \leqslant C$, т. е. $c_n \leqslant C^{p^n}$. Для доказательства обратного утверждения достаточно заметить, что из неравенства $c_n \leqslant C^{p^n}$ следует неравенство

$$x_n \leqslant \sqrt[p]{C^p + \sqrt[p]{C^{p^2} + \ldots + \sqrt[p]{C^{p^n}}}} \leqslant$$

$$\leqslant C \sqrt[p]{1 + \sqrt[p]{1 + \ldots + \sqrt[p]{1}}}.$$

Используя результат предыдущей задачи, получаем, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена, а этого достаточно для сходимости, так как последовательность возрастает.

1.16. Из результата предыдущей задачи следует, что сходимость последовательности

$$x_n = \sqrt{a_1 + b_1 \sqrt{a_2 + \ldots + b_{n-1} \sqrt{a_n}}}, \qquad (*)$$

где a_k, $b_k \geqslant 0$, равносильна ограниченности сверху последовательности $\left\{\frac{1}{2^n} \ln a_n + \sum\limits_{1 \leqslant k < n} \frac{1}{2^k} \ln b_k\right\}$. Поэтому выражения, стоящие в правых частях равенств а)—д), являются пределами сходящихся последовательностей (в примере г) надо воспользоваться неравенством $u_n \leqslant 2^n$, а в примере д) — неравенством $T_n \leqslant (2x)^n$ при $x \geqslant 1$, которые легко доказываются по индукции). Для нахождения предела последовательности, определенной равенством $(*)$, рассмотрим такую последовательность $\{\theta_n\}$, что

$$\theta_n^2 = a_n + b_n \theta_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}). \qquad (**)$$

Заменив в равенстве $(*)$ a_n на θ_n^2, получим оценку сверху для x_n:

$$x_n \leqslant y_n = \sqrt{a_1 + b_1 \sqrt{a_2 + b_2 \sqrt{\ldots + b_{n-2} \sqrt{a_{n-1} + b_{n-1} \theta_n}}}} = \theta_1$$

(последнее равенство следует из соотношения $(**)$). Чтобы получить для x_n оценку снизу, воспользуемся $(n-1)$ раз неравенством $\sqrt{a + Cb} \leqslant \sqrt{C} \sqrt{a + b}$ (при a, $b \geqslant 0$ и $C \geqslant 1$). Это дает $y_n \leqslant x_n \sqrt[2^n]{\frac{\theta_n}{\sqrt{a_n}}}$. Таким образом, $\theta_1 \sqrt[2^n]{\frac{\sqrt{a_n}}{\theta_n}} \leqslant x_n \leqslant \theta_1$, и, следовательно, $x_n \to \theta_1$, если $\frac{1}{2^n} \ln \frac{\sqrt{a_n}}{\theta_n} \to 0$.

Проверьте, что в примерах а)—д) соотношению $(**)$ удовлетворяют следующие последовательности $\{\theta_n\}$:

а) $n + 2$; б) $n + 2$; в) $\cos \frac{x}{2^{n-1}}$; г) $3u_{2n+2}$; д) $2xT_n$.

При решении примеров г) и д) воспользуйтесь представлением чисел Фибоначчи и многочленов Чебышёва:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right),$$

$$T_n = \frac{1}{2} \left(\left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n \right).$$

Эти равенства доказываются по индукции.

1.17. Сходимость последовательности $\{x_n\}$ вытекает из результата задачи 1.15. Для оценки разности $a - x_N$ запишем ее в виде

$(a-x_N)=\sum_{n\geqslant N}(x_{n+1}-x_n)$ и рассмотрим величину $x_{n+1}-x_n$:

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n+\sqrt{n+1}}}}-$$

$$-\sqrt{1+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n+\sqrt{n+1}}}}-\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}}}{\sqrt{1+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n+1}}}+\sqrt{1+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n}}}}=\ldots$$

$$\ldots=\frac{\sqrt{n+1}}{\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left(x_{n+1}^{(k)}+x_n^{(k)}\right)},$$

где $x_n^{(k)}=\sqrt{k+\sqrt{(k+1)+\ldots+\sqrt{n}}}$. Используя рекуррентную формулу $x_n^{(k)}=\sqrt{k+x_n^{(k+1)}}$, последовательно докажите, что

а) $\sqrt{k}\leqslant x_n^{(k)}\leqslant\sqrt{k}+1$;

б) $x_n^{(k)}=\sqrt{k}+\frac{1}{2}+O(1/\sqrt{k})$ при $1\leqslant k<n$;

в) $x_n^{(k)}=\sqrt{k}\exp\left(1/(2\sqrt{k})+O\left(1/k^{3/2}\right)\right)$ при $1\leqslant k<n$; (при этом постоянные в O-членах не зависят не только от k, но и от n). С помощью равенства в) и результата задачи 2.12. а) покажите, что

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1+o(1)}{2^n\sqrt{(n-1)!}}\exp\left(-\sum_{1\leqslant k<n}\left(\frac{1}{2\sqrt{k}}+O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right)\right),$$

т. е.

$$x_{n+1}-x_n\sim\frac{\mathrm{const}}{2^n e^{\sqrt{n}}\sqrt{(n-1)!}}.$$

Отсюда немедленно вытекает, что

$$a-x_N\sim x_{N+1}-x_N\sim\frac{\mathrm{const}}{2^N e^{\sqrt{N}}\sqrt{(N-1)!}}.$$

Поэтому, используя результат задачи 1.2.14, получаем $\sqrt[N]{a-x_N}\sim$ $\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{e}{N}}$.

1.18. Положим $\tilde{x}_n=x_n-\frac{1}{2}x_{n-1}$. Тогда

$$x_n-\frac{x_1}{2^{n-1}}=\sum_{1<k\leqslant n}\frac{\tilde{x}_k}{2^{n-k}}=\sum_{1<k\leqslant m}+\sum_{m<k\leqslant n}.$$

Так как $\tilde{x}_k \to 0$, то при больших m вторая сумма будет малой при всех $n \geqslant m$. При фиксированном m первая сумма сколь угодно мала, если n достаточно велико.

1.19. а) Допустив противное, получим для больших n, что $\left(\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n}\right)^n < \left(\frac{1+n}{n}\right)^n$, откуда $\frac{a_1}{n+1} < \frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+1}}{n+1}$. Это невозможно, так как частичные суммы ряда $\sum\left(\frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+1}}{n+1}\right)$ не превосходят a_1.

б) Рассмотрите последовательности $a_n = n^c$ (при $c > 1$) и $a_n = n \ln (n+1)$.

1.20. Пусть $l = \inf \frac{a_n}{n} \in [-\infty; +\infty)$ и $L > l$. Зафиксируем такой номер m, что $a_m/m < L$. Представив произвольный номер $n > m$ в виде $n = km + j$, где $k \in \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots\}$ и $j \in \{1;\ 2;\ \ldots;\ m\}$, получим, что

$$a_n = a_{km+j} \leqslant a_{km} + a_j \leqslant k a_m + a_j,$$

и, следовательно,

$$l \leqslant \frac{a_n}{n} \leqslant \frac{k}{n} a_m + \frac{a_j}{n} < \frac{km}{n} L + \frac{a_j}{n} \leqslant L + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом, для любого числа $L > l$ имеем

$$l \leqslant \underline{\lim}\, a_n/n \leqslant \overline{\lim}\, a_n/n \leqslant L,$$

откуда следует, что

$$\underline{\lim}\, a_n/n = \overline{\lim}\, a_n/n = l, \quad \text{т. е.} \quad a_n/n \to l.$$

1.22. Примените результат предыдущей задачи к последовательностям $\{x_{2k}\}$ и $\{x_{2k-1}\}$.

1.23. Примените теорему Штольца (см. задачу 2.6) к последовательности $\{x_{2k}/k\}$ и $\{x_{2k+1}/k\}$.

1.24. б) Для построения такой последовательности можно поступить следующим образом. Рассмотрим последовательность промежутков $\{\Delta_n\}$ таких, что Δ_n расположен левее Δ_{n+1}. Определим функцию $f \in C(\mathbb{R})$ равенством $f(t) = (-1)^n$, если $t \in \Delta_n$, а между промежутками Δ_n и Δ_{n+1} пусть f линейна. Положим $x_n = f(n)$. Ясно, что если длины смежных к Δ_n интервалов неограниченно возрастают, то $x_{n+1} - x_n \to 0$. С другой стороны, последовательно подбирая длины промежутков Δ_n достаточно большими, можно добиться, чтобы среди чисел $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ были сколь угодно близкие как к $+1$, так и к -1.

Другой пример мы получим, рассмотрев последовательность $\{\sin \ln n\}$.

1.25. Пусть $\underline{\lim}\, x_n < a < b < \overline{\lim}\, x_n$. Рассмотрим множества $E_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n < a\}$ и $E_2 = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n > b\}$. Как установлено в задачах I.1.24—I.1.26, найдется такое число $C > 1$, что каждое из множеств E_1, E_2 содержит бесконечно много чисел вида $[C^k]$, а это несовместимо с предположением о существовании предела $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{[C^k]}$.

§ 2. Усреднение последовательностей

2.2. Левое неравенство следует из правого, примененного к последовательности $\{-x_n\}$. Для доказательства правого неравенства достаточно рассмотреть случай, когда $\overline{\lim}\, x_n = l < +\infty$. Пусть $L > l$ и $m = m_L$ — такой номер, что $x_n < L$ при $n > m$. Тогда

$$\tilde{x}_n = \frac{1}{A_n} \sum_{1\leqslant k\leqslant m} a_k x_k + \frac{1}{A_n} \sum_{m<k\leqslant n} a_k x_k \leqslant o(1) + \frac{1}{A_n} \sum_{m<k\leqslant n} L a_k = $$
$$= L + o(1).$$

Следовательно, $\overline{\lim}\, \tilde{x}_n \leqslant L$ для любого $L > l$, т. е. $\overline{\lim}\, \tilde{x}_n \leqslant l$.

2.3. а) Если $n_k \leqslant n < n_{k+1}$, то $\dfrac{k}{n_{k+1}} \leqslant \dfrac{p_n}{n} \leqslant \dfrac{k}{n_k}$.

б) Если $0 < \alpha \leqslant 1$, то, например, $A = \{n \in \mathbb{N} \mid [\alpha n] > [\alpha(n-1)]\}$. В этом случае $\alpha - \dfrac{1}{n} < \dfrac{p_n}{n} \leqslant \alpha$.

2.4. а) Примените результат задачи 2.1 к последовательности $\{|x_n - a|\}$.

б) Пусть $\varepsilon > 0$, $A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} \mid |x_n - a| \geqslant \varepsilon\}$. Проверьте, что $\theta(A_\varepsilon) = 0$. Пусть $p_k(n) = \operatorname{card}\{A_{1/k} \cap [1;\, n]\}$ и числа $1 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ таковы, что $\dfrac{1}{n} p_{k+1}(n) < \dfrac{1}{k}$ при $n > n_k$. Положим $A = \bigcup\limits_{k\geqslant 1} A_{1/k} \cap [n_{k-1};\, n_k]$ и $B = \mathbb{N} \setminus A = \{m_1;\, m_2;\, \ldots\}$. Тогда $\theta(B) = 1$ и $x_{m_k} \to a$.

2.5. а) Для построения последовательности $\{a_n\}$, имеющей предел $\lim \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$, но не имеющей предела $\lim \dfrac{a^2 + \ldots + a_n^2}{n}$ достаточно несколько изменить решение задачи 1.24. б): пусть $\{b_k\}$ образуют чередующуюся последовательность из $+1$ и -1 на каждом промежутке Δ_n, а на смежных интервалах $b_k = 0$. При надлежащем выборе длин промежутков и длин смежных интервалов последовательность $\left\{\dfrac{2 + b_n}{4}\right\}$ будет требуемой. Для построения последовательности $\{a_n\}$, имеющей предел $\lim \dfrac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}$, но не имеющей предела $\lim \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$, рассмотрите последовательность $\left\{\sqrt{\frac{2+b_n}{4}}\right\}$.

Другой пример получим, рассмотрев последовательность $\{C_n\}$:

$$C_n = \begin{cases} \frac{3+(-1)^n}{6}, & \text{если } [\log_2 n] \text{ — четное число,} \\ \frac{3+2(-1)^n}{6}, & \text{если } [\log_2 n] \text{ — нечетное число.} \end{cases}$$

Из трех пределов $\lim \frac{1}{n}\left(C_1^2+\ldots+C_n^2\right)$, $\lim\frac{1}{n}(C_1+\ldots+C_n)$ и $\lim \frac{1}{n}\left(\sqrt{C_1}+\ldots+\sqrt{C_n}\right)$ существует лишь второй.

б) Неравенство $a^2 \leqslant b$ следует из неравенства Коши. Для построения последовательности $\{a_n\}$ с заданными пределами $a=\lim \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$ и $b=\lim\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}$, где $0 \leqslant a^2 \leqslant b \leqslant \leqslant a \leqslant 1$, рассмотрите последовательность, принимающую значение α на множестве $A \subset \mathbb{N}$ плотности a (см. задачу 2.3) и значение β на множестве $\mathbb{N}\setminus A$. Докажите, что за счет выбора параметров α и β можно добиться выполнения требуемых равенств.

2.6. Можно считать, что $l \geqslant 0$. При этом достаточно рассмотреть лишь случай $l=0$: если $0<l<+\infty$, то вместо последовательности $\{x_n\}$ надо рассмотреть $\{x_n-ly_n\}$, а если $l=+\infty$, то следует поменять местами последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ (условия $x_{n+1}>x_n$ и $x_n \to +\infty$ выполнены, так как $x_{n+1}-x_n>y_{n+1}-y_n$ для достаточно больших n). Считая, что $\varepsilon_n=\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}} \to 0$, докажем, что $\frac{x_n}{y_n} \to 0$. Поскольку

$$x_n = x_1 + \sum_{1<k\leqslant n}(x_k-x_{k-1}) = x_1 + \sum_{1<k\leqslant n}\varepsilon_k(y_k-y_{k-1}),$$

то

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{x_1}{y_n} + \sum_{1<k\leqslant m}\frac{y_k-y_{k-1}}{y_n}\varepsilon_k + \sum_{m<k\leqslant n}\frac{y_k-y_{k-1}}{y_n}\varepsilon_k.$$

При большом m вторая сумма мала для всех $n>m$, так как $\varepsilon_k \to 0$. При фиксированном m первая сумма мала, так как $y_n \to +\infty$.

Другое решение получим, если применим результат задачи 2.2 к последовательностям $a_n=y_n-y_{n-1}$ и $b_n=\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$ (вместо $\{x_n\}$).

2.7. Воспользуйтесь теоремой Штольца.

2.8. Воспользуйтесь теоремой Штольца. В примерах г) и д) используйте результат задачи I.2.14.

2.9. Для доказательства сходимости последовательности $\left\{\ln n - \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{k}\right\}$ воспользуйтесь тем, что сходимость последовательности $\{x_n\}$ равносильна сходимости ряда $\sum (x_n - x_{n-1})$. Возникающий при этом ряд сходится — это следует из легко проверяемого неравенства

$$0 < \frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{2k^2}.$$

Другое решение получим, если, пользуясь неравенством $0 < \frac{1}{[x]} - \frac{1}{x} < \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} < \frac{1}{(x-1)^2}$ при $x > 1$, заметим, что несобственный интеграл $\int\limits_2^\infty \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right) dx$ сходится; поэтому существует конечный предел последовательности

$$I_n = \int\limits_2^n \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \ln n + \ln 2.$$

2.10. Решение аналогично решению задачи 2.9.

2.11. Из формулы Стирлинга следует, что для доказательства правого неравенства достаточно убедиться в возрастании последовательности

$$x_n = \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n\, e^{1/12n}}.$$

Поскольку

$$\ln x_{n+1} - \ln x_n = 1 + \frac{1}{12n\,(n+1)} - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\frac{n+1}{n} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi\left(\frac{1}{n}\right),$$

где

$$\varphi(t) = \frac{2t}{2+t} + \frac{t^3}{6\,(1+t)\,(2+t)} - \ln(1+t),$$

то достаточно проверить, что $\varphi(t) > 0$ при $t > 0$, а это вытекает из равенств $\varphi(0) = 0$ и

$$\varphi'(t) = \frac{t^4}{6\,(1+t)^2\,(2+t)^2}.$$

Левое неравенство доказывается аналогично.

2.12—2.14. Решение аналогично решению задачи 2.9.

§ 3. Рекуррентные последовательности

3.1. По индукции докажите, что последовательность $\{x_n\}$ имеет вид $\{Aq^n + B\}$, и определите параметры A, B, q.

3.2. а) Так как

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{n}(x_{n-1} - x_{n-2}) = \ldots = \frac{x_0 - x_1}{n!}(-1)^n,$$

то

$$\lim x_n = x_0 + \sum_{n\geqslant 1}(x_n - x_{n-1}) =$$
$$= x_0 + (x_0 - x_1)\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n!} = x_0 + (x_0 - x_1)\left(\frac{1}{e} - 1\right).$$

3.3. Поскольку на каждом шаге происходит почти удвоение члена последовательности $\{x_n\}$, естественно рассмотреть последовательность $\{y_n\} = \left\{\frac{x_n}{2^n}\right\}$. Очевидно, что $y_{n+1} = \frac{n+1}{n} y_n - \frac{1}{2^{n+1}}$, т. е. $\frac{y_{n+1}}{n+1} - \frac{y_n}{n} = -\frac{2^{-(n+1)}}{n+1}$. Следовательно,

$$y_n = n\left(y_1 - \sum_{1<k\leqslant n}\frac{1}{k2^k}\right).$$

Отсюда получаем, что

$$x_n = n2^n\left(\frac{x_1}{2} + \frac{1}{2} - \ln 2 + \sum_{k>n}\frac{1}{k2^k}\right).$$

Поэтому $x_n \sim n2^{n-1}(x_1 - \ln(e/4))$ при $x_1 \neq \ln(e/4)$, а в противном случае

$$x_n = n2^n\sum_{k>n}\frac{1}{k2^k} = \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)2^k} \to 1.$$

3.4. Считая, что $b \neq 0$, рассмотрим последовательность $y_n = x_n/b^n$. Тогда $y_{n+1} = y_n + \alpha_n$, где $\alpha_n = a_n/b^{n+1}$. Ясно, что $y_{n+1} = y_1 + \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\alpha_k$. Если $|b| > 1$ и $S \neq 0$, то $x_{n+1}/b^{n+1} = y_{n+1} \to y_1 + \sum \alpha_k = S/b$, т. е. $x_{n+1} \sim Sb^n$. Если же $|b| > 1$ и $S = 0$, то

$$y_{n+1} = y_1 + \sum_{1\leqslant k\leqslant n}\alpha_k - \frac{S}{b} = -\sum_{k>n}\frac{a_k}{b^{k+1}} =$$
$$= -\sum_{k\geqslant 1}\frac{a_{n+k}}{b^{n+k+1}} \sim -\frac{a}{b^{n+1}}\sum\frac{1}{b^k} = \frac{1}{b^{n+1}}\cdot\frac{a}{1-b}.$$

Отсюда получаем утверждение б). Осталось рассмотреть случай, когда $0 < |b| < 1$. Имеем

$$y_{n+1} = y_1 + \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{a}{b^{k+1}} + \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{a_k - a}{b^{k+1}} = \frac{a + o(1)}{b^{n+1}(1-b)}.$$

Поэтому $x_{n+1} = b^{n+1}y_{n+1} \to \dfrac{a}{1-b}$.

3.5. Если $p \leqslant 0$, то последовательность $x_n = (p-1)^n$ не имеет предела, хотя $x_{n+1} = px_n + (1-p)x_{n-1}$. Если $p \geqslant 1$, то либо $x_{n+1} \geqslant x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, либо $x_{n+1} \leqslant x_n$ для $n \geqslant n_0$ (так как из неравенства $x_{n_0+1} \leqslant x_{n_0}$ следует, что $x_{n+1} \leqslant x_n$ для $n \geqslant n_0$).

Пусть $0 < p < 1$. Положим $l = \underline{\lim}\, x_n$, $L = \overline{\lim}\, x_n$. Поскольку последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху (числом $\max\{x_1;\ x_2\}$), то $L < +\infty$. Допустив, что $l < L$, зафиксируем два числа l' и L', $l < l' < L < L'$,— их выбор уточним позже. Тогда для всех достаточно больших n имеем $x_{n-1} < L'$. При этом можно так выбрать n, что $x_n < l'$, и, следовательно, $x_{n+1} < pl' + (1-p)L' = \lambda$. Так как $x_n < l' < \lambda$, то $x_{n+2} < \lambda$, $x_{n+3} < \lambda$, ... Поэтому $L = \overline{\lim}\, x_n \leqslant \lambda$, т. е. $L \leqslant pl' + (1-p)L'$. Но это неверно, если число l' выбрано достаточно близким к l, а L' — к L.

3.6. Поскольку последовательность $\{\ln x_n\}$ при $p \in (0;\ 2)$ имеет предел (см. предыдущую задачу), то достаточно доказать, что при таких значениях p последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Это очевидно, если $p \in (0;\ 1]$, так как в этом случае $x_n \leqslant \max\{x_1;\ x_2\}$. Если $p \in (1;\ 2)$, то перемножив неравенства $x_{n+1} \leqslant x_n^p x_{n-1}^{1-p}$ при $n = 2, 3, \ldots, N$, получим

$$x_{N+1} \leqslant x_1^{1-p} x_2 x_N^{p-1} = K x_N^{p-1}.$$

Следовательно,

$$x_{N+1} \leqslant K\left(Kx_{N-1}^{p-1}\right)^{p-1} \leqslant \ldots \leqslant K^{1+(p-1)+(p-1)^2+\ldots+(p-1)^N} \cdot x_1^{(p-1)^N}.$$

Отсюда следует ограниченность последовательности $\{x_n\}$ при $p \in (1;\ 2)$.

Если $p \notin (0;\ 2]$, то последовательность $\{\exp(p-1)^n\}$ расходится, хотя $x_{n+1} = x_n^p x_{n-1}^{1-p}$. При $p = 2$ можно взять последовательность $\{2^n\}$.

3.7. Докажите, что из неравенств $x_{n-1} \leqslant \dfrac{C}{(n-1)!}$ и $x_{n-2} \leqslant \dfrac{C}{(n-2)!}$ следует неравенство $x_n \leqslant \dfrac{C}{n!}$. Константу C подберите так, чтобы последнее неравенство выполнялось при $n = 1, 2$.

3.8. Доказательства этих утверждений аналогичны. Мы ограничимся случаем в). Зафиксируем $\beta \in (0;\ \alpha/k)$. По условию существует такое число $C = C_\beta > 0$, что $x_n \leqslant C \dfrac{x_{n-1} + \ldots + x_{n-k}}{e^{\alpha n}}$ для $n = k+1, k+2, \ldots$ Пусть $M > 0$ такое число, что $x_j \leqslant Me^{-\beta j^2/2}$ при $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Тогда $x_n \leqslant kCM \dfrac{e^{-\beta(n-k)^2/2}}{e^{\alpha n}}$. Поэтому $x_n \leqslant Me^{-\beta n^2/2}$, если $kC \leqslant \exp(n(\alpha - \beta k) + \beta k^2/2)$. Зафиксируем теперь столь большой номер n_β, что $kC \leqslant \exp(n(\alpha - \beta k) + \beta k^2/2)$ при $n \geqslant n_\beta$. Можно считать, что $n_\beta \geqslant k$. При достаточно большом $M = M_\beta$ для $n = 1, \ldots, n_\beta$ будет выполняться неравенство $x_n \leqslant Me^{-\beta n^2/2}$. Справедливость его для всех последующих номеров n обеспечивается выбором n_β.

3.9. Рассуждая так же, как при решении предыдущей задачи, получаем, что достаточно доказать, что $\beta(n-k)\ln A_{n-k} - (\beta n - 1)\ln A_n \to +\infty$. Положим для краткости $a_n = \ln A_n$. Зафиксируем число $\gamma > 0$, выбор которого уточним позже. Для достаточно больших номеров j имеем $j\left(1 - \dfrac{a_{j-1}}{a_j}\right) < \gamma$, т. е. $\dfrac{a_{j-1}}{a_j} > 1 - \dfrac{\gamma}{j}$. Следовательно,

$$\frac{a_{n-k}}{a_n} = \prod_{n-k < j \leqslant n} \frac{a_{j-1}}{a_j} > \prod_{n-k \leqslant j \leqslant n}\left(1 - \frac{\gamma}{j}\right) = 1 - \gamma\frac{k}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Таким образом, $a_{n-k} > a_n\left(1 - \gamma\dfrac{k}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$, и поэтому

$$\beta(n-k)a_{n-k} - (\beta n - 1)a_n \geqslant$$
$$\geqslant a_n(1 - \beta k(1+\gamma) + O(1/n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

если γ выбрано достаточно близким к числу 0.

3.10. Пусть $C > 0$ — такое число, что $x_m \leqslant \dfrac{Ce^{s_m}}{\sqrt[k]{A_1 \ldots A_m}}$ при $1 \leqslant m < n$, $n > k$. Тогда

$$x_n \leqslant \frac{C}{A_n}\left(\frac{e^{s_{n-1}}}{\sqrt[k]{A_1 \ldots A_{n-1}}} + \ldots + \frac{e^{s_{n-k}}}{\sqrt[k]{A_1 \ldots A_{n-k}}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{Ce^{s_{n-1}}}{\sqrt[k]{A_1 \ldots A_n}}\left(A_n^{\frac{1-n}{k}} + A_n^{\frac{2-n}{k}} + \ldots + A_n^{-\frac{1}{k}} + 1\right).$$

Поэтому

$$x_n \leqslant \frac{Ce^{s_n}}{\sqrt[k]{A_1 \ldots A_n}} \frac{1}{1 - A_n^{-1/k}} e^{-1/(A_n^{1/k}-1)} \leqslant \frac{Ce^{s_n}}{\sqrt[k]{A_1 \ldots A_n}}$$

(последнее неравенство вытекает из неравенства $e^t \geqslant 1 + t$). Выбрав множитель C столь большим, что $x_n \leqslant \dfrac{Ce^{s_n}}{\sqrt[k]{A_1 \ldots A_n}}$ при $n = 1, 2, \ldots, k$, получаем отсюда, что это неравенство выполняется для всех номеров n.

3.11. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи. В примере г) используйте результат задачи 2.14. б).

Глава III. ФУНКЦИИ

§ 1. Непрерывность и разрывы функций

1.2. ж) Рассмотрите, например, разрывную строго возрастающую функцию.

1.3. Пусть $\omega_f(x)$ — колебание функции f в точке x, т. е. $\omega_f(x) = \lim\limits_{\delta\to 0}\left(\sup\limits_{|y-x|<\delta} f(y) - \inf\limits_{|y-x|<\delta} f(y)\right)$, и пусть A — множество точек разрыва первого рода функции f. Ясно, что $A = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} A_n$, где $A_n = \{x \in A \mid \omega_f(x) \geqslant 1/n\}$. Если допустить, что множество A несчетно, то несчетным будет по крайней мере одно из множеств $\{A_n\}$, скажем, A_m. Пусть x_0 — неизолированная точка множества A_m (см. задачу I.1.23.а)), и пусть $\{x_k\} \subset A_m$, $x_k \to x_0$, $x_k \neq x_0$ $k \in \mathbb{N}$). Не умаляя общности, можно считать, что $x_k > x_0$ при любом $k \in \mathbb{N}$. Докажем, что функция f не имеет в точке x_0 предела справа. Действительно, так как $x_k \in A_m$, то найдутся такие точки x_k' и x_k'', что $|x_k' - x_k| < |x_k - x_0|$, $|x_k'' - x_k| < |x_k - x_0|$ и $|f(x_k') - f(x_k'')| > 1/(2m)$. Ясно, что $x_k' \to x_0$, $x_k'' \to x_0$. Таким образом,

$$\varlimsup_{x\to x_0+0} f(x) - \varliminf_{x\to x_0+0} f(x) \geqslant \varlimsup |f(x_k') - f(x_k'')| \geqslant 1/(2m) > 0.$$

Другое решение получим, если докажем счетность множеств $A_{\pm}^{\lessgtr}$, где

$$A_+^{>} = \{x \in E \mid \text{существует правосторонний предел } f(x+0) \text{ и } f(x+0) > f(x)\},$$

а множества $A_+^{<}$, $A_-^{<}$ и $A_-^{>}$ определяются аналогично. Для доказательства счетности множества $A_+^{>}$ сопоставим каждой точке

$x \in A_+^{>}$ прямоугольник $P_x = (x;\ x+\varepsilon) \times (l;\ L)$, где $f(x) < l < L < f(x+0)$, а $\varepsilon = \varepsilon_x > 0$ столь мало, что $f(t) > L$ для всех $t \in (x;\ x+\varepsilon)$. Легко видеть, что $P_x \cap P_y = \varnothing$, если $x, y \in A_+^{>}$ и $x \neq y$. Выбирая в каждом прямоугольнике P_x точку с рациональными координатами, получаем взаимно однозначное отображение множества $A_+^{>}$ в $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Аналогично доказывается счетность множеств $A_+^{<}$, $A_-^{<}$, $A_-^{>}$.

1.4. Рассмотрите функции φ и ψ:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ 1 & \text{при } x > 0; \end{cases} \qquad \psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Искомую функцию можно получить как сумму ряда, члены которого имеют вид $\lambda(\varphi(x-t) + \psi(x-s))$, где $t \in E_{\text{Л}}$, $s \in E_{\text{П}}$.

1.5. Предположим, что множество $D_{\text{П}}(f)$ не более чем счетно, и докажем счетность множества $D_{\text{Л}}(f)$. Пусть $\omega_f(x)$ — колебание функции f в точке x (см. решение задачи 1.3). Ясно, что $D_{\text{Л}}(f) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, где $A_k = \{x \in D_{\text{Л}}(f) \mid \omega_f(x) \geqslant 1/k\}$. Если допустить, что множество $D_{\text{Л}}(f)$ несчетно, то несчетным будет хотя бы одно из множеств $\{A_k\}$, скажем A_m, а вместе с ним и множество $A = A_m \setminus D_{\text{П}}(f)$. Пусть x_0 — такая точка множества A, что $(x_0;\ x_0+\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ при любом $\varepsilon > 0$. (См. задачу I.1.23, б).) Зафиксируем такую последовательность $\{x_n\} \subset A$, что $x_n \to x_0$, $x_n > x_0 (n \in \mathbb{N})$. Так как $x_n \in A$, то найдутся такие точки x_n', x_n'', что $x_0 < x_n' < x_n$, $x_0 < x_n'' < x_n$, $\left| f(x_n') - f(x_n'') \right| \geqslant 1/2m$. Пользуясь непрерывностью функции f в точке x_0 справа и переходя к пределу в последнем неравенстве, мы приходим к противоречию.

1.6. б) Допустим, что последовательность $\{f_n\}$ с указанными свойствами существует. Построим такую точку $c \in \mathbb{R}$, что последовательность $\{f_n(c)\}$ не сходится, и тем самым придем к противоречию.

Пусть Δ_0 — произвольный замкнутый промежуток, x_1 — произвольное рациональное число, принадлежащее внутренности Δ_0. Найдем такой номер n_1, что $\left| f_0(x_1) - f_{n_1}(x_1) \right| < 1/3$, т. е. $\left| 1 - f_{n_1}(x_1) \right| < 1/3$. Пользуясь непрерывностью функции f_{n_1}, зафиксируем такой замкнутый промежуток Δ_1 с центром в точке x_1, что $\Delta_1 \subset \Delta_0$ и $\left| 1 - f_{n_1}(x) \right| < 1/3$ для любого $x \in \Delta_1$. Пусть x_2 — иррациональное число, принадлежащее внутренности Δ_1. Найдем такой номер $n_2 > n_1$, что $\left| f_0(x_2) - f_{n_2}(x_2) \right| < 1/3$, т. е. $\left| f_{n_2}(x_2) \right| < 1/3$. Зафиксируем такой замкнутый промежуток Δ_2 с центром в точке x_2, что $\Delta_2 \subset \Delta_1$ и $\left| f_{n_2}(x) \right| < 1/3$ для любого $x \in \Delta_2$. Теперь берем произвольное рациональное число x_3, принадлежащее внутренности промежутка Δ_2, и повторяем проделанные построения, заменяя Δ_0 на Δ_2, а x_1 на x_3 и т. д. По индукции мы построим такую последовательность номеров $\{n_k\}$ и последовательность замкнутых вложенных промежутков $\{\Delta_k\}$, что $\left|1 - f_{n_{2l-1}}(x)\right| < 1/3$ при $x \in \Delta_{2l-1}$ и $\left|f_{n_{2l}}(x)\right| < 1/3$ при $x \in \Delta_{2l}$. Откуда следует, что $\left|f_{n_{2l-1}}(c) - f_{n_{2l}}(c)\right| \geqslant 1/3$ в точке $c \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_k$, и, следовательно, последовательность $\{f_n(c)\}$ не может иметь предела.

1.8. а) Рассмотрите функцию, равную единице на не более чем счетном подмножестве множества E, замыкание которого совпадает с E (см. задачу I.1.22. б)), и нулю в остальных точках.

б) Рассмотрите ряд $\sum 3^{-n}\varphi_n$, где φ_n — функция, построенная так, как описано в указании к п. а), для множества $E = E_n$.

1.9. Изучите функцию

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}, & \text{если в троичном разложении числа } x \in (0;\ 1) \\ & \text{содержится } n \text{ единиц } (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \\ 0, & \text{если в троичном разложении числа } x \in (0;\ 1) \\ & \text{содержится бесконечно много единиц.} \end{cases}$$

1.10. Докажите, что если $\varliminf\limits_{x \to x_0} f(x) < c < \varlimsup\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $c \neq f(x_0)$, то множество $f^{-1}(\{c\})$ не замкнуто.

1.11. Используйте результат предыдущей задачи.

1.12. Убедитесь в том, что не умаляя общности, можно считать, что функция f имеет в каждой точке множества E максимум. Рассмотрите множество

$$E_\varepsilon = \{x \in E \mid f(y) \leqslant f(x) \quad \text{при} \quad |x - y| < \varepsilon, \quad y \in E\}$$

(ε — фиксированное положительное число) и докажите, что функция f локально постоянна на E_ε. Воспользуйтесь результатом задачи I.1.22. а). Другое решение получим, если модифицируем рассуждения, проведенные во втором решении задачи 1.3.

Для сепарабельного метрического пространства приведенные соображения сохраняют силу. В случае несепарабельного пространства результат неверен. Для получения контрпримера рассмотрите не содержащее изолированных точек пространство $X \times S$, где X — отрезок с дискретной метрикой, $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ и функцию $f(x;\ z) = x$.

1.13. Используйте результат задачи 1.12.

1.14. а) Рассмотрите, например, функцию

$$f(x)=\begin{cases} 1-x & \text{при } -1<x\leqslant 0,\\ \dfrac{x^{-1}+[x^{-1}]}{1+x^{-1}+[x^{-1}]} & \text{при } \quad 0<x\leqslant 1,\\ \dfrac{1+(2-x)^{-1}+[(2-x)^{-1}]}{2+(2-x)^{-1}+[(2-x)^{-1}]} & \text{при } \quad 1<x<2 \end{cases}$$

и точку $c=0$.

1.15. Рассуждая от противного, докажите с помощью теоремы Больцано — Коши отсутствие взаимной однозначности.

1.16. а) Воспользуйтесь формулой конечных приращений на промежутке $[x;\ (1+\delta)x]$.

б) Считая, что $\varepsilon<1$, и рассуждая от противного, найдите такую последовательность $\{z_n\}$, что $z_n\to+\infty$ и

$$f^{-1}(\varepsilon z_n)\leqslant\frac{1}{1+\delta}f^{-1}(z_n),$$

где δ — некоторое положительное число. Используйте п. а).

1.17. Предположим, что предел $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ не существует. Тогда найдутся такие числа a и b, что $a<b$ и множества $G_a=\{x<0\,|\,f(x)<a\}$, $G_b=\{x>0\,|\,f(x)>b\}$ не ограничены. Пусть $x_0>0$ — такая точка, что каждое из множеств G_a и G_b содержит бесконечно много точек вида nx_0 $(n\in\mathbb{N})$ (см. задачу I.1.26). Поскольку последовательность $\{f(nx_0)\}$ не может иметь предела, мы приходим к противоречию.

1.18. Рассмотрите функцию

$$f(x)=\begin{cases} x_n, & \text{если} \quad x=\sqrt{p_n},\\ 0, & \text{если} \quad x\neq\sqrt{p_n} \quad \text{при любом } n\in\mathbb{N}, \end{cases}$$

где $\{p_n\}$ — последовательность простых чисел, а $\{x_n\}$ — последовательность, множество частичных пределов которой заполняет $\mathbb{R}$ (например, произвольным образом занумерованное множество $\mathbb{Q}$).

1.19. Рассмотрите разбиение множества $\mathbb{R}_+=(0;+\infty)$ на классы эквивалентности, считая, что $x\sim y$, если $x/y\in\mathbb{Q}$. Установив произвольным образом взаимно однозначное соответствие между множеством построенных таким способом классов эквивалентности и множеством $\mathbb{R}$, определите функцию f на $(0;\ +\infty)$ равенством $f(x)=t/(1+[x])$, где $t\in\mathbb{R}$ соответствует классу эквивалентности, содержащему x.

1.20. Докажите, что утверждение «$f(x+h)-f(x)\rightrightarrows 0$ при $x\to+\infty$ на любом конечном промежутке» равносильно утверждению: $\forall\varepsilon>0\,\exists a_\varepsilon,\ b_\varepsilon$:

$$a_\varepsilon<b_\varepsilon \quad \text{и} \quad \varlimsup_{x\to+\infty}\ \sup_{a_\varepsilon\leqslant h\leqslant b_\varepsilon}|f(x+h)-f(x)|\leqslant\varepsilon.$$

Последнее утверждение докажите, рассуждая от противного и строя такую последовательность вложенных сегментов $\{\Delta_n\}$ и числовую последовательность $\{x_n\}$, что $x_n \to +\infty$ и $|f(x_n+h) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon$ при $h \in \Delta_n$.

1.21. Докажите, что функция $\varphi(x) = f(x + 1/n) - f(x)$ принимает нулевое значение на промежутке $[0; 1 - 1/n]$. Если $\delta \neq 1/n$, $\delta > 0$, то рассмотрите функцию $f(x) = \varphi(x) - Ax$, где $\varphi \in C(\mathbb{R})$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = A \neq 0$, φ имеет период δ.

1.22. Докажите, что вместе с $f(x)$ указанным в условии задачи свойством обладает и функция $f(-x)$, и сведите задачу к случаям, когда функция f либо четна, либо нечетна. В первом случае убедитесь, что $f(x) \to f(0)$ при $x \to +\infty$, и выведите отсюда, что $f \equiv \text{const}$. В случае когда функция f нечетна, докажите, что $\frac{1}{n} f(nx) \to f(x)$ при любом $x \in \mathbb{R}$, и, опираясь на это, проверьте, что $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ при любом $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.23. Как и в предыдущей задаче, сведите вопрос к случаю, когда функция f либо четна, либо нечетна. Если f четна, то предположив, что $f(x_0) \neq f(0)$, рассмотрите последовательность $\{(-1)^n x_0\}$. Если функция f нечетна, то докажите, что $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, рассмотрев последовательно случаи $\lambda \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.24. а) Из равенства

$$(1+x)(1+x^2)\ldots\left(1+x^{2^n}\right)\ldots = (1-x)^{-1} \quad (|x| < 1)$$

следует, что $f(x)f(x^2) = (1-x)^{-1}$. Поэтому $f^2(x^2) \leqslant (1-x)^{-1} \leqslant f^2(x)$, т. е. $1 \leqslant \sqrt{1-x}\, f(x) \leqslant \sqrt{1+\sqrt{x}} \leqslant \sqrt{2}$.

б) Вычислив логарифмическую производную функции

$$F(x) = (1-x) f^2(x) = \prod_{k \geqslant 0} \frac{1+x^{4^k}}{1+x^{2\cdot 4^k}},$$

получим

$$x\frac{F'(x)}{F(x)} = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{2^n x^{2^n}}{1+x^{2^n}} = S(x) + \sum_{n \geqslant 7} (-1)^n \frac{2^n x^{2^n}}{1+x^{2^n}}.$$

Так как $\frac{t}{1+t} > \frac{2t^2}{1+t^2}$ при $t \in (0; \sqrt{2}-1)$, то при $x^{2^7} \in (0; \sqrt{2}-1)$ ряд $\sum\limits_{n \geqslant 7} (-1)^n 2^n \frac{x^{2^n}}{1+x^{2^n}}$ лейбницев и его сумма отрицательна. Непосредственные вычисления показывают, что $S(x) < 0$ при $0{,}93 < x < 0{,}945$.

в) По доказанному в п. б) найдутся такие точки s и t из промежутка $(\sqrt{2}-1;\ 1)$, что $s < t$, $F(s) > F(t)$. Положим $s_n = s^{4^{-n}}$, $t_n = t^{4^{-n}}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ Пользуясь тождеством $F(x) = \dfrac{1+x}{1+x^2} F(x^4)$ и убыванием функции $\dfrac{1+x}{1+x^2}$ на промежутке $(\sqrt{2}-1;\ 1)$, получаем неравенство

$$F(s_n) - F(t_n) = \frac{1+s_n}{1+s_n^2} F(s_{n-1}) - \frac{1+t_n}{1+t_n^2} F(t_{n-1}) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1+s_n}{1+s_n^2} (F(s_{n-1}) - F(t_{n-1})) \geqslant F(s_{n-1}) - F(t_{n-1}).$$

Таким образом, $F(s_n) - F(t_n) \geqslant F(s) - F(t) > 0$, хотя $s_n,\ t_n \to 1$.

1.25. Рассмотрите множество $Q = f^{-1}(K) \subset [0;\ 1]$, где $f = (\varphi;\ \psi)$ — кривая Пеано (см. задачу 4.5),

$$K = \{(x;\ y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y = 0,\ 1,\ 1/2,\ 1/3,\ \ldots\}.$$

Проверьте, что сужение $\varphi|_Q$ обладает требуемым свойством (используйте результат задачи 4.4. в)). Продолжите надлежащим образом функцию $\varphi|_Q$ с множества Q на $[0;\ 1]$.

1.26. При каждом $n \in \mathbb{N}$ и $x \in [0;\ 1]$ определите $f_n(x;\ y)$ линейной интерполяцией по узлам $y_k = k/n$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ со значениями $f(x;\ k/n)$.

1.27. Рассуждая от противного, видим, что $|f(a;\ y)| \geqslant C$ при $|y - b| < \varepsilon$ для некоторых $a,\ b \in \mathbb{R}$, $C > 0$, $\varepsilon > 0$. Пусть

$$E_k = \{y \in (b-\varepsilon;\ b+\varepsilon) \mid f(x;\ y) \geqslant C/2 \quad \text{при} \quad |x-a| \leqslant 1/k\}\ (k \in \mathbb{N}).$$

Покажите, что $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k = (b-\varepsilon;\ b+\varepsilon)$, и воспользуйтесь результатом задачи I.1.33. Докажите, что если замыкание множества E_m содержит интервал $(\alpha;\ \beta)$, то $f(x;\ y) \not\equiv 0$ в прямоугольнике $\left(a - \dfrac{1}{m};\ a + \dfrac{1}{m}\right) \times (\alpha;\ \beta)$.

§ 3. Непрерывные и дифференцируемые функции

3.1. Покажите, что интерполяционный полином P степени m для функции f, построенный по узлам $0,\ h,\ 2h,\ \ldots,\ mh$, совпадает с f во всех точках kh $(k \in \mathbb{Z})$. Выведите отсюда, что $P(t) = f(t)$ при $t = kh/2^n$ $(k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N})$.

3.2. Покажите, что $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, предполагая, что предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ существует. Существование последнего предела докажите, рассуждая от противного: если $\alpha = \underline{\lim}_{x\to+\infty} f(x) < \beta = \overline{\lim}_{x\to+\infty} f(x)$, то найдется такая последовательность $x_n \to +\infty$, что $f'(x_n) = 0$, $f(x_{2n-1}) \to \alpha$, $f(x_{2n}) \to \beta$.

Другое, предельно краткое, но не столь поучительное доказательство равенства $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ получим, применив к паре функций $e^x f(x)$ и e^x правило Лопиталя.

Для доказательства обратного утверждения покажите, что из соотношения $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\not\to} 0$ следует, ввиду равномерной непрерывности f', что функция f не удовлетворяет критерию Больцано — Коши на бесконечности.

3.3. Предполагая, что $f'(a) < 0 < f'(b)$, докажите, что наименьшее значение функции f достигается внутри промежутка $[a; b]$.

3.4. Воспользуйтесь результатами задач 3.3 и 1.10.

3.5. При проверке необходимости воспользуйтесь равномерной непрерывностью функции f' на промежутке $[a; b]$.

3.6. а) Предположим сначала, что $g(x) > 0$ при $x \in (a; b)$, и допустим, что найдутся такие точки $x_1, x_2 = (a; b)$, что $x_1 < x_2$ и $f(x_1) > f(x_2)$. Не умаляя общности можно считать, что $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = -1$. Пусть

$$\bar{x} = \sup\{x \in (x_1; x_2) \,|\, f(y) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad y \in (x_1; x_2)\}.$$

Существует такая последовательность $\{h_n\}$, что $h_n > 0$, $h_n \to 0$, $f(\bar{x} + h_n) < 0$. Поэтому $g(\bar{x}) = \lim \dfrac{f(\bar{x} + h_n) - f(\bar{x} - h_n)}{2h_n} \leqslant 0$, что невозможно. Следовательно, функция f возрастает. В общем случае следует рассмотреть функцию $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon x$, где ε — произвольное положительное число. Если $g \equiv 0$, то полученный уже результат следует применить к функциям f и $-f$.

б) Примените п. а) к функции $f - G$, где G — первообразная функции g.

3.7. Если функция f дифференцируема, то $g = f'$ и, следовательно, $f \in C^\infty((a; b))$. Продифференцировав тождество $f(x + h) - f(x - h) = 2hg(x)$ два раза по h, убедитесь, используя 3.6. а), в том, что $f'' \equiv \mathrm{const}$. Используя 3.6. б), мы видим, что этот результат сохранится, если функции f и g непрерывны на $(a; b)$. Если предполагать лишь непрерывность f, то результат становится неверным ($f(x) = |x|$, $g(x) = \operatorname{sign} x$).

3.8. Рассмотрите первообразную функцию φ, определенной равенством $\varphi(x) = \inf\{|x - y| \,|\, y \in F\}$ $(x \in \mathbb{R})$.

3.9. Для доказательства утверждения б) $\Rightarrow$ а) изучите множество $E_\varepsilon = \{x \in [0; 1] \,|\, |f(x) - f(0)| \leqslant \varepsilon x\}$, где ε — произвольное положительное число. Докажите, что $\sup(E_\varepsilon \cap (0; c)) = c$ при любом $c \in (0; 1)$. Из в) не следует а). Соответствующий контрпример можно получить, рассмотрев одну из координатных функций кривой Пеано, построенной в задаче 4.4, и воспользовавшись тем, что множество постоянства этой функции не имеет изолированных точек (см. утверждение г) этой задачи).

3.12. Оцените приращение функции f на участке монотонности. При $\alpha = 1$ полезно воспользоваться результатом предыдущей задачи. При $\alpha = 1$ $g'(0) = 2/\pi$.

3.13. а) См. указание к предыдущей задаче.

б) Оцените $f'(x)$.

в) Покажите, что $|f(x+h) - f(x)| = O(|f(x_0+h) - f(x_0)|)$, где x_0 — конец наименьшего из участков монотонности функции f, длины которых не меньше h.

3.14. Рассмотрите ряд с членами вида $\lambda_k f(x - a_k)$, где f — функция из предыдущей задачи с надлежащим образом выбранными параметрами.

3.15. Рассмотрите функции

$$f(x) = (\ln(2/x))^{-1}, \quad g(x) = e^{-1/x}\cos e^{1/x} \quad \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1,$$
$$f(0) = g(0) = 0.$$

3.16. Убедитесь в том, что

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| \leqslant \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \int_{-\pi}^{\pi} |\omega(z+h) - |z|^{-1/2}|\, dz,$$

где ω — 2π-периодическая функция, совпадающая с $|z|^{-1/2}$ на промежутке $[-\pi; \pi]$, и оцените интеграл в правой части неравенства.

3.17. При доказательстве непрерывности функции f используйте ее монотонность.

3.18. Зафиксировав $n \in \mathbb{N}$, оцените снизу длину ломаной с вершинами в точках $M_j = (j3^{-n}; f(j3^{-n}))$ $(j = 0, 1, \ldots, 3^n)$, рассмотрев суммы

$$\sum_{j3^{-n} \in K} \rho(M_j; M_{j+1}) \quad \text{и} \quad \sum_{j3^{-n} \notin K} \rho(M_j; M_{j+1}),$$

где K — канторово множество, ρ — метрика в $\mathbb{R}^2$.

3.19. Вычислите приращение канторовой функции на промежутке $[0; 3^{-n}]$.

§ 4. Непрерывные отображения

4.1. Докажите, что ограниченность последовательности $\{z_n\}$ равносильна ограниченности последовательности $\{P(z_n)\}$. Для произвольного многочлена от двух переменных (например, для $Q(x; y) = x$) это неверно. Проверьте, что $Q(F) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, где $F = \{(x; y) \,|\, xy \geqslant 1\}$ — замкнутое множество.

4.3. Для построения одного из возможных примеров рассмотрите двусторонние числовые последовательности $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и $\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, удовлетворяющие условиям $\ldots < y_{k-1} < x_k < y_k < \ldots$, $\inf x_k = 0$, $\sup x_k = 1$, и образуйте множества

$$A = \{0\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [x_k;\ y_k), \qquad B = \{1\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [y_k;\ x_{k+1}).$$

Искомый гомеоморфизм можно получить, отображая каждый промежуток $[x_k;\ y_k) \subset A$ на промежуток $[y_{-k};\ x_{-k+1}) \subset B$, а нуль — в единицу.

4.4. а) Корректность определения проверяется непосредственным вычислением φ и ψ в троично-рациональных точках. Непрерывность φ и ψ вытекает из совпадения любого наперед заданного числа первых цифр, получаемых при представлении в виде троичных дробей (без цифры 2 в периоде) достаточно близких точек $t, t' \in [0;\ 1]$.

б) Используя разложение чисел отрезка $[0;\ 1]$ в троичные дроби $0{,}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots = \sum \alpha_k 3^{-k}$, где $\alpha_k = 0$, 1 или 2, убедитесь в том, что если $\xi, \eta \in [0;\ 1]$, $\xi = 0{,}\beta_1\beta_2\beta_3\ldots$, $\eta = 0{,}\gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots$, то $\xi = \varphi(t)$, $\eta = \psi(t)$, где $t = 0{,}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, а цифры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ определяются последовательно следующим образом:

$$\alpha_1 = \beta_1,$$

$$\alpha_2 = \begin{cases} \gamma_1, & \text{если } \alpha_1 \text{ — четное число,} \\ 2 - \gamma_1, & \text{если } \alpha_1 \text{ — нечетное число, } \ldots; \end{cases}$$

$$\alpha_{2n-1} = \begin{cases} \beta_n, & \text{если } \alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2n-2} \text{ — четное число,} \\ 2 - \beta_n, & \text{если } \alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2n-2} \text{ — нечетное число;} \end{cases}$$

$$\alpha_{2n} = \begin{cases} \gamma_n, & \text{если } \alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2n-1} \text{ — четное число,} \\ 2 - \gamma_n, & \text{если } \alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2n-1} \text{ — нечетное число.} \end{cases}$$

в) Различные решения системы $\varphi(t) = \xi$, $\psi(t) = \eta$ могут получаться лишь из-за неединственности представления чисел $\xi, \eta \in [0;\ 1]$ в виде троичных дробей. Проверьте, что при

$$\xi = 2/9 = 0{,}02000\ldots = 0{,}01222\ldots \text{ и } \eta = 1/3 = 0{,}1000\ldots = 0{,}0222\ldots$$

система имеет четыре решения:

$$5/108 = 0{,}001020202\ldots,\quad 11/108 = 0{,}002202020\ldots,$$
$$13/108 = 0{,}010020202\ldots,\quad 19/108 = 0{,}011202020\ldots$$

г) Пусть $t = 0{,}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots \in \varphi^{-1}(\{c\})$. Если среди цифр α_{2k} бесконечно много четных, то заменяя α_{2k} при достаточно большом k на $2 - \alpha_{2k}$, получим точку из $\varphi^{-1}(\{c\})$, сколь угодно близкую к t. Если

$\alpha_{2k}=1$ при $k\geqslant k_0$, то следует рассмотреть точку ($k\geqslant k_0$)

$$0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k-1}0(2-\alpha_{2k+1})0\alpha_{2k+3}1\alpha_{2k+5}\ldots,$$

получающуюся из t заменой цифр $\alpha_{2k}=1$ и $\alpha_{2k+2}=1$ нулями, а α_{2k+1} — числом $2-\alpha_{2k+1}$. При рассмотрении множества $\psi^{-1}(\{c\})$ рассуждения аналогичны.

д) Докажем, что $\varphi\in\mathrm{Lip}_{1/2}([0;\ 1])$. Пусть $2<m\in\mathbb{N}$, $p=[m/2]$, $t,\ t'\in[0;\ 1]$, $t=0{,}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, $t'=0{,}\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3'\ldots$ и $3^{-m}\leqslant t-t'<3^{-m+1}$. Если $\alpha_1=\alpha_1',\ \ldots,\ \alpha_{m-1}=\alpha_{m-1}'$, то

$$\varphi(t)=0{,}\beta_1\beta_2\ldots\beta_p\beta_{p+1}\ldots,$$

$$\varphi(t')=0{,}\beta_1\beta_2\ldots\beta_p\beta_{p+1}'\ldots$$

и, следовательно, $|\varphi(t)-\varphi(t')|\leqslant 3^{-p}\leqslant\sqrt{3}\,|t'-t|^{1/2}$. Предположим теперь, что найдется такой номер $k\leqslant m-1$, что $\alpha_k\neq\alpha_k'$. Будем считать, что k — наименьший номер с этим свойством. Тогда, ввиду неравенств $3^{+m}\leqslant t-t'<3^{-m+1}$, разложения для t и t' должны иметь вид

$$t=0{,}\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k0\ldots0\alpha_m\alpha_{m+1}\ldots$$

и

$$t'=0{,}\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}(\alpha_k-1)2\ldots2\alpha_m'\alpha_{m+1}'\ldots$$

(если хоть одна из цифр $\alpha_{k+1},\ \ldots,\ \alpha_{m-1}$ не нуль или хоть одна из цифр $\alpha_{k+1}',\ \ldots,\ \alpha_{m-1}'$ меньше двух, то $t-t'\geqslant 3^{-m+1}$). Могут представиться следующие четыре случая:

1) $k=2l$ — четное число, $\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_k$ — четное число,

2) $k=2l$ — четное число, $\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_k$ — нечетное число,

3) $k=2l-1$ — нечетное число, $\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_k$ — четное число,

4) $k=2l-1$ — нечетное число, $\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_k$ — нечетное число.

В первом случае мы видим, что

$$\varphi(t)=0{,}\beta_1\beta_2\ldots\beta_l0\ldots0\beta_p\beta_{p+1}\ldots,$$

$$\varphi(t')=0{,}\beta_1\beta_2\ldots\beta_l0\ldots0\beta_p'\beta_{p+1}'\ldots$$

Следовательно,

$$|\varphi(t)-\varphi(t')|\leqslant 3\cdot 3^{-p}\leqslant 3\sqrt{3}\,|t'-t|^{1/2}.$$

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

4.5. Пусть $\varepsilon>0$, $N=1+[1/\varepsilon]$. Точки $t_k=k/N$ ($k=1,\ \ldots,\ N$) образуют ε-сеть для отрезка $[0;\ 1]$. Проверьте, что точки $(u(t_k),\ v(t_k))$ образуют δ-сеть для квадрата $[0;\ 1]\times[0;\ 1]$, где $\delta\leqslant C\varepsilon^\alpha$. Докажите, что число точек δ-сети для квадрата не меньше, чем $C_0\delta^{-2}$.

4.6. Пусть Ξ — множество всех двоичных последовательностей и

$$\{\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n} \mid n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0;\ 1\}\},$$

$$\{\widetilde{\Delta}_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n} \mid n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0;\ 1\}\}$$

— семейства, с помощью которых определяются обобщенные канторовы множества K и $\widetilde{K}$ (см. задачу I.1.31). Определим отображения $\varphi\colon \Xi \to K$, $\widetilde{\varphi}\colon \Xi \to \widetilde{K}$ равенствами

$$\varphi(\varepsilon) = t, \text{ где } t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n},$$

$$\widetilde{\varphi}(\varepsilon) = \widetilde{t}, \quad \text{где } \widetilde{t} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \widetilde{\Delta}_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}$$

($\varepsilon = \{\varepsilon_k\} \in \Xi$). Докажите, что φ и $\widetilde{\varphi}$ являются биекциями, а $f = \widetilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ — гомеоморфное отображение K на $\widetilde{K}$.

§ 5. Функциональные уравнения

5.2. в) Из утверждения а) следует, что функция f не линейна и, следовательно, $f(x_0) \neq x_0 f(1)$ для некоторого $x_0 \in \mathbb{R}$. Это неравенство равносильно линейной независимости векторов

$$e' = (1;\ f(1)) \text{ и } e'' = (x_0;\ f(x_0)).$$

Поэтому множество $\{se' + te'' \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ совпадает с $\mathbb{R}^2$, а множество $\{se' + te'' \mid s, t \in \mathbb{Q}\}$ плотно в $\mathbb{R}^2$. Осталось заметить, что точки $se' + te''$ принадлежат графику функции f при любых рациональных s и t (это следует из утверждения а)).

5.3. Примените результат предыдущей задачи к функции $g(x) = f(e^x)$.

5.4. Убедитесь в том, что $f(1) = f(-1) = 0$, и докажите, что функция f нечетна. Рассмотрите функцию $g(x) = \frac{1}{x} f(x)$ $(x > 0)$ и используйте рассуждения, проведенные при решении задачи 5.3.

5.5. Используйте результат задачи 5.2.

5.6. Докажите последовательно, что $f(0) = 0$, $f(x^n) = (f(x))^n$ и $f(x + y) = f(x) + f(y)$ при $x, \in \mathbb{R}$. Используя равенство $f((rx + y)^n) = (rf(x) + y)^n$, где $r \in \mathbb{Q}$, убедитесь в том, что $f(x^2) = \pm(f(x))^2$ при любом $x \in \mathbb{R}$; воспользуйтесь результатом задачи 5.2.

5.7. С помощью индукции докажите, что

$$\left| \sum_{1 \leqslant k \leqslant p} f(x_k) - f\left(\sum_{1 \leqslant k \leqslant p} x_k\right) \right| \leqslant \sigma(p-1) \qquad (p \in \mathbb{N}). \qquad (*)$$

Выведите отсюда, что отношение $\frac{f(\pm n)}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ ограничено. Зафиксируем такие строго возрастающие последовательности $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ и $\{m_k\} \subset \mathbb{N}$, что существуют пределы $A = \lim \frac{f(n_k)}{n_k}$ и $B = \lim \frac{f(-m_k)}{-m_k}$. Докажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = A$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = B$. Для любого $\varepsilon > 0$ зафиксируем такой номер n_k, что $\sigma/n_k < \varepsilon$ и $\left|\frac{f(n_k)}{n_k} - A\right| < \varepsilon$. Пусть $x > 0$, $p = [x/n_k]$. Тогда $x = pn_k + s$, $0 \leqslant s < n_k$. Из неравенства $(*)$ следует, что справедливо $|pf(n_k) + f(s) - f(x)| \leqslant \sigma p$, и поэтому

$$\left|\frac{p}{pn_k + s} f(n_k) + \frac{f(s)}{x} - \frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{\sigma p}{x} < \varepsilon.$$

Для достаточно больших x из последнего неравенства вытекает, что $\left|\frac{f(x)}{x} - A\right| < 3\varepsilon$. Аналогично доказывается, что $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} B$. Переходя к пределу при $x \to +\infty$ в неравенстве

$$\left|\frac{f(2x)}{x} + \frac{f(-x)}{x} - \frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{\sigma}{x},$$

мы убеждаемся в том, что $A = B$. Рассмотрим теперь функцию $\tilde{f}(x) = f(x) - Ax$ и проверим, что $|\tilde{f}(x)| \leqslant \sigma$ при любом $x \in \mathbb{R}$. В самом деле, ясно, что $\tilde{f}(x)/x \to 0$ при $x \to \infty$ и, как и функция f, $\tilde{f}$ удовлетворяет неравенству $(*)$. Поэтому $\left|\tilde{f}(x) - \frac{\tilde{f}(nx)}{n}\right| \leqslant \sigma$ при любых $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Считая, что $x \neq 0$ и переходя в последнем неравенстве к пределу, мы получаем требуемое.

Заметим, что оценку для функции $\tilde{f}$ улучшить нельзя. В этом можно убедиться на примере функции $f(x) = \max(1 - |x|;\ 0)$.

5.8. Убедитесь в том, что $f(0) = 0$ и функция f четная. Докажем, что если $f \not\equiv 0$, то $f(x) \neq 0$ при $x \neq 0$. Для этого проверим, что если $f(a) \neq 0$ $(a > 0)$, то $f(x) \neq 0$ на $(0;\ a)$. В самом деле, пусть это не так и пусть c — наибольший корень функции f на интервале $(0;\ a)$. Тогда $f(c/2^n) = 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$ и поэтому $f(c\sqrt{1 + 2^{-2n}}) = f(c) + f(c/2^n) = 0$. Так как $c\sqrt{1 + 2^{-2n}} \in (c;\ a)$ при достаточно большом n, то мы приходим к противоречию с выбором числа c. Заметим еще, что число a можно выбрать сколь угодно большим, поскольку $f(2^n a) = 4^n f(a) \neq 0$. Итак, $f(x) \neq 0$ при $x \neq 0$. Будем считать, что $f(1) = 1$ и рассмотрим множество $A = \{x > 0 \mid f(x) = x^2\}$. Проверьте, что его замыкание совпадает с $[0;\ +\infty)$ (см. задачу I.1.21).

5.9. Докажите, что $f(0) = 1$ и что функция f — четная. Убедитесь в том, что если $f(x_0) = 0$, то $f(t) = 0$ при $|t| \geqslant |x_0|$. Выведите отсюда, что $f(x)>0$ при любом $x\in\mathbb{R}$. Проверьте, что функция $g(x)=\ln f(x)$ $(x\in\mathbb{R})$ удовлетворяет условию предыдущей задачи.

5.10. Докажите, что функция $g(x)=f(e^x)$ является суммой линейной и периодической функций.

5.11. а) Рассмотрите функции $\psi(x)=\varphi(x)/\ln x$ $(x\in(0;\ 1))$ и $H(u)=\psi\left(e^{-e^u}\right)$ $(u\in\mathbb{R})$.

б) Проверьте, что $0\leqslant f\leqslant 1$ и что если $f(x_0)=0$ $(f(x_0)=1)$ в некоторой точке $x_0\in(0;\ 1)$, то $f\equiv 0$ $(f\equiv 1)$. Считая, что $0<f<1$ в $(0;\ 1)$, докажите, что $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=1$ и что f строго возрастает. Рассмотрите функцию $g(t)=\ln|\ln f(e^{-t})|$ и воспользуйтесь результатом задачи 5.10.

5.12. Предполагая, что искомая функция h нечетна, убедитесь в том, что функция $\varphi(t)=\ln\left(h\left(e^t\right)\right)$ $(t\in\mathbb{R})$ строго возрастает и удовлетворяет уравнению $\varphi(2t)=4\varphi(t)$. Найдите решение этого уравнения.

5.13. Проверьте, что $f(0)=0$, $f(1)=1$. При $z\neq 0$ рассмотрите функцию $g(z)=\dfrac{f(z)}{f(|z|)}$ и, пользуясь взаимной однозначностью g на каждой окружности $|z|=r$, последовательно докажите, что при $r\in(0;\ 1]$

$$g(r)=1,\quad g(-r)=-1,\quad g(ir)=\pm i,\quad g(re^{i\pi/4})=e^{\pm i\pi/4},\ \text{и т. д.}$$

Выведите отсюда, что функция $g(z)$ совпадает либо с $z/|z|$, либо с $\bar{z}/|z|$. Докажите, что функция $h(t)=|f(t)|$ возрастает на $(0;\ 1)$. Представьте $f(t)$ в виде $h(t)e^{i\varphi(t)}$ и воспользуйтесь результатом задачи 5.11.

5.14. Докажите последовательно, что $f(0)=0$, $f(1)=1$ (и, следовательно, функция f возрастает), $f(1/2)=1/2$, $f(x)=1/2$ при $x\in[1/3,\ 2/3]$. С помощью индукции убедитесь в том, что на интервалах, дополнительных к канторову множеству, функция f совпадает с канторовой функцией (см. задачу 3.17).

5.15. Докажите последовательно, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\equiv\text{const},$$

$$f(x;\ y)=Axy+g(x)+g(y),\quad g''\equiv\text{const}.$$

5.16. Проверьте, что если $f(a)=f(b)$ при $|a|\neq|b|$ и функция g существует, то $f(t)=f(ct)$ при некотором c, $|c|<1$ и любом $t\in\mathbb{R}$. Выведите отсюда, что $f\equiv\text{const}$.

5.17. а) Проверьте, что при каждом $\xi\in S^1$ отображение φ_ξ: $\mathbb{Z}\to S^1$, определяемое равенством $\varphi_\xi(k)=\xi^k$, является характером. Докажите, что каждый характер φ имеет вид φ_ξ, где $\xi=\varphi(1)$.

5.18. а) Проверьте, что при каждом $t \in \mathbb{R}$ отображение φ_t: $\mathbb{R} \to S^1$, определяемое равенством $\varphi_t(x) = e^{itx}$ $(x \in \mathbb{R})$, является характером. Если φ — произвольный непрерывный характер, то при $n \geqslant N$ справедливо неравенство $\operatorname{Re} \varphi(2^{-n}) > 0$. Пусть $\varphi(2^{-N}) = e^{i\theta_0}$, $|\theta_0| < \pi$, $\theta = 2^N\theta_0$. Проверьте, что $\varphi(2^{-n}) = e^{i\theta 2^{-n}}$ при любом $n \in \mathbb{N}$, и докажите, что $\varphi = \varphi_\theta$.

б)—г) Используйте а) и аналогию с задачей 5.16. б).

д) Проверьте, что при каждом $n \in \mathbb{Z}$ отображение φ_n: $S^1 \to S^1$, определяемое равенством $\varphi_n(\xi) = \xi^n$ $(\xi \in S^1)$, является характером. Чтобы доказать, что каждый характер φ имеет такой вид, изучите множество $\varphi^{-1}(\{1\})$. Докажите, что оно конечно, если $\varphi \not\equiv 1$, и что для некоторого $m \in \mathbb{N}$ и любого $\xi \in \varphi^{-1}(\{1\})$ справедливо равенство $\xi^m = 1$. Докажите, что если $n \in \mathbb{N}$ — наименьшее из таких m, то $\varphi = \varphi_n$ или $\varphi = \varphi_{-n}$.

е) Используйте изоморфность групп $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}$.

ж) Используйте изоморфность групп $\dot{\mathbb{C}}$ и $\mathbb{R}_+ \times S^1$.

5.19. а) См. задачу 5.2.

б) Рассмотрите $\ln \varphi(x)$.

в) Рассмотрите $\varphi(e^x)$.

г) Рассмотрите $\ln \varphi(e^x)$.

д) См. задачу 5.18. а).

е) Используйте изоморфность групп $\dot{\mathbb{C}}$ и $\mathbb{R}_+ \times S^1$. Докажите, что если φ: $S^1 \to \mathbb{R}_+$ — непрерывный гомоморфизм, то $\varphi \equiv 1$. Используйте п. г) и результат задачи 5.18. ж).

Глава IV. РЯДЫ

§ 1. Сходимость

1.1. Найдите число тех номеров $n \in [10^N; 10^{N+1})$, у которых в десятичной записи нет цифры 9, и оцените сверху сумму

$$\sum_{10^N \leqslant n < 10^{N+1}} \frac{\varepsilon_n}{n}.$$

1.2. а), б) Рассмотрите числители соседних слагаемых и покажите, что они не могут быть одновременно близкими к нулю.

в) Достаточно доказать, что расходится ряд

$$\sum \frac{1}{n} \left(|\sin (n-1)^2| + |\sin n^2| + |\sin (n+1)^2| \right).$$

Для этого покажем, что числитель ограничен снизу положительным числом. Действительно, если это не так, то для сколь угодно больших номеров n имеем $n^2 = \pi k + \varepsilon$, $(n-1)^2 = \pi k' + \varepsilon'$, $(n+1)^2 = \pi k'' + \varepsilon''$, где $k, k', k'' \in \mathbb{Z}$ и $|\varepsilon|, |\varepsilon'|, |\varepsilon''| < 1/4$. Поэтому $2 = (n-1)^2 - 2n^2 + (n+1)^2 = \pi(k' + k'' - 2k) + \varepsilon' + \varepsilon'' - 2\varepsilon$, что невозможно.

1.3. При $a \leqslant 1$ рассмотрите суммы $\sigma_m = \sum\limits_{n \in N_m} n^{-a} \cos(b \ln n)$, где

$$N_m = \{n \in \mathbb{N} \mid 2\pi m \leqslant b \ln n \leqslant 2\pi m + \pi/4\},$$

и покажите, что $\sigma_m \not\to 0$.

1.4. а) Отдельно рассмотрите случаи $p > 1$ и $0 < p < 1$.

б) Для изучения сумм $\sum\limits_{m^2 \leqslant n < (m+1)^2} (-1)^m n^{-p}$ воспользуйтесь результатом задачи VI.3.13 при $1/2 < p \leqslant 1$.

в) Используйте соотношение $\arccos x \sim \sqrt{2(1-x)}$ при $x \to 1 - 0$.

1.5. а) Очевидно, что $\tau(n) \leqslant 2\sqrt{n}$.

б) Используйте результат задачи I.2.5. б).

в) Воспользуйтесь равенством $\varphi(p_n) = p_n - 1$.

г) Докажем более общее утверждение: если $a_n > 0$, $a_n \uparrow$ и $\sum \frac{1}{a_n} = +\infty$, то $\sum \frac{1}{A_n - A_{n-1}} = +\infty$, где $A_n = na_n$ $(A_0 = 0)$. Положим

$$\sigma_m = 2^{-m} \sum_{2^m < n \leqslant 2^{m+1}} \frac{1}{A_n - A_{n-1}}.$$

Так как среднее гармоническое не превосходит среднего арифметического, то

$$\frac{1}{\sigma_m} \leqslant \frac{1}{2^m} \sum_{2^m < n \leqslant 2^{m+1}} (A_n - A_{n-1}) = \frac{1}{2^m}\left(A_{2^{m+1}} - A_{2^m}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-m} A_{2^{m+1}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{2^m < n \leqslant 2^{m+1}} \frac{1}{A_n - A_{n-1}} \geqslant \frac{2^{2m}}{A_{2^{m+1}}} = \frac{1}{4} \frac{2^{m+1}}{a_{2^{m+1}}}.$$

Поэтому

$$\sum \frac{1}{A_n - A_{n-1}} \sum_{m \geqslant 0} \sum_{2^m < n \leqslant 2^{m+1}} \frac{1}{A_n - A_{n-1}} \geqslant \frac{1}{4} \sum_{m \geqslant 0} \frac{2^{m+1}}{a_{2^{m+1}}} = +\infty$$

(последний ряд расходится по теореме Коши — см. задачу 2.2. а)).

1.6. Пусть

$$\alpha_n = \min_{m \in \mathbb{N}} \left| \sqrt{2} - \frac{m}{n} \right|.$$

Так как $\alpha_n < \frac{1}{2n}$, то надо показать, что

$$\sum \frac{1}{\alpha_n n^{1+\alpha}} < +\infty.$$

Положим

$$N_m = \{n \in \mathbb{N} \mid C_{m-1} n^{-2} \leqslant \alpha_n < C_m n^{-2}\},$$

где $C_0 = 1/4$ и $C_m \uparrow +\infty$ (выбор последовательности $\{C_m\}$ уточним позже). Так как $\alpha_n > C_0 n^{-2}$ (см. задачу I.3.11. а)), то $\mathbb{N} = \bigcup N_m$. Пусть $N_m = \{n_1;\ n_2;\ \ldots\}$. Поскольку $C_{m-1} \frac{1}{n_1^2} \leqslant \alpha_{n_1} < \frac{1}{2n_1}$, то $n_1 > 2C_{m-1}$. Используя результат задачи I.3.11. б), получаем, что

$$n_{j+1} > n_1 \left(1 + \frac{1}{8C_m}\right)^j > 2C_{m-1} \left(1 + \frac{1}{8C_m}\right)^j.$$

Следовательно,

$$s_m = \sum_{n \in N_m} \frac{1}{\alpha_n n^{1+a}} \leqslant \frac{1}{C_{m-1}} \sum_{n \in N_m} \frac{1}{n^{a-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{(2C_{m-1})^a} \sum_{j \geqslant 0} \left(1 + \frac{1}{8C_m}\right)^{j(1-a)} \leqslant \mathrm{const}\, C_m (C_{m-1})^{-a}.$$

Взяв $C_m = 2^{m-2}$, получим

$$\sum \frac{1}{\alpha_n n^{1+a}} = \sum s_m \leqslant \mathrm{const} \sum 2^{m(1-a)} < +\infty.$$

1.7. Вместо двойных рядов удобно рассматривать суммы вида $\sum_{m \geqslant 1} \left(\sum_{1 \leqslant n \leqslant m} \ldots \right)$. В примерах д) и ж) рассмотрите такую сумму, распространенную лишь на простые значения m, и воспользуйтесь результатом задачи 1.5. б).

е) Воспользуйтесь неравенством

$$\sum_{\text{НОД}(m;n)=l} \frac{\text{НОД}(m;\, n)}{n^3 + m^3} \leqslant \sum_{k,j \geqslant 1} \frac{l}{(lk)^3 + (lj)^3}.$$

а) Примените равенство НОК$(n;\ m)$НОД$(n,\ m) = nm$ и прием, использованный при решении задачи е).

1.8. Каждая дробь $\frac{1}{2^n}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ встречается в ряде 2^n раз со знаком (+) и 2^n раз со знаком (—). Искомую перестановку получим, умножив ряд на (—1).

§ 2. Свойства числовых рядов, связанные с монотонностью

2.1. Если $a_n/a_{n+1} \not\to 1$, то ряд расходится. Пусть $a_n/a_{n+1} \to 1$. Так как $\arccos x \sim \sqrt{2(1-x)}$ при $x \to 1-0$, то данный ряд сходится одновременно с рядом $\sum\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$, а последний — одновременно с рядом

$$\sum \ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{N\to\infty} \ln\left(\frac{a_1}{a_N}\right).$$

2.2. а) Используйте неравенства $2^m a_{2^{m+1}} \leqslant \sum\limits_{2^m<n\leqslant 2^{m+1}} a_n \leqslant$ $\leqslant 2^m a_{2^m}$.

б), в) Воспользуйтесь утверждением а).

2.3. Для доказательства соотношения $a_n = o(1/n)$ воспользуйтесь результатом задачи 2.2. а).

2.4. Для доказательства соотношения $a_n = o(1/\ln n)$ воспользуйтесь результатами задач 2.2. а) и 2.3.

2.5. Используя результат задачи 2.3, покажите, что $a_n^p = o\left(n^{-1/p}a_n^{p-1}\right)$. Для немонотонной последовательности утверждение неверно; контрпримером является последовательность $a_n = 1$ при $n = 2^k$, $a_n = 0$ при $n \neq 2^k$.

2.6. а) Пусть $\sigma_m = \sum\limits_{1\leqslant n\leqslant m} x_n a_n$ $(\sigma_0 = 0)$. За счет изменения x_1 можно считать, что $\sigma_m \to 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $|\sigma_m| < \varepsilon$ при $m > M$ $(M \in \mathbb{N})$. Тогда, положив $\sigma = \max\limits_{m\in\mathbb{N}} |\sigma_m|$, получим

$$a_m\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant m} x_n\right| = a_m\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant m}\frac{\sigma_n-\sigma_{n-1}}{a_n}\right| =$$

$$= a_m\left|\frac{\sigma_m}{a_m} + \sum_{1\leqslant n<m}\sigma_n\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + a_m\sigma\sum_{1\leqslant n<M}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right) + \varepsilon a_m\sum_{M\leqslant n<m}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \sigma\frac{a_m}{a_M} + \varepsilon.$$

Так как $a_m \to 0$, то $\overline{\lim}\, a_m \left| \sum_{1\leqslant n\leqslant m} x_n \right| \leqslant 2\varepsilon$. Отсюда, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, следует требуемое утверждение.

Для немонотонной последовательности $\{a_n\}$ утверждение неверно; соответствующий контрпример легко построить, взяв $x_n = 1$ при $n \in \mathbb{N}$.

б) Выделим подпоследовательность номеров $\{n_k\}$ так, что $a_{n_k}/a_{n_{k-1}} \leqslant 1/2$, и положим $x_n = 1/(ka_{n_k})$ при $n = n_k$ и $x_n = 0$ при $n \neq n_k$. Ясно, что $\sum a_n x_n = \sum (1/k) = +\infty$. Пусть $n_k \leqslant m < n_{k+1}$. Тогда

$$a_m \sum_{1\leqslant n\leqslant m} x_n \leqslant a_{n_k} \sum_{1\leqslant n\leqslant m} x_n = a_{n_k} \sum_{1\leqslant j\leqslant k} \frac{1}{ja_{n_j}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant k} \frac{1}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-j} \to 0.$$

Чтобы доказать утверждение б) для немонотонной последовательности $\{a_n\}$, следует выделить такую подпоследовательность $\{a_{p_n}\}$, что $a_{p_n} = \max\limits_{j\geqslant p_n} a_j$, и повторить для нее приведенное выше рассуждение.

2.7. Примените преобразование Абеля к ряду $\sum\limits_{k\geqslant n} a_k x_k = \sum\limits_{k\geqslant n} a_k (r_k - r_{k+1})$, где $r_k = \sum\limits_{j\geqslant k} x_j$, и воспользуйтесь тем, что $\sup\limits_{j\geqslant n} r_j \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2.8. а) $\Leftrightarrow$ б) Так как

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-p} = \sum_{k\geqslant 1} \left(\sum_{k^q < n \leqslant (k+1)^q} a_n n^{-p} \right),$$

то достаточно доказать, что ряды

$$\sum\nolimits_{\mathrm{I}} = \sum_{k\geqslant 1} k^{-pq} \left(A_{(k+1)^q} - A_{k^q}\right) \text{ и } \sum\nolimits_{\mathrm{II}} = \sum_{k\geqslant 1} k^{-(1+pq)} A_{k^q}$$

сходятся или расходятся одновременно. Применяя к ряду $\sum_{\mathrm{I}}$ преобразование Абеля, получаем, что это утверждение равносильно соотношению $A_{n^q} = o(n^{pq})$. Из сходимости ряда $\sum_{\mathrm{I}}$ это соотношение вытекает в силу результата задачи 2.6. а). Если же сходится ряд $\sum_{\mathrm{II}}$, то

$$\sum_{n/2\leqslant m\leqslant n} m^{-(1+pq)} A_{m^q} \to 0,$$

и поэтому $n^{-pq} A_{n^q} \to 0$.

Утверждение а) $\Leftrightarrow$ в) доказывается аналогично.

2.9. Воспользуйтесь преобразованием Абеля. Ряд $\sum\left(|x_n|/n^{1+\varepsilon}\right)$ расходится, например, при $x_n = (-1)^n\sqrt{n}$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$. Ряд $\sum(x_n/n)$ расходится, если $x_n = 1/\ln(1+n)$.

2.10. Нетрудно построить такие положительные, но не монотонные последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$, что $\sum\alpha_n = \sum\beta_n = +\infty$ и $\sum\min(\alpha_n; \beta_n) < +\infty$. Требуемые монотонные ряды получим, если рассмотрим ряды

$$\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{n_2} + \ldots + \frac{\alpha_2}{n_2} + \ldots + \frac{\alpha_k}{n_k} + \ldots + \frac{\alpha_k}{n_k} + \ldots$$

и

$$\beta_1 + \frac{\beta_2}{n_2} + \ldots + \frac{\beta_2}{n_2} + \ldots + \frac{\beta_k}{n_k} + \ldots + \frac{\beta_k}{n_k} + \ldots$$

(слагаемые вида $\frac{\alpha_k}{n_k}$ и $\frac{\beta_k}{n_k}$ повторяются n_k раз) при подходящем выборе последовательности $\{n_k\}$.

2.11. а) Так как $\sum\frac{a_n}{S_n} = \sum\left(1 - \frac{S_{n-1}}{S_n}\right)$ $(S_0 = 0)$, то ряд расходится, если $\frac{S_{n-1}}{S_n} \not\to 1$. Если же $\frac{S_{n-1}}{S_n} \to 1$, то расходимость следует из расходимости ряда $\sum\limits_{n\geqslant 2}\ln(S_{n-1}/S_n) = \lim\ln(S_1/S_N) = -\infty$.

б) Сравните данный ряд с рядом $\sum\left(S_{n-1}^{-\varepsilon} - S_n^{-\varepsilon}\right)$.

2.12. в) Воспользуйтесь неравенством $a_n e^{-\alpha_n} \leqslant \int\limits_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_n} e^{-t}\,dt$.

г) Рассмотрите контрпример $a_n = 2^{-n!}$.

2.13. а) Воспользуйтесь неравенством

$$\sum a_n \leqslant 2\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{a_n}{n^2}\sum_{1\leqslant k\leqslant n} k\right) = 2\sum_{k\geqslant 1}\left(k\sum_{n\geqslant k}\frac{a_n}{n^2}\right).$$

Внутреннюю сумму оцените с помощью неравенства Гёльдера.

б) Примените утверждение а) к остатку ряда $\sum\limits_{k\geqslant 1} a_k^q$.

2.14. Рассмотрим сначала случай $a > 0$. Положим $\alpha_n = a_n - a$. Ясно, что исходный ряд сходится одновременно с рядом $\sum\frac{\alpha_{n-1} - \alpha_n}{\ln(a + \alpha_n)}$. Если $a \neq 1$, то этот ряд сходится, а если $a = 1$, то он расходится, так как расходится ряд $\sum\frac{\alpha_{n-1} - \alpha_n}{\alpha_n}$ (см. задачу

2.12. a)). Пусть теперь $a_n \downarrow 0$. Можно считать, что $a_n < 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Из расходимости ряда $\sum \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} - 1\right)$ следует, что расходится ряд

$$\sum \frac{\frac{a_{n-1}}{a_n} - 1}{\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (a_{k-1}/a_k) - n}.$$

Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, получаем, что ряд

$$\sum \frac{1}{n} \frac{\frac{a_{n-1}}{a_n} - 1}{1 - \sqrt[n]{a_n}}$$

расходится.

Если $a_n \to +\infty$, то рассматриваемый ряд может сходиться (например, $a_n = n^n$) и расходиться (например, $a_n = 2^n$).

2.15. Заметим, что из сходимости каждого из рядов вытекает, что $x/f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ (для доказательства оцените снизу суммы $\sum\limits_{n \leqslant m < 2n}$). Ряд

$$\sum \frac{1}{n^2} f^{-1}(n) = \sum_{k \geqslant 1} \left(\sum_{k < f^{-1}(n) \leqslant k+1} \frac{1}{n^2} f^{-1}(n) \right)$$

сходится одновременно с рядом

$$\sum_{k \geqslant 1} k \left(\sum_{f(k) < n \leqslant f(k+1)} \frac{1}{n(n+1)} \right) = \\ = \sum_{k \geqslant 1} k \left(\frac{1}{1 + [f(k)]} - \frac{1}{1 + [f(k+1)]} \right).$$

Используя преобразование Абеля и соотношение $x/f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, получаем, что этот ряд сходится одновременно с рядом $\sum \frac{1}{1 + [f(k)]}$, т. е. одновременно с рядом $\sum \frac{1}{f(k)}$.

2.16. Положим $S_n = a_1 + \ldots + a_n$, $S_0 = 0$. Если $\sum f(n) < +\infty$, то $\int\limits_0^\infty f(t)\,dt < +\infty$. Следовательно,

$$\sum a_n f(S_n) \leqslant \sum \int\limits_{S_{n-1}}^{S_n} f(t)\,dt = \int\limits_0^{+\infty} f(t)\,dt < +\infty.$$

Если же $\sum f(n) = +\infty$, то $\int\limits_0^{\infty} f(t)\,dt = +\infty$. Разбивая этот интеграл на сумму интегралов по промежуткам $[S_{n-1}; S_n]$, получаем, что ряд $\sum a_n f(S_{n-1})$ расходится. Поэтому расходится и ряд $\sum a_n f(S_n)$ — для доказательства достаточно заметить, что ряд $\sum a_n (f(S_n) - f(S_{n-1}))$ сходится (это следует из ограниченности последовательности $\{a_n\}$).

2.17. а) $\Rightarrow$ б) Если $a_{n_0} > \sum\limits_{n>n_0} a_n$ для некоторого номера n_0, то $\alpha = \sum\limits_{n \ne n_0} a_n < \beta = \sum\limits_{1 \leqslant n \leqslant n_0} a_n$. Легко видеть, что суммы всех частичных рядов не попадают в интервал (α, β).

б) $\Rightarrow$ а) Зафиксировав число $s \in (0; A]$, постройте с помощью индукции такую последовательность номеров $\nu = \{n_1; n_2; \ldots\}$, что $n_k = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n > n_{k-1},\ a_{n_1} + \ldots + a_{n_{k-1}} + a_n \leqslant s\}$. Проверьте, что $A(\nu) = s$.

2.18. Рассмотрите ряд $\sum 2/3^n$.

2.19. Возьмем n_k наименьшими из возможных, т. е. $n_1 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n < 1\}$ и $n_k = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n > n_{k-1},\ a_n < 1/k\}$ при $k \geqslant 2$. Предположим, что $\sum\limits_{k \geqslant 1} a_{n_k} < +\infty$. Тогда $a_{n_k} = o(1/k)$. Следовательно, существует такой номер N, что $a_{n_k} < 1/(k+1)$ при $k \geqslant N$. Тогда в силу определения последовательности $\{n_k\}$ имеем $n_{k+1} = 1 + n_k$ для всех $k \geqslant N$. Поэтому достаточно далекие остатки рядов $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n$ и $\sum\limits_{k \geqslant 1} a_{n_k}$ совпадают, что несовместимо с условием задачи.

Для немонотонных последовательностей утверждение неверно. Следующий пример предложен А. А. Шульманом.

Рассмотрим последовательность $\{x_k\}$, где $x_k = \dfrac{1}{n^2(2^n - k)}$, если $2^{n-1} \leqslant k < 2^n$. Ясно, что $x_k \to 0$. Кроме того, ряд $\sum x_k$ расходится:

$$\sum x_k = \sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{2^{n-1} \leqslant k < 2^n} \frac{1}{2^n - k} \right) = \sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{1 \leqslant j \leqslant 2^{n-1}} \frac{1}{j} \right) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{1 \leqslant j \leqslant 2^{n-1}} \ln\left(1 + \frac{1}{j}\right) \right) \geqslant \sum_{n \geqslant 1} \frac{n-1}{n^2} \ln 2 = +\infty.$$

Рассмотрим теперь такую последовательность номеров $\{k_j\}$, что $x_{k_j} < 1/j$ при $j \in \mathbb{N}$. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ положим

$$P_n = \{j \in \mathbb{N} \mid 2^{n-1} \leqslant k_j < 2^n\}.$$

Пусть

$$m=\operatorname{card} P_n,\quad M=\max P_n,\quad \mu=2^n-k_M=\min_{j\in P_n}\left(2^n-k_j\right).$$

Тогда

$$\sum_{j\in P_n} x_{k_j}=\frac{1}{n^2}\sum_{j\in P_n}\frac{1}{2^n-k_j}\leqslant\frac{1}{n^2}\sum_{\mu\leqslant j<\mu+m}\frac{1}{j}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{n^2}\sum_{\mu\leqslant j<\mu+m}\ln\left(1+\frac{1}{j}\right)=\frac{2}{n^2}\ln\left(1+\frac{m}{\mu}\right).$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{m}>\frac{1}{M}>x_{k_M}=\frac{1}{n^2\left(2^n-k_M\right)}=\frac{1}{n^2\mu},$$

поэтому $n^2>m/\mu$, и следовательно

$$\sum_{j\in P_n} x_{k_j}\leqslant\frac{2}{n^2}\ln\left(1+n^2\right).$$

Таким образом,

$$\sum_{j\geqslant 1} x_{k_j}=\sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{j\in P_n} x_{k_j}\right)\leqslant\sum\frac{2}{n^2}\ln\left(1+n^2\right)<+\infty.$$

2.20. а) Если $a_n\geqslant 0$, то можно воспользоваться результатом задачи 2.12. б). В общем случае возьмем две последовательности $\varepsilon_k\downarrow 0$ и $\mu_k\uparrow+\infty$ такие, что $\sum\varepsilon_k\mu_k<+\infty$. По последовательности $\{\varepsilon_k\}$ посмотрим такую последовательность номеров $N_k\uparrow+\infty$, что $\left|\sum_{m<j\leqslant n} a_j\right|<\varepsilon_k$ при $n>m>N_k$. Положим $\lambda_j=\mu_k$, если $N_k<j\leqslant N_{k+1}$. Тогда при $N_k<m\leqslant N_{k+1}$ имеем:

$$\left|\sum_{m<j\leqslant n}\lambda_j a_j\right|\leqslant\left|\sum_{m<j\leqslant N_{k+1}}\lambda_j a_j\right|+\left|\sum_{N_{k+1}<j\leqslant N_{k+2}}\lambda_j a_j\right|+\ldots\leqslant$$

$$\leqslant\mu_k\varepsilon_k+\mu_{k+1}\varepsilon_{k+1}+\ldots\to 0.$$

б) Рассмотрите контрпример $\lambda_n=\left(1+(-1)^n\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)^{-1}\ln n$, $a_n\lambda_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Если же $\lambda_n\uparrow+\infty$, то ряд $\sum\lambda_n a_n$ расходится, так как в противном случае по признаку Дирихле сходился бы ряд $\sum a_n$.

2.21. а) Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, получаем

$$\sum_{N\leqslant n<M}\frac{1}{n}\frac{1+t_{n+1}}{t_n}>\frac{1}{M}\sum_{N\leqslant n<M}\frac{1+t_{n+1}}{1+t_n}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{M-N}{M}\left(\frac{1+t_M}{1+t_N}\right)^{1/(M-N)}\geqslant\frac{M-N}{M}(1+t_N)^{1/(N-M)}.$$

Поэтому $\sum\limits_{N\leqslant n<M}\frac{1}{n}\frac{1+t_{n+1}}{t_n}\geqslant\frac{1}{2}$ для достаточно больших $M\in\mathbb{N}$.

б) С помощью результата задачи I.2.8. в) оцените снизу частичные суммы ряда $\sum a_n\frac{1+t_{n+1}}{1+t_n}$.

§ 3. Различные утверждения о рядах

3.1. Например, $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$. Если же $a_n>0$, то $\sum\left(a_n+\frac{1}{n^2a_n}\right)\geqslant$ $\geqslant\sum\frac{2}{n}=+\infty$.

3.2. Например, $\sum\frac{\cos\left(\frac{2}{3}\pi n\right)}{\ln(1+n)}$. Для больших показателей степени удобно рассматривать ряды вида $\sum\frac{\exp(2\pi in/(2m+1))}{\ln(1+n)}$.

3.3. а) Зафиксировав параметр $\lambda>1$ (выбор его уточним позже), разобьем сумму $\sum(a_n)^{1-1/n}$ на две: в первой суммирование распространено на те номера n, для которых $a_n\geqslant\lambda^{-n}$, а во второй — на остальные. Легко видеть, что первая сумма не превосходит $\lambda\sum a_n$, а вторая — $\sum\lambda^{1-n}$. Минимизируя величину $\frac{\lambda}{\lambda-1}+$ $+\lambda\sum a_n$ по всем $\lambda>1$, получаем, что $\sum(a_n)^{1-1/n}\leqslant\left(1+\sqrt{\sum a_n}\right)^2$.

б) Оцените сверху сумму тех слагаемых, для которых $a_n\leqslant n^{-3}$.

3.4. Положим $b_n=a_n/\ln(1/a_n)$. Тогда $\ln b_n\sim\ln a_n$ и, следовательно, $a_n\sim b_n\ln(1/b_n)$. По условию $\sum b_n<+\infty$, откуда с помощью результата задачи 3.3. б) получаем, что $\sum\limits_{n>1}\frac{b_n}{\ln n}\ln\frac{1}{b_n}<+\infty$, и поэтому $\sum\limits_{n>1}\frac{a_n}{\ln n}<+\infty$.

Обратное утверждение неверно — рассмотрите последовательность $\{a_n\}$ такую, что $a_n=1/2$ при $n=2^{k^2}$ и $\sum a_n/\ln(1+n)<+\infty$.

Если же $a_n \downarrow 0$, то из сходимости ряда $\sum a_n/\ln(1+n)$ получаем, что $a_n/\ln(1+n) = o(1/n)$, откуда следует, что $a_n/\ln(1/a_n) = O(a_n/\ln n)$.

3.5. Из результата задачи 2.6. а) следует $\frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n) \to 0$. Остается воспользоваться результатом задачи II.2.4. б).

3.6. б) $\Rightarrow$ а) Можно считать, что $a_n \geqslant 0$. Допустив, что $\sum a_n = +\infty$, построим такую последовательность $\{n_k\}$ плотности 0, что ряд $\sum a_{n_k}$ расходится. Поскольку по крайней мере один из рядов $\sum a_{2m}$ и $\sum a_{2m+1}$ расходится, то существует множество $N_1 \subset \mathbb{N}$ плотности 1/2 такое, что $\sum\limits_{n \in N_1} a_n = +\infty$. Поэтому $\sum\limits_{n \in N_1 \cap [1; P_1]} a_n \geqslant 1$ для достаточно большого $P_1 \in \mathbb{N}$. Аналогично строятся множество $N_2 \subset N_1$ плотности 1/4 и номер $P_2 > P_1$ такие, что $\sum\limits_{n \in N_2} a_n = +\infty$ и $\sum\limits_{n \in N_2 \cap (P_1; P_2]} a_n \geqslant 1$. По индукции построим последовательность вложенных множеств $\{N_j\}$ и строго возрастающую последовательность номеров $\{P_j\}$ таких, что плотность N_j равна 2^{-j} и $\sum\limits_{n \in N_j \cap (P_{j-1}; P_j]} a_n \geqslant 1$. Искомую последовательность $\{n_1; n_2; \ldots\}$ получим, занумеровав в порядке возрастания элементы множества $A = \bigcup\limits_{j \geqslant 1} (N_j \cap (P_{j-1}; P_j])$. Плотность $\theta(A)$ множества A равна нулю, так как $\theta(A) \leqslant \theta(N_j) = 2^{-j}$ для любого $j \in \mathbb{N}$.

3.7. Зафиксировав номер m и положительное число ε, проверим, что $|a_m| < \varepsilon$. Пусть M — такой номер, что $\sum\limits_{n \geqslant M} |a_n| < \varepsilon$. Поскольку $a_{lm} + a_{2lm} + a_{3lm} + \ldots = 0$ для любого $l = 2, 3, \ldots$, то из равенства $a_m + a_{2m} + a_{3m} + \ldots = 0$ следует, что для некоторого множества $N \subset \{M; M+1; \ldots\}$ справедливо равенство $a_m + \sum\limits_{n \in N} a_n = 0$. Следовательно, $|a_m| \leqslant \sum\limits_{n \in N} |a_n| < \varepsilon$.

3.8. Допустим, что $\sum |a_n| = +\infty$. Пусть $\sum\limits_{n_k < n \leqslant n_{k+1}} |a_n| \geqslant k$ $(k \in \mathbb{N})$. Положим $t_n = \frac{1}{k}$ sign a_n, если $n_k < n \leqslant n_{k+1}$. Тогда $t_n \to 0$ и, очевидно, $\sum t_n a_n = +\infty$.

3.9. а) $\Rightarrow$ б). Для доказательства сходимости ряда $\Sigma \lambda_n a_n$ воспользуйтесь преобразованием Абеля.

б) $\Rightarrow$ а) Допустим, что $\sum |\lambda_n - \lambda_{n+1}| = +\infty$. Пусть $S_n = \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |\lambda_k - \lambda_{k+1}|$. Тогда $\sum \frac{1}{S_n} |\lambda_n - \lambda_{n+1}| = +\infty$ (см. задачу

2.11. а)). Следовательно, $\sum \alpha_n(\lambda_n - \lambda_{n+1}) = +\infty$, где $\alpha_n = \frac{1}{S_n}\operatorname{sign}(\lambda_n - \lambda_{n+1})$. Используя преобразования Абеля, получаем, что $\sum(\alpha_n - \alpha_{n-1})\lambda_n = +\infty$, хотя ряд $\sum(\alpha_n - \alpha_{n-1})$ сходится.

3.10. Достаточно рассмотреть случай $\varphi(+0) = 0$. Для оценки суммы $\sum \varphi(\varepsilon n) a_n$ разбейте ее на две: $\sum\limits_{1 \leqslant n \leqslant N}$ и $\sum\limits_{n > N}$. Используя преобразование Абеля, покажите, что вторая сумма мала для всех $\varepsilon > 0$, если N достаточно велико.

3.11. В последовательности $\{1/n\}$ переставьте члены при $2^{k-1} < n \leqslant 2^k$ в порядке возрастания.

3.12. В последовательности $\{1/n\}$ переставьте члены при $(k-1)! < n \leqslant k!$ в порядке возрастания.

3.13. а) $\Leftrightarrow$ в) Неравенство $A_n \leqslant C a_n = C(A_n - A_{n-1})$ равносильно неравенству $A_{n-1} \leqslant \left(1 - \frac{1}{C}\right) A_n$. Аналогично доказывается, что б) $\Leftrightarrow$ г).

а) и в) $\Rightarrow$ б):

$$a_n \alpha_n \leqslant A_n \sum_{k \geqslant n} \frac{1}{a_k} \leqslant C \sum_{k \geqslant n} \frac{A_n}{A_k} \leqslant C \sum_{k \geqslant n} q_1^{k-n} = \frac{C}{1 - q_1}.$$

б) и г) $\Rightarrow$ а):

$$\frac{A_n}{a_n} \leqslant \alpha_n \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k \leqslant C \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{\alpha_n}{\alpha_k} \leqslant C \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} q_2^{n-k} \leqslant \frac{C}{1 - q_2}.$$

Таким образом, первые четыре утверждения равносильны. Докажем теперь, что а) $\Rightarrow$ ж): так как $\frac{a_n}{a_{n+L}} \leqslant C \frac{A_n}{A_{n+L}} \leqslant C q_1^L$, то $\frac{a_n}{a_{n+L}} \leqslant \frac{1}{Q}$ для достаточно большого номера L. Утверждение ж) $\Rightarrow$ а) очевидно, если $a_n \uparrow$. Пример последовательности $2, 3, 2^2, 3^2, 2^3, 3^3, \ldots$ показывает, что оно неверно для немонотонных последовательностей.

Осталось доказать, что а) $\Leftrightarrow$ д) и б $\Leftrightarrow$ е). Докажем первое утверждение (второе доказывается аналогично). Достаточно доказать, что а $\Rightarrow$ д) (обратное утверждение получим, если применим это утверждение к последовательности $\{\tilde{a}_n\} = \{a_n^p\}$). Так как а) $\Rightarrow$ ж), то

$$a_1^p + \ldots + a_n^p = O\left(a_{n-L+1}^p + \ldots + a_n^p\right) = O\left((a_{n-L+1} + \ldots + a_n)^p\right) = \\ = O\left(A_n^p\right) = O\left(a_n^p\right).$$

3.14. Решение аналогично решению предыдущей задачи.

3.15. а) Положим $\alpha_n = \frac{p}{p-1} a_n A_n^{p-1} - A_n^p$ и докажем, что $\sum\limits_{1 \leqslant n \leqslant N} \alpha_n \geqslant 0$ для всех $N \in \mathbb{N}$. Так как $a_n = nA_n - (n-1)A_{n-1}$ (считаем, что $A_0 = 0$), то

$$\alpha_n = \left(\frac{np}{p-1} - 1\right) A_n^p - \frac{p(n-1)}{p-1} A_{n-1} A_n^{p-1}.$$

Из неравенства

$$A_{n-1} A_n^{p-1} \leqslant \left(1 - \frac{1}{p}\right) A_n^p + \frac{1}{p} A_{n-1}^p$$

(его легко установить, исследуя на минимум функцию $\varphi(x) = \left(1 - \frac{1}{p}\right) A_n^p + \frac{1}{p} x^p - A_n^{p-1} x$ при $x \geqslant 0$) следует, что

$$\alpha_n \geqslant \frac{1}{p-1} \left(nA_n^p - (n-1) A_{n-1}^p\right).$$

Таким образом,

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \left(\frac{p}{p-1} a_n A_n^{p-1} - A_n^p\right) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \alpha_n \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \frac{1}{p-1} \left(nA_n^p - (n-1) A_{n-1}^p\right) = \frac{NA_N^p}{p-1} \geqslant 0,$$

т. е.

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} A_n^p \leqslant \frac{p}{p-1} \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} a_n A_n^{p-1}$$

для всех $N \in \mathbb{N}$.

б) Используя неравенство Гёльдера (задача VII.1.29), из неравенства а) получаем $\sum A_n^p \leqslant \frac{p}{p-1} \left(\sum a_n^p\right)^{1/p} \left(\sum A_n^p\right)^{1-1/p}$, откуда следует, что $\sum A_n^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum a_n^p$ — неравенство Харди — Ландау.

3.16. Расходимость ряда $\sum \frac{1}{n} (a_1 + \ldots + a_n)$ следует из неравенства $\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \frac{a_1}{n}$ и расходимости гармонического ряда. Для доказательства сходимости ряда $\sum \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$ заметим, что при $p > 1$ $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leqslant \left(\frac{a_1^{1/p} + \ldots + a_n^{1/p}}{n}\right)^p$ (см. задачу VII.1.30).

Из неравенства Харди — Ландау (см. задачу 3.15, б)) вытекает, что

$$\sum \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum a_n.$$

Устремляя p к бесконечности, получаем неравенство Карлемана:

$$\sum \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leqslant e \sum a_n.$$

3.17. Утверждения а) $\Rightarrow$ б) и б $\Rightarrow$ в) очевидны. Докажем, что в) $\Rightarrow$ а). Допустим противное: существует такая последовательность $a_n \to 0$, что $|f(a_n)/a_n| \to +\infty$. Не умаляя общности можно считать, что $0 < a_n < 1/2n^2$ и $\lambda_n = f(a_n)/a_n > n$. Рассмотрим ряд, полученный из ряда $\sum a_n$ повторением каждого слагаемого P_n раз, $P_n = [1/n^2 a_n]$. Этот ряд сходится: $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant P_n} a_n\right) = \sum a_n P_n \leqslant \sum (1/n^2)$. Однако ряд, составленный из значений функции f, расходится:

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant P_n} f(a_n)\right) = \sum P_n f(a_n) = \sum P_n \lambda_n a_n \geqslant \frac{1}{2}\sum \frac{\lambda_n}{n^2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\sum \frac{1}{n} = +\infty.$$

3.18. Докажем сначала, что в некоторой окрестности нуля функция f нечетна. Допустим противное. Тогда существует такая последовательность $a_n \to 0$, что $f(a_n) + f(-a_n) = \Delta_n \neq 0$. Возьмем последовательность $\{P_n\} \subset \mathbb{N}$ такую, что $P_n \Delta_n \not\to 0$. Тогда ряд, полученный из ряда $a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + \ldots$ повторением n-й пары членов P_n раз, сходится. Однако ряд, составленный из значений функции f, расходится, так как $P_n \Delta_n \not\to 0$.

Ясно, что функция f непрерывна в нуле (см. задачу 3.17). Докажем, что f непрерывна в некоторой окрестности нуля. Допустим противное: существует такая последовательность точек разрыва $\{a_n\}$, что $a_n \to 0$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется такое число $\varepsilon_n > 0$, что

$$\sup_{|t-a_n|<\delta} |f(a_n) - f(t)| > \varepsilon_n$$

для любого $\delta > 0$. Возьмем такие последовательности $\{P_n\} \subset \mathbb{N}$ и $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$, что $P_n \varepsilon_n \not\to 0$, $|f(a_n) - f(t_n)| > \varepsilon_n$ и $\sum P_n |a_n - t_n| < +\infty$. Ряд, полученный из ряда $a_1 - t_1 + a_2 - t_2 + \ldots$ повторением P_n раз пары $a_n - t_n$, сходится, а ряд из соответствующих значений функции f расходится, так как

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant P_n} (f(a_n) - f(t_n))\right) = \sum P_n (f(a_n)) - f(t_n)),$$

$$P_n |f(a_n) - f(t_n)| \geqslant P_n \varepsilon_n \not\to 0.$$

Итак, функция f непрерывна и нечетна в некоторой окрестности нуля.

Докажем теперь, что в некоторой окрестности нуля $f(x+h)+f(x-h)=2f(x)$. Если это не так, то найдутся последовательности $x_n\to 0$ и $h_n\to 0$, для которых

$$f(x_n+h_n)+f(x_n-h_n)-2f(x_n)=\Delta_n\neq 0.$$

Возьмем такую последовательность номеров $P_n\uparrow+\infty$, что $P_n\Delta_n\not\to 0$. Ряд, полученный из ряда

$$(x_1+h_1)+(x_1-h_1)-x_1-x_1+\ldots+(x_n+h_n)+\\+(x_n-h_n)-x_n-x_n+\ldots$$

повторением P_n раз каждой группы слагаемых $(x_n+h_n)+(x_n-h_n)-x_n-x_n$, очевидно, сходится. Однако ряд, составленный из соответствующих значений функции f, расходится, так как

$$P_n(f(x_n+h_n)+f(x_n-h_n)-2f(x_n))=P_n\Delta_n\not\to 0.$$

Итак, в некотором промежутке $[-\delta;\ \delta]$ функция f нечетна, непрерывна и удовлетворяет равенству

$$f(a)+f(b)=2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

при $|a|,\ |b|\leqslant\delta$. Следовательно (см. задачу III.5.2), функция f линейна на $[-\delta;\ \delta]$.

3.19. Очевидно, что если $\{q_n\}$ — требуемая последовательность, то числа $r_m=x-\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant m}q_k2^{-k}$ $(r_0=x)$ удовлетворяют неравенству $0<r_m<2^{-m}$. Поэтому, подбирая число q_{m+1} (после того как числа $q_1,\ldots,q_m$ уже найдены), необходимо добиваться выполнения неравенства $0<r_m-2^{-m-1}q_{m+1}<2^{-m-1}$, т. е. неравенства

$$2^{m+1}r_m-1<q_{m+1}<2^{m+1}r_m. \qquad (*)$$

Ясно, что выполнение этого неравенства для всех $m\in\mathbb{N}$ достаточно для соотношения $r_m\to 0$, т. е. для равенства $x=\sum q_k2^{-k}$. Нетрудно проверить, что если неравенство $(*)$ выполнено для некоторого номера, то оно будет выполнено и для предыдущего номера, а следовательно, и для всех предыдущих номеров.

Последовательность $\{q_n\}$ будем строить по индукции. При этом можно считать, что множество Q уже как-то занумеровано. Поэтому можно говорить о первом элементе в любом его непустом подмножестве.

В качестве q_1 возьмем первый элемент из Q, удовлетворяющий неравенству $(*)$ при $m=0$, т. е. $2x-1<q_1<2x$. Из условий $\inf Q=0$, $\sup Q=1$ следует, что такие элементы существуют.

Допустим, что числа $q_1, \ldots, q_n$ уже построены и неравенство $(*)$ выполнено при $m = 0, \ldots, n-1$. Пусть q — первый элемент в множестве $Q\setminus\{q_1; \ldots; q_n\}$. Если $q \in (2^{n+1}r_n - 1;\ 2^{n+1}r_n)$, то положим $q_{n+1} = q$. Неравенство $(*)$ будет выполнено при $m = n$. Если $q \notin (2^{n+1}r_n - 1;\ 2^{n+1}r_n)$, то рассмотрим два случая:

а) $q \geqslant 2^{n+1}r_n$; б) $q \leqslant 2^{n+1}r_n - 1$.

В случае а) положим $M = [\log_2(q/r_n)]$. Тогда $r_n 2^M \leqslant q < r_n 2^{M+1}$. В частности, $M > n$. Подберем числа $q_{n+1}, \ldots, q_M$ из $Q\setminus\{q_1; \ldots; q_n\}$ столь малыми, что

$$r_M = r_n - (q_{n+1}2^{-n-1} + \ldots + q_M 2^{-M}) > 2^{-M-1}\sqrt{q}.$$

Взяв $q_{M+1} = q$, получим, что $r_M > 2^{-M-1}q_{M+1}$ и $2^{M+1}r_M - 1 < 2^{M+1}r_n - 1 < q_{M+1}$, т. е. число q_{M+1} удовлетворяет неравенству $(*)$ при $m = M$, значит, $(*)$ выполнено при $m = 0, 1, \ldots, M$.

В случае б) рассмотрим первый номер $M > n$, для которого $r_n - (2^{-n-1} + \ldots + 2^{-M}) < (q+1)2^{-M-1}$. Такой номер существует, так как при $M \to +\infty$ левая часть стремится к $r_n - 2^{-n} = r_{n-1} - (q_n + 1)2^{-n} < 0$ (см. неравенство $(*)$ при $m = n-1$). Подберем теперь числа $q_{n+1}, \ldots, q_M$ из $Q\setminus\{q_1; \ldots; q_n\}$ столь близкими к единице, что

$$r_M = r_n - \left(q_{n+1}2^{-n-1} + \ldots + q_M 2^{-M}\right) < \frac{q+1}{2^{1+M}}.$$

Взяв $q_{M+1} = q$, получим $2^{M+1}r_M - 1 < q_{M+1}$. По выбору числа M имеем

$$(1 + q_{M+1})2^{-M} \leqslant r_n - (2^{-n-1} + \ldots + 2^{-M+1}) < r_{M-1},$$

т. е.

$$q_{M+1} < -1 + 2^M r_{M-1} = -1 + q_M + 2^M r_M < 2^{M+1}r_{M+1}.$$

Таким образом, неравенство $(*)$ выполнено при $m = M$, а следовательно, и при $m = 0, 1, \ldots, M$.

§ 4. Вычисление сумм рядов

4.1. Воспользуйтесь равенством $3\sin\varphi - \sin 3\varphi = 4\sin^3\varphi$.

4.2. Воспользуйтесь равенством $3\cos\varphi + \cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi$.

4.3. Воспользуйтесь равенством

$$\left(C_{1+n}^{1+r}\right)^{-1} = \frac{r+1}{r}\left(\left(C_{n+r-1}^{r}\right)^{-1} - \left(C_{n+r}^{r}\right)^{-1}\right).$$

4.4. Воспользуйтесь равенством $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t\,dt = (2n)!!/(2n+1)!!$.

4.5. Рассмотрите частичные суммы S_{nm}.

4.6. Воспользуйтесь результатом задачи VII.1.22. в).

4.7. Измените порядок суммирования.

4.8. Покажите, что

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant 2N}(-1)^n\frac{\ln n}{n}=\ln 2\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\frac{1}{n}-\sum_{N<n\leqslant 2N}\frac{1}{n}\ln n,$$

и замените суммы на соответствующие асимптотические выражения (см. задачи II.2.9 и II.2.13. а)).

4.9. Покажите, что

$$\sum_{1\leqslant n<2^N}\frac{(-1)^n}{n}[\log_2 n]=-\sum_{1\leqslant k<N}\sigma_k+(N-1)\sigma_N,$$

где

$$\sigma_k=\sum_{1\leqslant j<2^k}\frac{(-1)^j}{j},$$

и, преобразовав σ_k к виду $\sigma_k=-\sum\limits_{2^{k-1}\leqslant j<2^k}\frac{1}{j}$, воспользуйтесь асимптотикой частичных сумм гармонического ряда.

4.10. Сведите интегрирование в каждом интеграле к промежутку $[2\pi;+\infty)$. Чтобы обосновать перемену порядка суммирования и интегрирования, представьте интеграл $\int\limits_{2\pi}^{+\infty}\frac{\sin nx}{x}\,dx$ в виде $\int\limits_{2\pi}^{2\pi N}\frac{\sin nx}{x}\,dx+O\left(\frac{1}{nN}\right)$, где $N\in\mathbb{N}$. Затем воспользуйтесь результатами задач 6.16, 6.8. а) и формулой Стирлинга.

4.11. Решение аналогично решению предыдущей задачи.

4.12. Обозначим правую часть доказываемого равенства через I_N. Достаточно доказать, что $I_{N-1}-I_N=\frac{1}{N^2}$ и $I_N\to 0$. Для доказательства первого утверждения воспользуйтесь известным равенством $\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2N}t\,dt=\frac{\pi}{2}\,\frac{(2N-1)!!}{(2N)!!}$ и двукратным интегрированием по частям. Для доказательства второго утверждения заметим, что

$$I_N=\frac{4}{\pi}\,\frac{(2N)!!}{(2N-1)!!}\left(\int\limits_0^{\varepsilon}+\int\limits_{\varepsilon}^{\pi/2}\right)\leqslant 2\varepsilon^2+O\left(N\cos^N\varepsilon\right).$$

Следовательно, $\overline{\lim}\,I_N\leqslant 2\varepsilon^2$. В силу произвольности $\varepsilon>0$ получаем, что $I_N\to 0$.

4.13. а) Пользуясь равенством $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\ldots$ при $x=p_1^{-s}, p_2^{-s}, \ldots,$ докажите, что

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant m} n^{-s}\leqslant\left(1-p_1^{-s}\right)^{-1}\left(1-p_2^{-s}\right)^{-1}\ldots\left(1-p_m^{-s}\right)^{-1}\leqslant\sum n^{-s}.$$

б) Решение аналогично решению задачи а).

4.14. Воспользуйтесь результатами задач 4.12 и 4.13. а).

4.15. Представив дробь $t^n/(1-t^n)$ в виде суммы геометрической прогрессии, докажите тождество

$$\sum a_n t^n/(1-t^n)=\sum b_n t^n,$$

где $b_n=\sum\limits_{k\mid n} a_k$ ($k\mid n$ означает, что n делится на k).

§ 5. Функциональные ряды

5.2. Если $|\lambda_n|\leqslant 1$, то, взяв $x=m+\theta$, $m\in\mathbb{Z}$, $\theta\in[0;\,1)$, получим $\left|\sum\lambda_n e^{-|x-n|}\right|\leqslant\sum e^{-|x-n|}\leqslant e^{-\theta}\sum\limits_{n\leqslant 0}e^n+e^{\theta}\sum\limits_{n\geqslant 1}e^{-n}\leqslant$
$\leqslant\dfrac{e+1}{e-1}$.

5.3. Так как

$$\frac{x^n}{(1+x)\ldots(1+x^n)}=\frac{1}{(1+x)\ldots\left(1+x^{n-1}\right)}-\frac{1}{(1+x)\ldots(1+x^n)},$$

то частичные суммы ряда равны

$$S_n(x)=1-\prod_{1\leqslant k\leqslant n}(1+x^k)^{-1}.$$

Очевидно, что $S_n(x)\to 1$ при $n\to\infty$, если $x\geqslant 1$, и $\sup\limits_{x\geqslant 1}|S_n(x)-1|=$ $=2^{-n}$. Если $0\leqslant x<1$, то

$$S_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} S(x)=1-\prod_{k\geqslant 1}(1+x^k)^{-1}.$$

Таким образом, $\sup\limits_{x\geqslant 0} S(x)=1$. Равномерная сходимость на промежутке $[0;\,1]$ следует из неравенств

$$\frac{x^{2m+1}}{(1+x)\ldots\left(1+x^{2m+1}\right)}\leqslant\frac{x^{2m}}{(1+x)\ldots\left(1+x^{2m}\right)}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{x^{2m}}{(1+x)\ldots(1+x^m)}\leqslant\frac{x^{2m}}{(1+x^m)^m}\leqslant\frac{2}{m(m-1)}.$$

5.4. Сходимость ряда при $x>0$ очевидна. Она не равномерная, так как общий член ряда $u_n(x)$ не стремится равномерно к нулю:

$u_n(1/n!) = 1$. Для оценки суммы ряда разобьем ее на две суммы: $\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant N} + \sum\limits_{n>N}$, где $N \in \mathbb{N}$ таково, что $N! \leqslant 1/x < (N+1)!$ (если $x > 1$, то первая сумма равна нулю, а вторая не превосходит $\sum (1/n!) = e - 1$). Тогда

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant N} u_n(x) = x \sum_{1\leqslant n\leqslant N} n! \leqslant 2xN! \leqslant 2;$$

$$\sum_{n>N} u_n(x) = \frac{1}{x} \sum_{n>N} \frac{1}{n!} < \frac{1}{x(N+1)!} \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{(N+2)^k} < \frac{N+2}{N+1} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Следовательно, $\sum \min(n!x;\ 1/(n!x)) \leqslant 7/2$.

5.5. Докажите, что $\lim\limits_{t\to 1-0} B(t) = +\infty$ и что при $t \to 1-0$ верхние (нижние) пределы отношений $A(t)/B(t)$ и $\sum\limits_{n>N} a_n t^n / B(t)$ одинаковы при любом $N \in \mathbb{N}$.

5.6. За счет изменения a_0 можно считать, что $S_n = a_0 + \ldots + a_n \to 0$. Тогда из равенства $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n t^n = (1-t) \sum\limits_{n\geqslant 0} S_n t^n$ получаем, что

$$\left|\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n\right| \leqslant (1-t) \sum_{0\leqslant n\leqslant N} |S_n|\, t^n + (1-t) \sum_{n>N} |S_n|\, t^n \leqslant$$
$$\leqslant (1-t) \sum_{0\leqslant n\leqslant N} |S_n| + \max_{n>N} |S_n|.$$

Подобрав большой номер N, сделаем малым второе слагаемое, а затем за счет выбора t близким к единице сделаем малым первое слагаемое.

Другое решение можно получить с помощью равенства

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n = (1-t) \sum_{n\geqslant 0} S_n t^n = \sum_{n\geqslant 0} S_n t^n \Big/ \sum_{n\geqslant 0} t^n$$

и результата предыдущей задачи.

5.7. Сходимость ряда $\sum a_n t^n$ вытекает из соотношения $a_n = S_n - S_{n-1} = O(n)$. Так как

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n = (1-t) \sum_{n\geqslant 0} S_n t^n = (1-t)^2 \sum_{n\geqslant 0} (S_0 + \ldots + S_n)\, t^n =$$
$$= \sum_{n\geqslant 0} (S_0 + \ldots + S_n)\, t^n \Big/ \sum_{n\geqslant 0} (n+1)\, t^n,$$

то, используя результат задачи 5.5, получаем требуемое.

5.8. Воспользуйтесь равенством

$$A(t)/B(t) = \sum_{n\geqslant 0} (a_0 + \ldots + a_n)\, t^n \Big/ \sum_{n\geqslant 0} (b_0 + \ldots + b_n)\, t^n$$

и результатом задачи 5.5.

5.9. Сходимость произведения $\prod\limits_{n\geqslant 1}(1+a_nt^n)$ равносильна сходимости ряда

$$\sum \ln(1+a_nt^n).$$

Так как

$$|\ln(1+a_nt^n)|=o(t^n),$$

то этот ряд (а вместе с ним и произведение) сходится для всех $t\in(-1;\ 1)$. Соотношение $A(t)\to A$ при $t\to 1-0$ равносильно соотношению

$$\sum \ln\frac{1+a_nt^n}{1+a_n}\to 0 \quad \text{при} \quad t\to 1-0.$$

С помощью формулы Тейлора оно сводится к равенству

$$\lim_{t\to 1-0}\sum\left(a_n(t^n-1)+O\left(a_n^2\right)(1-t^n)\right)=0,$$

которое следует из теоремы Абеля (см. задачу 5.6).

Пример $a_n=(-1)^n\sqrt{2/n}+1/n$ показывает, что от условия $\sum a_n^2<+\infty$ отказаться нельзя. Действительно, в этом случае

$$\ln\frac{1+a_nt^n}{1+a_n}=(-1)^n\sqrt{\frac{2}{n}}(t^n-1)+\frac{1}{n}(t^n-t^{2n})+O\left(\frac{1-t^n}{n^{3/2}}\right),$$

и, следовательно, $\dfrac{A(t)}{A}=\exp\left(\sum\dfrac{t^n-t^{2n}}{n}+o(1)\right)\to 2$ при $t\to 1-0$.

5.10. Покажите, что вместо данного ряда можно рассматривать знакочередующийся ряд $\sum S_m(x)$, где

$$S_m(x)=\sum_{m\leqslant x\sqrt{n}<m+1} n^{-\alpha}\sin(\pi x\sqrt{n})=$$
$$=\left(\frac{m}{x}\right)^{-2\alpha}\sum_{m\leqslant x\sqrt{n}<m+1}\sin(\pi x\sqrt{n})+O\left(m^{-2\alpha}\right).$$

Для исследования суммы $\sum\limits_{m\leqslant x\sqrt{n}<m+1}\sin(\pi x\sqrt{n})$ воспользуйтесь результатом задачи VI.3.14.

5.11. Для $x>4$ положим $N=[\log_4 x]$. Тогда

$$|f(x)|\leqslant\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\frac{1}{n}+\sum_{n>N}\frac{x}{n4^n}<1+\ln N+\frac{x}{N4^N}=O(\ln\ln x).$$

С другой стороны, взяв $x_m=\pi(4^m+4^{m-1}+\ldots+4+1)$ $(m\in\mathbb{N})$, получим

$$f(x_m)=\sum_{1\leqslant n\leqslant m}\frac{1}{n}\sin\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots\right)+O(1)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{1\leqslant n\leqslant m}\frac{1}{n}+O(1)\geqslant\mathrm{const}\ln\ln x_m.$$

Равенство $\varlimsup\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ следует из легко проверяемого соотношения $f(\pi 4^m)=O(1/m)$.

5.12. Если $f\in\mathrm{Lip}_1$, то $f(\pi/2N)=O(1/N)$, и поэтому $\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant N} a_n\sin\frac{\pi n}{2N}=O\left(\frac{1}{N}\right)$. Отсюда следует, что $\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant N} na_n=O(1)$.

5.13. Воспользуйтесь тем, что коэффициенты полинома P_n удовлетворяют линейной системе $(m+1)$-го порядка, и докажите, что они выражаются через значения P_n в фиксированных точках $t_k\in[\alpha;\ \beta]$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ m)$. Выведите отсюда, что коэффициенты полиномов P_n сходятся.

5.14. Докажите, что ряд $\sum f_n$ равномерно сходится на любом промежутке $[\alpha;\ \beta]\subset(a;\ b)$ (теорема Дини).

§ 6. Тригонометрические ряды

6.1. Постройте подпоследовательность номеров $\{n_k\}$ и последовательность вложенных промежутков, на которых $\cos\left(A_{n_k}x+\varphi_{n_k}\right)\geqslant$ $\geqslant 1-\frac{1}{k}$.

6.2. Представьте $a_n\cos nx+b_n\sin nx$ в виде $\rho_n\cos(nx+\varphi_n)$ и, допустив, что $\rho_n\not\to 0$, воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

6.3. Сравните с задачей II.1.10. а).

6.4. Проинтегрируйте частичные суммы ряда по промежутку $[\alpha;\ \beta]$ и покажите, что при некотором $\gamma>0$

$$\int_a^b|a_n\cos nx+b_n\sin nx|\,dx\geqslant\gamma\sqrt{a_n^2+b_n^2}.$$

6.6. Воспользуйтесь ограниченностью функции $\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$ на промежутке $(0;\ \pi/2]$ и результатом задачи VI.1.10. а), в).

6.7. Сравните суммы

$$\sum_{k^2\leqslant n<(k+1)^2} n^{-1/2}\exp\left(in\pi\left(x-\ln\left[\sqrt{n}\right]\right)\right)$$

и

$$\sigma_k(x)=\frac{1}{k}\sum_{k^2\leqslant n<(k+1)^2}\exp\left(i\pi n\left(x-\ln k\right)\right).$$

Покажите, что $\sigma_{k_j}(x) \not\to 0$, если последовательность $\{k_j\}$ такова, что $\ln k_j < x + 2m_j < \ln(1 + k_j)$ $(m_j \in \mathbb{Z})$ для всех $j \in \mathbb{N}$.

6.8. Найдите сумму ряда $\sum \frac{1}{n} z^n$ для $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, и воспользуйтесь теоремой Абеля (см. задачу 5.6).

6.9. С помощью равенства $\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$ задача сводится к предыдущей.

6.10—6.12. Применив преобразование Абеля, используйте результат задачи 6.5.

6.13. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи и равенством

$$\int_0^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad m \neq n, \\ \pi/2 & \text{при} \quad m = n. \end{cases}$$

6.14. Для доказательства соотношения $\lambda_n = o(1/n)$ рассмотрите сумму $\sum\limits_{n/2 \leqslant x \leqslant n} \lambda_k \sin kx$ при $x = \pi/(2n)$. Если $\lambda_n = o(1/n)$, то для равномерной оценки остатка разбейте его на две суммы, первая из которых содержит слагаемые с «малыми» номерами (не превосходящими $\pi/(2x)$). Оценивая ее, воспользуйтесь неравенством $|\sin t| \leqslant |t|$. Для оценки второй суммы используйте преобразование Абеля и результат задачи 6.5.

6.15. Решение аналогично решению предыдущей задачи.

6.16. Можно считать, что $[a; b] \subset [0; \pi]$ (в противном случае разобьем промежуток $[a; b]$ на несколько промежутков). Если $a > 0$, то можно воспользоваться результатом задачи 6.10. Если $a = 0$, то, пользуясь результатом задач 6.10 и 6.5, оцените интегралы от остатка ряда по промежуткам $[0; \varepsilon]$ и $[\varepsilon; b]$ при малом $\varepsilon > 0$.

6.17. С помощью преобразования Абеля и результатов задач 6.6 и 2.4 покажите, что при некотором $C > 0$ справедливы неравенства $\int\limits_0^{\pi} \left| \sum\limits_{1 \leqslant n \leqslant N} \lambda_n \cos nx \right| dx \leqslant C$ для всех $N \in \mathbb{N}$. Пользуясь результатом задачи 6.10, убедитесь в том, что интегралы $\int\limits_{\varepsilon}^{\pi} |f(x)| \, dx$ ограничены равномерно по $\varepsilon \in (0; \pi)$.

6.18. Доказательство абсолютной интегрируемости функции g аналогично решению предыдущей задачи. Если $\int\limits_0^{\pi} |g(x)| dx < +\infty$, то проинтегрируйте почленно ряд (см. задачу 6.16)

$\sum g(x)\frac{1}{n}\sin nx$ по промежутку $[0;\ \pi]$ и воспользуйтесь результатом задачи 6.13.

6.19. Повторяя решение задачи 6.17, докажите, что при $M \geqslant N$

$$\int_0^{\pi}\left|\varphi(x)\sum_{N\leqslant n\leqslant M}\lambda_n\cos nx\right|dx\leqslant\rho_N,$$

где $\rho_N\to 0$. В силу равномерной сходимости ряда $\sum_{k\geqslant N}\lambda_n\cos nx$ на промежутке $[\varepsilon;\ \pi]$ (см. задачу 6.10) отсюда вытекает, что

$$\int_{\varepsilon}^{\pi}\left|\varphi(x)\sum_{n\geqslant N}\lambda_n\cos nx\right|dx\leqslant\rho_N,$$

и, следовательно,

$$\int_0^{\pi}\left|\varphi(x)\sum_{n\geqslant N}\lambda_n\cos nx\right|dx\leqslant\rho_N.$$

6.20 а) Рассуждая от противного, рассмотрите точку $x_0\in\in(0;\ \pi)$, в которой сумма $S_n(x)=\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{\sin kx}{k}$ имеет неположительный минимум. Пользуясь необходимым условием экстремума $\left(S_n'(x_0)=0\right)$, убедитесь, что $\sin nx_0\geqslant 0$, и, следовательно, сумма S_{n-1} также принимает неположительные значения. Продолжение этого рассуждения приводит к противоречию с тем, что $S_1(x)=\sin x>0$ на $(0;\ \pi)$.

б) Докажите, что локальные минимумы функции $\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{k}\cos kx$ на промежутке $[0;\ \pi]$ образуют возрастающую последовательность.

6.21. а) Используйте преобразование Абеля и результат задачи 6.20. а).

б) Положим $D_n(x)=\frac{1}{2}+\cos x+\ldots+\cos nx=\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin(x/2)}$ $\left(D_0=1/2\right)$. Тогда

$$f(x)=\frac{\lambda_0}{2}+\sum_{n\geqslant 1}\lambda_n\left(D_n(x)-D_{n-1}(x)\right)=\sum_{n\geqslant 0}\left(\lambda_n-\lambda_{n+1}\right)D_n(x).$$

Поскольку

$$D_0(x)+D_1(x)+\ldots+D_{n-1}(x)=\left(\frac{\sin(nx/2)}{2\sin(x/2)}\right)^2,$$

то с помощью преобразования Абеля получаем

$$f(x)=\sum_{n\geqslant 1}(\lambda_{n-1}-2\lambda_n+\lambda_{n+1})\left(\frac{\sin(nx/2)}{2\sin(x/2)}\right)^2\geqslant 0.$$

Заметим, что

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin(nx/2)}{2\sin(x/2)}\right)^2dx=\int_0^{\pi}(D_0(x)+\ldots+D_{n-1}(x))\,dx=\frac{\pi}{2}n.$$

Поэтому (см. задачи 6.10 и 5.14)

$$\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\sum n(\lambda_{n-1}-2\lambda_n+\lambda_{n+1})=$$

$$=\frac{\pi}{2}\sum(\lambda_{n-1}-\lambda_n)=\frac{\pi}{2}\lambda_0.$$

6.22. Докажите, что локальные максимумы функции S_n на промежутке $[0;\pi]$ образуют убывающую последовательность.

6.23. Воспользуйтесь тем, что

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,e^{-ikx}\,dx=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x+\frac{\pi}{k}\right)e^{-ikx}dx=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{k}\right)\right)e^{-ikx}dx.$$

6.24. При изучении величины $|f(x)-f(y)|$ представьте разность $x-y$ (считая $x>y$) в виде $x-y=2\pi\sum\limits_{k\geqslant p}\varepsilon_k 4^{-k}$, где $\varepsilon_k\in\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ и $\varepsilon_p\neq 0$. Разбейте ряд

$$f(x)-f(y)=\sum 2^{1-n}\sin\left(4^n\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(4^n\frac{x+y}{2}\right)$$

на две суммы: $\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant p}$ и $\sum\limits_{n>p}$, каждую из которых оцените отдельно. Чтобы доказать, что $f\notin \mathrm{Lip}_\alpha$ при $\alpha>1/2$, оцените снизу разность $f(0)-f(x)$ при $x=2\pi/4^m$ $(m\in\mathbb{N})$ или воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

6.25. Решение аналогично решению предыдущей задачи.

6.26. Используйте тот же прием, что и при решении задачи 6.24. Функция f не входит в класс Lip_1, так как $f(x)>\frac{m}{2}x$ при $x=\pi 3^{-m-1}$ $(m\in\mathbb{N})$.

6.27. а) Оцените снизу $f(x)$ при $x=1/m!$ $(m\in\mathbb{N})$.

б) Для произвольной точки $x \in \mathbb{R}$ рассмотрите содержащие ее промежутки $[\alpha_n; \beta_n]$ $(n \geqslant n_0)$, где $\alpha_n = p_n/n!$, $\beta_n = (p_n + s_n)/n!$, $p_n = [xn!]$, $s_n \in \mathbb{N}$, $s_n \leqslant n/2$. Для оценки величины $|f(\beta_n) - f(\alpha_n)|$ снизу используйте неравенство

$$|f(\beta_n) - f(\alpha_n)| \geqslant \left| \sum_{1 \leqslant k < n} 2^{1-k} \sin\left(\pi k! \frac{s_n}{n!}\right) \cos(\pi k! (\alpha_n + \beta_n)) \right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{4}{2^n} \left| \sin \frac{\pi s_n}{n} \right| \left| \cos \frac{\pi}{n} (2p_n + s_n) \right| - \sum_{1 \leqslant k \leqslant n-2} 2^{1-k} \sin(\pi k! s_n/n!).$$

Покажите, что s_n можно выбрать так, что $\left|\cos \frac{\pi}{n}(2p_n + s_n)\right| \geqslant 1/2$. Убедитесь, что в этом случае

$$|f(\beta_n) - f(\alpha_n)| \geqslant 1/n2^n \geqslant \sqrt{\beta_n - \alpha_n}.$$

6.28. б) $\Rightarrow$ в) Воспользуйтесь тем, что при $N > N_0$ разность $S_N(x) - S_{N_0}(x)$ имеет период $\pi/2^{N_0}$ и поэтому

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |S_N(x) - S_{N_0}(x)| = \max_{x \in \mathbb{R}} |S_N(x) - S_{N_0}(x)|,$$

если номер N_0 достаточно велик.

в) $\Rightarrow$ а) Запишем сумму S_{2N} в виде

$$S_{2N}(x) = \sum_{0 \leqslant n \leqslant 2N} c_n \cos(2^n x + \varphi_n),$$

где $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\varphi_n \in [-\pi; \pi]$ при $n = 0, 1, \ldots, 2N$, и рассмотрим неотрицательный тригонометрический многочлен $R_N(x) = \prod_{0 \leqslant n \leqslant N} \left(1 + \cos(2^{2n}x + \varphi_{2n})\right)$ (произведение Ф. Рисса). Легко видеть, что R_n имеет вид

$$R_N(x) = 1 + \sum_{0 \leqslant n \leqslant N} \cos(2^{2n}x + \varphi_{2n}) + \sum \alpha_k \cos(kx + \psi_k),$$

где $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = \ldots = \alpha_{2^k} = \ldots = 0$.

Пользуясь равенствами

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx + \varphi) \cos(kx + \psi)\, dx = 0; \quad m, k \in \mathbb{Z}, \quad |m| \neq |k|$$

(ортогональность тригонометрической системы), получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_{2N}(x) R_N(x)\, dx =$$

$$= \sum_{0 \leqslant n \leqslant N} c_{2n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(2^{2n}x + \varphi_{2n})\, dx = \pi \sum_{0 \leqslant n \leqslant N} \sqrt{a_{2n}^2 + b_{2n}^2}.$$

Положим $S = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}, M \in \mathbb{N}} S_M(x)$. По условию $S < +\infty$. Поэтому

$$\sum_{0 \leqslant n \leqslant N} (|a_{2n}| + |b_{2n}|) \leqslant \sqrt{2} \sum_{0 \leqslant n \leqslant N} \sqrt{a_{2n}^2 + b_{2n}^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{2N}(x) R_N(x)\, dx \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\pi} S \int_{-\pi}^{\pi} R_N(x)\, dx = 2\sqrt{2} S.$$

Таким образом. $\sum\limits_{n \geqslant 0} (|a_{2n}| + |b_{2n}|) \leqslant 2^{1/2} S$. Сумма $\sum\limits_{n \geqslant 0} (|a_{2n+1}| + |b_{2n+1}|)$ оценивается аналогично, только вместо многочлена $R_N(x)$ рассматривается произведение

$$\widetilde{R}_N(x) = \prod_{0 \leqslant n \leqslant N} \left(1 + \cos\left(2^{2n+1}x + \varphi_{2n+1}\right)\right).$$

В заключение отметим, что при доказательстве утверждения в) $\Rightarrow$ а) использовалась лишь ограниченность сумм $S_N(x)$ сверху. Поэтому ряд $\sum (|a_n| + |b_n|)$ сходится, если суммы $S_N(x)$ равномерно ограничены сверху на каком-то промежутке $[a;\, b]$, $a < b$.

6.29. Проведите доказательство по индукции.

6.30. Утверждение очевидно при $N = 0, 1$. Допустим, что неравенства верны для $N < 2^m$ при некотором $m \in \mathbb{N}$, и убедимся в том, что они верны и при $2^m \leqslant N < 2^{m+1}$. Заметим прежде всего, что $R_N(P_n) = P_n$ и $R_N(Q_n) = Q_n$ при $n \leqslant m$, и в этом случае справедливость доказываемых неравенств следует из результата задачи 6.29. в). Проверьте, что при $m + 2 \leqslant n$

$$R_N(P_n) = R_N(Q_n) = R_N(P_{m+1}).$$

Поэтому достаточно оценить $R_N(P_{m+1})$ и $R_N(Q_{m+1})$. Ясно, что

$$R_N(P_{m+1})(z) = P_m(z) + z^{2^m} R_M(Q_m)(z),$$

где $M = N - 2^m$. Если $M < 2^{m-1} \leqslant N/2$, то, используя индукционное предположение, мы получаем, что

$$|R_M(Q_m)(z)| \leqslant 10\sqrt{M} \leqslant 10\sqrt{N/2},$$

и поэтому

$$|R_N(P_{m+1})(z)| \leqslant |P_m(z)| + 10\sqrt{N/2} \leqslant \sqrt{2N} + 10\sqrt{N/2} \leqslant 10\sqrt{N}.$$

Если же $M \geqslant 2^{m-1}$, то

$$R_M(Q_m(z)) = P_{m-1}(z) + z^{2^{m-1}} R_L(Q_{m-1})(z),$$

где $L = M - 2^{m-1} \leqslant 2^{m-1}$. Поэтому

$$|R_N(P_{m+1})(z)| \leqslant |P_m(z)| + |R_M(Q_m)(z)| \leqslant$$
$$\leqslant |P_m(z)| + |P_{m-1}(z)| + |R_L(Q_{m-1})(z)| \leqslant$$
$$\leqslant 2^{(m+1)/2} + 2^{m/2} + 10\sqrt{L} \leqslant \sqrt{2N} + \sqrt{N} + 10\sqrt{\frac{N}{2}} \leqslant 10\sqrt{N}.$$

Полином $R_N(Q_{m+1})$ оценивается аналогично.

6.31. Рассмотрите последовательность $\{\varepsilon_k\}_{k\geqslant 0}$, члены которой при $k < 2^n$ совпадают с коэффициентами полинома P_n из задачи 6.29. Для доказательства неравенства а) воспользуйтесь результатом задачи 6.30. Для доказательства неравенства б) используйте соотношения

$$2\pi(m+1) = \int_0^{2\pi} |S_m(\theta)|^2 d\theta \leqslant \max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} |S_m(\theta)| \int_0^{2\pi} |S_m(\theta)|\, d\theta.$$

6.32. Рассмотрите ряд $\sum\limits_{k\geqslant 2} \dfrac{\varepsilon_k}{\sqrt{k}\ln^2 k} e^{ik\theta}$, где последовательность $\{\varepsilon_k\}$ определена в указании к задаче 6.31. Для доказательства равномерной сходимости ряда воспользуйтесь преобразованием Абеля.

6.33. а), б) Используйте преобразование Абеля.

в) Пусть $f(\theta) = S_N(\theta) + R_N(\theta)$, где $S_N(\theta)$ — N-я частичная сумма ряда, определяющего функцию f. Тогда

$$|f(\theta) - f(\theta')| \leqslant |S_n(\theta) - S_n(\theta')| + |R_N(\theta)| + |R_N(\theta')|.$$

Взяв $N = [1/|\theta - \theta'|]$, оцените остатки R_N с помощью утверждения б). Для оценки разности $S_N(\theta) - S_N(\theta')$ воспользуйтесь неравенством

$$|S_N(\theta) - S_N(\theta')| \leqslant |\theta - \theta'| \max_{x\in\mathbb{R}} |S'_N(x)|$$

и утверждением а).

6.34. Используйте результаты задач 6.31 и 6.33. в) при $\alpha = 1/2$.

Глава V. ИНТЕГРАЛ

§ 1. Несобственные интегралы от функций одной переменной

1.1. Рассмотрите интегралы по промежуткам $[k\pi;\ (k+1)\pi]$.

1.2. Для оценки интегралов по промежуткам $[k\pi;\ (k+1)\pi]$ воспользуйтесь неравенствами $\dfrac{2}{\pi} x < \sin x < x$ при $x \in (0;\ \pi/2)$.

1.3.—1.7. Решения этих задач аналогично решению задачи 1.2.

1.8. Используйте результат задачи VI.2.9.

1.9. Интегрируя по частям

$$\int_1^A \cos(x^3 - x)\,dx = \int_1^A \frac{d\sin(x^3 - x)}{3x^2 - 1} =$$

$$= o(1) + 6\int_1^A \frac{x}{(3x^2-1)^2}\sin(x^3 - x)\,dx,$$

сводим исходный интеграл к абсолютно сходящемуся интегралу.

1.10.—1.11. Решения этих задач аналогично решению задачи 1.9.

1.12. а) Рассмотрите функцию $f(x) = n$, если $x \in [n;\ n + n^{-3}]$ $(n \in \mathbb{N})$, $f(x) = 0$ в противном случае.

б) Рассмотрите функцию $f(x) = x^2 \sin(x^p)$, где $p > 3$.

1.13. При исследовании сходимости интеграла на бесконечности с помощью результата задачи 1.16 и интегрирования по частям покажите, что $f(x) \sim \dfrac{\ln(x^2-1)}{x^{1+\varepsilon}}$ при $x \to +\infty$.

1.14. а) Найдите предел интеграла

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = \int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} \frac{f(t)}{t}\,dt \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

б) Если $\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt = 0$, то см. задачу а). В противном случае рассмотрите функцию $\displaystyle\tilde f(x) = f(x) - \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt.$

в) Найдите предел интеграла

$$\int_\varepsilon^A \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = \int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} \frac{f(t)}{t}\,dt - \int_{Aa}^{Ab} \frac{f(t)}{t}\,dt$$

при $A \to +\infty$, $\varepsilon \to 0$.

1.15. а) Из второй теоремы о среднем значении следует, что для любых чисел A и B, $0 < A < B$, найдется такое число $C \in [A;\ B]$, что

$$\int_A^B e^{-\varepsilon x} f(x)\,dx = e^{-A\varepsilon}\int_A^C f(x)\,dx.$$

Так как интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то все интегралы вида $\int\limits_A^C f(x)\,dx$ малы, если A достаточно велико. Поэтому малы интегралы $\int\limits_A^B f(x)\frac{dx}{e^{\varepsilon x}}$, а это равносильно сходимости интеграла $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\frac{dx}{e^{\varepsilon x}}$.

Заметим, что если функция f непрерывна на $[0;\ +\infty)$, то доказываемое утверждение легко получить интегрированием по частям:

$$\int\limits_0^A e^{-\varepsilon x} f(x)\,dx = e^{-\varepsilon A}F(A) + \varepsilon\int\limits_0^A e^{-\varepsilon x}F(x)\,dx$$

$\left(\text{здесь } F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt\right)$.

б) Представим разность интегралов в виде

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx - \int\limits_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x} f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^A \left(1 - e^{-\varepsilon x}\right) f(x)\,dx + \int\limits_A^{+\infty} f(x)\,dx - \int\limits_A^{+\infty} e^{-\varepsilon x} f(x)\,dx.$$

При больших A последние два интеграла малы для всех $\varepsilon > 0$ (оценка третьего интеграла следует из второй теоремы о среднем значении). Устремляя ε к нулю при фиксированном A, делаем малым первый интеграл.

1.16. С помощью интегрирования по частям вычислите сумму интегралов по промежуткам $[0;\ a]$ и $[1/a;\ +\infty)$ при $a \in (0;\ 1)$.

1.17. Так как $I = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\,dx$, то

$$2I = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\frac{\sin 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \ln\frac{\sin t}{2}\,dt = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\frac{\sin t}{2}\,dt =$$

$$= I - \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

1.18. Разложив $(1-x)^{-1}$ в ряд, почленно проинтегрируйте его и воспользуйтесь результатом задачи IV.4.12. Чтобы обосновать почленное интегрирование суммы ряда, покажите, что

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^1\left(\sum_{n\geqslant N}x^n\ln x\right)dx=\lim_{N\to+\infty}\int_0^1\frac{x^N\ln x}{1-x}\,dx=0.$$

Для доказательства последнего равенства воспользуйтесь оценкой

$$\int_0^1\frac{x^N\ln x}{1-x}\,dx=\int_0^{1/2}+\int_{1/2}^1=O\left(\frac{1}{2^N}\right)+O\left(\int_{1/2}^1x^N\,dx\right)=o(1).$$

1.19. В предыдущей задаче сделайте замену переменной $x\mapsto x^2$.

1.20. Дважды интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{\operatorname{ch}^2x}=\int_0^{+\infty}x^2d(\operatorname{th}x-1)=$$

$$=4\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-2x}dx}{1+e^{-2x}}=2\int_0^{+\infty}\ln\left(1+e^{-2x}\right)dx=\int_0^1\frac{\ln t}{t-1}\,dt.$$

Остается воспользоваться результатом задачи 1.18.

1.21. Продифференцируйте интеграл по параметру a.

1.22. Используйте результаты задач 1.21 и 1.15. б).

1.23. Интегрированием по частям сведите задачу к предыдущей.

1.24. Введя под интегралом множитель $e^{-\varepsilon x}$ и вычислив получившийся интеграл с помощью дифференцирования по параметру ε, воспользуйтесь результатом задачи 1.15. б).

1.25. С помощью интегрирования по частям получаем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(e^{iax}-1\right)\left(e^{ibx}-1\right)}{x^2}\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}\left(i\,(a+b)\,e^{i(a+b)x}-iae^{iax}-ibe^{ibx}\right)dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(a\sin ax+b\sin bx-(a+b)\sin\,(a+b)\,x\right)\frac{dx}{x}=$$

$$=\left(|a|+|b|-|a+b|\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Остается воспользоваться результатом задачи 1.22.

1.26, 1.27. Замените e^{-x} на $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ и воспользуйтесь неравенством задачи I.2.16. а).

1.28. С помощью результата задачи 1.24 исходный интеграл сведите к разности $\int\limits_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx - \int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$. Воспользуйтесь интегрированием по частям и интегралом из задачи 1.26.

1.29. Сведите задачу к предыдущей.

1.30. Сведите данный интеграл к разности $\int\limits_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx - \int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$ и воспользуйтесь результатом задачи 1.26.

1.31. С помощью интегрирования по частям и замены переменной сведите данный интеграл к интегралу Фруллани (см. задачу 1.14).

1.32. Рассмотрите интеграл по промежутку $[\Delta; +\infty)$ $(\Delta > 0)$ и докажите, что он равен $\int\limits_\Delta^{+\infty} \frac{1}{x}\ln(1+e^{-x})dx$. Воспользовавшись равенством

$$\ln(1+e^{-x}) = \ln(1-e^{-2x}) - \ln(1-e^{-x}),$$

сведите последний интеграл к интегралу

$$\int\limits_\Delta^{2\Delta} \frac{1}{x}\ln(1-e^{-x})\,dx$$

и покажите, что с точностью до бесконечно малой при $\Delta \to 0$ он равен интегралу $\int\limits_\Delta^{2\Delta} \frac{\ln x}{x}\,dx$.

1.34. При $k = 1, 3, 5$ сведите данный интеграл к интегралу Эйлера — Пуассона. При $k = 4$ используйте результат задачи 1.14.

1.35. Интегрируя по частям в неопределенном интеграле, получаем

$$\int \frac{e^{-x^2}dx}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2} = -\int \frac{e^{-x^2}}{x}\, d\,\frac{1}{2x^2+1} =$$

$$= -\frac{e^{-x^2}}{x(2x^2+1)} - \int \frac{e^{-x^2}}{x^2}\,dx = \frac{xe^{-x^2}}{x^2+\frac{1}{2}} + 2\int e^{-x^2}\,dx.$$

Следовательно,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}dx}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2} = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

1.36. Обозначим искомый интеграл через $I(a)$. Продифференцировав по a при $a > 0$ и сделав замену переменной $x \mapsto a/x$, получим, что $I'(a) = -2I(a)$, и, следовательно, $I(a) = Ce^{-2a}$. Осталось воспользоваться интегралом Эйлера — Пуассона: $C = I(0) = \sqrt{\pi}/2$.

1.37. а) В силу результата задачи 1.15. б)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} I(\varepsilon),$$

где

$$I(\varepsilon) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} e^{-\varepsilon x}\,dx.$$

Для вычисления интеграла $I(\varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$ воспользуемся равенством

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-xy^2}\,dy$$

(см. задачу 1.33):

$$I(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x}\sin x\left(\int_0^{+\infty} e^{-xy^2}\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin x\,dx}{e^{(\varepsilon+y^2)x}}\right)dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+(\varepsilon+y^2)^2}.$$

Поэтому

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} I(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

б) Решение аналогично решению задачи а).

1.38. Вычислив интегралы по промежуткам $[p_k;\ p_{k+1}]$ (где $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, ... — простые числа, занумерованные в порядке возрастания), убедитесь в том, что

$$\int_2^{+\infty} \frac{\pi(x)\,dx}{x^3-x} = -\frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty} \ln\left(\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k^2}\right)\right),$$

и воспользуйтесь результатом задачи IV.4.14. а).

§ 2. Вычисление кратных интегралов

2.1. Представьте данный интеграл в виде

$$2\int_0^{+\infty}\left(\int_0^x \left(\ln\frac{x}{y}\right) e^{-(x+y)}\,dy\right)dx.$$

Во внутреннем интеграле сделайте замену переменной $y = tx$ ($t \in (0;\ 1)$) и измените порядок интегрирования.

2.2. Пользуясь симметричностью областей интегрирования и подынтегральных функций относительно произвольных перестановок переменных, убедитесь в справедливости равенств

а) $$\int_{[0;1]^n} \max(x_1;\ \ldots;\ x_n)\,dx_1\ldots dx_n =$$

$$= n!\int_0^1 x_1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-1}} dx_n;$$

б) $$\int_{[0;1]^n} \min(x_1;\ \ldots;x_n)\,dx_1\ldots dx_n =$$

$$= n!\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-1}} x_n\,dx_n;$$

в) $$\int_{[1;+\infty)^n} \frac{dx_1\ldots dx_n}{x_1\ldots x_n(\max(x_1;\ \ldots;\ x_n))^{\varepsilon}} =$$

$$= n!\int_1^{+\infty}\frac{dx_1}{x_1}\int_{x_1}^{+\infty}\frac{dx_2}{x_2}\ldots\int_{x_{n-1}}^{+\infty}\frac{dx_n}{x_n^{1+\varepsilon}}.$$

2.3. Воспользуйтесь интегралом Эйлера — Пуассона (см. задачу 1.33).

2.4. а) Считая, что $a^2+b^2>0$, положим $u = \dfrac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $v = cx+dy$, где c и d выбраны так, чтобы преобразование $(x;\ y)\to$

$\to (u, v)$ было ортогональным. Тогда $x^2+y^2=u^2+v^2$, и, следовательно.

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} |ax+by|\, e^{-(x^2+y^2)/2}\, dx\, dy = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} |u|\, e^{-(u^2+v^2)/2} \sqrt{a^2+b^2}\, du\, dv =$$

$$= 2\sqrt{a^2+b^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2/2}\, dv \int\limits_{0}^{+\infty} u e^{-u^2/2}\, du = 2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{2\pi}.$$

б) Перейдите к новой системе координат, одна из осей которой направлена вдоль вектора a.

2.5. Пусть $\|x\| = a$. Не умаляя общности, можно считать, что $x = (0;\ 0;\ a)$. Переходя к сферическим координатам, получаем

$$\iiint\limits_{\|y\|\leqslant 1} \frac{dy}{\|x-y\|} = \int\limits_0^1 r^2\, dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{r^2-2ar\cos\theta+a^2}} =$$

$$= \frac{2\pi}{a} \int\limits_0^1 r\sqrt{r^2-2ar\cos\theta+a^2}\,\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} dr = \frac{2\pi}{a}\int\limits_0^1 r\,(r+a-|r-a|)\, dr.$$

Мы предоставляем читателю довести вычисления до конца.

2.6. Ясно, что

$$\iiiint\limits_{x^2+y^2+u^2+v^2\leqslant 1} e^{x^2+y^2-u^2-v^2}\, dx\, dy\, du\, dv =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} e^{x^2+y^2} \left(\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1-x^2-y^2} e^{-(u^2+v^2)}\, du\, dv \right) dx\, dy.$$

Для вычисления двойных интегралов используйте полярные координаты.

2.7. Выбирая в $\mathbb{R}^4$ ортогональный базис так, чтобы в нем матрица A имела диагональный вид, с помощью соответствующего ортогонального преобразования переменных получаем

$$\int\limits_{(Ax,x)\leqslant 1} e^{(Ax,x)}\, dx = \iiiint\limits_{\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant 4} \lambda_k t_k^2\leqslant 1} e^{\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant 4} \lambda_k t_k^2}\, dt_1\, dt_2\, dt_3\, dt_4,$$

где λ_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ — собственные числа матрицы A. Сделав замену переменных $u_k = \sqrt{\lambda_k} t_k$, мы видим, что

$$\int\limits_{(Ax,x)\leqslant 1} e^{(Ax,x)}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}} \iiiint\limits_{\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant 4} u_k^2\leqslant 1} e^{\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant 4} u_k^2}\, du_1\, du_2\, du_3\, du_4.$$

Остается заметить, что $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = \det A$, а интеграл вычисляется с помощью полярных координат (см. задачу 2.6).

2.8. Пусть $t = (t_1;\ t_2;\ t_3;\ t_4)$. Очевидно, что

$$K(t) =$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-t_1x_1} \left(\iiint\limits_{\sqrt{x_2^2+x_3^2+x_4^2} \leqslant x_1} e^{-t_2x_2-t_3x_3-t_4x_4}\, dx_2\, dx_3\, dx_4 \right) dx_1. \quad (*)$$

Положим $s = (t_2;\ t_3;\ t_4)$, $y = (x_2;\ x_3;\ x_4)$. Тогда внутренний интеграл в $(*)$ можно записать следующим образом: $\int\limits_{\|y\| \leqslant x_1} e^{-(y,s)}\, dy = J(s)$. С помощью ортогонального преобразования переменных задачу можно свести к случаю, когда вектор s имеет вид $(a;\ 0;\ 0)$, $a = \|s\|$, и, таким образом,

$$J(s) = \iiint\limits_{\|y\| \leqslant x_1} e^{-ax_2}\, dx_2\, dx_3\, dx_4 = \int_{-x_1}^{x_1} e^{-ax_2} \pi \left(x_1^2 - x_2^2\right) dx_2.$$

Вычисляя последний интеграл, мы видим, что он равен

$$\frac{4\pi x_1}{a^2} \operatorname{ch}(ax_1) - \frac{4\pi}{a^3} \operatorname{sh}(ax_1).$$

После подстановки этого результата в $(*)$ $K(t)$ принимает вид

$$K(t) = \frac{4\pi}{a^2} \int_0^{+\infty} \left(x_1 \operatorname{ch}(ax_1) - \frac{1}{a} \operatorname{sh}(ax_1) \right) e^{-t_1x_1}\, dx_1.$$

Этот интеграл конечен тогда и только тогда, когда $a < t_1$, т. е. (поскольку $a = \|s\| = \sqrt{t_2^2 + t_3^2 + t_4^2}$) при $t \in \operatorname{Int} A$. Мы предоставляем читателю провести вычисление последнего интеграла.

2.2. Убедитесь в том, что

$$M = \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b |x-y|\, dx\, dy \quad \text{и} \quad P = \frac{S(E)}{(b-a)^2},$$

где $E = \{(x;\ y) \mid x,\ y \in [a;\ b],\ |x-y| > (b-a)/3\}$, $S(E)$ — площадь E.

2.10. Пусть для определенности $x \leqslant y \leqslant z$. Эти числа являются сторонами некоторого треугольника, если и только если $z \leqslant x + y$. Следовательно, чтобы найти искомую вероятность, нужно вычислить объем пирамиды $\{(x;\ y;\ z) \mid 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant a,\ z \leqslant x + y\}$.

2.11. а) Вещественность корней определяется знаком дискриминанта, равного $u^2 - 4v$. При $a > 4$ рассмотрим на плоскости u, v квадрат $[-a; a] \times [-a; a]$ и параболу $v = u^2/4$ (рис. 13). Пусть S — множество точек квадрата, лежащих выше параболы. Уравнение $z^2 + uz + v = 0$ имеет вещественные корни тогда и только тогда, когда $(u; v) \notin S$. Поэтому всегда $P_1(a) > 1/2$. Так как площадь множества S равна $\frac{4}{3} a^{3/2}$, то

$$P_1(a) = 1 - \frac{1}{3\sqrt{a}} \xrightarrow[a \to +\infty]{} 1.$$

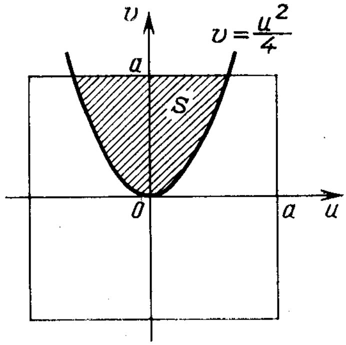

Рис. 13

б) Биквадратное уравнение имеет как вещественные, так и комплексные корни в том и только том случае, когда $v < 0$. Поэтому соответствующая вероятность равна 1/2.

2.12. Убедитесь в том, что

$$S = \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} \left(\iint\limits_{u^2+v^2 \leqslant 1} \frac{\pi}{4} \left((x-u)^2 + (y-v)^2\right) du\, dv \right) dx\, dy.$$

2.13. Убедитесь в том, что

а) $$L = \frac{R}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |e^{i\varphi} - e^{i\psi}|\, d\varphi\, d\psi = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} |e^{i\varphi} - 1|\, d\theta;$$

б) $$\alpha = \frac{2}{(2\pi)^2} \left(\iint\limits_E |\varphi - \psi|\, d\varphi\, d\psi + \int_\pi^{2\pi} \left(\int_0^\pi |\varphi - \psi - \pi|\, d\psi \right) d\varphi \right),$$

где $E = \{(\varphi; \psi) \mid 0 \leqslant \psi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ \ \varphi - \psi \leqslant \pi\}$.

2.14. Легко видеть, что

$$\Phi(x; y) = f(a), \quad \Psi(x; y) = g(a),$$

где $a = \sqrt{x^2 + y^2}$ и

$$f(a) = \iint\limits_{u^2+v^2 \leqslant 1} \left((u-a)^2 + v^2\right)^{-p/2} du\, dv,$$

$$g(a) = \iint\limits_{u^2+v^2 \leqslant 1} \ln\left((u-a)^2 + v^2\right) du\, dv.$$

Докажем, что $f \in C^1([0; +\infty))$ и $f'(0) = 0$, отсюда, очевидно, следует гладкость функции Ф. Покажем, что

$$f'(a) = \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} \left(\left((u-a)^2+v^2\right)^{-p/2}\right)'_a du\,dv. \qquad (**)$$

При $a > 1$ это равенство легко установить, рассматривая отношение $\frac{1}{h}(f(a+h)-f(a))$. Для обоснования предельного перехода при $h\to 0$ под знаком интеграла достаточно воспользоваться формулой конечных приращений и неравенством $(u-a)^2+v^2 \geqslant (a-1)^2 > 0$.

Пусть теперь $a \in [0;\ 1)$. Заметим, что функция, стоящая под знаком двойного интеграла в равенстве $(**)$, абсолютно интегрируема на круге $\{(u;\ v)\,|\,u^2+v^2\leqslant 1\}$:

$$\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} \left|(\ldots)'_a\right| du\,dv = |p| \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} \frac{|u-a|\,du\,dv}{\left((u-a)^2+v^2\right)^{1+p/2}} =$$

$$= |p| \iint\limits_{(u+a)^2+v^2\leqslant 1} \frac{|u|\,du\,dv}{(u^2+v^2)^{1+p/2}} \leqslant$$

$$\leqslant |p| \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 4} \frac{du\,dv}{(u^2+v^2)^{(1+p)/2}} = 2\pi|p|\int_0^4 \frac{dr}{r^p} < +\infty.$$

Рассмотрим множество $E = \{(u;\ v)\,|\,u^2+v^2 \geqslant 1,\ |u|\leqslant 1,\ |v|\leqslant 1\}$ и представим функцию f в виде

$$f(a) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left((u-a)^2+v^2\right)^{-p/2} du\,dv -$$

$$- \iint\limits_E \left((u-a)^2+v^2\right)^{-p/2} du\,dv = f_1(a) - f_2(a).$$

Так как при $a \in [0;\ 1)$ на множестве E справедливо неравенство $(u-a)^2+v^2 \geqslant (a-1)^2 > 0$, то

$$f_2'(a) = \iint\limits_E \left(\left((u-a)^2+v^2\right)^{-p/2}\right)'_a du\,dv.$$

Поскольку

$$f_1(a) = \int_{-1-a}^{1-a}\int_{-1}^{1} (u^2+v^2)^{-p/2}\,du\,dv,$$

то $f_1 \in C^1([0;\ +\infty))$ и

$$f_1'(a) = -\int_{-1}^{1} \left((1-a)^2+v^2\right)^{-p/2} dv + \int_{-1}^{1} \left((1+a)^2+v^2\right)^{-p/2} dv =$$

$$= -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (((u-a)^2+v^2)^{-p/2})'_u\,du\,dv =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (((u-a)^2+v^2)^{-p/2})'_a\,du\,dv.$$

Из полученных представлений для $f_1'(a)$ и $f_2'(a)$ следует равенство (**).

Таким образом, для всех $a \geqslant 0$, $a \neq 1$, имеем

$$f'(a) = \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} (((u-a)^2+v^2)^{-p/2})'_a\,du\,dv =$$

$$= -\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} (((u-a)^2+v^2)^{-p/2})'_u\,du\,dv =$$

$$= -\int_{-1}^{1} ((u-a)^2+v^2)^{-p/2}\Bigg|_{u=-\sqrt{1-v^2}}^{u=\sqrt{1-v^2}} dv =$$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi} ((\cos\varphi - a)^2 + \sin^2\varphi)^{-p/2}\cos\varphi\,d\varphi.$$

Отсюда следует, что функция f' непрерывна на множестве $[0;\,1) \cup \cup (1;\,+\infty)$ и имеет конечный предел при $a \to 1$. Так как функция f, очевидно, непрерывна на $[0;\,+\infty)$, то $f \in C^1([0;\,+\infty))$. Ясно, что $f'(0) = 0$.

Аналогично доказывается гладкость функции g и равенство $g'(a) = -\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos\varphi \ln(1 - 2a\cos\varphi + a^2)\,d\varphi$. Поэтому

$$g'(a) = 4a\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2} = 4a\left(\int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi}\right) =$$

$$= 4a(1+a^2)\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{(1+a^2)^2 - 4a^2\cos^2\varphi} = \frac{\pi}{a}(1+a^2-|1-a^2|) =$$

$$= 2\pi\min(a;\,a^{-1}).$$

Поскольку

$$g(0) = \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} \ln(u^2+v^2)\,du\,dv = 2\pi\int_0^1 r\ln r^2\,dr = -\pi,$$

то $g(a) = \pi(a^2-1)$ при $a \in [0;\,1]$ и $g(a) = 2\pi\ln a$ при $a > 1$.

2.15. Воспользуйтесь методом математической индукции.

2.16. Пусть $J_n(a) = \int\limits_{[0;1]^n} \frac{dx}{a + x_1 + \ldots + x_n}$. Ясно, что

$$J_n^{(k)}(a) = (-1)^k k! \int\limits_{[0;1]^n} \frac{dx}{(a + x_1 + \ldots + x_n)^{k+1}}.$$

С другой стороны,

$$J_n(a) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{[0,1]^{n-1}} \frac{dx_2 \ldots dx_n}{(a + x_1) + x_2 + \ldots + x_n} \right) dx_1 = \int\limits_0^1 J_{n-1}(a + t)\, dt.$$

Поэтому

$$J_n'(a) = \int\limits_0^1 J_{n-1}'(a + t)\, dt = \Delta J_{n-1}(a).$$

По индукции получаем, что

$$J_n^{(k)}(a) = \Delta_k J_{n-k}(a) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n - 1).$$

В частности,

$$J_n^{(n-1)}(a) = \Delta_{n-1} J_1(a) = \Delta_{n-1}(\ln(a + 1) - \ln a) = \Delta_n(\ln a),$$

т. е.

$$\int\limits_{[0;1]^n} \frac{dx}{(a + x_1 + \ldots + x_n)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \Delta_n(\ln a). \tag{1}$$

Таким образом, требуемое равенство доказано при $m = n$. Докажем его для $1 \leqslant m < n$ индукцией от $m + 1$ к m. Равенство (1) есть база индукции. Допустим, что $m < n$ и

$$\int\limits_{[0;1]^n} (a + x_1 + \ldots + x_n)^{-m-1}\, dx = \frac{(-1)^m}{m!\,(n - m - 1)!} \Delta_n (a^{n-m-1} \ln a).$$

Интегрируя это равенство по промежутку $[\alpha; \beta]$ $(0 < \alpha < \beta)$, получаем

$$\int\limits_{[0;1]^n} \left(\int\limits_\alpha^\beta (a + x_1 + \ldots + x_n)^{-m-1}\, da \right) dx =$$

$$= \frac{(-1)^m}{m!\,(n-m-1)!}\, \Delta_n \left(\int\limits_\alpha^\beta a^{n-m-1} \ln a\, da \right). \qquad (2)$$

Заметим, что

$$\int\limits_\alpha^\beta t^{n-m-1} \ln t\, dt = \frac{1}{n-m} (\beta^{n-m} \ln \beta - \alpha^{n-m} \ln \alpha) - \frac{\beta^{n-m} - \alpha^{n-m}}{(n-m)^2}$$

и, кроме того, $\Delta_n(\beta^{n-m} - \alpha^{n-m}) = 0$, поскольку $\Delta_n(p(x)) \equiv 0$, если степень полинома p меньше n. Поэтому из (2) следует, что

$$\int\limits_{[0;1]^n} \left((\alpha + x_1 + \ldots + x_n)^{-m} - (\beta + x_1 + \ldots + x_n)^{-m} \right) dx =$$

$$= \frac{(-1)^m}{(m-1)!\,(n-m)!}\, \Delta_n (\beta^{n-m} \ln \beta - \alpha^{n-m} \ln \alpha). \qquad (3)$$

Так как

$$\Delta_n(\beta^k \ln \beta) \mapsto 0 \quad \text{при} \quad \beta \to +\infty, \quad \text{если} \quad k < n, \qquad (4)$$

то, переходя к пределу в равенстве (3) при $\beta \to +\infty$, получаем требуемый результат.

Соотношение (4) следует из равенств

$$\Delta_n f(x) = f^{(n)}(x + \theta_n n), \quad \text{где} \quad 0 < \theta_n < 1,$$

и

$$(x^k \ln x)^{(n)} = \frac{k!\,(n-k-1)!}{x^{n-k}} (-1)^{n-k-1} \quad \text{при } n > k.$$

2.17. а) В интеграле $\int\limits_{Q_n} f(a_0 + (a_1 - a_0) x_1 + \ldots + (a_n - a_0) x_n) \times$ $\times\, dx_1 \ldots dx_n$ сделайте замену переменных $y_1 = 1 - x_1$, $y_2 = x_2/y_1, \ldots, y_n = x_n/y_1$. Воспользуйтесь индукцией.

б) Оба интеграла (интегралы Фейнмана, см. [31], с. 77) могут быть вычислены с помощью индукции.

2.28. а) Считая, что $ab \neq 0$, сделайте замену переменных $x = u$, $ax + by = cv$, где $c = |a| + |b|$. Это приводит к равенству

$$\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(ax + by) \frac{dx\, dy}{(1 + x^2)(1 + y^2)} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(cv)\, dv \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{c\,du}{|b|\,(1 + u^2)\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\left(u - \frac{c}{a} v\right)^2\right)}.$$

Убедитесь в том, что внутренний интеграл равен $\dfrac{\pi}{(1+v^2)}$.

б) Опираясь на п. а) для обоснования индукционного перехода, докажите с помощью индукции, что

$$\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|c+\sum_{1\leqslant k\leqslant n}a_kx_k\right|^p\frac{dx_1\ldots dx_n}{\left(1+x_1^2\right)\ldots\left(1+x_n^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|c+t\sum_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|\right|^p\frac{dt}{1+t^2}.$$

При $c=0$ это приводит к равенству

$$\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\sum_{1\leqslant k\leqslant n}a_kx_k\right|^p\frac{dx_1\ldots dx_n}{\left(1+x_1^2\right)\ldots\left(1+x_n^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|\right)^p\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|t|^p\,dt}{1+t^2}.$$

Последний интеграл выражается через Г-функцию Эйлера:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|t|^p\,dt}{1+t^2}=2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{-p}\varphi\sin^p\varphi\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{-p-1}\varphi\sin^{p-1}\varphi\,d\sin^2\varphi=\int\limits_0^1 s^{(p-1)/2}(1-s)^{-(p+1)/2}\,ds=$$

$$=B\left(\frac{p+1}{2},\frac{1-p}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-p}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{p+1}{2}\pi}=\frac{\pi}{\cos\frac{\pi}{2}p}.$$

2.19. Представьте интеграл в виде суммы интегралов по квадратам

$$\left[\frac{k-1}{n};\ \frac{k}{n}\right]\times\left[\frac{j-1}{n};\ \frac{j}{n}\right]\quad(1\leqslant k,\ j\leqslant n).$$

Чтобы вычислить эти интегралы с точностью до $o(n^{-4})$, замените функцию f ее многочленом Тейлора второй степени, построенным для точки

$$\left(\frac{k-1/2}{n};\quad\frac{j-1/2}{n}\right).$$

Глава VI. АСИМПТОТИКА

§ 1. Асимптотика интегралов

1.2. а) Воспользуйтесь соотношением $1-x^a \sim a(1-x)$ при $x \to 1$.

б) Сравните интеграл $\mathscr{K}(t)$ с интегралом

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2(1-x)(1-tx)(1+t)}}.$$

в) Сравните интеграл $\mathscr{L}(t)$ с интегралом, получающимся из него заменой $\cos x$ на $1-x^2/2$.

1.3. а) Воспользуйтесь соотношением

$$\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{\ln A + O(1)} = \frac{1}{\ln A} + O\left(\frac{1}{\ln^2 A}\right) \quad \text{при} \quad x \in [A; 2A].$$

б), в) Используйте результат задачи 1.1. а).

г), д) Проинтегрируйте по частям и воспользуйтесь результатом задачи 1.1. г).

1.4. а) Сделайте замену переменной $y = x^p/A$.

б) После замены переменной $y = Ax^2$ проинтегрируйте по частям.

в) В показателе экспоненты выделите полный квадрат.

г) Представьте интеграл в виде $A \ln^p A \int\limits_{2/A}^{+\infty} \left(1 + \frac{\ln t}{\ln A}\right)^p \frac{dt}{e^t}$ и докажите, что

$$\int\limits_{2/A}^{+\infty} \left(1 + \frac{\ln t}{\ln A}\right)^p \frac{dt}{e^t} = \int\limits_{2/A}^{+\infty} \frac{dt}{e^t} + o(1).$$

Для этого при $p > 0$ воспользуйтесь соотношением $|(1+z)^p - 1| = O(|z| + |z|^p)\ (z > -1)$. При $p < 0$ проверьте, что

$$\int\limits_{2/A}^{1/\sqrt{A}} \left(1 + \frac{\ln t}{\ln A}\right)^p \frac{dt}{e^t} = O\left(\frac{1}{\sqrt{A}\ln^p A}\right)$$

и оцените интеграл $\int\limits_{1/\sqrt{A}}^{+\infty} \left|\left(1 + \frac{\ln t}{\ln A}\right)^p - 1\right| \frac{dt}{e^t}$, воспользовавшись тем, что $|(z+1)^p - 1| = O(z)\ (z > -1/2)$.

1.6. а), б) С помощью интегрирования по частям докажите ограниченность интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^{1+\varepsilon}}\, dx$ при $\varepsilon \geqslant 0$.

в) Для оценки интеграла по промежутку $[\pi/2; +\infty)$ дважды проинтегрируйте по частям.

г) Представив интеграл в виде $\varepsilon(1+\varepsilon)\int\limits_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^{2+\varepsilon}}\,dx$, докажите, что можно перейти к пределу под знаком интеграла. Воспользуйтесь равенством (см. задачу V.1.22)

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

1.7. а) После замены переменной $y=x^p$ решение аналогично решению задачи 1.6. г).

б) С помощью замены переменной $y=x^p$ и интегрирования по частям докажите, что интеграл по промежутку $[1; +\infty)$ бесконечно мал.

1.8. Пользуясь ограниченностью интегралов $\int^t (\varphi(u)-C_\varphi)\,du$, покажите, что при $\varepsilon\geqslant 0$ ограничены интегралы $\int^\infty \frac{\varphi(t)-C_\varphi}{t^{1+\varepsilon}}\,dt$.

1.9. а) Воспользуйтесь ограниченностью функции $x^{-2}-\sin^{-2}x$ на промежутке $(0; \pi/2)$.

б) Сделайте замену переменной $y=Ax$ и воспользуйтесь результатом задачи V.1.37. б). Для оценки интеграла $\int\limits_A^{+\infty}\frac{\cos y}{\sqrt{y}}\,dy$ проинтегрируйте его по частям.

в) Пусть $I(A)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 x\,dx}{1+\cos^2 Ax}$ и $J(A)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x\,dx}{1+\cos^2 Ax}$. Ясно, что

$$I(A)+J(A)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\cos^2 Ax}=$$

$$=\frac{1}{A}\int\limits_0^{A\pi/2}\frac{dx}{1+\cos^2 x}\xrightarrow[A\to+\infty]{}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Докажите, что $I(A)-J(A)\xrightarrow[A\to+\infty]{}0$. См. также задачу 1.14.

г) Воспользуйтесь соотношением $x^{-4} - \sin^{-4} x = O(x^{-2})$ и результатом задачи а).

1.10. Представьте интеграл в виде суммы интегралов по промежуткам $[\pi n;\ \pi(n+1)]$ $(n \in \mathbb{N})$ и оцените каждый из них сверху и снизу. См. также задачу 1.13.

1.11. Воспользуйтесь соотношением

$$\left| \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\,\varphi(t)\,dt \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} (f(t) - f(\alpha))\,\varphi(t)\,dt \right| \leqslant (f(\alpha) - f(\alpha+T)) \int\limits_{0}^{T} |\varphi(t)|\,dt.$$

1.12. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

1.13. Решение аналогично решению задачи 1.10.

1.14. Можно считать, что $C_\varphi = 0$ (иначе следует рассмотреть функцию $\tilde{\varphi} = \varphi - C_\varphi$). Представив данный интеграл в виде суммы интегралов по промежуткам длиной T/A, воспользуйтесь соотношением

$$\left| \int\limits_{t}^{t+T/A} f(x)\,\varphi(Ax)\,dx \right| = \left| \int\limits_{t}^{t+T/A} (f(x) - f(t))\,\varphi(Ax)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \omega_f\left(\frac{T}{A}\right) \frac{1}{A} \int\limits_{0}^{T} |\varphi(x)|\,dx,$$

где $\omega_f(\delta) = \sup\limits_{|t'-t''| \leqslant \delta} |f(t') - f(t'')|$ — модуль непрерывности функции f.

1.15. Пусть Δ_k — промежутки вида $[2\pi k/A;\ 2\pi(k+1)/A]$, $k = p, \ldots, q$, содержащиеся в $[a;\ b]$; ω_f — модуль непрерывности функции f. Тогда

$$I(A) = O(1/A) + \sum_{p \leqslant k \leqslant q} \int\limits_{\Delta_k} f(x;\ \sin Ax)\,dx =$$

$$= O(1/A) + O(\omega_f(2\pi/A)) + \sum_{p \leqslant k \leqslant q} \int\limits_{\Delta_k} f(2\pi k/A;\ \sin Ax)\,dx.$$

Следовательно,

$$I(A) = o(1) + \frac{1}{2\pi} \sum_{p \leqslant k \leqslant q} \frac{2\pi}{A} \int\limits_{0}^{2\pi} f(2\pi k/A;\ \sin t)\,dt \xrightarrow[A \to +\infty]{}$$

$$\xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{a}^{b} \left(\int\limits_{0}^{2\pi} f(x;\ \sin t)\,dt \right) dx.$$

В заключение отметим, что в условии задачи вместо $\sin Ax$ можно взять любую непрерывную на $\mathbb{R}$ периодическую функцию.

1.16. а) Сделаем замену переменной $x = t/\Delta$, где $\Delta = \Delta_\varepsilon$ — малый положительный параметр. Имеем

$$\int_0^{+\infty} e^{-x(1-x^{-\varepsilon})}\,dx = \frac{1}{\Delta}\int_0^{+\infty} \exp\left(\left(\frac{t}{\Delta}\right)^{1-\varepsilon} - \frac{t}{\Delta}\right) dt.$$

Подберем теперь параметр Δ_ε так, чтобы при $\varepsilon \to +0$ подынтегральная функция стремилась к положительной интегрируемой функции. Нетрудно видеть, что взяв $\Delta_\varepsilon = \varepsilon \ln(1/\varepsilon)$, получим

$$\exp\left(\left(\frac{t}{\Delta_\varepsilon}\right)^{1-\varepsilon} - \frac{t}{\Delta_\varepsilon}\right) \xrightarrow[\varepsilon\to+0]{} e^{-t}.$$

Поэтому для доказательства соотношения

$$\int_0^{+\infty} e^{-x(1-x^{-\varepsilon})}\,dx \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \frac{1}{\varepsilon\,|\ln\varepsilon|}$$

достаточно обосновать предельный переход под знаком интеграла

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(\left(\frac{t}{\Delta_\varepsilon}\right)^{1-\varepsilon} - \frac{t}{\Delta_\varepsilon}\right) dt \xrightarrow[\varepsilon\to+0]{} \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1.$$

Для изучения интеграла, стоящего в левой части, разобьем его на сумму интегралов по промежуткам $[0;\ 1/|\ln\varepsilon|]$, $[\ln^2\varepsilon;\ +\infty)$ и $[1/|\ln\varepsilon|;\ \ln^2\varepsilon]$. Первые два интеграла оценим сверху. Из неравенства $u^{1-\varepsilon} - u \leqslant \varepsilon(1-u)$ при $u > 0$ и $0 < \varepsilon < 1$ следует, что

$$\exp\left(\left(\frac{t}{\Delta}\right)^{1-\varepsilon} - \frac{t}{\Delta}\right) \leqslant \exp\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon}{\Delta}t\right).$$

Поэтому

$$\int_{\ln^2\varepsilon}^{+\infty} \exp\left(\left(\frac{t}{\Delta}\right)^{1-\varepsilon} - \frac{t}{\Delta}\right) dt \leqslant \int_{\ln^2\varepsilon}^{+\infty} e^{\varepsilon - \frac{\varepsilon}{\Delta}t}\,dt = e^{\varepsilon}\cdot\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to+0]{} 0.$$

Так как подынтегральная функция равномерно ограничена сверху при $t > 0$ и $0 < \varepsilon < 1$, то интеграл по промежутку $[0;\ 1/|\ln\varepsilon|]$ бесконечно мал. Для вычисления интеграла по промежутку $[1/|\ln\varepsilon|;\ \ln^2\varepsilon]$ представим разность $\left(\frac{t}{\Delta}\right)^{1-\varepsilon} - \frac{t}{\Delta}$ в виде

$$\frac{t}{\Delta}\left(e^{-\varepsilon\ln\frac{t}{\Delta}} - 1\right) = \frac{t}{\Delta}\left(-\varepsilon\ln\frac{t}{\Delta} + O\left(\varepsilon^2\ln^2\frac{t}{\Delta}\right)\right) = -t\,(1 + o(1)).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{1/|\ln\varepsilon|}^{\ln^2\varepsilon} \exp\left(\left(\frac{t}{\Delta}\right)^{1-\varepsilon} - \frac{t}{\Delta}\right) dt = \int\limits_{1/|\ln\varepsilon|}^{\ln^2\varepsilon} \frac{dt}{e^{t(1+o(1))}} \sim \int\limits_{1/|\ln\varepsilon|}^{\ln^2\varepsilon} \frac{dt}{e^t} \xrightarrow[\varepsilon\to+0]{} 1.$$

б) Решение этого примера аналогично решению примера а).

1.17. а) Воспользуйтесь соотношением

$$x^{\varepsilon x} = e^{\varepsilon x \ln x} = 1 + \varepsilon x \ln x + \frac{\varepsilon^2}{2} x^2 \ln^2 x + O(\varepsilon^3), \qquad 0 < x \leqslant 1.$$

б) Сделав замену переменной $t = \varepsilon/\sqrt{x}$, получаем

$$\int\limits_0^1 e^{-\varepsilon/\sqrt{x}}\, dx = 2\varepsilon^2 \int\limits_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^3}\, dt = 2\varepsilon^2 \int\limits_\varepsilon^1 \frac{e^{-t}}{t^3}\, dt + O(\varepsilon^2).$$

Остается воспользоваться тейлоровским разложением экспоненты.

в) Разбейте промежуток $[0;\ 1]$ на промежутки $[0;\ \theta]$ и $[\theta;\ 1]$, где $\theta = \theta_\varepsilon = o(\varepsilon/\ln\varepsilon)$. Интеграл по промежутку $[0;\ \theta]$ не превосходит θ. На промежутке $[\theta;\ 1]$ замените экспоненту ее тейлоровским разложением, предварительно проверив с помощью интегрирования по частям, что

$$\int\limits_\theta^1 \frac{dx}{x^2 \ln^4(x/e)} = O\left(\frac{1}{\theta \ln^4 \theta}\right).$$

Убедитесь в том, что при $\theta_\varepsilon = \varepsilon/\ln^2\varepsilon$ для остаточного члена в доказываемой формуле получается оценка $O\left(\dfrac{\varepsilon \ln|\ln\varepsilon|}{\ln^2\varepsilon}\right)$.

1.18. Воспользуйтесь неравенством

$$|e^{\varepsilon u} - (1+\varepsilon u)| \leqslant \begin{cases} \varepsilon^2 e^u & \text{при } u > 0,\ 0 < \varepsilon < 1; \\ C_p \varepsilon^p |u|^p & \text{при } u < 0. \end{cases}$$

1.19. а) Сделайте замену переменной $t = nx$ и оцените интегралы по промежуткам $[(k-1)\pi;\ k\pi]$ сверху и снизу.

б), в) Докажем более общее утверждение:

$$\int\limits_0^\pi \max_{1\leqslant k\leqslant n} a_k |\sin kx| \frac{dx}{x} = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{a_k}{k} + O(1),$$

если невозрастающая последовательность положительных чисел $\{a_k\}$ такова, что последовательность $\{ka_k\}$ не убывает.

Положим $M(x) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k |\sin kx|$. Так как $|\sin t| \leqslant |t|$, то $M(x) \leqslant xna_n$, и поэтому интеграл по промежутку $[0;\ 1/n]$ дает ограниченный вклад. Для оценки интеграла сверху воспользуемся тем, что $M(x) \leqslant \max(a_1 x;\ 2a_2 x;\ \ldots;\ ka_k x;\ a_{k+1};\ \ldots;\ a_n) = ka_k x$, если $x \geqslant 1/k$. Следовательно,

$$\int_0^\pi \frac{M(x)}{x}\,dx \leqslant O(1) + \sum_{2\leqslant k\leqslant n} \int_{1/k}^{1/(k-1)} ka_k x \frac{dx}{x} = O(1) + \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{a_k}{k}.$$

Для оценки интеграла снизу заметим, что на промежутках $[\pi/(2k+2);\ \pi/2k]$ $(k = 2, \ldots, n)$ справедливо неравенство $M(x) \geqslant$ $\geqslant a_k \sin kx \geqslant \frac{2}{\pi} kxa_k$, и поэтому

$$\int_0^\pi \frac{M(x)}{x}\,dx \geqslant O(1) + \sum_{2\leqslant k\leqslant n} \int_{\pi/(2k+2)}^{\pi/2k} \frac{2}{\pi} kxa_k \frac{dx}{x} = O(1) + \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{a_k}{k}.$$

§ 2. Метод Лапласа

2.1. Так как $(n+1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos^n x\,dx = 1$, то достаточно доказать, что

$$\int_0^{\pi/2} (xf(x) - f(0)\sin x)\cos^n x\,dx = o(1/n).$$

Зафиксировав произвольное число $\varepsilon > 0$, получаем для интеграла по промежутку $[\varepsilon;\ \pi/2]$ оценку $O(\cos^n \varepsilon) = o(1/n)$. Для оценки интеграла по промежутку $[0;\ \varepsilon]$ заметим, что на этом промежутке

$$|xf(x) - f(0)\sin x| \leqslant \delta_\varepsilon \sin x,$$

где
$$\delta_\varepsilon = \sup_{0<x\leqslant\varepsilon} \left| f(0) - \frac{x}{\sin x} f(x) \right| \xrightarrow[\varepsilon\to+0]{} 0.$$

2.2. Сделайте замену переменной $y = x\sqrt{A}$.

2.4. Проверьте, что интеграл по каждому промежутку $[\sigma;\ \theta]$, $0 < \sigma < \theta$, экспоненциально убывает при $A \to +\infty$.

2.5. а) Ясно, что

$$A^{1/p}\int_0^1 (1-x^p)^A\,dx = \int_0^{A^{1/p}} \left(1 - \frac{t^p}{A}\right)^A dt.$$

Поэтому

$$\overline{\lim_{A\to+\infty}}\ A^{1/p}\int_0^1 (1-x^p)^A\,dx \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-t^p}\,dt = \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} x^{1/p-1}e^{-x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{p}\,\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) = \Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

С другой стороны, для любого положительного числа a имеем

$$\underline{\lim_{A\to+\infty}}\ A^{1/p}\int_0^1 (1-x^p)^A\,dx \geqslant \underline{\lim_{A\to+\infty}}\int_0^a \left(1-\frac{t^p}{A}\right)^A dt = \int_0^a e^{-t^p}\,dt.$$

Следовательно,

$$\underline{\lim_{A\to+\infty}}\ A^{1/p}\int_0^1 (1-x^p)^A\,dx \geqslant \int_0^{+\infty} e^{-t^p}\,dt = \Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

Из приведенного решения следует, что ту же асимптотику имеет интеграл по любому промежутку $[0;\ \theta]$, $0<\theta<1$.

б), в) Решение аналогично решению задачи а). В задаче в) предварительно сделайте замену переменной $y = x^{1+p}$.

2.6. Не умаляя общности, можно считать, что $a=0$ и $C=1$ (в противном случае следует сделать замену переменной $y = C^p(x-a)$). Зафиксируем числа l и L, $0<l<1<L$, и подберем такое положительное число θ, что

$$lx^{1/p} \leqslant 1-\varphi(x) \leqslant Lx^{1/p} < 1 \quad \text{при} \quad x\in(0;\ \theta).$$

Разобьем интеграл $\Phi(A)$ на сумму интегралов по промежуткам $[0;\ \theta]$ и $[\theta;\ b)$. Для первого из них справедлива двусторонняя оценка

$$\int_0^\theta (1-Lx^{1/p})^A\,dx \leqslant \int_0^\theta \varphi^A(x)\,dx \leqslant \int_0^\theta (1-lx^{1/p})^A\,dx,$$

а второй интеграл легко оценивается сверху

$$\int_\theta^b \varphi^A(x)\,dx \leqslant \varphi^{A-1}(\theta)\int_\theta^b \varphi(x)\,dx = o\left(A^{-p}\right).$$

Поэтому

$$\underline{\lim_{A\to+\infty}}\ A^p\int_0^\theta (1-Lx^{1/p})^A\,dx \leqslant \underline{\lim_{A\to+\infty}}\ A^p\Phi(A) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{A\to+\infty}}\ A^p\Phi(A) \leqslant \overline{\lim_{A\to+\infty}}\ A^p\int_0^\theta (1-lx^{1/p})^A\,dx.$$

Следовательно (см. решение задачи 2.5. а)),

$$L^{-p}\Gamma(1+p) \leqslant \varliminf_{A\to+\infty} A^p\Phi(A) \leqslant \varlimsup_{A\to+\infty} A^p\Phi(A) \leqslant l^{-p}\Gamma(1+p).$$

В силу произвольности чисел l и L, $0 < l < 1 < L$, отсюда вытекает равенство $\lim\limits_{A\to+\infty} A^p\Phi(A) = \Gamma(1+p)$.

2.7. Решение аналогично решению предыдущей задачи.

2.8. Положим $h = g - f$ и докажем, что $\int\limits_a^b h(x)\,\varphi^A(x)\,dx = o\left(\int\limits_a^b f(x)\,\varphi^A(x)\,dx\right)$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и пусть β такое число из интервала $(a;\ b)$, что $|h(x)| \leqslant \varepsilon f(x)$ при $x \in (a;\ \beta)$. Тогда

$$\left|\int\limits_a^\beta h(x)\,\varphi^A(x)\,dx\right| \leqslant \varepsilon\int\limits_a^\beta f(x)\,\varphi^A(x)\,dx$$

и

$$\left|\int\limits_\beta^b h(x)\,\varphi^A(x)\,dx\right| \leqslant \varphi^A(\beta)\int\limits_a^b |h(x)|\,dx.$$

Следовательно,

$$\left|\int\limits_a^b h(x)\,\varphi^A(x)\,dx\right| \leqslant \varepsilon\int\limits_a^b f(x)\,\varphi^A(x)\,dx + O\left(\varphi^A(\beta)\right).$$

Покажем теперь, что $\varphi^A(\beta) = o\left(\int\limits_a^b f(x)\,\varphi^A(x)\,dx\right)$. Для этого зафиксируем число α из интервала $(a;\ \beta)$ и заметим, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,\varphi^A(x)\,dx \geqslant \int\limits_a^\alpha f(x)\,\varphi^A(x)\,dx \geqslant \varphi^A(\alpha)\int\limits_a^\alpha f(x)\,dx.$$

Так как $\varphi(\alpha) > \varphi(\beta)$ и $\int\limits_a^\alpha f(x)\,dx > 0$, то

$$\varphi^A(\beta) = o\left(\varphi^A(\alpha)\right) = o\left(\int\limits_a^b f(x)\,\varphi^A(x)\,dx\right).$$

Таким образом, $\left|\int\limits_a^b h(x)\,\varphi^A(x)\,dx\right| \leqslant 2\varepsilon\int\limits_a^b f(x)\,\varphi^A(x)\,dx$, если A достаточно велико.

2.9. Используйте асимптотическую формулу Лапласа (задача 2.6).

б) Применив результат задачи 2.8, замените $\cos(ax)$ на 1.

в) Сделайте замену переменной $x = Ay$.

г) Основной вклад дает интеграл по промежутку $[0;\ 1]$. Используя результат задачи 2.8, замените в нем $\sin x$ на x и после этого сделайте замену переменной $y = x^{2-p}$.

е) Проверьте, что основной вклад дает интеграл по промежутку $[0;\ \pi/4]$. В этом интеграле замените $\cos x$ на $\cos(2x)$.

з) С помощью результата задачи 2.7 покажите, что основной вклад дает интеграл по промежутку $[1/2;\ 1]$.

2.10. в) Сделайте замену переменной $x = y^2$.

2.11. а) Легко видеть, что $x_A \to 1$ при $A \to +\infty$. Сделав замену переменной $x = 1 + t$, получим

$$e^{\sqrt{A}}\Phi(A) = \int\limits_{-1}^{+\infty}\left(\frac{2+2t}{2+2t+t^2}\right)^A \frac{dt}{e^{\sqrt{A}t}} = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} + \int\limits_{-1}^{-\varepsilon} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Так как

$$I_1 = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp\left(-\frac{A}{2}t^2 - \sqrt{A}\,t + O(At^3)\right)dt,$$

то в случае $A\varepsilon^3 \to 0$ имеем

$$I_1 = (1 + o(1))\sqrt{\frac{e}{A}}\int\limits_{1-\varepsilon\sqrt{A}}^{1+\varepsilon\sqrt{A}} e^{-u^2/2}\,du.$$

Поэтому $I_1 \sim \sqrt{2\pi e/A}$, если $\varepsilon\sqrt{A} \to +\infty$ (например, $\varepsilon = A^{-2/5}$). Интеграл I_2 легко оценивается сверху:

$$I_2 \leqslant \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-\sqrt{A}t}\,dt = o\left(1/\sqrt{A}\right).$$

Для оценки интеграла I_3 проверьте, что подынтегральная функция не убывает на промежутке $[-1;\ -\varepsilon]$, если $\varepsilon = A^{-2/5}$. Поэтому

$$I_3 \leqslant \left(\frac{2-2\varepsilon}{2-2\varepsilon+\varepsilon^2}\right)^A e^{\varepsilon\sqrt{A}} = \exp\left(\varepsilon\sqrt{A} - A\varepsilon^2/2 + O(A\varepsilon^3)\right) = o\left(1/\sqrt{A}\right).$$

б) В этом примере $x_A \equiv 1$. После замены переменной $y = 1 - x$ получаем

$$A^{-p}\Phi(A) = \int\limits_0^1 e^{p((1-y)\ln(A-Ay)-\ln A)}\,dy = \int\limits_0^{\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{1} = I_1 + I_2,$$

Так как $(1-y)\ln(A-Ay)-\ln A=-(1+\ln A)y+O(y^2)$, то

$$I_1=(1+O(\varepsilon^2))\int\limits_0^{\varepsilon} e^{-p(1+\ln A)y}\,dy=\frac{1+O(\varepsilon^2)}{p(1+\ln A)}\int\limits_0^{\varepsilon p(1+\ln A)} e^{-t}\,dt.$$

Поэтому $I_1\sim(1+O(\varepsilon^2))/(p\ln A)$, если $\varepsilon p(1+\ln A)\to+\infty$. Пусть $\varepsilon=1/\sqrt{\ln A}$. Интеграл I_2 оценим сверху, пользуясь убыванием подынтегральной функции

$$I_2\leqslant\exp(p(1-\varepsilon)\ln(A-A\varepsilon)-p\ln A)\leqslant e^{-p\varepsilon\ln A}=$$

$$=e^{-p\sqrt{\ln A}}=o(1/\ln A).$$

в) Сделайте замену переменной $y=x/A$. С помощью формулы Тейлора изучите интеграл по промежутку $[0;\ A^{-2/3}]$, а интеграл по промежутку $[A^{-2/3};\ 1]$ оцените сверху, пользуясь убыванием подынтегральной функции на промежутке $[A^{-2/3};\ 1]$ при большом A.

2.12. Оцените сверху интегралы по промежуткам $[0;\ 1/(A\ln A)]$ и $[(2\ln A)/A;\ 1]$. При вычислении интеграла по оставшемуся промежутку воспользуйтесь соотношением

$$|\ln x|=(1+o(1))\ln A\quad\text{при}\quad x\in[1/(A\ln A);\ (2\ln A)/A].$$

2.13. а) Обозначим данный интеграл через $\Phi(A)$. После замены переменной $x\mapsto Ax$ получаем

$$\Phi(A)=\frac{1}{A}\int\limits_0^{A}\frac{dx}{e^{(x\ln x)/A}}=O\left(1/\sqrt{A}\right)+\frac{1}{A}\int\limits_{\sqrt{A}}^{A}\frac{dx}{e^{(x\ln x)/A}}.$$

Рассмотрим функцию $t=x\ln x$ на промежутке $[\sqrt{A},\ A]$, и пусть $x=\varphi(t)$ — обратная к ней функция. Тогда

$$\Phi(A)=O\left(1/\sqrt{A}\right)+\frac{1}{A}\int\limits_{(\sqrt{A}\ln A)/2}^{A\ln A}\frac{\varphi'(t)}{e^{t/A}}\,dt.$$

Для изучения полученного интеграла рассмотрим функцию φ' при больших значениях аргумента

$$\varphi'(t)=1/(1+\ln x)=1/\ln x+O(1/\ln^2 x).$$

Так как $\ln x+\ln\ln x=\ln t$, то $\ln x=\ln t+O(\ln\ln t)$, и следовательно, $\varphi'(t)=1/\ln t+O((\ln\ln t)/\ln^2 t)$. Поэтому для всех t из промежутка $[(\sqrt{A}\ln A)/2;\ A\ln A]$ имеем

$$\varphi'(t)=\frac{1}{\ln t}+O\left(\frac{\ln\ln A}{\ln^2 A}\right)=\frac{1}{\ln A}+O\left(\frac{|\ln(t/A)|+\ln\ln A}{\ln^2 A}\right).$$

Отсюда сразу вытекает, что

$$\Phi(A)=\frac{1}{A\ln A}\int\limits_{(\sqrt{A}\ln A)/2}^{A\ln A}\frac{dt}{e^{t/A}}+O\left(\frac{\ln\ln A}{\ln^2 A}\right)=\frac{1+o(1)}{\ln A}.$$

б) Решение аналогично решению задачи а).

2.14. Записав $\Gamma(1+x)$ в виде $x(x/e)^x\int\limits_{-1}^{+\infty}\left(\frac{1+t}{e^t}\right)^x dt$, воспользуйтесь асимптотической формулой Лапласа (задача 2.6).

2.15. Используйте формулу Стирлинга.

2.16. Решение аналогично решению задачи 2.14.

2.17. а) Пусть $\varphi(x)=x+\theta\sqrt{x}$ $(\theta=\theta(x))$. В силу результата предыдущей задачи равенство $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\Gamma(1+x)}\int\limits_0^{\varphi(x)}t^xe^{-t}\,dt=\frac{1}{2}$ равносильно равенству $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\Gamma(1+x)}\int\limits_x^{x+\theta\sqrt{x}}t^xe^{-t}\,dt=0$. Сделав замену переменной $t=x+u\sqrt{x}$ и воспользовавшись формулой Стирлинга, получаем, что оно равносильно соотношению

$$\int\limits_0^{\theta(x)}\left(\frac{1+u/\sqrt{x}}{e^{u/\sqrt{x}}}\right)^x du=o(1),$$

которое справедливо лишь в случае $\theta(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.

б), в) Доказательство этих утверждений аналогично доказательству утверждения а).

§ 3. Асимптотика сумм

3.2. Оцените снизу суммы $\sum\limits_{n/2\leqslant k\leqslant n}k^\alpha a_k$.

3.3. Выразите суммы S_n и σ_n через числа $t_m=\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant m}k^\alpha x_k$ и воспользуйтесь результатами задач II.2.7. б) и в).

3.4. Выразите суммы S_n через числа $t_m=\sum\limits_{k\geqslant m}k^\alpha x_k$ и воспользуйтесь результатами задач II.2.7. б) и в).

3.5. а) Зафиксируем произвольное число $M>1$. Ясно, что

$$S_{[Mn]}-S_n=n^{1-\gamma}\left(\frac{M^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}+o(1)\right).$$

Так как

$$S_{[Mn]}-S_n=a_{[Mn]}+\ldots+a_{n+1}\leqslant a_n([Mn]-n)\leqslant(M-1)na_n,$$

то для любого $M>1$ справедливо неравенство

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} n^\gamma a_n\geqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{n^{\gamma-1}}{M-1}(S_{[Mn]}-S_n)=\frac{M^{1-\gamma}-1}{(M-1)(1-\gamma)}.$$

Поэтому

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} n^\gamma a_n\geqslant \lim_{M\to 1+0}\frac{M^{1-\gamma}-1}{(M-1)(1-\gamma)}=1.$$

Для доказательства неравенства $\overline{\lim}_{n\to\infty} n^\gamma a_n\leqslant 1$ покажите, что при $m\in(0;\ 1)$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} n^\gamma a_n\leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{n^{\gamma-1}}{1-m}(S_n-S_{[mn]})\leqslant\frac{1-m^{1-\gamma}}{(1-m)(1-\gamma)}.$$

б) Рассмотрите последовательность $a_n=\dfrac{\ln 2}{2^k}$ при $2^k\leqslant n<$ $<2^{k+1}$.

3.6. Решение аналогично решению задачи 3.5. а).

3.7. При $\alpha\leqslant 1$ воспользуйтесь соотношением $(1-1/n)^k=$ $=1+O(k/n)$, а при $\alpha>1$ — равенством

$$\ln n=\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k=x_n+\sum_{k>n^\alpha}\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k=x_n+O(n^{1-\alpha}).$$

3.8. См. [5]. Легко видеть, что $\tau(k)$ равно числу точек $(u;\ v)\in\mathbb{N}^2$, лежащих на гиперболе $uv=k$. Поэтому сумма $T(n)$ равна числу точек $(u;\ v)\in\mathbb{N}^2$, лежащих не выше гиперболы $uv\leqslant n$. В силу симметрии множества $\{(u;\ v)\in\mathbb{N}^2\mid uv\leqslant n\}$ относительно прямой $u=v$ для вычисления $T(n)$ достаточно подсчитать число $\widetilde{T}(n)$ точек в множестве

$$E=\{(u;\ v)\in\mathbb{N}^2\mid uv\leqslant n, u\leqslant\sqrt{n}\}$$

и учесть, что точки, лежащие в квадрате $[0;\ \sqrt{n}]\times[0;\ \sqrt{n}]$, входят и в множество, симметричное E (сделайте рисунок). Это дает

$$T(n)=2\widetilde{T}(n)-[\sqrt{n}]^2=$$
$$=2\sum_{1\leqslant k\leqslant\sqrt{n}}\left[\frac{n}{k}\right]-[\sqrt{n}]^2=2n\sum_{1\leqslant k\leqslant\sqrt{n}}\frac{1}{k}-n+O(\sqrt{n}).$$

Для вычисления возникшей суммы можно воспользоваться следующим уточнением результата задачи II.2.9:

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant N}\frac{1}{k}-\ln N-\gamma\sim\frac{1}{2N},$$

которое легко проверить с помощью теоремы Штольца (задача II.2.6).

3.9. а) Пусть $a=\sup n\sqrt{\alpha_n}$. Так как $\alpha_n\leqslant a^2/n^2$, то для любого номера N имеем

$$f(t)\leqslant t\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant N}\frac{1}{t^2}+\sum_{k>N}\alpha_k\right)\leqslant\frac{N}{t}+ta^2\sum_{k>N}\frac{1}{n^2}<\frac{N}{t}+\frac{ta^2}{N}.$$

Взяв $N=1+[at]$, получим при $t\geqslant 1/a$

$$f(t)\leqslant\frac{1+at}{t}+\frac{ta^2}{at}\leqslant 3a.$$

Если же $t\in[0;\ 1/a)$, то

$$f(t)\leqslant\frac{1}{a}\sum\alpha_k\leqslant a\sum\frac{1}{n^2}\leqslant 2a.$$

Неравенство б) доказывается аналогично.

в) Для оценки величины $\varliminf\limits_{t\to+\infty}f(t)$ снизу зафиксируем большой номер n. Тогда для всех t из промежутка $[1/\sqrt{\alpha_{n-1}};\ 1/\sqrt{\alpha_n}]$ имеем

$$f(t)\geqslant t\sum_{1\leqslant k<n}\frac{\alpha_k}{1+t^2\alpha_k}\geqslant t\sum_{1\leqslant k<n}\frac{\alpha_k}{2t^2\alpha_k}=\frac{n-1}{2t}\geqslant\frac{n-1}{2}\sqrt{\alpha_n}.$$

Следовательно, $\varliminf\limits_{t\to+\infty}f(t)\geqslant\frac{1}{2}\varliminf n\sqrt{\alpha_n}$.

3.10. Воспользуйтесь неравенствами $\int\limits_h^\infty f(t)\,dt\leqslant\varphi(h)\leqslant\int\limits_0^{+\infty}f(t)\,dt$. Для немонотонных функций равенство неверно. Например, если $f(n)=1$ при любом $n\in\mathbb{N}$, то $\varphi(1/n)=+\infty$. При этом нетрудно добиться, чтобы интеграл $\int\limits_0^{+\infty}f(t)\,dt$ сходился.

3.11. Используйте результат предыдущей задачи.

3.12. Ясно, что

$$f(p)=\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{1}{(2k+1)^p}-\frac{1}{(2k+2)^p}\right)=$$

$$=\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{(2k+1)^p}\left(1-\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)^{-p}\right).$$

Пользуясь формулой Тейлора, получаем, что $f(p)=O(p)+$ $+p\sum\limits_{k\geqslant 0}\frac{1}{(2k+1)^{1+p}}$. Так как $\frac{1}{(2k+1)^p}=\int\limits_k^{k+1}\frac{dt}{(2t+1)^{1+p}}+O\left(\frac{1}{k^{2+p}}\right)$, то

$$f(p)=p\int\limits_0^\infty\frac{dt}{(2t+1)^{1+p}}+O(p)=\frac{1}{2}+O(p).$$

3.13. Воспользуйтесь неравенствами $f(k+1)\leqslant\int\limits_k^{k+1}f(t)\,dt\leqslant f(k)$.

3.14. См. указание к предыдущей задаче.

3.15. Достаточно оценить величину

$$\Delta_k=f(k)-\int\limits_{k-1/2}^{k+1/2}f(t)\,dt\quad(k=M,\ \ldots,\ N).$$

В п. а) воспользуйтесь равенством

$$\Delta_k=\int\limits_{k-1/2}^{k}(f(k)-f(t))\,dt+\int\limits_k^{k+1/2}(f(k)-f(t))\,dt.$$

В п. б) с помощью интегрирования по частям докажите, что

$$\Delta_k=-\frac{1}{2}\int\limits_{k-1/2}^{k}\left(t-k+\frac{1}{2}\right)^2f''(t)\,dt-\frac{1}{2}\int\limits_k^{k+1/2}\left(t-k-\frac{1}{2}\right)^2f''(t)\,dt.$$

Заметим, что из равенства п. б) интегрированием по частям можно получить оценки разности Δ, содержащие производные более высоких порядков.

3.16. Воспользуйтесь результатом задачи 3.13. а) и формулой Тейлора.

3.17. Пользуясь рекуррентной формулой $\binom{n-\alpha-1}{n}=$ $=\frac{\alpha}{\alpha-n}\binom{n-\alpha}{n}$, задачу можно свести к случаю $\alpha<0$. Тогда $\ln\binom{n-\alpha}{n}=\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\ln\left(1-\frac{\alpha}{k}\right)$. Остается воспользоваться результатом задачи 3.13. а). Заметим, что из свойств Г-функции (см. задачу 2.15) вытекает равенство $C_\alpha = 1/\Gamma(1-\alpha)$.

3.18. После логарифмирования в пп. а) и б) используйте результат задачи 3.14, а в п. в) — задачи 3.15. б).

3.19. а) — в) Используя результат задачи 3.14, замените суммирование интегрированием. Получающиеся при этом интегралы рассмотрены в задачах 2.11. б) и 2.13. а). В п. в) предварительно используйте формулу Стирлинга.

г) Найдите асимптотику суммы последних $[\sqrt[3]{n}]$ слагаемых и покажите, что сумма остальных слагаемых достаточно мала.

3.20. Достаточно доказать, что $\sum\limits_{k>n} n^k/k! \sim e^n/2$. Для этого воспользуйтесь интегральным представлением остатка в формуле Тейлора для экспоненты и результатом задачи 2.9. в).

3.21. Найдем асимптотику сумм $S_n^{(p)} = \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \left(C_n^k\right)^p$, где p — фиксированное положительно число. Так как числа C_n^k быстро возрастают при $1 \leqslant k \leqslant n/2$, то основной вклад в рассматриваемую сумму вносят слагаемые с номерами, близкими к $n/2$ (как видно из последующего, достаточно учесть примерно $n^{2/3}$ центральных членов).

Предполагая, что $n = 2m$, имеем

$$S_n^{(p)} = \left(C_{2m}^m\right)^p\left(1 + 2\sum_{1\leqslant k<m}\left(C_{2m}^{m-k}/C_{2m}^m\right)^p\right).$$

Чтобы найти главную часть полученной суммы, заметим, что при $k > 1$

$$\frac{C_{2m}^{m-k}}{C_{2m}^m} = \frac{m}{m+k}\prod_{1\leqslant j<k}\frac{1-j/m}{1+j/m} = \frac{m}{m+k}\exp\left(\sum_{1\leqslant j<k}\ln\frac{1-j/m}{1+j/m}\right).$$

Из соотношения $0 < -2t - \ln\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right) = O\left(t^3\right)$ $(0 < t < 1/2)$ следует, что

$$\frac{C_{2m}^{m-k}}{C_{2m}^m} = \begin{cases}\left(1 + O\left(m^{-1/3}\right)\right)e^{-k^2/m} & \text{при } k \leqslant m^{2/3},\\ O\left(e^{-m^{1/3}}\right) & \text{при } k > m^{2/3}.\end{cases}$$

Таким образом (см. задачу 3.14),

$$\sum_{1\leqslant k<m}\left(\frac{C_{2m}^{m-k}}{C_{2m}^m}\right)^p = \left(1 + O\left(m^{-1/3}\right)\right)\sum_{1\leqslant k\leqslant m^{2/3}} e^{-\frac{p}{m}k^2} + o(1) =$$

$$= \left(1 + O\left(m^{-1/3}\right)\right)\int_1^{m^{2/3}} e^{-\frac{p}{m}u^2}\,du + O(1) \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}m}.$$

Для получения окончательного результата остается проверить, что $C_{2m}^m \sim 4^m/\sqrt{\pi m}$, откуда вытекает, что $S_n^{(p)} \sim \frac{1}{\sqrt{p}}\left(\frac{\pi}{2} n\right)^{(1-p)/2} 2^{np}$.

3.22. Обозначим сумму ряда через $\varphi_N(z)$. Ясно, что

$$\varphi_N(z) = \sum_{n\geqslant N} \int_0^1 e^{-z\sqrt{n+t}} \frac{dt}{n+t} + \sum_{n\geqslant N} \int_0^1 \left(\frac{e^{-z\sqrt{n}}}{n} - \frac{e^{-z\sqrt{n+t}}}{n+t}\right) dt.$$

Поэтому

$$\varphi_N(z) = \int_N^\infty \frac{e^{-z\sqrt{t}}}{t} dt + \sum_{n\geqslant N} e^{-z\sqrt{n}} O(1/n^2) +$$
$$+ \sum_{n\geqslant N} \int_0^1 \frac{e^{-z\sqrt{n}} - e^{-z\sqrt{n+t}}}{n+t} dt = \frac{2}{z} e^{-z\sqrt{N}} + O\left(\frac{e^{-z\sqrt{N}}}{N}\right) +$$
$$+ \sum_{n\geqslant N} e^{-z\sqrt{n}} \int_0^1 O\left(\frac{zt}{n^{3/2}}\right) dt = e^{-z\sqrt{N}}\left(\frac{2}{z} + O\left(\frac{1}{N} + \frac{|z|}{\sqrt{N}}\right)\right).$$

3.23. Используя результат задачи 3.15. б), получаем

$$\sum_{n\geqslant N} e^{-z\sqrt{n}} =$$
$$= \int_{N-1/2}^\infty e^{-z\sqrt{t}} dt - \frac{1}{2} \int_{N-1/2}^\infty \left(t - [t] - \frac{1}{2}\right)^2 \left(e^{-z\sqrt{t}}\right)_t'' dt = I - J.$$

Интеграл I легко вычисляется. Для оценки интеграла J запишем его в виде

$$J = \frac{1}{2} \int_{N-1/2}^\infty \left(t - [t] - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{z}{4t^{3/2}} + \frac{z^2}{4t}\right) e^{-z\sqrt{t}} dt =$$
$$= O\left(\frac{z}{\sqrt{N}} e^{-z\sqrt{N-\frac{1}{2}}}\right) + \frac{z^2}{8} \int_{N-1/2}^\infty \frac{\left(t - [t] - \frac{1}{2}\right)^2}{t} e^{-z\sqrt{t}} dt.$$

Получившийся интеграл можно оценить, разбив его на сумму интегралов по промежуткам $[k - 1/2;\ k + 1/2]$ $(k \geqslant N,\ k \in \mathbb{N})$; для оценки этой суммы примените результат предыдущей задачи.

3.24. Используя тождество $\cos(nx) = \frac{x}{2\sin(x/2)} \int\limits_{n-1/2}^{n+1/2} \cos(xt)dt$,

получаем

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos nx}{n^\alpha} = \frac{x}{2\sin(x/2)} \left(\int\limits_{1/2}^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{t^\alpha} dt + O(1) \right) =$$

$$= x^{\alpha-1} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos v}{v^\alpha} dv + O(1).$$

Аналогично доказывается, что

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin nx}{n^\alpha} = x^{\alpha-1} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin v}{v^\alpha} dv + O(1).$$

Из результата задачи VII.1.26 следует, что интегралы $A = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos v}{v^\alpha} dv$ и $B = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin v}{v^\alpha} dv$ положительны.

3.25. С помощью приема, использованного при решении предыдущей задачи, получаем для $x \in (0; \pi)$

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \frac{\cos nx}{n^\alpha} = \int\limits_0^N \frac{\cos(xt)}{t^\alpha} dt + O(1) = x^{\alpha-1} \int\limits_0^{Nx} \frac{\cos v}{v^\alpha} dv + O(1).$$

Отсюда следует, что равномерная (относительно $n \in \mathbb{N}$ и $x \in [0; \pi]$) ограниченность снизу сумм $\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant N} n^{-\alpha} \cos nx$ равносильна тому, что интеграл $I(u) = \int\limits_0^u \frac{\cos v}{v^\alpha} dv$ неотрицателен при $u \geqslant 0$. Ясно, что $\min\limits_{u\geqslant 0} I(u) = I(3\pi/2) = \int\limits_0^{3\pi/2} \frac{\cos v}{v^\alpha} dv$. Осталось показать, что функция $J(\alpha) = \int\limits_0^{3\pi/2} \frac{\cos v}{v^\alpha} dv$ один раз меняет знак на промежутке $(0; 1)$. Так как $J(0) = -1$ и $J(1-0) = +\infty$, то достаточно убедиться в монотонности функции J. Легко видеть, что

$$J'(\alpha) = \int\limits_0^{3\pi/2} \frac{\cos v}{v^\alpha} \ln\frac{1}{v} dv > \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos v}{v^\alpha} \ln\frac{1}{v} dv.$$

Пользуясь убыванием функции $v^{-\alpha}\cos v$ на промежутке $(0;\ \pi/2)$, получаем

$$J'(\alpha) > \int_0^{\pi/2} \frac{\cos v}{v^\alpha} \ln\frac{1}{v}\,dv \geqslant \cos 1 \int_0^{\pi/2} \ln\frac{1}{v}\,dv > 0.$$

Аналогично изучение сумм $\sum \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ сводится к изучению интеграла $\widetilde{J}(\alpha) = \int_0^{2\pi} \frac{\sin v}{v^\alpha}\,dv$, который положителен для всех $\alpha > 0$.

3.26. Положим $A = \psi^{-1}(1/\varepsilon)$, $C = \sup\limits_{t\geqslant a} \psi(t)/\psi'(t)$. Тогда

$$\int_a^{+\infty} e^{-\varepsilon\psi(t)}\,dt - A =$$

$$= -a + \int_a^A \left(e^{-\varepsilon\psi(t)} - 1\right) dt + \int_A^{+\infty} e^{-\varepsilon\psi(t)}\,dt = -a + I_1 + I_2.$$

Оценим интегралы I_1 и I_2:

$$|I_1| \leqslant \int_a^A \left(1 - e^{-\varepsilon\psi(t)}\right) dt \leqslant \varepsilon \int_a^A \psi(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon C \int_a^A \psi'(t)\,dt < \varepsilon C\psi(A) = C;$$

$$0 \leqslant I_2 \leqslant \int_A^{+\infty} \frac{C}{\psi(t)}\psi'(t)\,e^{-\varepsilon\psi(t)}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{\psi(A)} \int_A^{+\infty} \psi(t)\,e^{-\varepsilon\psi(t)}\,dt = \frac{C}{\varepsilon\psi(A)}\,e^{-\varepsilon\psi(A)} = \frac{C}{e}.$$

3.27. а) — д) Пользуясь монотонным убыванием общего члена, покажите, что суммирование можно заменить интегрированием (см. задачу 3.14). Для исследования получающихся интегралов воспользуйтесь результатами задач 2.9, ж) и 3.26.

е) С помощью неравенства $(n/3)^n < n! < (n/2)^n$ сведите задачу к задаче п. д).

3.28. Так как при фиксированном $t \in (0;\ 1)$ общий член ряда не монотонно стремится к нулю, то к этим рядам не применимо неравенство задачи 3.14. Следует отдельно рассмотреть частичную сумму, в которой общий член возрастает, и остаток ряда, в котором общий член убывает.

В п. б) воспользуйтесь результатом задачи 1.4. г).

3.29. а) — е), з) Решение аналогично решениям задач 3.27 и 3.28. В пп. б) и е) воспользуйтесь результатами задач V.1.18 и V.1.19.

ж), и) — м) Разложите общий член ряда в степенной ряд и измените порядок суммирования.

3.30. См. указания к задачам 3.27—3.29.

3.31. Воспользуйтесь результатами задач IV.4.15 и 3.29. д), е). Другое решение задачи а) получим, если воспользуемся результатами задач 3.8, IV.5.8 и 3.28. б) при $p = 1$.

§ 4. Асимптотика неявных функций и рекуррентных последовательностей

4.1. С помощью интегрирования по частям докажите, что $z(t) = \frac{1 + o(1)}{t} e^{-t^2/2}$ при $t \to +\infty$. Поэтому

$$\ln z = -\frac{t^2}{2} - \ln t + o(1) \sim -\frac{t^2}{2}.$$

Следовательно, $t(z) \sim \sqrt{2 \ln (1/z)}$ при $z \to +0$.

4.2. Покажите, что $y_n = x_n - \pi n - \pi/2$ является бесконечно малой величиной. Для того чтобы получить асимптотику последовательности $\{y_n\}$, в равенстве $x_n = \operatorname{tg} x_n$ замените x_n на $y_n + \pi n + \pi/2$ и перейдите к эквивалентным величинам.

4.7. Нетрудно видеть, что для любого числа $a > 1$ справедливы неравенства

$$\varphi(x) = \frac{x}{1 + ax} \leqslant x(1 - x) < \frac{x}{1 + x} = \psi(x) \text{ при } x \in \left(0;\ 1 - \frac{1}{a}\right].$$

Итерируя функции φ и ψ, получаем двустороннюю оценку

$$\frac{x_0}{1 + nax_0} \leqslant x_n < \frac{x_0}{1 + nx_0}, \text{ если } x_0 \in \left(0;\ 1 - \frac{1}{a}\right].$$

При $n = 1000$ и $a = \frac{1}{0{,}999}$ имеем $10^{-3} \frac{0{,}999}{1{,}999} \leqslant x_{1000} < \frac{1}{2} 10^{-3}$. Следовательно, $0 < \frac{1}{2} 10^{-3} - x_{1000} < \frac{1}{3} 10^{-6}$.

4.8. Ясно, что $x_n \downarrow 0$. Асимптотику последовательности $\{x_n\}$ можно найти с помощью приема, использованного при решении предыдущей задачи. Для этого функцию f оцените в окрестности нуля сверху и снизу функциями, рассмотренными в задаче 4.6, а затем сравните их итерации.

Другое решение основано на следующих соображениях, которые применимы и в более сложных ситуациях (см. задачи 4.12—4.14). Рекуррентная последовательность $x_n = f(x_{n-1})$, $x_0 > 0$, очевидно, сходится к нулю, если функция f такова, что $0 < f(t) < t$ для всех $t > 0$. С помощью рисунка легко понять, что последовательность $\{x_n\}$ быстро сходится к нулю, если разность $t - f(t)$ велика, и медленно в противном случае. Поэтому для нахождения асимптотики последовательности $\{x_n\}$ целесообразно рассмотреть функцию $\varphi(t) = t - f(t)$. Тогда рекуррентная формула принимает вид

$$x_n - x_{n-1} = -\varphi(x_{n-1}).$$

Считая, что x_n — это значение в точке n некоторой гладкой функции θ, определенной на $[1; +\infty)$, получаем

$$\theta(n) - \theta(n-1) = -\varphi(\theta(n-1)).$$

Если приближенно заменить разность $\theta(n) - \theta(n-1)$ на производную $\theta'(n-1)$, то окажется, что функция θ удовлетворяет «дифференциальному уравнению» $\theta' \approx -\varphi(\theta)$. Решая его, находим $\int\limits_{\theta(n)}^{\theta(1)} \frac{dt}{\varphi(t)} \approx n$, т. е. $x_n = \theta(n) \approx \Phi^{-1}(n)$, где $\Phi(y) = \int\limits_{y}^{\theta(1)} \frac{dt}{\varphi(t)}$.

Для обоснования этих эвристических соображений надо изучить разности $\Phi(x_n) - \Phi(x_{n-1})$ и, используя данное рекуррентное соотношение, убедиться в том, что они стремятся к единице. Тогда, сложив равенства $\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1}) = 1 + o(1)$ при $k = 1, \ldots, n$, мы получим $\Phi(x_n) = n + o(n)$, т. е. $x_n = \Phi^{-1}(n + o(n))$. Иногда для упрощения выкладок вместо функции Φ удобнее рассматривать функцию $\widetilde{\Phi}$, ей эквивалентную. Например, в случае $f(x) - x \underset{x\to+0}{\sim} -Cx^{1+p}$, где C и p — фиксированные положительные постоянные, имеем

$$\Phi(y) = \int\limits_{y}^{x_1} \frac{dt}{t - f(t)} \underset{y\to+0}{\sim} \int\limits_{y}^{x_1} \frac{dt}{Ct^{1+p}} \sim \frac{1}{Cpy^p} = \widetilde{\Phi}(y).$$

Рассматривая разность $\widetilde{\Phi}(x_n) - \widetilde{\Phi}(x_{n-1})$, получаем

$$\widetilde{\Phi}(x_n) - \widetilde{\Phi}(x_{n-1}) = \frac{1}{Cp}\left(x_n^{-p} - x_{n-1}^{-p}\right) \sim \frac{x_{n-1} - x_n}{Cx_{n-1}^{1+p}} \to 1.$$

Отсюда следует, что $\frac{1}{Cpx_n^p} = \widetilde{\Phi}(x_n) \sim n$, т. е. $x_n \sim \frac{1}{(Cpn)^{1/p}}$.

4.9. а) Воспользуйтесь идеей, описанной в решении задачи 4.7.

б) Уточним результат п. а). Так как

$$x_n^p - x_{n-1}^p = x_{n-1}^p \left(\left(1 + \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}}\right)^p - 1\right) = p + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

то

$$x_n^p = np + O(\ln n) = np\left(1 + O\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right).$$

Таким образом, $x_n = (np)^{1/p}(1 + y_n)$, где $y_n = O((\ln n)/n)$. Подставляя полученные выражения для x_n и x_{n-1} в рекуррентное соотношение, мы получаем с помощью формулы Тейлора

$$y_n = y_{n-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2}\frac{p-1}{2p^2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right),$$

т. е.

$$ny_n - (n-1)\, y_{n-1} = \frac{1}{n}\frac{p-1}{2p^2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right).$$

Отсюда следует, что $ny_n = \dfrac{p-1}{2p^2}\ln n + O(1)$.

4.10. Достаточно решить следующую задачу: построить на $(0;\ +\infty)$ такую функцию f, что последовательность $x_n = f(x_{n-1})$ совпадает с наперед заданной строго убывающей к нулю последовательностью $\{\alpha_n\}$. Можно считать при этом, что $\alpha_n = \varphi(n)$, где φ — строго убывающая на $[0;\ +\infty)$ функция, $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t) = 0$. Тогда равенство $f(x_{n-1}) = x_n = \varphi(n)$ равносильно равенству $f(\varphi(n-1)) = \varphi(n)$, которому удовлетворяет, например, функция $f(t) = \varphi(1 + \varphi^{-1}(t))$.

4.11. Рассмотрите последовательности $\{x_{2n}\}$ и $\{x_{2n-1}\}$.

4.12. Сначала докажите, что $a_n \uparrow +\infty$. Используя при $\varepsilon \in (0;\ 1)$ неравенство

$$0 < a_n - a_{[\varepsilon n]} = \sum_{\varepsilon n \leqslant k < n} \frac{1}{a_0 + a_1 + \ldots + a_k} \leqslant \frac{n}{[\varepsilon n]},$$

докажите, что $a_n \sim a_{[\varepsilon n]}$. Выведите отсюда, что

$$\varliminf (a_1 + \ldots + a_n)/na_n \geqslant 1$$

и, следовательно, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \sim na_n$. Поэтому

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 \sim 2a_n(a_{n+1} - a_n) = \frac{2a_n}{a_0 + \ldots + a_n} \sim \frac{2}{n},$$

откуда вытекает, что $a_n^2 \sim 2\ln n$.

4.13. Сначала докажите, что $a_n\uparrow+\infty$, $a_{n+1}\sim a_n$, $a_n=o(A_n)$, где $A_n=a_0+\ldots+a_n$. При $0\leqslant p<1$ последние два соотношения очевидны. При $-1<p<0$ они следуют из двусторонней оценки

$$0<mn^{(1-p)/(1+p)}\leqslant a_n\leqslant Mn^{(1-p)/(1+p)}\quad (n\in\mathbb{N}).$$

Оценка сверху вытекает из очевидного неравенства

$$a_{n+1}\leqslant 1+\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(ka_k)^{-p}\leqslant 1+a_{n+1}^{-p}n^{1-p}.$$

Оценку снизу можно доказать по индукции, если выбрать число $m\in(0;\ 1)$ так, чтобы оно удовлетворяло неравенству

$$m^{1+p}\leqslant\left(\frac{2}{1+p}\right)^p n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(1-p)/(1+p)}\right)-1$$

при всех $n\in\mathbb{N}$.

Из этих соотношений получите последовательно, что

$$a_{n+1}^2-a_n^2\sim 2\,\frac{A_n^{1-p}-A_{n-1}^{1-p}}{1-p},\quad A_n\sim\left(\frac{1-p}{2}\,a_n^2\right)^{\frac{1}{1-p}},$$

$$a_{n+1}-a_n\sim\left(\frac{1-p}{2}\right)^{p/(p-1)}a_n^{2p/(p-1)}$$

и, наконец,

$$a_{n+1}^{(1+p)/(1-p)}-a_n^{(1+p)/(1-p)}=K_p^{(1+p)/(1-p)}+o\,(1),$$

откуда

$$a_{n+1}^{(1+p)/(1-p)}\sim nK_p^{(1+p)/(1-p)}.$$

1.14. Докажите последовательно, что $a_n\uparrow+\infty$, $a_{n+1}\sim a_n$, $a_{n+1}^p=o\,(S_n)$, где $S_n=a_0^p+\ldots+a_n^p$. Последнее соотношение следует из неравенства

$$0\leqslant\varlimsup\frac{a_{n+1}^p}{S_n}=\varlimsup\frac{a_{n-k}^p}{S_n}\leqslant\varlimsup\frac{a_{n-k}^p}{ka_{n-k}^p}=\frac{1}{k},$$

справедливого для любого фиксированного номера k. При $p\neq-1$ выведите отсюда, что

$$a_{n+1}^{p+1}-a_n^{p+1}\sim(p+1)\,a_n^p/S_n\sim(p+1)\left(\ln S_{n+1}-\ln S_n\right).$$

Поэтому при $p<-1$ существует конечный предел $\lim S_n=\sigma_p$, т. е. $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{\sigma_p}+o\,(1)$, откуда $a_n\sim\dfrac{n}{\sigma_p}=C_pn$. При $p>-1$ справедливо соотношение $a_n^{p+1}\sim(p+1)\ln S_n\to+\infty$. Используя теорему Лагранжа о среднем, докажите, что отсюда следует равенство

$$S_{n+1}(\ln S_{n+1})^{-p/(p+1)} - S_n(\ln S_n)^{-p/(p+1)} = (p+1)^{p/(p+1)} + o(1),$$

т. е. $S_n(\ln S_n)^{-p/(p+1)} \sim n(p+1)^{p/(p+1)}$.

Поэтому $\ln S_n \sim \ln n$ и, следовательно, $a_n^{p+1} \sim (p+1)\ln S_n \sim$ $\sim (p+1)\ln n$.

При $p = -1$ докажите по индукции, что $a_n = \dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}$.

Глава VII. ФУНКЦИИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

§ 1. Выпуклость

1.1. Используйте индукцию (предварительно проверьте, что выпуклая комбинация $\sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \lambda_j x_j$ попадает в $\langle a;\ b\rangle$).

1.2. Положите $\lambda_1 = \dfrac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$, $\lambda_2 = \dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$ и напишите неравенство Иенсена для $x_2 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_3$.

1.3. а) Так как некоторые числа $x_j \in \Delta$ можно брать одинаковыми, то достаточно доказать неравенства Иенсена для среднего арифметического n чисел. Докажите это сначала для $n = 2^k$. Проверьте, что если неравенство верно для среднего арифметического n произвольных чисел, то оно останется верным и при замене n на $n-1$. б) Воспользуйтесь п. а).

1.4. Можно считать, что $p,\ q \in (a;\ b)$. Пусть $K = \sup\limits_{p<x<q} f(x)$. Сначала проверьте ограниченность f сверху на любом промежутке $[c;\ d]$, $(p;\ q) \subset [c;\ d] \subset (a;\ b)$. Для этого рассмотрите множество $E = \{x \in [c;\ d] \,|\, f(x) \leqslant C\}$, где $C = \max(f(c); f(d); K)$, и, используя результат задачи I.1.19, убедитесь, что $E = [c;\ d]$. В случае ограниченности сверху функции f на $(p;\ q)\setminus\mathbb{Q}$ убедитесь, что f ограничена и на $(p;\ q)$, поскольку каждая точка этого интервала есть середина некоторого промежутка с концами в $(p;q)\setminus\mathbb{Q}$.

Непрерывность f в точке $x \in (c;\ d)$ следует из неравенств

$$\frac{1}{m}(f(x) - C) \leqslant f(x) - f(x-\delta) \leqslant f(x+\delta) - f(x) \leqslant \frac{1}{n}(C - f(x)),$$

где δ — произвольно малое положительное число, m и n — наибольшие целые числа, для которых $x - m\delta,\ x + n\delta \in [c;\ d]$. Среднее неравенство очевидно, правое доказывается с помощью неравенства Иенсена (см. 1.3. а)) для точек x, $x+\delta$, $x+n\delta$, левое — аналогично.

1.5. а) $\Leftrightarrow$ б) очевидно. Для доказательства импликации б) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ в) рассмотрите множество $K = \bigcup\limits_{\lambda>0} \lambda(\Gamma^+ - c)$, где $c \in \mathbb{R}^2$ — точка графика. Покажите, что K — выпуклый конус, $K \neq \mathbb{R}^2$, и возьмите прямую, содержащую один из его граничных лучей. Для доказательства в) $\Rightarrow$ б) проверьте, что Γ^+ есть пересечение полуплоскостей.

1.6. Пусть $0 \leqslant x < y \leqslant 1/2$. Представьте y и $1-y$ в виде выпуклых комбинаций точек x и $1-x$ и воспользуйтесь выпуклостью.

1.7. Используйте лемму Бореля о покрытиях.

1.8. Воспользуйтесь леммой о трех хордах (задача 1.2).

1.9. Рассмотрите сначала случай, когда $L(x) > 0$ для всех $x \in (a;\ b)$. Пусть $x_1, x_2 \in (a;\ b)$, $x_1 < x_2$, и пусть $y = g(x)$ — уравнение хорды, проходящей через точки графика с абсциссами x_1 и x_2. Положим $f_1 = f - g$. Ясно, что $L_{f_1}(x) = L_f(x) > 0$ и для выпуклости f достаточно, чтобы неравенство $f_1(x) \leqslant 0$ выполнялось при всех $x \in [x_1;\ x_2]$. Предполагая противное, убедитесь, что $L_{f_1}(\bar{x}) \leqslant 0$ в точке $\bar{x}$, где функция f_1 достигает своего наибольшего значения на $[x_1;\ x_2]$. В общем случае ($L(x) \geqslant 0$) рассмотрите функции $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon x^2$, $\varepsilon > 0$, и перейдите к пределу при $\varepsilon \to 0$.

1.10. Для доказательства достаточности перепишите неравенство в виде $\frac{1}{2h}\int\limits_0^h (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x))\,dt \geqslant 0$ и воспользуйтесь предыдущей задачей. Необходимость очевидна.

1.11. а) Воспользуйтесь равномерной непрерывностью и «спрямите» график хордами.

б) Используя п. а), убедитесь, что достаточно рассмотреть лишь функции вида $|x-a|$.

1.12, 1.13. Воспользуйтесь леммой о трех хордах (задача 1.2).

1.14. Проверьте, что неравенство Иенсена для одной функции преобразованием $x \mapsto 1/x$ переводится в неравенство Иенсена (с другими коэффициентами) для другой.

1.15. Используйте существование и монотонность односторонних производных (задача 1.8).

1.16. Сведите задачу к случаю $a = 0$, $f(0) = 0$ и проверьте монотонность функции $f(x)/x$.

1.18. Воспользуйтесь леммой о трех хордах (задача 1.2) для точек 0, $x-h$, x $(0 < h < x)$.

1.19. Достаточно проверить, что $\varphi(x_1) \leqslant \varphi(x_2)$ для всех $x_1 < x_2$, $x_2 - x_1 < b$. Это следует из леммы о трех хордах (задача 1.2), примененной в точках x_1, x_2, $x_1 + b$ и x_2, $x_1 + b$, $x_2 + b$:

$$\varphi(x_1) = b\,\frac{f(x_1+b) - f(x_1)}{b} \leqslant$$

$$\leqslant b\,\frac{f(x_1+b) - f(x_2)}{x_1 + b - x_2} \leqslant b\,\frac{f(x_2+b) - f(x_2)}{b} = \varphi(x_2).$$

1.20. Будем считать, что $n = 2m + 1$ — нечетное число, так как всегда можно добавить нуль в качестве последней точки. Для $a \leqslant b$ функция $x \mapsto f(b + x) - f(a + x)$, $x \geqslant 0$, возрастает (см. задачу 1.19). Следовательно,

$$f(a_{2i}) - f(a_{2i+1}) \geqslant$$

$$\geqslant f\left(\sum_{i \leqslant k \leqslant m} (a_{2k} - a_{2k+1})\right) - f\left(\sum_{i < k \leqslant m} (a_{2k} - a_{2k+1})\right),$$

$$i = 0, \ldots, m - 1,$$

$$f(a_{2m}) - f(a_{2m+1}) \geqslant f(a_{2m} - a_{2m+1}).$$

Сложив эти неравенства, получим требуемое.

1.21. Опираясь на неравенство $a_{n+1} - a_n \leqslant a_{n+2} - a_{n+1}$, докажите, что $\dfrac{a_{n+p+q} - a_n}{p + q} \leqslant \dfrac{a_{n+p+q} - a_{n+p}}{q}$. Истолкуйте это неравенство геометрически.

1.22. См. задачу IV.2.3.

1.23. Проверьте, что можно рассматривать только кусочно-линейные функции указанного класса (см. задачу 1.11. а)). Дальнейшие рассуждения поясним для двух неравенств.

а$'$) Разобьем подграфик функции на треугольники с общей вершиной $(0;\ 0)$, соединив ее с точками излома графика (рис. 14).

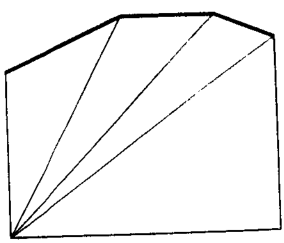

Рис. 14

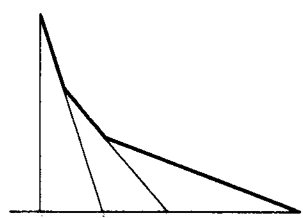

Рис. 15

Пусть k-й треугольник ограничен графиками функций φ_k и φ_{k+1}, $0 \equiv \varphi_1 \leqslant \varphi_k \leqslant \varphi_{k+1} \leqslant \varphi_N \equiv f$, $\varphi_{k+1}(x) = \varphi_k(x)$ вне проекции k-го треугольника на ось абсцисс. Тогда $f = \sum\limits_{1 \leqslant k < N} (\varphi_{k+1} - \varphi_k)$.

Докажите неравенство а$'$) для каждой функции $\varphi_{k+1} - \varphi_k$, а затем сложите эти неравенства. Убедитесь, что требование выпуклости существенно.

г$'$) Продолжая прямолинейные отрезки графика до пересечения с осью абсцисс, получим разбиение подграфика на треугольники (рис. 15). Введем функции φ_k $(1 \leqslant k \leqslant N)$ так же, как в предыдущем случае. Тогда $f^2 = \sum\limits_{1 \leqslant k < N} \left(\varphi_{k+1}^2 - \varphi_k^2\right)$. Проверьте, что

$$\int_0^1 \left(\varphi_{k+1}^2(x) - \varphi_k^2(x)\right) dx = \frac{2}{3} M_k \int_0^1 (\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x))\, dx,$$

где M_k — высота k-го треугольника.

1.24. Замените интегрирование по $[0; 1]$ интегрированием по $[0; 1/2]$. Воспользуйтесь результатами задач 1.6 и I.2.22.

1.25. Для проверки необходимости рассмотрите функции

$$\varphi(x) = C, \quad \varphi(x) = Cx \quad (C \in \mathbb{R})$$

и

$$\varphi(x) = \max(0; a - x) \quad (a \in (0; 1)).$$

Для доказательства достаточности используйте, что кусочно-линейная выпуклая функция является суммой с положительными коэффициентами функций вида $\varphi(x) = \max(0; a - x)$ и линейной функции.

1.26. а), б). Представьте данные интегралы в виде суммы интегралов по промежуткам длины $2\pi/a$. В п. б) воспользуйтесь результатами задачи 1.6.

1.27. а) Воспользовавшись неравенством Буняковского, проверьте, что $f''f - f'^2 \geqslant 0$.

б) С помощью задачи 1.11. б) можно ограничиться случаем дважды дифференцируемой функции. Логарифмическая выпуклость такой функции f означает, что $f''f - f'^2 \geqslant 0$. Проверьте, что для суммы таких функций f, g справедливы неравенства

$$(f'' + g'')(f + g) \geqslant (\sqrt{f''f} + \sqrt{g''g})^2 \geqslant (f' + g')^2.$$

1.28. (См. [18]). Ограничимся доказательством эквивалентности 3) и 4).

Поскольку f выпукла (см. задачу 1.3. б)), в каждой точке x существуют односторонние производные f'_- и f'_+, $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$ и всюду, за исключением счетного множества, $f'_-(x) = f'_+(x)$ (см. задачу 1.8). Докажем, что существует $f'(1)$. Пусть $h > 0$. Тогда

$$1 = f(1) \geqslant f(1 + h)\, f\left(\frac{1}{1+h}\right) =$$
$$= \left[f(1) + f'_+(1)\,h + o(h)\right]\left[f(1) - f'_-(1)\,h + o(h)\right] =$$
$$= 1 + \left(f'_+(1) - f'_-(1)\right) h + o(h),$$

откуда $f'_+(1) \leqslant f'_-(1)$ и, учитывая противоположное неравенство, $f'_+(1) = f'_-(1)$. Пусть $p = f'(1)$. Зафиксируем x так, чтобы существовала $f'(x)$. Рассмотрим функцию $\Phi(t)=f(t)f(x/t)$, $t>0$. Она дифференцируема в точке 1 и удовлетворяет соотношению $\Phi(t)\leqslant f(x)=\Phi(1)$ для всех t. Поэтому $\Phi'(1)=0$, т. е.

$$f'(1)f(x)-f(1)\frac{x}{1^2}f'(x)=0,$$

$$pf(x)=xf'(x). \qquad (*)$$

Таким образом, производная $f'(x)$, существующая на плотном в $(0;+\infty)$ множестве E, совпадает на нем с непрерывной на $(0;+\infty)$ функцией $(pf(x))/x$. Отсюда, в силу монотонности f'_+ и f'_- (см. 1.8), следует, что $f\in C^1(0;+\infty)$. Теперь из уравнения $(*)$ легко вытекает, что $f(x)=Ax^p$, где $A=1$, поскольку $f(1)=1$, а ограничение на p обусловлено выпуклостью f. В связи с условием 1′) рассмотрите функцию $f(x)=\min(\sqrt{x};1)$ $(x\in(0;+\infty))$.

1.29. Напишите неравенство Иенсена для функции $f(x)=x^p$ в виде

$$\left(\frac{1}{c}\sum_{1\leqslant j\leqslant n}c_jx_j\right)^p\leqslant\frac{1}{c}\sum_{1\leqslant j\leqslant n}c_jx_j^p,$$

где $c=\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n}c_j$, $x_j=a_j/t_j$, $c_j=b_jt_j$, и подберите надлежащим образом числа $t_j>0$.

1.30. а) Если $0<r<s$, то воспользуйтесь неравенством Гёльдера с $p=s/r$ (см. предыдущую задачу). Если $r<s<0$, то примените соотношение $(\varkappa(-t))^{-1}=\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n}x_j^{-t}\right)^{1/t}$. Если $r<0<s$, то используйте п. б).

д) Неравенство Иенсена для функции $\ln\varphi$ в точках r, s, $\lambda r+\mu s$ $(\lambda,\mu>0,\ \lambda+\mu=1)$ превращается в неравенство Гёльдера, если положить $a_j=x_j^{\lambda r}$, $b_j=x_j^{\mu s}$, $p=1/\lambda$, $q=1/\mu$.

Для непрерывной положительной функции f следует определить $\varkappa(p)$ как $\left(\int\limits_0^1 f^p(x)\,dx\right)^{1/p}$, а вместо $(x_1\ldots x_n)^{1/n}$ рассмотреть $\exp\left(\int\limits_0^1\ln f(x)\,dx\right)$. Утверждения а) — д) сохраняют силу.

1.31. Неравенства а), б) суть непрерывные аналоги неравенства Иенсена и могут быть получены из него предельным переходом. Другой способ доказательства неравенства б) (более общего, чем а)) таков. В силу 1.11 можно предполагать существование

φ''. Положив $I = \int\limits_a^b f(x)\,p(x)\,dx$, по формуле Тейлора получим

$$\varphi(f(x)) = \varphi(I) + \varphi'(I)(f(x) - I) + \frac{1}{2}\varphi''(c)(f(x) - I)^2 \geqslant$$
$$\geqslant \varphi(I) + \varphi'(I)(f(x) - I).$$

Требуемый результат получается после домножения этого неравенства на p и интегрирования по $[a;\ b]$.

в) Используйте б) при $\varphi(t) = \ln(1/t)$.

1.32. Обе величины наибольшие в случае, когда точки A_1, A_2, ..., A_{n-1} делят дугу, соединяющую A_0 и A_n, на равные части. Для доказательства воспользуйтесь вогнутостью синуса на промежутке $[0;\ \pi]$.

1.33. Рассмотрим произвольный луч, выходящий из точки $S = (0;\ b)$, $0 < b < f(0)$. Пусть $A_i = (x_i;\ y_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ — последовательные точки отражения луча от графика, а B_i — от оси x.

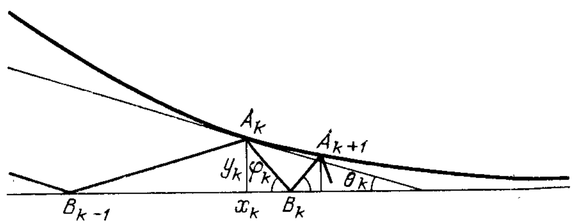

Рис. 16

Тогда каждому лучу отвечает (конечная или, возможно, бесконечная) последовательность (траектория) $SA_1B_1A_2B_2$... или $SB_1A_2B_2A_3$... (точка A_1 отсутствует, если первое отражение происходит от оси x). Мы докажем существование такого числа M, что для всех лучей $\sup\limits_i x_i \leqslant M$ (это означает, что освещена лишь ограниченная часть подграфика).

1) Заметим сначала, что если $x_{n+1} < x_n$ при каком-нибудь n, то $x_{n+k} < x_n$ при всех $k > 0$ (луч выходит из области).

2) Пусть $SA_1^0B_1^0\,{}_2^0 \ldots$ — единственная траектория, для которой три точки S, A_1^0, B_1^0 лежат на одной прямой, $A_i^0 = (x_i^0;\ y_i^0)$. Тогда для любой другой траектории, содержащей точку A_2, имеет место неравенство $x_2 < x_2^0$ (в этом убедиться совсем легко).

3) Пусть $n \geqslant 2$, $x_{n+1} > x_n$, $\varphi_k \in (0;\ \pi/2)$ — угол между звеньями ломаной, примыкающими к B_k, и осью x, $\theta_k = |\operatorname{arctg} f'(x_k)|$ (рис. 16). Тогда, благодаря выпуклости f,

$$y_n - y_{n+1} < (\operatorname{tg}\theta_n)(x_{n+1} - x_n).$$

Учитывая также, что

$$2y_n > y_n + y_{n+1} = (\operatorname{tg}\varphi_n)(x_{n+1} - x_n) \quad \text{и} \quad \varphi_n - \varphi_{n-1} = 2\theta_n,$$

получим неравенство

$$\frac{y_n - y_{n+1}}{y_n} < 2\frac{\operatorname{tg}\theta_n}{\operatorname{tg}\varphi_n} < \frac{\operatorname{tg} 2\theta_n}{\operatorname{tg}\varphi_n} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi_n - \varphi_{n-1})}{\operatorname{tg}\varphi_n},$$

откуда

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} > 1 - \frac{\operatorname{tg}(\varphi_n - \varphi_{n-1})}{\operatorname{tg}\varphi_n} = \frac{\sin\varphi_{n-1}}{\sin\varphi_n\cos(\varphi_n - \varphi_{n-1})} > \frac{\sin\varphi_{n-1}}{\sin\varphi_n}.$$

Следовательно,

$$\frac{y_{n+1}}{y_2} > \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_n} > \sin\varphi_1, \qquad y_{n+1} > y_2\sin\varphi_1.$$

Заметим, что $\varphi_1 \geqslant \theta_1^0 = \left|\operatorname{arctg} f'\left(x_1^0\right)\right|$, $y_2 \geqslant y_2^0$. Следовательно, в качестве M можно взять число $f^{-1}\left(y_2^0 \sin\theta_1^0\right)$.

1.34. а) Заметьте, что f^* — поточечная верхняя грань семейства линейных функций $h_{t,a}(x) = xt - a$ по всем парам $(t;\ a)$, для которых $a \geqslant f(t)$.

б) Используйте неравенство Иенсена и задачу 1.5.

в) Используйте п. б) и тот факт, что $g_{x,b}(t) = xt - b \leqslant f(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $b \geqslant \sup\limits_{t\in\mathbb{R}}(xt - f(t)) = f^*(x)$, а также указание к п. а).

д) Очевидно, что для выпуклой функции φ, дифференцируемой в точке t, равенство $\varphi'(t) = 0$ является достаточным условием минимума. Поэтому если в точке t существует $f'(t) = x$, то supremum в определении $f^*(x)$ достигается в точке t. Пусть $a < b$, $\alpha = f'(a)$ и $\beta = f'(b)$ существуют и конечны, $x \in (\alpha;\ \beta)$. Тогда значения f^* в точках α и β конечны и, следовательно, f^* конечна на $(\alpha;\ \beta)$ (см. п. б)).

ж) Функция f' не может иметь скачков и строго монотонна, следовательно, непрерывна, и множество ее значений — действительно интервал. Отсутствие дифференцируемости f^* в точке x означало бы, что $t_- = (f^*)'_-(x) < t_+ = (f^*)'_+(x)$, а тогда функция $f^{**} = f$ была бы линейна на $[t_-;\ t_+]$ (см. п. е)), что противоречит строгой выпуклости f. Аналогично, дифференцируемость f влечет строгую выпуклость f^*. Для строго выпуклой дифференцируемой функции f для каждого $x \in \Delta$ равенство $f^*(x) = xt - f(t)$ достигается лишь при таких t, для которых $f'(t) = x$. Аналогично, для $t \in (a;\ b)$ равенство $f(t) = f^{**}(t) = xt - f^*(x)$ достигается лишь при тех x, для которых $(f^*)'(x) = t$. Это и означает, что f' и $(f^*)'$ взаимно обратны.

1.35. Используйте задачу 1.34.

1.38. См. задачу 1.36. а), е). Для доказательства единственности используйте задачу 1.34. г), з).

§ 2. Гладкие функции

2.2. Проинтегрируйте данное тождество по y по промежутку $[0; 1]$.

2.3. С произвольной степенью точности аппроксимируйте $f^{(n)}$ равномерно на $[a; b]$ многочленом. (Возможность такой аппроксимации следует, например, из 3.8. б).)

2.4. Изучите ряд Тейлора функции f в крайней точке промежутка, на котором $f(x) \equiv 0$.

2.5. Примените индукцию по n. Воспользуйтесь формулой

$$f = e^{Q_n}\left(P_n + \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} P_k e^{Q_k - Q_n}\right)$$

и, рассуждая от противного, изучите производные функции

$$P_n + \sum_{1 \leqslant k < n} P_k e^{Q_k - Q_n}.$$

2.6. Докажите, что либо $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, либо f' имеет бесконечно много экстремумов.

2.7. Пусть $x, \delta \in (0; 1)$. Тогда

$$f(\delta x) = f(x) + (\delta - 1)\, x f'(x) + \frac{(\delta - 1)^2}{2} x^2 f''(\bar{x}),$$

где $\bar{x} \in (\delta x; x)$. Поэтому

$$x f'(x) = \frac{f(x) - f(\delta x)}{1 - \delta} + \frac{1 - \delta}{2} x^2 f''(\bar{x}) =$$

$$= \frac{f(x) - f(\delta x)}{1 - \delta} + O\left((1 - \delta)\frac{x^2}{\bar{x}^2}\right) = \frac{f(x) - f(\delta x)}{1 - \delta} + O\left(\frac{1 - \delta}{\delta^2}\right).$$

Выбирая δ близким к единице, делаем малым второе слагаемое, а затем, за счет выбора x — первое слагаемое.

2.8. Проверьте, что

$$-h'(t) = -\int_{-T}^{T} f'(x)\, g(t - x)\, dx = \int_{0}^{T} f'(x)\,(g(x + t) - g(x - t))\, dx =$$

$$= \int_{0}^{T}\int_{x-t}^{x+t} f'(x)\, g'(y)\, dx\, dy = \left(\iint_{P} + \int_{0}^{t}\int_{x-t}^{x+t} + \int_{T-t}^{T}\int_{2T-x-t}^{x+t}\right) f'(x) g'(y)\, dx\, dy,$$

где P — прямоугольник с вершинами $(0; t)$, $(t; 0)$, $(T; T - t)$ и $(T - t; T)$. Так как $P \subset [0; T]^2$, то первый интеграл неотрицателен, а остальные два интеграла равны нулю в силу нечетности функции g'.

2.9. Запишите $f(1/2)$ по формуле Тейлора: $f(1/2) = f(x_0) + \ldots$, полагая x_0 равным 0 и 1.

2.10. а) Исходя из тождества

$$f'(x) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} (f'(x) - f'(x+t))\,dt + \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

и применяя к подынтегральному выражению формулу Лагранжа, приходим к неравенству

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2h}\left(\int_{-h}^{h} |t|\,M_2\,dt + 2M_0\right) = \frac{h}{2}M_2 + \frac{M_0}{h}$$

для всех $h > 0$. Выражение в правой части имеет минимум, равный $\sqrt{2M_0M_2}$. Неравенство превращается в равенство для кусочно-гладкой функции $f(x) = \int_0^x \left(2 + \int_0^t \varphi(u)\,du\right) dt$, где $\varphi(u) = -2\operatorname{sign} u$ при $|u| \leqslant 1$, $\varphi(u) = 0$ при $|u| > 1$. Заменяя φ непрерывной функцией φ_ε так, как показано на рис. 17, получим C^2 — гладкую функцию f_ε, причем для нее $M_1/\sqrt{M_0M_2} \to \sqrt{2}$ при $\varepsilon \to 0$.

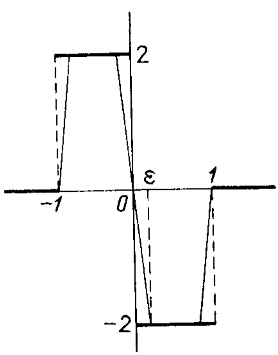

Рис. 17

Доказанное неравенство допускает следующее механическое истолкование: если движение точки происходит на отрезке $[-M_0; M_0]$, а ускорение по абсолютной величине всегда не превосходит M_2, то ни в какой момент времени скорость точки не может быть слишком большой. Точнее, она не превосходит $\sqrt{2M_0M_2}$. С аналогом этого факта все знакомы из школьного курса физики: при свободном падении (с нулевой начальной скоростью) мгновенная скорость тела равна $\sqrt{2gS}$, где S — пройденный телом путь, g — ускорение силы тяжести.

б) Замените в предыдущем рассуждении промежуток $[x-h;\ x+h]$ на $[x;\ x+h]$. В результате получится неравенство $M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0M_2}$.

г) Примените аналогичный прием, выбирая h из промежутка $[0;\ (b-a)/2]$ и интегрируя по $[x;\ x+h]$ или по $[x-h;\ h]$ в зависимости от знака $x - (a+b)/2$.

в) В этом случае удобно применить иное рассуждение. Складывая почленно равенства

$$f(x) - f(0) = xf'(x) - \frac{1}{2} x^2 f''(c_1),$$

$$f(2) - f(x) = (2 - x) f'(x) + \frac{1}{2} (2 - x)^2 f''(c_2),$$

получим

$$2f'(x) = f(2) - f(0) + \frac{1}{2}\left(x^2 f''(c_1) - (2 - x)^2 f''(c_2)\right),$$

откуда сразу следует искомая оценка. Ее точность демонстрирует пример: $f(x) = \frac{x^2}{2} - 1$.

2.11. Из сходимости интеграла $\int\limits_0^\infty |f''(x)|\,dx$ (если интеграл расходится, то доказывать нечего) вытекает, что существует $c = \lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$, а из сходимости $\int\limits_0^\infty |f(x)|\,dx$ — что $c = 0$. Рассмотрим функцию g, задаваемую условиями

$$g'(x) = -\int\limits_x^\infty |f''(x)|\,dx \quad \text{и} \quad g(0) = f(0)$$

(будем для определенности считать это число положительным). Она убывает, выпукла и удовлетворяет неравенству $g(x) \leqslant f(x)$ (следствие неравенства $g'(x) \leqslant f'(x) = -\int\limits_x^\infty f''(t)\,dt$). Проведем касательную к графику g в точке 0. Тогда $\alpha = f(0)/g'(0)$ — точка ее пересечения с осью x. Сравнивая площади, получаем:

$$\frac{1}{2} f(0)\,\alpha \leqslant \int\limits_0^\infty \max(g(x); 0)\,dx \leqslant \int\limits_0^\infty |f(x)|\,dx,$$

откуда

$$\frac{1}{2}(f(0))^2 \leqslant \int\limits_0^\infty |f(x)|\,dx \cdot |g'(0)|.$$

Заменяя сначала $|g'(0)|$ на $\int\limits_0^\infty |f''(x)|\,dx$ и затем среднее геометрическое средним арифметическим, получаем а) и б).

Для доказательства того, что константы 2 и $\sqrt{2}$ не могут быть улучшены, аппроксимируем функцию $h(x) = \max(1-kx;\ 0)$ $(k>0)$ выпуклой функцией $f_\varepsilon \in C^2([0;\ +\infty))$, как показано на рис. 18.

Тогда

$$\int\limits_{1/(k-\varepsilon)}^{1/(k+\varepsilon)} f''(x)\,dx = \left|f'\left(\frac{1}{k}-\varepsilon\right)\right| = k,$$

$$\int\limits_0^\infty f(x)\,dx \cong 1/2k, \qquad f(0)=1,$$

и поэтому

$$\text{а) } 1 = (f(0))^2 = 2\cdot\frac{1}{2k}\cdot k \cong 2\int\limits_0^\infty |f(x)|\,dx \int\limits_0^\infty |f''(x)|\,dx;$$

$$\text{б) } \int\limits_0^\infty (|f(x)| + |f''(x)|)\,dx \cong \frac{1}{2k} + k = \sqrt{2} = \sqrt{2}\,f(0)$$

при $k = 1/\sqrt{2}$.

2.12. По Формуле Тейлора

$$f(1) = f'(0) + \int\limits_0^1 f''(t)(1-t)\,dt,$$

откуда следует, что $\left|\int\limits_0^1 f''(t)(1-t)\,dt\right| = |a|$. Применяя к интегралу неравенство Буняковского, получаем оценку снизу:

$$|a| \leqslant \left(\int\limits_0^1 (f''(t))^2\,dt\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Равенство достигается в том случае, когда функции $f''(t)$ и $1-t$ пропорциональны, откуда $f(t) = \frac{a}{2}\,t(t-1)(t-2)$.

2.13. Пусть $F_n = \{x \mid f^{(n)}(x) = 0\}$, $G_n = \mathbb{R}\setminus F_n$. Докажите вспомогательное утверждение (A): Если f не является многочленом на некотором открытом интервале Δ, то для любого n найдется составляющий интервал Δ_n непустого открытого множества $G_n \cap \Delta$, на котором f не является многочленом.

Из (A) легко выводится утверждение задачи: предположив, что f не многочлен на $\mathbb{R}$, построим последовательность вложенных интервалов $\Delta_n = (a_n;\ b_n) \subset G_n$, $[a_{n+1};\ b_{n+1}] \subset \Delta_n$, пересечение которых непусто, что противоречит условию.

Предположим, что (А) не выполняется, т. е. что для некоторых n и Δ функция f — не многочлен на Δ, но ее ограничение на любой составляющей интервал множества $G_n \cap \Delta$ является многочленом. Обозначим символом $\sigma(x)$ ($x \in \Delta$) максимальный промежуток, обладающий свойствами: $x \in \sigma(x) \subset \subset \Delta$, $f|_{\sigma(x)}$ — многочлен. Проверьте, что если ограничения f на два примыкающих промежутка — многочлены, то f — многочлен на их объединении. Покажите, что если a — граничная точка $\sigma(x)$, то: 1) существует последовательность $x_k \in F_n$, $x_k \neq a$, $x_k \to a$; 2) $f^{(m)}(a) = 0$ для всех $m \geqslant n$; в) $f^{(n)}$ обращается в нуль на $\sigma(x)$. Тогда, в частности, $f^{(n)}(x) = 0$ для всех $n \in G_n \cap \cap \Delta$, что невозможно. (Решение Д. Ю. Бураго).

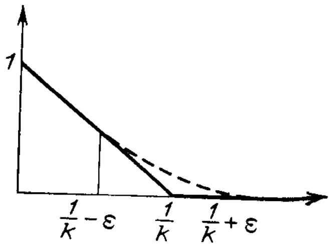

Рис. 18

2.14. Формальным почленным дифференцированием получите рекуррентное соотношение, связывающее последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$. Убедитесь, что за счет выбора β_n можно добиться возможности почленно продифференцировать ряд.

2.15. Можно считать, что $a = 0$. Тогда

$$f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\, dt = \int_0^1 \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\, x_j\, dt = \sum_j x_j \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\, dt,$$

и в качестве $g_j(x)$ можно взять $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\, dt.$

2.16. Заметьте, что если f константа, то из б) и в) вытекает, что $F(f) = 0$. Двукратное применение результата предыдущей задачи дает представление

$$f(x) = f(a) + \sum_j (x_j - a_j)\, g_j(a) + \sum_{j,k} (x_j - a_j)(x_k - a_k)\, h_{jk}(x),$$

где $g_j(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$. Остается еще раз воспользоваться а), б), в).

2.17. Отбрасывая тривиальный случай, когда $f \equiv 0$, будем считать, что число $a = \inf\{t \mid f(t) > 0\}$ равно нулю (иначе можно сделать замену $u = t - a$). Тогда из условия вытекает, что при $t > 0$

$$\frac{f(t)\, g(t)}{C + \int_0^t f(x)\, g(x)\, dx} \leqslant g(t).$$

Переходя к первообразным, получаем неравенство

$$\ln\left(C+\int_0^t f(x)\,g(x)\,dx\right)\leqslant \ln C+\int_0^t g(x)\,dx.$$

Тогда

$$C+\int_0^t f(x)\,g(x)\,dx\leqslant C\exp\left(\int_0^t g(x)\,dx\right),$$

откуда непосредственно вытекает требуемое.

Для доказательства следствия заметим, что поскольку $|h(t)|=$ $=\left|\int_0^t h'(x)\,dx\right|\leqslant\int_0^t |h'(x)|\,dx$, то условию первой части задачи удовлетворяют функции $f(t)=|h'(t)|$, $g(t)\equiv M$ и число $C=0$.

2.18. а) Воспользуйтесь тем, что $f(t_j-t_k)=f(t_j)\overline{f(t_k)}$.

б) Воспользуйтесь тем, что $\cos(a;\ t)$ есть полусумма двух положительно определенных функций.

2.20. Представьте функции f и g через их преобразования Фурье.

2.21. б) Воспользуемся тождеством

$$-\|x\|^{\alpha}=c_{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\cos(x;\ t)-1}{\|t\|^{n+\alpha}}\,dt,\quad \text{где}\quad c_{\alpha}>0$$

(ср. с задачей 1.26.б). Тогда (см. задачу 2.18.б)

$$-\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ 1\leqslant k\leqslant m}}\|x_j-x_k\|^{\alpha}z_j\bar z_k=$$

$$=c_{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\|t\|^{n+\alpha}}\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ 1\leqslant k\leqslant m}}(\cos(t;\ x_j-x_k)-1)\,z_j\bar z_k\,dt\geqslant 0.$$

2.22. б) Воспользуйтесь тем, что, как следует из неравенства (1), матрица

$$\begin{pmatrix} f(0) & f(t)\\ f(-t) & f(0)\end{pmatrix}$$

положительно определена при любом $t\in\mathbb{R}$.

в) Воспользуйтесь положительной определенностью матрицы

$$\begin{pmatrix} f(0) & f(t_1) & f(t_2)\\ \overline{f(t_1)} & f(0) & f(t_2-t_1)\\ \overline{f(t_2)} & \overline{f(t_2-t_1)} & f(0)\end{pmatrix}$$

при любых $t_1,\ t_2\in\mathbb{R}$.

2.23. Пусть $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$ и $z_1 + \ldots + z_m = 0$. Тогда при $s > 0$

$$0 \leqslant \frac{1}{s} \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ 1 \leqslant k \leqslant m}} e^{s\varphi(t_j - t_k)} z_j \bar{z}_k = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ 1 \leqslant k \leqslant m}} \frac{e^{s\varphi(t_j - t_k)} - 1}{s} z_j \bar{z}_k.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $s \to 0$, получаем неравенство

$$\sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ 1 \leqslant k \leqslant m}} \varphi(t_j - t_k) z_j \bar{z}_k \geqslant 0.$$

2.24. Утверждения в), г) следуют из б), б) следует из а) и того, что $Sh(x) = 0$ $(x \neq -\delta/\gamma)$, а) проверяется непосредственно, д) вытекает из равенства $g'' = -\frac{1}{2} gSf$.

Для доказательства е) воспользуйтесь тем, что из условий $f''(x_0) = 0$ и $Sf(x_0) < 0$ следует, что $f'(x)f'''(x) < 0$ в некоторой окрестности точки x_0, и рассмотрите возможные комбинации знаков $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ по обе стороны от x_0.

2.25. б) Пусть $a_1, \ldots, a_{n-1}$ — корни многочлена $f'(x)$. Тогда

$$Sf(x) = 2\sum_{i<j} \frac{1}{(x - a_i)(x - a_j)} - \frac{3}{2}\left(\sum_i \frac{1}{x - a_i}\right)^2 < 0.$$

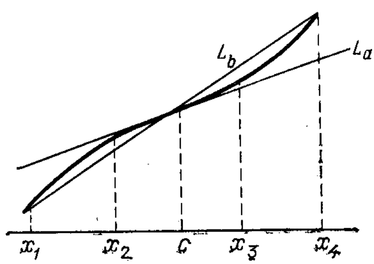

Рис. 19

2.26. Предположим, что $a = f'(c) > 0$ — минимальное значение f' в окрестности точки c. Тогда график функции f выглядит так, как изображено на рис. 19. Выбирая x_1, x_2, x_3, x_4, как показано на рисунке (причем x_2 и x_3 достаточно близки к точке c), имеем:

$$\frac{f(x_4) - f(x_1)}{x_4 - x_1} \cdot \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} - \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} \cdot \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} =$$
$$= b(a + \varepsilon_1) - (b + \varepsilon_2)(b + \varepsilon_3),$$

где ε_1, ε_2, ε_3 — малые положительные числа, а через b обозначено выражение $\frac{f(x_4) - f(x_1)}{x_4 - x_1}$. Переходя в этом равенстве к пределу при $x_2, x_3 \to c$, получаем $b(a - b) < 0$, что противоречит условию. Полезно отметить, что если функция $f \in C^3(\Delta)$ монотонна, то справедливость неравенства из условия задачи для произвольной четверки точек $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ равносильна условию $Sf < 0$.

§ 3. Многочлены Бернштейна

3.1. б) Для вычисления сумм $S_{n,0}$ и $S_{n,1}$ воспользуйтесь биномом Ньютона и равенством

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n} kC_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{0\leqslant k<n} nxC_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-1-k} = nx.$$

Суммы $S_{n,2}$, $S_{n,3}$ и $S_{n,4}$ вычислите с помощью рекуррентной формулы а).

3.2. а) Сравнивая суммы $\sigma_{n,\delta}$ и $S_{n,2}$ (см. задачу 3.1), получаем

$$\sigma_{n,\delta}(x) \leqslant \frac{1}{\delta^2} \sum_{0\leqslant k\leqslant n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{\delta^2 n^2} S_{n,2}(x) = \frac{x(1-x)}{\delta^2 n} \leqslant \frac{1}{4\delta^2 n}.$$

б) Сравните суммы $\sigma_{n,\delta}$ и $S_{n,4}$ и воспользуйтесь неравенством $S_{n,4}(x) < n^2/4$.

3.3. а) Используйте результат задачи 3.1.

3.4. б) Воспользуйтесь неравенством

$$B_n((f-A)^2;\ x) = B_n(f^2;\ x) - 2AB_n(f;\ x) + A^2 \geqslant 0 \quad \text{при} \quad A = B_n(f;\ x).$$

3.5. Убедитесь в том, что

а) $$B_n'(f;\ x) = n \sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-1-k} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right);$$

б) $$B_n''(f;\ x) =$$

$$= n(n-1) \sum_{0\leqslant k\leqslant n-2} C_{n-2}^k x^k (1-x)^{n-2-k} \left(f\left(\frac{k+2}{n}\right) - 2f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

3.6. а) Воспользуйтесь равенством $\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1$.

б) Достаточно рассмотреть случай, когда $\sup\limits_{\Delta} f = 0$ (в противном случае следует рассмотреть функцию $\tilde{f} = f - \sup\limits_{\Delta} f$). Тогда $f(k/n) \leqslant 0$, если $k/n \in \Delta$, и, следовательно,

$$B_n(f;\ x) \leqslant \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ \frac{k}{n}\notin\Delta}} C_n^k f(k/n)\, x^k (1-x)^{n-k} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sup_{[0;1]} f\right) \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ \frac{k}{n}\notin\Delta}} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Осталось воспользоваться неравенством а) задачи 3.2.

в) Пусть $\sup\limits_{\Delta} f = 0$. Можно считать, что $\sup\limits_{\Delta'\setminus\Delta} f \leqslant -1$ (этого можно добиться, умножая функцию f на положительную постоянную). Положим $\Delta = (a;\ b)$, $\Delta' = (\alpha;\ \beta)$, $0 \leqslant \alpha < a < b < \beta \leqslant 1$, $M = \sup\limits_{[0;1]} f$. Тогда

$$B_n(f;\ x) \leqslant \sum_{0\leqslant k\leqslant \alpha n} MC_n^k x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{\alpha n<k\leqslant an} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} -$$

$$- \sum_{bn\leqslant k<\beta n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{\beta n\leqslant k\leqslant n} MC_n^k x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \sum\nolimits_1 - \sum\nolimits_2 - \sum\nolimits_3 + \sum\nolimits_4.$$

Докажем, что $\sum_1 < \sum_2$ для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ (неравенство $\sum_4 < \sum_3$ доказывается аналогично). Поскольку слагаемые в сумме $\sum_1$ не убывают, то достаточно доказать, что

$$MnC_n^{[\alpha n]} x^{[\alpha n]} (1-x)^{n-[\alpha n]} < C_n^{[an]} x^{[an]} (1-x)^{n-[an]},$$

т. е.

$$MnC_n^{[\alpha n]} (x/(1-x))^{[\alpha n]-[an]} < C_n^{[an]}.$$

Левая часть этого неравенства убывает с ростом x. Поэтому его достаточно проверить при $x = a$. Так как $\sqrt[n]{C_n^{[pn]}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} p^{-p}(1-p)^{p-1}$ (см. задачу II.1.8), то достаточно убедиться в справедливости неравенства $a^\alpha(1-a)^{1-\alpha} < \alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}$ при $\alpha < a$, а это очевидно, так как левая часть последнего неравенства убывает с ростом a и совпадает с правой частью при $a = \alpha$.

3.7. Применив неравенство б) задачи 3.6 к функциям $(f-g)$ и $(g-f)$, покажите, что $B_n(f;\ x_0) - B_n(g;\ x_0) \to 0$.

3.8. а) Примените неравенство б) задачи 3.6 к функциям $(f(x) - f(x_0))$ и $(f(x_0) - f(x))$.

б) Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем такое число $\delta = \delta_\varepsilon > 0$, что $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$, если $x \in \Delta$, $t \in [0;\ 1]$ и $|t - x| < \delta$. Пусть $M = \sup\limits_{[0;1]} |f|$. С помощью неравенства а) задачи 3.2 получаем

$$|B_n(f;\ x) - f(x)| = \left|\sum_{0\leqslant k\leqslant n} (f(k/n) - f(x))\, C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ \left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}} \varepsilon C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\delta}} 2MC_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \varepsilon + \frac{M}{2\delta^2 n}.$$

Таким образом, $|B_n(f;\ x) - f(x)| < 2\varepsilon$, если $n > M/(2\varepsilon\delta^2)$ и $x \in \Delta$.

в) Достаточно рассмотреть случай, когда $f(x) = 1$ при $x \leqslant x_0$ и $f(x) = 0$ при $x > x_0$. Тогда

$$B_n(f;\, x_0) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant nx_0} C_n^k x_0^k (1 - x_0)^{n-k}.$$

Для подсчета этой суммы разобьем ее на две части S_1 и S_2, выделив вклад слагаемых с «малыми» номерами:

$$S_1 = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n(x_0 - \delta)} C_n^k x_0^k (1 - x_0)^{n-k},$$

$$S_2 = \sum_{n(x_0 - \delta) < k \leqslant nx_0} C_n^k x_0^k (1 - x_0)^{n-k}$$

(здесь $\delta = \delta_n$ — малый положительный параметр, выбор которого мы уточним позже). Оценивая сумму S_1 с помощью неравенства 3.2.а), мы видим, что $S_1 = O(1/(n\delta^2))$. С помощью формул Стирлинга и Тейлора получаем, что для слагаемых, входящих в S_2, справедливо равенство

$$C_n^k x_0^k (1 - x_0)^{n-k} = \frac{1 + O\left(\frac{1}{n} + \delta\right)}{\sqrt{2\pi n x_0 (1 - x_0)}} \exp\left(-\frac{n\left(x_0 - \frac{k}{n}\right)^2}{2x_0(1 - x_0)} + O(n\delta^3)\right).$$

Теперь будем считать, что $\delta = \delta_n$ выбрано таким образом, что $n\delta_n^2 \to +\infty$ и $n\delta_n^3 \to 0$ (например, $\delta_n = n^{-2/5}$). Тогда $S_1 = o(1)$ и

$$B_n(f;\, x_0) = o(1) + \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi n x_0 (1 - x_0)}} \sum_{n(x_0 - \delta) < k \leqslant nx_0} \exp\left(-\frac{n\left(x_0 - \frac{k}{n}\right)^2}{2x_0(1 - x_0)}\right) =$$

$$= o(1) + (1 + o(1)) \sqrt{\frac{n}{2\pi x_0 (1 - x_0)}} \times$$

$$\times \left(\int_{x_0 - \delta}^{x_0} \exp\left(-\frac{n(x_0 - t)^2}{2x_0(1 - x_0)}\right) dt + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= o(1) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\delta\sqrt{\frac{n}{2x_0(1-x_0)}}} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2} + o(1).$$

3.9. а) Из условия следует, что $\int\limits_0^1 f(x)\,B_n(f;\,x)\,dx = 0$ для $n \in \mathbb{N}$. Так как $B_n(f) \rightrightarrows f$ на $[0;\,1]$ (см. задачу 3.8. б) при $\Delta = [0;\,1]$), то

$$\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f(x)\,B_n(f;\,x)\,dx = 0,$$

и, следовательно, $f \equiv 0$.

б) Ясно, что $\int\limits_0^1 (ax+b)\left(x^{n+1}(1-x)^2\right)''\,dx = 0$ для всех $a, b \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\tilde{f}(x) = f(x) - (ax+b)$, где a и b подобраны так, чтобы

$$\int\limits_0^1 \tilde{f}(x)\,dx = 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_0^1 \tilde{f}(x)\,x\,dx = 0.$$

Так как $\int\limits_0^1 \tilde{f}(x)\left(x^{n+1}(1-x)^2\right)''\,dx = 0$, то числа $M_n = \int\limits_0^1 \tilde{f}(x)\,x^n\,dx$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$(n+3)(n+2)M_{n+1} = 2(n+2)(n+1)M_n - (n+1)nM_{n-1}.$$

Пользуясь равенствами $M_0 = \int\limits_0^1 \tilde{f}(x)\,dx = 0$, $M_1 = \int\limits_0^1 \tilde{f}(x)\,x\,dx = 0$, получаем отсюда, что $M_n = 0$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ Осталось воспользоваться результатом задачи 3.9.а).

3.10. Покажем, что можно ослабить условия на функцию g из класса $C^2([0;\,1])$, потребовав лишь, чтобы она и ее первые две производные обращались в нуль на концах промежутка $[0;\,1]$. Действительно, для любой такой функции g и для любого числа $\Delta \in (0;\,{}^1/_2)$ функция g_Δ, равная $g\left(\frac{x-\Delta}{1-2\Delta}\right)$ при $x \in [\Delta;\,1-\Delta]$ и нулю в противном случае, удовлетворяет условиям задачи. Поэтому

$$0 = \int\limits_0^1 f(x)\,g''_\Delta(x)\,dx = \int\limits_\Delta^{1-\Delta} f(x)\left(g\left(\frac{x-\Delta}{1-2\Delta}\right)\right)''dx =$$

$$= \frac{1}{1-2\Delta}\int\limits_0^1 f(\Delta + x(1-2\Delta))\,g''(x)\,dx.$$

Отсюда следует, что $\int\limits_0^1 f(x)\, g''(x)\, dx = 0$. В частности, это равенство справедливо для функций g вида $g(x) = x^{p+n}(1-x)^p$, где $p > 2$ и $n \geqslant 0$. Переходя к пределу при $p \to 2$, получаем, что $\int\limits_0^1 f(x)\left(x^{2+n}(1-x)^2\right)'' dx = 0$ для любого $n \geqslant 0$, а это равносильно (см. задачу 3.9. б)) линейности функции f.

3.11. Примените результат задачи 3.8. б) при $\Delta = [0;\ 1]$ к функции $\tilde{f}(x) = f(\arccos x)$.

3.12. а) Сформулируйте и докажите двумерный аналог неравенства а) задачи 3.2, а затем модифицируйте решение задачи 3.8. б).

3.13. С помощью индукции докажите тождество

$$B_n^{(r)}(f;\ x) =$$
$$= n(n-1)\ldots(n-r+1) \sum_{0\leqslant k\leqslant n-r} C_{n-r}^k x^k (1-x)^{n-k-r} \Delta_r^{(n)} f(k/n),$$

где

$$\Delta_1^{(n)} f(y) = f(y+1/n) - f(y), \qquad \Delta_j^{(n)} f(y) = \Delta_1^{(n)}\left(\Delta_{j-1}^{(n)} f(y)\right).$$

Воспользуйтесь равенством $\Delta_r^{(n)} f(y) = \dfrac{1}{n^r} f^{(r)}\left(y + \dfrac{r}{n}\theta\right)$, где $\theta \in (0;\ 1)$.

3.14. а) Пусть число $M > 0$ таково, что $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|^\alpha$ для всех $x,\ y \in [0;\ 1]$. Тогда

$$|B_n(f;\ x) - f(x)| = \left|\sum_{0\leqslant k\leqslant n} (f(k/n) - f(x))\, C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right| \leqslant$$
$$\leqslant M \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \left|\frac{k}{n} - x\right|^\alpha C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Положим $p_k = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$. Из результата задачи 3.1. б) следует, что $\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n} p_k = 1$ и $\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n} p_k \left(\dfrac{k}{n} - x\right)^2 = \dfrac{x(1-x)}{n}$. Пользуясь неравенством Гёльдера (см. задачу VII.1.29), получаем

$$|B_n(f;\ x) - f(x)| \leqslant$$
$$\leqslant M\left(\sum_{0\leqslant k\leqslant n} p_k\right)^{(2-\alpha)/2} \left(\sum_{0\leqslant k\leqslant n} p_k\left(\frac{k}{n} - x\right)^2\right)^{\alpha/2} = M\left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{\alpha/2}.$$

б) Для оценки снизу $B_n(f_\alpha;\ 1/2)$ рассмотрим суммы

$$s_a(x) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} |k - nx|^a.$$

Из неравенства Гёльдера следует, что $s_{a+b}(x) \leqslant (s_{pa}(x))^{1/p} \times$ $\times (s_{qb}(x))^{1/q}$, если $p,\ q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Подберем параметры a, b и p так, что $a+b=2$, $ap=\alpha$, $bq=4$ $\left(a = \frac{2\alpha}{4-\alpha},\ b = 4\frac{2-\alpha}{4-\alpha},\right.$ $\left.p = \frac{4-\alpha}{2},\ q = \frac{4-\alpha}{2-\alpha}\right)$. В этом случае последнее неравенство принимает вид

$$s_2(x) \leqslant s_{\alpha}^{2/(4-\alpha)}(x)\, s_4^{(2-\alpha)/(4-\alpha)}(x).$$

Так как (см. задачу 3.1. б)) $s_2(x) = S_{n,2}(x) = nx(1-x)$ и $s_4(x) = S_{n,4}(x) \leqslant n^2x(1-x)$, то $n^{\alpha/2}x(1-x) \leqslant s_\alpha(x)$. Следовательно, $n^{-\alpha}s_\alpha(x) \geqslant x(1-x)/n^{\alpha/2}$. При $x = 1/2$ получаем

$$B_n(f_\alpha;\ 1/2) - f_\alpha(1/2) = B_n(f_\alpha;\ 1/2) = n^{-\alpha}s_\alpha(1/2) \geqslant 1/(4n^{\alpha/2}).$$

3.15. а) Запишем $B_n(f;\ x)$ в виде $B_n(f;\ x) = \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n} p_k f(k/n)$, где $p_k = C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$. Так как $\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n} p_k = 1$ и $\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n} kp_k = nx$ (см. задачу 3.1.б)), то с помощью неравенства Иенсена (задача VII.1.1) мы получаем

$$B_n(f;\ x) \geqslant f\left(\sum_{0\leqslant k\leqslant n} p_k \frac{k}{n}\right) = f(x).$$

б) Допустим противное: существуют такие числа a, b, x, что $0 \leqslant a < x < b \leqslant 1$ и $f(x) > \frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{b-x}{b-a} f(a)$. Будем считать, что $f(a) = f(b) = 0$ (этого можно добиться, вычитая из f линейную функцию). Кроме того, можно считать, что $f(x) = \max\limits_{[a;b]} f$. Из результата задачи 3.6. в) следует, что $B_n(f;\ x) < f(x)$ для достаточно больших n, а это противоречит условию.

3.16. Для оценки величины $\Delta_n(x) = B_n(f;\ x) - f(x) - \frac{x(1-x)}{2n} f''(x)$ запишем разность $B_n(f;\ x) - f(x)$ в виде

$$B_n(f;\ x) - f(x) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}(f(k/n) - f(x)). \qquad (*)$$

Воспользуемся таким вариантом формулы Тейлора

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2} f''(x)(t-x)^2 + \varphi(t;\ x)(t-x)^2,$$

где функция φ непрерывна на квадрате $[0;\ 1] \times [0;\ 1]$ и равна нулю при $t = x$. Полагая $t = k/n$, получаем

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = f(x) + f'(x)\left(\frac{k}{n} - x\right) + \frac{f''(x)}{2}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 + \varphi\left(\frac{k}{n};\ x\right)\left(\frac{k}{n} - x\right)^2.$$

Подставив это выражение в (*) и воспользовавшись результатом задачи 3.1. б), приходим к равенству

$$\Delta_n(x) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \varphi\left(\frac{k}{n}; x\right)\left(\frac{k}{n}-x\right)^2.$$

Зафиксируем теперь произвольное число $\varepsilon > 0$. Пусть $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ таково, что $|\varphi(t; x)| < \varepsilon$, если $|t-x| < \delta$. Тогда

$$|\Delta_n(x)| \leqslant \sum_{0<k<n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \left|\varphi\left(\frac{k}{n}; x\right)\right| \left(\frac{k}{n}-x\right)^2 =$$

$$= \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\delta} + \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\delta} \leqslant \frac{\varepsilon}{n^2} S_{n,2}(x) + \frac{M}{n^4\delta^2} S_{n,4}(x) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\frac{x(1-x)}{n} + \frac{M}{\delta^2}\frac{x(1-x)}{n^2},$$

где $M = \sup|\varphi|$. Таким образом, $|\Delta_n(x)| \leqslant 2\varepsilon x(1-x)/n$, если $n > M/\varepsilon\delta^2$.

3.17. По поводу задач 3.17, 3.18 см. [40]. Положим

$$S_n(f) = \sum_{0<k<n}\left(B_n\left(f; \frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) g\left(\frac{k}{n}\right),$$

$$I(f) = \int_0^1 f(x)\,(x(1-x)\,g(x))''\,dx.$$

Из результата задачи 3.16 следует, что $S_n(\varphi) \to I(\varphi)$ для любой функции $\varphi \in C^2([0;\ 1])$. Для доказательства сходимости в общем случае запишем сумму $S_n(f)$ в виде $S_n(f) = \sum\limits_{0\leqslant j\leqslant n} f(j/n)\,a_{n,j}$, где

$$a_{n,j} = C_n^j \sum_{0\leqslant k\leqslant n} g\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n}\right)^j\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-j} - g\left(\frac{j}{n}\right).$$

Достаточно убедиться в ограниченности сумм $\sum\limits_{0\leqslant j\leqslant n}|a_{n,j}|$. Действительно, пусть $\sum\limits_{0\leqslant j\leqslant n}|a_{n,j}| \leqslant C$, $M = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|(x(1-x)\,g(x))''|$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и подберем такую функцию $\varphi \in C^2([0;\ 1])$, что $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ (в качестве φ можно взять многочлен Бернштейна $B_N(f)$ с достаточно большим номером N — см. задачу 3.8. б) при $\Delta = [0;\ 1]$). Тогда

$$|S_n(f) - I(f)| \leqslant |S_n(f-\varphi)| + |I(f-\varphi)| + |S_n(\varphi) - I(\varphi)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{0\leqslant j\leqslant n}\varepsilon|a_{n,j}| + M\varepsilon + |S_n(\varphi) - I(\varphi)| \leqslant$$

$$\leqslant (M+C)\,\varepsilon + |S_n(\varphi) - I(\varphi).$$

Следовательно, $S_n(f)\to I(f)$ для любой функции $f\in C([0;\ 1])$, если $\sum\limits_{0\leqslant j\leqslant n}|a_{n,j}|=O(1)$. Для оценки этой суммы воспользуемся гладкостью функции g: $g\left(\frac{k}{n}\right)=g\left(\frac{j}{n}\right)+g'\left(\frac{j}{n}\right)\frac{k-j}{n}+O\left(\left(\frac{k-j}{n}\right)^2\right)$. Это дает

$$|a_{n,j}|\leqslant\left|g\left(\frac{j}{n}\right)\right|\left|C_n^j\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\left(\frac{k}{n}\right)^j\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-j}-1\right|+$$
$$+\left|g'\left(\frac{j}{n}\right)\right|C_n^j\left|\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\left(\frac{k}{n}\right)^j\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-j}\frac{k-j}{n}\right|+$$
$$+O(1)\,C_n^j\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\left(\frac{k}{n}\right)^j\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-j}\left(\frac{k-j}{n}\right)^2.$$

Так как функция g равна нулю интервала $(a;\ b)$, то отсюда следует, что

$$\sum_{0\leqslant j\leqslant n}|a_{n,j}|\leqslant A_n\max|g|+B_n\max|g'|+O(1)\,C_n,$$

где

$$A_n=\sum_{an\leqslant j\leqslant bn}\left|C_n^j\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\left(\frac{k}{n}\right)^j\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-j}-1\right|,$$
$$B_n=\sum_{an\leqslant j\leqslant bn}C_n^j\left|\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\left(\frac{k}{n}\right)^j\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-j}\frac{k-j}{n}\right|,$$
$$C_n=\sum_{0\leqslant j\leqslant n}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}C_n^j\left(\frac{k}{n}\right)^j\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-j}\left(\frac{k-j}{n}\right)^2.$$

Изменив порядок суммирования и воспользовавшись результатом задачи 3.1. б), получим

$$C_n=\frac{1}{n^2}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}S_{n,2}\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}k\left(1-\frac{k}{n}\right)=\frac{n^2-1}{6n^2}.$$

Осталось доказать ограниченность сумм A_n и B_n. Для оценки суммы A_n запишем ее в виде

$$A_n=\sum_{an\leqslant j\leqslant bn}\left|n^{-n}C_n^j\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\varphi_j(k)-1\right|,$$

где $\varphi_j(t)=t^j(n-t)^{n-j}$ при $t\in[0;\ n]$. Используя результат задачи VI.3.15. б), получаем

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\varphi_j(k)=\int\limits_0^n\varphi_j(t)\,dt+O\left(\int\limits_0^n|\varphi_j''(t)|\,dt\right).$$

Так как функция φ_j'' на промежутке $[0; n]$ меняет знак лишь два раза, то

$$\int_0^n |\varphi_j''(t)|\,dt \leqslant 4 \max_{0\leqslant t\leqslant n} |\varphi_j'(t)|.$$

Несложные вычисления показывают, что

$$\max_{0\leqslant t\leqslant n} \varphi_j(t) = \varphi_j(j) \quad \text{и} \quad \max_{0\leqslant j\leqslant n} |\varphi_j'(t)| = |\varphi_j'(j + O(\sqrt{n}))|.$$

Из равенства $\varphi_j'(t) = n\dfrac{\varphi_j(t)}{t(n-t)}(j-t)$ следует, что при $j \in [an; bn]$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant n} |\varphi_j'(t)| \leqslant \frac{\text{const}}{\sqrt{n}} \max_{0\leqslant t\leqslant n} \varphi_j(t) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} j^j (n-j)^{n-j}\right).$$

С учетом равенства

$$\int_0^n \varphi_j(t)\,dt = n^{n+1}\int_0^1 t^j(1-t)^{n-j}\,dt = \frac{n^{n+1}}{(n+1)C_n^j}$$

получаем отсюда

$$A_n = \sum_{an\leqslant j\leqslant bn} \left| n^{-n}C_n^j\left(\frac{n^{n+1}}{(n+1)C_n^j} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} j^j (n-j)^{n-j}\right)\right) - 1\right| = O(1).$$

Сумма B_n оценивается аналогично.

3.18. Воспользуйтесь результатами задач 3.17 и 3.10. а).

3.19. Необходимость условия $f(0)$, $f(1) \in \mathbb{Z}$ очевидна. Если же оно выполнено, то многочлен $\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n}\left[C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right)\right] x^k (1-x)^{n-k}$ мало отличается от многочлена $B_n(f; x)$:

$$\left|\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\left[C_n^k f(k/n)\right] x^k(1-x)^{n-k} - \sum_{0\leqslant k\leqslant n} C_n^k f(k/n)\, x^k(1-x)^{n-k}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{1\leqslant k<n} x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{1\leqslant k<n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k} < \frac{1}{n}.$$

Остается воспользоваться результатом задачи 3.8. б) при $\Delta = [0; 1]$.

3.20. Для вычисления $B_n^{(k)}(f; 0)$ используйте тождество, приведенное в решении задачи 3.13.

3.21. а) Убедитесь в том, что $\Delta_k f \equiv 0$ при $k > m$ и воспользуйтесь формулой для $B_n(f; x)$ из предыдущей задачи. Равномерная сходимость следует из результата задачи IV.5.13.

б) Запишем $B_n(f;\ x)$ в виде

$$B_n(f;\ x) = n^{-m} \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} k^m C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = n^{-m} \frac{d^m}{dt^m} F_x(0),$$

где

$$F_x(t) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} C_n^k e^{kt} x^k (1-x)^{n-k} = (xe^t + 1 - x)^n.$$

Легко видеть, что

$$F_x(t) = \left(1 + x \sum_{j \geqslant 1} \frac{t^j}{j!}\right)^n = 1 + \sum_{j \geqslant 1} \frac{t^j}{j!} \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant j} C_{i,j}^{(n)} x^i\right),$$

причем все коэффициенты $C_{i,j}^{(n)}$ неотрицательны. Поэтому

$$\left|\frac{d^m}{dt^m} F_x(0)\right| = \left|\sum_{1 \leqslant i \leqslant m} C_{i,m}^{(n)} x^i\right| \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} C_{i,m}^{(n)} |x|^i \leqslant$$

$$\leqslant \max(1;\ |x|^m) \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} C_{i,m}^{(n)} = \max(1;\ |x|^m) \frac{d^m}{dt^m} F_1(0).$$

Осталось заметить, что $F_1(t) = e^{nt}$ и, следовательно, $\frac{d^m}{dt^m}F_1(0) = n^m$. По поводу этой задачи см. также работу С. Н. Бернштейна [2].

3.22. а) Очевидно, мы можем считать, что $r > 1$. Зафиксировав произвольное число $\varepsilon > 0$, подберем столь большой номер $N = N_\varepsilon$, что $\sum_{m > N} |c_m| r^m < \varepsilon$. Пусть $P(x) = \sum_{0 \leqslant m \leqslant N} c_m x^m$ и $\rho(x) = f(x) - P(x)$. Тогда $B_n(f) - f = B_n(P) - P + B_n(\rho) - \rho$. Разность $B_n(P) - P$ равномерно мала на $[-r;\ r]$, если n достаточно велико (см. задачу 3.21. а)). Так как

$$|\rho(x)| \leqslant \sum_{m > N} |c_m| |x|^m \leqslant \sum_{m > N} |c_m| r^m < \varepsilon,$$

то остается оценить $B_n(\rho;\ x)$. Для этого воспользуемся неравенством 3.21. б):

$$|B_n(\rho;\ x)| \leqslant \sum_{m > N} |c_m| \max(1;\ |x|^m) \leqslant \sum_{m > N} |c_m| r^m < \varepsilon.$$

Более тонкий результат получен в работе Л. В. Канторовича [9].

б) Воспользуйтесь неравенствами 3.15. а) и 3.21. б).

3.23. а) Сделайте замену переменной $y = x/(1-x)$.

б) Воспользуйтесь тем, что умножение на $x + (1-x)$ не меняет многочлена.

в) Необходимость условия очевидна. Для доказательства достаточности вычислим коэффициенты a_n^k. Пусть $P(x) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant m} b_j x^j$.

Сделаем замену переменной $y = x/(1-x)$. Тогда из равенства $\sum\limits_{0\leqslant j\leqslant m} b_j x^j = \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n} a_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ следует, что $\sum\limits_{0\leqslant j\leqslant m} b_j y^j (1+y)^{n-j} = \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n} a_n^k y^k$. Приравнивая коэффициенты при равных степенях переменной y, получаем

$$a_n^k = \sum_{0\leqslant j\leqslant \min(m;k)} b_j C_{n-j}^{k-j} = C_n^k \sum_{0\leqslant j\leqslant \min(m;k)} b_j \left(\frac{k}{n}\right)^j \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = C_n^k\left(P\left(\frac{k}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Поэтому $a_n^k > 0$ при $k = 0, 1, \ldots, n$ для всех достаточно больших номеров n, если многочлен P положителен на всем промежутке $[0;\ 1]$. В общем случае представим многочлен P в виде $P(x) = x^a \widetilde{P}(x)(1-x)^b$, где $\widetilde{P} > 0$ на $[0;\ 1]$. Так как коэффициенты разложения многочлена $\widetilde{P}$ по базису $\{x^k(1-x)^{n-a-b-k}\}_{0\leqslant k\leqslant n-a-b}$ положительны, то из этого представления вытекает, что коэффициенты $\{a_n^k\}_{0\leqslant k\leqslant n}$ разложения многочлена P по базису $\{x^k(1-x)^{n-k}\}_{0\leqslant k\leqslant n}$ положительны для $k = a, a+1, \ldots, n-b$ и равны нулю для остальных k.

§ 4. Почти периодические функции и последовательности

4.1. Положим $\delta(x) = x - [x]$, $p_n = \delta(n\lambda)$. Поскольку λ иррационально, $p_n \neq p_m$ при $n \neq m$. Заметим, что $p_{n+m} = (p_n + p_m) \bmod 1$ при любых n, $m \in \mathbb{Z}$. Для любого $N > 1/\varepsilon$ среди точек $p_1, \ldots, p_N$ найдутся две, расстояние между которыми меньше ε. Пусть k_1, k_2 (k_1, $k_2 \leqslant N$) — такие номера, что $0 < p_{k_1} - p_{k_2} < \varepsilon$, и пусть $m = k_1 - k_2$. Тогда $0 < p_m < \varepsilon$. Пусть $r \in \mathbb{N}$ таково, что $1 - \varepsilon < p_{rm} < 1$. Тогда если $p_n \in (a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$, то либо p_{n+m}, либо p_{n+rm} попадает в этот же интервал. То же можно сказать об одной из точек p_{n-m}, p_{n-rm}. Таким образом, расстояние между соседними решениями уравнения $n\lambda \overset{\varepsilon}{=} a \pmod 1$ не превосходит $L = r|m|$, что доказывает второе утверждение.

4.2. а) Рассмотрим множество

$$\Gamma = \{(x;\ y) \mid x(t) = \delta(\lambda_1 t),\ y(t) = \delta(\lambda_2 t);\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Проверьте, что при иррациональном λ_1/λ_2 множества $A_x = \{x(t) \mid y(t) = 0\}$, $A_y = \{y(t) \mid x(t) = 0\}$ всюду плотны на $[0;\ 1)$ (воспользуйтесь 4.1). «Кривая» Γ состоит из отрезков (рис. 20), которые получены при пересечении квадрата $[0;\ 1) \times [0;\ 1)$ с семейством параллельных прямых, имеющих угловой коэффициент λ_2/λ_1 и проходящих через все возможные точки множеств $A_x \times \{0\}$, $\{0\} \times A_y$. Ее называют *иррациональной обмоткой тора* $T^2 = [0;\ 1) \times [0;\ 1) \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Мы рекомендуем читателю проследить за движением точки $(x(t);\ y(t))$, где, например, $x(t) = t \bmod 1$, $y(t) = t\sqrt{2} \bmod 1$, на достаточно большом промежутке изменения параметра t. Из описанной выше структуры множества Г следует, что оно всюду плотно в $[0;\ 1) \times [0;\ 1)$, что равносильно разрешимости системы (1).

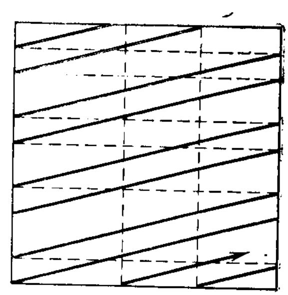

Рис. 20

Рассмотрим последовательности $t_k = \frac{1}{\lambda_1}(k + a_1)$, $y_k = y(t_k)$. Как установлено в задаче 4.1, существует относительно плотное множество таких $k \in \mathbb{Z}$, при которых $y_k \overset{\varepsilon}{=} a_2$. В то же время $x_k = x(t_k) = a_1$.

б) Перейдем к целым решениям системы (1). Иррациональность λ_1 и λ_2 приводят к тому, что точки $p_k = (x_k;\ y_k)$, где на этот раз $x_k = x(k)$, $y_k = y(k)$, оказываются попарно различными. Тогда p_k имеют точку сгущения. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, что координаты ξ, η точки $p_{k_1} - p_{k_2} \in \mathbb{R}^2$ удовлетворяют условию $|\xi| < \varepsilon$, $|\eta| < \varepsilon$. Из иррациональности λ_2/λ_1 следует иррациональность η/ξ, и поэтому обмотка тора $\widetilde{\Gamma} = \{(\delta(\xi t);\ \delta(\eta t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ всюду плотна в квадрате T^2. Пусть $m = k_1 - k_2$. Тогда точки p_{rm}, $r \in \mathbb{Z}$, образуют $\varepsilon\sqrt{2}$-сеть на каждом отрезке, из которых состоит $\widetilde{\Gamma}$, а значит, и в квадрате.

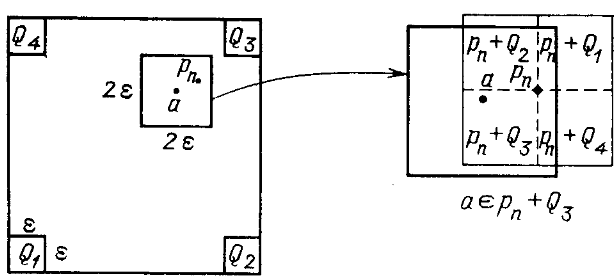

Рис. 21

Пусть $p_n \overset{\bullet}{=} (x_n;\ y_n)$ — такая точка, что $|x_n - a_1| < \varepsilon$, $|y_n - a_2| < \varepsilon$. Для каждого из четырех открытых квадратов $Q_1, \ldots, Q_4$ (рис. 21) со стороной ε, примыкающих к углам квадрата T^2 и содержащихся в нем, подберем натуральные числа $r_1, \ldots, r_4$ так, чтобы точка $p_{r_i m}$ попадала в Q_i (одно из чисел r_i можно взять равным единице).

Тогда для любого n, являющегося решением системы (1), одно из чисел $n+r_i m$ также будет решением (1) (а также и одно из чисел $n-r_i m$, см. рис. 21). Из этого следует, что в каждом интервале длины $L=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 4} r_i\,|m|$ на прямой имеется по крайней мере одно целочисленное решение нашей системы.

4.3. Докажем, что система разрешима при любых $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Положим $t_n = n/\lambda_1$, $x_i(t_n) = \delta(\lambda_i t_n)$, $i=1, \ldots, k$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $x_1(t_n)=0$, а точки $p_n = (x_2(t_n); \ldots; x_k(t_n)) \in T^{k-1} = \underbrace{[0;\,1)\times\ldots\times[0;\,1)}_{k-1 \text{ раз}}$ имеют точку сгущения. Рассуждая, как и решении предыдущей задачи, найдем такое $n_0 \geqslant 1$, для которого $x_i(t_{n_0}) < \varepsilon$.

4.4. Докажем, что для вещественной разрешимости системы при любых $a_1, \ldots, a_k$ и ε числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ должны быть рационально независимыми (несоизмеримыми), т. е. соотношение $n_1\lambda_1 + \ldots n_k\lambda_k = 0$ $(n_i \in \mathbb{Z})$ должно выполняться лишь при $n_1 = \ldots = n_k = 0$. Пусть $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$ и система имеет решение t при любых значениях $a_1, \ldots, a_k$ и ε. Тогда $|\lambda_i t - a_i - m_i| < \varepsilon$, $i=1, \ldots, k$, для некоторых $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{Z}$, т. е. $\left|\sum n_i\lambda_i t - \sum n_i a_i - \sum n_i m_i\right| < \varepsilon \sum |n_i|$. Если $\sum n_i \lambda_i = 0$, то в силу произвольности ε отсюда следует, что $\sum n_i a_i \in \mathbb{Z}$. Поскольку числа $a_1, \ldots, a_k$ произвольны, $n_1 = \ldots = n_k = 0$. Опираясь на задачу 4.2.а), можно по индукции доказать, что рациональная несоизмеримость чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ гарантирует существование относительно плотного множества решений.

4.5. Покажем, что необходимым и достаточным условием положительного ответа на вопросы а) и б) является рациональная независимость чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ по mod 1. Предполагая существование целого решения m и фиксируя произвольные числа $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$, приходим, как и в предыдущей задаче, к неравенству

$$\left|\sum n_i\lambda_i m - \sum n_i a_i - \sum n_i m_i\right| < \varepsilon \sum |n_i|.$$

Если $\left(\sum n_i\lambda_i\right) \bmod 1 = 0$, то $\sum n_i\lambda_i m \in \mathbb{Z}$, и, следовательно, в силу произвольности ε, $\sum n_i a_i \in \mathbb{Z}$, откуда, как и раньше, вытекают равенства $n_1 = \ldots = n_k = 0$. Доказательство достаточности получается обобщением рассуждения из решения задачи 4.2.б).

4.6. Если a и b соизмеримы (т. е. число a/b рационально), то функция f периодична, а среднее значение f за период равно нулю. Если a/b иррационально, то найдутся сколь угодно близкие точки максимума (минимума) обоих слагаемых (см. задачу 4.2.а).

4.7. Для проверки первого утверждения рассмотрите систему уравнений $\lambda_k t \overset{\varepsilon}{=} 0 \pmod{2\pi}$, $k=1, \ldots, n$, и воспользуйтесь задачей 4.3 (см. также задачу 4.15).

Предположение о периодичности f влечет справедливость тождества $\sum a_k \left(e^{i\lambda_k \tau} - 1\right) e^{i\lambda_k x} \equiv 0$ (τ — период). Полагая $b_k = a_k \left(e^{i\lambda_k \tau} - 1\right)$ и дифференцируя это тождество в нуле, получаем равенства $\sum \lambda_k^m b_k = 0$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ Поскольку λ_k попарно различны, определитель Вандермонда $\det \left(\lambda_k^m\right)_{k=1}^{n}{}_{m=0}^{n-1}$ отличен от нуля и, следовательно, все b_k равны нулю. Но это возможно лишь, если $\frac{\lambda_k \tau}{2\pi} \in \mathbb{Z}$, т. е. λ_k попарно соизмеримы.

4.8. Используйте задачу 4.4.

4.9. Пусть существует такое $L > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$ в промежутке $[1; 1 + L]$ имеется τ_ε, удовлетворяющее неравеству

$$|f(x) - f(x + \tau_\varepsilon)| < \varepsilon, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

В силу компактности отрезка найдутся такая последовательность $\varepsilon_n \downarrow 0$ и такое τ, что $\tau_{\varepsilon_n} \to \tau$. Переходя к пределу в неравенстве (1), мы убеждаемся в том, что τ является периодом f.

4.10. Равномерная непрерывность и ограниченность доказываются почти так же, как в периодическом случае. Например, для оценки $|f(x_1) - f(x_2)|$ используйте почти период τ, взятый в промежутке $(-x_1; -x_1 + L)$. Ответы на остальные вопросы — как и в периодическом случае: существуют; не следует.

4.12. Рассмотртие функции $\varphi_h(x) = h^{-1}(f(x + h) - f(x))$ $(h > 0)$. Они равномерно почти периодичны и равномерно на $\mathbb{R}$ стремятся к f' при $h \to 0$.

4.13. Пусть, для простоты, F вещественная, $M = \sup\limits_{\mathbb{R}} F(x)$, $m = \inf\limits_{\mathbb{R}} F(x)$, $\varepsilon > 0$, а x_1 и x_2 таковы, что $F(x_1) < m + \varepsilon/6$, $F(x_2) > M - \varepsilon/6$. Пусть $d = |x_1 - x_2|$, $L = L(\varepsilon/(3d))$ — число, выбранное по определению почти периодичности для f. Если τ является $\varepsilon/(3d)$-почти периодом f, то для $z_i = x_i + \tau$, $i = 1, 2$, выполняется неравенство

$$F(z_2) - F(z_1) = F(x_2) + \int_{x_2}^{z_2} f(x)\,dx - F(x_1) - \int_{x_1}^{z_1} f(x)\,dx =$$

$$= F(x_2) - F(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} (f(u+\tau) - f(u))\,du \geqslant M - m - \frac{2\varepsilon}{3} - d\frac{\varepsilon}{3d} =$$

$$= M - m - \varepsilon.$$

Отсюда следует, что в каждом интервале длины $L + d$ найдутся такие z_1 и z_2, что $F(z_1) < m + \varepsilon$, $F(z_2) > M - \varepsilon$. Тогда для любого x

и такого $z_1 \in (x;\ x+L+d)$, что $F(z_1) < m+\varepsilon$, имеем

$$F(x+\tau)-F(x)=F(z_1+\tau)-F(z_1)+\int\limits_x^{z_1} f(x)\,dx-\int\limits_{x+\tau}^{z_1+\tau} f(x)\,dx=$$

$$=F(z_1+\tau)-F(z_1)-\int\limits_x^{z_1}(f(u+\tau)-f(u))\,du>$$

$$>m-(m+\varepsilon)-(L+d)\,\varepsilon=-\varepsilon\,(1+L+d).$$

Аналогично доказывается, что $F(x+\tau)-F(x)<\varepsilon(1+L+d)$ для все x, откуда следует требуемое.

4.14. Необходимость. Рассмотрите последовательности $\{f(x+h_n)\}$, $x\in\mathbb{Q}$, и, пользуясь диагональным процессом, выберите подпоследовательность $k_i=h_{n_i}$ так, чтобы последовательности $\{f(x+k_i)\}$ сходились для всех $x\in\mathbb{Q}$. Для доказательства равномерной сходимости последовательности $\{f_{k_i}\}$ на $\mathbb{R}$ воспользуйтесь равномерной непрерывностью f.

Достаточность. Предположите противное: существуют $\varepsilon_0>0$ и последовательность интервалов $\{\Delta_n\}$, длины которых d_n стремятся к бесконечности и в каждом из которых нет ε_0-почти периодов f. Выберите последовательность $\{h_k\}$ и подпоследовательность интервалов $\{\Delta_{n_k}\}$ таким образом, чтобы

$$d_{n_k}>\max_{1<i,j<k}|h_i-h_j|,\qquad h_{k+1}-h_i\in\Delta_{n_k}\qquad \text{для } i=1,\,2,\,\ldots,\,k.$$

Докажите, что из последовательности $\{f_{h_k}\}$ нельзя выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность, рассмотрев

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f_{h_i}(x)-f_{h_j}(x)\right|,\quad i<j.$$

4.15. Для случая суммы воспользуйтесь критерием почти периодичности из предыдущей задачи. В случае произведения используйте равенство $fg=((f+g)^2-(f-g)^2)/4$.

4.16. Пусть $L=L(\varepsilon)$ — такое число, что любой промежуток длины L содержит ε-почти период функции f, $C=\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|f(t)|$. Используя почти период τ, взятый из интервала $(a;\ a+L)$, $a\in\mathbb{R}$, докажите неравенство $\left|\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int\limits_{-T}^{T} f(x)\,dx-\dfrac{1}{2T}\int\limits_{a-T}^{a+T} f(x)\,dx\right|<\varepsilon+\dfrac{CL}{T}$.

Выведите отсюда, что для $\varphi(T)=\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int\limits_{-T}^{T} f(x)\,dx$ справедлива оценка $|\varphi(nT)-\varphi(T)|<\varepsilon+\dfrac{CL}{T}$ $(n\in\mathbb{N})$. Затем докажите, что

$| \varphi(T_1) - \varphi(T_2)| < 2\varepsilon + CL\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right)$ для таких T_1 и T_2, что $T_1/T_2 \in \mathbb{Q}$.

4.17. а) Поясним лишь, как из равенства $\langle f;\ f\rangle = 0$ следует, что $f \equiv 0$.

Пусть $|f(x)|^2 > \varepsilon > 0$ в некотором интервале $(a;\ b)$. Тогда в каждом интервале длины $L = L(\varepsilon/2)$ найдется такое τ, что $|f(x)|^2 > \varepsilon/2$ для $x \in (a + \tau;\ b + \tau)$. Следовательно,

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(x)|^2\,dx \geqslant \frac{1}{2T}\left[\frac{2T}{L}\right](b-a)\frac{\varepsilon}{2} \xrightarrow[T\to\infty]{} \frac{b-a}{2L}\varepsilon > 0.$$

в) Пусть $g = \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} d_k\varphi_{\lambda_k}$, $d_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда

$$0 \leqslant \langle f - g;\ f - g\rangle = \langle f;\ f\rangle + \langle f;\ -g\rangle + \overline{\langle f;\ -g\rangle} + \langle g;\ g\rangle =$$
$$= \langle f;\ f\rangle - \sum c_{\lambda_k}\bar{d}_k - \sum \bar{c}_{\lambda_k} d_k + \sum |d_k|^2 =$$
$$= \langle f;\ f\rangle + \sum\left(d_k - c_{\lambda_k}\right)\bar{d}_k - \sum \overline{c_{\lambda_k}}\left(d_k - c_{\lambda_k}\right) - \sum c_{\lambda_k}\bar{c}_{\lambda_k} =$$
$$= \langle f;\ f\rangle + \sum |d_k - c_{\lambda_k}|^2 - \sum |c_{\lambda_k}|^2.$$

Полагая $d_k = c_{\lambda_k}$, приходим к доказываемому неравенству.

Счетность множества ненулевых «коэффициентов Фурье» c_λ вытекает из того, что ввиду конечности $M(|f|^2)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество $\{\lambda \mid |c_\lambda| \geqslant 1/n\}$ конечно. С другой стороны, для каждого счетного набора $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ и произвольного абсолютно сходящегося ряда $\sum a_k$ ряд $\sum a_k e^{i\lambda_k x}$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$, причем его сумма f — р. п. п. функция (см. задачи 4.7, 4.11). В силу равномерной сходимости

$$M(f\bar{\varphi}_\lambda) = \sum a_k M\left(\varphi_{\lambda_k}\bar{\varphi}_\lambda\right) = \begin{cases} a_k & \text{при } \lambda = \lambda_k, \\ 0 & \text{при } \lambda \neq \lambda_k. \end{cases}$$

Более подробно с затронутыми вопросами можно познакомиться, например, в [17].

4.18. Воспользуйтесь равенством $a_n = b_n + c_n$.

4.19. Равномерная почти периодичность f влечет периодичность $\{\varepsilon_k\}$.

4.20. Неверно. Соответствующий пример удобно описать в обозначениях задачи 4.23. Положите $A_0 = 0$, $A_p = A_{p-1}\underbrace{A^1_{p-1}\ldots A^1_{p-1}}_{2^{p+1}-1}$ $(p \in \mathbb{N})$.

4.21. Пусть $p = (m;\ n) \in \Sigma$. Рассмотрим соседние с p точки $(m \pm 1;\ n)$, $(m;\ n \pm 1)$. Заметим, что проекции отрезков, соединяющих $(m + 1;\ n)$ с $(m;\ n + 1)$, а $(m - 1;\ n)$ с $(m;\ n - 1)$, на прямую, перпендикулярную сторонам полосы, равны ширине полосы, откуда следует, что одна и только одна из вершин каждого из упомянутых отрезков принадлежит Σ. Соединив отрезками каждую точку из Σ с двумя соседними, получим бесконечную ломаную, лежащую в S, звенья которой параллельны осям координат, откуда легко следует первое утверждение.

Докажем второе утверждение. Рассматривая расстояния от последовательных вершин p_i ломаной до прямой $y=kx$, деленные на $\sqrt{1+k^2}$, получим последовательность $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, $x_i\in[0;\ 1)$. Тогда $x_{i+1}-x_i=1/(k+1)=\alpha$, если ребро p_ip_{i+1} вертикально (будем считать, что в этом случае $\varepsilon_i=1$) и $x_{i+1}-x_i=-k/(k+1)=$ $=\alpha-1$, если p_ip_{i+1} горизонтально ($\varepsilon_i=0$). Таким образом, если считать, что $p_0=(0;\ 0)$, то $x_i=i\alpha \bmod 1$. Пусть $\varepsilon_{s+1}\ldots\varepsilon_{s+l}$ — произвольное слово, и пусть $x_{s+j}=\max\{x_{s+1};\ \ldots;\ x_{s+l}\}$, $\delta=$ $=1-x_{s+j}$. Ясно, что в каждом отрезке $\mathbb{Z}$ достаточно большой длины найдется такое число t, что $x_{t+j}\in(1-\delta;\ 1)$ (см. задачу 4.1). Легко видеть, что тогда разности $x_{t+i}-x_{s+i}$, $i=1,\ \ldots,\ l$, одинаковы, а значит, «слова» $\varepsilon_{s+1}\ldots\varepsilon_{s+l}$ и $\varepsilon_{t+1}\ldots\varepsilon_{t+l}$ совпадают.

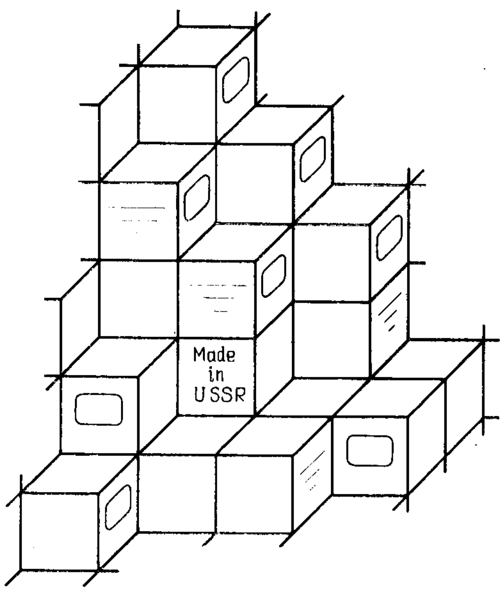

Рис. 22

Аналогичная задача в пространстве приводит к построению интересного разбиения плоскости. Пусть теперь S_0 — открытый слой пространства $\mathbb{R}^3$, расположенный между двумя параллельными плоскостями P и Q, причем $P \cap \mathbb{Z}^3 = \{(0;\ 0;\ 0)\}$, $Q \cap \mathbb{Z}^3 = \{(1;\ 1;\ 1)\}$, а $S = S_0 \cup P$. Ортогонально спроектировав отрезки, соединяющие пары соседних точек в $S \cap \mathbb{Z}^3$, на P, мы получим отрезки, ограничивающие некоторые параллелограммы. Эти параллелограммы покрывают P, и их внутренности попарно не пересекаются (рис. 22). Полученное покрытие замечательно тем, что оно состоит из параллелограммов всего трех сортов, не является периодическим (т. е. не переходит в себя ни при каких сдвигах), но является квазипериодическим в том смысле, что любая конечная его часть встречается бесконечное количество раз. Доказательства этих фактов оставляем читателю.

4.22. Сначала убедитесь, что если $A = A_n = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{2^n}$, то ε имеет вид $A^0A^1A^1A^0A^1A^0A^0A^1\ldots$, где $A^0 = A, A^1 = \left(1 - \varepsilon_1;\ \ldots;\ 1 - \varepsilon_{2^n}\right)$, т. е. верхние индексы снова образуют последовательность ε. Пусть B — любое слово из ε. Если n настолько велико, что слово A_n содержит B, то, как легко видеть, B содержится в каждом слове длины 2^{n+2}.

4.23. Полезно выделить случай, когда существует такое n, для которого $A_{p+1} = A_pA_p\ldots A_p$ при всех $p \geqslant n$. В этом случае ε имеет вид $A_nA_nA_n\ldots$ и, таким образом, оказывается периодической.

В противном случае для слова B из ε подберем какое-нибудь слово вида A_n, содержащее B. Тогда отыщется такое $k > 0$, что в слово A_{n+k} будут обязательно входить слова A_n и A_n^1. Поскольку ε получается соединением слов A_{n+k} и A_{n+k}^1, во всяком слове, длина L которого равна удвоенной длине A_{n+k}, содержится A_n и, следовательно, B.

Интересно отметить, что ε периодична лишь в упомянутом выше случае, а также если $A_{p+1} = A_pA_p^1A_pA_p^1 \ldots A_p^1A_p$ при всех достаточно больших p (проверьте).

4.24. Очевидно, что s имеет вид $As_{2k}\bar{A}s_{4k}As_{6k}\bar{A}s_{8k}\ldots$, где $k = 2^n\ (n \in \mathbb{N})$, $A = A_n = s_1\ldots s_{2k-1}$, $\bar{A} = s_{2k-1}\ldots s_1$. Отсюда сразу следует почти периодичность.

Если через $\sigma(n)$ обозначить $(-1)^{s_n} (n \in \mathbb{N})$, то последовательность $\{\sigma(n)\}$ характеризуется свойствами:

1) $\sigma(2n+1) = (-1)^n\sigma(1)$; 2) $s_{2n} = \frac{1}{2}(\sigma(2n) + 1)$ — снова последовательность складок. Предположим, что последовательность $\{s_n\}_{n \geqslant n_0}$ имеет период $t = 2^a(2b+1)$. Тогда $\sigma(n + 2^a(2b+1)) = \sigma(n)$ для всех $n \geqslant n_0$. Положив n равным $2^{a+1}m$, придем к равенствам $\sigma(2^a(2m+2b+1)) = \sigma(2^{a+1}m)$, $m \geqslant m_0$. Обозначив $\sigma(2^am)$ через $\sigma_a(m)$, получим последовательность σ_a, удовлетворя-

ющую 1) и 2). Следовательно,

$$\sigma_a(2m+2b+1) = (-1)^{m+b}\sigma_a(1) = \sigma_{a+1}(m), \quad m \geqslant m_0.$$

Но тогда $\sigma_{a+2}(m) = (-1)^{2m+b}\sigma_a(1) = \text{const}$, что невозможно.

В качестве следствия апериодичности отметим, что если числу $x \in [0;\ 1)$, разложение которого в бесконечную двоичную дробь имеет вид $x = 0{,}\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots$ (для однозначности такой записи предположим, что среди ε_n всегда бесконечное число нулей), поставить в соответствие $y = 0{,}s_1s_2\ldots$, где $\{s_n\}$ — последовательность складок, задаваемая равенствами $s_{2^n} = \varepsilon_{n+1}$, $n = 0, 1, \ldots$, то получим функцию, заданную на $[0;\ 1)$, непрерывную в иррациональных точках, непрерывную справа в двоично-рациональных точках и принимающую только иррациональные значения.

4.25. Примем за τ_m числа вида $m2^l$, $m \in \mathbb{N}$ (эти числа удовлетворяют условию а)) и запишем s в виде $As_k\bar{A}s_{2k}As_{3k}\bar{A}s_{4k}\ldots$ с $k = 2^{l-1}$, где A и $\bar{A}$ — слова длины $k-1$ (см. решение задачи 4.24). Поскольку длина слова $As_k\bar{A}s_{2k}$ равна 2^l, среди n чисел $a_j = \left|s_{j+\tau_m} - s_j\right|$, $j = 1, \ldots, n$, по крайней мере $(1-1/k)n$ чисел (отвечающих тем s_j, которые попадают в какое-нибудь слово вида A или $\bar{A}$) будут нулями. Следовательно,

$$\frac{1}{n}\sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_j < \frac{1}{k} < \varepsilon$$

при достаточно большом l, откуда следуют свойства б) и в).

4.27. Каждое конечное слово w из r содержится в некотором слове A_n. Проверьте, что r имеет вид $B_1B_2B_3\ldots$, где каждое слово B_i имеет длину 2^{n+3} и содержит A_n. Поэтому любое слово из r длины 2^{n+4} содержит A_n и, следовательно, w.

Отметим несколько любопытных свойств последовательностей складок s (см. задачу 4.24) и Рудина — Шапиро r.

Если определить s равенствами $s_{2k} = k \bmod 2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, то r_{n+1} совпадает с $\left(\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant 2n} s_j - n\right) \bmod 2$, $n \in \mathbb{N}$ $(r_1 = 0)$. С этими последовательностями связана также интересная кривая (ломаная) на плоскости (рис. 23, сплошная линия). Она составлена из чередующихся «горизонтальных» и «вертикальных» звеньев равной длины, причем повороты (на 90°) ломаной направо и налево отвечают, как в задаче 4.24, нулям и единицам последовательности s. Эта ломаная связана с последовательностью r так: числа $r_1, r_2, \ldots$ отвечают горизонтальным звеньям ломаной, взятым по порядку, причем $r_n = 0$, если n-е горизонтальное звено проходится слева направо, и $r_n = 1$, если справа налево (последовательность «вверх — вниз» прохождения вертикальных звеньев также напоминает последовательность Рудина — Шапиро).

С ломаной, отвечающей последовательности s, можно связать новую ломаную, изображенную на рис. 23 пунктиром. Она получается из сплошной следующим образом: мы заменяем каждое звено двумя новыми, служащими катетами равнобедренного треугольника с исходным звеном в роли гипотенузы. При этом

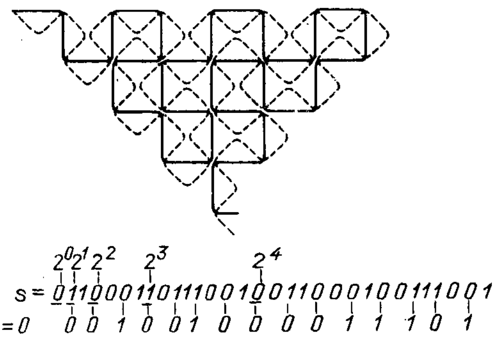

Рис. 23

вершина такого треугольника отклоняется от сплошной ломаной поочередно то вправо, то влево. Обратите внимание на то, что новая ломаная получилась из старой поворотом и сжатием в $\sqrt{2}$ раз. По второй ломаной можно построить третью аналогичным способом, затем четвертую, и так далее. Такая последовательность ломаных в пределе заполняет сектор на плоскости, ограниченный двумя сторонами угла в 45°, т. е. определяют кривую пеановского типа. Попробуйте самостоятельно исследовать кривые, возникающие подобным образом из последовательностей складок с другим чередованием нулей и единиц в последовательности $\{s_{2^n}\}$ (например, $s_{2^n} \equiv 1$), а также соответствующие предельные множества на плоскости. Подробнее о вопросах, затронутых в задачах 4.24—4.26, можно прочитать в статьях [35], [42].

Глава VIII. МЕРА И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

§ 1. Мера Лебега

1.1. Воспользуйтесь равенством $\bigcap\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} E_k = (0; 1) \setminus \bigcup\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} E'_k$, где $E'_k = (0; 1) \setminus E_k$. Докажите, что $\lambda\left(\bigcup\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} E'_k\right) < 1$.

1.2. Рассмотрите множества $E_k = z_k^{-1} E$ $(k = 1, \ldots, m)$ и, используя задачу 1.1, убедитесь, что $\bigcap\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} E_k \neq \varnothing$. Возьмите точку z_0 из множества $\bigcap\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} E_k$.

1.3. а) Разобьем пространство $\mathbb{R}^m$ на кубы с вершинами в точках решетки $\mathbb{Z}^m$: $\mathbb{R}^m = \bigcup_{l\in\mathbb{Z}^m} Q_l$, где $Q_l = \{l + y \mid y \in [0;\ 1)^m\}$. «Сдвинем» все множества $E \cap Q_l$ в куб $[0;\ 1)^m$, т. е. рассмотрим множества $E_l = \{x - l \mid x \in E \cap Q_l\}$. Так как

$$\sum_l \lambda_m(E_l) = \sum_l \lambda_m(E \cap Q_l) = \lambda_m(E) > 1,$$

то множества E_l не могут быть попарно дизъюнктными. Следовательно, найдутся такие различные векторы $l',\ l'' \in \mathbb{Z}^m$, что $E_{l'} \cap E_{l''} \neq \varnothing$. Пусть $a \in E_{l'} \cap E_{l''}$. Тогда $a = x' - l' = x'' - l''$, где $x',\ x'' \in E$. Таким образом, $0 \neq x' - x'' = l' - l'' \in \mathbb{Z}^m$.

б) Рассмотрите множество $E = \left\{\frac{1}{2}x \mid x \in V\right\}$ и используйте п. а).

в) Рассмотрите множество $E = \left\{\frac{1}{2}x \mid x \in V\right\}$ и, рассуждая по аналогии с решением п. а), докажите, что найдется точка, принадлежащая по крайней мере $(N+1)$ множеству E_l. Выведите отсюда, что в E найдутся попарно различные точки $x_1, x_2, \ldots, x_{N+1}$ такие, что $x_l - x_j \in \mathbb{Z}^m$. Рассмотрите такой номер s, что точка x_s не принадлежит выпуклой оболочке остальных точек. Проверьте, что все точки $\pm(x_k - x_s)$, где $k \neq s$, попарно различны и, следовательно, являются искомыми.

1.5. Докажите, что мера множества тех точек интервала $(0;\ 1)$, у которых ни одна из первый n цифр десятичного разложения не равна нулю, есть $(9/10)^n$.

1.6. а) Рассмотрите такие множества E_{n_k}, что $\sum_{k\geqslant 1}\left(1 - \lambda\left(E_{n_k}\right)\right) < 1$. Используйте ту же идею, что и при решении задачи 1.1.

б) Рассмотрите множества $E_n \subset (0;\ 1)$, состоящие из точек, у которых n-я десятичная цифра не равна нулю, и убедитесь, что $\lambda\left(\bigcap_{1\leqslant k\leqslant m} E_{n_k}\right) = (9/10)^m$ (ср. с решением задачи 1.5).

1.7. Рассмотрите множества $H_q = \bigcup_{0\leqslant p\leqslant q}\left(\frac{p-\alpha_q}{q};\ \frac{p+\alpha_q}{q}\right)$ $(q = 1,\ 2,\ \ldots)$ и убедитесь, что $A \subset \bigcup_{q\geqslant m} H_q$ при любом $m \in \mathbb{N}$.

1.8. Ввиду регулярности меры Лебега найдется такое открытое множество $G \supset E$, что

$$\theta\lambda_m(G) < \lambda_m(E). \qquad (*)$$

Пусть $G = \bigcup\Delta_n$, где Δ_n — попарно не пересекающиеся кубы. Из неравенства $(*)$ следует, что $\theta\sum\lambda_m(\Delta_n) < \sum\lambda_m(E \cap \Delta_n)$. Поэтому хотя бы для одного номера $n = n_0$ должно выполняться неравенство $\theta\lambda_m\left(\Delta_{n_0}\right) < \lambda_m\left(E \cap \Delta_{n_0}\right)$. Полагая $\Delta = \Delta_{n_0}$, получаем требуемый результат.

1.9. Пусть $H = E - E$, Δ — такой промежуток, что $\frac{3}{4}\lambda(\Delta) < \lambda(E \cap \Delta)$ (см. 1.8). Докажем, что $H \supset \left(-\frac{1}{2}\lambda(\Delta); \frac{1}{2}\lambda(\Delta)\right)$.

Пусть $|x| < \frac{1}{2}\lambda(\Delta)$. Проверим, что $(E \cap \Delta) \cap (x + E \cap \Delta) \neq \varnothing$. Действительно, в противном случае

$$\lambda((E \cap \Delta) \cup (x + E \cap \Delta)) =$$
$$= \lambda(E \cap \Delta) + \lambda(x + E \cap \Delta) = 2\lambda(E \cap \Delta) > \frac{3}{2}\lambda(\Delta). \quad (*)$$

С другой стороны, поскольку $|x| < \lambda(\Delta)/2$, мы имеем, что $\lambda(\Delta \cup (x + \Delta)) < \frac{3}{2}\lambda(\Delta)$, и поэтому $\lambda((E \cap \Delta) \cup (x + E \cap \Delta)) \leqslant \lambda(\Delta \cup (x + \Delta)) \leqslant \frac{3}{2}\lambda(\Delta)$, что противоречит неравенству $(*)$.

Пусть $y \in (E \cap \Delta) \cap (x + E \cap \Delta)$. Так как $y \in x + E \cap \Delta$, то найдется такая точка $x' \in E \cap \Delta$, что $y = x + x'$. Таким образом, $x = y - x'$, где $y, x' \in E \cap \Delta \subset E$, т. е. $x \in H$. Тем самым включение $\left(-\frac{1}{2}\lambda(\Delta), \frac{1}{2}\lambda(\Delta)\right) \subset H$ доказано.

б) Это утверждение непосредственно вытекает из а).

1.10. С помощью задачи 1.9.в) убедитесь, что $\operatorname{Int} E \neq \varnothing$, и используйте результат задачи I.1.19.

1.11. а) Если $\lambda(E_\nu) = 0$, то $\operatorname{Int} E_\nu = \varnothing$, и поэтому (см. задачу I.1.34) $n_{k+1} > n_k + 1$ бесконечно много раз. Если же $n_{k_j+1} > n_{k_j} + 1$ при $j \in \mathbb{N}$, то в двоичном разложении точек из E_ν цифры, стоящие на местах с номерами $n_{k_j} + 1$, суть нули, из чего следует, что $\lambda(E_\nu) = 0$ (ср. с решением задачи 1.5).

б) Убедитесь, что если $n_{k_j+1} - n_{k_j} \geqslant 2 + \log_2 m$, то в двоичном разложении точек множества $E^{(m)}$ цифры, имеющие номера $n_{k_j} + 1$, суть нули.

в) Используйте представление

$$H = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(E^{(2m)} - ma\right), \quad \text{где} \quad a = \sum_{k \geqslant 1} 2^{-n_k}.$$

1.12. Убедитесь, что при любом натуральном n множество E можно покрыть 2^{n+1} промежутками длины $1/n!$.

1.14. Из определения множества E канторовского типа на отрезке $[0; 1]$ с определяющей последовательностью $\{l_n\}_{n \geqslant 0}$ следует, что $\lambda(E) + \sum_{n \geqslant 0} 2^n (l_n - 2l_{n+1}) = 1$, где $l_0 = 1$. Поэтому $\lambda(E) > 0$ тогда и только тогда, когда $\sum_{n \geqslant 0} 2^n (l_n - 2l_{n+1}) < 1$. Так как последняя сумма может быть сколь угодно мала, то мера множества канторовского типа, построенного на отрезке $[0; 1]$, может быть сколь угодно близка к единице.

1.15. Используя указание к задаче 1.14, докажите, что справедлива

Лемма. *Пусть Δ — произвольный конечный (непустой) интервал, $0 < \theta < 1$. Существует такое компактное множество $K \subset \Delta$, что*

а) $\operatorname{Int} K = \varnothing$;

б) $\lambda(K) = \theta\lambda(\Delta)$;

в) $\Delta \setminus K$ *состоит из попарно не пересекающихся интервалов, длины которых не превосходят половины длины интервала Δ.*

Чтобы получить требуемое в задаче множество A, проделаем следующее построение. Пусть $\Delta_0 = (0; 1)$, $\theta_j > 0$, $\sum\limits_{j \geqslant 0} \theta_j < 1$. Построим в соответствии с леммой (при $\theta = \theta_0$) компактное подмножество K_0 интервала Δ_0. Пусть $\Delta_n^{(1)}$ $(n \in \mathbb{N})$ — интервалы, составляющие множество $\Delta_0 \setminus K_0$, а $K_n^{(1)}$ — построенные в соответствии с леммой (при $\theta = \theta_1$) компактные подмножества этих интервалов. Пусть, далее, $\Delta_n^{(2)}$ $(n \in \mathbb{N})$ — интервалы, составляющие множество $\Delta_0 \setminus \left(K_0 \cup \bigcup\limits_{n \geqslant 1} K_n^{(1)}\right)$, а $K_n^{(2)}$ — построенные в соответствии с леммой (при $\theta = \theta_2$) компактные подмножества этих интервалов. Продолжая этот процесс, мы с помощью индукции получим семейство множеств $\{K_n^{(j)}\}_{n,\, j \geqslant 1}$. Положим $A = K_0 \cup \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n^{(j)}$. Проверьте, что

$$\lambda(\Delta_0 \setminus A) = \prod_{j=0}^{\infty} (1 - \theta_j). \qquad (*)$$

Убедитесь, что любой (непустой) интервал $\Delta \subset \Delta_0$ содержит некоторый интервал $\Delta_m^{(l)}$, и поэтому

$$\Delta \cap A \supset \Delta_m^{(l)} \cap A \supset K_m^{(l)} \quad \text{и} \quad \lambda(\Delta \cap A) \geqslant \lambda\left(K_m^{(l)}\right) > 0.$$

Убедитесь, кроме того, что

$$\Delta \setminus A \supset \Delta_m^{(l)} \setminus \left(K_m^{(l)} \cup \bigcup_{j=l+1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^{(j)}\right),$$

и заменяя Δ на $\Delta_m^{(l)}$ и A на $A' = K_m^{(l)} \cup \bigcup\limits_{j=l+1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n^{(j)}$, докажите, что вместе с равенством $(*)$ справедливо и равенство $\lambda\left(\Delta_m^{(l)} \setminus A'\right) = \lambda\left(\Delta_m^{(l)}\right) \prod\limits_{j=l}^{\infty} (1 - \theta_j)$, откуда следует, что $\lambda(\Delta \setminus A) > 0$.

1.16. Предположим сначала, что A — выпуклый многоугольник с вершинами $M_1, \ldots, M_n$, и пусть L — длина граничной ломаной. Вместе с каждым звеном M_jM_{j+1} ($j = 1, 2, \ldots, n$, $M_{n+1} = M_1$) граничной ломаной рассмотрим лежащий вне A открытый прямоугольник P_j, у которого длина стороны, перпендикулярной отрезку M_jM_{j+1}, равна ε. Ясно, что

$$A_\varepsilon = A \cup \bigcup_{j=1}^{n} P_j \cup \bigcup_{j=1}^{n} S_j,$$

где S_j — сектор круга $B(M_j;\ \varepsilon)$, заключенный между прямоугольниками P_{j-1} и P_j при $j > 1$ и между P_1 и P_n при $j = 1$. Легко убедиться, что сумма центральных углов, соответствующих этим секторам, равна 2π. Поэтому

$$\lambda_2(A_\varepsilon) = \lambda_2(A) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \lambda_2(P_j) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \lambda_2(S_j) = \lambda_2(A) + L\varepsilon + \pi\varepsilon^2.$$

Случай произвольного компактного выпуклого множества исчерпывается с помощью аппроксимации его выпуклыми многоугольниками.

1.17. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда $\lambda_n(G) < \infty$. Представим множество G в виде объединения попарно не пересекающихся кубических ячеек: $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$. В каждую ячейку впишем шар $B_j^{(0)}$. Ясно, что $\lambda_n\left(B_j^{(0)}\right)/\lambda_n(Q_j) = \alpha_n/2^n$, где $\alpha_n = \lambda_n(B(0;\ 1))$. Поэтому

$$\lambda_n\left(G \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j^{(0)}\right) = \sum \lambda_n\left(Q \setminus B_j^{(0)}\right) = \left(1 - \frac{\alpha_n}{2^n}\right)\lambda_n(G) = q\lambda_n(G),$$

где $q = 1 - \alpha_n 2^{-n} < 1$. Положим $G_1 = G \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{B_j^{(0)}}$. Множество G_1 открыто, и, повторяя описанную выше процедуру, мы получаем такие шары $B_j^{(1)}$, что

$$\lambda_n\left(G_1 \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j^{(1)}\right) = q\lambda_n(G_1) = q^2\lambda_n(G).$$

С помощью индукции получаем семейство $\left\{B_j^{(k)}\right\}_{k,j=1}^{\infty}$ попарно не пересекающихся шаров такое, что

$$\lambda_n\left(G \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j^{(k)}\right) = 0.$$

1.18. Обозначим буквой σ меру Лебега на S^1. Если допустить измеримость хотя бы одного из множеств E_n, то ввиду их конгруэнтности и инвариантности меры σ относительно вращения все они будут измеримы и будут справедливы равенства $\sigma(E_n) = \sigma(E_m)$

при любых $n, m \in \mathbb{N}$. Пользуясь счетной аддитивностью меры, мы получаем, что

$$\sigma(S^1) = \sigma\left(\bigcup_{n\geqslant 1} E_n\right) = \sum_{n\geqslant 1} \sigma(E_n) = \sum_{n\geqslant 1} \sigma(E_1).$$

Таким образом, $0 < \sum\limits_{n\geqslant 1} \sigma(E_1) < \infty$, что невозможно ни в случае, когда $\sigma(E_1) > 0$, ни в случае, когда $\sigma(E_1) = 0$.

1.19. Разобьем числа промежутка $[0;\ 1)$ на классы эквивалентности, считая два числа эквивалентными, если их разность рациональна. Пусть C — множество, имеющее с каждым классом эквивалентности ровно по одной общей точке, и пусть C_θ — образ C при сдвиге на θ по модулю 1. Занумеруем все рациональные числа промежутка $[0;\ 1)$ в последовательность $\{\theta_n\}$ и положим $E_n = C_{\theta_n}$. Поскольку сдвиг по модулю 1 сохраняет измеримость и меру множества, множества E_n измеримы или нет одновременно и в случае измеримости имеют одинаковые меры. Допуская измеримость множеств E_n и рассуждая так же, как и при решении задачи 1.18, мы снова приходим к невозможному неравенству $0 < \sum\limits_{n\geqslant 1} \lambda(E_1) < \infty$.

1.20. Не умаляя общности, будем считать, что $E \subset [0;\ 1)$. Пусть E_n — множества, построенные при решении задачи 1.19. Положим $H_n = E \cap E_n$. Ясно, что $E = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} H_n$. Допустим, что все множества H_n измеримы. Тогда хотя бы одно из них имеет положительную меру и, следовательно, содержит (несовпадающие) точки, расстояние между которыми рационально (см. задачу 1.9.б)), что противоречит построению множеств E_n.

1.21. Убедитесь, что если $x \in (0;\ 1)\setminus Q$, то $x \in E$ тогда и только тогда, когда $1 - x \notin E$. Докажите, что справедлив и более общий результат: если $x \in \Delta\setminus\mathbb{Q}$, где Δ — произвольный промежуток вида $(k/2^n;\ (k+1)/2^n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$, и x' — точка, симметричная точке x относительно середины промежутка Δ, то $x \in E$ тогда и только тогда, когда $x' \notin E$.

Допустив измеримость множества E, выведите из этого свойства, что $\lambda(E \cap \sigma) = \frac{1}{2}\lambda(\sigma)$ для любого интервала $\sigma \subset (0;\ 1)$. Последнее противоречит результату задачи 1.8.

1.22. Пусть $Q = [0;\ 1)^m$. Положим $Q_l = l + Q$ и $E_l = -l + E \cap Q_l$ $(l \in \mathbb{Z}^m)$. Проверьте, что $\bigcup\limits_{l\in\mathbb{Z}^m} E_l = Q$ и $E_l \cap E_{l'} = \varnothing$ при $l \neq l'$.

1.23. Пусть $c > 0$, $P = [-c;\ c)^m$. Достаточно проверить, что $\lambda_m\left(P \setminus \bigcup\limits_{a\in A} (a + E)\right) = 0$. Пусть ε — произвольное положительное число и Q — такой куб, что (см. задачу 1.8)

$$\lambda_m(Q\setminus E) < \varepsilon\lambda_m(Q). \qquad (1)$$

Убедитесь, что можно найти такие точки $a_1, a_2, \ldots, a_N \in A$, что

$$P \subset \bigcup_{1 \leqslant n \leqslant N} (a_n + Q) \quad \text{и} \quad \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \lambda_m (a_n + Q) \leqslant 2\lambda_m (P). \tag{2}$$

Тогда

$$P \setminus \bigcup_{a \in A} (a + E) \subset \bigcup_{1 \leqslant n \leqslant N} (a_n + Q) \setminus (a_n + E), \tag{3}$$

а в силу (1) и (2)

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \lambda_m ((a_n + Q) \setminus (a_n + E)) < \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \varepsilon \lambda_m (a_n + Q) \leqslant 2\varepsilon \lambda_m (P). \tag{4}$$

Ввиду произвольности ε, из (3) и (4) следует равенство

$$\lambda_m \left(P \setminus \bigcup_{a \in A} (a + E) \right) = 0.$$

§ 2. Измеримые функции

2.1. Докажите, что при некотором $\varepsilon > 0$ множество

$$E_\varepsilon = \{x \in E \mid |f(x)| \leqslant 1 - \varepsilon\}$$

имеет положительную меру, и рассмотрите функции

$$f_1 = f + \varepsilon \chi_{E_\varepsilon}, \qquad f_2 = f - \varepsilon \chi_{E_\varepsilon}.$$

2.2. Рассмотрите функцию $f(x) = \sum 2^{-n} \varphi_0 (x - r_n)$, где $\varphi_0 = \chi_{[0; +\infty)}$, а $\{r_n\}$ — произвольным образом занумерованное множество рациональных чисел.

2.3. Рассмотрите характеристическую функцию множества из задачи 1.15.

2.4. б) Найдите длины образов промежутков n-го ранга, используемых при построении канторова множества (см. задачу I.1.27).

в) Используйте результат задачи 1.20, гарантирующий существование неизмеримого подмножества множества $g(K)$.

2.13. Докажем первое из требуемых равенств. Пусть $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$, и пусть $c_{n+1} = +\infty$. Ввиду строгого убывания функции f от $+\infty$ до $-\infty$ на каждом из интервалов $(c_k; c_{k+1})$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) множество $E_t = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > t\}$ есть объединение интервалов $(c_k; x_k)$, где x_k — такая точка, что $f(x_k) = t$, $c_k < x_k < c_{k+1}$. Таким образом,

$$\lambda (E_t) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (x_k - c_k) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k - \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} c_k.$$

Чтобы найти сумму $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k$, заметим, что точки x_k суть корни уравнения $f(x) = t$, или равносильного ему уравнения

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k \frac{P(x)}{x - c_k} = tP(x), \quad \text{где} \quad P(x) = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} (x - c_k).$$

Последнее уравнение, очевидно, можно переписать в виде

$$tx^n - \left(t \sum_{1\leqslant k\leqslant n} c_k + A \right) x^{n-1} + Q(x) = 0,$$

где степень полинома $Q(x)$ меньше $n-1$. По теореме Виета

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} x_k = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} c_k + A/t,$$

что приводит к требуемому результату.

Второе равенство доказывается аналогично.

§ 3. Суммируемые функции

3.1. Ясно, что

$$I = \int_0^1 \sum_{1\leqslant k\leqslant N} \chi^3_{E_l}(x)\,dx +$$

$$+3\int_0^1 \sum_{1\leqslant l<j\leqslant N} \left(\chi^2_{E_l}(x)\,\chi_{E_j}(x) + \chi_{E_l}(x)\,\chi^2_{E_j}(x) \right) dx +$$

$$+6\int_0^1 \sum_{1\leqslant l<j<k\leqslant N} \chi_{E_l}(x)\,\chi_{E_j}(x)\,\chi_{E_k}(x)\,dx = +S_1 + 6S_2 + 6S_3,$$

где $S_3 = \sum\limits_{1\leqslant l<j<k\leqslant N} \lambda(E_l \cap E_j \cap E_k)$.

Для вычисления S_3 заметим, что так как $E_l \cup E_j \cup E_k = [0;\ 1]$ при $1 \leqslant l < j < k \leqslant N$, то

$$\chi_{[0;1]} = \chi_{E_l} + \chi_{E_j} + \chi_{E_k} - \chi_{E_l}\chi_{E_j} - \chi_{E_l}\chi_{E_k} -$$
$$- \chi_{E_j}\chi_{E_k} + \chi_{E_l}\chi_{E_j}\chi_{E_k}.$$

Следовательно,

$$1 = \lambda(E_l) + \lambda(E_j) + \lambda(E_k) - \lambda(E_l \cap E_j) -$$
$$- \lambda(E_j \cap E_k) - \lambda(E_l \cap E_k) + \lambda(E_l \cap E_j \cap E_k).$$

Суммируя эти равенства по $1 \leqslant l < j < k \leqslant N$, находим S_3.

3.2. Из условия задачи следует, что $\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant N} \chi_{E_j}(x) \geqslant k$ при любом $x \in [0;\ 1]$.

3.5. а) Докажите сходимость ряда $\sum \int\limits_\Delta 2^{-n}\,|x - r_n|^{-1/2}\,dx$, где Δ — произвольный конечный промежуток.

б) Пусть $\varphi(x) = \sum 2^{-n} |x - r_n|^{-1/2}$, где $\{r_n\}$ — последовательность, состоящая из всех рациональных чисел, занумерованных произвольным образом. Рассмотрите функцию φ^2.

3.6. Рассмотрите функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x = 0, \\ x^2 \sin(1/x^2) & \text{при} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

3.10. а) Пусть $E_x = \{x - y \mid y \in E\}$. Ясно, что

$$\int\limits_E \|x - y\|^{-p}\, dy = \int\limits_{E_x} \|z\|^{-p}\, dz.$$

Положим $A = E_x \cap B(0;\ r)$, $C = E_x \backslash A$. Тогда $\lambda_m(C) = \lambda_m(B(0;\ r) \backslash A)$ и

$$\sup\{\|z\|^{-p} \mid z \in C\} \leqslant r^{-p} = \inf\{\|z\|^{-p} \mid z \in B(0;\ r)\}.$$

Поэтому

$$\int\limits_C \|z\|^{-p}\, dz \leqslant r^{-p} \lambda_m(C) \leqslant \int\limits_{B(0;r)\backslash A} \|z\|^{-p}\, dz$$

и

$$\int\limits_E \|x - y\|^{-p}\, dy = \int\limits_A \|z\|^{-p}\, dz + \int\limits_C \|z\|^{-p}\, dz \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_A \|z\|^{-p}\, dz + \int\limits_{B(0;r)\backslash A} \|z\|^{-p}\, dz = \int\limits_{B(0;r)} \|z\|^{-p}\, dz.$$

б) Убедитесь, что при некотором $\alpha \in [0;\ 2\pi]$ справедливо равенство

$$\left| \int\limits_E e^{ix}\, dx \right| = \int\limits_E \cos(x - \alpha)\, dx,$$

и используйте ту же идею, что и в п. а).

в) Убедитесь, что

$$\left| \iint\limits_E \frac{dx\, dy}{x + iy} \right| = \iint\limits_{E'} \frac{x\, dx\, dy}{x^2 + y^2},$$

где E' — множество, получающееся из E поворотом. Для оценки интеграла $\displaystyle\iint\limits_{E'} \frac{x\, dx\, dy}{x^2 + y^2}$ рассмотрите множество

$$E_t = \left\{ (x;\ y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x}{x^2 + y^2} \geqslant t \right\},$$

на котором функция $x/(x^2 + y^2)$ велика, и подберите t так, чтобы мера E_t равнялась мере E'. Докажите, как и в п. а), что при таком выборе t справедливо неравенство

$$\iint_{E'} \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2} \leqslant \iint_{E_t} \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2},$$

и вычислите последний интеграл.

3.15. Ясно, что интеграл $\int\limits_E g(x)\ln f(x)\,dx$ существует. В случае, когда он конечен, докажите, опираясь на неравенство

$$\left|\frac{e^{pt}-1}{p}\right| \leqslant |t| + e^{|t|} \qquad (t \in \mathbb{R},\quad 0 < p < 1),$$

что

$$\int\limits_E \frac{f^p(x)-1}{p}\,g(x)\,dx \xrightarrow[p\to+0]{} \int\limits_E g(x)\ln f(x)\,dx.$$

Если $\int\limits_E g(x)\ln f(x)\,dx = -\infty$, то рассмотрите функции $f_\delta = \max(\delta;\, f)$, где $0 < \delta < 1$, и перейдите в неравенстве

$$\left(\int\limits_E g(x)\,f^p(x)\,dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\int\limits_E g(x)\,f_\delta^p(x)\,dx\right)^{1/p}$$

сначала к верхнему пределу при $p \to +0$, а затем к пределу при $\delta \to +0$.

3.16. б) Воспользуйтесь попарной ортогональностью функций $\varepsilon_k - 1/2$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

3.20. Представим множество $(a;\, b)\setminus K$ в виде объединения $\bigcup\limits_k (\alpha_k, \beta_k)$ попарно не пересекающихся интервалов. Тогда $I_s(x) = \sum\limits_k \int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{\rho^s(y)}{|x-y|^{s+1}}\,dy$. Поэтому

$$\int\limits_K I_s(x)\,dx = \sum_k \int\limits_K \left(\int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{\rho^s(y)}{|x-y|^{s+1}}\,dy\right)ds =$$

$$= \sum_k \int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} \rho^s(y) \left(\int\limits_K \frac{dx}{|x-y|^{s+1}}\right)dy. \quad (1)$$

Оценим внутренний интеграл, стоящий в правой части равенства (1). Считая, что $y \in (\alpha_k; \beta_k)$, мы получаем

$$\int\limits_K \frac{dx}{|x-y|^{s+1}} \leqslant \int\limits_a^{\alpha_k} \frac{dx}{|x-y|^{s+1}} + \int\limits_{\beta_k}^{b} \frac{dx}{|x-y|^{s+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{s}\left(\frac{1}{(y-\alpha_k)^s} + \frac{1}{(\beta_k - y)^s}\right) \leqslant \frac{2}{s}\rho^{-s}(y).$$

На основании этого неравенства из (1) следует, что

$$\int\limits_K I_s(x)\,dx \leqslant \sum_k \int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{2}{s}\,dy \leqslant \frac{2}{s}(b-a) < \infty.$$

3.21. Ясно, что а) следует из б). Для доказательства б) разбейте куб $[-a; a]^m$ на $2m$ пирамид, основаниями которых служат грани куба, а вершины находятся в начале координат. Для вычисления интеграла по каждой из этих пирамид используйте теорему Фубини.

3.22. Чтобы избежать трудностей, связанных с проверкой измеримости функции на подмножествах, размерность которых меньше n, будем считать, что функция непрерывна. (Общий случай исчерпывается с помощью аппроксимации.) Используя полярные и сферические координаты, легко установить базу индукции. Пусть формулы а), б) справедливы для S^{n-2} и $\mathbb{R}^{n-1}$ соответственно. Заменяя $f(x)$ на $f(x)\chi_{[0;1]}(\|x\|)$, где $\chi_{[0;1]}$ — характеристическая функция промежутка $[0; 1]$, мы видим, что

$$\int\limits_{B^{n-1}} f(x)\,dx = \int\limits_0^1 t^{n-2}\left\{\int\limits_{S^{n-2}} f(t\omega)\,d\mu_{n-2}(\omega)\right\}dt. \qquad (1)$$

Перейдем к доказательству равенства а). Пусть

$$S_+^{n-1} = \{(x_1; \ldots; x_n) \in S^{n-1} \mid x_n \geqslant 0\},$$
$$S_-^{n-1} = \{(x_1; \ldots; x_n) \in S^{n-1} \mid x_n \leqslant 0\}.$$

Докажем, что

$$\int\limits_{S_+^{n-1}} f(x_1; \ldots; x_{n-1}; x_n)\,d\mu_{n-1}(x) =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2}\theta\left\{\int\limits_{S^{n-2}} f(u_1\sin\theta; \ \ldots; \ u_{n-1}\sin\theta; \cos\theta)\,d\mu_{n-2}(u)\right\}d\theta. \qquad (2)$$

В самом деле,

$$\int\limits_{S_+^{n-1}} f(x_1; \ldots; x_{n-1}; x_n)\, d\mu_{n-1}(x) =$$

$$= \int\limits_{B^{n-1}} \cdots \int f\left(y_1; \ldots; y_{n-1}, \sqrt{1-\|y\|^2}\right) \frac{dy_1 \ldots dy_{n-1}}{\sqrt{1-\|y\|^2}}.$$

Используя равенство (1), получаем

$$\int\limits_{S_+^{n-1}} f(x_1; \ldots; x_{n-1}; x_n)\, d\mu_{n-1}(x) =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{t^{n-2}}{\sqrt{1-t^2}} \left\{ \int\limits_{S^{n-2}} f\left(t\omega_1; \ldots; t\omega_{n-1}; \sqrt{1-t^2}\right) d\mu_{n-2}(\omega) \right\} dt.$$

После замены переменной $t = \sin\theta$ мы приходим к (2). Аналогично доказывается, что

$$\int\limits_{S_-^{n-1}} f(x_1; \ldots; x_{n-1}; x_n)\, d\mu_{n-1}(x) =$$

$$= \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sin^{n-2}\theta \left\{ \int\limits_{S^{n-2}} x(u_1 \sin\theta; \ldots; u_{n-1}\sin\theta; \cos\theta)\, d\mu_{n-2}(u) \right\} d\theta.$$

Перейдем к доказательству равенства б). По теореме Фубини

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1; \ldots; x_{n-1}; x_n)\, dx_1 \ldots dx_{n-1} \right\} dx_n.$$

Пользуясь индукционным предположением, преобразуем внутренний интеграл, после чего получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^1} \left\{ \int\limits_0^\infty r^{n-2} \left\{ \int\limits_{S^{n-2}} f(ru_1; \ldots; ru_{n-1}; x_n)\, d\mu_{n-2}(u) \right\} dr \right\} dx_n.$$

Перейдем теперь к полярным координатам $x_n = t\cos\theta$, $r = t\sin\theta$ в полуплоскости $(x_n; r)$, $r \geqslant 0$. Это дает нам, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int\limits_0^\infty t^{n-1} \left\{ \int\limits_0^\pi \sin^{n-2}\theta \times \right.$$

$$\left. \times \left\{ \int\limits_{S^{n-2}} f(tu_1 \sin\theta; \ldots; tu_{n-1}\sin\theta; t\cos\theta)\, d\mu_{n-2}(u) \right\} d\theta \right\} dt.$$

Пользуясь уже доказанным выше равенством а), мы видим, что

$$\int_0^{\pi} \sin^{n-2}\theta \left\{ \int_{S^{n-2}} f(tu_1 \sin\theta; \ldots; tu_{n-1}\sin\theta; t\cos\theta)\, d\mu_{n-2}(u) \right\} d\theta = \\ = \int_{S^{n-1}} f(t\omega)\, d\mu_{n-1}(\omega),$$

и, таким образом,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int_0^{\infty} t^{n-1} \left\{ \int_{S^{n-1}} f(t\omega)\, d\mu_{n-1}(\omega) \right\} dt.$$

3.23. а) Примените формулу б) задачи 3.22 к характеристической функции множества T, изменив справа порядок интегрирования.

б) Используйте п. а).

3.24. Примените приведенную перед задачей 3.24 формулу, считая, что f — характеристическая функция множества E.

3.25. Используя формулу, приведенную перед задачей 3.24, получаем

$$I_n(r) = (2\pi)^{-n/2} \int_0^r n\alpha_n e^{-t^2/2} t^{n-1}\, dt = \\ = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \int_0^r (t^2/2)^{n/2-1} e^{-t^2/2} d(t^2/2).$$

Функция $I_n(r)$ называется распределением «хи»-квадрат с n-степенями свободы и часто используется в математической статистике.

3.26. По теореме Фубини

$$\gamma_4(K_a) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} \left\{ \iiint_{(K_a)_x} e^{-(y^2+z^2+t^2)/2}\, dy\, dz\, dt \right\} dx,$$

где

$$(K_a)_x = \left\{ (y;\, z;\, t) \subset \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \sqrt{y^2+z^2+t^2} \leqslant a\,|\,x\,| \right\}.$$

Поэтому

$$\gamma_4(K_a) = \frac{2}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} e^{-x^2/2} \left(\int_0^{ax} 4\pi r^2 e^{-r^2/2} dr \right) dx = \\ = \frac{2}{\pi} \int_0^{\operatorname{arctg} a} \left\{ \int_0^{\infty} \rho^3 \sin^2\varphi\, e^{-\rho^2/2} d\rho \right\} d\varphi.$$

Дальнейшие вычисления мы предоставляем провести читателю.

3.27. В сечении множества T гиперплоскостью $x_1 = x$ мы получаем множество

$$T_x = \left\{(x_2;\ x_3;\ x_4) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} \in B_x\right\},$$

где

$$B_x = \{y \in \mathbb{R}^1 \mid (x;\ y) \in B\} = \left[a - \sqrt{R^2 - x^2};\ a + \sqrt{R^2 - x^2}\right].$$

Поэтому

$$\lambda_3(T_x) = \int\limits_{a-\sqrt{R^2-x^2}}^{a+\sqrt{R^2-x^2}} 4\pi y^2\, dy,$$

и, следовательно,

$$\lambda_4(T) = \int\limits_{-R}^{R} \lambda_3(T_x)\, dx = \int\limits_{-R}^{R} \left\{\int\limits_{a-\sqrt{R^2-x^2}}^{a+\sqrt{R^2-x^2}} 4\pi y^2\, dy\right\} dx.$$

Заключительные вычисления мы оставляем читателю.

3.28. Пусть A' — проекция A на x_1, $A_x = \{y \mid (x;\ y) \in A\}$. Ясно, что $\lambda_4(T) = \int\limits_{A'} \lambda_3(T_x)\, dx$, где $T_x = \left\{(x_2;\ x_3;\ x_4) \,\middle|\, \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^1} \in A_x\right\}$. Так как $\lambda_3(T_x) = \int\limits_{A_x} 4\pi y^2\, dy$, то

$$\lambda_4(T) = \int\limits_{A'} \left\{\int\limits_{A_x} 4\pi y^2\, dy\right\} dx = 4\pi \iint\limits_{A} y^2\, dx\, dy,$$

что и требовалось.

3.29. Воспользуйтесь равенствами

$$\lambda_n(T) = \int\limits_{A'} \lambda_{n-1}(T_x)\, dx,$$

$$\gamma_n(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{A'} e^{-x^2/2} \gamma_{n-1}(T_x)\, dx,$$

где A' — проекция A на ось x_1, $A_x = \{y \mid (x;\ y) \in A\}$,

$$T_x = \left\{(x_2;\ \ldots;\ x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \,\middle|\, \sqrt{x_2^2 + \ldots + x_n^2} \in A_x\right\},$$

и, пользуясь сферической инвариантностью множества T_x, покажите, что

$$\lambda_{n-1}(T_x)=\int\limits_{A_x}\sigma_{n-2}y^{n-2}\,dy,$$

$$\gamma_{n-1}(T_x)=(2\pi)^{-(n-1)/2}\int\limits_{A_x}\sigma_{n-2}y^{n-2}e^{-y^2/2}\,dy.$$

3.30. Пусть $V_n(t)=\lambda_n\left\{(x_1;\ \ldots;\ x_n)\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k|^p\leqslant t^p\right\}$, $t>0$. Убедитесь, что $V_n(t)=V_n(1)t^n$. Пользуясь этим равенством и теоремой Фубини, докажите, что $V_n(1)=$ $=2V_{n-1}(1)\int\limits_0^1(1-t^p)^{(n-1)/p}\,dt$. Выразив интеграл через функцию Γ, докажите искомую формулу по индукции.

3.31. а) Ввиду инвариантности меры μ_{n-1} относительно вращения можно считать, что $a=\|a\|e_1$, где $e_1=(1;\ 0;\ \ldots;\ 0)$. Поэтому

$$I=\frac{\|a\|^p}{\sigma_{n-1}}\int\limits_{S^{n-1}}|x_1|^p\,d\mu_{n-1}(x)=$$

$$=2\|a\|^p\sigma_{n-1}^{-1}\int\limits_{x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2\leqslant1}|x_1|^p\frac{dx_1\ldots dx_{n-1}}{\sqrt{1-x_1^2-\ldots-x_{n-1}^2}}=$$

$$=\frac{\|a\|^p}{\sigma_{n-1}}\int\limits_{-1}^1|x_1|^p\left\{\int\limits_{x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2\leqslant1-x_1^2}\!\!\!\!\cdots\int\frac{2\,dx_2\ldots dx_{n-1}}{\sqrt{(1-x_1^2)-x_2^2-\ldots-x_{n-1}^2}}\right\}dx_1.$$

Внутренний интеграл справа есть площадь сферы $S^{n-2}\left(\sqrt{1-x_1^2}\right)$, и поэтому он равен $\sigma_{n-2}\left(1-x_1^2\right)^{(n-2)/2}$. Следовательно,

$$I=\frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-1}}\|a\|^p\,2\int\limits_0^1t^p(1-t^2)^{(n-2)/2}\,dt=$$

$$=\frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-1}}\|a\|^p\int\limits_0^1u^{(p+1)/2-1}(1-u)^{n/2-1}\,du=$$

$$=\frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-1}}\cdot\frac{\Gamma((p+1)/2)\cdot\Gamma(n/2)}{\Gamma((n+p+1)/2)}\cdot\|a\|^p.$$

Подставляя в это равенство значения σ_{n-2} и σ_{n-1}, получаем искомый результат.

3.32. (См. [36].) Ввиду сферической инвариантности меры мы можем считать, что $a=e_1$, $b=\cos\theta\,e_1+\sin\theta\,e_2$, где $e_1=$ $=(1;\ 0;\ \ldots;\ 0)$, $e_2=(0;\ 1;\ 0;\ \ldots;\ 0)$. Таким образом, нам следует вычислить интеграл $I = \int\limits_{S^{n-1}} f(x_1;\, x_2)\, d\mu_{n-1}(x)$, где $f(u;\ v) = (\operatorname{sign} u) \cdot \operatorname{sign}(u\cos\theta + v\sin\theta)$. Ясно, что

$$I = 2 \int\limits_{x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2 \leqslant 1} \!\!\!\cdots\!\int f(x_1;\, x_2) \frac{dx_1 \ldots dx_{n-1}}{\sqrt{1-x_1^2-\ldots-x_{n-1}^2}} =$$

$$= \int\limits_{x_1^2+x_2^2 \leqslant 1} \frac{f(x_1;\, x_2)}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{x_3^2+\ldots+x_{n-1}^2 \leqslant 1-x_1^2-x_2^2} \!\!\!\cdots\!\int \frac{2\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\, dx_3 \ldots dx_{n-1}}{\sqrt{(1-x_1^2-x_2^2)-x_3^2-\ldots-x_{n-1}^2}} \right\} \times$$

$$\times\, dx_1\, dx_2.$$

Внутренний интеграл справа есть не что иное, как площадь

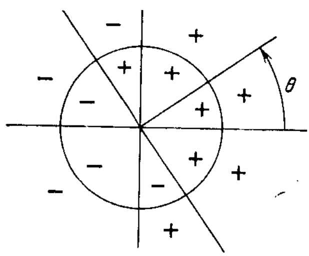

Рис. 24

$(n-3)$-мерной сферы радиуса $\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$. Поэтому

$$I = \iint\limits_{u^2+v^2 \leqslant 1} f(u;\, v)\, \sigma_{n-3} (1-u^2-v^2)^{(n-4)/2}\, du\, dv =$$

$$= \sigma_{n-3} \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \int\limits_0^1 f(r\cos\varphi;\ r\sin\varphi)\, (1-r^2)^{(n-4)/2}\, r\, dr \right\} d\varphi.$$

Очевидно, что $f(r\cos\varphi;\ r\sin\varphi) = f(\cos\varphi;\ \sin\varphi)$, и, следовательно,

$$I = \sigma_{n-3} \int\limits_0^{2\pi} f(\cos\varphi;\ \sin\varphi)\, d\varphi \int\limits_0^1 (1-r^2)^{(n-4)/2}\, r\, dr =$$

$$= \frac{\sigma_{n-3}}{n-2} \int\limits_0^{2\pi} f(\cos\varphi;\ \sin\varphi)\, d\varphi = \frac{\sigma_{n-3}}{n-2} \int\limits_0^{2\pi} (\operatorname{sign}\cos\varphi) \operatorname{sign}\cos(\varphi-\theta)\, d\varphi.$$

Мы предоставляем читателю убедиться, что последний интеграл равен $2\pi - 4\theta$ (рис. 24, где вне круга указан знак $\cos\varphi$, а внутри — знак $\cos(\varphi-\theta)$). Поэтому $I=\frac{2\pi}{n-2}\sigma_{n-3}\left(1-\frac{2}{\pi}\theta\right)$, и поскольку $\sigma_{n-1}=\frac{2\pi}{n-2}\sigma_{n-3}$, мы получаем требуемый результат.

3.33. Утверждение а) есть частный случай задачи 3.34. Используя а) и формулу, приведенную перед задачей 3.24, получаем

$$I_n=\frac{1}{2}(2\pi)^{-n}(n\alpha_n)^2\int_0^\infty\int_0^\infty|r-\rho|(r\rho)^{n-1}e^{-(r^2+\rho^2)/2}\,dr\,d\rho.$$

Переходя в интеграле в правой части равенства к полярным координатам, приходим к равенству

$$I_n=\frac{1}{2^n\Gamma^2(n/2)}\int_0^{\pi/2}|\cos\varphi-\sin\varphi|(\sin\varphi\cdot\cos\varphi)^{n-1}\,d\varphi\int_0^\infty u^{2n}e^{-u^2/2}\,du=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\Gamma(n+1/2)}{2^n\Gamma^2(n/2)}\int_0^\pi\left|\cos\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi}{2}\right|\sin^{n-1}\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\Gamma(n+1/2)}{2^n\Gamma^2(n/2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{n-1}\varphi\cos\varphi}{\sin(\varphi/2)+\cos(\varphi/2)}\,d\varphi.$$

Остается заметить, что

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{n-1}\varphi\cos\varphi}{\sin(\varphi/2)+\cos(\varphi/2)}\,d\varphi\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{n\sqrt{2}}$$

(см. задачу VI.2.8) и использовать формулу Стирлинга.

3.34. Так как $A\supset B(0;\,\varepsilon)$ при некотором $\varepsilon>0$, то $q_A(x)\leqslant\leqslant\|x\|/\varepsilon$, и поэтому

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|q_A(x)-q_A(y)|\,d\mu(x)\,d\mu(y)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}(\|x\|+\|y\|)\,d\mu(x)\,d\mu(y)\leqslant\frac{2}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k|\right)d\mu(x)<\infty.$$

Пусть χ_{tA} — характеристическая функция множества tA $(t>0)$. Тогда

$$\int_0^\infty\mu(tA)[1-\mu(tA)]\,dt=\int_0^\infty\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{tA}(x)[1-\chi_{tA}(y)]\,d\mu(x)\,d\mu(y)\right\}dt=$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left\{\int_0^\infty\chi_{tA}(x)[1-\chi_{tA}(y)]\,dt\right\}d\mu(x)\,d\mu(y).\quad(1)$$

Если $q_A(x) > q_A(y)$, то $\chi_{tA}(x)[1-\chi_{tA}(y)] = 0$; если $q_A(x) < q_A(y)$, то $\chi_{tA}(x)[1-\chi_{tA}(y)] = 1$ при $q_A(x) \leqslant t \leqslant q_A(y)$ и $\chi_{tA}(x)[1-\chi_{tA}(y)] = 0$ при $t \notin [q_A(x);\ q_A(y)]$. Поэтому

$$\int_0^\infty \chi_{tA}(x)\,[1-\chi_{tA}(y)]\,dt = \max\,(q_A(y) - q_A(x);\ 0).$$

С помощью последнего равенства из (1) получаем, что

$$\int_0^\infty \mu(tA)\,[1-\mu(tA)]\,dt = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \max\,(q_A(y) - q_A(x);\ 0)\,d\mu(x)\,d\mu(y) =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |\,q_A(x) - q_A(y)\,|\,d\mu(x)\,d\mu(y).$$

3.35. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ — измеримое множество, порождающее паркет (см. задачу 1.22). Докажите, что $\int_E f(x)\,dx = \int_Q f(x)\,dx$ (отсюда при $E = a + Q$ и $E = A(Q)$ мы получаем утверждения а) и б)). Для проверки этого равенства рассмотрите множества $Q_l = l + Q$, $E_l = -l + E \cap Q_l$ $(l \in \mathbb{Z}^m)$ и убедитесь в том, что

$$\bigcup_{l\in\mathbb{Z}^m} E_l = Q, \quad E_l \cap E_{l'} = \varnothing \quad \text{при} \quad l \neq l'.$$

Ввиду периодичности функции f ясно, что $\int_{E_l} f(x)\,dx = \int_{E\cap Q_l} f(x)\,dx$. Остается воспользоваться счетной аддитивностью интеграла.

В случае, когда матрица A не целочисленная, рассмотрите пример

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad f(x;\,y) = \sin(2\pi x) \qquad (x,\,y \in \mathbb{R}).$$

3.36. Пусть $d = \operatorname{diam}(T)$. Можно считать, что точки $O = (0;\,0;\,\ldots;\,0)$ и $D = (0;\,0;\,\ldots;\,0;\,d)$ принадлежат множеству T. Пусть Q — проекция T на гиперплоскость $x_n = 0$. Рассмотрите конус K с вершиной в точке D и основанием Q. Так как

$$\lambda_n(K) = \frac{d}{n}\,\lambda_{n-1}(Q) \geqslant \frac{d}{n}\,S,$$

то достаточно доказать, что $V \geqslant \lambda_n(K)$. Для этого убедитесь в том, что пересечение конуса K с любой прямой l, проходящей через множество Q параллельно оси x_n, есть отрезок, длина которого не превосходит длины отрезка, получающегося при пересечении l с множеством T. Построив плоскость, проходящую через прямую l и ось x_n, рассмотрите в ней точку $M \in T$, которая наиболее удалена от этой оси и расположена по ту же сторону от нее, что и l. Докажите, что при пересечении прямой l с конусом K и треугольником ODM получаются отрезки равной длины.

3.37. Проверьте, что выпуклая оболочка двух эллипсоидов, получаемых один из другого сдвигом, содержит эллипсоид большого объема. Выведите отсюда, что эллипсоид $Э$ центрально симметричен относительно нуля. Не умаляя общности, можно считать, что $Э = \overline{B^n}$. В таком случае

$$\lambda_n(\mathscr{E}) \leqslant \alpha_n, \text{ если } \mathscr{E} \subset T, \ \mathscr{E} \text{ — эллипсоид.} \qquad (1)$$

Допустим, что $x_0 \in T$, $\|x_0\| > \sqrt{n}$. Очевидно, можно считать, что $x_0 = (c; 0; \ldots; 0)$, где $c = \|x_0\|$. Рассмотрим множество T_1 — выпуклую оболочку шара $\overline{B^n}$ и точек $\pm x_0$. (Двумерное сечение S множества T_1 плоскостью, проведенной через ось x_1, изображено на рис. 25.) Очевидно, что $T_1 \subset T$. Возьмем точку a, лежащую на оси

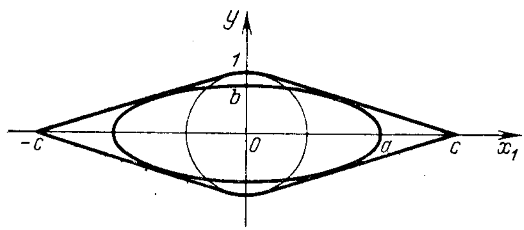

Рис. 25

x_1, $0 < a < c$, и рассмотрим эллипс E, определяемый неравенством $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1$, где $b^2 = \dfrac{c^2 - a^2}{c^2 - 1}$, а ось y взята в плоскости сечения перпендикулярно оси x_1. Проверьте, что $E \subset S$. Из этого включения следует, что T_1 содержит эллипсоид $\mathscr{E}_a$, полученный вращением E вокруг оси x_1 в пространстве $\mathbb{R}^n$. Пусть $V(a) = \lambda_n(\mathscr{E}_a)$,

$$(\mathscr{E}_a)_x = \{(x_2; \ldots; x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x; x_2; \ldots; x_n) \in \mathscr{E}_a\} = \\ = \left\{(x_2; \ldots; x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \,\middle|\, \frac{x_2^2 + \ldots + x_n^2}{b^2} \leqslant 1 - \frac{x^2}{a^2}\right\}.$$

Тогда

$$V(a) = \int_{-a}^{a} \lambda_{n-1}((\mathscr{E}_a)_x)\, dx = \\ = \alpha_{n-1} \int_{-a}^{a} b^{n-1} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{(n-1)/2} dx = \alpha_n a \left(\frac{c^2 - a^2}{c^2 - 1}\right)^{(n-1)/2}.$$

Ясно, что $V(1) = \alpha_n$ и $V'(1) = \alpha_n \frac{c^2 - n}{c^2 - 1} > 0$. Поэтому при a, близких к единице, и $a > 1$ будет справедливо неравенство $V(a) > \alpha_n$, хотя $\mathscr{E}_a \subset T$, что противоречит неравенству (1).

3.38. Непрерывность и ограниченность функции φ и ее голоморфность вне K устанавливаются с помощью следующей теоремы (см., например, [1], с. 169).

Теорема. Пусть $p > 1$, $E \subset \mathbb{R}^m$, $\lambda_m(E) < \infty$, $\{f_n\}$ — последовательность измеримых на E функций. Если $f_n \to f_0$ по мере на множестве E и $\sup\limits_n \int\limits_E |f_n(x)|^p\,dx < \infty$, то функции f_0, f_n ($n = 1, 2, \ldots$) суммируемы на E и $\int\limits_E |f_n(x) - f_0(x)|\,dx \to 0$; в частности, $\int\limits_E f_n(x)\,dx \to \int\limits_E f_0(x)\,dx$. Если множество K вполне несвязно, то функция φ доставляет пример (принадлежащий Д. Помпейю), показывающий, что теорема Лиувилля перестает быть справедливой, если вместо целых функций рассматривать функции непрерывные и ограниченные в $\mathbb{C}$ и голоморфные вне K. По поводу уточнения этого результата см. задачу 4.8 (пример Урысона).

3.39. а) Пусть $p, q > -1$, $I_{p,q} = \int\limits_{S^3} |\zeta_1|^{2p} |\zeta_2|^{2q}\,d\mu_3(\zeta_1; \zeta_2)$. Тогда

$$I_{p,q} = \int\limits_{x^2+y^2+u^2+v^2=1} (x^2+y^2)^p (u^2+v^2)^q\,d\mu_3(x; y; u; v) =$$

$$= 2 \iiint\limits_{x^2+y^2+u^2\leqslant 1} (x^2+y^2)^p (1-x^2-y^2)^q \frac{dx\,dy\,du}{\sqrt{1-x^2-y^2-u^2}} =$$

$$= 4 \int\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} (x^2+y^2)^p (1-x^2-y^2)^q \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{du}{\sqrt{1-x^2-y^2-u^2}} \right\} dx\,dy = (2\pi)^2 \int\limits_0^1 r^{2p+1}(1-r^2)^q\,dr =$$

$$= 2\pi^2 \int\limits_0^1 t^p (1-t)^q\,dt = 2\pi^2 \frac{\Gamma(p+1)\cdot\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}.$$

в) Заметим, что ряд $\sum\limits_{n\geqslant 0} (n+1)\left(\zeta_1\bar{z}_1 + \zeta_2\bar{z}_2\right)^n$ равномерно сходится в шаре $|z_1|^2 + |z_2|^2 \leqslant 1$, так как

$$|\zeta_1\bar{z}_1 + \zeta_2\bar{z}_2| \leqslant a\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2} \leqslant a < 1, \text{ где } a = \sqrt{|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{S^3} f(z_1; z_2)\, \frac{d\mu_3(z_1; z_2)}{\left(1-\zeta_1\bar z_1-\zeta_2\bar z_2\right)^2} =$$

$$= \sum_{n=0} (n+1) \int\limits_{S^3} f(z_1; z_2)\left(\zeta_1 \bar z_1+\zeta_2\bar z_2\right)^n d\mu_3(z_1; z_2) =$$

$$= \sum_{n\geqslant 0} (n+1) \sum_{0\leqslant k\leqslant n} C_n^k \zeta_1^k\zeta_2^{n-k} \int\limits_{S^3} f(z_1; z_2)\, \bar z_1^k \bar z_2^{n-k}\, d\mu_3(z_1; z_2). \quad (1)$$

Вычислим интегралы, стоящие в правой части равенства (1):

$$\int\limits_{S^3} f(z_1; z_2)\, \bar z_1^k \bar z_2^{n-k}\, d\mu_3(z_1; z_2) =$$

$$= \sum_{j,l\geqslant 0} a_{j,l} \int\limits_{S^3} z_1^j z_2^l \bar z_1^k \bar z_2^{n-k}\, d\mu_3(z_1; z_2) =$$

$$= a_{k,n-k} \int\limits_{S^3} |z_1|^{2k} |z_2|^{2(n-k)}\, d\mu_3(z_1; z_2) = a_{k,n-k}\cdot \frac{2\pi^2}{n+1}\left(C_n^k\right)^{-1}.$$

Подставляя этот результат в правую часть равенства (1), получаем

$$\int\limits_{S^3} f(z_1; z_2)\, \frac{d\mu_3(z_1; z_2)}{\left(1-\zeta_1\bar z_1-\zeta_2\bar z_2\right)^2} =$$

$$= \sum_{n\geqslant 0} (n+1) \sum_{0\leqslant k\leqslant n} C_n^k \zeta_1^k \zeta_2^{n-k} a_{k,n-k}\, \frac{2\pi^2}{n+1}\cdot\left(C_n^k\right)^{-1} =$$

$$= 2\pi^2 \sum_{n\geqslant 0} \sum_{0\leqslant k\leqslant n} a_{k,n-k} \zeta_1^k \zeta_2^{n-k} = 2\pi^2 f(\zeta_1; \zeta_2).$$

§ 4. Интеграл Стилтьеса

4.1. а) Пусть сначала $b < \infty$. Проведем решение в этом случае в несколько шагов.

Шаг 1: функция h непрерывна на $[a; b]$. Разобьем промежуток $[a; b]$ на части точками $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$. Положим

$$F(t) = \lambda_m([-t; t]^m) = (2t)^m \qquad (t \geqslant 0).$$

Тогда

$$\int\limits_E h(\max|x_k|)\, dx = \sum_{0\leqslant k<n} \int\limits_{t_k\leqslant \max|x_k|<t_{k+1}} h(\max|x_k|)\, dx =$$

$$= \sum_{0\leqslant k<n} h(\bar t_k)\left[F(t_{k+1}) - F(t_k)\right] = \sum_{0\leqslant k<n} h(\bar t_k)\, F'(\bar{\bar t}_k)\,(t_{k+1}-t_k),$$

где $\bar{t}_k, \bar{\bar{t}}_k \in [t_k;\ t_{k+1}]$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Таким образом,

$$\int\limits_E h(\max|x_k|)\,dx =$$

$$= m2^m \sum_{0\leqslant k<n} \left(\bar{\bar{t}}_k\right)^{m-1} h\left(\bar{t}_k\right)\left(t_{k+1}-t_k\right) \xrightarrow[\max(t_{k+1}-t_k)\to 0]{} $$

$$\to m2^m \int\limits_a^b t^{m-} \ h(t)\ dt.$$

Шаг 2: функция h ограничена на $[a;\ b]$. Рассмотрим последовательность $\{h_n\}$ неотрицательных непрерывных на $[a;\ b]$ функций, сходящуюся к h почти везде на $[a;\ b]$. Не умаляя общности можно считать, что $h_n \leqslant \sup h$. Убедитесь, что $h_n(\max|x_k|) \to$ $\to h(\max|x_k|)$ п. в. на E. Пользуясь теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, мы видим, что равенства

$$\int\limits_E h_n(\max|x_k|)\,dx = m2^m \int\limits_a^b t^{m-1} h_n(t)\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

приводят к требуемому результату.

Шаг 3: функция h произвольная (измеримая, неотрицательная). Требуемый результат получается с помощью аппроксимации последовательностью ограниченных измеримых функций.

Случай $b = +\infty$ исчерпывается с помощью предельного перехода от конечных промежутков к бесконечному.

б) Рассуждения проводятся по той же схеме, что и в п. а). При этом функция $F(t) = (2t)^m$ заменяется функцией $(t \geqslant 1)$

$$F_1(t) = \lambda_m \left\{(x_1;\ \ldots;\ x_m) \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, 1 \leqslant \min x_k,\ \max x_k \leqslant t\right\} = (t-1)^m.$$

4.2. Рассуждения проводятся по той же схеме, что и при решении задачи 4.1.а). Функция $F(t) = (2t)^m$ заменятся функцией

$$F_1(t) = \lambda_m\left(O_m(t)\right) = \frac{(2t)^m}{m!} \qquad (t \geqslant 0).$$

4.3. Рассуждения проводятся по той же схеме, что и при решении задач 4.1.а). Функция $F(t) = (2t)^m$ заменяется функцией $F_1(t) = \lambda_m(B(0;\ t)) = \alpha_m t^m$, где $\alpha_m = \lambda_m(B(0;\ 1))$, $t \geqslant 0$.

4.4. Рассуждения проводятся по той же схеме, что и при решении задачи 4.1.а).

4.5. Ясно, что $\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-\rho(x)}\,dx = \lambda_2(A) + \int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus A} e^{-\rho(x)}\,dx$. Рассуждая по той же схеме, что и при решении задачи 4.1. а), покажите, что $\int\limits_{\mathbb{R}^2 \setminus A} e^{-\rho(x)}\,dx = \int\limits_0^\infty e^{-t}\,dF(t)$, где $F(t)=\lambda_2(A_t)$, $A_t = \bigcup\limits_{x\in A} B(x;t)$.

Используйте результат задачи 1.16.

4.6. а) Убедитесь, что интеграл есть предел сумм

$$2^{-n} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n \in \{0;2\}} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{\varepsilon_k}{3^k}.$$

б) используйте тот же прием, что и в п. а.);

в) используйте то, что график функции σ центрально симметричен относительно точки (1/2; 1/2);

г) докажите, что $\int\limits_0^t \sigma(x)\,d\sigma(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(t)$ $(t>0)$ или используйте тот же прием, что при решении задачи п. а)

д) используйте равенство $\sigma(x)+\sigma(1-x)=1$ $(x\in\mathbb{R})$.

4.7. а) Пусть $Q_j = [0;\ 3^{-j}]\times[0;\ 3^{-j}]$, $E_j = Q_j\setminus Q_{j+1}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$. Ясно, что

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{d\sigma(x)\,d\sigma(y)}{(x^2+y^2)^{p/2}} = \sum_{j\geqslant 0}\iint\limits_{E_j}\frac{d\sigma(x)\,d\sigma(y)}{(x^2+y^2)^{p/2}}. \qquad (*)$$

Так как $2^{-p/2}\cdot 3^{jp} \leqslant (x^2+y^2)^{-p/2} \leqslant 3^{(j+1)p}$ на E_j, то

$$2^{-p/2}\cdot 3^{jp}\cdot\frac{3}{4}\,4^{-j} \leqslant \iint\limits_{E_j}\frac{d\sigma(x)\,d\sigma(y)}{(x^2+y^2)^{p/2}} \leqslant 3^{(j+1)p}\cdot\frac{3}{4}\,4^{-j}. \qquad (**)$$

Поэтому ряд $(*)$ сходится одновременно с рядом $\sum (3^p/4)^j$.

б) Пусть $\widetilde{Q}_j = [u-3^{-j};\ u+3^{-j}]\times[v-3^{-j};\ v+3^{-j}]$, $\widetilde{E}_j = \widetilde{Q}_j\setminus\widetilde{Q}_{j+1}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$. Рассуждая как и в п. а), убедитесь, что интегралы $\iint\limits_{\widetilde{E}_j}\frac{d\sigma(x)\,d\sigma(y)}{((x-u)^2+(y-v)^2)^{p/2}}$ допускают оценку, аналогичную $(**)$.

4.8. Решение этой задачи опирается на результат задачи 4.7 и проводится по той же схеме, что и решение задачи V.2.15. По существу впервые функция φ рассматривалась в [28], с. 93, где она была построена как предел функций, являющихся интегральными суммами для интеграла $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{d\sigma(\xi)\,d\sigma(\eta)}{z-(\xi+i\eta)}$.

§ 5. ε-энтропия и меры Хаусдорфа

5.1. Если E_0 — ε-различимое подмножество множества A с максимальным числом точек, то оно образует ε-сеть, и, следовательно, $N(A;\ \varepsilon) \leqslant \operatorname{card}(E_0) = M(A;\ \varepsilon)$. С другой стороны, различные точки из E_0 можно аппроксимировать с точностью до $\varepsilon/2$ лишь различными точками, и поэтому $M(A;\ \varepsilon) \leqslant N(A;\ \varepsilon/2)$.

5.2. а) Используйте результаты задачи 5.1 при подсчете минимального числа точек ε-сети для куба.

б) Пусть $\varepsilon > 0$, множество E — минимальная ε-сеть для A, т. е. $\operatorname{card}(E) = N(A;\ \varepsilon)$. Тогда

$$A \subset \bigcup_{x\in E} B(x;\ \varepsilon) \text{ и } \lambda_n^*(A) \leqslant \sum_{x\in E} \lambda_n(B(x;\ \varepsilon)) = N(A;\ \varepsilon)\,\alpha_n\varepsilon^n,$$

откуда следует искомое неравенство с $C = \alpha_n^{-1}\lambda_n^*(A)$, где α_n — n-мерный объем единичного шара.

В решениях задач 5.3—5.12 при употреблении символов O, o, $\sim$ мы для краткости опускаем указание «$\varepsilon \to +0$».

5.3. а) Пусть $\varepsilon > 0{,}2^{-(m+1)} < \varepsilon \leqslant 2^{-m}$, т. е. $m = [\log T_2(1/\varepsilon)]$. Очевидно, что точки $1, 2^{-1}, \ldots, 2^{-m}$ ε-различимы и образуют 2ε-сеть. Поэтому (см. задачу 5.1) $N(A;\ 2\varepsilon) \leqslant m + 1 \leqslant N(A;\ \varepsilon/2)$, откуда следует, что $H(A;\ \varepsilon) \sim \log_2\log_2(1/\varepsilon)$.

г) Пусть $\varepsilon > 0$, $m^{-\alpha} - (m+1)^{-\alpha} < \varepsilon \leqslant (m-1)^{-\alpha} - m^{-\alpha}$, т. е. $m - 1 \leqslant (\alpha/\varepsilon)^{1/(\alpha+1)} \leqslant m + 1$. Ясно, что точки $1, 2^{-\alpha}, \ldots, m^{-\alpha}$ ε-различимы. Если к ним добавить точки вида $k\varepsilon$, где $k = 1, 2, \ldots, p$, $p\varepsilon \leqslant m^{-\alpha} < (p+1)\varepsilon$, то мы получим ε-сеть множества $A = \{n^{-\alpha} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Так как $p = [1/(\varepsilon m^{\alpha})]$, то $p = O(m)$. Поэтому $m \leqslant N(A;\ \varepsilon/2)$ и $N(A;\ \varepsilon) = O(m)$. Тогда $(\alpha/\varepsilon)^{1/(\alpha+1)} \leqslant N(A;\ \varepsilon/2) + 1$, $N(A;\ \varepsilon) = O(\varepsilon^{-1/(\alpha+1)})$, откуда вытекает, что

$$H(A;\ \varepsilon) \sim \frac{1}{\alpha+1}\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Задачи 5.4, 5.5 и 5.6 решаются аналогично. Приведем решение задачи 5.4.б).

5.4. б) Вместе с заданным числом $\varepsilon > 0$ рассмотрим положительное число δ, выбор которого уточним позже. Разобъем множество A — график функции $\sin(\pi/x)$ на промежутке $(0;\ 1]$ — на части B_δ и C_δ, где B_δ — часть A, содержащаяся в прямоугольнике $P_\delta = (0;\ \delta_1) \times [-1;\ 1]$, а $C_\delta = A \setminus B_\delta$. Длина C_δ есть $l_\delta = \int\limits_\delta^1 \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{t^4}\cos^2\frac{\pi}{t}}\,dt = O(\delta^{-1})$. Поэтому число $N(C_\delta;\ \varepsilon)$ оценивается величиной $l_\delta/\varepsilon = O((\varepsilon\delta)^{-1})$. Число $N(B_\delta;\ \varepsilon)$ не превосходит $N(P_\delta;\ \varepsilon)$, и поэтому $N(B_\delta;\ \varepsilon) = O(\delta\varepsilon^{-2})$. Выберем δ так, чтобы оценки для $N(B_\delta;\ \varepsilon)$ и $N(C_\delta;\ \varepsilon)$ были одинаковыми по порядку, для чего положим $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Тем самым мы получаем оценку $N(A;\ \varepsilon) = O(\varepsilon^{-3/2})$. Чтобы убедиться, что число ε-различимых точек в множестве A имеет порядок $\varepsilon^{-3/2}$, рассмотрим промежутки $\Delta_k = [1/(2k+1);\ 1/(2k)]$ при $k = 1, 2, \ldots, [1/(2\sqrt{\varepsilon})]$ и соответствующие им участки графика Γ_k. Так как $f(\Delta_k) = [0;\ 1]$ при любом k, то, используя ε-различимые точки, лежащие в $[0;\ 1]$, можно указать по крайней мере $[1/\varepsilon]$ различимых точек в Γ_k. Поскольку расстояние между соседними промежутками Δ_k не меньше ε, точки, лежащие на различным дугах Γ_k, будут ε-различными. Общее число построенных нами ε-различимых точек, лежащих в A, есть $[1/\varepsilon]\cdot[1/(2\sqrt{\varepsilon})]$. Таким образом, $H(A;\ \varepsilon) \sim \frac{3}{2}\log_2\frac{1}{\varepsilon}$.

5.7. Пусть $\varepsilon > 0, 3^{-(m+1)} < \varepsilon < 3^{-m}$, т е. $m = [\log_3(1/\varepsilon)]$. Концы промежутков m-го ранга $\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_m}$ (см. определение канторова множества перед задачей I.1.27), очевидно, ε-различимы и образуют ε-сеть. Поэтому $N(C;\ \varepsilon) \leqslant 2\cdot 2^m \leqslant N(C;\ \varepsilon/2)$. Отсюда следует, что $H(C;\ \varepsilon) \sim \log_3(1/\varepsilon) = (\log_3 2)\cdot\log_2(1/\varepsilon)$.

5.8. Пусть $\varepsilon > 0,\ 1/(m+1)! < \varepsilon \leqslant 1/m!$. Точки вида $\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant m}\varepsilon_k/k!$, где $\varepsilon_k = 0$ или 1, ε-различимы и образуют 2ε-сеть. Поэтому $N(A;\ 2\varepsilon) \leqslant 2^{m+1} \leqslant N(A;\ \varepsilon/2)$. Из определения числа m следует, что $\ln(1/\varepsilon) \sim m\ln m$, т. е. $m \sim (\ln(1/\varepsilon))/\ln\ln(1/\varepsilon)$. Следовательно, $H(A,\ \varepsilon) \sim (\ln(1/\varepsilon))/\ln\ln(1/\varepsilon)$.

5.9. Утверждение а) следует из результата задачи 5.10, если учесть, что в рассматриваемом случае $\Psi(x) = x + m!$ при $m! \leqslant x < (m+1)!$ и, как легко убедиться, $\varliminf\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\Psi^{-1}(y) = \frac{1}{2}$, $\varlimsup\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\Psi^{-1}(y) = 1$.

По поводу утверждения б) см. задачу 1.11.

5.10. Пусть $\varepsilon > 0$, $2^{-\Psi(m+1)} < \varepsilon < 2^{-\Psi(m)}$, т. е. $m = [\Psi^{-1}(\log_2(1/\varepsilon))]$. Очевидно, что точки $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant m}\varepsilon_k 2^{-\Psi(k)}$, где $\varepsilon_k = 0$ или 1, ε-различимы и образуют 2ε-сеть. Поэтому $N(A;\ 2\varepsilon) \leqslant 2^m \leqslant N(A;\ \varepsilon/2)$. Следовательно,

$$H(A;\ 2\varepsilon) \leqslant m \leqslant H(A;\ \varepsilon/2). \qquad (1)$$

Не умаляя общности можно считать, что функция Ψ линейна на каждом промежутке $[n-1;\ n]$ $(n\in\mathbb{N})$. Тогда, как легко убедиться, $\Psi(x+h) - \Psi(x) \geqslant h$ при $x,\ h \geqslant 0$, и поэтому

$$\Psi^{-1}(y+\eta) - \Psi^{-1}(y) \leqslant \eta \qquad (y,\ \eta \geqslant 0). \qquad (2)$$

Из (1) следует, что

$$H(A;\ 2\varepsilon) - 1 \leqslant \Psi^{-1}(\log_2(1/\varepsilon)) \leqslant H(A;\ \varepsilon/2) + 1.$$

Вместе с (2) это приводит к требуемому результату.

5.11. Пусть $\varepsilon > 0$, $3^{-(m+1)} < \varepsilon \leqslant 3^{-m}$, $2^{-(p+1)} < \varepsilon \leqslant 2^{-p}$. Рассмотрим точки $(x;\ y) \in A$ с координатами $x = \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant p} \varepsilon_k 2^{-k}$, $y = \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} \eta_k 3^{-k} + \sum \varepsilon_k 3^{-k}$, где $\varepsilon_k = 0$ или 1, $\eta_k = 0$, 1 или 2 и ε_k, η_k имеют одинаковую четность при $k \leqslant m$. Ясно, что эти точки ε-различимы и образуют 4ε-сеть. Число этих точек равно $3^m 2^{p-m}$. Поэтому

$$N(A;\ 4\varepsilon) \leqslant 3^m 2^{p-m} \leqslant N(A;\ \varepsilon/2),$$

т. е.

$$H(A;\ 4\varepsilon) \leqslant [\log_3(1/\varepsilon)]\log_2(3/2) + [\log_2(1/\varepsilon)] \leqslant H(A;\ \varepsilon/2).$$

Следовательно, $H(A;\ \varepsilon) \sim (2 - \log_3 2)\log_2(1/\varepsilon)$.

5.12. а) Пусть $\varepsilon > 0$, множество E — минимальная ε/m-сеть для A, $\operatorname{card} E = N(A;\ \varepsilon/m)$. Тогда множество $E_m = E + E + \ldots + E$ (m слагаемых) есть ε-сеть для A_m, и $\operatorname{card}(E_m) \leqslant (N(A;\ \varepsilon/m))^m$. Следовательно, $H(A_m;\ \varepsilon) \leqslant mH(A;\ \varepsilon/m) = o(\ln(1/\varepsilon))$, что возможно, только если $\lambda_n(A) = 0$ (см. задачу 5.2).

б) Решение аналогично предыдущему.

в) Нет. Контрпримером служит указанное множество.

5.13. а) Если множество A счетно, $A = \{x_1;\ x_2;\ \ldots\}$, то для вычисления $\mu_p(A;\ \varepsilon)$ рассмотрите покрытие A шарами $B(x_k;\ \varepsilon 2^{-k})$.

в) Пусть $\varepsilon > 0$, $\{B(x_k^l;\ r_k^l)\}_{k=1}^{\infty}$ — такое покрытие множества A_l, что $r_k^l < \varepsilon$ при всех l, $k \in \mathbb{N}$ и $\left| \sum\limits_{k \geqslant 1} (r_k^l)^p - \mu_p(A_l) \right| < \varepsilon/2^l$. Тогда

$$\mu_p(A;\ \varepsilon) \leqslant \sum_{l \geqslant 1} \sum_{k \geqslant 1} (r_k^l)^p \leqslant \sum_{l \geqslant 1} (\mu_p(A_l) + \varepsilon/2^l) = \sum_{l \geqslant 1} \mu_p(A_l) + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$ получаем требуемое.

5.14. а) Пусть $\varepsilon > 0$, а $\{B(x_k;\ r_k)\}_{k=1}^{\infty}$ — такое покрытие множества A, что $r_k < \varepsilon$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и $\sum\limits_{k \geqslant 1} r_k^p \leqslant \mu_p(A) + 1$. Тогда

$$\sum_{k \geqslant 1} \lambda_n(B(x_k;\ r_k)) = \sum_{k \geqslant n} \alpha_n r_k^n \leqslant \alpha_n \varepsilon^{n-p} \sum_{k \geqslant 1} r_k^p \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_n \varepsilon^{n-p} (\mu_p(A) + 1).$$

Поэтому $\lambda_n^*(A) \leqslant \sum\limits_{k \geqslant 1} \lambda_n(B(x_k;\ r_k)) \leqslant \alpha_n \varepsilon^{n-p}(\mu_p(A) + 1)$, из чего ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ вытекает требуемое.

б) Если $\mu_n(A) = 0$, то $\lambda_n(A) = 0$, так как A можно покрыть такой последовательностью шаров $\{B(x_k;\ r_k)\}_{k=1}^{\infty}$, что сумма $\sum\limits_{k \geqslant 1} r_k^n$, а следовательно, и сумма $\sum\limits_{k \geqslant 1} \lambda_n(B(x_k;\ r_k))$ будут сколь угодно малы.

Если $\lambda_n(A) = 0$, то множество A можно покрыть такой последовательностью кубов $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$, $Q_j = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(a_k^j - h_j;\ a_k^j + h_j\right)$, что сумма $\sum\limits_{j\geqslant 1} \lambda_n(Q_j) = \sum\limits_{j\geqslant 1} (2h_j)^n$ будет сколь угодно мала. Тогда «описанные около кубов» шары $B(a_j;\ \sqrt{n}h_j)$, где $a_j = \left(a_1^j;\ \ldots;\ a_n^j\right)$, очевидно, также будут образовывать покрытие для A, а сумма $\sum\limits_{j\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\, h_j\right)^n$ будет лишь множителем $(\sqrt{n}/2)^n$ отличаться от суммы $\sum\limits_{j\geqslant 1} (2h_j)^n$.

5.15. Поскольку (при $r \leqslant 1$) $\nu_{n-1}\left(S^{n-1} \cap B(a;\ r)\right) = \int\limits_{B^{n-1}(\delta)} \dfrac{d\lambda_{n-1}(x)}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}$, где $a = (0;\ \ldots;\ 0;\ 1)$, $B^{n-1}(\delta)$ — проекция множества $S^{n-1} \cap B(a;\ r)$ на плоскость $x_n = 0$, то существуют такие постоянные $m > 0$, M (зависящие от размерности), что $mr^{n-1} \leqslant \nu_{n-1}(S^{n-1} \cap B(x;\ r)) \leqslant Mr^{n-1}$ при всех $x \in S^{n-1}$. Используя это обстоятельство, требуемые результаты можно получить простой модификацией решения задачи 5.14.

5.16. а) Это утверждение очевидно, так как если $r_k \leqslant 1$, то $\sum r_k^p \geqslant \sum r_k^q$.

б) Доказательство того, что $\mu_q(A) = 0$, если $q > p$ и $\mu_p(A) < +\infty$, аналогично решению задачи 5.14.а). Если $\mu_p(A) > 0$ и $0 < q < p$, то $\mu_q(A) = \infty$, так как иначе мы вступили бы в противоречие с уже доказанной частью утверждения.

5.17. а) Пусть $r_j > 0$, $r_j \to 0$ и $\dfrac{H(A;\ r_j)}{\log_2(1/r_j)} \to r(A)$. Пусть, далее, $q > r(A)$, а E_j — такая r_j-сеть для множества A, что $\operatorname{card}(E_j) = N(A;\ r_j)$. Тогда $A \subset \bigcup\limits_{x \in E_j} B(x;\ r_j)$ и при достаточно больших j справедливо неравенство $H(A;\ r_j) < q \log_2(1/r_j)$. Поэтому

$$\mu_q(A;\ 2r_j) \leqslant N(A;\ r_j)\, r_j^q \leqslant r_j^{-q} r_j^q = 1.$$

Следовательно, $\mu_q(A) < \infty$ при $q > r(A)$, из чего (см. задачу 5.16.б)) вытекает, что $\dim_H(A) \leqslant r(A)$.

б) Неравенство

$$\sup_k \dim_H(A_k) \leqslant \dim_H\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$

очевидно. С другой стороны, если $q > \sup\limits_k \dim_H(A_k)$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое покрытие $\left\{B\left(x_k^j;\ r_k^j\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$

множества A_j, что

$$\sum_{k\geqslant 1}\left(r_k^j\right)^q<\varepsilon/2^j,\quad r_k^j<\varepsilon\quad (j,\,k\in\mathbb{N}).$$

Следовательно,

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\subset\bigcup_{j,k=1}^{\infty}B\left(x_k^j;\,r_k^j\right),\quad r_k^j<\varepsilon\quad (j,\,k\in\mathbb{N})$$

и

$$\sum_{j,k\geqslant 1}\left(r_k^j\right)^q<\sum_{j\geqslant 1}\varepsilon 2^{-j}=\varepsilon.$$

Таким образом, $\mu_q\left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}A_j\right)=0$, из чего, в силу выбора q, вытекает, что

$$\dim_H\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\right)\leqslant\sup_k\dim_H(A_k).$$

5.18. Ясно, что

$$I_\varepsilon=\inf\left\{\sum_{k\geqslant 1}(\operatorname{diam}(C_k))^p\;\Big|\;A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}C_k,\ \operatorname{diam}(C_k)<\varepsilon\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\inf\left\{\sum_{k\geqslant 1}(2r_k)^p\;\Big|\;A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}B(x_k;\,r_k),\ 2r_k\leqslant\varepsilon\right\}=2^p\mu_p(A;\,\varepsilon/2).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to+0$, получаем неравенство

$$\tilde{\mu}_p(A)\leqslant 2^p\mu_p(A).$$

С другой стороны, пусть C_k^0 $(k\in\mathbb{N})$ — такие множества, что

$$A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}C_k^0,\quad r_k=\operatorname{diam}\left(C_k^0\right)<\varepsilon \text{ и } I_\varepsilon+\varepsilon>\sum_k r_k^p.$$

Если $x_k\in C_k^0$, то $C_k^0\subset\overline{B}(x_k;\,r_k)\subset B(x_k;\,(1+\varepsilon)\,r_k)$, и поэтому $I_\varepsilon+\varepsilon\geqslant\dfrac{1}{(1+\varepsilon)^p}\,\mu_p(A;\,\varepsilon(1+\varepsilon))$. Отсюда, переходя к пределу при $\varepsilon\to+0$, получаем, что $\tilde{\mu}_p(A)\geqslant\mu_p(A)$.

5.19. а) Если $[a;\,b]\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(x_k-r_k;\,x_k+r_k)$, то в силу счетной полуаддитивности одномерной меры Лебега λ мы получаем, что $b-a\leqslant\sum\limits_k 2r_k$. Следовательно, $\mu_1([a;\,b])\geqslant(b-a)/2$. С другой стороны, разбивая сегмент $[a;\,b]$ на равные части произвольно малой длины, легко убедиться, что $\mu_1([a;\,b])\leqslant(b-a)/2$.

б) Зафиксируем число $\varepsilon>0$. Будем считать его настолько малым, что разность $l-h$ между длиной дуги l и длиной h стягивающей ее хорды меньше εl, если $l < \varepsilon$. Пусть $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B(x_k;\ r_k)$, $r_k < \varepsilon$, $L_k = A \cap B(x_k;\ r_k)$, и пусть h_k — длина хорды, стягивающей дугу L_k, а y_k — середина этой хорды. Ясно, что $h_k \leqslant 2r_k$, $L_k = A \cap \cap B\left(y_k;\ \frac{1}{2} h_k\right)$. Поэтому $\sum_{k \geqslant 1} (h_k/2) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k \geqslant 1} l_k (1-\varepsilon)$, где l_k — длина дуги L_k. Таким образом, $\frac{1}{2} \sum_{k \geqslant 1} h_k \geqslant \frac{1-\varepsilon}{2} \sum_{k \geqslant 1} l_k \geqslant \pi(1-\varepsilon)$, и, следовательно, $\mu_1(A;\ \varepsilon) \geqslant \pi(1-\varepsilon)$.

С другой стороны, разбивая окружность на n равных частей длины $2\pi/n < \varepsilon$ и покрывая эти дуги кругами, центры которых лежат на серединах стягивающих их хорд, а радиусы равны π/n, мы видим, что $\mu_1(A;\ \varepsilon) \leqslant n \frac{\pi}{n} = \pi$, и, следовательно, $\mu_1(A) \leqslant \pi$.

в) Это частный случай утверждения г).

г) Пусть G — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ Найдем такие шары $B(x_k;\ r_k)$ $(k \in \mathbb{N})$, что

$$G \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B(x_k;\ r_k),\quad r_k < \varepsilon,\quad \sum_{k \geqslant 1} r_k^n < \mu_n(G;\ \varepsilon) + \varepsilon.$$

Тогда

$$\lambda_n(G) \leqslant \sum_{k \geqslant 1} \lambda_n(B(x_k;\ r_k)) = \alpha_n \sum_{k \geqslant 1} r_k^n < \alpha_n(\mu_n(G;\ \varepsilon) + \varepsilon).$$

Ввиду произвольности ε получаем, что

$$\lambda_n(G) \leqslant \alpha_n \mu_n(G). \tag{$*$}$$

Рассмотрим теперь такие шары $B(y_k;\ \rho_k)$ $(k \in \mathbb{N})$, что

$$\rho_k < \varepsilon,\ B(y_k;\ \rho_k) \cap B(y_j;\ \rho_j) = \varnothing \text{ при } k \neq j,$$

$$G = e \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} B(y_k;\ \rho_k),\ \lambda_n(e) = 0$$

(см. задачу 1.17). Зафиксируем еще шары $B(z_k;\ \delta_k)$, покрывающие множество e и удовлетворяющие условиям $\sum_{k \geqslant 1} \delta_k^n < \varepsilon$, $\delta < \varepsilon$ $(k \in \mathbb{N})$ (см. задачу 5.14.б)). Тогда $G \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (B(z_k;\ \delta_k) \cup B(y_k;\ \rho_k))$ и

$$\mu_n(G;\ \varepsilon) \leqslant \sum_{k \geqslant 1} \rho_k^n + \sum_{k \geqslant 1} \delta_k^n < \alpha_n^{-1} \sum_{k \geqslant 1} \alpha_n \rho_k^n + \varepsilon =$$

$$= \alpha_n^{-1} \sum_{k \geqslant 1} \lambda_n(B(y_k;\ \rho_k)) + \varepsilon = \alpha_n^{-1} \lambda_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B(y_k;\ \rho_k)\right) + \varepsilon =$$

$$= \alpha_n^{-1} \lambda_n(G) + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ это дает нам неравенство $\mu_n(G) \leqslant \alpha_n^{-1}\lambda_n(G)$, которое вместе с неравенством $(*)$ приводит к окончательному результату: $\mu_n(G) = \alpha_n^{-1}\lambda_n(G)$. В частности,

$$\mu_n([0;\ 1]^n) = \mu_n((0;\ 1)^n) = \alpha_n^{-1}.$$

5.20. Заметим, что если $p = \log_3 2$, то $(1+2t)^p \leqslant 1 + t^p$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Поэтому если некоторый промежуток длины l разбит на три части, длины которых l_1, l_2, l_3 таковы, что $l_1 \leqslant l_2 \leqslant l_3$, то

$$l^p \leqslant l_2^p + l_3^p. \qquad (*)$$

Используем это неравенство, чтобы вычислить $\mu_p(K;\ 1/2)$. По определению,

$$\mu_p(K;\ 1/2) = \inf\left\{\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{b_k - a_k}{2}\right)^p \,\middle|\, K \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k;\ b_k),\ b_k - a_k < 1\right\}.$$

Ясно, что условие $b_k - a_k < 1$ можно отбросить, а покрытия считать конечными и состоящими из замкнутых промежутков. Итак,

$$\mu_p(K;\ 1/2) = \inf\left\{\sum_{1\leqslant k\leqslant N}((b_k - a_k)/2)^p \,\middle|\, K \subset \bigcup_{k=1}^{N}[a_k;\ b_k]\right\}.$$

Пусть сегменты $[a_1;\ b_1], \ldots, [a_N;\ b_N]$ образуют покрытие множества K. Уменьшая их в случае необходимости, мы можем считать, что любые два из них не имеют общих внутренних точек. Пусть

$$\min\{b_k - a_k \mid k = 1, 2, \ldots, N\} = b_m - a_m = \delta, \qquad \Delta = [a_m;\ b_m].$$

Хотя бы один из соседних с Δ промежутков — обозначим его Δ' — находится от Δ на расстоянии, не превосходящем δ. Пусть Δ_0 — наименьший промежуток, содержащий Δ и Δ'. В силу неравенства $(*)$ мы получаем, что $\delta_0^p \leqslant \delta^p + (\delta')^p$, где δ_0, δ' — длины промежутков Δ_0, Δ' соответственно. Таким образом, заменяя промежутки Δ и Δ' промежутком Δ_0, мы снова получаем покрытие множества K, состоящее из $N-1$ сегмента $[a_1';\ b_1'], \ldots, [a_{N-1}';\ b_{N-1}']$, причем такое, что $\sum_{1\leqslant k<N}(b_k' - a_k')^p \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant N}(b_k - a_k)^p$. Продолжая этот процесс, мы, не увеличивая на каждом шаге сумму p-х степеней длин промежутков, образующих покрытие K, придем к покрытию, состоящему из одного сегмента $[0;\ 1]$. Это дает нам, что $\mu_p(K;\ 1/2) \geqslant 2^{-p}$. Так как обратное неравенство очевидно, то мы получаем, что $\mu_p(K;\ 1/2) = 2^{-p}$. Из соображений подобия следует равенство $\mu_p\left(K \cap [0;\ 3^{-n}];\ \frac{1}{2}3^{-n}\right) = 2^{-p}\cdot 3^{-np} = 2^{-(p+n)}$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}$ — один из промежутков n-го ранга,

участвующих в определении канторова множества. Очевидно, что

$$\mu_p\left(K\cap\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n};\ \frac{1}{2}\,3^{-n}\right)=\mu_p\left(K\cap[0;\ 3^{-n}];\ \frac{1}{2}\,3^{-n}\right)=2^{-(p+n)}.$$

Поскольку промежутки n-го ранга находятся друг от друга на расстоянии $\geqslant 3^{-n}$, то (см. задачу 5.13.г))

$$\mu_p\left(K;\ \frac{1}{2}\,3^{-n}\right)=\mu_p\left(\bigcup_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\in\{0;1\}}K\cap\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n};\ \frac{1}{2}\,3^{-n}\right)=$$

$$=\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\in\{0;1\}}\mu_p\left(K\cap\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n};\ \frac{1}{2}\,3^{-n}\right)=2^n\cdot 2^{-(p+n)}=2^{-p}.$$

Таким образом,

$$\mu_p(K)=\lim\mu_p\left(K;\ \frac{1}{2}\,3^{-n}\right)=2^{-p}.$$

Чтобы найти функцию φ, заметим, что она непрерывна на $[0;\ 1]$ и постоянна на интервалах, дополнительных к K, а ее приращение на промежутке $\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}$ есть $2^p\mu_p\left(K\cap\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}\right)=2^{-n}$. Теперь с помощью индукции легко доказать, что в крайних точках сегмента $\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}$ значения функции φ совпадают со значениями канторовой функции.

5.21. а) См. задачу 5.20.

б) См. задачи 5.3.д) и 5.13.а).

5.22. Пусть $\varphi(x)=\mu_p(E\cap[0;\ x])$, $0\leqslant x\leqslant 1$, и пусть $\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}$, где $\varepsilon_k=0$ или 1,— промежутки n-го ранга, соответствующие множеству E. Так как все множества $E\cap\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}$ конгруэнтны друг другу, то $\mu_p\left(E\cap\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}\right)=2^{-n}\mu_p(E)$. Следовательно, приращение функции φ на каждом промежутке $\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}$ пропорционально приращению функции σ_E. Кроме того, функция φ, как и σ_E, постоянна на интервалах, дополнительных к E. Теперь с помощью индукции легко доказать, что в крайних точках сегментов $\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}$ значения функций $\mu_p(E)\,\sigma_E$ и φ совпадают. Поскольку множество таких точек всюду плотно в E, мы получаем требуемое.

5.23. Пусть σ_E — канторова функция, соответствующая множеству E, $a=\varliminf 2^n l_n^p$, $\{n_k\}$ — такая последовательность натуральных чисел, что $2^{n_k}l_{n_k}^p\to a$. Пусть ε — произвольное положительное число. Далее будем считать номера n_k такими, что $l_{n_k}<\varepsilon$, $2^{n_k}l_{n_k}^p<a+\varepsilon$. Рассмотрим теперь покрытие E сегментами ранга n_k (при фиксированном k). Тогда мы получим $\mu_p(E;\ \varepsilon)\leqslant 2^{n_k}l_{n_k}^p<$ $<a+\varepsilon$. В частности, мы видим, что если $a=0$, то $\mu_p(E)=0$, а если $a<\infty$, то и $\mu_p(E)<\infty$.

Пусть теперь $0 < c < a < \infty$. Зафиксируем такой номер m, что $l_m < \varepsilon$, $2^n l_n^p > c$ при $n \geqslant m$ и рассмотрим произвольное покрытие множества E интервалами $(x_j - r_j;\ x_j + r_j)$, удовлетворяющими условию $r_j < l_m$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Выберем номера s_j так, что $l_{s_j} \leqslant r_j < l_{s_j-1}$. Тогда $2r_j < l_{s_j-2}$, $s_j > m$ и

$$\sum_{j\geqslant 1} r_j^p \geqslant \sum_{j\geqslant 1} l_{s_j}^p \geqslant c \sum_{j\geqslant 1} 2^{-s_j} = \frac{c}{4} \sum_{j\geqslant 1} 2^{-s_j+2} = \frac{c}{4} \sum_{j\geqslant 1} \sigma_E\left(l_{s_j-2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{c}{4} \sum_{j\geqslant 1} \left(\sigma_E\left(x_j - r_j + l_{s_j-2}\right) - \sigma_E(x_j - r_j)\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{c}{4} \sum_{j\geqslant 1} (\sigma_E(x_j + r_j) - \sigma_E(x_j - r_j)) \geqslant \frac{c}{4} \sigma_E(1) = \frac{c}{4}.$$

Последнее из написанных выше неравенств справедливо в силу счетной полуаддитивности меры, порожденной функцией σ_E. Итак, мы доказали, что для любого покрытия E интервалами $(x_j - r_j;\ x_j + r_j)$ достаточно малой длины справедливо неравенство $\sum\limits_{j\geqslant 1} r_j^p \geqslant c/4$ откуда следует, что $\mu_p(E) \geqslant c/4 > 0$. В частности, если $a = +\infty$, то ввиду произвольности числа $c < a$ мы получаем, что $\mu_p(E) = +\infty$.

5.24. Проверьте сначала, что $2^{-n_k} \leqslant l_k \leqslant 2 \cdot 2^{-n_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, и докажите равенства $\underline{\lim}(k/n_k) = 1/2$, $\overline{\lim}(k/n_k) = 1$.

5.25. Используйте результат задачи 5.23.

5.26. Пусть $\varepsilon > 0$, N — такое натуральное число, что $n^{-(N+1)} \leqslant \varepsilon < n^{-N}$. Тогда точки $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant N} a_k n^{-k}$, где $a_k \in E$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, образуют ε-сеть для множества A, мощность которой равна $(\operatorname{card} E)^N = m^N$. Поэтому

$$H(A;\ \varepsilon) \leqslant \log_2 m^N = N \log_2 m \leqslant p \log_2(1/\varepsilon), \text{ где } p = (\log_2 m)/\log_2 n.$$

Следовательно (см. задачу 5.17), $\dim_H(A) \leqslant r(A) = p$. С другой стороны, если $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (x_j - r_j;\ x_j + r_j)$, то сумму $\sum\limits_{j\geqslant 1} r_j^p$ можно оценить снизу следующим образом. Пусть σ — канторова функция, соответствующая множеству A, а k_j — такие номера, что $n^{-(k_j+1)} \leqslant 2r_j < n^{-k_j}$ $(j \in \mathbb{N})$. Тогда

$$\sum_{j\geqslant 1} r_j^p \geqslant \sum_{j\geqslant 1} \left(1/2n^{k_j+1}\right)^p = \frac{1}{(2n)^p} \sum_{j\geqslant 1} m^{-k_j} = \frac{1}{2^p m} \sum_{j\geqslant 1} \sigma\left(n^{-k_j}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2^p m}\sum_{j\geqslant 1}\left(\sigma\left(x_j - r_j + 1/n^{k_j}\right) - \sigma(x_j - r_j)\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2^p m}\sum_{j\geqslant 1}(\sigma(x_j + r_j) - \sigma(x_j - r_j)) \geqslant \frac{1}{2^p m}(\sigma(1) - \sigma(0)) = \frac{1}{2^p m}.$$

Последнее неравенство справедливо ввиду счетной полуаддитивности меры, порожденной функцией σ. Таким образом,

$$\mu_p(A) \geqslant 1/(2^p m) > 0 \quad \text{и} \quad \dim_H(A) \geqslant p.$$

5.27. Для вычисления $\dim_H(A)$ и $\dim_H(A+A)$ используйте результат предыдущей задачи.

5.28. Рассмотрите функцию

$$\varphi(z) = \int_0^1\int_0^1 \frac{d\sigma(u)\,d\sigma(v)}{z-(u+iv)} \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

где σ — канторова функция, соответствующая множеству K (см. задачу III.3.20). Используйте ту же идею, что и в задаче 4.8.

Известно (см., например, [10]), что функция с указанными свойствами не существует, если $\dim_H(K) < 1/2$. По поводу случая $\dim_H(K) = 1/2$ см. [8], с. 346—348.

§ 6. Асимптотика интегралов высокой кратности

6.1. в) Применив теорему Фубини, убедитесь, что

$$\int\limits_{B^n(r)} |x_1|^p\,dx = 2\alpha_{n-1}\int_0^r t^p(r^2-t^2)^{(n-1)/2}\,dt.$$

Выразите последний интеграл с помощью функции Γ и воспользуйтесь ее свойствами.

6.4. Применяя теорему Фубини, мы видим, что

$$\lambda_n\left\{(x_1; \ldots; x_n) \in B^n \,\middle|\, |x_1| < \varepsilon\right\} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \alpha_{n-1}(1-x^2)^{(n-1)/2}\,dx,$$

$$\alpha_n = \int_{-1}^{1} \alpha_{n-1}(1-x^2)^{(n-1)/2}\,dx.$$

Правые части этих равенств эквивалентны при $n\to\infty$ (см. задачу VI.2.4). Поэтому

$$\alpha_n^{-1}\lambda_n\left\{(x_1; \ldots; x_n) \in B^n \,\middle|\, |x_1| < \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

6.5. По определению

$$L_n = \sigma_{n-1}^{-2} \int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_{S^{n-1}} \| x' - x \| \, d\mu_{n-1}(x) \ \ d\mu_{n-1}(x').$$

Ввиду сферической инвариантности меры μ_{n-1} мы получаем, что

$$L_n = \sigma_{n-1}^{-1} \int\limits_{S^{n-1}} \| e_1 - x \| \, d\mu_{n-1}(x), \quad \text{где } e_1 = (1;\ 0;\ \ldots;\ 0).$$

Последний интеграл следует свести к интегралу по отрезку $[-1;\ 1]$ и воспользоваться асимптотической теоремой Лапласа. Получаемый результат $\left(\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \sqrt{2}\right)$ свидетельствует, что радиусы, проведенные в две случайно взятые на сфере точки, «как правило», почти ортогональны.

6.6. Будем считать, что $0 \leqslant a < b \leqslant \sqrt{n}$. Тогда

$$p_n = P_n\{(x_1;\ \ldots;\ x_n) \in S^{n-1}(\sqrt{n}) \mid a \leqslant x_n \leqslant b\} =$$

$$= \frac{n^{-(n-1)/2}}{\sigma_{n-1}} \int\limits_{n-b^2 \leqslant x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \leqslant n-a^2} \cdots \int \frac{\sqrt{n}\, dx_1 \ldots dx_{n-1}}{\sqrt{n - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2}}.$$

Приведите этот интеграл к виду

$$\frac{(n-1)\,\alpha_{n-1}}{n\alpha_n} \int\limits_{\sqrt{1-b^2/n}}^{\sqrt{1-a^2/n}} u^{n-2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Сделав в последнем интеграле замену переменной $u = \sqrt{1 - t^2/n}$, получаем

$$p_n = \frac{(n-1)\,\alpha_{n-1}}{n^{3/2}\alpha_n} \int\limits_a^b \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{(n-3)/2} dt.$$

Остается перейти к пределу под знаком интеграла и найти предел стоящего перед ним множителя.

6.7. Представим интеграл $\alpha_n^{-1} \int\limits_{B^n} f(x)\, dx$ в виде

$$\alpha_n^{-1} \int\limits_{B^n} f(x/\|x\|)\, dx + I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 = \alpha_n^{-1} \int\limits_{B^n(1-\varepsilon)} f(x)\, dx, \quad I_2 = \alpha_n^{-1} \int\limits_{1-\varepsilon \leqslant \|x\| \leqslant 1} (f(x) - f(x/\|x\|))\, dx,$$

$$I_3 = -\alpha_n^{-1} \int\limits_{B^n(1-\varepsilon)} f(x/\|x\|)\, dx.$$

Ясно, что $|I_1| \leqslant M(1-\varepsilon)^n$, $|I_3| \leqslant M(1-\varepsilon)^n$, $I_2 \leqslant h(\varepsilon)$. Кроме того,

$$\alpha_n^{-1} \int\limits_{B^n} f(x/\|x\|)\,dx = \alpha_n^{-1} \int\limits_0^1 r^{n-1} \left\{ \int\limits_{S^{n-1}} f(\omega)\,d\mu_{n-1}(\omega) \right\} dr = \\ = \frac{1}{n\alpha_n} \int\limits_{S^{n-1}} f(\omega)\,d\mu_{n-1}(\omega).$$

Так как $n\alpha_n = \sigma_{n-1}$, то

$$\left| \alpha_n^{-1} \int\limits_{B^n} f(x)\,dx - \sigma_{n-1}^{-1} \int\limits_{S^{n-1}} f(x)\,d\mu_{n-1}(x) \right| \leqslant \\ \leqslant |I_1| + |I_2| + |I_3| \leqslant 2M(1-\varepsilon)^n + h(\varepsilon).$$

6.8. Представьте данный интеграл в виде

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^{q/n} e^{-x^2/2}\,dx \right)^n$$

и воспользуйтесь тем, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^{q/n} \cdot e^{-x^2/2}\,dx = 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{n} \ln|x|\, e^{-x^2/2}\,dx + O(1/n^2).$$

6.9. Воспользуйтесь формулой $(*)$, приведенной в начале параграфа.

6.10. а) Используйте результат задачи V.2.3.

б) Используйте результат задачи V.2.16.

в) Пусть $I = \int\limits_{\|x\| \geqslant 1+\varepsilon} d\widetilde{\gamma}_n(x)$. Тогда

$$I = \left(\frac{n}{2\pi}\right)^{n/2} \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int\limits_{1+\varepsilon}^{\infty} t^{n-1} e^{-nt^2/2}\,dt = \\ = \frac{n^{n/2}}{\Gamma(n/2)} 2^{1-n/2} e^{-(n-1)/2} \int\limits_{1+\varepsilon}^{\infty} e^{-(n-1)\left(\frac{t^2}{2} - \ln t - \frac{1}{2}\right)} e^{-t^2/2}\,dt.$$

Так как

$$\frac{t^2}{2} - \ln t - \frac{1}{2} \geqslant \frac{(1+\varepsilon)^2}{2} - \ln(1+\varepsilon) - \frac{1}{2} \geqslant \frac{\varepsilon^2}{2}$$

и

$$\Gamma(n/2) \geqslant (n/2)^{(n-1)/2} \cdot e^{-n/2} \sqrt{2\pi},$$

то

$$I \leqslant \sqrt{\frac{ne}{\pi}} \cdot e^{-(n-1)\varepsilon^2/2} \int\limits_{1+\varepsilon}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt \leqslant \sqrt{n/\pi} \cdot e \cdot e^{-n\varepsilon^2/2} \int\limits_{1+\varepsilon}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt.$$

Аналогично получаем, что

$$\int\limits_{\|x\| \leqslant 1-\varepsilon} d\tilde{\gamma}_n(x) \leqslant \sqrt{n/\pi} \cdot e \cdot e^{-n\varepsilon^2/2} \int\limits_{0}^{1-\varepsilon} e^{-t^2/2}\, dt$$

Следовательно,

$$\int\limits_{|\|x\|-1| \geqslant \varepsilon} d\tilde{\gamma}_n(x) \leqslant \sqrt{n/\pi} \cdot e \cdot e^{-n\varepsilon^2/2} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt =$$

$$= \frac{e}{\sqrt{2}} \sqrt{n} \cdot e^{-n\varepsilon^2/2} < 2\sqrt{n} e^{-n\varepsilon^2/2}.$$

6.11. Пользуясь формулой (*), приведенной в начале § 6, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \|x\|_p^q\, d\tilde{\gamma}_n(x) = \left(\frac{n}{2\pi}\right)^{n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|x\|_p^q \cdot e^{-n\|x\|^2/2}\, dx =$$

$$= (n/2\pi)^{n/2} \int\limits_0^{\infty} r^{n-1+q} \cdot e^{-nr^2/2} \left(\int\limits_{S^{n-1}} \|\omega\|_p^q\, d\mu_{n-1}(\omega) \right) dr.$$

Кроме того,

$$(n/2\pi)^{n/2} \int\limits_0^{\infty} r^{n-1+q} \cdot e^{-nr^2/2}\, dr =$$

$$= \frac{2^{q/2-1}}{\pi^{n/2}} \cdot \frac{1}{n^{q/2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{q}{2}\right) \sim \frac{2^{q/2-1}}{\pi^{n/2}} \frac{\Gamma(n/2)\,(n/2)^{q/2}}{n^{q/2}} = \sigma_{n-1}^{-1}.$$

6.12. Используйте формулу (*), приведенную в начале § 6, и соотношение $\Gamma(a+c) \underset{a\to\infty}{\sim} a^c \Gamma(a)$ (см. задачу VI.2.15).

6.13. Пусть

$$F(t) = \int\limits_{\|x\|_\infty \leqslant t} d\gamma_n(x) = \left(1 - \sqrt{2/\pi} \int\limits_t^{\infty} e^{-u^2/2}\, du\right)^n \qquad (t \geqslant 0).$$

Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \|x\|_\infty^q\, d\gamma_n(x) = \int\limits_0^{\infty} t^q\, dF(t) =$$

$$= n\sqrt{2/\pi} \int\limits_0^{\infty} t^q \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_t^{\infty} e^{-u^2/2}\, du\right)^{n-1} e^{-t^2/2}\, dt. \quad (1)$$

Положим $z(t)=\sqrt{2/\pi}\int\limits_t^{\infty} e^{-u^2/2}\,du$. Ясно, что $z'(t)=-\sqrt{2/\pi}\cdot e^{-t^2/2}$, $z(0)=1$, $z(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$. Поэтому, делая в интеграле, стоящем в правой части равенства (1), замену переменной $z=z(t)$, мы получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\|x\|_\infty^q\,d\gamma_n(x)=n\int\limits_0^1 t^q(z)(1-z)^{n-1}\,dz,$$

где $t(z)$ — функция, обратная к $z(t)$. Так как

$$z(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{t}\cdot e^{-t^2/2},$$

то (см. задачу VI.4.1) $t(z)=\sqrt{2\ln(1/z)}\,(1+\alpha(z))$, где $\alpha(z)\xrightarrow[z\to+0]{}0$. Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\|x\|_\infty^q\,d\gamma_n(x)=n\int\limits_0^1(2\ln(1/z))^{q/2}(1+\alpha(z))^q(1-z)^{n-1}\,dz. \quad (2)$$

Используя результаты задач VI.2.8, VI.2.12, получаем, что

$$\int\limits_0^1(\ln(1/z))^{q/2}(1+\alpha(z))^q(1-z)^{n-1}\,dz\sim$$

$$\sim\int\limits_0^1(\ln(1/z))^{q/2}(1-z)^{n-1}\,dz\sim(\ln n)^{q/2}.$$

Вместе с равенством (2) это приводит к требуемому результату.

6.14. Рассуждая так же, как и при решении задачи 6.11, замените данный интеграл интегралом по гауссовской мере. Затем используйте результат задачи 6.13.

6.15. Используя неравенство $\|x\|_p\geqslant n^{1/p}|x_1\ldots x_n|^{1/n}$ и результат задачи 6.8, получаем при $q>0$ оценку для $I_n(p;\,q)$ снизу, а при $q<0$ — сверху.

а) Оценим $I_n(p;\,q)$ сверху. Так как $\|x\|_p\leqslant n^{1/p-1/2}\|x\|_2$, то $I_n(p,q)\leqslant n^{q/p-q/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\|x\|_2^q\,d\gamma_n(x)$. Применяя результат задачи 6.12, получаем требуемое.

б) В этом случае

$$I_n(p;\,q)\leqslant\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\|x\|_p^p\,d\gamma_n(x)\right)^{q/p}=n^{q/p}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x|^p\,d\gamma_1(x)\right)^{q/p}.$$

в) Так как $\|x\|_p \leqslant n^{1/p-1/q} \cdot \|x\|_q$, то

$$I_n(p;\ q) \leqslant n^{q/p-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|x\|_q^q \, d\gamma_n(x) = n^{q/p} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^q \, d\gamma_1(x).$$

Оценим $I_n(p;\ q)$ при $q < 0$ снизу. Пусть $a = -q$. Тогда

$$1 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|x\|_p^{a/2} \cdot \|x\|_p^{q/2} \cdot d\gamma_n(x) \leqslant I_n^{1/2}(p;\ a) \cdot I_n^{1/2}(p;\ q).$$

Поэтому $I_n(p;\ q) \geqslant I_n^{-1}(p;\ a)$, и остается воспользоваться оценкой для $I_n(p;\ a)$ сверху.

6.16. Используйте результаты задач 6.11 и 6.15.

6.17. Пользуясь равенством $1 = \dfrac{\pi^{n/2} r_n^n}{\Gamma(n/2+1)}$ и формулой Стирлинга, получаем, что

$$r_n = \sqrt{\frac{n}{2\pi e}} \cdot e^{\frac{1}{n}\left(\frac{\ln n}{2} + \frac{1}{2}\ln\pi + o(1)\right)} = \\ = \sqrt{\frac{n}{2\pi e}} \left(1 + \frac{\ln n}{2n} + \frac{\ln \pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

6.18. а) Убедитесь, что радиус шара равен $\sqrt{n-1}$.

б) Убедитесь, что радиус шара равен $\dfrac{\sqrt{n}}{2} - 1$; воспользуйтесь формулой Стирлинга.

6.19. Убедитесь, что

$$\gamma_n\left(B^n(\rho_n)\right) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \int\limits_0^{\rho_n^2/2} t^{n/2-1} \cdot e^{-t} \, dt,$$

и с помощью результата задачи VI.2.17.а) убедитесь, что $\rho_n^2/2 = n/2 + o\left(n^{1/2}\right)$.

6.20. Пусть $t > 0$, $O_n(t) = \left\{(x_1;\ \ldots;\ x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| \leqslant t\right\}$, $F(t) = \lambda_n(O_n(t)) = (2t)^n/n!$ Найдем среднее значение $a_n(t)$ функции $\|x\|_1^{-1}$ на $O_n(t)$. Ясно, что

$$a_n(t) = \frac{n!}{(2t)^n} \int\limits_0^t \frac{dF(u)}{u} = \frac{n}{t^n} \int\limits_0^t u^{n-2} \, du = \frac{n}{n-1} t^{-1} \leqslant \frac{2}{t} \qquad (n \geqslant 2).$$

Оценим b_n. Так как $\|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|$, то

$$b_n \geqslant \alpha_n^{-1} n^{-1/2} \int\limits_{B^n} \frac{dx}{\|x\|} = \alpha_n^{-1} n^{-1/2} \alpha_n n \int\limits_0^1 t^{n-2} \, dt = \frac{\sqrt{n}}{n-1}.$$

Для оценки b_n сверху зафиксируем число $\varepsilon > 0$, выбор которого уточним ниже. Тогда

$$\alpha_n b_n \leqslant \int\limits_{O_n(\varepsilon\sqrt{n})} \frac{dx}{\|x\|_1} + \int\limits_{B^n \setminus O_n(\varepsilon\sqrt{n})} \frac{dx}{\|x\|_1} \leqslant \frac{(2\varepsilon\sqrt{n})^n}{n!} \cdot \frac{2}{\varepsilon\sqrt{n}} + \frac{\alpha_n}{\varepsilon\sqrt{n}}.$$

Таким образом, $b_n \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon\sqrt{n}} + \dfrac{2}{\varepsilon} \cdot \dfrac{(2\varepsilon)^n}{\pi^{n/2}} \cdot n^{(n-1)/2} \cdot \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{n!}$. Используя формулу Стрилинга, легко убедиться в том, что второе слагаемое есть $O\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\varepsilon\sqrt{\dfrac{2e}{\pi}}\right)^n\right)$. Взяв $\varepsilon = 1/\sqrt{2}$, мы получаем, что $b_n \leqslant \sqrt{2/n} + o(1/\sqrt{n})$.

Перейдем к оценке c_n. Пусть $G(t) = \lambda_n([-t;\ t]^n)$. Тогда $G(t) = (2t)^n$, и так как $|x_1| + \ldots + |x_n| \leqslant n \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$, то

$$c_n \geqslant \frac{1}{2^n n} \int\limits_0^1 \frac{dG(t)}{t} = \int\limits_0^1 t^{n-2}\, dt = \frac{1}{n-1}.$$

С другой стороны, применяя тот же прием, что и при оценке сверху чисел b_n, мы имеем

$$c_n \leqslant 2^{-n} \int\limits_{O_n(\varepsilon n)} \frac{dx}{\|x\|_1} + 2^{-n} \int\limits_{[-1;-1]^n \setminus O_n(\varepsilon n)} \frac{dx}{\varepsilon n} \leqslant \frac{(\varepsilon n)^n}{n!} a_n(\varepsilon n) + \frac{1}{\varepsilon n} =$$

$$= \frac{n}{n-1} \cdot \frac{(\varepsilon n)^{n-1}}{n!} + \frac{1}{\varepsilon n}.$$

Используя формулу Стрилинга, легко убедиться, что первое слагаемое в правой части последнего неравенства есть $O((\varepsilon e)^n)$. Взяв $\varepsilon = 1/3$, мы получаем, что $c_n \leqslant 3/n + o(1/n)$.

6.21. а) Пусть $\dfrac{n!}{2^n} \displaystyle\int\limits_{O_n} \frac{\|x\|_2^2}{\|x\|_1}\, dx = I_n = \frac{n!n}{2^n} \int\limits_{O_n} \frac{x_1^2}{\|x\|_1}\, dx$. Тогда

$$I_n = \frac{n!n}{2^n} \int\limits_{-1}^{1} u^2 \left(\int\limits_{O_{n-1}(1-|u|)} \frac{dx_2 \ldots dx_n}{|u| + |x_2| + \ldots + |x_n|} \right) du =$$

$$= \frac{n!n}{2^n} \int\limits_{-1}^{+1} u^2 \left(\int\limits_0^{1-|u|} \frac{dF(t)}{|u|+t} \right) du,$$

где $F(t)=\lambda_{n-1}(O_{n-1}(t))=(2t)^{n-1}/(n-1)!$ Поэтому

$$I_n=n^2(n-1)\int_0^1 u^2\left(\int_0^{1-u}\frac{t^{n-2}\,dt}{u+t}\right)du=$$

$$=n^2(n-1)\int_0^1 t^{n-2}\left(\int_0^{1-t}\frac{u^2\,du}{t+u}\right)dt.$$

Так как $u^2\leqslant u^2/(u+t)\leqslant u^2/t$, то

$$n^2(n-1)\int_0^1 t^{n-2}\frac{(1-t)^3}{3}\,dt\leqslant I_n\leqslant n^2(n-1)\int_0^1 t^{n-3}\frac{(1-t)^3}{3}\,dt\sim\frac{2}{n}.$$

б) Пусть $\alpha_n^{-1}\int\limits_{B^n}\frac{\|x\|^2}{\|x\|_1}\,dx=J_n$. Так как $\|x\|_1\leqslant\sqrt{n}\|x\|_2$, то

$$J_n\geqslant\frac{\alpha_n^{-1}}{\sqrt{n}}\int\limits_{B^n}\|x\|\,dx=\frac{\alpha_n^{-1}}{\sqrt{n}}\,n\alpha_n\int_0^1 t^n\,dt=\frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

Оценка для J_n сверху следует из неравенства $J_n\leqslant\alpha_n^{-1}\int\limits_{B_n}\frac{dx}{\|x\|_1}$ и оценки для b_n в задаче 6.20.

в) Ясно, что

$$K_n=n\cdot 2^{-n}\int\limits_{[-1;1]^n}\!\!\!\dots\int\frac{x_1^2\,dx_1\dots dx_n}{|x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|}.$$

Используя неравенство $|x_1|+\dots+|x_n|\leqslant n\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k|$, получаем:

$$K_n\geqslant n\cdot 2^{-n}\int\limits_{[-1;1]^n}\!\!\!\dots\int\frac{|x_1|}{n}\,dx_1\dots dx_n=\frac{1}{2}.$$

Оценка K_n сверху следует из неравенства $K_n\leqslant 2^{-n}\int\limits_{[-1;1]^n}\frac{n\,dx}{\|x\|_1}$ и оценки для c_n в задаче 6.20.

6.22. б) Заметим сначала, что

$$\frac{\lambda_n(O_n)}{\alpha_n}=\frac{2^{n-1}\cdot n\cdot\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}\cdot n!}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2e}{\pi n}\right)^{n/2}. \qquad (*)$$

Убедитесь, что

$$O_n(1+\varepsilon\sqrt{n}) \cap [-1;\ 1]^n \subset O_n + \varepsilon B^n \subset O_n(1+\varepsilon\sqrt{n}).$$

Из этих включений следует, что

$$\frac{2^n(1+\varepsilon\sqrt{n})^n}{n!} - n\frac{(2\varepsilon\sqrt{n})^n}{n!} \leqslant V_n \leqslant \frac{2^n}{n!}(1+\varepsilon\sqrt{n})^n,$$

где $V_n = \lambda_n(O_n + \varepsilon B^n)$, т. е.

$$\frac{(2\varepsilon\sqrt{n})^n}{n!}\left(\left(1+\frac{1}{\varepsilon\sqrt{n}}\right)^n - 1\right) \leqslant V_n \leqslant \frac{(2\varepsilon\sqrt{n})^n}{n!}\left(1+\frac{1}{\varepsilon\sqrt{n}}\right)^n.$$

Используя соотношение (*), получаем

$$\frac{V_n}{\alpha_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda_n(O_n)}{\alpha_n}(\varepsilon\sqrt{n})^n \cdot e^{\sqrt{n}/\varepsilon} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\varepsilon^n}{\sqrt{2}}\left(\frac{2e}{\pi}\right)^{n/2} e^{\sqrt{n}/\varepsilon - 1/2\varepsilon^2}.$$

Отсюда, в частности, следует, что $\left(\dfrac{V_n}{\alpha_n}\right)^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\to} \varepsilon\sqrt{\dfrac{2e}{\pi}}$.

6.23. Пусть $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$A_n(t) = \{(x_1;\ \ldots;\ x_n) \in A_n \mid 0 \leqslant x_n \leqslant t\} \qquad (n \geqslant 2),$$

$$A_1(t) = [0;\ t],$$

$$V_n(t) = \lambda_n(A_n(t)) \quad \text{при } n \geqslant 1, \quad V_0(t) \equiv 1.$$

Тогда $V_n(t) = \int\limits_0^t V_{n-1}(1-u)\,du$ при $n \geqslant 1$, и поэтому

$$V_n'(t) = V_{n-1}(1-t), \qquad V_n''(t) = -V_{n-2}(t) \qquad (n \geqslant 2).$$

Выведите отсюда, что

$$\sum_{0\leqslant j\leqslant k} \frac{(-1)^j}{(2j)!} V_{2(k-j)}(1) = 0,$$

$$\sum_{0\leqslant j\leqslant k} \frac{(-1)^j}{(2j)!} V_{2(k-j)+1}(1) = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}. \qquad (*)$$

Пусть $F(x) = \sum\limits_{k\geqslant 0} V_{2k}(1)\,x^{2k}$, $G(x) = \sum\limits_{k\geqslant 0} V_{2k+1}(1)\,x^{2k+1}$. Пользуясь соотношениями (*), проверьте, что $F(x)\cos x \equiv 1$, $G(x)\cos x \equiv \sin x$, т. е. $F(x) = 1/\cos x$, $G(x) = \operatorname{tg} x$. Воспользуемся разложениями

$$\frac{1}{\sin x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{x+n\pi}, \qquad \operatorname{ctg} x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{x+n\pi}.$$

Заменяя в них x на $\pi/2 - x$, мы получаем

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}(2k-1)\pi}{(2k-1)^2 \frac{\pi^2}{4} - x^2}, \quad \operatorname{tg} x = \sum_{k\geqslant 1} \frac{2x}{(2k-1)^2 \frac{\pi^2}{4} - x^2}.$$

Следовательно (при $|x| < \pi/2$),

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_{k\geqslant 1} \frac{4(-1)^{k-1}}{\pi(2k-1)} \sum_{m\geqslant 0} \left(\frac{2x}{\pi(2k-1)}\right)^{2m} = $$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{m\geqslant 0} \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{2m} \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^{2m+1}},$$

$$\operatorname{tg} x = \sum_{k\geqslant 1} \frac{8x}{\pi^2(2k-1)^2} \sum_{m\geqslant 0} \left(\frac{2x}{\pi(2k-1)}\right)^{2m} =$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{m\geqslant 0} \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{2m+1} \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{(2k-1)^{2m+2}}.$$

Таким образом,

$$V_{2m}(1) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2m} \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^{2m+1}},$$

$$V_{2m+1}(1) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2m+1} \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{(2k-1)^{2m+2}}.$$

Отсюда вытекает, что $V_n(1) = 2(2/\pi)^{n+1}(1 + O(1/3^n))$.

6.24. Так как $\lambda_n(2V_n) > 2^n(3/2)^n$, то множество $2V_n$ содержит по крайней мере $(3/2)^n$ точек с целочисленными координатами (см. задачу 1.3.в)). Заметим, что ненулевые координаты этих точек могут быть равны лишь $+1$ или -1, поскольку $2V_n \subset (-2;\ 2)^n$. Пусть K_n — количество точек с координатами 0 и $+1$, у которых число ненулевых координат не превосходит $m = [n/10]$. Ясно, что

$$K_n = 1 + 2\cdot C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \ldots + 2^m C_n^m.$$

Проверьте, что $K_n < (3/2)^n$ при больших n, из чего и следует, что множество $2V_n$ содержит искомую точку.

6.25. а) Зафиксируем произвольное положительное число ε и рассмотрим множество

$$E_n(\varepsilon) = \left\{(x_1;\ \ldots;\ x_n) \in [0;\ 1]^n \,\middle|\, \left|\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n} - \frac{1}{3}\right| > \varepsilon\right\}.$$

По неравенству Чебышёва и ввиду попарной ортогональности функций $x_k^2 - 1/3$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ на $[0;\ 1]^n$ мы получаем

$$\lambda_n(E_n(\varepsilon)) \leqslant \frac{1}{n^2\varepsilon^2} \int\limits_{[0;1]^n} \left(\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(x_k^2 - 1/3\right) \right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{n^2\varepsilon^2} \int\limits_{[0;1]^n} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(x_k^2 - 1/3\right)^2 dx = O\,(1/n).$$

(Таким образом, $\|x\|/\sqrt{n}$ «почти совпадает» с $1/\sqrt{3}$ на множестве, мера которого сколь угодно близка к единице.) Следовательно,

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_{[0;1]^n} \|x\|\, dx - \frac{1}{\sqrt{3}} \right| \leqslant \int\limits_{[0;1]^n} \left| \frac{\|x\|}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{[0;1]^n} \frac{\left| \frac{\|x\|^2}{n} - \frac{1}{3} \right|}{1/\sqrt{3}}\, dx \leqslant \sqrt{3} \left(\int\limits_{E_n(\varepsilon)} dx + \int\limits_{[0;1]^n \setminus E_n(\varepsilon)} \varepsilon\, dx \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{3}\,(\lambda_n(E_n(\varepsilon)) + \varepsilon).$$

Так как $\lambda_n(E_n(\varepsilon)) \to 0$, то при достаточно больших n

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_{[0;1]^n} \|x\|\, dx - \frac{1}{\sqrt{3}} \right| \leqslant 2\varepsilon\sqrt{3}.$$

б) Рассмотрите множество

$$E_n(\varepsilon) = \left\{ (x_1;\ \ldots;\ x_n) \in [0;\ 1]^n \;\middle|\; \left| \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} - \frac{1}{2} \right| > \varepsilon \right\}$$

и докажите, что $\lambda_n(E_n(\varepsilon)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Используйте непрерывность функции f в точке $1/2$.

в) Так как

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} = e^{\frac{1}{n} \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \ln x_k} \quad \text{и} \quad \int_0^1 \ln x\, dx = -1,$$

рассмотрите множество

$$E_n(\varepsilon) = \left\{ (x_1;\ \ldots;\ x_n) \in \left]0;\ 1\right]^n \;\middle|\; \left| \frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \ln x_k + 1 \right| > \varepsilon \right\}$$

и используйте те же соображения, что и в пп. а), б).

г) Заметив, что $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x|\,e^{-x^2/2}dx=\sqrt{2/\pi}$, рассмотрите множество

$$E_n(\varepsilon)=\left\{(x_1;\ \ldots;\ x_n)\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, \left|\frac{1}{n}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k|-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right|>\varepsilon\right\}.$$

6.26. в) Очевидно, достаточно рассмотреть лишь случай, когда $n\omega_n\to\infty$. Пусть

$$A_n=\left\{(x_1;\ \ldots;\ x_n)\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k|^p\leqslant n\omega_n\right\},$$

$$I_n=\int\limits_{A_n}\!\!\ldots\!\int f(x_1)\ldots f(x_n)\,dx_1\ldots dx_n.$$

Найдем такое число $\delta>0$, что $\int\limits_{-\delta}^{\delta}f(x)\,dx<e^{-1}$. Пусть

$$x=(x_1;\ \ldots;\ x_n)\in A_n,\qquad E(x)=\{j\in\mathbb{N}\,|\,|x_j|\geqslant\delta\}.$$

Ясно, что $\operatorname{card}E(x)\leqslant[n\omega_n/\delta^p]$. Положим $N=[n\omega_n/\delta^p]$,

$$\mathscr{B}=\{B\subset\{1;\ 2;\ \ldots;\ n\}\,|\,\operatorname{card}B=N\},$$

$$C_B=\{(x_1;\ \ldots;\ x_n)\in\mathbb{R}^n\,|\,|x_k|<\delta\ \text{ при }\ k\in B\}.$$

Тогда $A_n\subset\bigcup\limits_{B\in\mathscr{B}}C_B$. Так как

$$\int\limits_{C_B}\!\!\ldots\!\int f(x_1)\ldots f(x_n)\,dx_1\ldots dx_n\leqslant\left(\int\limits_{-\delta}^{\delta}f(x)\,dx\right)^{n-N}<e^{-(n-N)},$$

то, следовательно,

$$I_n=\sum_{B\in\mathscr{B}}\int\limits_{C_B}\!\!\ldots\!\int f(x_1)\ldots f(x_n)\,dx_1\ldots dx_n\leqslant C_n^N e^{-(n-N)}.\qquad(1)$$

Оценивая C_n^N, получаем:

$$C_n^N\leqslant n^N/N!\leqslant(n/N)^N e^N\leqslant(2\delta^p/\omega_n)^N e^N.$$

Вместе с (1) это дает нам

$$I_n\leqslant e^{-n}\cdot e^{N\left(2+\ln\frac{2\delta^p}{\omega_n}\right)}\leqslant e^{-n\left(1-\frac{2\omega_n}{\delta^p}-\frac{\omega_n}{\delta^p}\ln\frac{2\delta^p}{\omega_n}\right)}.$$

Поскольку $\omega_n\ln\frac{2\delta^p}{\omega_n}\to0$ при $n\to\infty$, мы при достаточно больших n получаем, что $I_n\leqslant e^{-n/2}$.

6.27. Из неравенства Гёльдера следует, что величина $S_p(a) = \left(2^{-n} \int\limits_{Q_n} |(x;\ a)|^p\, dx\right)^{1/p}$ возрастает с ростом p. При $p = 2$ она совпадает с $\|a\|/\sqrt{3}$. Таким образом, правое неравенство нетривиально лишь при $p > 2$, а левое — при $p < 2$. Докажем правое неравенство. Очевидно, это достаточно сделать в случае, когда $\|a\| = 1$. Будем сначала считать, что $p = 2m$ — четное число. Пользуясь неравенством $t^{2m}/(2m)! \leqslant \operatorname{ch} t$, получаем

$$\int\limits_{Q_n} (x;\ a)^{2m}\, dx \leqslant (2m)! \int\limits_{Q_n} \operatorname{ch}(x;\ a)\, dx = 2^n (2m)! \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{\operatorname{sh} a_k}{a_k},$$

где a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — координаты вектора a. Воспользовавшись неравенством $\frac{\operatorname{sh} t}{t} \leqslant e^{t^2/2}$, получаем

$$2^{-n} \int\limits_{Q_n} (x;\ a)^{2m}\, dx \leqslant (2m)!\, e^{\frac{1}{2} \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k^2} = (2m)!\, e^{1/2}.$$

Отсюда вытекает, что $S_{2m}(a) \leqslant 2m\|a\|$. В случае произвольного $p > 2$ найдем такое натуральное число m, что $2m \leqslant p < 2m + 2$. Тогда

$$S_p(a) \leqslant S_{2m+2}(a) \leqslant (2m + 2)\|a\| \leqslant (p + 2)\|a\|.$$

Перейдем к доказательству левого неравенства при $p \in (0;\ 2)$. Рассмотрим такое число $\theta \in (0;\ 1)$, что $2 = \theta p + (1 - \theta) \cdot 4$. Применяя неравенство Гёльдера с показателем $1/\theta$, получаем

$$\frac{1}{3}\|a\|^2 = 2^{-n} \int\limits_{Q_n} |(x;\ a)|^2\, dx = 2^{-n} \int\limits_{Q_n} |(x;\ a)|^{\theta p} \cdot |(x;\ a)|^{4(1-\theta)} \cdot dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(2^{-n} \int\limits_{Q_n} |(x;\ a)|^p\, dx\right)^{\theta} \left(2^{-n} \int\limits_{Q_n} |(x;\ a)|^4\, dx\right)^{1-\theta}.$$

Следовательно,

$$\left(2^{-n} \int\limits_{Q_n} |(x;\ a)|^p\, dx\right)^{\theta} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\|a\|^2}{3\,(S_4(a))^{4(1-\theta)}} \geqslant \frac{\|a\|^2}{3B_4^{4(1-\theta)}\|a\|^{4(1-\theta)}} = \frac{\|a\|^{p\theta}}{3B_4^{4(1-\theta)}},$$

т. е.

$$S_p(a) \geqslant \left(3B_4^{4(1-\theta)}\right)^{-1/p\theta}\|a\|.$$

Глава IX. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Сходимости по мере и почти везде

1.2. б) Убедитесь в сходимости ряда $\sum\limits_{k\geqslant 1}\int\limits_0^1 f_{[C^k]}(x)\,dx$.

1.3. Рассмотрите функции $g_n = (-1)^n \cdot n \cdot f_n$, где f_n — функции из задачи 1.2.

1.5. Пусть $A_n \in \mathbb{N}$. Тогда функции $|\sin(A_n x + \varphi_n)|$ и $|\sin x|$ равнораспределены на $(0;\ 2\pi)$. Поэтому

$$\lambda\left\{x \in (0;\ 2\pi) \,\middle|\, |\sin(A_n x + \varphi_n)|^{p_n} > \varepsilon\right\} =$$

$$= \lambda\left\{x \in (0;\ 2\pi) \,\middle|\, |\sin x| > \varepsilon^{1/p_n}\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Если $A_n \notin \mathbb{N}$, то следует рассмотреть наименьший интервал, содержащий $(0;\ 2\pi)$ и целое число периодов функции $|\sin(A_n x + \varphi_n)|$, и воспользоваться аналогичными соображениями.

1.6. Чтобы доказать первое из требуемых равенств, рассмотрите множества

$$E_n(\varepsilon) = \{x \in (0;\ 2\pi) \mid \sin(A_n x + \varphi_n) < 1 - \varepsilon\} \qquad (\varepsilon > 0)$$

и докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая последовательность номеров $\{n_k\}_{k\geqslant 1}$, что пересечение $\bigcap\limits_{k\geqslant p} E_{n_k}(\varepsilon)$ имеет нулевую меру при каждом $p \in \mathbb{N}$.

1.7. Так как при любом $k \in \mathbb{N}$

$$\lambda\{x \in ((k-1)\pi;\ k\pi] \mid |\sin(nx + \varphi_n)|^n > 1/n\} =$$

$$= \lambda\{x \in (0;\ \pi) \mid \sin x > n^{-1/n}\} = O(((\ln n)/n)^{1/2}),$$

то

$$\int\limits_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}\,|\sin(nx + \varphi_n)|^n\,dx \leqslant e^{-k}\left(\frac{\pi e}{n} + O\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right)\right),$$

откуда следует, что

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}\cdot\sin^n(nx + \varphi_n)\,dx = O\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right).$$

1.9. а) Воспользуйтесь результатом задачи 1.8.

б) Рассмотрите множество $e = \bigcup\limits_{n\geqslant p}\{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x)| > \varepsilon_n\}$ при достаточно большом p.

1.10. Не умаляя общности, можно считать последовательность $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ убывающей. Рассмотрим такую последовательность $\{f_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$, что

$$\lambda\left\{x\in(0;\,1)\mid f_{n_k}\geqslant 1/k^2\right\}\leqslant 1/k^2 \qquad (k=1,\,2,\,\ldots).$$

Используя результат задачи 1.9.а), убедитесь, что последовательность $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$, где $A_n=k$ при $n_k\leqslant n<n_{k+1}$, является искомой.

1.11. Пусть $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$ — такая последовательность, что $A_n\to\infty$, $A_n(f_n(x)-f(x))\to 0$ п. в. на $(0;\,1)$. Докажите, что функция $g=\sup\limits_n |A_n(f_n-f)|$ является искомой.

1.12. Рассмотрите множество $e=\{x\in(0;\,1)\mid g(x)>C\}$, где g — функция из задачи 1.11, C — достаточно большое положительное число.

1.15. Рассмотрите такую последовательность $\{k_n\}_{n\geqslant 1}$, что $\lambda\left\{x\in(0;\,1)\mid \left|f_{n,k_n}(x)-f_n(x)\right|>1/n\right\}<1/n$, и воспользуйтесь включением

$$\left\{x\in(0;\,1)\mid \left|f_{n,k_n}(x)-f_0(x)\right|>\varepsilon\right\}\subset$$
$$\subset\left\{x\in(0;\,1)\mid \left|f_{n,k_n}(x)-f_n(x)\right|>\varepsilon/2\right\}\cup$$
$$\cup\left\{x\in(0;\,1)\mid \left|f_n(x)-f_0(x)\right|>\varepsilon/2\right\}.$$

б) Воспользуйтесь теоремой Егорова (задача 1.12).

в) Воспользуйтесь результатом задачи III.1.6.

§ 2. Сходимость в среднем. Закон больших чисел

2.1. Воспользуйтесь неравенством Гёльдера.

2.2. а) Воспользуйтесь неравенством

$$\lambda\left\{x\in E\mid |f_n(x)-f_0(x)|>\varepsilon\right\}\leqslant\frac{1}{\varepsilon^r}\int\limits_E |f_n(x)-f_0(x)|^r dx.$$

2.3. Воспользуйтесь неравенством Буняковского и абсолютной непрерывностью интеграла.

2.4. Докажите, что

$$\int\limits_0^1 (f_n(x)-f_0(x))\,f_0(x)\,dx\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

2.6. а) Для оценки интеграла $\int\limits_E |f(x)|\,dx$ представьте $|f|$ в виде произведения $|f|^t\cdot|f|^{1-t}$ и подберите числа $t>0$ и $s>1$ так, что $st=r$, $(1-t)s'=2$, где $s'=s/(s-1)$; воспользуйтесь неравенством Гёльдера.

б) Пусть $\alpha > 0$, $E(\alpha) = \{x \in E \mid |f(t)| > J_\alpha(f)\}$. Ясно, что $\lambda_m(E(\alpha)) \leqslant \alpha$ и

$$\|f\|_1 \leqslant \int\limits_{E(\alpha)} |f(x)|\,dx + \lambda_m(E)\,J_\alpha(f) \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\alpha}\,\|f\|_2 + \lambda_m(E)\,J_\alpha(f) \leqslant C\sqrt{\alpha}\,\|f\|_1 + \lambda_m(E)\,J_\alpha(f).$$

Следовательно, если $C\sqrt{\alpha} \leqslant 1/2$, то

$$\frac{1}{2}\|f\|_1 \leqslant (1 - C\sqrt{\alpha})\,\|f\|_1 \leqslant \lambda_m(E)\,J_\alpha(f).$$

2.7. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$, выбор которого уточним позже, и положим $f = \sum\limits_{n\geqslant 1} |a_n f_n|$. Ясно, что найдется такое число $t > 0$, что

$$\lambda_m(E_t) < \varepsilon, \quad \text{где} \quad E_t = \{x \in E \mid f(x) > t\}.$$

Тогда

$$\int\limits_{E_t} |f_n(x)|\,dx \leqslant \sqrt{\lambda_m(E_t)}\,C \leqslant C\sqrt{\varepsilon}.$$

Число $\varepsilon > 0$ выберем так, чтобы $C\sqrt{\varepsilon} < \delta/2$. В этом случае

$$\int\limits_{E\setminus E_t} |f_n(x)|\,dx > \delta/2.$$

Следовательно,

$$t\lambda_m(E) \geqslant \int\limits_{E\setminus E_t} f(x)\,dx = \sum_{n\geqslant 1} |a_n| \int\limits_{E\setminus E_t} |f_n(x)|\,dx \geqslant \sum_{n\geqslant 1} |a_n|\,\delta/2,$$

откуда

$$\sum_{n\geqslant 1} |a_n| \leqslant \frac{2t}{\delta}\,\lambda_m(E).$$

2.8. Докажите, что $\varliminf \int\limits_E |\sin(nx + \varphi_n)|\,dx > 0$ для любого (измеримого) множества $E \subset (0;\,2\pi)$, и воспользуйтесь результатом задачи 2.7.

2.9. Воспользуйтесь результатом задачи 2.2.а).

2.10. Воспользуйтесь результатом задачи 2.9.

2.11. Докажите, что мера множества

$$\left\{x \in (-\pi;\,\pi)\ \middle|\ \frac{1}{n}\sum_{1\leqslant k\leqslant n} k\sin^2 kx < \frac{n}{4}\right\}$$

стремится к нулю при $n \to \infty$.

2.12. б) Докажите, что $|\sigma_n| \leqslant |\sigma_{k^2}| + 2M/k$, где $k = [\sqrt{n}]$.

2.13. Пусть $A_k = \sum\limits_{k^2 < n \leqslant (k+1)^2} \|f_n\|_2^2 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$. Тогда

$$\sum_{n\geqslant 1} n^{-3/2}\|f_n\|_2^2 \geqslant \sum_{k\geqslant 1} k^{-3} \sum_{k^2<n\leqslant(k+1)^2} \|f_n\|_2^2 = \sum_{k\geqslant 1} k^{-3}A_k.$$

Поэтому

$$\sum_{k\geqslant 1} \|\sigma_{k^2}\|_2^2 \leqslant \sum_{k\geqslant 1} k^{-4} \sum_{0\leqslant j<k} A_j \leqslant \sum_{j\geqslant 0} A_j \sum_{k\geqslant j+1} k^{-4} \leqslant$$

$$\leqslant 2A_0 + \sum_{j\geqslant 1} j^{-3}A_j < \infty.$$

Таким образом, $\sigma_{k^2}(x) \to 0$ п. в. на E. Пусть теперь $n = k^2 + p$, где $k = [\sqrt{n}]$, $0 \leqslant p \leqslant 2k$, и пусть $g = \sum\limits_{n\geqslant 1} n^{-3/2} f_n^2$. Ясно, что $g \in \mathscr{L}^i(E)$, и, следовательно, $\omega_k(x) = \sum\limits_{n\geqslant k} n^{-3/2} f_n^2(x) \to 0$ п. в. на E. Кроме того, $|\sigma_n| \leqslant \left|\sigma_n - \frac{k^2}{n}\sigma_{k^2}\right| + |\sigma_{k^2}|$ и почти везде на E

$$\left|\sigma_n(x) - \frac{k^2}{n}\sigma_{k^2}(x)\right| \leqslant \frac{1}{k^2}\left|\sum_{k^2<j\leqslant k^2+p} f_j(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k^2}\sum_{k^2<j\leqslant(k+1)^2} j^{3/4}\frac{|f_j(x)|}{j^{3/4}} \leqslant \frac{1}{k^2}\left(\sum_{k^2<j\leqslant(k+1)^2} j^{3/2}\right)^{1/2}\omega_k^{1/2}(x) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k^2}(k+1)^{3/2}(2k+1)^{1/2}\omega_k^{1/2}(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2.14. б) Как установлено в VIII.3.16, $\int\limits_0^1 \left(\sigma_n(x) - \frac{1}{2}\right)^4 dx = O(1/n^2)$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\sigma_n(x) - \frac{1}{2}\right)^4$ сходился почти везде, и, следовательно, $\sigma_n(x) - 1/2 \to 0$ п. в. на $(0; 1)$.

2.15. Решение аналогично решению предыдущей задачи.

2.17. Используйте неравенства Чебышёва и попарную ортогональность функций $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ в кубе $(0; 1)^n$.

2.18. Решение аналогично решению предыдущей задачи.

2.19. Рассмотрите функцию $f(x) = x^2 - 1/2\pi\ (x \in \mathbb{R})$ и меру γ с плотностью $e^{-\pi x^2}$. Докажите, что мера $\gamma\times\gamma\times\ldots\times\gamma$ (n сомножителей) множества

$$E_n(\varepsilon) = \left\{(x_1; \ldots; x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \frac{1}{n}\left|\sum_{1\leqslant k\leqslant n} f(x_k)\right| > \varepsilon\right\}$$

стремится к нулю при $n\to\infty$, и, следовательно, интеграл $\int\limits_{E_n(\varepsilon)} \varphi\left(\frac{1}{n}\|x\|^2\right) e^{-\pi\|x\|^2}\,dx$ мал при больших n. Интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus E_n(\varepsilon)} \varphi\left(\frac{1}{n}\|x\|^2\right) e^{-\pi\|x\|^2}\,dx$ близок к $\varphi(1/2\pi)$ при малом $\varepsilon>0$.

2.20. а) Так как $\|S-S_k\|_2^2=\sum\limits_{j>k} a_j^2$, то

$$\sum_{k\geqslant 1}\left\|S-S_{k^2}\right\|^2=\sum_{k\geqslant 1}\sum_{j>k^2} a_j^2\leqslant \sum_{j\geqslant 2}\sqrt{j}\,\|a_j\|^2<\infty.$$

б) Ясно, что $S_{k^2}(x)\xrightarrow[k\to\infty]{} S(x)$ п. в. на E. Пусть $n=k^2+p$, где $k=[\sqrt{n}]$, $0\leqslant p\leqslant 2k$. Тогда

$$\left|S_n-S_{k^2}\right|^2=\left|\sum_{k^2<j\leqslant n} a_jf_j\right|^2\leqslant p\sum_{k^2<j\leqslant n} a_j^2f_j^2\leqslant 2\sum_{j>k^2}\sqrt{j}\,a_j^2f_j^2=2R_k.$$

Так как ряд $\sum\limits_{j\geqslant 1}\sqrt{j}\,a_j^2f_j^2(x)$ сходится почти везде, то $R_k(x)\xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ почти везде. Таким образом,

$$\left|S_n(x)-S(x)\right|\leqslant\left|S_n(x)-S_{k^2}(x)\right|+\left|S(x)-S_{k^2}(x)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{2R_k(x)}+\left|S(x)-S_{k^2}(x)\right|\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ п. в.}$$

в) Из предыдущего неравенства следует, что $|S_n-S|\leqslant g$, где функция $g=\sqrt{2\sum\limits_{j\geqslant 1}\sqrt{j}\,a_j^2f_j^2}+\sqrt{\sum\limits_{k\geqslant 1}\left|S-S_{k^2}\right|^2}$ суммируема с квадратом. Ясно, что $|S_n|\leqslant|S|+|S_n-S|\leqslant|S|+g$, $|S|+g\in\mathscr{L}^2(E)$.

§ 3. Функции Радемахера. Неравенство Хинчина

3.4. а) — в) Воспользуйтесь результатом задачи 3.2.б).

г) Используйте то, что бесконечные произведения $\prod\limits_{n\geqslant 1}\cos xc_n$ и $\prod\limits_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{x^2c_n^2}{2}\right)$ сходятся одновременно.

3.5. Убедитесь с помощью 3.3.б), что для вещественных c_k

$$\int_0^1\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} c_kr_k(x)\right)^4 dx=\sum_{1\leqslant k\leqslant n} c_k^4+6\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} c_j^2c_k^2$$
$$\left(\leqslant 3\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} c_k^2\right)^2\right).$$

б) Используйте идею решения задачи 2.6.а).

3.6. Представьте двойной интеграл в виде повторного и используйте результат задачи 3.5.

3.7. Решение аналогично решению задачи 3.5.

3.8. Решение аналогично решению задачи 3.5.

3.10. Используйте результаты задач 3.9.а) и 3.5.а).

3.11. Используйте равенство ($C = (c_{jk})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$)

$$\sum_{x,y\in A} |(Cx;\, y)|^p = 2^{2n}\int_0^1\int_0^1 \Big|\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} c_{jk} r_j(s)\, r_k(t)\Big|^p\, ds\, dt$$

и результат задачи 3.6.

3.12. Вычислите $\widehat{F}(s)$, используя равенство

$$\widehat{F}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ist}\, dF(t) = \int_0^1 e^{-isf(x)}\, dx,$$

где F — искомая функция распределения, и результаты пп. а), б) задач 3.3, 3.4.

3.13. а) Используйте неравенство треугольника и индукцию по n $(n \geqslant m)$.

б) Используйте выпуклость функции $s \mapsto e^{xs}$ и индукцию по n $(n \geqslant m)$.

в), г) Представьте множество E в виде объединения промежутков вида $\Delta_{n,k}$ $(k = 0,\, 1,\, \ldots,\, 2^n - 1)$ и используйте пп. а), б).

3.14. а) Не умаляя общности, будем считать, что $A = 1$ (иначе можно заменить t на At'). Введем множества

$$E_+ = \Big\{x \in (0;\, 1)\ \Big|\ \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k r_k(x) > t\Big\},$$

$$E_- = \Big\{x \in (0;\, 1)\ \Big|\ \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k r_k(x) < -t\Big\}.$$

Пусть s — положительное число, выбор которого мы уточним позже. Тогда

$$\lambda(E_+) \leqslant \int_{E_+} e^{s\left(\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k r_k(x) - t\right)}\, dx \leqslant e^{-st}\int_0^1 e^{s\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k r_k(x)}\, dx =$$

$$= e^{-ts}\prod_{1\leqslant k\leqslant n} \operatorname{ch}(sa_k) \leqslant e^{-st}\cdot e^{s^2/2}.$$

Выбирая s так, чтобы правая часть неравенства была минимальна $(s = t)$, получаем, что $\lambda(E_+) \leqslant e^{-t^2/2}$. Мера множества E_- оценивается аналогично.

б) Используйте утверждение а) и включение

$$\left\{x \in (0;\,1)\;\Big|\;\Big|\sum_{1\leqslant k\leqslant n} c_k r_k(x)\Big| > t\right\} \subset \left\{x \in (0;\,1)\;\Big|\;\Big|\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \alpha_k r_k(x)\Big| \geqslant \geqslant t/\sqrt{2}\right\} \cup \left\{x \in (0;\,1)\;\Big|\;\Big|\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \beta_k r_k(x)\Big| > t/\sqrt{2}\right\},$$

где $\alpha_k = \mathrm{Re}(c_k)$, $\beta_k = \mathrm{Im}(c_k)$.

в) Представьте множество E в виде объединения попарно не пересекающихся промежутков вида $\Delta_{m,j}$, где $1 \leqslant m \leqslant n$, $0 \leqslant j < < 2^m$, выбранных так, что

$$\max_{1\leqslant l\leqslant n}\Big|\sum_{1\leqslant k\leqslant l} a_k r_k(x)\Big| = \Big|\sum_{1\leqslant k\leqslant m} a_k r_k(x)\Big| \quad \text{при} \quad x \in \Delta_{m,j}.$$

Тогда из неравенств а), б) предыдущей задачи следует, что

$$\lambda(E) \leqslant t^{-1}\int_E \Big|\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k r_k(x)\Big|\,dx \leqslant At^{-1}$$

и

$$\lambda(E) \leqslant 2e^{-st}\int_E \mathrm{ch}\Big(s\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k r_k(x)\Big)\,dx \leqslant \leqslant 2e^{-st}\int_0^1 \mathrm{ch}\Big(s\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k r_k(x)\Big)\,dx.$$

Оценка последнего интеграла проведена при доказательстве утверждения а).

г) Пусть F — функция распределения функции g. Пользуясь установленным в пункте в) неравенством $1 - F(t) \leqslant 2e^{-t^2/(2A^2)}$ и считая, что $s < 1/(2A^2)$, мы получаем

$$\int_0^1 e^{sg^2(x)}\,dx = \int_0^\infty e^{st^2}\,dF(t) \leqslant 4s\int_0^\infty te^{-(1/(2A^2)-s)t^2}\,dt < \infty.$$

Если же $s \geqslant 1/(2A^2)$, то мы рассмотрим функцию $g_1(x) = = \sup_{n\geqslant N}\Big|\sum_{N<k\leqslant n} a_k r_k(x)\Big|$, где число N выбрано так, что $A_1^2 = = \sum_{k>N} a_k^2 < 1/(4s)$. Как уже показано выше, $\int_0^1 e^{2sg_1^2(x)}\,dx < \infty$. Кроме того, $g(x) \leqslant K + g_1(x)$, где $K = \sum_{1\leqslant j\leqslant N} |a_j|$, и поэтому $g^2(x) \leqslant 2K^2 + 2g_1^2(x)$. Следовательно,

$$\int_0^1 e^{sg^2(x)}\,dx \leqslant e^{2sK^2}\int_0^1 e^{2sg_1^2(x)}\,dx < \infty.$$

3.15. Очевидно, все числа a_k можно считать вещественными. Пусть $S_n(x)=a_1r_1(x)+\ldots+a_nr_n(x)$. Используя результат задачи 3.14.в), докажите, что для любого числа $\varepsilon>0$ мера множества $\left\{x\in[0;1)\,\Big|\,\sup\limits_{p\in\mathbb{N}}|S_{n+p}(x)-S_n(x)|>\varepsilon\right\}$ не превосходит $\varepsilon^{-1}\left(\sum\limits_{k>n}a_k^2\right)^{1/2}$. Выведите отсюда, что

$$\lambda\left\{x\in(0;1)\,\Big|\,\overline{\lim_{n\to\infty}}S_n(x)-\underline{\lim_{n\to\infty}}S_n(x)>\varepsilon\right\}=0.$$

3.16. Сужая в случае необходимости множество E, можно свести задачу к случаю, когда сумма ряда f ограничена на E. Пусть $|f|\leqslant C$ на E. Рассмотрим подпоследовательность $\{S_{n_k}\}_{k\geqslant1}$ частичных сумм данного ряда, равномерно сходящуюся к f на E. Очевидно, мы можем предполагать, что $|S_{n_k}(x)|\leqslant 2C$ при любых $x\in E$, $k\in\mathbb{N}$. Зафиксируем натуральное число m, выбор которого уточним позже, и положим

$$T^2=\sum_{1\leqslant j\leqslant m}a_j^2,\qquad U_k=\sum_{m<j\leqslant n_k}a_j^2\quad\text{при}\quad n_k>m.$$

Докажем ограниченность последовательности $\{U_k\}_{k\geqslant1}$, что достаточно для решения задачи. Ясно, что

$$2C\sqrt{\lambda(E)}\geqslant\left(\int_E\left(S_{n_k}(x)\right)^2dx\right)^{1/2}\geqslant\left(\int_E\left(\sum_{m<j\leqslant n_k}a_jr_j(x)\right)^2dx\right)^{1/2}-T.$$

Следовательно,

$$(T+2C\sqrt{\lambda(E)})^2\geqslant\int_E\sum_{m<j,l\leqslant n_k}a_ja_lr_j(x)\,r_l(x)\,dx=$$

$$=\lambda(E)\,U_k^2+2\sum_{m<j<l\leqslant n_k}a_ja_l\int_E r_j(x)\,r_l(x)\,dx\geqslant\lambda(E)U_k-$$

$$-2\sqrt{\sum_{m<j<l\leqslant n_k}a_j^2a_l^2}\sqrt{\sum_{m<j<l\leqslant n_k}\left(\int_E r_j(x)\,r_l(x)\,dx\right)^2}.\qquad(1)$$

Поскольку семейство $\{r_jr_l\}_{1\leqslant j<l}$ есть ортонормированная система (см. задачу 3.7.а)), то в силу неравенства Бесселя

$$\theta_m=\sqrt{\sum_{m<j<l}\left(\int_E r_j(x)\,r_l(x)\,dx\right)^2}\xrightarrow[m\to\infty]{}0.$$

Мы будем считать число m настолько большим, что $4\theta_m<\lambda(E)$. Тогда из (1) вытекает, что

$$(T+2C\sqrt{\lambda(E)})^2\geqslant\lambda(E)\,U_k-2U_k\theta_m\geqslant\frac{\lambda(E)}{2}U_k.$$

Итак, при указанном выборе m и при всех $n_k > m$ мы получаем неравенство

$$U_k \leqslant 2(\lambda(E))^{-1}(T + 2C\sqrt{\lambda(E)})^2,$$

что и требовалось.

3.17. Ясно, что а) $\Rightarrow$ б) $\Rightarrow$ в) (см. задачи 2.2, 2.1). Импликации в) $\Rightarrow$ а) $\Rightarrow$ г) установлены в задачах 3.16 и 3.15. Наконец, г) $\Rightarrow$ в) по теореме Лебега.

3.18. Решение аналогично решению задачи 3.16. Сохраняя введенные там обозначения и считая, что $E \subset (0;\ 2\pi)$, мы вместо неравенства (1) получаем

$$(\pi T + 2C\sqrt{\lambda(E)})^2 \leqslant \sum_{m<j\leqslant n_k} a_j^2 \int_E \sin^2 2^j x\,dx -$$
$$- 2\sqrt{\sum_{m<j<l\leqslant n_k} a_j^2 a_l^2}\sqrt{\sum_{m<j<l\leqslant n_k}\left(\int_E \sin 2^j x \sin 2^l x\,dx\right)^2}.$$

Поскольку $\int_E \sin^2 2^j x\,dx = \frac{\lambda(E)}{2} - \frac{1}{2}\int_E \cos 2^{j+1}x\,dx \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda(E)}{2}$, можно выбрать m настолько большим, что $\int_E \sin^2 2^j x\,dx > \frac{1}{4}\lambda(E)$ при $j > m$. Чтобы оценить сумму $\sum_{m<j<l\leqslant n_k}\left(\int_E \sin 2^j x \sin 2^l x\,dx\right)^2$, воспользуйтесь равенством

$$\int_E \sin 2^j x \sin 2^l x\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_E \cos(2^l - 2^j)\,x\,dx - \int_E \cos(2^l + 2^j)\,x\,dx\right)$$

и неравенством Бесселя для тригонометрической системы.

3.19. а) Убедитесь, что из ограниченности суммы ряда $\sum_{n\geqslant 1} a_n r_n$ на промежутке Δ следует ее ограниченность и на $(0;\ 1)$. Пусть $\left|\sum_{n\geqslant 1} a_n r_n\right| \leqslant C$ на $(0;\ 1)$. Зафиксируем произвольное натуральное число n и рассмотрим такой промежуток $\Delta_{n,k} = (k/2^n;\ (k+1)/2^n) \subset (0;\ 1)$, что $r_j(x) = \operatorname{sign} a_j$ при $x \in \Delta_{n,k}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Так как $\int_{\Delta_{n,k}} r_j(x)\,dx = 0$ при $j > n$, то

$$C2^{-n} \geqslant \int_{\Delta_{n,k}} \sum_{j\geqslant 1} a_j r_j(x)\,dx = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_j \int_{\Delta_{n,k}} r_j(x)\,dx = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} |a_j|\,2^{-n}.$$

Таким образом, $\sum_{1\leqslant j\leqslant n} |a_j| \leqslant C$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

б) Используйте идею решения задачи IV.6.28.

3.20. б) Используйте идею решения задачи 3.13.в).

в) Используйте идею решения задачи 3.14.в).

г) Используйте идею решения задачи 3.15.

3.21. а) Пусть S_n — n-я частичная сумма ряда Фурье функции f, а ε — произвольное положительное число. Докажите, что

$$\lambda\left\{x \in (0; 1) \,\middle|\, \max_{1 \leqslant p \leqslant N} |S_{n+p}(x) - S_n(x)| > \varepsilon\right\} \leqslant \leqslant \varepsilon^{-1} \int_0^1 |S_{n+p}(x) - S_n(x)|\, dx.$$

Выведите отсюда, что

$$\lambda\left\{x \in (0; 1) \,\middle|\, \sup_{p \in \mathbb{N}} |S_{n+p}(x) - S_n(x)| > \varepsilon\right\} \leqslant \varepsilon^{-1} \int_0^1 |f(x) - S_n(x)|\, dx.$$

Для завершения доказательства остается повторить рассуждения, использованные при решениях задач 3.15 и 3.20.г).

б) Пусть $E_n = \left\{x \in (0; 1) \,\middle|\, \sup_{1 \leqslant m \leqslant n} |S_m(x)| > t\right\}$. По образцу рассуждений, использованных при доказательстве утверждения в) предыдущей задачи, докажите, что $\lambda(E_n) \leqslant \|S_n\|_1 t^{-1}$, после чего остается лишь перейти к пределу при $n \to \infty$.

3.22. Докажем, что $\left\| \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k r_k \right\|_p \leqslant B_p \left(\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k^2 \right)^{1/2}$. Второе неравенство может быть получено с помощью метода, использованного при решении задачи 2.6.а). Пусть F — функция распределения функции $\left| \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k r_k \right|$. Пользуясь полученной в задаче 3.14.а) оценкой $1 - F(t) \leqslant 2e^{-t^2/(2A^2)}$, где $A^2 = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k^2$, убедитесь, что при любом $p > 0$

$$\int_0^1 \left| \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k r_k(x) \right|^p dx = \int_0^\infty t^p \, dF(t) \leqslant \leqslant 2p \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t^2/(2A^2)}\, dt = 2pA^p \int_0^\infty y^{p-1} e^{-y^2/2}\, dy.$$

Выразив последний интеграл через функцию Г и воспользовавшись формулой Стирлинга, мы получаем требуемую оценку для B_p.

Доказательство неравенства Хинчина, не использующее явно свойства функции распределения, можно получить по анологии с решением задачи VIII.6.27.

3.23. Импликация д) $\Rightarrow$ б) тривиальна, импликация а) $\Rightarrow$ д) следует из неравенства Хинчина.

3.24. Будем считать, что $\sum\limits_{|k|\leqslant n} |c_k|^2 = 1$. Рассмотрим функцию

$$P(x;\, t) = \sum_{|k|\leqslant n} c_k r_{n+k+1}(t)\, e^{-ikx} \qquad (x \in \mathbb{R},\ t \in (0;\,1)).$$

а) Используйте вытекающее из задачи 3.22 неравенство $\int\limits_0^1 |P(x;\, t)|\, dt \geqslant \alpha$, где $\alpha > 0$ — абсолютная постоянная.

б) Если мы убедимся, что мера множества

$$E = \left\{ t \in (0;\,1) \;\Big|\; \max_{x\in\mathbb{R}} |P(x;\, t)| > 10\sqrt{\ln n} \right\}$$

меньше единицы, то взяв (не двоично-рациональную) точку t_0 из $(0;\,1)\setminus E$ и положив $\varepsilon_k = r_{n+k+1}(t_0)$, мы получим искомый тригонометрический многочлен. Чтобы оценить меру E, заметим, что $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} |P(x;\, t)|$ «почти реализуется» в одной из точек $x_j = (2\pi j)/n^2$, $j = 0, 1, \ldots, n^2$. В самом деле, если $|x - x_j| \leqslant \pi/n^2$, то

$$|P(x;\, t) - P(x_j;\, t)| \leqslant \sum_{|k|\leqslant n} |c_k|\cdot 2\cdot \left|\sin\frac{k\pi}{2n^2}\right| \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{n}}.$$

Поэтому $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} |P(x;\, t)| \leqslant \pi/\sqrt{n} + \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n^2} |P(x_j;\, t)|$. Следовательно,

$$E \subset \left\{ t \in (0;\,1) \;\Big|\; \max_{1\leqslant j\leqslant n^2} |P(x_j;\, t)| > (10 - \pi/\sqrt{n\ln n})\sqrt{\ln n} \right\} \subset$$

$$\subset \widetilde{E} = \left\{ t \in (0;\,1) \;\Big|\; \max_{1\leqslant j\leqslant n^2} |P(x_j;\, t)| > 6\sqrt{\ln n} \right\}.$$

Наконец, ясно, что

$$\widetilde{E} \subset \bigcup_{1\leqslant j\leqslant n^2} \left\{ t \in (0;\,1) \;\big|\; |P(x_j;\, t)| > 6\sqrt{\ln n} \right\}.$$

Как установлено в задаче 3.14.б), мера каждого из множеств в правой части последнего включения не превосходит $4e^{-9\ln n} = 4n^{-9}$. Следовательно,

$$\lambda(E) \leqslant \lambda(\widetilde{E}) \leqslant n^2 4n^{-9} = 4n^{-7} < 1 \quad \text{при} \quad n \geqslant 2.$$

Как видно из последнего неравенства, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |P(x;\, t)| \leqslant 10\sqrt{\ln n}$ при всех t, принадлежащих множеству $(0;\,1)\setminus E$, мера которого близка к единице. Таким образом, расставляя знаки ε_k случайным образом с помощью подбрасывания монеты, мы в подавляющем большинстве случаев будем получать многочлены, удовлетворяющие требуемой оценке.

Отметим, что многочисленные результаты, относящиеся к затронутым в этой задаче вопросам, можно найти в [11].

3.25. Положите $p_n = 2\ln n$. Убедитесь с помощью неравенства Хинчина, что ряд $\sum\limits_{n\geqslant 2}\int\limits_0^1\left(\frac{|r_1(x)+\ldots+r_n(x)|}{\sqrt{an\ln n}}\right)^{2\ln n}dx$ сходится при любом $a>2$. При доказательстве этого используйте оценку $B_p\leqslant\sqrt{p(1+\varepsilon)/e}$, справедливую при любом $\varepsilon>0$ и достаточно большом p (см. задачу 3.22). Из сходимости рассмотренного ряда следует, что ряд $\sum\limits_{n\geqslant 2}\left(\frac{|r_1(x)+\ldots+r_n(x)|}{\sqrt{an\ln n}}\right)^{2\ln n}$ сходится почти везде, что возможно лишь в том случае, если почти везде

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{|r_1(x)+\ldots+r_n(x)|}{\sqrt{an\ln n}}\leqslant 1.$$

3.26. Используйте ту же идею, что и при решении предыдущей задачи.

§ 4. Ряд и преобразование Фурье

4.2. Ясно, что при $h>0$ и любом $x\in\mathbb{R}$

$$|\varphi(x+h)-\varphi(x)|\leqslant L\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g_\alpha(y+h)-g_\alpha(y)|\,dy,$$

где $L=\operatorname*{vrai\,sup}\limits_{\mathbb{R}}|f(x)|$. Убедитесь, что интеграл в правой части неравенства не превосходит $4h^{1-\alpha}/(1-\alpha)$.

4.3. а) Используйте равенство

$$\widehat{h}(n)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}S_k(x)\,\widetilde{S}_k(x)\,e^{-inx}dx,$$

где S_k, $\widetilde{S}_k$ — k-е частичные суммы рядов Фурье функций f и g соответственно. Предварительно докажите, что $\|h-S_k\widetilde{S}_k\|_1\xrightarrow[k\to\infty]{}0$ (см. задачу 2.2.б)).

б) Представьте Φ в виде суммы ряда $\sum\limits_{k\geqslant 0}\frac{f^k}{k!}$ и используйте утверждение а).

4.4. Воспользуйтесь равенством $\widehat{f}(n)=2\pi\widehat{g}(n)\widehat{h}(n)$ $(n\in\mathbb{Z})$.

4.5. Вычислите коэффициенты Фурье $\widehat{\varphi}(n)$ функции $\varphi=f*g_{1/2}$ (см. задачу 4.2) и убедитесь, что при $n\neq 0$

$$\widehat{\varphi}(n)=a\frac{\widehat{f}(n)}{\sqrt{|n|}}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\qquad a\neq 0.$$

4.6. Воспользуйтесь равенством $\widehat{f}(n) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(x+\frac{\pi}{n}\right) e^{-inx} dx.$

4.7. Воспользуйтесь интегрированием по частям.

4.8. Выразите $\widehat{f}(n)$ через интегралы

$$\int\limits_0^{\pi} xe^{\pm i(nx\pm 1/x)} dx = O(1/n) \pm \int\limits_{2/\sqrt{n}}^{\pi} \frac{x}{n \mp 1/x^2}\, d\left(\frac{1}{i}\, e^{\pm i(nx\pm 1/x)}\right).$$

Последний интеграл оцените с помощью интегрирования по частям.

4.9. Пусть $|a_n| \leqslant C/n^{1+\alpha}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Убедитесь, что

$$|f(x) - f(x')| \leqslant C \sum_{1\leqslant n\leqslant |x-x'|^{-1}} |x-x'|/n^{\alpha} + 2C \sum_{n>|x-x'|^{-1}} 1/n^{1+\alpha}.$$

Докажите, что каждая из сумм в правой части неравенства есть $O(|x-x'|^{\alpha})$.

При $\alpha = 1$ рассмотрите функцию $f(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} (e^{inx}/n^2)$ и проверьте, что ее производная не ограничена на интервале $(0;\ \pi)$.

4.10. Пусть $S_j(x) = \sum\limits_{|n|\leqslant j} \widehat{f}(n)\, e^{inx}$, $f_k(x) = \sum\limits_{1\leqslant n\leqslant k} \frac{\sin(2^{n!}|x|)}{n^2}$.

Убедитесь, что

$$S_{m_k}(0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f_k(x)\, \frac{\sin(m_k + 1/2)\, x}{\sin(x/2)}\, dx, \quad \text{где} \quad m_k = 2^{k!}.$$

Докажите, что

$$\int\limits_0^{\pi} f_k(x)\, \frac{\sin(m_k + 1/2)}{\sin(x/2)}\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2}{k^2}\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^2 m_k x}{x}\, dx - \sum_{1\leqslant n<k} \frac{1}{n^2}\int\limits_0^{\pi} \frac{|\sin m_n x|}{x}\, dx + O(k).$$

Воспользуйтесь результатом задачи VI.1.10.

4.11. Воспользуйтесь равенством

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))\, \frac{\sin^2(nt/2)}{\sin^2(t/2)}\, dt. \qquad (*)$$

Докажите, что $\frac{1}{2\pi n}\int\limits_{\delta}^{\pi} \frac{\sin^2(nt/2)}{\sin^2(t/2)} dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ при любом $\delta > 0$, и выведите отсюда, что при любом $x \in \mathbb{R}$

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant \omega_f(\delta) + o(1),$$

где ω_f — модуль непрерывности функции f.

4.12. а) Пользуясь формулой $(*)$ из решения предыдущей задачи, докажите, что

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{C_0 C}{n} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2(nt/2)}{t^{2-\alpha}} dt \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

где C_0 — постоянная.

б) Воспользуйтесь результатом утверждения а) и экстремальным свойством частичных сумм ряда Фурье.

4.13. Пользуясь неравенством Буняковского и утверждением б) предыдущей задачи, докажите, что $\sum\limits_{2^k < |n| \leqslant 2^{k+1}} |\widehat{f}(n)| = O\left(2^{(1/2-\alpha)k}\right)$.

4.14. С помощью неравенства $|\widehat{\varphi}(k)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \|\varphi\|_1$, примененного к функции $\varphi = f - \sigma_n$, убедитесь, что при $k \neq 0$ коэффициенты Фурье $\widehat{f}(k)$ функции f равны нулю.

4.15. Используйте равенство $\widehat{f}(-n) = \overline{\widehat{f}(n)}$ $(n \in \mathbb{Z})$.

4.16. Ясно, что $|F_\varepsilon(x)| \leqslant \sum\limits_{k \geqslant 1} |f_k(x)| e^{-\varepsilon \sum_{j \geqslant k} |f_j(x)|}$. Поэтому утверждение а) вытекает из результата задачи IV.2.12.в). Для доказательства б) убедитесь, что

$$\widehat{F}_\varepsilon(n_q) - a_q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(F_\varepsilon(x) - \sum_{k \geqslant p} f_k(x) \right) e^{-in_q x} dx.$$

С помощью результата задачи 4.3.б) выведите отсюда, что

$$\widehat{F}_\varepsilon(n_q) - a_q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k \geqslant p} f_k(x) \left(e^{-\varepsilon \sum_{j \geqslant k} h_j(x)} - 1 \right) e^{-in_q x} dx,$$

и, следовательно,

$$\left|\widehat{F}_\varepsilon(n_q) - a_q\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k \geqslant p} |f_k(x)| \sum_{j \geqslant k} |h_j(x)|\, dx =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\pi} \sum_{k \geqslant p} \sum_{j \geqslant k} \int_{-\pi}^{\pi} |f_k(x)| \cdot |h_j(x)|\, dx.$$

Остается воспользоваться неравенством Буняковского.

4.17. Воспользуйтесь неравенством

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{1\leqslant j\leqslant m} c_j e^{in_jx}\right| dx \geqslant \varepsilon \left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant m} c_j e^{in_jx}\right) F_\varepsilon(x)\, dx\right|,$$

где ε — достаточно малое положительное число, F_ε — функция, построенная в предыдущей задаче с $a_j = j^{-1}c_j/|c_j|$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

Неравенство задачи 4.17 в частном случае, когда $c_1 = c_2 = \ldots = 1$, было высказано Дж. Литтлвудом в виде гипотезы. Оно было доказано почти полвека спустя С. В. Конягиным («О проблеме Литтлвуда», Изв. АН СССР, сер. мат., 1981, т. 45, № 2) и одновременно Мак Ги, Пиньо и Смитом (см. [41]).

4.18. а) Убедитесь, что функция $\widehat{f_c}(s)$ является решением дифференциального уравнения $y'(s) + csy(s) = 0$.

4.19. Используя n-кратное интегрирование по частям, докажите, что

$$\widehat{h}_n(s) = \frac{1}{i^n} e^{s^2/2} \frac{d^n}{ds^n}\left(e^{-s^2/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} e^{isx} dx\right).$$

Для вычисления последнего интеграла примените результат задачи 4.18.

4.21. Так как $\sigma(2/3 + t) = 1/2 + \sigma(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1/3$, то

$$\sigma(s) = \int_0^{1/3} e^{-ist} d\sigma(t) + \int_{2/3}^{1} e^{-ist} d\sigma(t) = \int_0^{1/3} e^{-ist} d\sigma(t) + \int_0^{1/3} e^{-is(t+2/3)} d\sigma(t) = \left(1 + e^{-2is/3}\right)\int_0^{1/3} e^{-ist} d\sigma(t).$$

Используя индукцию, покажите, что

$$\widehat{\sigma}(s) = \left(\prod_{1\leqslant k\leqslant n}\left(1 + e^{-2is/3^k}\right)\right)\int_0^{3^{-n}} e^{-ist} d\sigma(t).$$

Выведите отсюда, что

$$\widehat{\sigma}(s) = e^{-is/2}\prod_{k\geqslant 1}\cos\left(s\cdot 3^{-k}\right).$$

Из последнего равенства видно, что

$$|\widehat{\sigma}(2\pi 3^n)| = \frac{1}{2}\prod_{k\geqslant 2}\cos\left(2\pi 3^{-k}\right) \neq 0$$

при любом $n \in \mathbb{N}$.

4.22. а) Пусть $0 \leqslant x < y \leqslant 2$. Так как

$$\sigma_1(y) = \int_0^y \sigma(y-t)\,d\sigma(t) \geqslant \int_0^x \sigma(y-t)\,d\sigma(t) \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^x \sigma(x-t)\,d\sigma(t) = \sigma_1(x),$$

то функция σ_1 не убывает. Для доказательства ее строгой монотонности убедитесь, что найдутся сегменты n-го ранга

$$[k3^{-n};\ (k+1)3^{-n}] \text{ и } [l3^{n};\ (l+1)3^{n}]$$

(см. определение канторова множества на с. 12) такие, что

$$0 \leqslant k,\ l < 3^n, \quad x < (k+l)/3^n < (k+l+1)/3^n < y$$

(ср. с задачей I.1.28.б)). Тогда

$$\sigma_1(y) - \sigma_1(x) \geqslant \sigma_1\left(\frac{k+l+1}{3^n}\right) - \sigma_1\left(\frac{k+l}{3^n}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \int_{k3^{-n}}^{(k+1)3^{-n}} \left(\sigma\left(\frac{k+l+1}{3^n} - t\right) - \sigma\left(\frac{k+l}{3^n} - t\right)\right) d\sigma(t) =$$

$$= \int_0^{3^{-n}} \left(\sigma\left(\frac{l+1}{3^n} - \tau\right) - \sigma\left(\frac{l}{3^n} - \tau\right)\right) d\sigma(\tau) \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^{3^{-n}/2} \left(\sigma\left(\frac{l+1}{3^n} - \frac{1}{2}3^{-n}\right) - \sigma\left(\frac{l}{3^n}\right)\right) d\sigma(t) = \frac{1}{2}\cdot 2^{-n}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^{-n} > 0.$$

б) Убедитесь, что $\widehat{\sigma_1}(s) = (\widehat{\sigma}(s))^2$, и воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

4.23. Воспользуйтесь тем, что преобразование Фурье свертки суммируемых функций равно произведению их преобразований Фурье.

4.24. а) Убедитесь, что множество значений функции g всюду плотно в промежутке $[0;\ 1]$ и воспользуйтесь монотонностью.

б) Изучите интервалы постоянства функции g и найдите меру их объединения.

в) Используйте тот же прием, что и при решении задачи 4.21.

г) Изучите преобразование Фурье меры, соответствующей функции

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)\,dg(2t) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

4.25. Решение аналогично решению предыдущей задачи.

4.26. Докажите, что

$$\widehat{\mu}(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu}dF_s(u),$$

где

$$F_s(u)=\mu\{t\in\mathbb{R}^n \mid (s;\ t)\leqslant u\} \qquad (u\in\mathbb{R}).$$

4.27. Пусть μ — мера, удовлетворяющая условиям задачи. Тогда $\mu=\mu_1\times\mu_2$, где μ_1, μ_2 — борелевские вероятностные меры на подпространствах L и M соответственно. Так как мера μ инвариантна относительно вращений, то $\dim L+\dim M=n$. Ввиду инвариантности меры μ относительно вращения мы видим, что $\widehat{\mu}(s)=\widehat{\mu}(\|s\|a)$, где a — произвольный нормированный вектор. Инвариантность меры μ относительно ортогональных преобразований влечет, что меры μ_1 и μ_2 также инвариантны относительно таких преобразований (в L и M соответственно). Поэтому $\widehat{\mu}_1(u)=\widehat{\mu}_1(\|u\|u_0)$, $\widehat{\mu}_2(v)=\widehat{\mu}_2(\|v\|v_0)$, где $u\in L$, $v\in M$, а u_0, v_0 — произвольные нормированные векторы из подпространств L и M соответственно. С помощью теоремы Фубини мы получим, что

$$\widehat{\mu}(u+v)=\widehat{\mu}_1(u)\cdot\widehat{\mu}_2(v), \quad \text{где } u\in L,\ v\in M.$$

Поскольку $\|u+v\|=\sqrt{\|u\|^2+\|v\|^2}$, отсюда следует равенство

$$\widehat{\mu}(\sqrt{\|u\|^2+\|v\|^2}a)=\widehat{\mu}_1(\|u\|u_0)\cdot\widehat{\mu}_2(\|v\|v_0). \tag{1}$$

Пусть $\varphi(t)=\widehat{\mu}(ta)$ при $t>0$. Полагая поочередно в равенстве (1) $v=0$ и $u=0$, мы видим, что

$$\varphi(\|u\|)=\widehat{\mu}(\|u\|a)=\widehat{\mu}_1(\|u\|u_0),$$

$$\varphi(\|v\|)=\widehat{\mu}(\|v\|a)=\widehat{\mu}_2(\|v\|v_0).$$

Таким образом, из равенства (1) вытекает, что

$$\varphi\left(\sqrt{t_1^2+t_2^2}\right)=\varphi(t_1)\,\varphi(t_2) \text{ при любых } t_1,\ t_2\geqslant 0.$$

Пользуясь результатом задачи III.5.9, мы получаем, что $\varphi(t)=e^{-ct^2}$ при $t\geqslant 0$. Итак, $\widehat{\mu}(s)=e^{-c\|s\|^2}$, причем $c\geqslant 0$, поскольку $|\widehat{\mu}(s)|\leqslant 1$. Если $c=0$, то μ — единичная нагрузка, сосредоточенная в начале координат. Случай $c>0$ соответствует гауссовской мере с плотностью $(4\pi c)^{-n/2}e^{-\|x\|^2/(4c)}$.

Глава X. ИТЕРАЦИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ОТРЕЗКА

§ 1. Топологическая динамика

1.1. С помощью индукции докажите, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства $n \leqslant f(n) < \min\{f(k) \mid k > n\}$.

1.2. а) Докажите, что $f(0) = 0$, и исследуйте знак $f(x)$ при $x > 0$.

б) Докажите, что функция f строго возрастает и что $\inf f = a \in (-\infty; 0)$, $f(a) = 0$. Зафиксируйте произвольную строго возрастающую функцию $f_0 \in C([a; 0])$, удовлетворяющую условиям $f_0(a) = 0$, $f_0(0) = e^a$, и, используя уравнение, продолжите ее на $\mathbb{R}$.

в) Докажите, что функция f должна строго возрастать на $[0; \infty)$, строго убывать на $(-\infty; 0]$ и удовлетворять неравенству $f(0) \geqslant 0$, что невозможно, поскольку F и, следовательно, f принимают отрицательные значения.

1.4. Пусть f: $X \to X$ — биекция. Для произвольной точки $x \in X$ положим $x_0 = x$, $x_1 = f(x)$, $x_{-1} = f^{-1}(x)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_{-2} = f^{-1}(x_{-1})$, и т. д. Обозначим через Orb (x) множество $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ и назовем его орбитой элемента x. Возможны два случая: а) найдется число $n \in \mathbb{N}$, для которого $x_i \neq x_0$ при $i = 0, \ldots, n-1$, а $x_n = x_0$. В этом случае $x_i = x_{n+i}$ для любого $i \in \mathbb{Z}$ и множество $\operatorname{Orb}(x)$ состоит ровно из n точек; б) $x_n \neq x_0$ при всех $n > 0$. Тогда $x_i \neq x_j$ при всех $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{Z}$, и множество $\operatorname{Orb}(x)$ бесконечно.

Нетрудно понять, что орбиты двух точек x и y либо не пересекаются (если $y \notin \operatorname{Orb}(x)$), либо совпадают. Таким образом, все множество X распадается на попарно не пересекающиеся подмножества X_α, каждое из которых является орбитой любой своей точки и, следовательно, инвариантно относительно f. Достаточно определить искомые инволюции(обозначим их через h и k) для каждого X_α в отдельности, выбрав в нем точку x_0 произвольно. Это можно сделать следующим образом: для $x_i \in X_\alpha = \operatorname{Orb}(x_0)$ положим в случае а) $h(x_i) = x_{n+1-i}$, $k(x_i) = x_{n-i}$, в случае б) $h(x_i) = x_{1-i}$, $k(x_i) = x_{-i}$.

1.5. Убедитесь, что разность $x - f(x)$ не может сохранять знак, и воспользуйтесь теоремой Больцано — Коши.

1.6. Последовательность $\{x_n\}$ монотонна. Для убывающей функции утверждение неверно (например, $f(x) = 1 - x$, $x \in [0; 1]$).

1.7. Отсутствие неподвижной точки влечет монотонность последовательности $\{x_n\}$. Далее — как в предыдущей задаче. В комплексном случае неподвижной точки может не быть: рассмотрите отображение f, задаваемое формулой $f(z) = (|z| + 1)\, e^{i(|z|+1)}$ $(z \in \mathbb{C})$.

1.8. Рассмотрите среднее арифметическое образов произвольной точки относительно всех преобразований группы.

1.13. а) Для построения сопрягающего отображения h воспользуйтесь методом решения задачи III.5.12 (см. также задачу 1.16).

б) Пусть $h(\sin x) = \cos h(x)$, где h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$—непрерывная биекция. Докажите, что $h([-1;\ 1]) = [-1;\ 1]$, и используйте строгую монотонность h.

в), д) Подберите линейную функцию h.

г) См. указание к п. б).

1.14. а) Принимая во внимание результаты задач 1.11 и 1.12, убедимся, что раз точка $x = 0$ является точкой минимума и неподвижной точкой отображения f, то в случае, когда $f \infty g$, точка $x = -a/2$ должна играть ту же роль по отношению к g, откуда вытекает необходимость условия $b = (a^2 - 2a)/4$. В случае выполнения этого равенства $g(x)$ приобретает вид $(x + a/2)^2 - a/2$ и нетрудно подобрать линейную функцию, сопрягающую f и g.

б) Сравнивая число неподвижных точек у f и g, приходим к выводу, что если $f \infty g$, то $a \geqslant -1/4$. При всех таких a, отличных от нуля, для $b = 1 \pm \sqrt{1 + 4a}$ (при $a = 0$ положите $b = 0$) существует линейная функция, сопрягающая f и g $(h(x) = (4x - 2)/(b - 2))$. Заметим, что при этом b может оказаться любым, кроме $b = 2$. При $b = 2$ точка максимума отображения g является одновременно неподвижной точкой, чего не бывает у отображений f ни при каком a.

в) Предполагая, что $g \infty \tilde{g}$ и $g \circ h = h \circ \tilde{g}$, приходим к заключению (см. задачу 1.10), что h переводит неподвижные точки отображения $\tilde{g}$ в неподвижные точки отображения g (т. е. $h(0) = 0$, $h(1/3) = 2/3$), а промежутки монотонности для $\tilde{g}$ — в промежутки монотонности для g. Однако на самом деле g монотонно на $[0;\ 1/3]$, а $\tilde{g}$ не монотонно на $[0;\ 2/3] = h([0;\ 1/3])$. Противоречие.

г) Во-первых, из условия $g([0;\ 1]) \subset [0;\ 1]$ вытекает, что $b \in [0;\ 4]$, из условия $f(\Delta) \subset \Delta$ — что $a \leqslant 2$, из условия $g(0) = g(1)$ — что $f(p) = f(q)$, т. е. $p = -q$, а из условия $g(0) = 0$ — что p или q — неподвижная точка f. Кроме того, по тем же причинам, что и в п. б), справедливы ограничения: $a \geqslant -1/4$, $b \neq 2$.

Пусть x_1, x_2 $(x_1 \leqslant x_2)$ — корни уравнения $1 - ax^2 = x$. Рассмотрим случаи: α) $a \in [-1/4;\ 0]$, $\Delta = [-x_1;\ x_1]$; β) $a \in [-1/4;\ 0)$, $\Delta = [-x_2;\ x_2]$; γ) $a \in (0;\ 2]$, $\Delta = [x_1;\ -x_1]$; δ) $a \in (0;\ 2]$, $\Delta = [-x_2;\ x_2]$; A) $b \in [0;\ 1]$; B) $b \in [1;\ 2)$; Г) $b \in (2;\ 4]$. Сравнивая число неподвижных точек у f и g, приходим к выводу, что если $f \infty g$, то случай α) несовместим с B) и Г), β) и γ) несовместимы с A). Рассуждая по аналогии с пунктом в), обнаружим также несовместимость α) с B) и β) с A). В случае δ) не выполняется условие $f(\Delta) \subset \Delta$. Отображения f и g, относящиеся к случаям α) и A) (соответственно β) и B), γ) и Г)), сопряжены при $a = b(b - 2)/4$. Сопрягающее отображение такое же, как в п. б).

1.15. а) Является частным случаем б) при $n = 2$. Сопрягающее отображение — $h(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$. в) Сопрягающее отображение нечетно и при $x > 1$ задается формулой $h(x) = \operatorname{ch} a(x-1)$.

1.16. Очевидно, что разности $f(x) - x$ и $g(x) - x$ сохраняют знак внутри промежутков. Выберем произвольно точки $c_0 \in (a_1; b_1)$ и $d_0 \in (a_2; b_2)$. Пусть $\{c_n\}$ и $\{d_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, — их траектории под действием f и g, т. е. $c_{n+1} = f(c_n)$, $d_{n+1} = g(d_n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Эти последовательности монотонны и сходятся, благодаря непрерывности f и g, к неподвижным точкам, т. е. к концам промежутков, когда $n \to \pm\infty$. Пусть, для определенности, функции f и g возрастают.

Определим гомеоморфизм h: $[a_2; b_2] \to [a_1; b_1]$ следующим образом. Положим $h(a_2) = a_1$, $h(b_2) = b_1$, $h(d_n) = c_n$ $(n \in \mathbb{Z})$. На отрезке $[d_0; d_1]$ зададим h так, чтобы получить гомеоморфизм этого промежутка на $[c_0; c_1]$, а на остальных промежутках $[d_n; d_{n+1}]$ положим $h(x) = f^n(h(g^{-n}(x)))$, где $f^0(x) = x$, $f^1(x) = f(x)$, $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$ при $n > 1$, $f^n = (f^{-n})^{-1}$ при $n < 0$. Проверьте, что определение корректно и что h — гомеоморфизм, сопрягающий f и g.

1.17. Пусть f — гомеоморфизм $[a; b]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots \ldots < x_n = b$ — все его неподвижные точки, $\varepsilon_i(f) = \operatorname{sign}(f(x) - x)$, где x — произвольная точка из $(x_{i-1}; x_i)$, $i = 1, \ldots, n$. С помощью задач 1.11 и 1.12 убедитесь, что если $f \sim g$, то у них одно и то же число неподвижных точек, а наборы чисел $\varepsilon_i(f)$ и $\varepsilon_i(g)$ либо совпадают, либо (в случае убывающей сопрягающей функции) удовлетворяют соотношению $\varepsilon_{n+1-i}(f) = -\varepsilon_i(g)$, $i = 1, \ldots, n$. Для проверки достаточности этого условия для топологической сопряженности f и g заметьте, что f осуществляет гомеоморфизм каждого отрезка $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, на себя. Если $[y_{i-1}; y_i]$ — i-й отрезок, ограниченный неподвижными точками отображения g, то $f|_{[x_{i-1};x_i]} \sim g|_{[y_{i-1};y_i]}$ (см. предыдущую задачу). Проверьте, что в случае выполнения равенства $\varepsilon_i(f) = \varepsilon_i(g)$ сопрягающие отображения h_i удовлетворяют условиям $h(y_{i-1}) = x_{i-1}$, $h(y_i) = x_i$, что позволяет «склеить» из них сопрягающее отображение, заданное на $[a; b]$. Если $\varepsilon_{n+1-i}(f) = -\varepsilon_i(g)$, то это означает, что ограничение g на i-й промежуток (считая от точки a) сопряжено с ограничением f на i-й промежуток, считая от точки b, причем сопрягающий гомеоморфизм меняет ориентацию, что опять позволяет построить единый сопрягающий гомеоморфизм h на $[a; b]$ (причем $h(a) = b$, $h(b) = a$).

1.18. По теореме о монотонной последовательности предел $\lim x_n = c$ существует. Соотношение $x_{n+1} = f(x_n)$, по непрерывности f, приводит к равенству $f(c) = c$. Поведение итераций иллюстрирует рис. 26.

1.19. Для выяснения характера поведения последовательности $\{x_n\}$ полезно изобразить процесс ее построения графически. Для рассматриваемых функций это сделано на рис. 27—32. В случаях а) — г) воспользуйтесь задачей 1.18 (случай а) — рис. 27, случай б) — рис. 28, случай г) — рис. 29). В задаче пункта д) (рис. 30) точка x_1, независимо от положения x_0, попадает на промежуток

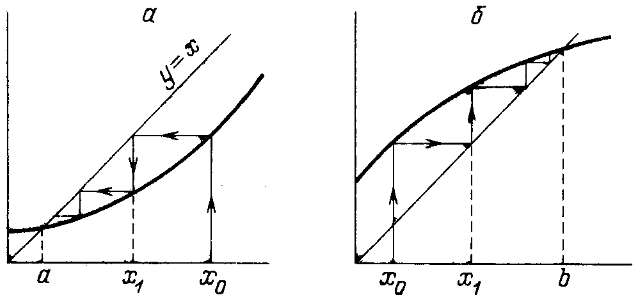

Рис. 26

$[1; \infty)$, на котором можно воспользоваться задачей 1.18. В пункте е) (рис. 31) такую же роль играет промежуток $(0; 1]$.

В задаче ж) (рис. 32) проверьте, что единственной неподвижной точкой является точка $x^* = \sqrt{1+c} - 1$. При $x > x^*$ выполняется неравенство $x^* < f^2(x) = f(f(x)) < x$, а при $x < x^*$ — неравенство $x < f^2(x) < x^*$. Поэтому существуют $\lim x_{2n} = l$ и $\lim x_{2n+1} = l'$, удовлетворяющие соотношениям $f^2(l) = l$, $f^2(l') = l'$, откуда $l = l' = x^*$.

1.20. Решение этих задач аналогично решению задач 1.19. В пунктах б) — г) интервал тех значений x_0, при которых имеется сходимость, имеет вид $[-p; p]$, где $p = \max(|t_1|; |t_2|)$, а t_1, t_2 — корни уравнения $f(t) = t$. В пунктах г), д), з) полезно рассмотреть последовательности $\{x_{2n}\}$, $\{x_{2n+1}\}$ (см. решение задачи 1.19.ж)). В случае отображения из п. з) при $x_0 \in (1/\sqrt{5}; 1/\sqrt{3})$ последовательность $\{x_{2n}\}$ монотонно возрастает, а $\{x_{2n+1}\}$ убывает при n, меньших $n_0 = \min\{n \mid |x_n| > 1/\sqrt{3}\}$. В зависимости от четности n_0 предел равен 1 или -1. При $x_0 \in (-1/\sqrt{3}; -1/\sqrt{5})$ ситуация симметричная. Если $|x_0| = 1/\sqrt{5}$, то $x_{2n} = x_0$, $x_{2n+1} = -x_0$, и предел не существует. Если $|x_0| < 1/\sqrt{5}$, то $x_n \to 0$.

1.21. а) Из соотношения $\dfrac{f(x) - x^*}{x - x^*} \xrightarrow[x \to x^*]{} f'(x^*)$ следует, что $|x_{n+1} - x^*| \leqslant c^n |x_0 - x^*|$, $0 < c < 1$, при x_0 достаточно близких к x^*; б) доказывается аналогично.

в) Рассмотрите отображения $f(x) = 1 - x$ $(x \in \mathbb{R})$ и $f(x) = 1 + \dfrac{1}{4} x^2 (x \in \mathbb{R})$.

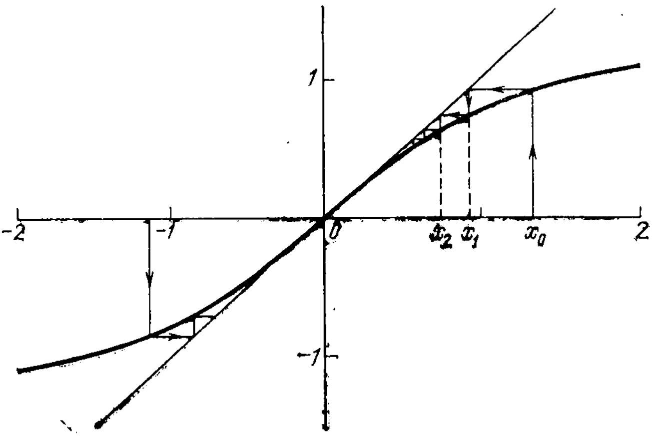

Рис. 27

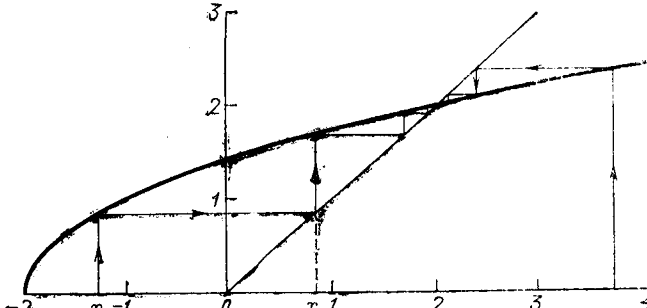

Рис. 28

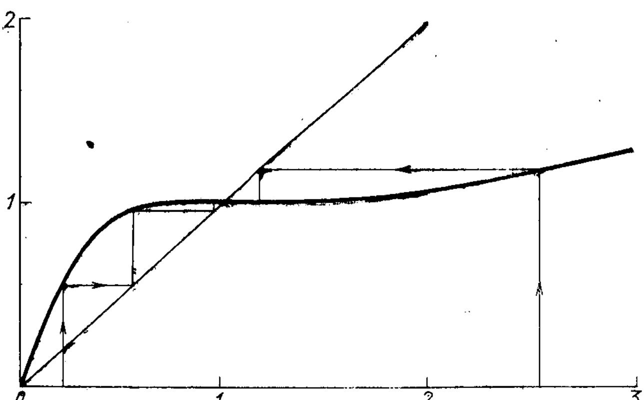

Рис. 29

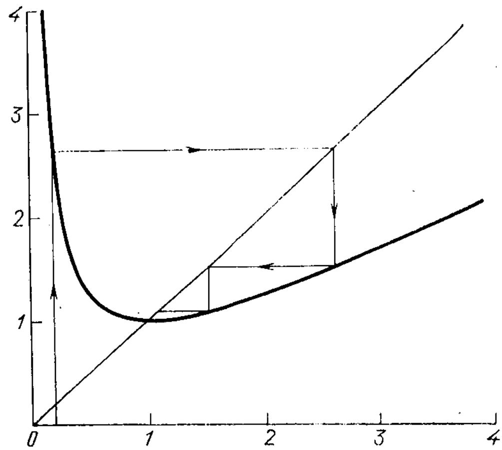

Рис. 30

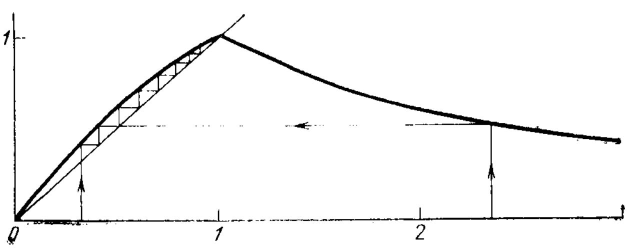

Рис. 31

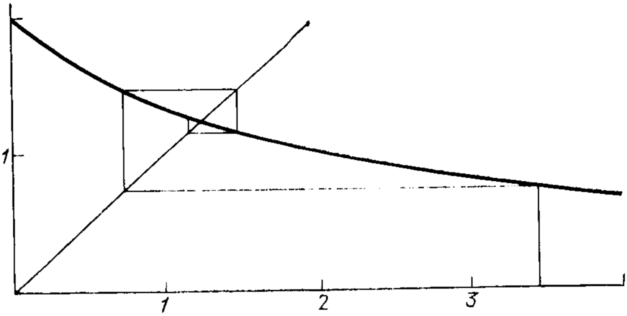

Рис. 32

1.22. Заметим вначале, что если функция f непрерывна, а итерации x_n сходятся к пределу x^*, то x^* — неподвижная точка для f.

а), б) С помощью задачи 1.21 покажите, что при $|a| > 1$ неподвижные точки являются отталкивающими и, следовательно, x_n не имеет предела, если x_n не стабилизируется начиная с некоторого n_0. Рассматривая графики, убедитесь, что при $|a| < 1$ для любого x_0 пределом x_n служит единственная неподвижная точка. Случаи $a = \pm 1$ тривиальны.

Изучим отображение из п. г) (в случае в) можно использовать те же соображения). Пусть $a > 1$. Исследуя знак минимума выпуклой функции $\varphi(x) = a^x - x$, равного $(1 + \ln\ln a)/\ln a$, убеждаемся, что неподвижные точки $\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}$ $(\bar{x} \leqslant \bar{\bar{x}})$ функции f существуют лишь при $a \in (1; e^{1/e}]$. При этом (см. задачу 1.18) $x_n \to \bar{x}$ при $x_0 < \bar{\bar{x}}$, $x_n \to \infty$ при $x_0 > \bar{\bar{x}}$, $x_n \equiv \bar{\bar{x}}$ при $x_0 = \bar{\bar{x}}$.

Если $a < 1$, то f обладает единственной неподвижной точкой x^*. Если $a < e^{-e}$, то $f'(x^*) < -1$, и поэтому (см. задачу 1.21) x^* не может служить пределом x_n, если $x_0 \neq x^*$. При $a \in [e^{-e}; 1)$ докажите, что функция $f^2 = f \circ f$ возрастает и удовлетворяет неравенствам $f^2(x) > x$ при $x < x^*$, $f^2(x) < x$ при $x > x^*$ (для этого рассмотрите $(f^2)'$ и $(f^2)''$), и, пользуясь задачей 1.18, убедитесь, что $x_{2n} = f^{2n}(x_0) \to x^*$, $x_{2n+1} = f^{2n+1}(x_0) \to x^*$ для всех $x_0 \in \mathbb{R}$.

1.23. а) Проверьте, что $N'_\varphi(c) = 0$, и воспользуйтесь задачей 1.21.а).

б) По формуле Тейлора

$$0 = \varphi(c) = \varphi(x) + \varphi'(x)(c - x) + \frac{1}{2}\varphi''(\xi)(c - x)^2,$$

где ξ лежит между x и c, откуда

$$-\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} = c - x + \frac{1}{2}\frac{\varphi''(\xi)}{\varphi'(x)}(c - x)^2.$$

Полагая в этой формуле $x = x_k$ и записывая x_{k+1} в виде $x_k - \varphi(x_k)/\varphi'(x_k)$, получаем соотношение

$$x_{k+1} - c = \frac{1}{2}\frac{\varphi''(\xi)}{\varphi'(x_k)}(x_k - c)^2,$$

откуда вытекает оценка $|x_{k+1} - c| \leqslant L|x_k - c|^2 \leqslant \ldots \leqslant L^{2^k}|x_0 - c|^{2^{k+1}}$.

1.24. Проверьте, что $N'_\varphi(c) = 1 - 1/n$.

1.26. Проверьте, что на промежутке между любыми двумя соседними точками экстремума многочлена P он имеет корень и точку перегиба. Затем воспользуйтесь задачей 1.25.

1.27. Воспользуйтесь тем, что

$$(f^n)'(x_0) = f'\left(f^{n-1}(x_0)\right) f'\left(f^{n-2}(x_0)\right) \ldots f'(x_0) = \\ = \prod_{0 \leqslant j < n} f'(x_j) = (f^n)'(x_k),$$

$k = 0, \ldots, n-1$, и задачей 1.21.

1.28. а) Воспользуемся простым утверждением:

(А) Если I, J — отрезки и $J \subset f(I)$, то найдется такой отрезок $K \subset I$, что $f(K) = J$.

В самом деле, пусть $J = [m; M]$, а $x, y \in I$ — такие точки, что $f(x) \leqslant m$. $f(y) \geqslant M$, и пусть $x < y$. Положив

$$w = \min\{t \in [x; y] \mid f(t) \geqslant M\},$$

$$z = \max\{t \in [x; w] \mid f(t) \leqslant m\}.$$

$$K = [z; w],$$

получим искомый отрезок.

Положим $K_0 = I_0$, а остальные отрезки определим индуктивно: если уже построен отрезок K_{n-1} со свойствами $K_{n-1} \subset K_{n-2}$, $f^{n-1}(K_{n-1}) = I_{n-1}$, то, применяя (А) к отрезкам I_{n-1}, $I_n \subset f(I_{n-1}) = f^n(K_{n-1})$ и отображению f^n, отыщем отрезок $K_n \subset K_{n-1}$, для которого $f^n(K_n) = I_n$.

б) Для любой точки x из непустого пересечения $\bigcap\limits_{n \geqslant 0} K_n$ имеем: $f^n(x) \in I_n$.

1.29. Пусть точки $w < x < y < z$ образуют 4-цикл. Проверьте, что независимо от порядка, в котором эти точки отображаются друг в друга, среди промежутков $[w; x]$, $[x; y]$, $[y; z]$ найдутся два (назовем их I и J), для которых выполняются соотношения $f(I) \supset J$, $f(J) \supset I$. Докажите, что найдется такой отрезок $K \subset I$, не содержащий концов I, что $f^2(K) \supset K$, и воспользуйтесь задачей 1.28.

1.30. Достаточно доказать, что из а) следует в) (импликации в) $\Rightarrow$ б) $\Rightarrow$ а) очевидны). Предположим для определенности, что точки a, b, c, d расположены в порядке $d \leqslant a < b < c$. Обозначим отрезок $[a; b]$ через L, отрезок $[b; c]$ — через R и для произвольного $m \geqslant 2$ положим $I_0 = \ldots = I_{m-2} = R$, $I_{m-1} = L$, $I_m = R'$, где $R' \subset R$ — отрезок, не содержащий концов R. Из условия а) следует, что $f(R) \supset L$, $f(R) \supset R$, $f(L) \supset R'$, и, следовательно, всегда $f(I_n) \supset I_{n+1}$. Благодаря утверждению 1.28, найдется такой отрезок $K_m \subset R'$, что $f^m(K_m) = I_m \supset K_m$. Если применить к f^m утверждение, сформулированное в задаче 1.5.б), то найдется такая точка $x_0 \in K_m$, что $x_m = f^m(x_0) = x_0$. Остается проверить, что $f^n(x) = x_n \neq x_0$ при $0 < n < m$.

Если $x_n = x_0$ при $0 < n < m$, то это означает, что все точки x_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, имеют число n своим периодом. Тогда, поскольку число $m-1$ представимо в виде $pn+q$ $(p \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant q < n)$, $x_{m-1} = x_q \in R'$, что противоречит включению $x_{m-1} \in L$, вытекающему из определения точки x_0. Случай $m = 1$ (т. е. наличие неподвижной точки) тривиален (см. задачу 1.5.а)).

Доказанное утверждение принадлежит Т. Ли и Дж. Йорку [39].

1.31. Рассмотрим отрезки $\Delta_1 = [\cos(2\pi/n);\ \cos(\pi/n)]$ и $\Delta_2 = [\cos(\pi/n);\ 1]$, которые отображение $f = T_n$ взаимно однозначно отображает на отрезок $[-1;\ 1]$. Примем точку $\cos(2\pi/n)$ за c, за b — единственную точку из Δ_1, для которой $f(b) = c$, за a — единственную точку из Δ_2, для которой $f(a) = b$, за d — единицу. Тогда $f(c) = d$ и $c < b < a < d$, откуда следует (см. задачу 1.30), что f имеет циклы любого порядка.

1.32. б) Интересен лишь случай, когда $a > 0$. Раскрывая модули на восьми промежутках, на которые прямая делится точками

$$0,\ \pm 1/a,\ \pm(a-1)/a^2,\ \pm(a+1)/a^2,$$

решите уравнение

$$1 - a|1 - a|1 - a|x|\,|\,| = x$$

и убедитесь, что его решения содержатся среди чисел вида

$$x = (1 + \varepsilon_1 a + \varepsilon_2 a^2)/(1 + \varepsilon_3 a^3), \qquad \text{где} \qquad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 = \pm 1,$$

причем при $1 < a < a_0 = (1+\sqrt{5})/2$ лишь два из них: $p = 1/(1-a)$ и $q = 1/(1+a)$, оказываются корнями уравнения (это, очевидно, неподвижные точки f). При $a \geqslant a_0$ все восемь чисел указанного вида являются корнями, причем если перенумеровать их в порядке возрастания, то $x_1 = p$, $x_6 = q$, а тройка $\{x_2;\ x_4;\ x_6\}$ и $\{x_3;\ x_5;\ x_7\}$ образуют циклы, совпадающие при $a = a_0$. Они отталкивающие, что вытекает из неравенства $|f'(x)| > 1$ при $x = x_i$ $(i = 1, \ldots, 8)$ (ср. с решением задачи 1.21). В случае $-1 < a \leqslant 1$ остается только один корень q, при $a \leqslant -1$ корней нет. Характер графиков для трех значений параметра показан на рис. 33.

1.33. а), б) Поскольку каждая неподвижная точка отображения f является неподвижной точкой любой его итерации f^n, то многочлен четвертой степени $f^2(x) - x$ делится на квадратный трехчлен $f(x) - x$. В результате деления получается многочлен $a^2x^2 - ax + 1 - a$, имеющий вещественные корни при $a \geqslant 3/4$. Если $a \leqslant 3/4$, то неподвижные точки f^2 сводятся к двум неподвижным точкам f. При $a > 3/4$ имеются две точки x_1 и x_2, удовлетворяющие соотношениям $f^2(x) = x$, $f(x) \neq x$. Легко понять, что $f(x_1) = x_2$, $f(x_1) = x_1$, т. е $\{x_1;\ x_2\}$ — 2-цикл. Характер графика f^2 при $a < 3/4$, $a = 3/4$ и $a > 3/4$ отражен на рис. 34.

Поскольку $(f^2)'(x_1) = f'(x_1)f'(x_2) = (-2ax_1)(-2ax_2) = 4a^2x_1x_2 = 4(1-a)$, то в интервале $3/4 < a < 5/4$ цикл окажется притягивающим, а при $a > 5/4$ — отталкивающим (см. задачу 1.27).

в) Докажем, что при $a \leqslant 5/4$ отображение f не имеет 4-циклов. Случай $a \leqslant 1$ почти очевиден, и мы будем считать далее, что $a > 1$.

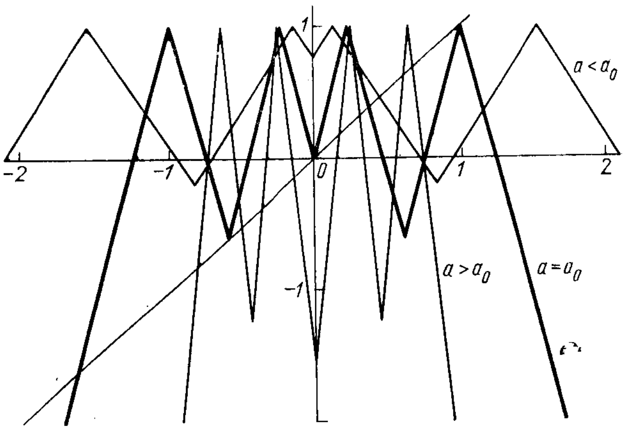

Рис. 33

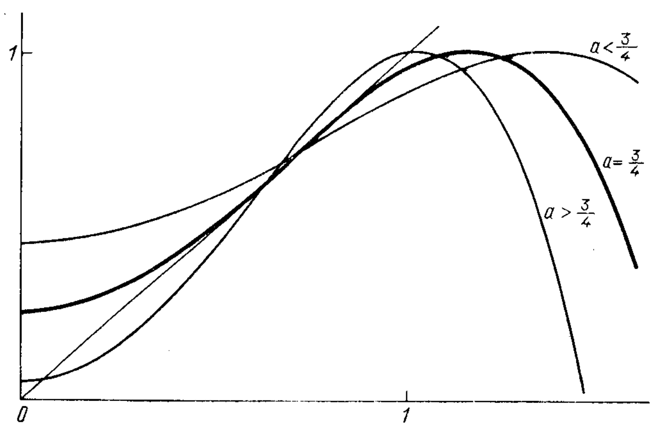

Рис. 34

Положим $P(x) = f^2(x) = 1 - a(1 - ax^2)^2$ $(x \in \mathbb{R})$. 4-циклу f соответствуют два 2-цикла P. Эти 2-циклы мы и будем искать. Найти 2-цикл отображения P означает найти решение системы

$$\begin{cases} y = P(x), \\ x = P(y), \end{cases} \tag{1}$$

удовлетворяющее условию $x \neq y$.

Пусть L, L_s — графики функций $y = P(x)$, $x = P(y)$ соответственно (рис. 35—37). Ясно, что кривые L и L_s симметричны друг

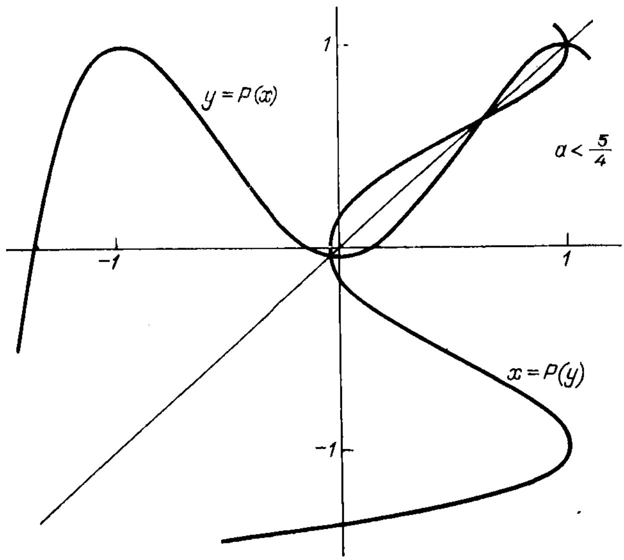

Рис. 35

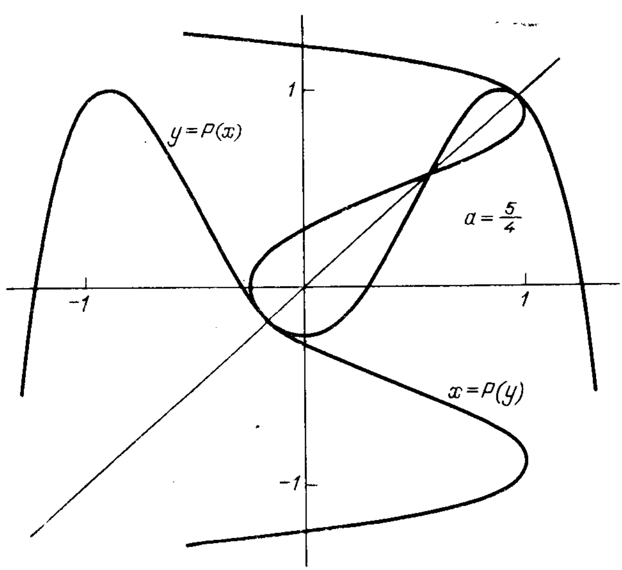

Рис. 36

другу относительно прямой $y = x$ и по аккуратно нарисованным эскизам этих графиков нетрудно получить интересующий нас ответ.

Приведем теперь строгое рассуждение. Убедитесь, что для проверки отсутствия у системы (1) нетривиальных решений достаточно доказать отсутствие решений с абсциссами из промежутков

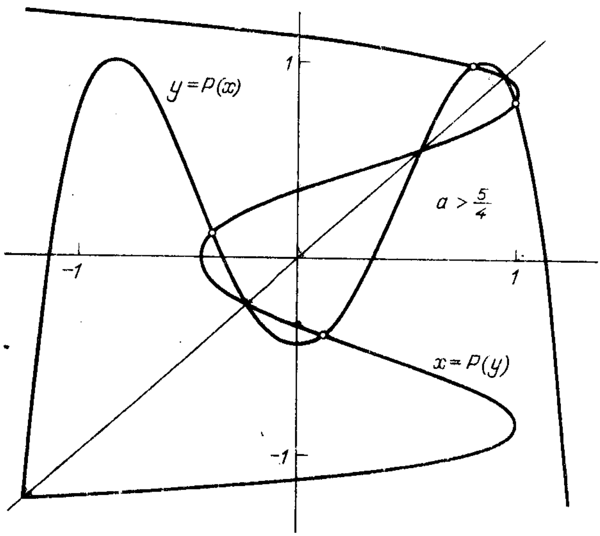

Рис. 37

$[1 - a;\ x_0]$, $[x_1;\ 1]$, где x_0, x_1 $(x_0 < x_1)$ — точки, образующие 2-цикл отображения f. Рассмотрим сначала промежуток $[x_1;\ 1]$. Пусть Q — определенная на $[x_1;\ 1]$ функция, график которой совпадает с участком кривой L_s. Иными словами, Q — функция, обратная к сужению P на промежуток $[1/\sqrt{a},\ x_0]$. Наша цель — убедиться, что $P(x) \neq Q(x)$ при $x \in (x_0;\ 1]$. Заметим прежде всего, что

$$P'(x) < 0,\quad P''(x) < 0,\quad P'''(x) < 0$$

при $x > 1/\sqrt{a}$ и, кроме того, $|P'(x_0)| \leqslant 1$ (именно здесь играет роль условие $a \leqslant 5/4$).

Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции и обозначая $Q(x)$ через t, мы получаем:

$$Q'(x) = \frac{1}{P'(t)},\quad Q''(x) = -\frac{P''(t)}{(P'(t))^3},\quad Q'''(x) = -\frac{P'''(t)}{(P'(t))^4} + 3\frac{(P''(t))^2}{(P'(t))^5}.$$

Очевидно, что

$$P(x_1) = Q(x_1) = x_1,\quad P'(x_1) - Q'(x_1) \geqslant 0,$$

$$P''(x_1) - Q''(x_1) = P''(x_1) + \frac{P''(x_1)}{P'(x_1)^3} \geqslant 0.$$

Убедимся, наконец, что $P'''(x) - Q'''(x) > 0$ при $x \in (x_1;\ 1)$. В самом деле, поскольку $|P'(t)| \leqslant 1$ и $at^2 \geqslant 1$ при $x \in (x_1;\ 1)$, мы имеем

$$P'''(x) - Q'''(x) = -24a^3x - \frac{24a^3t}{|P'(t)|^4} + 3\frac{(4a^2(3at^2-1))^2}{|P'(t)|^5} \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{48a^3}{|P'(t)|^4} + 3\frac{(8a^2)^2}{|P'(t)|^5} > 0.$$

Из доказанного следует, что разность $P(x) - Q(x)$ строго возрастает на $[x_1;\ 1]$. Таким образом, система (1) не имеет решений с абсциссами из промежутка $(x_1;\ 1]$. Тогда она вообще не имеет решений с положительными абсциссами. Если же допустить, что, $(\bar{x};\ \bar{y})$ — такое решение системы (1), что $1 - a < \bar{x} < x_0$, то пара точек $(f(\bar{x});\ f(\bar{y}))$ также будет решением системы (1), что, однако, невозможно, поскольку $f(\bar{x}) > f(1-a) > 0$ (при проверке последнего неравенства снова используется условие $a \leqslant 5/4$).

Если $a > 5/4$, то $P'(x_0) < -1 < Q'(x_0) < 0$ и существование нетривиальных решений системы (1) следует из соображений, связанных с теоремой Больцано — Коши.

Заметим, что при $a = 2$ система (1) имеет 12 нетривиальных решений (рис. 38), которые образуют три 4-цикла (точки, порождающие один цикл, помечены на рисунке одинаковыми значками).

г) *) В силу утверждения п. а) и задачи 1.29, при $a \leqslant 3/4$ отображение f циклов не имеет. Пусть $a > 0$ и p, q — неподвижные точки f. С помощью эскиза графика $y = f^3(x)$ нетрудно заметить, что при возрастании параметра a число неподвижных точек отображения f^3 может лишь увеличиваться (проследите за перемещением точек, отвечающих экстремумам f^3, на рис. 39, а затем постарайтесь провести строгое рассуждение). Проверьте, что не совпадающая с p и q неподвижная точка отображения f^3 порождает 3-цикл. При $a \leqslant 3/4$ неподвижные точки f^3 — только p и q, а при больших значениях a отображение f^3 имеет восемь неподвижных точек. Таким образом, существует минимальное значение a_0 параметра, при котором число неподвижных точек f^3 больше двух. Пусть

$$a = a_0,\quad f^3(x_1) = x_1,\quad x_2 = f(x_1),\quad x_3 = f(x_2),\quad x_1 \neq p,\ q.$$

Точки x_1, x_2, x_3 образуют 3-цикл, и каждая из них является корнем уравнения $f^3(x) = x$, причем x_1, x_2, x_3 обязательно должны быть кратными корнями, так как в этих точках графики $y = f^3(x)$ и $y = x$ имеют касание. Принимая во внимание число корней и степень многочлена $P(x) = f^3(x) - x$, делаем заключение, что $P(x) =$

---

*) В решении этой части задачи принимал участие Р. Сибилев.

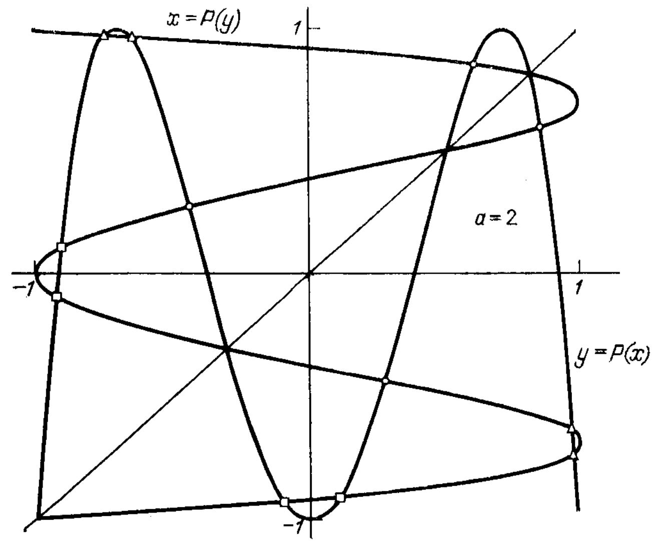

Рис. 38

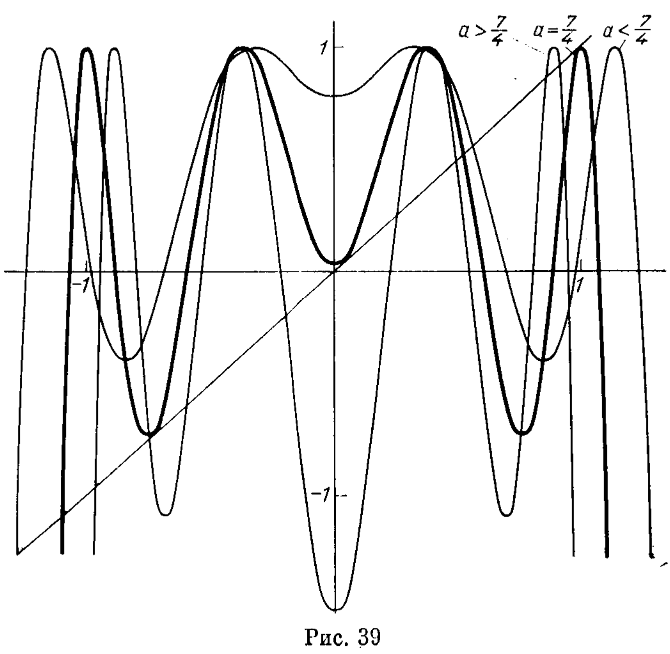

Рис. 39

$= A(x-p)(x-q)(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x-x_3)^2$. Разделив $P(x)$ на $x - f(x) = a^2x^2 + x - 1 = a^2(x-p)(x-q)$, придем к равенству

$$-a^6x^6 + a^5x^5 + (3a^5 - a^4)x^4 + (a^3 - 2a^4)x^3 + (3a^3 - 3a^4 - a^2)x^2 +$$
$$+ a^3 - 2a^2 + a - 1 = -a^6(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x-x_3)^2 =$$
$$= -a^6(x^3 + bx^2 + cx + d)^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему из шести уравнений относительно a, b, c, d. Исключение b, c и d из этой системы приводит к уравнению $(4a-7)^2 = 0$, откуда следует, что a должно равняться $7/4$, а проверка подтверждает, что в этом случае система совместна. Таким образом, при $a < 7/4$ 3-циклов нет, при $a = 7/4$ отображение f^3 имеет 5 неподвижных точек (p, q и 3 точки, образующие цикл), при $a > 7/4$ f^3 имеет 8 неподвижных точек, а именно p, q и еще шесть точек, каждая из которых, как уже отмечалось, должна входить в 3-цикл. Следовательно, 3-циклов при $a > 7/4$ ровно два.

1.34. Воспользуйтесь задачей 1.14.г).

1.35. Пусть L — кривая, симметричная графику отображения f над промежутком $[x_0; 1]$ относительно прямой $y = x$ и

$$\gamma(x) = (f(x), x), \quad x_0 \leqslant x \leqslant 1,$$

— ее параметризация. Убедитесь, что в силу условий на односторонние производные найдется такое число $\delta > 0$, что точки $\gamma(x)$ лежат под графиком f, если $x_0 < x < x_0 + \delta$. С другой стороны, точка $\gamma(1)$ лежит выше графика f (или на нем), и поэтому график f и кривая L пересекаются. Абсцисса точки пересечения порождает 2-цикл.

1.36. Рассмотрите отображение $f = g^{2^{n-1}}$ и докажите, что f имеет неподвижную точку, удовлетворяющую условию предыдущей задачи. Проверьте, что точки 2-цикла отображения f порождают 2^n-цикл отображения g. Для построения примера рассмотрите определенную на $[0; 1]$ непрерывную функцию, графиком которой является ломаная с вершинами в точках $\left(1 - \frac{1}{n};\ 1 - \frac{7 + 6(-1)^n}{16n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$

1.37. Пусть $g = f^n$. Это отображение также принадлежит классу $S(\Delta)$ (см. задачу VII.2.24.в)). Предположение о том, что равенство $g(x) = x$ справедливо для бесконечного числа точек, влечет, по теореме Лагранжа, выполнение равенства $g'(x) = 1$ также на бесконечном множестве. Следствием этого является наличие у функции $|g'|$ бесконечного множества точек локального минимума. Из «принципа минимума модуля» (задача VII.2.24.е)) вытекает, что g, а значит и f, имеет бесконечное число критических точек.

1.38. Существуют такие точки u и v, что $x < u < y < v < z$ и $g'(u) = g'(v) = 1$. Утверждение следует теперь из «принципа минимума модуля» (задача VII.2.24.e)) для промежутка $[u; v]$.

1.39. Пусть $x \in (a; b)$ — притягивающая неподвижная точка для $g = f^n$ $(n \in \mathbb{N})$ (если $x = a$ или $x = b$, то доказывать нечего). Тогда $|g'(x)| \leqslant 1$.

а) Пусть сначала $|g'(x)| < 1$. Рассмотрим максимальный промежуток $\langle r; s\rangle$, содержащий x, траектория $\{g^m(y)\}$ любой точки y которого притягивается к x. Если $r > a$, то $g^m(r) \notin (r; s)$ ни при каком m (следствие максимальности промежутка), и если $s < b$, то $g^m(s) \notin (r; s)$ при $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, упомянутый промежуток имеет вид $[a; s)$, $(r; b]$, $[a; b]$ или $(r; s)$. Первые три возможности сразу приводят к доказываемому утверждению. В четвертом случае из очевидных соотношений $g((r; s)) \subset (r; s)$, $g(r)$, $g(s) \notin (r; s)$ следует, что $g(r)$, $g(s) \in \{r; s\}$. Предположение, что $g(r) = r$, $g(s) = s$, приводит, благодаря утверждению 1.38, к неравенству $g'(x) > 1$, что невозможно. Если $g(r) = s$, $g(s) = r$, то $g^2(r) = r$, $g^2(s) = s$, что невозможно по аналогичной причине. Таким образом, мы приходим к выводу, что $g(r) = g(s)$, но тогда, по теореме Ролля, в интервал $(r; s)$ попадает критическая точка p отображения g, которая притягивается к x. Поскольку $g = f^n$, точка p должна иметь вид $f^k(c)$, $k \in \mathbb{N}$, откуда сразу следует доказываемое утверждение.

б) Пусть теперь $|g'(x)| = 1$. Заменяя, если нужно, g на g^2, мы можем считать, что $g'(x) = 1$. Пусть $(r; s)$ — максимальный интервал, содержащий x и не содержащий других неподвижных точек отображения g. Он непуст, так как множество неподвижных точек g конечно (задача 1.37). Тогда либо $g(y) > y$ при всех $y \in (r; x)$, либо $g(y) < y$ при $y \in (x; s)$, так как в противном случае в каждом из интервалов $(r; x)$, $(x; s)$ нашлось бы бесконечное множество точек t, в которых $g'(t) > 1$, что ведет к противоречию с принципом минимума модуля (VII.2.24.e)) и конечностью множества критических точек отображения g.

Допустим, для определенности, что $g(y) > y$ при $y \in (r; x)$. Если $r = a$ и g возрастает на $[a; x]$, то траектория точки a притягивается к x (см. задачу 1.18). Если $r = a$ и g не монотонна на $[a; x]$, то некоторая критическая точка p отображения g попадает в интервал $(a; x)$, и на отрезке $[p; x]$ функция g возрастает. Тогда траектория $\{g^m(p)\}$ притягивается к x. Если $r > a$, то $g(r) = r$, и в интервале $(r; x)$ найдется, по теореме Лагранжа, такая точка z, что $g'(z) = 1$. Учитывая, что $g(z) > z$, $g(x) = x$, $g'(x) = 1$, и снова пользуясь принципом минимума модуля, приходим к выводу, что векторная критическая точка p лежит между z и x и притягивается к x.

Рассуждение завершается так же, как в п. а). Доказанное утверждение принадлежит Д. Зингеру [43]*).

1.40. Пусть $p<0$ — неподвижная точка f, $q=-p$. Тогда при $a\leqslant 2$ справедливо включение $f([p;\ q])\subset[p;\ q]$, причем p — отталкивающая неподвижная точка, $f^n(q)=p$ при $n\geqslant 1$ и, в силу утверждений VII.2.25.а), 1.39, притягивающий цикл обязательно притягивает траекторию точки 0. При $a=2$ отображение f есть многочлен Чебышёва T_2 и можно воспользоваться задачами 1.31 и 1.39.

1.41.**) а) Выберем направление обхода окружности так, чтобы при таком обходе неподвижная точка t и точки цикла встречались в порядке $t\to a\to b\to c\to t$, где $\varphi(a)=b$, $\varphi(b)=c$, $\varphi(c)=a$. Если x и y — две точки окружности, то через $[x;\ y]$ будем обозначать дугу, обход которой в выбранном направлении начинается с точки x и кончается точкой y. Будем говорить, что выполняется условие A_0, если $\varphi([t;\ a])\supset[a;\ b]$, и условие A_1, если $\varphi([t;\ a])\supset[b;\ a]$ (очевидно, что одно из этих условий всегда выполняется). Будем записывать это символически следующим образом: $A_0=(\varphi([t;\ a])\supset[a;\ b])$, $A_1=(\varphi([t;\ a]\supset$ $\supset[b;\ a])$. Точно так же всегда справедливо одно из двух условий в каждой из следующих пар:

$$B_0=(\varphi([a;\ b])\supset[b;\ c]),\ B_1=(\varphi([a;\ b])\supset[c;\ b]);$$
$$C_0=(\varphi([b;\ c])\supset[c;\ a]),\ C_1=(\varphi([b;\ c])\supset[a;\ c]);$$
$$D_0=(\varphi([c;\ t])\supset[t;\ a]),\ D_1=(\varphi([c;\ t])\supset[a;\ t]).$$

Всегда справедливо по крайней мере одно из шестнадцати высказываний вида

$$A_{\varepsilon_1}\ \&\ B_{\varepsilon_2}\ \&\ C_{\varepsilon_3}\ \&\ D_{\varepsilon_4},\qquad \varepsilon_i=0,\ 1.$$

Проследите, что каждый раз среди промежутков с концами t, a, b, c найдутся либо два промежутка I, J со свойствами: $\varphi(I)\supset J$, $\varphi(J)\supset I\cup J$, либо три промежутка I, J, K со свойствами $\varphi(I)\supset J$, $\varphi(J)\supset K$, $\varphi(K)\supset I\cup K$. Модифицируя рассуждения, использовавшиеся при решении задачи 1.30, проверьте, что всегда найдется точка x, итерации которой последовательно посещают промежутки

$$\underbrace{J,\ J,\ \ldots,\ J}_{n-1},\ I,\ J\quad\text{или}\quad\underbrace{K,\ K,\ \ldots,\ K}_{n-2},\ I,\ J,\ K$$

и $\varphi^n(x)=x$, причем точка $\varphi^k(x)$ не совпадает с x при $k<n$.

---

*) Обширный материал об итерациях преобразований отрезка содержится в книге [33].

**) Решение этой задачи сообщено нам Ю. Хохловым.

б) Параметризуя окружность обычным образом, отождествим ее с промежутком $[0;\ 2\pi)$. Рассмотрите отображение f: $[0;\ 2\pi) \to [0;\ 2\pi)$, задаваемое формулой

$$f(t) = \begin{cases} t + 2\left|\dfrac{\pi}{3} - t\right|, & 0 \leqslant t \leqslant 2\pi/3, \\ \left(t + \dfrac{2\pi}{3}\right) \operatorname{mod} 2\pi, & 2\pi/3 \leqslant t < 2\pi, \end{cases}$$

и перенесите его на окружность. Точке $\pi/3$ отвечает неподвижная точка окружности, точкам 0, $2\pi/3$, $4\pi/3$ — 3-цикл, в то же время 2-цикла, как легко видеть, нет.

1.42. б) Проверьте, что из неравенства $m \leqslant x - x_0 < m + 1$ $(m \in \mathbb{Z})$ следует, что

$$m \leqslant f^n(x) - f^n(x_0) < m + 1 \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}.$$

в) Пусть $\varphi^m(z_0) = z_0 = e^{2\pi i x_0}$. Тогда $f^m(x_0) = x_0 + k$ для некоторого целого k. Воспользуйтесь тем, что при $n = lm + r$ $(l \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant r < m)$ $f^n(x_0)$ можно представить в виде $f^r(x_0) + lk$, и докажите, что $\alpha = k/m$.

г) В этом случае $f^m(x) - x$ не может быть целым числом ни при каких $m \geqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда при фиксированном m и некотором $k \in \mathbb{Z}$ выполняется неравенство

$$k < f^m(x) - x < k + 1.$$

Полагая в этом неравенстве x равным 0, $f^m(0)$, ..., $f^{(l-1)m}(0)$ и складывая получившиеся неравенства, получим, что

$$lk < f^{lm}(0) < l(k+1) \qquad (l \in \mathbb{N})$$

и, в частности,

$$k < f^m(0) < k + 1.$$

Из этих неравенств следует, что

$$\left|\frac{f^{lm}(0)}{lm} - \frac{f^m(0)}{m}\right| < \frac{2}{m}.$$

Поменяв ролями l и m и сложив получившиеся неравенства, получим:

$$\left|\frac{f^m(0)}{m} - \frac{f^l(0)}{l}\right| < \frac{2}{m} + \frac{2}{l},$$

откуда сразу следует существование предела α при $x_0 = 0$ и, значит, при всех $x \in \mathbb{R}$.

Остается проверить, что при рациональном α некоторая степень φ имеет неподвижную точку.

Пусть сначала $\alpha = 0$. Если предположить, что неподвижной точки нет, то $\{f^n(0)\}$ — монотонная последовательность (скажем, возрастающая). Предположение, что $f^m(0) \geqslant 1$ для некоторого $m \geqslant 1$ влечет $f^{km}(0) \geqslant k$, $k \in \mathbb{N}$, что противоречит соглашению $\alpha = 0$. Но тогда последовательность $\{f^m(0)\}$ ограничена, и ее предел оказывается неподвижной точкой, вопреки предположению.

Случай $\alpha = k/m$ сводится к предыдущему переходом к функции $g(x) = f^m(x) - k$, задающей отображение φ^m.

д) Покажите, что f_1 *и* f_2 отличаются на целое число.

§ 2. Преобразования с инвариантной мерой

2.1. Достаточно сосчитать меры прообразов интервалов (или дуг).

2.2. «Преобразование пекаря» удобно представлять как композицию отображений T_1, T_2, представленных на рис. 40 (оправ-

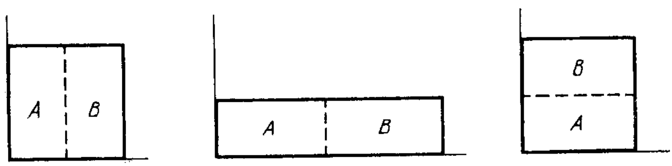

Рис. 40

дывающем название этого преобразования). Сохранение площади каждым из преобразований T_1, T_2 очевидно.

2.3. а) Если $T(x_1; x_2) = T(x_1'; x_2')$, то $z_i = a_{i1}x_1' + a_{i2}x_2 - (a_{i1}x_1' + a_{i2}x_2') \in \mathbb{Z}$ $(i = 1,2)$. Решая эту систему, мы получим (благодаря условию $|\det A| = 1$), что $x_1 - x_1' \in \mathbb{Z}$, $x_2 - x_2' \in \mathbb{Z}$, но это возможно лишь при $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$.

б) Рассмотрим линейное преобразование $\widetilde{T}_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, задаваемое матрицей A. Оно обратимо и сохраняет меру Лебега. В частности, $\lambda_2(\widetilde{T}^{-1}(B)) = \lambda_2(B)$ для всех $B \subset X$. Пересечения $C_v = \widetilde{T}_A^{-1}(B) \cap (X + v)$, где $v \in \mathbb{Z}^2$, непусты лишь для конечного множества векторов v, а их сдвиги лежат в X, попарно не пересекаются (см. п. а)) и составляют множество $T^{-1}(B)$. См. также решение следующей задачи.

2.4. Рассмотрите меру $\nu = T_A\lambda_2$ на $X = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Она инвариантна, как и мера Лебега, относительно сдвигов (все суммы рассматриваются по модулю единица):

$$\nu(B + y) = \nu(B + T_A(x)) = \lambda_2\left(T_A^{-1}(B + T_A(x))\right) =$$
$$= \lambda_2\left(T_A^{-1}(B) + x\right) = \lambda_2\left(T_A^{-1}(B)\right),\quad B \subset X,\ y \in X. \quad (1)$$

Поэтому (см. утверждение перед формулировкой задачи) $\nu = c\lambda$. Полагая в (1) $B = X$, получаем, что $c = 1$. Таким образом, $\lambda_2\left(T_A^{-1}(B)\right) = \lambda_2(B)$.

2.5. Достаточно проверить, что $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ для всех множеств A вида $(0; a]$, $0 < a \leqslant 1$. Поскольку

$$T^{-1}(A) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{k+a}; \frac{1}{k}\right],$$

мера прообраза равна

$$\sum \frac{1}{\ln 2} \int\limits_{1/(k+a)}^{1/k} \frac{dx}{1+x} =$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \sum (\ln(1+k) - \ln k + \ln(1+k+a) - \ln(k+a)) =$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \lim \left(\ln(1+a) - \ln\left(1 + \frac{a}{n+1}\right)\right) = \frac{\ln(1+a)}{\ln 2} =$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \int\limits_0^a \frac{dx}{1+x} = \mu(A).$$

2.6. а) Воспользуемся топологической сопряженностью T_n и пилообразного отображения f_n (задача 1.15.б)), которое сохраняет меру Лебега (это очевидно). Найдем образ меры Лебега относительно сопрягающего отображения: $\mu = h\lambda$, где $h(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$ $(x \in [-1; 1])$ (он, очевидно, и будет искомой инвариантной мерой). Для промежутков имеем:

$$\mu([a; x]) = \lambda\left([h^{-1}(a); h^{-1}(x)]\right) = \frac{2}{\pi}(\arcsin x - \arcsin a),$$

откуда $d\mu = \dfrac{2dx}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$. Понятно, что меры λ и μ можно умножить на произвольную константу.

б) Используйте задачу 1.15. в).

2.7. Для доказательства достаточности рассмотрите меру $\nu(A) = \frac{1}{n}\left(\mu(A) + \ldots + \mu\left(T^{n-1}(A)\right)\right)$, где μ — мера, инвариантная относительно T^n.

2.8. Пусть сначала T возрастает. Обозначим через F множество неподвижных точек отображения T, через G — дополнение F. Если $\Delta = (\alpha; \beta)$ — какой-нибудь максимальный интервал из G, то $\alpha, \beta \in F$ и, очевидно, $T(\Delta) = \Delta$. Поэтому достаточно доказать утверждение для каждого такого интервала.

Пусть c — произвольная точка из Δ. Если положить $x_n = T^n(c)$, $n \in \mathbb{Z}$ (T обратимо), то отрезки Δ_n, имеющие x_n и x_{n+1} своими концами, образуют покрытие Δ. Для любой положительной функции $h_0 \in \mathscr{L}^1(\Delta_0)$ определим меру $\nu_0 = h_0 dx$ на Δ_0 и продолжим ее нулем на $\Delta \setminus \Delta_0$. Меры $\nu_n = T^n \nu_0$ отличны от нуля на Δ_n и также абсолютно непрерывны. Равенство $\nu = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} \nu_n$ определяет искомую меру (бесконечную).

Если T убывает, то рассмотрите T^2 и воспользуйтесь утверждением 2.5.

2.9. Пусть T имеет притягивающий n-цикл. Тогда отображение $S = T^n$ имеет притягивающую неподвижную точку x^*. Пусть $f > 0$ — плотность некоторой меры μ. Покажем, что найдется такое множество A, что $S^{-1}(A) \supset A$ и $\mu(S^{-1}(A) \setminus A) > 0$. Эти соотношения противоречат либо инвариантности относительно S, либо конечности меры μ.

Если $S'(x^*) > 0$, то S монотонно возрастает в некоторой окрестности x^*, и тогда найдутся такие точки c и d, что $x^* \in (c;\, d)$ и $A = (c;\, d)$ удовлетворяет упомянутому выше условию. Если $S'(x^*) < 0$, то заменим S на S^2. Если $S'(x^*) = 0$, то при $|x - x^*| < \varepsilon$ (ε достаточно мало) $|S(x) - S(x^*)| \leqslant \frac{1}{2}|x - x^*|$, откуда следует существование искомого множества A.

Отсутствие меры с требуемыми свойствами у отображения T следует из задачи 2.7.

2.10. а) Пусть сначала $a > 0$. Отображение H_a, рассматриваемое на каждой полупрямой $(-\infty;\, 0)$ и $(0;\, +\infty)$ в отдельности, топологически сопряжено со сдвигом $x \mapsto x + \ln a$ на $\mathbb{R}$ (сопрягающий гомеоморфизм $h(t) = -e^t$ в первом случае и $h(t) = e^t$ во втором). Проверьте, что образом меры Лебега относительно h служит мера на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, задаваемая плотностью $f(x) = 1/|x|$, и что эта мера инвариантна относительно всех H_a.

б) Докажем, что в этом случае искомой меры μ не существует. Поскольку μ должна быть, в частности, инвариантной относительно сдвигов, ее значения на промежутках должны быть пропорциональны длине, т. е. $\mu = k\lambda$ ($k > 0$). Но такая мера, очевидно, не инвариантна относительно гомотетий (случаи $k = 0$ или $k = \infty$ приводят к тривиальным мерам).

2.11. Воспользовавшись топологической сопряженностью этих преобразований с подходящими преобразованиями из задачи 2.10, проверьте, что в случае а) инвариантная мера имеет вид $\dfrac{dx}{x\,|\ln x|}$, а в случае б) нетривиальной инвариантной меры нет.

2.12. а) Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mu(A) = 0$. Тогда и $\lambda_n(A)$, $\lambda_n(A + y)$, $\mu(A + y)$ $(y \in \mathbb{R}^n)$ равны нулю.

б) Квазиинвариантность μ означает существование такой функции f на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, что для всех $y \in \mathbb{R}^n$ и $X \subset \mathbb{R}^n$

$$\mu(y+A) = \int_A f(x;\, y)\, d\mu(x) \tag{1}$$

и $f(x;\, y) > 0$ при почти всех x, y. Достаточно проверить равносильность равенств $\mu(A) = 0$ и $\lambda_n(A) = 0$ лишь для ограниченных множеств. Проинтегрируем равенство (1) по такому множеству Y, что $\lambda_n(Y) > 0$. Пусть χ_E обозначает характеристическую функцию множества E. С одной стороны,

$$I = \int_Y \mu(y+A)\, dy = \int_Y dy \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x-y)\, d\mu(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^n} \chi_Y(y)\, \chi_A(x-y)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} dt \int_{\mathbb{R}^n} \chi_Y(x-t)\, \chi_A(t)\, d\mu(x) =$$

$$= \int_A dt \int_{\mathbb{R}^n} \chi_Y(x-t)\, d\mu(x).$$

С другой стороны,

$$\int_Y \mu(y+A)\, dy = \int_Y dy \int_A f(x;\, y)\, d\mu(x) = \int_A d\mu(x) \int_Y f(x;\, y)\, dy.$$

Приравнивая правые части этих равенств, заключаем, что из $\lambda_n(A) = 0$ следует, что $I = 0$, а тогда, так как $f(x;\, y) > 0$ и $\lambda_n(Y) > 0$, получаем, что и $\mu(A) = 0$.

По теореме Радона — Никодима мера μ задается некоторой плотностью g. Покажем, что множество $e = \{x \mid g(x) = 0\}$ имеет нулевую меру Лебега. Допуская противное, рассмотрим семейство трансляций $e + x_k$ множества e с помощью векторов x_k, образующих счетное плотное подмножество в $\mathbb{R}^n$. Множество $C = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_k (e + x_k)$ имеет нулевую меру Лебега (см. задачу VIII.1.23), а тогда и $\mu(C) = 0$. Но также и $\mu(e + x_k) = \mu(e) = 0$, т. е. $\mu(\mathbb{R}^n) = 0$. Противоречие.

2.13. а) Если $f \geqslant 0$, то

$$A \mapsto \nu(A) = \int_{T^{-1}(A)} f(x)\, dx \qquad (A \subset X)$$

— абсолютно непрерывная мера на X, и существование f^* вытекает из теоремы Радона — Никодима. Если f произвольна, то ее можно разложить в разность неотрицательных функций.

б) Пусть $f \geqslant 0$, U и V — такие окрестности точек x и $y = T(x)$, что $U = T^{-1}(V)$. Тогда

$$\int\limits_U f(x)\,dx = \int\limits_V f(y)\,dy = \int\limits_U f(T(x))\,|\det T'(x)|\,dx.$$

Применяя «дифференцирование по области», т. е. деля обе части на $\lambda_n(U)$ и переходя к пределу при условии, что окрестность U стягивается в точку x, получим требуемое.

в) Доказывается аналогично.

г) Проверьте равенство (1) для множеств $A = [0;\ a]$, $0 \leqslant a \leqslant 1$.

2.14. а)

$$d_i = \frac{1}{\lambda(\Delta_i)} \int\limits_{\Delta_i} f_d(x)\,dx = \frac{1}{\lambda(\Delta_i)} \int\limits_{T^{-1}(\Delta_i)} f_c(x)\,dx =$$

$$= \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{c_j \lambda\left(\Delta_j \cap T^{-1}(\Delta_i)\right)}{\lambda(\Delta_i)},$$

откуда

$$p_{ij} = \frac{\lambda\left(\Delta_j \cap T^{-1}(\Delta_i)\right)}{\lambda(\Delta_i)} = n\lambda\left(\Delta_j \cap T^{-1}(\Delta_i)\right).$$

в) Заметим, что если $d = \pi c$, то

$$\sum_i d_i = \sum_i \sum_j p_{ij} c_j = \sum_j c_j \sum_i p_{ij} = \sum_j c_j.$$

Поэтому преобразования

$$u \mapsto \pi u \quad \text{и} \quad u \mapsto v^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{0 \leqslant k < m} \pi^k u$$

отображают компактное множество

$$K = \left\{ u \in \mathbb{R}^n_+ \;\middle|\; \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} u_i = C \right\} \qquad (C > 0)$$

в себя. Следовательно (для фиксированного $u \in \mathbb{R}^n_+$, $u \neq 0$), последовательность $\{v^{(m)}\}$ обладает предельной точкой $v = \lim v^{(m_i)}$. Поскольку π непрерывно,

$$\pi v = \lim_i \pi v^{(m_i)} = \lim_i \frac{1}{m_i} \sum_{1 \leqslant k \leqslant m_i} \pi^k u =$$

$$= \lim_i \left(v^{(m_i)} + \frac{1}{m_i}\left(\pi^{m_i} u - u\right)\right) = \lim_i v^{(m_i)} = v = (v_1;\ v_2;\ \ldots;\ v_n).$$

Из теоремы О. Перрона следует, что если $p_{ij} > 0$ при всех i, j, то такая предельная точка единственна, не зависит от $u \in K$, а также что $v_i > 0$ при всех i. Ф. Фробениус распространил этот результат на некоторые неотрицательные матрицы (см., например, книгу Ф. Р. Гантмахера «Теория матриц»).

2.15. а) Неподвижную точку дискретного оператора Перрона — Фробениуса (см. задачу 2.14), т. е. собственный вектор v матрицы π, отвечающий собственному числу единица, легко отыскать (при четном n) алгебраическим путем. При этом оказывается, что $v_k = 0$ при $k \leqslant n/2$, $v_k = v_{\frac{3}{2}n-k}$ при $k > n/2$.

Это подсказывает ответ: если $Pf = f$ (P — оператор Перрона — Фробениуса, см. задачу 2.13), то $f(x) = 0$ при $x < 1/2$, $f(x) = f(3/2 - x)$ при $x > 1/2$. Для его проверки напишем равенство

$$Pf(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} f\left(\dfrac{1}{2} y\right) & \text{при} \quad y < 1/2, \\ \dfrac{1}{2} f\left(\dfrac{1}{2} y\right) + f\left(\dfrac{3}{2} - y\right) & \text{при} \quad y > 1/2 \end{cases}$$

(см. задачу 2.13.в)), откуда

$$\int_0^{2^{-n}} f(y)\, dy = \int_0^{2^{-n}} Pf(y)\, dy = \int_0^{2^{-(n+1)}} f(z)\, dz, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

что возможно лишь при

$$\int_{2^{-(n+1)}}^{2^{-n}} f(y)\, dy = 0 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Следовательно, $f(y) = 0$ почти всюду на $[0;\ 1/2]$. Из этого моментально следует, что $f(y) = Pf(y) = f(3/2 - y)$ при $y > 1/2$.

б) дискретный оператор Перрона — Фробениуса при $n = 3$ записывается матрицей

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(см. задачу 2.14.а)). Вектор $v = (1/5;\ 2/5;\ 2/5)$ удовлетворяет равенству $\pi v = v$. Положите $f(x) = 1/5$ при $x < 1/3$, $f(x) = 2/5$ при $x > 1/3$ и убедитесь, что мера $d\mu = f dx$ инвариантна относительно T.

в) Преобразование T не имеет абсолютно непрерывной инвариантной меры, потому что у него есть притягивающая неподвижная точка (см. задачу 2.9). Неподвижные точки $v \in \mathbb{R}^n$ для оператора π имеют вид $v_1 = c$, $v_k = 0$ при $k > 1$. Соответствующие им меры на отрезке задаются плотностями $f_v(x) = n$ при $x \leqslant 1/n$, $f_v(x) = 0$ при $x > 1/n$. Если μ_n — мера, задаваемая такой плотностью, то очевидно, $\mu_n(A) \to 0$, если $A = (\varepsilon;\ 1)$, $\varepsilon > 0$, и $\mu_n([0;\ 1)) = 1$. Это позволяет считать предельной меру, сосредоточенную в точке 0 (она инвариантна относительно T, но не задается никакой плотностью).

2.16. Пусть f — функция на Ω, удовлетворяющая условию $Pf = f$ (задача 2.13.б), д)). Обозначив $f(0;\ 1)$ через C и записывая уравнение $Pf = f$ для отображений $z \mapsto yz$ $(y > 0)$, получим, что $f(0;\ y) = C/y^2$. Применение такого же приема к отображениям $z \mapsto z + x$ $(x \in \mathbb{R})$ приводит к равенству $f(x;\ y) = f(0;\ y) = C/y^2$. Остается заметить, что произвольный автоморфизм T есть суперпозиция автоморфизмов рассмотренного вида, и поэтому $Pf = f$ для всех T.

2.17. Благодаря результатам 2.13.б), д) плотность f_L меры μ_L должна удовлетворять соотношению

$$f_L(ax;\ ay + b) = \frac{1}{a^2} f_L(x;\ y). \tag{1}$$

Полагая $x = 1$, $y = 0$, $A = f_L(1;\ 0)$, отсюда получаем: $f_L(a;\ b) = A/a^2$ для любых $(a;\ b) \in P$. Очевидно, что такая функция удовлетворяет уравнению (1). Аналогично из уравнения

$$f_R(ax;\ bx + y) = \frac{1}{a} f_R(x;\ y)$$

находится плотность f_R меры μ_R.

2.18. Пусть f — плотность инвариантной меры для T. Рассмотрите функцию

$$h(x) = a + (b - a)\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)^{-1} \int_a^x f(t)\,dt$$

и проверьте, что отображение $S = h \circ T \circ h^{-1}$ обладает требуемым свойством.

2.19. Достаточно ограничиться случаем, когда $\alpha \in [0;\ 1)$ (см. 1.42.д)). Пусть μ — конечная мера на S^1, которую сохраняет T (она существует по теореме Боголюбова — Крылова). Можно считать, что $\mu(S^1) = 1$. Отождествляя S^1 с промежутком $[0;\ 1)$, рассмотрим функцию $h(x) = \mu([0;\ x])$. Утверждение 1.42.в) гарантирует, что T не имеет периодических точек. Следовательно, траектория каждой точки бесконечна, а тогда мера каждой точки равна нулю и функция h непрерывна, $h(0) = 0$, $h(x) \to 1$ при $x \to 1$. Пусть $\beta = \mu([0;\ T(0)])$. Тогда

$$h(T(x)) = \mu([0;\ T(x)]) = (\mu([0;\ T(0)]) + \mu([T(0);\ T(x)])) \bmod 1 = (\beta + \mu([0;\ x])) \bmod 1 = (h(x) + \beta) \bmod 1.$$

Отсюда видно, что $h \circ T = T_\beta \circ h$, где T_β — поворот окружности на угол $\beta \in [0;\ 1)$.

Для доказательства того, что $\beta = \alpha$, рассмотрим какую-нибудь функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую условиям: $f(x) = T(x)$ при $x \in [0;\ 1)$, $f(x+1) = f(x) + 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$, и проверим, что $\lim \frac{f^n(0)}{n} = \beta$ (см. 1.42.б), д)).

Пусть ν — мера на $\mathbb{R}$, ограничение которой на каждый промежуток вида $[k;\ k+1)$ $(k \in \mathbb{Z})$ получается из меры μ сдвигом на k. Тогда из инвариантности μ вытекает, что для $n \in \mathbb{Z}$

$$\nu([f^n(0);\ f^{n+1}(0)]) = \nu([0;\ f(0)]) = \beta.$$

Поэтому $\beta = \frac{1}{n}\nu([0;\ f^n(0)])$. Но так как $|\nu([0;\ y]) - y| < 1$ для всех y,

$$\beta = \lim \frac{1}{n}\nu([0;\ f^n(0)]) = \lim \frac{1}{n} f^n(0) = \alpha.$$

2.20. Если T не эргодично, то найдется такое инвариантное множество A, что $\mu(A) > 0$, $\mu(\bar{A}) > 0$, где $\bar{A} = X \setminus A$. Тогда функция f, принимающая значение a на A и $b\,(\neq a)$ на $\bar{A}$, инвариантна и не постоянна. Напротив, если f — существенно непостоянная функция, то найдется такое число c, что множества

$$A = \{x \in X \mid f(x) \geqslant c\} \text{ и } \bar{A}$$

имеют положительную меру. Если f к тому же инвариантна, то A и $\bar{A}$ инвариантны, и T не эргодично.

2.21. а) Воспользуемся предыдущей задачей и заметим, что для доказательства эргодичности достаточно проверять функции f из $\mathscr{L}^2([0;\ 1])$. Всякая такая функция, как известно, раскладывается в ряд Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x} \quad \left(c_n = \hat{f}(n)\right),$$

причем, в силу теоремы единственности, последовательность коэффициентов $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ определяет функцию f однозначно (с точностью до значений на множестве меры нуль). Функции $g(x) = f(T(x))$ отвечает ряд Фурье

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i \alpha n} e^{2\pi i x n}.$$

Если $f(x) = g(x)$ почти везде, то $c_n = c_n e^{2\pi i \alpha n}$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. При иррациональном α отсюда следует, что $c_n = 0$ при $n \neq 0$, т. е. ряд Фурье для f сводится к константе. Теорема единственности утверждает, что тогда $f(x)=c_0$ почти везде, что влечет эргодичность. Если $\alpha=k/l\in\mathbb{Q}$, то отличными от нуля могут быть коэффициенты c_{ml} $(m\in\mathbb{Z})$, т. е. существуют непостоянные инвариантные функции.

б) Рассуждая как в а), возьмем функцию

$$f(x)\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n e^{2\pi inx}$$

и из равенства

$$f(x)=f(T(x))\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n e^{2\pi i2nx}$$

получим соотношения: $c_n=c_{2n}=c_{4n}=\ldots$ для всех $n\in\mathbb{Z}$. Условие $f\in\mathscr{L}^2(X)$ или $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2<\infty$ приводит к тому, что $c_n=0$ при $n\neq 0$, откуда, как в п. а), следует эргодичность T.

в) — аналогично б), так как преобразование T можно трактовать как отображение $x\mapsto nx \bmod 1$ промежутка $[0;\ 1)$.

г), д). Функции из $\mathscr{L}^2(X)$ «раскладываются» в двойной ряд Фурье

$$f(x;\ y)\sim\sum_{n_1,n_2\in\mathbb{Z}}c_{n_1n_2}e^{2\pi in_1x}e^{2\pi in_2y}=\sum_{n_1,n_2\in\mathbb{Z}}c_{n_1n_2}e^{2\pi i(n_1x+n_2y)}.$$

Тогда

$$f(T_A(x;\ y))\sim\sum_{n_1,n_2\in\mathbb{Z}}c_{n_1n_2}e^{2\pi i\,((a_{11}n_1+a_{21}n_2)x+(a_{12}n_1+a_{22}n_2)y)}=$$

$$=\sum_{n_1,n_2\in\mathbb{Z}}c_{n_1n_2}e^{2\pi i(m_1x+m_2y)}.$$

Обозначим векторы $(n_1;\ n_2)$ и $(m_1;\ m_2)$ через n и m соответственно. Тогда $m=A^*n$, где A^* — матрица, полученная транспонированием A. Если f инвариантна, то $c_n=c_{A^*n}=c_{(A^*)^2n}=\ldots$, и сходимость ряда $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^2}|c_n|^2$ приводит к тому, что если траектория $\{(A^*)^kn\}$ вектора n бесконечна, то $c_n=c_{A^*n}=\ldots=0$.

Если собственные числа матрицы A не являются корнями из единицы, то $(A^*)^kn\neq n$ ни при каких $k\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}$. В таком случае, как выше, $f(x)=c_{00}$ почти всюду, т. е. T_A эргодично. В противном случае найдутся число $k\in\mathbb{N}$ и такой вектор $v\in\mathbb{R}^2$, что $(A^*)^kv=v$. Поскольку матрица A^* составлена из целых чисел, то и вектор v, удовлетворяющий этому соотношению, можно считать целочисленным. За ненулевую инвариантную фунцию можно принять сумму экспонент, отвечающих векторам v, $A^*v,\ldots,(A^*)^{k-1}v$. Следовательно, T_A не эргодично.

2.22. Пусть траектория $\{T^m(x)\}$ точки x не плотна в X. Это означает, что существует такой открытый шар B (с рациональными координатами центра и рациональным радиусом), что $x \notin \bigcup_{m \in \mathbb{N}} T^{-m}(B) = G_B$. Так как G_B открыто, $\lambda_n(G_B) > 0$. Из эргодичности следует, что $\lambda_n(X \backslash G_B) = 0$ (рассмотрите инвариантное множество $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T^{-n}(G_B) \subset G_B\Big)$. Поскольку шары с рациональными параметрами образуют счетное семейство $\{B_k\}$, объединение $e = \bigcup_k \left(X \setminus G_{B_k}\right)$ имеет нулевую меру. Всякая же точка, попадающая в $X \backslash e$, имеет плотную траекторию.

2.23. Если S эргодичен, то по предыдущей задаче траектория почти всякой точки всюду плотна, а это, в силу результата VII.4.5.а, влечет линейную независимость $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ над $\mathbb{Q}$ по модулю 1. Достаточность этого условия доказывается с помощью рядов Фурье (модифицируйте решение задачи 2.21.а)).

2.24. Покажем, что преобразования T и S допускают одинаковое «символическое представление». Пусть D — множество двоично-рациональных чисел в $I = [0;\ 1]$, $X = I \backslash D$. Поскольку $\lambda(D) = 0$, достаточно предъявить такое измеримое обратимое сохраняющее меру Лебега преобразование h: $X \to X$, что $S \circ h = h \circ T$.

Пусть $A_0^1 = [0;\ ^1/_2] \cap X$, $A_1^1 = [^1/_2;\ 1] \cap X$. Определим последовательно множества

$$A_0^k = S^{-1}\left(A_0^{k-1}\right),\ A_1^k = S^{-1}\left(A_1^{k-1}\right),\ k = 2,\ 3,\ \ldots$$

Докажите, что эти множества обладают следующими свойствами:

1) $\lambda\left(A_{i_1}^{k_1} \cap A_{i_2}^{k_2} \cap \ldots \cap A_{i_n}^{k_n}\right) = 2^{-n}$ для любых $k_1 < k_2 < \ldots$ $\ldots < k_n$, $i_1, \ldots, i_n \in \{0;\ 1\}$ (проверяется по индукции);

2) множество $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{i_k}^k$ состоит из одной точки для любой последовательности $\{i_k\}$, $i_k \in \{0;\ 1\}$, причем каждая точка из X однозначно представима в виде такого пересечения.

Последнее свойство позволяет отождествить точки из X с двоичными последовательностями, причем $S(i_1;\ i_2;\ \ldots) = (i_2;\ i_3;\ \ldots)$.

Пусть $x = 0{,}x_1x_2\ldots$ — двоичное разложение точки из X. Полагая $i_k = x_k$, получим двоичную последовательность, определяющую (с помощью 2)) точку $y \in X$. Положим $h(x) = y$. Очевидно, что $T(x) = 0{,}x_2x_3\ldots$, откуда следует равенство $S \circ h = h \circ T$.

Остается убедиться, что h измеримо и сохраняет меру Лебега (обратимость h очевидна). Это следует из того, что для любого интервала вида

$$\Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n} = \left\{x = \sum \frac{x_k}{2^k} \,\middle|\, x_1 = \varepsilon_1, \ldots, x_n = \varepsilon_n\right\}, \quad \varepsilon_k \in \{0;\ 1\},$$

выполняются равенство

$$h\left(\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n} \cap X\right) = A^1_{\varepsilon_1} \cap A^1_{\varepsilon_2} \cap \ldots \cap A^1_{\varepsilon_n}$$

и свойства 1). Измеримость h следует из того, что для любого двоично-рационального отрезка $\Delta = [k/2^n;\ (k+1)/2^n]$ ранга n его прообраз $h^{-1}(\Delta \cap X)$ совпадает с $\Delta' \cap X$, где $\Delta' = [l/2^n;\ (l+1)/2^n]$.

2.25. а) Воспользуйтесь тем, что линейной заменой Т превращается в преобразование S из предыдущей задачи и, следовательно, метрически сопряжено с отображением $x \to 2x \bmod 1$ ($x \in [0;\ 1)$), которое эргодично (см. задачу 2.21. б)).

б) С помощью решения задачи 2.6.а), в котором устанавливается метрическая сопряженность отображений $x \mapsto 1 - 2x^2$ и $x \mapsto 1 - 2\,|\,x\,|$, сведите задачу к предыдущей.

в) С помощью задач 1.15.б) и 2.6.а) замените отображение T_n пилообразным отображением f_n. Затем, модифицируя утверждение из задачи 2.24, замените f_n отображением $x \mapsto nx \bmod 1$ ($x \in [0;\ 1)$), эргодичность которого фактически доказана в 2.21. в).

2.26. Для всякого достаточно большого $k \in \mathbb{N}$ множество $A_k = \{x \in X \,|\, f(x) \geqslant 1/k\}$ имеет положительную меру. Рассмотрите множество B тех точек x из A_k, для которых $T^n(x) \notin A_k$, $n \in \mathbb{N}$ (невозвращающиеся точки). Проверьте, что

$$T^{-m}(B) \cap B = T^{-(m+n)}(B) \cap T^{-n}(B) = \varnothing \quad \text{при всех} \quad m,\ n \in \mathbb{N}.$$

Конечность меры множества X приводит к тому, что $\mu(B) = 0$, из чего следует, что почти всякая точка $x \in A$ возвращается в него бесконечное число раз, т. е. $f(T^n(x)) \geqslant 1/k$ для бесконечного множества номеров, и $\sum f\left(T^n(x)\right) = +\infty$.

Чтобы завершить доказательство, исчерпайте X множествами A_k.

2.27. Примените эргодическую теорему к характеристической функции множества A.

2.28. Пусть $B \subset X$ — такое множество, что $\mu_1(B) \neq \mu_2(B)$, χ_B — его характеристическая функция. По эргодической теореме для $i = 1,2$

$$\varphi(x) = \lim \frac{1}{n} \sum_{0 \leqslant k < n} \chi_B\left(T^k(x)\right) = \mu_i(B)$$

для всех x из множества A_i, для которого $\mu_i(A_i) = 1$. Поскольку $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, отсюда следует доказываемое утверждение.

2.29. а) Пусть сначала выполняется условие $f(0) = f(1)$. Тогда можно представлять себе f заданной на окружности, где она будет равномерно непрерывна. Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $|(x - x') \bmod 1| < \delta$, то

$$|(S^k(x) - S^k(x')) \bmod 1| < \delta \quad \text{и} \quad |f(S^k(x)) - f(S^k(x'))| < \varepsilon (k \in \mathbb{N}).$$

Пусть $\sigma_n^f(x) = \frac{1}{n} \sum\limits_{0 \leqslant k < n} f(S^k(x))$, x' — такая точка, в которой, кроме того, выполняется равенство (1). Тогда $|\sigma_n(x) - \sigma_n(x')| < \varepsilon$ при всех n, откуда следует, что

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \varepsilon \leqslant \underline{\lim}\, \sigma_n^f(x) \leqslant \overline{\lim}\, \sigma_n^f(x) \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε отсюда вытекает равенство (1) для точки x. Если $f(0) \neq f(1)$, то можно подобрать такие функции $g,\ h \in C([0;\ 1])$, что

$$g(0) = g(1),\ h(0) = h(1),\ g \leqslant f \leqslant h \ \text{и} \ \int_0^1 (h(x) - g(x))\,dx < \varepsilon.$$

После этого остается воспользоваться неравенствами

$$\sigma_n^g(x) \leqslant \sigma_n^f(x) \leqslant \sigma_n^h(x), \qquad \sigma_n^h(x) - \sigma_n^g(x) < \varepsilon \qquad (x \in [0;\ 1]).$$

Для доказательства б) замените в этом рассуждении функцию f функцией χ_Δ.

Доказательство утверждения а) без использования эргодической теоремы см. в задаче I.3.9.

2.30. Пусть $T(x) = 2x \bmod 1$. Для тех $x \in [0;\ 1)$, которые не являются двоично-рациональными числами (как всегда, мы при рассмотрении вопросов, связанных с мерой, пренебрегаем множеством меры нуль), равенство $x_k = 1$ означает, что $T^k(x) \in [1/2;\ 1)$. Так как T эргодично (задача 2.21.б)), то по эргодической теореме искомый предел для почти всех x равняется $1/2$ (задача 2.27). Точно так же доказывается, что для p-ичной системы счисления соответствующая частота равна $1/p$. Отсюда сразу выводится следующий факт: множество тех x, для которых при любом p все цифры в p-ичной записи числа x встречаются одинаково часто (такие числа называются *нормальными*), имеет меру единица.

2.31. Если A инвариантно, то $T^{-n}(A) \cap A = A$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и соотношение $(*)$ приводит к равенству $\mu(A) = (\mu(A))^2$, т. е. $\mu(A)$ равно нулю или единице.

2.32. Пусть $x = \sum \frac{x_k}{2^k}$, $y = \sum \frac{y_k}{2^k}$ $(x_k, y_k \in \{0; 1\})$ — двоичные разложения чисел x и y из $[0; 1)$. Если $T(x) = y$, то $y_k = x_{k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$. Докажем сначала соотношение $(*)$ из предыдущей задачи для множеств вида

$$\Delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m} = \{x \in [0; 1) \mid x_k, k = 1, \ldots, m\} \ (\varepsilon_k \in \{0; 1\})$$

(назовем их *цилиндрами*). Если $A = \Delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m}$, $B = \Delta_{\eta_1 \ldots \eta_p}$, то (при $n > m$)

$$A \cap T^{-n}(B) = \{x \mid x_1 = \varepsilon_1, \ \ldots, \ x_m = \varepsilon_m, \ x_{n+1} = \eta_1, \ \ldots, \ x_{n+p} = \eta_p\}.$$

Вычисляя меры этих множеств, получим

$$\lambda(A) = 1/2^m, \quad \lambda(B) = 1/2^p, \quad \lambda(A \cap T^{-n}(B)) = 1/2^{m+p},$$

и, следовательно, соотношение $(*)$ выполняется. Почти так же оно проверяется для множеств A и B, представимых в виде конечных объединений цилиндров (в частности, для всех промежутков с двоично-рациональными концами). Всякое измеримое множество A можно аппроксимировать с любой точностью ε множеством A', представимым в таком виде (это означает, что $\lambda(A \setminus A') + \lambda(A' \setminus A) < \varepsilon$). Будем в этом случае писать $A \stackrel{\varepsilon}{=} A'$. Если $B \stackrel{\varepsilon}{=} B'$, то и $T^{-n}(B) \stackrel{\varepsilon}{=} T^{-n}(B')$, $A \cap T^{-n}(B) \stackrel{\varepsilon}{=} A' \cap T^{-n}(B')$. Отсюда следует, что $\overline{\lim} \, |\lambda(A \cap T^{-n}(B)) - \lambda(A)\lambda(B)| \leqslant 2\varepsilon$. Поскольку ε произвольно, соотношение $(*)$ задачи 2.31 доказано.

2.33. а) Доказательство такое же, как в случае меры Лебега (см. предыдущую задачу).

б) Проверьте совпадение мер на промежутках вида $[k/2^n; (k+1)/2^n]$.

в), г). Воспользуйтесь эргодичностью μ_p (см. задачу 2.31) и утверждением 2.28.

2.34. Пусть первая цифра числа 2^k равна p. Это означает, что для некоторого $m \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$m + \lg p \leqslant k \lg 2 < m + \lg (p + 1). \qquad (1)$$

Рассмотрите преобразование $S(x) = (x + \alpha) \bmod 1$ на промежутке $[0; 1)$ с $\alpha = \lg 2$. Соотношение (1) означает, что $S^k(0) \in [\lg p; \lg (p + 1))$. Ввиду иррациональности α, искомый предел равен $\lg (1 + 1/p)$ (см. 2.21.а, 2.29.б).

2.35. а) Рассмотрим множества $\Delta_{a_1 \ldots a_n} = \{x \in (0; 1] \mid a_1(x) = a_1, \ldots, a_n(x) = a_n\}$, которые являются промежутками монотонности отображения T^n. Пусть $\psi = \psi_{a_1 \ldots a_n}$ — функция, определенная на $[0; 1)$, являющаяся обратной к ограничению T^n

на $\Delta = \Delta_{a_1 \ldots a_n}$. Пользуясь явным выражением для ψ:

$$\psi(t) = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + t}}} = \frac{p_n + tp_{n-1}}{q_n + tq_{n-1}}, \qquad t \in [0;\ 1)$$

(мы опускаем элементарные выкладки), можно вычислить длину Δ:

$$\lambda(\Delta) = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})}.$$

Если $A = [\alpha;\ \beta) \subset [0;\ 1]$, то

$$\lambda(T^{-n}(A) \cap \Delta) = \psi(\beta) - \psi(\alpha) = (\beta - \alpha)\frac{1}{(q_n + \alpha q_{n-1})(q_n + \beta q_{n-1})}.$$

Поскольку дробь в правой части заключена в пределах между $\frac{1}{2}\lambda(\Delta)$ и $2\lambda(\Delta)$, мы приходим к неравенству

$$\frac{1}{2}\lambda(A)\lambda(\Delta) \leqslant \lambda(T^{-n}(A) \cap \Delta) \leqslant 2\lambda(A)\lambda(\Delta)$$

для произвольного промежутка $A \subset [0;\ 1)$, а следовательно, и для произвольного измеримого множества A. Если заменить λ на меру Гаусса μ, плотность которой заключена между $1/(2\ln 2)$ и $1/\ln 2$, то, заменив константу 2 на $C = 4/\ln 2$, мы можем написать неравенство

$$\frac{1}{C}\mu(A)\mu(\Delta) \leqslant \mu(T^{-n}(A) \cap \Delta) \leqslant C\mu(A)\mu(\Delta). \qquad (1)$$

Так как значение меры любого промежутка можно восстановить по ее значениям на всевозможных промежутках вида $\Delta_{a_1 \ldots a_n}$ (это следует из того, что $\lambda(\Delta_{a_1 \ldots a_n}) \leqslant 2^{-n+1}$), то в неравенстве (1) мы можем Δ заменить произвольным множеством. Пусть теперь A — инвариантное множество, а место Δ взято множество $\overline{A} = (0;\ 1] \setminus A$. Тогда $\frac{1}{C}\mu(A)\mu(\overline{A}) \leqslant \mu(A \cap \overline{A}) = 0$, откуда следует, что $\mu(A) = 0$ или $\mu(\overline{A}) = 0$.

б1) Примените утверждение 2.27.

б2) Поскольку $\frac{1}{n}\sum\limits_{0 \leqslant k < n} a_k = \frac{1}{n}\sum\limits_{0 \leqslant k < n} a_1(T^k(x))$, эргодическую теорему следует применить к функции $f(x) = a_1(x)$.

Однако эта функция не суммируема, так как $f(x)=k$ при $x \in (1/(k+1);\ 1/k)$. Поэтому заменим f меньшей функцией $f_N = \min(f;\ N)$, для которой

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{0 \leqslant k < n} f_N(T^k(x)) = \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 \frac{f_N(x)}{1+x}\, dx.$$

Полученное выражение неограниченно возрастает при $N \to \infty$, и, значит, интересующий нас предел также бесконечен.

63) Примените эргодическую теорему к функциям $f(x) = \ln a_1(x)$.

64) Проверьте сначала равенство $p_n(x) = q_{n-1}(T(x))$, из которого вытекает, что

$$\frac{p_n(x)}{q_n(x)} \cdot \frac{p_{n-1}(T(x))}{q_{n-1}(T(x))} \cdots \frac{p_1(T^{n-1}(x))}{q_1(T^{n-1}(x))} = \frac{1}{q_n(x)},$$

и, следовательно,

$$-\frac{1}{n} \ln q_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{0 \leqslant k < n} \ln\left(\frac{p_{n-k}(T^k(x))}{q_{n-k}(T^k(x))}\right).$$

Если положить $f(x) = \ln x$, то последнее выражение будет отличаться от суммы $\frac{1}{n} \sum\limits_{0 \leqslant k < n} f(T^k(x))$ на величину

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{0 \leqslant k < n} \left(\ln(T^k(x)) - \ln \frac{p_{n-k}(T^k(x))}{q_{n-k}(T^k(x))}\right),$$

которая стремится к нулю, потому что для всех $x \in (0;\ 1)$

$$\left|\ln \frac{x}{p_k/q_k}\right| \leqslant \left|\frac{x}{p_k/q_k} - 1\right| = \frac{q_k}{p_k}\left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| \leqslant \frac{q_k}{p_k} \cdot \frac{1}{q_k q_{k+1}} = \frac{1}{p_k q_{k+1}} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$$

(последнее неравенство доказывается по индукции, для чего полезно выписать рекуррентные соотношения, связывающие p_n и q_n с p_{n-1}, q_{n-1}, p_{n-2}, q_{n-2}. Всевозможные сведения о цепных дробях можно почерпнуть в книге А. Я. Хинчина «Цепные дроби»).

Наконец,

$$\frac{1}{n} \sum_{0 \leqslant k < n} f(T^k(x)) \to \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\, dx = -\frac{\pi^2}{12 \ln 2}.$$

/

ОТВЕТЫ

Глава I

1.6. Да. 1.7. Да. 1.8. Да. 1.14. $N \leqslant 11a^2$. 1.20. а) $\{0, 1, 1/2, 1/3 \ldots\}$; б), в) $\mathbb{R}$; г) $[-1; 1]$. 1.25. Да. 1.28. б) $[0; 2]$, $[-1; 1]$. 1.29. Нет. 1.30. Например, множество вершин правильных n-угольников, вписанных в окружности радиусов $1 - \dfrac{1}{n}$ с центром в фиксированной точке. На прямой — множество середин интервалов, дополнительных к канторову множеству.

2.10. Тогда и только тогда, когда $\{a_k\}_{k=1}^n$ — арифметическая прогрессия. 2.15. в) $\Rightarrow$ б). 2.18. е) Нет. 2.19. в) При $p < 0$ знак неравенства следует изменить; г) при $p \in (-1; 0)$ неравенство выполнено при всех $x \in (0; 1)$.

3.6. а) $[-1; 1]$; б) $\mathbb{R}$; в) — д) $[-1; 1]$. 3.7. а) $\left\{0; \dfrac{1}{q}; \ldots; \dfrac{q-1}{q}\right\}$, если $x = p/q$ — несократимая дробь; б) — г) $[0; 1]$. 3.8. Да.

Глава II

1.1. 1/2. 1.2. $\sup x_n = \overline{\lim}\, x_n = \sqrt{\pi/2}$; $\inf x_n = x_2 = \sqrt{1/2}$; $\underline{\lim}\, x_n = \sqrt{2/\pi}$. 1.3. а), б) 2. 1.4. $e^{-1/18}$. 1.5. $e^{a+1}/(e-1)$. 1.6. а) $e/(e-1)$; б) $S_1 < S_2 < \ldots < S_6 > S_7 > S_8 > \ldots$; в) $S_6 = 2{,}002\ldots$; $S_n < 2$ при $n \neq 6$. 1.7. $4e^{-1}$. 1.8. $-p \ln p - (1-p) \times \ln(1-p)$, если $p \in (0; 1)$; 0, если $p = 0$ или $p = 1$. 1.9. а) $\dfrac{1}{2}\ln 2$; б) $\pi/8$; в) $\dfrac{1}{2}\ln 5$; г) $\pi \ln 2$; д) π. 1.10. а) 0; б) 2π; в) $+\infty$; г) 0. 1.12. б) $C_2 = \pi^2/4$.

3.2. а) $e^{-1}(x_0 + (e-1)x_1)$; б) $e^{-1/2}((\sqrt{e} - 1)x_0 + x_1)$. 3.3. а) $x_n \sim n2^{n-1}(x_1 - 1 + 2\ln 2)$ при $x_1 \neq 1 - 2\ln 2$; б) $x_n \to 1$ при $x_1 = 1 - 2\ln 2$.

Глава III

1.1. а), д) Пустое множество; б) множество всех функций; в), г) множество постоянных функций; е) множество функций, ограниченных на каждом конечном промежутке; ж) множество функций, равномерно непрерывных на $\mathbb{R}$; з) множество функций, ограниченных на $\mathbb{R}$; и) множество неубывающих функций, равномерно непрерывных на $\mathbb{R}$. **1.2.** Нет. **1.5.** Да. **1.6.** б) Нет. **1.7.** Да. **1.12.** Утверждение верно для сепарабельного и неверно для несепарабельного пространства. **1.14.** а) Нет; б) да. **1.23.** Функция вида $ax+b$. **1.25.** Да.

2.3. Нет. **2.5.** Для конечного семейства функций верно, для счетного — нет.

3.9. а) $\Leftrightarrow$ б), из в) не следует а). **3.12.** Да, $g'(0)=2/\pi$. **3.18.** 2. **3.19.** $\alpha\leqslant\log_3 2$.

4.1. Нет. **4.2.** $\varphi^{-1}(t)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+i\,\dfrac{2t}{1+t^2}$. **4.3.** Да. **4.4.** в) Например, $\xi=2/9$; $\eta=1/3$.

5.1. а) Постоянные; б) $f(x)=g(\ln x)$, где g — произвольная непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, имеющая период $\ln 2$. **5.3.** $f(x)=A\ln x$. **5.4.** $f(x)=Ax\ln x$ при $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$, $f(0)=0$. **5.5.** $f(x)\equiv 0$ или $f(x)=x$. **5.6.** $f(x)\equiv 0$, $f(x)=x$ и, кроме того, $f(x)=-x$, если n — нечетное число. **5.10.** $f(x)=A\ln x+h(\ln x)$, где h — произвольная непрерывная на $\mathbb{R}$ функция с периодом $T=\ln(a/b)$, $A=T^{-1}(f(a)-f(b))$. **5.11.** а) $\varphi(1)=0$, $\varphi(x)=(\ln x)H(\ln|\ln x|)$ при $0<x<1$, где H — произвольная непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, имеющая период $\ln 2$; б) $f(x)=0$, $f(x)=1$, $f(x)=x^{e^{\omega(\ln|\ln x|)}}$ при $0<x<1$, где ω — непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, имеющая период $\ln 2$ и удовлетворяющая условию $\omega(t+h)-\omega(t)>-h$ при $t,h\in\mathbb{R}$, $h>0$. **5.12.** Например, $f(x)=(\operatorname{sign}x)|x|^{|\ln|x||}$ при $x\neq 0$, $f(0)=0$. **5.13.** $f(z)=z$ или $f(z)=\bar z$ при $|z|=1$, $f(0)=0$,

$$f(z)=|z|^{e^{\omega(\ln|\ln|z||)}}\cdot e^{i(\ln|z|)H(\ln|\ln|z||)}f\left(\frac{z}{|z|}\right)$$

при $0<|z|<1$, где ω, H — непрерывные вещественные функции с периодом $\ln 2$, $\omega(t+h)-\omega(t)>-h$ при $t,h\in\mathbb{R}$, $h>0$. **5.15.** $f(x;y)=a(x^2+4xy+y^2)+b(x+y)+c$, где a, b, c — произвольные вещественные числа. **5.16.** Если $f\neq\mathrm{const}$, то функция g существует тогда и только тогда, когда f строго монотонная или f четная, строго монотонная на $[0;+\infty)$.

В ответах к задачам **5.17**, **5.18** буква φ обозначает характер.

5.17. а) $\varphi(n)=\zeta^n$ $(n\in\mathbb{Z})$, где $\zeta\in S^1$; б) $\varphi(k;l)=\zeta_1^k\zeta_2^l$ $((k;l)\in\mathbb{Z}^2)$, где $\zeta_1,\zeta_2\in S^1$; в) $\varphi(n)=\zeta^n$ $(n\in\mathbb{Z}_m)$, где ζ — корень m-й степени из единицы. 5.18. а) $\varphi(x)=e^{itx}$ $(x\in\mathbb{R})$, где $t\in\mathbb{R}$; б) $\varphi(x)=e^{i(x,t)}$, где (x,t) — скалярное произведение векторов x, t в $\mathbb{R}^n$; в) $\varphi(x;n)=e^{itx}\zeta^n$ $(x\in\mathbb{R},n\in\mathbb{Z})$, где $t\in\mathbb{R}$, $\zeta\in S^1$; г) $\varphi(z)=e^{i(t\operatorname{Re}z+s\operatorname{Im}z)}(z\in\mathbb{C})$, где $t,s\in\mathbb{R}$; g) $\varphi(\zeta)=\zeta^n(\zeta\in S^1)$, где $n\in$

$\in \mathbb{Z}$; е) $\varphi(x)=e^{it\ln x}$ $(x>0)$, где $t\in\mathbb{R}$; ж) $\varphi(z)=e^{it\ln|z|}(z/|z|)^n$ $(z\in\mathbb{C})$, где $t\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}$. **5.19.** Произвольный непрерывный гомоморфизм φ определяется равенствами а) $\varphi(x)=ax$; б) $\varphi(x)=e^{ax}$; в) $\varphi(x)=a\ln x$; г) $\varphi(x)=x^a$; д) $\varphi(x)=e^{iax}$; е) $\varphi(z)=|z|^a e^{ib\ln|z|}\times(z/|z|)^n$, где a, b — произвольные вещественные числа, $n\in\mathbb{Z}$.

Глава IV

1.1. Сходится. **1.2.** а) — в) Расходится. **1.4.** а) $p>0$; б) $p>1/2$; в) $p>2$. **1.5.** а) Сходится; б) — г) расходится. **1.7.** а), б), д), ж) Расходится; в), г), е), з) сходится.

2.5. Для немонотонных последовательностей утверждение неверно. **2.6.** а) Да; б) нет. **2.9.** Не всегда. **2.10.** Не всегда. **2.12.** г) Не всегда. **2.14.** При $a=+\infty$ возможна как сходимость, так и расходимость. **2.18.** Да. **2.19.** От монотонности отказаться нельзя. **2.20.** б) Ряд $\sum\lambda_n a_n$ может сходиться, но если $\lambda_n\uparrow+\infty$, то он расходится. **2.21.** б) Верно.

3.1. Да. Положительную последовательность подобрать нельзя. **3.2.** Да. **3.4.** Обратное утверждение верно, если $a_n\downarrow 0$. От монотонности отказаться нельзя.

4.1. $\frac{3}{4}(x-\sin x)$. **4.2.** $\frac{3}{4}\cos x-\cos^3 x$. **4.3.** $1/r$. **4.4.** $\int\limits_0^1\frac{4dt}{4-z+zt^2}$. **4.5.** $\ln m$. **4.6.** $\frac{e}{2}$. **4.7.** $1-\gamma$. **4.8.** $\left(\gamma-\frac{\ln z}{2}\right)\ln 2$. **4.9.** $\gamma+\ln 2$. **4.10.** $\pi\left(1-\frac{\ln(2\pi)}{2}\right)$. **4.11.** $\frac{\pi}{2}(1-\ln\pi)$.

5.1. $2y<x^2$, $q>2p$. **5.2, 5.3.** Да. **5.4.** Ряд сходится неравномерно. **5.9.** От условия $\sum a_n^2<\infty$ отказаться нельзя.

6.3. Например, $E=\{\sum(\varepsilon_k/k!)\mid\varepsilon_k=0$ или $1\}$, $B_n=2\pi n!$ **6.6.** Пределы равны $2/\pi$ и $1/2$; $L_n\sim\frac{8}{\pi}\ln n$, $\widetilde{L}_n\sim 2\ln n$. **6.8.** а) $(\pi-x)/2$ при $0<x<2\pi$; б) $\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{4}-\frac{\pi}{4}\sin\frac{x}{2}$ при $0<x<2\pi$; в) $-x/2$ при $|x|<\pi$; г) $\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\frac{\pi}{4}\cos\frac{x}{2}$ при $0<x<2\pi$.

Глава V

1.1. Интеграл сходится. **1.2.** Интеграл сходится при $p>2$. **1.3.** Интеграл сходится в следующих трех случаях: $q<-1$, r и p произвольны; $q\geqslant-1$, $r\leqslant 1$, $1+q<p$; $q\geqslant-1$, $r>1$, $1+q<p/r$. **1.4.** Интеграл сходится в следующих трех случаях: $q<-1$, r и p произвольны; $q\geqslant-1$, $r\leqslant 0$, $p>0$; $q\geqslant-1$, $r>0$, $1+q<p/r$. **1.5.** Интеграл сходится, если $q>1$, $p\leqslant 0$ или $q>1+p$, $p<0$. **1.6.** Интеграл сходится при

$q < -1$, $p > 0$. **1.7.** Интеграл сходится при $p < 1$, $q > 1$. **1.8.** Интеграл сходится, если $p < -1$, $q \leqslant 0$ или $q > 0$, $2(p+1) < q$. **1.9.—1.11.** Интегралы сходятся. **1.12.** а), б) Нет. **1.13.** При любом $\varepsilon > 0$. **1.14.** а) $f(0)\ln(b/a)$; б) $\left(f(0) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(x)\,dx\right)\ln\frac{b}{a}$; в) $(f(0) - l)\ln(b/a)$. **1.16.** 0. **1.17.** $-\frac{\pi}{2}\ln 2$. **1.18.** $-\pi^2/6$. **1.19.** $-\pi^2/12$. **1.20.** $\pi^2/6$. **1.21.** $\pi/2 - \operatorname{arctg} a$. **1.22.** $\pi/2$. **1.23.** $\pi/4$. **1.24.** 0. **1.25.** $\pi(|a| + |b| - |a+b|)$. **1.26.** $-\gamma$. **1.27.** $\gamma^2 + \pi^2/6$. **1.28.** γ. **1.29.** $\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\gamma$. **1.30.** $\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\gamma$. **131.** $\ln 4$. **1.32.** $-\frac{1}{2}\ln^2 2$. **1.33.** $\sqrt{\pi}$. **1.34.** $3/4$; $\frac{4-\sqrt{2}}{8}\sqrt{\pi}$; $1/2$; $(\sqrt{2}-1)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $\ln 2$; $2(\sqrt{2}-1)\pi$. **1.35.** $\sqrt{\pi}$. **1.36.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}$. **1.37.** а), б) $\sqrt{\pi/2}$. **1.38.** $\ln \pi/\sqrt{6}$.

2.1. $2\ln 2$. **2.2.** а) $n/(n+1)$; б) $1/(n+1)$; в) $n!\,\varepsilon^{-n}$. **2.3.** $(2\pi)^{n/2}$. **2.4.** а) $2\sqrt{2\pi(a^2+b^2)}$; б) $2^{(p+1)/2}(2\pi)^{(n-1)/2}\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)$. **2.5.** $2\pi - \frac{2\pi}{3}\|x\|^2$ при $\|x\| \leqslant 1$, $4\pi/(3\|x\|)$ при $\|x\| \geqslant 1$. **2.6.** $\pi^2(\operatorname{ch} 1 - 1)$. **2.7.** $\pi^2(\det A)^{-1/2}$. **2.8.** $t \in \operatorname{Int}(A)$; $K(t) = 8\pi\left(t_1^2 - t_2^2 - t_3^2 - t_4^2\right)^{-2}$ при $t = (t_1;\ t_2;\ t_3;\ t_4) \in \operatorname{Int}(A)$. **2.9.** $M = (b-a)/3$, $P = 4/9$. **2.10.** $1/2$. **2.11.** а) $P_1(a) > 1/2$ при любом a, $P_1(a) \underset{a\to\infty}{\longrightarrow} 1$; б) $1/2$. **2.12.** $\pi/4$. **2.13.** а) $\frac{4}{\pi}R$; б) $5\pi/6$. **2.14.** $\Psi(x,\ y) = \pi(x^2+y^2-1)$ при $x^2+y^2 \leqslant 1$ и $\Psi(x;\ y) = \pi\ln(x^2+y^2)$ при $x^2+y^2 \geqslant 1$. **2.17.** $(n!a_1a_2\ldots a_n)^{-1}$. **2.19.** $\frac{1}{24}\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left(f''_{x^2}(x;\ y) + f''_{y^2}(x;\ y)\right)dx\,dy$.

Глава VI

1.2. а) $a^{-1}|\ln(1-t)|$; б) $2^{-1}|\ln(1-t)|$; в) $\frac{\pi}{2}(1-t)^{-1}$. **1.3.** а) $A/\ln A$; б) A; в) $\frac{2}{\pi}A$; г) $\frac{1}{2A}e^{-A^2}$; д) $A^a e^{-A}$. **1.4.** а) $\frac{1}{p}\ln A$; б) $\frac{1}{2A}e^A$; в) $\sqrt{\pi A}e^{A/4}$; г) $A\ln^p A$. **1.5.** а) $(2\pi n^2)^{-1}$; б) $(-1)^n p/(\pi n)^{p+1}$; в) $(-1)^n(\pi n)^{-p}$. **1.10.** а) $\frac{1}{2}\frac{A^{1-p}}{1-p}$ при $p < 1$, $\frac{\ln A}{2}$ при $p = 1$; б) $\frac{2}{\pi}\frac{\ln A}{1+p}$; в) $\frac{2}{\pi}\frac{A^{1-p}}{1-p}$ при $p < 1$, $\frac{2}{\pi}\ln A$ при $p = 1$; г) $\frac{2}{\pi}\frac{A^{1-p}}{p-1}$. **1.16.** а), б) $(\varepsilon|\ln\varepsilon|)^{-1}$.

2.1. $f(0)$. 2.3. $\sqrt{\frac{2}{A}}\int\limits_0^\theta e^{-t^2}\,dt$. 2.5. а), б) $\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)A^{-1/p}$; в) $\Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)\left(\frac{2}{A}\right)^{(p+1)/2}$. 2.9. а) $\sqrt{\frac{2\pi}{A}}$; б) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{A}}$; в) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,A^{A+1/2}$; г) $\Gamma(2-p)\,A^{p-2}$; д) $\frac{1}{2}\sqrt{\pi/A}$; е) A^{-2}; ж) $\frac{C_p}{\sqrt{A}}e^{(1-1/p)x_pA}$, где $x_p=$ $=p^{1/(1-p)}$, $C_p=\sqrt{2\pi x_p/(p-1)}$; з) A^{-1}. 2.10. а) $(a+1)^{n+1/2}\sqrt{\pi/2}$; б) $\sqrt{3\pi/(2n)}$; в) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}(1+(-1)^n\sqrt{2})$. 2.11. а) $e^{-\sqrt{A}}\sqrt{2\pi e/A}$; б) $A^p/(p\ln A)$; в) C_pA^A, где $C_p=\int\limits_0^\infty e^{x^p-x}\,dx$.

3.11. а) $\pi/(2t)$; б) $\sqrt{\pi t}/2$. 3.27. а), в) $\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)(1-t)^{-1/p}$; б) $\sqrt{\frac{2\pi}{p-1}S(t)}\exp\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)S(t)\right)$, где $S(t)=(p\,|\ln t\,|)^{1/(1-p)}\underset{t\to 1-0}{\sim}$ $\sim(p(1-t))^{1/(1-p)}$; г) $|\ln(1-t)|/\ln a$; д), е) $|\ln(1-t)|/$ $/\ln|\ln(1-t)|$. 3.28. а) $\Gamma(1+p)/(1-t)^{1+p}$; б) $|\ln(1-t)|^p/(1-t)$. 3.29. а) $\ln 2/(1-t)$; б) $\pi^2/(12(1-t)^2)$; в) $1/2(1-t)$; г) $|\ln(1-t)|/\ln a$; д) $|\ln(1-t)|/(1-t)$; е), ж) $\pi^2/(6(1-t)^2)$; з) $|\ln(1-t)|/(1-t)^2$; и) $-(\ln 2)/(1-t)$; к) $-1/2(1-t)$; л) $-\pi^2/12(1-t)^2$; м) $-\ln 2/(1-t)^2$. 3.30. а) $\pi/4\ (1-t)$; б) $\frac{\pi+2}{8}(1-t)^{-1}$; в) $\frac{\pi^2}{8}(1-t)^{-2}$; г) $\frac{1}{2}\,\frac{|\ln(1-t)|}{1-t}$; д) $\frac{\pi^2}{24}(1-t)^{-2}$. 3.31. а) $|\ln(1-t)|/(1-t)$; б) $\frac{\pi^2}{6}(1-t)^{-2}$.

4.3. а) $y=x-x^2+\frac{3}{2}x^3+\ldots$; б) $y=1+\frac{x-1}{2}-\frac{1}{4}(x-1)^2+$ $+\frac{5}{16}(x-1)^3+\ldots$; в) $y=\frac{x-1}{2}-\frac{9}{16}(x-1)^2+\frac{109}{192}(x-1)^3+\ldots$; г) $y=1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\ldots$; д) $y=-x^2+x^3-x^4+x^5-\frac{3}{2}x^6+\ldots$; е) $y=-\frac{x^3}{3}+\frac{8}{15}x^5+a_7x^7+\ldots$ 4.8. а) $1/n$; б) $\sqrt{3/n}$; в) $(3n)^{-1/3}$; г) $\sqrt{3/(2n)}$; д), е) $2/n$; ж) $4/n^2$; з) $(2n)^{-1/4}$. 4.10. Например, $f(x)=$ $=x-x^2e^{-1/x}$ при $0<x\leqslant 1$, $f(x)=f(1)$ при $x>1$. 4.11. Если последовательность $\{x_n\}$ не становится стационарной, то $x_n\sim$ $\sim(-1)^n/\sqrt{2n}$ или $(-1)^{n-1}/\sqrt{2n}$ в зависимости от выбора x_0. В частности, первый случай осуществляется, если $0<x_0<1$. 4.13. $a_n\sim K_pn^{(1-p)/(1+p)}$, где $K_p=\left(\frac{1+p}{1-p}\left(\frac{2}{1+p}\right)^p\right)^{1/(p+1)}$.

4.14. $a_n \sim ((p+1)\ln n)^{1/(p+1)}$ при $p > -1$, $a_n \sim \sqrt{\pi n}$ при $p = -1$, $a_n \sim C_p n$ при $p < -1$, где C_p — константа, зависящая от p.

Глава VII

1.33. Нет. 1.36. а) $x^2/2$; б) $|x|^q/q$, где $q = p/(p-1)$; в) $+\infty$ вне промежутка $[\min f'; \max f']$; кусочно линейная функция, имеющая точками излома значения f' на промежутке $[\min f'; \max f']$; значения $(f^*)'$ суть точки излома функции f; г) $+\infty$ при $x \geqslant 0$, $-\frac{1}{q}|x|^q$ при $x < 0$, где $q = p/(p-1)$; д) $a\sqrt{1+x^2}$; е) $f(-x)$; ж) $x\ln x - x$ при $x > 0$, 0 при $x = 0$, $+\infty$ при $x < 0$. 2.12. $3a^2$.

3.3. а) $B_n(f_0; x) \equiv x$, $B_n(f_1; x) \equiv x$, $B_n(f_2; x) \equiv x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$; б) $\left(1 + x\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right)^n$.

4.3. При произвольных λ_i. 4.4. а), б) $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. 4.5. а), б) $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$ по модулю 1. 4.19. Только если $\{\varepsilon_k\}$ периодична. 4.20. Нет.

Глава VIII

1.4. а) 1/10; б) 4/10; в) 1/100; г) 1/2. 1.5. 1. 1.6. а) Да; б) нет. 1.11. а) Если $\varliminf (n_{k+1} - n_k) \geqslant 2$. 1.12. Да. 1.13. а) $l_n = 3^{-n}$; б) $l_n = \sum\limits_{k>n} (1/k!)$; в) если $n_{k+1} > n_k + 1$ бесконечно много раз; в этом случае $l_m = \sum\limits_{k>m} 2^{-n_k}$. 1.16. $a = \lambda_2(A)$, $b = L$, $c = \pi$, где L — длина кривой, ограничивающей множество A.

2.2. Например, $\sum\limits_{n\geqslant 1} 2^{-n}\chi_{(0;+\infty)}(t - r_n)$, где $\{r_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность всех рациональных чисел. 2.3. Да. 2.5. Тогда и только тогда, когда $\lambda_m\{x \in E \mid f(x) = t_0\} = 0$. 2.6. а), б), г) $F(x) = \pi + 2\arcsin x$ при $|x| \leqslant 1$, $F(x) = 0$ при $x < -1$, $F(x) = 2\pi$ при $x \geqslant 1$; в) $F(x) = 0$ при $x < -1$, $F(x) = \frac{2}{3}(\pi + 2\arcsin x)$ при $-1 \leqslant x \leqslant 0$, $F(x) = \frac{2}{3}(\pi + 4\arcsin x)$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $F(x) = 2\pi$ при $x > 1$. 2.7. а) Да; б) нет. 2.8. а) $F(t - C)$, $F(t/C)$, $F(\sqrt[3]{t})$; б) $F(t)$. 2.9. в) Вообще говоря, нет. 2.10. $f^*(\tau) = F^{-1}(\lambda_m(E) - \tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant \lambda_m(E)$. 2.11. а) $\sin((\pi - \tau)/2)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi)$; б) $\cos(\tau/4)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi)$; в) $\operatorname{ctg}\tau$ $(0 < \tau < \pi)$. 2.12. $f^*(\tau) = \sqrt{1 - \tau/\pi}$ $(0 \leqslant \tau \leqslant \pi)$.

3.1. $6C_N^3 - \left(6C_{N-1}^2 - 1\right)S_1 + 6(N-1)S_2$. 3.6. Да. 3.7. а) $p > 1$; б) $1 < p < 2$; в) $p < 1$; г) $p > 2$; д) $-1 < p < 2$. 3.8. а), б) Да; 0, 0; в) нет; 0, 0; г) нет; $-\pi$, π. 3.9. а) $p \leqslant 2$; б) $p < 1$; в) $p < 3$.

3.15. Нет, как видно на примере $E = (0;\ 1)$, $g \equiv 1$, $f(x) = e^{1/\sqrt{x}}$. 3.16. а) 1/2, 1/4; б) $1/(4n)$. 3.17. а) 1/10; б) 1/100. 3.18. 1/11. 3.19. а) 3; б) $F(t) = 0$ при $t \leqslant 1$, $F(t) = 1 - (2/3)^n$ при $n < t < n+1$; $f^*(\tau) = n$ при $(2/3)^n \leqslant \tau < (2/3)^{n-1}$.

3.25. $\dfrac{1}{\Gamma(n/2)} \displaystyle\int_0^{r^2/2} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t}\,dt.$ 3.26. $\dfrac{2}{\pi}\left(\operatorname{arctg} a - \dfrac{a}{1+a^2}\right)$.

3.27. $\pi^2 R^2 (4a^2 + R^2)$. 3.30. $2^n \Gamma^n (1 + 1/p)/\Gamma(1 + n/p)$.

3.31. а) $\dfrac{\Gamma((p+1)/2)\,\Gamma^2(n/2)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma((n-1)/2)\,\Gamma((n+p+1)/2)} \|a\|$. 3.35. б) Нет.

3.39. а) $\dfrac{2\pi^2}{m+n+1}\left(C^n_{m+n}\right)^{-1}$.

4.2. б) $\dfrac{1}{ea_1a_2\ldots a_n}\left(1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{(n-1)!}\right)$. 4.5. $\lambda_2(A) + L + 2\pi$, где L — длина кривой, ограничивающей множество A. 4.6. а) 1/2; б) 3/8; в) 1/2; г) 1/2; д) 1/2. 4.7. а), б) $p < 2\log_3 2$.

5.3. а), б) $\log_2 \log_2 (1/\varepsilon)$; в) $\dfrac{1}{2} \log_2 \log_2 (1/\varepsilon)$; г) $\dfrac{1}{\alpha+1} \log_2 (1/\varepsilon)$; д) $\log_2 (1/\varepsilon)$. 5.4. а) 1; б) 3/2. 5.5. а), б) 5/3; в) 4/3. 5.6. а), б), в) 2. 5.7. $\log_3 2$. 5.8. $(\ln(1/\varepsilon))/\ln\ln(1/\varepsilon)$. 5.11. $2 - \log_3 2$. 5.12. в) Нет. 5.19. а) $p = 1$, $\mu_1(A) = (b-a)/2$; б) $p = 1$, $\mu_1(A) = \pi$; в) $p = 2$, $\mu_2(A) = \pi^{-1}$; г) $p = n$, $\mu_n(A) = \alpha_n^{-1}$. 5.20. $p = \log_3 2$, $\mu_p(K) = 2^{-p}$. 5.21. а) $\dim_H(A) = M\text{-}\dim(A) = \log_3 2$; б) $\dim_H(A) = 0$, $M\text{-}\dim(A) = 1$; в) $\dim_H(A) = \log_3 2$, $M\text{-}\dim(A) = 1$.

5.24. а) $l_m = \sum\limits_{k>m} 2^{-n_k}$; б) 1/2; в) ∞. 5.26. $(\ln m)/\ln n$.

5.27. $\dim_H(A) = (\ln 5)/\ln 10$, $\dim_H(A + A) = (\ln 9)/\ln 10$.

6.2. а) Около 14 %; б) более 99 %. 6.3. Менее 0,25 %. 6.4. Вероятность того, что $|x_1| < \varepsilon$, стремится при $n \to \infty$ к единице для любого $\varepsilon > 0$. 6.5. $\sqrt{2}$. 6.10. б) 1/2. 6.18. Отношение объемов куба и шара эквивалентно: а) $\sqrt{\pi e n}\left(\dfrac{2}{\pi e}\right)^{n/2}$; б) $\sqrt{\pi e n}\left(\dfrac{8}{\pi e}\right)^{n/2} e^{\sqrt{n}}$. В случае б) шар содержится в кубе при $n \leqslant 9$. 6.19. $\rho_n = \sqrt{n} + o(1)$. 6.22. б) $\dfrac{\varepsilon^n}{\sqrt{2}} (2e/\pi)^{n/2} e^{\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{n} - \frac{1}{2\varepsilon^2}}$.

Глава IX

1.1. Сходимость по мере есть во всех случаях, кроме д). Суммируемая мажоранта есть только в случаях б), г). 1.10, 1.11. Утверждение верно и для $\mathbb{R}$. 1.12. При замене (0; 1) на $\mathbb{R}$ теорема перестает быть верной. **1.14.** Если условие нарушено, то утверждение неверно. **1.15.** а), б) Да; в) нет.

2.11. π^2. **2.19.** $\varphi(1/2\pi)$.

3.1. г) $1-2x$. **3.4.** а) $(\sin t)t$; б) $e^{-it/2}\int\limits_0^1 e^{ixt}d\sigma(x)$; в) $\prod\limits_{k=1}^{n}\operatorname{ch}(zc_k)$. **3.12.** а) F — канторова функция; б) $F(t)=(1+t)/2$ при $|t|\leqslant 1$, $F(t)=(1+\operatorname{sing} t)/2$ при $|t|\geqslant 1$.

4.1. а), б) $f_{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$; в) $f_{c_1+c_2}$. **4.9.** Нет. **4.18.** а), б) $\widehat{f_c}=(2\pi/c)^{n/2}f_{1/c}$; в) $e^{-|cs|}$. **4.27.** Нагрузка в нуле или мера с плотностью $(2\pi c)^{-n/2}e^{-\|x\|^2/(2c)}$ $(c>0)$.

Глава X

1.2. а) Нет; б) да; в) нет. **1.3.** $h(x)=1-x$, $k(x)=-x$. **1.13.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет; д) да. **1.14.** а) $b=(a^2-2a)/4$, $a\in\mathbb{R}$; б) для $a\geqslant -1/4$, $a\neq 0$: $b=1\pm\sqrt{1+4a}$; для $a=0$: $b=0$; $b\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$; г) для $a=b(b-2)/4$ при $b\in[0;\,2)\cup(2;\,4)$; при этом $\Delta=[-x_1;\,x_1]$ при $a\in[-1/4;\,0]$, $b\in[0;\,1]$; $\Delta=[-x_2;\,x_2]$ при $a\in[-1/4;\,0]$, $b\in[1;\,2]$; $\Delta=[x_1;\,-x_1]$ при $a\in(0;\,2]$, $b\in(2;\,4)$, где x_1, x_2 $(x_1\leqslant x_2)$ — корни уравнения $f(x)=x$. **1.19.** а) 0); б) 2; в) -2; г) 1; д) 1; е) 1; ж) $\sqrt{5}-1$. **1.20.** б) $\lim x_n=0$ при $x_0\in(-1;\,2)$; $\lim x_n=2$ при $x_0\in\{-1;\,2\}$, $\lim x_n=+\infty$ при остальных значениях x_0; в) предел равен $(1-\sqrt{1-4a})/2a$ при $|x_0|<(1+\sqrt{1-4a})/2a$, $(1+\sqrt{1-4a})/2a$ при $|x_0|=(1+\sqrt{1-4a})/2a$, $+\infty$ при остальных x_0; г) предел равен $(-1+\sqrt{1+4a})/2a$ при $|x_0|<(1+\sqrt{1+4a})/2a$, $(-1-\sqrt{1+4a})/2a$ при $|x_0|=(1+\sqrt{1+4a})/2a$, $+\infty$ при остальных x_0; д) предел равен $(1-\sqrt{1-4c})/2$ при $|x_0|<(1+\sqrt{1-4c})/2$, $(1+\sqrt{1-4c})/2$ при $|x_0|=(1+\sqrt{1-4c})/2$, $+\infty$ при остальных x_0; е) предел равен c при $x_0\in[c-1;\,c]$; $+\infty$ при остальных x_0; ж) $\lim x_n=1/3$ при $x_0\neq 1$, $\lim x_n=1$ при $x_0=1$; з) предел равен 0 при $|x_0|<1/\sqrt{5}$; ± 1 при $|x_0|>1/\sqrt{5}$, не существует при $|x_0|=1/\sqrt{5}$. **1.22.** а), б) $x_n\to 1/(1+a)$ при $|a|<1$ и любом x_0, при остальных a последовательность либо расходится, либо стабилизируется; в) при $a\leqslant 3/4$ — см. ответ к задаче 1.20.в), при $a>3/4$ последовательность либо расходится, либо стабилизируется; г) при $a\in[e^{-e};\,1]$ для всех $x_0\in\mathbb{R}$ последовательность $\{x_n\}$ сходится к единственной неподвижной точке f; при $a\in(1;\,e^{1/e})$ имеем $\lim x_n=\bar{x}$ при $x_0<\bar{\bar{x}}$, $\lim x_n=\bar{\bar{x}}$

при $x_0 = \bar{\bar{x}}$, $\lim x_n = +\infty$ при $x_0 > \bar{\bar{x}}$, где $\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}$ $(\bar{x} < \bar{\bar{x}})$ — неподвижные точки f; при остальных a последовательность $\{x_n\}$ либо расходится, либо стабилизируется. **1.32.** а), б) При $a = 1$ имеется континуум 2-циклов $\{t;\ 1 - t\}$ $(t \in [0;\ 1/2))$ при $a > 1$ — один отталкивающий 2-цикл $\{(1 - a)/(1 + a^2);\ (1 + a)/(1 + a^2)\}$ и от одного до трех отталкивающих 4-циклов; в) при $a > (1 + \sqrt{5})/2 = 1{,}618\ldots$ имеется два отталкивающих 3-цикла:

$$\left\{\frac{1 - a - a^2}{1 + a^3};\ \frac{1 + a - a^2}{1 + a^3};\ \frac{1 + a + a^2}{1 + a^3}\right\}$$

и

$$\left\{\frac{1 - a + a^2}{1 - a^3};\ \frac{1 + a - a^2}{1 - a^3};\ \frac{1 - a - a^2}{1 - a^3}\right\},$$

при $a = (1 + \sqrt{5})/2$ они сливаются в один. **1.33.** а) $a = 3/4$; б), в) $a = 5/4$; г) $a = 7/4$. **1.34.** а) $b = 3$; б), в) $b = 1 + \sqrt{6} = 3{,}449\ldots$; г) $b = 1 + 2\sqrt{2} = 3{,}828\ldots$ **1.41.** б) Нет.

2.6. а) $d\mu = \dfrac{A\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$; б) $d\mu = \dfrac{A\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ при $|x| < 1$, $d\mu = \dfrac{B\,dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$ при $|x| > 1$ $(A,\ B > 0)$. **2.10.** а) Да, $d\mu = \dfrac{dx}{|x|}$ $(x \neq 0)$; б) нет. **2.11.** а) Да, $d\mu = \dfrac{dx}{x\,|\ln x|}$ $(x \neq 0,\ 1)$; б) нет. **2.14.** а) $p_{ij} = \lambda(\Delta_j \cap T^{-1}(\Delta_i))/\lambda(\Delta_i)$. **2.15.** $d\mu = f\,dx$, где а) $f(x) = 0$ при $x < 1/2$, $f(x) = f(3/2 - x)$ при $x > 1/2$; б) $f(x) = 1/5$ при $x < 1/3$, $f(x) = 2/5$ при $x > 1/3$; в) предельная мера сосредоточена в точке 0. **2.16.** $d\mu = \dfrac{dx\,dy}{y^2}$. **2.17.** $d\mu_L = \dfrac{dx\,dy}{x^2}$, $d\mu_R = \dfrac{dx\,dy}{x}$. **2.21.** а) Да, если и только если α иррационально; б) да; в) да; г), д) да, если и только если среди собственных чисел матрицы A нет корней из единицы. **2.23.** $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ должны быть линейно независимы над $\mathbb{Q}$ по модулю 1. **2.27.** $\mu(A)$. **2.30.** $1/2$; $1/p$. **2.34.** $\lg(1 + 1/p)$.

ДОПОЛНЕНИЕ I

Мы установим здесь один интересный факт, показывающий, что арифметические свойства вещественного числа, обсуждавшиеся в главе I, могут неожиданно сыграть решающую роль в исследованиях, на первый взгляд далеких от этой тематики.

Тригонометрическим многочленом от двух переменных x, $y \in \mathbb{R}$ будем называть сумму.

$$T(x;\ y) = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} c_{n,m} e^{i(nx+my)},$$

в которой лишь конечное число коэффициентов $c_{n,m} \in \mathbb{C}$ отлично от нуля. Рассмотрим проектор P_Ω, действующий в множестве всех таких многочленов:

$$P_\Omega T(x;\ y) = \sum_{(n;m) \in \Omega} c_{n,m} e^{i(nx+my)}$$

(Ω — некоторое подмножество в $\mathbb{Z}^2$). Будем называть проектор P_Ω *ограниченным*, если существует такое число $C_\Omega > 0$, что для всякого многочлена T справедливо неравенство

$$\max_{x,y} |P_\Omega T(x;\ y)| \leqslant C_\Omega \max_{x,y} |T(x;\ y)|. \qquad (*)$$

Мы рассмотрим простой случай, когда Ω — полоса, т. е.

$$\Omega = \{(n;\ m) \in \mathbb{Z}^2 \mid |m - \lambda n| \leqslant \Delta\} \quad (\lambda \in \mathbb{R},\ \Delta > 0).$$

Оказывается, ограниченность такого проектора равносильна рациональности коэффициента λ (см. работу Э. С. Белинского в сборнике «Теория отображений и приближение функций», Киев, 1983).

Прежде чем доказывать это утверждение рассмотрим аналогичную задачу в одномерном случае: для любого тригонометрического многочлена

$$Q(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$$

(среди коэффициентов $c_k \in \mathbb{C}$ лишь конечное число отличных от нуля) положим

$$PQ(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z},\ |k| \leqslant N} c_k e^{ikt}.$$

Будем считать, что $N \geqslant 2$ и $N \in \mathbb{N}$. Так как PQ — частичная сумма ряда Фурье функции Q, то

$$PQ(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q(t+s) \frac{\sin(N+1/2)s}{2\sin s/2} ds.$$

Поэтому проектор P ограничен: $|PQ(t)| \leqslant C \max_t |Q(t)|$, причем

$$C \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(N+1/2)s}{2\sin s/2} \right| ds.$$

Из результата задачи IV.6.6 следует, что $C \leqslant \mathrm{const} \ln N$. Пример многочлена

$$Q_0(t) = e^{iNt} \sum_{1 \leqslant k \leqslant N} \frac{1}{k} \sin kt = \frac{1}{2i} \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 2N \\ k \neq N}} \frac{1}{k-N} e^{ikt}$$

показывает, что оценку для C существенно улучшить нельзя: с одной стороны (см. IV.6.15) $|Q_0(t)| \leqslant A$ (число A не зависит от t и N), а с другой стороны,

$$PQ_0(t) = \frac{1}{2i} \sum_{1 \leqslant k < N} \frac{1}{k-N} e^{ikt},$$

и поэтому

$$\max_t |PQ_0(t)| = |PQ_0(0)| = \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant k < N} \frac{1}{N-k} > \frac{1}{2} \ln N.$$

Таким образом, в одномерном случае $C \asymp \ln N$.

Для лучшего понимания дальнейших руссуждений отметим принципиальное различие между полосой с рациональным коэффициентом наклона и полосой, коэффициент наклона которой иррационален. Именно это различие порождает обсуждаемый эффект. В случае рационального коэффициента наклона для любой прямой $L \subset \mathbb{R}^2$ справедлива альтернатива: либо $L \subset \Omega$, либо множество $L \cap \Omega$ содержит ограниченное число целочисленных точек (верхняя граница зависит от полосы Ω). Если же $\lambda \notin \mathbb{Q}$, то ситуация иная: можно провести такую прямую L, что множество $L \cap \Omega$ будет содержать сколь угодно большую серию целочисленных точек, координаты которых образуют арифметическую прогрессию.

Рассмотрим теперь проектор на полосу с рациональным коэффициентом наклона. Пусть $\lambda = p/q$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, p и q взаимно простые. Подберем такие целые числа p_0 и q_0, что $pp_0 + qq_0 = 1$. Целочисленная матрица $\begin{pmatrix} p & -q \\ q_0 & p_0 \end{pmatrix}$ задает линейное отображение, которое биективно отображает $\mathbb{Z}^2$ на себя (так как определитель матрицы равен единице, то обратная матрица целочисленная). Сделаем замену

$$\begin{cases} n' = np - mq, \\ m' = nq_0 + mp_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = xp_0 - yq_0, \\ y' = xq + yp. \end{cases}$$

Тогда

$$T(x;\ y) = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} c_{n,m} e^{i(nx+my)} = \\ = \sum_{n',m'\in\mathbb{Z}} c'_{n',m'} e^{i(n'x'+m'y')} = T'(x';\ y')$$

$\left(\text{здесь } c'_{n',m'} = c_{n'p_0+m'q,m'p-n'q_0}\right)$. Так как неравенство $|m - \lambda n| \leqslant \Delta$ равносильно неравенству $|n'| \leqslant q\Delta$, то в новых координатах проектор P_Ω записывается следующим образом:

$$P_\Omega T(x;\ y) = \sum_{n',m'\in\mathbb{Z},\,|n'|\leqslant q\Delta} c'_{n',m'} e^{i(n'x'+m'y')}.$$

Следовательно, действие проектора P_Ω сводится к действию одномерного проектора по переменной x', и поэтому $C_\Omega \leqslant \leqslant \mathrm{const}\ln(2 + q\Delta)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\lambda \notin \mathbb{Q}$. Подберем такую несократимую дробь p/q, что $|\lambda - p/q| \leqslant q^{-2}$. Пусть L — прямая, проходящая через точки $(0;\ 0)$ и $(q;\ p)$. Так как p и q взаимно просты, то все целочисленные точки на L имеют вид $(kq;\ kp)$, $k \in \mathbb{Z}$. Ясно, что

$$\Omega \cap L = \{(kq;\ kp) \mid k \in \mathbb{Z},\ |k| \leqslant N\}$$

при некотором $N > 0$. Покажем, что $N \geqslant q\Delta$. Для этого представим число λ в виде $\lambda = p/q + \theta/q^2$, $|\theta| \leqslant 1$. При $|k| \leqslant q\Delta$ имеем

$$|kp - \lambda kq| = |k|\,|p - (p/q + \theta/q^2)q| = |k\theta|/q \leqslant |k|/q \leqslant \Delta,$$

т. е. $(kq;\ kp) \in \Omega \cap L$ для таких k.

Рассмотрим действие проектора P_Ω на многочлены T, у которых коэффициенты $c_{n,m}$ равны нулю при $(n;\ m) \notin L$, т. е. на многочлены $T(x;\ y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ik(qx+py)}$. Ясно, что

$$P_\Omega T(x;\ y) = \sum_{k\in\mathbb{Z},\,|k|\leqslant N} a_k e^{ik(qx+py)}.$$

Из рассмотрения одномерного случая следует, что ограниченность проектора P_Ω, т. е. неравенство $(*)$, возможно лишь при

$$C_\Omega \geqslant \mathrm{const}\ln N \geqslant \mathrm{const}\ln(q\Delta).$$

Так как знаменатель q может принимать сколь угодно большие значения, то $C_\Omega = +\infty$ для полосы с иррациональным коэффициентом наклона.

ДОПОЛНЕНИЕ II

Пусть частичные суммы $S_n(x)$ тригонометрического ряда

$$a_0/2 + \sum (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

с вещественными коэффициентами неотрицательны на множестве $E \subset [0;\ 2\pi]$ и $\lambda(E) > 0$. Тогда $S_n(x) = o(n^2)$ почти везде на E (в частности, a_n, $b_n = o(n^2)$).

Таким образом, ограниченность частичных сумм тригонометрического ряда снизу возможна лишь в случае, когда эти суммы не слишком велики сверху. Этот результат, полученный Дарсоу (см. J. London Math. Soc., v. 35 : 2, 1960) был существенно усилен С. В. Конягиным (см. Мат. заметки.— 1988.— Т. 44, № 6), доказавшим, что неотрицательность частичных сумм на множестве положительной меры влечет их ограниченность почти везде на этом множестве. Следовательно, тригонометрический ряд не может расходится к $+\infty$ на множестве положительной меры. Более того, для произвольного вещественного тригонометрического ряда с не обязательно положительными частичными суммами на множестве E, $\lambda(E) > 0$, справедлива альтернатива: либо последовательность $\{S_n(x)\}$ ограничена для почти всех $x \in E$, либо $\varliminf\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = -\infty$ и $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = +\infty$ для почти всех $x \in E$. Если же $\lambda(E) = 0$, то, как показал А. М. Олевский (см. Collog. math., 1990, v. 60—61, № 2), существует ряд Фурье, у которого сумма равна $+\infty$ на E и конечна вне E.

Мы докажем лишь более простое утверждение, сформулированное в начале этого дополнения. Для доказательства нам потребуется хорошо известный факт — почти все точки измеримого множества E являются его точками плотности:

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{2\varepsilon} \lambda(E \cap (x-\varepsilon;\ x+\varepsilon)) = 1$$

для почти всех $x \in E$.

Пусть x — какая-то точка плотности множества E. Точка 0 — точка плотности множества $F = \{t - x|\ t \in E\} \cap \{x - t|\ t \in E\}$. Зафиксируем числа u и v, $\pi/2 < u < v < \pi$; их выбор уточним позже. Так как 0 — точка плотности множества F, то для достаточно больших n множество $F \cap [u/n;\ v/n]$ не пусто, т. е. можно указать такой номер N, что для всех $n \geqslant N$ существует $\varphi_n \in F$: $u \leqslant n\varphi_n \leqslant v$. Пользуясь тем, что $x \pm \varphi_n \in E$ для $n \geqslant N$, получаем $S_n(x \pm \varphi_n) \geqslant 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant (S_n(x+\varphi_n) + S_n(x-\varphi_n))/2 = \\ &= a_0/2 + \sum_{1\leqslant k\leqslant n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\cos k\varphi_n = \\ &= S_n(x)\cos n\varphi_n + \sum_{0\leqslant k<0} S_k(x)(\cos k\varphi_n - \cos(k+1)\varphi_n). \end{aligned}$$

Таким образом, при $n \geqslant N$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} S_n(x) &\leqslant \frac{-1}{\cos n\varphi_n} \sum_{0\leqslant k<n} S_k(x) 2\sin\frac{\varphi_n}{2}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi_n \leqslant \\ &\leqslant \frac{-v}{n\cos u} \sum_{0\leqslant k<u} S_k(x). \end{aligned}$$

Пусть $w = -v/\cos u$ $(w > 1)$, $\sigma_n = S_0(x) + \ldots + S_n(x)$. Тогда $\sigma_n - \sigma_{n-1} \leqslant \frac{w}{n}\sigma_{n-1}$, и поэтому $\sigma_n \leqslant (1 + w/n)\sigma_{-1} \leqslant (1 + 1/n)^w\sigma_{-1}$,

Следовательно,

$$\sigma_n \leqslant (1+1/n)^w (1+1/(n-1))^w \sigma_{n-2} \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant \left(\frac{n+1}{n}\,\frac{n}{n-1}\ldots\frac{N+1}{N}\right)^w \sigma_{N-1} \leqslant (n+1)^w \sigma_{N-1}.$$

Итак,

$$S_n(x) = \sigma_n - \sigma_{n-1} \leqslant \frac{w}{n}\,\sigma_{n-1} \leqslant wn^{w-1}\sigma_{N-1} = O\left(n^{w-1}\right).$$

Осталось заметить, что $\inf\limits_{(\pi/2;\pi)} (-u/\cos u) < 3$, и поэтому можно так подобрать параметры u и v, что $w = -u/\cos v < 3$.

ДОПОЛНЕНИЕ III

Рассмотрим хорду, получающуюся при пересечении выпуклой замкнутой кривой Г и прямой L. С какой скоростью убывает длина хорды, если прямая L, не меняя своего направления, приближается к некоторой опорной прямой? Ясно, что это определяется порядком касания опорной прямой и кривой Г. Длина хорды может вообще не стремиться к нулю, если кривая Г содержит отрезок, параллельный прямой L. Интуитивно ясно, что это исключительный случай. То же самое можно предположить о касании порядка выше двух. Иначе говоря, для «большей части» опорных прямых порядок их касания с кривой Г не выше двух, и поэтому для длин соответствующих хорд справедлива оценка $O(\sqrt{\varepsilon})$ (ε — расстояние между прямой L и параллельной ей опорной прямой). Одним из возможных истолкований этого нечеткого утверждения, дающим количественную оценку, является неравенство

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mu^2(\varphi;\ \varepsilon)\, d\varphi \leqslant \mathrm{const}\, \varepsilon.$$

Здесь $\mu(\varphi;\ \varepsilon)$ — длина хорды, отстоящей от опорной прямой на расстояние ε; угол φ задает направление опорной прямой (вектор $e_\varphi = (\cos\varphi;\ \sin\varphi)$ перпендикулярен ей и направлен в сторону от кривой Г); константа зависит только от Г. Таким образом, в среднем по всем поворотам опорной прямой скорость убывания длины хорды в кривой Г не меньше чем в окружности.

Мы докажем, что константа, стоящая в правой части неравенства, определяется лишь двумя величинами r и R, если кривая содержится в круге радиуса R и содержит круг радиуса r. Доказывая такое неравенство, можно считать, что Г — гладкая строго выпуклая кривая.

Обозначим через y_φ ту точку на Г, в которой вектор e_φ является внешней нормалью к Г. Достаточно доказать, что для малых $\varepsilon > 0$ (например, $\varepsilon < r/2$) справедливо неравенство

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\mu_2'(\varphi;\ \varepsilon)\right)^2 d\varphi \leqslant \frac{C_{r,R}}{\varepsilon}.$$

Отсюда следует требуемое неравенство, так как

$$\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}(\mu(\varphi;\varepsilon))^2 d\varphi}=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{\varepsilon}\mu_2'(\varphi;\delta)\,d\delta\right)^2 d\varphi}\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{\varepsilon}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\mu_2'(\varphi;\delta)\right)^2 d\varphi}\,d\delta\leqslant\int_0^{\varepsilon}\frac{\sqrt{C_{r,R}}}{\sqrt{\delta}}\,d\delta=2\sqrt{C_{r,R}}\sqrt{\varepsilon}.$$

Для каждого φ через $\varphi+\Delta(\varphi)$ (соответственно, $\varphi-\delta(\varphi)$) обозначим угол наклона внешней нормали к Γ в конце (соответственно, в начале) хорды длиной $\mu(\varphi;\varepsilon)$ ортогональной вектору e_φ (углы $\Delta(\varphi)$ и $\delta(\varphi)$ зависят от ε). Нетрудно видеть, что $0<\delta(\varphi)$, $\Delta(\varphi)\leqslant\theta_{r,R}<\pi$ при $\varepsilon\in(0;\ r)$. Так как $\mu_2'(\varphi;\varepsilon)=\operatorname{ctg}\Delta(\varphi)+\operatorname{ctg}\delta(\varphi)$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\mu_2'(\varphi;\varepsilon)\right)^2 d\varphi\leqslant 2\int_{-\pi}^{\pi}\left(\operatorname{ctg}^2\Delta(\varphi)+\operatorname{ctg}^2\delta(\varphi)\right)d\varphi.$$

Для оценки получившегося интеграла впишем в кривую Γ ломаную, каждое звено которой стягивает дугу «высотой» ε. Эта ломаная, вообще говоря, не замкнута, и поэтому ее первое и последнее звенья пересекаются. Рассмотрим три соседних звена. Пусть они стягивают дуги, длины которых равны l_-, l_0, l_+. Пусть вектор e_{φ_0} перпендикулярен средней хорде (т. е. y_{φ_0} — «вершина» средней дуги). Точка $y_{\varphi_0-\delta(\varphi_0)}$ разделяет дуги длиной l_- и l_0, а точка $y_{\varphi_0+\Delta(\varphi_0)}$ — дуги длиной l_0 и l_+. Докажем, что

$$\int_{\varphi_0-\delta(\varphi_0)}^{\varphi_0+\Delta(\varphi_0)}\left(\operatorname{ctg}^2\Delta(\varphi)+\operatorname{ctg}^2\delta(\varphi)\right)d\varphi\leqslant A_{r,R}\left(l_-+l_0+l_+\right)/\varepsilon.\qquad(*)$$

Достаточно оценить интеграл по промежутку $[\varphi_0;\ \varphi_0+\Delta(\varphi_0)]$. При этом, не умаляя общности, можно считать, что $\varphi_0=0$. Положим $\Delta=\Delta(0)$. Отметим сначала равномерные по $\varphi\in[0;\ \Delta]$ оценки:

$$|\operatorname{ctg}\Delta(\varphi)|\leqslant B_{r,R}(l_0+l_+)/\varepsilon \text{ и } |\operatorname{ctg}\delta(\varphi)|\leqslant B_{r,R}(l_0+l_+)/\varepsilon.$$

Мы проверим лишь первое из этих неравенств. Для этого введем систему координат u и v с центром в точке y_φ так, что положительное направление оси OU совпадает с вектором $e_{\varphi+\pi}$, а оси OV — с вектором $e_{\varphi-\pi/2}$ (кривая Γ лежит в полуплоскости $u\geqslant 0$). В новых координатах кривую можно представить как объединение графиков вогнутой функции M и выпуклой функции N, заданных на некотором промежутке $[0;\ \bar u]$, $\bar u\geqslant 2r$. Нетрудно видеть, что $|N(u)|$, $|M(u)|\leqslant D_{r,R}\mu(u;\ \varphi)$ при $u\in[0;\ r]$. Если $\Delta(\varphi)\leqslant\pi/2$, то, пользуясь вогнутостью функции M, получаем

$$0<\operatorname{ctg}\Delta(\varphi)=M'(\varepsilon)\leqslant M(\varepsilon)/\varepsilon\leqslant D_{r,R}\mu(\varphi;\ \varepsilon)/\varepsilon\leqslant D_{r,R}(l_0+l_+)/\varepsilon.$$

Если же $\Delta(\varphi)>\pi/2$, то

$$|\operatorname{ctg}\Delta(\varphi)|\leqslant(|N(\varepsilon)|+\mu(\varphi;\ \varepsilon))/\varepsilon\leqslant(1+D_{r,R})(l_0+l_+)/\varepsilon.$$

Для оценки интеграла от $\operatorname{ctg}^2 \Delta(\varphi)$ заметим, что функция $\alpha(\varphi) = \varphi + \Delta(\varphi)$ возрастает, и поэтому $\alpha(\varphi) \geqslant \alpha(0)$, т. е. $\Delta(\varphi) \geqslant \Delta - \varphi$. Учитывая, что $\Delta(\varphi) \leqslant \theta_{r,R} < \pi$, получаем отсюда $\operatorname{ctg} \Delta(\varphi) = O(1/(\Delta - \varphi))$. Итак,

$$|\operatorname{ctg} \Delta(\varphi)| \leqslant L_{r,R} \min\left(\frac{1}{\Delta - \varphi}; \frac{l_0 + l_+}{\varepsilon}\right).$$

Следовательно,

$$\int_0^{\Delta} \operatorname{ctg}^2 \Delta(\varphi)\, d\varphi \leqslant 2L_{r,R}(l_0 + l_+)/\varepsilon.$$

Для оценки интеграла от $\operatorname{ctg}^2 \delta(\varphi)$ заметим, что $\operatorname{ctg} \delta(\varphi) = O(1/\varphi)$. Действительно, так как $\delta(\varphi) \leqslant \theta_{r,R} < \pi$, то достаточно рассмотреть случай $\delta(\varphi) < \pi/2$ и, следовательно, $0 < \operatorname{ctg} \delta(\varphi) \leqslant |N(\varepsilon)|/\varepsilon$. Поскольку $|N(\varepsilon)| \sin \varphi \leqslant 2\varepsilon$, $0 \leqslant \operatorname{ctg} \delta(\varphi) \leqslant 2/\sin \varphi = O(1/\varphi)$ (так как $0 \leqslant \varphi \leqslant \Delta \leqslant \theta_{r,R} < \pi$). Итак

$$|\operatorname{ctg} \delta(\varphi)| \leqslant L_{r,R} \min\left(\frac{1}{\varphi}; \frac{l_0 + l_-}{\varepsilon}\right).$$

Следовательно,

$$\int_0^{\Delta} \operatorname{ctg}^2 \delta(\varphi)\, d\varphi \leqslant 2L_{r,R}(l_0 + l_-)/\varepsilon.$$

Неравенство (*) доказано. Суммируя все такие неравенства, соответствующие различным звеньям ломаной, получаем (l_Γ — длина Г):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\mu_2'(\varphi; \varepsilon)\right)^2 d\varphi \leqslant 2 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\operatorname{ctg}^2 \Delta(\varphi) + \operatorname{ctg}^2 \delta(\varphi)\right) d\varphi \leqslant \frac{8}{3} A_{r,R} l_\Gamma.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акилов Г. П., Макаров Б. М., Хавин В. П. Элементарное введение в теорию интеграла.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1969.
2. Бернштейн С. Н. О сходимости некоторых последовательностей многочленов // Бернштейн С. Н. Собрание сочинений.— 1954. Т. 2.— С. 187—196.
3. Биллингслей П. Эргодическая теория и информация.— М.: Мир, 1969.
4. Вулих Б. З. Краткий курс теории функций вещественной переменной.— М.: Наука, 1973.
5. Гельфонд А. О., Линник Ю. В. Элементарные методы в аналитической теории чисел.— М.: Физматгиз, 1962.
6. Дороговцев А. Я. Математический анализ. Сборник задач.— К.: Вища школа, 1987.
7. Зорич В. А. Математический анализ, ч. 1 и 2.— М.: Наука, 1981, 1984.
8. Иванов Л. Д. Вариации множеств и функций.— М.: Наука, 1975.
9. Канторович Л. В. О сходимости последовательности полиномов С. Н. Бернштейна за пределами основного интервала // ИАН, ОМЕН, 1931.— С. 1103—1115.
10. Карлесон Л. Избранные проблемы теории исключительных множеств.— М.: Мир, 1971.
11. Кахан Ж.-П. Случайные функциональные ряды.— М.: Мир, 1973.
12. Кац М. Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел.— М.: ИЛ, 1963.
13. Келли Д. Л. Общая топология.— М.: Наука, 1968.
14. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. 6-е изд.— М.: Наука, 1989.
15. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория.— М.: Наука, 1980.
16. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ, т. 1 и 2.— М.: Высшая школа, 1970.
17. Левитан Б. М. Почти периодические функции.— М.: Гостехиздат, 1953.
18. Лозановский Г. Я. Характеризация степенной функции посредством функциональных неравенств // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений, вып. 2.— Ярославль, 1977.— С. 162—165.
19. Математика сегодня/Научный сборник под ред. А. Я. Дороговцева.— К.: Вища школа, 1982.

20. Партасарати К. Введение в теорию вероятности и теорию меры.— М.: Мир, 1983.
21. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа, т. 1, 2.— М.: Наука, 1978.
22. Решетняк Ю. Г. Сборник задач по курсу математического анализа.— Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 1979.
23. Рудин У. Основы математического анализа.— М.: Мир, 1976.
24. Садовничий В. А., Григорьян А. А., Конягин С. В. Задачи студенческих математических олимпиад.— М.: Изд-во Московского ун-та, 1987.
25. Садовничий В. А., Подколзин А. С. Задачи студенческих олимпиад по математике.— М.: Наука, 1980.
26. Сергеев В. Н., Тоноян Г. А. Студенческие математические олимпиады.— Ереван: Изд-во Ерев. ун-та, 1985.
27. Титчмарш Е. Теория функций.— 2-е изд.— М.: Наука, 1980.
28. Урысон П. С. Труды по топологии и другим областям математики, ч. 1.— М.; Л.: Гостехиздат, 1951.
29. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, II, III.— М.: Наука, 1969.
30. Шарковский А. Н. Сосуществование циклов непрерывного отображения прямой на себя // Укр. мат. журн.— 1964.— Т. 16, № 1.— С. 61—71.
31. Шварц Л. Математические методы для физических наук.— М.: Мир, 1965.
32. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа.— М.: Наука, 1987.
33. Collet P., Eckmann J.-P. Iterated maps on the interval as dynamical systems.— Basel: Birkhäuser, 1980.
34. Connes A., Haagerup U., Stormer E. Diameters of state spaces of type III factors // Lect. Notes Math.— 1985.— V. 1132.— P. 91—116.
35. Dekking M., Mendès France M., van der Poorten A. J. Folds! // Math. Intelligencer.— 1982.— V. 4, No 3.— P. 134—138.
36. Grothendieck A. Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques // Bol. Soc. Mat. São Paulo.— 1956.— V. 8, No 1—2.— P. 1—79.
37. Haagerup U. The best constants in the Khintchine inequality // Proc. Inter. Conf. «Operator algebras, ideals and their applications in theoretical physics», Leipzig, 1977, Teubner Texte Math.— 1978.— Leipzig.— S. 69—79.
38. Klambauer G. Problems and propositions in analysis.— N. Y., 1979.
39. Li T.-Y., Yorke J. A. Period three implies chaos // Amer. Math. Monthly.— 1975.— V. 82, No 10.— P. 985—992.
40. Lorentz G. G. Approximation of functions.— N. Y., 1966.
41. McGehee O. C., Pigno L., Smith B. Hardy inequality and the L^1 norm of exponential sums // Ann. of Math.— 1981.— V. 113, No 3.— P. 613—618.
42. Mendès France M., Tenenbaum G. Dimension des courbes planes, papiers pliés et suites de Rudin-Shapiro // Bull. Soc. Math. France.— 1981.— V. 109, No 2.— P. 207—215.
43. Singer D. Stable orbits and bifurcations of maps of the interval // SIAM J. Appl. Math.— 1978.— V. 35, No 2.— P. 260—267.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Makarov B. M., Goluzina M. G.,
Lodkin A. A., Podkorytov A. N.

SELECTED PROBLEMS IN ANALYSIS

Moscow, Nauka, Main Editorial Board for Physical and Mathematical Literature, 1992.

The book is a collection of problems in diverse areas of real analysis, both classical and comparatively recent. It can be viewed as a source of training material for future research mathematicians, providing a wide range of exercises, either clarifying some fundamental idea or introducing a useful technical tool.

The problems are organized in several sections, each one beginning with rather simple exercizes which are followed by a series of nonstandard problems. Some of these problems reflect recent achievements in the field. Although the average degree of difficulty is rather high, the book is nevertheless accessible to a wide range of students because almost all problems are supplied with solutions or instructions.

The book is aimed at students working without assistance and at instructors giving special tasks to students or running special seminars in different areas of analysis. The reader will find in it (sequences of) problems on some classical but not commonplace topics such as Rademacher functions, Khinchin inequality and its applications, p-dimensional Hausdorff measures, Pompeiu and Uryson examples, Minkowsky theorem, Bernstein polynomials, almost periodic functions and sequences, ergodicity. Among contemporary items included in the book are: The Luttlewood conjecture, Rudin-Shapiro polynomials, iterations of maps of an interval.

The book can be roughly divided into two parts. The first one (Chapters I—VII), containing about 580 problems, encircle classical material for undergraduate students of mathematical departments of universities. Basic notions such as set theory and continuity occupy relatively small place, the attention being focused on principal technical methods of classical analysis. In particular, there are many problems on asymptotics of integrals and sums, on convex functions and some other questions which are not, unfortunately, fairly presented in the existing textbooks.

The second part (Chapters VIII — X) indludes approximately 300 problems concentrating (mostly) around measure theory, Lebesgue integral, convergence of sequences of measurable functions. Many of these problems, of interest by themselves, bring the reader to a wide range of ideas and methods of the probability theory such as: independence, the law of large numbers, martingales, and so on. The asymptotics motif is extended here by problems on ε-entropy of sets (§ 5 of Ch. VIII) and problems on asymptotics of integrals of high dimension (§ 6 of Ch. VIII). The last chapter serves as an elementary introduction to topological dynamics on an interval and to ergodic theory (invariant measures, individual ergodic theorem, Perron-Frobenius operator are among the notions introduced and discussed here).