В.С.Шипачев

ЗАДАЧНИК ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Издание второе, исправленное

Рекомендовано
Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений

Москва
«Высшая школа»
2000

УДК 51
ББК 22.11
Ш 63

Рецензенты: кафедра высшей математики Московского государственного автомобильно-дорожного института и д-р физ.-мат. наук В. В. Федоров (Московский государственный авиационный технологический университет).

Шипачев В. С.

Ш 63 Задачник по высшей математике: Учеб. пособие для вузов. — 2-е изд., испр. — М.: Высш. шк., 2000. — 304 с.: ил.

ISBN 5-06-003575-1

Пособие написано в соответствии с программой по высшей математике для вузов. Содержит задачи и примеры по следующим важнейшим разделам: теория пределов, аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве, дифференциальное и интегральное исчисления функций одной и нескольких переменных, высшая алгебра, ряды и дифференциальные уравнения.

Приведены основные теоретические сведения, решения типовых примеров и задач, задачи и упражнения для самостоятельной работы с ответами, решениями и указаниями.

Для студентов высших учебных заведений.

УДК 51
ББК 22.11

Учебное издание

Шипачев Виктор Семенович

ЗАДАЧНИК ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Редактор *Ж. И. Яковлева.* Художественный редактор *Т. А. Коленкова.* Технические редакторы *Л. А. Муравьева, Л. А. Овчинникова.* Корректор *Г. Н. Буханова.* Оператор *С. Р. Луковенкова.*

ЛР № 010146 от 25.12.96. Изд. № ФМ-185. Подп. в печать 27.01.2000. Формат $60\times88^1/_{16}$. Бум. газетн. Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Объем 18,62 усл. печ. л. 18,87 усл. кр.-отт. 19,74 уч.-изд. л. Тираж 10000 экз. Зак № 29

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.

Набрано на персональном компьютере издательства.

Отпечатано в ОАО «Оригинал», 101898, Москва, Центр, Хохловский пер., 7.

ISBN 5-06-003575-1

Предисловие

Настоящее учебное пособие написано автором на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения семинарских занятий по высшей математике на нематематических факультетах в Московском государственном университете.

«Задачник» специально приспособлен к курсу высшей математики, читаемому студентам нематематических специальностей вузов.

В начале каждой темы кратко излагаются основные теоретические сведения (определения, теоремы, формулы), необходимые для решения последующих задач. Формулировки определений и теорем даются по книге автора «Высшая математика», являющейся учебником по высшей математике для студентов нематематических специальностей вузов. Приводятся решения типовых задач, даются задачи и упражнения для самостоятельной работы.

При подборе задач были использованы различные сборники задач по высшей математике, в частности широко известные задачники «Сборник задач и упражнений по математическому анализу» Б. П. Демидовича и «Сборник задач по высшей математике» В. П. Минорского.

«Задачник» может быть использован как под руководством преподавателя, так и для самостоятельного изучения материала, так как большинство задач имеют ответы, а некоторые из них — решения и указания.

Поскольку в «Задачнике» имеется большое количество подробно решенных типовых примеров и задач, поясняющих теоретический материал и способствующих более глубокому пониманию, он может быть использован в высших технических учебных заведениях, техникумах, средней школе, а также в гимназиях, лицеях и колледжах.

Учебник «Высшая математика» и «Задачник» образуют единый учебно-методический комплекс. Автор считает, что эти книги существенно помогут студентам в изучении основ высшей математики и будут полезны для преподавателей.

Автор

Глава 1

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ (ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ) ЧИСЛА

§ 1. Основные понятия

1. Представление вещественных чисел в виде бесконечных десятичных дробей. Множество вещественных чисел разбивается на два множества: рациональных и иррациональных чисел. *Рациональным* называется число, которое можно представить в виде p/q, где p и q — целые числа, причем $q \neq 0$. *Иррациональным* называется всякое вещественное число, которое не является рациональным.

Любое вещественное число представимо в виде бесконечной десятичной дроби $a, a_1, a_2, a_3 \ldots a_n \ldots$, где a — любое целое число, а $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ — числа, принимающие целые значения от 0 до 9 $(0 \leqslant a_n \leqslant 9)$.

Всякое рациональное число p/q является либо целым, либо его можно представить в виде конечной или периодической бесконечной десятичной дроби. Иррациональное же число представляется непериодической бесконечной десятичной дробью. Например, рациональные числа 3/4 и 1/3 представляются соответственно следующими десятичными дробями: 0,75 и 0,333 ...; иррациональные числа $\sqrt{2}$ и π представляются соответственно непериодическими бесконечными десятичными дробями: 1,41421356... и 3,14159... .

1. Определить, какие из данных бесконечных десятичных дробей рациональные числа, какие — иррациональные: 5,424242...; 0,32375375...; 1,313013001...; 7,1308367... .

2. Доказать, что число

$$0{,}1010010001 \ldots 1\underbrace{000 \ldots 0}_{n \text{ нулей}}1 \ldots \text{ иррационально.}$$

3. Привести пример, показывающий, что сумма двух иррациональных чисел может быть числом рациональным.

4. Привести пример, показывающий, что разность двух иррациональных чисел может быть числом рациональным.

5. Доказать, что сумма, разность, произведение и частное рационального числа $\alpha \neq 0$ и иррационального числа β есть число иррациональное.

6. Доказать, что $\sqrt{2}$ — иррациональное число.

7. Доказать, что $\sqrt{3}$ не является рациональным числом.

2. Некоторые числовые множества. Пусть X — некоторое множество вещественных чисел. Тогда запись $x \in X$ означает, что число x принадлежит X, а запись $x \notin X$ означает, что число x не принадлежит X.

Если $x_1, ..., x_n$ — некоторые числа, то запись $X = \{x_1, ..., x_n\}$ означает, что множество X состоит из чисел $x_1, ..., x_n$. Аналогичный смысл имеет запись $X = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$.

Пусть X и Y — два множества. Запись $X \subset Y$ означает, что X есть подмножество множества Y.

Пусть $P(x)$ — какое-то свойство числа x. Тогда запись $\{x \mid P(x)\}$ обозначает множество всех таких чисел, которые обладают свойством $P(x)$.

Пусть a и b — два числа, причем $a < b$. Будем использовать следующие обозначения и терминологию:

$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\} = [a, b]$ — *отрезок (сегмент)*;

$\{x \mid a < x < b\} = (a, b)$, $\{x \mid a < x\} = (a, +\infty)$, $\{x \mid x < b\} = (-\infty, b)$, $\{x \mid -\infty < x < +\infty\} = (-\infty, +\infty)$ — *интервалы*;

$\{x \mid a < x \leqslant b\} = (a, b]$, $\{x \mid a \leqslant x < b\} = [a, b)$, $\{x \mid a \leqslant x\} = [a, +\infty)$, $\{x \mid x \leqslant b\} = (-\infty, b]$ — *полуинтервалы*.

Все эти множества называются *промежутками*. Промежутки $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ и (a, b) называются *конечными*; a и b — их *концами*. Остальные промежутки называются *бесконечными*.

Вещественные числа изображаются точками на координатной прямой*, поэтому множество всех вещественных $(-\infty, +\infty)$ называют *числовой прямой*, а сами числа — *точками*.

Пусть a — произвольная точка числовой прямой и ε (греческая буква «эпсилон») — положительное число. Тогда интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ называется *ε-окрестностью точки a*.

8. Чем отличается интервал (a, b) от отрезка $[a, b]$?

9. Из отрезка $[a, b]$ удален интервал (a, b). Что осталось?

10. Из отрезка $[1, 8]$ удален интервал $(3, 5)$. Какие промежутки остались?

11. Из интервала $(-10, 5)$ удален отрезок $[-5, 3]$. Какие промежутки остались?

§ 2. Грани числовых множеств

Пусть X — непустое множество вещественных чисел.

Определение. *Множество X называется ограниченным сверху (снизу), если существует число c такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $x \leqslant c$ $(x \geqslant c)$.*

---

*Напомним, что координатной прямой называется прямая, на которой выбраны точка, являющаяся началом отсчета, масштабный отрезок и положительное направление.

Число c в этом случае называется *верхней (нижней) гранью* множества X.

Множество, ограниченное и сверху и снизу, называется *ограниченным*.

Примеры. 1. Любой конечный промежуток ограничен. 2. Интервал $(a, +\infty)$ есть множество, ограниченное снизу, но не ограниченное сверху. 3. Интервал $(-\infty, +\infty)$ есть множество, не ограниченное ни сверху, ни снизу.

Наименьшее (наибольшее) из чисел, ограничивающих множество X сверху (снизу), называется *точной верхней (нижней) гранью* множества X и обозначается символом $\sup X (\inf X)$*.

Свойство точной верхней (нижней) грани. *Как бы мало ни было число* $\varepsilon>0$, *существует число* $x \in X$ *такое, что* $x>\sup X-\varepsilon$ $(x<\inf X+\varepsilon)$.

Теорема. *Любое непустое ограниченное сверху (снизу) числовое множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.*

Если множество X не ограничено сверху (снизу), то пишут $\sup X=+\infty$ $(\inf=-\infty)$.

Пример. Доказать, что множество $X=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ ограничено. Установить, какие числа являются его гранями. Найти точные верхнюю и нижнюю грани этого множества.

Решение. При любом натуральном n выполняются неравенства $0<\frac{1}{n}\leqslant 1$, поэтому данное множество X ограничено. Таким образом, число 1 — верхняя грань, а число 0 — его нижняя грань.

Докажем, что число 1 является точной верхней гранью множества X, т. е. что $\sup X=1$. Для этого, согласно свойству точной верхней грани, надо показать, что для любого $\varepsilon>0$ существует натуральное число n такое, что выполняется неравенство $\frac{1}{n}>1-\varepsilon$. Этим числом n является $n=1$, так как $1>1-\varepsilon$ — верное неравенство для любого $\varepsilon>0$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что число 0 является точной нижней гранью множества X. Для этого надо проверить, что для любого $\varepsilon>0$ существует натуральное число n такое, что выполняется неравенство $\frac{1}{n}<0+\varepsilon$ или $\frac{1}{n}<\varepsilon$. Решая неравенство, получаем $n>\frac{1}{\varepsilon}$. Взяв какое-нибудь натуральное число $n>\frac{1}{\varepsilon}$, получим требуемое неравенство, а это, согласно свойству точной нижней грани, и означает, что число 0 является точной нижней гранью множества X, т. е. $\inf X=0$.

---

*Supremum (лат.) — наивысшее,
infinum (лат.) — наинизшее.

Отметим, что данному множеству X точная грань 1 принадлежит и является его наибольшим числом, а точная нижняя грань 0 не принадлежит и в этом множестве нет наименьшего числа.

12. Доказать, что множество $X=\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$ ограничено. Установить, какие числа являются его гранями. Найти точные верхнюю и нижнюю грани этого множества (n — натуральное число).

13. Приведите примеры числовых множеств X, у которых: а) $\sup X \in X$; б) $\sup X \notin X$; в) $\inf X \in X$; г) $\inf X \notin X$. Имеет ли множество X в случаях а) и б) наибольшее, а в случаях в) и г) наименьшее число?

14. Приведите пример числового множества X, когда $\inf X = \sup X$.

15. Приведите пример числового множества X, когда $\inf X \in X$, а $\sup X \notin X$.

16. Можно ли утверждать, что для неограниченного числового множества X сверху (снизу) найдется бесконечное множество чисел, больших (меньших), чем любое наперед заданное число $M>0$?

17. Доказать, что множество $X=\{\ldots -3, \ -2, \ -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ 3 \ldots\}$ всех целых чисел не ограничено ни снизу, ни сверху, т. е. $\sup X = +\infty$ и $\inf X = -\infty$.

18. Доказать, что множество $X=\{1, \ 2, \ 3, \ \ldots\}$ натуральных чисел не ограничено сверху, т. е. $\sup X = +\infty$.

19. Доказать, что, каковы бы ни были числа a и b, $0<a<b$, существует такое целое число $n>0$, что $an>b$.

20. Пусть X и Y — два непустых числовых множества. Доказать, что если $Y \subset X$, то: а) $\sup Y \leqslant \sup X$; б) $\inf Y \geqslant \inf X$.

21. Пусть X и Y — два непустых числовых множества. Доказать, что:

$$\text{а) } \sup\{z \mid z=x+y;\ x \in X,\ y \in Y\} = \sup X + \sup Y;$$

$$\text{б) } \inf\{z \mid z=x+y;\ x \in X,\ y \in Y\} = \inf X + \inf Y.$$

22. Пусть X и Y — два непустых числовых множества. Доказать, что если каждое $x \in X$ меньше любого $y \in Y$ и для любого $\varepsilon>0$ существуют $x \in X$ и $y \in Y$ такие, что $y-x<\varepsilon$, то $\sup X = \inf Y$.

§ 3. Абсолютная величина вещественного числа

Определение. *Абсолютной величиной (или модулем) числа x называется само число x, если $x \geqslant 0$, или число $-x$, если $x<0$.*

Абсолютная величина числа x обозначается символом $|x|$. Таким образом,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x<0. \end{cases}$$

Например, $|+5|=5$; $|-5|=-(-5)=5$; $|0|=0$.

Основные свойства абсолютных величин:

1°. $|x|\geqslant 0$. 2°. $|x|=|-x|$, 3°. $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$,

4°. Неравенство $|x|\leqslant\varepsilon\,(\varepsilon>0)$ означает, что $-\varepsilon\leqslant x\leqslant\varepsilon$,

5°. Неравенство $|x|\geqslant\alpha\,(\alpha>0)$ означает, что либо $x\geqslant\alpha$, либо $x\leqslant -\alpha$.

6°. $|x\pm y|\leqslant |x|+|y|$. 7°. $|x\pm y|\geqslant |x|-|y|$. 8°. $|x\cdot y|=|x|\,|y|$.

9°. $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$ $(y\neq 0)$.

Пример 1. Найти решения уравнений: 1) $|x|=x+2$; 2) $|x|=x-2$; 3) $x+2|x|=3$.

Решение. 1) При $x\geqslant 0$ имеем $x=x+2$, откуда $0=2$ — неверное равенство; следовательно, решений нет. При $x<0$ получаем $-x=x+2$, откуда $x=-1$ — решение уравнения.

2) При $x\geqslant 0$ имеем $x=x-2$, откуда $0=-2$ — неверное равенство; следовательно, решений нет. При $x<0$ получаем $-x=x-2$, откуда $x=1>0$, что противоречит сделанному предположению $x<0$. Таким образом, уравнение не имеет решений.

3) При $x\geqslant 0$ имеем $x+2x=3$, откуда $x_1=1$. При $x<0$ получаем $x-2x=3$, откуда $x_2=-3$. Следовательно, $x_1=1$ и $x_2=-3$ — решения уравнения.

Пример 2. Решить уравнение $|x-5|=x-5$.

Решение. По определению, $|x|=x$ при $x\geqslant 0$. Следовательно, данное уравнение представится в виде $x-5\geqslant 0$, откуда $x\geqslant 5$.

Пример 3. Решить неравенство $|2x-1|>2x-1$.

Решение. Так как $|x|>x$ только при $x<0$, то неравенство справедливо для тех x, при которых $2x-1<0$, откуда $x<\frac{1}{2}$.

Пример 4. Решить неравенство $|x-3|\geqslant 2$.

Решение. В силу свойства 5° будем иметь $x-3\geqslant 2$ или $x-3\leqslant -2$, откуда получаем ответ: либо $x\geqslant 5$, либо $x\leqslant 1$.

Пример 5. Доказать неравенство $||x|-|y||\leqslant |x-y|$.

Решение. В силу свойств 2° и 7° имеем

$$|x-y|\geqslant |x|-|y| \text{ и } |x-y|=|-(x-y)|=|y-x|\geqslant |y|-|x|. \qquad (1)$$

Умножая второе неравенство на -1, получаем

$$-|x-y|\leqslant |x|-|y|. \qquad (2)$$

Объединяя (1) и (2), найдем $-|x-y|\leqslant |x|-|y|\leqslant |x-y|$, откуда в силу свойства 4° $||x|-|y||\leqslant |x-y|$.

Решить уравнения и неравенства:

23. $|x|=-x$.

24. $|x|>x$.

25. $|x-2|<3$.

26. $|x-1|\geqslant 2$.

27. $|x|=x+1$.

28. $|x|<x+1$.

29. $\left|\frac{x}{x+1}\right|>\frac{x}{x+1}$.

30. $|x^2-5x+6|=-(x^2-5x+6)$.

31. $|x^2-5x+6|>x^2-5x+6$.

32. $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|=\dfrac{x-1}{x+1}$.

33. $|x+4|=|x-4|$.

34. $|x-1|+|1-2x|=2|x|$.

35. $||3-2x|-1|=2|x|$.

36. $|\sin x|-\sin x=2$.

37. $x^2-2|x|-3=0$.

38. $||x|-2|\leqslant 1$.

39. $||2-3x|-1|>2$.

40. $|(x^2+2x+5)+(x-5)|=|x^2+2x+5|+|x-5|$.

41. $|(x^4-4)-(x^2+2)|=|x^4-4|-|x^2+2|$.

42. $|x^2-3x|>|x^2|-|3x|$.

43. $|x-3|+|x+3|>8$.

44. $|x+3|-|x+1|<2$.

45. $||x-1|+2|=1$.

46. $||x+1|+2|=2$.

47. $|x|-2|x+1|+3|x+2|=0$.

48. $|x-1|-|x|+|2x+3|>2x+4$.

49. $|x^2-3x-3|>|x^2+7x-13|$.

50. $|x^2-2x-3|<3x-3$.

51. $x^2-|3x+2|+x\geqslant 0$.

52. $x^2+2|x+3|-10\leqslant 0$.

Глава 2

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

§ 1. Числовые последовательности

1. Определение числовой последовательности.

Определение 1. *Если каждому числу n из натурального ряда чисел 1, 2, 3, ... n, ... поставлено в соответствие вещественное число x_n, то множество вещественных чисел*

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots,\ x_n,\ \dots$$

называется числовой последовательностью или просто последовательностью.

Числа $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ называются *элементами (членами)* последовательности, символ x_n — *общим элементом (членом)* последовательности, а n — *номером элемента*. Кратко последовательность обозначают символом $\{x_n\}$.

Последовательности $\{x_n+y_n\}$, $\{x_n-y_n\}$, $\{x_ny_n\}$, $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$, $y_n\neq 0$ называются соответственно *суммой, разностью, произведением и частным* двух последовательностей: $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Пример 1. Дана формула общего элемента последовательности $x_n=\dfrac{n}{n+1}$. Написать пять первых элементов последовательности.

Решение. Полагая последовательно $n=1$, 2, 3, 4, 5 в общем элементе x_n, получаем $x_1=1/2$, $x_2=2/3$, $x_3=3/4$, $x_4=4/5$, $x_5=5/6$.

1. Написать пять первых элементов каждой из последовательностей, заданных их общими элементами: 1) $x_n=\frac{1}{2n+1}$; 2) $x_n=\frac{n+2}{n^3+1}$; 3) $x_n=\frac{n}{2^{n+1}}$; 4) $x_n=(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2}$; 5) $x_n=\frac{\sin(n\pi/2)}{n}$.

2. Зная несколько первых элементов последовательности, написать формулу общего элемента последовательностей:

1) $1;\ \frac{1}{3^2};\ \frac{1}{5^2};\ \frac{1}{7^2};\ \ldots$; 2) $1;\ \frac{1}{1\cdot 2};\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3};\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4};\ \ldots$;

3) $1;\ 2\frac{1}{4};\ 2\frac{7}{9};\ 3\frac{1}{16};\ 3\frac{6}{25};\ \ldots$; 4) $2;\ 10;\ 26;\ 82;\ 242;\ 730;\ \ldots$;

5) $-1;\ 1;\ -1;\ 1;\ -1;\ \ldots$.

3. Написать пять первых элементов и формулу общего элемента каждой из последовательностей, заданных их рекуррентными соотношениями:

1) $x_1=1,\ x_{n+1}=x_n!$; 2) $x_1=1,\ x_{n+1}=x_n+3$; 3) $x_1=1,\ x_{n+1}=(n+1)x_n$; 4) $x_1=2,\ x_{n+1}=x_n\cdot 3$; 5) $x_1=1,\ x_n=x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}$.

4. Последовательность $\{x_n\}$ задается двумя первыми элементами $x_1=0$, $x_2=1$ и рекуррентным соотношением $x_{n+2}=x_{n+1}-x_n$ для любого $n\geqslant 1$. Найти x_{90} и x_{885}.

2. Ограниченные и неограниченные последовательности.

Определение 2. *Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует число M (m) такое, что любой элемент x_n этой последовательности удовлетворяет неравенству $x_n\leqslant M$ ($x_n\geqslant m$).*

Определение 3. *Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если она ограничена и сверху и снизу, т. е. существуют числа m и M такие, что любой элемент этой последовательности удовлетворяет неравенствам $m\leqslant x_n\leqslant M$.*

Определение 4. *Последовательность $\{x_n\}$ называется неограниченной, если для любого положительного числа A существует элемент x_n этой последовательности, удовлетворяющий неравенству $|x_n|>A$.*

Примеры. 1. Последовательность 1, 2, 3, ... , n, ... ограничена снизу ($m=1$), но не ограничена сверху.

2. Последовательность -1, -2, -3, ..., $-n$, ... ограничена сверху ($M=-1$), но не ограничена снизу.

3. Последовательность $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$ ограничена, так как $0\leqslant x_n\leqslant 1$ ($m=0$, $M=1$).

4. Последовательность $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots, (-1)^n n, \ldots$ — неограниченная, так как для любого числа $A>0$ существует элемент этой последовательности, удовлетворяющий неравенству $|x_n|>A$ (т. е. либо $x_n>A$, либо $x_n<-A$).

5. Какие из последовательностей являются ограниченными:

1) $-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \ldots; \frac{(-1)^n}{n}; \ldots;$
2) $2; 4; 6; 8; 10; 12; \ldots; 2n; \ldots;$
3) $\sin 1; \sin 2; \sin 3; \sin 4; \ldots; \sin n; \ldots;$
4) $1; -2; 3; -4; 5; -6; 7; \ldots; (-1)^{n+1} n; \ldots;$
5) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \ldots; \frac{n}{n+1}; \ldots;$
6) $1; 1; 1; 1; 1; 1; \ldots;$
7) $\ln 1; \ln 2; \ln 3; \ln 4; \ldots; \ln n; \ldots$?

3. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности.

Определение 5. *Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого положительного числа A существует номер N такой, что при $n>N$ выполняется неравенство $|x_n|>A$.*

Пример 2. Используя определение 5, доказать, что последовательность $\{n\}$ является бесконечно большой.

Решение. Возьмем любое число $A>0$. Из неравенства $|x_n| = |n|>A$ получаем $n>A$. Если взять $N \geqslant A$, то для всех $n>N$ будет выполняться $|x_n|>A$, т. е. последовательность $\{n\}$ бесконечно большая.

Замечание. Любая бесконечно большая последовательность является неограниченной. Однако неограниченная последовательность может и не быть бесконечно большой. Например, неограниченная последовательность $1, 2, 1, 3, 1, 4, \ldots, 1, n, 1, n+1, \ldots$ не является бесконечно большой, поскольку при $A>1$ неравенство $|x_n|>A$ не имеет места для всех элементов x_n с нечетными номерами.

Определение 6. *Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если для любого положительного числа ε существует номер N такой, что при $n>N$ выполняется неравенство $|\alpha_n|<\varepsilon$.*

Пример 3. Используя определение 6, доказать, что последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ является бесконечно малой.

Решение. Возьмем любое число $\varepsilon>0$. Из неравенства $|\alpha_n| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ получаем $n>\frac{1}{\varepsilon}$. Если взять $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$*, то для всех $n>N$

---

*Символ $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, $[1]=1$, $[3, 1]=3$, $[0, 7]=0$, $[-0, 5]=-1$, $[\pi]=3$ и т.д.

будет выполняться $|\alpha_n| < \varepsilon$, т. е. последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ бесконечно малая.

Теорема. *Если $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность, $x_n \neq 0$, то последовательность $\{\alpha_n\} = \left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ бесконечно малая, и, обратно, если $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность, $\alpha_n \neq 0$, то последовательность $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ бесконечно большая.*

6. Доказать, что последовательность $\{3^{\sqrt{n}}\}$ является бесконечно большой.

7. Доказать, что последовательности: 1) $\{-n\}$; 2) $\{n^2\}$; 3) $\{(-1)^{n+1} \cdot n\}$ — являются бесконечно большими.

8. Доказать, что последовательность $\left\{\frac{(-1)^n 2}{5\sqrt{n+1}}\right\}$ является бесконечно малой.

9. Доказать, что последовательности: 1) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$; 2) $\left\{\frac{1}{n^k}\right\}$ $(k>0)$; 3) $\left\{\frac{2n}{n^2+1}\right\}$ — являются бесконечно малыми.

10. Показать, что неограниченная последовательность $\{n^{(-1)^n}\}$ не является бесконечно большой.

11. Доказать, что последовательность $\{a^n\}$ является: 1) бесконечно большой при $|a|>1$; 2) бесконечно малой при $|a|<1$.

§ 2. Сходящиеся последовательности

1. Определение предела последовательности.

Определение. *Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε существует номер N такой, что при $n>N$ выполняется неравенство*

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

При этом последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся*, в противном случае — *расходящейся*.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Пример 1. Используя определение предела, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Решение. Возьмем любое число $\varepsilon>0$. Так как $|x_n-1|=$ $=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}$, то для нахождения значений n, удовлетворяющих $|x_n-1|<\varepsilon$, достаточно решить неравенство $\frac{1}{n+1}<\varepsilon$, откуда получим $n>\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. Если взять $N=\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$, то для всех $n>N$ будет выполняться $|x_n-1|<\varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

12. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}=\frac{1}{3}$

13. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

14. Доказать, что: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+1}{3n^2+7n+8}=\frac{2}{3}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-n-6}{n^3-n^2-n-2}=1$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{3^n}=1$.

15. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+1}=2$. Найти номер N, начиная с которого выполняется неравенство $\left|\frac{2n+3}{n+1}-2\right|<\varepsilon$, где $\varepsilon=0{,}1$; $0{,}01$; $0{,}001$.

16. Доказать, что последовательность $\left\{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right\}$ имеет своим пределом число 2.

17. Доказать, что последовательность $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}$ имеет своим пределом число 0.

18. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})=0$.

Замечание. Если последовательность $\{x_n\}$ бесконечно большая, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$. Если при этом начиная с некоторого номера n все элементы положительны (отрицательны), то пишут $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty\ (-\infty)$. Говорят, что бесконечно большая последовательность имеет бесконечный предел.

19. Привести примеры последовательностей $\{y_n\}$ и $\{x_n\}$, для которых $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$, а произведение их $\{x_n\,y_n\}$ являлось последовательностью: а) сходящейся; б) бесконечно малой; в) бесконечно большой; г) расходящейся.

20. Привести примеры таких последовательностей: $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ и, кроме того: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=+\infty$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=1$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ не существует.

2. Основные свойства сходящихся последовательностей.

Теорема 1. *Сходящаяся последовательность ограничена.*

Теорема 2. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *тогда:* а) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm \pm y_n) = a \pm b$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n/y_n) = a/b\,(b\neq 0)$.

Теорема 3. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ *и для всех n выполняются неравенства* $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Теорема 4. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ *и последовательность* $\{y_n\}$ *— ограниченная, то* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0$ *(произведение бесконечно малой на ограниченную есть бесконечно малая).*

Найти пределы:

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+n+1}{3n^2-1}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-3}{n^2+1}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+4}{n^2+5}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3}{n^2+1} - \dfrac{3n^2}{3n-1}\right)$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{5n+11} + \dfrac{\cos n}{10n}\right)$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10n}{n^2+1}$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10n}{n+1}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10n^3}{n^2+1}$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5\cdot 3^n}{3^n-2}$.

31. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$.

32. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sin n!}{n^2+1}$.

33. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{2^n+1}$.

34. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

35. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}$.

36. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5n}{n+1} + \dfrac{\sin n}{n}\right)$.

37. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

38. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1})$.

39. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n-1}-$
$-\sqrt{n^2-n+1})$.

40. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(n-\sqrt{n^2+1})$.

41. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$.

42. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

43. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}}$.

44. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+9+\ldots+n^2}{n^3+3n+2}$.

45. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

46. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$.

47. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+3+\ldots+n}$.

§ 3. Монотонные последовательности

1. Определение монотонных последовательностей.

Определение. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется возрастающей, если* $x_1<x_2<x_3<\ldots<x_n<x_{n+1}<\ldots$; *неубывающей, если* $x_1\leqslant \leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant\ldots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant\ldots$; *убывающей, если* $x_1>x_2>x_3>\ldots>x_n> >x_{n+1}>\ldots$; *невозрастающей, если* $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant\ldots\geqslant x_n\geqslant x_{n+1}\geqslant\ldots$.

Все такие последовательности объединяются общим названием *монотонные*. Возрастающие и убывающие называются *строго монотонными*.

Примеры. 1. Последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ убывающая и ограниченная.

2. Последовательность $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots$ невозрастающая и ограниченная.

3. Последовательность $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ возрастающая и неограниченная.

4. Последовательность $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots, n, n, \ldots$ неубывающая и неограниченная.

5. Последовательность $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ возрастающая и ограниченная.

48. Доказать, что последовательность с общим элементом $x_n=\dfrac{n}{2n+1}$ монотонно возрастающая.

49. Доказать, что последовательность с общим элементом $x_n = \frac{n}{5^n}$ монотонно убывающая.

50. Доказать, что последовательность $\{n^2\}$ монотонно возрастающая.

51. Доказать, что последовательность $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ монотонно убывающая.

52. Доказать, что последовательность $\{[\sqrt{n}]\}$ монотонно неубывающая.

53. Выяснить, монотонна ли последовательность $\left\{\frac{10^n}{n!}\right\}$ и есть ли у нее наибольший и наименьший элементы.

54. Доказать, что последовательность $\{2^n\}$ монотонно возрастающая.

55. Доказать, что:

1) Последовательность $\left\{\frac{n}{4n-3}\right\}$ монотонно убывающая.

2) Последовательность $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ монотонно возрастающая.

3) Последовательность $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ монотонно возрастающая и ограничена.

4) Последовательность $\left\{1+\frac{1}{2^n}\right\}$ монотонно убывающая и ограничена.

5) Последовательность $\left\{\frac{3^n+1}{3^n}\right\}$ монотонно убывающая и ограничена.

2. Признак сходимости монотонных последовательностей.

Теорема. *Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

56. Доказать существование предела последовательности

$$\left\{\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\ldots+\frac{1}{2^n+1}+\ldots\right\}.$$

57. Доказать существование предела последовательностей:

1) $\left\{\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+2}+\frac{1}{3^3+3}+\ldots+\frac{1}{3^n+n}+\ldots\right\};$

2) $\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots\right\};$

3) $\left\{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots\right\}$.

58. Доказать, что последовательность $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ сходится, и найти ее предел.

59. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентным соотношением $x_1=\sqrt{3}$, $x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$. Доказать, что эта последовательность сходится, и найти ее предел.

60. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентным соотношением $x_1=\sqrt{2}$, $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$. Доказать, что эта последовательность сходится, и найти ее предел.

61. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентным соотношением $x_1=\sqrt{2}$, $x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$. Доказать, что эта последовательность сходится, и найти ее предел.

62. Доказать, что последовательность $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$ сходится, и найти ее предел.

3. Число e.

Числом e называется предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$. Это число иррационально и приближенно равно $\mathrm{e}=2{,}71828\ldots$. Логарифмы с основанием e называются натуральными и обозначаются $\log_e x=\ln x$.

Найти пределы:

63. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

64. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n}\right)^{n}$.

65. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{n}$.

66. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n+3}$.

67. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$.

68. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+4}$.

69. $\lim\limits_{n\to\infty} n[\ln(n+3)-\ln n]$.

70. $\lim\limits_{n\to\infty} n[\ln n-\ln(n+2)]$.

71. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}$.

72. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n}\right)^{n/2}$.

Глава 3

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Направленные отрезки и их величины. Числовая прямая

1. Ось и отрезки. Прямая с выбранным на ней положительным направлением называется *осью* (рис. 1). Рассмотрим на оси две произвольные точки: A и B.

Определение 1. *Отрезок с граничными точками A и B называется направленным, если указано, какая из точек A и B считается началом, а какая — концом отрезка.*

Направленный отрезок обозначается $\overline{AB}$*, где A обозначает начало, а B — конец отрезка.

Определение 2. *Величиной AB направленного отрезка $\overline{AB}$ называется вещественное число, равное $|\overline{AB}|$, если направления отрезка и оси совпадают, и равное $-|\overline{AB}|$, если эти направления противоположны.*

Если точки A и B направленного отрезка $\overline{AB}$ совпадают, то величина $\overline{AB}$ равна нулю, а направление не определено.

Основное тождество. *Для любых трех точек A, B и C на оси величина отрезка $\overline{AC}$ равна сумме величин отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, т. е. $AB+BC=AC$.*

2. Числовая прямая. *Координатной прямой* называется прямая, на которой выбраны точка, являющаяся началом отсчета, масштабный отрезок и положительное направление (она становится осью).

Пусть M — произвольная точка координатной прямой (рис. 2). Координатой точки M называется вещественное число x, равное величине OM направленного отрезка $\overline{OM}$: $x=OM$. Число x называется *координатой точки* M. Символ $M(x)$ означает, что точка M имеет координату x.

Итак, вещественные числа изображаются точками координатной прямой. Поэтому множество всех вещественных чисел называют *числовой прямой*, а любое число — *точкой этой прямой*.

Если $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ — две произвольные точки числовой прямой, то формула

$$M_1M_2=x_2-x_1$$

выражает величину отрезка $\overline{M_1M_2}$, формула

$$|M_1M_2|=|x_2-x_1|$$

выражает его длину.

1. Построить на числовой прямой точки $A(-5)$, $B(+4)$

---

*Иногда обозначают $\overrightarrow{AB}$.

и $C(-2)$ и найти величины AB, BC и AC отрезков $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{AC}$. Проверить, что $AB+BC=AC$.

2. Какая из двух точек правее: $A(a)$ или $B(-a)$?

3. Какая из двух точек правее: $A(a)$ или $B(2a)$?

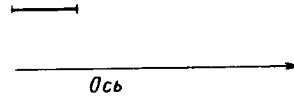


Рис. 1

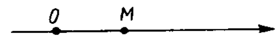


Рис. 2

4. Найти величину AB и длину $|AB|$ отрезка $\overline{AB}$, заданного точками: 1) $A(3)$ и $B(11)$; 2) $A(5)$ и $B(2)$; 3) $A(-1)$ и $B(3)$; 4) $A(-5)$ и $B(-3)$; 5) $A(-1)$ и $B(-3)$.

5. Вычислить координату точки A, если известны: 1) $B(3)$ и $AB=5$; 2) $B(2)$ и $AB=-3$; 3) $B(-1)$ и $BA=2$; 4) $B(-5)$ и $BA=-3$; 5) $B(0)$ и $|AB|=2$; 6) $B(2)$ и $|AB|=3$; 7) $B(-1)$ и $|AB|=5$; 8) $B(-5)$ и $|AB|=2$.

6. Построить на числовой прямой точки, координаты которых удовлетворяют уравнениям: 1) $|x|=2$; 2) $|x-1|=3$; 3) $|2x-3|=2x-3$; 4) $|1-x|=2$; 5) $|2+x|=2$.

7. Охарактеризовать расположение на числовой прямой множеств точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам: 1) $x>2$; 2) $x-3\leqslant 0$; 3) $2x-3\leqslant 0$; 4) $1<x\leqslant 3$; 5) $x^2-9<0$; 6) $x^2-5x+6<0$; 7) $12-x<0$; 8) $3x-5>0$; 9) $-2\leqslant x\leqslant 3$; 10) $x^2-8x+15\leqslant 0$; 11) $x^2-8x+15>0$; 12) $x^2-25<0$; 13) $16-x^2\leqslant 0$. К каждому случаю сделать рисунок.

8. Охарактеризовать расположение на числовой прямой множеств точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам: 1) $|x|<1$; 2) $|x|>2$; 3) $|x|\leqslant 2$; 4) $|x-2|<3$; 5) $|x-1|\geqslant 2$; 6) $|x^2-5x+6|>x^2-5x+6$; 7) $|x|<x+1$.

§ 2. Прямоугольная (декартова) система координат

Две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy, имеющие общее начало O и одинаковую единицу масштаба (рис. 3), образуют прямоугольную (или декартову) систему координат на плоскости.

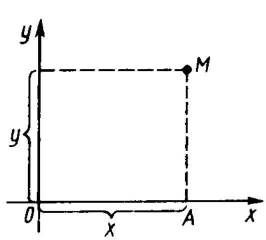


Рис. 3

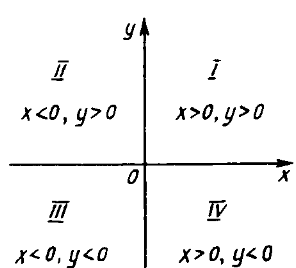


Рис. 4

Ось Ox называется *осью абсцисс*, ось Oy — *осью ординат*, точка O — *началом координат*. Плоскость, в которой расположены оси Ox и Oy, называется *координатной плоскостью* и обозначается Oxy.

Пусть M — произвольная точка плоскости. Опустим из нее перпендикуляры MA и MB на оси Ox и Oy. Прямоугольными координатами x и y точки M называются величины OA и OB направленных отрезков $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$: $x=OA$, $y=OB$.

Координаты x и y точки M называются соответственно ее *абсциссой* и *ординатой*. Символ $M(x;\ y)$ означает, что точка M имеет координаты x и y. Начало координат имеет координаты $(0;\ 0)$.

Таким образом, каждой точке M плоскости соответствует пара чисел $(x;\ y)$ — ее прямоугольные координаты.

Оси координат разбивают плоскость на четыре части, их называют *четвертями*, *квадрантами* или *координатными углами* и нумеруют римскими цифрами I, II, III, IV так, как показано на рис. 4, на том же рисунке указаны также знаки координат точек в зависимости от их расположения в той или иной четверти.

9. Постройте точки $A(2;\ 3)$, $B(4;\ -1)$, $C(-1;\ 7)$, $D(-2;\ -3)$, $E(0;\ 2)$, $F(4;\ 0)$.

10. Не строя точку $A(1;\ -3)$, выяснить, в какой четверти она расположена.

11. В каких четвертях может находиться точка, если ее абсцисса положительна?

12. На оси Ox взята точка с координатой (-5). Каковы ее координаты на плоскости?

13. Найти координаты точек, симметричных относительно оси Ox точкам: 1) $A(2;\ 3)$; 2) $B(-3;\ 2)$; 3) $C(-1;\ -1)$; 4) $D(a;\ b)$.

14. Найти координаты точек, симметричных относительно оси Oy точкам: 1) $A(-1;\ 2)$; 2) $B(3;\ -1)$; 3) $C(-2;\ -2)$; 4) $D(a;\ b)$.

15. Найти координаты точек, симметричных относительно начала координат точкам: 1) $A(3;\ 3)$; 2) $B(2;\ -4)$; 3) $C(-2;\ 1)$; 4) $D(a;\ b)$.

16. Найти координаты точек, симметричных относительно биссектрисы первого координатного угла точкам: 1) $A(2;\ 3)$; 2) $B(5;\ -2)$; 3) $C(-3;\ 4)$.

17. Найти координаты точек, симметричных относительно биссектрисы второго координатного угла точкам: 1) $A(3;\ 5)$; 2) $B(-4;\ 3)$; 3) $C(7;\ -2)$.

18. Дана точка $M(3;\ -1)$. Написать координаты точек, симметричных относительно оси Ox, оси Oy, начала координат и биссектрисы координатного угла.

19. Определить, в каких четвертях может быть расположена точка $M(x;\ y)$, если: 1) $xy>0$; 2) $xy<0$; 3) $x-y=0$; 4) $x+y=0$; 5) $x+y>0$; 6) $x+y<0$; 7) $x-y>0$; 8) $x-y<0$.

§ 3. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости

I. Расстояние d между двумя точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ на плоскости

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

II. Площадь S треугольника ABC с вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$

$$S=\frac{1}{2}|[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)]|.$$

III. Деление отрезка в данном отношении. Если точка $M(x; y)$ делит отрезок с концами $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ в отношении $\lambda=\frac{|M_1M|}{|MM_2|}$, то

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

В частности, при делении пополам, т. е. в отношении $\lambda=1$,

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

20. Даны точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Показать, что формула расстояния между точками A и B не зависит от знаков их координат.

21. а) Какая точка дальше от оси Ox: $A(2; -5)$ или $B(3; 4)$? б) Какая из этих точек дальше от оси Oy? в) Чему равны расстояния от точки $A(a; b)$ до осей Ox и Oy соответственно?

22. Даны точки $A(0; 0)$, $B(3; -4)$, $C(-3; 4)$; $D(-2; 2)$ и $E(10; -3)$. Определить расстояние d между точками: 1) A и B; 2) B и C; 3) A и C; 4) C и D; 5) A и D; 6) D и E.

23. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки: 1) $A(2; -3)$; $B(3; 2)$ и $C(-2; 5)$; 2) $M_1(-3; 2)$, $M_2(5; -2)$ и $M_3(1; 3)$; 3) $M(3; -4)$, $N(-2; 3)$ и $P(4; 5)$.

24. Точка M является серединой отрезка OA, соединяющего начало координат O с точкой $A(-5; 2)$. Найти координаты точки M.

25. Построить точки $A(4; 1)$, $B(3; 5)$, $C(-1; 4)$ и $D(0; 0)$. Если точки построены правильно, то получен квадрат. Какова его площадь? Чему равна длина стороны этого квадрата? Найти координаты середин сторон квадрата.

26. Площадь треугольника равна 10 кв. ед., две его вершины — точки $A(5; 1)$ и $B(-2; 2)$. Найти координаты третьей вершины, если известно, что она лежит на оси абсцисс.

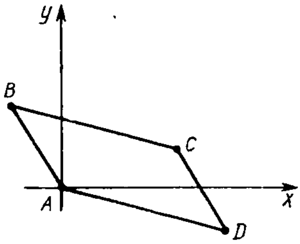


Рис. 5

27. Найти площадь четырехугольника с вершинами в точках $A(3;\ 1)$; $B(4;\ 6)$; $C(6;\ 3)$ и $D(5;\ -2)$.

28. Определить середины сторон треугольника с вершинами $A(2;\ -1)$, $B(4;\ 3)$ и $C(-2;\ 1)$.

29. Точки $A(-2;\ 1)$, $B(2;\ 3)$ и $C(4;\ -1)$ — середины сторон треугольника. Найти координаты его вершин.

30. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, имеющей форму треугольника с вершинами $A(2;\ 4)$, $B(0;\ 1)$, $C(4;\ 2)$.

31. Площадь треугольника равна 3 кв. ед., две его вершины — точки $A(3;\ 1)$ и $B(1;\ -3)$. Найти координаты третьей вершины, если известно, что она лежит на оси ординат.

32. Площадь параллелограмма равна 12 кв. ед., две его вершины — точки $A(-1;\ 3)$ и $B(-2;\ 4)$. Найти две другие вершины этого параллелограмма, если известно, что точка пересечения его диагоналей лежит на оси абсцисс.

33. Вершины треугольника — точки $A(3;\ 6)$, $B(-1;\ 3)$ и $C(2;\ -1)$. Найти длину его высоты, проведенной из вершины C.

34. Три вершины параллелограмма — точки $A(3;\ 7)$, $B(2;\ -3)$ и $C(-1;\ 4)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

35. Отрезок, ограниченный точками $A(1;\ -3)$ и $B(4;\ 3)$, разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.

36. Определить координаты концов A и B отрезка, который точками $P(2;\ 2)$ и $Q(1;\ 5)$ разделен на три равные части.

37. Прямая проходит через точки $M(2;\ -3)$ и $N(-6;\ 5)$. Найти на этой прямой точку, ордината которой равна -5.

38. Прямая проходит через точки $A(7;\ -3)$ и $B(23;\ -6)$. Найти точку пересечения этой прямой с осью абсцисс.

39. Три вершины параллелограмма — точки $A(3;\ -5)$, $B(5;\ -3)$, $C(-1;\ 3)$. Определить четвертую вершину D, противоположную B.

40. На плоскости даны точки $A(0;\ 0)$, $B(x_1;\ y_1)$ и $D(x_2;\ y_2)$ (рис. 5). Какие координаты должна иметь точка C, чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом?

§ 4. Полярные координаты

Полярная система координат определяется заданием некоторой точки O, называемой *полюсом*, исходящего из нее луча OE, называемого *полярной осью*, и масштаба для измерения длин отрезков.

Пусть задана полярная система координат и пусть M — про-

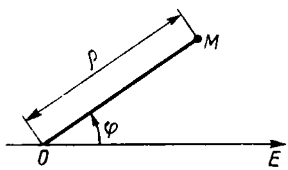


Рис. 6

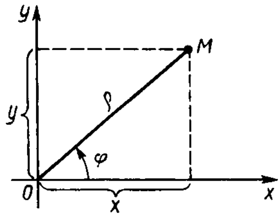


Рис. 7

извольная точка плоскости. Обозначим через ρ расстояние точки M от точки O, а через φ — угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки полярную ось для совмещения с лучом OM (рис. 6).

Полярными координатами точки M называются числа ρ и φ. Число ρ называют *полярным радиусом*, а φ — *полярным углом*. Символ $M(\rho;\ \varphi)$ обозначает, что точка M имеет полярные координаты ρ и φ.

Обычно считают, что ρ и φ изменяются в пределах: $0 \leqslant \rho < +\infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Однако в ряде случаев рассматриваются углы, большие 2π, а также отрицательные, т. е. углы, отсчитываемые от полярной оси по часовой стрелке.

Пусть начало прямоугольной системы координат находится в полюсе, а положительная полуось абсцисс совпадает с полярной осью и пусть точка M имеет прямоугольные координаты x и y и полярные координаты ρ и φ (рис. 7). Тогда переход от полярных координат точки M к прямоугольным осуществляется по формулам

$$x = \rho \cos \varphi, \ y = \rho \sin \varphi,$$

а выражение полярных координат через прямоугольные следует из этих формул:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \qquad (1)$$

Пример. Даны прямоугольные координаты точки (2; 2). Найти ее полярные координаты, считая, что полюс совмещен с началом прямоугольной системы координат, а полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс.

Решение. По формулам (1) имеем $\rho = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{tg} \varphi = 1$, откуда $\varphi = \pi/4$ или $\varphi = 5\pi/4$, так как φ изменяется от 0 до 2π. Но так как $x = 2 > 0$ и $y = 2 > 0$, то следует взять $\varphi = \pi/4$.

41. Построить точки, заданные полярными координатами: $A(2:\ \pi/2)$; $B(3;\ \pi/4)$; $C(3;\ 3\pi/4)$; $D(4;\ 0)$; $F(2;\ 3\pi/2)$ и $P(3;\ \pi)$.

42. Найти полярные координаты точек, симметричных относительно полярной оси точкам $A(3;\ \pi/3)$; $B(4;\ -\pi/4)$.

43. Найти полярные координаты точек, симметричных относительно полюса точкам $A(1;\ \pi/4)$; $B(5;\ -\pi/3)$.

44. Даны точки в полярной системе координат $A(2;\ \pi/4)$, $B(4;\ \pi/2)$. Найти их прямоугольные координаты.

45. Даны точки в прямоугольной системе координат $M_1(0;\ 5)$; $M_2(-3;\ 0)$; $M_3(\sqrt{3};\ 1)$. Найти их полярные координаты.

46. Даны точки в полярной системе координат $A(8;\ -2\pi/3)$ и $B(6;\ \pi/3)$. Найти полярные координаты середины отрезка, соединяющего точки A и B.

47. Даны точки в полярной системе координат $A(3;\ \pi/6)$ и $B(5;\ 2\pi/3)$. Найти расстояние d между ними.

48. Даны точки в полярной системе координат $A(\rho_1;\ \varphi_1)$ и $B(\rho_2;\ \varphi_2)$. Найти расстояние d между ними.

49. Одна из вершин треугольника OAB находится в полюсе, две другие — точки $A(5;\ \pi/4)$ и $B(4;\ \pi/12)$. Найти площадь этого треугольника.

50. Найти площадь треугольника, вершины которого — точки $A(3;\ \pi/8)$, $B(8;\ 7\pi/24)$ и $C(6;\ 5\pi/8)$.

51. Дана точка в полярной системе координат $(10;\ \pi/6)$. Найти ее прямоугольные координаты, если известно, что полюс полярной системы находится в точке $(2;\ 3)$, а полярная ось параллельна оси абсцисс.

§ 5. Уравнение линии как множество точек плоскости

Равенство вида

$$F(x,\ y)=0 \tag{1}$$

называется *уравнением с двумя переменными* $x,\ y$, если это равенство справедливо не для всех пар чисел x и y. Примеры уравнений: $2x+3y=0$, $x^2+y^2-25=0$, $\sin x+\sin y-1=0$.

Если (1) справедливо для всех пар чисел x и y, то оно называется *тождеством*. Примеры тождеств: $(x+y)^2-x^2-2xy-y^2=0$, $(x+y)\ (x-y)-x^2+y^2=0$.

Определение. *Уравнение (1) называется уравнением линии L (в заданной системе координат), если этому уравнению удовлетворяют координаты x и y любой точки, лежащей на линии L, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой линии.*

Из определения следует, что линия L представляет собой множество всех тех точек плоскости $(x;\ y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению (1).

Если (1) является уравнением линии L, то говорят, что уравнение (1) определяет (задает) линию L.

Линия L может определяться и уравнением вида

$$F(\rho,\ \varphi)=0,$$

содержащим полярные координаты.

52. Даны точки $M_1(2;\ -2)$, $M_2(2;\ 2)$, $M_3(2;\ -1)$, $M_4(3;\ -3)$, $M_5(5;\ -5)$, $M_6(3;\ -2)$. Установить, какие из данных точек лежат на линии, определенной уравнением $x+y=0$, и какие не лежат на ней.

53. Установить, какие линии определяются уравнениями (построить их): 1) $x-y=0$; 2) $x^2-y^2=0$; 3) $x^2+y^2=0$; 4) $x^2+y^2+1=0$; 5) $\rho=a\varphi$, где $a>0$, ρ и φ — полярные координаты; 6) а) $y=|x|$; б) $x=|y|$; в) $|y|=|x|$; г) $x+|x|=y+|y|$; 7) а) $|x|+|y|=1$, б) $|x|-|y|=1$.

54. Даны точки $M_1(1;\ \pi/3)$, $M_2(2;\ 0)$, $M_3(2;\ \pi/4)$, $M_4(\sqrt{3};\ \pi/6)$ и $M_5(1;\ 2\pi/3)$. Установить, какие из данных точек лежат на линии, определенной уравнением в полярных координатах $\rho=2\cos\varphi$, и какие не лежат на ней.

55. Вывести уравнение множества точек, каждая из которых отстоит от точки $C(\alpha,\ \beta)$ на расстоянии R. Иными словами, вывести уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C(\alpha;\ \beta)$.

56. Показать, что уравнение $x^2+2x+y^2=0$ задает на плоскости некоторую окружность.

57. На плоскости даны точки A и B. Найти множество точек M, удаленных от A вдвое дальше, чем от B.

58. Установить: а) лежит ли точка $N(4{,}1;\ 1{,}9)$ на окружности с центром $C(1;\ -2)$ и радиусом 5; б) лежит ли точка $K(0;\ 2\sqrt{6}-2)$ на этой же окружности; в) лежит ли точка $A(160;\ -1)$ на окружности с центром $(147;\ -6)$ и радиусом 13.

59. Написать уравнение окружности с центром $C(-2;\ 3)$ и радиусом, равным 5. Известно, что точка $A(a;\ -1)$ лежит на этой окружности. Найти a.

60. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x;\ y)$, равноудаленная от точек $A(0;\ 2)$ и $B(4;\ -2)$.

61. Написать уравнение траектории точки $M(x;\ y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $A(-1;\ 1)$, чем к точке $B(-4;\ 4)$.

62. Написать уравнение множества точек, сумма расстояний каждой из которых от точек $F_1\ (2;\ 0)$ и $F_2(-2;\ 0)$ равна $2\sqrt{5}$.

63. Написать уравнение множества точек, равноудаленных от точки $F(2;\ 2)$ и от оси Ox.

64. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x;\ y)$, оставаясь вдвое дальше от оси Ox, чем от оси Oy.

65. Написать уравнение множества точек, равноудаленных от оси Oy и точки $F(4;\ 0)$.

66. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x;\ y)$, равноудаленная от начала координат и от точки $A(-4;\ 2)$.

67. Написать уравнение траектории точки $M(x;\ y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $A(0;\ -1)$, чем к точке $B(0;\ 4)$.

§ 6. Линии первого порядка

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y=kx+b, \qquad (1)$$

где k равен тангенсу угла α наклона прямой к оси Ox $(k=\operatorname{tg}\alpha)$ и называется *угловым коэффициентом*, b — величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy (рис. 8).

Пример 1. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси Oy отрезок $b=3$ и образующей с осью Ox угол $\alpha=\pi/6$.

Решение. Находим угловой коэффицчент: $k=\operatorname{tg}\alpha=$ $=\operatorname{tg}\pi/6=1/\sqrt{3}$. Подставляя k и b в уравнение (1), получаем искомое уравнение прямой:

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+3 \text{ или } \sqrt{3}y-x-3\sqrt{3}=0.$$

2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_1;\ y_1)$ с данным угловым коэффициентом:

$$y-y_1=k(x-x_1). \qquad (2)$$

Пример 2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;\ 1)$ и образующей с осью Ox угол $\alpha=\pi/4$.

Решение. Находим угловой коэффициент: $k=\operatorname{tg}\alpha=$ $=\operatorname{tg}(\pi/4)=1$. Подставляя данные координаты и значение k в уравнение (2), получаем искомое уравнение прямой:

$$y-1=x-2 \text{ или } y-x+1=0.$$

3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \qquad (3)$$

Пример 3. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(3;\ 1)$ и $M_2(5;\ 4)$.

Решение. Подставляя данные координаты точек M_1 и M_2 в (3), получаем искомое уравнение прямой: $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{3}$ или $3x-2y-7=0$.

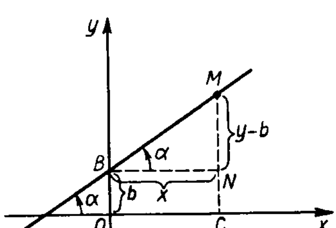


Рис. 8

4. Общее уравнение прямой

$$Ax+By+C=0, \qquad (4)$$

где A, B, C — произвольные коэффициенты (A и B не равны нулю одновременно).

Пример 4. Дано общее уравнение $12x-5y-65=0$. Написать уравнение с угловым коэффициентом.

Решение. Разрешив уравнение прямой относительно y, получаем уравнение с угловым коэффициентом: $y=\frac{12}{5}x-13$. Здесь $k=\frac{12}{5}$, $b=-13$.

Если в уравнении (4) какой-то из коэффициентов равен нулю, то:

1) при $C=0$ $y=-\frac{A}{B}x$ — прямая проходит через начало координат;

2) при $B=0\,(A\neq 0)$ $x=-\frac{C}{A}=a$ — прямая параллельна оси Oy;

3) при $A=0\,(B\neq 0)$ $y=-\frac{C}{B}=b$ — прямая параллельна оси Ox;

4) при $B=C=0$ $Ax=0$, $x=0$ — ось Oy;

5) при $A=C=0$ $By=0$, $y=0$ — ось Ox.

Если ни один из коэффициентов уравнения (4) не равен нулю, то его можно преобразовать к виду

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \tag{5}$$

где $a=-\frac{C}{A}$ и $b=-\frac{C}{B}$ — величины отрезков, которые отсекает прямая на координатных осях. Уравнение (5) называется уравнением прямой «в отрезках».

Пример 5. Прямая задана уравнением $3x-5y+15=0$. Составить для этой прямой уравнение «в отрезках».

Решение. Для данной прямой уравнение «в отрезках» имеет вид

$$\frac{x}{-5}+\frac{y}{3}=1.$$

68. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси Oy отрезок $b=3$ и образующей с осью Ox угол: 1) 45°; 2) 135°. Построить эти прямые.

69. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и составляющей с осью Ox угол: 1) 45°; 2) 60°; 3) 90°; 4) 120°; 5) 135°.

70. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку $(-2;\ 3)$, и построить ее.

71. Определить параметры k и b для каждой из прямых: 1) $2x-3y=6$; 2) $2x+3y=0$; 3) $y=-3$; 4) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$.

72. Построить прямые: 1) $3x+4y=12$; 2) $3x-4y=0$; 3) $2x-5=0$; 4) $2y+5=0$.

73. Определить параметры k и b прямой, проходящей через точку $A(2;\ 3)$ и составляющей с осью Ox угол 45°. Составить уравнение этой прямой.

74. Уравнения прямых: 1) $2x-3y=6$; 2) $3x-2y+4=0$ привести к виду «в отрезках» на осях.

75. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(4;\ 3)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью, равной 3 кв. ед.

76. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-4;\ 6)$ и отсекающей от осей координат треугольник площадью, равной 6 кв. ед.

77. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1;\ 3)$ и $B(4;\ -2)$.

78. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;\ 3)$ и составляющей с осью Ox угол: 1) 45°; 2) 60°; 3) 135°; 4) 0°, — и построить ее.

79. Написать уравнения прямых заданными параметрами: 1) $b=-2$, $\alpha=60°$; 2) $b=-2$, $\alpha=120°$, — и построить их.

80. Определить точки пересечения прямой $2x-3y-12=0$ с осями координат и построить эту прямую.

81. Найти точку пересечения двух прямых $3x-4y-29=0$, $2x+5y+19=0$.

82. Стороны AB, BC и AC треугольника ABC даны соответственно уравнениями $4x+3y-5=0$, $x-3y+10=0$, $x-2=0$. Определить координаты его вершин.

83. Написать уравнения двух прямых, проходящих через точку $A(4;\ 5)$, так, чтобы одна была параллельна оси Ox, другая параллельна оси Oy.

84. Написать уравнение прямой, параллельной оси Oy и отсекающей на оси Ox отрезок, равный: 1) 4; 2) -5 и 3) 0.

85. Написать уравнение прямой, параллельной оси Ox и отсекающей на оси Oy отрезок, равный: 1) 6; 2) -2; 3) 0.

5. Угол между двумя прямыми. Если известны угловые коэффициенты k_1 и k_2 двух прямых, то один из углов φ между этими прямыми определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \tag{6}$$

Второй угол равен $\pi-\varphi$.

Условие параллельности двух прямых: $k_1=k_2$.

Условие перпендикулярности двух прямых: $k_2=-\frac{1}{k_2}$.

Пример 6. Две прямые заданы уравнениями $y=2x+3$ и $y=-3x+2$. Найти угол между этими прямыми.

Решение. Имеем $k_1=2$, $k_2=-3$. Поэтому по формуле (6) находим

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{-3-2}{1+(-3)\cdot 2}=\frac{-5}{-5}=1.$$

Таким образом, один из углов между данными прямыми равен $\pi/4$, другой угол $\pi-\pi/4=3\pi/4$.

Пример 7. Показать, что прямые $4x-6y+7=0$ и $20x-30y-11=0$ параллельны.

Решение. Приведя уравнение каждой прямой к виду (2), получаем $y=\frac{2}{3}x+\frac{7}{6}$ и $y=\frac{2}{3}x-\frac{11}{30}$, откуда $k_1=k_2=2/3$. Следовательно, прямые параллельны.

Пример 8. Показать, что прямые $3x-5y+7=0$ и $10x+6y-3=0$ перпендикулярны.

Решение. Приведя уравнение каждой прямой к виду (2), получаем $y=\frac{3}{5}x+\frac{7}{5}$ и $y=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{2}$. Здесь $k_1=3/5$, $k_2=-5/3$. Так как $k_2=-\frac{1}{k_1}$, то прямые перпендикулярны.

86. Определить угол между прямыми: 1) $y=2x-3$ и $y=\frac{1}{2}x+1$; 2) $5x-y+7=0$ и $2x-3y+1=0$; 3) $2x+y=0$ и $y=3x-4$; 4) $3x-4y=6$ и $8x+6y=11$.

87. Среди прямых $3x-2y+7=0$, $6x-4y-9=0$, $6x+4y-5=0$, $2x+3y-6=0$ указать параллельные и перпендикулярные.

88. В треугольнике с вершинами $A(-2;\ 0)$, $B(2;\ 6)$ и $C(4;\ 2)$ проведены высота BD и медиана BE. Написать уравнение стороны AC, медианы BE и высоты BD.

89. Написать уравнения прямых, проходящих через начало координат под углом 45° к прямой $y=4-2x$.

90. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1;\ 1)$ под углом 45° к прямой $2x+3y=6$.

91. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(6;\ 2)$ на прямую $x-4y-7=0$.

92. Написать уравнение прямой, если точка $A(2;\ 3)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

93. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(5;\ -4)$ и составляющей с осью Ox тот же угол, что и прямая $5x+2y-3=0$.

94. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-4;\ 3)$ и параллельной другой прямой $x+2y+3=0$.

95. Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x-3y-1=0$ и $3x-y-2=0$ перпендикулярно прямой $y=x+1$.

96. Дан треугольник с вершинами $A(-2;\ 0)$, $B(2;\ 4)$ и $C(4;\ 0)$. Написать уравнения сторон треугольника, медианы AE, высоты AD и найти длину медианы AE.

6. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой. Пусть на плоскости Oxy дана некоторая прямая L. Проведем через начало координат прямую n, перпендикулярную данной, и назовем ее *нормалью* к прямой L. Обозначим через N точку пересечения нормали с прямой L. На нормали введем направление от точки O к точке N. Обозначим через α угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки ось Ox до совмещения ее с нормалью, через p — длину отрезка ON (рис. 9). Тогда уравнение данной прямой может быть записано в виде

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0, \tag{7}$$

которое называется *нормальным уравнением* прямой L.

Чтобы привести общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$ к нормальному виду, нужно все члены его умножить на *нормирующий множитель*

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}, \tag{8}$$

взятый со знаком, противоположным знаку C. Если $C=0$, то знак нормирующего множителя можно брать произвольно.

Пусть L — прямая, заданная нормальным уравнением (7), и пусть $M_0(x_0;\ y_0)$ — точка, не лежащая на этой прямой. Тогда расстояние d от точки M_0 до прямой L может быть вычислено по формуле

$$d=|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p|. \tag{9}$$

Пример 9. Даны прямая $3x-4y+10=0$ и точка $M(4;\ 3)$. Найти расстояние d от точки M до данной прямой.

Решение. Приведем данное уравнение к нормальному виду (7). Для этого найдем по формуле (8) нормирующий множитель $\mu=-\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=-\frac{1}{5}$. Умножая данное уравнение на μ, получаем нормальное уравнение

$$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-2=0.$$

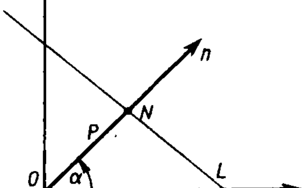


Рис. 9

По формуле (9) находим искомое расстояние: $d=\left|-\frac{3}{5}\cdot 4+\frac{4}{5}\cdot 3-2\right|=|-2|=2$.

97. Привести к нормальному виду общие уравнения прямых:

1) $4x-3y-10=0$; 2) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+10=0$;

3) $12x-5x+13=0$; 4) $x+2=0$.

98. Найти расстояния точек $A(4;\ 3)$,

$B(2;\ 1)$, $C(1;\ 0)$ и $O(0;\ 0)$ от прямой $3x+4y-10=0$. Построить точки и прямую.

99. Показать, что прямые $2x-3y-6=0$ и $4x-6y-25=0$ параллельны, и найти расстояние между ними.

100 Найти k из условия, что прямая $y=kx+5$ удалена от начала координат на расстояние $d=\sqrt{5}$.

101. Написать уравнение множества точек, удаленных от прямой $4x-3y=0$ на 4 единицы.

102. Написать уравнение прямой, удаленной от точки $A(4;\ -2)$ на 4 единицы и параллельной прямой $8x-15y=0$.

103. Найти длину высоты BD в треугольнике с вершинами $A(-3;\ 0)$, $B(2;\ 5)$ и $C(3;\ 2)$.

104. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;\ 4)$ и удаленной от начала координат на расстояние $d=2$.

105. Через начало координат проведена прямая на одинаковом расстоянии от точек $A(2;\ 2)$ и $B(4;\ 0)$. Найти это расстояние.

§ 7. Смешанные задачи на прямую

106. Составьте уравнения, которые описывают следующие множества точек: 1) прямую, параллельную оси Ox, проходящую через точку $(1;\ 0)$; 2) прямую, параллельную прямой $y=x$ и проходящую через точку $(-3;\ 7)$; 3) множество точек, находящихся на расстоянии 2 от оси Oy.

107. Придумать соотношения между x и y, которые задают на координатной плоскости: 1) пару прямых $y=3x$ и $y=x-3$; 2) прямую $y=x$ и точку $(-1;\ 2)$; 3) всю часть плоскости выше прямой $y=x$ (включая эту прямую); 4) часть плоскости между прямыми $y=0$ и $y=1$ (без этих прямых); 5) внутренность квадрата с вершинами в точках $(0;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(1;\ 1)$, $(1;\ 0)$.

108. На плоскости даны три точки: $A(3;\ -6)$, $B(-200;\ 400)$, $C(1000;\ -2000)$. Доказать, что они лежат на одной прямой.

109. Найти, какие три из точек $A(1;\ 3)$; $B(-2;\ 1)$; $C(-1;\ 7)$; $D(3;\ 1)$ лежат на одной прямой.

110. Написать уравнение прямой, параллельной биссектрисе I координатного угла и проходящей через точку $(0;\ -5)$.

111. Написать уравнение прямой, параллельной прямой $y=2x+1$ и проходящей через точку $(0;\ 2)$.

112. Даны прямая $2x+y-6=0$ и на ней две точки A и B с ординатами $y_A=6$ и $y_B=-2$. Написать уравнение высоты AD треугольника AOB, найти ее длину и площадь треугольника AOB.

113. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(-1;\ 1)$ так, чтобы середина ее отрезка между прямыми $x+2y-1=0$ и $x+2y-3=0$ лежала на прямой $x-y-1=0$.

114. Найти уравнения биссектрис углов между прямыми $3x+4y-1=0$ и $4x-3y+5=0$.

115. Найти множество точек M, разность квадратов расстояний которых до двух данных точек A и B равна данной величине a. При каких значениях a задача имеет решение?

116. Найти уравнение касательной к окружности $x^2+y^2=5$, проходящей через точку (1; 2).

117. Найти уравнения общих касательных к окружностям $x^2+y^2=6x$ и $x^2+y^2=6y$.

118. Даны точки $A(-4;\ 0)$ и $B(0;\ 6)$. Через середину отрезка AB провести прямую, отсекающую на оси Ox отрезок, вдвое больший, чем на оси Oy.

119. Из начала координат проведены две взаимно перпендикулярные прямые, образующие с прямой $2x+y=a$ равнобедренный треугольник. Найти площадь этого треугольника.

120. Даны уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника $3x+y=0$ и $x-3y=0$ и точка (5; 0) на его основании. Найти периметр и площадь треугольника.

121. В треугольнике ABC даны: 1) уравнение стороны AB $3x+2y=12$; 2) уравнение высоты BM $x+2y=4$; 3) уравнение высоты AM $4x+y=6$, где M — точка пересечения высот. Написать уравнения сторон AC, BC и высоты CM.

122. Две стороны параллелограмма заданы уравнениями $y=x-2$ и $5y=x+6$. Диагонали его пересекаются в начале координат. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма и его диагоналей.

123. Написать уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $A(0;\ 2)$, и уравнения высот BM $x+y=4$ и CM $y=2x$, где M — точка пересечения высот.

124. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $5x-y+10=0$ и $8x+4y+9=0$ и параллельной прямой $x+3y=0$.

125. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $2x-3y+5=0$ и $3x+y-7=0$ и перпендикулярной к прямой $y=2x$.

§ 8. Линии второго порядка

1. Эллипс. *Эллипсом* называется множество всех точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, бóльшая расстояния между фокусами.

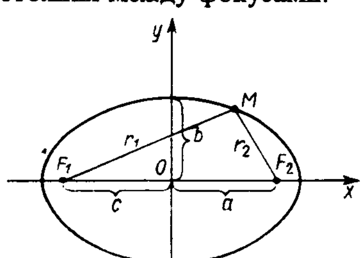


Рис. 10

Фокусы эллипса обозначают буквами F_1 и F_2 (рис. 10), расстояние между ними $|F_1F_2|$ — через $2c$. Пусть M — произвольная точка эллипса. Сумму расстояний от точки M до фокусов обозначают через $2a$. Так как, по определению, $|F_1M|+|F_2M|>|F_1F_2|$, то $2a>2c$ и $a>c$.

Через r_1 и r_2 обозначают расстояние от точки M до фокусов ($r_1=|F_1M|$, $r_2=|F_2M|$). Числа r_1 и r_2 называются *фокальными радиусами* точки M.

Каноническое (простейшее) уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $b=\sqrt{a^2-c^2}$, $a>b$. Числа a и b называются *полуосями эллипса*. Отношение $c/a=\varepsilon<1$ называется *эксцентриситетом эллипса*. Фокальные радиусы определяются формулами $r_1=a+\varepsilon x$, $r_2=a-\varepsilon x$.

126. Построить эллипс $9x^2+25y^2=225$. Найти: 1) полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет.

127. Построить эллипс $3x^2+16y^2=192$. Найти: 1) полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет.

128. Написать каноническое уравнение эллипса, если известно, что: 1) расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось $b=3$; 2) большая полуось $a=6$, а эксцентриситет $\varepsilon=0{,}5$; 3) расстояние между фокусами равно 6, а эксцентриситет $\varepsilon=3/5$; 4) расстояние между фокусами равно 6, а $a+b=9$; 5) расстояние между фокусами равно $2\sqrt{13}$, а $a-b=1$.

129. Написать каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки: 1) $M_1(2;\ 3)$ и $M_2(1;\ 3\sqrt{5}/2)$; 2) $M_1(4;\ 9/5)$ и $M_2(5\sqrt{5}/3;\ 2)$; 3) $M_1(2;\ 0)$ и $M_2(1;\ 2)$.

130. Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса, если известно, что эллипс проходит через точки $M_1(4;\ 4\sqrt{5}/5)$ и $M_2(0;\ 6)$.

131. Эллипс проходит через точки $M_1(2;\ \sqrt{3})$ и $M_2(0;\ 2)$. Написать его уравнение и найти расстояния точки M от фокусов.

132. Эллипс проходит через точку $M(-4;\ \sqrt{21})$ и имеет эксцентриситет $\varepsilon=3/4$. Написать уравнение эллипса и найти фокальные радиусы точки M.

133. Найти длину хорды эллипса $x^2+2y^2=18$, делящей угол между осями пополам.

134. На эллипсе $9x^2+25y^2=225$ найти точку, расстояние которой от правого фокуса в четыре раза больше расстояния ее от левого фокуса.

135. Ординаты всех точек окружности $x^2+y^2=36$ сокращены втрое. Написать уравнение полученной новой кривой.

136. Определить траекторию точки M, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $F(-1;\ 0)$, чем к прямой $x=-4$.

137. Отрезок AB постоянной длины $a+b$ движется так, что его конец A скользит по оси Ox, а конец B — по оси Oy. Определить траекторию движения точки M отрезка, делящей его части $BM=a$ и $MA=b$ (эллиптический циркуль Леонардо да Винчи).

138. Определить, пересекает ли заданная прямая L данный эллипс Γ, касается его или проходит вне его: 1) L: $2x-y-3=0$, Γ: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) L: $2x+y-10=0$, Γ: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; 3) L: $3x+2y-20=0$, Γ: $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{10}=1$.

2. Гипербола. *Гиперболой* называется множество всех точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояний между фокусами.

Фокусы гиперболы обозначают буквами F_1 и F_2 (рис. 11), расстояние между ними $|F_1F_2|$ — через $2c$. Пусть M — произвольная точка гиперболы. Модуль разности расстояний от точки M до фокусов обозначают через $2a$. Так как, по определению, $||F_1M|-|F_2M||<|F_1F_2|$, то $2a<2c$ или $a<c$. Числа $|F_1M|$ и $|F_2M|$ называют ***фокальными радиусами*** точки M и обозначают через r_1 и r_2.

Каноническое (простейшее) уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $b=\sqrt{c^2-a^2}$. Число a называется *действительной*, а число b — *мнимой полуосями гиперболы*. Отношение $c/a=\varepsilon>1$ называется *эксцентриситетом гиперболы*. Фокальные радиусы определяются формулами $r_1=|\varepsilon x+a|$, $r_2=|\varepsilon x-a|$. Прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ называются *асимптотами гиперболы*. Гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ называются *сопряженными*.

139. Построить гиперболу $16x^2-9y^2=144$. Найти: 1) действительную и мнимую полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот.

140. Построить гиперболу $3x^2-4y^2=12$. Найти: 1) действительную и мнимую полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот.

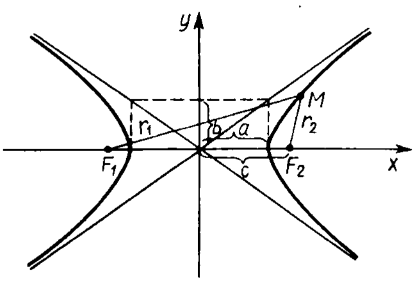


Рис. 11

141. Написать каноническое уравнение гиперболы, если известно, что:

1) расстояние между фокусами $2c=10$, а между вершинами $2a=8$;

2) действительная полуось $a=2\sqrt{5}$, а эксцентриситет $\varepsilon=\sqrt{1,2}$;

3) расстояние между фокусами $2c=6$, а эксцентриситет $\varepsilon=3/2$;

4) расстояние между фокусами $2c=20$, а уравнение асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$;

5) мнимая полуось $b=4$, а расстояние между фокусами $2c=10$.

142. На гиперболе $x^2-4y^2=16$ взята точка M с ординатой, равной 1. Найти расстояние ее от фокусов.

143. Гипербола проходит через точку $M\ (6;\ -2\sqrt{2})$ и имеет мнимую полуось $b=2$. Написать ее уравнение и найти расстояния точки M от фокусов.

144. Написать уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы — в вершинах эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

145. Написать уравнения касательных к гиперболе $x^2-4y^2=16$, проведенных из точки $A\,(0;\ -2)$.

146. Найти расстояние фокуса гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ от ее асимптот и угол между асимптотами.

147. Определить траекторию точки $M(x;\ y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к прямой $x=1$, чем к точке $F(4;\ 0)$.

148. Определить траекторию точки M, которая движется так, что остается вдвое дальше от точки $F(-8;\ 0)$, чем от прямой $x=-2$.

149. Найти множество точек, для которых произведение расстояний до двух данных пересекающихся прямых равно $C=\text{const}$.

3. Парабола. *Параболой* называется множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.

Пусть M — произвольная точка параболы. Фокус параболы обозначают буквой F, а через r — расстояние от точки M до фокуса $(r=|FM|)$, через d — расстояние от точки M до директрисы, а через p — расстояние от фокуса до директрисы (рис. 12). Величину p называют *параметром параболы*.

Каноническое (простейшее) уравнение параболы

$$y^2=2px.$$

Парабола имеет фокус $F(p/2;\ 0)$ и директрису $x=-p/2$; фокальный радиус $r=x+p/2$. Симметрична относительно оси Ox. Вершина параболы находится в начале координат.

Парабола $x^2=2py$ симметрична относительно оси Oy, лежит в верхней полуплоскости.

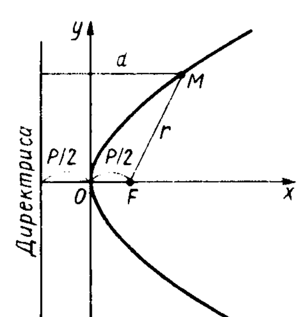


Рис. 12

150. Построить параболу $y^2=6x$. Найти: 1) координаты фокуса; 2) уравнение директрисы.

151. Написать уравнение параболы: 1) проходящей через точки $(0; 0)$ и $(1; -3)$ и симметричной относительно оси Ox; 2) проходящей через точки $(0; 0)$ и $(2; -4)$ и симметричной относительно оси Oy.

152. Написать уравнение окружности, имеющей центр в фокусе параболы $y^2=2px$ и касающейся ее директрисы. Найти точки пересечения параболы и окружности.

153. Написать уравнение параболы и уравнение директрисы, если известно, что парабола симметрична относительно оси Ox и что точка пересечения прямых $y=x$ и $x+y=2$ лежит на параболе.

154. Написать уравнение параболы и ее директрисы, если известно, что парабола проходит через точки пересечения прямой $x+y=0$ и окружности $x^2+y^2+4y=0$ и симметрична относительно оси Oy.

155. На параболе $y^2=6x$ найти точку, фокальный радиус которой равен 4,5.

156. Зеркальная поверхность прожектора образована вращением параболы вокруг ее оси симметрии. Диаметр зеркала 80 см, а глубина его 10 см. На каком расстоянии от вершины параболы нужно поместить источник света, если для отражения лучей параллельным пучком он должен быть в фокусе параболы?

157. Из вершины параболы $y^2=2px$ проведены всевозможные хорды. Написать уравнение множества середин этих хорд.

158. Написать уравнение множества точек, одинаково удаленных от точки $F(0; 2)$ и от прямой $y=4$. Найти точки пересечения этой кривой с осями координат и построить ее.

159. Написать уравнение множества точек, одинаково удаленных от начала координат и от прямой $x=-4$. Найти точки пересечения этой кривой с осями координат и построить ее.

160. Найти множество центров окружностей, проходящих через данную точку A и касающихся данной прямой L.

Глава 4

ФУНКЦИЯ

§ 1. Основные понятия

1. Определение функции.

Определение. *Пусть X и Y — некоторые числовые множества. Функцией f называется множество упорядоченных пар чисел $(x; y)$*, таких, что $x \in X$, $y \in Y$, и каждое x входит в одну и только*

*Пара чисел x и y называется *упорядоченной*, если указано, какое из этих чисел считается первым, а какое — вторым. Упорядоченную пару чисел записывают в виде $(x; y)$, где x — первое число, y — второе.

одну пару этого множества, а каждое y входит по крайней мере в одну пару. При этом говорят, что числу x поставлено в соответствие число y, и пишут $y=f(x)$. Число y называется значением функции f в точке x. Переменную y называют зависимой переменной, а переменную x — независимой переменной (или аргументом); множество X — областью определения (или существования) функции, а множество Y — множеством значений функции.

Кроме буквы f для обозначений функций используют другие буквы латинского и греческого алфавитов, например: $y=y(x)$, $y=g(x)$, $y=\varphi(x)$, $y=A(x)$, $y=F(x)$ и т. д. Другими буквами обозначают зависимую и независимую переменные. Иногда зависимую переменную также называют функцией.

Пусть на некотором множестве X определена функция $f(x)$; тогда значение этой функции, соответствующее некоторому значению аргумента x_0, обозначают $f(x_0)$. Например, если $f(x)=x^2$, то $f(3)=3^2=9$, $f(-2)=(-2)^2=4$ и т. д.

Функция, все значения которой равны между собой, называется *постоянной*. Постоянная функция обозначается буквой $C(f(x)=C)$.

Пример 1. Найти область определения и множество значений функции $y=\sin x$.

Решение. Областью определения функции $y=\sin x$ является множество всех вещественных чисел, а множество значений функции есть множество всех чисел, заключенных между -1 и 1, т. е. $X=(-\infty, +\infty)$ и $Y=[-1, 1]$.

Пример 2. Найти область определения и множество значений функции $y=\lg x$.

Решение. Областью определения функции $y=\lg x$ является множество всех положительных чисел, а множество значений функции — множество всех вещественных чисел, т. е. $X=(0, +\infty)$ и $Y=(-\infty, +\infty)$.

Пример 3. Найти область определения функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+x+2}}+\lg(x-1)$.

Решение. Так как функция представляет собой сумму функций, то область определения функции будет состоять из всех тех значений x, которые принадлежат одновременно области определения функций $\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+x+2}}$ и $\lg(x-1)$. Поэтому область определения заданной функции определяется как совокупность значений x, при которых одновременно выполняются неравенства $-x^2+x+2>0$ и $x-1>0$. Это будет интервал $(1, 2)$.

Пример 4. Найти область определения функции $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$.

Решение. Область определения функции определяется неравенством $\left|\frac{2x}{1+x}\right| \leqslant 1$. Возводя в квадрат, получим $4x^2 \leqslant 1+2x+x^2$ или $3x^2-2x-1 \leqslant 0$. Решая это неравенство, найдем, что областью определения функции будет отрезок $[-1/3,\ 1]$.

Определить множества значений x, удовлетворяющих неравенствам:

1. $|x| < 3$.
2. $x^2 \leqslant 4$.
3. $x^2 > 16$.
4. $|x-2| < 1$.
5. $|2x+3| < 1$.
6. $(x+1)^2 \leqslant 9$.
7. $2x^2 \leqslant 50$.
8. $(x+3)^2 \leqslant 3$.
9. $(5x+6)^2 \geqslant 1$.
10. $x^2-4x+5=0$.
11. $x^2-3x-4 \leqslant 0$.
12. $x-x^2>0$.
13. $x^2-2x+5<0$.
14. $x^2-11x+10>0$.

Найти области определения функций, заданных формулами:

15. $y=3x+2$.
16. $y=x^3+5x+6$.
17. $y=\frac{3x-1}{5x+6}$.
18. $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$.
19. $y=\sqrt{3x-1}+\frac{1}{\sqrt{5-x}}$.
20. $y=\sqrt{2-3x}+\lg x$.
21. $y=\sqrt{x^2-5x+6}$.
22. $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$.
23. $y=\sqrt{4-x^2}$.
24. $y=\sin 3x$.
25. $y=x+\cos 2x$.
26. $y=\operatorname{tg} x$.
27. $y=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.
28. $y=\arcsin x$.
29. $y=\arccos(x+2)$.
30. $y=\operatorname{arctg}(2x+1)$.
31. $y=\log_2\log_3\log_4 x$.
32. $y=\log_2(-x)$.
33. $y=\log_{1/3}|x|$.
34. $y=\log_5(2x-1)$.
35. $y=\log_7(4x-x^2)$.
36. $y=\frac{1}{\log_5(1-3x)}$.
37. $y=3^{1/x}$.
38. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/x-3}$.
39. $y=\arcsin\frac{1}{x+3}$.
40. $y=\frac{\sin x}{x^2-5x+4}$.
41. $f(x)=x^2+x-2$, найти $f(0), f(1), f(-2)$.
42. $f(x)=\arccos(\lg x)$, найти $f(1/10), f(1), f(10)$.

2. Четные и нечетные функции. Функция $f(x)$, заданная на симметричном относительно начала координат промежутке, называется *четной*, если для любого значения x из этого промежутка имеет место равенство

$$f(-x)=f(x).$$

График четной функции симметричен относительно оси Oy.

Функция $f(x)$, заданная на симметричном относительно начала координат промежутке, называется *нечетной*, если для любого значения x из этого промежутка имеет место равенство

$$f(-x) = -f(x).$$

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Сумма и разность двух четных (нечетных) функций есть функция четная (нечетная). Действительно, пусть $\varphi(x)=f(x)+g(x)$. Тогда если $f(x)$ и $g(x)$ — четные, то

$$\varphi(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=\varphi(x).$$

Если же $f(x)$ и $g(x)$ — нечетные, то $\varphi(x)$ также будет нечетной,

$$\varphi(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-[f(x)+g(x)]=$$
$$=-\varphi(x).$$

Аналогичное доказательство для разности функций.

Произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная, а произведение четной функции на нечетную есть нечетная функция. В самом деле, пусть $\varphi(x)=f(x)\cdot g(x)$ и $f(x)$ и $g(x)$ — четные функции, тогда

$$\varphi(-x)=f(-x)\,g(-x)=f(x)\,g(x)=\varphi(x);$$

если $f(x)$ и $g(x)$ — нечетные функции, то

$$\varphi(-x)=f(-x)\,g(-x)=[-f(x)]\,[-g(x)]=\varphi(x);$$

если же $f(x)$ — четная, а $g(x)$ — нечетная функции, то

$$\varphi(-x)=f(-x)\,g(-x)=f(x)\,[-g(x)]=-\varphi(x).$$

Пример 5. Доказать, что функция $f(x)=x^5-x^3+x$ — нечетная.

Решение. Область определения функции: $-\infty<x<+\infty$; $f(-x)=(-x)^5-(-x)^3+(-x)=-x^5+x^3-x=-(x^5-x^3+x)=$ $=-f(x)$. Следовательно, функция нечетная.

Пример 6. Доказать, что функция $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ — четная.

Решение. Область определения функции: $1\leqslant x\leqslant 1$; $f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}=f(x)$. Следовательно, функция четная.

Пример 7. Является ли функция $f(x)=x^4+x^2$, определенная в промежутке $-2\leqslant x<10$, четной?

Решение. Эта функция не является ни четной, ни нечетной, так как ее область определения не симметрична относительно начала координат. Хотя формально $f(-x)=f(x)$.

Пример 8. Исследовать на четность и нечетность функцию $f(x)=x^2+x-1$.

Решение. Область определения функции: $-\infty<x<+\infty$; $f(-x)=(-x)^2+(-x)-1=x^2-x-1\neq f(x)$, т. е. функция не удовлетворяет равенствам $f(-x)=f(x)$ и $f(-x)=-f(x)$. Значит, функция не является ни четной, ни нечетной.

Определить, какая из функций является четной, нечетной и какая не является ни четной, ни нечетной:

43. $y=\cos x+x\sin x$.

44. $y=x\cdot 2^{-x}$.

45. $y=2^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

46. $y=2x\sin^2 x-3x^3$.

47. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x-3^x$.

48. $y=\frac{x}{\sin x}$.

49. $y=5\log_2(x+1)$.

50. $y=x\cdot 4^{-x^2}$.

51. $y=\log_2\frac{2-x}{2+x}$.

52. $y=\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}$.

53. $y=5^{-x^2}$.

54. $y=x^2-x$.

55. $y=x^3+x^2$.

56. $y=\lg\cos 2x$.

57. $y=x^2+3x-1$.

58. $y=x^4-2x^2+3$.

59. $y=x^3+2x$.

60. $y=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

61. Пусть $f(x)$ — некоторая функция, определенная на всей числовой прямой. Показать, что функция $\varphi(x)=f(x)+f(-x)$ — четная, а функция $\psi(x)=f(x)-f(-x)$ — нечетная.

3. **Периодические функции**. Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует число $T\neq 0$ такое, что для любого значения x из области определения функции выполняется равенство

$$f(x+T)=f(x).$$

Число T называется *периодом* функции. Если T — период функции, то ее периодом является также и число $-T$, так как $f(x-T)=f[(x-T)+T]=f(x)$.

Обычно под периодом функции понимают *наименьший* из положительных периодов, если такой период существует. Например, периодом функций $\sin x$ и $\cos x$ является число $T=2\pi$: $\sin(x+2\pi)=\sin x$, $\cos(x+2\pi)=\cos x$, а функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ — число $T=\pi$.

Если T — период функции, то ее периодом будет также и число kT, где k — любое целое число ($k=\pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$)*. Например, $\sin(x+4\pi)=\sin[(x+2\pi)+2\pi]=\sin(x+2\pi)=\sin x$ ($k=2$).

Пример 9. Показать, что функция $f(x)=\sin\omega x$ имеет период $T=\frac{2\pi}{\omega}$ ($\omega\neq 0$).

Решение. Имеем $\sin\left[\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)\right]=\sin(\omega x+2\pi)=\sin\omega x$.

*Действительно, $f(x\pm 2T)=f[(x\pm T)\pm T]=f(x\pm T)=f(x)$,
$f(x\pm 3T)=f[(x\pm 2T)\pm T]=f(x\pm 2T)=f(x)$ и т.д.

Пример 10. Показать, что функция $f(x)=\sin(5x+3)$ имеет период $T=\frac{2\pi}{5}$.

Решение. Имеем $\sin[5(x+\frac{2\pi}{5})+3]=\sin(5x+2\pi+3)=\sin[(5x+3)+2\pi]=\sin(5x+3)$.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ периодические с периодами T_1 и T_2 соответственно, то периодом их суммы, произведения, разности и частного является число T, кратное T_1 и T_2. Действительно, пусть $T=k_1T_1$ и $T=k_2T_2$, где k_1 и k_2 — целые числа. Как было показано, число T является периодом функций $f(x)$ и $g(x)$. Тогда для функции $\varphi(x)=f(x)+g(x)$ имеем

$$\varphi(x+T)=f(x+T)+g(x+T)=f(x+k_1T_1)+g(x+k_2T_2)=f(x)+g(x);$$

для функции $\varphi(x)=f(x)\,g(x)$ имеем

$$\varphi(x+T)=f(x+T)\,g(x+T)=f(x+k_1T_1)\,g(x+k_2T_2)=f(x)\,g(x)$$ и т. д.

Пример 11. Показать, что число $T=12\pi$ есть период функции $f(x)=\cos\frac{3}{2}x+\sin\frac{x}{3}$.

Решение. Период $\cos\frac{3}{2}x$ есть $T_1=\frac{4\pi}{3}$ (см. пример 9). Период $\sin\frac{x}{3}$ есть $T_2=6\pi$. Наименьшее положительное число T, кратное $\frac{4\pi}{3}$ и 6π, есть 12π $(12\pi=9T_1$ и $12\pi=2T_2)$.

Следовательно, период функции есть $T=12\pi$.

Найти период функций:

62. $y=\sin 4x$.
63. $y=\mathrm{tg}(x/2)$.
64. $y=\sin x+\cos 2x$.
65. $y=\cos^2 3x$.
66. $y=\sin 3x+\sin 2x$.
67. $y=|\sin x|$.
68. $y=\sin(3x+1)$.
69. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.
70. $y=\sin^2(x/3)$.
71. $y=\left|\cos\frac{x}{2}\right|$.

72. Доказать, что функция $f(x)=\cos x^2$ не является периодической.

4. Графическое изображение функций.

Построить графики функций*:

73. $y=4x+8$.
74. $y=-\frac{1}{3}x+2$.
75. $y=|x|$.
76. $y=|4x-1|$.

*С методикой построения графиков функций можно познакомиться в кн.: *Шипачев В. С.* Основы высшей математики. М., 1998.

77. $y=2|x+1|$.

78. $y=-|5x+2|$.

79. $y=|x|+3$.

80. $y=|x|+x$.

81. $y=\frac{1}{2}x+|x|-1$.

82. $y=x^2+2$.

83. $y=-x^2+3$.

84. $y=2x^2+1$.

85. $y=3x^2-5$.

86. $y=(x-4)^2$.

87. $y=-(x+1)^2$.

88. $y=(x+2)^2-1$.

89. $y=(x-2)^2+1$.

90. $y=2(x-5)^2-1$.

91. $y=x^2-4x+1$.

92. $y=x^2-5x+6$.

93. $y=3x-x^2$.

94. $y=2x^2-4x$.

95. $y=4-2x^2-2x$.

96. $y=4x-x^2-3$.

97. $y=|x^2+2x-15|$.

98. $y=|x^2-3x-4|$.

99. $y=\sqrt{x+1}$.

100. $y=\sqrt{1-4x}$.

101. $y=-\sqrt{2x-1}$.

102. $y=\sqrt[3]{8x-1}$.

103. $y=1-\sqrt[3]{2x+1}$.

104. $y=1/x+2$.

105. $y=-\frac{3}{x}-1$.

106. $y=3-4/x$.

107. $y=1+\frac{1}{x-2}$.

108. $y=2-\frac{3}{x+1}$.

109. $y=\frac{x+5}{x+3}$.

110. $y=\frac{5-2x}{x-2}$.

111. $y=\frac{4x+7}{2x-5}$.

112. $y=\frac{9x+4}{3x+2}$.

113. $y=\left|\frac{7x+5}{5x+6}\right|$.

114. $y=\left|\frac{4-x}{5+2x}\right|$.

115. $y=\frac{|7x+2|}{2x+1}$.

116. $y=\frac{2x+4}{|3x+5|}$.

117. $y=\frac{|2-x|}{4x-1}$.

118. $y=\frac{x+2}{|x+2|}$.

119. $y=3^{x-2}$.

120. $y=(1/4)^{x+3}$.

121. $y=-2^{2x-1}$.

122. $y=-(1/2)^{x+1}$.

123. $y=(1/2)^{6-3x}-2$.

124. $y=3^{x/2}-2$.

125. $y=2^{1/x}$.

126. $y=3^{-1/x}$.

127. $y=2^{x^2-2x}$.

128. $y=(1/2)^{-1/x^2}$.

129. $y=2^{\frac{x-1}{x+1}}$.

130. $y=(1/2)^{\frac{3x-1}{3x+1}}$.

131. $y=1+3^{\frac{x}{x-1}}$.

132. $y=2^{\operatorname{tg} x}$.

133. $y=2^{\sin x}$.

134. $y=2^{x^2-4x+5}$.

135. $y=\log_{1/3}(2x-3)$.

136. $y=\log_2(x-2)$.

137. $y=\log_{1/2}(3-2x)$.

138. $y=-\log_3\left(\frac{x}{2}+1\right)$.

139. $y=\log_2(-x)$.

140. $y=\log_{1/2}|x|$.

141. $y=\log_{2/3}|2-3x|$.

142. $y=\log_4|x+2|$.

143. $y=|\log_3(4-3x)|$.

144. $y=|\log_2|3x+4||$.

145. $y=\log_{1/2}(x-x^2)$.

146. $y=\log_{1/2}\frac{x-1}{x+2}$.

147. $y=\log_2\frac{x+4}{2-x}$.

148. $y=\log_3(x^2-6x+5)$.

149. $y=\log_{1/2}(2x^2-4x+3)$.

150. $y=\log_{1/2}\frac{x^2-1}{x+2}$.

151. $y=\cos\frac{3}{2}x+1$.

152. $y=\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

153. $y=2\sin 3x+1$.

154. $y=\frac{1}{2}\cos\pi x-1$.

155. $y=\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}$.

156. $y=-2\sec\frac{x}{2}$.

157. $y=\frac{1}{2}\operatorname{cosec}2x$.

158. $y=1-2\sin\pi x$.

159. $y=\operatorname{tg}(\pi/4-x)$.

160. $y=\cos(x+\pi/6)$.

161. $y=2\sin(x-\pi/3)+1$.

162. $y=2\sin(\pi x-\pi/3)$.

163. $y=|\operatorname{tg}x+1|$.

164. $y=|\operatorname{ctg}(x+\pi/4)|$.

165. $y=\sin x+\cos x$.

166. $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$.

167. $y=|\sin 3x|$.

168. $y=\sin^2 x$.

169. $y=\log_2|\sin x|$.

170. $y=\log_{1/2}\cos x$.

171. $y=x\sin x$.

172. $y=x+\sin x$.

173. $y=x\sin^2 x$.

174. $y=|x|\sin x$.

175. $y=\arcsin(x+1)$.

176. $y=\arccos(x-2)$.

177. $y=\arcsin(3x+1)$.

178. $y=-\arcsin\frac{x+2}{3}$.

179. $y=2\operatorname{arctg}(2x-1)$.

180. $y=-\operatorname{arcctg}(4x-1)$.

181. $y=\arcsin\frac{1}{x}$.

182. $y=\arccos\frac{1}{x}$.

183. $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

184. $y=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$.

185. $y=\arccos\frac{1}{x-3}$.

186. $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x+2}$.

187. $y=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-1}{x+1}$.

188. $y=\arccos\frac{x}{x+1}$.

189. $y=\frac{1}{x^2-4}$.

190. $y=\frac{1}{1-x^2}$.

191. $y=\frac{1}{x^3}$.

192. $y=\frac{1}{x^2-4x+1}$.

193. $y=\frac{1}{\log_2(3x+1)}$.

194. $y=\frac{1}{4^{3x-1}+2}$.

195. $y=\frac{1}{\operatorname{arctg}(1-3x)}$.

196. $y=\frac{1}{\log_{1/2}(1-4x)}$.

197. $y=\frac{1}{\sqrt[3]{4x-1}}$.

198 $y=\frac{1}{3^x+3^{-x}}$.

199. $y=\frac{1}{\arcsin(3x+1)}$.

200. $y=\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$.

201. $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

202. $y=\frac{1-x^2}{x^2-4}$.

203. $y=\frac{1}{\arccos 2x}$.

204. $y=\frac{2^{1/x}}{1+2^{1/x}}$.

205. $y=\log_2\frac{x^2-1}{x+2}$.

206. $y=\log_{1/2}\frac{2|x|-1}{|x|-2}$.

207. $y=x^2+\frac{1}{x}$.

208. $y=x^3-\frac{1}{x}$.

209. $y=\log_2(\sqrt[3]{x+1}+1)$.

210. $y=\log_{1/2}|x^2-3x+2|$.

211. $y=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}-2}$.

212. $y=\frac{1}{|2^{x-1}-1|}$.

§ 2. Предел и непрерывность функции

1. Определение предела функции. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке X* и пусть точка $x_0 \in X$ или $x_0 \notin X$.

Определение 1. *Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке $x=x_0$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что для всех $x \in X$, $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.*

Пример 1. Используя определение, доказать, что функция $f(x)=C$ (C — некоторое число) в точке $x=x_0$ (x_0 — любое число) имеет предел, равный C, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} C=C$.

Решение. Возьмем любое $\varepsilon>0$. Тогда для любого числа $\delta>0$

*Здесь X может быть любым промежутком вида $[a, b]$, (a, b), $(a, b]$, $(-\infty, +\infty)$ и т.д.

выполняется требуемое неравенство $|f(x)-C|=|C-C|=0<\varepsilon$; следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0} C=C$.

Пример 2. Используя определение, доказать, что функция $f(x)=x$ в точке $x=x_0$ имеет предел, равный x_0, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$.

Решение. Возьмем любое $\varepsilon>0$. Тогда если взять $\delta=\varepsilon$, то для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется требуемое неравенство $|f(x)-x_0|=|x-x_0|<\varepsilon$; следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$.

Пример 3. Используя определение, доказать, что функция $f(x)=3x-2$ в точке $x=1$ имеет предел, равный единице, т. е. $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)=1$.

Решение. Возьмем любое $\varepsilon>0$. Задача состоит в том, чтобы по этому ε найти такое $\delta>0$, при котором из неравенства $|x-1|<\delta$ следовало бы неравенство $|f(x)-1|=|(3x-2)-1|<\varepsilon$. Преобразуя последнее неравенство, получаем $|3(x-1)|<\varepsilon$, или $|x-1|<\varepsilon/3$. Отсюда видно, что если взять $\delta\leqslant\varepsilon/3$, то для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-1|<\delta$, выполняется требуемое неравенство $|f(x)-1|<\varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)=1$. В частности, если $\varepsilon=1$, то $\delta\leqslant 1/3$, если $\varepsilon=1/2$, то $\delta\leqslant 1/6$ и т. д.

Используя определение, доказать, что:

213. $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)=1$.

214. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$.

215. $\lim\limits_{x\to 6}(2x-5)=7$.

216. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

217. $\lim\limits_{x\to 2}(3x+5)=11$.

218. $\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$.

219. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2$.

220. $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$.

221. $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x}=\sqrt{5}$.

222. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$.

223. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=3$. Найти такое δ, чтобы для $|x-2|<\delta$ выполнялось $|f(x)-3|=|(2x-1)-3|<0{,}01$.

2. Свойства пределов. Непрерывность функции.

Теорема 1. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке x_0 пределы B и C. Тогда функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\,g(x)$ и $f(x)/g(x)$ (при $C\neq 0$) имеют в точке x_0 пределы, равные соответственно $B\pm C$, BC*

и B/C, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=B\pm C$, $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\,g(x)]=BC$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)/g(x)=B/C$.

Замечание. Теорема 1 верна также и в случае, когда x_0 является одним из символов ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+x+5)$.

Решение. На основании теоремы 1 (предел суммы и произведения) имеем $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+x+5)=\lim\limits_{x\to 1}3\lim\limits_{x\to 1}x\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}5=$ $=3\cdot 1\cdot 1+1+5=9$, так как $\lim\limits_{x\to 1}3=3$, $\lim\limits_{x\to 1}5=5$, $\lim\limits_{x\to 1}x=1$ (см. примеры 1 и 2).

Определение 2. *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x=x_0$, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.*

Пример 5. Используя определение, доказать непрерывность функции $f(x)=3x^2+2x+1$ в точке $x=1$.

Решение. Сначала найдем предел данной функции при $x\to 1$: $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+2x+1)=\lim\limits_{x\to 1}3\lim\limits_{x\to 1}x\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}2\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}1=3\cdot 1\cdot 1+2\times$ $\times 1+1=6$. Затем вычислим значение функции в точке $x=1$: $f(1)=3\cdot 1+2\cdot 1+1=6$. Видим, что предел функции и ее значение в точке $x=1$ равны, т. е. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$; следовательно, функция непрерывна в точке $x=1$.

Теорема 2. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\,g(x)$ и $f(x)/g(x)$ также непрерывны в этой точке (частное при $g(x_0)\neq 0$).*

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1+\sin x}{1-\cos 2x}$.

Решение. Так как в точке $x=\pi/2$ функции 1, $\sin x$, $\cos 2x$ непрерывны, то, по теореме 2, функция $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{1-\cos 2x}$ непрерывна в точке $x=\pi/2$, т. е. предел функции и ее значение в этой точке равны, тогда, переходя к пределу, получаем

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{1+\sin x}{1-\cos 2x}=\frac{1+\sin(\pi/2)}{1-\cos(2\pi/2)}=\frac{1+1}{1-(-1)}=1.$$

Используя определение, доказать непрерывность функций:

224. $f(x)=C$ (C — некоторое число) для всех $x\in(-\infty,+\infty)$.

225. $f(x)=x$ для всех $x\in(-\infty, +\infty)$.
226. $f(x)=x^2+3x+3$ для всех $x\in(-\infty, +\infty)$.
227. $f(x)=x^3-2x+4$ для всех $x\in(-\infty, +\infty)$.

Найти пределы:

228. $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-7x+4)$.

229. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{1}{2}x^3-x+2\right)$.

230. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x+4}$.

231. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$.

232. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\sin x-\cos 2x)$.

233. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{3+\sqrt[4]{2x^3}}$.

3. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+6x+8}{x^3+8}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Непосредственно теорему 1 (предел частного) применить нельзя. Необходимо, как говорят, раскрыть эту неопределенность. Для этого разложим числитель на множители и сократим на общий множитель $x+2$, который обращает в нуль знаменатель и числитель дроби. Получаем

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+6x+8}{x^3+8}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim_{x\to -2}\frac{x+4}{x^2-2x+4}.$$

Так как знаменатель теперь не равен нулю, то неопределенность $\frac{0}{0}$ раскрыта. Применяя теорему 1, окончательно находим

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+6x+8}{x^3+8}=\frac{\lim\limits_{x\to -2}(x+4)}{\lim\limits_{x\to -2}(x^2-2x+4)}=\frac{-2+4}{(-2)^2-2(-2)+4}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}.$$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-4}{x-2}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделив на x числитель и знаменатель дроби, а затем применив теорему 1, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-4}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{4}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}}=\frac{3-0}{1-0}=3.$$

Найти пределы:

234. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$.

235. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

236. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 5x}$.

237. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$.

238. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$.

239. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$.

240. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{2x^2+3x+4}$.

241. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3}{2x^2+3x+4}$.

242. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5}{x^2+3}$.

243. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-7x}{1-2x^3}$.

244. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3}{x^2+2}$.

245. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4}{x^2+5}$.

246. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$.

247. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$.

248. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\cos x-\sin x}$.

249. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+1)^{50}}{(x+1)^{100}}$.

250. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

251. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

252. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

253. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{4x^2-1}}{x+7}$.

254. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt[3]{x^3+2}}{7x+\sqrt[4]{x^4+1}}$.

255. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}$.

256. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}+\sqrt[3]{8x^3+1}}{\sqrt[5]{x^5+3}}$.

257. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{10}(x^2+1)}{(3x+1)^2(x+5)^5(x-1)^5}$.

258. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

259. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sqrt{1-\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\operatorname{tg}x}}{\sin 2x}$.

260. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

261. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt{1+x^2}}{x^3+2x^2}$.

262. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

263. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sqrt{1+x}-1}$.

4. Раскрытие неопределенностей вида $\infty-\infty$ и $0\cdot\infty$.
Найти пределы:

264. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$.

265. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$.

266. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x^2}-x)$.

267. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x^2}-x)$.

268. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-3x-4})$.

269. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-3x+1})$.

270. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+x+1})$.

271. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-\sqrt{x^2+x+1})$.

272. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$.

273. $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$.

274. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-3}-5x)$.

275. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{9x^2+1}-3x)$.

276. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}\right)$.

277. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\right)$.

278. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

279. $\lim\limits_{x\to0}x\operatorname{ctg}x$.

280. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x$.

281. $\lim\limits_{x\to2}\left[\frac{\sqrt{3+x+x^2}}{x^2-3x+2}-\frac{\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}\right]$

5. Смешанные задачи на вычисление пределов.

Найти пределы:

282. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+4x-1}{3x^2+x+2}$.

283. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sin 4x}$.

284. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}-x}{3x+5}$.

285. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2+5x+1}{3+14x^2+2x}$.

286. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-a^2})$.

287. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$.

288. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 10x}{\sin 9x}$.

289. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$.

290. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

291. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x})$.

292. $\lim\limits_{x\to-2}\left(\frac{1}{x+2}+\frac{4}{x^2-4}\right)$.

293. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(\alpha+x)-\cos(\alpha-x)}{x}$.

294. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x+b)+\sin(x-b)}{2x}$.

295. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\sin x}{\sec 2x-1}$.

296. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 3x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$.

297. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x})$.

298. $\lim\limits_{x\to\infty}5^{\frac{2x}{x+3}}$.

299. $\lim\limits_{x\to0}[x\cos x+5(x^2-3x+1)]$.

300. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{1+x}}$.

301. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}x}{1-\cos x}$.

302. $\lim\limits_{x\to \pi/6}\dfrac{1-2\sin x}{\pi/6-x}$.

303. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$.

304. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{3x+1}}{6x}$.

305. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\sec x-\operatorname{tg}x)$.

§ 3. Сравнение бесконечно малых

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to x_0$ (или в точке x_0), если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — две бесконечно малые функции при $x\to x_0$. Тогда:

1) если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка*, чем $\beta(x)$;

2) если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$ (A — число), то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка;*

3) если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми.* Эквивалентность обозначается так: $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to x_0$;

4) если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^n(x)}=A\neq 0$, то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой n-го порядка относительно* $\beta(x)$.

Аналогичные определения имеют место для случаев $x\to x_0-$, $x\to x_0+$, $x\to-\infty$, $x\to+\infty$ и $x\to\infty$.

При сравнении бесконечно малых функций часто используют символ o («*о малое*»). Если функция $\alpha(x)$ в точке x_0 — бесконечно малая более высокого порядка, чем бесконечно малая $\beta(x)$ в этой же точке, то это условно записывают так: $\alpha(x)=o(\beta(x))$. Например, $x^2=o(x)$ при $x\to 0$.

Пример 1. Доказать, что при $x\to 0$ функция x^k $(k>1)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем x.

Решение. Действительно, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^k}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{k-1}=0$, так как, по условию, $k-1>0$.

Пример 2. Доказать, что при $x\to 0$ функции $\sin kx$ и lx $(k\neq 0,$ $l\neq 0)$ — бесконечно малые одного порядка.

Решение. В самом деле,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{lx}=\frac{k}{l}\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=\frac{k}{l}\cdot 1=\frac{k}{l}\neq 0.$$

Пример 3. Доказать, что при $x\to 0$ функции $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ — эквивалентные бесконечно малые ($\sin x\sim\operatorname{tg} x$ при $x\to 0$).

Решение. Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\cos x=1.$$

Пример 4. Определить при $x\to 0$ порядок бесконечно малой функции $\cos 3x-\cos x$ относительно бесконечно малой x.

Решение. Требуется найти число n такое, чтобы $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x^n}$ был конечным и не равным нулю. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x\sin x}{x^n}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{n-2}}=$$

$$=-2\cdot 2\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{n-2}}=-4\lim_{x\to 0}x^{2-n}.$$

При $n<2$ $\lim\limits_{x\to 0}x^{2-n}=0$, что не подходит, при $n>2$ $\lim\limits_{x\to 0}x^{2-n}=\infty$, что также не годится. Только при $n=2$ $\lim\limits_{x\to 0}x^{2-n}=1$ и искомый предел равен -4, т. е. конечен и отличен от нуля. Итак, $n=2$ и функция $\cos 3x-\cos x$ — бесконечно малая второго порядка относительно бесконечно малой x при $x\to 0$.

Пример 5. С помощью замены эквивалентных найти пределы: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin 5x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln(\ln x)}{2x-2e}$; 4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\log_3 x-1}{x-3}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$.

Решение. 1) Имеем $\ln(1+3x)\sim 3x$; $\sin 5x\sim 5x$*. Поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}$.

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2/4}=4\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=$$

$$=-4\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=-4\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{x^2}=-2.$$

---

*См. задачу 306.

$$3)\ \lim_{x\to e}\frac{\ln(\ln x)}{2x-2e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln[1+(\ln x-1)]}{2(x-e)}=\lim_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{2(x-e)}=\lim_{x\to e}\frac{\ln\frac{x}{e}}{2(x-e)}=$$

$$=\lim_{x\to e}\frac{\ln\left[1+\left(\frac{x}{e}-1\right)\right]}{2(x-e)}=\lim_{x\to e}\frac{\frac{x}{e}-1}{2(x-e)}=\lim_{x\to e}\frac{x-e}{2e(x-e)}=\frac{1}{2e}.$$

$$4)\ \lim_{x\to 3}\frac{\log_3 x-1}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\log_3 x-\log_3 3}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\log_3\frac{x}{3}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{\ln x/3}{\ln 3}}{x-3}=$$

$$=\frac{1}{\ln 3}\lim_{x\to 3}\frac{\ln[1+(x/3-1)]}{x-3}=\frac{1}{\ln 3}\lim_{x\to 3}\frac{x/3-1}{x-3}=\frac{1}{3\ln 3}.$$

$$5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x+x^2}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{2}=\frac{1}{2}.$$

306. Доказать, что при $x\to 0$: 1) $\sin x\sim x$; 2) $\operatorname{tg} x\sim x$; 3) $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$; 4) $\ln(1+x)\sim x$; 5) $e^x-1\sim x$; 6) $a^x-1\sim x\ln a$; 7) $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$; 8) $\arcsin x\sim x$; 9) $\operatorname{arctg} x\sim x$.

Определить при $x\to 0$ порядки бесконечно малых функций относительно бесконечно малой функции x:

307. $x\sin 3x$.

308. $x^2\cos x$.

309. $x\ln(1+2x)$.

310. $\frac{x^5}{x^7+1}\arcsin x$.

311. $(\sqrt[5]{1+x}-1)^{10}\cos\pi x$.

312. $\ln\frac{1+x}{1-x}$.

313. $\operatorname{tg} x-\sin x$.

314. $(\sqrt[4]{1+x^2}-1)\operatorname{tg}\frac{x}{3}$.

315. $(2^x-1)\ln(1+\sin 5x)$.

316. $(e^{x^2}-1)\ln(e^x+1)$.

317. $(3^x-1)\ln\cos 2x$.

318. $\sqrt[3]{1+x}-1-x/3$.

319. $e^{-x^2}-\sqrt{1-x^2}$.

320. $\sin x^2-\cos x+e^x$.

321. $\ln(1+3x)-3x$.

322. $\sin^2 x-\ln(1+x^2)$.

323. $\sqrt[5]{1+\ln^2(1+x^2)}-\cos x^2$.

324. $e^{x^3}-1-x^3$.

325. $\ln^2(1+x)-e^{x^2}+1$.

326. $\sin^3 x\ln\frac{x+1}{3x+1}$.

327. $(\sqrt[7]{1-2x}-1)^{100}\operatorname{arctg} x$.

328. $\ln\frac{1-3x}{1+x^2}+3x$.

Пользуясь методом замены бесконечно малых эквивалентными, найти пределы:

329. $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{\operatorname{arctg}(2x-1)}{4x^2-1}$.

330. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$.

331. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{\sqrt{3x^2+1}-1}$.

332. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{1+x}-1}{\sqrt[5]{1+2x}-1}$.

333. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[7]{x}-1}{\sqrt[8]{x}-1}$.

334. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 3x}{\sqrt{1-3x^2}-1}$.

335. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sqrt[5]{\cos 2x}-1}$.

336. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\sqrt[5]{x}-1)(2^{x-1}-1)}{\cos(x-1)-1}$.

337. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{4/5}-1}{x^{3/2}-1}$.

338. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{3x}$.

339. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sin^2 3x}$.

340. $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

341. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$.

342. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos\alpha x}{\ln\cos\beta x}$.

343. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(\log_2 x)}{x-2}$.

344. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\ln(\operatorname{tg} x)}{1-\operatorname{ctg} x}$.

345. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{4^x-64}{x-3}$.

346. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4^x-10^x}{3^x-7^x}$.

347. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{4x}-e^{3x}}{\sin 4x-\sin 3x}$.

348. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-2x}-1}{\arcsin x}$.

349. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{e^{5x}-1}$.

350. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x-1}{3^x-1}$.

351. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{\operatorname{tg} x}-3^{\sin x}}{(\operatorname{tg}(x/2))^3}$.

352. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4^{x-2}-1}{3^{x-2}-1}$.

353. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{5^x-5^5}{\operatorname{arctg}(x-5)}$.

354. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[5]{x}-1}{e^{x-1}-1}$.

355. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{2^{\sin 3x}-1}$.

356. $\lim\limits_{x\to \infty} x\ln\dfrac{3x-1}{3x-6}$.

357. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+1}{x^2}\right)^x$.

358. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

359. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2}$.

360. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{1/x^2}$.

361. $\lim\limits_{x\to \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

362. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{\sin x}{\sin 2}\right)^{1/x-2}$.

363. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{3x}+x)^{1/x}$.

364. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{1/\ln\cos x}$.

365. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{7+x}\right)^{\operatorname{cosec}(2/x)}$.

366. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-1}{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}$.

367. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\sin(x-1)}$.

368. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x\,(\sqrt[3]{1+3x^2}-1)}{x\ln(\cos 3x)}$.

369. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 2x}{\sin 5x-\sin 4x}$.

370. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[7]{1+\sin x}-1+\operatorname{tg} x}{x}$.

371. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x-\sin 2x}{\sqrt[3]{1+x^3}-1}$.

372. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\sin x-1}{\sqrt{x^2-\pi x+\dfrac{\pi^2}{4}+1}-1}$.

373. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\cos(3x-9)-\cos(2x-6)}{\sqrt{x^2-6x+10}-1}$.

374. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\log_3(3+x^2)-1}$.

375. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\log_3 x-1}$.

376. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\log_4\cos(x-1)}{\sqrt[5]{2+x^2-2x}-1}$.

Глава 5

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

§ 1. Понятие производной

Определение. *Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется предел при $\Delta x\to 0$ отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента (при условии, что этот предел существует).*

Производная обозначается $y'(x_0)$ или $f'(x_0)$.

Итак, по определению,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Нахождение производной называется *дифференцированием* функции.

Пример. Используя определение производной, найти производную функции $f(x)=x^2$ в точке $x=x_0$.

Решение. Придавая аргументу x в точке x_0 приращение Δx, найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=$$
$$=x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}.$$

Найдем предел этого отношения при $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x_0.$$

Следовательно, производная функции $f(x)=x^2$ в точке x_0 равна числу $2x_0$, что в принятых обозначениях можно записать так: $f'(x_0)=2x_0$.

Используя определение производной, найти производные функций в точке $x=x_0$:

1. $f(x)=5x^2$.
2. $f(x)=x^3$.
3. $f(x)=\sqrt{x}$.
4. $f(x)=1/x$.
5. $f(x)=1/x^2$.
6. $f(x)=1/\sqrt{x}$.
7. $f(x)=\sin 2x$.
8. $f(x)=\cos\frac{x}{2}$.
9. $f(x)=\frac{1}{2x+1}$.
10. $f(x)=\sqrt{1+3x}$.

§ 2. Вычисление производных

I. Правила дифференцирования:

1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$; 2) $(uv)'=u'v+uv'$; 3) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ $(v\neq 0)$;

4) если функция $u=\varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y=f(u)$ дифференцируема в точке $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f[\varphi(x)]$ дифференцируема в точке x_0 и $y'(x_0)=y'(u_0)\,u'(x_0)$.

II. Формулы дифференцирования:

1) $(C)'=0$; 2) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$; 3) $(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e$, в частности $(\ln x)'=1/x$; 4) $(a^x)'=a^x\ln a$, в частности $(e^x)'=e^x$; 5) $(\sin x)'=\cos x$; 6) $(\cos x)'=-\sin x$; 7) $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$; 8) $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$; 9) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 10) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 11) $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$; 12) $(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

Пример. Используя правила и формулы дифференцирования, найти производные функций: 1) $f(x)=5+x^3+3x^2+\sin x+\cos x+$ $+2\operatorname{tg} x-3\operatorname{ctg} x+\log_2 x+3\ln x$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; 3) $f(x)=x\sin x$; 4) $f(x)=x\operatorname{arctg} x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

Решение.

1) $f'(x)=(5+x^3+3x^2+\sin x+\cos x+2\operatorname{tg} x-3\operatorname{ctg} x+\log_2 x+$ $+3\ln x)'=(5)'+(x^3)'+(3x^2)'+(\sin x)'+(\cos x)'+(2\operatorname{tg} x)'-(3\operatorname{ctg} x)'+$ $+(\log_2 x)'+(3\ln x)'=3x^2+6x+\cos x-\sin x+\dfrac{2}{\cos^2 x}+\dfrac{3}{\sin^2 x}+\dfrac{1}{x}\log_2 e+\dfrac{3}{x}$;

2) $$f'(x)=\frac{(x^2-1)'(x^2+1)-(x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)}=$$
$$=\frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2};$$

3) $f'(x)=(x\sin x)'=(x)'\sin x+x(\sin x)'=1\cdot\sin x+x\cos x=$ $=\sin x+x\cos x$;

4) $$f'(x)=(x\operatorname{arctg} x)'-\left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)'=(x)'\operatorname{arctg} x+x(\operatorname{arctg} x)'-$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}(1+x^2)'=1\cdot\operatorname{arctg} x+\frac{x}{1+x^2}-\frac{2x}{2(1+x^2)}=\operatorname{arctg} x.$$

Найти производные функций:

11. $y=x^4+3x^2-2x+1$.

12. $y=7x^7+3x^2-4x-1$.

13. $y=\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}+4$.

14. $y=\sqrt[4]{x^3}+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}+2$.

15. $y=4x^5-3\sin x+5\operatorname{ctg} x$.

16. $y=3\sqrt{x}+4\cos x-2\operatorname{tg} x+3$.

17. $y=3+4x^2+\sqrt[5]{x^3}+$ $+\dfrac{1}{x^2}+\sin x+\cos x+\ln x$.

18. $y=\sqrt[8]{x^3}-4x^6+5\ln x-$ $-7\cos x+\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$.

19. $y=\log_2 x+3\log_3 x$.

20. $y=4e^x+\operatorname{arctg} x+\arcsin x$.

21. $y=e^x-\dfrac{\operatorname{tg} x}{2}+\dfrac{x^4}{4}$.

22. $y=5^x+6^x+\left(\dfrac{1}{7}\right)^x$.

23. $y=\arcsin x+3\sqrt[3]{x}+$ $+5\arccos x$.

24. $y=\dfrac{8}{\sqrt[4]{x}}-\dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}$.

25. $y=\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x$.

26. $y=\operatorname{arctg} x-\operatorname{arcctg} x$.

27. $y=x\cos x$.

28. $y=x^2\operatorname{tg} x$.

29. $y=\sqrt[7]{x}\ln x$.

30. $y=x\arccos x$.

31. $y=\sqrt[3]{x}\operatorname{arcctg} x$.

32. $y=x^2\log_3 x$.

33. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

34. $y=\dfrac{\ln x}{\sin x}+x\operatorname{ctg} x$.

35. $y=\dfrac{\cos x}{1+2\sin x}$.

36. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$.

37. $y=\dfrac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{x}}$.

38. $y=\dfrac{x\operatorname{tg} x}{1+x^2}$.

39. $y=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$.

40. $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x^2+x$, найти $f'(0), f'(1), f'(-1)$.

41. $f(x)=x^2-\dfrac{1}{2x^2}$, найти $f'(2)-f'(-2)$.

42. $f(x)=\dfrac{x}{2x-1}$, найти $f'(0), f'(2), f'(-2)$.

43. $f(x)=\dfrac{1-10^x}{1+10^x}$, найти $f'(0)$.

44. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, найти $f'(e)$, $f'(1/e), f'(e^2)$.

45. $f(x)=x\ln x$, найти $f'(1), f'(e), f(1/e), f'(1/e^2)$.

46. $y=\sin 3x$.

47. $y=\sin(x^2+5x+2)$.

48. $y=\dfrac{1}{b}\cos(a-bx)$.

49. $y=\sqrt{1-x^2}$.

50. $y=\sqrt{1+5\cos x}$.

51. $y=\sqrt{2x-\sin 2x}$.

52. $y=\sin^2 x$.

53. $y=\sin^3 x$.

54. $y=\cos^{100} x$.

55. $y=\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right)$.

56. $y=\operatorname{tg}(x^2+3)$.

57. $y=\ln\sin x$.

58. $y=\ln\cos x$.

59. $y=\ln\operatorname{tg} 5x$.

60. $y=\ln(1+\cos x)$.

61. $y=e^{\operatorname{tg} x}$.

62. $y=\ln(x^2-3x+7)$.

63. $y=\ln(x^2+2x)$.

64. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)$.

65. $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

66. $y=\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{x^2}{\sqrt{3}}$.

67. $y=\ln\ln\sqrt{x}$.

68. $y=\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{x-3}{x+3}$.

69. $y=\ln\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$.

70. $y=\ln\dfrac{x^2}{1-x^2}$.

71. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$.

72. $y=\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)$.

73. $y=x\ln x+\arcsin\sqrt{x}$.

74. $y=\dfrac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$.

75. $y=x\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}-\dfrac{\sqrt{2x-1}}{2}$.

76. $y=\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg} x+3x$.

77. $y=\sin^2 x^3$.

78. $y=\operatorname{ctg}^3\dfrac{x}{3}$.

79. $y=\frac{1}{(1+\cos 4x)^5}$.

80. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

81. $y=\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$.

82. $y=\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$.

83. $y=2^{3x}+x^5+e^{-x^2}+\frac{1}{x}$.

84. $y=a^{\sin x}$, $0<a\neq 1$.

85. $y=\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$.

86. $y=x^2 e^{-x}$.

87. $y=(x+2)e^{-x^2}$.

88. $y=e^{x/3}\cos(x/3)$.

89. $y=e^{\frac{1}{\cos x}}$.

90. $y=e^{1/\ln x}$.

91. $y=10^{3-\sin^3 2x}$.

92. $y=\sin(2^x)$.

93. $y=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a})$.

94. $y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

95. $y=\ln(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}+1})$.

96. $y=\ln\sqrt{\frac{e^{4x}}{e^{4x}+1}}$.

97. $y=\frac{\ln\sin x}{\ln\cos x}$.

98. $y=\log_5\cos 7x$.

99. $y=\log_7\cos\sqrt{1+x}$.

100. $y=e^{\sqrt[7]{x^3}}$.

101. $y=\ln(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})$.

102. $y=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$.

103. $y=\ln(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x})$.

104. $y=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

105. $y=\arccos(1-2x)$.

106. $y=\arcsin\sqrt{1-4x}$.

107. $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$.

108. $y=\arcsin(e^{4x})$.

109. $y=\arcsin\sqrt{x}$.

110. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{6x-1}$.

111. $y=\operatorname{arctg} e^{2x}+\ln\sqrt{\frac{1+e^{2x}}{e^{2x}-1}}$.

112. $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

113. $y=\ln\arccos 2x$.

114. $y=\operatorname{arctg}\ln(5x+3)$.

115. $y=\operatorname{arctg}\frac{x+3}{x-3}$.

116. $y=\operatorname{arcctg}^2\frac{1}{x}$.

117. $y=\arccos e^{-x^2/2}$.

118. $y=\operatorname{tg}\sin\cos x$.

119. $y=e^{x^2\operatorname{ctg}3x}$.

120. $y=a^{\sqrt[3]{\cos x\operatorname{tg}^2 3x}}$, $0<a\neq 1$.

121. $y=\ln\sin\operatorname{tg}e^{-x/2}$.

122. $y=\ln^5\sin x$.

123. $y=\ln\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}$.

124. $y=\sqrt[5]{\ln\sin\frac{x+3}{4}}$.

125. $y=e^{\sqrt{1+\ln x}}$.

126. $y=\sqrt[5]{\operatorname{arctg} e^{5x}}$.

127. $y=x^2\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

128. $y=\sqrt{1-\arccos^2 x}$.

129. $y=\operatorname{arctg}(x-\sqrt{1+x^2})$.

130. $y=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

131. $y=\sqrt{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+\ln\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right)$.

132. $y=2\ln(x^2+5)-\sqrt{5}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}$.

133. $y=\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}$.

134. $y=\ln(x\sin x\cdot\sqrt{1-x^2})$.

135. $y=x^x$.

136. $y=x^{1/x}$.

137. $y=x^{\sin x}$.

138. $y=(\operatorname{tg} x)^{\sin x}$.

139. Составить уравнение касательной к параболе $f(x)=x^2$ в точке $M(1/2;\ 1)$.

140. Составить уравнения касательных к графикам функций:

1) $y=4x-x^2$ — в точках пересечения с осью Ox;

2) $y=\ln x$ в точке пересечения с осью Ox;

3) $y=e^{2x}$ в точке пересечения с осью Oy.

141. При каких значениях x касательные к графику функции $y=x^3-x$ параллельны прямой $y=x$?

142. В точках $(0;\ 0)$, $(2;\ 1)$, $(4;\ 0)$ проведены касательные к параболе $y=\frac{4x-x^2}{4}$. Найти углы их наклона к оси Ox.

143. Найти угол наклона к оси Ox касательной к гиперболе $y=1/x$ в точке $(1;\ 1)$.

144. Окружность задана уравнением $x^2+y^2-4x=0$. Найти уравнения касательных к ней в точках ее пересечения с осью Ox.

145. Составить уравнения касательных, проведенных из точки $M(1;\ -3)$ к параболе $f(x)=x^2$.

§ 3. Понятие дифференциала

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x, т. е. имеет в этой точке конечную производную $f'(x)$, то ее приращение Δy можно записать в виде

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$.

Главная, линейная относительно Δx часть $f'(x)\Delta x$ приращения функции называется *дифференциалом* функции и обозначается dy:

$$dy=f'(x)\Delta x. \tag{1}$$

Положив в формуле (1) $f(x)=x$, получим $dx=(x)'\Delta x=1\cdot\Delta x=\Delta x$, окончательно соотношение (1) принимает вид

$$dy=f'(x)\,dx. \qquad (2)$$

При достаточно малых Δx приращение функции приближенно равно ее дифференциалу, т. е. $\Delta y\approx dy$.

Пример 1. Найти дифференциал функции $y=x^2+x+1$ в точке $x=2$, причем сделать это двумя способами: 1) выделяя главную, линейную относительно Δx часть приращения функции Δy; 2) по формуле (2).

Решение. 1) $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f(2+\Delta x)-f(2)=[(2+\Delta x)^2+(2+\Delta x)+1]-[2^2+2+1]=5\Delta x+(\Delta x)^2$, отсюда $dy=5\Delta x$; 2) по формуле (2), $dy=(x^2+x+1)'dx=(2x+1)\,dx$, $f'(2)=2\cdot 2+1=5$. Следовательно, получаем $dy=5dx=5\Delta x$.

Пример 2. Вывести приближенную формулу $(1+\alpha)^n\approx 1+n\alpha$. Найти приближенно $\sqrt{1{,}005}$; $(1{,}03)^5$.

Решение. Возьмем функцию $f(x)=x^n$. Тогда при малых Δx $\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n\approx dy$ или $(x+\Delta x)^n-x^n\approx(x^n)'\Delta x=nx^{n-1}\Delta x$, откуда

$$(x+\Delta x)^n\approx x^n+nx^{n-1}\Delta x.$$

Полагая $x=1$, $\Delta x=\alpha$, получим $(1+\alpha)^n\approx 1+n\alpha$. Найдем приближенно $\sqrt{1{,}005}$ и $(1{,}03)^5$. Имеем $\sqrt{1{,}005}=\sqrt{1+0{,}005}\approx\approx 1+1/2\cdot 0{,}005=1{,}0025$ ($n=1/2$, $\alpha=0{,}005$); $(1{,}03)^5=(1+0{,}03)^5\approx\approx 1+5\cdot 0{,}03=1{,}15$ ($n=5$, $\alpha=0{,}03$).

Найти дифференциалы функций:

146. $y=\sin^3 2x$.

147. $y=\ln(\sin\sqrt{x})$.

148. $y=e^{-\frac{1}{\cos x}}$.

149. $y=2^{-x^2}$.

150. $y=x\ln x$.

151. $y=\arcsin\sqrt{x}$.

152. $y=x^3+x\sqrt{x}$.

153. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}$.

154. $y=x^2\sin\sqrt{x}$.

155. $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}}$.

156. $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$.

157. $y=x\operatorname{arctg}x$.

158. $y=\dfrac{x^2}{\arcsin x}$.

159. $y=\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

160. Найти приближенно приращение Δy функции $y=x^2$, если $x=2$ и $\Delta x=0{,}01$.

161. Вывести приближенную формулу $\sqrt{a^2+h}\approx a+\dfrac{h}{2a}$. Найти приближенно $\sqrt{101}$, $\sqrt{1{,}04}$, $\sqrt{41}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[5]{33}$.

§ 4. Производные и дифференциалы высших порядков

1. Производные высших порядков. Производная $f'(x)$ называется *производной первого порядка*. Производная от $f'(x)$ называется *производной второго порядка (или второй производной)* от функции $f(x)$ и обозначается y'' или $f''(x)$. Производная от $f''(x)$ называется *производной третьего порядка* (*или третьей производной*) от функции $f(x)$ и обозначается y''' или $f'''(x)$ и т. д.

Производная n-го порядка есть производная от производной $(n-1)$-го порядка, т. е. $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$.

Производные начиная со второй называются *производными высшего порядка*.

Найти производные второго порядка от функций:

162. $y=e^{-x^2}$.

163. $y=\operatorname{tg} x$.

164. $y=\operatorname{ctg} x$.

165. $y=\arcsin \frac{x}{2}$.

166. $y=\sin^2 x$.

167. $y=\cos^2 x$.

168. $y=\sqrt{1+x^2}$.

169. $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

170. $y=\ln(2x-3)$.

171. $y=x\sin x$.

172. $y=x\arcsin x$.

173. $y=\frac{x+1}{x-1}$.

Найти производные третьего порядка от функций:

174. $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$.

175. $y=xe^{-x}$.

176. $y=e^x\cos x$.

177. $y=x^2\sin x$.

178. $y=x^3 2^x$.

179. $y=x\ln x$.

Найти производные n-го порядка от функций:

180. $y=\ln x$.

181. $y=\sin 3x$.

182. $y=e^{x/2}$.

183. $y=2^{3x}$.

184. $y=\cos^2 x$.

185. $y=\ln(1+x)$.

186. $y=3^x$.

187. $y=(4x+1)^n$.

188. $y=x\cos x$.

189. $y=x^3e^x$.

190. $y=x^2\sin\frac{x}{3}$.

191. $y=x^2\ln x$.

Применяя формулу Лейбница, найти производные указанных порядков для функций:

192. $y=e^x\cos x$; найти y''.

193. $y=a^x x^3$; найти y''.

194. $y=x^2\sin x$; найти y''.

195. $y=e^{-x}\sin x$; найти y'''.

196. $y=x^2\ln x$; найти y'''.

197. $y=e^x(3x^2-4)$; найти $y^{(n)}$.

2. Дифференциалы высших порядков. Дифференциал $dy=f'(x)dx$ называется *дифференциалом первого порядка.*

Дифференциал $d(dy)$ от дифференциала dy называется *дифференциалом второго порядка* функции $f(x)$ и обозначается d^2y, т. е. $d^2y=f''(x)(dx)^2$.

Дифференциал $d(d^2y)$ от дифференциала d^2y называется *дифференциалом третьего порядка* функции $f(x)$ и обозначается d^3y и т. д.

Дифференциал $d(d^{n-1}y)$ от дифференциала $d^{n-1}y$ называется *дифференциалом n-го порядка функции* $f(x)$ и обозначается d^ny.

Дифференциал n-го порядка индуктивно определяется по формуле

$$d^ny=y^{(n)}(dx)^n,\ n=1,\ 2,\ \dots,$$

откуда

$$y^{(n)}=\frac{d^ny}{(dx)^n},$$

т. е. n-я производная функции $y=f(x)$ в некоторой точке x равна отношению n-го дифференциала этой функции в точке x к дифференциалу аргумента в степени n.

Пример. Найти дифференциал третьего порядка функции $y=x^4-3x^2+4$.

Решение. Последовательно дифференцируя, получим

$$dy=y'dx=(4x^3-6x)dx,$$

$$d^2y=d(dy)=d[(4x^3-6x)dx]=[(4x^3-6x)dx]'dx=(12x^2-6)(dx)^2,$$

$$d^3y=d(d^2y)=d[(12x^6-6)(dx)^2]=[(12x^2-6)(dx)^2]'dx=24x(dx)^3.$$

Найти дифференциалы второго порядка от функций:

198. $y=4x^5-7x^2+3$.

199. $y=\cos 2x$.

200. $y=4^{-x^2}$.

201. $y=\sqrt{\ln^2 x-4}$.

Найти дифференциалы указанных порядков от функций:

202. $y=\sin^2 x$; найти d^3y.

203. $y=\sqrt{x-1}$; найти d^4y.

204. $y=x\ln x$; найти d^5y.

205. $y=x\sin x$; найти $d^{10}y$.

§ 5. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Производные первого и второго порядков функции $y=f(x)$, представленной параметрически функциями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, выражаются формулами

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t} \text{ и } y''_{xx}=\frac{y''_t x'_t-x''_t y'_t}{(x'_t)^3}.$$

Пример. Найти y_{xx}, если $x=\cos t$, $y=\sin t$.

Решение. Имеем

$$y''_{xx}=\frac{(-\sin t)(-\sin t)-(-\cos t)(\cos t)}{(-\sin t)^3}=\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{(-\sin t)^3}=-\frac{1}{\sin^3 t}.$$

Найти y'_x и y''_{xx}:

206. $x=t^2$, $y=\frac{t^3}{3}-t$.

207. $x=e^{2t}$, $y=e^{3t}$.

208. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

209. $x=t^2$, $y=t^3+t$.

210. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

211. $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$.

§ 6. Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя. Формула Тейлора

1. **Теорема Ферма.** *Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и в некоторой точке x_0 этого интервала имеет наибольшее или наименьшее значение. Тогда если в точке x_0 существует производная, то она равна нулю, т. е. $f'(x_0)=0$.*

212. Удовлетворяет ли функция $f(x)=3x^2-1$ условиям теоремы Ферма на отрезке $[1, 2]$?

Теорема Ролля. *Пусть на отрезке $[a, b]$ определена функция $f(x)$, причем: 1°) $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$; 2°) $f(x)$ дифференцируема на (a, b); 3°) $f(a)=f(b)$. Тогда существует точка $c\in(a, b)$, в которой $f'(c)=0$.*

213. Удовлетворяют ли условиям теоремы Ролля функции: 1) $f(x)=x$, $x\in[0, 1]$; 2) $f(x)$, равная x, если $0\leqslant x<1$, и равная 0, если $x=1$; 3) $f(x)=|x|$, $x\in[-1, 1]$? Пояснить графически.

214. Удовлетворяет ли функция $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ условиям теоремы Ролля на отрезке $[-1, 1]$?

215. Удовлетворяет ли функция $f(x)=\sin x$ условиям теоремы Ролля на отрезке $[0, \pi]$?

216. Доказать, что уравнение $x^3+3x-5=0$ имеет только один вещественный корень.

Теорема Лагранжа. *Пусть на отрезке $[a, b]$ определена функция $f(x)$, причем: 1°) $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$; 2°) $f(x)$ дифференцируема на (a, b). Тогда существует точка $c\in(a, b)$ такая, что справедлива формула*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

217. Проверить, что функция $f(x)=2x-x^2$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на отрезке $[1, 3]$, и найти имеющуюся в формуле Лагранжа точку c.

218. Проверить, применима ли теорема Лагранжа к функциям: 1) $f(x)=x^2$ на отрезке [3, 4]; 2) $f(x)=\ln x$ на отрезке [1, 3]; 3) $f(x)=\sqrt[5]{x^4(x-1)}$ на отрезке $[-1/2, 1/2]$. В случае применимости найти имеющуюся в формуле Лагранжа точку c.

219. В какой точке касательная к параболе $y=x^2$ параллельна хорде, стягивающей точки $A(-1;\ 1)$ и $B(3;\ 9)$? Пояснить графически.

220. В какой точке касательная к кривой $y=4-x^2$ параллельна хорде, стягивающей точки $A(-2;\ 0)$ и $B(1;\ 3)$? Пояснить графически.

221. Построить график функции $y=|x-1|$ на отрезке [0; 3]. Почему здесь нельзя провести касательную, параллельную хорде? Какое из условий теоремы Лагранжа здесь не выполнено?

Теорема Коши. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и дифференцируемы на (a, b). Пусть, кроме того, $g'(x)\neq 0$. Тогда существует точка $c\in(a, b)$ такая, что справедлива формула*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

222. Проверить, что функции $f(x)=x^2-2x+3$ и $g(x)=x^3-7x^2+20x-5$ удовлетворяют условиям теоремы Коши на отрезке [1, 4], и найти имеющуюся в формуле Коши точку c.

223. Написать формулу Коши и найти точку c для функций: 1) $f(x)=x^3$ и $g(x)=x^2$ на отрезке $[a, b]$; 2) $f(x)=\sin x$ и $g(x)=\cos x$ на отрезке $[0, \pi/2]$; 3) $f(x)=x^2$ и $g(x)=\sqrt{x}$ на отрезке [1, 4].

224. Удовлетворяют ли условиям теоремы Коши функции $f(x)=e^x$ и $g(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ на отрезке $[-3, 3]$?

2. Правило Лопиталя.

I. Раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Первое правило Лопиталя.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, *то* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

когда последний предел существует (конечный или бесконечный).

II. Раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$. Второе правило Лопиталя.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, *то* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

когда последний предел существует (конечный или бесконечный).

Правила верны и в том случае, когда $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to a-$ и $x\to a+$.

III. Неопределенности вида $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 и их раскрытие. Неопределенности вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ сводятся путем алгебраических преобразований к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, а затем раскрываются с помощью правила Лопиталя.

Неопределенности вида 0^0, 1^∞, ∞^0 с помощью тождества

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

сводятся к неопределенности вида $0 \cdot \infty$.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1+\ln x)'}{(e^x-e)'} = \lim_{x\to 1} \frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x} = \frac{3}{e}.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя n раз, получаем

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to +\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{e^x} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{n!}{e^x}.$$

Здесь уже никакой неопределенности нет. Поэтому

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$.

Решение. Имеем неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Но $x \cdot \ln x = \dfrac{\ln x}{1/x}$ и получена неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0+} x = 0.$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$.

Решение. Имеем неопределенность вида 0^0. Но $x^x = e^{x\ln x}$ и получаем в показателе степени неопределенность вида $0\cdot\infty$, которая уже рассмотрена (см. пример 3). Следовательно,

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x} = e^0 = 1.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}$.

Решение. Имеем неопределенность вида 1^∞. Но $(1+x)^{2\frac{1}{e^x-1-x}} = e^{\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}}$ и в показателе степени получена неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x} = \lim_{x\to 0} \frac{(2x/1+x^2)}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{(e^x-1)(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{e^x(1+x^2)+(e^x-1)\,2x} = \\ = \frac{2}{1} = 2.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}} = e^2.$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\operatorname{tg} x)^{2\cos x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида ∞^0. Но

$$(\operatorname{tg} x)^{2\cos x} = e^{2\cos x \ln \operatorname{tg} x} = e^{\frac{2\ln \operatorname{tg} x}{1/\cos x}}$$

и в показателе степени получена неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{2\ln\operatorname{tg}x}{1/\cos x}=2\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\sec x}=2\lim_{x\to\pi/2}\frac{1/\operatorname{tg}x\cdot\sec^2 x}{\sec x\operatorname{tg}x}=$$
$$=2\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec x}{\operatorname{tg}^2 x}=2\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec x\operatorname{tg}x}{2\operatorname{tg}x\sec^2 x}=\lim_{x\to\pi/2}\cos x=0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg}x)^{2\cos x}=e^{\lim\limits_{x\to\pi/2}2\cos x\ln\operatorname{tg}x}=e^0=1.$$

Рекомендуем для приобретения навыка раскрытия неопределенности по правилу Лопиталя использовать также примеры, помещенные в гл. 4.

Найти пределы:

225. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

226. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

227. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$.

228. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

229. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-(e^x+e^{-x})\cos x}{x^4}$.

230. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

231. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi/2-\operatorname{arctg}x}{\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1}}$.

232. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+1/x^2)}{\pi-2\operatorname{arctg}x}$.

233. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{e^{3/x}-1}$.

234. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

235. $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{1/x}$.

236. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$.

237. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

238. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x}{\ln(1-x)}$.

239. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x}$.

240. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$.

241. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sec x-\operatorname{tg}x)$.

242. $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x\operatorname{ctg}x)$.

243. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\,e^{-x}$.

244. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x$.

245. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

246. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

247. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.

248. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$.

249. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg}x)^{\sin 2x}$.

250. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$.

251. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$.

252. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

253. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)$.

254. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

255. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

256. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg}x\ln x)$.

257. $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x\ln(x-1))$.

258. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{\sin x-x}$.

259. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$.

260. $\lim\limits_{x\to\pi/6}\frac{1-2\sin x}{\cos 3x}$.

261. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+x^2}{(1+x)^5-1+x^2}$.

262. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1+x-x^2/2}{e^{x^3}-1}$.

263. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1+x^4}{\sin 2x}$.

264. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x^3/6-x^2/2-x-1}{\cos x+x^2/2-1}$.

265. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1-x\ln 2}{(1-x)^m-1+mx}$.

266. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}$.

3. Формула Тейлора.

I. **Теорема Тейлора.** *Пусть функция $f(x)$ имеет в точке a и некоторой ее окрестности производные порядка $n+1$. Пусть x — любое значение аргумента из указанной окрестности, $x\neq a$. Тогда между точками a и x найдется точка ξ такая, что справедлива формула Тейлора*

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n-1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Последний член в формуле Тейлора называется *остаточным членом в форме Лагранжа* и обозначается $R_{n+1}(x)$.

Так как точка $\xi\in(a,\ x)$, то найдется число θ из интервала $0<\theta<1$ такое, что $\xi=a+\theta(x-a)$ и остаточный член принимает вид

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\ 0<\theta<1.$$

Если функция $f^{(n+1)}(x)$ ограничена в окрестности точки a, то остаточный член $R_{n+1}(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $(x-a)^n$ при $x\to a$: $R_{n+1}(x)=o[(x-a)^n]$ при $x\to a$. Последнее соотношение называется *остаточным членом в форме Пеано*.

Формулу Тейлора при $a=0$ принято называть *формулой Маклорена*:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_{n+1}(x).$$

Остаточный член имеет вид:

1) в форме Лагранжа $R_{n+1}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0<\theta<1$;

2) в форме Пеано $R_{n+1}(x)=o(x^n)$.

267. Разложить многочлен $P(x)=x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$ по степеням $x-1$ по формуле Тейлора.

268. Разложить многочлен $P(x)=x^4+2x^3-8x^2+4x+4$ по степеням $x+1$ по формуле Тейлора.

II. Разложение элементарных функций по формуле Маклорена.

1) $f(x)=e^x$. Так как

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=\ldots=f^{(n+1)}(x)=e^x,$$
$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n+1)}(0)=1,$$

то формула Маклорена имеет вид

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n). \qquad (1)$$

2) $f(x)=\sin x$. Так как

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(n)}(0)=\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 \text{ при } n \text{ четном},\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \text{ при } n \text{ нечетном},\end{cases}$$

то формула Маклорена имеет вид

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n}). \qquad (2)$$

3) $f(x)=\cos x$. Так как

$$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\; f^{(n)}(0)=\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 & \text{при } n \text{ нечетном,}\\ (-1)^{n/2} & \text{при } n \text{ четном,}\end{cases}$$

то формула Маклорена имеет вид

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right). \qquad (3)$$

В формуле (2) остаточный член записан в виде $o\left(x^{2n}\right)$, а не в виде $o\left(x^{2n-1}\right)$, так как следующий за последним член равен нулю (то же самое относится к формуле (3)).

269. Разложить функцию $f(x)=\ln(1+x)$ по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано.

270. Разложить функцию $f(x)=\operatorname{tg} x$ по формуле Маклорена до члена с x^3 включительно.

271. Разложить функции по формуле Маклорена до члена указанного порядка включительно: 1) $f(x)=e^{-x}$ до члена с x^2; 2) $f(x)=e^{2x-x^2}$ до члена с x^5; 3) $f(x)=\ln(\cos x)$ до члена с x^4; 4) $f(x)=\sin\sin x$ до члена с x^3.

III. **Использование формулы Маклорена для вычисления пределов.**

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$.

Решение. По формуле (2), взятой при $n=2$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^4\right)-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3!}+\frac{o\left(x^4\right)}{x^3}}{1}=-\frac{1}{3!}+\lim_{x\to 0}\frac{o\left(x^4\right)}{x^3}=-\frac{1}{3!}+0=-\frac{1}{6}.$$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2/2}-\cos x}{x^3\sin x}$.

Решение. По формулам (1) — (3) получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2/2}-\cos x}{x^3\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o\left(x^4\right)-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}}{x^3(x+o(x))}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{8}-\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)}{x^4+o\left(x^4\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{24}+\frac{o\left(x^4\right)}{x^4}}{1+\frac{o\left(x^4\right)}{x^4}}=\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{24}+0}{1+0}=\frac{1}{12}.$$

Найти пределы:

272. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

273. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x+2\sin x-3x}{x^4}$.

274. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{x^2}$.

275. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

276. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}$.

277. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{x^4}$.

278. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x+x^2/2)}{x(\sin x-x)}$.

279. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\sin x-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

§ 7. Исследование функций и построение графиков

1. Признак монотонности функции. Функция $f(x)$ *не убывает* (*не возрастает*) на промежутке X, если для любых x_1, $x_2 \in X$ из условия $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ $(f(x_1)\geqslant f(x_2))$.

Если для тех же x из условия $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$, то функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на промежутке X.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ дифференцируема на (a, b) и $f'(x)\geqslant 0$ $(f'(x)\leqslant 0)$ на (a, b), то функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) на (a, b).*

Пример 1. Определить промежутки, на которых функция $f(x)=x^3-12x+11$ возрастает и убывает.

Решение. Область определения функции — вся числовая прямая. Находим производную функции: $f'(x)=3x^2-12$. Из неравенства $3x^2-12>0$, или $x^2>4$, или $\sqrt{x^2}>2$, т. е. $|x|>2$ (либо $x>2$, либо $x<-2$), следует, что данная функция возрастает на интервалах $(-\infty, -2)$ и $(2, +\infty)$, а из неравенства $3x^2-12<0$, или $x^2<4$, или $\sqrt{x^2}<2$, т. е. $|x|<2$ $(-2<x<2)$, следует, что данная функция убывает на интервале $(-2, 2)$.

280. Определить промежутки, на которых возрастают и убывают функции: 1) $f(x)=x^3+5x+6$; 2) $f(x)=x^{-2}$; 3) $f(x)=2x^2-\ln x$ $(x>0)$; 4) $f(x)=3x^2-3$; 5) $f(x)=x^3-3x+2$.

281. Доказать, что функция $f(x)=1-x^3$ убывает на всей числовой прямой.

2. Отыскание точек локального экстремума функции. Точка x_0 называется *точкой строгого локального максимума* (*минимума*) функции $f(x)$, если для всех x из некоторой δ-окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ $(f(x)>f(x_0))$ при $x\neq x_0$.

Локальный максимум (max) и локальный минимум (min) объединяются общим названием *локальный экстремум.*

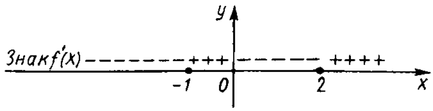


Рис. 13

Теорема 2 (**необходимое условие локального экстремума**). *Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум и дифференцируема в этой точке, то $f'(x_0)=0$.*

Точки, в которых производная функции равна нулю, принято называть *точками возможного экстремума.*

Теорема 3 (**достаточное условие локального экстремума**). *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой δ-окрестности точки x_0. Тогда если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «+» на «−», то x_0 — точка локального максимума, если $f'(x)$ в точке x_0 меняет знак с «−» на «+», то x_0 — точка локального минимума, если же знак $f'(x)$ в точке x_0 не изменяется, то в точке x_0 экстремума не существует.*

Пример 2. Найти максимумы и минимумы следующих функций: 1) $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+2$; 2) $f(x)=(x-2)^5$.

Решение. 1) Область определения функции — вся числовая прямая. Находим производную: $f'(x)=12x^3-12x^2-24x$. Решая уравнение $12x(x^2-x-2)=0$, получаем три точки возможного экстремума: $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=2$. Исследовав знак $f'(x)$ (рис. 13) в окрестности этих точек, получаем $x_1=-1$ и $x_3=2$ — точки локального минимума, $f(-1)=-3$ и $f(2)=-30$ — минимальные значения функции, $x_2=0$ — точка локального максимума, $f(0)=2$ — максимальное значение функции в этой точке.

2) Область определения функции — вся числовая прямая. Находим производную: $f'(x)=5(x-2)^4$. Производная обращается в нуль в единственной точке $x=2$. Так как $f'(x)$ положительна как слева, так и справа от этой точки, т. е. при переходе через точку $x=2$ знака не меняет, то данная функция не имеет точек экстремума.

282. Найти максимумы и минимумы функций:
1) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-x+3}$; 2) $f(x)=x\ln x$; 3) $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2$;
4) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$; 5) $f(x)=x^2e^{-x}$.

Задачи на наибольшее и наименьшее значения.

283. Решеткой длиной 120 м нужно огородить прилегающую к дому прямоугольную площадку наибольшей площади. Определить размеры прямоугольной площадки.

284. Разложить число 10 на два слагаемых так, чтобы произведение их было наибольшим.

285. Определить наибольшую площадь прямоугольника, у которого одна сторона лежит на основании a данного треугольника, а две вершины — на боковых сторонах треугольника, если треугольник имеет высоту h.

286. Из квадратного листа картона со стороной a вырезают по углам одинаковые квадраты и из оставшейся крестообразной фигуры склеивается прямоугольная коробка. Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата, чтобы объем коробки был наибольшим?

287. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом V так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

288. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр сечения p. При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей?

289. В прямой круговой конус радиуса R и высоты h вписан цилиндр наибольшего объема. Найти этот объем.

290. В шар радиуса R вписан цилиндр наибольшего объема. Найти этот объем.

291. Из сектора круга радиуса R свертывается коническая воронка. При каком центральном угле она имеет наибольший объем?

292. Даны точки $A(0;\ 3)$ и $B(4;\ 5)$. На оси Ox найти точку, сумма расстояний которой до точек A и B наименьшая.

3. Направление выпуклости и точки перегиба графика функции. График функции $f(x)$ имеет на интервале $(a,\ b)$ выпуклость, направленную *вниз (вверх)*, если в пределах интервала $(a,\ b)$ график лежит *не ниже (не выше)* любой касательной к графику функции на $(a,\ b)$.

Теорема 4. *Если функция $f(x)$ имеет на интервале $(a,\ b)$ вторую производную и $f''(x) \geqslant 0$ ($f''(x) \leqslant 0$) во всех точках $(a,\ b)$, то график функции имеет на $(a,\ b)$ выпуклость, направленную вниз (вверх).*

Точка $M(x_0;\ f(x_0))$ называется *точкой перегиба* графика функции $f(x)$, если в точке M график имеет касательную и существует такая окрестность точки x_0, в пределах которой график функции слева и справа от точки x_0 имеет разные направления выпуклости.

Теорема 5 (необходимое условие точки перегиба). *Пусть график функции $f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0;\ f(x_0))$ и пусть функция имеет в точке x_0 непрерывную вторую производную. Тогда $f''(x)$ в точке x_0 обращается в нуль, т. е. $f''(x_0)=0$.*

Точки $M(x_0; f(x_0))$ графика, для которых $f''(x_0)=0$, называются *критическими.*

Теорема 6 (достаточное условие точки перегиба). *Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности* *точки x_0. Тогда если в пределах указанной окрестности $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0, то график функции имеет перегиб в точке $M(x_0; f(x_0))$.*

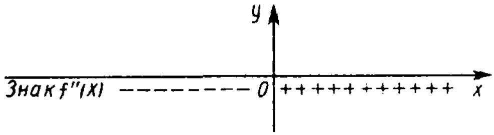


Рис. 14

Пример 3. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $f(x)=x^2+x+5$.

Решение. Область определения функции — вся числовая прямая. Находим производные: $f'(x)=2x+1$; $f''(x)=2>0$. Так как $f''(x)>0$ при любом значении x, то график функции имеет на интервале $(-\infty, +\infty)$ выпуклость, направленную вниз. Точек перегиба нет.

Пример 4. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $f(x)=x^3-3x$.

Решение. Область определения функции — вся числовая прямая. Находим производные: $f'(x)=3x^2-3$; $f''(x)=6x$. Из уравнения $6x=0$ получаем одну критическую точку $x=0$. Отметив точку $x=0$ на вспомогательном рисунке (рис. 14) и исследовав знак $f''(x)$ в ее окрестности, получаем слева от точки $x=0$ $f''(x)<0$ (график направлен выпуклостью вверх), а справа — $f''(x)>0$ (график направлен выпуклостью вниз). Таким образом, при переходе через точку $x=0$ $f''(x)$ меняет знак. Согласно теореме 6, точка с абсциссой $x=0$ является точкой перегиба графика рассматриваемой функции. Ее координаты (0; 0). Кроме того, ясны и интервалы выпуклости: $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

293. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функций: 1) $f(x)=x^3-6x^2+x$; 2) $f(x)=x^4+2x^3-12x^2-5x+2$; 3) $f(x)=(x-1)^4$; 4) $f(x)=\frac{2x^2}{1+x^2}$; 5) $f(x)=2x^2+\ln x$; 6) $f(x)=x\,\mathrm{arctg}\,x$.

294. При каком значении a **кривая** $y=x^3+ax^2+1$ **имеет точку перегиба при** $x=1$?

295. При каком значении a кривая $y=x^4+ax^3+\frac{3}{2}x^2+1$ будет иметь выпуклость вниз на всей числовой прямой?

4. Асимптоты графика функции. Прямая линия называется *асимптотой* графика функции $f(x)$, если расстояние от точки M, лежащей на графике, до этой прямой стремится к нулю при движении точки по графику в бесконечность.

Существует три вида асимптот: *вертикальные, горизонтальные* и *наклонные*.

Прямая $x=x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Прямая $y=A$ называется *горизонтальной асимптотой* графика функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, если $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} f(x)=A$.

Прямая $y=kx+b$ $(k\neq 0)$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, если функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$.

Теорема 7. *Для того чтобы график функции $f(x)$ имел при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ наклонную асимптоту $y=kx+b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два предела:*

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}=k \text{ и } \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}[f(x)-kx]=b.$$

Пример 5. Найти асимптоты графика функции $f(x)=\dfrac{x+5}{x-3}$.

Решение. Точка $x=3$ — точка разрыва второго рода данной функции, причем $\lim\limits_{\substack{x\to3-\\(x\to3+)}}\dfrac{x+5}{x-3}=\underset{(+\infty)}{-\infty}$; следовательно, прямая $x=3$ — вертикальная асимптота. Так как $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+5}{x(x-3)}=0$, то график функции наклонных асимптот не имеет.

Находим горизонтальную асимптоту: $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\dfrac{x+5}{x-3}=1$. Таким образом, график данной функции имеет вертикальную асимптоту $x=3$ и горизонтальную асимптоту $y=1$.

Пример 6. Найти асимптоты графика функции $f(x)= =2x+\operatorname{arctg}x$.

Решение. Так как функция непрерывна на всей числовой прямой, то вертикальных асимптот нет. Нет и горизонтальных асимптот, так как $y\to\infty$ при $x\to\infty$. Будем искать наклонные асимптоты. Пределы при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ будут различными, поэтому надо рассмотреть отдельно два случая.

Находим правую асимптоту (при $x\to+\infty$):

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\operatorname{arctg}x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)=2+\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=2,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(2x+\operatorname{arctg}x-2x)=\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}.$$

Находим левую асимптоту (при $x\to-\infty$):

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+\operatorname{arctg}x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)=2+\lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=2,$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(2x+\operatorname{arctg}x-2x)=\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=-\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, получаем, что график функции имеет две различные наклонные асимптоты: $y=2x+\pi/2$ при $x\to+\infty$ и $y=2x-\pi/2$ при $x\to-\infty$.

296. Найти асимптоты графиков функций:

1) $f(x)=\dfrac{5x}{x-1}$; 2) $f(x)=\dfrac{x}{2x-1}+x$; 3) $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x^2-1}+2x$;

4) $f(x)=xe^{1/x}$; 5) $f(x)=x-2\operatorname{arctg}x$.

5. Схема исследования графика функции. Изучение заданной функции и построение ее графика целесообразно проводить в следующем порядке:

1) найти область определения функции;

2) найти точки пересечения графика функции с осями координат;

3) найти асимптоты;

4) найти точки возможного экстремума;

5) найти критические точки;

6) с помощью вспомогательного рисунка исследовать знак первой и второй производных. Определить участки возрастания и убывания функции, найти направление выпуклости графика, точки экстремума и точки перегиба;

7) построить график, учитывая исследование, проведенное в п. 1)—6).

Пример 7. Построить по изложенной выше схеме график функции

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}.$$

Решение. 1) Областью определения функции является множество всех вещественных чисел, кроме $x=1$ (в этом случае знаменатель обращается в нуль).

2) Так как уравнение $x^2+1=0$ не имеет вещественных корней, то график функции не имеет точек пересечения с осью Ox, но пересекает ось Oy в точке $(0;\ -1)$.

3) Выясним вопрос о существовании асимптот. Исследуем поведение функции вблизи точки разрыва $x=1$. Так как $y\to-\infty$ при $x\to1-$, $y\to+\infty$ при $x\to1+$, то прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой графика функции.

Если $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, то $y\to+\infty$ $(y\to-\infty)$; следовательно, горизонтальной асимптоты у графика нет. Далее, из существования пределов

$$k = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{x^2+1}{x^2-x} = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{1+1/x^2}{1-1/x} = 1,$$

$$b = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} [f(x) - kx] = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \left[\frac{x^2+1}{x-1} - x\right] = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{1+x}{x-1} = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{1+1/x}{1-1/x} = 1$$

вытекает, что при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ график функции имеет наклонную асимптоту $y = x + 1$.

4) Для нахождения точек возможного экстремума вычислим первую производную функции:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}.$$

Решая уравнение $x^2 - 2x - 1 = 0$, получаем две точки возможного экстремума: $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ и $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

5) Для нахождения критических точек вычислим вторую производную:

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

Так как $f''(x)$ в нуль не обращается, то критических точек нет.

6) Строим вспомогательный рисунок и исследуем знак первой и второй производных (рис. 15). Точки возможного экстремума, подлежащие рассмотрению: $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ и $x_2 = 1 + \sqrt{2}$, — разделяют область существования функции на интервалы: $(-\infty,\ 1-\sqrt{2})$, $(1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2})$ и $(1+\sqrt{2},\ +\infty)$. В каждом из этих интервалов производная сохраняет знак: в первом — плюс, во втором — минус, в третьем — плюс (в этом можно убедиться, взяв в каждом из них произвольное значение x и вычислив при нем значение $f'(x)$). Последовательность знаков $f'(x)$ запишется так: $+$, $-$, $+$. Получаем, что функция на $(-\infty,\ 1-\sqrt{2})$ возрастает, на $(1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2})$ убывает, а на $(1+\sqrt{2},\ +\infty)$ снова возрастает. Точки экстремума: максимум при $x = 1 - \sqrt{2}$, причем $f(1-\sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}$; минимум при $x = 1 + \sqrt{2}$, причем $f(1+\sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$. На $(-\infty,\ 1)$ график направлен выпуклостью вверх, а на $(1,\ +\infty)$ — вниз.

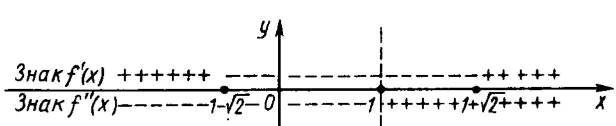


Рис. 15

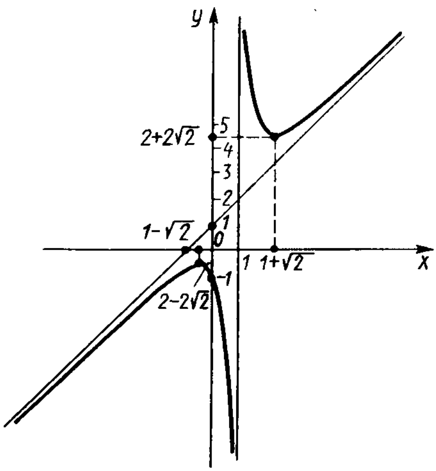


Рис. 16

7) По полученным данным строим эскиз графика (рис. 16).

Пример 8. Построить график функции $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

Решение. 1) Функция определена при $x>0$, т. е. в интервале $0<x<+\infty$.

2) График функции пересекает ось Ox в точке, в которой $\ln x=0$, т. е. в точке с абсциссой $x=1$, а с осью Oy пересечений не имеет, так как функция определена при $x>0$.

3) Вертикальной асимптотой является прямая $x=0$, так как $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$. Отыскиваем асимптоты: $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$. Имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя, получаем

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln x}{x}-0\cdot x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

(здесь также было использовано правило Лопиталя).

Таким образом, $k=b=0$, т. е. наклонных асимптот нет; прямая $y=0$ — горизонтальная асимптота.

4) Для нахождения точек возможного экстремума вычислим первую производную:

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Решая уравнение $1-\ln x=0$, получаем одну точку возможного экстремума: $x=e$.

5) Для нахождения критических точек вычислим вторую производную:

$$f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}.$$

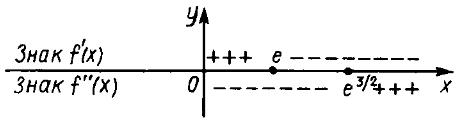


Рис. 17

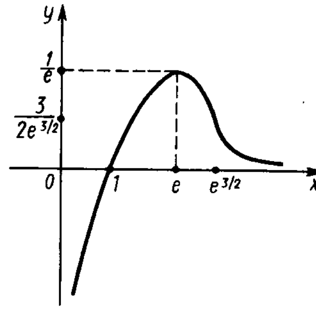


Рис. 18

Решая уравнение $2\ln x-3=0$, $\ln x=\frac{3}{2}$, $x=e^{3/2}$, получаем одну критическую точку: $x=e^{3/2}$.

6) На вспомогательном рисунке (рис. 17) исследуем знак первой и второй производных.

Получаем, что на $(0,\ e)$ производная $f'(1)=\frac{1-\ln 1}{1}=\frac{1-0}{1}=$ $=1>0$; следовательно, функция возрастает; на $(e,\ +\infty)$ производная $f'(e^2)=\frac{1-\ln e^2}{e^4}=\frac{1-2\ln e}{e^4}=\frac{1-2}{e^4}=-\frac{1}{e^4}<0$ — функция убывает. Точки экстремума: при переходе через точку $x=e$ производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус; следовательно, в точке $x=e$ — максимум, причем $f(e)=\frac{1}{e}$. На $(0,\ e^{3/2})$ вторая производная $f''(e)=\frac{2\ln e-3}{e^3}=-\frac{1}{e^3}<0$ — график направлен выпуклостью вверх, а на $(e^{3/2},\ +\infty)$ производная $f''(e^2)=\frac{2\ln e^2-3}{e^6}=\frac{1}{e^6}>0$ — график направлен выпуклостью вниз; следовательно, точка $x=e^{3/2}$ — абсцисса точки перегиба, причем $f(e^{3/2})=\frac{3}{2e^{3/2}}$. Таким образом, точка $\left(e^{3/2};\ \frac{3}{2e^{3/2}}\right)$ — точка перегиба графика функции.

7) На основании полученных данных строим график функции (рис. 18).

Пример 9. Построить график функции $f(x)=x^2e^{-x}$.

Решение. 1) Область определения функции — вся числовая прямая.

2) График функции пересекает оси координат в точке $O(0;\ 0)$.

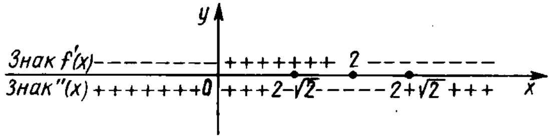


Рис. 19

3) Так как функция непрерывна на всей числовой прямой, то вертикальных асимптот нет. При отыскании наклонных асимптот необходимо рассмотреть отдельно случаи $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$, имеем $k = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{-x} = \infty$. Следовательно, наклонной асимптоты при $x \to -\infty$ нет, а так как и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$, то горизонтальной асимптоты также нет. Далее имеем

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0;$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - 0 \cdot x] = \lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

(здесь использовалось правило Лопиталя); таким образом, при $x \to +\infty$ наклонной асимптоты нет, прямая $y = 0$ — горизонтальная асимптота.

4) Для нахождения точек возможного экстремума вычислим первую производную:

$$f'(x) = x(2-x)e^{-x}.$$

Решая уравнение $x(2-x)e^{-x} = 0$ ($e^{-x} \neq 0$), получаем две точки возможного экстремума: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

5) Для нахождения критических точек вычислим вторую производную:

$$f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}.$$

Решая уравнение $x^2 - 4x + 2 = 0$, получаем две критические точки: $x_1 = 2 - \sqrt{2}$, $x_2 = 2 + \sqrt{2}$.

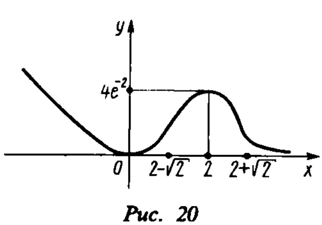


Рис. 20

6) Исследуем знаки первой и второй производных (рис. 19). Получаем, что на $(-\infty, 0)$ функция убывает, на $(0, 2)$ — возрастает, а на $(2, +\infty)$ — снова убывает. Точки экстремума: при переходе через точку $x = 0$ производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, а через точку $x = 2$ — с плюса

на минус; следовательно, в точке $x=0$ минимум, а в точке $x=2$ максимум, причем $f(0)=0$, $f(2)=4e^{-2}$. На $(-\infty, 2-\sqrt{2})$ график направлен выпуклостью вниз, на $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ — вверх, а на $(2+\sqrt{2}, +\infty)$ — снова вниз; следовательно, $x=2-\sqrt{2}$, $x=2+\sqrt{2}$ — абсциссы точек перегиба, причем $f(2-\sqrt{2})=(2-\sqrt{2})^2 e^{-(2-\sqrt{2})}$, $f(2+\sqrt{2})=(2+\sqrt{2})^2 e^{-(2+\sqrt{2})}$.

7) На основании полученных данных строим график функции (рис. 20).

Построить графики функций:

297. $y=x^3-3x$.

298. $y=12x-x^3$.

299. $y=\frac{x^3}{3}+x^2$.

300. $y=\frac{x^4}{4}-2x^2$.

301. $y=x+2\sqrt{-x}$.

302. $y=x\sqrt{1-x}$.

303. $y=\frac{6\sqrt{x}}{x+2}$.

304. $y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$.

305. $y=\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}$.

306. $y=\sqrt[3]{x^2}-1$.

307. $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}$.

308. $y=1+\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

309. $y=(x-2)^{2/3}-(x+2)^{2/3}$.

310. $y=(x-2)^{2/3}+(x+2)^{2/3}$.

311. $y=x(x-1)^{2/3}$.

312. $y=\frac{x}{1-x^2}$.

313. $y=\frac{x}{x^2-4}$.

314. $y=x^{2/3}(1-x)$.

315. $y=\frac{x}{x^2+1}$.

316. $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

317. $y=\frac{3-2x}{(x-2)^2}$.

318. $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

319. $y=\frac{x^2}{x^2-1}$.

320. $y=\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}$.

321. $y=xe^{-x/2}$.

322. $y=\frac{e^x}{x}$.

323. $y=x^2e^{1/x}$.

324. $y=(1-x)e^x$.

325. $y=xe^{-x^2/2}$.

326. $y=x^3e^x$.

327. $y=x^3e^{-x}$.

328. $y=\frac{e^x}{4(1-x)}$.

329. $y=\frac{e^{-x}}{x^2-3}$.

330. $y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

331. $y=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$.

332. $y=\dfrac{2}{e^{x}(x+3)}$.

333. $y=x^2e^{-x^2}$.

334. $y=x\ln x$.

335. $y=x-\ln x$.

336. $y=\dfrac{1+\ln x}{x}$.

337. $y=x\ln^2 x$.

338. $y=x^2\ln^2 x$.

339. $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

340. $y=\dfrac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$.

341. $y=\dfrac{x^2+1}{x}$.

342. $y=\dfrac{x^2}{x-2}$.

343. $y=\dfrac{2x^3-5x^2+14x-6}{4x^2}$.

344. $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}$.

345. $y=2x+\dfrac{1}{x^2}$.

346. $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$.

347. $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}$.

348. $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

349. $y=\dfrac{(1+x)^{3/2}}{\sqrt{x}}$.

350. $y=x+\operatorname{arctg} x$.

351. $y=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$.

352. $y=x-\operatorname{arctg} 2x$.

Глава 6

ИНТЕГРИРОВАНИЕ

§ 1. Первообразная и неопределенный интеграл

1. Основные сведения. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке X, если для любого $x\in X$ выполняется равенство $F'(x)=f(x)$.

Пример. Функция $F(x)=\sin x$ является первообразной для функции $f(x)=\cos x$ на $X=(-\infty,\ +\infty)$, так как при любом x $(\sin x)'=\cos x$.

Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то функция $F(x)+C$, где C — некоторая постоянная, также является первообразной для функции $f(x)$, так как $[F(x)+C]'=f(x)$ для любого числа C. Например, для $f(x)=\cos x$ первообразной является не только $\sin x$, но и функция $\sin x+C$, так как $(\sin x+C)'=\cos x$.

Определение. *Если функция $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то множество функций $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом*

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

При этом функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, а переменная x — *переменной интегрирования*.

Восстановление функции по ее производной, или, что то же, отыскание неопределенного интеграла, называется *интегрированием*. Интегрирование — операция, обратная дифференцированию.

Пример. Проверить, что $\int 3x^2\,dx=x^3+C$.

Решение. Дифференцируя результат интегрирования $(x^3+C)'=3x^2$, получаем подынтегральную функцию. Следовательно, интегрирование выполнено верно.

1. Проверить, что: 1) $\int\cos x\,dx=\sin x+C$; 2) $\int e^{-2x}\,dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$; 3) $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C$; 4) $\int x^3\,dx=\frac{x^4}{4}+C$; 5) $\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x+C$; 6) $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$; 7) $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$.

2. Основные свойства неопределенного интеграла.

1°. $\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x)$.

2°. $d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx$.

3°. $\int dF(x)=F(x)+C$.

4°. $\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$.

5°. $\int[f(x)\pm g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$.

3. Таблица основных интегралов.

I. $\int 0\cdot dx=C$.

II. $\int 1\cdot dx=x+C$.

III. $\int x^\alpha\,dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq-1)$.

IV. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C\ (x\neq0)$.

V. $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C\ (0<a\neq1)$.

VI. $\int e^x\,dx=e^x+C$.

VII. $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$.

VIII. $\int\cos x\,dx=\sin x+C$.

IX. $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C$.

X. $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C$.

XI. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$.

XII. $\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}+C$.

XIII. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln|x+\sqrt{x^2+k}| + C.$

XIV. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (a \neq 0).$

XV. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$

XVI. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

§ 2. Основные методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование. Вычисление интегралов с помощью таблицы простейших интегралов и основных свойств неопределенных интегралов называется *непосредственным интегрированием*.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int\left(5\cos x+2-3x^2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2+1}\right)dx.$$

Решение. Применив свойства 4° и 5°, имеем

$$\int\left(5\cos x+2-3x^2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2+1}\right)dx=$$
$$=5\int\cos x\,dx+2\int dx-3\int x^2\,dx+\int\frac{dx}{x}-4\int\frac{dx}{x^2+1}.$$

Далее, используя соответственно формулы VIII, II, III, IV, XII таблицы основных интегралов, находим:

$$5\int\cos x\,dx=5(\sin x+C_1)=5\sin x+5C_1;$$

$$2\int dx=2(x+C_2)=2x+2C_2;$$

$$3\int x^2\,dx=3\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}+C_3\right)=x^3+3C_3;\quad \int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C_4;$$

$$4\int\frac{dx}{x^2+1}=4(\operatorname{arctg}x+C_5)=4\operatorname{arctg}x+4C_5.$$

Таким образом,

$$\int\left(5\cos x+2-3x^2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2+1}\right)dx=$$
$$=5\sin x+2x-x^3+\ln|x|-4\operatorname{arctg}x+$$
$$+(5C_1+2C_2+3C_3+C_4+4C_5).$$

Обычно все произвольные постоянные суммируют, результат обозначают одной буквой: $C=5C_1+2C_2+3C_3+C_4+4C_5$, поэтому окончательно получаем

$$\int\left(5\cos x+2-3x^2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2+1}\right)dx=$$
$$=5\sin x+2x-x^3+\ln|x|-4\operatorname{arctg}x+C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

Решение. Интеграл табличный. Поэтому можно переходить к непосредственному интегрированию. По формуле XVI, где $a=4$, получаем

$$\int\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}=\arcsin\frac{x}{4}+C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

Решение. Интеграл не табличный, поэтому преобразуем его. Так как $1=\sin^2 x+\cos^2 x$, то интеграл можно записать в виде

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx.$$

Применяя свойство 5°, имеем

$$\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

Получили два табличных интеграла. По формулам IX и X находим

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$.

Решение. Так как $1+2x^2=(1+x^2)+x^2$, то

$$\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)}dx+\int\frac{x^2}{x^2(1+x^2)}dx=$$
$$=\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{1+x^2}.$$

По формулам III и XII получаем

$$\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{1+x^2}=-\frac{1}{x}+\operatorname{arctg}x+C.$$

Применяя метод непосредственного интегрирования, вычислить интегралы:

12. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$

13. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,\mathrm{d}x.$

14. $\int \sin^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x.$

15. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x.$

16. $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$

17. $\int \left(\frac{1}{x^2-25}+\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\right)\mathrm{d}x.$

18. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{1}{x^2+3}\right)\mathrm{d}x.$

19. $\int \frac{x^2+2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x.$

20. $\int \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x.$

21. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)\mathrm{d}x.$

22. $\int 4x\left(3+\frac{4^{-x}}{\sqrt{x^3}}\right)\mathrm{d}x.$

23. $\int \mathrm{e}^x\left(1+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x.$

24. $\int \frac{5x^8+1}{x^4}\,\mathrm{d}x.$

25. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}\,\mathrm{d}x.$

26. $\int \frac{3\operatorname{tg}^2 x+4}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$

27. $\int \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x.$

28. $\int 2^x \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$

29. $\int \cos^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x.$

30. $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$

31. $\int \frac{x^5-x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$

32. $\int \frac{-2x^4+4x^2-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

33. $\int \frac{-3x^4+3x^2-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$

34. $\displaystyle\int \frac{2^x+5^x}{10^x}\,dx$. 35. $\displaystyle\int \frac{dx}{16-x^4}$.

2. Метод подстановки. *Метод подстановки (или замены переменной)* заключается в том, что заменяют x на $\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, полагают $dx=\varphi'(t)\,dt$ и получают

$$\int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)}=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

При этом получают искомую функцию, выраженную через переменную t. Для возвращения к переменной x необходимо заменить t значением $t=\psi(x)$, которое находится из соотношения $x=\varphi(t)$.

Указанную формулу применяют также и в обратном направлении:

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\psi(x)}=\int f(x)\,dx,$$

где $t=\psi(x)$ — функция, обратная функции $x=\varphi(t)$.

Пример 5. Вычислить интеграл $\int\cos 3x\,dx$.

Решение. Интеграл не табличный. Применим подстановку $t=3x$; тогда $dt=(3x)'\,dx=3dx$, $dx=1/3\,dt$. Подставив в интеграл, получаем

$$\int\cos 3x\,dx=\frac{1}{3}\int\cos t\,dt$$

— табличный интеграл. Применяя формулу VIII таблицы основных интегралов, находим

$$\frac{1}{3}\int\cos t\,dt=\frac{1}{3}\sin t+C.$$

Возвращаясь к переменной x, окончательно получаем

$$\int\cos 3x\,dx=\frac{1}{3}\sin 3x+C.$$

Данный интеграл можно вычислить и непосредственно, заменив dx на $\frac{1}{3}d(3x)$, т. е. внося под знак дифференциала множитель 3 и разделив на него интеграл. В результате получаем

$$\int\cos 3x\,dx=\frac{1}{3}\int\cos 3x\,d(3x)=\frac{1}{3}\sin 3x+C.$$

Этот экономный и простой прием часто используется при вычислении интегралов.

Пример 6. Вычислить интеграл $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Вычислим данный интеграл непосредственно, выделяя дифференциал новой переменной интегрирования. Имеем

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1/2\,d(x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-1/2\,d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2}\,d(1-x^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2(1-x^2)^{1/2} + C = -(1-x^2)^{1/2} + C.$$

Данный интеграл вычисляется с помощью подстановки $t = 1 - x^2$.

Существует другой несложный, но весьма эффективный прием, позволяющий упростить вычисление интегралов. Если числитель подынтегральной функции $f(x)$ равен производной знаменателя, то справедлива формула

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C.$$

Действительно, используя подстановку $t = f(x)$, $dt = f'(x)\,dx$, имеем

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C.$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int \operatorname{ctg} x\,dx$.

Решение. Так как $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, то интеграл можно записать в виде

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx.$$

Замечая, что $(\sin x)' = \cos x$, получаем

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{(\sin x)'}{\cos x}\,dx = \ln|\sin x| + C.$$

Данный интеграл можно вычислить и с помощью подстановки $t = \sin x$, и непосредственно, выделяя дифференциал новой переменной.

Пример 8. Вычислить интеграл $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,dx$.

Решение. Полагаем $t = e^x$, $x = \ln t$. Отсюда $dx = (\ln t)'\,dt = \frac{dt}{t}$.

Следовательно,

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx=\int \frac{t-1}{t+1}\cdot\frac{dt}{t}=\int \frac{2t-(t+1)}{(t+1)t}\,dt=2\int \frac{dt}{t+1}-\int \frac{dt}{t}=$$

$$=2\int \frac{d(t+1)}{t+1}-\int \frac{dt}{t}=2\ln(1+t)-\ln t+C.$$

Возвращаясь к переменной x, окончательно получаем

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx=2\ln(1+e^x)-x+C.$$

Пример 9. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int \frac{dx}{(\sqrt[6]{x})^2+(\sqrt[6]{x})^3}.$$

Положим $t=\sqrt[6]{x}$; тогда $x=t^6$, $dx=6t^5\,dt$. Находим

$$\int \frac{dx}{(\sqrt[6]{x})^2+(\sqrt[6]{x})^3}=\int \frac{6t^5\,dt}{t^2+t^3}=6\int \frac{t^3\,dt}{t+1}.$$

Выделяя делением целую часть дроби, получим

$$6\int \frac{t^3\,dt}{t+1}=6\left[\int (t^2-t+1)\,dt-\int \frac{dt}{t+1}\right]=$$

$$=6\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right]+C.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C.$$

И вообще, если подынтегральное выражение не содержит других корней, кроме корня $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, где a, b, c, d — некоторые числа $\left(\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}\right)$; m — натуральное число, то следует применить подстановку $t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Пример 10. Вычислить интеграл $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{dx}{1-x}$.

Решение. Сделав подстановку $t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, получим $t^2=\frac{1+x}{1-x}$,

$1-x=\frac{2}{t^2+1}$, $x=\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $dx=\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)'dt=\frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2}$. Далее имеем

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{1-x}=2\int\frac{t^2\,dt}{t^2+1}=2\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=2\int dt-2\int\frac{dt}{t^2+1}=$$
$$=2t-2\operatorname{arctg}t+C=2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

Вычислить интегралы:

36. $\int\cos 5x\,dx.$

37. $\int\sin 7x\,dx.$

38. $\int\sin(3x+5)\,dx.$

39. $\int e^{2x}\,dx.$

40. $\int\operatorname{tg}x\,dx.$

41. $\int e^{-x^2}x\,dx.$

42. $\int\frac{e^{4x}}{e^x-1}dx.$

43. $\int\frac{x^4}{x^5+7}dx.$

44. $\int\frac{dx}{\cos^2 3x}.$

45. $\int\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{3}}.$

46. $\int(2+5x)^9\,dx.$

47. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x}}.$

48. $\int\sqrt{2x-5}\,dx.$

49. $\int\sqrt[3]{3-7x}\,dx.$

50. $\int\frac{dx}{5x+2}.$

51. $\int\frac{dx}{2-3x}.$

52. $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx.$

53. $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx.$

54. $\int\frac{5x-6}{\sqrt{1-3x}}dx.$

55. $\int\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx.$

56. $\int\frac{\sin x}{1+3\cos x}dx.$

57. $\int\frac{\cos 3x}{3+\sin 3x}dx.$

58. $\int\cos^3 x\cdot\sin x\,dx.$

59. $\int\sin^2 x\cdot\cos x\,dx.$

60. $\int e^{\cos x}\sin x\,dx.$

61. $\int e^{-x^3}x^2\,dx$ $(t=e^{-x^3})$.

62. $\int e^{\sin x}\cos x\,dx.$

63. $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx.$

64. $\int\frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{1+x^2}dx.$

65. $\int e^{-\operatorname{tg}x}\sec^2 x\,dx.$

66. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx.$

67. $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}\,dx.$

68. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)} (t=1+\ln x).$

69. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx.$

70. $\int x^2\sqrt[5]{x^3-8}\,dx\,(t=x^3-8).$

71. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} (t=\sqrt{e^x+1}).$

72. $\int \frac{3^{1/x}\,dx}{x^2} (t=\frac{1}{x}).$

73. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^{100}}{1+x^2}\,dx\,(t=\operatorname{arctg} x).$

74. $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}.$

75. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

76. $\int \frac{dx}{(\arccos x)^5\sqrt{1-x^2}}.$

77. $\int \frac{\arcsin x+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

78. $\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}\,dx.$

79. $\int \frac{1+\sin 2x}{\sin^2 x}\,dx.$

80. $\int \sqrt{3+\cos 5x}\,\sin 5x\,dx.$

81. $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt[7]{3+5\sin 3x}}\,dx.$

82. $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,dx.$

83. $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

84. $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

85. $\int 4^{1-3x}\,dx.$

86. $\int \frac{dx}{4x^2+5}.$

87. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}}.$

88. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x^2}}.$

89. $\int \frac{dx}{9x^2-1}.$

90. $\int \frac{dx}{3-5x^2}.$

91. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-5}}.$

92. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2-x^4}} (t=x^2).$

93. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^8-3}} (t=x^4).$

94. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$

95. $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

96. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}.$

97. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}.$

98. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}.$

99. $\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}.$

100. $\int \frac{3x+1}{x^2-2x+5}\,dx.$

101. $\int \frac{5x-1}{x^2+3x+3}\,dx.$

3. Метод интегрирования по частям. *Формулой интегрирования по частям в неопределенном интеграле* называется формула

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du, \tag{1}$$

где u и v — дифференцируемые функции от x. Она позволяет свести вычисление $\int u\,dv$ к вычислению интеграла $\int v\,du$, который может оказаться более простым для интегрирования.

Большую часть интегралов, вычисляемых интегрированием по частям, можно разбить на три группы.

1) Интегралы вида $\int P(x)\operatorname{arctg} x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arcctg} x\,dx$, $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$, где $P(x)$ — многочлен. Для их вычисления следует положить u равным одной из указанных выше функций, а $dv = P(x)\,dx$ (см. пример 11).

2) Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}\,dx$, $\int P(x)\sin kx\,dx$, $\int P(x)\cos kx\,dx$, где $P(x)$ — многочлен, а k — некоторое число. Для их вычисления следует положить $u = P(x)$, а $dv = e^{kx}\,dx$, $dv = \sin kx\,dx$, $dv = \cos kx\,dx$ соответственно (см. пример 12).

3) Интегралы $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int e^{ax}\sin bx\,dx$, где a и b — некоторые числа. Эти интегралы вычисляются двукратным интегрированием по частям (см. пример 13).

Пример 11. Вычислить интеграл $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

Решение. Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$. Тогда

$$du = (\operatorname{arctg} x)'\,dx = \frac{dx}{1+x^2};\ \int dv = \int dx,\ v = x$$

(здесь в качестве v можно взять любую из первообразных вида $x + C$, где C — произвольная постоянная. Взято $v = x$, т. е. $C = 0$). По формуле (1) имеем

$$\int \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u}\ \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{x}_{v}\ \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u} - \int \underbrace{x}_{v}\underbrace{\frac{dx}{1+x^2}}_{du} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} =$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Пример 12. Вычислить интеграл $\int xe^x\,dx$.

Решение. Полагая $u = x$, $dv = e^x\,dx$, найдем

$$du = (x)'\,dx = dx;\ \int dv = \int e^x\,dx,\ v = e^x.$$

По формуле (3) получаем

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

Пример 13. Вычислить интеграл $\int e^x \cos x\,dx$.

Решение. Положим $u=e^x$, $dv=\cos x\,dx$ (можно положить также $u=\cos x$, $dv=e^x\,dx$). Тогда

$$du=(e^x)'\,dx=e^x\,dx;\ \int dv=\int \cos x\,dx,\ v=\sin x.$$

По формуле (1) имеем

$$\int e^x \cos x\,dx=e^x \sin x-\int e^x \sin x\,dx. \tag{2}$$

Полученный интеграл снова вычисляем интегрированием по частям, положив $u=e^x$, $dv=\sin x\,dx$, откуда $du=e^x$, $v=-\cos x$. Тогда

$$\int e^x \sin dx=-e^x \cos x+\int e^x \cos x\,dx.$$

Подставляя значение полученного интеграла в выражение (2), находим

$$\int e^x \cos x\,dx=e^x \sin x-(-e^x \cos x+\int e^x \cos x\,dx)=e^x \sin x+e^x \cos x-$$
$$-\int e^x \cos x\,dx.$$

Перенося интеграл из правой части равенства в левую, получаем

$$2\int e^x \cos x\,dx=e^x(\sin x+\cos x)+C_1$$

и окончательно имеем

$$\int e^x \cos x\,dx=\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)+C,$$

где $C=C_1/2$. (Так как C — произвольная постоянная, то и $C_1/2$ — также произвольная постоянная.)

С помощью метода интегрирования по частям вычислить интегралы:

102. $\int x \operatorname{arctg} x\,dx$.

103. $\int \arcsin x\,dx$.

104. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

105. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{7x-1}\,dx$.

106. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$.

107. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

108. $\int \ln x\,dx$.

109. $\int x\ln x\,dx$.

110. $\int x\ln(3x+2)\,dx$.

111. $\int (x^2+3x+2)\ln x\,dx$.

112. $\int (4x^3+6x-7)\ln x\,dx$.

113. $\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})\,dx$.

114. $\int xe^{-x}\,dx$.

115. $\int xe^{5x}\,dx$.

116. $\int x^3e^{-x}\,dx$.

117. $\int x^2e^{-x/2}\,dx$.

118. $\int x\cos x\,dx$.

119. $\int x\sin x\,d\,x$.

120. $\int (x+1)\cos 3x\,dx$.

121. $\int x^2\cos x\,dx$.

122. $\int x^2\sin x\,dx$.

123. $\int x^2e^x\,dx$.

124. $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$.

125. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

126. $\int e^x\sin x\,dx$.

127. $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$.

128. $\int e^x\sin\frac{x}{2}\,dx$.

129. $\int (x^3+1)\cos dx$.

130. $\int \ln^2 x\,dx$.

131. $\int \ln(x^2+2)\,dx$.

132. $\int \cos(\ln x)\,dx$.

133. $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

134. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx\ (t=\sqrt{x})$.

135. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

В заключение вычислим интеграл $I_n=\int\frac{dx}{(x^2+1)^n}$ (n — целое положительное число), который понадобится в следующем параграфе. При $n=1$ имеем $I_1=\operatorname{arctg}x+C$. Пусть $n>1$. Тогда

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+1)^n}=\int\frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)^n}dx=\int\frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}-\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^n}.$$

Во втором интеграле положим

$$u=x,\ du=dx;$$

$$dv=\frac{x\,dx}{(x^2+1)^n},\ v=\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^n}=-\frac{1}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}},$$

поэтому

$$\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^n}=-\frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}}+\int\frac{dx}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}}.$$

Таким образом,

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^n}=\frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}\ (n>1). \qquad (3)$$

Формулы типа (3) называются *рекуррентными*. Они позволяют свести вычисление интеграла I_n к вычислению интеграла I_{n-1} с индексом, меньшим на единицу, а в свою очередь, вычисление I_{n-1} — к вычислению I_{n-2} и т. д. В результате придем к известному интегралу I_1 и будет вычислен интеграл I_n.

Пример 14. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

Решение. По рекуррентной формуле (3) имеем

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}, \quad \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x;$$

окончательно получаем

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x + C.$$

4. Смешанные примеры.

Вычислить интегралы:

136. $\int (e^{x/2} + e^{-x/2})\,dx$.

137. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)^5}$.

138. $\int \frac{\sqrt[3]{2+\ln x}}{x}\,dx$.

139. $\int \frac{e^{4x}}{5+2e^{4x}}\,dx$.

140. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$.

141. $\int \sqrt[4]{1-6x^5}\,x^4\,dx$.

142. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{4x+1}}\,dx$.

143. $\int \frac{2-4x}{\sqrt{7x-1}}\,dx$.

144. $\int \frac{\sin(1/x^2)}{x^3}\,dx$.

145. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

146. $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{5-e^{2x}}}$.

147. $\int \frac{\sin 2x}{5-\cos^2 2x}\,dx$.

148. $\int \frac{2x-3}{x^2-4}\,dx$.

149. $\int \frac{5e^x\,dx}{\sqrt{e^{2x}-4}}$.

150. $\int \frac{\cos 5x\,dx}{\sqrt{3\cos^2 5x-2}}$.

151. $\int \frac{\sin x/3\,dx}{4\cos^2(x/3)+9}$.

152. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{4-x^{10}}}$.

153. $\int \frac{x^6\,dx}{x^{14}+5}$.

154. $\int \frac{e^{-x}\,dx}{e^{-2x}+2}$.

155. $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$.

156. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$.

157. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.

158. $\int \frac{(1+x)\,dx}{x^2+x-1}$.

159. $\int \frac{(3x-2)\,dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

160. $\int \frac{5x+11}{\sqrt{6x-x^2-5}}\,dx$.

161. $\int \frac{7x-1}{x^2-6x+1}\,dx$.

162. $\int \frac{x^3\,dx}{x-2}$.

163. $\int \frac{2x^2-1}{x^2-x+1}\,dx$.

164. $\int \frac{3x^3-2x^2}{x^2-6x+10}\,dx$.

165. $\int \frac{x^4-3x^2}{x-3}\,dx$.

166. $\int (2x+3)\,e^{2x}\,dx$.

167. $\int x\cos^2 x\,dx$.

168. $\int x\,\mathrm{arcctg}\,(1-x)\,dx$.

169. $\int \sin(\ln x)\,dx$.

170. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}\,dx$.

171. $\int x\,\mathrm{tg}^2\,x\,dx$.

В примерах 172—183 применить формулы:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2};\ \cos^2 x \frac{1+\cos 2x}{2};\ \sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

172. $\int \sin^3 x\,dx$.

173. $\int \cos^4 x\,dx$.

174. $\int \sin^5 x\,dx$.

175. $\int \cos^7 x\,dx$.

176. $\int \cos^2 x\sin^2 x\,dx$.

177. $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$.

178. $\int \cos^3 x\sin^5 x\,dx$.

179. $\int (1+2\cos x)^2\,dx$.

180. $\int \frac{dx}{\sin 2x}$.

181. $\int \frac{dx}{\cos(x/3)}$.

182. $\int \frac{dx}{\sin 9x}$.

183. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sin 2x}\,dx$.

В примерах 184—187 применить формулы:

$$\sin\alpha\cos\beta = {}^1/_2[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta = {}^1/_2[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = {}^1/_2[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

184. $\int \sin 3x\cos x\,dx$.

185. $\int \sin 3x\sin 5x\,dx$.

186. $\int \sin(5x-\pi/4)\cos x\,dx$.

187. $\int \sin(x/3)\cos(2x/3)\,dx$.

188. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx$.

189. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$.

190. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx.$ **191.** $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x} dx.$

192. $\int \mathrm{tg}^4 x\, dx.$ **193.** $\int \mathrm{tg}^5 x\, dx.$

В примерах 194—199 применить подстановку $t=\mathrm{tg}(x/2)$, тогда

$$\sin x = \frac{2\mathrm{tg}(x/2)}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}; \ \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2(x/2)}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2\mathrm{arctg}\, t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

194. $\int \frac{dx}{1+\sin x}.$ **195.** $\int \frac{dx}{3+\cos x}.$

196. $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x}.$ **197.** $\int \frac{dx}{2\sin x+\sin 2x}.$

198. $\int \frac{dx}{\sin x-\cos x}.$ **199.** $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}.$

200. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}.$ **201.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x-5\sin x\cos x}.$

202. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}.$ **203.** $\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}.$

204. $\int \frac{e^{2x}-2e^x}{e^{2x}+1} dx\ (t=e^x).$ **205.** $\int \frac{e^{3x} dx}{e^x+2}.$

206. $\int \frac{e^x+1}{e^x-1} dx.$ **207.** $\int \frac{e^{3x}+2e^x}{e^{2x}+e^x+1} dx.$

208. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x} dx.$ **209.** $\int \frac{dx}{\cos^4 x}.$

210. $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}.$ **211.** $\int \frac{1+\mathrm{tg}\, x}{\sin 2x} dx.$

212. $\int \mathrm{ctg}^5 dx.$ **213.** $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}.$

214. $\int \frac{3x^3+x^2}{x^2+6x+10} dx.$ **215.** $\int \frac{5e^{2x}-3e^x}{e^x+4-e^{2x}} dx.$

216. $\int (5x+3)\sqrt{x^2+3x+5}\, dx.$ **217.** $\int (1-2x)\sqrt{3x^2+8x}\, dx.$

218. $\int \sqrt{2x^2+4x+1}\, dx.$ **219.** $\int \sqrt{3+2x-x^2}\, dx.$

220. $\int \frac{\arcsin(x/2)}{\sqrt{2-x}}\,dx.$

221. $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

222. $\int \frac{6x-10}{\sqrt{x^2+5x+17}}\,dx.$

223. $\int \frac{3x+1}{x^2+10x+1}\,dx.$

224. $\int \frac{3e^{2x}-4e^4}{e^{2x}+4}\,dx.$

225. $\int \frac{e^{5x}\,dx}{e^x+1}.$

226. $\int \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x}\,dx.$

227. $\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2-9}\right)}{\sqrt{x-3}}\,dx.$

228. $\int (3x-1)\sqrt{-x^2-8x}\,dx.$

229. $\int x^2\,\mathrm{arctg}\,(2x+1)\,dx.$

§ 3. Интегрирование рациональных функций

Если знаменатель Q правильной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (имеет степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе) может быть представлен в виде

$$Q(x)=A(x-\alpha)^r(x-\beta)^s\ldots(x^2+2px+q)^t(x^2+2ux+v)^n\ldots,$$

где A — коэффициент при старшей степени многочлена $Q(x)$, α, β… — корни уравнения $Q(x)=0$, а трехчлены не имеют вещественных корней*, то эта дробь разлагается на сумму элементарных дробей следующим образом:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-\alpha)}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\ldots+\frac{A_r}{(x-\alpha)^r}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+2px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+2px+q)^2}+\ldots+\frac{M_tx+N_t}{(x^2+2px+q)^t}+\ldots, \qquad (1)$$

где A_1, A_2, … ,A_r, … ,M_1, N_1, M_2, N_2, …, M_t, N_t, … — некоторые числа, подлежащие определению. Для их определения умножают обе части последнего разложения (1) на $Q(x)$. Так как равенство между многочленом $P(x)$ и многочленом, который получится в правой части, справедливо для всех x, то коэффициенты, стоящие при равных степенях x, равны между собой. Таким образом получим ряд уравнений первой степени, из которых найдем неизвестные числа A_1, A_2, …, A_r, …, M_1, N_1, M_2, N_2, …, M_t, N_t, …

Изложенный метод отыскания разложения рациональной функции называется *методом неопределенных коэффициентов.*

*О комплексных числах см. в гл. 9.

Если рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ неправильная, то следует предварительно выделить целую часть.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$.

Решение. Подынтегральная функция — правильная рациональная дробь. Так как квадратный трехчлен x^2+1 имеет комплексные корни, то по формуле (1) имеем

$$\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

где A, B, C, D, E — коэффициенты, подлежащие определению.

Умножая обе части равенства на $x(x^2+1)^2$, получаем

$$x^4+x^3+x^2+x+1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x^2+1)x+(Dx+E)x,$$

или

$$x^4+x^3+x^2+x+1=(A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+\\+(C+E)x+A.$$

Сравнивая коэффициенты при x^0, x^1, x^2, x^3 и x^4, придем к системе уравнений

$$\begin{cases} x^4: A+B=1, \\ x^3: C=1, \\ x^2: 2A+B+D=1, \\ x: C+E=1, \\ 1: A=1. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $A=1$, $B=0$, $C=1$, $D=-1$, $E=0$, поэтому искомое разложение имеет вид

$$\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+1}-\frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x(x^2+1)^2}\,dx=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x^2+1}-\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\ln|x|+\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2(x^2+1)}+C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\frac{x\,dx}{x^3+1}$.

Решение. Подынтегральная функция правильная рациональная дробь. Так как $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$, причем второй сомножитель имеет комплексные корни, то по формуле (1) имеем

$$\frac{x}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+D}{x^2-x+1},$$

где A, B, D — коэффициенты, подлежащие определению. Умножая обе части равенства на $(x+1)(x^2-x+1)$, получаем

$$x=A(x^2-x+1)+(Bx+D)(x+1)=$$
$$=(A+B)x^2+(-A+B+D)x+(A+D).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях и решая систему уравнений, получим: $A=-1/3$; $B=1/3$; $D=1/3$. Таким образом,

$$\int\frac{x\,dx}{x^3+1}=-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx=-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx.$$

Для вычисления последнего интеграла выделим в знаменателе полный квадрат: $x^2-x+1=(x-1/2)^2+3/4$ — и сделаем подстановку $t=x-1/2$. Тогда

$$\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx=\int\frac{t+1/2+1}{t^2+3/4}dt=\int\frac{t\,dt}{t^2+3/4}+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2+3/4}=$$
$$=\frac{1}{2}\ln(t^2+3/4)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}+C=$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\int\frac{x}{x^3+1}dx=-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}dx$.

Решение. Подынтегральная функция — правильная рациональная дробь. Так как x^2-2x+5 не разлагается на вещественные множители первой степени, то положим $z=\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}}=\frac{x-1}{\sqrt{5-1}}=$ $=\frac{x-1}{2}$, откуда $x=1+2z$, $dx=2dz$, а $x^2-2x+5=4(z^2+1)$. Следовательно,

$$\int\frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}dx=\int\frac{5(1+2z)+3}{4^2(z^2+1)^2}2dz=\int\frac{10z+8}{8(z^2+1)^2}dz=$$
$$=\frac{5}{4}\int\frac{z\,dz}{(z^2+1)^2}+\int\frac{dz}{(z^2+1)^2}.$$

Ко второму интегралу последнего равенства можно применить рекуррентную формулу (см. § 2, формулу (3)), получим

$$\int\frac{z\,dz}{(z^2+1)^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{z^2+1};\ \int\frac{dz}{(z^2+1)^2}=\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z.$$

Таким образом,

$$\int\frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}dx=-\frac{5}{8}\frac{1}{z^2+1}+\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z+C=$$

$$=\frac{4z-5}{8(z^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\int\frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}dx=\frac{2x-7}{2(x^2-2x+5)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right)+C.$$

Вычислить интегралы:

230. $\int\frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx.$

231. $\int\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx.$

232. $\int\frac{3x^2+2x-3}{x(x-1)(x+1)}dx.$

233. $\int\frac{2x+3}{(x-2)^3}dx.$

234. $\int\frac{dx}{(x+1)(x-2)}.$

235. $\int\frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}.$

236. $\int\frac{(x^2+2)dx}{(x+1)^2(x-1)}.$

237. $\int\frac{x\,dx}{x^2+3x+2}.$

238. $\int\frac{x^4+3x^3+2x^2+x+1}{x^2+x+1}dx.$

239. $\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx.$

240. $\int\frac{dx}{x^4+x^2}.$

241. $\int\frac{dx}{(x^2+2)(x-1)^2}.$

242. $\int\frac{dx}{1-x^3}.$

243. $\int\frac{dx}{1+x^3}.$

244. $\int\frac{x^4-2x^3+3x+4}{1+x^3}dx.$

245. $\int\frac{dx}{(1+x^3)^2}.$

246. $\int\frac{dx}{x^4-1}.$

247. $\int\frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx.$

248. $\int\frac{x^2+2x+7}{(x-2)(x^2+1)^2}dx.$

249. $\int\frac{7x-6}{2x^2-6x+4}dx.$

250. $\int\frac{x^4}{(x^2-1)(x+2)}dx.$

251. $\int\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)}dx.$

252. $\int\frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}dx.$

253. $\int\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}dx.$

§ 4. Определенный интеграл

1. Определение определенного интеграла. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, $a<b$. Разобьем этот отрезок на n произвольных частей точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots$ $\ldots<x_n=b$. В каждом из полученных частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку $\xi_i\,(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i)$ и составим сумму

$$\sigma=f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\ldots+f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i, \qquad (1)$$

где $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. Сумма вида (1) называется *интегральной суммой для функции* $f(x)$ на $[a, b]$.

Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка разбиения: $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$.

Определение. *Если существует конечный предел I интегральной суммы* (1) *при $\lambda\to 0$, то этот предел называется определенным интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается следующим образом:*

$$I=\int_a^b f(x)\,dx \text{ или } \int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

В этом случае функция $f(x)$ называется *интегрируемой на* $[a, b]$. Числа a и b называются соответственно *нижним* и *верхним пределами интегрирования*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, x — *переменной интегрирования*.

Для интегрируемости функции достаточно ее непрерывности на отрезке $[a, b]$.

Пример 1. Используя определение, вычислить интеграл $\int_a^b C\,dx$, где C — некоторое число.

Решение. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n произвольных частей точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b$ и составим соответствующую интегральную сумму (1). Так как подынтегральная функция $f(x)=C$ постоянна, то для любого выбора промежуточных точек ξ_i получим интегральную сумму вида $\sigma=C\Delta x_1+$ $+C\Delta x_2+\ldots+C\Delta x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}C\Delta x_i$. Далее имеем

$$\sum_{i=1}^{n}C\Delta x_i=C\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=$$
$$=C[(x_1-a)+(x_2-x_1)+\ldots+(b-x_n)]=C(b-a).$$

Видим, что интегральная сумма для данной функции не зависит ни от разбиения, ни от выбора точек ξ_i и равна $C(b-a)$. Следовательно, и ее предел при $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}\to 0$ равен той же величине.

Таким образом, по определению,

$$\int_a^b C\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}C\Delta x_i=C(b-a).$$

2. Основные свойства определенного интеграла.

1°. *По определению,* $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0.$

2°. *По определению,* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$

3°. *Каковы бы ни были числа a, b, c, всегда имеет место равенство*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4°. *Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, т. е.*

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5°. *Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их интегралов, т. е.*

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Формула Ньютона—Лейбница. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$ и функция $F(x)$ является некоторой ее первообразной на этом отрезке, то имеет место *формула Ньютона—Лейбница*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_a^b \sin x\,\mathrm{d}x$.

Решение. Так как одной из первообразных для функции $f(x)=\sin x$ является функция $F(x)=-\cos x$, то, применяя формулу Ньютона—Лейбница, получаем

$$\int_a^b \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos\Big|_a^b = \cos a - \cos b.$$

Вычислить интегралы:

254. $\int_a^b x^n\,\mathrm{d}x\ (n \neq 1)$.

255. $\int_0^2 (3x^2-1)\,\mathrm{d}x$.

256. $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

257. $\int_1^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

258. $\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,\mathrm{d}x$.

259. $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$.

260. $\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$.

261. $\int_0^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x$.

262. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

263. $\int_0^{\pi/4} \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

264. $\int_{-\pi/4}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

265. $\int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x$.

266. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$.

267. $\int_0^2 x(3-x)\,\mathrm{d}x$.

268. $\int_0^\pi \sin 2x\,\mathrm{d}x$.

269. $\int_{2\pi}^{3\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$.

270. $\int\limits_{1}^{e} \ln x\,\mathrm{d}x.$

271. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}.$

272. $\int\limits_{1}^{e} \ln^2 x\,\mathrm{d}x.$

273. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x.$

274. $\int\limits_{-1}^{1} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$

275. $\int\limits_{-1}^{1} x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$

276. $\int\limits_{0}^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x.$

277. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}.$

278. $\int\limits_{0}^{4} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}.$

279. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x.$

280. $\int\limits_{0}^{1/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x.$

281. $\int\limits_{0}^{4} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2x+1}}.$

282. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin x\cos^2 x\,\mathrm{d}x.$

283. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos x\sin^2 x\,\mathrm{d}x.$

284. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}.$

285. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}.$

286. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}.$

287. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \sin 4x\,\mathrm{d}x.$

288. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \operatorname{tg}^3 x\,\mathrm{d}x.$

289. $\int\limits_{1}^{3} \frac{\mathrm{d}x}{x+x^2}.$

§ 5. Некоторые физические и геометрические приложения определенного интеграла

1. Формулы площадей плоских фигур.

$$S=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

где S — площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, отрезком $[a, b]$ на оси Ox и прямыми $x=a$, $x=b$, $a<b$.

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

где S — площадь фигуры, заключенной между графиками функций $f_2(x)$ и $f_1(x)$, прямыми $x=a$ и $x=b$, $f_2(x)\geqslant f_1(x)$, $a<b$.

$$S=\int_\alpha^\beta \psi(t)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t, \tag{3}$$

где S — площадь криволинейной трапеции, верхняя граница которой задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$.

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi, \tag{4}$$

где S — площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$, и двумя полярными радиусами, составляющими с полярной осью углы α и β.

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $f(x)=1-x^2$ и $y=0$.

Решение. Можно считать, что эта фигура ограничена осью Ox, прямыми $x=-1$, $x=1$ и графиком функции $f(x)=1-x^2$ (рис. 21), поэтому, по формуле (1), ее площадь

$$S=\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,\mathrm{d}x=\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{4}{3}.$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y_1=f_1(x)=1-x^2,\ y_2=f_2(x)=x^2+2,\ x=0,\ x=1.$$

Решение. Данная фигура заключена между графиками функ-

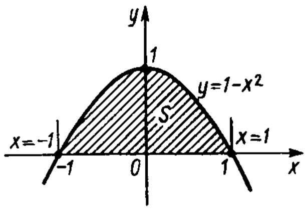


Рис. 21

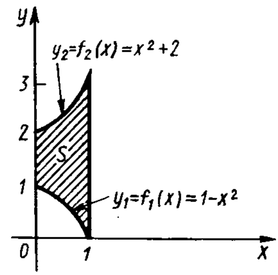


Рис. 22

ций $f_2(x)$ и $f_1(x)$, прямыми $x=0$ и $x=1$ (рис. 22). Поэтому ее площадь находим с помощью формулы (2):

$$S=\int_0^1[(x^2+2)-(1-x^2)]\,dx=\left(\frac{2}{3}x^3+x\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}.$$

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ и осью Ox (рис. 23).

Решение. По формуле (3) имеем

$$S=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\,a(1-\cos t)\,dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=a^2\left[\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi}=3\pi a^2.$$

Пример 4. Найти площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда $\rho=a\varphi$, где a — положительное число (рис. 24).

Решение. При изменении φ от 0 до 2π полярный радиус опишет кривую, ограничивающую криволинейный сектор $OABC$. Поэтому по формуле (4) имеем

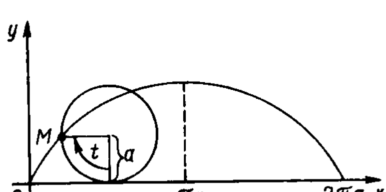


Рис. 23

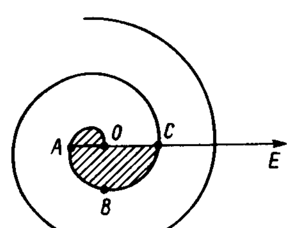


Рис. 24

$$S_{OABC}=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\varphi^2\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\,\frac{\varphi^3}{3}\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{a^2}{2}\,\frac{8\pi^3}{3}=\frac{4}{3}\,\pi^3a^2.$$

Найти площади фигур, ограниченных линиями:

290. $y=4-x^2$, $y=0$.

291. $y^2=2px$, $x=h$.

292. $y=\ln x$, $x=e$, $y=0$.

293. $y=x^2$, $y=2-x^2$.

294. $y=x^2$, $y=1$.

295. $y=\cos^2 x-\sin^2 x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi/4$.

296. $y=|x|+1$, $y=0$, $x=-2$, $x=1$.

297. $y=\sin x$, $y=x^2-\pi x$.

298. $y=\arcsin 2x$, $x=0$, $y=-\pi/2$.

299. $y=\sin 2x$, $y=1$, $x=\pi/2$, где $\pi/4\leqslant x\leqslant\pi/2$.

300. $x^2-y^2=1$, $x=2$.

301. $xy=4$, $x=4$, $y=4$, $x=0$, $y=0$.

302. $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$.

303. $y=|x^2-1|$, $y=0$, $x=-2$, $x=2$.

304. Найти площадь фигуры, заключенной между параболой $y=x^2-2x+2$, касательной к ней в точке (3; 5) и осью Oy.

305. Найти площадь фигуры, заключенной между параболой $y=-x^2+4x-3$ и касательными к ней в точках (0; −3) и (3; 0).

306. Найти площади фигур, изображенных на рис. 25—30.

2. Формулы длин дуг плоских кривых.

$$L=\int\limits_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx, \tag{5}$$

где L — длина кривой, заданной уравнением $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$.

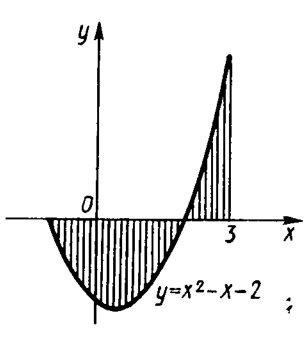


Рис. 25

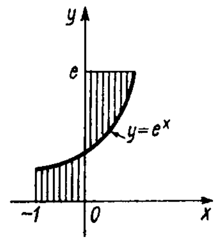


Рис. 26

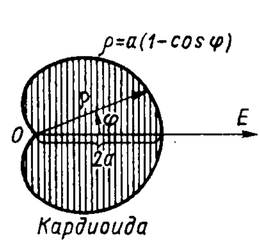


Рис. 27

$$L=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t, \tag{6}$$

где L — длина кривой, заданной параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$.

$$L=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi, \tag{7}$$

где L — длина кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$.

Пример 5. Найти длину дуги полукубической параболы $y=$ $=x^{3/2}$ от $x=0$ до $x=5$ (рис. 31).

Решение. Кривая симметрична относительно оси Ox. Найдем длину верхней ветви кривой. Из уравнения $y=x^{3/2}$ находим $y'=\frac{3}{2}x^{1/2}$. По формуле (5) получим

$$L=\int\limits_0^5\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^5\sqrt{1+\frac{9x}{4}}\,\mathrm{d}x=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{3/2}\Bigg|_0^5=\frac{335}{27}.$$

Пример 6. Найти длину дуги одной арки циклоиды:

$x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ (см. рис. 23).

Решение. Из уравнения циклоиды находим $\varphi'(t)=a(1-$ $-\cos t)$, $\psi'(t)=a\sin t$. Когда x пробегает отрезок $[0, 2\pi a]$, параметр t пробегает отрезок $[0, 2\pi]$. Следовательно, по формуле (6) имеем

$$L=\int\limits_0^{2\pi}a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=2a\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t=-4a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=8a.$$

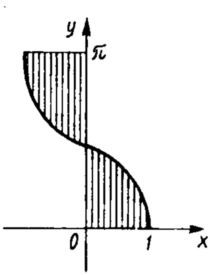


Рис. 28

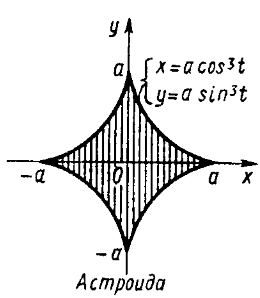


Рис. 29

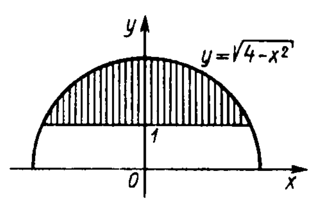


Рис. 30

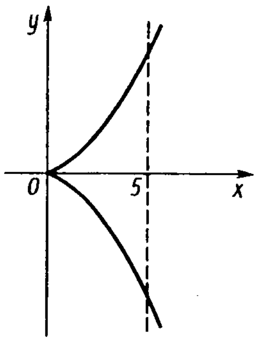


Рис. 31

Пример 7. Найти длину первого витка архимедовой спирали $\rho = a\varphi$ (см. рис. 24).

Решение. Первый виток архимедовой спирали образуется при изменении полярного угла φ от 0 до 2π. Тогда по формуле (7) получаем

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}\,d\varphi=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi.$$

Положим $u=\sqrt{\varphi^2+1}$, $du=\frac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}}d\varphi$; $dv=d\varphi$, $v=\varphi$. Тогда

$$L=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi=a\left[\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{\varphi^2}{\sqrt{\varphi^2+1}}d\varphi\right]=$$

$$=a\left[\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{\varphi^2+1-1}{\sqrt{\varphi^2+1}}d\varphi\right]=$$

$$=a\left[\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi+\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}}=\right.$$

$$=a\left[\frac{1}{2}\varphi\sqrt{\varphi^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right)\right]_0^{2\pi}=$$

$$=a\left[\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\frac{1}{2}\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right)\right].$$

Данный интеграл вычислен интегрированием по частям.

Найти длину дуги кривой:

307. $y=x^{3/2}$ от $x=0$ до $x=4$.

308. $y=x^2-1$, отсеченной осью Ox.

309. $y=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a})$ от $x=0$ до $x=a$.

310. $y=\ln\cos x$ от $x=0$ до $x=\pi/6$.

311. $y=\ln\sin x$ от $x=\pi/3$ до $x=2\pi/3$.

312. $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln x$ от $x=1$ до $x=e$.

313. $y^2=\frac{4}{9}(2-x)^3$ от $x=-1$ до $x=2$.

314. $y=x^2$ от $x=0$ до $x=2$.

315. $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$, $0\leqslant t\leqslant\pi/2$.

316. Астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ (см. рис. 29).

317. Кардиоиды $\rho=a(1-\cos\varphi)$, $a>0$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ (см. рис. 27).

3. Формулы объемов тел вращения.

$$V=\pi\int_a^b y^2(x)\,dx, \tag{8}$$

где V — объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции $0\leqslant y\leqslant f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$ вокруг оси Ox. Дифференциал переменного объема $dV=\pi y^2\,dx$.

$$V=\pi\int_c^d x^2(y)\,dy,$$

где V — объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции $0\leqslant x\leqslant\varphi(y)$, $c\leqslant y\leqslant d$ вокруг оси Oy. Дифференциал переменного объема $dV=\pi x^2\,dy$.

Пример 8. Найти объем тела, образованного вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси Ox.

Решение. Так как эллипс симметричен относительно осей координат, то достаточно найти половину искомого объема. По формуле (8) имеем

$$\frac{1}{2}V=\pi\int_0^a y^2(x)\,dx=\pi\int_0^a b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi b^2\int_0^a dx-\frac{\pi b^2}{a^2}\int_0^a x^2\,dx=$$

$$=\left(\pi b^2x-\frac{\pi b^2x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a=\pi b^2a-\frac{\pi b^2a^3}{3a^2}=\frac{2}{3}\pi ab^2.$$

Следовательно, $\frac{1}{2}V=\frac{2}{3}\pi ab^2$, откуда $V=\frac{4}{3}\pi ab^2$. Если $a=b=R$, то эллипс является окружностью. Тогда объем тела вращения окружности вокруг оси Ox есть шар, объем которого $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

Найти объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной линиями:

318. $y^2=2px$, $x=h$ вокруг оси Ox.

319. $y=4-x^2$, $y=0$, $x=0$, где $x\geqslant 0$ вокруг: 1) оси Ox; 2) оси Oy.

320. $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$ вокруг оси Ox.

321. $y=e^x$, $x=0$, $x=1$, $y=0$ вокруг: 1) оси Ox; 2) оси Oy.

322. $y=x^2+1$, $y=0$, $x=1$, $x=2$ вокруг: 1) оси Ox; 2) оси Oy.

323. $y=x^3$, $y=1$, $x=0$ вокруг: 1) оси Ox; 2) оси Oy.

324. $y=x-x^2$, $y=0$ вокруг каждой из следующих прямых: 1) $y=0$; 2) $x=0$; 3) $x=2$; 4) $x=-2$; 5) $y=-1$; 6) $y=2$.

325. $y=\ln x$, $y=0$, $x=e$ вокруг каждой из следующих прямых: 1) $y=0$; 2) $x=0$; 3) $y=-1$; 4) $x=1$; 5) $x=-1$; 6) $y=1$.

326. $y=\sin x$, $y=0$, $0\leqslant x\leqslant\pi$ вокруг каждой из следующих прямых: 1) $y=0$; 2) $x=0$; 3) $x=2\pi$; 4) $x=-1$; 5) $x=-2$; 6) $y=1$; 7) $y=-2$.

327. $x^2-y^2=4$, $y=2$, $y=0$ вокруг оси Ox.

328. $y=x$, $y=x^2$ вокруг: 1) оси Ox; 2) оси Oy.

329. $y=\cos 2x$, $y=0$, $x=0$, где $0\leqslant x\leqslant\pi/4$ вокруг: 1) оси Ox; 2) оси Oy.

330. $y=\sin x$, $y=0$, где $2\pi\leqslant x\leqslant 3\pi$ вокруг каждой из следующих прямых: 1) $y=0$; 2) $x=0$; 3) $x=\pi$; 4) $y=-2$.

331. $y=2x-x^2$, $y=0$ вокруг каждой из следующих прямых: 1) $x=0$; 2) $y=0$; 3) $x=-1$; 4) $y=1$.

332. $y=4/x$, $x=1$, $x=4$, $y=0$ вокруг: 1) оси Ox; 2) оси Oy.

333. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x=1$, $x=-1$, $y=0$ вокруг: 1) оси Ox; 2) оси Oy.

334. $y=x^2+1$, $y=3x-1$ вокруг оси Oy.

335. *Шаровым слоем* называется тело, получаемое при вращении криволинейной трапеции, ограниченной дугой окружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$, прямыми $x=a$ и $x=b$ $(-R<a<b<R)$ и осью Ox, вокруг оси Ox. Найти объем шарового слоя, вырезаемого из шара $x^2+y^2+z^2=16$ плоскостями $x=2$ и $x=3$.

336. *Шаровым сегментом* называется тело, полученное при вращении дуги окружности вокруг диаметра окружности, перпендикулярного хорде, стягивающей концы дуги. Найти объем шарового сегмента, зная радиус окружности R и высоту H сегмента — длину участка оси вращения, находящуюся внутри сегмента.

337. *Шаровым сектором* называется тело, полученное при вращении кругового сектора вокруг одного из его граничных радиусов. Найти объем шарового сектора, зная радиус шара R и высоту сектора H.

В задачах 338, 339 найти: 1) площадь фигуры, ограниченной заданными линиями; 2) объем тела, полученного вращением этой фигуры вокруг оси Ox.

338. Параболы $x=1-3y^2$ и $x=-2y^2$.

339. Кривая $y=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$ и прямые $y=0$, $x=0$ и $x=\pi/2$.

4. Формулы площадей поверхностей вращения.

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx, \qquad (9)$$

где S — площадь поверхности, образованной вращением кривой, заданной уравнением $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, вокруг оси Ox.

$$S=2\pi\int_c^d \varphi(y)\sqrt{1+\varphi'^2(y)}\,\mathrm{d}y,$$

где S — площадь поверхности, образованной вращением кривой, заданной уравнением $x=\varphi(y)$, $c\leqslant y\leqslant d$, вокруг оси Oy.

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t, \qquad (10)$$

где S — площадь поверхности, образованной вращением кривой, заданной параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$.

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta \rho\sin\varphi\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,\mathrm{d}\varphi, \qquad (11)$$

где S — площадь поверхности, образованной вращением кривой, заданной уравнением в полярных координатах $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$.

Пример 9. Часть сферы, вырезаемая двумя параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии H друг от друга, называется шаровым поясом высоты H. Найти площадь поверхности шарового пояса, если радиус шара равен R, а высота пояса равна H.

Решение. Поверхность шарового пояса можно рассматривать как поверхность тела, полученного вращением дуги окружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$, где $a\leqslant x\leqslant b$, $b-a=H$, вокруг оси Ox (рис. 32). Так как $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, то $1+[f'(x)]^2=\dfrac{R^2}{R^2-x^2}$, поэтому, согласно формуле (9),

$$S=2\pi\int_a^b\sqrt{R^2-x^2}\,\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=2\pi R\int_a^b\mathrm{d}x=2\pi R(b-a)=2\pi RH.$$

Итак, площадь поверхности S шарового пояса находится по формуле $S=2\pi RH$. Если $H\to 2R$, то в пределе получим площадь поверхности всей сферы: $S=4\pi R^2$.

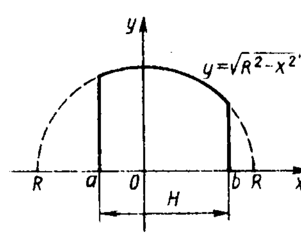


Рис. 32

Пример 10. Найти площадь S поверхности, полученной вращением циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, вокруг оси Ox (см. рис. 23).

Решение. По формуле (10) имеем

$$S=2\pi\int\limits_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{(a\sin t)^2+[a(1-\cos t)]^2}\,\mathrm{d}t=$$

$$=2\sqrt{2}\,\pi a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^{3/2}\,\mathrm{d}t=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

Пример 11. Найти площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $\rho=a(1+\cos\varphi)$ вокруг полярной оси (см. рис. 27).

Решение. Имеем $\rho'(\varphi)=-a\sin\varphi$, $\rho^2+\rho'^2=4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$. По формуле (11) получим

$$S=4\pi a^2\int\limits_0^{\pi}(1+\cos\varphi)\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi=$$

$$=16\pi a^2\int\limits_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\,\sin\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi=-32\pi a^2\int\limits_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)=$$

$$=-32\pi a^2\frac{\cos^5\varphi}{5}\bigg|_0^{\pi}=\frac{32}{5}\pi a^2.$$

Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox:

340. Дуги синусоиды $y=\sin x$ от $x=0$ до $x=\pi$.

341. Дуги кривой $y=\frac{x^3}{3}$ от $x=-2$ до $x=2$.

342. Дуги кривой $y^2=4+x$, отсеченной прямой $x=2$.

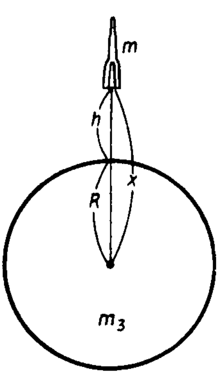


Рис. 33

343. Цепной линии $y=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a})$ от $x=0$ до $x=a$ $(a>0)$.

344. Полуокружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$.

345. Дуги кривой $y^2=4x$ от $x=0$ до $x=3$.

346. Дуги кривой $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$ от $t=0$ до $t=\pi/2$.

347. Астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

348. Заданы: парабола $x=y^2$ и прямые $y=0$, $x=a$, $a>0$. Найти: 1) площадь фигуры, ограниченной заданными кривыми; 2) объем; 3) площадь поверхности тела, образованного вращением этой фигуры вокруг оси Ox. При вычислении площади поверхности считать сначала $0<b\leqslant x\leqslant a$, а затем устремить b к 0.

5. Формула работы переменной силы.

$$A=\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x, \tag{12}$$

где A — работа переменной силы $F(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Пример 12. Определить работу A, необходимую для запуска тела массой m с поверхности Земли вертикально вверх на высоту h (рис. 33).

Решение. Обозначим через F силу притяжения тела Землей. Пусть $m_з$ — масса Земли. Согласно закону Ньютона,

$$F=G\frac{mm_з}{x^2},$$

где x — расстояние от тела до центра Земли. Полагая $Gmm_з=$ $=k$, получаем $F(x)=\frac{k}{x^2}$, $R\leqslant x\leqslant h+R$, где R — радиус Земли. При $x=R$ сила $F(R)$ равна весу тела $P=mg$, т. е. $\frac{k}{R^2}=P$, откуда $k=PR^2$, и $F(x)=\frac{PR^2}{x^2}$.

Таким образом, по формуле (12) получаем

$$A=\int_R^{R+h}F(x)\,\mathrm{d}x=PR^2\int_R^{R+h}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=-PR^2\frac{1}{x}\bigg|_R^{R+h}=\frac{PRh}{R+h}.$$

Пример 13. Определить работу A, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из прямого кругового цилиндра. Радиус основания цилиндра R, высота h.

Решение. Работа, которую необходимо затратить, чтобы поднять тело, равна произведению веса тела на высоту подъема. Введем систему координат так, как показано на рис. 34. Разобьем объем цилиндра плоскостями, параллельными основанию, расстояние между которыми равно $\mathrm{d}x$. Тогда цилиндр разобьется на отдельные элементарные цилиндры. Так как речь идет о воде, удельный вес которой равен единице, то вес цилиндрического слоя воды численно равен его объему. Поэтому вес элементарного цилиндра равен его объему $\mathrm{d}V=\pi R^2\,\mathrm{d}x$. Так как сила, которую надо приложить к этому элементарному цилиндру для поднятия его, равна его весу, то работа, которую совершает эта сила, равна

$$\mathrm{d}A=x\pi R^2\,\mathrm{d}x.$$

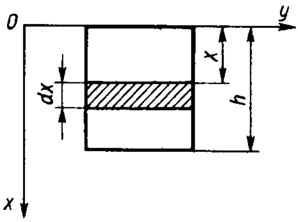


Рис. 34

Интегрируя, получим всю работу:

$$A=\pi R^2\int\limits_0^h x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi R^2h^2}{2}.$$

Разумеется, данную задачу можно решить и другим способом: сначала найти приближенное значение искомой величины в виде интегральной суммы, а затем предельным переходом получить точное значение в виде интеграла.

349. Электрический заряд e_1, помещенный в начале координат, отталкивает заряд того же знака e_2 из точки $x=a$ в точку $x=b\,(a<b)$. Определить работу силы F при перемещении заряда e_2.

350. Определить работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если известно, что сила, растягивающая пружину на x м, равна $F(x)=kx$, где k — коэффициент пропорциональности, зависящий от упругости пружины, и что для растяжения пружины на 0,01 м необходима сила 1 кг.

351. Определить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать воду из котла, имеющего форму полушара радиуса R.

352. Шар лежит на дне бассейна глубиной h. Определить работу, которую необходимо затратить, чтобы извлечь шар из воды, если его радиус равен R и если удельный вес шара и воды равен 1.

353. Определить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из резервуара, имеющего форму конуса, обращенного вершиной вниз. Высота конуса h, радиус основания R.

354. Под поршнем под давлением P_0 в цилиндре находится газ объемом V_0. Определить работу, которую необходимо затратить для уменьшения объема газа в два раза при постоянной температуре.

§ 6. Несобственные интегралы

1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования. По определению,

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{R\to+\infty}\int\limits_a^R f(x)\,\mathrm{d}x;\quad \int\limits_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{R\to-\infty}\int\limits_R^b f(x)\,\mathrm{d}x;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to-\infty} \int_{R}^{c} f(x)\,dx +$$

$$+ \lim_{R\to+\infty} \int_{c}^{R} f(x)\,dx,$$

где C — любое число. Если приведенные пределы существуют и конечны, то их называют *несобственными интегралами первого рода*. В этом случае соответствующие интегралы называют *сходящимися*. В противном случае — *расходящимися*.

Пример 1. Исследовать сходимость $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. По определению имеем

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to-\infty} \int_{R}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to-\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_{R}^{0} = \lim_{R\to-\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} R) =$$

$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

т. е. интеграл сходится.

Пример 2. Исследовать сходимость $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx$.

Решение. Полагая $c=0$, по определению имеем $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx =$

$= \int_{-\infty}^{0} e^x\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^x\,dx$; интеграл расходится, так как

$$\int_{0}^{+\infty} e^x\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{0}^{R} e^x\,dx = \lim_{R\to+\infty} e^x \Big|_{0}^{R} = \lim_{R\to+\infty} (e^R - 1) = \infty.$$

Пример 3. Исследовать сходимость $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, α — некоторое число.

Решение. 1) Если $\alpha \neq 1$, то для любого $R>0$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_1^R \frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{R\to+\infty}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^R=\lim_{R\to+\infty}\frac{R^{1-\alpha}}{1-\alpha}=\begin{cases}\dfrac{-1}{1-\alpha} & \text{при } \alpha>1,\\ \infty & \text{при } \alpha<1.\end{cases}$$

2) Если $\alpha=1$, то для любого $R>0$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_1^R \frac{dx}{x}=\lim_{R\to+\infty}\left.\ln x\right|_1^R=\lim_{R\to+\infty}\ln R=\infty.$$

Таким образом, данный интеграл сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\leqslant 1$.

2. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Если функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, b)$, интегрируема на любом отрезке $[a, b-\varepsilon]$, заключенном в $[a, b)$, и не ограничена слева от точки b (ее называют *особой*), то, по определению,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Если этот предел существует и конечен, то его называют *несобственным интегралом второго рода*, а интеграл называется *сходящимся*. В противном случае — *расходящимся*.

Аналогично, если $x=a$ — особая точка, то, по определению,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Если внутренняя точка отрезка $[a, b]$ — точка $x=c$ — особая, то, по определению,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

Наконец, если a и b — особые точки, то несобственный интеграл определяется как сумма:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx,$$

где c — любая точка из (a, b).

Пример 4. Исследовать сходимость $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ не ограничена в окрестности точки $x=1$, т. е. «обращается в бесконечность». Поэтому точка $x=1$ особая. На любом же отрезке $[0,1-\varepsilon]$ она интегрируема, так как является непрерывной функцией. Поэтому по определению имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\arcsin(1-\varepsilon)=\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, интеграл сходится.

3. Признак сходимости несобственных интегралов.

Теорема (**признак сравнения несобственных интегралов**). *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на промежутке $[a,+\infty)$ и удовлетворяют на нем условию $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$, то из сходимости интеграла*

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \tag{1}$$

следует сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{2}$$

а из расходимости интеграла (2) *следует расходимость интеграла* (1).

Пример 5. Исследовать сходимость $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(1+x)}$.

Решение. Сравним подынтегральную функцию $f(x)=\frac{1}{x^2(1+x)}$ с функцией $f(x)=\frac{1}{x^2}$ на $[1,+\infty)$. Очевидно, что

$$\frac{1}{x^2(1+x)}<\frac{1}{x^2}.$$

Но интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится, так как $\alpha=2>1$ (см. пример 3). Следовательно, согласно признаку сравнения, сходится и данный интеграл.

Аналогичный признак сравнения имеет место для несобственных интегралов второго рода.

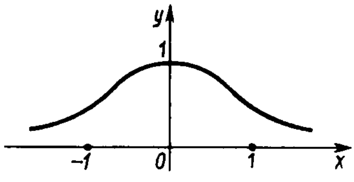


Рис. 35

Пример 6. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\frac{1}{1+x^2}$ (локон Аньези) и осью Ox (рис. 35).

Решение. Функция $y=\frac{1}{1+x^2}$ непрерывна на всей числовой прямой. Так как $\lim\limits_{x\to\infty} y=0$, то ось Ox является горизонтальной асимптотой. Следовательно, требуется найти конечную площадь бесконечной области, т. е. требуется вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. В силу симметрии фигуры относительно оси Oy имеем

$$S=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}=2\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}=2\lim_{R\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^R=2\lim_{R\to+\infty} (\operatorname{arctg} R-$$
$$-\operatorname{arctg} 0)=2\,\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Исследовать сходимость:

355. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx.$

356. $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx.$

357. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}.$

358. $\int\limits_{0}^{+\infty} \operatorname{arctg} x\,dx.$

359. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1+\ln x}{x}\,dx.$

360. $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin x\,dx.$

361. $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{x}\,dx.$

362. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^{\alpha}}.$

363. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}.$

364. $\int\limits_{0}^{1} \ln x\,dx.$

365. $\int\limits_0^1 \ln^2 x\,dx$.

366. $\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{ctg} x\,dx$.

367. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$.

368. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2}$.

369. $\int\limits_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$.

370. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$.

371. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

372. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \sin x\,dx$.

373. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$.

374. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

375. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{x^2}$.

376. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x^4}$.

377. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

378. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{x}$.

379. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$.

380. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+1}}$.

381. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

382. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$.

383. Найти площадь, заключенную между кривой $y=xe^{-x^2/2}$ и ее асимптотой при $x \geqslant 0$.

384. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y=e^{-x}$ от $x=0$ до $x=+\infty$.

385. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy площади, заключенной между линиями $xy=2$, $y=1$, $x=0$.

386. Найти объем тела, образованного вращением кривой $y=xe^{-x/2}$ вокруг ее асимптоты при $x \geqslant 0$.

387. Какую работу надо затратить, чтобы тело массы m перенести в бесконечность с поверхности Земли? Вычислить вторую космическую скорость тела, т. е. начальную скорость, при которой оно способно выйти из поля притяжения Земли.

§ 7. Приближенное вычисление определенных интегралов

1. Формула трапеций.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left\{f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right\},$$

где $f(a)=f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... , $f(x_n)=f(b)$ — равноотстоящие ординаты функции $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Погрешность формулы трапеции не больше чем

$$k\,\frac{(b-a)^3}{12n^2},$$

где k — наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a, b]$.

2. Формула Симпсона.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}(y_{2k}+4y_{2k+1}+y_{2k+2}),$$

или в развернутом виде

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}[y_0+y_{2n}+2(y_2+y_4+\dots+y_{2n-2})+$$
$$+4(y_1+y_3+\dots+y_{2n-1})].$$

Погрешность формулы Симпсона не больше чем

$$M\,\frac{(b-a)^5}{2880n^4},$$

где M — наибольшее значение $|f^{(4)}(x)|$ на отрезке $[a, b]$.

388. Вычислить по формуле трапеций для $n=10$ интеграл $I=\int_0^4 x^2\,dx$. Полученный результат сравнить с точным.

389. Вычислить по формуле трапеций для $n=10$, а по формуле Симпсона $2n=8$ интеграл $I=\int_1^2 \frac{dx}{x}$. Полученные результаты сравнить с точными.

390. Вычислить по формуле трапеций интеграл $I=\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$ с точностью до 0,01.

391. Вычислить по формуле Симпсона интеграл $I=\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$ с точностью до 0,001.

392. Вычислить по формуле Симпсона длину дуги полуволны синусоиды $y=\sin x$, разбив отрезок $[0, \pi]$ на шесть равных частей.

Глава 7

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. Определители

1. Определители второго порядка. Определение 1. *Определителем второго порядка называется число, обозначаемое символом* $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ *и определяемое равенством*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Числа a_1, a_2, b_1, b_2 называются *элементами определителя.*

Вычислить определители:

1. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$. **4.** $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$. **6.** $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta \end{vmatrix}$. **7.** $\begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix}$.

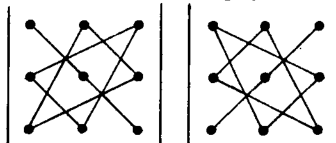
2. Определители третьего порядка. Определение 2. *Определителем третьего порядка называется число, обозначаемое символом*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

и определяемое равенством

$$\Delta = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3. \qquad (1)$$

Чтобы запомнить, какие произведения в правой части равенства (1) берутся со знаком «+», а какие со знаком «−», полезно использовать следующее правило треугольников:



+ −

Это правило позволяет легко записать формулу (1) и вычислить данный определитель.

Вычислить определители:

8. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$. **9.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$. **10.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$.

11. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$. **12.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$. **13.** $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$.

3. Свойства определителей*.

1°. *Величина определителя не изменится, если его строки и столбцы поменять местами, т. е.*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2°. *Перестановка двух столбцов или двух строк определителя равносильна умножению его на* −1.

3°. *Если определитель имеет два одинаковых столбца или две одинаковые строки, то он равен нулю.*

4°. *Умножение всех элементов одного столбца или одной строки определителя на любое число* λ *равносильно умножению определителя на это число* λ.

5°. *Если все элементы некоторого столбца или некоторой строки определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.*

6°. *Если элементы двух столбцов или двух строк определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.*

7°. *Если каждый элемент n-го столбца (n-й строки) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель*

---

*Здесь сформулированы свойства для определителей третьего порядка, хотя они присущи и определителям любого порядка.

может быть представлен в виде суммы двух определителей, из которых один в n-м столбце (n-й строке) имеет первые из упомянутых слагаемых, а другой — вторые; элементы, стоящие на остальных местах, у всех трех определителей одни и те же. Например,

$$\begin{vmatrix} a'_1+a''_1 & b_1 & c_1 \\ a'_2+a''_2 & b_2 & c_2 \\ a'_3+a''_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_1 & b_1 & c_1 \\ a'_2 & b_2 & c_2 \\ a'_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_1 & b_1 & c_1 \\ a''_2 & b_2 & c_2 \\ a''_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

8°. *Если к элементам некоторого столбца (строки) определителя прибавить соответствующие элементы другого столбца (строки), умноженные на любой общий множитель λ, то величина определителя не изменится. Например,*

$$\begin{vmatrix} a_1+\lambda b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\lambda b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\lambda b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Следующее свойство определителей связано с понятиями минора и алгебраического дополнения.

Минором некоторого элемента определителя называется определитель, получаемый из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент.

Например, минором элемента a_1 определителя Δ является определитель второго порядка $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

Алгебраическим дополнением некоторого элемента определителя называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^p$, где p — сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент. Алгебраическое дополнение элемента обозначается такой же прописной буквой, что и сам элемент.

Например, если элемент a_2 находится на пересечении первого столбца и второй строки, то для него $p=1+2=3$ и алгебраическим дополнением является

$$A_2=(-1)^3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}=b_3c_1-b_1c_3.$$

9°. *Определитель равен сумме произведений элементов какого-нибудь столбца или строки на их алгебраические дополнения, т. е.*

$$\Delta=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3,\ \Delta=a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1;$$

$$\Delta=b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3,\ \Delta=a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2;$$

$$\Delta=c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3,\ \Delta=a_3A_3+b_3B_3+c_3C_3.$$

Запись определителя в виде одного из написанных равенств называется разложением его по элементам некоторого столбца или некоторой строки.

Пример. Вычислить определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 4 & 6\\ 5 & 12 & 19\\ 3 & 9 & 17\end{vmatrix},$$

разлагая его по элементам первой строки.

Решение. Имеем

$$\Delta=2\begin{vmatrix}12 & 19\\ 9 & 17\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}5 & 19\\ 3 & 17\end{vmatrix}+6\begin{vmatrix}5 & 12\\ 3 & 9\end{vmatrix}=8.$$

10°. *Сумма произведений элементов какого-нибудь столбца или какой-нибудь строки определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца или другой строки равна нулю.*

В задачах **14—19**, не раскрывая определителей, доказать справедливость равенств:

14. $\begin{vmatrix}1 & 1 & 17\\ 2 & 2 & 15\\ 3 & 3 & 9\end{vmatrix}=0.$ **15.** $\begin{vmatrix}\sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha\\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta\\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma\end{vmatrix}=0.$

16. $\begin{vmatrix}\alpha b_1+\beta c_1 & b_1 & c_1\\ \alpha b_2+\beta c_2 & b_2 & c_2\\ \alpha b_3+\beta c_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=0.$ **17.** $\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_1+\alpha a_2 & b_1+\alpha b_2 & c_1+\alpha c_2\end{vmatrix}=0.$

18. $\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ -2 & 3 & 2\\ 4 & 5 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 2 & 7\\ -2 & 3 & -2\\ 4 & 5 & 11\end{vmatrix}.$ **19.** $\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & 1 & -5\\ 3 & 2 & 7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & -3 & 1\\ 3 & 8 & -2\end{vmatrix}.$

В задачах **20—25** вычислить определители, пользуясь только свойством 9°.

20. $\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}.$ **21.** $\begin{vmatrix}1 & 17 & -7\\ -1 & 13 & 1\\ 1 & 7 & 1\end{vmatrix}.$ **22.** $\begin{vmatrix}2 & 0 & 5\\ 1 & 3 & 16\\ 0 & -1 & 10\end{vmatrix}.$

23. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$. 24. $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$. 25. $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$.

В задачах **26—34** упростить и вычислить определители.

26. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$. 27. $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$. 28. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

29. $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$. 30. $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}$. 31. $\begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

32. $\begin{vmatrix} 2\cos^2\frac{\alpha}{2} & \sin\alpha & 1 \\ 2\cos^2\frac{\beta}{2} & \sin\beta & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. 33. $\begin{vmatrix} m+a & m-a & a \\ n+a & 2n-a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix}$. 34. $\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix}$.

35. Решить уравнения:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}=0$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$.

36. Решить неравенства:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}<1$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix}>0$.

37. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} \dfrac{x_1+x_2}{2} & \dfrac{y_1+y_2}{2} & 1 \\ \dfrac{x_1-x_2}{2} & \dfrac{y_1-y_2}{2} & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

§ 2. Исследование системы трех уравнений первой степени с тремя неизвестными

Рассмотрим систему трех уравнений первой степени с тремя неизвестными x, y, z:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=h_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=h_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=h_3 \end{cases} \qquad (1)$$

(коэффициенты a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 и свободные члены h_1, h_2, h_3 считаются заданными).

Тройка чисел x_0, y_0, z_0 называется *решением системы* (1), если в результате подстановки этих чисел вместо x, y, z все три уравнения (1) обращаются в тождество.

В дальнейшем основную роль будут играть следующие четыре определителя:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \ \Delta_x=\begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \ \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ называется *определителем системы* (1). Определители Δ_x, Δ_y, Δ_z получаются из определителя системы Δ заменой свободными членами элементов соответственно первого, второго и третьего столбцов.

Если определитель Δ системы (1) отличен от нуля ($\Delta \neq 0$), то существует, и притом единственное, решение этой системы и оно выражается формулами

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}, \ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}. \qquad (2)$$

Пример 1. Найти решения системы

$$\begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8. \end{cases}$$

Решение. Составляем определитель системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}=33.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то данная система имеет единственное решение, определяемое формулами (2). Имеем

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}4&2&1\\1&-5&3\\8&7&-1\end{vmatrix}=33,\ \Delta_y=\begin{vmatrix}1&4&1\\3&1&3\\2&8&-1\end{vmatrix}=33,\ \Delta_z=\begin{vmatrix}1&2&4\\3&-5&3\\2&7&-1\end{vmatrix}=33.$$

По формулам (2) находим:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{33}{33}=1,\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{33}{33}=1,\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{33}{33}=1.$$

Следовательно, $x=1$, $y=1$, $z=1$ — решение данной системы.

Если определитель Δ системы (1) равен нулю ($\Delta=0$) и хотя бы один из определителей Δ_x, Δ_y, Δ_z отличен от нуля, то система не имеет решения (несовместна).

Пример 2. Найти решения системы

$$\begin{cases}x+\ y+\ z=2,\\3x+2y+2z=1,\\4x+3y+3z=4.\end{cases}$$

Решение. Так как $\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\3&2&2\\4&3&3\end{vmatrix}=0$, а $\Delta_y=\begin{vmatrix}1&2&1\\3&1&2\\4&4&3\end{vmatrix}=1\neq0$, то данная система не имеет решения.

Наконец, если $\Delta=0$ и $\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$, то система (1) либо совсем не имеет решений, либо если система (1) имеет хотя бы одно решение, то она имеет бесконечно много решений.

В задачах 38—45 установить, что системы имеют единственное решение, и найти его.

38. $\begin{cases}2x-4y+3z=1,\\x-2y+4z=3,\\3x-\ y+5z=2.\end{cases}$

39. $\begin{cases}2x-\ y+\ z=2,\\3x+2y+2z=-2,\\x-2y+\ z=1.\end{cases}$

40. $\begin{cases}x+2y+3z=5,\\2x-\ y-\ z=1,\\x+3y+4z=6.\end{cases}$

41. $\begin{cases}2x-4y+9z=28,\\7x+3y-6z=-1,\\7x+9y-9z=5.\end{cases}$

42. $\begin{cases}x+2y-\ z=1,\\-3x+\ y+2z=0,\\x+4y+3z=2.\end{cases}$

43. $\begin{cases}x+2y-\ z=2,\\2x-3y+2z=2,\\3x+\ y+\ z=8.\end{cases}$

44. $\begin{cases}x+y+z=a,\\x-y+z=b,\\x+y-z=c.\end{cases}$

45. $\begin{cases}x-y+z=a,\\x+y-z=b,\\-x+y+z=c.\end{cases}$

46. Найти решения системы

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ 2x+y+z=2, \\ 3x+2y+2z=3. \end{cases}$$

47. Найти решения системы

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ 2x+2y+2z=3, \\ 3x+3y+3z=4. \end{cases}$$

48. Найти решения системы

$$\begin{cases} x-y+2z=2, \\ 2x-2y+4z=4, \\ 3x-3y+6z=3. \end{cases}$$

49. Найти решения системы

$$\begin{cases} x-y+z=2, \\ 2x-2y+2z=4, \\ 3x-3y+3z=5. \end{cases}$$

50. Определить, при каких значениях a и b система

$$\begin{cases} 3x-2y+z=b, \\ 5x-8y+9z=3, \\ 2x+y+az=-1 \end{cases}$$

1) имеет единственное решение;
2) не имеет решений;
3) имеет бесконечно много решений.

Глава 8

РЯДЫ

§ 1. Понятие числового ряда

1. Основные определения. Пусть дана числовая последовательность $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ Выражение вида

$$a_1+a_2+a_3+\dots+a_n+\dots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

называется *числовым рядом* или *просто рядом*.

Числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ называются *членами ряда*, член a_n — *общим членом ряда*.

Суммы конечного числа членов ряда

$$S_1=a_1,\ S_2=a_1+a_2,\ S_3=a_1+a_2+a_3,\ \dots,$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n, \ldots$$

называются *частичными суммами ряда* (1). Так как число членов ряда бесконечно, то частичные суммы ряда образуют бесконечную последовательность частичных сумм

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots \tag{2}$$

Ряд (1) называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм (2) сходится к какому-нибудь числу S, которое называется *суммой ряда* (1). Символически это записывается так:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \text{ или } S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Если же последовательность частичных сумм (2) расходится, то ряд (1) называется *расходящимся*.

Пример 1. Показать, что ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

сходится.

Решение. Составим частичную сумму S_n первых n членов ряда:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Чтобы упростить выражение для S_n, разложим a_n на элементарные дроби. Имеем

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1},$$

отсюда

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{(A+B)n + A}{n(n+1)}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n в числителях обеих частей равенства, получаем $A+B=0$, $A=1$, откуда $A=1$, $B=-1$, поэтому

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Слагаемые суммы S_n принимают вид

$$\frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2};\ \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3};\ \ldots;\ \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Поэтому

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Приводя подобные члены, получаем

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}.$$

Переходя к пределу, находим

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=1-0=1.$$

Таким образом, данный ряд сходится и его сумма S равна 1.

2. Необходимое условие сходимости ряда.

Теорема. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то его общий член стремится к нулю, т. е.* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

Пример 2. Доказать, что ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

который называется *гармоническим рядом*, расходится.

Решение. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, то для гармонического ряда необходимое условие сходимости выполнено. Докажем, что этот ряд расходится. Действительно, если бы этот ряд сходился, то, обозначая его сумму через S, мы бы имели

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=\lim_{n\to\infty} S_{2n}-\lim_{n\to\infty} S_n=S-S=0.$$

Но

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$$

т. е. $S_{2n}-S_n>\frac{1}{2}$. Отсюда следует, что равенство $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=0$ невозможно, т. е. гармонический ряд расходится.

Таким образом, условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ является *необходимым*, но не достаточным условием сходимости ряда.

Если же для некоторого ряда его общий член не стремится к нулю, то теорема позволяет сразу сказать, что такой ряд расходится.

В задачах 1—10 написать первые пять членов по заданному общему члену.

1. $a_n=\frac{1}{2n-1}$. 2. $a_n=\frac{1}{2^n}$. 3. $a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

4. $a_n=\frac{1}{(2n-1)3^{n-1}}$. 5. $a_n=\frac{n}{2^n(n+1)}$. 6. $a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

7. $a_n=\frac{2n-1}{4n^2+1}$. 8. $a_n=\frac{2^n}{n!}$.

9. $a_n=\frac{(2n-1)!!}{n\cdot 2^{n+1}}$ $((2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot 7...(2n-1))$.

10. $a_n=\frac{1}{2n!!}$ $(2n!!=2\cdot 4\cdot 6...2n)$.

В задачах 11—20 найти формулу для общего члена ряда.

11. $1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\dots$. 12. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 5}+\dots$.

13. $1+\frac{4}{2}+\frac{9}{6}+\frac{16}{24}+\frac{25}{120}+\dots$. 14. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\frac{1}{20}+\frac{1}{37}+\dots$.

15. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\dots$. 16. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\dots$.

17. $\frac{1}{2+3}+\frac{1}{4+3}+\frac{1}{8+3}+\frac{1}{16+3}+\dots$. 18. $1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\dots$.

19. $1+2\frac{1}{4}+2\frac{7}{9}+3\frac{1}{16}+3\frac{6}{25}+\dots$. 20. $2+10+26+82+242+730+\dots$.

В задачах 21—30, пользуясь методом, примененным в примере 1, выяснить вопрос о сходимости и найти суммы рядов.

21. $1+q+q^2+q^3+\dots$, $|q|<1$. 22. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots$.

23. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\dots$. 24. $1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{8}}+\dots$.

25. $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\dots$. 26. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\dots$.

27. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\dots$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$. 29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+\pi)(n+\pi+1)}$. 30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

В задачах 31—36 проверить, выполняется ли необходимое условие сходимости для ряда.

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$. 32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$. 33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$.

34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$. 35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$. 36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

§ 2. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости

1. Признак сравнения.

Теорема 1. *Пусть даны два ряда с неотрицательными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и для всех n выполняется неравенство $a_n \leqslant b_n$. Тогда из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Сравнением с гармоническим рядом или с убывающей прогрессией исследовать сходимость ряда.

37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. 38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n}$. 39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{2n}}$.

40. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$. 41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(2^n+1)}$. 42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$.

2. Признак Даламбера

Теорема 2. *Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$. Тогда:* а) *при $\rho<1$ ряд сходится;* б) *при $\rho>1$ ряд расходится.*

Замечание. При $\rho=1$, как показывают примеры, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ может как сходиться, так и расходиться. В этом случае необходимо дополнительное исследование ряда с помощью признака сравнения или других признаков.

С помощью признака Даламбера исследовать, сходятся или расходятся ряды.

43. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. 44. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$. 45. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

46. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$. 47. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$. 48. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

3. Интегральный признак.

Теорема 3. *Пусть дан ряд*

$$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$

члены которого являются значениями некоторой функции $f(x)$, *положительной, непрерывной и убывающей на полуинтервале* $[1, +\infty)$. *Тогда если* $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *сходится, то сходится и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$; *если же* $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *расходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *также расходится.*

С помощью интегрального признака исследовать, сходятся или расходятся ряды.

49. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} (\alpha>0)$. 50. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$. 51. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2}$.

52. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$. 53. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$. 54. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2-1}$.

4. Смешанные задачи.

Исследовать сходимость рядов.

55. $1-1+1-1+\ldots$.

56. $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots$.

57. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots$.

58. $\frac{1}{e}+\frac{1}{\sqrt{e}}+\frac{1}{\sqrt[3]{e}}+\frac{1}{\sqrt[4]{e}}+\ldots$.

59. $\frac{1}{101}+\frac{2}{104}+\frac{3}{109}+\frac{4}{116}+\ldots$.

60. $\frac{1}{13}+\frac{2}{16}+\frac{3}{19}+\frac{4}{22}+\ldots$.

61. $\frac{(1!)^2}{3!}+\frac{(2!)^2}{5!}+\frac{(3!)^2}{7!}+\frac{(4!)^2}{9!}\ldots$.

62. $\frac{2\cdot 1!}{1}+\frac{2^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{2^3\cdot 3!}{3^3}+\frac{2^4\cdot 4!}{4^4}+\ldots$.

63. $\frac{4\cdot 1!}{1}+\frac{4^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{4^3\cdot 3!}{3^3}+\frac{4^4\cdot 4!}{4^4}+\ldots$.

64. $\frac{\sqrt{1!}}{3}+\frac{\sqrt{2!}}{3^2}+\frac{\sqrt{3!}}{3^3}+\frac{\sqrt{4!}}{3^4}+\ldots$.

65. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. 66. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+n}$. 67. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

68. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n!}$. 69. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$. 70. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$.

71. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\sin n}$. 72. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$. 73. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

74. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$. 75. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{n^3}$. 76. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+3)}}$.

77. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+n^2+5}}$. 78. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n\cdot 3^n}$. 79. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n(2n-1)}$.

80. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$. 81. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$. 82. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^5}$.

83. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}$. 84. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^4}$. 85. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2}$.

§ 3. Знакопеременные ряды

1. Знакочередующиеся ряды.

Признак Лейбница. Теорема 1. *Если абсолютные величины членов знакочередующегося ряда*

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n+1}a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n\quad(a_n>0)$$

монотонно убывают: $a_1>a_2>a_3>\ldots$ *— и общий член ряда стремится к нулю:* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ *— , то ряд сходится.*

Пример 1. Ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ сходится, так как удовлетворяет условиям признака Лейбница: 1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

2. Абсолютная и условная сходимости рядов. Ряд с членами произвольных знаков называется знакопеременным.

Возьмем какой-нибудь знакопеременный ряд

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n, \tag{1}$$

где числа a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... могут быть как положительными, так и отрицательными, причем их расположение в ряде произвольно. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1):

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots+|a_n|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|. \tag{2}$$

Теорема 2. *Если ряд* (2) *сходится, то сходится и ряд* (1). *Ряд* (1) *в этом случае называется абсолютно сходящимся.*

Если ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится, то ряд (1) называется *условно сходящимся.*

Пример 2. Ряд $1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots$, согласно теореме 2, абсолютно сходящийся, так как сходится ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда: $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+$ $+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$ (см. задачу 49).

Пример 3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ условно сходящийся, так как он, согласно признаку Лейбница, сходится (см. пример 1), а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, составленный из абсолютных величин его членов, расходится (гармонический ряд).

Так как ряд (2) является рядом с положительными членами, то для исследования вопроса о его сходимости можно применять рассмотренные ранее признаки сходимости: признаки сравнения, Даламбера, интегральный признак и др.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

86. $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}+\ldots$.

87. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+\ldots$.

88. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$. **89.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$. **90.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}}$.

91. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$. **92.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt[3]{n}}{n+2}$. **93.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^{10}}{e^n}$.

94. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. **95.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2n}{3n+2}$. **96.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{10n+1}$.

97. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n}$. **98.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln^3 n}$. **99.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n-1)^2}{n^2+1}$.

100. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$. **101.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^5}}$. **102.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 5^n}$.

§ 4. Степенные ряды

1. Определение и общие замечания. Интервал сходимости. Ряд вида

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \qquad (1)$$

называется *степенным рядом.*

Числа a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... называются *коэффициентами степенного ряда.*

Придавая x различные числовые значения, будем получать различные числовые ряды, которые могут оказаться сходящимися или расходящимися. Множество тех значений x, при которых ряд (1) сходится, называется областью его сходимости.

Очевидно, что частичная сумма степенного ряда $S_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ является функцией переменной x. Поэтому и сумма ряда S также является некоторой функцией переменной x, определенной в области сходимости ряда: $S=S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ (или $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$).

Число R называется *радиусом сходимости ряда* (1), если при $|x|<R$ ряд сходится, а при $|x|>R$ — расходится. Интервал $(-R, R)$ в этом случае называется *интервалом сходимости ряда* (1). Если ряд (1) сходится на всей числовой прямой, то пишут $R=\infty$; если он сходится только при $x=0$, то пишут $R=0$.

При $x=\pm R$ ряд (1) может либо сходиться, либо расходиться. Этот вопрос решается для каждого конкретного ряда.

Радиус сходимости можно найти по формуле $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, если соответствующий предел существует.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots .$$

Это степенной ряд, все коэффициенты его, за исключением a_0, отличны от нуля. Найдем радиус и интервал сходимости данного ряда. Здесь $a_n=\dfrac{1}{n}$ и $a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$. Поэтому

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Следовательно, радиус сходимости $R=1$ и ряд сходится на интервале $(-1,1)$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости, т. е. в точках $x=\pm 1$. При $x=1$ получаем гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, а при $x=-1$ — ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$, который сходится в силу признака Лейбница. Таким образом, данный ряд сходится в любой точке полуинтервала $[-1, 1)$ и расходится вне его.

Найти радиус и интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на границах интервала.

103. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. **104.** $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$. **105.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n-1}}{n}$. **106.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n^2}$.

107. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n$. **108.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{3^{n-1}}$. **109.** $1+\frac{2x}{3^2\sqrt{3}}+\frac{4x^2}{5^2\sqrt{3^2}}+\frac{8x^3}{7^2\sqrt{3^3}}+\dots$.

110. $1+\frac{2x}{\sqrt{5\cdot 5}}+\frac{4x^2}{\sqrt{9\cdot 5^2}}+\frac{8x^3}{\sqrt{13\cdot 5^3}}+\dots$. **111.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$.

112. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$. **113.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

114. $1-\frac{x}{5\sqrt{2}}+\frac{x^3}{5^2\sqrt{3}}-\frac{x^5}{5^3\sqrt{4}}+\dots$.

115. $1-\frac{x^2}{3\cdot 2\sqrt{2}}+\frac{x^4}{3^2\cdot 3\sqrt{3}}-\frac{x^6}{3^3\cdot 4\sqrt{4}}+\dots$.

116. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1)2^n}$. **117.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n+1}}{n+1}$. **118.** $\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n$.

2. Разложение функций в степенные ряды. Если функция $f(x)$ на интервале $(-R, R)$ разлагается в степенной ряд

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots, \tag{2}$$

то коэффициенты этого ряда определяются по формулам

$$a_0=f(0),\ a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Подставляя выражения коэффициентов в равенство (2), получаем

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots. \tag{3}$$

Ряд, стоящий в правой части формулы (3), называется *рядом Маклорена* для функции $f(x)$.

При разложении функций в степенные ряды часто используются разложения в ряд Маклорена следующих функций:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots,\ |x|<+\infty; \tag{4}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \ |x| < +\infty;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \ |x| < +\infty; \tag{5}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots, \ -1 < x \leqslant 1; \tag{6}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots[\alpha-(n-1)]}{n!} x^n + \ldots, \ -1 < x < 1, \tag{7}$$

где α — любое вещественное число.

Пример 1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = e^x$, т. е. проверить справедливость формулы (4).

Решение. Имеем $f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x$, откуда при $x = 0$ получаем $f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 1$. Подставляя полученные значения в формулу (3), находим

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots .$$

Так как

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)}{n!} = \infty,$$

то ряд сходится на всей числовой прямой.

Пример 2. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = e^{-x^2}$.

Решение. Воспользуемся формулой (4). Положим $t = -x^2$, тогда $e^{-x^2} = e^t$. Имеем

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots .$$

При $t = -x^2$ находим искомое разложение

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \ldots,$$

справедливое, очевидно, для всех значений x.

Пример 3. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \cos^2 x$.

Решение. Имеем $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$. Используя формулу (5), запишем разложение функции $\cos 2x$, заменив там x на $2x$:

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

или

$$\cos 2x = 1 - \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^4x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!} + \ldots .$$

Таким образом,

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left[1 + \left(1 - \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^4x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right)\right].$$

Окончательно

$$\cos^2 x = 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{8x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} + \ldots .$$

Полученный ряд сходится при всех x.

Пример 4. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$.

Решение. Имеем $\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$. Воспользовавшись формулой (6), можем записать:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots ,$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots .$$

Отсюда получаем

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

$$-\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots\right).$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, находим искомое разложение:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \ldots + \frac{2x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots .$$

Очевидно, ряд сходится в интервале $(-1, 1)$.

Пример 5. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Решение. Имеем $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-1/2}$. Воспользовавшись формулой (7), получим разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1\cdot x}{2\cdot 1!}+\frac{1\cdot 3x^2}{2^2\cdot 2!}-\frac{1\cdot 3\cdot 5x^3}{2^3\cdot 3!}+\ldots+\frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)x^n}{2^n\cdot n!}+\ldots,$$

справедливое для интервала $(-1, 1)$.

В заключение отметим, что в ряде случаев рассматриваются степенные ряды более общего вида:

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n,$$

которые приводятся к виду (1) заменой переменной $x-a=t$.

Разложить в ряд Маклорена и найти интервалы сходимости функций.

119. $f(x)=a^x$, $0<a\neq 1$.

120. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$.

121. $f(x)=x^2e^{-2x}$.

122. $f(x)=\sin x^2$.

123. $f(x)=\sin^2 x$.

124. $f(x)=x^3\cos x$.

125. $f(x)=\ln(1-x^2)$.

126. $f(x)=\ln(1+2x^2)$.

127. $f(x)=\ln^5\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

128. $f(x)=\ln\dfrac{1+3x}{1-3x}$.

129. $f(x)=\ln(1+5x)$.

130. $f(x)=\ln(5+2x)$.

131. $f(x)=\ln(x^2-3x+2)$.

132. $f(x)=\ln(x^2-5x+4)$.

133. $f(x)=\ln(x^2-10x+9)$.

134. $f(x)=\ln(6+x-x^2)$.

135. $f(x)=\sqrt{1+x^2}$.

136. $f(x)=\sqrt[5]{1+x}$.

137. $f(x)=\sqrt[3]{27+x}$.

138. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

139. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

140. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9+x^2}}$.

141. $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$.

142. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^4}$.

143. $f(x)=\dfrac{1}{1+2x}$.

144. $f(x)=\dfrac{3}{4-x}$.

145. $f(x)=\dfrac{1}{3+2x}$.

146. $f(x)=\dfrac{1}{2+3x^2}$.

147. $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x+2}$.

148. $f(x)=\dfrac{7-2x}{x^2-7x+12}$.

149. $f(x)=\dfrac{5x-1}{x^2-5x+6}$.

150. $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2-4x+3}$.

§ 5. Ряды Фурье

1. Определение. *Рядом Фурье функции $f(x)$, определенной и интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$, называется ряд*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{1}$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.$$

Если ряд (1) является рядом Фурье функции $f(x)$, то пишут

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{2}$$

Если $f(x)=f(-x)$, т. е. $f(x)$ — функция четная, то $b_n=0$ и

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

Если $f(x)=-f(-x)$, т. е. $f(x)$ — функция нечетная, то $a_n=0$ и

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\,\mathrm{d}x.$$

2. Ряд Фурье с периодом $2l$.

Теорема. *Если функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ — непрерывные функции на отрезке $[-l, l]$ (l — произвольное положительное число) или же имеют на нем конечное число точек разрыва I рода, то во всех точках $x\in(-l, l)$, в которых $f(x)$ непрерывна, сумма ряда равна $f(x)$ и справедливо разложение*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{3}$$

где

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,\mathrm{d}x,\ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,$$

а в каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна $(f(x_0-)+f(x_0+))/2$ и на концах отрезка сумма ряда равна $(f(-l)+f(l))/2$.

В дальнейшем предполагается, что рассматриваемые функции удовлетворяют условиям этой теоремы.

Замечание. Ряд (1) является частным случаем ряда (3), он получается из (3) при $l=\pi$.

Пример. Разложим в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } -\pi\leqslant x<0, \\ -1, & \text{если } \quad 0\leqslant x\leqslant\pi. \end{cases}$$

Решение. Имеем:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1\cdot dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-1)\,dx=\frac{1}{\pi}x\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{\pi}x\Big|_{0}^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi}[0-(-\pi)]-\frac{1}{\pi}[\pi-0]=1-1=0;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,dx-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}=-\frac{1}{\pi n}(\cos 0-\cos n\pi)+$$

$$+\frac{1}{\pi n}(\cos n\pi-\cos 0)=\frac{2}{\pi n}(\cos n\pi-\cos 0)=\frac{2}{\pi n}[(-1)^n-1].$$

При четных n выражение в квадратной скобке равно нулю, а при нечетных n оно равно -2. Поэтому $b_n=-\frac{4}{\pi n}(n=1, 3, 5...)$.

Таким образом, $a_0=0$, $a_n=0$, $b_{2n}=0$, $b_{2n-1}=-\frac{4}{\pi(2n-1)}$. На основании формулы (2)

$$f(x)=-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

В развернутом виде этот ряд запишется так:

$$f(x)=-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots\right).$$

Точкой разрыва является точка $x=0$. На основании теоремы в ней сумма ряда равна $\frac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}=\frac{f(0-)+f(0+)}{2}=\frac{1+(-1)}{2}=0$ и на концах отрезка сумма ряда равна $\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}=\frac{1+(-1)}{2}=0$, т. е. сумма ряда не совпадает со значениями функции $f(x)$. Следовательно, кроме точки $x=0$ полученный ряд сходится к функции $f(x)$ во всех точках $x\in(-\pi,\ \pi)$, в которых $f(x)$ непрерывна.

Указание. Обратите внимание на то, что функция нечетная, поэтому все коэффициенты ее $a_n=0$ и их можно было не вычислять.

На отрезке $[-\pi,\ \pi]$ разложить в ряд Фурье функции.

151. $f(x)=\sin x$.

152. $f(x)=x$.

153. $f(x)=x^2$.

154. $f(x)=x^3$.

155. $f(x)=x+\pi$.

156. $f(x)=x-\pi$.

157. $f(x)=2x+3$.

158. $f(x)=2-3x$.

159. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 1, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$

160. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ x, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$

161. $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$

162. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ \sin x, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$

163. $f(x)=\begin{cases}\pi, & -\pi\leqslant x<0,\\ \pi-x, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$

164. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ \frac{1}{4}\pi x, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$

165. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ \frac{1}{4}(\pi x-1), & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$

166. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ x^2, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$

На отрезке $[-l,\ l]$ разложить в ряд Фурье функции.

167. $f(x)=x$.

168. $f(x)=|x|$.

169. $f(x)=\begin{cases}1, & -l\leqslant x\leqslant 0,\\ -1, & 0<x\leqslant l.\end{cases}$

170. $f(x)=\begin{cases}0, & -l\leqslant x\leqslant 0,\\ x, & 0<x\leqslant l.\end{cases}$

Глава 9

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Введение комплексных чисел вызвано тем, что в множестве вещественных чисел не выполнено извлечение корня четной степени из отрицательного числа.

Определение. *Комплексным числом z называется упорядоченная пара вещественных чисел $(x;\ y)$, т. е. $z=(x;\ y)$. При этом*

x называется вещественной, а y — мнимой частью комплексного числа.

Комплексное число $z=(x;\ y)$ изображается на плоскости Oxy точкой с координатами $(x;\ y)$. Плоскость Oxy в этом случае называется *условно комплексной плоскостью.*

Комплексное число $(x;\ y)$ при $y\neq 0$ называется *мнимым*. Мнимое число $(0;\ y)$ называется *чисто мнимым*, а чисто мнимое число $(0;\ 1)$ — *мнимой единицей* и обозначается буквой i, т. е. $i=(0;\ 1)$. По определению полагают $(x;\ 0)=x$, $(0;\ y)=iy$, $(0;\ 0)=0$.

Действия над комплексными числами. Пусть $z_1=(x_1;\ y_1)$ и $z_2=(x_2;\ y_2)$ — два комплексных числа. Тогда *суммой* комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z=(x_1+x_2;\ y_1+y_2);$$

разностью — комплексное число

$$z=(x_1-x_2;\ y_1-y_2);$$

произведением — комплексное число

$$z=(x_1x_2-y_1y_2;\ x_1y_2+x_2y_1);$$

частным — комплексное число

$$z=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2};\ \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right),\ z_2\neq 0.$$

Пример 1. Доказать, что $i^2=-1$.

Решение. В силу определения произведения комплексных чисел имеем $i^2=i\cdot i=(0;\ 1)\cdot(0;\ 1)=(-1;\ 0)=-1$, что и требовалось доказать.

Алгебраическая форма комплексного числа. Любое комплексное число $z=(x;\ y)$ можно представить в виде

$$z=(x;\ y)=(x;\ 0)+(0;\ y)=(x;\ 0)+(y;\ 0)\cdot(0;\ 1)=x+iy$$

и производить над комплексными числами действия по обычным правилам алгебры многочленов. Запись $z=x+iy$ называется *алгебраической формой комплексного числа.*

Пример 2. Найти сумму чисел $z_1=2+i$ и $z_2=3-i2$.

Решение. Имеем

$$z_1+z_2=(2+i)+(3-i2)=(2+3)+i(1-2)=5-i.$$

Пример 3. Разделить число $z_1=2+i3$ на число $z_2=1+i4$.

Решение. Практически деление комплексных чисел выполняется по следующему правилу:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+i3}{1+i4}=\frac{(2+i3)(1-i4)}{(1+i4)(1-i4)}=\frac{14-i5}{17}=\frac{14}{17}-i\frac{5}{17}.$$

Комплексное число $\bar{z}=(x;\ -y)=x-iy$ называется *комплексно-сопряженным* числу $z=(x;\ y)=x+iy$ и изображается на комплексной плоскости точкой, симметричной точке z относительно оси Ox.

Пример 4. Решить уравнение $x^2+2x+2=0$.

Решение. Применив к данному уравнению известное правило нахождения корней квадратного уравнения, получим

$$x_{1,\,2}=-1\pm\sqrt{-1}=-1\pm i.$$

Данное уравнение вещественных корней не имеет; его корни комплексно-сопряженные, т. е. $x_1=-1+i$, $x_2=-1-i$.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Комплексное число $z=x+iy$ определяется упорядоченной парой вещественных чисел $(x;\ y)$. По формулам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, связывающим полярные и прямоугольные координаты (см. рис. 7), получим тригонометрическую форму записи комплексного числа $z=x+iy$:

$$z=\rho\,(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Число ρ называется *модулем*, а число φ — *аргументом* комплексного числа z. Они обозначаются так: $\rho=|z|$, $\varphi=\mathrm{Arg}\,z$, причем аргумент φ определен с точностью до слагаемого $2\pi n$ ($n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$), а модуль имеет значение $\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Пример 5. Представить в тригонометрической форме число $z=i$.

Решение. Для $z=i$ имеем: $x=0$, $y=1$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}=1$, $\cos\varphi=\dfrac{x}{\rho}=\dfrac{0}{1}=0$, $\sin\varphi=\dfrac{y}{\rho}=\dfrac{1}{1}=1$. Этим значениям косинуса и синуса соответствует значение аргумента $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$. Следовательно, $z=i=$ $=1\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$.

Пусть $z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$. Тогда умножение и деление комплексных чисел z_1 и z_2 определяются по формулам

$$z_1\cdot z_2=\rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)];$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)].$$

Пусть $z=\rho\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Тогда возведение в степень и извлечение корня n-й степени (n — целое положительное число) осуществляется по формулам

$$z^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi);\qquad(1)$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \quad (2)$$

В частности, если в формуле (1) положить $\rho=1$, то получим формулу

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi,$$

которая называется *формулой Муавра*.

Выполнить действия:

1. $(2+i3)(3-i2)$.
2. $(a+ib)(a-ib)$.
3. $(3-i2)^2$.
4. $(1+i)^3$.
5. $\frac{1+i}{1-i}$.
6. $\frac{2i}{1+i}$.
7. $(5+i2)+(3-i4)$.
8. $(5+i2)(3-i4)$.
9. $\frac{1+i2}{2+i3}$.
10. $\frac{4+i3}{5-i2}$.
11. $\frac{z_1z_2}{z_3}$, $z_1=2+i$, $z_2=2-i$, $z_3=4-3i$.
12. $\frac{z_1}{z_2z_3}$, $z_1=1+i$, $z_2=\sqrt{3}+i$, $z_3=1+i\sqrt{3}$.
13. Решить уравнения: 1) $x^2+25=0$; 2) $x^2-2x+2=0$; 3) $x^2-2x+5=0$; 4) $x^2+4x+13=0$; 5) $x^3-8=0$; 6) $x^4+4=0$ — и проверить подстановкой корней в уравнение.

Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

14. 1.
15. -1.
16. $-i$.
17. 5.
18. $2+i2\sqrt{3}$.
19. $3+i3$.
20. -2.
21. $i6$.
22. $-i3$.
23. $1-i\sqrt{3}$.
24. $1+i\sqrt{3}$.
25. $\sqrt{3}+i3$.
26. $-3+i\sqrt{3}$.
27. $-1-i\sqrt{3}$.
28. $\sqrt{3}-i$.
29. $1+i$.
30. $1-i$.
31. $-1+i$.
32. $\frac{1}{i}$.
33. $\frac{i-1}{1+i}$.
34. $\frac{2}{1+i\sqrt{3}}$.

Найти все значения корней:

35. $\sqrt[3]{-1}$.
36. $\sqrt[3]{1}$.
37. $\sqrt[3]{i}$.
38. $\sqrt[4]{-1}$.
39. $\sqrt[6]{1}$.
40. $\sqrt{i}$.
41. $\sqrt{1+i}$.
42. $\sqrt{-3-i\sqrt{3}}$.
43. $\sqrt[3]{-1+i}$.

Вычислить:

44. $(\cos 9^\circ+i\sin 9^\circ)^{10}$. 45. $(\cos 10^\circ+i\sin 10^\circ)^{27}$. 46. $(1+i)^{10}$.
47. $(1-i\sqrt{3})^6$. 48. $(-1+i)^5$. 49. $(\sqrt{3}+i)^3$.
50. $(1-i)^6$. 51. $(2+i\sqrt{12})^5$. 52. $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}$.

Предел последовательности комплексных чисел. Пусть дана последовательность комплексных чисел

$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots,\ z_n,\ \ldots,$$

где $z_n = x_n + iy_n \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$.

Комплексное число $a = x_0 + iy_0$ называется *пределом последовательности* $\{z_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N, такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|z_n - a| < \varepsilon$. Последовательность $\{z_n\}$ в этом случае называется *сходящейся к числу* a, что записывается в виде $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ или $z_n \to a$ при $n \to \infty$.

Необходимым и достаточным условием сходимости последовательности $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ является сходимость последовательностей вещественных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

Найти пределы последовательностей:

53. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n}{n+1} + i\,\dfrac{2n^2+n}{3n^2-1}\right)$.

54. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3}{n^2+1} - \dfrac{3n^2}{3n+1} + i\,\dfrac{5\cdot 3^n}{3^n-2}\right)$.

55. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2} + i\,\dfrac{n}{5n+11}\right)$.

56. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\sin\dfrac{2}{n} + i\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]$.

57. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} + i\left(1-\dfrac{5}{n}\right)^n\right]$.

58. $\lim\limits_{n\to\infty}\{n[\ln(n+3) - \ln n] + i\}$.

59. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n - i\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^{-n}\right]$.

60. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^2\left(1-\cos\dfrac{3}{n}\right) + i\,(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n})\sin\dfrac{1}{n}\right]$.

61. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{n} = a$.

Числовые ряды с комплексными членами. Ряд вида

$$z_1+z_2+\ldots+z_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} z_n, \tag{3}$$

где $z_n=x_n+iy_n$, называется *числовым рядом с комплексными членами*.

Необходимым и достаточным условием сходимости ряда (3) является сходимость рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

Ряд (3) сходится, если сходится ряд, составленный из модулей его членов, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n^2+y_n^2}$. В этом случае ряд (3) называется *абсолютно сходящимся*.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+i\frac{1}{3^n}\right)$.

Решение. Рассмотрим ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$. Оба ряда сходятся, так как являются геометрическими прогрессиями со знаменателями $q={}^1/_2<1$ и $q={}^1/_3<1$. Следовательно, данный ряд также сходится.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+i\frac{1}{n}\right)$.

Решение. Данный ряд расходится, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ является гармоническим, который, как известно, расходится.

Пример 8. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n+i\cos n}{n^3}$.

Решение. Имеем
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n+i\cos n}{n^3}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ сходится (см. задачу 49 гл. 8), поэтому и данный ряд сходится, причем абсолютно.

Исследовать на сходимость ряды:

62. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}+i\frac{1}{5^n}\right)$.

63. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+i\frac{1}{5^n}\right)$.

64. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{5^n}+\frac{i}{6^n}\right)$.

65. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{i}{7^n}\right)$.

66. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2^n}-i\frac{\sin\frac{1}{n}}{n}\right)$.

67. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n}+i\frac{2^n}{n!}\right)$.

68. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}+i\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}\right)$.

69. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}+i\cos\frac{1}{2n}\right)$.

70. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{i}{n^3}\right)$.

71. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^5}}+i\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right)$.

72. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{n+3}+i\frac{n-1}{3n+1}\right)$.

73. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{1+2^{2n}}+i\frac{1}{n^2+3}\right)$.

74. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n(n+3)}}+i\frac{2^n}{n(2^n+1)}\right]$.

75. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n!}$.

76. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$.

77. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2+i)^n}{2^n}$.

Степенные ряды с комплексными членами. Ряд вида

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n, \tag{4}$$

где z — комплексная переменная; a_n — комплексные числа, называется *степенным рядом*.

Радиус R сходимости степенного ряда (4) определяется по формуле $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Если ряд сходится только в точке $z=0$, то полагают $R=0$, если же ряд сходится при любой значении z, т. е. на всей комплексной плоскости, то считают $R=\infty$.

Пример 9. Найти радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$.

Решение. Так как $a_n=\frac{1}{n}$, $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$, то

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}:\frac{1}{n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

Следовательно, ряд сходится, когда $|z|<1$, т. е. в круге радиуса $R=1$ с центром в начале координат.

Пример 10. Найти радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$.

Решение. Так как $a_n=\frac{1}{n!}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$, то

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\,n!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Следовательно, ряд сходится при любом значении z.

Найти радиусы сходимости следующих рядов:

78. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$. **79.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{3^n}z^n$. **80.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\,z^n$.

81. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}3^nz^n$. **82.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$. **83.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(3^n+n)\,z^n$.

84. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$. **85.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{\ln n}z^n$. **86.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+a^n)\,z^n$.

87. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n!}z^n$. **88.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3in}{n^2+1}z^n$. **89.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3i)^{n+1}}{\sqrt{n}}z^n$.

Глава 10

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Прямоугольная система координат в пространстве

Прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве определяется заданием масштабной единицы измерения длин и трех пересекающихся в одной точке O взаимно перпендикулярных осей: Ox, Oy и Oz. Точка O — *начало координат*, Ox — *ось абсцисс*, Oy — *ось ординат*, Oz — *ось аппликат*.

Пусть M — произвольная точка пространства (рис. 36). Проведем через точку M три плоскости, перпендикулярные координатным осям Ox, Oy и Oz. Точки пересечения плоскостей с осями обозначим соответственно через M_x, M_y и M_z. Прямоугольными координатами точки M называются числа

$$x=OM_x,\quad y=OM_y,\quad z=OM_z,$$

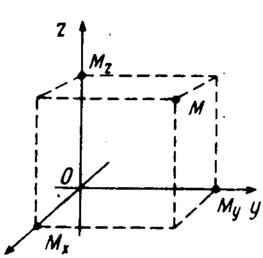


Рис. 36

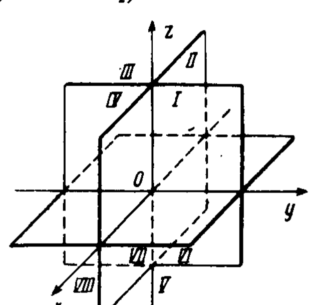


Рис. 37

т. е. величины направленных отрезков $\overline{OM_x}$, $\overline{OM_y}$, $\overline{OM_z}$; при этом x называется *абсциссой*, y — *ординатой*, а z — *аппликатой* точки M. Символ $M(x;\ y;\ z)$ обозначает, что точка M имеет координаты x, y, z.

Таким образом, при выбранной системе координат каждой точке M пространства соответствует единственная упорядоченная тройка чисел $(x;\ y;\ z)$ — ее прямоугольные координаты и, обратно, каждой упорядоченной тройке чисел $(x;\ y;\ z)$ соответствует, и притом одна, точка M в пространстве.

Плоскости Oxy, Oyz, Oxz называются *координатными плоскостями*. Они делят все пространство на восемь частей, называемых *октантами*, которые нумеруют так, как показано на рис. 37.

1. Даны точки $A(4;\ 3;\ 5)$, $B(-3;\ 2;\ 1)$, $C(2;\ -3;\ 0)$ и $D(0;\ 0;\ 3)$. Найти координаты их проекций: 1) на плоскость Oxy; 2) на плоскость Oxz; 3) на плоскость Oyz; 4) на ось абсцисс; 5) на ось ординат; 6) на ось аппликат.

2. Найти координаты точек, симметричных точкам $A(2;\ 3;\ 1)$, $B(5;\ -3;\ 2)$, $C(-3;\ 2;\ -1)$ и $D(a;\ b;\ c)$ относительно: 1) плоскости Oxy; 2) плоскости Oxz; 3) плоскости Oyz; 4) оси абсцисс; 5) оси ординат; 6) оси аппликат; 7) начала координат.

3. В каких октантах могут быть расположены точки, координаты которых удовлетворяют одному из следующих уравнений: 1) $x-y=0$; 2) $x+y=0$; 3) $x-z=0$; 4) $x+z=0$; 5) $y-z=0$; 6) $y+z=0$?

4. В каких октантах могут быть расположены точки, если: 1) $xy>0$; 2) $xz<0$; 3) $yz>0$; 4) $xyz>0$; 5) $xyz<0$?

5. Даны следующие четыре вершины куба: $A(-1;\ -1;\ -1)$, $B(1;\ -1;\ -1)$, $C(-1;\ 1;\ -1)$ и $D(1;\ 1;\ 1)$. Определить его остальные вершины.

§ 2. Понятие вектора

Определение 1. *Направленный отрезок $\overline{AB}$ называется вектором.*

Буква A означает начало вектора, а буква B — его конец. Вектор также обозначают и одной буквой с черточкой наверху, например $\bar{a}$. Направление вектора на рисунке указывают стрелкой (рис. 38).

Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется *нулевым* и обозначается $\bar{0}$ или просто 0.

Длина вектора обозначается $|\overline{AB}|$ или $|\bar{a}|$. Если $|\bar{a}|=1$, то вектор $\bar{a}$ называется *единичным*.

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Нулевой вектор направлен одинаково с любым вектором; длина его равна нулю, т. е. $|\bar{0}|=0$.

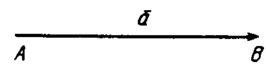


Рис. 38

Определение 2. *Векторы* $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ *называются равными* ($\bar{a}=\bar{b}$), *если они коллинеарны, одинаково направлены и их длины равны.*

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось u называется величина $A'B'$ направленного отрезка $A'B'$ на оси u, где A' — проекция точки A на ось u, а B' — проекция точки B на эту ось. Обозначение: $\text{пр}_u\overline{AB}$.

Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось u определяется формулой

$$\text{пр}_u\overline{AB}=|\overline{AB}|\cos\varphi, \tag{1}$$

где φ — угол между вектором $\overline{AB}$ и осью u.

Пусть $X=\text{пр}_x\overline{AB}$, $Y=\text{пр}_y\overline{AB}$, $Z=\text{пр}_z\overline{AB}$. Проекции X, Y, Z вектора $\overline{AB}$ на оси координат называют его *координатами*. При этом пишут

$$\overline{AB}=\{X;\ Y;\ Z\}.$$

Каковы бы ни были две точки A (x_1; y_1; z_1) и B (x_2; y_2; z_2), координаты вектора $\overline{AB}$ определяются следующими формулами:

$$X=x_2-x_1,\quad Y=y_2-y_1,\quad Z=z_2-z_1. \tag{2}$$

Пусть дан произвольный вектор $\bar{a}=\{X;\ Y;\ Z\}$. Формула

$$|\bar{a}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} \tag{3}$$

выражает длину произвольного вектора через его координаты. Обозначим через α, β, γ углы между вектором $\bar{a}$ и осями координат (рис. 39). Из формул (1) и (3) получаем:

$$\cos\alpha=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\quad \cos\beta=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\quad \cos\gamma=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}; \tag{4}$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\bar{a}$. Возводя в квадрат левую и правую части каждого из равенств (4) и суммируя полученные результаты, имеем

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1, \tag{5}$$

т. е. сумма квадратов направляющих косинусов любого вектора равна 1.

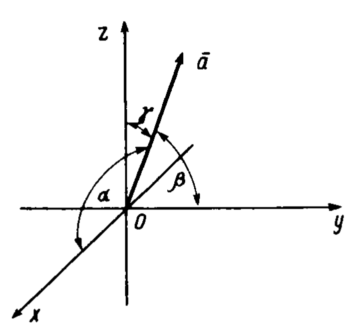


Рис. 39

Пример. Даны точки A (1; 2; 3) и B (3; 5; 9). Найти координаты вектора $\overline{AB}$, его длину и направляющие косинусы. Проверить формулу (5).

Решение. По формулам (2) находим $X=3-1=2$, $Y=5-2=3$, $Z=9-3=6$. Следовательно, $\overline{AB}=$

$=\{X;\ Y;\ Z\}=\{2;\ 3;\ 6\}$. Далее, используя соответственно формулы (3) и (4), получим

$$|\overline{AB}|=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=7,\quad \cos\alpha=\frac{2}{7},\quad \cos\beta=\frac{3}{7},\quad \cos\gamma=\frac{6}{7},$$

при этом $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=(2/7)^2+(3/7)^2+(6/7)^2=1$.

6. Даны точки A (3; −1; 2) и B (−1; 2; 1). Найти координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$.

7. Даны точки A (1; 2; 3) и B (3; −4; 6). Найти длину и направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$.

8. Найти длину вектора $\bar{a}=\{20;\ 30;\ -60\}$ и его направляющие косинусы.

9. Даны две координаты вектора: $X=4$, $Y=-12$. Определить его третью координату Z при условии, что $|\bar{a}|=13$.

10. Определить начало вектора $\bar{a}=\{2;\ -3;\ -1\}$, если его конец совпадает с точкой (1; −1; 2).

11. Определить точку N, с которой совпадает конец вектора $\bar{a}=\{3;\ -1;\ 4\}$, если его начало совпадает с точкой M (1; 2; −3).

12. Вычислить направляющие косинуса вектора $\bar{a}=\{3/13;\ 4/13;\ 12/13\}$.

13. Даны $|\bar{a}|=2$ и углы $\alpha=45°$, $\beta=60°$, $\gamma=120°$. Вычислить проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси.

14. Может ли вектор составлять с координатными осями следующие углы: 1) $\alpha=45°$, $\beta=60°$, $\gamma=120°$; 2) $\alpha=45°$, $\beta=135°$, $\gamma=60°$; 3) $\alpha=90°$, $\beta=150°$, $\gamma=60°$?

15. Может ли вектор составлять с двумя координатными осями следующие углы: 1) $\alpha=30°$, $\beta=45°$; 2) $\beta=60°$, $\gamma=60°$; 3) $\alpha=150°$, $\gamma=30°$?

16. Вектор составляет с осями Ox и Oz углы $\alpha=120°$ и $\gamma=45°$. Какой угол он составляет с осью Oy?

17. Вектор $\bar{a}$ составляет с координатными осями Ox и Oy углы $\alpha=60°$, $\beta=120°$. Вычислить его координаты при условии, что $|\bar{a}|=2$.

18. Определить координаты точки M, если ее радиус-вектор* составляет с координатными осями одинаковые углы и его длина равна 3.

19. Радиус-вектор точки M составляет с осями координат равные острые углы. Определить эти углы, если длина вектора равна $2\sqrt{3}$.

20. Радиус-вектор точки M составляет с осью Ox угол 45° и с осью Oy — угол 60°. Длина его равна 6. Определить координаты точки M, если ее координата Z отрицательна.

21. В точке A (2; 1; −1) приложена сила, равная 7. Зная две координаты этой силы $X=2$ и $Y=-3$, определить направление и конец вектора, изображающего силу.

---

*Радиусом-вектором точки M называется вектор, идущий из начала координат в эту точку. Радиус-вектор обозначают $\bar{r}$: $\bar{r}=\overline{OM}$.

§ 3. Линейные операции над векторами. Разложение вектора по базису

Линейными операциями над векторами называются операции сложения и вычитания векторов и умножения векторов на числа.

Суммой $\bar{a}+\bar{b}$ двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор, который идет из начала вектора $\bar{a}$ в конец вектора $\bar{b}$ при условии, что вектор $\bar{b}$ приложен к концу вектора $\bar{a}$ (правило треугольника) (рис. 40, *а*).

Разностью $\bar{b}-\bar{a}$ двух векторов $\bar{b}$ и $\bar{a}$ называется вектор, который в сумме с вектором $\bar{a}$ дает вектор $\bar{b}$ (рис. 40, *б*).

Произведением $\lambda\bar{a}$ ($\bar{a}\neq 0$ и число $\lambda\neq 0$) называется вектор, который коллинеарен вектору $\bar{a}$, имеет длину, равную $|\lambda|\,|\bar{a}|$, и направление такое же, как и вектор $\bar{a}$, если $\lambda>0$, и противоположное, если $\lambda<0$ (рис. 41).

На рис. 41 изображен случай $|\lambda|>1$.

Если $\lambda=0$ или $\bar{a}=0$, то произведение $\lambda\bar{a}$ считается равным нулевому вектору.

Имеют место следующие две основные теоремы о проекциях векторов.

Теорема 1. *Проекция суммы двух векторов на ось равна сумме их проекций на эту ось, т. е.* $\text{пр}_u(\bar{a}_1+\bar{a}_2)=\text{пр}_u\bar{a}_1+\text{пр}_u\bar{a}_2$.

Следствие 1. Если $\bar{a}=\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}$ и $\bar{b}=\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$, то $\bar{a}+\bar{b}=\{X_1+X_2;\ Y_1+Y_2;\ Z_1+Z_2\}$.

Теорема 2. *При умножении вектора $\bar{a}$ на число λ его проекция на ось также умножается на это число, т. е.* $\text{пр}_u\lambda\bar{a}=\lambda\,\text{пр}_u\bar{a}$.

Следствие 2. *Если* $\bar{a}=\{X;\ Y;\ Z\}$, *то* $\lambda\bar{a}=\{\lambda X;\ \lambda Y;\ \lambda Z\}$ *для любого числа* λ.

Признаком коллинеарности двух векторов $\bar{a}=\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}$, $\bar{b}=\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$ является пропорциональность их координат

$$\frac{X_2}{X_1}=\frac{Y_2}{Y_1}=\frac{Z_2}{Z_1}.$$

Пусть векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — единичные векторы, т. е. $|\bar{i}|=|\bar{j}|=|\bar{k}|=1$, вектор $\bar{i}$ лежит на оси Ox, вектор $\bar{j}$ — на оси Oy, вектор $\bar{k}$ — на оси Oz и каждый из них направлен на своей оси в положительную сторону. Тройка векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ называется *базисом*.

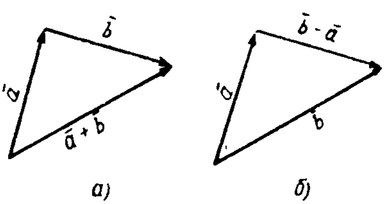


Рис. 40

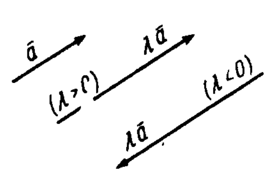


Рис. 41

Любой вектор $\bar{a}$ может быть разложен по базису $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, т. е. представлен в виде

$$\bar{a}=X\bar{i}+Y\bar{j}+Z\bar{k},$$

е X, Y, Z — координаты вектора $\bar{a}$.

Пример. В треугольнике ABC $\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{AC}=\bar{b}$. Построить:

$$1)\ \bar{a}+\bar{b};\quad 2)\ \frac{\bar{a}+\bar{b}}{2};\quad 3)\ \frac{\bar{a}-\bar{b}}{2};\quad 4)\ -\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}.$$

Решение. Воспользуемся правилом параллелограмма* (рис. 42):

$$\overline{AD}=\bar{a}+\bar{b};\quad \overline{AO}=\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2};\quad \overline{CB}=\bar{a}-\bar{b};\quad \overline{CO}=\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2};\quad \overline{CE}=-\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}.$$

22. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярны, причем $|\bar{a}|=5$ и $|\bar{b}|=12$. Определить $|\bar{a}+\bar{b}|$ и $|\bar{a}-\bar{b}|$.

23. Даны: $|\bar{a}|=13$, $|\bar{b}|=19$ и $|\bar{a}+\bar{b}|=24$. Вычислить $|\bar{a}-\bar{b}|$.

24. Даны: $|\bar{a}|=11$, $|\bar{b}|=23$ и $|\bar{a}-\bar{b}|=30$. Вычислить $|\bar{a}+\bar{b}|$.

25. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi=60°$, причем $|\bar{a}|=5$ и $|\bar{b}|=8$. Определить $|\bar{a}+\bar{b}|$ и $|\bar{a}-\bar{b}|$.

26. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi=120°$, причем $|\bar{a}|=3$ и $|\bar{b}|=5$. Определить $|\bar{a}+\bar{b}|$ и $|\bar{a}-\bar{b}|$.

27. Доказать, что $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$.

28. Доказать, что $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$.

29. На трех векторах $\overline{OA}=\bar{a}$, $\overline{OB}=\bar{b}$ и $\overline{OC}=\bar{c}$ построен параллелепипед. Указать те его вектор-диагонали, которые соответственно равны $\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}$, $\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}$, $\bar{a}-\bar{b}-\bar{c}$ и $\bar{b}-\bar{a}-\bar{c}$.

30. В треугольнике ABC сторону AB точками M и N разделим на три равные части: $AM=MN=NB$. Найти вектор $\overline{CM}$, если $\overline{CA}=\bar{a}$, $\overline{CB}=\bar{b}$.

31. Радиусами-векторами вершин треугольника ABC являются $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ и $\bar{r}_3$. Найти радиус-вектор $\bar{r}$ точки M пересечения медиан треугольника.

32. В треугольнике ABC прямая AM является биссектрисой угла BAC, причем точка M лежит на стороне BC. Найти $\overline{AM}$, если $\overline{AB}=\bar{b}$, $\overline{AC}=\bar{c}$.

33. По данным векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ построить каждый из следующих векторов: 1) $3\bar{a}$; 2) $-\frac{1}{2}\bar{b}$; 3) $2\bar{a}+\frac{1}{3}\bar{b}$; 4) $\frac{1}{2}\bar{a}-3\bar{b}$.

34. По сторонам OA и OB прямоугольника $OACB$ отложены

---

*Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ приведены к общему началу и на них построен параллелограмм, то сумма $\bar{a}+\bar{b}$ есть вектор, совпадающий с диагональю этого параллелограмма, идущего из общего начала $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

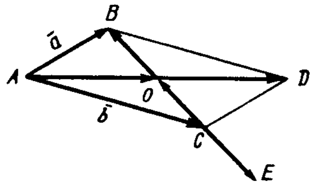


Рис. 42

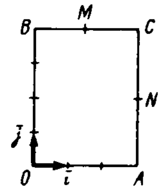


Рис. 43

единичные векторы $\bar{i}$ и $\bar{j}$ (рис. 43). Выразить через $\bar{i}$ и $\bar{j}$ векторы $\overline{OA}$, $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{BO}$, $\overline{OC}$ и $\overline{BA}$, если длина $OA=3$ и $OB=4$.

35. В прямоугольнике $OACB$ (рис. 43) M и N — середины сторон BC и AC. Разложить вектор $\overline{OC}=\bar{c}$ по векторам $\overline{OM}=\bar{a}$ и $\overline{ON}=\bar{b}$.

36. На плоскости Oxy построить векторы $\overline{OA}=\bar{a}=2\bar{i}$, $\overline{OB}=\bar{b}=3\bar{i}+3\bar{j}$ и $\overline{OC}=\bar{c}=2\bar{i}+6\bar{j}$. Разложить вектор $\bar{c}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

37. Даны два вектора: $\bar{a}=\{3;\ -2;\ 6\}$ и $\bar{b}=\{-2;\ 1;\ 0\}$. Определить проекции на координатные оси следующих векторов: 1) $\bar{a}+\bar{b}$; 2) $\bar{a}-\bar{b}$; 3) $2\bar{a}$; 4) $-\frac{1}{2}\bar{b}$; 5) $2\bar{a}+3\bar{b}$; 6) $\frac{1}{3}\bar{a}-\bar{b}$.

38. Проверить коллинеарность векторов $\bar{a}=\{2;\ -1;\ 3\}$ и $\bar{b}=\{-6;\ 3;\ -9\}$. Установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены — в одну или в противоположные стороны.

39. Определить, при каких значениях α, β векторы $\bar{a}=-2\bar{i}+3\bar{j}+\beta\bar{k}$ и $\bar{b}=\alpha\bar{i}-6\bar{j}+2\bar{k}$ коллинеарны.

40. Дано разложение вектора $\bar{c}$ по базису $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$: $\bar{c}=16\bar{i}-15\bar{j}+12\bar{k}$. Определить разложение по этому же базису вектора $\bar{d}$, параллельного вектору $\bar{c}$ и противоположного с ним направления, при условии, что $|\bar{d}|=75$.

§ 4. Скалярное произведение векторов

1. Определение и основные свойства скалярного произведения.

Определение. *Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число (скаляр), равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Если хотя бы один из векторов нулевой, то угол не определен и скалярное произведение по определению полагают равным нулю.*

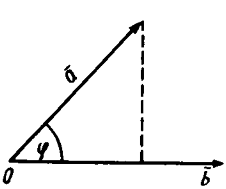


Рис. 44

Скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обозначают $\bar{a}\cdot\bar{b}$. Итак,

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\varphi,$$

где φ — угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 44).

Так как $|\bar{a}|\cos\varphi = \text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a}$, $|\bar{b}|\cos\varphi = \text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{b}$, то можно записать

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{b}|\,\text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a} = |\bar{a}|\,\text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{b}.$$

Свойства скалярного произведения

1^0. $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$ (свойство перестановочности сомножителей).

2^0. $(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b} = \lambda\,(\bar{a}\cdot\bar{b})$ (свойство сочетательности относительно умножения на число).

3^0. $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{a}\cdot\bar{c}$ (свойство распределительности суммы векторов).

4^0. $\bar{a}\cdot\bar{a} = |\bar{a}|^2$ (скалярное произведение $\bar{a}\cdot\bar{a}$ называется скалярным квадратом вектора $\bar{a}$ и обозначается $\bar{a}^2$).

5^0. $\bar{a}\cdot\bar{b} = 0$, если $\bar{a}\perp\bar{b}$, и, обратно, $\bar{a}\perp\bar{b}$, если $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$ и $\bar{a}\neq 0$, $\bar{b}\neq 0$.

Из свойств 4^0 и 5^0 для базисных векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ непосредственно получаем следующие равенства:

$$\bar{i}\cdot\bar{i} = \bar{j}\cdot\bar{j} = \bar{k}\cdot\bar{k} = 1,$$
$$\bar{i}\cdot\bar{j} = \bar{i}\cdot\bar{k} = \bar{j}\cdot\bar{i} = \bar{j}\cdot\bar{k} = \bar{k}\cdot\bar{i} = \bar{k}\cdot\bar{j} = 0.$$

2. Выражение скалярного произведения через координаты векторов.

Теорема. *Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами $\bar{a} = \{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}$, $\bar{b} = \{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$, то их скалярное произведение определяется формулой*

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2. \tag{1}$$

Из теоремы вытекают два важных следствия.

Следствие 1. *Необходимым и достаточным условием перпендикулярности векторов $\bar{a} = \{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}$ и $\bar{b} = \{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$ является равенство*

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0. \tag{2}$$

Следствие 2. *Угол между векторами $\bar{a} = \{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}$ и $\bar{b} = \{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$ определяется равенством*

$$\cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\,\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}. \tag{3}$$

Пример 1. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a} = \{3;\ 4;\ 7\}$ и $\bar{b} = \{2;\ -5;\ 2\}$.

Решение. По формуле (1) находим $\bar{a}\cdot\bar{b} = 3\cdot 2 + 4\,(-5) + 7\cdot 2 = 0$. Поскольку $\bar{a}\cdot\bar{b} = 0$, согласно свойству 5^0, $\bar{a}\perp\bar{b}$.

Пример 2. Найти угол между векторами $\bar{a} = \{1;\ 1;\ 0\}$ и $\bar{b} = \{1;\ 0;\ 1\}$.

Решение. По формуле (3) получаем

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\,\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\varphi=60°$.

41. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, зная, что $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=4$ и векторы образуют угол $\varphi=\pi/3$.

42. Даны векторы $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$ и $\bar{b}=\bar{i}-\bar{j}+4\bar{k}$. Определить $\text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a}$ и $\text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{b}$.

43. Даны векторы $\bar{a}=\{4;\ -2;\ -4\}$, $\bar{b}=\{6;\ -3;\ 2\}$. Вычислить: 1) $\bar{a}\cdot\bar{b}$; 2) $(2\bar{a}-3\bar{b})(\bar{a}+2\bar{b})$; 3) $(\bar{a}+\bar{b})^2$; 4) $(\bar{a}-\bar{b})^2$.

44. Даны векторы $\bar{a}=m\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k}$, $\bar{b}=4\bar{i}+m\bar{j}-7\bar{k}$. При каком значении m эти векторы перпендикулярны?

45. Вычислить $(5\bar{a}+3\bar{b})\cdot(2\bar{a}-\bar{b})$, если $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=3$, $\bar{a}\perp\bar{b}$.

46. Определить угол между векторами $\bar{a}=\{1;\ 2;\ 3\}$ и $\bar{b}=\{6;\ 4;\ -2\}$.

47. Определить угол между векторами $\bar{a}=\{2;\ -4;\ 4\}$ и $\bar{b}=\{-3;\ 2;\ 6\}$.

48. Определить, при каком значении m векторы $\bar{a}=m\bar{i}-3\bar{j}+2\bar{k}$ и $\bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}-m\bar{k}$ взаимно перпендикулярны.

49. Раскрыть скобки в выражении

$$(2\bar{i}-\bar{j})\cdot\bar{j}+(\bar{j}-2\bar{k})\cdot\bar{k}+(\bar{i}-2\bar{k})^2.$$

50. Раскрыть скобки в выражениях:

$$1)\ (\bar{a}+\bar{b})^2;\quad 2)\ (\bar{a}+\bar{b})^2+(\bar{a}-\bar{b})^2.$$

Выяснить геометрический смысл полученных формул.

51. Даны точки A (3; 3; -2), B (0; -3; 4), C (0; -3; 0) и D (0; 2; -4). Построить векторы $\overline{AB}=\bar{a}$ и $\overline{CD}=\bar{b}$ и найти $\text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{b}$.

52. Даны точки A (a; 0; 0), B (0; 0; $2a$) и C (a; 0; a). Построить векторы $\overline{OC}$ и $\overline{AB}$ и найти угол между ними.

53. Найти угол между биссектрисами углов xOy и yOz.

54. Из вершины квадрата проведены прямые, делящие противоположные стороны пополам. Найти угол между этими прямыми.

55. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}=2\bar{i}+\bar{j}$ и $\bar{b}=-2\bar{j}+\bar{k}$.

56. Вычислить: 1) $(\bar{m}+\bar{n})^2$, если $\bar{m}$ и $\bar{n}$ — единичные векторы с углом между ними 30°; 2) $(\bar{a}-\bar{b})^2$, если $|\bar{a}|=2\sqrt{2}$, $|\bar{b}|=4$ и угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен 135°.

57. Даны векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, лежащие в одной плоскости, причем $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=2$, $|\bar{c}|=5$, угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен 60° и угол между $\bar{b}$ и $\bar{c}$ — 60°. Построить вектор $\bar{u}=\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}$ и вычислить его модуль по формуле $|\bar{u}|=\sqrt{(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c})^2}$.

58. Показать, что угол между диагоналями прямоугольника, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ($\bar{a}\perp\bar{b}$), определяется формулой

$$\cos\varphi=\pm\frac{|\bar{a}|^2-|\bar{b}|^2}{|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2}.$$

59. Найти работу A силы $\bar{F}$ на перемещении $\bar{s}$, если $|\bar{F}|=2$, $|\bar{s}|=5$, а угол φ между векторами $\bar{F}$ и $\bar{s}$ равен $\pi/6$*.

60. Вычислить, какую работу A производит сила $\bar{F}=\{3;\ -5;\ 2\}$, когда ее точка приложения перемещается из начала в конец вектора $\bar{s}=\{2;\ -5;\ -7\}$.

61. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{2}{3}\pi$; зная, что $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=4$, вычислить: 1) $\bar{a}\cdot\bar{b}$; 2) $\bar{a}^2$; 3) $\bar{b}^2$; 4) $(\bar{a}+\bar{b})^2$; 5) $(3\bar{a}-2\bar{b})\cdot(\bar{a}+2\bar{b})$; 6) $(\bar{a}-\bar{b})^2$; 7) $(3\bar{a}+2\bar{b})^2$.

62. Проекции перемещения $\bar{s}$ движущейся точки на оси координат равны $s_x=2$ м, $s_y=1$ м, $s_z=-2$ м. Проекции действующей силы $\bar{F}$ на оси координат равны $F_x=50$ Н, $F_y=40$ Н и $F_z=30$ Н. Вычислить работу A силы $\bar{F}$ и угол между силой $\bar{F}$ и перемещением $\bar{s}$.

§ 5. Векторное произведение

1. Определение векторного произведения. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Тройка векторов называется *упорядоченной*, если указано, какой из них считается первым, какой — вторым, какой — третьим. Например, в записи $(\bar{a};\ \bar{b};\ \bar{c})$ вектор $\bar{a}$ считается первым, $\bar{b}$ — вторым, $\bar{c}$ — третьим; в записи $(\bar{b};\ \bar{c};\ \bar{a})$ вектор $\bar{b}$ — первый, $\bar{c}$ — второй, $\bar{a}$ — третий.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется *правой*, если после приведения их к общему началу из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден совершающимся против часовой стрелки. В противном случае тройка называется *левой*.

Определение. *Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется вектор $\bar{a}\times\bar{b}$, который определяется тремя условиями:*

1) *длина вектора $\bar{a}\times\bar{b}$ равна $|\bar{a}|\ |\bar{b}|\sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$;*

2) *вектор $\bar{a}\times\bar{b}$ перпендикулярен каждому из векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;*

3) *векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{a}\times\bar{b}$ образуют правую тройку векторов* (рис. 45).

2. Основные свойства векторного произведения.

1^0. $\bar{a}\times\bar{b}=0$, если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — коллинеарные векторы.

2^0. Длина векторного произведения неколлинеарных векто-

---

*Если вектор $\bar{F}$ изображает силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора $\bar{s}$, то работа A этой силы определяется по формуле $A=\bar{F}\cdot\bar{s}=|\bar{F}||\bar{s}|\cos\varphi$.

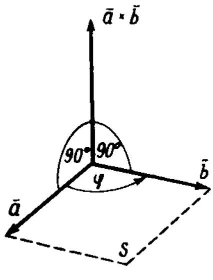


Рис. 45

ров $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равна площади s параллелограмма, построенного на этих векторах (рис. 45).

3°. $\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}$ (*свойство антиперестановочности сомножителей*).

4°. $(\lambda\bar{a})\times\bar{b}=\lambda(\bar{a}\times\bar{b})$ (*свойство сочетательности по отношению к скалярному множителю*).

5°. $(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}$ (*свойство распределительности относительно суммы векторов*).

Согласно определению и свойствам 1° и 3° векторного произведения, для базисных векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ получаем следующие равенства:

$$\bar{i}\times\bar{i}=0;\ \bar{i}\times\bar{j}=\bar{k};\ \bar{i}\times\bar{k}=-\bar{j};$$
$$\bar{j}\times\bar{i}=-\bar{k};\ \bar{j}\times\bar{j}=0;\ \bar{j}\times\bar{k}=\bar{i};$$
$$\bar{k}\times\bar{i}=\bar{j};\ \bar{k}\times\bar{j}=-\bar{i};\ \bar{k}\times\bar{k}=0.$$

Пример 1. Вычислить площадь s параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}+3\bar{b}$ и $3\bar{a}+\bar{b}$, если $|\bar{a}|=|\bar{b}|=1$ и угол между векторами равен 30°.

Решение. Согласно определению и свойствам векторного произведения, имеем

$$(\bar{a}+3\bar{b})\times(3\bar{a}+\bar{b})=3\bar{a}\times\bar{a}+\bar{a}\times\bar{b}+9\bar{b}\times\bar{a}+3\bar{b}\times\bar{b}=3(\bar{a}\times\bar{a})+\bar{a}\times\bar{b}-$$
$$-9(\bar{a}\times\bar{b})+3(\bar{b}\times\bar{b})=3\cdot 0-8(\bar{a}\times\bar{b})+3\cdot 0=-8(\bar{a}\times\bar{b})$$

(поскольку $\bar{a}\times\bar{a}=0$, $\bar{b}\times\bar{a}=-\bar{a}\times\bar{b}$); $s=8|\bar{a}\times\bar{b}|=8|\bar{a}||\bar{b}|\sin 30°=$ $=8\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=4.$

3. Выражение векторного произведения через координаты векторов.

Теорема. *Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами $\bar{a}=\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}$, $\bar{b}=\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$, то векторное произведение вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ определяется формулой*

$$\bar{a}\times\bar{b}=\{(Y_1Z_2-Y_2Z_1);\ (Z_1X_2-Z_2X_1);\ (X_1Y_2-X_2Y_1)\}.$$

Эту формулу с помощью определителей второго порядка можно записать в виде

$$\bar{a}\times\bar{b}=\left\{\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix}Z_1 & X_1\\ Z_2 & X_2\end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}\right\}. \tag{1}$$

Пример 2. Даны векторы $\bar{a}=\{2;\ 5;\ 7\}$ и $\bar{b}=\{1;\ 2;\ 4\}$. Найти координаты X, Y, Z векторного произведения $\bar{a}\times\bar{b}$.

Решение. По формуле (1) находим

$$X=\begin{vmatrix}5 & 7\\ 2 & 4\end{vmatrix}=6;\quad Y=\begin{vmatrix}7 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-1;\quad Z=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1.$$

Итак, $\bar{a}\times\bar{b}=\{6;\ -1;\ -1\}$.

63. Определить и построить вектор $\bar{a}\times\bar{b}$, если: 1) $\bar{a}=3\bar{i}$, $\bar{b}=2\bar{k}$; 2) $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}$, $\bar{b}=\bar{i}-\bar{j}$; 3) $\bar{a}=2\bar{i}+3\bar{j}$, $\bar{b}=3\bar{j}+2\bar{k}$. Найти в каждом случае площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

64. Вычислить площадь треугольника с вершинами A (7; 3; 4), B (1; 0; 6) и C (4; 5; -2).

65. Построить параллелограмм на векторах $\bar{a}=2\bar{j}+\bar{k}$ и $\bar{b}=\bar{i}+2\bar{k}$ и вычислить его площадь и высоту.

66. Раскрыть скобки и упростить выражения:

1) $\bar{i}\times(\bar{j}+\bar{k})-\bar{j}\times(\bar{i}+\bar{k})+\bar{k}\times(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k})$;

2) $(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})\times\bar{c}+(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})\times\bar{b}+(\bar{b}-\bar{c})\times\bar{a}$;

3) $(2\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{c}-\bar{a})+(\bar{b}+\bar{c})\times(\bar{a}+\bar{b})$;

4) $2\bar{i}\cdot(\bar{j}\times\bar{k})+3\bar{j}\cdot(\bar{i}\times\bar{k})+4\bar{k}\cdot(\bar{i}\times\bar{j})$.

67. Доказать, что $(2\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{a}+2\bar{b})=3\bar{a}\times\bar{b}$.

68. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ составляют угол 45°. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}-2\bar{b}$ и $3\bar{a}+2\bar{b}$, если $|\bar{a}|=|\bar{b}|=5$.

69. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}=\bar{m}+2\bar{n}$ и $\bar{b}=2\bar{m}+\bar{n}$, где $\bar{m}$ и $\bar{n}$ — единичные векторы, образующие угол 30°.

70. Построить треугольник с вершинами A (1; -2; 8), B (0; 0; 4) и C (6; 2; 0). Вычислить его площадь и высоту BD.

71. Вычислить диагонали и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}=\bar{k}-\bar{j}$ и $\bar{b}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$.

72. Даны векторы $\bar{a}=\{2;\ 3;\ 5\}$ и $\bar{b}=\{1;\ 2;\ 1\}$. Найти координаты векторного произведения $\bar{a}\times\bar{b}$.

73. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}=6\bar{i}+3\bar{j}-2\bar{k}$ и $\bar{b}=3\bar{i}-2\bar{j}+6\bar{k}$.

74. Доказать тождество $(\bar{a}\times\bar{b})^2+(\bar{a}\cdot\bar{b})^2=\bar{a}^2\cdot\bar{b}^2$.

75. Доказать, что $(\bar{a}\times\bar{b})^2\leqslant\bar{a}^2\cdot\bar{b}^2$. В каком случае здесь будет знак равенства?

76. Даны векторы $\bar{a}=\{3;\ -1;\ -2\}$ и $\bar{b}=\{1;\ 2;\ -1\}$. Найти координаты векторных произведений: 1) $\bar{a}\times\bar{b}$; 2) $(2\bar{a}+\bar{b})\times\bar{b}$; 3) $(2\bar{a}-\bar{b})\times(2\bar{a}+\bar{b})$.

77. Даны точки A (2; -1; 2), B (1; 2; -1) и C (3; 2; 1). Найти координаты векторных произведений: 1) $\overline{AB}\times\overline{BC}$; 2) $(\overline{BC}-2\overline{CA})\times\overline{CB}$.

78. Сила $\bar{F}=\{3;\ 2;\ -4\}$ приложена к точке A (2; -1; 1). Определить моменты этой силы относительно начала координат*.

---

*Если вектор $\bar{F}$ изображает силу, приложенную к какой-нибудь точке M, а вектор $\overline{OM}$ идет из некоторой точки O в точку M, то вектор $\overline{OM}\times\bar{F}$ представляет собой момент силы $\bar{F}$ относительно точки O.

79. Сила $\bar{F}=\{2;\ -4;\ 5\}$ приложена к точке $M(4;\ -2;\ 3)$. Определить момент этой силы относительно точки $A(3;\ 2;\ -1)$.

80. Сила $\bar{F}=\{3;\ 4;\ -2\}$ приложена к точке $C(2;\ -1;\ -2)$. Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно начала координат.

81. Вычислить синус угла, образованного векторами $\bar{a}=\{2;\ -2;\ 1\}$ и $\bar{b}=\{2;\ 3;\ 6\}$.

82. Даны векторы $\bar{a}=\{2;\ -3;\ 1\}$, $\bar{b}=\{-3;\ 1;\ 2\}$ и $\bar{c}=\{1;\ 2;\ 3\}$. Вычислить $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$ и $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$.

§ 6. Смешанное произведение трех векторов

1. Определение и геометрический смысл смешанного произведения.

Определение. *Смешанным произведением трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\bar{a}$ на векторное произведение векторов $\bar{b}$* и *$\bar{c}$*, т. е.

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}).$$

Следующая теорема выражает геометрический смысл смешанного произведения.

Теорема 1. *Смешанное произведение $\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$ равно объему v параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, взятому со знаком «+», если тройка $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — правая, со знаком «—», если тройка $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — левая. Если же $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны, то $\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=0$.*

Следствие. *Из теоремы легко выводится тождество*

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}, \tag{1}$$

т. е. знаки $\cdot$ и $\times$ в смешанном произведении можно менять местами.

В силу тождества (1) смешанные произведения $\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$ и $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$ можно обозначить более простым символом $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

2. Выражение смешанного произведения через координаты векторов.

Теорема 2. *Если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ заданы своими координатами*

$$\bar{a}=\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\},\quad \bar{b}=\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\},\quad \bar{c}=\{X_3;\ Y_3;\ Z_3\},$$

то смешанное произведение $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ определяется формулой

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=X_1\begin{vmatrix}Y_2 & Z_2\\ Y_3 & Z_3\end{vmatrix}+Y_1\begin{vmatrix}Z_2 & X_2\\ Z_3 & X_3\end{vmatrix}+Z_1\begin{vmatrix}X_2 & Y_2\\ X_3 & Y_3\end{vmatrix}. \tag{2}$$

Пример 1. Найти смешанное произведение векторов $\bar{a}=\{2;\ -1;\ -1\}$, $\bar{b}=\{1;\ 3;\ -1\}$ и $\bar{c}=\{1;\ 1;\ 4\}$.

Решение. По формуле (2) находим

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=2\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 4 & 1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\cdot 13-1\ (-5)-1\ (-2)=33.$$

Пример 2. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами A (2; 2; 2), B (4; 3; 3), C (4; 5; 4) и D (5; 5; 6).

Решение. Объем пирамиды равен $^1/_6$ объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$; отсюда и из теоремы 1 заключаем, что v равен $^1/_6$ абсолютной величины смешанного произведения $\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}$. Найдем координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, совпадающие с ребрами пирамиды: $\overline{AB}=\{2;\ 1;\ 1\}$, $\overline{AC}=\{2;\ 3;\ 2\}$, $\overline{AD}=\{3;\ 3;\ 4\}$. По формуле (2) находим смешанное произведение векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$:

$$\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}=2\begin{vmatrix}3 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}2 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 6+1\ (-2)+1\ (-3)=7.$$

Отсюда $v={}^7/_6$.

83. Найти смешанное произведение векторов $\bar{a}=\{1;\ -1;\ 1\}$, $\bar{b}=\{1;\ 1;\ 1\}$ и $\bar{c}=\{2;\ 3;\ 4\}$.

84. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами A (0; 0; 1), B (2; 3; 5), C (6; 2; 3) и D (3; 7; 2).

85. Построить пирамиду с вершинами O (0; 0; 0), A (5; 2; 0), B (2; 5; 0) и C (1; 2; 4) и вычислить ее объем, площадь грани ABC и высоту пирамиды, опущенную на эту грань.

86. Построить параллелепипед на векторах $\bar{a}=3\bar{i}+4\bar{j}$, $\bar{b}=-3\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{c}=2\bar{j}+5\bar{k}$ и вычислить его объем. Правой или левой будет связка векторов $(\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c})$?

87. Показать, что векторы $\bar{a}=-\bar{i}+3\bar{j}+2\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{i}-3\bar{j}-4\bar{k}$, $\bar{c}=-3\bar{i}+12\bar{j}+6\bar{k}$ компланарны, и разложить вектор $\bar{c}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

88. Показать, что точки A (2; -1; -2), B (1; 2; 1), C (2; 3; 0) и D (5; 0; -6) лежат в одной плоскости.

89. Показать, что: 1) $(\bar{a}+\bar{b})\cdot[(\bar{a}\times\bar{c})\times\bar{b}]=-\bar{a}\bar{b}\bar{c}$; 2) $(\bar{a}+2\bar{b}-\bar{c})\cdot[(\bar{a}-\bar{b})\times(\bar{a}-\bar{b}-\bar{c})]=3\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

90. Построить пирамиду с вершинами A (2; 0; 0), B (0; 3; 0), C (0; 0; 6) и D (2; 3; 8), вычислить ее объем и высоту, опущенную на грань ABC.

91. Построить векторы $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}+4\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}-2\bar{j}$ и $\bar{c}=3\bar{i}-3\bar{j}+4\bar{k}$, показать, что они компланарны, и разложить вектор $\bar{c}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

92. Определить, какой является тройка $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (правой или левой), если: 1) $\bar{a}=\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}$, $\bar{c}=\bar{j}$; 2) $\bar{a}=\bar{i}$, $\bar{b}=\bar{k}$, $\bar{c}=\bar{j}$; 3) $\bar{a}=\bar{j}$, $\bar{b}=\bar{i}$, $\bar{c}=\bar{k}$; 4) $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}$, $\bar{b}=\bar{j}$, $\bar{c}=\bar{k}$; 5) $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}$, $\bar{b}=\bar{i}-\bar{j}$, $\bar{c}=\bar{j}$; 6) $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}$, $\bar{b}=\bar{i}-\bar{j}$, $\bar{c}=\bar{k}$.

93. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, образующие правую тройку, взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\bar{a}|=4$, $|\bar{b}|=2$, $|\bar{c}|=3$, вычислить $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

94. Вектор $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен 30°. Зная, что $|\bar{a}|=6$, $|\bar{b}|=3$, $|\bar{c}|=3$, вычислить $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

95. Доказать, что $|\bar{a}\bar{b}\bar{c}| \leqslant |\bar{a}|\,|\bar{b}|\,|\bar{c}|$. В каком случае здесь может иметь место знак равенства?

96. Установить, компланарны ли векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, если:

1) $\bar{a}=\{2;\ 3;\ -1\}$, $\bar{b}=\{1;\ -1;\ 3\}$, $\bar{c}=\{1;\ 9;\ -11\}$;

2) $\bar{a}=\{3;\ -2;\ 1\}$, $\bar{b}=\{2;\ 1;\ 2\}$, $\bar{c}=\{3;\ -1;\ -2\}$;

3) $\bar{a}=\{2;\ -1;\ 2\}$, $\bar{b}=\{1;\ 2;\ -3\}$, $\bar{c}=\{3;\ -4;\ 7\}$.

97. Показать, что точки A (1; 2; −1), B (0; 1; 5), C (−1; 2; 1), D (2; 1; 3) лежат в одной плоскости.

98. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках A (2; −1; 1), B (5; 5; 4), C (3; 2; −1) и D (4; 1; 3).

99. Даны вершины тетраэдра A (2; 3; 1), B (4; 1; −2), C (6; 3; 7), D (−5; −4; 8). Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

100. Объем тетраэдра $v=5$, три его вершины находятся в точках A (2; 1; −1), B (3; 0; 1), C (2; −1; 3). Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.

§ 7. Уравнения плоскости

1. Общее уравнение плоскости. Пусть заданы: прямоугольная система координат $Oxyz$; произвольная плоскость π; точка M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0)$, лежащая на плоскости π; вектор $\bar{N}=\{A;\ B;\ C\}$, перпендикулярный плоскости π (рис. 46).

Рассмотрим произвольную точку M $(x;\ y;\ z)$. Точка M лежит на плоскости π тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0M}$ и $\bar{N}$ взаимно перпендикулярны. Так как координаты вектора $\overline{M_0M}$ равны $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$, то в силу условия перпендикулярности двух векторов [см. § 4, формула (2)] получаем, что точка M $(x;\ y;\ z)$ лежит на плоскости π тогда и только тогда, когда

$$A\,(x-x_0)+B\,(y-y_0)+C\,(z-z_0)=0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) есть искомое уравнение плоскости π.

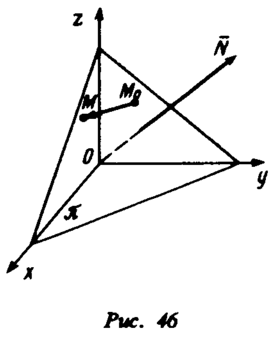


Рис. 46

Раскрывая в уравнении (1) скобки и обозначая число $-Ax_0-By_0-Cz_0$ буквой D, получим

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) называется *общим уравнением плоскости.*

Вектор $\bar{N}=\{A;\ B;\ C\}$, перпендикулярный плоскости, называется *нормальным вектором* этой плоскости.

Пример 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (1; 1; 1) перпендикулярно вектору $\bar{N}=\{2;\ 2;\ 3\}$.

Решение. По формуле (1) искомое уравнение таково:

$$2(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0 \text{ или } 2x+2y+3z-7=0.$$

Угол φ между плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ определяется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\bar{N}_1\cdot\bar{N}_2}{|\bar{N}_1|\,|\bar{N}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\,\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Второй угол равен $180°-\varphi$.

Условие параллельности плоскостей

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Условие перпендикулярности плоскостей

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

2. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Пусть заданы прямоугольная система координат $Oxyz$ и произвольная плоскость π (рис. 47). Проведем через начало координат прямую, перпендикулярную плоскости π, и назовем ее *нормалью*. Обозначим через P точку, в которой нормаль пересекает плоскость π. На нормали введем направление от точки O к точке P. Пусть α, β, γ — углы, которые составляют направленная нормаль с осями координат; p — длина отрезка OP.

Выведем уравнение данной плоскости π. Для этого введем единичный вектор $\bar{n}$ на нормали. Так как $\bar{n}$ — единичный вектор, то

$$\bar{n}=\{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}. \qquad (3)$$

Пусть $M(x;y;z)$ — произвольная точка. Она лежит на плоскости π тогда и только тогда, когда проекция вектора $\overline{OM}$ на нормаль равна p, т. е.

$$\text{пр}_{\bar{n}}\,\overline{OM}=p. \qquad (4)$$

Замечая, что $\text{пр}_{\bar{n}}\,\overline{OM}=\bar{n}\cdot\overline{OM}$ и $\overline{OM}=\{x;\ y;\ z\}$, по формуле (1) из § 4, учитывая равенство (3), имеем

$$\text{пр}_{\bar{n}}\,\overline{OM}=\bar{n}\cdot\overline{OM}=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma. \qquad (5)$$

Из равенств (4) и (5) получаем

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0. \qquad (6)$$

Уравнение (6) называется *нормальным уравнением* плоскости.

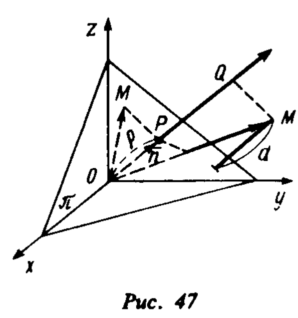


Рис. 47

Если точка M^* имеет координаты

x^*, y^*, z^*, а плоскость задана нормальным уравнением (6), то расстояние d от точки M^* до плоскости определяется по формуле

$$d=|x^*\cos\alpha+y^*\cos\beta+z^*\cos\gamma-p|. \tag{7}$$

Общее уравнение плоскости (2) приводится к нормальному виду (6) умножением на нормирующий множитель, определяемый формулой

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного члена D уравнения (2). Если в уравнении (2) $D=0$, то знак нормирующего множителя выбирается произвольно.

Пример 2. Даны плоскость $x+2y+2z-8=0$ и точка M^* (1; 1; 1). Найти расстояние d от точки M^* до данной плоскости.

Решение. Чтобы использовать формулу (7), надо прежде всего привести данное уравнение к нормальному виду. Для этого найдем нормирующий множитель:

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{1}{3}.$$

Умножая данное уравнение на μ, получаем искомое нормальное уравнение плоскости:

$$\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-\frac{8}{3}=0.$$

Подставляя в левую часть этого уравнения координаты точки M^*, имеем

$$d=\left|\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{8}{3}\right|=\left|-\frac{3}{3}\right|=1.$$

101. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку M_0 (2; 1; -1) и имеет нормальный вектор $\bar{N}=\{1;\ -2;\ 3\}$.

102. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и имеет нормальный вектор $\bar{N}=\{5;\ 0;\ -3\}$.

103. Точка P (2; -1; -1) служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

104. Даны точки M_1 (3; -1; 2) и M_2 (4; -2; -1). Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

105. Даны точки M_1 (0; -1; 3) и M_2 (1; 3; 5). Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

106. Построить плоскость $2x+3y+6z-12=0$ и найти углы ее нормального вектора с осями координат.

107. Построить плоскость $2x-2y+z-6=0$ и найти углы ее нормального вектора с осями координат.

108. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку M_0 (0; -2; 3).

109. Написать уравнение плоскости, параллельной оси Ox и проходящей через точки M_1 (0; 1; 3) и M_2 (2; 4; 5).

110. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и через точку M_0 (4; 0; 3).

111. Написать уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки M_1 (2; 2; 0) и M_2 (4; 0; 0).

112. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через две точки M_1 (4; -2; 1) и M_2 (2; 4; -3).

113. Найти угол между плоскостями $x-2y+2z-8=0$ и $x+$ $+z-6=0$.

114. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости:

1) $2x-3y+5z-7=0$, $\quad 2x-3y+5z+3=0$;

2) $4x+2y-4z+5=0$, $\quad 2x+y+2z-1=0$;

3) $x-3z+2=0$, $\quad 2x-6z-7=0$.

115. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют перпендикулярные плоскости:

1) $3x-y-2z-5=0$, $\quad x+9y-3z+2=0$;

2) $2x+3y-z-3=0$, $\quad x-y-z+5=0$;

3) $2x-5y+z=0$, $\quad x+2z-3=0$.

116. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (2; 2; -2) и параллельную плоскости $x-2y-3z=0$.

117. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (-1; -1; 2) и перпендикулярной плоскостям $x-2y+z-4=0$ и $x+2y-2z+4=0$.

118. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 (-1; -2; 0) и M_2 (1; 1; 2) и перпендикулярной плоскости $x+2y+2z-4=0$.

119. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 (1; -1; 2), M_2 (2; 1; 2) и M_3 (1; 1; 4).

120. Найти расстояние точки (5; 1; -1) от плоскости $x-$ $-2y-2z+4=0$.

121. Найти расстояние точки (4; 3; 0) от плоскости, проходящей через точки M_1 (1; 3; 0), M_2 (4; -1; 2) и M_3 (3; 0; 1).

122. Найти расстояние между параллельными плоскостями $4x+3y-5z-8=0$ и $4x+3y-5z+12=0$.

123. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат параллельно плоскости $5x-3y+2z-3=0$.

124. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (3; -2; -7) параллельно плоскости $2x-3z+5=0$.

125. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно плоскостям $2x-y+3z-1=0$ и $x+$ $+2y+z=0$.

126. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (2; -1; 1) перпендикулярно плоскостям $2x-z+1=0$ и $y=0$.

127. Вывести уравнение множества точек, отклонение которых от плоскости $4x-4y-2z+3=0$ равно 2.

128. Написать уравнения плоскостей, параллельных плоскости $2x-2y-z-3=0$ и отстоящих от нее на расстоянии $d=5$.

129. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (0; 2; 1) и параллельной векторам $\bar{a}=\{1;\ 1;\ 1\}$ и $\bar{b}=\{1;\ 1;\ -1\}$.

§ 8. Уравнения прямой

1. Канонические уравнения прямой. Прямая определяется совместным заданием уравнений двух плоскостей

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

пересекающихся по этой прямой.

Пусть даны какая-нибудь прямая L и ненулевой вектор $\bar{a}$, лежащий на данной прямой или параллельный ей (рис. 48). Вектор $\bar{a}$ называется *направляющим вектором* данной прямой. Выведем уравнения прямой, проходящей через данную точку M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0\}$ и имеющей данный направляющий вектор $\bar{a}=\{l;\ m;\ n\}$

Пусть M $(x;\ y;\ z)$ — произвольная точка. Она лежит на прямой тогда и только тогда, когда координаты вектора $\overline{M_0M}=\{x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0\}$ пропорциональны координатам вектора $\bar{a}$:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \qquad (1)$$

Уравнения (1) и являются искомыми. Они называются *каноническими уравнениями* прямой.

Пример. Найти канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} 3x+2y+4z-11=0, \\ 2x+y-3z-1=0. \end{cases}$$

Решение. Полагая, например, $x_0=1$, из системы

$$\begin{cases} 2y_0+4z_0-8=0, \\ y_0-3z_0+1=8 \end{cases}$$

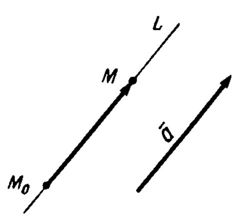


Рис. 48

получаем $y_0=2$, $z_0=1$. Таким образом, точка M_0 (1; 2; 1) прямой найдена. Теперь определим направляющий вектор $\bar{a}$. Так как прямая определена пересечением плоскостей, то она перпендикулярна каждому из нормальных векторов $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$. Поэтому в качестве вектора $\bar{a}$ можно взять любой вектор, перпендикулярный векторам $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$, например их векторное произведение $\bar{a}=\bar{N}_1\times\bar{N}_2$. Так как координаты векторов $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$ известны: $\bar{N}_1=\{3;\ 2;\ 4\}$, $\bar{N}_2=\{2;\ 1;\ -3\}$, то по формуле (1) из § 5 найдем координаты вектора $\bar{a}$: $\bar{a}=\{-10;\ 17;\ -1\}$, т. е. $l=-10$, $m=17$, $n=-1$. Подставляя найденные значения x_0, y_0, z_0 и l, m, n в равенства (1), получаем канонические уравнения данной прямой:

$$\frac{x-1}{-10}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{-1}.$$

Канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки M_1 $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и M_2 $(x_2;\ y_2;\ z_2)$, имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

2. Параметрические уравнения прямой. Обозначив буквой t каждое из равных отношений в канонических уравнениях (1), получим

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t,$$

откуда

$$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt. \end{cases} \tag{2}$$

Равенства (2) называются *параметрическими уравнениями* прямой, проходящей через точку M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и имеющей направляющий вектор $\bar{a}=\{l;\ m;\ n\}$. В уравнениях (2) t рассматривается как произвольно изменяющийся параметр $(-\infty<t<+\infty)$; x, y, z — как функции от t.

3. Угол между прямыми. Угол между двумя прямыми, заданными их каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2},$$

определяется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\,\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}};$$

условие параллельности двух прямых:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2};$$

условие перпендикулярности двух прямых:

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

130. Привести к каноническому виду уравнения следующих прямых:

1) $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x+y+z=0, \\ 2x+3y-2z+5=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-2y+3z+1=0, \\ 2x+y-4z-8=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-y+3z-1=0, \\ 5x+4y-z-7=0. \end{cases}$

131. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку M_0 (2; 0; -3) параллельно: 1) вектору $\bar{a}=\{2;\ -3;\ 5\}$; 2) прямой $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$; 3) оси Ox; 4) оси Oy; 5) оси Oz.

132. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки: 1) (1; -2; 1), (3; 1; -1); 2) (3; -1; 0), (1; 0; -3); 3) (0; -2; 3), (3; -2; 1); 4) (1; 2; -4), (-1; 2; -4).

133. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку M_0 (1; -1; -3) параллельно: 1) вектору $\bar{a}=\{2;\ -3;\ 4\}$; 2) прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{0}$; 3) прямой $x=3t-1$, $y=-2t+3$, $z=5t+2$.

134. Составить параметрические уравнения следующих прямых:

1) $\begin{cases} 2x+3y-z-4=0, \\ 3x-5y+2z+1=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2y-z-6=0, \\ 2x-y+z+1=0. \end{cases}$

135. Построить прямые:

1) $\begin{cases} y=3, \\ z=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=2, \\ z=x+1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=4, \\ z=y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=4, \\ y=3. \end{cases}$

Определить их направляющие векторы.

136. Доказать параллельность прямых:

1) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ и $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0; \end{cases}$

2) $x=2t+5$, $y=-t+2$, $z=t-7$ и $\begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0. \end{cases}$

137. Доказать перпендикулярность прямых:

1) $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ и $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0, \\ 2x+3y-8z+3=0; \end{cases}$

2) $x=2t+1$, $y=3t-2$, $z=-6t+1$ и $\begin{cases} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0. \end{cases}$

138. Найти угол между прямыми:

1) $\begin{cases} x-y+z-4=0, \\ 2x+y-2z+5=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y+z-4=0, \\ 2x+3y-z-6=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x-y-z+12=0, \\ y-z-2=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x-2y+16=0, \\ 3x-z=0. \end{cases}$

139. Найти направляющий вектор прямой $x+y-z=0$, $y=x$ и найти углы прямой с осями координат (см. указание к задаче в ответах 138).

140. Найти угол прямой $x=2z-1$, $y=-2z+1$ с прямой, проходящей через начало координат и через точку M_0 (1; -1; -1).

141. Написать параметрические уравнения прямой: 1) проходящей через точку M_0 (-2; 1; -1) и параллельной вектору $\bar{a}=\{1; -2; 3\}$; 2) проходящей через точки M_1 (3; -1; 4) и M_2 (1; 1; 2).

142. Показать, что прямая $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$ перпендикулярна прямой $x=z+1$, $y=1-z$.

143. Написать уравнения прямой, проходящей через точку M_0 (-4; 3; 0) и параллельной прямой $\begin{cases} x-2y+z-4=0, \\ 2x+y-z=0. \end{cases}$

144. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки M_0 (2; -3; 4) на ось Oz.

145. Найти расстояние точки M_0 (2; -1; 3) от прямой $\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{5}$.

146. Найти расстояние между параллельными прямыми $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{2}$ и $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{2}$.

147. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки M_0 (2; -3; 4) на ось Oy.

148. Построить прямую $x=3$, $z=5$ и найти ее направляющий вектор.

149. Написать уравнения прямой, проходящей через точку M_0 (-1; 2; -2) параллельно прямой $x-y=2$, $y=2z+1$.

150. Найти расстояние точки M_0 (3; 0; 4) от прямой $y=2x+1$, $z=2x$ (см. задачу 145).

§ 9. Прямая и плоскость

Угол между прямой $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ и плоскостью $Ax+By+$ $+Cy+D=0$ определяется по формуле

$$\sin\varphi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{l^2+m^2+n^2}};$$

условие параллельности прямой и плоскости:

$$Al+Bm+Cn=0;$$

условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

Точка пересечения прямой и плоскости. Написав параметрические уравнения прямой $x=x_0+lt$, $y=y_0+mt$, $z=z_0+nt$, подставим в уравнения плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ вместо x, y, z их выражения через t. Подставляя найденное значение t в уравнения прямой, находим искомую точку M $(x;\ y;\ z)$ пересечения прямой с плоскостью.

Пример. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{1}$ с плоскостью $2x+3y+z=0$.

Решение. Параметрические уравнения прямой имеют вид $x=2t+2$, $y=3t+1$, $z=t+3$. Для определения точки пересечения прямой и плоскости подставим выражения для x, y, z из уравнений прямой в уравнение плоскости. Получаем

$$2\,(2t+2)+3\,(3t+1)+t+3=0,$$

откуда находим $t=-{}^5/_7$. Следовательно, координатами точки пересечения будут $x={}^4/_7$, $y=-{}^8/_7$, $z={}^{16}/_7$. Итак, прямая и плоскость пересекаются в точке M $({}^4/_7;\ -{}^8/_7;\ {}^{16}/_7)$.

151. Найти угол между прямыми и плоскостями:

1) $\begin{cases} y=3x-1, \\ 2z=-3x+2 \end{cases}$ и $2x+y+z-4=0$;

2) $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{1}$ и $x+y+2z-4=0$.

152. Доказать, что прямая $x=3t-2$, $y=-4t+1$, $z=4t-5$ параллельна плоскости $4x-3y-6z-5=0$.

153. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

1) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$, $2x+3y+z-1=0$;

2) $x=2t-1$, $y=t+2$, $z=1-t$, $3x-2y+z-3=0$;

3) $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$, $x+2y+3z-29=0$.

154. Доказать, что прямая $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{3}$ параллельна плоскости $2x+y-z=0$, а прямая $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{3}$ лежит в этой плоскости.

155. Доказать, что прямая $\begin{cases}5x-3y+2z-5=0,\\ 2x-y-z-1=0\end{cases}$ лежит в плоскости $4x-3y+7z-7=0$.

156. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{1}$.

157. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки (2; 1; 0) на прямую $x=3z-1$, $y=2z$.

158. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку (−1; 2; −3) и перпендикулярной прямой $x=2$, $y-z=1$.

159. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{3}$ и точку (3; 4; 0).

160. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{2}$ и перпендикулярной плоскости $2x+3y-z=4$.

161. Написать уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$.

162. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку (2; −3; 4) параллельно прямым $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{8}$ и $\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+5}{2}$.

163. Построить плоскость $x+y-z=0$ и прямую, проходящую через точки M_1 (0; 0; 4) и M_2 (2; 2; 0). Найти точку пересечения прямой с плоскостью и угол между ними.

164. Построить плоскость $y=z$, прямую $x=-z+1$, $y=2$ и найти точку их пересечения и угол между ними.

§ 10. Уравнения поверхности и линии. Уравнения цилиндрической поверхности и поверхностей второго порядка

1. Уравнения поверхности и линии. Пусть заданы прямоугольная система координат $Oxyz$, произвольная поверхность S (рис. 49) и уравнение

$$F(x;\ y;\ z)=0. \tag{1}$$

Определение. *Уравнение* (1) *называется уравнением поверхности S в заданной системе координат, если ему удовлетворяют координаты любой точки M (x; y; z), лежащей на S, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой поверхности.*

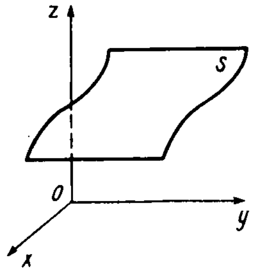


Рис. 49

Пример. В прямоугольной системе координат уравнение

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2=0$$

или

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

определяет поверхность, являющуюся сферой радиуса R с центром в точке C (a; b; c). Если центр сферы находится в начале координат, то ее уравнение имеет вид

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Линия в пространстве рассматривается как пересечение двух поверхностей, т. е. как множество точек, находящихся одновременно на двух поверхностях, и соответственно этому линия определяется заданием двух уравнений вида (1)

$$\begin{cases} F_1(x;\ y;\ z)=0, \\ F_2(x;\ y;\ z)=0, \end{cases}$$

если им удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на линии, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на линии.

165. Составить уравнение сферы в каждом из следующих случаев:

1) сфера имеет центр C (0; 0; 0) и радиус $R=9$;

2) сфера имеет центр C (5; -3; 7) и радиус $R=2$;

3) сфера проходит через начало координат и имеет центр C (4; -4; -2);

4) сфера проходит через точку A (2; -1; -3) и имеет центр C (3; -2; 1);

5) центром сферы является начало координат, и плоскость $16x-15y-12z+75=0$ является касательной к сфере;

6) сфера имеет центр C (3; -5; -2), и плоскость $2x-y-3z+11=0$ является касательной к сфере.

166. Составить уравнение сферы радиуса $R=3$, касающейся плоскости $x+2y+2z+3=0$ в точке M (1; 1; -3).

167. Вычислить радиус R сферы, которая касается плоскостей $3x+2y-6z-15=0$, $3x+2y-6z+55=0$.

168. Сфера, центр которой лежит на прямой $\begin{cases} 2x+4y-z-7=0, \\ 4x+5y+z-14=0, \end{cases}$ касается плоскостей $x+2y-2z-2=0$, $x+2y-2z+4=0$. Составить уравнение этой сферы.

169. Составить уравнение сферы, касающейся двух параллельных плоскостей $6x-3y-2z-35=0$, $6x-3y-2z+63=0$, причем одной из них в точке M (5; -1; -1).

170. Определить координаты центра C и радиуса R сферы, заданной уравнением $x^2+y^2+z^2-x+2y+1=0$.

171. Определить координаты центра C и радиус R сферы, заданной одним из следующих уравнений:

1) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=16$;

2) $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=9$;

3) $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-19=0$;

4) $x^2+y^2+z^2-6z=0$;

5) $x^2+y^2+z^2+20y=0$.

2. Уравнения цилиндрической поверхности и поверхностей второго порядка. Пусть в плоскости Oxy лежит некоторая линия. Проведем через каждую точку линии прямую, параллельную оси Oz. Множество этих прямых образует некоторую поверхность S, которая называется *цилиндрической*. Указанные прямые называются *образующими* поверхности S, а линия — ее *направляющей*.

Уравнение вида $F(x, y)=0$ в пространстве определяет цилиндрическую поверхность S с образующими, параллельными оси Oz. Аналогично, уравнение $F(x, z)=0$ определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oy, и $F(y, z)$ — цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Ox.

Канонические (или простейшие) уравнения цилиндрических поверхностей второго порядка:

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ — эллиптический цилиндр;

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ — гиперболический цилиндр;

$y^2=2px$ — параболический цилиндр.

Уравнения всех трех цилиндров с образующими, параллельными оси Oz, не содержат координаты z и совпадают с уравнениями направляющих, определяющих кривые второго порядка, соответственно эллипс, гиперболу и параболу, лежащих в плоскости Oxy.

Заметим, что на плоскости Oxy уравнение $F(x, y)=0$ определяет линию, но эта же линия в пространственной системе координат $Oxyz$ задается двумя уравнениями:

$$\begin{cases} F(x, y)=0, \\ z=0. \end{cases}$$

Например, в пространственной системе координат $Oxyz$ уравнение $x^2+y^2-R^2=0$ определяет цилиндрическую поверхность — круговой цилиндр, а направляющая этого цилиндра (окружность), лежащая в плоскости Oxy, определяется двумя уравнениями:

$$\begin{cases} x^2+y^2=R^2, \\ z=0. \end{cases}$$

Кроме этих трех цилиндров второго порядка существуют еще шесть поверхностей второго порядка, канонические уравнения которых имеют следующий вид:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ — эллипсоид*;

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ — однополостный гиперболоид;

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ — двуполостный гиперболоид;

$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ $(p>0,\ q>0)$ — эллиптический параболоид;

$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ $(p>0,\ q>0)$ — гиперболический параболоид;

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ — конус второго порядка.

Таким образом, существует девять поверхностей второго порядка.

172. Какую поверхность определяет уравнение $x^2=4y$?

173. Какую поверхность определяет уравнение $z^2=xz$?

174. Какую поверхность определяет уравнение $x^2+2x+y^2=0$?

175. Какие поверхности определяются следующими уравнениями: 1) $x^2+y^2=4$; 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 3) $x^2-y^2=1$; 4) $y^2=2x$; 5) $z^2=y$; 6) $z+x^2=0$; 7) $x^2+y^2=2y$; 8) $x^2+y^2=0$; 9) $x^2-z^2=0$; 10) $y^2=xy$? Построить эти поверхности.

176. Установить, что плоскость $y-2=0$ пересекает конус $x^2+y^2-2z^2=0$ по гиперболе.

177. По какой линии пересекается конус $x^2-y^2+z^2=0$ с плоскостями: 1) $y=3$; 2) $z=1$; 3) $x=0$?

178. Установить, что плоскость $x-2=0$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ по эллипсу; найти его полуоси и вершины.

179. Установить, что плоскость $z+1=0$ пересекает однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1$ по гиперболе; найти ее полуоси и вершины.

---

*В случае $a=b=c$ эллипсоид является сферой.

180. Установить, что плоскость $y+6=0$ пересекает гиперболический параболоид $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=6z$ по параболе; найти ее параметр и вершину.

181. Построить поверхность $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1$ и найти площади ее сечений плоскостями: 1) $z=3$; 2) $y=1$.

Глава 11

ПОНЯТИЕ, ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Понятие функции нескольких переменных и основные сведения

Определение. *Пусть X, Y и Z — некоторые числовые множества. Функцией двух переменных называется множество f упорядоченных троек чисел $(x;\ y;\ z)$*, таких, что x принадлежит X, y принадлежит Y, z принадлежит Z и каждая упорядоченная пара чисел $(x;\ y)$ входит в одну и только одну тройку этого множества, а каждое z входит по крайней мере в одну тройку. При этом говорят, что упорядоченной паре чисел $(x;\ y)$ поставлено в соответствие число z, и пишут $z=f(x;\ y)$. Число z называется значением функции f в точке $(x;\ y)$. Переменную z называют зависимой переменной, а переменные x и y — независимыми переменными (или аргументами); множество $\{(x;\ y)\}$ — областью определения функции, а множество Z — множеством значений функции.*

Так как каждой упорядоченной паре чисел $(x;\ y)$ при фиксированной прямоугольной системе координат соответствует единственная точка M плоскости и, обратно, каждой точке M соответствует единственная упорядоченная пара чисел $(x;\ y)$, то функцию двух переменных можно рассматривать как функцию точки M и вместо $z=f(x;\ y)$ писать $z=f(M)$. Областью определения функции в этом случае является некоторое множество $\{M\}$ точек плоскости.

Примеры функций двух переменных.

1. $z=x^2+y^2$. Область определения этой функции — множество $\{M\}$ всех пар чисел $(x;\ y)$, т. е. вся плоскость Oxy, а множество значений — промежуток $Z=[0,\ +\infty)$.

2. $z=1/\sqrt{x^2+y^2-1}$. Областью определения данной функции является множество всех точек, для которых выражение $1/\sqrt{x^2+y^2-1}$ определено, т. е. множество точек, координаты

---

*Напомним, что тройка чисел x, y, z называется *упорядоченной*, если указано, какое из этих чисел считается первым, какое — вторым, какое — третьим.

которых удовлетворяют неравенству $x^2+y^2-1>0$ или $x^2+y^2>1$. Это множество точек, лежащих вне круга радиуса $R=1$ с центром в начале координат, а множество значений функции представляет собой промежуток $Z=(0, +\infty)$.

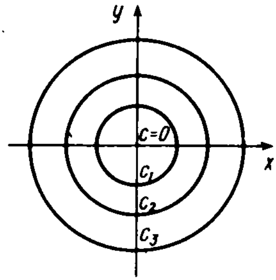


Рис. 50

Аналогично можно дать определение функции трех переменных $u=f(x; y; z)$, четырех переменных $u=f(x; y; z; t)$ и вообще n переменных $u=f(x_1; x_2; ...; x_n)$.

Функция двух переменных изображается в пространстве в виде поверхности, которая определяется уравнением $z=f(x; y)$, т. е. сама формула, задающая функцию, и есть уравнение этой поверхности. Так, например, уравнение $z-2x+5y+10=0$ является уравнением плоскости. Данная плоскость есть график функции $z=2x-5y-10$.

Построение графиков функций двух переменных во многих случаях представляет значительные трудности. Поэтому существует еще один способ изображения функции двух переменных, основанный на сечении поверхности $z=f(x; y)$ плоскостями $z=c$, где c — любое число, т. е. плоскостями, параллельными плоскости Oxy.

Назовем линией уровня функции $z=f(x; y)$ множество точек $(x; y)$ плоскости Oxy, в которых функция принимает одно и то же значение c. Очевидно, при различных c получаются различные линии уровня для данной функции.

Пример. Построить линии уровня функции $z=x^2+y^2$.

Решение. Линии уровня данной функции определяются уравнением $x^2+y^2=c$ $(0\leqslant c<+\infty)$. Давая c различные значения, получаем семейство линий уровня, представляющих собой концентрические окружности. При $c=0$ окружность вырождается в точку (0; 0) (рис. 50).

Какие поверхности изображают следующие уравнения:

1. $x+y+z-1=0$.
2. $3x-4y+5z-2=0$.
3. $2x+3y-4z-12=0$.
4. $2x-z+4=0$.
5. $x+y=0$.
6. $3x+2=0$.
7. $2z+3=0$.
8. $x+y+z=0$.
9. $2x+7y-6z=0$.
10. $2y+11z=0$.
11. $x+4y-2z-20=0$.
12. $x^2+y^2=4$.
13. $x^2+y^2=2x$.
14. $xy=4$.
15. $z=y^2$.
16. $y=z^2$.
17. $z^2=xz$.
18. $z^2=x^2-4$.
19. $y=x^3$.
20. $x^2+y^2+z^2+2x+6y+2z=0$.

21. $x^2+y^2+z^2-6x-4y=0$.

22. $x^2+y^2+z^2=2x+2y+2z$.

23. $x^2+y^2=z$.

24. $x^2+y^2+z^2=z$.

25. $x^2+z^2=2z$.

26. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=z$.

27. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$.

28. $x^2-y^2=2z$.

29. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}+z^2=1$.

30. $\frac{x^2}{4}+y^2-z^2=1$.

31. $x^2+y^2-z^2=0$.

32. $x^2+z^2=4y^2$.

33. $x^2+y^2-z^2+1=0$.

34. $x^2+z^2-y^2=4$.

35. $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}-\frac{y^2}{25}=-1$.

36. $x^2-y^2-z^2=25$.

37. $y^2-x^2=2z$.

38. $z^2-x^2=2y$?

Найти области определения функций, заданных следующими формулами:

39. $z=\frac{1}{x^2+y^2}$.

40. $z=\frac{1}{x+y}$.

41. $z=\sqrt{x^2-y^2}$.

42. $z=\sqrt{xy}$.

43. $z=\sqrt{x}+y$.

44. $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

45. $z=\frac{1}{1+x^2+y^2}$.

46. $z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$.

47. $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$.

48. $z=\arcsin\frac{y}{x^2}$.

49. $z=\ln(x+y)$.

50. $u=\ln(z^2-x^2-y^2-1)$.

51. $u=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2+z^2}}$.

52. $u=\frac{x+y-z}{\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}}$.

Построить линии уровня следующих функций:

53. $z=xy$.

54. $z=x^2y+y$.

55. $z=x+y$.

56. $z=\frac{y-x^2}{x^2}$.

57. $z=\frac{x}{y}$.

58. $z=x\sqrt{y-1}$.

§ 2. Предел и непрерывность функции двух переменных

Пусть функция $z=f(M)$ определена на некотором множестве $\{M\}$ и точка $M_0 \in \{M\}$ или $M_0 \notin \{M\}$, но обладает тем свойством, что в любой δ-окрестности* этой точки содержится хотя бы одна точка множества $\{M\}$, отличная от M_0.

Определение 1. *Число A называется пределом функции $z=f(M)$ в точке M_0, если для любой сходящейся к M_0 последовательности точек $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ $(M_n \neq M_0,\ M_n \in \{M\})$ соответствующая последовательность значений функции $f(M_1), f(M_2), \ldots, f(M_n), \ldots$ сходится к A.*

Обозначение: $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)=A$ или $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y)=A$.

Определение 2. *Функция $z=f(M)$ называется непрерывной в точке M_0, если предел функции в этой точке существует и равен значению функции в этой точке, т. е.*

$$\lim_{M \to M_0} f(M)=f(M_0) \quad \textit{или} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y)=f(x_0;y_0).$$

На функции нескольких переменных легко переносятся все положения теории пределов функции одной переменной, в частности справедливы теоремы:

$$\lim_{M \to M_0} [f(M) \pm g(M)] = \lim_{M \to M_0} f(M) \pm \lim_{M \to M_0} g(M);$$

$$\lim_{M \to M_0} [f(M) \cdot g(M)] = \lim_{M \to M_0} f(M) \cdot \lim_{M \to M_0} g(M); \quad \lim_{M \to M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{\lim\limits_{M \to M_0} f(M)}{\lim\limits_{M \to M_0} g(M)},$$

если $\lim\limits_{M \to M_0} g(M) \neq 0$, а также теорема о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (x^2+y^2)$.

Решение. Функция $f(x;y)=x^2+y^2$ определена на всей плоскости. Поэтому для любой последовательности точек $\{M_n\}$, сходящейся к точке $M_0\,(1;2)$, имеем

$$\lim_{n \to \infty} (x_n^2+y_n^2) = \lim_{n \to \infty} x_n^2 + \lim_{n \to \infty} y_n^2 = 1^2+2^2=5.$$

Точки, в которых функция не обладает свойством непрерывности, называются точками разрыва этой функции.

Пример 2. Доказать, что функция

---

*δ-окрестность точки M_0 — это все точки, лежащие внутри круга с центром M_0 радиуса δ.

$$f(x;\ y)=\begin{cases} x^2+y^2 & \text{всюду, кроме } x=1,\ y=2, \\ 0 & \text{при } x=1,\ y=2 \end{cases}$$

в точке (1; 2) разрывна.

Решение. Так как $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\to 2}} f(x;\ y)=5$ (см. пример 1), а значение функции $f(1;\ 2)=0$, то, согласно определению 2, точка (1; 2) является точкой разрыва данной функции.

Вычислить пределы:

59. $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ y\to 1}} x^2y$.

60. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \dfrac{x}{y}$.

61. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{x^2+4y}{2xy-1}$.

62. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+2x-xy-2y}$.

63. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy}$.

64. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{x}$.

65. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$.

66. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$.

67. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} (1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}}$.

68. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} (1+xy^2)^{\frac{y}{x^2y+xy^2}}$.

69. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

70. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$.

71. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2}$.

72. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\operatorname{tg}(2xy)}{x^2y}$.

73. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+xy)^{\frac{1}{|x|+|y|}}$.

74. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

75. Показать, что функция $f(x;\ y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ не имеет предела в точке (0; 0).

76. Имеет ли предел в точке (0; 0) функция $f(x;\ y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$?

77. Показать, что функция $f(x;\ y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$: 1) имеет предел, равный нулю при стремлении точки $M(x;\ y)$ к точке $O(0;\ 0)$ по любой прямой, проходящей через точку $O(0;\ 0)$; 2) в точке $O(0;\ 0)$ предела не имеет.

78. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(1+y)}{y+x^2}$ при стремлении точки $M(x;\ y)$ к точке $O(0;\ 0)$ по параболе $y=x^2$.

79. Используя определение непрерывности, показать, что функция $f(x;\ y)=xy$ непрерывна в любой точке плоскости.

Найти точки разрыва следующих функций:

80. $z=\dfrac{xy+5}{x^2+y^2}$.

81. $z=\dfrac{5x}{y-x}$.

82. $z=\dfrac{x+y}{x^2y}$.

83. $z=\ln(4-x^2-y^2)$.

84. $z=\sin\dfrac{x}{y}$.

85. $z=\dfrac{\sin x\sin y}{xy}$.

86. $z=\dfrac{x-y}{y^2-x}$.

87. $z=\dfrac{x-y}{x^3-y^3}$.

88. $z=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

89. $z=\sin\dfrac{1}{x+y}$.

90. $z=\cos\dfrac{1}{x^2+y^2-4}$.

91. $z=\dfrac{x}{|y|}$.

92. $z=\dfrac{1}{\cos^2 x-\cos^2 y}$.

93. $u=\dfrac{1}{\sqrt{8-x^2-2y^2-4z^2}}$.

94. $u=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$.

95. $u=\operatorname{tg}(x^2+y^2+z^2)$.

96. $u=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2-1}$.

97. $u=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2+1}$.

Глава 12

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Частные производные

Пусть функция $z=f(M)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x;\ y)$. Придадим переменной x в точке M произвольное приращение Δx, оставляя значение переменной y неизменным. Тогда соответствующее приращение функции

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x,\ y) - f(x,\ y)$$

называется *частным приращением* функции по переменной x в точке $M\ (x;\ y)$.

Аналогично определяется частное приращение функции по переменной y:

$$\Delta_y z = f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y).$$

Определение. *Если существует предел* $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}\left(\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}\right)$, *то он называется частной производной функции* $z=f(M)$ *в точке* M *по переменной* x (*по переменной* y) *и обозначается одним из следующих символов*:

$$z_x',\ f_x',\ \frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial x}\ \left(z_y',\ f_y',\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Из определения следует, что частная производная функции двух переменных по переменной x представляет собой обыкновенную производную функции одной переменной x при фиксированном значении переменной y. Поэтому частные производные вычисляют по формулам и правилам вычисления производных функций одной переменной.

Пример. Найти частные производные функции $z=x^2-2xy^2+y^3$.

Решение. Частную производную $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ находим как производную функции $z=f(x;\ y)$ по аргументу x в предположении, что $y=\text{const}$. Поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(x^2-2xy^2+y^3)_x'=2x-2y^2+0=2\ (x-y^2).$$

Аналогично,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(x^2-2xy^2+y^3)_y'=0-4xy+3y^2=y\ (3y-4x).$$

Найти частные производные от функций:

1. $z=x^3+3x^2y-y^3$.

2. $z=\dfrac{y}{x}$.

3. $z=\dfrac{xy}{x-y}$.

4. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

5. $z=\sin\ (x+y)$.

6. $z=x^2y$.

7. $z=x^2y^3+x^3y$.

8. $z=\dfrac{x+y}{x-y}$.

9. $z=\dfrac{xy}{x+y}$. **10.** $z=x^2\sin y$.

11. $z=e^{xy}$. **12.** $z=xye^{x+2y}$.

13. $z=e^{-y/x}$. **14.** $z=\ln(x+\ln y)$.

15. $z=x\sqrt{y}+\dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$. **16.** $z=xe^{-yx}$.

17. $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$; доказать, что $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2}$.

18. $z=\sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}$; доказать, что $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{2}$.

19. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; доказать, что $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2=1$.

20. Показать, что из существования частных производных по всем переменным не следует непрерывность функции в точке. Вывести это из рассмотрения функции

$$f(x;\,y)=\begin{cases}0 & \text{на осях координат,}\\ 1 & \text{в остальных точках плоскости}\end{cases}$$

в точке (0; 0).

21. Показать, что из непрерывности функции $f(x;\,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ в точке (0; 0) не следует существование частных производных функции в этой точке.

§ 2. Производные сложных функций

Если $z=f(x;\,y)$, $x=x(t)$, $y=y(t)$, то $z=f[x(t);\,y(t)]$ является сложной функцией от t. При этом

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{1}$$

Если $z=f(x;\,y)$, где $x=x(u;\,v)$, $y=y(u;\,v)$, то

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u},\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}.\end{cases} \tag{2}$$

Пример 1. Найти производную $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=f(x;\,y)$, $x=t^3+2$, $y=3t^4-1$.

Решение. Используя формулу (1), имеем

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\,3t^2+\frac{\partial z}{\partial y}\,12t^3.$$

Пример 2. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=x^2y^2$, $x=u+v$, $y=\frac{u}{v}$.

Решение. По формулам (2) получаем

$$\frac{\partial z}{\partial u}=2xy^2\cdot 1+2x^2y\cdot\frac{1}{v};\quad \frac{\partial z}{\partial v}=2xy^2\cdot 1+2x^2y\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right).$$

22. Найти по формуле (1) $\frac{dz}{dt}$ из уравнений:

1) $z=x^2+xy+y^2$, $x=t^2$, $y=t$; 2) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=\sin t$, $y=\cos t$.

Проверить предварительной подстановкой значений x и y в выражение для функции z.

23. $z=\frac{y}{x}$, $x=e^t$, $y=1-e^{2t}$; найти $\frac{dz}{dt}$.

24. $z=x^2y^3$, $x=t$, $y=t^2$; найти $\frac{dz}{dt}$.

25. $z=x\sin\frac{x}{y}$, $x=1+3t$, $y=\sqrt{1+t^2}$; найти $\frac{dz}{dt}$.

26. $z=xe^y$, где y — функция x; найти $\frac{dz}{dx}$.

27. $z=e^{xy}\ln(x+y)$, $x=2t^2$, $y=1-2t^2$; найти $\frac{dz}{dt}$.

28. $z=x^2+xy^2$, $x=e^{2t}$, $y=\sin t$; найти $\frac{dz}{dt}$.

29. $z=\operatorname{arctg}\frac{x+1}{y}$, $y=e^{(1+x)^2}$; найти $\frac{dz}{dx}$.

30. $z=\frac{x^2}{y}$, $x=u-2v$, $y=v+2u$; найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$.

31. $z=x^2y^2$, $x=u+v$, $y=\frac{u}{v}$; найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$.

32. $z=f(x;\ y)$. Выразить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ через $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если:

1) $u=mx+ny$, $v=px+qy$; 2) $u=xy$, $v=\frac{y}{x}$.

33. $z=f(x;\,y)$, $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Выразить $\frac{\partial z}{\partial \rho}$ и $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$ через $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ и показать, что

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

§ 3. Дифференциал функции. Производная по направлению. Градиент

1. Дифференциал функции. Пусть функция $z=f(M)$ дифференцируема в точке M, т. е. ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z=f_x'(x;\,y)\,\Delta x+f_y'(x;\,y)\,\Delta y+\alpha(\Delta x,\,\Delta y)\,\Delta x+\beta(\Delta x,\,\Delta y)\,\Delta y, \quad (1)$$

где $\alpha(\Delta x,\,\Delta y)$ и $\beta(\Delta x,\,\Delta y)$ — бесконечно малые функции при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$.

Определение 1. *Дифференциалом* $\mathrm{d}z$ *дифференцируемой в точке M функции $z=f(M)$ называется линейная относительно приращений Δx и Δy часть полного приращения этой функции в точке M, т. е.*

$$\mathrm{d}z=f_x'(x;\,y)\,\Delta x+f_y'(x;\,y)\,\Delta y.$$

Дифференциалами независимых переменных x и y назовем приращения этих переменных: $\mathrm{d}x=\Delta x$, $\mathrm{d}y=\Delta y$. Тогда дифференциал функции можно записать в виде

$$\mathrm{d}z=f_x'(x;\,y)\,\mathrm{d}x+f_y'(x;\,y)\,\mathrm{d}y.$$

Из (1) следует, что

$$\Delta z\approx \mathrm{d}z,$$

т. е. при достаточно малых Δx и Δy полное приращение функции приближенно равно ее дифференциалу.

Пример 1. Найти дифференциал функции $z=xy^2$.

Решение. Находим частные производные:

$$f_x'(x;\,y)=(xy^2)_x'=y^2,\ f_y'(x;\,y)=(xy^2)_y'=2xy,$$

а затем дифференциал:

$$\mathrm{d}z=y^2\,\mathrm{d}x+2xy\,\mathrm{d}y.$$

2. Производная по направлению. Пусть $z=f(M)$ — функция, определенная в некоторой окрестности точки $M(x;\,y)$; $\bar{l}=\{\cos\alpha;\,\cos\beta\}$ — единичный вектор; L — направленная прямая, проходящая через точку M; $M_1(x+\Delta x;\,y+\Delta y)$ — точка на прямой L (рис. 51); Δl — величина отрезка MM_1; $\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\,y)$ — приращение функции $f(M)$ в точке $M(x;\,y)$.

Определение 2. *Предел отношения $\frac{\Delta z}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0$ ($M_1 \to M$), если он существует, называется производной функции $z=f(M)$ в точке $M(x; y)$ по направлению вектора $\bar{l}$ и обозначается $\frac{\partial z}{\partial l}$, т. е.* $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial l}$.

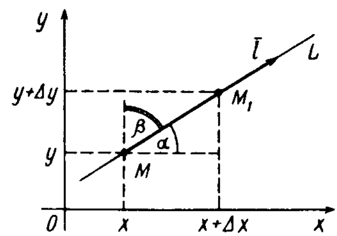


Рис. 51

Если функция $f(M)$ дифференцируема в точке $M(x; y)$, то в точке $M(x; y)$ существует производная по любому направлению $\bar{l}$, исходящему из M; вычисляется она по следующей формуле:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta, \tag{2}$$

где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ — направляющие косинусы вектора $\bar{l}$.

Пример 2. Вычислить производную функции $z=x^2+y^2x$ в точке $M(1; 2)$ по направлению вектора $\overline{MM_1}$, где M_1 — точка с координатами (3; 0).

Решение. Найдем единичный вектор $\bar{l}$, имеющий данное направление:

$$\overline{MM_1} = \{2; -2\} = 2\bar{i} - 2\bar{j};\ |\overline{MM_1}| = 2\sqrt{2};\ \bar{l} = \frac{\overline{MM_1}}{|\overline{MM_1}|} = \frac{2\bar{i}-2\bar{j}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j},$$

откуда $\cos\alpha = 1/\sqrt{2}$, $\cos\beta = -1/\sqrt{2}$. Вычислим частные производные функции в точке $M(1; 2)$: $f'_x(x; y) = 2x+y^2$, $f'_y(x; y) = 2xy$, откуда $f'_x(1; 2) = 6$, $f'_y(1; 2) = 4$. По формуле (2) получим

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 6\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

3. Градиент. Определение 3. *Градиентом функции $z=f(M)$ в точке $M(x; y)$ называется вектор, координаты которого равны соответствующим частным производным $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, взятым в точке $M(x; y)$.*

Обозначение: $\operatorname{grad} z = \left\{\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}\right\}$. (3)

Пример 3. Найти градиент функции $z=x^2+2y^2-5$ в точке $M(2; -1)$.

Решение. Находим частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 4y$ и их значения в точке $M(2; -1)$: $f'_x(2; -1) = 2\cdot 2 = 4$; $f'_y(2; -1) = -4$.

По формуле (3) получим

$$\operatorname{grad} z=\{4;\ -4\}.$$

Аналогично определяются дифференциал функции и производная по направлению для функции трех переменных $u=f(x, y, z)$, выводятся формулы

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\,\mathrm{d}z \text{ и } \frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

вводится понятие градиента

$$\operatorname{grad} u=\left\{\frac{\partial u}{\partial x};\ \frac{\partial u}{\partial y};\ \frac{\partial u}{\partial z}\right\}.$$

Найти дифференциалы следующих функций:

34. $z=xy$.

35. $z=\sqrt{x^2-y^2}$.

36. $z=\sin xy^2$.

37. $z=\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$.

38. $z=\ln(x+5y^2)$.

39. $z=y^x$.

40. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{\sqrt{x}}$.

41. $z=xy\cos xy$.

42. $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

43. $z=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{x-y}$.

44. $z=\arccos\dfrac{x-y}{2x+y}$.

45. $z=e^{\sin^2(x^2+y^2)}$.

46. Найти производную по направлению биссектрисы первого координатного угла в точке M (1; 1) функции $z=x^3y-5xy^2+8$.

47. Найти производную по направлению функции $z=\ln(e^x+e^y)$. Рассмотреть направление, параллельное биссектрисе первого координатного угла.

48. Найти производную по направлению функции $z=x^2+y^2$ в точке M (1; 1). Рассмотреть случаи, когда направление составляет с осью Ox угол: 1) $\pi/3$; 2) $\pi/6$; 3) $\pi/2$.

49. Найти производную функции $u=x^2-2xz+y^2$ в точке M (1; 2; -1) по направлению вектора $\overline{MM_1}$, где M_1 — точка с координатами (2; 4; -3).

50. Найти производную функции $u=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-z^2$ в точке M (2; 3; 1). Рассмотреть случаи, когда направление совпадает: 1) с направлением радиуса-вектора этой точки; 2) с направлением вектора $\bar{a}=4\bar{i}-3\bar{j}$.

Найти $\operatorname{grad} z$:

51. $z=4-x^2-y^2$ точке M (1; 2).

52. $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2+1}$ в точке M (0; 3).

53. $z=(x-y)^2$ в точке M (1; 1).

54. $z=e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$ в точке M (1; 1).

Найти grad u и |grad u|:

55. $u=x^2+y^2-z^2$ в точке M (1; -1; 2).

56. $u=4-x^2-y^2+z^2$ в точке M (3; 2; 1).

57. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в точке M (-1; 2; 0).

58. $u=xyz$ в точке M (3; -1; 2).

§ 4. Частные производные и дифференциалы высших порядков

1. Частные производные высших порядков. Пусть функция $z=f(M)$ имеет частные производные $f_x'(x;y)$ и $f_y'(x;y)$ (они называются частными производными *первого порядка*) в каждой точке некоторой окрестности точки M. Если $f_x'(x;y)$ и $f_y'(x;y)$ имеют в точке M частные производные по переменным x и y, то они называются частными производными *второго порядка* от функции $f(M)$ в этой точке и обозначаются следующими символами:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x;y)=f^{(2)}_{x^2}(x;y);\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=f''_{yx}(x;y)=f^{(2)}_{yx}(x;y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x;y)=f^{(2)}_{y^2}(x;y);\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=f''_{yy}(x;y)=f^{(2)}_{xy}(x;y).$$

Частные производные второго порядка вида $f''_{yx}(x;y)$, $f''_{xy}(x;y)$ называются *смешанными* частными производными.

Частные производные третьего порядка определяются как частные производные от частных производных второго порядка и т. д.

Пример 1. Найти частные производные второго порядка функции $z=x^4+4x^2y^3+7xy+1$.

Решение. Сначала находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3+8xy^3+7y;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=12x^2y^2+7x.$$

Затем находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2+8y^3,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=24xy^2+7,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=24x^2y.$$

2. Дифференциалы высших порядков. Дифференциал $\mathrm{d}z$ называется дифференциалом *первого порядка*. Дифференциал от дифференциала $\mathrm{d}z$ называется дифференциалом *второго порядка* функции $z=f(M)$ и вычисляется по формуле

$$\mathrm{d}^2 z=f''_{xx}(\mathrm{d}x)^2+2f''_{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+f''_{yy}(\mathrm{d}y)^2. \tag{1}$$

Символически это равенство можно записать так: $\mathrm{d}^2 z=\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)^2 f(x;\,y)$. Аналогично,

$$\mathrm{d}^3 z=\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)^3 f(x;\,y)=f'''_{x^3}(\mathrm{d}x)^3+3f'''_{x^2y}(\mathrm{d}x)^2\,\mathrm{d}y+$$
$$+3f'''_{xy^2}\,\mathrm{d}x\,(\mathrm{d}y)^2+f'''_{y^3}(\mathrm{d}y)^3$$

и т. д.

Пример 2. Найти $\mathrm{d}^2 z$ для функции $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

Решение. Непосредственным дифференцированием находим:

$$f'_x=\frac{y}{x^2+y^2},\ f'_y=-\frac{x}{x^2+y^2},\ f''_{xy}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=f''_{yx},$$
$$f''_{x^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\ f''_{y^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Отсюда по формуле (1) получаем

$$\mathrm{d}^2 z=\frac{-2xy\,(\mathrm{d}x)^2+2\,(x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+2xy\,(\mathrm{d}y)^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Найти частные производные второго порядка:

59. $z=\frac{x^2}{1-2y}$.

60. $z=\sin x\cos y$.

61. $z=x+y+\frac{xy}{x-y}$.

62. $z=xe^y$.

63. $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{x}$.

64. $z=\ln(x+e^{xy})$.

65. $z=x^{2y}$.

66. $z=e^x(\cos y+x\sin y)$.

Проверить, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ для функций:

67. $z=\frac{x^2}{y^2}$.

68. $z=\ln(x-2y)$.

69. $z=\dfrac{x^2}{1-y}$.

70. $z=x^2\sin\sqrt{y}$.

71. $z=y^{x^2}$.

72. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

73. $z=e^x\cos y$. Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

74. $z=\dfrac{xy}{x-y}$. Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{2}{x-y}$.

Найти частные производные третьего порядка:

75. $z=x^4+5y^3+3x-y$.

76. $z=\sin(3x-2y)$.

77. $z=\dfrac{x}{y}$.

78. $z=x^2y^3$.

79. $z=xe^y+ye^x$. Найти все производные третьего порядка.

80. $u=xz+e^{yz}+y$. Показать, что

1) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}=\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial x}$;

2) $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y\,\partial z}=\dfrac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial z\,\partial y\,\partial x}$.

Найти d^2z:

81. $z=e^{3x-2y}$.

82. $z=\sin(x^2+y^2)$.

83. $z=y\ln x$.

84. $z=x\ln\dfrac{y}{x}$.

85. $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

86. $z=x+xy$.

87. $z=e^{x+y^2}$.

88. $z=x\sin^2 y$.

Найти d^3z:

89. $z=y\ln x$.

90. $z=x+y+xy$.

91. $z=ye^{y-x}$.

92. $z=\sin x\cos y$.

93. Найти d^4z для функции $z=3x^2y+2xy^2-5x+y^4$.

§ 5. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x;\,y;\,z)=0$ в точке $M_0(x_0;\,y_0;\,z_0)$ имеет вид

$$F_x'(x-x_0)+F_y'(y-y_0)+F_z'(z-z_0)=0. \qquad (1)$$

Уравнение нормали к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке $M_0(x_0;\,y_0;\,z_0)$ имеет вид

$$\frac{x-x_0}{F_x'}=\frac{y-y_0}{F_y'}=\frac{z-z_0}{F_z'}.$$

Если поверхность задана уравнением $z=f(x;y)$, то его можно переписать в виде $f(x;y)-z=0$; тогда имеем $F(x, y, z)=f(x;y)-z$, отсюда получаем $F_x'=f_x'$, $F_y'=f_y'$ и $F_z'=-1$. Уравнение (1) в этом случае принимает вид

$$f_x'(x-x_0)+f_y'(y-y_0)-(z-z_0)=0, \qquad (2)$$

а уравнение нормали будет иметь вид

$$\frac{x-x_0}{f_x'}=\frac{y-y_0}{f_y'}=\frac{z-z_0}{-1}. \qquad (3)$$

Пример. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности параболоида вращения $z=x^2+y^2$ в точке $M_0(1;1;2)$.

Решение. Так как поверхность задана уравнением $z=f(x;y)$, то для уравнения касательной пользуемся формулой (2): $f_x'=2x$, $f_y'=2y$; $f_x'(1;1)=2$, $f_y'(1;1)=2$, тогда получаем

$$2(x-1)+2(y-1)-(z-2)=0 \text{ или } 2x+2y-z+2=0.$$

Уравнение нормали по формуле (3) пишем в виде

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}.$$

Написать уравнения касательной плоскости и нормали к следующим поверхностям:

94. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ в точке $M_0(1;2;2)$.

95. $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$ в точке $M_0(2;3;2)$.

96. $z=xy$ в точке $M_0(3;4;12)$.

97. $z=x^2-y^2$ в точке $M_0(5;4;9)$.

98. $z=\sin\frac{x}{y}$ в точке $M_0(\pi;1;0)$.

99. $x^2+y^2+z^2=26$ в точке $M_0(3;4;1)$.

100. $x^2+y^2-z^2=1$ в точке $M_0(1;2;2)$.

101. $x^2-y^2-z^2=1$ в точке $M_0(3;2;2)$.

102. $(z^2-x^2)xyz-y^5=5$ в точке $M_0(1;1;2)$.

103. $e^z-z+xy=3$ в точке $M_0(2;1;0)$.

104. К поверхности $3x^2+2y^2+z^2=21$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости $6x-4y-z=0$.

105. К поверхности $xy+z^2+xz=1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x+2z-y=0$.

106. К сфере $x^2+y^2+z^2=2x$ провести касательную плоскость, перпендикулярную плоскостям $x-y-z=2$ и $x-y-\frac{1}{2}z=2$.

107. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $xyz=a^3$ ($a>0$) образуют с плоскостями координат тетраэдр постоянного объема.

108. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ ($a>0$) отсекают на осях координат отрезки, сумма которых постоянна.

§ 6. Экстремумы функции двух переменных

Необходимые условия экстремума функции $f(x;\ y)$ в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ возможного экстремума заключаются в выполнении в этой точке равенств $f_x'(x_0;\ y_0)=f_y'(x_0;\ y_0)=0$. При этом функция $f(x;\ y)$ имеет в данной точке максимум, если

$$\Delta=f_{xx}''(x_0;\ y_0)\cdot f_{yy}''(x_0;\ y_0)-[f_{xy}''(x_0;\ y_0)]^2>0 \text{ и } f_{xx}''(x_0;\ y_0)<0,$$

и минимум, если $\Delta>0$ и $f_{xx}''>0$ (при условии непрерывности частных производных). Если $\Delta<0$, то в точке M_0 нет экстремума. Если $\Delta=0$, то функция $f(x;\ y)$ в точке M_0 может иметь экстремум, но может и не иметь его.

Пример. Найти экстремум функции $z=x^2+xy+y^2-2x-3y$.

Решение. Имеем $f_x'=2x+y-2$, $f_y'=x+2y-3$. Найдем точки возможного экстремума. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases}2x+y-2=0,\\ x+2y-3=0,\end{cases}$$

решения которой $x=1/3$, $y=4/3$. Следовательно, $M_0(1/3;\ 4/3)$ — точка возможного экстремума.

Теперь найдем вторые частные производные и Δ: $f_{xx}''=2$, $f_{xy}''=1$, $f_{yy}''=2$, $\Delta=2\cdot 2-1=3$. Так как $\Delta=3>0$ и $f_{xx}''=2>0$, то в точке $M_0(1/3;\ 4/3)$ данная функция имеет минимум.

Найти экстремумы функций:

109. $z=x^2+y^2+xy-4x-5y$.

110. $z=y^2-x^2+xy-2x-6y$.

111. $z=xy(1-x-y)$.

112. $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$.

113. $z=e^{x/2}(x+y^2)$.

114. $z=x^3-y^3-3xy$.

115. $z=3x+6y-x^2-xy+y^2$.

116. $z=x^3+8y^3-6xy+1$.

117. $z=2xy-4x-2y$.

118. $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$.

119. $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$ при $0\leqslant x\leqslant\pi/2$, $0\leqslant y\leqslant\pi/2$.

120. $z=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$ при $0\leqslant x\leqslant\pi/2$, $0\leqslant y\leqslant\pi/2$.

121. Определить размеры прямоугольного открытого бассейна, имеющего наименьшую поверхность, при условии, что его объем равен V.

122. Определить размеры цилиндра наибольшего объема при условии, что его полная поверхность равна $S=6\pi$ дм^2.

123. В круг вписать треугольник, сумма квадратов сторон которого наибольшая.

124. Определить размеры конуса наибольшего объема при условии, что его боковая поверхность равна S.

125. Из всех прямоугольных треугольников с данной гипотенузой l найти треугольник наибольшего периметра.

126. Число p разложить на n множителей так, чтобы сумма их была наименьшей.

127. Из всех эллипсов, у которых сумма осей постоянна и равна m, найти наибольший по площади.

128. Около данного квадрата описать квадрат наибольшей площади.

Глава 13

ИНТЕГРИРОВАНИЕ

§ 1. Двойной интеграл

1. Случай прямоугольной области. Двойной интеграл по прямоугольной области $D=\{(x;\ y) \mid a\leqslant x\leqslant b;\ c\leqslant y\leqslant d\}$ вычисляется по формулам

$$\iint\limits_D f(x;\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_a^b \mathrm{d}x\int\limits_c^d f(x;\ y)\,\mathrm{d}y,$$

$$\iint\limits_D f(x;\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_c^d \mathrm{d}y\int\limits_a^b f(x;\ y)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

В формуле (1), например, интегрирование сначала производится по x при постоянном y, а затем полученный результат интегрируется по y, т. е. последовательно вычисляются два определенных интеграла.

Пример 1. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где

$$D=\{(x;\ y)|\ 1\leqslant x\leqslant 2;\ 1\leqslant y\leqslant 2\}.$$

Решение. В соответствии с формулой (1)

$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_1^2 \mathrm{d}y\int\limits_1^2 xy\,\mathrm{d}x.$$

Вычисляем внутренний интеграл, считая y постоянным:

$$\int\limits_1^2 xy\,\mathrm{d}x=y\,\frac{x^2}{2}\Big|_{x=1}^{x=2}=2y-\frac{1}{2}\,y.$$

Вычисляем внешний интеграл, для чего полученную функцию интегрируем по y в пределах от 1 до 2:

$$\int_1^2 \left(2y-\frac{1}{2}y\right) dy = \frac{3}{4} y^2 \Big|_1^2 = \frac{9}{4}.$$

Следовательно,

$$\iint_D xy \, dx \, dy = \int_1^2 dy \int_1^2 xy \, dx = \frac{9}{4}.$$

2. Случай криволинейной области. Двойной интеграл по криволинейной области $G=\{(x;\ y) |\ a \leqslant x \leqslant b;\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}$ вычисляется по формуле

$$\iint_G f(x;\ y) \, dx \, dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;\ y) \, dy. \qquad (2)$$

Если уравнения кривых, ограничивающих область G, можно написать в виде $x_1(y)$, $x_2(y)$, причем $x_1(y) \leqslant x_2(y)$ для $c \leqslant y \leqslant d$, то двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint_G f(x;\ y) \, dx \, dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x;\ y) \, dx.$$

Пример 2. Вычислить двойной интеграл $\iint_G (x+y) \, dx \, dy$, где $G=\{(x;\ y) |\ 0 \leqslant x \leqslant 1;\ x \leqslant y \leqslant 2-x^2\}$.

Решение. Область G ограничена слева и справа прямыми $x=0$ и $x=1$; $y=x$ и $y=2-x^2$ — уравнения линий, ограничивающих эту область снизу и сверху, т. е. $y_1(x)=x$ и $y_2(x)=2-x^2$ (рис. 52). В соответствии с формулой (2)

$$\iint_G (x+y) \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} (x+y) \, dy.$$

Вычисляем внутренний интеграл, считая x постоянным:

$$\int_x^{2-x^2} (x+y) \, dy = \left(xy+\frac{y^2}{2}\right) \Bigg|_{y=x}^{y=2-x^2} =$$

$$= \left[x(2-x^2)+\frac{(2-x^2)^2}{2}\right] - \left(xx+\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^4}{2} - x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x + 2.$$

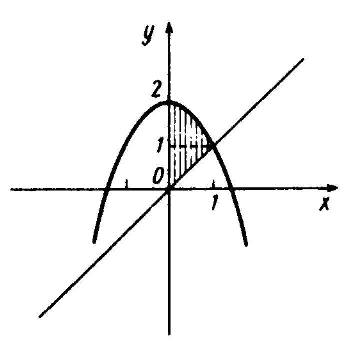


Рис. 52

Вычисляем внешний интеграл:

$$\int_0^1\left(\frac{x^4}{2}-x^3-\frac{7}{2}x^2+2x+2\right)dx=\left(\frac{x^5}{10}-\frac{x^4}{4}-\frac{7}{6}x^3+x^2+2x\right)\Bigg|_0^1=\frac{101}{60}.$$

Следовательно,

$$\iint_G (x+y)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_x^{2-x^2}(x+y)\,dy=\frac{101}{60}.$$

Вычислить двойные интегралы по указанным прямоугольникам D:

1. $\iint_D xy\,dx\,dy;\quad 3\leqslant x\leqslant 5,\ 0\leqslant y\leqslant 1.$

2. $\iint_D xy^2\,dx\,dy;\quad 2\leqslant x\leqslant 4,\ 0\leqslant y\leqslant 1.$

3. $\iint_D x^2y\,dx\,dy;\quad 3\leqslant x\leqslant 6,\ 0\leqslant y\leqslant 2.$

4. $\iint_D \frac{y}{x}\,dx\,dy;\quad 1\leqslant x\leqslant e,\ 4\leqslant y\leqslant 6.$

5. $\iint_D (x-y)\,dx\,dy;\quad 1\leqslant x\leqslant 4,\ 1\leqslant y\leqslant 3.$

6. $\iint_D (x+y)\,dx\,dy;\quad 3\leqslant x\leqslant 5,\ 0\leqslant y\leqslant 2.$

7. $\iint_D (x+y^2)\,dx\,dy;\quad 2\leqslant x\leqslant 3,\ 1\leqslant y\leqslant 2.$

8. $\iint_D (x^2+y)\,dx\,dy;\quad 1\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 1.$

9. $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy;\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1.$

10. $\iint_D \frac{3y^2\,dx\,dy}{1+x^2};\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1.$

11. $\iint_D (3yx^2-2x^3)\,dx\,dy;\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\ 1\leqslant y\leqslant 2.$

12. $\iint_D \sin(x+y)\,dx\,dy;\quad 0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2},\ 0\leqslant y\leqslant \frac{\pi}{2}.$

13. $\iint_D xe^{xy}\,dx\,dy;\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\ -1\leqslant y\leqslant 0.$

14. $\iint_D \frac{dx\,dy}{(x-y)^2};\quad 1\leqslant x\leqslant 2,\ 3\leqslant y\leqslant 4.$

Вычислить двойные интегралы по областям G, ограниченным указанными линиями:

15. $\iint\limits_G (x-y)\,dx\,dy$; $x=0,\ y=0,\ x+y=2$.

16. $\iint\limits_G xy\,dx\,dy$; $y=0,\ y=x,\ x=1$.

17. $\iint\limits_G xy\,dx\,dy$; $y=x^2,\ y^2=x$.

18. $\iint\limits_G x\,dx\,dy$; $y=x^3,\ x+y=2,\ x=0$.

19. $\iint\limits_G x\,dx\,dy$; $xy=6,\ x+y-7=0$.

20. $\iint\limits_G y^2x\,dx\,dy$; $x^2+y^2=4,\ x+y-2=0$.

21. $\iint\limits_G (x+y)\,dx\,dy$; $0\leqslant y\leqslant \pi,\ 0\leqslant x\leqslant \sin y$.

22. $\iint\limits_G \sin(x+y)\,dx\,dy$; $x=y,\ x+y=\frac{\pi}{2},\ y=0$.

23. $\iint\limits_G y\,dx\,dy$; G — круг радиуса R с центром в начале координат.

24. $\iint\limits_G e^{-y^2}\,dx\,dy$; G — треугольник с вершинами $O(0;\ 0)$, $B(0;\ 1)$, $A(1;\ 1)$.

25. $\iint\limits_G x\,dx\,dy$; G — область, ограниченная осью Ox и аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

26. $\iint\limits_G xy\,dx\,dy$; G — область, ограниченная осями координат и частью астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $\left(0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

§ 2. Замена переменных в двойном интеграле

Замена переменных в двойном интеграле производится по формуле

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_{G^*} f[x(u, v), y(u, v)]\left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| du\,dv, \qquad (1)$$

где G^* — область, в которую преобразовалась область G при отображении $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$; $f[x(u, v), y(u, v)]$ —

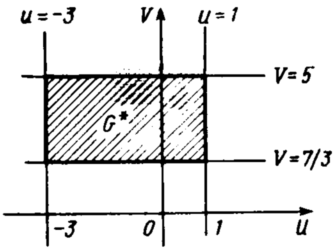


Рис. 53

подынтегральная функция, преобразованная к новым переменным u и v; $\left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right|$ — функциональный определитель, или якобиан, функций $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$ по u и v:

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пример 1. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G (y-x)\,dx\,dy$, где G — область, ограниченная прямыми $y=x+1$, $y=x-3$, $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$, $y=-\frac{1}{3}x+5$.

Решение. Непосредственное вычисление данного интеграла было бы затруднительным, однако простая замена переменных

$$u=y-x, \quad v=y+\frac{1}{3}x \tag{2}$$

позволяет значительно упростить решение. Прямые $y=x+1$, $y=x-3$ в системе координат Oxy переходят в прямые $u=1$, $u=-3$ на плоскости Ouv; прямые же $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$, $y=-\frac{1}{3}x+5$ перейдут в прямые $v=7/3$, $v=5$. Следовательно, заданная область G взаимно однозначно преобразуется в прямоугольник G^*, который является более простой областью интегрирования (рис. 53). Осталось вычислить якобиан. Для этого выразим x и y через u и v из равенств (2):

$$x=-\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}v, \quad y=\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}v.$$

Следовательно,

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)}=\begin{vmatrix} -3/4 & 3/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{vmatrix}=-\frac{9}{16}-\frac{3}{16}=-\frac{3}{4}.$$

По формуле (1) окончательно получаем

$$\iint\limits_G (y-x)\,dx\,dy=\iint\limits_{G^*}\left[\left(\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}v\right)-\left(-\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}v\right)\right]\frac{3}{4}\,du\,dv=$$

$$=\iint\limits_{G^*}\frac{3}{4}u\,du\,dv=\int\limits_{7/3}^{5}dv\int\limits_{-3}^{1}\frac{3}{4}u\,du=-8.$$

Пример 2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G (x^2+y^2)\,dx\,dy$, где G — круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=2x$, перейдя к полярным координатам.

Решение. Применим формулу (1), предварительно выразив уравнения границ области G и подынтегральную функцию в полярных координатах.

Круг G изображен на рис. 54, *а*. Он ограничен окружностью $x^2+y^2=2x$ или $(x-1)^2+y^2=1$. Формулы, связывающие $(x;\ y)$ и полярные координаты $(\rho;\ \varphi)$ с полюсом в точке $O\ (0;\ 0)$, имеют вид

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi. \tag{3}$$

Подставляя выражения (3) в уравнение окружности, получим $\rho^2=2\rho\cos\varphi$, откуда $\rho=0$ или $\rho=2\cos\varphi$ (уравнение окружности в полярных координатах). Эти две кривые на плоскости $(\rho;\ \varphi)$ при $-\pi/2\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$ ограничивают область G^*, являющуюся прообразом области G (рис. 54, *б*). Подынтегральная функция x^2+y^2 в полярных координатах равна ρ^2. Якобиан

$$\frac{D(x,\ y)}{D(\rho,\ \varphi)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho\,(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=\rho.$$

Таким образом, по формуле (1) получаем

$$\iint\limits_G (x^2+y^2)\,dx\,dy=\iint\limits_{G^*}\rho^3\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^3\,d\rho=$$

$$=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{2\cos\varphi}d\varphi=4\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\varphi\,d\varphi=4\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi=$$

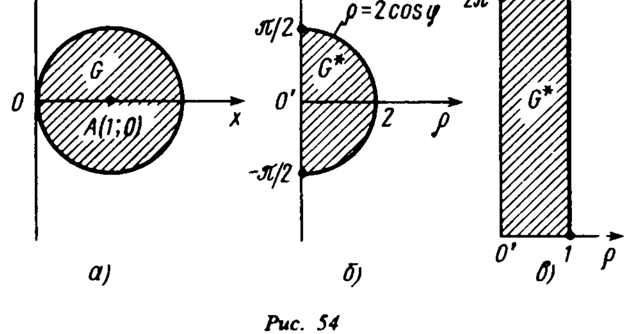


Рис. 54

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1+2\cos 2\varphi+\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)\mathrm{d}\varphi=\left(\frac{3}{2}\,\varphi+\sin 2\varphi+\frac{1}{8}\,\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{3}{2}\,\pi.$$

Замечание. Замена переменных в двойном интеграле производится с целью упрощения области интегрирования. Если в данном примере перейти к полярным координатам в точке A (1; 0) (центре круга), т. е. по формулам $x-1=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, то прообразом круга G окажется прямоугольник (наиболее простая область интегрирования) $G^*=\{(\rho;\ \varphi)|\ 0\leqslant\rho\leqslant 1;\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$ (рис. 54, *в*). Выражение для подынтегральной функции примет вид $x^2+y^2=1+2\rho\cos\varphi+\rho^2$. В этом случае по формуле (1), естественно, получим тот же результат:

$$\iint\limits_G (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{G^*} (1+2\rho\cos\varphi+\rho^2)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^1 (\rho+2\rho^2\cos\varphi+\rho^3)\,\mathrm{d}\rho=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cos\varphi\right)\mathrm{d}\varphi=\frac{3}{2}\,\pi.$$

Вычислить следующие интегралы, перейдя к полярным координатам:

27. $\iint\limits_G (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; G — половина круга радиуса R с центром в начале координат, лежащая в области $y\geqslant 0$.

28. $\iint\limits_G \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; G — четверть круга $x^2+y^2=1$, расположенная в I квадранте.

29. $\iint\limits_G \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; G — круг радиуса R с центром в начале координат.

30. $\iint\limits_G \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; G — круг $x^2+y^2=x$.

31. $\iint\limits_G \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; G — четверть круга $x^2+y^2=1$, расположенная в I квадранте.

32. $\iint\limits_G \dfrac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; G — кольцо между окружностями радиусов e и 1 с центром в начале координат.

33. Доказать, что замена переменных $x+y=u$, $y=u\mathrm{v}$ переводит треугольник, стороны которого лежат на прямых $x=0$, $y=0$, $y=1-x$, в квадрат $\{(u;\ \mathrm{v})|\ 0\leqslant u\leqslant 1,\ 0\leqslant \mathrm{v}\leqslant 1\}$.

34. Найти замену переменных $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, при которой область G, ограниченная кривыми $xy=1$, $xy=4$, $x-2y-2=0$, $x-2y+1=0$ $(x>0, y>0)$, перейдет в прямоугольник G^*, стороны которого параллельны осям координат на плоскости (u, v).

35. Найти замену переменных $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, при которой область G, ограниченная кривыми $xy=1$, $xy=2$, $x-y+1=0$, $x-y-1=0$ $(x>0, y>0)$, перейдет в прямоугольник G^*, стороны которого параллельны осям координат на плоскости (u, v).

Вычислить интегралы с помощью замены переменных:

36. $\iint\limits_G xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; G — область, ограниченная линиями $xy=1$, $x+y=5/2$.

37. $\iint\limits_G e^{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; G — область, которая определяется неравенствами $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y=1$.

38. $\iint\limits_G (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; G — область, ограниченная окружностями $x^2+y^2+2x-1=0$ и $x^2+y^2+2x=0$.

39. $\iint\limits_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; G — область, которая ограничена параболами $y^2=2x$, $y^2=3x$ и гиперболами $xy=1$, $xy=2$.

40. $\iint\limits_G x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; G — область, которая ограничена гиперболами $xy=p$, $xy=q$ $(0<p<q)$, прямыми $y=ax$, $y=bx$ $(0<a<b)$ и расположена в I квадранте.

41. $\iint\limits_G \dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+a^2-b^2)-4(a^2-b^2)x^2}}$; G — область, ограниченная эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$.

§ 3. Некоторые геометрические и физические приложения двойных интегралов

1. Вычисление объема. Двойной интеграл $\iint\limits_G f(x; y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где $f(x; y)\geqslant 0$, выражает объем криволинейного цилиндра, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x; y)>0$, снизу — плоскостью $z=0$, с боковых сторон — цилиндрической поверхностью, у которой образующие параллельны оси Oz, а направляющей служит контур области G.

Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

42. $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1.$
43. $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y=1,\ z=x^2+y^2.$
44. $z=x+y+a,\ y^2=ax,\ x=a,\ z=0,\ y=0$ (при $y>0$).
45. $z^2=xy,\ x=a,\ x=0,\ y=a,\ y=0.$
46. $z=x^2+y^2,\ y=x^2,\ y=1,\ z=0.$
47. $az=x^2-y^2,\ z=0,\ x=a.$
48. $z^2=xy,\ x+y=a.$
49. $z=xy,\ x+y=a,\ z=0.$

Перейдя к полярным координатам, вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

50. $z=\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2=a^2,\ z=0.$
51. $z=x^2+y^2,\ x^2+y^2=a^2,\ z=0.$
52. $z=x,\ x^2+y^2=a^2,\ z=0.$
53. $z=x^2+y^2,\ x=x^2+y^2,\ 2x=x^2+y^2,\ z=0.$
54. $x^2+y^2+z^2=2z,\ x^2+y^2=z.$
55. Вычислить объем шара, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2=R^2$.
56. Найти объем пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.
57. Найти объем усеченной призмы, ограниченной координатными плоскостями и плоскостями $x=2,\ y=3,\ x+y+z=4$.
58. Найти объем части цилиндра $x^2+y^2=R^2$, снизу ограниченного плоскостью $z=0$, а сверху срезанного плоскостью $z=y$.

2. Вычисление площади. Двойной интеграл $\iint\limits_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ выражает площадь области G.

Вычислить площади областей, ограниченных линиями:
59. $y^2=x+1,\ x+y=1.$
60. $xy=4,\ x=1,\ y=2.$
61. $xy=4,\ y=x,\ x=4.$
62. $y=x^2,\ 4y=x^2,\ y=4.$
63. $y^2=4+x,\ x+3y=0.$
64. $y=\ln x,\ x-y=1,\ y=-1.$
65. $y=x^2-2x,\ y=x.$
66. $ax=y^2-2ay,\ y+x=0.$
67. $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x=0.$
68. $y^2=a^2-ax,\ y=a+x.$
69. $xy=\frac{a^2}{2},\ xy=2a^2,\ y=x/2,\ y=2x.$
70. $y^2=ax,\ y^2=16ax,\ ay^2=x^3,\ 16ay^2=x^3.$
71. $x^2=ay,\ x^2=by,\ y^2=cx,\ y^2=\mathrm{d}x\ (0<a<b,\ 0<c<d).$
72. Эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

Перейдя к полярным координатам, найти площади фигур, ограниченных линиями:

73. $x^2+y^2-2ax=0$, $x^2+y^2-2bx=0$ $(0<a<b)$.

74. $x^2+y^2=a^2$, $x^2+y^2-2ax=0$, $y=0$.

75. $(x-a)^2+y^2=a^2$, $x^2+(y-a)^2=a^2$.

76. $x^2+y^2-2ax=0$, $x^2+y^2-ax=0$.

3. Вычисление площади поверхности. Если поверхность задается уравнением $z=f(x;\ y)$, то ее площадь выражается двойным интегралом $\iint\limits_G \sqrt{1+f_x'^2(x;\ y)+f_y'^2(x;\ y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где G — проекция поверхности на плоскость Oxy.

77. Вычислить площадь той части плоскости $6x+3y+2z=12$, которая заключена в первом октанте.

78. Вычислить площадь боковой поверхности кругового конуса с радиусом основания R и высотой H.

79. Вычислить площадь той части плоскости $x+y+z=2a$, отсекаемой плоскостями $x=0$, $y=0$, $x=a$, $y=a$.

80. Вычислить площадь той части плоскости $x+y+z=2a$, вырезаемой цилиндром $x^2+y^2=a^2$.

81. Вычислить площадь той части параболоида $z=x^2+y^2$, вырезаемой цилиндром $x^2+y^2=4$.

82. Вычислить площадь той части параболоида $2z=x^2+y^2$, вырезаемой цилиндром $x^2+y^2=1$.

83. Вычислить площадь той части конуса $z^2=x^2+y^2$, вырезаемой цилиндром $x^2+y^2=a^2$ и расположенной над плоскостью Oxy.

84. Найти площадь части сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=Rx$.

85. Найти площадь поверхности шара радиуса R.

4. Вычисление координат центра масс и момента инерции однородной пластинки. Координаты центра масс однородной пластинки (при плотности $\rho=1$) выражаются двойными интегралами:

$$x_c=\frac{\iint\limits_G x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint\limits_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y};\quad y_c=\frac{\iint\limits_G y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint\limits_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}.$$

Интегралы $M_x=\iint\limits_G y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $M_y=\iint\limits_G x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ называются *статическими моментами* пластинки относительно осей Ox и Oy.

Интегралы

$$I_x=\iint\limits_G y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\quad I_y=\iint\limits_G x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\quad I_0=\iint\limits_G (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

выражают моменты инерции пластинки G относительно осей Ox, Oy и начала координат.

Найти координаты центра масс однородной пластинки, ограниченной линиями:

86. Двумя параболами $y^2=x$ и $x^2=y$.

87. $y=0$ и одной полуволной синусоиды $y=\sin x$.
88. $y=x^2$, $x=4$, $y=0$.
89. $y^2=ax$, $y=x$.
90. $x^2+y^2=a^2$ и $y=0$.
91. Полусегмента параболы $y^2=ax$, $x=a$, $y=0$ (при $y>0$).
92. Полуэллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, отсеченного осью Ox.
93. Полукольца между окружностями радиусов R и r, $R>r$.
94. Фигуры, ограниченной синусоидой $y=\sin x$, осью Ox и прямой $x=\pi/4$.
95. Фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho=a\,(1+\cos\varphi)$.

Вычислить момент инерции однородной пластинки, ограниченной линиями:

96. $y=\frac{x}{2}$, $x=a$, $y=a$ относительно оси Ox.
97. $y=a+\frac{x^2}{a}$, $y=2x$, $x=0$ относительно оси Oy.
98. $x+y=2$, $x=2$, $y=2$ относительно оси Ox.
99. $y=4-x^2$ и осью Ox относительно оси Oy.
100. Полукруга относительно его диаметра.
101. Круга относительно его центра.
102. Прямоугольника относительно основания a и высоты h.

§ 4. Криволинейные интегралы. Формула Грина

1. Криволинейные интегралы. Вычисление криволинейного интеграла первого рода $\int\limits_{AB} f(x;\,y)\,\mathrm{d}l$ сводится к вычислению определенного интеграла:

$$\int\limits_{AB} f(x;\,y)\,\mathrm{d}l=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t),\,\psi(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Здесь $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ — параметрические уравнения кривой AB.

В частности, если кривая AB задана уравнением $y=y(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, то

$$\int\limits_{AB} f(x;\,y)\,\mathrm{d}l=\int\limits_{a}^{b} f[x;\,y(x)]\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Криволинейные интегралы второго рода

$$\int\limits_{AB} P(x;\,y)\,\mathrm{d}x,\quad \int\limits_{AB} Q(x;\,y)\,\mathrm{d}y,\quad \int\limits_{AB} P(x;\,y)\,\mathrm{d}x+Q(x;\,y)\,\mathrm{d}y$$

также вычисляются сведением их к определенным интегралам по формулам:

$$\int\limits_{AB} P(x;y)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\alpha}^{\beta} P[\varphi(t),\psi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t;$$

$$\int\limits_{AB} Q(x;y)\,\mathrm{d}y=\int\limits_{\alpha}^{\beta} Q[\varphi(t),\psi(t)]\,\psi'(t)\,\mathrm{d}t;$$

$$\int\limits_{AB} P(x;y)\,\mathrm{d}x+Q(x;y)\,\mathrm{d}y=$$
$$=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\{P[\varphi(t),\psi(t)]\,\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\,\psi'(t)\}\,\mathrm{d}t. \qquad (3)$$

Если кривая AB задана уравнением вида $y=y(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, то в качестве параметра иногда удобно принять x $(t=x)$.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} y^2\,\mathrm{d}l$, где AB — часть окружности $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $0\leqslant t\leqslant\pi/2$.

Решение. Так как $y^2=a^2\sin^2 t$, $\mathrm{d}l=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}=$ $=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=a\,\mathrm{d}t$, то по формуле (1) получаем

$$\int\limits_{AB} y^2\,\mathrm{d}l=\int\limits_0^{\pi/2} a^2\sin^2 t\cdot a\,\mathrm{d}t=\frac{a^3}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)\,\mathrm{d}t=\frac{a^3}{2}\left[t-\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2}=\frac{a^3\pi}{4}.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} x^2\,\mathrm{d}l$, где AB — кривая, заданная уравнением $y=\ln x$, $1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}$.

Решение. Для вычисления интеграла применим формулу (2). Так как $\sqrt{1+y'^2(x)}=\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, то

$$\int\limits_{AB} x^2\,\mathrm{d}l=\int\limits_1^{\mathrm{e}} x^2\,\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_1^{\mathrm{e}}(1+x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}(1+x^2)=$$
$$=\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{1}{3}\left[(1+\mathrm{e}^2)^{3/2}-2\sqrt{2}\right].$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} x^2\,\mathrm{d}x+xy\,\mathrm{d}y$, где AB — четверть окружности $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0\leqslant t\leqslant\pi/2$, A соответствует $t=0$, B соответствует $t=\pi/2$.

Решение. Имеем $x^2=\cos^2 t$, $\mathrm{d}x=-\sin t\,\mathrm{d}t$, $xy=\cos t\sin t$, $\mathrm{d}y=\cos t\,\mathrm{d}t$. По формуле (3) получаем

$$\int\limits_{AB} x^2\,\mathrm{d}x+xy\,\mathrm{d}y=\int\limits_0^{\pi/2}(-\cos^2 t\sin t+\cos^2 t\sin t)\,\mathrm{d}t=0.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} x^2\,\mathrm{d}x+\sqrt{xy}\,\mathrm{d}y$, где AB — четверть окружности $x^2+y^2=R^2$, пробегаемая против часовой стрелки и лежащая в первой четверти.

Решение. Уравнение окружности $x^2+y^2=R^2$ запишем, выражая явно y через $x: y=\sqrt{R^2-x^2}$ (перед корнем взят знак плюс, так как в первой четверти $y\geqslant 0$). Найдем $\mathrm{d}y$:

$$\mathrm{d}y=y'\,\mathrm{d}x=(\sqrt{R^2-x^2})'\,\mathrm{d}x=-\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

После подстановки y и $\mathrm{d}y$ под знак интеграла подынтегральная функция будет зависеть только от x, а пределы интегрирования по x, учитывая, что интегрирование ведется против часовой стрелки, будут $+R$ и 0. Таким образом,

$$\int\limits_{AB} x^2\,\mathrm{d}x+\sqrt{xy}\,\mathrm{d}y=\int\limits_R^0 x^2\,\mathrm{d}x+\sqrt{x}\sqrt{R^2-x^2}\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\int\limits_R^0 (x^2-x\sqrt{x})\,\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{2x^{5/2}}{5}\right)\Bigg|_R^0=-\frac{R^3}{3}+\frac{2}{5}R^{5/2}=\frac{1}{15}R^2(6\sqrt{R}-5R).$$

Вычислить криволинейные интегралы:

103. $\int\limits_{AB} y\,\mathrm{d}l$ по параболе $y^2=2x$ от точки (0; 0) до точки (2; 2).

104. $\int\limits_{AB} x\,\mathrm{d}l$ по параболе $y=x^2$ от точки (2; 4) до точки (1; 1).

105. $\int\limits_{AB} x\,\mathrm{d}l$ по отрезку прямой от точки (0; 0) до точки (1; 2).

106. $\int\limits_{AB} \frac{\mathrm{d}l}{\sqrt{x^2+y^2}}$ по отрезку прямой $y=\frac{1}{2}x-2$ от точки (0; -2) до точки (4; 0).

107. $\int\limits_{AB} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}l$ по кривой $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

108. $\int\limits_{AB} \sqrt{y}\,\mathrm{d}l$ по кривой $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

109. $\oint\limits_L (2x+y)\,\mathrm{d}l$, где L — контур треугольника ABO с вершинами A (1; 0), B (0; 2), O (0; 0).

110. $\int\limits_{AB} (x+y)\,\mathrm{d}x$, где: 1) AB — прямая, соединяющая точки (0; 0) и (2; 2);

2) AB — парабола $y=x^2/2$, соединяющая точки (0; 0) и (2; 2);
3) AB — ломаная, проходящая через точки (0; 0), (2; 0), (2; 2).

111. $\int\limits_{AB} [(x+y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y]$, где: 1) AB — прямая, соединяющая точки (0; 0) и (4; 2); 2) AB — ломаная, проходящая через точки (0; 0), (2; 0), (4; 2).

112. Решить задачу 111 для интеграла $\int\limits_{AB} y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$. Почему здесь величина интеграла не зависит от пути интегрирования?

113. $\oint\limits_{L} x\,\mathrm{d}y$, где L — контур треугольника, образованного прямыми $y=x$, $x=2$, $y=0$ (интегрирование вести в положительном направлении).

114. $\oint\limits_{L} (x^2-y)\,\mathrm{d}x$, где L — контур прямоугольника, образованного прямыми $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=2$ (интегрирование вести в положительном направлении).

115. $\int\limits_{AB} xy\,\mathrm{d}x$ по дуге синусоиды $y=\sin x$ от $x=\pi$ до $x=0$.

116. $\int\limits_{AB} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$ по кривой $y=x^3$ от точки (0; 0) до точки (2; 8).

117. $\int\limits_{AB} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \sqrt{y}\,\mathrm{d}y$ по кривой $y=x^2$ от точки (0; 0) до точки (1; 1).

118. $\int\limits_{AB} x^2\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}y$ по кривой $y=\sqrt{x}$ от точки (0; 0) до точки (1; 1).

119. $\int\limits_{AB} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y$ по кривой $y=\mathrm{e}^x$ от точки (0; 1) до точки (1; e).

120. $\int\limits_{AB} (x^3-y^2)\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y$ по кривой $y=a^x$ от точки (0; 1) до точки (1; a).

Вычислить криволинейные интегралы, взятые вдоль указанных кривых в направлении возрастания параметра:

121. $\int\limits_{AB} xy\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}y$ по кривой $x=t^2$, $y=t$ $(1 \leqslant t \leqslant 2)$.

122. $\int\limits_{AB} x^2y\,\mathrm{d}x + y^2x\,\mathrm{d}y$ по кривой $x=t$, $y=t^3$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

123. $\int\limits_{AB} (x+y)\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y$ по окружности $x=R\cos t$, $y=R\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi/2)$.

124. $\int\limits_{AB} y^2\,\mathrm{d}x+xy\,\mathrm{d}y$ по эллипсу $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant\pi/2)$.

125. $\int\limits_{AB} y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y$ по астроиде $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $(0\leqslant t\leqslant\pi/2)$.

126. $\int\limits_{AB} y^2\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y$ по первой арке циклоиды $x=a\,(t-\sin t)$, $y=a\,(1-\cos t)$ $(a>0)$.

2. Формула Грина

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint\limits_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$

устанавливает связь между двойным и криволинейным интегралами. Двойной интеграл берется по области G, а криволинейный интеграл — вдоль замкнутого контура L, ограничивающего область G.

С помощью формулы Грина вычислить криволинейные интегралы:

127. $\oint\limits_L (x-y)\,\mathrm{d}x+(x+y)\,\mathrm{d}y$, где L — окружность $x^2+y^2=R^2$.

128. $\oint\limits_L (x+y)\,\mathrm{d}x-(x-y)\,\mathrm{d}y$, где L — эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

129. $\oint\limits_L y^2\,\mathrm{d}x+(x+y)^2\,\mathrm{d}y$ по контуру треугольника ABC с вершинами $A\,(a;\,0)$, $B\,(a;\,a)$, $C\,(0;\,a)$.

130. $\oint\limits_L (x+y)^2\,\mathrm{d}x-(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$ по контуру треугольника ABC с вершинами $A\,(1;\,1)$, $B\,(3;\,2)$ и $C\,(2;\,5)$.

131. $\oint\limits_L (y-x^2)\,\mathrm{d}x+(x+y^2)\,\mathrm{d}y$, где контур L ограничивает круговой сектор радиуса R с углом φ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2)$.

132. $\oint\limits_L \mathrm{e}^{-x^2+y^2}(\cos 2x\,y\,\mathrm{d}x+\sin 2x\,y\,\mathrm{d}y)$, где L — окружность $x^2+y^2=R^2$.

133. Написать и проверить формулу Грина для $\oint\limits_L (x+y)\,\mathrm{d}x-2x\,\mathrm{d}y$ по контуру треугольника со сторонами $x=0$, $y=0$, $x+y=a$.

134. Написать и проверить формулу Грина для $\oint\limits_L \frac{dx}{y}-\frac{dy}{x}$ по контуру треугольника ABC с вершинами $A\,(1;\ 1)$, $B\,(2;\ 1)$ и $C\,(2;\ 2)$.

135. Проверить формулу Грина на функциях $P\,(x;\ y)=x^2y^2$, $Q\,(x;\ y)=xy^2$ в круге радиуса 2 с центром в начале координат.

136. Применима ли формула Грина для функций $P\,(x;\ y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$ и $Q\,(x;\ y)=\frac{x}{x^2+y^2}$, если область G имеет начало координат своей внутренней точкой? Проверить вычислением соответствующих двойного и криволинейного интегралов, приняв за L окружность $x^2+y^2=a^2$.

§ 5. Некоторые приложения криволинейных интегралов второго рода

1. Вычисление площади. Криволинейный интеграл $\frac{1}{2}\oint\limits_L x\,dy-y\,dx$ выражает площадь области, ограниченной замкнутой кривой L.

Вычислить площади областей, ограниченных следующими кривыми:

137. Эллипсом $x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

138. Параболой $(x+y)^2=2ax\ (a>0)$ и осью Ox.

139. Гиперболой $y=1/x$, осью Ox и прямыми $x=1$ и $x=2$.

140. Окружностью $x^2+y^2=4$ и параболой $x^2=2-y$ (область содержит начало координат).

141. Астроидой $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

142. Петлей кривой $x=\frac{3t}{1+t^3},\ y=\frac{3t^2}{1+t^3}$ («декартов лист»).

2. Работа силы. Криволинейный интеграл $A=\int\limits_{BC} P\,(x;\ y)\,dx+Q\,(x;\ y)\,dy$ выражает работу при перемещении материальной точки вдоль плоской кривой BC под действием силы $\bar{F}$, проекции которой на координатные оси (координаты) равны $P\,(x;\ y)$ и $Q\,(x;\ y)$.

143. Вычислить работу силы $\bar{F}\,(x;\ y)$ при перемещении материальной точки по эллипсу в положительном направлении, если сила в каждой точке $(x;\ y)$ эллипса направлена к центру эллипса и по величине равна расстоянию от точки $(x;\ y)$ до центра эллипса.

144. Поле образовано силой $\bar{F}=\{P;\ Q\}$, где $P=x-y$, $Q=x$. Построить силу $\bar{F}$ в каждой вершине квадрата со сторонами $x=\pm a$ и $y=\pm a$ и вычислить работу при перемещении материальной точки по контуру квадрата.

145. Поле образовано силой $\bar{F}=\{P;\ Q\}$, где $P=x+y$, $Q=2x$.

Построить силу $\bar{F}$ в начале каждой четверти окружности $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ и вычислить работу при перемещении материальной точки по окружности.

Решить эту задачу при условии $P=x+y$, $Q=x$. Почему здесь работа равна 0?

146. Поле образовано силой $\bar{F}=\{y;\ a\}$. Определить работу при перемещении материальной точки по контуру, образованному полуосями координат и первой четвертью эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

147. Даны точки $B\ (-a;\ 0)$ и $C\ (0;\ a)$. Вычислить работу силы $\bar{F}=\{P;\ Q\}$, где $P=y$ и $Q=y-x$ при перемещении материальной точки: 1) по прямой BC; 2) по ломаной BOC; 3) по дуге BC параболы $y=a-\dfrac{x^2}{a}$.

148. В каждой точке плоскости действует сила $\bar{F}=\{xy;\ x+y\}$. Вычислить работу силы при перемещении материальной точки из начала координат в точку (1; 1): 1) по прямой $y=x$; 2) по параболе $y=x^2$.

149. В каждой точке окружности $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ приложена сила $\bar{F}=\{x+y;\ x\}$. Определить работу силы $\bar{F}$ при перемещении материальной точки по окружности. Почему здесь работа равна нулю?

150. Поле образовано силой, проекции которой на координатные оси равны $P=x+y^2$ и $Q=2xy-8$. Показать, что работа при перемещении материальной точки в этом поле не зависит от пути перемещения.

§ 6. Тройные интегралы

1. Вычисление тройных интегралов. Тройной интеграл по области $V=\{(x;\ y;\ z)|\ a\leqslant x\leqslant b,\ y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),\ z_1(x;\ y)\leqslant z\leqslant z_2(x;\ y)\}$ вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int\limits_{z_1(x;\ y)}^{z_2(x;\ y)} f(x;\ y;\ z)\,dz, \qquad (1)$$

сводящей вычисление тройного интеграла к последовательному вычислению трех определенных интегралов.

В частности, если область — прямоугольный параллелепипед $V=\{(x;\ y;\ z)\,|\ a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d,\ k\leqslant z\leqslant l\}$, то формула (1) принимает вид

$$\iiint\limits_V f(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d dy\int\limits_k^l f(x;\ y;\ z)\,dz. \qquad (2)$$

Замена переменных в тройном интеграле производится по формуле

$$\iiint\limits_V f(x;\ y;\ z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint\limits_{V^*} f[x(u;\ v;\ w),\ y(u;\ v;\ w),\ z(u;\ v;\ w)]\, |J|\, du\, dv\, dw,$$

где V^* — область, в которую преобразовалась область V при отображении $x=x(u;\ v;\ w)$, $y=y(u;\ v;\ w)$, $z=z(u;\ v;\ w)$; $f[x(u;\ v;\ w),\ y(u;\ v;\ w),\ z(u;\ v;\ w)]$ — подынтегральная функция, преобразованная к новым переменным u, v и w; J — якобиан функции $x=x(u;\ v;\ w)$, $y=y(u;\ v;\ w)$, $z=z(u;\ v;\ w)$ по переменным u, v и w:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В частности, при переходе от прямоугольных координат x, y, z к цилиндрическим координатам ρ, φ, z (рис. 55), связанным с x, y, z формулами

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z$$
$$(0\leqslant\rho<+\infty,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ -\infty<z<+\infty),$$

якобиан преобразования $J=\rho$, поэтому

$$\iiint\limits_V f(x;\ y;\ z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{V^*} f(\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi;\ z)\, \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz.$$

При переходе от прямоугольных координат x, y, z к сферическим координатам ρ, φ, θ (рис. 56), связанным с x, y, z формулами

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\ z=\rho\cos\theta$$
$$(0\leqslant\rho<+\infty,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi),$$

якобиан преобразования $J=\rho^2\sin\theta$, поэтому

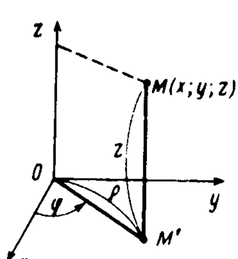


Рис. 55

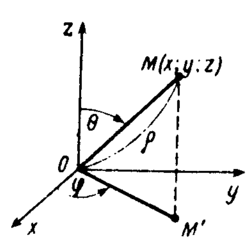


Рис. 56

$$\iiint\limits_V f(x;\,y;\,z)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\iiint\limits_{V^*} f[\rho\sin\theta\cos\varphi;\ \rho\sin\theta\sin\varphi;\ \rho\cos\theta]\,\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

Пример. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$, где V — пирамида, ограниченная плоскостью $x+y+z=1$ и координатными плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$ (рис. 57).

Решение. Область V проецируется на плоскость Oxy в треугольник G, ограниченный прямыми $x=0$, $y=0$, $y=1-x$. По формуле (1) имеем

$$\iiint\limits_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_0^{1-x-y}(x+y+z)\,dz=$$

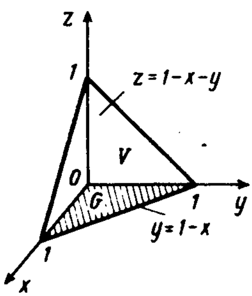


Рис. 57

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\left[xz+yz+\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1-x-y}dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left[y-yx^2-xy^2-\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x}dx=$$

$$=\frac{1}{6}\int\limits_0^1(2-3x+x^3)\,dx=\frac{1}{6}\left[2x-\frac{3x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=1}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{8}.$$

Вычислить тройные интегралы по областям V, ограниченным указанными поверхностями:

151. $\iiint\limits_V (x+y-z)\,dx\,dy\,dz$; $x=-1$, $x=+1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=2$.

152. $\iiint\limits_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$; $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$.

153. $\iiint\limits_V xy\,dx\,dy\,dz$; $x=1$, $x=2$, $y=-2$, $y=-1$, $z=0$, $z=1/2$.

154. $\iiint\limits_V \rho\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$; $\varphi=0$, $\varphi=\pi/2$, $\rho=0$, $\rho=2$, $\theta=0$, $\theta=\pi/2$.

155. $\iiint\limits_V \dfrac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z)^3}$; $x=1$, $x=2$, $y=1$, $y=2$, $z=1$, $z=2$.

156. $\iiint\limits_V (x+2y+3z+4)\,dx\,dy\,dz$; $x=0$, $x=3$, $y=0$, $y=2$, $z=0$, $z=1$.

157. $\iiint\limits_V (4x+3y+2z+1)\,dx\,dy\,dz$; $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=2$, $z=0$, $z=3$.

158. $\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz$; $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

159. $\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz$; $x=0$, $y=0$, $z=0$, $y=1$, $x+z=1$.

160. $\iiint\limits_V yz\,dx\,dy\,dz$; $x^2+y^2+z^2=1$, $z\geqslant 0$.

161. $\iiint\limits_V xy\,dx\,dy\,dz$; $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=1$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$.

162. $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$; $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

163. $\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz$; $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x^2+y^2+z^2=1$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

164. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$; $x^2+y^2=z^2$, $z=0$, $z=1$.

165. $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$; $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, $z=0$, $z=c$.

С помощью замены переменных вычислить тройные интегралы:

166. $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$; $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ — шар.

167. $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$; $z=x^2+y^2$, $z=1$.

168. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$; $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$.

169. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$; $x^2+y^2=2x$, $y=0$, $z=0$, $z=3$.

170. $\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz$; V — часть шара $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$, находящаяся в первом октанте.

171. $\iiint\limits_V (x^2-y^2)\,dx\,dy\,dz$; $x^2+y^2=2z$, $z=2$.

172. $\iiint\limits_V (x^2+y+z^2)^3\,dx\,dy\,dz$; $x^2+z^2=1$, $y=0$, $y=1$.

173. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$; $y^2=3x-x^2$, $z=0$, $z=2$.

2. Некоторые приложения тройных интегралов.

Тройной интеграл $\iiint\limits_V dx\,dy\,dz$ выражает объем тела V.

Вычислить объемы тел, ограниченных указанными поверхностями:

174. $2x+3y+4z=12$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

175. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

176. $ax=y^2+z^2$, $x=a$.

177. $2z=x^2+y^2$, $z=2$.

178. $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2+z^2=2$.

179. $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=x^2+y^2$.

180. $x^2+y^2-z=1$, $z=0$.

181. $z=0$, $x^2+y^2=4z$, $x^2+y^2=2x$.

Координаты центра масс однородного тела ($\rho\,(x, y, z)=\mathrm{const}$) определяются по следующим формулам:

$$x_c=\frac{\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V dx\,dy\,dz};\quad y_c=\frac{\iiint\limits_V y\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V dx\,dy\,dz};\quad z_c=\frac{\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V dx\,dy\,dz}.$$

Найти координаты центра масс однородных тел:

182. Полушара радиуса R.

183. $x+y+z=a$; $x=0$, $y=0$, $z=0$.

184. $z=1-x^2-y^2$; $z=0$.

185. $2z=4-x^2-y^2$; $z=0$.

186. $z=4-x^2-y^2$; $z=1$, $x=0$, $y=0$ ($x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$).

187. $x+y=1$, $x^2+y^2=z$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

188. $x^2+y^2+z^2=3$, $x^2+y^2=2z$.

189. $y^2+z^2=x$, $x+y+z=0$.

190. $x^2+z^2=2y$, $x+z=y$.

191. $x=3-y^2-z^2$ ($x>0$), $x=0$.

Интегралы

$$J_x=\iiint\limits_V (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,\quad J_y=\iiint\limits_V (x^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

$$J_z=\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz \tag{2}$$

выражают моменты инерции однородного тела V относительно осей координат. Момент инерции относительно начала координат

$$J_0=\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Пример. Найти момент инерции однородного куба со стороной a относительно одного из его ребер.

Решение. Поместим начало прямоугольной системы координат в одной из вершин куба, а оси направим вдоль его трех взаимно перпендикулярных ребер. Найдем момент инерции относительно оси Oz, воспользовавшись третьей из формул (2):

$$J_z=\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz=\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a (x^2+y^2)\,dz=$$

$$=a\int_0^a dx\int_0^a (x^2+y^2)\,dy=a\int_0^a \left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=a} dx=$$

$$=a\int_0^a \left(ax^2+\frac{a^3}{3}\right) dx=a\left[a\frac{x^3}{3}+\frac{a^3}{3}x\right]_0^a=\frac{2}{3}a^5.$$

Найти моменты инерции однородных тел:

192. Шара радиуса R относительно его касательной.
193. Шара радиуса R относительно его диаметра.
194. Цилиндра радиуса R, высоты H относительно его оси.
195. Того же цилиндра относительно диаметра основания.
196. Кругового прямого конуса относительно его оси.

Найти моменты инерции относительно оси Oz однородных тел, ограниченных поверхностями:

197. $x=0,\ y=0,\ y=a,\ z=0,\ x+z=a.$
198. $x+y+z=a\sqrt{2},\ x^2+y^2=a^2,\ z=0.$
199. $z^2=2ax,\ z=0,\ x^2+y^2=ax.$
200. $x+y+z=2,\ x^2+y^2=2,\ z=0.$
201. Найти моменты инерции относительно осей и начала координат пирамиды, ограниченной плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$

§ 7. Поверхностные интегралы. Формулы Остроградского и Стокса

1. Поверхностные интегралы. Вычисление поверхностного интеграла первого рода $\iint\limits_S f(x;\ y;\ z)\,dS$ сводится к вычислению двойного интеграла:

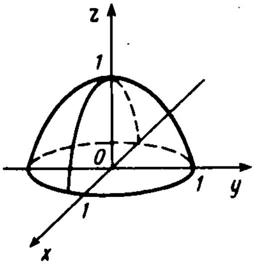


Рис. 58

$$\iint\limits_S f(x;y;z)\,\mathrm{d}S=$$

$$=\iint\limits_G f[x;y;z(x;y)]\times$$

$$\times\sqrt{1+z_x'^2(x;y)+z_y'^2(x;y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \quad (1)$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\iint\limits_S \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}S$, где S — часть параболоида вращения $z=1-x^2-y^2$, отсеченного плоскостью $z=0$ (рис. 58).

Решение. Поверхность S, заданная уравнением $z=1-x^2-y^2$, проецируется на плоскость Oxy в область G, ограниченную окружностью $x^2+y^2=1$ (уравнение окружности получается из уравнения параболоида при $z=0$). Следовательно, областью G является круг $x^2+y^2\leqslant 1$. Находим $z_x'(x;y)=-2x$, $z_y'(x;y)=2y$. По формуле (1) получаем

$$\iint\limits_S \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}S=\iint\limits_G \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$$

$$=\iint\limits_G (1+4x^2+4y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Переходя в полученном двойном интеграле к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, находим

$$\iint\limits_G (1+4x^2+4y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^1(1+4\rho^2)\,\rho\,\mathrm{d}\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^2}{2}+\rho^4\right]_0^1\mathrm{d}\varphi=\frac{3}{2}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=\frac{3}{2}\,\varphi\Big|_0^{2\pi}=3\pi.$$

Поверхностные интегралы второго рода

$$\iint\limits_S R(x;y;z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ \iint\limits_S P(x;y;z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ \iint\limits_S Q(x;y;z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,$$

$$\iint\limits_S P(x;y;z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q(x;y;z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R(x;y;z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad (2)$$

также вычисляются сведением их к двойным интегралам по формулам

$$\iint\limits_S R(x;y;z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{G_1} R[x;y;f(x;y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad (3)$$

$$\iint\limits_S P(x;y;z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint\limits_{G_2} P[f(y;z);y;z]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \quad (4)$$

$$\iint\limits_S Q(x; y; z)\,dz\,dx = \iint\limits_{G_3} Q[x; f(x; z); z]\,dz\,dx, \qquad (5)$$

где поверхность S задана соответственно уравнениями $z=f(x; y)$, $x=f(y; z)$ и $y=f(x; z)$, а G_1, G_2 и G_3 — проекции поверхности S соответственно на плоскости Oxy, Oyz, Oxz.

Для вычисления интеграла общего вида (2) используют те же формулы (3) — (5), если поверхность S однозначно проецируется на все три координатные плоскости.

Пример 2. Вычислить интеграл $\iint\limits_S (y^2+z^2)\,dx\,dy$, где S — верхняя сторона поверхности $z=\sqrt{1-x^2}$, отсеченная плоскостями $y=0$, $y=1$ (рис. 59).

Решение. Проекцией G данной поверхности на плоскость Oxy является прямоугольник, определяемый неравенствами $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. По формуле (3) находим

$$\iint\limits_S (y^2+z^2)\,dx\,dy = \iint\limits_G [y^2+(\sqrt{1-x^2})^2]\,dx\,dy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_0^1 (y^2+1-x^2)\,dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left[\frac{y^3}{3}+y-x^2y\right]_0^1 dx = \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{4}{3}-x^2\right) dx = \left[\frac{4}{3}x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2.$$

Вычислить поверхностные интегралы первого рода:

202. $\iint\limits_S x(y+z)\,dS$; S — часть цилиндрической поверхности $x=\sqrt{1-y^2}$, отсеченная плоскостями $z=0$, $z=1$.

203. $\iint\limits_S (3x^2+5y^2+3z^2-2)\,dS$; S — часть поверхности $y=\sqrt{x^2+z^2}$, отсеченная плоскостями $y=0$, $y=1$.

204. $\iint\limits_S (x^2+y^2+3z^2)\,dS$; S — часть поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, отсеченная плоскостями $z=0$, $z=1$.

205. $\iint\limits_S (x^2+y^2+z-1/2)\,dS$; S — часть поверхности $2z=2-x^2-y^2$, отсеченная плоскостью Oxy.

206. $\iint\limits_S \sqrt{1+4x^2+4z^2}\,dS$; S — часть поверхности $y=2-x^2-z^2$, отсеченная плоскостью $y=0$.

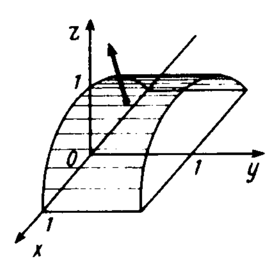


Рис. 59

207. $\iint\limits_S y\,(z+x)\,dS$; S — часть поверхности $y=\sqrt{c^2-z^2}$, отсеченная плоскостями $x=0$, $x=a$.

208. $\iint\limits_S \sqrt{1+4y^2+4z^2}\,dS$; S — часть поверхности $x=4-y^2-z^2$, отсеченная плоскостью $x=0$.

209. $\iint\limits_S z\,(x+y)\,dS$; S — часть поверхности $z=\sqrt{9-x^2}$, отсеченная плоскостями $y=0$, $y=2$.

210. $\iint\limits_S (x^2+y^2+z)\,dS$; S — верхняя половина сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Вычислить поверхностные интегралы второго рода:

211. $\iint\limits_S (x^2+y+z^2)\,dx\,dz$; S — внутренняя сторона поверхности $x^2=2y$, отсеченная плоскостями $y=2$, $z=0$, $z=1$.

212. $\iint\limits_S (x^2+z^2+y^2)\,dx\,dz$; S — внешняя сторона поверхности $y=\sqrt{x^2+z^2}$, отсеченная плоскостями $y=0$, $y=1$.

213. $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,dy\,dz$; S — внутренняя сторона части полусферы $x=\sqrt{R^2-y^2-z^2}$, вырезанная конусом $x=\sqrt{y^2+z^2}$.

214. $\iint\limits_S (5x^2+5y^2+z^2)\,dx\,dy$; S — внешняя сторона части верхней полусферы $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, вырезанная конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

215. $\iint\limits_S (x^2+y^2+3z^2)\,dx\,dy$; S — внешняя сторона поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, отсеченная плоскостями $z=0$, $z=2$.

216. $\iint\limits_S (x^2-2y^2+6z)\,dx\,dy$; S — нижняя (внешняя) сторона поверхности $y^2=6z$, отсеченная плоскостями $z=6$, $x=0$, $x=3$.

217. $\iint\limits_S \left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+2z\right)dx\,dy$; S — верхняя (внешняя) сторона поверхности $z=1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}$, отсеченная плоскостью $z=0$.

218. $\iint\limits_S (2x+3y+4z)\,dx\,dy$; S — верхняя сторона плоскости $x+y+z-6=0$, вырезанная цилиндром $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

219. $\iint\limits_S (x^2+z^2)\,dy\,dz$; S — внешняя сторона поверхности $x=\sqrt{9-y^2}$, отсеченная плоскостями $z=0$, $z=2$.

220. $\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$; S — верхняя сторона части плоскости $x+z-1=0$, отсеченная плоскостями $y=0$, $y=4$ и лежащая в первом октанте.

221. $\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$; S — внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

2. Формула Остроградского

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz=\iint\limits_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$$

устанавливает связь между поверхностным и тройным интегралами. Тройной интеграл берется по пространственной области V, а поверхностный интеграл — по замкнутой поверхности S, ограничивающей эту область.

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_S x^3\,dy\,dz+y^3\,dz\,dx+z^3\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Решение. Применяя формулу Остроградского, имеем

$$\iint\limits_S x^3\,dy\,dz+y^3\,dz\,dx+z^3\,dx\,dy=3\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

откуда, введя сферические координаты, получаем

$$3\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz=3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int\limits_0^{R} \rho^4\,d\rho=\frac{12}{5}\pi R^5.$$

С помощью формулы Остроградского вычислить поверхностные интегралы:

222. $\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$; S — внешняя сторона пирамиды, ограниченная плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

223. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$; S — внешняя сторона границы куба $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant 1$.

224. $\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$; S — внешняя сторона поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

225. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$; S — полная поверхность конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0$, $0\leqslant z\leqslant b$.

226. $\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dx\,dz+z\,dx\,dy$; S — поверхность цилиндра $x^2+y^2=a^2$ $(-1\leqslant z\leqslant 1)$.

3. Формула Стокса

$$\oint\limits_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$$

$$=\iint\limits_S\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\right]dS,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали к поверхности S, а контур L, ограничивающий S, проходится в положительном направлении.

Формула Стокса устанавливает связь между поверхностным и криволинейным интегралами.

Формулу Стокса с помощью формулы, связывающей поверхностные интегралы первого и второго рода, можно переписать в виде

$$\oint\limits_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$$

$$=\iint\limits_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx. \qquad (6)$$

Пример. Вычислить интеграл $\oint\limits_L x^2y^3\,dx+dy+z\,dz$, где L — окружность, заданная уравнениями $x^2+y^2=1$, $z=0$, а поверхностью S служит верхняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2=1$ $(z>0)$ и контур L проходится в положительном направлении.

Решение. В данном примере $P=x^2y^3$, $Q=1$, $R=z$, поэтому

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-3x^2y^2;\ \frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0;\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0.$$

По формуле Стокса (6) получаем

$$\oint_L x^2y^3\,dx+dy+z\,dz=-3\iint_S x^2y^2\,dx\,dy=-\frac{\pi}{8}.$$

С помощью формулы Стокса вычислить криволинейные интегралы:

227. $\oint_L y\,dx+z\,dy+x\,dz$; L — окружность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$, S — часть плоскости $x+y+z=0$, ограниченная данной окружностью.

228. $\oint_L (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz$; L — окружность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$, S — часть плоскости $x+y+z=0$, ограниченная данной окружностью.

229. Показать с помощью формулы Стокса, что криволинейный интеграл $\oint_L yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$ по любому замкнутому контуру равен нулю. Проверить это вычислением интеграла по контуру треугольника OAB с вершинами $O\,(0;\ 0;\ 0)$, $A\,(1;\ 1;\ 0)$ и $B\,(1;\ 1;\ 1)$.

230. Написать и проверить формулу Стокса для интеграла $\oint_L (z-y)\,dx+(x-z)\,dy+(y-x)\,dz$, взятого по контуру треугольника ABC с вершинами $A\,(a;\ 0;\ 0)$, $B\,(0;\ a;\ 0)$ и $C\,(0;\ 0;\ a)$.

Глава 14

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Дифференциальные уравнения первого порядка

1. Основные понятия.

Определение 1. *Уравнение вида*

$$F(x,\ y,\ y')=0, \tag{1}$$

где x — независимая переменная, y — искомая функция, y' — ее производная, называется дифференциальным уравнением первого порядка.

Если уравнение (1) можно разрешить относительно y', то оно принимает вид

$$y'=f(x,\ y) \tag{2}$$

и называется уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной.

Примеры дифференциальных уравнений: $y'=xe^y$, $y'=\frac{y\ln x}{x}$, $y'=x+y$ и т. д.

Определение 2. *Решением дифференциального уравнения перво-*

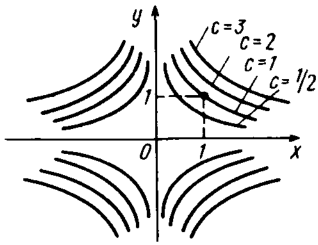


Рис. 60

го порядка называется функция $y=\varphi(x)$, $x\in(a, b)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.*

График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой.*

Условия

$$y=y_0 \quad \text{при} \quad x=x_0, \qquad (3)$$

в силу которых функция $y=\varphi(x)$ принимает заданное значение y_0 в заданной точке x_0, называют *начальными условиями решения.*

Определение 3. *Общим решением уравнения* (2) *в некоторой области G плоскости Oxy называется функция $y=\varphi(x, C)$, зависящая от x и произвольной постоянной C, если она является решением уравнения* (2) *при любом значении постоянной C и если при любых начальных условиях* (3) *таких, что $(x_0; y_0)\in G$, существует единственное значение постоянной $C=C_0$ такое, что функция $y=\varphi(x, C_0)$ удовлетворяет данным начальным условиям $\varphi(x_0, C)=y_0$.*

Определение 4. *Частным решением уравнения* (2) *в области G называется функция $y=\varphi(x, C_0)$, которая получается из общего решения $y=\varphi(x, C)$ при определенном значении потоянной $C=C_0$.*

Геометрически общее решение $y=\varphi(x, C)$ представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости Oxy, зависящее от одной произвольной постоянной C, а частное решение $y=\varphi(x, C_0)$ — одну интегральную кривую этого семейства, проходящую через заданную точку $(x_0; y_0)$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение $y'=-\frac{y}{x}$.

Нетрудно проверить, что общим решением данного уравнения в области $y>0$ и $y<0$ является функция $y=C/x$, где C — произвольная постоянная. При различных значениях C получаем различные решения.

Найдем частное решение, удовлетворяющее, например, начальным условиям $x_0=1$, $y_0=1$. Имеем $1=C/1$. Отсюда $C=1$ и искомое частное решение $y=1/x$.

Геометрически общее решение данного уравнения представляет собой семейство гипербол $y=C/x$, каждая из которых изображает частное решение данного уравнения. Задавая начальные условия $x_0=1$, $y_0=1$, выделяем из всего семейства ту гиперболу, которая проходит через точку (1; 1) плоскости Oxy (рис. 60).

Проверить, являются ли указанные функции решениями уравнений:

---

*Интервал может быть как конечным, так и бесконечным в одну или обе стороны.

1. $y=Cx$, $\quad y'x-y=0$.

2. $y=\sin x$, $\quad y'-y=0$.

3. $y=x^3+C$, $\quad y'=3x^2$.

4. $y=\sqrt{x^2+C}$, $\quad yy'=x$.

5. $y=Cx^3$, $\quad 3y-xy'=0$.

6. $y=\dfrac{C}{\cos x}$, $\quad y'-\operatorname{tg} x\cdot y=0$.

7. $y=x+Ce^y$, $\quad (x-y+1)\,y'=1$.

8. $y=e^{\arcsin Cx}$, $\quad xy'=y\operatorname{tg}\ln y$.

9. $y=\sin x-1+Ce^{-\sin x}$, $\quad y'-y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$.

Пример 2. Составить дифференциальное уравнение семейства окружностей $(x-C)^2+y^2=1$.

Решение. Дифференцируя, получаем $2(x-C)+2yy'=0$, отсюда $y'=-\dfrac{x-C}{y}$. Исключаем теперь произвольную постоянную C. Для этого из последнего уравнения находим $x-C=-yy'$ и, подставляя в данное уравнение, получим

$$y^2y'^2+y^2=1.$$

Это и есть дифференциальное уравнение данного семейства окружностей.

Составить дифференциальные уравнения семейства линий:

10. $y=Cx$.

11. $y=x^2+Cx$.

12. $Cy=x^2+y^2$.

13. $y=Ce^{2x}$.

14. $y=Cx+C^2$.

15. $y^2=2Cx$.

16. $y=\sqrt{1-x^2}+C$.

17. $y=\sin Cx$.

18. $\dfrac{x^2}{C^2}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

19. $\ln\dfrac{x}{y}=1+Cy$.

2. Уравнения с разделяющимися переменными.

Определение 5. *Уравнение вида*

$$y'=f_1(x)\,f_2(y), \tag{4}$$

где $f_1(x)$ и $f_2(y)$ — непрерывные функции, называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Пример 3. Решить уравнение $y'=y/x$.

Решение. Данное уравнение вида (4), где $f_1(x)=1/x$ и $f_2(y)=$ $=y$. Разделяя переменные, получаем $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{x}$ $\left(y'=\dfrac{dy}{dx}\right)$. Интегрируя, имеем

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + \ln |C_1|, \quad C_1 \neq 0^* \quad \text{или} \quad \ln |y| = \ln |x| + \ln |C_1|.$$

Потенцируя, находим $|y| = |C_1|\,|x|$, что эквивалентно уравнению $y = \pm C_1 x$. Полагая $\pm C_1 = C$, окончательно получаем $y = Cx$.

В следующих уравнениях: 1) найти общие решения уравнений; 2) найти частные решения по начальным условиям $y_0 = 4$ при $x_0 = -2$.

20. $xy' - y = 0$.

21. $xy' + y = 0$.

22. $yy' + x = 0$.

23. $y' = y$.

Найти общие решения уравнений:

24. $x^2 y' + y = 0$.

25. $x + xy + y'(y + xy) = 0$.

26. $(1 + y^2)\,dx = (1 + x^2)\,dy$.

27. $y - xy' = 1 + x^2 y'$.

28. $(xy^2 + x)\,dx + (y - x^2 y)\,dy = 0$.

29. $(1 + 2y)\,x\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0$.

30. $xy(1 + x^2)\,y' = 1 + y^2$.

31. $e^y(1 + x^2)\,dy - 2x(1 + e^y)\,dx = 0$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

32. $2y'\sqrt{x} = y$,	$y_0 = 1$ при $x_0 = 4$.
33. $y' = (2y + 1)\operatorname{ctg} x$,	$y_0 = 1/2$ при $x_0 = \pi/4$.
34. $x^2 y' + y^2 = 0$,	$y_0 = 1$ при $x_0 = -1$.
35. $(1 + e^x)\,yy' = e^x$,	$y_0 = 1$ при $x_0 = 0$.
36. $y' = 2\sqrt{y}\ln x$,	$y_0 = 1$ при $x_0 = e$.
37. $xy' = \dfrac{y}{\ln x}$,	$y_0 = 1$ при $x_0 = e$.
38. $y'\operatorname{tg} x - y = 1$,	$y_0 = 1$ при $x_0 = \pi/2$.
39. $y'\sin x = y\ln y$,	$y_0 = 1$ при $x_0 = \pi/2$.
40. $(1 + y^2)\,dx - xy\,dy = 0$,	$y_0 = 1$ при $x_0 = 2$.
41. $2\sqrt{y}\,dx = dy$,	$y_0 = 1$ при $x_0 = 0$.
42. $(2x + 1)\,dy + y^2\,dx = 0$,	$y_0 = 1$ при $x_0 = 4$.

3. Линейные уравнения.

Определение 6. *Уравнение вида*

$$y' + p(x)\,y = f(x), \tag{5}$$

---

*Для упрощения записи мы обозначили произвольную постоянную не через C, а через $\ln |C_1|$, что возможно, так как $\ln |C_1|$ может принимать любое значение от $-\infty$ до $+\infty$

где $p(x)$ и $f(x)$ — непрерывные функции, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Название уравнения объясняется тем, что неизвестная функция y и ее производная y' входят в уравнение линейно, т. е. в первой степени.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (5) называется линейным однородным уравнением. Если $f(x) \not\equiv 0$, то уравнение (5) называется линейным неоднородным уравнением.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y' + 3y = e^{2x}$.

Решение. Данное уравнение является линейным. Здесь $p(x) = 3$; $f(x) = e^{2x}$. Решаем сначала соответствующее однородное уравнение $y' + 3y = 0$. Разделяя переменные $\frac{dy}{y} = -3\,dx$ и интегрируя, находим

$$\ln|y| = -3x + \ln|C_1| \text{ или } y = \pm C_1 e^{-3x} = Ce^{-3x}.$$

Общее решение данного неоднородного уравнения будем искать в том же виде $y = C(x)\,e^{-3x}$, только произвольную постоянную будем считать уже функцией от x. Здесь применен *метод вариации постоянной*. Дифференцируя, имеем $y' = C'(x)\,e^{-3x} - 3C(x)\,e^{-3x}$. Подставляя в данное уравнение выражения для y и y', получаем

$$C'(x)\,e^{-3x} = e^{2x},\; C'(x) = e^{5x} \text{ или } dC = e^{5x}\,dx,$$

откуда $C(x) = \frac{1}{5}e^{5x} + C_2$, где C_2 — произвольная постоянная. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид $y = C(x)\,e^{-3x} = \left(\frac{1}{5}e^{5x} + C_2\right)e^{-3x}$ или $y = \frac{1}{5}e^{2x} + C_2 e^{-3x}$.

Найдем теперь общее решение данного уравнения *методом подстановки*. Положим $y = uv$. Тогда будем иметь $y' = u'v + uv'$. Подставляя эти выражения в данное уравнение, получим

$$u'v + uv' + 3uv = e^{2x} \text{ или } u'v + u(v' + 3v) = e^{2x}. \tag{6}$$

Теперь потребуем, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль, т. е. чтобы $v' + 3v = 0$, откуда $\frac{dv}{3v} = -dx$; $\frac{1}{3}\ln v = -x$; $\sqrt[3]{v} = e^{-x}$; $v = e^{-3x}$.

Подставляя найденное значение v в (6), найдем $u'e^{-3x} = e^{2x}$; $du = e^{5x}\,dx$; $u = \frac{1}{5}e^{5x} + C$. Но $y = uv$, поэтому

$$y = e^{-3x}\left(\frac{1}{5}e^{5x} + C\right) \text{ или } y = \frac{1}{5}e^{2x} + Ce^{-3x}.$$

Найти общие решения уравнений:

43. $y'-y=e^x$.

44. $y'=x+y$.

45. $y'+x^2y=x^2$.

46. $xy'+y=3$.

47. $xy'+y=e^x$.

48. $y'-\frac{3y}{x}=x$.

49. $y'+2xy=2xe^{-x^2}$.

50. $y'+\frac{1-2x}{x^2}y=1$.

51. $y'+y=\cos x$.

52. $y'\cos x-y\sin x=\sin 2x$.

53. $xy'+y=\ln x+1$.

54. $y'+\frac{2y}{x}=\frac{e^{-x^2}}{x}$.

55. $y'-y\operatorname{tg} x=\operatorname{ctg} x$.

56. $y'+y\cos x=\sin 2x$.

57. $xy'+2y=x^2$.

58. $y'-\frac{2}{x}y=\frac{e^x(x-2)}{x}$.

4. Уравнение Бернулли.

Определение 7. *Уравнение вида*

$$y'+P(x)y=Q(x)y^n,$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — непрерывные функции, называется уравнением Бернулли.

Уравнение Бернулли решается, так же как и линейное, подстановкой $y=uv$ или вариацией произвольной постоянной. Приводится к линейному подстановкой $z=y^{1-n}$.

Пример 5. Решить уравнение $y'-2xy=3x^3y^2$.

Решение. Это уравнение Бернулли (левая часть у него такая же, как и у линейного, а в правой части стоит выражение $f(x)y^n$, где n — постоянное число, в данном примере $3x^3y^2$).

Разделим обе части данного уравнения на y^2:

$$y^{-2}y'-2xy^{-1}=2x^3. \qquad (7)$$

Положим $z=y^{-1}$, тогда $-y^{-2}y'=z'$. Умножая обе части уравнения (7) на -1 и выполняя указанную подстановку, получим линейное уравнение

$$z'+2xz=-2x^3.$$

Решая это уравнение, находим

$$z=Ce^{-x^2}+1-x^2.$$

Следовательно, общим решением данного уравнения будет

$$y=\frac{1}{Ce^{-x^2}+1-x^2}.$$

Решить уравнения Бернулли:

59. $y'x+y=-xy^2$.

60. $y'-xy=-y^3e^{-x^2}$.

61. $y'+y=xy^3$.

62. $y'=x^3y^3-xy$.

63. $x^2y'=y^2+xy$.

64. $xy'+y=y^2\ln x$.

65. $y'+xy=xy^3$.

66. $xy'+2y=x^5y^2$.

5. Уравнение в полных дифференциалах.

Определение 8. *Уравнение вида*

$$P(x;\ y)\,dx+Q(x;\ y)\,dy=0, \tag{8}$$

где левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $F(x;\ y)$ в некоторой области G, называется уравнением в полных дифференциалах.

Если уравнение (8) является уравнением в полных дифференциалах, то его можно записать следующим образом: $dF(x;\ y)=0$, где $F(x;\ y)$ — такая функция, что $dF(x;\ y)=P(x;\ y)\,dx+Q(x;\ y)\,dy$. Отсюда следует, что общее решение уравнения (8) имеет вид $F(x;\ y)=C$. Решение сводится к отысканию функции $F(x;\ y)$.

Пример 6. Найти общее решение уравнения

$$(x+y+1)\,dx+(x-y^2+3)\,dy=0.$$

Решение. Здесь $P(x;\ y)=x+y+1$, $Q(x;\ y)=x-y^2+3$. Так как

$$\frac{\partial(x+y+1)}{\partial y}=1=\frac{\partial(x-y^2+3)}{\partial x},$$

то выражение $(x+y+1)\,dx+(x-y^2+3)\,dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $F(x;\ y)$. При этом $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ — непрерывные функции. Тогда

$$\frac{\partial F(x;\ y)}{\partial x}=x+y+1.$$

Интегрируя левую и правую части по x, получим

$$F(x;\ y)=\int P(x;\ y)\,dx+C(y)=\int(x+y+1)\,dx+C(y)=$$

$$=\frac{x^2}{2}+xy+x+C(y). \tag{9}$$

Чтобы найти $C(y)$, используем (9) и тот факт, что

$$\frac{\partial F(x;\ y)}{\partial y}=x-y^2+3.$$

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2}+xy+x+C(y)\right)=x-y^2+3;\ C'(y)=-y^2+3;\ \frac{dC}{dy}=-y^2+3;$$

$$dC=(-y^2+3)\,dy;\ C(y)=\int(-y^2+3)\,dy+C_1=-\frac{y^3}{3}+3y+C_1.$$

Подставляя найденное $C(y)$ в (9), получаем

$$F(x;\,y)=\frac{x^2}{2}+xy+x-\frac{y^3}{3}+3y+C_1.$$

Данное уравнение принимает вид $dF(x;\,y)=0$, а его общее решение определяется уравнением

$$F(x;\,y)=C_2 \text{ или } \frac{x^2}{2}+xy+x-\frac{y^3}{3}+3y+C_1=C_2.$$

Полагая $6(C_2-C_1)=C_3$ (C_3 — произвольная постоянная), получаем окончательное уравнение, определяющее общее решение исходного уравнения $3x^2+6xy+6x-2y^3+18y=C_3$.

Проверить, что левые части следующих уравнений — полные дифференциалы, и решить уравнения:

67. $(3x^2+6xy^2)\,dx+(6x^2y+4y^3)\,dy=0.$

68. $3x^2e^y\,dx+(x^3e^y-1)\,dy=0.$

69. $e^{-y}\,dx+(1-xe^{-y})\,dy=0.$

70. $2x\cos^2 y\,dx+(2y-x^2\sin 2y)\,dy=0.$

71. $(3x^2+2y)\,dx+(2x-3)\,dy=0.$

72. $(3x^2y-4xy^2)\,dx+(x^3-4x^2y+12y^3)\,dy=0.$

73. $(x\cos 2y+1)\,dx-x^2\sin 2y\,dy=0.$

74. $(3x^2y-2x^3+y^3)\,dx-(2y^3-3xy^2-x^3)\,dy=0.$

75. $\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}+2xy-\frac{y}{x}\right)dx+(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x)\,dy=0.$

76. $\frac{y+\sin x\cos^2 xy}{\cos^2 xy}\,dx+\left(\frac{x}{\cos^2 xy}+\sin y\right)dy=0.$

77. $\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,dx+\frac{e^y}{1+x^2}\,dy=0.$

§ 2. Дифференциальные уравнения второго порядка

1. Основные понятия.

Определение 1. *Уравнение вида*

$$F(x,\,y,\,y',\,y'')=0,$$

где x — независимая переменная, y — искомая функция, y' и y'' —

ее производные, называется дифференциальным уравнением второго порядка.

Обычно изучают уравнения, которые могут быть записаны в виде, разрешенном относительно второй производной:

$$y''=f(x, y, y'). \tag{1}$$

Решением уравнения (1) называется функция $y=\varphi(x)$, $x\in(a, b)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. График решения называется *интегральной кривой.*

Условия

$$y=y_0,\ y'=y_0' \text{ при } x=x_0 \tag{2}$$

называют *начальными условиями.*

Функция $y=\varphi(x, C_1, C_2)$ называется *общим решением* уравнения (1) в некоторой области G, если она является решением уравнения (1) при любых значениях C_1 и C_2 и если при любых начальных условиях (2) существуют единственные значения постоянных $C_1=C_1^0$, $C_2=C_2^0$ такие, что функция $y=\varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ удовлетворяет данным начальным условиям.

Любая функция $y=\varphi(x, C_1^0, C_2^0)$, получающаяся из общего решения $y=\varphi(x, C_1, C_2)$ уравнения (1) при определенных значениях постоянных $C_1=C_1^0$, $C_2=C_2^0$, называется *частным решением.*

Пример 1. Найти общее и частное решения уравнения $y''=2$ при начальных условиях $y_0=1$, $y_0'=1$ при $x_0=1$.

Решение. Общее решение данного уравнения найдем двукратным последовательным интегрированием. Последовательно интегрируя, находим сначала первую производную $y'=2x+C_1$, а затем и общее решение: $y=x^2+C_1x+C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Подставляя значения начальных условий в выражения для общего решения $y=x^2+C_1x+C_2$ и его производной $y'=2x+C_1$, для определения C_1 и C_2 получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 1=1+C_1+C_2, \\ 1=2+C_1, \end{cases}$$

откуда находим $C_1=-1$ и $C_2=1$. Следовательно, искомым частным решением данного уравнения является функция $y=x^2-x+1$, график которой — парабола, проходящая через точку (1; 1).

Проверить, будут ли указанные функции общими решениями уравнений:

78. $y=C_1\sin x+C_2\cos x$, $\quad y''+y=0$.

79. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$, $\quad y''-y'-2y=0$.

80. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$, $\quad y''-5y'+6y=0$.

81. $y=C_1x+C_2x^2$, $\quad y''-2\dfrac{y'}{x}+2\dfrac{y}{x^2}=0$.

82. $y=C_1x^{3/2}+C_2$, $2xy''=y'$.

83. $y=C_1x+C_2\ln x$, $x^2(1-\ln x)y''+xy'-y=0$.

2. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Определение 2. *Уравнение вида*

$$y''+py'+qy=0,$$

*где y — искомая функция, а p и q — вещественные числа, называется линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами**.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y''+y'-2y=0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение, заменяя y'' на k^2, y' на k, а y на 1. Получаем

$$k^2+k-2=0.$$

Корни уравнения $k_1=1$, $k_2=-2$ вещественные и различные. Этим корням соответствуют частные линейно независимые решения $y_1=e^x$, $y_2=e^{-2x}$: $y_2/y_1=e^{-3x}\neq\text{const}$. Общее решение уравнения имеет вид $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y''-2y'+y=0$.

Решение. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2-2k+1=0.$$

Корни уравнения $k_1=k_2=1$ вещественные и равные. Этим корням соответствуют частные линейно независимые решения $y_1=e^x$, $y_2=xe^x$: $y_1/y_2=1/x\neq\text{const}$. Общее решение уравнения имеет вид $y=C_1e^x+C_2xe^x=e^x(C_1+C_2x)$.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y''-4y'+13y=0$.

Решение. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2-4k+13=0.$$

Корни уравнения $k_1=2+i3$, $k_2=2-i3$ комплексные. Этим корням соответствуют частные линейно независимые решения $y_1=e^{2x}\cos 3x$, $y_2=e^{2x}\sin 3x$: $y_1/y_2=\operatorname{ctg} 3x\neq\text{const}$. Общее решение уравнения имеет вид $y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$.

Решить уравнения:

84. $y''-5y'+4y=0$. **85.** $y''-6y'+9y=0$.

86. $y''+8y'+25y=0$. **87.** $y''-3y'+2y=0$.

88. $y''-4y'+4y=0$. **89.** $y''-2y'+2y=0$.

*Теоретические пояснения к этому пункту следует искать в учебниках, в частности в учебнике автора этой книги.

90. $y''-4y'+3y=0$. **91.** $y''-4y=0$.

92. $y''+4y'=0$. **93.** $y''+3y'+2y=0$.

94. $y''+2ay'+a^2y=0$. **95.** $y''+2y'+5y=0$.

96. $y''-y=0$. **97.** $y''+y=0$.

3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Определение 3. *Уравнение вида*

$$y''+py'+qy=f(x), \tag{3}$$

где p и q — вещественные числа, $f(x)$ — непрерывная функция, называется линейным неоднородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Общее решение уравнения (3) представляет собой сумму частного решения неоднородного уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения. Нахождение общего решения однородного уравнения изучено в п. 2. Для нахождения частного решения воспользуемся *методом неопределенных коэффициентов*, не содержащим процесса интегрирования.

Рассмотрим различные виды правых частей уравнения (3).

1) Правая часть имеет вид

$$f(x)=P_n(x),$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n. Тогда частное решение $\tilde{y}$ можно искать в виде $\tilde{y}=Q_n(x)\,x^r$, где $Q_n(x)$ — многочлен той же степени, что и $P_n(x)$, а r — число корней характеристического уравнения, равных нулю.

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y''-2y'+y=x+1$.

Решение. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $Y=e^x(C_1+C_2x)$ (см. пример 3). Так как ни один из корней характеристического уравнения $k^2-2k+1=0$ не равен нулю ($k_1=k_2=1$), то частное решение ищем в виде

$$\tilde{y}=(Ax+B)\,x^0=Ax+B,$$

где A и B — неизвестные коэффициенты. Дифференцируя дважды $\tilde{y}=Ax+B$ и подставляя $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$ в данное уравнение, найдем

$$-2A+Ax+B=x+1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства: $A=1$, $-2A+B=1$, — находим $A=1$, $B=3$. Итак, частное решение данного уравнения имеет вид $\tilde{y}=x+3$, а его общее решение

$$y=e^x(C_1+C_2x)+x+3.$$

2) Правая часть имеет вид

$$f(x)=e^{\alpha x}P_n(x),$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n. Тогда частное решение $\tilde{y}$ следует искать в виде

$$\tilde{y}=Q_n(x)\,x^r e^{\alpha x},$$

где $Q_n(x)$ — многочлен той же степени, что и $P_n(x)$, а r — число корней характеристического уравнения, равных α. Если $\alpha=0$, то $f(x)=P_n(x)$, т. е. имеет место случай 1).

Пример 6. Найти общее решение уравнения $y''-4y'+3y=xe^x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2-4k+3=0$ имеет корни $x_1=1$, $k_2=3$. Значит, общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $Y=C_1e^x+C_2e^{3x}$. Так как среди корней характеристического уравнения имеется только один корень $k_1=\alpha=1$, то $r=1$. В данном случае $P_n(x)=x$ — многочлен первой степени. Поэтому частное решение данного уравнения ищем в виде

$$\tilde{y}=(Ax+B)\,xe^x=(Ax^2+Bx)\,e^x.$$

Дифференцируя и подставляя в уравнение, получаем $-4Ax+$ $+2A-2B=x$, откуда находим $A=-1/4$, $B=-1/4$. Подставляя A и B в выражение для $\tilde{y}$, получаем частное решение данного уравнения $\tilde{y}=-1/4\,(x^2+x)\,e^x$; общее решение имеет вид

$$y=\tilde{y}+Y=C_1e^x+C_2e^{3x}-1/4\,(x^2+x)\,e^x.$$

3) Правая часть имеет вид

$$f(x)=a\cos\beta x+b\sin\beta x,$$

где a, b и β — известные числа. Тогда частное решение $\tilde{y}$ надо искать в виде

$$\tilde{y}=(A\cos\beta x+B\sin\beta x)\,x^r,$$

где A и B — неизвестные коэффициенты, а r — число корней характеристического уравнения, равных $i\beta$.

Пример 7. Найти общее решение уравнения $y''+y=\sin x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2+1=0$ имеет корни $k_1=i$, $k_2=-i$. Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$. В правой части равенства — функция $\sin x$, т. е. $a=0$, $b=1$, $\beta=1$. Так как $i\beta=i$ — корень характеристического уравнения, то $r=1$ и частное решение надо искать в виде

$$\tilde{y}=(A\cos x+B\sin x)\,x.$$

Дифференцируя и подставляя в уравнение, получаем $2(-A\sin x+B\cos x)=\sin x$, откуда $A=-1/2$, $B=0$. Таким образом, частное решение $\tilde{y}=-(1/2)\,x\cos x$; общее решение уравнения

$$y=\tilde{y}+Y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}\,x\cos x.$$

Пример 8. Найти общее решение уравнения $y''+y=\sin 2x$.

Решение. Данное уравнение отличается от предыдущего только тем, что $\beta=2$. Так как $i\beta=i2$ не является корнем характеристического уравнения, то $r=0$ и частное решение следует искать в виде

$$\tilde{y}=A\cos 2x+B\sin 2x.$$

Дифференцируя и подставляя в уравнение, получаем $-3A\cos 2x-3B\sin 2x=\sin 2x$, откуда $A=0$, $B=-1/3$, т. е. частное решение $\tilde{y}=-(1/3)\sin 2x$; общее решение уравнения

$$y=\tilde{y}+Y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{3}\sin 2x.$$

4) Правая часть имеет вид

$$f(x)=e^{\alpha x}\,[P_n(x)\cos\beta x+P_m(x)\sin\beta x],$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n, а $P_m(x)$ — многочлен степени m. Тогда частное решение следует искать в виде

$$\tilde{y}=x^r e^{\alpha x}\,[Q_1(x)\cos\beta x+Q_2(x)\sin\beta x],$$

где $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ — многочлены степени s, $s=\max\{n, m\}$, а r — число корней характеристического уравнения, равных $\alpha+i\beta$.

Пример 9. Найти общее решение уравнения $y''-y=3e^{2x}\cos x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2-1=0$ имеет корни $k_1=1$, $k_2=-1$; общее решение однородного уравнения $Y=C_1e^x+C_2e^{-x}$. В правой части уравнения — произведение многочлена нулевой степени, показательной и тригонометрической функций, так что $P_n(x)=3$, $P_m=0$, $s=0$. Число $\alpha+i\beta=2+i1$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $r=0$ и частное решение ищем в виде

$$\tilde{y}=e^{2x}\,(A\cos x+B\sin x).$$

Дифференцируя и подставляя в уравнение, получаем $(2A+4B)\cos+(2B-4A)\sin x=3\cos x$, откуда $A=3/10$, $B=3/5$. Таким образом, частное решение $\tilde{y}=e^{2x}\,(3/10\cos x+3/5\sin x)$; общее решение уравнения

$$y=\tilde{y}+Y=e^{2x}\left(\frac{3}{10}\cos x+\frac{3}{5}\sin x\right)+C_1e^x+C_2e^{-x}.$$

5) Правая часть уравнения представляет сумму двух функций

$$y''+py'+qy=f_1(x)+f_2(x).$$

Тогда частное решение можно искать в виде

$$\tilde{y}=\tilde{y}_1+\tilde{y}_2,$$

где $\tilde{y}_1$ — частное решение уравнения $y''+py'+qy=f_1(x)$, а $\tilde{y}_2$ — частное решение уравнения $y''+py'+qy=f_2(x)$.

Пример 10. Найти общее решение уравнения $y''-2y'+y=$ $=\sin x+e^{-x}$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2-2k+1=0$ имеет корни $k_1=k_2=1$, поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения $Y=C_1e^x+C_2xe^x=e^x\,(C_1+C_2x)$.

Так как правая часть уравнения состоит из суммы двух функций $\sin x$ и e^{-x}, то частное решение ищем в виде

$$\tilde{y}=\tilde{y}_1+\tilde{y}_2,$$

где $\tilde{y}_1$ — частное решение уравнения $y''-2y'+y=\sin x$, а $\tilde{y}_2$ — частное решение уравнения $y''-2y'+y=e^{-x}$.

Сначала найдем частное решение $\tilde{y}_1$. Так как число $i\beta=i$ не является корнем характеристического уравнения ($r=0$), то частное решение $\tilde{y}_1$ будем искать в виде $\tilde{y}_1=A\sin x+B\cos x$. Подставляя $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_1'$ и $\tilde{y}_1''$ в уравнение $y''-2y'+y=\sin x$ и сравнивая коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$, получаем $-2A=0$, $2B=1$, откуда $A=0$, $B=1/2$ и, следовательно, $\tilde{y}_1=(1/2)\cos x$.

Теперь найдем частное решение $\tilde{y}_2$. Будем его искать в виде $\tilde{y}_2=Ae^{-x}$, так как число $\alpha=-1$ не является корнем характеристического уравнения. Подставляя $\tilde{y}_2$, $\tilde{y}_2'$ и $\tilde{y}_2''$ в уравнение $y''-$ $-2y'+y=e^{-x}$, найдем $A=1/4$. Следовательно, $\tilde{y}_2=(1/4)\,e^{-x}$.

Таким образом, частное решение данного уравнения имеет вид

$$\tilde{y}=\tilde{y}_1+\tilde{y}_2=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\,e^{-x},$$

а общее решение этого уравнения — вид

$$y=\tilde{y}+Y=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\,e^{-x}+C_1e^x+C_2xe^x.$$

Решить уравнения:

98. $y''+2y'+y=e^x$.

99. $y''-3y'+2y=e^x$.

100. $y''+y'-2y=6x^2$.

101. $y''+3y'=9x$.

102. $y''-2y=xe^{-x}$.

103. $y''-4y=8x^3$.

104. $y''-5y'+6y=13\sin 3x$.

105. $y''+y'+2{,}5y=25\cos 2x$.

106. $y''+4y=3\sin 2x$.

107. $y''+4y=\sin 2x$.

108. $y''+y=x\cos x$.

109. $y''-2y'+3y=e^{-x}\cos x$.

110. $y''-3y-10y=\sin x+$ $+3\cos x$.

111. $y''-3y'+2y=e^{3x}\,(x^2+x)$.

112. $y''-2y'+2y=$ $=e^x\,(2\cos x-4x\sin x)$.

113. $y''-4y=e^x\,[(-4x+4)\times$ $\times\cos x-(2x+6)\sin x]$.

114. $y''+y=x+2e^x$.

115. $y''-2y'+y=3e^x+x+1$.

116. $y''-6y'+8y=e^x+e^{2x}$.

117. $y''+2y'-3y=2xe^{-3x}+(x+1)e^x$.

§ 3. Примеры дифференциальных уравнений разных типов

Решить уравнения. Если даны начальные условия, найти частные решения:

118. $2\,dy-x\,dx=0$, $x_0=2$, $y_0=0$.

119. $y\,dy-x\,dx=0$, $x_0=3$, $y_0=5$.

120. $(2x+5)\,dy+y\,dx=0$, $x_0=0$, $y_0=1$.

121. $yx-y'=0$, $x_0=0$, $y_0=10$.

122. $yy'=3$, $x_0=6$, $y_0=10$.

123. $y'-(2x+2)\sqrt{1-y^2}=0$, $x_0=0$, $y_0=1$.

124. $y'\sqrt{1+x^2}-y=0$, $x_0=0$, $y_0=4$.

125. $y'x+\sqrt{4-y^2}=0$, $x_0=1$, $y_0=0$.

126. $y'(4+x^2)+y^2=0$, $x_0=2$, $y_0=8/\pi$.

127. $y'(4-x^2)-4y=0$, $x_0=0$, $y_0=5$.

128. $\sqrt{x}\,dy-y\,dx=dx$, $x_0=0$, $y_0=0$.

129. $\sqrt{1-x^2}\,y'+x\sqrt{9-y^2}=0$, $x_0=0$, $y_0=0$.

130. $y'-2xy-y=0$, $x_0=0$, $y_0=\sqrt{3}$.

131. $3x\,dx-2x\,dy=dx+dy$.

132. $\sqrt{9-x^2}\,dy-y\,dx=0$, $x_0=3/2$, $y_0=1$.

133. $dy-2y\,dx=dx$, $x_0=\ln 2$, $y_0=5/2$.

134. $\sqrt{x^2-4x+8}\,y'-\sqrt{16-y^2}=0$.

135. $x\sqrt{25-y^2}-e^{-x}y'=0$, $x_0=0$, $y_0=0$.

136. $(y-4)dx+(x+3)dy=0$.

137. $y'\sec 5x-5y=0$, $x_0=\pi$, $y_0=1/5$.

138. $\sqrt{2+y}\,\operatorname{cosec}^2 x-y'\cos^2 x=0$, $x_0=\pi/4$, $y_0=2$.

139. $x\,dy+y\,dx=\sin x\,dx$, $x_0=\pi/2$, $y_0=2/\pi$.

140. $y'=\dfrac{y^2}{x^2}-\dfrac{y}{x}$.

141. $y'\sin x-y=\sin x\cdot\sin\dfrac{x}{2}$.

142. $y'-5x^4y=e^{x^5}$.

143. $xy'-y=x\sqrt{x}$.

144. $\sqrt{1-x^2}\,(xy'+y)=1$.

145. $y'+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{e^{-x^2}}{x}$.

146. $xy'+y=\ln x+1$.

147. $y'-y\operatorname{tg}x=\operatorname{ctg}x$.

148. $y'x+y+xy^2=0$.

149. $y'-xy+y^3e^{-x^2}=0$.

150. $y'+xy=xy^3$.

151. $xy'+y=y^2\ln x$.

152. $y'+2xy=2x^3y^3$.

153. $y''=\ln x$.

154. $y''=\sin 2x$.

155. $xy''-2y'=0$.

156. $xy''+y'=0$.

157. $xy''-y'=0$.

158. $y''+9y=0$.

159. $y''-9y=0$.

160. $y''-y'=0$.

161. $y''+25y=0$.

162. $y''+25y'=0$.

163. $y''-8y=0$.

164. $y''-25y=0$.

165. $y''-2y'+y=0$.

166. $y''-6y'+9y=0$.

167. $y''+4y'+10y=0$.

168. $y''+100y=0$.

169. $2y''-3y'-2y=0$.

170. $y''+3y=0$.

171. $y''+y'-12y=0$.

172. $y''+4y'+4y=0$.

173. $y''-4y'-7y=0$.

174. $y''+y'=e^x$.

175. $y''-4y'=4e^{4x}$.

176. $y''+3y'+2y=3e^{2x}$.

177. $y''+y'+y=3\cos 2x$.

178. $y''+3y'+2y=5e^{5x}$.

179. $y''+y=\sin 5x$.

180. $y''+y=\cos x$.

181. $y''+9y=\cos 3x$.

182. $y''+y'-2y=2e^{-2x}+e^{2x}$.

183. $y''-y'=4+x$.

184. $y''-2y'-3y=x^2$.

185. $y''+y=\cos x+\sin 5x$.

186. $y''+4y'=x+e^{-4x}$.

187. $y''-4y=e^{2x}+3e^{-2x}$.

188. $y''+9y=4\sin 3x+x$.

189. $y''-3y'=x^3+2$.

190. $y''+3y'=1$.

191. $y''+y=x\cos x$.

192. $y''+y'=xe^x$.

193. $y''+y'=x\sin x$.

194. Написать уравнение кривой, проходящей через точку M (1; 2), если угловой коэффициент касательной в любой точке кривой равен абсциссе точки касания.

195. Написать уравнение кривой, проходящей через точку M (1; $\sqrt{2}$), если угловой коэффициент касательной к кривой в любой точке равен отношению абсциссы точки касания к ординате.

196. Написать уравнения кривой, проходящей через точку M (1; 3), если угловой коэффициент касательной к ней в любой точке кривой втрое больше углового коэффициента радиуса-вектора точки касания.

197. Написать уравнение кривой, проходящей через точку M (2; 2), если подкасательная в любой точке ее равна удвоенной абсциссе точки касания. (Подкасательной называется проекция отрезка касательной, заключенного между точкой касания и точкой пересечения касательной с осью Ox.)

198. Определить форму зеркала, представляющего собой поверхность вращения и обладающего тем свойством, что все лучи, выходящие из источника света, помещенного в точке O на оси вращения, отражаются зеркалом параллельно этой оси.

199. Скорость распада радия пропорциональна наличному количеству радия. Известно, что половина первоначального запаса радия распадается по истечении 1600 лет. Найти, какой процент радия окажется распавшимся по истечении 100 лет.

200. Законом «естественного роста» называется такой закон роста, при котором скорость роста вещества пропорциональна наличному количеству вещества. Требуется найти формулу для определения изменения количества вещества y в зависимости от времени t, считая, что в начальный момент $t_0=0$ количество вещества было равно y_0.

201. Материальная точка массы m свободно падает под действием силы земного притяжения. Найти закон движения точки без учета сопротивления воздуха, если в момент времени $t=0$ точка имела скорость v_0.

202. Найти уравнение движения материальной точки массы m, брошенной вертикально вверх с начальной скоростью v_0, без учета сопротивления воздуха.

203. При прямолинейном движении материальная точка массы m удаляется от некоторой точки O (начало координат). При этом скорость движения в любой момент времени численно равна половине пройденного пути. Определить путь, скорость и ускорение как функции времени t, если начальная скорость $v_0=3$ м/с.

204. Тело, нагретое до 100°C, охладилось за 20 мин до 60°C в комнате с температурой 20°C. Найти закон охлаждения тела. Через сколько минут оно остынет до 30°C, если скорость охлаждения пропорциональна разности температуры тела в данный момент и температуры воздуха в комнате?

205. За какое время тело, нагретое до 100°C, охладится до 24°C в комнате с температурой 20°C, если до 40°C оно охлаждается за 10 мин?

206. Цилиндрический сосуд высотой H и площадью основания s имеет внизу отверстие, площадь которого равна σ. Найти время T, за которое жидкость, заполняющая сосуд, вытечет из сосуда, если известно, что скорость v вытекания жидкости выражается формулой $v=\sqrt{2gh}$, где g — ускорение силы тяжести, h — высота столба жидкости над отверстием.

207. За какое время вода, заполняющая полусферическую чашу диаметра 2 м, вытечет из нее через круглое отверстие радиуса 0,1 м, вырезанное в центре дна чаши?

§ 4. Системы дифференциальных уравнений

1. Общие понятия.

Определение. *Совокупность уравнений вида*

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)=0, \\ F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)=0, \end{cases}$$

где x — независимая переменная, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — искомые функции, $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ — их производные, называется системой дифференциальных уравнений первого порядка.

Система дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных от неизвестных функций, называется *нормальной системой дифференциальных уравнений* и имеет следующий общий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx}=f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx}=f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \quad (1)$$

Совокупность n функций

$$y_1=\varphi_1(x),\ y_2=\varphi_2(x),\ \ldots,\ y_n=\varphi_n(x), \quad (2)$$

определенных в интервале (a, b), называется *решением* нормальной системы (1), если эти функции при подстановке в уравнения системы (1) обращают их в тождества.

Теорема Коши. *Если функции $f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, ..., $f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и их частные производные по $y_1, y_2, \ldots, y_n$ определены и непрерывны в некоторой области G пространства переменных $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то, какова бы ни была внутренняя точка $(x_0; y_{10}; y_{20}; \ldots; y_{n0})$ области G, в некоторой окрестности точки x_0 существует единственное решение системы* (1), *удовлетворяющее условиям*

$$y_1=y_{10},\ y_2=y_{20},\ \ldots,\ y_n=y_{n0} \text{ при } x=x_0. \quad (3)$$

Условия (3) называются *начальными условиями решения*, а задача отыскания решения по заданным начальным условиям — *задачей Коши.*

Совокупность n функций

$$\begin{cases} y_1=\varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_2=\varphi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n=\varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \end{cases} \quad (4)$$

зависящих от x и от n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, будем называть *общим решением* системы (1) в некоторой области G, если при любых значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ эти функции представляют решение системы и если любое решение этой системы может быть записано в виде (4) при некоторых значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Совокупность n функций

$$\begin{cases} y_1=\varphi_1\,(x,\, C_1^0,\, C_2^0,\, \ldots,\, C_n^0), \\ y_2=\varphi_2\,(x,\, C_1^0,\, C_2^0,\, \ldots,\, C_n^0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n=\varphi_n\,(x,\, C_1^0,\, C_2^0,\, \ldots,\, C_n^0), \end{cases} \tag{5}$$

получающихся из общего решения (4) системы (1) при определенных значениях постоянных $C_1=C_1^0$, $C_2=C_2^0$, ..., $C_n=C_n^0$, будем называть *частным решением* системы (1).

Если в области G выполнены условия теоремы Коши, то для нахождения частного решения (5) достаточно разрешить уравнения

$$\begin{cases} \varphi_1\,(x_0,\, C_1,\, C_2,\, \ldots,\, C_n)=y_{10}, \\ \varphi_2\,(x_0,\, C_1,\, C_2,\, \ldots,\, C_n)=y_{20}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n\,(x_0,\, C_1,\, C_2,\, \ldots,\, C_n)=y_{n0} \end{cases}$$

относительно $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и подставить найденные значения постоянных в соотношения (4).

Одним из основных методов нахождения решения нормальных систем является *метод исключения неизвестных.* С помощью этого метода данная система сводится к одному уравнению n-го порядка относительно одной неизвестной функции.

Пример 1. Найти общее решение системы уравнений

$$\frac{dy}{dx}=-7y+z, \qquad \frac{dz}{dx}=-2y-5z$$

и выделить из него частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y=0$, $z=1$ при $x=0$.

Решение. Продифференцировав первое из уравнений системы по x, находим $\frac{d^2y}{dx^2}=-7\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}$. Подставляя в это равенство выражение $\frac{dz}{dx}$ из второго уравнения системы и заменяя функцию z ее выражением из первого (в этом смысл метода!), приходим к линейному однородному уравнению второго порядка относительно одной неизвестной функции:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-7\frac{dy}{dx}-2y-5\left(\frac{dy}{dx}+7y\right), \quad \text{или} \quad \frac{d^2y}{dx^2}+12\frac{dy}{dx}+37y=0.$$

Решив это уравнение, находим его общее решение

$$y=e^{-6x}\,(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

Дифференцируя последнее равенство, имеем

$$\frac{dy}{dx}=-6e^{-6x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{-6x}(-C_1\sin x+C_2\cos x).$$

Подставляя выражения для y и $\frac{dy}{dx}$ в первое уравнение системы и приводя подобные члены, получим

$$z=-6e^{-6x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{-6x}(-C_1\sin x+C_2\cos x)+$$
$$+7e^{-6x}(C_1\cos x+C_2\sin x)=e^{-6x}[(C_2+C_1)\cos x+(C_2-C_1)\sin x].$$

Общее решение данной системы имеет вид

$$y=e^{-6x}(C_1\cos x+C_2\sin x),\quad z=e^{-6x}[(C_2+C_1)\cos x+(C_2-C_1)\sin x]. \tag{6}$$

Решим теперь поставленную задачу Коши. Подставляя в систему (6) вместо y, z и x их начальные значения 0, 1 и 0, получаем систему уравнений для определения постоянных C_1 и C_2:

$$0=C_1\cdot 1+C_2\cdot 0,\quad 1=(C_2+C_1)\cdot 1+(C_2-C_1)\cdot 0.$$

Отсюда $C_1=0$, $C_2=1$. Следовательно, искомым частным решением являются функции

$$y=e^{-6x}\sin x,\qquad z=e^{-6x}(\cos x+\sin x).$$

Решить системы уравнений:

208. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=4x-y,\\ \frac{dy}{dt}=x+2y.\end{cases}$ **209.** $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=-y-2z,\\ \frac{dz}{dx}=3y+4z.\end{cases}$ **210.** $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=2x-y,\\ \frac{dy}{dt}=x+2y.\end{cases}$

211. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x-2y,\\ \frac{dy}{dt}=x-y.\end{cases}$ **212.** $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=z,\\ \frac{dz}{dx}=y.\end{cases}$ **213.** $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=y-2z,\\ \frac{dz}{dx}=y-z.\end{cases}$

Если правые части нормальной системы (1) являются линейными функциями относительно неизвестных функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то такая система называется *линейной* и имеет вид

$$\begin{cases}\frac{dy_1}{dx}=P_{11}(x)\,y_1+P_{12}(x)\,y_2+\ldots+P_{1n}(x)\,y_n+f_1(x),\\ \frac{dy_2}{dx}=P_{21}(x)\,y_1+P_{22}(x)\,y_2+\ldots+P_{2n}(x)\,y_n+f_2(x),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{dy_n}{dx}=P_{n1}(x)\,y_1+P_{n2}(x)\,y_2+\ldots+P_{nn}(x)\,y_n+f_n(x).\end{cases}$$

Если функции $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ тождественно равны нулю, то линейная система называется *однородной*, в противном случае — *неоднородной*.

2. Системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Для простоты записи ограничимся системой трех уравнений с тремя неизвестными функциями x, y и z:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \dfrac{dz}{dt} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{cases} \tag{7}$$

где a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ — вещественные числа, t — независимая переменная.

К этой системе можно применить общий метод исключения неизвестных, но можно решать ее и другим, более наглядным методом, применимым только к системам линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Будем искать частное решение системы в следующем виде:

$$x = \alpha e^{kt}, \quad y = \beta e^{kt}, \quad z = \gamma e^{kt}, \tag{8}$$

где α, β, γ и k — некоторые числа (причем $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$), которые надо определить так, чтобы функции (8) были решением системы (7).

Подставляя функции (8) и их производные в уравнения системы (7) и сокращая на e^{kt}, получим

$$\begin{cases} k\alpha = a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma, \\ k\beta = a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma, \\ k\gamma = a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma. \end{cases}$$

Перенося все члены в одну часть равенства и группируя коэффициенты при α, β, γ, получим систему уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\,\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\,\beta + a_{23}\gamma = 0, \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\,\gamma = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Система (9) — это однородная система трех уравнений первой степени с тремя неизвестными α, β и γ. Как известно, чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, т. е. чтобы число k было корнем уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) называется *характеристическим уравнением* для системы (7). Оно является уравнением третьей степени относительно k и имеет три корня: k_1, k_2 и k_3. Каждому корню соответствует ненулевое решение системы (9) (α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3), а следовательно, и частное решение данной системы (7):

$$x_1=\alpha_1 e^{k_1 t},\ y_1=\beta_1 e^{k_1 t},\ z_1=\gamma_1 e^{k_1 t};$$
$$x_2=\alpha_2 e^{k_2 t},\ y_2=\beta_2 e^{k_2 t},\ z_2=\gamma_2 e^{k_2 t};$$
$$x_3=\alpha_3 e^{k_3 t},\ y_3=\beta_3 e^{k_3 t},\ z_3=\gamma_3 e^{k_3 t}.$$

Если корни k_1, k_2 и k_3 характеристического уравнения различны и вещественны, то, как можно показать, общее решение системы (7) запишется в виде

$$\begin{cases} x=C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3, \\ y=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3, \\ z=C_1z_1+C_2z_2+C_3z_3. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=C_1\alpha_1 e^{k_1 t}+C_2\alpha_2 e^{k_2 t}+C_3\alpha_3 e^{k_3 t}, \\ y=C_1\beta_1 e^{k_1 t}+C_2\beta_2 e^{k_2 t}+C_3\beta_3 e^{k_3 t}, \\ z=C_1\gamma_1 e^{k_1 t}+C_2\gamma_2 e^{k_2 t}+C_3\gamma_3 e^{k_3 t}, \end{cases} \quad (11)$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Если среди корней характеристического уравнения имеются комплексные, то комплексные решения можно заменить вещественными, отделяя вещественные и мнимые части найденных функций.

В случае, когда среди корней характеристического уравнения имеются кратные, корню k_1 кратности r соответствует частное решение системы (7), имеющее вид

$$x=P_1(t)\,e^{k_1 t},\ y=P_2(t)\,e^{k_1 t},\ z=P_3(t)\,e^{k_1 t}, \quad (12)$$

где $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$ — многочлены степени не выше $r-1$, причем среди коэффициентов всех этих многочленов r коэффициентов являются произвольными, а остальные выражаются через них. Полагая поочередно один из этих произвольных коэффициентов равным единице, а остальные равными нулю, мы построим r частных решений.

Пример 2. Найти общее решение системы

$$\frac{dx}{dt}=y+z, \qquad \frac{dy}{dt}=3x+z, \qquad \frac{dz}{dt}=3x+y.$$

Решение. Ищем частное решение системы в виде $x=\alpha e^{kt}$, $y=\beta e^{kt}$, $z=\gamma e^{kt}$. Подставляя эти функции и их производные в уравнения системы и сокращая на e^{kt}, получаем систему

$$\begin{cases} -\alpha k+\beta+\gamma=0, \\ 3\alpha-\beta k+\gamma=0, \\ 3\alpha+\beta-\gamma k=0. \end{cases} \quad (13)$$

Составляем характеристическое уравнение (10), соответствующее данной системе:

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & 1 \\ 3 & -k & 1 \\ 3 & 1 & -k \end{vmatrix}=0,$$

или $k^3-7k-6=0$. Корни характеристического уравнения $k_1=-1$, $k_2=-2$, $k_3=3$ различны и вещественны.

Найдем частное решение, соответствующее корню $k_1=-1$. Подставляем $k_1=-1$ в систему (13):

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=0, \qquad 3\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=0, \qquad 3\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=0.$$

Согласно (9), числа α_1, β_1 и γ_1 являются решением системы. Перенося γ_1 вправо и отбрасывая третье уравнение (оно следует из первых двух), находим α_1 и β_1: $\alpha_1=0$, $\beta_1=-\gamma_1$, $\gamma_1=\gamma_1$, где γ_1 — любое число. Полагая $\gamma_1=1$, получим решение $x_1=0$, $y_1=-e^{-t}$, $z_1=e^{-t}$.

Аналогично найдем частное решение, соответствующее корню $k_2=-2$. Подставляем $k_2=-2$ в систему (13):

$$2\alpha_2+\beta_2+\gamma_2=0, \qquad 3\alpha_2+2\beta_2+\gamma_2=0, \qquad 3\alpha_2+\beta_2+2\gamma_2=0.$$

Решив систему из первых двух уравнений, находим α_2 и β_2: $\alpha_2=$ $=-\gamma_2$, $\beta_2=\gamma_2$, $\gamma_2=\gamma_2$, где γ_2 — любое число. Полагая $\gamma_2=1$, получим решение $x_2=-e^{-2t}$, $y_2=e^{-2t}$, $z_2=e^{-2t}$.

Найдем частное решение, соответствующее корню $k_3=3$. Подставляем $k_3=3$ в систему (13):

$$-3\alpha_3+\beta_3+\gamma_3=0, \qquad 3\alpha_3-3\beta_3+\gamma_3=0, \qquad 3\alpha_3+\beta_3-3\gamma_3=0.$$

Снова отбрасывая третье уравнение и решая систему из первых двух уравнений, находим α_3 и β_3: $\alpha_3=\frac{2}{3}\gamma_3$, $\beta_3=\gamma_3$, $\gamma_3=\gamma_3$, где γ_3 — любое число. Полагая $\gamma_3=3$, получим $\alpha_3=2$, $\beta_3=3$. Корню $k_3=3$ соответствует решение $x_3=2e^{3t}$, $y_3=3e^{3t}$, $z_3=3e^{3t}$.

Общее решение данной системы, согласно (11), имеет вид

$$x=-C_2e^{-2t}+2C_3e^{3t}, \qquad y=-C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+3C_3e^{3t},$$
$$z=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+3C_3e^{3t}.$$

Пример 3. Найти общее решение системы

$$\frac{dx}{dt}=-7x+y, \qquad \frac{dy}{dt}=-2x-5y.$$

Решение. Ищем частное решение в виде $x=\alpha e^{kt}$, $y=\beta e^{kt}$. При этом получаем

$$\alpha\,(k+7)-\beta=0, \qquad 2\alpha+\beta\,(k+5)=0. \tag{14}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} k+7 & -1 \\ 2 & k+5 \end{vmatrix}=0,$$

или $k^2+12k+37=0$. Корни характеристического уравнения $k_1=$ $=-6+i$ и $k_2=-6-i$ комплексно сопряженные.

Найдем частное решение, соответствующее корню $k_1=-6+i$. Подставляя k_1 в систему (14), получаем

$$(1+i)\,\alpha_1-\beta_1=0, \qquad 2\alpha_1+\beta_1\,(-1+i)=0.$$

Второе уравнение — следствие первого. Из первого уравнения находим $\beta_1=(1+i)\,\alpha_1$. Полагая $\alpha_1=1$, имеем $\beta_1=1+i$ и, значит, $x_1=e^{(-6+i)\,t}$, $y_1=(1+i)\,e^{(-6+i)\,t}$ — решение данной системы.

Аналогично находим частное решение, соответствующее корню $k_2=-6-i$: $x_2=e^{(-6-i)\,t}$, $y_2=(1-i)\,e^{(-6-i)\,t}$.

Запишем вещественные и мнимые части найденных функций:

$$x_1=e^{-6t}\cos t+ie^{-6t}\sin t, \quad y_1=e^{-6t}(\cos t-\sin t)+ie^{-6t}(\sin t+\cos t),$$
$$x_2=e^{-6t}\cos t-ie^{-6t}\sin t, \quad y_2=e^{-6t}(\cos t-\sin t)-ie^{-6t}(\sin t+\cos t).$$

Отделив вещественные и мнимые части, получаем два частных решения:

$$\tilde{x}_1=e^{-6t}\cos t,\ \tilde{y}_1=e^{-6t}(\cos t-\sin t),\quad \tilde{x}_2=e^{-6t}\sin t,\ \tilde{y}_2=e^{-6t}(\sin t+\cos t).$$

Общее решение данной системы, согласно (11), имеет вид

$$x=e^{-6t}\,(C_1\cos t+C_2\sin t),$$
$$y=e^{-6t}\,[C_1\,(\cos t-\sin t)+C_2\,(\sin t+\cos t)].$$

Пример 4. Найти общее решение системы

$$\frac{dx}{dt}=-4x+2y+5z,\quad \frac{dy}{dt}=6x-y-6z,\quad \frac{dz}{dt}=-8x+3y+9z. \qquad (15)$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -4-k & 2 & 5 \\ 6 & -1-k & -6 \\ -8 & 3 & 9-k \end{vmatrix}=0,$$

или $k^3-4k^2+5k-2=0$ имеет корни $k_1=2$, $k_2=k_3=1$.

Найдем сначала частное решение вида $x_1=\alpha_1 e^{2t}$, $y_1=\beta_1 e^{2t}$, $z_1=\gamma_1 e^{2t}$, соответствующее корню $k_1=2$. Числа α_1, β_1, γ_1 можно найти из системы

$$-6\alpha_1+2\beta_1+5\gamma_1=0, \qquad 6\alpha_1-3\beta_1-6\gamma_1=0, \qquad -8\alpha_1+3\beta_1+7\gamma_1=0.$$

Получим $\alpha_1=-3$, $\beta_1=6$, $\gamma_1=-6$ или (сократив на -3) $\alpha_1=1$, $\beta_1=-2$, $\gamma_1=2$, так что искомым частным решением являются функции $x_1=e^{2t}$, $y_1=-2e^{2t}$, $z_1=2e^{2t}$.

Теперь найдем два частных решения, соответствующих кратному корню $k_2=k_3=1$. Согласно формуле (12), ему отвечает решение вида

$$x=(A_1t+A_2)\,e^t,\quad y=(B_1t+B_2)\,e^t,\quad z=(C_1t+C_2)\,e^t. \qquad (16)$$

Коэффициенты A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 определяются подстановкой (16) в систему (15). Выполняя эту подстановку и сокращая на e^t, получаем

$$\begin{cases} A_1t+A_1+A_2=(-4A_1+2B_1+5C_1)\,t-4A_2+2B_2+5C_2, \\ B_1t+B_1+B_2=(6A_1-B_1-6C_1)\,t+6A_2-B_2-6C_2, \\ C_1t+C_1+C_2=(-8A_1+3B_1+9C_1)\,t-8A_2+3B_2+9C_2. \end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты при t и свободные члены, имеем систему

$$-5A_1+2B_1+5C_1=0, \quad 6A_1-2B_1-6C_1=0, \quad -8A_1+3B_1+8C_1=0,$$
$$-5A_2+2B_2+5C_2=A_1, \quad 6A_2-2B_2-6C_2=B_1, \quad -8A_2+3B_2+8C_2=C_1,$$

откуда $A_1=C_1$, $B_1=0$, $A_2=C_1+C_2$, $B_2=3C_1$, причем C_1 и C_2 произвольны. Решение (16) принимает вид

$$x=(C_1t+C_1+C_2)\,\mathrm{e}^t, \; y=3C_1\mathrm{e}^t, \; z=(C_1t+C_2)\,\mathrm{e}^t.$$

Полагая сначала $C_1=1$, $C_2=0$, а затем $C_1=0$, $C_2=1$, находим два искомых частных решения, соответствующих кратному корню $k_2=k_3=1$: $x_2=(t+1)\,\mathrm{e}^t$, $y_2=3\mathrm{e}^t$, $z_2=t\mathrm{e}^t$; $x_3=\mathrm{e}^t$, $y_3=0$, $z_3=\mathrm{e}^t$. Общим решением данной системы являются функции

$$x=C_1\mathrm{e}^{2t}+(C_2t+C_2+C_3)\mathrm{e}^t, \; y=-2C_1\mathrm{e}^{2t}+3C_2\mathrm{e}^t, \; z=2C_1\mathrm{e}^{2t}+(C_2t+C_3)\mathrm{e}^t.$$

Решить системы уравнений:

214. $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x+4y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+y. \end{cases}$ **215.** $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2x-y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+2y. \end{cases}$ **216.** $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2x-y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+2y. \end{cases}$

217. $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+z, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-2y+4z. \end{cases}$ **218.** $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y-z, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-4y+4z. \end{cases}$ **219.** $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2y-3z, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=3y+2z. \end{cases}$

220. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3x+12y-4z, \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x-3y+z, \quad \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-x-12y+6z.$

221. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2x-y-z, \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=12x-4y-12z, \quad \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-4x+y+5z.$

222. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y+z, \; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=z, \; \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-x+z.$ Выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям: $x=1$, $y=1/2$, $z=1/2$ при $t=0$.

223. $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y+z, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-y-3z. \end{cases}$ **224.** $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x-y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=4x-3y. \end{cases}$

225. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=10x-3y-9z, \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-18x+7y+18z, \quad \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=18x-6y-17z.$

226. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=5x-y-4z, \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-12x+5y+12z, \quad \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=10x-3y-9z.$

227. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3x-y-3z, \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-6x+2y+6z, \quad \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=6x-2y-6z.$

228. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x-z, \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-6x+2y+6z, \quad \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=4x-y-4z.$

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, УКАЗАНИЯ

Глава 1

2. Решение. Действительно, между n-й единицей и $(n+1)$-й стоит n нулей, а между $(n+1)$-й единицей и $(n+2)$-й стоит $n+1$ нулей, чего не может быть в периодической дроби; следовательно, данное число иррационально.

3. Например, $\alpha=0,1010010001\ldots$ и $\beta=0,8989989998\ldots$.

4. Например, $\alpha=1,2020020002\ldots$ и $\beta=0,2020020002\ldots$.

5. Решение. Рассмотрим случай суммы чисел α и β. Предположим, что $\alpha+\beta=\gamma$ есть число рациональное. Тогда $\beta=\gamma-\alpha$ есть число рациональное, как разность двух рациональных чисел, что противоречит условию. Следовательно, число $\alpha+\beta$ иррационально. Остальные случаи доказываются аналогично.

6. Решение. Действительно, предположим, что $\sqrt{2}$ — число рациональное. Тогда его можно представить в виде несократимой дроби $^p/_q$, где p и q — целые положительные числа без общих множителей. Из равенства $\sqrt{2}={}^p/_q$ имеем $p^2=2q^2$, поэтому p^2, а следовательно, и p четно, так как в противном случае p^2 было бы также нечетным, поскольку квадрат любого нечетного числа есть число нечетное: $(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$. Пусть $p=2k$, где k — какое-то целое число. Подставляя $2k$ вместо p, получаем $4k^2=2q^2$ или $2k^2=q^2$. Следовательно, и q — четное число, но тогда дробь $^p/_q$ оказывается сократимой (на два) дробью, что противоречит нашему предположению о несократимости дроби. Этим доказано, что $\sqrt{2}$ не есть рациональное число; значит, оно иррационально.

12. $\inf X=\frac{1}{2}$, $\sup X=1$. **16.** Можно. **17.** Решение. Допустим обратное, например что данное множество X ограничено сверху. Тогда в силу теоремы оно имеет точную верхнюю грань. Обозначим ее через c, т. е. $\sup X=c$. Согласно свойству точной верхней грани, для $\varepsilon=1$ существует такое целое число $x\in X$, что будет выполняться неравенство $x>c-1$. Но тогда $x+1>c$, и так как $x+1\in X$, то это означает, что c не является точной верхней гранью X. Таким образом, получено противоречие, которое доказывает, что данное множество не ограничено сверху. Аналогично доказывается, что множество X не ограничено снизу. **18.** Указание: то, что множество X не ограничено сверху, следует из доказанного в задаче 17 утверждения.

19. Решение. В самом деле, в силу утверждения задачи 17 для числа $^b/_a$ найдется такое целое число $n>0$, что $^b/_a<n$. Это число n искомое, так как, умножая неравенство $b/a<n$ на положительное число a, получаем $an>b$, что и требовалось доказать. **23.** $x\leqslant 0$. **24.** $x<0$. **25.** $-1<x<5$. **26.** $x\geqslant 3$ и $x\leqslant -1$. **27.** $x=-{}^1/_2$. **28.** $x>-{}^1/_2$. **29.** $-1<x<0$. **30.** $2<x<3$. **31.** $2<x<3$. **32.** $x<-1$ или $x\geqslant 1$. **33.** $x=0$. **34.** $x={}^2/_5$ и $x=2$. **35.** $x=1/2$. **36.** $x=-\pi/2+2k\pi$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$. **37.** $x_{1,\,2}=\pm 3$. **38.** $-3<x<-1$ или $1<x<3$. **39.** $x<-1/3$ или $x>5/3$. **40.** $x\geqslant 5$. **41.** $|x|\geqslant\sqrt{3}$. **42.** $x<0$ или $0<x<3$. **43.** $x<-4$ или $x>4$. **44.** $x<-1$. **45.** ⊦

решений. **46.** $x=-1$. **47.** $x=-2$. **48.** $x<-3/2$. **49.** $x<-4$ и $1<x<2$. **50.** $2<x<5$. **51.** $x\leqslant -2-\sqrt{2}$, $x\geqslant 1+\sqrt{3}$. **52.** $1-\sqrt{17}\leqslant x\leqslant \sqrt{5}-1$.

Глава 2

1. 1) $x_1={}^1/_3$; $x_2={}^1/_5$; $x_3={}^1/_7$; $x_4={}^1/_9$; $x_5={}^1/_{11}$; 2) $x_1={}^3/_2$; $x_2={}^4/_9$; $x_3={}^5/_{28}$; $x_4={}^6/_{65}$; $x_5={}^7/_{126}$; 3) $x_1={}^1/_{2^2}$; $x_2={}^2/_{2^3}$; $x_3={}^3/_{2^4}$; $x_4={}^4/_{2^5}$; $x_5={}^5/_{2^6}$; 4) $x_1=2$; $x_2=-{}^3/_{2^2}$; $x_3={}^4/_{3^2}$; $x_4=-{}^5/_{4^2}$; $x_5={}^6/_{5^2}$; 5) $x_1=1$; $x_2=0$; $x_3=-{}^1/_3$; $x_4=0$; $x_5={}^1/_5$.

2. 1) $x_n=\dfrac{1}{(2n-1)^2}$; 2) $x_n=\dfrac{1}{n!}$; 3) $x_n=\left(\dfrac{2n-1}{n}\right)^2$. Указание: 1; $\dfrac{3^2}{2^2}$; $\dfrac{5^2}{3^2}$; $\dfrac{7^2}{4^2}$; ...; 4) $x_n=3^n+(-1)^n$. Указание: $3-1$; 3^2+1; 3^3-1; 3^4+1; 3^5-1; 3^6+1; ... . 5) $x_n=(-1)^n$ или $x_n=\cos n\pi$.

3. 1) 1!; 1!; 1!; 1!; 1!; $x_n=1!$. 2) 1; 4; 7; 10; 13; $x_n=3n-2$. 3) 1!; 2!; 3!; 4!; 5!; $x_n=n!$. 4) 2; 6; 18; 54; 162; $x_n=x_1 3^{n-1}$. 5) 1; 1; 2; 4; 8; $x_n=2^{n-2}$.

4. $x_{90}=-1$; $x_{885}=1$. Решение. Данная последовательность периодическая с периодом, равным шести: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=1$, $x_4=0$, $x_5=-1$, $x_6=-1$, $x_7=0$, ... Поэтому $x_{90}=x_{15\cdot 6}=x_6=-1$, $x_{885}=x_{147\cdot 6+3}=x_3=1$.

5. 1) Ограничена $(-1\leqslant x_n\leqslant 1/2)$; 2) нет; 3) ограничена $(|x_n|<1)$; 4) нет; 5) ограничена $(1/2\leqslant x_n<1)$; 6) ограничена; 7) нет.

6. Решение. Возьмем любое $A>0$. Из неравенства $|x_n|=|3^{\sqrt{n}}|>A$ получаем неравенство $|3^{\sqrt{n}}|=3^{\sqrt{n}}>A$. Прологарифмировав, найдем $\sqrt{n}\lg 3>\lg A$, $\sqrt{n}>\dfrac{\lg A}{\lg 3}$, откуда $n>\left(\dfrac{\lg A}{\lg 3}\right)^2$. Если взять $N=\left[\left(\dfrac{\lg A}{\lg 3}\right)^2\right]$, то для всех $n>N$ выполняется $|x_n|>A$, т. е., согласно определению бесконечно большой последовательности, последовательность $\{3^{\sqrt{n}}\}$ бесконечно большая.

8. Решение. Возьмем любое $\varepsilon>0$. Из неравенств

$$|\alpha_n|=\left|\frac{(-1)^n 2}{5\sqrt{n}+1}\right|=\frac{2}{5\sqrt{n}+1}<\frac{2}{5\sqrt{n}}<\frac{2}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$$

получаем неравенство $\sqrt{n}>{}^1/_\varepsilon$, откуда $n>{}^1/_{\varepsilon^2}$. Если взять $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right]$, то для всех $n>N$ будет выполняться $|\alpha_n|<\varepsilon$, т. е., согласно определению бесконечно малой последовательности, последовательность $\left\{\dfrac{(-1)^n 2}{5\sqrt{n}+1}\right\}$ — бесконечно малая.

10. Решение. Данная последовательность имеет вид 1; 2; $\dfrac{1}{3}$; 4; $\dfrac{1}{5}$; ...; $n^{(-1)^n}$; ... . Возьмем число $A>1$. Тогда неравенство $|x_n|>A$ не имеет места для всех элементов x_n с нечетными номерами. Это и означает, что последовательность $\{n^{(-1)^n}\}$ не является бесконечно большой.

11. Решение. 1) Пусть $|a|>1$. Возьмем любое $A>0$. Из неравенства $|a|^n>A$ получаем $n>\log_{|a|}A$. Если взять $N=[\log_{|a|}A]$, то для всех $n>N$ будет выполняться $|a|^n>A$, что и требовалось доказать. 2) Пусть $|a|<1$ и $a\neq 0$. Тогда $a^n=\left[\left(\dfrac{1}{a}\right)^n\right]^{-1}$. Так как $\left|\dfrac{1}{a}\right|>1$, то последовательность $\left\{\left(\dfrac{1}{a}\right)^n\right\}$ является в силу случая 1) бесконечно большой, а последовательность $\left\{\left[\left(\frac{1}{a}\right)^n\right]^{-1}\right\}$ — бесконечно малой в силу теоремы, т. е. последовательность $\{a^n\}$ — бесконечно малая при $|a|<1$. Если $a=0$, то $a^n=0$, $|a^n|<\varepsilon$ для любого n и, следовательно, последовательность $\{a^n\}$ — бесконечно малая.

12. Решение. Возьмем любое $\varepsilon>0$. Оценим $\left|x_n-\frac{1}{3}\right|$:

$$\left|x_n-\frac{1}{3}\right| = \left|\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}-\frac{1}{3}\right| = \left|\frac{-5n+10}{3(3n^2+2n-4)}\right| < \frac{5n}{3(3n^2-4)} < \frac{5n}{3n^2} < \frac{2}{n}.$$

Поэтому если уже $\frac{2}{n}<\varepsilon$, то и подавно будет выполняться неравенство $\left|\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$. Следовательно, для нахождения значений n, удовлетворяющих неравенству $\left|x_n-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$, достаточно решить неравенство $\frac{2}{n}<\varepsilon$, откуда $n>\frac{2}{\varepsilon}$. Если взять $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$, то для всех $n>N$ будет выполняться $\left|x_n-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}=\frac{1}{3}$.

13. Указание. Воспользоваться формулой бинома Ньютона:

$$\frac{1}{2^n}=\frac{1}{(1+1)^n}=\frac{1}{1+n+\frac{n(n+1)}{2}+\ldots+1}<\frac{1}{n}.$$

14. 5) **Указание:** представить выражение общего элемента в виде $x_n=(3^n-1)/3^n=1-1/3^n$ или $x_n-1=-1/3^n$.

15. Неравенство $\left|\frac{2n+3}{n+1}-2\right|<\varepsilon$ выполняется при $n>N=[^1/_\varepsilon-1]$. При $\varepsilon=0{,}1$ неравенство выполняется начиная с $N=10$, при $\varepsilon=0{,}01$ — начиная с $N=100$, при $\varepsilon=0{,}001$ — начиная с $N=1000$.

16. Указание. Для доказательства воспользоваться определением предела последовательности, но предварительно с помощью формулы суммы геометрической прогрессии представить выражение общего элемента последовательности в виде

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}=2-\frac{1}{2^n} \text{ или } x_n-2=-\frac{1}{2^n}.$$

17. Указание. Для доказательства воспользоваться определением предела последовательности, но предварительно с помощью формулы бинома Ньютона оценить выражение общего элемента последовательности. Имеем

$$2^n=(1+1)^n=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\ldots+1>n+\frac{n(n-1)}{2}>\frac{n^2}{2},$$

откуда $|x_n|=\frac{n}{2^n}<\frac{n}{n^2/2}=\frac{2}{n}$.

18. **Указание.** Так как

$$x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}},$$

то $|x_n|=\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}<\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}$.

19. а) $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ и $\{y_n\}=\{n\}$; б) $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$ и $\{y_n\}=\{n\}$; в) $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ и $\{y_n\}=$ $=\{n^2\}$; г) $\{x_n\}=\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ и $\{y_n\}=\{n\}$.

20. 1) $\{x_n\}=\left\{n+\dfrac{1}{n}\right\}$ и $\{y_n\}=\{-n\}$; 2) $\{x_n\}=\{2n\}$ и $\{y_n\}=\{-n\}$; 3) $\{x_n\}=\{n+1\}$ и $\{y_n\}=\{-n\}$; 4) $\{x_n\}=\{n+(-1)^n\}$ и $\{y_n\}=\{-n\}$. (Ответы обоснуйте.)

21. $^2/_3$. **22.** 0. **23.** ∞. **24.** $^1/_3$. **25.** $^1/_5$. **26.** 0. **27.** 10. **28.** ∞. **29.** ∞. **30.** 5. **31.** 0. **32.** 0. **33.** 1. **34.** 1. **35.** 1. **36.** 5. **37.** 0. **38.** $+\infty$. **39.** 1. **40.** $-\infty$. **41.** $^1/_2$. **42.** 1. **43.** 4/3. **44.** 1/3. **Указание:** предварительно преобразовать числитель, используя формулу $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

45. 1. **Указание:** заменить каждое слагаемое по формуле $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$.

46. $^1/_6$. **47.** 2. **48.** **Решение.** Найдем x_{n+1}: $x_{n+1}=\dfrac{n+1}{2(n+1)+1}=\dfrac{n+1}{2n+3}$. Сравним значения дробей $x_n=\dfrac{n}{2n+1}$ и $x_{n+1}=\dfrac{n+1}{2n+3}$; для этого приведем их к общему знаменателю. Получаем $x_{n+1}=\dfrac{2n^2+3n+1}{(2n+3)(2n+1)}$, $x_n=\dfrac{2n^2+3n}{(2n+3)(2n+1)}$. Так как $2n^2+$ $+3n+1>2n^2+3n$, то первая дробь больше второй; значит, $x_{n+1}>x_n$ для любого n, что и требовалось доказать.

49. **Решение.** Рассмотрим отношение последующего элемента x_{n+1} к предыдущему x_n: $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{n+1}{5^{n+1}}:\dfrac{n}{5^n}=\dfrac{(n+1)5^n}{5^n 5n}=\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{1}{5}=\dfrac{1+1/n}{5}\leqslant\dfrac{1+1}{5}=\dfrac{2}{5}<1$; следовательно, $x_n>x_{n+1}$ для любого n, что и требовалось доказать.

50. **Решение.** Действительно, $x_{n+1}=(n+1)^2=n^2+2n+1>n^2=x_n$, что выполняется при любом n.

51. **Решение.** Действительно, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{n+2}{n+1}:\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}=\dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1}<1$, т. е. $x_{n+1}<x_n$ при любом n.

52. **Решение.** Через $[\sqrt{n}]$ обозначена целая часть числа $\sqrt{n}$. Поэтому $x_1=$ $=[\sqrt{1}]=1$; $x_2=1$; $x_3=1$; $x_4=2$; $x_5=2$ и т. д. Следовательно, данная последовательность является неубывающей, т. е. не является строго возрастающей.

53. Наибольший элемент $x_9=x_{10}=\dfrac{10^9}{9!}$, наименьшего нет. **Решение.** Найдем участки монотонности. Для этого сравним два последовательных элемента последовательности x_n и $x_{n+1}: x_{n+1}=\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{10^n\cdot 10}{n!(n+1)}=x_n\cdot\frac{10}{n+1}$. Итак, $x_{n+1}=\frac{10}{n+1}x_n$. Выясним, при каких n $\frac{10}{n+1}>1$ и при каких n $\frac{10}{n+1}<1$. Имеем $\frac{10}{n+1}>1$ при $n<9$; $\frac{10}{n+1}<1$ при $n>9$, т. е. последовательность возрастает при $n\leqslant 9$ и убывает при $n\geqslant 10$.

54. Решение. В самом деле, $x_{n+1}=2^{n+1}>2^n=x_n$, что очевидно при любом n.

55. 3) $^1/_2\leqslant x_n<1$; 4) $1<x_n\leqslant 3/2$; 5) $1<x_n\leqslant 4/3$.

56. Решение. Установим, что последовательность монотонна и ограничена. Из равенства $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{2^{n+1}+1}$ следует, что $x_{n+1}>x_n$, т. е. последовательность монотонно возрастающая и ограничена снизу, например, элементом x_1. Покажем, что последовательность ограничена и сверху. Так как $\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n}$ при любом n, то

$$x_n=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\ldots+\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}<1,$$

т. е. последовательность ограничена сверху. Следовательно, последовательность монотонна и ограничена. Согласно теореме, она имеет конечный предел.

57. 3) **Указание:**

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n};\ x_n<1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}<2.$$

58. Решение. Последовательность монотонно убывающая, так как

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{2^n}{n!}=\frac{2^n\cdot 2\cdot n!}{n!(n+1)2^n}=\frac{2}{n+1}<1 \text{ при } n>1, \text{ т. е.}$$

$x_{n+1}<x_n$, и ограничена сверху, например, элементом x_1. Так как $x_n>0$, последовательность ограничена снизу. Следовательно, данная последовательность монотонна и ограничена. По теореме она сходится. Обозначим ее предел через a и найдем его. Для этого воспользуемся тем, что $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2}{n+1}$ или $x_{n+1}=\frac{2}{n+1}x_n$. Переходя к пределу при $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n+1}\cdot x_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}x_n,$$

получаем $a=0\cdot a$, откуда $a=0$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

59. Решение. Очевидно, что $x_1<x_2<x_3<\ldots<x_n<x_{n+1}<\ldots$, т. е. данная по-

последовательность монотонно возрастающая и ограничена снизу элементом x_1. Методом индукции докажем, что $x_n<\sqrt{3}+1$ при любом n, т. е. последовательность ограничена сверху. Имеем $x_1=\sqrt{3}<\sqrt{3}+1$. Предположим $x_n<\sqrt{3}+1$ и докажем, что $x_{n+1}<\sqrt{3}+1$. Действительно, $x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}<\sqrt{3+\sqrt{3}+1}<$ $<\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}=1+\sqrt{3}$. Следовательно, $x_n<\sqrt{3}+1$ для любого n. Таким образом, данная последовательность монотонна и ограничена. По теореме, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует. Обозначим его через a. Возводя равенство $x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$ в квадрат и переходя к пределу при $n\to\infty$ $\lim\limits_{n\to\infty} x^2_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty} 3+\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, получаем равенство $a^2=3+a$, откуда $a=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

60. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2$. **61.** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2$. **62.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}=0$.

63. e. **64.** $1/e^3$. Указание: положить $-3/n=\alpha$. **65.** $e^{-1/3}$.

66. e^4. **67.** e^{-1}. **68.** e. **69.** 3. **70.** -2. **71.** e^6. **72.** $\dfrac{1}{e\sqrt{e}}$.

Глава 3

1. $AB=9$, $BC=-6$, $AC=3$, $9-6=3$. **2.** Если $a>0$, то A правее; если $a<0$, то B правее; если же $a=0$, то точки A и B совпадают. **3.** Если $a>0$, то $a+a>0+a$, $2a>a$ и точка B правее точки A; если $a<0$, $2a<a$ и точка A правее точки B. **4.** 1) $AB=8$, $|AB|=8$; 2) $AB=-3$, $|AB|=3$; 3) $AB=4$, $|AB|=4$; 4) $AB=2$, $|AB|=2$; 5) $AB=-2$, $|AB|=2$. **5.** 1) -2; 2) 5; 3) 1; 4) -8; 5) -2 и 2; 6) -1 и 5; 7) -6 и 4; 8) -7 и -3. **6.** 1) $M_1(-2)$ и $M_2(2)$. Указание: уравнение $|x|=2$ равносильно двум уравнениям: $x=2$ и $x=-2$; 2) $M_3(-2)$ и $M_4(4)$; 3) точки расположены справа от точки $M_5(3/2)$, включая точку M_5. Указание: так как $|x|=x$ при $x\geqslant 0$, то $2x-3\geqslant 0$, откуда $x\geqslant 3/2$. В остальных случаях решения аналогичны. **7.** Точки расположены: 1) справа от точки $M_1(2)$; 2) слева от точки $M_2(3)$, включая точку M_2; 3) слева от точки $M_3(3/2)$, включая точку M_3; 4) внутри промежутка, ограниченного точками $M_4(1)$ и $M_5(3)$, включая точку M_5; 5) внутри промежутка, ограниченного точками $M_6(-3)$ и $M_7(3)$. Указание: неравенство равносильно неравенству $x^2<9$. Так как $\sqrt{x^2}=|x|$, то $|x|<3$ или $-3<x<3$; 6) внутри промежутка, ограниченного точками $M_8(2)$ и $M_9(3)$. Указание: представив корни трехчлена в виде $(x-2)(x-3)<0$, получим две системы: либо $\begin{cases} x-2<0, \\ x-3>0, \end{cases}$ либо $\begin{cases} x-2>0, \\ x-3<0 \end{cases}$. Первая система не имеет решения, решение второй: $2<x<3$. В остальных случаях решения аналогичны. **8.** Точки расположены: 1) внутри промежутка, ограниченного точками $M_1(-1)$ и $M_2(2)$; 2) вне промежутка, ограниченного точками $M_3(-2)$ и $M_4(2)$; 3) внутри промежутка, ограниченного точками $M_5(-2)$ и $M_6(2)$, включая точки M_5 и M_6; 4) внутри промежутка, ограниченного точками $M_7(-1)$ и $M_8(5)$; 5) вне промежутка, ограниченного точками $M_9(-1)$ и $M_{10}(3)$, включая точки M_9 и M_{10}; 6) решение. Так как $|x|>x$ при $x<0$, то данное неравенство справедливо для тех x, при которых $x^2-5x+6<0$. Как следует из задачи 7, случай 6), решение этого неравенства: $2<x<3$; 7) справа от точки $M_{11}(-1/2)$. **13.** 1) (2; -3); 2) (-3; -2); 3) (-1; 1); 4) (a; $-b$). **14.** 1) (1; 2); 2) (-3; -1); 3) (2; -2); 4) ($-a$; b). **15.** 1) (-3; -3); 2) (-2; 4); 3) (2;

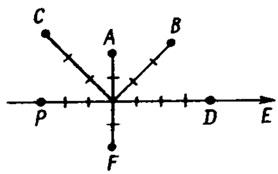


Рис. 61

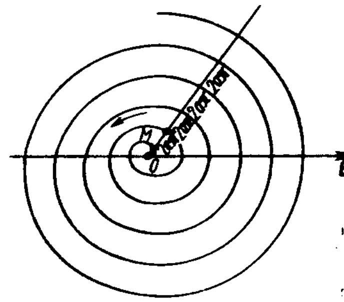


Рис. 62

$-1)$; 4) $(-a;\ -b)$. **16.** 1) $(3;\ 2)$; 2) $(-2;\ 5)$; 3) $(4;\ -3)$. **17.** 1) $(-5;\ -3)$; 2) $(-3;\ 4)$; 3) $(2;\ -7)$. **18.** $(3;\ 1)$, $(-3;\ -1)$, $(-3;\ 1)$, $(-1;\ 3)$. **19.** 1) В первой и третьей; 2) во второй и четвертой; 3) в первой и третьей; 4) во второй и четвертой; 5) в первой, второй и четвертой; 6) во второй, третьей и четвертой; 7) в первой, третьей и четвертой; 8) в первой, второй и третьей. **21.** в) $|b|$; $|a|$. **22.** 1) 5; 2) 10; 3) 5; 4) $\sqrt{5}$; 5) $2\sqrt{2}$; 6) 13. **23.** 1) 14 кв. ед.; 2) 12 кв. ед.; 3) 25 кв. ед. **24.** $(-5/2;\ 1)$. **25.** 1) Длина стороны квадрата $a=17$ ед.; 2) $S_{ABCD}=17$ кв. ед.; 3) середины сторон квадрата — точки: $M(3{,}5;\ 3)$ (середина стороны AB); $N(1;\ 4{,}5)$ (середина стороны BC); $K(-0{,}5)$; (середина стороны CD); $L(2;\ 0{,}5)$ (середина стороны AD). **26.** $C(32;\ 0)$ или $C(-8;\ 0)$. **27.** 13 кв. ед. **29.** $(0;\ -3)$; $(-4;\ 5)$ и $(8;\ 1)$. **30.** $x_c=2$; $y_c=1$. **Указание:** центр тяжести треугольника находится в точке пересечения его медиан.

31. $(0;\ -8)$ или $(0;\ 2)$. **32.** $C_1(-7;\ -3)$, $D_1(-6;\ -4)$ или $C_2(17;\ -3)$, $D_2(18;\ -4)$. **33.** 5. **34.** 7,4. **35.** $(2;\ -1)$ и $(3;\ 1)$. **36.** $A(3;\ -1)$ и $B(0;\ 8)$. **37.** $(4;\ -5)$. **38.** $(-9;\ 0)$. **39.** $D(-3;\ 1)$. **40.** $C(x_1+x_2;\ y_1+y_2)$. **41.** См. рис. 61. **42.** $A_1\left(3;\ \frac{5\pi}{3}\right)$; $B_1\left(4;\ \frac{\pi}{4}\right)$. **43.** $A_1\left(1;\ -\frac{3\pi}{4}\right)$; $B_1\left(5;\ \frac{2\pi}{3}\right)$. **44.** $A(\sqrt{2};\ \sqrt{2})$; $B(0;\ 4)$. **Замечание:** использовать формулы $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. **45.** $M_1\left(5;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $M_2(3;\ \pi)$, $M_3\left(2;\ \frac{\pi}{6}\right)$. **46.** $\left(1;\ -\frac{2\pi}{3}\right)$. **47.** $\sqrt{34}$. **48.** $d=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$. **49.** 5 кв. ед. **50.** $3(4\sqrt{3}-1)$ кв. ед. **51.** $(2+5\sqrt{3};\ 8)$. **52.** Точки M_1, M_4 и M_5 лежат на линии; точки M_2, M_3 и M_6 не лежат на ней. **53.** 1) Биссектрисы I и III координатных углов; 2) две прямые, содержащие биссектрисы четырех координатных углов; 3) одна точка $(0;\ 0)$ уравнения определяет вырожденную линию; 4) так как при любых x и y числа x^2 и y^2 неотрицательны, то $x^2+y^2+1>0$. Следовательно, нет ни одной точки,

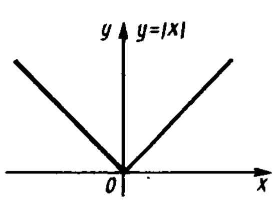


Рис. 63

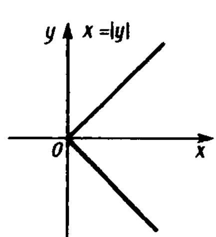


Рис. 64

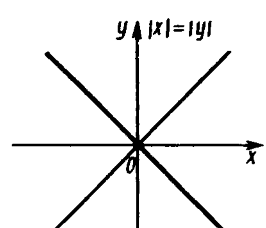


Рис. 65

координаты которой удовлетворяют данному уравнению. Оно определяет «пустое» множество точек; 5) множество точек, полярные координаты которых удовлетворяют уравнению $\rho=a\varphi$, называется спиралью Архимеда (рис. 62); 6) см. рис. 63—65; 7) см. рис. 66-67. **54.** Точки M_1, M_2 и M_4 лежат на данной линии; точки M_3 и M_5 не лежат на ней. Уравнение определяет окружность с диаметром OM_2. **55.** Решение. Расстояние от произвольной точки $M(x;\ y)$ до точки C вычисляется по формуле $|MC|=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$. Если точка M лежит на окружности, то $|MC|=R$ или $MC^2=R^2$, т. е. координаты точки M удовлетворяют уравнению $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$. Если же точка $M(x;\ y)$ не лежит на данной окружности, то $MC^2\neq R^2$, т. е. координаты точки M не удовлетворяют уравнению. Полагая $\alpha=0$, $\beta=0$, получим уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат: $x^2+y^2=R^2$. **56.** Решение. Представим данное уравнение в виде $(x^2+2x+1)+y^2=1$ или $(x+1)^2+y^2=1$. Это уравнение окружности с центром в точке $C(-1;\ 0)$ и радиусом 1. **57.** Искомое множество точек является окружностью (или ее частью). Решение. Выберем систему координат на плоскости так, чтобы начало координат попало в точку A, а положительная полуось абсцисс пошла от A к B. За единицу масштаба возьмем длину отрезка AB. Тогда точка a имеет координаты (0; 0), точка B — координаты (1; 0), точка M — координаты $(x;\ y)$. Условие $|AM|=2|BM|$ запишем в виде $\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$. Получено уравнение искомого множества точек. Возводя обе части в квадрат, раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем уравнение $3x^2-8x+4+3y^2=0$ или $x^2-\frac{8}{3x}+\frac{16}{9}+y^2=\frac{4}{9}$ или в виде $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2$, т. е. уравнение окружности в точке (4/3; 0) и радиусом 2/3. **58.** а) Точка N не лежит на данной окружности. Решение. Запишем уравнение данной окружности $(x-1)^2+(y+2)^2=25$. Подставим в него координаты точки. Имеем $(4{,}1-1)^2+(1{,}9+2)^2=25$. Раскрывая скобки, получаем неверное равенство $24{,}82=25$. **59.** $a=1$ или $a=-5$. **60.** $x-y-2=0$.

61. $x^2+y^2=8$. **62.** $\frac{x^2}{5}+y^2=1$. **63.** $y=\frac{x^2}{4}-x+2$. **64.** $y=\pm 2$. **65.** $y^2=8(x-2)$.

66. $2x-y+5=0$. **67.** $x^2+y^2=4$. **68.** $y=x+3,\ y=-x+3$. **70.** $y=-1{,}5x$. **71.** 1) $k=\frac{2}{3}$, $b=-2$; 2) $k=-\frac{2}{3}$; $b=0$; 3) $k=0$, $b=-3$; 4) $k=-\frac{3}{4}$, $b=3$. **73.** $k=1$, $b=1$, $y=x+1$.

74. 1) $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$; 2) $\frac{x}{-4/3}+\frac{y}{2}=1$. **75.** $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$ или $-\frac{x}{4}+\frac{2y}{3}=1$. **76.** $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ и $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-6}=1$. **79.** 1) $y=x\sqrt{3}-2$; 2) $y=-x\sqrt{3}-2$. **80.** (6; 0), (0; −4). **81.** (3; −5).

82. $A(2;\ -1)$, $B(-1;\ 3)$, $C(2;\ 4)$. **83.** $y=5$, $x=4$. **84.** 1) $x=4$; 2) $x=-5$; 3) $x=0$.

85. 1) $y=6$; 2) $y=-2$; 3) $y=0$. **86.** 1) $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$; 2) 45°; 3) 45°; 4) 90°.

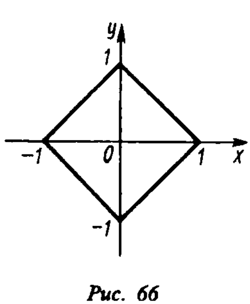


Рис. 66

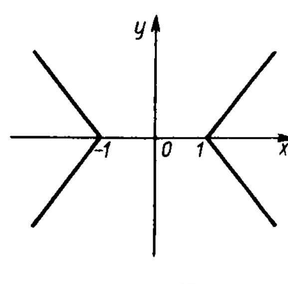


Рис. 67

88. $x-3y+2=0$; $5x-y=4$; $3x+y=12$. **89.** $y=3x$ и $y=-\frac{1}{3}x$. **90.** $x-5y+6=0$ и $5x+y+4=0$. **91.** $y+4x-26=0$. **92.** $2x+3y-13=0$. **93.** $2y+5x-17=0$. **94.** $x+2y-2=0$. **95.** $7x+7y-6=0$. **96.** AE: $2x-5y+4=0$; AD: $x-2y+2=0$; $\sqrt{29}$. **97.** 1) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-2=0$; 2) $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-10=0$; 3) $-\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y-1=0$; 4) $-x+2=0$. **98.** 2,8; 0; 1,4; 2. **99.** 13/2. **Указание**: на одной из прямых взять произвольную точку и найти ее расстояние от другой прямой. **100.** $k=\pm 2$. **101.** Две прямые, параллельные данной: $4x-3y\pm 20=0$. **102.** $8x-15y+6=0$; $8x-15y-130=0$. **103.** $\sqrt{10}$. **104.** $3x-4y+10=0$; $x=2$. **105.** Прямые: $x+y=0$ и $x-3y=0$; расстояния: $d_1=2\sqrt{2}$, $d_2=0{,}4\sqrt{10}$. **106.** 1) $y=0$; 2) $y=x+10$; 3) $|x|=2$. **107.** 1) $(y-3x)\times$ $\times(y-x+3)=0$; 2) $(y-x)[(x+1)^2+(y-2)^2]=0$; 3) $y\geqslant x$; 4) $0<y<1$; 5) $\begin{cases}0<x<1,\\0<y<1.\end{cases}$

108. **Указание**: воспользоваться формулой (3) из п. 3. **110.** $y=x-5$. **111.** $y=2x+2$. **112.** Уравнение высоты AD: $y=2x+6$; длина высоты AD: $12/\sqrt{5}$; $S_{AOB}=12$ кв. ед. **113.** $2x+7y-5=0$. **114.** $x-7y+6=0$ и $7x+y+4=0$. **115.** При любых a. Множество точек M есть прямая $2xd=a$, где $d=|AB|$. **Указание**: ввести прямоугольную систему координат с центром в середине отрезка AB и осью абсцисс, направленной от точки A к точке B. **116.** $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$. **117.** $x+y-3-3\sqrt{2}=0$ и $x+y-3+3\sqrt{2}=0$. **118.** $x+2y-4=0$. **119.** $S=a^2/5$ кв. ед. **120.** $4(\sqrt{10}+\sqrt{5})$; 20. **121.** $2x-y+6=0$; $x-4y-4=0$; $2x-3y+2=0$. **122.** $y=x+2$; $x-5y=6$; $y=-x$; $2y=x$. **123.** $y-x=2$; $x+2y=4$; $2x+y=8$. **124.** $x+3y-2=0$. **125.** $11x+22y-74=0$. **126.** 1) $a=5$, $b=3$; 2) $F_1(-4;\ 0)$, $F_2(4;\ 0)$; 3) $\varepsilon=4/5$. **Решение.** Приведем уравнение эллипса к каноническому виду: $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$. 1) Полуоси эллипса $a=5$, $b=3$; 2) координаты фокусов $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$, т. е. $F_1(-4;\ 0)$, $F_2(4;\ 0)$, так как $c=\sqrt{a^2-b^2}=4$; 3) эксцентриситет $\varepsilon=c/a$, т. е. $\varepsilon=4/5$.

127. 1) $a=8$, $b=2\sqrt{3}$; 2) $F_1(2\sqrt{13};\ 0)$, $F_2(-2\sqrt{13};\ 0)$; 3) $\varepsilon=\frac{\sqrt{13}}{4}$.

128. 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$; 3) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 4) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 5) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{36}=1$.

129. 1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$; 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; 3) $\frac{x^2}{4}+\frac{9y^2}{16}=1$. **130.** $a=6$; $b=4$; $F_1(2\sqrt{5};\ 0)$; $F_2(-2\sqrt{5};\ 0)$; $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$. **131.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$; $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $r_1=4-\sqrt{3}$; $r_2=4+\sqrt{3}$.

132. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{28}=1$; $r_1=5$; $r_2=11$. **133.** $4\sqrt{3}$. **134.** $M\left(-\frac{15}{4};\ \pm\frac{\sqrt{63}}{4}\right)$. **135.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$. **Решение.** Обозначим через x' и y' переменные для искомой кривой. Тогда $x=x'$ и $y=3y'$. Подставляя x и y в уравнение окружности $x^2+y^2=36$, получим ответ. **136.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. **137.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. **138.** 1) Пересекает. **Решение.** Решим систему

$$\begin{cases}2x-y-3=0,\\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1,\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}y=2x-3,\\ x(73x-192)=0\end{cases}.$$ Получаем $x=0$, $y=-3$ и $x=192/73$,

$y=165/73$, т. е. прямая пересекает эллипс в двух точках: $M_1(0;\ -3)$ и $M_2(192/73;\ 165/73)$. **139.** 1) $a=3$, $b=4$; 2) $F_1(-5;\ 0)$, $F_2(5;\ 0)$; 3) $\varepsilon=5/3$; 4) $y=\frac{4}{3}x$ и $y=-\frac{4}{3}x$.

Решение. Приведем уравнение гиперболы к каноническому виду $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1$. 1) Полуоси гиперболы: $a=3$, $b=4$. 2) Координаты фокусов: $F_1(-5;\ 0)$, $F_2(5;\ 0)$, так как $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$. 3) Эксцентриситет: $\varepsilon=c/a$, т. е. $\varepsilon=5/3$. 4) Уравнения асимптот $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$, т. е. $y=\frac{4}{3}x$ и $y=-\frac{4}{3}x$. **140.** 1) $a=2$, $b=\sqrt{3}$; 2) $F_1(\sqrt{7};\ 0)$, $F_2(\sqrt{7};\ 0)$; 3) $\varepsilon=\frac{\sqrt{7}}{2}$; 4) $y=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$. **141.** 1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{4}=1$; 3) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; 4) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$; 5) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. **142.** $r_1=9$, $r_2=1$. **143.** $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$, $r_1=6\sqrt{3}$, $r_2=2\sqrt{3}$. **144.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **145.** $y+2=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$. **146.** $d=b$; $\varphi=2\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$. **147.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$. **148.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1$. **149.** Если $c<0$ — пустое множество, если $c=0$ пара данных прямых, если $c>0$ — две сопряженные гиперболы. Решение. Выберем систему координат так, чтобы ось Ox являлась биссектрисой одной из пар вертикальных углов, образуемых данными прямыми, а начало координат совпало с точкой их пересечения. Тогда уравнения прямых L_1 и L_2 имеют соответственно вид $y=kx$ и $y=-kx$. Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка искомого множества, тогда, согласно формуле $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ (d — расстояние от точки $M_0(x_0;\ y_0)$ до прямой L), имеем $d_1=\frac{|kx-y|}{\sqrt{k^2+1}}$, $d_2=\frac{|kx+y|}{\sqrt{k^2+1}}$, где d_1 и d_2 — расстояния от $M(x;\ y)$ до прямых L_1 и L_2 соответственно, а условие задачи можно переписать в виде $\frac{|kx-y|}{\sqrt{k^2+1}}\cdot\frac{|kx+y|}{\sqrt{k^2+1}}=C$ (const) или $|(kx-y)(kx+y)|=C_1$, где $C_1=(k^2+1)C$. Если $C_1<0$, то искомое множество точек пусто. Если $C_1=0$, то множество точек — две данные прямые $y=\pm kx$. Если $C_1>0$, то множество точек — две гиперболы $k^2x^2-y^2=C_1$ и $y^2-k^2x^2=C_1$. **150.** 1) $F(3/2;\ 0)$; 2) $x=-3/2$. Решение. 1) Координаты фокуса $F(3/2;\ 0)$, так как $p=3$, а координаты фокуса $(p/2;\ 0)$. 2) Уравнение директрисы $x=-p/2$, т. е. $x=-3/2$. **151.** 1) $y^2=9x$; 2) $x^2=-y$. **152.** $(x-p/2)^2+y^2=p^2$; $(p/2;\ \pm p)$. **153.** $y^2=x$; $x=-1/4$. **154.** $y=-\frac{x^2}{2}$; $y=1/2$. **155.** $(3;\ \pm3\sqrt{2})$. **156.** 40 см. **157.** $y^2=px$. **158.** $y=3-x^2/4$. **159.** $y^2=8(x+2)$. **160.** Парабола. Решение. Так как для любой точки искомого множества расстояния от нее до точки A и до прямой L равны (радиусу окружности), то, по определению, множество всех таких точек является параболой с фокусом в точке A и директрисой L.

Глава 4

1. $(-3;\ 3)$. **2.** $[-2,\ 2]$. **3.** $(-\infty,\ -4)$, $(4,\ +\infty)$. **4.** $(1,\ 3)$. **5.** $(-2,\ -1)$. **6.** $[-4,\ 2]$. **7.** $(-5,\ 5]$. **8.** $[-3-\sqrt{3},\ -3+\sqrt{3}]$. **9.** $(-\infty,\ -7/5)$, $[-1,\ +\infty)$. **10.** Множество пусто. **11.** $[-1,\ 4]$. **12.** $(0,\ 1)$. **13.** Множество пусто. **14.** $(-\infty,\ 1)$, $(10,\ +\infty)$. **15.** $(-\infty,\ +\infty)$. **16.** $(-\infty,\ +\infty)$. **17.** $(-\infty,\ 6/5)$, $(6/5,\ +\infty)$. **18.** $x=2$. **19.** $[1/3,\ 5)$. **20.** $(0,\ 2/3]$. **21.** $(-\infty,\ 2]$, $[3,\ +\infty)$. **22.** $(-\infty,\ 0)$, $(3,\ +\infty)$. **23.** $[-2,\ 2]$. **24.** $(-\infty,$

$+\infty)$. **25.** $(-\infty, +\infty)$. **26.** $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. **27.** $x \neq 2k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. **28.** $[-1, 1]$. **29.** $[-3, -1]$. **30.** $(-\infty, +\infty)$. **31.** $(4, +\infty)$. Решение. Функция $\log_2 \log_3 \log_4 x$ определена при $\log_3 \log_4 x > 0$, откуда $\log_4 x > 1$ и $x > 4$. **32.** $(-\infty, 0)$. **33.** $(-\infty, 0), (0, +\infty)$. **34.** $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. **35.** $(0, 4)$. **36.** $(-\infty, 0), \left(0, \frac{1}{3}\right)$. **37.** $(-\infty, 0), (0, +\infty)$. **38.** $(-\infty, 3), (3, +\infty)$. **39.** $(-\infty, -4], [-2, +\infty)$. **40.** $(-\infty, 1), (1, 4), (4, +\infty)$. **41.** $-2, 0, 0$. **42.** $\pi, \pi/2, 0$. **43.** Четная. **44.** Ни четная, ни нечетная. **45.** Четная. **46.** Нечетная. **47.** Нечетная. **48.** Четная. **49.** Ни четная, ни нечетная. **50.** Нечетная. **51.** Нечетная. **52.** Нечетная. **53.** Четная. **54.** Ни четная, ни нечетная. **55.** Ни четная, ни нечетная. **56.** Четная. **57.** Ни четная, ни нечетная. **58.** Четная. **59.** Нечетная. **60.** Нечетная. Решение. $f(-x)=\lg\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right)=$ $=\lg\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)=\lg\frac{\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}=\lg\frac{-x^2+1+x^2}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\lg\left(x+\right.$ $\left.+\sqrt{1+x^2}\right)=-f(x)$. **62.** $\pi/2$. **63.** 2π. **64.** 2π. **65.** $\pi/3$. **66.** 2π. **67.** π. Решение. $|\sin x|=\sqrt{\sin^2 x}=\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$, но функция $\cos 2x$ имеет период $T=\pi$, поэтому и заданная функция имеет тот же период. **68.** $2\pi/3$. **69.** $\pi/2$. Решение. $\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-{}^1/_2\sin^2 2x=1-{}^1/_4(1-\cos 4x)=$ $={}^3/_4+{}^1/_4\sin(4x+\pi/2)$; отсюда $T=2\pi/4=\pi/2$. **70.** 3π. **71.** 2π. **72.** Предположим, что функция имеет период T; тогда должно выполняться тождество $\cos(x+T)^2\equiv\cos x^2$. В силу условий равенства косинусов при некотором целом k имеем $x^2+2Tx+T^2\pm x^2\equiv 2\pi k$. Но это тождество невозможно, так как k может принимать только целочисленные значения, а слева стоят функции, аргументы которых могут принимать любые значения. **223.** $\delta=0{,}005$. **224.** $2/3$. **228.** -8. **229.** 30. **230.** 0. **231.** 4. **232.** 2. **233.** $\sqrt{5}$. **234.** 10. **235.** 3. Указание: воспользоваться первым замечательным пределом $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. **236.** $4/5$. **237.** 4. **238.** 1. **239.** -1. **240.** $1/2$. Замечание: при вычислении пределов отношения двух многочленов при $x\to\infty$, $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ числитель и знаменатель дроби надо делить на x в старшей степени. При этом если многочлены одной степени, то предел равен отношению коэффициентов при старших степенях, если разной степени, то предел равен 0 или ∞. **241.** 0. **242.** ∞. **243.** $-5/2$. **244.** 0. **245.** ∞. **246.** -12. **247.** $-1/\sqrt{2}$. **248.** $-\sqrt{2}$. **249.** 1. **250.** 1. Решение. При вычислении пределов функций при $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ и $x\to\infty$, содержащих корни, надо рассматривать арифметическое значение корня $\sqrt{x^2}=|x|$ при $x>0$ и $x<0$. При $x>0$ $\sqrt{x^2}=x$, поэтому

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+1/x^2}}{x(1+1/x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+1/x^2}}{x(1+1/x)}=\frac{1}{1}=1.$$

251. -1. Решение. При $x<0$ $\sqrt{x^2}=-x$; следовательно,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+1/x^2}}{x(1+1/x)}=\frac{-x\sqrt{1+1/x^2}}{x(1+1/x)}=-\frac{1}{1}=-1.$$

252. Не существует, так как пределы при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ разные (см. 250 и 251). **253.** 3. **254.** $\frac{1}{3}$. **255.** $\sqrt{2}$. **256.** 3. **257.** $1/9$. **258.** 1. **259.** $-1/2$. **260.** $15/2$.

261. $-1/12$. **Решение.** Воспользуемся известной формулой алгебры $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$, с помощью которой была также решена задача 260. Имеем

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt{1+x^2}}{x^3+2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[6]{(1+x^2)^2}-\sqrt[6]{(1+x^2)^3}}{2x^2+x^3}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt[6]{(1+x^2)^2}-\sqrt[6]{(1+x^2)^3})(\sqrt[6]{(1+x^2)^{10}}+\sqrt[6]{(1+x^2)^{11}}+}{(2x^2+x^3)(\sqrt[6]{(1+x^2)^{10}}+\sqrt[6]{(1+x^2)^{11}}+\sqrt[6]{(1+x^2)^{12}}+}$$

$$\frac{+\sqrt[6]{(1+x^2)^{12}}+\sqrt[6]{(1+x^2)^{13}}+\sqrt[6]{(1+x^2)^{14}}+\sqrt[6]{(1+x^2)^{15}})}{+\sqrt[6]{(1+x^2)^{13}}+\sqrt[6]{(1+x^2)^{14}}+\sqrt[6]{(1+x^2)^{15}})}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1+x^2)^2-(1+x^2)^3}{6x^2(2+x)}=\frac{1}{6}\lim_{x\to0}\frac{1+2x^2+x^4-1-3x^2-3x^4-x^6}{x^2(2+x)}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to0}\frac{-1-2x^2-x^4}{2+x}=-\frac{1}{12}.$$

262. $1/2$. **263.** 14. **264.** 2. **Решение.** Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Умножим и разделим на сумму $\sqrt{x^2+4x}+x$, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)}{\sqrt{x^2+4x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}.$$ Теперь имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Делим на x и, переходя к пределу, получим предел, равный 2. **265.** $+\infty$, так как сумма двух положительных бесконечно больших функций есть бесконечно большая функция. **266.** 0. **267.** $+\infty$. **268.** 3. **269.** $-3/2$. **270.** $-1/2$. **271.** $-\infty$. **272.** $\frac{1}{2}$. **273.** $\frac{1}{2}$. **274.** $+\infty$. **275.** 0. **276.** $\frac{2}{9}$. **277.** $\frac{1}{4}$. **278.** $2/\pi$. **Указание:** положить $1-x=y$. **279.** 1. **280.** -1. **281.** $\frac{1}{2}$. **282.** $2/3$. **283.** $1/2$. **284.** $1/3$. **285.** $1/2$. **286.** 0. **287.** $1/2$. **288.** $-10/9$. **289.** 2. **290.** $1/2$. **291.** -2. **292.** $-1/4$. **293.** $-2\sin\alpha$. **294.** $\cos b$. **295.** 1. **296.** 9. **297.** 1. **298.** 25. **299.** 5. **300.** 1. **301.** 2. **302.** $\sqrt{3}$. **Указание:** положить $\pi/6-x=y$, отсюда $x=\pi/6-y$, при $x\to\pi/6$ $y\to0$. **303.** $\frac{5}{3}$. **304.** $-\frac{1}{9}$.

305. 0. **306.** **Решение.** 1) Так как $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, то $\sin x\sim x$ при $x\to0$. 2) Имеем: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot1=1$; следовательно, $\operatorname{tg}x\sim x$ при $x\to0$. 3) Так как $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$, то $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2/2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2(x/2)}{x^2/4}=$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x/2)}{x/2}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x/2)}{x/2}=1\cdot1=1$, отсюда $1-\cos x\sim x^2/2$ при $x\to0$. 14) Имеем $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{1/x}=\ln e=1$, т. е. $\ln(1+x)\sim x$ при $x\to0$.

5) Вычислим $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$. Положим $y=e^x-1$, $x=\ln(1+y)$. Тогда при $x\to0$ $y\to0$

и $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{1}=1$, отсюда $e^x-1\sim x$ при $x\to 0$. 6) Имеем: $a^x-1=e^{x\ln a}-1\sim x\ln a$ (см. случай 5)), т. е. $a^x-1\sim x\ln a$ при $x\to 0$. 7) Имеем $(1+x)^\alpha-1=e^{\alpha\ln(1+x)}-1$. На основании случая 5) при $x\to 0$ $e^{\alpha\ln(1+x)}-1\sim\alpha\ln(1+x)$, так как при $x\to 0$ $\alpha\ln(1+x)\to 0$, а $\alpha\ln(1+x)\sim\alpha x$ при $x\to 0$ на основании случая 4). Отсюда $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$ при $x\to 0$. **307.** 2. **308.** 2. **309.** 2. **310.** 6. **311.** 10. **312.** 1. **313.** 3. **314.** 3. **315.** 2. **316.** 2. **317.** 3. **318.** 2. **319.** 2. **320.** 1. **321.** 2. **322.** 4. **323.** 4. **324.** 6. **325.** 3. **326.** 4. **327.** 101. **328.** 2. **329.** $\frac{1}{2}$. **330.** $-1/2$. **331.** $2/9$. **332.** $\frac{5}{8}$. **333.** $8/7$. **334.** -6. **335.** $5/12$. **336.** $-\frac{2\ln 2}{5}$. **337.** $\frac{8}{15}$. **338.** $\frac{1}{6}$. **339.** $-\frac{1}{54}$. **340.** $\frac{1}{e}$. **341.** -1. **342.** $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$. **343.** $\frac{1}{2\ln 2}$. **344.** 1. **345.** $64\ln 4$. **346.** $\frac{\ln(2/5)}{\ln(3/7)}$. **347.** 1. **348.** -2. **349.** $\frac{3}{5}$. **350.** $\frac{\ln 2}{\ln 3}$. **351.** $4\ln 3$. **352.** $\frac{\ln 4}{\ln 3}$. **353.** $5^5\ln 5$. **354.** $\frac{1}{5}$. **355.** $\frac{1}{3\ln 2}$. **356.** $5/3$. **357.** e^2. Указание: воспользоваться тождеством $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$. **358.** e. **359.** e^{-2}. **360.** e^4. **361.** e^{-1}. **362.** $e^{\operatorname{ctg} 2}$. **363.** e^4. **364.** e^{-2}. **365.** e^{-2}. **366.** $-49/2$. **367.** 3. **368.** $-8/9$. **369.** 1. **370.** $8/7$. **371.** 12. **372.** -1. Решение. Положим $x-\pi/2=y$. Тогда $x=y+\pi/2$, при $x\to\pi/2$ $y\to 0$, имеем

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x-1}{\sqrt{x^2-\pi x+\pi^2/4+1}-1}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y+\pi/2)-1}{\sqrt{(y+\pi/2)^2-\pi(y+\pi/2)+\frac{\pi^2}{4}+1}-1}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\cos y-1}{\sqrt{1+y^2}-1}=\lim_{y\to 0}\frac{-y^2/2}{y^2/2}=-1.$$

373. -5. **374.** $-12\ln 3$. **375.** $-\frac{9\ln 3}{8}$. **376.** $-\frac{5}{4\ln 2}$. Указание: положить $x-1=y$.

Глава 5

1. $10x_0$. **2.** $3x_0^2$. **3.** $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. **4.** $-\frac{1}{x_0^2}$. **5.** $-\frac{2}{x_0^3}$. **6.** $-\frac{1}{2x_0\sqrt{x_0}}$. **7.** $2\cos 2x_0$. **8.** $-\frac{\sin(x_0/2)}{2}$. **9.** $-\frac{2}{(2x_0+1)^2}$. **10.** $\frac{3}{2\sqrt{1+3x_0}}$. **11.** $2(2x^3+3x-1)$. **12.** $49x^6+6x-4$. **13.** $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^3}$. **14.** $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}-\frac{10}{x^3}+\frac{9}{x^4}$. **15.** $20x^4-3\cos x-\frac{5}{\sin^2 x}$. **16.** $\frac{3}{2\sqrt{x}}-4\sin x-\frac{2}{\cos^2 x}$. **17.** $8x+\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}-\frac{2}{x^3}+\cos x-\sin x+\frac{1}{x}$. **18.** $\frac{3}{8\sqrt[8]{x^5}}-24x^5+\frac{5}{x}+7\sin x-4\operatorname{ctg} 2x$. **19.** $\frac{\ln 24}{x\ln 2\cdot\ln 3}$. **20.** $4e^x+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. **21.** $e^x-\frac{1}{2}\sec^2 x+x^3$. **22.** $5^x\ln 5+6^x\ln 6-$

$-7^{-x}\ln 7$. 23. $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$. 24. $\frac{2}{x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$. 25. $4\,\mathrm{cosec}\,2x$. 26. $\frac{2}{1+x^2}$.

27. $\cos x - x\sin x$. 28. $x(\sin 2x+x)\sec^2 x$. 29. $\frac{\ln x+7}{7\sqrt[7]{x^6}}$. 30. $\arccos x-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

31. $\frac{\mathrm{arcctg}\,x}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}$. 32. $x\frac{2\ln x+1}{\ln 3}$. 33. $-\frac{4x}{(x^2-1)^2}$. 34. $\frac{\sin x-x^2+x\cos x(\sin x-\ln x)}{x\sin^2 x}$.

35. $-\frac{2+\sin x}{(1+2\sin x)^2}$. 36. $\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$. 37. $-\frac{4x+\sin 2x}{4x\sqrt{x}\sin^2 x}$.

38. $\frac{(1+x^2)(\sin x\cos x+x)-x^2\sin 2x}{(1+x^2)^2\cos^2 x}$. 39. $\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$. 40. 1, 0, 4. 41. $\frac{33}{4}$. 42. -1, $-1/9$, $-1/25$. 43. $-\frac{\ln 10}{2}$. 44. 0, $2e^2$, $-e^{-4}$. 45. 1, 2, 0, -1. 46. $3\cos 3x$. 47. $(2x+5)\cos(x^2+5x+2)$. 48. $\sin(a-bx)$. 49. $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. 50. $\frac{-5\sin x}{2\sqrt{1+5\cos x}}$.

51. $\frac{2\sin^2 x}{\sqrt{2x-\sin 2x}}$. 52. $\sin 2x$. 53. $3\sin^2 x\cos x$. 54. $-100\sin x\cos^{99} x$.

55. $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$. 56. $\frac{2x}{\cos^2(x^2+3)}$. 57. $\mathrm{ctg}\,x$. 58. $-\mathrm{tg}\,x$. 59. $\frac{10}{\sin 10x}$. 60. $-\mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

61. $e^{\mathrm{tg}\,x}\sec^2 x$. 62. $\frac{2x-3}{x^2-3x+7}$. 63. $\frac{2(x+1)}{x(x+2)}$. 64. $\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$. 65. $\frac{1}{3+x^2}$. 66. $\frac{x}{\sqrt{3-x^4}}$.

67. $\frac{1}{2x\ln\sqrt{x}}$. 68. $\frac{1}{x^2-9}$. 69. $\frac{4xa^2}{a^4-x^4}$. 70. $\frac{2}{x(1-x^2)}$. 71. $\frac{2}{1-4x^2}$. 72. $\sqrt{1-x^2}$.

73. $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$. 74. $e^x\cos x$. 75. $\mathrm{arctg}\sqrt{2x-1}$. 76. $3\,\mathrm{tg}^4 x$. 77. $3x^2\sin 2x^3$.

78. $-\mathrm{ctg}^2\frac{x}{3}\,\mathrm{cosec}^2\frac{x}{3}$. 79. $\frac{5}{8}\mathrm{tg}\,2x\sec^{10}2x$. 80. $-\sin 4x$. 81. $\frac{4\cos 2x}{(1-\sin 2x)^2}$. 82. $\frac{-2\cos^2 x}{\sin^3 x}$.

83. $3\cdot 2^{3x}\ln 2+5x^4-2xe^{-x^2}-\frac{1}{x^2}$. 84. $a^{\sin x}\ln a\cdot\cos x$. 85. $\frac{e^{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

86. $xe^{-x}(2-x)$. 87. $e^{-x^2}(1-2x^2-4x)$. 88. $\frac{e^{x/3}}{3}\left(\cos\frac{x}{3}-\sin\frac{x}{3}\right)$. 89. $e^{1/\cos x}\frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

90. $\frac{-e^{1/\ln x}}{x\ln^2 x}$. 91. $10^{3-\sin^3 2x}\ln 10(-3\sin 2x\sin 4x)$. 92. $2^x(\ln 2)\cos 2^x$.

93. $\frac{1}{2}(e^{x/a}-e^{-x/a})$. 94. $-\frac{4}{(e^x-e^{-x})^2}$. 95. $\frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}+1}}$. 96. $\frac{2}{e^{4x}+1}$.

97. $\frac{\mathrm{ctg}\,x\ln\cos x+\mathrm{tg}\,x\ln\sin x}{(\ln\cos x)^2}$. 98. $-\frac{7\,\mathrm{tg}\,7x}{\ln 5}$. 99. $-\frac{\mathrm{tg}\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}\ln 7}$. 100. $\frac{2e^{\sqrt[7]{x^2}}}{7\sqrt[7]{x^5}}$.

101. $-\frac{1}{2\sqrt{x(x-1)}}$. 102. $-\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$. 103. $\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$. 104. $\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

105. $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$. 106. $\frac{-1}{\sqrt{x-4x^2}}$. 107. $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\sin^2 x}}$. 108. $\frac{4e^{4x}}{\sqrt{1-e^{8x}}}$.

109. $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$. 110. $\frac{1}{2x\sqrt{6x-1}}$. 111. $\frac{4e^{2x}}{1-e^{8x}}$. 112. $\frac{-1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

113. $\frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}\arccos x}$. 114. $\frac{5}{(5x+3)[1+\ln^2(5x+3)]}$. 115. $\frac{-3}{x^2+9}$. 116. $\frac{2\,\mathrm{arcctg}\frac{1}{x}}{1+x^2}$.

117. $\frac{xe^{-x^2/2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$. 118. $\frac{-\sin x\cos(\cos x)}{\cos^2(\sin\cos x)}$. 119. $\frac{xe^{x^2\,\mathrm{ctg}\,3x}}{\sin^2 3x}(\sin 6x-3x)$.

120. $a^{\sqrt[3]{\cos x}\,\mathrm{tg}^2 x}\ln a\frac{\sin x(6-\sin^2 x)}{3\cos^{8/3}x}$. 121. $-\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\left(\mathrm{tg}\,e^{-\frac{x}{2}}\right)\frac{e^{-x/2}}{\cos^2(e^{-x/2})}$.

122. $5\,\mathrm{ctg}\,x\cdot\ln^4\sin x$. 123. $\frac{x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{1+x^2}}$. 124. $\frac{1}{20}\frac{\mathrm{ctg}\frac{x+3}{4}}{\sqrt[5]{\ln^4\sin\frac{x+3}{4}}}$.

125. $\frac{e^{\sqrt{1+\ln x}}}{2x\sqrt{1+\ln x}}$. 126. $\frac{e^{5x}}{(1+e^{10x})\sqrt[5]{\mathrm{arctg}^4 e^{5x}}}$. 127. $2x\arcsin\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

128. $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\arccos^2 x}}$. 129. $\frac{1}{2(1+x^2)}$. 130. $\frac{1}{1+x+x^2}$. 131. $\frac{9(x^2+1)}{x^4-9}$.

132. $\frac{4x-5}{x^2+5}$. 133. $\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$. 134. $\frac{1}{x}+\mathrm{ctg}\,x-\frac{x}{1-x^2}$. 135. $x^x(1+\ln x)$. 136. $x^{1/x-2}(1-\ln x)$. 137. $x^{\sin x}\cos x\ln x+x^{\sin x-1}\sin x$. 138. $(\mathrm{tg}\,x)^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln\mathrm{tg}\,x+\frac{1}{\cos x}\right)$.

139. $y=x+\frac{1}{2}$. **Решение.** Уравнение касательной, проходящей через точку графика $(x_0; y_0)$, имеет вид $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$. Так как $f(x)=x^2$, то $f'(x)=2x$ и $f'(1/2)=1$. Получаем уравнение искомой касательной $y-1=1(x-1/2)$ или $y=x+1/2$.

140. 1) $y=4x$, $y=-4x+16$; 2) $y=x-1$; 3) $y=2x+1$. 141. $x=\pm\sqrt{2/3}$. **Решение.** Так как касательная параллельна прямой $y=x$, ее угловой коэффициент равен 1, т. е. $f'(x)=1$. Поскольку $f(x)=x^3-x$, $f'(x)=3x^2-1$, получаем уравнение $3x^2-1=1$. Отсюда $x=\pm\sqrt{2/3}$. 142. 45°; 0°; −45°. 143. −45°. 144. $x=0$ и $x=4$.

145. $y=-2x-1$ и $y=6x-9$. 146. $3\sin 2x\sin 4x\,dx$. 147. $\frac{\mathrm{ctg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$.

148. $\dfrac{-\operatorname{tg} x\, e^{-1/\cos x}}{\cos x}dx$. 149. $-2x2^{-x^2}\ln dx$. 150. $(\ln x+1)dx$. 151. $\dfrac{dx}{2\sqrt{x(1-x)}}$.

152. $\left(3x^2+\dfrac{3}{2}\sqrt{x}\right)dx$. 153. $\dfrac{2x\,dx}{2+x^2}$. 154. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(2x\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+x^2\cos\sqrt{x})dx$.

155. $\dfrac{(x-3)dx}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$. 156. $\dfrac{dx}{1-\sin x}$. 157. $\dfrac{1}{1+x^2}[(1+x^2)\operatorname{arctg} x+x]dx$.

158. $\dfrac{x\left[2(\arcsin x)-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]}{(\arcsin x)^2}$. 159. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}\right)dx$. 160. 0,04.

161. 10,05; 1,02; 6,41; 2,08; 2,01. 162. $2e^{-x^2}(2x^2-1)$. 163. $\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$. 164. $\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}$.

165. $\dfrac{x}{(4-x^2)^{3/2}}$. 166. $2\cos 2x$. 167. $-2\cos 2x$. 168. $\dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$. 169. $\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.

170. $\dfrac{-4}{(2x-3)^2}$. 171. $2\cos x-x\sin x$. 172. $\dfrac{2-x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$. 173. $\dfrac{-4}{(x-1)^3}$.

174. $\dfrac{4(3x-4)}{(4+x^2)^3}$. 175. $e^{-x}(3-x)$. 176. $-2e^x(\cos x+\sin x)$. 177. $-2e^x(\cos x+\sin x)$.

178. $2^x(x^3\ln^3 2+9x^2\ln^2 2+18x\ln 2+6)$. 179. $-\dfrac{1}{x^2}$. 180. $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

181. $3^n\sin\left(3x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$. 182. $e^{x/2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. 183. $2^{3x}(3\ln 2)^n$. 184. $2^{n-1}\cos\left(2x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

185. $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$. 186. $3^x(\ln 3)^n$. 187. $4^n n!$ 188. $x\cos\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)+n\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

189. $e^x[x^3+3nx^2+3n(n-1)x+n(n-1)(n-2)]$. 190. $\dfrac{x^2-9n(n-1)}{3^n}\sin\left(\dfrac{x}{3}+n\dfrac{\pi}{2}\right)-$

$-\dfrac{2nx}{3^{n-1}}\cos\left(\dfrac{x}{3}+n\dfrac{\pi}{2}\right)$. 191. $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-3)!}{x^{n-2}}$. 192. $-2e^x\sin x$. 193. $xa^x(x^2\ln^2 a+$

$+6x\ln a+6)$. 194. $2\sin x+4x\cos x-x^2\sin x$. 195. $2e^{-x}(\sin x+\cos x)$. 196. $\dfrac{2}{x}$.

197. $e^x[3x^2+6nx+3n(n-1)-4]$. 198. $(80x^3-14)(dx)^2$. 199. $-4\cos 2x(dx)^2$.

200. $4^{-x^2}2\ln 4(2x^2\ln 4-1)(dx)^2$. 201. $\dfrac{4\ln x-4-\ln^3 x}{x^2\sqrt{(\ln^2 x-4)^3}}(dx)^2$. 202. $-4\sin 2x(dx)^3$.

203. $\dfrac{-15}{16(x-1)^{7/2}}(dx)^4$, $(x>1)$. 204. $-\dfrac{6}{x^4}(dx)^5$, $(x>0)$. 205. $(10\cos x-x\sin x)(dx)^{10}$.

206. $\dfrac{t^2-1}{2t}$; $\dfrac{1+t^2}{4t^3}$. 207. $\dfrac{3}{2}e^t$; $\dfrac{3}{4e^t}$. 208. $\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}$; $-\dfrac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}}$. 209. $\dfrac{3t^2+1}{2t}$; $\dfrac{3t^2-1}{4t^3}$. 210. $-\operatorname{tg} t$;

$\dfrac{1}{3a\cos^4 t+\sin t}$. **211.** $\dfrac{\cos t+\sin t}{\cos t-\sin t}$; $\dfrac{2}{e^t(\cos t-\sin t)^3}$. **212.** Решение. Не удовлетворяет, так как принимает наименьшее значение при $x=1$ и наибольшее значение при $x=2$, т. е. на концах отрезка, а не на интервале (1, 2). Поэтому как в той, так и другой точке производная в нуль не обращается, а равна $f'(1)=6$, $f'(2)=12$. **213.** Решение: 1) удовлетворяет условиям 1^0 и 2^0, но не удовлетворяет условию 3^0; 2) удовлетворяет условиям 2^0 и 3^0, но не удовлетворяет условию 1^0; 3) удовлетворяет условиям 1^0 и 3^0, но не удовлетворяет условию 2^0. Поэтому для этих функций теорема Ролля неприменима, для них не существует точки, в которой их производная обращалась бы в нуль. **214.** Решение. Не удовлетворяет, так как не удовлетворяет условию 2^0. Действительно, функция непрерывна на всей числовой прямой; следовательно, и на отрезке $[-1, 1]$; $f(-1)=f(1)=0$, но производная $f'(x)=-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ в точке $x=0$ не существует, т. е. условие существования конечной производной на интервале $(-1, 1)$ не выполняется. Поэтому теорема Ролля к данной функции на $[-1, 1]$ неприменима. И действительно, $f'(x)\neq 0$ на $[-1, 1]$. **215.** Решение. Удовлетворяет, так как она непрерывна и дифференцируема на отрезке $[0, \pi]$ и обращается в нуль на его концах: $f(0)=f(\pi)=0$. Следовательно, на интервале $(0, \pi)$ существует точка $x=c$, в которой $f'(c)=0$. Этой точкой является $x=\pi/2$, в которой производная функции $f'(x)=\cos x$ обращается в нуль. **216.** Решение. Предположим, что существуют два корня: $x_1<x_2$. Тогда на отрезке $[x_1, x_2]$ функция $f(x)=x^3+3x-5$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: она непрерывна, в каждой точке имеет конечную производную и обращается на концах в нуль. Следовательно, в некоторой точке c $x_1<c<x_2$, $f'(c)=0$. Однако $f'(x)=3x^2+3=3(x^2+1)>0$. Полученное противоречие доказывает, что заданное уравнение имеет только один вещественный корень. Существование хотя бы одного вещественного корня следует из того, что $f(x)=x^3+3x-5$ — многочлен нечетной степени. **217.** Решение. Функция $f(x)=2x-x^2$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, так как она непрерывна на отрезке [1, 3] и имеет конечную производную $f'(x)=2-2x$ в каждой внутренней точке отрезка, т. е. дифференцируема на (1, 3). По теореме Лагранжа, между точками $x_1=1$ и $x_2=3$ существует точка $x=c$, удовлетворяющая равенству $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$. Подставляя значения $x_1=1$ и $x_2=3$, получаем $f'(c)=2-2c=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{(2\cdot 3-3^2)-(2\cdot 1-1^2)}{3-1}=$ $=\dfrac{-4}{2}$, откуда находим $c=2$. **218.** 1) $c=7/2$; 2) $c=2/\ln 3$; 3) неприменима, так как функция не имеет производной в точке $x=0$. **219.** $M(1;\ 1)$. Решение. Функция $y=x^2$ на отрезке $[-1, 3]$ непрерывна и имеет конечную производную, поэтому к ней применима теорема Лагранжа. Согласно теореме, на дуге AB найдется хотя бы одна точка M, в которой касательная параллельна хорде AB. Напишем формулу Лагранжа для заданной функции на отрезке $[-1, 3]$: $\dfrac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=$ $=\dfrac{9-1}{3+1}=f'(c)=2c$, отсюда $c=1$. Подставляя $c=1$ в уравнение кривой, найдем соответствующую ординату: $y=1^2=1$. Таким образом, искомой точкой является точка $M(1;\ 1)$. **220.** $M\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{15}{4}\right)$. **221.** Функция $y=|x-1|$ не имеет производной в точке $x=1$, т. е. не является дифференцируемой на интервале (0, 3). Поэтому теорема Лагранжа неприменима. **222.** Решение. Функции $f(x)=x^2-2x+3$ и $g(x)=x^3-7x^2+20x-5$ удовлетворяют условиям теоремы Коши, так как они непрерывны на отрезке [1, 4], их производные $f'(x)=2x-2$ и $g'(x)=3x^2-14x+20$ существуют во всех точках интервала (1, 4), т. е. дифференцируемы на этом интервале, и, кроме того, $g'(x)\neq 0$ на [1, 4]. По теореме Коши, между двумя точками $x_1=1$ и $x_2=4$ существует точка $x=c$, удовлетворяющая равенству

$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{g(x_2)-g(x_1)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. Подставляя значения $x_1=1$ и $x_2=4$, получаем $\dfrac{11-2}{27-9}=$ $=\dfrac{2c-2}{3c^2-14c+20}$. Решая уравнение, находим $c_1=2$ и $c_2=4$. Так как точка $x=c$ должна удовлетворять неравенствам $1<c<4$, то искомой точкой является $c_1=2$.
223. 1) $c=\dfrac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$; 2) $c=\pi/4$; 3) $c=\sqrt[3]{(15/4)^2}$. **224.** Нет, так как $g(-3)=$ $=g(3)$. **225.** 1/2. **226.** 1. **227.** 3/5. **228.** 2. **229.** 1/3. **230.** 1. **231.** -1. **232.** 0. **233.** 2/3. **234.** 0. **235.** 0. **236.** $+\infty$. **237.** 0. **238.** 1. **239.** $+\infty$. **240.** 1. **241.** 0. **242.** 1. **243.** 0. **244.** $2/\pi$. **245.** $-1/2$. **246.** $-1/2$. **247.** 0. **248.** 1. **249.** 1. **250.** 1. **251.** 1. **252.** e^{-1}. **253.** 1/6. **254.** 2/3. **255.** 1. **256.** 0. **257.** 0. **258.** -2. **259.** 1/3. **260.** $1/\sqrt{3}$. **261.** $-1/5$. **262.** $-1/6$. **263.** $-1/2$. **264.** 1. **265.** $\dfrac{\ln^2 2}{m(m-1)}$. **266.** $e^{-2/\pi}$. **267.** Решение. Для решения задачи необходимо найти значение многочлена и его производных в точке $x=1$. Имеем: $P(1)=0$, $P'(1)=0$, $P''(1)=0$, $P'''(1)=18$, $P^{(4)}(1)=72$, $P^{(5)}(1)=120$, $P^{(n)}(x)=0$ $(n\geqslant 6)$. Подставив найденные значения в формулу Тейлора, получим $P(x)=\dfrac{18}{3!}(x-1)^3+\dfrac{72}{4!}(x-1)^4+\dfrac{120}{5!}(x-1)^5=3(x-1)^3+3(x-1)^4+(x-1)^5$.
268. $P(x)=-9+22(x+1)+4(x+1)^2-6(x+1)^3+2(x+1)^4$. **269.** Решение. Так как $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$; $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$, $f(0)=\ln 1=0$, то формула Маклорена имеет вид $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$. **270.** Решение. Так как $f'(x)=1/\cos^2 x=\cos^{-2}x$; $f''(x)=2\cos^{-3}x\sin x$; $f'''(x)=6\cos^{-4}x\sin^2 x+2\cos^{-2}x$; $f(0)=0$, $f'(0)=1$; $f''(0)=0$; $f'''(0)=2$, то по формуле Маклорена имеем $\operatorname{tg} x=x+$ $+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$. **271.** 1) $e^{-x}=1-x+\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)$; 2) $e^{2x-x^2}=1+2x+x^2-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{5}{6}x^4-$ $-\dfrac{1}{15}x^5+o(x^5)$; 3) $\ln(\cos x)=-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{12}+o(x^4)$; 4) $\sin\sin x=x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$. **272.** 2. **273.** 0. **274.** 1. **275.** 0. **276.** $-1/12$. **277.** 1/3. **278.** $-1/4$. **279.** 19/90. **280.** 1) Возрастает на $(-\infty;+\infty)$; 2) возрастает на $(-\infty;0)$ и убывает на $(0;+\infty)$; 3) возрастает на $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ и убывает на $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$; 4) возрастает на $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$ и убывает на $(-1,1)$; 5) возрастает на $(-\infty,-1)$ и на $(1,+\infty)$ и убывает на $(-1,$ $1)$. **282.** 1) При $x=1/2$ — минимум, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1/11$; 2) при $x=1/e$ — минимум, $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=-1/e$; 3) при $x=-1$ — минимум, $f(-1)=17/12$; при $x=0$ — максимум, $f(0)=2$; при $x=3$ — минимум, $f(3)=-\dfrac{37}{4}$; 4) при $x=-1$ — минимум, $f(-1)=$ $=-1/2$, при $x=1$ — максимум, $f(1)=1/2$; 5) при $x=0$ — минимум, $f(0)=0$, при $x=2$ — максимум, $f(2)=4e^{-2}$. **283.** 30×60 м. **284.** 5 и 5. **285.** $\dfrac{ah}{4}$. **286.** $\dfrac{a}{6}$. **287.** $\sqrt[3]{2V}\times\sqrt[3]{2V}\times\sqrt[3]{\dfrac{V}{4}}$. **288.** $\dfrac{P}{4+\pi}$. **289.** $\dfrac{4}{27}\pi R^2 h$. **290.** $\dfrac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$. **291.** $2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

292. $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$. **293.** 1) При $x=2$ — точка перегиба, на $(-\infty, 2)$ — выпуклость вверх, на $(2, +\infty)$ — вниз; 2) при $x=-2$ и $x=1$ — точки перегиба, на $(-\infty, -2)$ — выпуклость вниз, на $(-2, 1)$ — вверх, на $(1, +\infty)$ — вниз; 3) на $(-\infty, +\infty)$ — выпуклость вниз, точек перегиба нет; 4) при $x=-1$ и $x=1$ — точки перегиба, на $(-\infty, -1)$ — выпуклость вверх, на $(-1, 1)$ — вниз, на $(1, +\infty)$ — вверх; 5) при $x=1/2$ — точка перегиба, на $(0, 1/2)$ — выпуклость вверх, на $(1/2, +\infty)$ — вниз; 6) на $(-\infty, +\infty)$ — выпуклость вниз, точек перегиба нет. **294.** $a=-3$. **295.** $a=\pm 2$. **296.** 1) $x=1$ — вертикальная асимптота, $y=5$ — горизонтальная асимптота; 2) $x=1/2$ — вертикальная асимптота, $y=x+1/2$ — наклонная асимптота; 3) $x=\pm 1$ — вертикальные асимптоты, $y=2x+1$ — наклонная асимптота; 4) $x=0$ — вертикальная асимптота, $y=x+1$ — наклонная асимптота; 5) две различные наклонные асимптоты: $y=x-\pi$ при $x\to+\infty$ и $y=x+\pi$ при $x\to-\infty$. **297.** При $x=-1$ — максимум, $y=2$; при $x=1$ — минимум, $y=-2$; при $x=0$ — точка перегиба. **298.** При $x=2$ — максимум, $y=16$; при $x=-2$ — минимум, $y=-16$; при $x=0$ — точка перегиба. **299.** При $x=-2$ — максимум, $y=4/3$; при $x=0$ — минимум, $y=0$; при $x=-1$ — точка перегиба. **300.** При $x=\pm 2$ — минимум, $y=-4$; при $x=0$ — максимум, $y=0$; при $x=\pm 2\sqrt{3}$ — точки перегиба. **301.** Область определения функции $(-\infty, 0)$. При $x=-1$ — максимум, $y=1$; на $(-\infty, 0)$ — выпуклость вверх. **302.** Область определения функции $(-\infty, 1)$. При $x=2/3$ — максимум, $y=\frac{2}{3\sqrt{3}}$; на $(-\infty, 1)$ — выпуклость вверх. **303.** При $x=2$ — максимум, $y=3/\sqrt{2}$; при $x=4^1/3$ — точка перегиба; $y=0$ — горизонтальная асимптота при $x\to+\infty$. **304.** Область определения $|x|\geqslant 1$; $y=2x$ и $y=-2x$ — наклонные асимптоты при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$. **305.** Область определения $|x|\geqslant 1$; $y=0$ — горизонтальная асимптота. **306.** При $x=0$ — минимум, $y=-1$. **307.** При $x=0$ — максимум, $y=0$; при $x=1$ — минимум, $y=-1$. **308.** При $x=1$ — минимум, $y=1$. **309.** При $x=2$ — минимум, $y=-2\sqrt[3]{2}$; при $x=-2$ — максимум, $y=2\sqrt[3]{2}$; при $x=0$ — точка перегиба; $y=0$ — горизонтальная асимптота. **310.** При $x=\pm 2$ — минимум, $y=2\sqrt[3]{2}$; при $x=0$ — максимум, $y=2\sqrt[3]{4}$. **311.** При $x=3/5$ — максимум, $y=\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$; при $x=1$ — минимум, $y=0$; при $x=6/5$ — точка перегиба. **312.** Экстремальных точек нет. $x=\pm 1$ — вертикальные асимптоты, $y=0$ — горизонтальная асимптота. **313.** Экстремальных точек нет; $x=\pm 2$ — вертикальные асимптоты, $y=0$ — горизонтальная асимптота. **314.** При $x=\frac{2}{5}$ — максимум, $y=\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$; при $x=0$ — минимум, $y=0$; при $x=-\frac{1}{5}$ — точка перегиба. **315.** При $x=1$ — максимум, $y=\frac{1}{2}$; при $x=-1$ — минимум, $y=-1/2$; при $x=0$, $x=\pm\sqrt{3}$ — точки перегиба; $y=0$ — горизонтальная асимптота. **316.** При $x=0$ — минимум, $y=-1$; $x=1$ — вертикальная асимптота, $y=0$ — горизонтальная асимптота. **317.** При $x=1$ — максимум, $y=1$; при $x=1/2$ — точка перегиба; $x=2$ — вертикальная асимптота, $y=0$ — горизонтальная асимптота. **318.** При $x=-1$ — максимум, $y=2$; при $x=1$ — минимум, $y=0$; при $x=0$, $x=\pm\sqrt{3}$ — точки перегиба; $y=1$ — горизонтальная асимптота. **319.** При $x=0$ — максимум, $y=0$; $x=\pm 1$ — вертикальные асимптоты, $y=1$ — горизонтальная асимптота. **320.** При $x=-1$ — максимум, $y=0$; $x=0$, $x=-2$ — вертикальные асимптоты, $y=1$ — горизонтальная асимптота. **321.** При $x=2$ — максимум, $y=2/e$; при $x=4$ — точка перегиба; $y=0$ — горизонтальная асимптота при $x\to+\infty$. **322.** При $x=1$ — минимум, $f(1)=e$; точек перегиба нет; $x=0$ — вертикальная асимптота, $y=0$ — горизонтальная асимптота при $x\to-\infty$. **323.** При $x=1/2$ — минимум, $y=1/4e^2$; точек перегиба нет; $x=0$ — вертикальная асимптота при $x\to 0+$, $\lim\limits_{x\to 0-} x^2 e^{1/x}=0$. **324.** При $x=0$ — максимум, $y=1$; при $x=-1$ — точка перегиба; $y=0$ — горизонтальная асимптота. **325.** При $x=1$ — максимум, $y=1/\sqrt{e}$; при $x=-1$ — минимум, $y=-1/\sqrt{e}$; при $x=\pm\sqrt{3}$ — точки перегиба; $y=0$ — горизонтальная асимптота. **326.** При $x=-3$ — минимум, $y=-27/e^3$; при $x=-3\pm\sqrt{3}$ — точки перегиба; $y=0$ — горизонтальная асимптота при $x\to-\infty$. **327.** При $x=3$ — максимум, $y=27/e^3$; при $x=0$, $x=3\pm\sqrt{3}$ — точки перегиба; $y=0$ — горизонтальная асимптота при $x\to+\infty$. **328.** При $x=2$ — максимум, $y=-e^2/4$; $x=1$ — вертикальная асимптота, $y=0$ — горизонтальная асимптота при $x\to-\infty$. **329.** При $x=-3$ — минимум, $y=e^3/6$; при $x=1$ — максимум, $y=-1/2e$; $x=\pm\sqrt{3}$ — вертикальные асимптоты, $y=0$ — горизонтальная асимптота при $x\to+\infty$. **330.** Экстремальных точек нет. $x=0$ — вертикальная асимптота, $y=\pm1$ — горизонтальные асимптоты, $|y|>1$. **331.** Экстремальных точек нет. При $x=0$ — точки перегиба; $y=\pm1$ — горизонтальные асимптоты; $|y|<1$. **332.** При $x=-4$ — максимум, $y=-2e^4$; $x=-3$ — вертикальная асимптота, $y=0$ — горизонтальная асимптота при $x\to+\infty$. **333.** При $x=\pm1$ — максимум, $y=1/e$; при $x=0$ — минимум, $y=0$; $y=0$ — горизонтальная асимптота; функция неотрицательная. **334.** При $x=1/e$ — минимум, $y=-1/e$; $(1;\,0)$ — точка пересечения с осью Ox; $\lim\limits_{x\to 0+} y=0$, точек перегиба нет. **335.** При $x=1$ — минимум, $y=1$; функция положительна, $x=0$ — вертикальная асимптота при $x\to 0+$. **336.** При $x=1$ — максимум, $y=1$; при $x=e^{1/2}$ — точка перегиба; $x=0$ — вертикальная асимптота при $x\to 0+$, $y=0$ — горизонтальная асимптота при $x\to+\infty$. **337.** При $x=1$ — минимум, $y=0$; при $x=\dfrac{1}{e^2}$ — максимум, $y=\dfrac{4}{e^2}$; $\lim\limits_{x\to 0+} y=0$; функция неотрицательна. **338.** При $x=\dfrac{1}{e}$ — максимум, $y=\dfrac{1}{e^2}$; при $x=1$ — минимум, $y=0$, $\lim\limits_{x\to 0+} y=0$; при $x\approx\dfrac{1}{e^{1/2}}$ и $x\approx\dfrac{1}{e^{5/2}}$ — точки перегиба; функция неотрицательна. **339.** При $x=e$ — минимум, $y=e$; при $x=e^2$ — точка перегиба; $\lim\limits_{x\to 0+} y=0$; $x=1$ — вертикальная асимптота. **340.** При $x=1+\sqrt{e}$ — максимум, $y=\dfrac{1}{2e}$; при $x=1+\sqrt{e^3}$ — точка перегиба; $x=1$ — вертикальная асимптота при $x\to 1+$, $y=0$ — горизонтальная асимптота при $x\to+\infty$. **341.** При $x=1$ — минимум, $y=2$; при $x=-1$ — максимум, $y=-2$; $x=0$ — вертикальная асимптота, $y=x$ — наклонная асимптота. **342.** При $x=0$ — максимум, $y=0$; при $x=4$ — минимум, $y=8$; $x=2$ — вертикальная асимптота, $y=x+2$ — наклонная асимптота. **343.** При $x=-3$ — максимум, $y=-49/12$; при $x=1$ — максимум, $y=5/4$; при $x=2$ — минимум, $y=9/8$; при $x=9/7$ — точка перегиба; $x=0$ — вертикальная асимптота, $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{4}$ — наклонная асимптота. **344.** При $x=2$ — минимум, $y=2$; при $x=-2$ — максимум, $y=-2$; $x=0$ — вертикальная асимптота, $y=x/2$ — наклонная асимптота. **345.** При $x=1$ — минимум, $y=3$; точек перегиба нет; $x=0$ — вертикальная асимптота, $y=2x$ — наклонная асимптота. **346.** При $x=-\sqrt{3}$ — минимум, $y=3\sqrt{3}/2$; при $x=\sqrt{3}$ — максимум, $y=-3\sqrt{3}/2$; $x=\pm1$ — вертикальные асимптоты, $y=-x$ — наклонная асимптота. **347.** Экстремальных точек нет. При $x=0$, $x=\pm\sqrt{3}$ — точки перегиба, $y=x$ — наклонная асимптота. **348.** При $x=3$ — минимум, $y=27/4$; $x=1$ — вертикальная асимптота, $y=x+2$ — наклонная асимптота. **349.** При $x=1/2$ — минимум, $y=3\sqrt{3}/2$; $x=0$ — вертикальная асимптота при $x\to 0+$, $y=x+3/2$ — наклонная асимптота при $x\to+\infty$. **350.** Экстремальных точек нет. При $x=0$ — точка перегиба; $y=x+\pi/2$ — наклонная асимптота при $x\to+\infty$, $y=x-\pi/2$ — наклонная асимптота при $x\to-\infty$. **351.** При $x=0$ — минимум, $y=0$; при $x=-4$ — максимум, $y=-9\frac{13}{27}$; $x=-1$ — вертикальная асимптота, $y=x-3$ — наклонная асимптота. **352.** При $x=-1/2$ — максимум, $y=-1/2+\pi/4$; при $x=\frac{1}{2}$ — минимум, $y=1/2-\pi/4$; $y=x-\pi/2$ — наклонная асимптота при $x\to+\infty$, $y=x+\pi/2$ — наклонная асимптота при $x\to-\infty$.

Глава 6

2. $\frac{x^3}{3}+\frac{3x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x+C$. **3.** $\frac{x^5}{5}+\frac{5}{6}x^5\sqrt{x}+2x\sqrt{x}-\frac{1}{x}+\ln|x|+C$. **4.** $2\operatorname{arctg}x-3\arcsin x+C$. **5.** $\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{3^x}{\ln 3}+C$. **6.** $2e^x+\frac{1}{2x^2}+C$. **7.** $-\cos x+5\sin x+C$. **8.** $x-\cos x+C$. **9.** $-(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)+C$. **10.** $\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x+C$. **11.** $3\operatorname{tg}x+2\operatorname{ctg}x+C$. **12.** $\cos x-\operatorname{ctg}x+C$. **13.** $-(\operatorname{ctg}x+x)+C$. **14.** $\frac{1}{2}(x-\sin x)+C$. **15.** $\arcsin x-\ln|x+\sqrt{1+x^2}|+C$. **16.** $x-\operatorname{arctg}x+C$. **17.** $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right|+\ln|x+\sqrt{x^2+5}|+C$. **18.** $\arcsin\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$. **19.** $x+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. **20.** $\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$. **21.** $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+C$. **22.** $\frac{3\cdot 4^x}{\ln 4}-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$. **23.** $e^x+\operatorname{tg}x+C$. **24.** $x^5-\frac{1}{3x^3}+C$. **25.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x}-3x+6\sqrt{x}-\ln|x|+C$. **26.** $3\operatorname{tg}x-4\operatorname{ctg}x+C$. **27.** $x+\cos x+C$. **28.** $\frac{(2e)^x}{\ln 2+1}+C$. **29.** $\frac{1}{2}(x+\sin x)+C$. **30.** $x^3+\operatorname{arctg}x+C$. **31.** $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+\operatorname{arctg}x+C$. **32.** $\frac{2}{3}x^3-2x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. **33.** $-x^3-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. **34.** $-\frac{1}{5^x\ln 5}-\frac{1}{2^x\ln 2}+C$. **35.** $\frac{1}{32}\left[2\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]+C$. Указание: умножить числитель и знаменатель подынтегрального выражения на число 8 и произвести преобразование: $8=4+x^2+4-x^2$. **36.** $\frac{\sin 5x}{5}+C$. **37.** $-\frac{\cos 7x}{7}+C$. **38.** $-\frac{1}{3}\cos(3x+5)+C$. **39.** $\frac{1}{2}e^{2x}+C$. **40.** $-\ln|\cos x|+C$. **41.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$. **42.** $\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{1}{2}e^{2x}+e^x+\ln|e^x-1|+C$. **43.** $\frac{1}{5}\ln|x^5+7|+C$. **44.** $\frac{\operatorname{tg}3x}{3}+C$. **45.** $-3\operatorname{ctg}\frac{x}{3}+C$. **46.** $\frac{(2+5x)^{10}}{50}+C$. **47.** $-\frac{2}{3}\sqrt{2-3x}+C$. **48.** $\frac{1}{3}(2x-5)^{3/2}+C$. **49.** $-\frac{3}{28}(3-7x)^{4/3}+C$. **50.** $\frac{1}{5}\ln|5x+2|+C$. **51.** $-\frac{1}{3}\ln|2-3x|+C$. **52.** $6\left(\frac{1}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{1}{3}\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{x}+\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right)+C$.

53. $x-2\sqrt{x}+\ln(\sqrt{x}+1)^2+C$. 54. $\frac{2(44-15x)}{27}\cdot\sqrt{1-3x}+C$. 55. $x+4\sqrt{x+1}+$ $+4\ln|\sqrt{x+1}-1|+C$. 56. $-\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+C$. 57. $\frac{1}{3}\ln|3+\sin 3x|+C$.

58. $-\frac{\cos^4 x}{4}+C$. 59. $\frac{\sin^3 x}{3}+C$. 60. $-e^{\cos x}+C$. 61. $-\frac{1}{3}e^{-x^3}+C$. 62. $e^{\sin x}+C$.

63. $2e^{\sqrt{x}}+C$. 64. $e^{\operatorname{arctg} x}+C$. 65. $-e^{-\operatorname{tg} x}+C$. 66. $-\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2 x+C$. 67. $\frac{1}{4\cos^4 x}+C$.

68. $\ln|1+\ln x|+C$. 69. $\frac{2}{3}(1+\ln x)^{3/2}+C$. 70. $\frac{5}{18}(x^3-8)^{6/5}+C$. 71. $\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+$ $+C$. 72. $-\frac{3^{1/x}}{\ln 3}+C$. 73. $\frac{(\operatorname{arctg} x)^{101}}{101}+C$. 74. $\arcsin\frac{e^x}{2}+C$. 75. $2\sin\sqrt{x}+C$.

76. $\frac{1}{4\arccos^4 x}+C$. 77. $\frac{\arcsin^2 x}{2}-\sqrt{1-x^2}+C$. 78. $\frac{\sin x-2}{\cos x}+C$.

79. $2\ln|\sin x|-\operatorname{ctg} x+C$. 80. $-\frac{2}{15}(3+\cos 5x)^{3/2}+C$. 81. $\frac{7}{90}(3+5\sin 3x)^{6/7}+C$.

82. $\frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3}+C$. 83. $\frac{3}{4}(\arcsin x)^{4/3}+C$. 84. $\frac{2^{\sqrt{x}+1}}{\ln 2}+C$. 85. $-\frac{4^{1-3x}}{3\ln 4}+C$.

86. $\frac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{5}}+C$. 87. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{5}+C$. 88. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+3}|+C$.

89. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{3x-1}{3x+1}\right|+C$. 90. $\frac{1}{2\sqrt{15}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}\cdot x}{\sqrt{3}-\sqrt{5}\cdot x}\right|+C$. 91. $\frac{1}{3}\ln|3x+\sqrt{9x^2-5}|+C$.

92. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{\sqrt{\ldots}}+C$. 93. $\frac{1}{4}\ln|x^4+\sqrt{x^8-3}|+C$. 94. $\ln|x+\sqrt{x^2+1}|+\sqrt{x^2+1}+C$.

111. $\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}-\frac{3x^2}{4}-2x+C.$ 112. $(x^4+3x^2-7x)\ln x-\left(\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}-\right.$ $\left.-7x\right)+C.$ 113. $x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arcsin x+C.$ 114. $-e^{-x}(x+1)+C.$

115. $\frac{e^{5x}}{25}(5x-1)+C.$ 116. $-e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6)+C.$ 117. $-2e^{-x/2}(x^2+4x+8)+C.$

118. $x\sin x+\cos x+C.$ 119. $\sin x-x\cos x+C.$ 120. $\frac{x+1}{3}\sin 3x+\frac{\cos 3x}{9}+C.$

121. $(x^2-2)\sin x+2x\cos x+C.$ 122. $-x^2\cos x+2(x\sin x+\cos x)+C.$ 123. $e^x(x^2-$ $-2x+2)+C.$ 124. $\ln|\sin x|-x\,\mathrm{ctg}\,x+C.$ 125. $x\,\mathrm{tg}\,x+\ln|\cos x|+C.$

126. $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C.$ 127. $\frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x+2\cos 3x)+C.$ 128. $\frac{2}{5}e^x\left(2\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)+$ $+C.$ 129. $(x^3-6x+1)\sin x+(3x^2-6)\cos x+C.$ 130. $x[1+(\ln x-1)^2]+C.$

131. $x\ln(x^2+2)-2x+\frac{4}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$ 132. $\frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+C.$

133. $2\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}-\ln|1+x|+C.$ 134. $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C.$ 135. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+$ $+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$ Указание: положить $u=\sqrt{a^2-x^2}$, $dv=dx$. 136. $2(e^{x/2}-e^{-x/2})+$ $+C.$ 137. $-\frac{1}{4(\ln x+1)^4}+C.$ 138. $\frac{3}{4}(2+\ln x)^{4/3}+C.$ 139. $\frac{1}{8}\ln(5+2e^{4x})+C.$

140. $e^{\mathrm{tg}\,x}+C.$ 141. $-\frac{2}{75}(1-6x^5)^{5/4}+C.$ 142. $\frac{2x+9}{4}\sqrt{4x+1}+C.$ 143. $\frac{4(17-14x)}{147}\times$ $\times\sqrt{7x-1}+C.$ 144. $\frac{1}{2}\cos\frac{1}{x^2}+C.$ 145. $-\frac{\arccos^2 x}{2}+C.$ 146. $\arcsin\frac{e^x}{\sqrt{5}}+C.$

147. $\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-\cos 2x}{\sqrt{5}+\cos 2x}\right|+C.$ 148. $\frac{1}{4}\ln|(x-2)(x+2)^7|+C.$ 149. $5\ln|e^x+\sqrt{e^{2x}-4}|+$ $+C.$ 150. $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(\sqrt{3}\sin 5x)+C.$ 151. $-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{2\cos(x/3)}{3}+C.$ 152. $\frac{1}{5}\arcsin\frac{x^5}{2}+$ $+C.$ 153. $\frac{1}{7\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{x^7}{\sqrt{5}}+C.$ 154. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{e^{-x}}{\sqrt{2}}+C.$ 155. $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x-3}{2}+C.$

156. $\arcsin\frac{x-2}{2}+C.$ 157. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C.$ 158. $\frac{1}{2}\ln|x^2+x-1|+\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\times$ $\times\left|\frac{2x+1-\sqrt{5}}{2x+1+\sqrt{5}}\right|+C.$ 159. $-3\sqrt{5-4x-x^2}-8\arcsin\frac{x+2}{3}+C.$ 160. $26\arcsin\frac{x-3}{2}-$ $-5\sqrt{6x-x^2-5}+C.$ 161. $\frac{7}{2}\ln|x^2-6x+1|+\frac{5}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-3-2\sqrt{2}}{x-3+2\sqrt{2}}\right|+C.$ 162. $\frac{x^3}{3}+x^2+$ $+4x+8\ln|x-2|+C.$ 163. $2x+\ln(x^2-x+1)-\frac{4}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$ 164. $\frac{3}{2}\ {}^2+16x+$

$+33\ln(x^2-6x+10)+38\,\mathrm{arctg}(x-3)+C$. **165.** $\frac{x^4}{4}+x^3+3x^2+18x+54\ln|x-3|+C$.

166. $e^{2x}(x+1)+C$. **167.** $\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$. **168.** $\frac{x^2}{2}\,\mathrm{arcctg}\,(1-x)-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\times$ $\times\ln(x^2-2x+2)+C$. **169.** $\frac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+C$. **170.** $-\frac{x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\,x+C$.

171. $\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}+x\,\mathrm{tg}\,x+C$. **172.** $-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C$. **Указание:** $\sin^3 x=(1-$ $-\cos^2 x)\sin x$. **173.** $\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C$. **Указание:** $\cos^4 x=(\cos^2 x)^2=$ $=\frac{(1+\cos 2x)^2}{4}$. **174.** $\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{\cos^5 x}{5}-\cos x+C$. **Указание:** $\sin^5 x=(1-\cos^2 x)^2\times$ $\times\sin x$. **175.** $\sin x-\sin^3 x+\frac{3\sin^5 x}{5}-\frac{\sin^7 x}{7}+C$. **176.** $\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}+C$. **177.** $\frac{\cos^5 x}{5}-$ $-\frac{\cos^3 x}{3}+C$. **Указание:** $\sin^3 x\cos^2 x=(1-\cos^2 x)\cos^2 x\sin x$, положить $t=\cos x$.

178. $\frac{\sin^6 x}{6}-\frac{\sin^8 x}{8}+C$. **179.** $3x+4\sin x+\sin 2x+C$. **180.** $\frac{1}{2}\ln|\mathrm{tg}\,x|+C$. **181.** $3\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{6}\right)\right|+C$. **182.** $\frac{1}{9}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{9x}{2}\right|+C$. **183.** $\frac{1}{2}\left[\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|\right]+C$.

184. $-\frac{1}{8}(\cos 4x+2\cos 2x)+C$. **185.** $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+C$. **186.** $-\frac{1}{12}\cos\left(6x-\frac{\pi}{4}\right)-$ $-\frac{1}{8}\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)+C$. **187.** $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\cos x+C$. **188.** $-\frac{1}{\sin x}-\sin x+C$. **189.** $\frac{1}{\cos x}+$ $+\cos x+C$. **190.** $-\frac{\mathrm{ctg}^4 x}{4}+C$. **191.** $\frac{1}{2\cos^2 x}+2\ln|\cos x|-\frac{\cos^2 x}{2}+C$. **192.** $\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x-$ $-\mathrm{tg}\,x+x+C$. **193.** $\frac{\mathrm{tg}^4 x}{4}-\frac{\mathrm{tg}^2 x}{2}-\ln|\cos x|+C$. **194. Решение.** Применяя подстановку $t=\mathrm{tg}(x/2)$, получаем $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$. Таким образом,

$$\int\frac{dx}{1+\sin x}=2\int\frac{dt}{(1+t)^2}=-\frac{2}{1+t}+C=-\frac{2}{1+\mathrm{tg}(x/2)}+C.$$

195. $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}(x/2)}{\sqrt{2}}\right)+C$.

196. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2\mathrm{tg}(x/2)+1}{\mathrm{tg}(x/2)-2}\right|+C$. **197.** $\frac{1}{4}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8}\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+C$. **198.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\times$ $\times\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1-\sqrt{2}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1+\sqrt{2}}\right|+C$. **199.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}(x/2)-1+\sqrt{2}}{\mathrm{tg}(x/2)-1-\sqrt{2}}\right|+C$. **200.** $\frac{1}{\sqrt{15}}\times$ $\times\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{5}}\right)+C$. **201.** $\frac{1}{5}\ln|1-5\,\mathrm{ctg}\,x|+C$. **202.** $\ln\left|\frac{\mathrm{tg}(x/2)-5}{\mathrm{tg}(x/2)-3}\right|+C$.

203. $-\frac{1}{\mathrm{tg}\,x+1}+C$. **204.** $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)-2\,\mathrm{arctg}(e^x)+C$. **205.** $\frac{e^{2x}}{2}-2e^x+4\ln(e^x+2)+C$.

206. $2\ln|e^x-1|-x+C$. 207. $e^x-\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+e^x+1)+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2e^x+1}{\sqrt{3}}+C$. 208. $\mathrm{tg}\,x-$ $-\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3}+C$. 209. $\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3}+\mathrm{tg}\,x+C$. 210. $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1\right)+C$. 211. $\frac{1}{2}(\mathrm{tg}\,x+\ln|\mathrm{tg}\,x|)+C$.
212. $\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{4\sin^4 x}+\ln|\sin x|+C$. 213. $-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(2\,\mathrm{tg}\,x)+C$. 214. $\frac{3}{2}x^2-17x+$ $+36\ln(x^2+6x+10)-46\,\mathrm{arctg}(x+3)+C$. 215. $\frac{1}{2\sqrt{17}}\ln\left|\frac{2e^x-1-\sqrt{17}}{2e^x-1+\sqrt{17}}\right|-\frac{5}{2}\times$ $\times\ln|e^x+4-e^{2x}|+C$. 216. $\frac{5}{3}(x^2+3x+5)^{3/2}-\frac{9}{4}\Big[\left(x+\frac{3}{2}\right)\sqrt{x^2+3x+5}+$ $+\frac{11}{4}\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+5}\right|\Big]+C$. 217. $-\frac{2}{9}(3x^2+8x)^{3/2}+\frac{11}{2\sqrt{3}}\Big[\left(x+\frac{4}{3}\right)\times$ $\times\sqrt{x^2+\frac{8}{3}x}-\frac{16}{9}\ln\left|x+\frac{4}{3}+\sqrt{x^2+\frac{8}{3}x}\right|\Big]+C$. 218. $\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[(x+1)\sqrt{x^2+2x+\frac{1}{2}}-$ $-\frac{1}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+\frac{1}{2}}\right|\Big]+C$. 219. $\frac{x-1}{2}\sqrt{3+2x-x^2}+2\arcsin\frac{x-1}{2}+C$.
220. $4\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x}\arcsin\frac{x}{2}+C$. 221. $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+C$.
222. $6\sqrt{x^2+5x+17}-25\ln\left|x+\frac{5}{2}+\sqrt{x^2+5x+17}\right|+C$. 223. $\frac{3}{2}\ln|x^2+10x+1|-$ $-\frac{7}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x+5-2\sqrt{6}}{x+5+2\sqrt{6}}\right|+C$. 224. $\frac{3}{2}\ln(e^{2x}+4)-2\,\mathrm{arctg}\frac{e^x}{2}+C$. 225. $\frac{e^{4x}}{4}-\frac{e^{3x}}{3}+\frac{e^{2x}}{2}-$ $-e^x+\ln(e^x+1)+C$. 226. $-\mathrm{ctg}\,x\ln(\cos x)-x+C$. 227. $2\sqrt{x-3}\ln(x+\sqrt{x^2-9})-$ $-4\sqrt{x+3}+C$. 228. $-(-x^2-8x)^{3/2}-\frac{13}{2}\Big[(x+4)\sqrt{-x^2-8x}+16\arcsin\frac{x+4}{4}\Big]+C$.
229. $\left(\frac{x^3}{3}-\frac{1}{12}\right)\mathrm{arctg}(2x+1)-\frac{x^2}{12}+\frac{x}{6}-\frac{1}{24}\ln\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)+C$. 230. $2\ln|x-2|-$ $-\ln|x-3|+C$. 231. $\ln|x-2|+\ln|x+5|+C$. 232. $3\ln|x|+\ln|x-1|-\ln|x+1|+C$.
233. $-\frac{7}{2(x-2)^2}-\frac{2}{x-2}+C$. 234. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$. 235. $-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C$.
236. $\frac{3}{2(x+1)}+\frac{1}{4}\ln(x+1)(x-1)^3+C$. 237. $\frac{1}{2}\ln\frac{(x^2+3x+2)(x+2)^3}{(x+1)^3}+C$. 238. $\frac{x^3}{3}+$ $+x^2-x+\frac{4}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)+C$. **Указание**: так как степень числителя выше степени знаменателя, т. е. дробь неправильная, то нужно выделить целую часть.
239. $x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+C$. 240. $-\frac{1}{x}-\mathrm{arctg}\,x+C$.
241. $\frac{1}{9}\ln(x^2+2)-\frac{1}{9\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{9}\ln|x-1|+C$. 242. $-\frac{1}{3}\ln|x-1|+$

$+\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. **243.** $\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+$ $+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$. **244.** $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{4}{3}\ln|x+1|-\frac{2}{3}\ln(x^2-x+1)+$ $+\frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$. **245.** $\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$. **246.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$. **247.** $\frac{5}{2}\ln(x^2+2x+10)-\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C$. **248.** $\frac{3}{5}\ln|x^2-2|-\frac{3}{10}\ln|x^2+1|+\frac{1-x}{x^2+1}-\frac{11}{5}\operatorname{arctg}x+C$. **249.** $\ln\frac{(x-2)^4}{\sqrt{x-4}}+C$. **250.** $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{(x+1)^3}\right|+\frac{16}{3}\ln|x+2|+C$. **251.** $\frac{4}{x+2}+\ln|x+1|+C$. **252.** $\frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)}+\operatorname{arctg}(x+1)+C$. **253.** $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{3x+1}{2(x^2+1)}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x+$ $+C$. **254.** $\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$. **255.** 6. **256.** $\ln 2$. **257.** $e(e-1)$. **258.** 1/3. **259.** 2. **260.** $\ln(3+\sqrt{10})$. **261.** 1. **262.** $\pi/4$. **263.** $\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4}$. **264.** $\frac{\pi^3}{64}+\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4}$. **265.** $2\frac{5}{8}$. **266.** $\pi/6$. **267.** 10/3. **268.** 0. **269.** 5π. **270.** 1. **271.** $\operatorname{arctg}2$. **272.** $e-2$. **273.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 2$. **274.** 0. **275.** $\frac{e^2-5}{e}$. **276.** $\frac{\pi a^4}{16}$. **277.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$. **278.** $4-2\ln 3$. **279.** $2\ln 2-1$. **280.** $\pi/6+1-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **281.** $2-\ln 2$. **282.** 1/3. **283.** 1/3. **284.** $\ln\frac{2e}{e+1}$. **285.** $\operatorname{arctg}e-\pi/4$. **286.** $\ln(1+\sqrt{2})$. **287.** 1/2. **288.** $\frac{1-\ln 2}{2}$. **289.** $\ln\frac{3}{2}$. **290.** 32/3. **291.** $\frac{4}{3}h\sqrt{2ph}$. **292.** 1. **293.** 8/3. **294.** 4/3. **295.** 1/2. **296.** 11/2. **297.** $2+\pi^3/6$. **298.** 1/2. **299.** $\frac{\pi-2}{4}$. **300.** $2\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})$. **301.** $4\ln(4e)$. **302.** 1/3. **303.** 4. **304.** 9. **305.** 9/4. **306.** $\frac{19}{3}$; $\frac{2e-1}{e}$; $\frac{3\pi a^2}{2}$; 2; $3\pi a^2/8$; $4\pi/3-\sqrt{3}$. **307.** $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$. **308.** $\sqrt{5}+$ $+\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$. **309.** $\frac{a(e^2-1)}{2e}$. **310.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **311.** $\ln 3$. **312.** $\frac{1}{4}(e^2+1)$. **313.** $\frac{14}{3}$. **314.** $\sqrt{17}+\frac{1}{4}\ln(4+\sqrt{17})$. **315.** $\sqrt{2}(e^{\pi/2}-1)$. **316.** **Решение.** Имеем $x'_t=$ $=-3a\cos^2 t\sin t$, $y'_t=3a\sin^2 t\cos t$. Отсюда $\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=\sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t}=$ $=3a|\sin t\cos t|=\frac{3a}{2}|\sin 2t|$. Так как функция $|\sin 2t|$ имеет период $\pi/2$, то $L=4\times$ $\times\frac{3a}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt=6a$. **317.** **Решение.** Имеем $\rho'(\varphi)=-a\sin\varphi$, $\sqrt{\rho(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}=$

$=\sqrt{2a^2(1+\cos\varphi)}=\sqrt{4a^2\cos^2(\varphi/2)}=2a|\cos(\varphi/2)|=\begin{cases}2a\cos(\varphi/2), & 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\\ -2a\cos(\varphi/2), & \pi\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.\end{cases}$ Поэтому в силу симметрии $L=2a\int\limits_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi=4a\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=8a$. **318.** πph^2.

319. $\frac{256}{15}\pi$; 8π. **320.** $\frac{3\pi}{10}$. **321.** $\frac{\pi(e^2-1)}{2}$; 2π. **322.** $178/15\pi$; $21/2\pi$. **323.** $6\pi/7$; $3\pi/5$. **324.** $\pi/30$; $\pi/6$; $\pi/2$; $5\pi/6$; $11\pi/30$; $19\pi/30$. **325.** $\pi(e-2)$; $\frac{\pi(e^2+1)}{2}$; πe; $\frac{\pi(e^2-3)}{2}$; $\frac{\pi(e^2+5)}{2}$; $\pi(4-e)$. **326.** $\frac{\pi^2}{2}$; $2\pi^2$; $6\pi^2$; $2\pi(\pi+2)$; $2\pi(\pi+4)$; $\frac{\pi(8-\pi)}{2}$; $\frac{\pi(\pi+16)}{2}$. **327.** $\frac{32\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$. **328.** $\frac{2\pi}{15}$; $\frac{\pi}{6}$. **329.** $\frac{\pi^2}{8}$; $\frac{\pi}{4}(\pi-2)$. **330.** $\frac{\pi^2}{2}$; $10\pi^2$; $6\pi^2$; $\frac{\pi(\pi+16)}{2}$. **331.** $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{16\pi}{15}$; $\frac{16\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{5}$. **332.** 12π; 24π. **333.** $\frac{\pi(\pi+2)}{4}$; $\pi\ln 2$.

334. $\frac{\pi}{2}$. **335.** $\frac{29}{3}\pi$. Указание: данный шаровой слой можно представить как тело, полученное вращением криволинейной трапеции, которое ограничено линиями $y=\sqrt{16-x^2}$, $x=2$, $x=3$ и осью Ox, вокруг оси Ox. **336.** $\frac{\pi H^2}{3}(3R-H)$. Указание: шаровой сегмент можно рассматривать как тело, полученное в результате вращения криволинейной трапеции, образованной дугой окружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$, прямыми $x=-R$ и $x=-R+H$ и осью Ox, вокруг оси Ox. **337.** $\frac{2\pi R^2H}{3}$. **338.** 1) $S=4/3$; 2) $V=\pi/2$. **339.** 1) $S=1$; 2) $V=\pi^2/4$. Указание: поскольку $\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)=\cos x$, данная фигура — криволинейная трапеция, ограниченная линиями $y=\cos x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi/2$. **340.** $2\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. **341.** $\frac{34\sqrt{17}-2}{9}\pi$. **342.** $\frac{62\pi}{3}$. **343.** $\frac{\pi a^2}{4}(e^2+4-e^{-2})$. **344.** $4\pi R^2$. **345.** $\frac{56}{3}\pi$. **346.** $\frac{2\pi\sqrt{2}}{5}(e^{\pi}-2)$. **347.** $\frac{12}{5}\pi a^2$. Указание: так как кривая симметрична относительно оси Oy, то достаточно вычислить площадь поверхности, образованной вращением дуги астроиды, находящейся в первой четверти. **348.** 1) $S=\frac{2a\sqrt{a}}{3}$; 2) $V=\frac{\pi a^2}{2}$; 3) $S=\frac{4\pi}{3}\left[\left(a+\frac{1}{4}\right)^{3/2}-\frac{1}{8}\right]$. **349.** $A=ke_1e_2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$. Указание: электрические заряды отталкивают друг друга с силой $F(x)=k\frac{e_1e_2}{x^2}$, где k — постоянная, e_1 и e_2 — величины зарядов, x — расстояние между ними. **350.** Решение. Найдем сначала значение коэффициента пропорциональности k. Так как в силу условия задачи при $x=0{,}01$ м $F(0{,}01)=1$ кг, т. е. $1=k\cdot 0{,}01$, то коэффициент пропорциональности $k=\frac{1}{0{,}01}=100$. Следовательно, сила, растягивающая пружину от $x=0$

до $x=0{,}05$ м, выражается формулой $F(x)=100x$. Согласно формуле (12), искомую работу можно найти так:

$$A=\int\limits_a^b F(x)\,dx=\int\limits_0^{0{,}05} 100x\,dx=100\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0{,}05}=100\frac{(0{,}05)^2}{2}=0{,}125 \text{ кгм}.$$

351. $\frac{\pi R^4}{4}$. 352. $\frac{4}{3}\pi R^4$. 353. $\frac{1}{12}\pi R^2 h$. 354. $P_0V_0\ln 2$. Указание: использовать закон Бойля—Мариотта: $PV=C=\text{const}$. 355. 1. 356. $\frac{1}{2}$. 357. $\ln 2$. 358. Расходится. 359. Расходится. 360. Расходится. 361. -1. 362. $\frac{1}{1-\alpha}$ при $\alpha<1$; расходится при $\alpha\geqslant 1$. 363. $\frac{\pi}{2}$. 364. -1. 365. 2. 366. Расходится. 367. 0. 368. Расходится. 369. $6\sqrt[3]{2}$. 370. Расходится. 371. Расходится. 372. 1/2. 373. $\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}$. 374. $\frac{\pi-2}{8}$. 375. 1. 376. $1-\frac{\pi}{4}$. 377. $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$ расходится, так как $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}>\frac{1}{x}$, а $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x}$ расходится. 378. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{e^{-x}dx}{x}$ сходится, так как при $x\geqslant 1$ $\frac{e^{-x}}{x}\leqslant e^{-x}$, а $\int\limits_1^{+\infty}e^{-x}$ сходится (см. задачу 355). 379. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x}$ расходится, так как при $x\geqslant 1$ $\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{x+x}\leqslant\frac{\sqrt{x}}{1+x}$, а $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ расходится. 380. $\int\limits_2^{+\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+1}}$ расходится, так как при $x>1$ $\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}>\frac{x}{\sqrt{x^4+x^4}}$, а $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{2}}$ расходится. 381. $\pi/2$. Указание: оба предела интегрирования бесконечны, поэтому предварительно разбить данный интеграл на два. Вместо точки $x=0$ в качестве промежуточного предела интегрирования можно взять любую другую точку оси Ox. 382. $\pi\sqrt{5}/5$. 383. 1. 384. Решение. Площадь поверхности равна несобственному интегралу $S=2\pi\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}\sqrt{1+e^{-2x}}\,dx$. Положив $t=e^{-x}$, $dt=-e^{-x}dx$, получим $t=1$ при $x=0$, $t=0$ при $x\to+\infty$, отсюда имеем

$$S=2\pi\int\limits_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt=2\pi\frac{1}{2}[t\sqrt{1+t^2}+\ln(t+\sqrt{1+t^2})]_0^1=\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})].$$

385. 4π. 386. 2π. 387. Решение. Ранее (см. § 5, п. 5, пример 12) с помощью

определенного интеграла была вычислена работа, необходимая для запуска тела массой m с поверхности Земли на высоту h: $A=\int\limits_R^{R+h} F(x)\,dx=\frac{PRh}{R+h}$. Выход тела в межпланетное пространство означает запуск его на бесконечную высоту ($h=\infty$). Вычислим необходимую для этого работу:

$$\lim_{h\to\infty} A=\int\limits_R^{\infty} F(x)\,dx=\lim_{h\to\infty}\frac{PRh}{R+h}=\lim_{h\to\infty}\frac{PR}{1+R/h}=PR=mgR,$$

где m — масса тела; g — ускорение свободного падения у поверхности Земли (трение и притяжение других планет при этом не учитываются). Эта работа совершается за счет изменения кинетической энергии тела. Поэтому кинетическая энергия тела в начальный момент должна быть не меньше этой работы, т. е. начальная скорость тела v должна быть такая, чтобы

$$\frac{mv^2}{2}\geqslant mgR \text{ или } v\geqslant\sqrt{2gR}=\sqrt{2\cdot 10\cdot 6\,400\,000}\text{ м/с}=1{,}4\cdot 8000\text{ м/с}=11{,}2\text{ км/с}.$$

Если начальная скорость тела равна 11,2 км/с, то его траектория движения представляет собой параболу. При начальной скорости, большей 11,2 км/с, траектория будет представлять собой гиперболу, а при начальной скорости, меньшей 11,2 км/с, тело будет двигаться по эллиптической траектории, при этом либо упадет на Землю, либо станет искусственным спутником Земли. **388.** $I\approx 21{,}44$. **389.** По формуле трапеций, $I\approx 0{,}69377$; по формуле Симпсона, $I\approx 0{,}69315$. **390.** $I\approx 0{,}74$ с точностью до 0,01. **391.** $I\approx 0{,}747$ с точностью до 0,001. **392.** Приближенно $1{,}22\pi$.

Глава 7

1. 26. **2.** -38. **3.** 7. **4.** $2a$. **5.** 1. **6.** $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$. **7.** 0. **8.** -12. **9.** 29. **10.** 87. **11.** 0. **12.** -29. **13.** $4a$. **14.** Указание: воспользоваться свойством 3^0. **15.** Указание: воспользоваться свойствами 8^0 и 3^0. **16.** Указание: воспользоваться свойствами 7^0 и 6^0. **17.** Указание: воспользоваться свойствами 7^0, 3^0, 6^0. **18—19.** Указание: воспользоваться свойством 8^0. **20.** -10. **21.** 180. **22.** 87. **23.** 0. **24.** $-2b^2$. **25.** $-2x$. **26.** 144. **27.** 72. **28.** 10. **29.** $-4a^3$. **30.** $(x-y)(y-z)(x-z)$. **31.** 1. **32.** $\sin(\beta-\alpha)$. **33.** amn. **34.** $a(x-z)(y-z)(y-x)$. Указание: вынести a за знак определителя, затем из первой и второй строк вычесть третью и вынести $(x-z)$ и $(y-z)$ за знак определителя. **35.** 1) $x=-3$; 2) $x_1=-10$, $x_2=2$. **36.** 1) $x>7/2$; 2) $-6<x<-4$. **38.** $x=-1$, $y=0$, $z=1$. **39.** $x=2$, $y=-1$, $z=3$. **40.** $x=1$, $y=-1$, $z=2$. **41.** $x=2$, $y=3$, $z=4$. **42.** $x=1/6$, $y=13/30$, $z=1/30$. **43.** $x=1$, $y=2$, $z=3$. **44.** $x=\frac{b+c}{2}$, $y=\frac{a-b}{2}$, $z=\frac{a-c}{2}$. **45.** $x=\frac{a+b}{2}$, $y=\frac{b+c}{2}$, $z=\frac{a+c}{2}$. **46.** Система имеет бесконечно много решений ($\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$), определяемых формулами $x=1$, $y=t$, $z=-t$, где t принимает любые значения. **47.** Система не имеет решений. Решение. Здесь $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$. Первое и второе уравнения противоречивы. Умножая первое уравнение на 2 и вычитая из второго, получим невозможное равенство $0=1$. **48.** Система не имеет решений. Решение. Здесь $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$. Первое и третье уравнения противоречивы. Умножая первое уравнение на 3 и вычитая третье, получим невозможное равенство $0=3$. **49.** Система решений не имеет. **50.** 1) $a\neq-3$; 2) $a=-3$, $b\neq 1/3$; 3) $a=-3$, $b=1/3$.

Глава 8

1. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\ldots$. 2. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots$. 3. $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\ldots$. 4. $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{45}+\frac{1}{189}+\frac{1}{729}+\ldots$. 5. $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{3}{32}+\frac{1}{20}+\frac{5}{192}+\ldots$. 6. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$. 7. $\frac{1}{5}+\frac{3}{17}+\frac{5}{37}+\frac{7}{65}+\frac{9}{101}+\ldots$. 8. $2+\frac{4}{2}+\frac{8}{6}+\frac{16}{24}+\frac{32}{120}+\ldots$. 9. $\frac{1}{1\cdot 2^2}+\frac{3}{2\cdot 2^3}+\frac{15}{3\cdot 2^4}+$ $+\frac{105}{4\cdot 2^5}+\frac{945}{5\cdot 2^6}+\ldots$. 10. $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{48}+\frac{1}{384}+\frac{1}{3840}+\ldots$. 11. $a_n=\frac{1}{n^\alpha}$. 12. $a_n=\frac{1}{\ln n}$ ($n=2$, 3, 4, ...). 13. $a_n=\frac{n^2}{n!}$. 14. $a_n=\frac{1}{2^n+n}$. 15. $a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$. 16. $a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$. 17. $a_n=\frac{1}{2^n+3}$. 18. $a_n=\frac{1}{n!}$. 19. $a_n=\left(\frac{2n-1}{n}\right)^2$. Указание: $1+\frac{3^2}{2^2}+\frac{5^2}{3^2}+\frac{7^2}{4^2}+\ldots$. 20. $a_n=3^n+(-1)^n$. Указание: $(3-1)+(3^2+1)+(3^3-1)+(3^4+1)+(3^5-1)+\ldots$. 21. $\frac{a}{1-q}$. Решение. Данный ряд является геометрической прогрессией со знаменателем q. Частичная сумма S_n этого ряда при $q\neq 1$ имеет вид

$$S_n=1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}-\frac{q^n}{1-q}.$$

При $|q|<1$ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1-q}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}$, т. е. ряд сходится и его сумма $S=\frac{1}{1-q}$. Замечание. При $|q|>1$ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=\infty$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$, ряд расходится. 22. 2. Указание: данный ряд является геометрической прогрессией со знаменателем $q=1/2$. 23. 3/4. Указание: данный ряд является геометрической прогрессией со знаменателем $q=-1/3$. 24. $2+\sqrt[3]{2}+$ $+\sqrt[3]{4}$. 25. 1/2. 26. 11/18. 27. 1/4. 28. 23/90. 29. $\frac{1}{\pi+1}$. 30. 3. 31. Да, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. 32. Нет, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1/2$. 33. Да, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. 34. Нет, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$. 35. Да, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. 36. Нет, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=e$. 37. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится, так как $\frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant\frac{1}{n}$, а гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится (см. пример 2 § 1). 38. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ сходится, так как $\frac{1}{n2^n}\leqslant\frac{1}{2^n}$, а ряд геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ сходится (см. задачу 21). 39. Сходится. Указание: $\frac{2^n}{1+2^{2n}}\leqslant\frac{2^n}{2^{2n}}=\frac{1}{2^n}$. 40. Расходится. Указание: $\frac{1}{n}<\frac{1}{\ln n}$, так как $n>\ln n$. 41. Расходится. Указание: сравнить с гармоническим рядом. 42. Сходится. Указание: сравнить с рядом геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}$. 43. Общий член ряда определяется формулой $a_n=\frac{1}{n!}$. Заменяя в этой формуле n на $n+1$, получаем последующий член $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!}:\frac{1}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1,$$

то на основании признака Даламбера заключаем, что ряд сходится. 44. Так как $a_n=\frac{5^n}{n^5}$; $a_{n+1}=\frac{5^{n+1}}{(n+1)^5}$; $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{5^{n+1}n^5}{5^n(n+1)^5}=\frac{5n^5}{(n+1)^5}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^5}{(n+1)^5}=$ $=5\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^5=5\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^5=5\cdot1=5>1$, то на основании признака Даламбера ряд расходится. 45. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=1$. Согласно признаку Даламбера, сделать заключение о сходимости или расходимости ряда нельзя. Однако, как было показано ранее (см. задачу 37), этот ряд расходится. 46. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}n!}{(n+1)!n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1$. 47. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n}$ сходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}<1$. 48. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$. Сделать заключение о сходимости или расходимости ряда нельзя. Однако это гармонический ряд, который, как было показано ранее, расходится. 49. Общий член ряда определяется $a_n=\frac{1}{n^\alpha}=f(n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$. Записывая в этой формуле x вместо n, получаем функцию $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ $(x\geqslant1)$, которая удовлетворяет условиям теоремы 3. Как известно (см. гл. 6, § 6, п. 1, пример 3), несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ при $\alpha>1$ сходится, а при $\alpha\leqslant1$ расходится. Следовательно, данный ряд сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\leqslant1$. 50. Положим $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. Функция $f(x)$

удовлетворяет условиям теоремы 3. Очевидно, $f(n)=\dfrac{1}{1+n^2}$. Проверим существование несобственного интеграла от этой функции:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{R\to+\infty}\int_1^R\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{R\to+\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_1^r=\lim_{R\to+\infty}(\operatorname{arctg}R-\operatorname{arctg}1)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Так как интеграл сходится, то на основании интегрального признака сходится данный интеграл. **51.** Положим $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2}$. Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 3. Так как

$$\int_1^{+\infty}\frac{x+2}{x^2}dx=\lim_{R\to\infty}\int_1^R\frac{x+2}{x^2}dx=\lim_{R\to+\infty}\int_1^R\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx=\lim_{R\to+\infty}\left(\ln x-\frac{2}{x}\right)\Big|_1^R=\infty,$$

т. е. интеграл расходится, то на основании интегрального признака расходится и данный ряд. **52.** Ряд расходится, так как $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{2x-1}=\infty$. **53.** Ряд сходится, так как $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x\,dx}{(x+1)^3}=\frac{3}{8}$. **54.** Ряд сходится, так как $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(2x+1)^2-1}=\frac{1}{4}\ln 2$. **55.** Расходится. **56.** Сходится. **57.** Расходится. **58.** Расходится. **59.** Расходится. **60.** Расходится. **61.** Сходится. **62.** Сходится. **63.** Расходится. **64.** Расходится. **65.** Сходится (см. задачу 49). **66.** Сходится. **67.** Сходится. Указание: сравнить с рядом $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$. **68.** Сходится. **69.** Расходится. **70.** Сходится. **71.** Расходится. **72.** Сходится. **73.** Сходится. **74.** Расходится. Указание: $\dfrac{n+1}{\sqrt{n^3}}>\dfrac{n}{\sqrt{n^3}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. **75.** Сходится. Указание: $\dfrac{n-2}{n^3}<\dfrac{n}{n^3}=\dfrac{1}{n^2}$. **76.** Расходится. **77.** Сходится. Указание: $n^3+n^2+5>n^3$, $\dfrac{1}{\sqrt{n^3+n^2+5}}<\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}$. **78.** Расходится. **80.** Сходится. Указание: $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\frac{1}{\ln 2}$. **81.** Расходится. **82.** Сходится. **83.** Расходится. **84.** Сходится. Указание: $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{8}$. **85.** Расходится. Указание: $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{2x-1}{x^2}dx=\infty$.

86. Абсолютно сходится. Решение. Составляем ряд из абсолютных величин членов данного ряда $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}+\ldots$, который сходится, как геометрическая прогрессия со знаменателем $q=\dfrac{1}{2}<1$ (см. задачу 21). Согласно теореме 2, сходится и данный ряд, причем абсолютно. 87. Условно сходится. Решение. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, расходится (см. задачу 49), то о сходимости исходного ряда пока ничего сказать нельзя. Это знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям признака Лейбница: 1) $1>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{\sqrt{4}}>\ldots$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$. Следовательно, ряд сходится. А так как ряд из абсолютных величин расходится, то данный ряд сходится условно. 88. Абсолютно сходится. Решение. Составляем ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\frac{|\sin 1|}{1^2}+\frac{|\sin 2|}{2^2}+\frac{|\sin 3|}{3^2}+\ldots+\frac{|\sin n|}{n^2}+\ldots \qquad (*)$$

Так как $|\sin n|\leqslant 1$, то $\frac{|\sin n|}{n^2}\leqslant\frac{1}{n^2}$, т. е. каждый член ряда (*) не больше соответствующего члена сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (см. задачу 49, $\alpha=2>1$). Согласно признаку сравнения, ряд (*) сходится. Следовательно, данный ряд абсолютно сходится. 89. Абсолютно сходится. 90. Абсолютно сходится при $\alpha>1$; условно сходится при $0<\alpha\leqslant 1$. 91. Условно сходится. 92. Условно сходится. 93. Абсолютно сходится. 94. Расходится. Указание: в данном случае, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, т. е. общий член ряда к нулю не стремится (не выполнен необходимый признак сходимости), ряд расходится. 95. Расходится. 96. Условно сходится. 97. Условно сходится. 98. Условно сходится. 99. Расходится. 100. Абсолютно сходится. 101. Абсолютно сходится. 102. Абсолютно сходится. 103. $R=\infty$. Ряд сходится абсолютно на всей числовой прямой. 104. $R=0$. Ряд расходится на всей числовой прямой, кроме точки $x=0$. 105. $R=1$, $(-1,\ 1]$. 106. $R=1$, $[-1,\ 1]$. 107. $R=\frac{1}{3}$, $\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$. 108. $R=3$, $[-3,\ 3)$. 109. $R=\sqrt{3}/2$, $[-\sqrt{3}/2,\ \sqrt{3}/2]$. 110. $R=\sqrt{5}/2$, $(-\sqrt{5}/2,\ \sqrt{5}/2)$. 111. $R=1/10$, $[-1/10,\ 1/10)$. 112. $R=1$, $[-1,\ 1]$. 113. $R=\infty$. 114. $R=\sqrt{5}$, $[-\sqrt{5},\ \sqrt{5}]$. 115. $R=\sqrt{3}$, $[-\sqrt{3},\ \sqrt{3}]$. 116. $R=2$, $[-2,\ 2)$. 117. $R=1$, $(-1,\ 1)$. 118. $R=0$. 119. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n$, $|x|<+\infty$. 120. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^n n!}$, $|x|<+\infty$. Указание: $\frac{1}{\sqrt{e^x}}=e^{-x/2}$. 121. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n x^{n+2}}{n!}$, $|x|<+\infty$. 122. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2(n+1)}}{(2n+1)!}$, $|x|<+\infty$. 123. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$, $|x|<+\infty$. 124. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+3}}{(2n)!}$, $|x|<+\infty$. 125. $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$, $|x|<1$. 126. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n x^{2n}}{n}$, $|x|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$. 127. $\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x|<1$. 128. $2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}$, $|x|<\frac{1}{3}$.

129. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{5^n x^n}{n}$, $-\dfrac{1}{5}<x\leqslant\dfrac{1}{5}$. 130. $\ln 5+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n\cdot\dfrac{x^n}{n}$, $-\dfrac{5}{2}<x\leqslant\dfrac{5}{2}$.

131. $\ln 2-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2^n+1)x^n}{n\cdot 2^n}$, $|x|<1$. **Указание**: разложите трехчлен x^2-3x+2 на множители. 132. $\ln 4-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+4^{-n})\dfrac{x^n}{n}$, $-1\leqslant x<1$. 133. $\ln 9-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+9^{-n})\dfrac{x^n}{n}$, $-1\leqslant x<1$.

134. $\ln 6+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}-\dfrac{1}{3^n}\right]\dfrac{x^n}{n}$, $-2<x\leqslant 2$. 135. $1+\dfrac{x^2}{2}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\times$ $\times\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{(2n)!!}x^{2n}$, $|x|\leqslant 1$. 136. $1+\dfrac{x}{5}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{4\cdot 9\cdot 14\ldots(5n-6)}{5^n n!}x^n$, $|x|\leqslant 1$.

137. $3+\dfrac{x}{27}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{3^{4n-1}n!}x^n$, $|x|\leqslant 27$. 138. $1+$ $+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}$, $|x|<1$. 139. $\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{2^{2n+1}(2n)!!}x^{2n}$, $|x|<2$.

140. $\dfrac{1}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{3^{2n+1}(2n)!!}x^{2n}$, $|x|\leqslant 3$. 141. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}$, $|x|<1$. 142. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n}$, $|x|<1$. 143. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n$, $|x|<\dfrac{1}{2}$. 144. $3\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{4^{n+1}}$, $|x|<4$. 145. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^n x^n}{3^{n+1}}$, $|x|<\dfrac{3}{2}$.

146. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{3^n x^{2n}}{2^{n+1}}$, $|x|<\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. 147. $\dfrac{3}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$, $|x|<1$. **Указание**: $\dfrac{2x+3}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{2+x}$. 148. $\dfrac{7}{12}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3^{n+1}}+\dfrac{1}{4^{n+1}}\right)x^n$, $|x|<3$. **Указание**: $\dfrac{7-2x}{x^2-7x+12}=\dfrac{1}{3-x}+\dfrac{1}{4-x}$. 149. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{9}{2^{n+1}}-\dfrac{14}{3^{n+1}}\right)x^n$, $|x|<2$. 150. $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(5-3^{1-n})x^n$, $|x|<1$. 151. $\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$. 152. $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n}$. **Решение**. Так как функция нечетная, то $a_n=0$ ($n=0, 1, 2, 3, \ldots$). Имеем

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}x\sin nx\,dx=\left|\begin{matrix}u=x, & du=dx;\\ dv=\sin nx\,dx, & v=-\dfrac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi}\cos nx\,dx\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\pi\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^\pi\right]=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\cdot\pi\cdot(-1)^n=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Таким образом, получаем ряд Фурье данной функции

$$x=2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+\ldots\right).$$

Это равенство справедливо для любого $x\in(-\pi,\pi)$. В точках $x=\pm\pi$ сумма ряда не совпадает со значениями функции $f(x)=x$ и равна $\dfrac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}=\dfrac{-\pi+\pi}{2}=0$.

153. $\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos nx}{n^2}$. **Решение.** Так как функция четная, то $b_n=0$. Имеем

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3};\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2\sin nx}{n}\Big|_0^\pi-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,\mathrm{d}x\right]=(-1)^n\frac{4}{n^2}.$$

Значит, ряд Фурье данной функции имеет вид

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\ldots\right).$$

Это равенство справедливо для любого $x\in[-\pi,\pi]$, так как в точках $x=\pm\pi$ сумма ряда в данном случае совпадает со значениями функции $f(x)=x^2$, поскольку $f(\pi)=f(-\pi)=\pi^2=\dfrac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}=\dfrac{\pi^2+\pi^2}{2}$. 154. $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6-\pi^3n^2}{\pi n^3}(-1)^n\sin nx$. 155. $\pi+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n}$. 156. $-\pi+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n}$. 157. $3+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n}$. 158. $2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin nx}{n}$. 159. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$. 160. $\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{-2\cos(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2}+\dfrac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}\right]$. 161. $\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{-2\cos(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2}+\dfrac{(-1)^n\sin nx}{n}\right]$. 162. $\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nx}{4n^2-1}$. 163. $\dfrac{3\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{2\cos(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2}+(-1)^n\dfrac{\sin nx}{n}\right]$. 164. $\dfrac{\pi^2}{16}-\dfrac{1}{2}\times\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+(-1)^n\dfrac{\pi\sin nx}{2n}\right]$. 165. $\dfrac{\pi^2}{16}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{\cos(2n-1)x}{2(2n-1)^2}-\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{\pi}\right)\dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}+\dfrac{\pi\sin 2nx}{8n}\right]$. 166. $\dfrac{\pi^2}{6}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{2(-1)^n}{n^2}\cos nx+\left\{\dfrac{\pi(-1)^{n-1}}{n}+\dfrac{2}{\pi n^3}[(-1)^n-1]\right\}\sin nx\right]$. 167. $\dfrac{2l}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\dfrac{n\pi x}{l}$. 168. $\dfrac{l}{2}-\dfrac{4l}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\times$

$\times\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{l}$. 169. $-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{l}$. 170. $\dfrac{l}{4}-\dfrac{2l}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\times$

$\times\left[\dfrac{1}{\pi(2n-1)^2}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{l}+\dfrac{(-1)^n}{2n}\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right]$.

Глава 9

1. $12+i5$. 2. a^2+b^2. 3. $5-i12$. 4. $-2+i2$. 5. i. 6. $1+i$. 7. $8-i2$. 8. $2+i6$. 9. $\dfrac{8}{13}-i\dfrac{1}{13}$. 10. $\dfrac{14}{29}+i\dfrac{23}{29}$. 11. $\dfrac{4}{5}+i\dfrac{3}{5}$. 12. $\dfrac{1}{4}-i\dfrac{1}{4}$. 13. 5) $x_1=2$, $x_{2,\,3}=-1\pm i\sqrt{3}$. 6) $x_{1,\,2}=-1\pm i$, $x_{3,\,4}=1\pm i$. **Указание**: дополнить левую часть уравнения до полного квадрата: $x^4+4x^2+4-4x^2=0$; $(x^2+2)^2-4x^2=0$; $(x^2+2)^2-(2x)^2=0$, откуда, используя формулу разности квадратов, получим $(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)=0$. 14. $1=1\cdot(\cos 0+i\sin 0)$. 15. $-1=1(\cos\pi+i\sin\pi)$. 16. $-i=1[\cos(-\pi/2)+$ $+i\sin(-\pi/2)]$. 17. $5=5(\cos 0+i\sin 0)$. 18. $2+i2\sqrt{3}=4[\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)]$. 19. $3\sqrt{2}(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4))$. 20. $2(\cos\pi+i\sin\pi)$. 21. $6(\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2))$. 22. $3[\cos(-\pi/2)+i\sin(-\pi/2)]$. 23. $2(\cos(2\pi/3)+i\sin(2\pi/3))$. 24. $2(\cos(\pi/3)+$ $+i\sin(\pi/3))$. 25. $2\sqrt{3}(\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3))$. 26. $2\sqrt{3}(\cos(5\pi/6)+i\sin(5\pi/6))$. 27. $2[\cos(-2\pi/3+i\sin(-2\pi/3)]$. 28. $2(\cos(11\pi/6)+i\sin(11\pi/6))$. 29. $\sqrt{2}(\cos(\pi/4)+$ $+i\sin(\pi/4))$. 30. $\sqrt{2}[\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4)]$. 31. $\sqrt{2}(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4))$. 32. $[\cos(-\pi/2)+i\sin(-\pi/2)]$. 33. $\cos\ (\pi/2)+i\sin(\pi/2)$. 34. $[\cos(-\pi/3)+i\sin(-\pi/3)]$.

35. $-1, \dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **Решение**. Представляя число -1 в тригонометрической форме и применяя формулу (2), находим

$$\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{1\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)}=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)\ (k=0,\ 1,\ 2).$$

Придавая k значения 0, 1, 2, получим три значения $\sqrt[3]{-1}$:

$\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ при $k=0$, -1 при $k=1$, $\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ при $k=2$. 36. $1,\ -\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 37. $-i$, $\dfrac{i\pm\sqrt{3}}{2}$. 38. $\dfrac{\pm 1\pm i}{\sqrt{2}}$. 39. $\cos\dfrac{k\pi}{3}+i\sin\dfrac{k\pi}{3}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$. 40. $\pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

41. $\sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{8}+k\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{8}+k\pi\right)\right]$ $(k=0;\ 1)$. 42. $\sqrt[4]{12}\left[\cos\left(-\dfrac{5}{12}\pi+k\pi\right)+\right.$ $\left.+i\sin\left(-\dfrac{5}{12}\pi+k\pi\right)\right]$ $(k=0;\ 1)$. 43. $\sqrt[6]{2}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $\varphi=45°$, $165°$, $285°$. 44. i. 45. $-i$. 46. $i32$. 47. 64. 48. $4(1-i)$. 49. $i8$. 50. $i8$. 51. $512(1-i\sqrt{3})$. 52. 1. 53. $5+i\dfrac{2}{3}$. 54. $\dfrac{1}{3}+i5$. 55. $\dfrac{1}{2}+i\dfrac{1}{5}$. 56. $2+ie$. 57. $e+ie^{-5}$. **Указание**: положить $-\dfrac{5}{n}=\alpha$. 58. $3+i$. 59. $\sqrt{e}-i\sqrt[3]{e}$. 60. $\dfrac{9}{2}+i$. 61. **Решение**. Возьмем любое $\varepsilon>0$.

Тогда для числа $\varepsilon/2>0$ существует номер N такой, что при $n>N$ выполняется неравенство $|z_n-a|<\varepsilon/2$.

Имеем $$\left|\frac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{n}-a\right|=\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{N}(z_k-a)}{n}+\frac{\sum\limits_{k=N+1}^{n}(z_k-a)}{n}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^{N}|z_k-a|}{n}+\frac{\sum\limits_{k=N+1}^{n}|z_k-a|}{n}<\frac{\sum\limits_{k=1}^{N}|z_k-a|}{n}+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$ при $n>N_1\geqslant N$. Следовательно, согласно определению предела последовательности комплексных чисел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{n}=a$, что и требовалось доказать. **62.** Сходится. **63.** Расходится. **64.** Сходится. **65.** Расходится. **66.** Сходится. **67.** Расходится. **68.** Расходится. **69.** Расходится. **70.** Сходится. **71.** Сходится. **72.** Расходится. **73.** Сходится. **74.** Расходится. **75.** Сходится абсолютно. Решение. Применяя к ряду, составленному из модулей его членов, признак Даламбера, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|1+i|^{n+1}n!}{(n+1)!\,|1+i|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|1+i|}{n+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1^2+1^2}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{n+1}=0<1.$$

76. Сходится абсолютно. **77.** Расходится. **78.** $R=1$. **79.** $R=3$. **80.** $R=0$. **81.** $R=1/3$. **82.** $R=e$. **83.** $R=1/3$. **84.** $R=2$. **85.** $R=1$. **86.** $R=1$ при $|a|<1$, $R=1/|a|$ при $|a|>1$. **87.** $R=\infty$. **88.** $R=1$. **89.** $R=1/3$.

Глава 10

1. 1) (4; 3; 0), (−3; 2; 0), точка C лежит на плоскости Oxy, следовательно, ее проекция на эту плоскость с ней совпадает, (0; 0; 0); 2) (4; 0; 5), (−3; 0; 1), (2; 0; 0), точка D лежит на плоскости Oxz; следовательно, ее проекция на эту плоскость с ней совпадает; 3) (0; 3; 5), (0; 2; 1), (0; −3; 0), точка D лежит на плоскости Oyz, ее проекция на эту плоскость с ней совпадает; 4) (4; 0; 0), (−3; 0; 0), (2; 0; 0), (0; 0; 0); 5) (0; 3; 0), (0; 2; 0), (0; −3; 0), (0; 0; 0); 6) (0; 0; 5), (0; 0; 1), (0; 0; 0), точка D лежит на оси аппликат; следовательно, ее проекция на эту ось с ней совпадает. **2.** 1) (2; 3; −1); (5; −3; −2), (−3; 2; 1), (a; b; $-c$); 2) (2; −3; 1), (5; 3; 2), (−3; −2; −1), (a; $-b$; c); 3) (−2; 3; 1), (−5; −3; 2); 2) (3; 2; −1), ($-a$; b; c); 4) (2; −3; −1), (5; 3; −2), (−3; −2; 1), (a; $-b$; $-c$); 5) (−2; 3; −1), (−5; −3; −2), (3; 2; 1), ($-a$; b; $-c$); 6) (−2; −3; 1), (−5; 3; 2), (3; −2; −1), ($-a$; $-b$; c); 7) (−2; −3; −1), (−5; 3; −2), (3; −2; 1), ($-a$; $-b$; $-c$). **3.** 1) В первом, третьем, пятом и седьмом; 2) во втором, четвертом, шестом и восьмом; 3) в первом, четвертом, шестом и седьмом; 4) во втором, третьем, пятом и восьмом; 5) в первом, втором, седьмом и восьмом; 6) в четвертом, третьем, пятом и шестом. **4.** 1) В первом, третьем, пятом и седьмом; 2) во втором, третьем, пятом и восьмом; 3) в первом, втором, седьмом и восьмом; 4) в первом, третьем, шестом и восьмом; 5) во втором, четвертом, пятом и седьмом. **5.** (1; 1; $\overline{1}$), (1; $\overline{1}$; 1); ($\overline{1}$; 1; 1), ($\overline{1}$; $\overline{1}$; 1).

6. $\overline{AB}=\{-4;3;-1\}$, $\overline{BA}=\{4;-3;1\}$. **7.** $|\overline{AB}|=7$; $\cos\alpha=2/7$, $\cos\beta=-6/7$, $\cos\gamma=3/7$. **8.** $|\bar{a}|=70$; $\cos\alpha=2/7$, $\cos\beta=3/7$, $\cos\gamma=-6/7$. **9.** $Z=\pm3$. **10.** (−1; 2; 3). **11.** N (4; 1; 1). **12.** $\cos\alpha=3/13$, $\cos\beta=4/13$, $\cos\gamma=12/13$. **13.** $X=\sqrt{2}$, $Y=1$, $Z=-1$. **14.** 1) Может; 2) не может; 3) может. **15.** 1) Не может; 2) может; 3) не может. **16.** 60° или 120°. **17.** $\bar{a}=\{1;-1;\sqrt{2}\}$ или $\bar{a}=\{1;-1;-\sqrt{2}\}$. **18.** M_1 ($\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$), M_2 ($-\sqrt{3}$;

$-\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$). **19.** $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=1/\sqrt{3}$. **20.** $M\ (3\sqrt{2};\ 3;\ -3)$. **21.** Конец $B\ (4;\ -2;\ 5)$ или $B_1\ (4;\ -2;\ -7)$; $\cos\alpha=2/7$, $\cos\beta=-3/7$, $\cos\gamma=\pm 6/7$. **22.** $|\bar a+\bar b|=|\bar a-\bar b|=13$. **23.** $|\bar a-\bar b|=22$. **24.** $|\bar a+\bar b|=20$. **25.** $|\bar a+\bar b|=\sqrt{129}\approx 11{,}4$, $|\bar a-\bar b|=7$. **26.** $|\bar a+\bar b|=\sqrt{19}\approx 4{,}4$, $|\bar a-\bar b|=7$. **27.** Указание: воспользоваться правилом параллелограмма. **28.** Указание: воспользоваться последовательным применением правила треугольника при сложении многих векторов. **30.** $\overline{CM}=\frac{2\bar a+\bar b}{3}$. Решение. Имеем $\overline{AB}=\bar b-\bar a$. Следовательно, $\overline{AM}=\frac{\bar b-\bar a}{3}$. Так как $\overline{CM}=\overline{CA}+\overline{AM}$, то $\overline{CM}=\bar a+\frac{\bar b-\bar a}{3}=\frac{2\bar a+\bar b}{3}$. **31.** $\bar r=\frac{\bar r_1+\bar r_2+\bar r_3}{3}$. Решение. Имеем $\overline{BC}=\bar r_3-\bar r_2$; $\overline{BD}=\frac{\bar r_3-\bar r_2}{2}$ (D – середина стороны BC); $\overline{AB}=\bar r_2-\bar r_1$; $\overline{AD}=\overline{BD}+\overline{AB}=\frac{\bar r_3-\bar r_2}{2}+\bar r_2-\bar r_1=\frac{\bar r_2+\bar r_3-2\bar r_1}{2}$; $\overline{AM}=\frac{2}{3}\overline{AD}$, поэтому $\overline{AM}=\frac{\bar r_2+\bar r_3-2\bar r_1}{3}$; $\bar r=\overline{OM}=\bar r_1+\overline{AM}=\frac{\bar r_2+\bar r_3-2\bar r_1}{3}+\bar r_1=\frac{\bar r_1+\bar r_2+\bar r_3}{3}$. **32.** $\overline{AM}=\frac{|\bar b|\ \bar c+|\bar c|\ \bar b}{|\bar b|+|\bar c|}$. **35.** $\bar c=\frac{2}{3}(\bar a-\bar b)$. Указание: в условие $\bar c=m\bar a+n\bar b$ подставить выражения $\bar a$, $\bar b$ и $\bar c$ через $\bar i$ и $\bar j$ и сравнить коэффициенты слева и справа при $\bar i$ и $\bar j$. **36.** $\bar c=2\bar b-2\bar a$. **37.** 1) $\{1;\ -1;\ 6\}$; 2) $\{5;\ -3;\ 6\}$; 3) $\{6;\ -4;\ 12\}$; 4) $\{1;\ -1/2;\ 0\}$; 5) $\{0;\ -2;\ 12\}$; 6) $\{3;\ -5/3;\ 2\}$. **38.** Вектор $\bar b$ длиннее вектора $\bar a$ в три раза; они направлены в противоположные стороны. **39.** $\alpha=4$, $\beta=-1$. **40.** $\bar d=-48\bar i+45\bar j-36\bar k$. **41.** 6. **42.** $\text{пр}_{\bar b}\,\bar a=4\sqrt{2/3}$. **43.** 1) 22; 2) -200; 3) 129; 4) 41. **44.** $m=4$. **45.** 13. **46.** $\varphi=\arccos 2/7$. **47.** $\varphi=\arccos 5/21$. **48.** $m=-6$. **49.** 2. **50.** $(\bar a+\bar b)^2=|\bar a|^2+|\bar b|^2+2\,|\bar a|\,|\bar b|\cos\varphi$ (теорема косинусов); $(\bar a+\bar b)^2+(\bar a-\bar b)^2=2\,|\bar a|^2+2\,|\bar b|^2$ (свойство диагоналей параллелограмма). **51.** -6. **52.** $\varphi=\arccos 1/\sqrt{10}$. **53.** 60°. **54.** $\varphi=\arccos 0{,}8$. **55.** 90°. **56.** 1) $2+\sqrt{3}$; 2) 40. **57.** $|\bar u|=7$. **59.** $A=5\sqrt{3}$. **60.** 17. **61.** 1) -6; 2) 9; 3) 16; 4) 13; 5) -61; 6) 37; 7) 73. **62.** 80 Дж, $\cos\varphi=4\sqrt{2/15}$. **63.** $\bar a\times\bar b$ равно: 1) $-6\bar j$; 2) $-2\bar k$; 3) $6\bar i-4\bar j+6\bar k$. Площадь равна: 1) 6; 2) 2; 3) $2\sqrt{22}$. **64.** 24,5. **65.** $\sqrt{21}$ кв. ед., $h=\sqrt{4{,}2}$. **66.** 1) $2\,(\bar k-\bar i)$; 2) $2\bar a\times\bar c$; 3) $\bar a\times\bar c$; 4) 3. **68.** $50\sqrt{2}$. **69.** 1,5. **70.** $s=7\sqrt{5}$, $BD=\frac{2\sqrt{21}}{3}$. **71.** $|\bar a+\bar b|=|\bar a-\bar b|=\sqrt{5}$, $s=\sqrt{6}$. **72.** $\bar a\times\bar b=\{-7;\ 3;\ 1\}$. **73.** $s=49$. **75.** В случае перпендикулярности векторов $\bar a$ и $\bar b$. **76.** 1) $\{5;\ 1;\ 7\}$; 2) $\{10;\ 2;\ 14\}$; 3) $\{20;\ 4;\ 28\}$. **77.** 1) $\{6;\ -4;\ -6\}$; 2) $\{-12;\ 8;\ 12\}$. **78.** $\{2;\ 11;\ 7\}$. **79.** $\{-4;\ 3;\ 4\}$. **80.** 15; $\cos\alpha=2/3$, $\cos\beta=-2/15$, $\cos\gamma=11/15$. **81.** $\sin\varphi=5\sqrt{17}/21$. **82.** $(\bar a\times\bar b)\times\bar c=\{-7;\ 14;\ -7\}$; $\bar a\times(\bar b\times\bar c)=\{10;\ 13;\ 19\}$. **83.** 4. **84.** 20. **85.** $v=14$, $s=6\sqrt{3}$, $h=7\sqrt{3}/3$. **86.** $v=51$, левая. **87.** $\bar c=5\bar a+\bar b$. **90.** $v=14$, $h=\sqrt{14}$. **91.** $\bar c=\bar a+2\bar b$. **92.** 1) Правая; 2) левая; 3) левая; 4) правая; 5) векторы компланарны; 6) левая. **93.** $\bar a\bar b\bar c=24$. **94.** $\bar a\bar b\bar c=\pm 27$. **95.** В том случае, когда векторы $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ взаимно перпендикулярны. **96.** 1) Компланарны; 2) не компланарны; 3) компланарны. **98.** 3. **99.** 11. **100.** $D_1\ (0;\ 8;\ 0)$; $D_2\ (0;\ -7;\ 0)$. **101.** $x-2y+3z+3=0$. **102.** $5x-3z=0$. **103.** $2x-y-z-6=0$. **104.** $x-y-3z+2=0$. **105.** $x+4y-2z-2=0$. **106.** $\cos\alpha=2/7$, $\cos\beta=3/7$, $\cos\gamma=6/7$. **107.** $\cos\alpha=2/3$, $\cos\beta=-2/3$, $\cos\gamma=1/3$. **108.** $3y+2z=0$. **109.** $2y-3z+7=0$. **110.** $3x-4z=0$. **111.** $x+y-4=0$. **112.** $x+7y+10z=0$. **113.** 45°. **114.** 1) и 3) определяют параллельные плоскости. **115.** 1) и 2) определяют перпендикулярные плоскости.

116. $x-2y-3z-4=0$. 117. $2x+3y+4z-3=0$. 118. $2x-2y+z-2=0$. 119. $2x-y+$ $+z-5=0$. 120. 3. 121. $\sqrt{6}$. 122. $2\sqrt{2}$. **Указание**: взять на первой плоскости любую точку, например (2; 0; 0), и найти ее расстояние от другой плоскости. 123. $5x-3y+2z=0$. 124. $2x-3z-27=0$. 125. $7x-y-5z=0$. 126. $x+2z-4=0$. 127. $4x-4y-2z+15=0$. 128. $2x-2y-z-18=0$, $2x-2y-z+12=0$. 129. $x-$ $-y+2=0$. **Указание**: искомая плоскость перпендикулярна вектору $\bar{a}\times\bar{b}$. 130. 1) $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}$; 2) $\frac{x}{-5}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-1}{13}$; 3) $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{1}$; 4) $\frac{x}{-11}=\frac{y-2}{17}=$ $=\frac{z-1}{13}$. 131. 1) $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$; 2) $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$; 3) $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{0}$; 4) $\frac{x-2}{0}=$ $=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{0}$; 5) $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{1}$. 132. 1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$; 2) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{3}$; 3) $\frac{x}{3}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-3}{-2}$; 4) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+4}{0}$. 133. 1) $x=2t+1$, $y=-3t-1$, $z=4t-3$; 2) $x=2t+1$, $y=4t-1$, $z=-3$; 3) $x=3t+1$, $y=-2t-1$, $z=5t-3$. 134. 1) $x=t+1$, $y=-7t$, $z=-19t-2$; 2) $x=-t+1$, $y=3t+2$, $z=5t-1$. 135. 1) $\bar{a}=\{1;\ 0;\ 0\}$; 2) $\bar{a}=\{1; 0; 1\}$; 3) $\bar{a}=\{0; 1; 1\}$; 4) $\bar{a}=\{0; 0; 1\}$. 138. 1) $\cos\varphi=11/26$; 2) $\cos\varphi=20/21$. **Указание**: направляющий вектор каждой из прямых можно определить как векторное произведение нормальных векторов плоскостей ($\bar{a}=\bar{N}_1\times\bar{N}_2$). 139. $\bar{a}=$ $=\{1;\ 1;\ 2\}$, $\alpha=\beta=\arccos 1/\sqrt{6}$, $\gamma=\arccos 2/\sqrt{6}$. 140. $\varphi=\arccos 1/\sqrt{3}$. 141. 1) $x=$ $=-2+t$, $y=1-2t$, $z=-1+3t$; 2) $x=1+t$, $y=1-t$, $z=2+t$. 143. $\frac{x+4}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{5}$. **Указание**: направляющий вектор $\bar{a}=\bar{N}_1\times\bar{N}_2=\{1;\ 3;\ 5\}$. 144. $3x+2y=0$, $z=4$. **Указание**: искомая прямая проходит еще через точку (0; 0; 4). 145. 0; $3\sqrt{38}$. **Указание**: $M_0\,(-1;\ -2;\ 1)$ — точка на прямой; $\bar{a}=\{3;\ 4;\ 5\}$ — направляющий вектор прямой. Тогда $d=|\overline{M_0M}|\sin\alpha=\frac{|\overline{M_0M}|\ |\bar{a}\times\overline{M_0M}|}{|\bar{a}|\ |\overline{M_0M}|}=\frac{|\bar{a}\times\overline{M_0M}|}{|\bar{a}|}$. 146. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.
147. $y=-3$, $2x-z=0$. 148. $\bar{a}=\{0;\ 1;\ 0\}$. 149. $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+2}{1}$. 150. $d=\sqrt{17}$.
151. 1) $\sin\varphi=1/\sqrt{6}$; 2) $\sin\varphi=5/6$. 153. 1) (2; -3; 6); 2) (5; 5; -2); 3) (6; 4; 5).
156. $\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{4}$. **Решение**. Составим уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной заданной прямой: $2x+3y+z=0$. (Для этой плоскости можно принять $A=l$, $B=m$, $C=n$, $D=0$; использовано условие перпендикулярности прямой и плоскости.)

Найдем точку пересечения этой плоскости и данной прямой. Она ранее была найдена (см. пример), ее координаты: $x=4/7$, $y=-8/7$; $z=16/7$.

Остается составить уравнение прямой, проходящей через две точки: через начало координат и через точку $M\,(4/7;\ -8/7;\ 16/7)$: $\frac{x}{4/7}=\frac{y}{-8/7}=\frac{z}{16/7}$ или $\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{4}$. 157. $\frac{x-2}{-9}=\frac{y-1}{8}=\frac{z}{11}$. 158. $y+z+1=0$. **Указание**: уравнение прямой можно записать в виде $\frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$. 159. $x-2y+z+5=0$. 160. $8x-5y+z-11=$ $=0$. 161. $x+2y-2z-1=0$. 162. $2x+15y-4z+57=0$. 163. (1; 1; 2); 70°. 164. (-1; 2; 2); 30°. 165. 1) $x^2+y^2+z^2=81$; 2) $(x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=4$; 3) $(x-4)^2+$ $+(y+4)^2+(z+2)^2=36$; 4) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=18$; 5) $x^2+y^2+z^2=9$; 6) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$. 166. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9$ и x^2+ $+(y+1)^2+(z+5)^2=9$. 167. $R=5$. 168. $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$. 169. $(x+1)^2+$

$+(y-2)^2+(z-1)^2=49$. **170.** $C(1/2;\ -1;\ 0)$, $R=1/2$. Решение. Приведем уравнение сферы к виду $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, для чего дополним до полных квадратов члены, содержащие x, y и z, т. е. перепишем уравнение в следующем виде:

$$(x^2-x+1/4)-1/4+(y^2+2y+1)-1+z^2+1=0,$$

или

$$(x-1/2)^2+(y+1)^2+z^2=1/4.$$

Следовательно, центр сферы — точка $C(1/2;\ -1;\ 0)$; $R=1/2$ — ее радиус. **171.** 1) $C(3;\ -2;\ 5)$, $R=4$; 2) $C(-1;\ 3;\ 0)$, $R=3$; 3) $C(2;\ 1;\ -1)$, $R=5$; 4) $C(0;\ 0;\ 3)$, $R=3$; 5) $C(0;\ -10;\ 0)$, $R=10$. **172.** Параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz. Направляющей является парабола $x^2=4y$, $z=0$. **173.** Две плоскости: плоскость Oxy и биссектральную плоскость $z=x$, проходящую через ось Oy. Указание: данное уравнение может быть представлено в виде $z(z-x)=0$ и распадается на два: $z=0$ и $z=x$. **174.** Круговой цилиндр. Указание: данное уравнение может быть представлено в виде $(x^2+2x+1)+y^2=1$, или $(x+1)^2+y^2=1$. Теперь ясно, что это уравнение окружности с центром в точке $C(-1;\ 0)$ и радиусом $R=1$. **175.** 1) Круговой цилиндр; 2) эллиптический цилиндр; 3) гиперболический цилиндр; 4) параболический цилиндр; 5) параболический цилиндр; 6) параболический цилиндр; 7) круговой цилиндр; 8) ось аппликат $x=0$, $y=0$; 9) две биссектральные плоскости: $x=z$ и $x=-z$; 10) две плоскости: $y=0$ и $y=x$. **176.** Решение. Исключив из системы уравнений y, получим $x^2+4-2z^2=0$ или $\dfrac{z^2}{2}-\dfrac{x^2}{4}=1$ — гипербола, лежащая в плоскости $y-2=0$. **177.** 1) $\begin{cases}x^2+z^2=9,\\ y=3\end{cases}$ (окружность); 2) $\begin{cases}y^2-x^2=1,\\ z=1\end{cases}$ (гипербола); 3) $\begin{cases}z^2-y^2=0,\\ x=0\end{cases}$ (две прямые). **178.** 3, $\sqrt{3}$; $(2;\ 3;\ 0)$; $(2;\ -3;\ 0)$, $(2;\ 0;\ \sqrt{3})$, $(2;\ 0;\ -\sqrt{3})$. **179.** 4, 3; $(4;\ 0;\ -1)$, $(-4;\ 0;\ -1)$. **180.** 15; $(0;\ -6;\ -3/2)$. **181.** 1) $3{,}84\pi$; 2) $\dfrac{45}{4}\pi$.

Глава 11

39. Вся плоскость, кроме точки $(0;\ 0)$. **40.** Вся плоскость, кроме прямой $y=-x$. **41.** $|y|\leqslant|x|$. **42.** $x\geqslant0$, $y\geqslant0$; $x\leqslant0$, $y\leqslant0$ (I и III квадранты). **43.** $x\geqslant0$. **44.** $x^2+y^2\leqslant a^2$ (круг с центром в начале координат и радиусом $R=a$). **45.** $|x|<+\infty$, $|y|<+\infty$, т. е. вся плоскость. **46.** $x^2+y^2>a^2$. **47.** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant1$. **48.** $|y|\leqslant x^2$, $x\neq0$. **49.** $x+y>0$. **50.** $x^2+y^2-z^2<-1$. **51.** $x^2+y^2-z^2<1$. **52.** $x^2+y^2+z^2<4$. **53.** Гиперболы $y=C/x$. **54.** Кривые $y=C/x^2+1$. **55.** Прямые $x+y=C$. **56.** Параболы $y=Cx^2$. **57.** Лучи $y=Cx$. **58.** Кривые $y=\dfrac{C^2}{x^2}+1$. **59.** 4. **60.** 1. **61.** 3. **62.** 1. **63.** Указание: положить $xy=\alpha$. **64.** 0. **65.** $-1/4$. **66.** 2. **67.** e^2. Решение. Представим функцию в виде $\left[(1+xy)^{1/(xy)}\right]^{2y/(x+y)}$. Так как $z=xy\to0$ при $\begin{pmatrix}x\to0\\ y\to2\end{pmatrix}$, то

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to2}}(1+xy)^{1/(xy)}=\lim\limits_{z\to0}(1+z)^{1/z}=e$. Далее, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to2}}\dfrac{2y}{x+y}=2$. Следовательно, искомый предел равен e^2. **68.** e^3. **69.** 2. Решение. Предел функции находится при $M\to M_0$, где точка M_0 есть начало координат, т. е. при $\rho\to0$ ($\rho=|M_0M|=\sqrt{x^2+y^2}$ — расстояние между точками M_0 и M). Таким образом,

$$\lim_{M\to M_0}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+1}-1}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2(\sqrt{\rho^2+1}+1)}{\rho^2+1-1}=\lim_{\rho\to 0}(\sqrt{\rho^2+1}+1)=2.$$

Заметим, что функция $z=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ не определена в точке M_0 (0; 0), но имеет предел при $M\to M_0$. **70.** e. **71.** 3. **72.** 2. **73.** 1. **74.** 0. **75.** Решение. Функция $f(x;\,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ определена всюду, кроме точек прямой $x+y=0$. Покажем, что она не имеет предела в точке (0; 0). Для этого выберем две сходящиеся к точке (0; 0) последовательности точек M_n $(1/n;\,0)$ и M_n' $(0;\,1/n)$; тогда

$$\lim_{n\to\infty}f(M_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n-0}{1/n+0}=1 \text{ и } \lim_{n\to\infty}f(M_n')=\lim_{n\to\infty}\frac{0-1/n}{0+1/n}=-1.$$

Таким образом, двум различным последовательностям точек, сходящимся к точке (0; 0), соответствуют две последовательности значений функции, которые имеют разные пределы. Следовательно, по определению 1, данная функция не имеет предела в точке (0; 0). **76.** Нет. Решение. Пусть точка M $(x;\,y)$ стремится к точке (0; 0) по прямой $y=kx$, проходящей через начало координат. Тогда получим

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (y=kx)}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

Таким образом, приближаясь к точке (0; 0) по различным прямым, соответствующим разным значениям k, получаем разные предельные значения. Отсюда следует, что предел данной функции в точке (0; 0) не существует. **77.** 2) Указание: рассмотреть случай, когда точка M $(x;\,y)$ стремится к точке (0; 0) по параболе $y=kx^2$. **78.** 1/2. **80.** Разрыв в точке (0; 0). **81.** Все точки прямой $y=x$. **82.** Все точки на прямых $x=0$ и $y=0$. **83.** Все точки окружности $x^2+y^2=4$. **84.** Все точки прямой $y=0$. **85.** Все точки прямых $x=0$ и $y=0$. **86.** Все точки параболы $y^2=x$. **87.** Линия разрыва $y=x$. **88.** Разрыв вдоль осей координат. **89.** Линии разрыва $x=0$ и $y=0$. **90.** Линия разрыва окружности $x^2+y^2=4$. **91.** Все точки прямой $y=0$. **92.** Все точки прямых $x\pm y=\pi n$ (n — целое число). **93.** Разрыв по поверхности эллипсоида $x^2+2y^2+4z^2=8$. **94.** Все точки конической поверхности $x^2+y^2=z^2$. **95.** Все точки сфер $x^2+y^2+z^2=\pi/2+\pi k$, $k=0$, 1, 2, ... **96.** Поверхность разрыва — однополостный гиперболоид $x^2+y^2-z^2=1$. **97.** Поверхность разрыва — двуполостный гиперболоид $x^2+y^2-z^2=-1$.

Глава 12

1. $3x(x+2y)$; $3(x^2-y^2)$. **2.** $-y/x^2$; $1/x$. **3.** $-\dfrac{y^2}{(x-y)^2}$; $\dfrac{x^2}{(x-y)^2}$. **4.** $\dfrac{-y}{x^2+y^2}$; $\dfrac{x}{x^2+y^2}$. **5.** $z_x'=z_y'=\cos(x+y)$. **6.** $2xy$; x^2. **7.** $2xy^3+3x^2y$; $3x^2y^2+x^3$. **8.** $-\dfrac{2y}{(x-y)^2}$; $\dfrac{2x}{(x-y)^2}$. **9.** $\dfrac{y^2}{(x+y)^2}$; $\dfrac{x^2}{(x+y)^2}$. **10.** $2x\sin y$; $x^2\cos y$. **11.** ye^{xy}; xe^{xy}. **12.** $e^{x+2y}y(1+x)$; $e^{x+2y}x(1+2y)$. **13.** $-\dfrac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}$; $\dfrac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}$. **14.** $\dfrac{1}{x+\ln y}$; $\dfrac{1}{y(x+\ln y)}$. **15.** $\sqrt{y}-\dfrac{y}{3x\sqrt[3]{x}}$;

$\frac{x}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. 16. $e^{-xy}(1-xy)$; $-x^2e^{-xy}$. 20. Решение. Рассматриваемая функция имеет частные производные по x и y в точке (0; 0). Это следует из того, что $f(x;0)\equiv 0$ и $f(0;y)\equiv 0$; следовательно, $f_x'(0;0)=0$ и $f_y'(0;0)=0$. Но функция не является непрерывной в этой точке, так как, например, вдоль прямой $y=x$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y)=1$, а $f(0;0)=0$. 21. Решение. В самом деле,

$$\frac{f(0+\Delta x;\ 0)-f(0;\ 0)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{(0+\Delta x)^2+0}-0}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Но функция $\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ не имеет предела при $\Delta x\to 0$. Следовательно, $f_x'(0;0)$ не существует. Аналогично доказывается, что не существует $f_y'(0;0)$. 23. $\frac{dz}{dt}=-(e^t+e^{-t})$.
24. $\frac{dz}{dt}=2xy^3\cdot 1+3x^2y^2\cdot 2t$. 25. $\frac{dz}{dt}=3\left(\sin\frac{x}{y}+\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}\right)-\frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$. 26. $\frac{dz}{dx}=$ $=e^y+xe^y\frac{dy}{dx}$. 27. 0. 28. $\frac{dz}{dt}=2e^{2t}(2e^{2t}+\sin^2 t)+e^{2t}\sin 2t$. 29. $\frac{dz}{dx}=\frac{1-2(x+1)^2}{y^2+(1+x)^2}e^{(1+x)^2}$.
30. $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2x}{y}\left(1-\frac{x}{y}\right)$; $\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{x}{y}\left(4+\frac{x}{y}\right)$. 31. $\frac{\partial z}{\partial u}=2xy^2+2x^2y\cdot\frac{1}{v}$; $\frac{\partial z}{\partial v}=2xy^2+$ $+2x^2y\left(-\frac{u}{v^2}\right)$. 32. 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=m\frac{\partial z}{\partial u}+p\frac{\partial z}{\partial v}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=n\frac{\partial z}{\partial u}+q\frac{\partial z}{\partial v}$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $=y\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial v}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial v}$. 33. $\frac{\partial z}{\partial \rho}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\varphi$; $\frac{\partial z}{\partial \varphi}=\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\sin\varphi+\right.$ $\left.+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\varphi\right)\rho$. 34. $dz=y\,dx+x\,dy$. 35. $dz=\frac{x\,dx-y\,dy}{\sqrt{x^2-y^2}}$. 36. $dz=(y^2dx+2xy\,dy)\times$ $\times\cos xy^2$. 37. $dz=\sec^2\frac{x}{y}\cdot\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}$. 38. $dz=\frac{dx+10y\,dy}{x+5y^2}$. 39. $dz=y^x\left(\ln y\cdot dx+\right.$ $\left.+\frac{x}{y}dy\right)$. 40. $dz=\frac{2x\,dy-y\,dx}{2\sqrt{x}(x+y^2)}$. 41. $dz=(y\,dx+x\,dy)(\cos xy-xy\sin xy)$. 42. $dz=$ $=\frac{y(y\,dx-x\,dy)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. 43. $dz=\frac{4(x\,dy-y\,dx)}{(x-y)^2}\operatorname{cosec}\frac{2(x+y)}{x-y}$. 44. $dz=\frac{\sqrt{3}(x\,dy-y\,dx)}{|2x+y|\sqrt{x(x+2y)}}$.
45. $dz=2e^{\sin^2(x^2+y^2)}\cdot\sin 2(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)$. 46. $\frac{\partial z}{\partial l}=-\frac{11}{2}\sqrt{2}$. Решение. Находим $f_x'=3x^2y-5y^2$; $f_y'=x^3-10xy$ и их значения в точке $M(1;1)$: $f_x'(1;1)=3\cdot 1\cdot 1-5\cdot 1=-2$, $f_y'(1;1)=1-10\cdot 1\cdot 1=-9$. Очевидно, что $\alpha=\beta=\pi/4$. Следовательно, по формуле (2) получаем

$$\frac{\partial z}{dl}=-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-9\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}-\frac{9\sqrt{2}}{2}=-\frac{11}{2}\sqrt{2}.$$

47. $\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{e^x\cos\alpha+e^y\sin\alpha}{e^x+e^y}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 48. $\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_M=2(\cos\alpha+\sin\alpha)$, 1) $1+\sqrt{3}$; 2) $1+\sqrt{3}$;

3) 2. **49.** 16/3. **Решение.** Находим вектор $\overline{MM_1}=\{1;\ 2;\ -2\}$ и соответствующий ему единичный вектор

$$\bar{l}=\frac{\overline{MM_1}}{|\overline{MM_1}|}=\frac{\bar{i}+2\bar{j}-2\bar{k}}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{1}{3}\bar{i}+\frac{2}{3}\bar{j}-\frac{2}{3}\bar{k}=\left\{\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ -\frac{2}{3}\right\}.$$

Таким образом, единичный вектор $\bar{l}$ имеет следующие направляющие косинусы: $\cos\alpha=1/3$, $\cos\beta=2/3$, $\cos\gamma=-2/3$.

Теперь найдем частные производные: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x-2z$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y$; $\dfrac{\partial u}{\partial z}=-2x$, а также значения в точке M (1; 2; −1):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\ z=-1}}=4;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=2}=4;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{x=1}=-2.$$

Подставляя в формулу (2) найденные значения частных производных и направляющих косинусов, получим искомую производную:

$\dfrac{\partial u}{\partial l}=4\cdot\dfrac{1}{3}+4\cdot\dfrac{2}{3}+(-2)\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{16}{3}$. **50.** $\left(\dfrac{\partial u}{\partial l}\right)_M=\cos\alpha+\dfrac{2}{3}\cos\beta-2\cos\gamma$, 1) $\dfrac{2}{\sqrt{14}}$; 2) $\dfrac{2}{5}$. **51.** $\operatorname{grad} z=\{-2;\ -4\}$. **52.** $\operatorname{grad} z=\{3;\ 0\}$. **53.** $\operatorname{grad} z=\{-4;\ 4\}$. **54.** $\operatorname{grad} z=\{0;\ -e\}$. **55.** $\operatorname{grad} u=\{2;\ -2;\ -4\}$; $|\operatorname{grad} u|=2\sqrt{6}$. **56.** $\operatorname{grad} u=\{-6;\ -4;\ 2\}$; $|\operatorname{grad} u|=2\sqrt{14}$. **57.** $\operatorname{grad} u=\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{5}};\ \dfrac{2}{\sqrt{5}};\ 0\right\}$; $|\operatorname{grad} u|=1$. **58.** $\operatorname{grad} u=\{-2;\ 6;\ -3\}$; $|\operatorname{grad} u|=7$. **59.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{2}{1-2y}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{4x}{(1-2y)^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{8x^2}{(1-2y)^3}$. **60.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\sin x\cos y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=-\cos x\sin y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\sin x\cos y$. **61.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{2y^2}{(x-y)^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{2x^2}{(x-y)^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=-\dfrac{2xy}{(x-y)^3}$. **62.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=xe^y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=e^y$. **63.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{4xy+2y^2}{(2x^2+2xy+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{2x^2+2xy}{(2x^2+2xy+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\dfrac{y^2-2x^2}{(2x^2+2xy+y^2)^2}$.
64. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{ye^{xy}(xy-2)-1}{(x+e^{xy})^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{x^3e^{xy}}{(x+e^{xy})^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\dfrac{(x^2y+e^{xy})\,e^{xy}}{(x+e^{xy})^2}$. **65.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y\,(2y-1)\,x^{2y-2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4x^{2y}\ln^2 x$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=2x^{2y-1}(1+2y\ln x)$.
66. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x(\cos y+x\sin y+2\sin y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-e^x(x\sin y+\cos y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=e^x(\cos y+x\cos y-\sin y)$. **75.** $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}=24x$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}=0$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}=0$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}=30$.
76. $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}=-27\cos(3x-2y)$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}=18\cos(3x-2y)$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}=-12\cos(3x-2y)$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}=8\cos(3x-2y)$. **77.** $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}=0$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}=0$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}=\dfrac{2}{y^3}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}=-\dfrac{6x}{y^4}$. **78.** $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}=0$,

$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}=12xy$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=6x^2$. **79.** $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=ye^x$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=xe^y$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}=\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}=$ $=\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}=e^y$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}=\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}=e^x$. **81.** $d^2z=e^{3x-2y}(3dx-2dy)^2$. **82.** $d^2z=-4\sin(x^2+y^2)\cdot(x\,dx+y\,dy)^2+2\cos(x^2+y^2)\cdot[(dx)^2+(dy)^2]$. **83.** $d^2z=\frac{1}{x}[2dx\,dy-\frac{y}{x}(dx)^2]$. **84.** $d^2z=\frac{2}{y}dx\,dy-\frac{x}{y^2}(dy)^2-\frac{(dx)^2}{x}$. **85.** $d^2z=$ $=\frac{(y\,dx-x\,dy)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. **86.** $d^2z=2dx\,dy$. **87.** $d^2z=e^{x+y^2}[(dx)^2+4y\,dx\,dy+(2+4y^2)(dy)^2]$.

88. $d^2z=2\sin 2y\,dx\,dy+2x\cos 2y\,(dy)^2$. **89.** $d^3z=\frac{2y}{x^3}(dx)^3-\frac{3}{x^2}(dx)^2\,dy$. **90.** 0.

91. $d^3z=e^{y-x}[(3+y)(dy)^3-3(2+y)(dy)^2\,dx+3(y+1)\,dy\,(dx)^2-y(dx)^3]$. **92.** $d^3z=-\cos x\cos y\,(dx)^3+3\sin x\sin y\,(dx)^2\,dy-3\cos x\cos y\,dx\,(dy)^2+\sin x\sin y$ $(dy)^3$. **93.** $24(dy)^4$. **94.** $x+2y+2z=9$; $\frac{x-1}{1/2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{1}$. **95.** $3x+2y-3z=6$; $\frac{x-2}{1}=$ $=\frac{y-3}{2/3}=\frac{z-2}{-1}$. **96.** $4x+3y-z=12$; $\frac{x-3}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-12}{-1}$. **97.** $10x-8y-z=9$; $\frac{x-5}{-10}=$ $=\frac{y-4}{8}=\frac{z-9}{1}$. **98.** $x-\pi y+z=0$; $\frac{x-\pi}{1}=\frac{y-1}{-\pi}=\frac{z}{1}$. **99.** $3x+4y+z=26$; $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=$ $=\frac{z-1}{1}$. **100.** $x+2y-2z=1$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{-2}$. **101.** $3x-2y-2z=1$; $\frac{x-3}{-3}=\frac{y-2}{2}=$ $=\frac{z-2}{2}$. **102.** $2x+y+11z=25$; $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{11}$. **103.** $x+2y=4$; $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{0}$.

104. $6x-4y-z=\pm 21$. **105.** $y-x-2z\pm\frac{5}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}=0$. **106.** $x+y=1\pm 2\sqrt{\frac{1}{2}}$. **109.** $z_{\min}=$ $=-7$ при $x=1$, $y=2$. **110.** Экстремума нет. **111.** $z_{\max}=1/27$ при $x=y=1/3$. **112.** $z_{\max}=12$ при $x=y=4$. **113.** $z_{\min}=-2/e$ при $x=-2$, $y=0$. **114.** $z_{\max}=1$ при $x=-1$, $y=1$. **115.** Экстремума нет. **116.** $z_{\min}=0$ при $x=1$, $y=-1/2$. **117.** Экстремума нет. **118.** $z_{\min}=0$ при $x=0$ и $y=0$. **119.** $z_{\max}=3\sqrt{3}/2$ при $x=y=\pi/3$. **120.** $z_{\max}=3\sqrt{3}/2$ при $x=\pi/3$, $y=\pi/6$. **121.** $x=y=\sqrt[3]{2V}$, $z=0{,}5\sqrt[3]{2V}$. **122.** $R=1$, $H=2$. **123.** Равносторонний. **124.** $R=\sqrt{\frac{S\sqrt{3}}{3\pi}}$; $H=\sqrt{\frac{2S\sqrt{3}}{3\pi}}$. **125.** Равнобедренный. **126.** Сомножители должны быть равны. **127.** Круг. **128.** Стороны искомого квадрата перпендикулярны диагоналям данного.

Глава 13

1. 4. **2.** 2. **3.** 126. **4.** 10. **5.** 3. **6.** 20. **7.** $4\frac{5}{6}$. **8.** $2\frac{5}{6}$. **9.** $\frac{2}{3}$. **10.** $\pi/4$. **11.** 1. **12.** 2. **13.** $1/e$. **14.** $\ln\frac{4}{3}$. **15.** 0. **16.** 1/8. **17.** 1/12. **18.** 7/15. **19.** $20\frac{5}{6}$. **20.** $1\frac{3}{5}$. **21.** $\frac{5}{4}\pi$. **22.** 1/2. **23.** 0. **24.** $-\frac{1}{2e}+\frac{1}{2}$. **25.** $3\pi^2a^3$. **26.** $a^4/80$. **27.** $\pi R^4/4$. **28.** $\frac{\pi}{4}(e-1)$. **29.** $2\pi(e^{R^2}-1)$.

30. $\frac{1}{4}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. 31. $\frac{\pi(\pi-2)}{8}$. 32. 2π. 34. **Указание**: положить $u=xy$, $v=x-2y$. 36. $1\frac{37}{128}-\ln 2$. **Указание**: положить $u=x+y$, $v=xy$. 37. $\frac{1}{2}(e-1)$. **Указание**: положить $x=u-uv$, $y=uv$. 38. $5\pi/2$. **Указание**: положить $x+1=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. 39. $\frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}$. **Указание**: положить $u=xy$, $v=y^2/x$. 40. $\frac{2}{5}\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}(\sqrt{q^5}-\sqrt{p^5})$. **Указание**: положить $x=\sqrt{\frac{v}{u}}$, $y=\sqrt{uv}$. 41. $\pi\ln\frac{a+b}{a-b}$. **Указание**: перейти к полярным координатам. 42. 1/6. **Указание**: G — треугольная область интегрирования, ограниченная прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=1$. 43. $\frac{1}{6}$. **Указание**: G — треугольная область интегрирования, ограниченная прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=1$. 44. $\frac{79}{60}a^3$. **Указание**: G — область интегрирования, ограниченная кривыми $y^2=ax$, $x=a$, $y=0$ $(y>0)$. 45. $\frac{4}{9}a^3$. 46. 88/105. 47. $a^3/3$. 48. $\frac{\pi}{12}a^3$. 49. $a^4/24$. 50. $\frac{2}{3}\pi a^3$. 51. $\frac{\pi a^4}{2}$. 52. $\frac{4a^3}{3}$. 53. $\frac{45\pi}{32}$. 54. $\pi/6$. 55. $\frac{4}{3}\pi R^3$. 56. $\frac{abc}{6}$. 57. $9\frac{1}{6}$. 58. $\frac{2}{3}R^3$. 59. 9/2. 60. $4\ln 2-2$. 61. $6-4\ln 2$. 62. $10\frac{2}{3}$. 63. $20\frac{5}{6}$. 64. $\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$. 65. 9/2. 66. $a^2/6$. 67. $\sqrt{2}-1$. 68. $\frac{9}{2}a^2$. 69. $\frac{3a^2}{2}\ln 2$. **Указание**: положить $xy=u$ и $y=vx$. 70. $\frac{868}{15}a^2$. **Указание**: положить $y^2=ux$, $vy^2=x^3$. 71. $\frac{1}{3}(b-a)(d-c)$. **Указание**: положить $x^2=uy$, $y^2=vx$. 72. πab. 73. $\pi(b^2-a^2)$. 74. $\frac{1}{2}a^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 75. $a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. 76. $\frac{3}{4}\pi a^2$. 77. 14. **Указание**: областью G является треугольник, ограниченный осями Ox, Oy и прямой $6x+3y=12$, полученной из уравнения данной плоскости при $z=0$. 78. $\pi R\sqrt{R^2+H^2}$. **Указание**: начало прямоугольной системы координат поместить в вершине конуса, а ось Oz направить по оси конуса. Уравнение конуса примет вид $z=\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}$. 79. $a^2\sqrt{3}$. 80. $\pi a^2\sqrt{3}$. 81. $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1)$. 82. $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\pi$. 83. $\pi a^2\sqrt{2}$. 84. $2R^2(\pi-2)$. 85. $4\pi R^2$. 86. $x_c=y_c=9/20$. **Решение**. Сначала вычислим массу пластинки: $m=\iint\limits_G dx\,dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} dy=\frac{1}{3}$. Далее вычислим статические моменты ее относительно осей координат:

$$M_y=\iint\limits_G x\,dx\,dy=\int\limits_0^1 x\,dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} dy=\frac{3}{20};\quad M_x=\iint\limits_G y\,dx\,dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} y\,dy=\frac{3}{20}.$$

Затем по формулам координат центра масс найдем

$$x_c=\frac{3}{20}:\frac{1}{3}=\frac{9}{20};\ y_c=\frac{3}{20}:\frac{1}{3}=\frac{9}{20}.$$

87. $(\pi/2;\ \pi/8)$. **88.** (3; 4, 8). **89.** $(2a/5;\ a/2)$. **90.** $(0;\ 4a/3\pi)$. **91.** $\left(\frac{3a}{5};\ \frac{3a}{8}\right)$. **92.** $\left(0;\ \frac{4b}{3\pi}\right)$. **93.** $\left(0;\ \frac{4}{3\pi}\ \frac{R^2+Rr+r^2}{R+r}\right)$. **94.** $\left[\frac{1}{4}(4-\pi)(1+\sqrt{2});\ \frac{1}{16}(\pi-2)(2+\sqrt{2})\right]$. **95.** $\left(\frac{5a}{6};\ 0\right)$. **96.** $\frac{17a^4}{96}$. **97.** $\frac{a^4}{30}$. **98.** 4. **99.** 128/15. **100.** $\pi R^4/8$. **101.** $\pi R^4/2$. **102.** $J_x=ah^3/3$, $J_y=a^3h/3$. Указание: направить ось Ox вдоль основания прямоугольника, а ось Oy — вдоль его высоты. **103.** $1/3\,(5\sqrt{5}-1)$. Решение. Имеем $y=\sqrt{2x}$, $y'=\frac{1}{\sqrt{2x}}$, $\mathrm{d}l=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+1/(2x)}\,\mathrm{d}x$. По формуле (2) получаем

$$\int\limits_{AB} y\,\mathrm{d}l=\int\limits_0^2\sqrt{2x}\,\sqrt{1+1/(2x)}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left[(2x+1)^{3/2}\right]_0^2=\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1).$$

104. $\frac{1}{12}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})$. **105.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **106.** $\ln\frac{3\sqrt{5}+7}{2}$. **107.** $\frac{a^2}{3}\left[(1+4\pi^2)^{3/2}-1\right]$. **108.** $(2a)^{3/2}\pi$. **109.** $3+2\sqrt{5}$. **110.** 1) 4; 2) 10/3; 3) 2. **111.** 1) 8; 2) 4. **112.** $\int\limits_{AB} x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x=8$ в обоих случаях. Это потому, что здесь $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$. **113.** 2. **114.** 2. **115.** $-\pi$. **116.** 8. **117.** 4/3. **118.** 2/3. **119.** $\frac{3}{4}e^2+\frac{1}{12}$. **120.** $\frac{1}{4}+\frac{a^2}{2}+\frac{3(1-a^2)}{4\ln a}$. **121.** 221/15. **122.** 1/2. **123.** $-R^2$. **124.** $-\frac{ab^2}{3}$. **125.** $-\frac{3}{16}\pi a^2$. **126.** $a^3\pi(5-2\pi)$. **127.** $2\pi R^2$. Решение. Имеем $P(x;\ y)=x-y$, $Q(x;\ y)=x+y$, $\frac{\partial P}{\partial y}=-1$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=1$. По формуле Грина получаем:

$$\oint\limits_L (x-y)\,\mathrm{d}x+(x+y)\,\mathrm{d}y=\iint\limits_G[1-(-1)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint\limits_G\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2s=2\pi R^2.$$

128. $-2\pi ab$. **129.** $2a^3/3$. **130.** $-46\frac{2}{3}$. **131.** 2/3. **132.** 0. **137.** πab. Решение. Имеем $\mathrm{d}x=-a\sin t\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y=b\cos t\,\mathrm{d}t$. Тогда $s=\frac{1}{2}\oint\limits_L x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(a\cos t\,b\cos t+b\sin t\,a\sin t)\,\mathrm{d}t=\frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi}=\pi ab$. **138.** $a^2/6$. **139.** $\ln 2$. **140.** $3\sqrt{3}+4\pi/3$. **141.** $3a^2\pi/8$. **142.** 3/2. **143.** 0. Решение. По условию $|\vec{F}(x;\ y)|=\sqrt{x^2+y^2}$, координаты силы $\vec{F}(x;\ y)$ таковы: $P=-x$, $Q=-y$ [знак «$-$» объясняется тем, что сила направлена к точке (0; 0)]. Тогда $A=-\oint\limits_L x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y$, где L — эллипс $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. Следовательно,

$$A=\frac{a^2-b^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin 2t\,\mathrm{d}t=\frac{a^2-b^2}{4}(-\cos 2t)\Big|_0^{2\pi}=0.$$

144. $8a^2$. **145.** πa^2. **146.** $\pi ab/4$. **147.** 1) $3a^2/2$; 2) $a^2/2$; 3) $11a^2/6$. **148.** 1) 4/3;

2) 17/12. 149. Так как выполняется условие $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. 151. -2. **Решение.** Область V — прямоугольный параллелепипед, ограниченный плоскостями $x=-1$, $x=+1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=2$. По формуле (2) имеем

$$\iiint\limits_V (x+y-z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{0}^{2}(x+y-z)\,dz=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{0}^{1}\left[xz+yz-\frac{z^2}{2}\right]_0^2 dy=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{0}^{1}(2x+2y-2)\,dy=\int\limits_{-1}^{1}[2xy+y^2-2y]_0^1\,dx=\int\limits_{-1}^{1}(2x-1)\,dx=[x^2-x]_{-1}^{1}=-2.$$

152. $3/2$. 153. $-9/8$. 154. π. 155. $\frac{1}{2}\ln\frac{128}{125}$. 156. 54. 157. 54. 158. $1/24$. 159. $1/6$. 160. 0. 161. $1/8$. 162. $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$. 163. $1/48$. 164. $\pi/6$. 165. $\frac{abc}{3}(a^2+b^2+c^2)$. 166. $\frac{4}{5}\pi R^5$. **Указание:** перейти к сферическим координатам. 167. $\pi/6$. **Указание:** перейти к цилиндрическим координатам. 168. πR^4. 169. 8. **Указание:** перейти к цилиндрическим координатам. 170. $\pi R^4/16$. 171. $16\pi/3$. 172. $3\pi/2$. 173. 24. 174. 12. 175. $\frac{1}{6}abc$. 176. $\pi a^3/2$. 177. 4π. 178. $\frac{\pi}{6}(8\sqrt{2}-7)$. 179. $\pi/6$. 180. $\pi/2$. 181. $3\pi/8$. 182. $x_c=y_c=0$, $z_c=3R/8$. 183. $x_c=y_c=z_c=a/4$. 184. $x_c=y_c=0$, $z_c=1/3$. 185. $x_c=y_c=0$, $z_c=2/3$. 186. $x_c=y_c=16\sqrt{3}/(15\pi)$, $z_c=2$. 187. $x_c=y_c=2/5$, $z_c=7/30$. 188. $x_c=y_c=0$, $z_c=\frac{5(6\sqrt{3}+5)}{83}$. 189. $x_c=5/6$, $y_c=z_c=-1/2$. 190. $x_c=1$, $y_c=5/3$, $z_c=1$. 191. $x_c=1$, $y_c=z_c=0$. 192. $\frac{28}{15}\pi R^5$. 193. $8\pi R^5/15$. 194. $\pi HR^4/2$. 195. $\pi R^2H^2/3+\pi R^4H$. 196. $\frac{1}{10}\pi HR^4$, где H — высота, R — радиус основания конуса. 197. $a^5/4$. 198. $\pi a^5/\sqrt{2}$. 199. $32\sqrt{2}a^5/135$. 200. 4π. 201. $J_x=\frac{a^3bc}{60}$, $J_y=\frac{b^3ac}{60}$, $J_z=\frac{c^3ab}{60}$, $J_0=\frac{abc}{60}(a^2+b^2+c^2)$. 202. 1. **Указание:** уравнение данной поверхности не содержит z, поэтому применить здесь формулу (1) не представляется возможным. Так как поверхность задана уравнением, разрешенным относительно x, необходимо воспользоваться формулой

$$\iint\limits_S f(x;y;z)\,dS=\iint\limits_G f[x(y;z);y;z]\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}\,dy\,dz,$$

где G — проекция поверхности S на плоскость Oyz. 203. $2\sqrt{2}\pi$. **Указание:** поверхность задана уравнением, разрешенным относительно y. Поэтому для вычисления интеграла надо воспользоваться формулой

$$\iint\limits_S f(x;y;z)\,dS=\iint\limits_G f[x;y(x;z);z]\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}\,dx\,dz,$$

где G — проекция поверхности S на плоскость Oxz. 204. $2\sqrt{2}\pi$. 205. $\frac{\pi}{5}(9\sqrt{3}-1)$.

206. 10π. **207.** a^2c^2. **208.** 36π. **209.** 36. **210.** $\frac{4}{3}\pi R^4+$ $+\pi R^3$. **211.** 28/3. Замечание: проекцией G данной поверхности (части параболического цилиндра) на плоскость Oxz является прямоугольник, определяемый неравенствами $-2\leqslant x\leqslant 2$, $0\leqslant z\leqslant$ $\leqslant 1$. **212.** $-\pi$. Замечание: нормаль к поверхности в точке M образует с осью Oy тупой угол, поэтому в формуле (5) следует взять знак минус. Проекцией G данной поверхности на плоскость Oxz является круг $x^2+z^2\leqslant 1$. **213.** $-\pi R^4/2$. Замечание: в формуле (4), которой надлежит пользоваться, следует взять знак минус, так как нормаль, соответствующая выбранной стороне поверхности, составляет с положительным направлением оси Ox тупой угол. Проекцией G является круг $y^2+z^2\leqslant R^2/2$ (получено из уравнений $x=\sqrt{R^2-y^2-z^2}$, $x=\sqrt{y^2+z^2}$). **214.** 16π. **215.** -32π. **216.** 324. **217.** 9π. **218.** 144π. **219.** 88. **220.** 4. Решение. По определению,

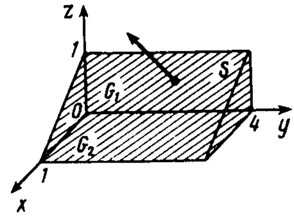


Рис. 68

$$\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy=\iint\limits_{G_1} x\,(y;\,z)\,dy\,dz+\iint\limits_S y\,dz\,dx+\iint\limits_{G_2} z\,(x;\,y)\,dx\,dy.$$

Здесь G_1 и G_2 — проекции поверхности S на плоскости Oyz и Oxy, а $\iint\limits_S y\,dz\,dx=0$, так как плоскость S параллельна оси Oy (рис. 68). По формулам (3) и (4) соответственно получим

$$\iint\limits_S z\,dx\,dy=\iint\limits_{G_2}(1-x)\,dx\,dy=\int_0^4 dy\int_0^1(1-x)\,dx=2,$$

$$\iint\limits_S x\,dy\,dz=\iint\limits_{G_1}(1-z)\,dy\,dz=\int_0^4 dy\int_0^1(1-z)\,dz=2.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy=2+0+2=4.$$

221. $4\pi R^3$. **222.** 1/2. **223.** 3. **224.** $4\pi abc$. **225.** $\pi a^2b^2/2$. **226.** $6\pi a^2$. **227.** $-\pi a^2\sqrt{3}$. **228.** 0. **230.** Каждая из частей формулы равна $\frac{a^4}{3}\left(\frac{4}{5}+\frac{\pi}{16}\right)$. Указание: двойной интеграл можно взять по любой поверхности, проходящей через периметр треугольника ABC, например по плоскости $x+y+z=a$.

Глава 14

10. $y'x-y=0$. **11.** $y'x-y=x^2$. **12.** $y'(x^2-y^2)=2xy$. **13.** $y'=2y$. **14.** $y=xy'+$ $+y'^2$. **15.** $y=2y'x$. **16.** $y'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **17.** $y'=\frac{\sqrt{1-y^2}}{x}\arcsin y$. **18.** $-xyy'+y^2=4$. **19.** $y=xy'\ln\frac{x}{y}$. **20.** $y=Cx$, $y=-2x$. **21.** $xy=C$, $xy=-8$. **22.** $x^2+y^2=C^2$, $x^2+y^2=20$. **23.** $y=Ce^x$, $y=4e^{x+2}$. **24.** $y=Ce^{1/x}$. **25.** $x+y=\ln C\,(x+1)\,(y+1)$. **26.** $y=\frac{C+x}{1-Cx}$. **27.** $y=1+\frac{Cx}{1+x}$. **28.** $1+y^2=C\,(1-x^2)$. **29.** $y=\frac{C}{2\,(1+x^2)}-\frac{1}{2}$.

30. $(1+y^2)(1+x^2)=Cx^2$. 31. $1+e^y=C(1+x^2)$. 32. $y=e^{\sqrt{x-2}}$. 33. $y=2\sin^2 x-\frac{1}{2}$. 34. $y=-x$. 35. $2e^{y^2/2}=\sqrt{e}\,(1+e^x)$. 36. $\sqrt{y}=x\ln x-x+1$. 37. $y=\ln x$. 38. $y=2\sin x-1$. 39. $y=1$. 40. $x^2=2+2y^2$. 41. $y=(x+1)^2$. 42. $\ln\left(\frac{2}{9}x+\frac{1}{9}\right)=2\left(\frac{1}{y}-1\right)$.

43. $y=(x+C)e^x$. 44. $y=Ce^x-x-1$. 45. $y=1+Ce^{-x^3/3}$. 46. $y=3+\frac{C}{x}$. 47. $y=\frac{e^x+C}{x}$.

48. $y=Cx^3-x^2$. 49. $y=(x^2+C)e^{-x^2}$. 50. $y=Cx^2e^{1/x}+x^2$. 51. $y=Ce^{-x}+\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)$. 52. $y=\frac{C-\cos 2x}{2\cos x}$. 53. $y=\ln x+\frac{C}{x}$. 54. $y=\frac{C-e^{-x^2}}{2x^2}$. 55. $y=1+\frac{\ln C\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\cos x}$. 56. $y=2(\sin x-1)+Ce^{-\sin x}$. 57. $y=\frac{x^2}{4}+\frac{C}{x^2}$. 58. $y=Cx^2+e^x$.

59. $y=\frac{1}{x\ln Cx}$. 60. $y^2=\frac{e^{-x^2}}{2x+C}$. 61. $y=\frac{1}{\sqrt{x+1/2+Ce^{2x}}}$. 62. $y=\frac{1}{\sqrt{Ce^{x^2}+x^2+1}}$.

63. $y=\frac{x}{C-\ln x}$. 64. $y=\frac{1}{\ln x+1+Cx}$. 65. $y^2=\frac{1}{1+Ce^{x^2}}$. 66. $y=-\frac{1}{1/3x^5+Cx^2}$.

67. $x^3+3x^2y^2+y^4=C$. 68. $x^3e^y-y=C$. 69. $y+xe^{-y}=C$. 70. $x^2\cos^2 y+y^2=C$. 71. $x^3+2xy-3y=C$. 72. $x^3y-2x^2y^2+3y^4=C$. 73. $\frac{x^2\cos 2y}{2}+x=C$. 74. $x^3y-x^4/2+y^3x-y^4/2=C$. 75. $y\sqrt{1+x^2}+x^2y-y\ln|x|=C$. 76. $\operatorname{tg} xy-\cos x-\cos y=C$. 77. $\frac{e^y-1}{1+x^2}=C$. 84. $y=C_1e^x+C_2e^{4x}$. 85. $y=e^{3x}(C_1+C_2x)$.

86. $y=e^{-4x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$. 87. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$. 88. $y=e^{2x}(C_1+C_2x)$.

89. $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$. 90. $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$. 91. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$.

92. $y=C_1+C_2e^{-4x}$. 93. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}$. 94. $y=(C_1x+C_2)e^{ax}$. 95. $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$. 96. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$. 97. $y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

98. $y=(C_1x+C_2)e^{-x}+\frac{1}{4}e^x$. 99. $y=C_1e^{2x}+(C_2-x)e^x$. 100. $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}-3(x^2+x+1{,}5)$. 101. $y=C_1+C_2e^{-3x}+\frac{3}{2}x^2-x$. 102. $y=C_1e^{x\sqrt{2}}+C_2e^{-x\sqrt{2}}-(x-2)e^{-x}$. 103. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}-2x^3-3x$. 104. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{6}(5\cos 3x-\sin 3x)$. 105. $y=e^{-x/2}\left(C_1\cos\frac{3x}{2}+C_2\sin\frac{3x}{2}\right)-6\cos 2x+8\sin 2x$.

106. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{3}{4}x\cos 2x$. 107. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x$.

108. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{4}x\cos x+\frac{1}{4}x^2\sin x$. 109. $y=e^x(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)+$

$+\frac{e^{-x}}{41}(5\cos x-4\sin x)$. **110.** $y=C_1e^{5x}+C_2e^{-2x}-\frac{2}{13}\sin x-\frac{9}{39}\cos x$. **111.** $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}e^{3x}(x^2-2x+2)$. **112.** $y=e^{x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+x^2e^{x}\cos x$. **113.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+e^{x}(x\cos x+\sin x)$. **114.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x+e^{x}$. **115.** $y=\frac{3}{2}e^{x}x^2+x+3+e^{x}(C_1x+C_2)$. **116.** $y=\frac{1}{3}e^{x}-\frac{1}{2}xe^{2x}+C_1e^{2x}+C_2e^{4x}$. **117.** $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}-\frac{1}{8}(2x^2+x)e^{-3x}+\frac{1}{16}(2x^2+3x)e^{x}$. **118.** $y=\frac{x^2}{4}+C$, $y=\frac{x^2}{4}-1$.

119. $y^2-x^2=C$, $y^2-x^2=16$. **120.** $y=\frac{C}{\sqrt{2x+5}}$, $y=\sqrt{\frac{5}{2x+5}}$. **121.** $y=Ce^{x^2/2}$, $y=10e^{x^2/2}$. **122.** $y^2=6x+C$, $y^2=6x+64$. **123.** $y=\sin(x^2+2x+C)$, $y=\cos(x^2+2x)$. **124.** $y=C(x+\sqrt{1+x^2})$, $y=4(x+\sqrt{1+x^2})$. **125.** $y=2\sin\ln\frac{C}{x}$, $y=-2\sin\ln x$. **126.** $y=\frac{2}{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C}$, $y=\frac{2}{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}$. **127.** $y=\frac{C(2+x)}{2-x}$, $y=\frac{5(2+x)}{2-x}$. **128.** $y=Ce^{2\sqrt{x}}-1$, $y=e^{2\sqrt{x}}-1$. **129.** $y=3\sin(C+\sqrt{1-x^2})$, $y=3\sin(\sqrt{1-x^2}-1)$. **130.** $y=Ce^{x^2+x}$, $y=\sqrt{3}e^{x^2+x}$. **131.** $y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\ln C(2x+1)$. **132.** $y=Ce^{\arcsin x/3}$, $y=e^{\arcsin x/3-\pi/6}$.

133. $y=\frac{Ce^{2x}-1}{2}$, $y=\frac{3e^{2x}-2}{4}$. **134.** $y=4\sin\ln[C(x-2+\sqrt{x^2+4x+8}]$. **135.** $y=5\sin(xe^{x}-e^{x}+C)$, $y=5\sin(xe^{x}-e^{x}+1)$. **136.** $y=\frac{C+4x}{x+3}$. **137.** $y=Ce^{\sin 5x}$, $y=\frac{1}{5}e^{\sin 5x}$. **138.** $\sqrt{2+y}=C-\operatorname{ctg}2x$, $\sqrt{2+y}=2-\operatorname{ctg}2x$. **139.** $y=\frac{C-\cos x}{x}$, $y=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}$. **140.** $y=\frac{2x}{1-Cx^2}$. **141.** $y=\left(2\sin\frac{x}{2}+C\right)\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. **142.** $y=(x+C)e^{x^5}$.

143. $y=2x\sqrt{x}+Cx$. **144.** $y=\frac{1}{x}(\arcsin x+C)$. **145.** $y=\frac{C-e^{-x^2}}{2x^2}$. **146.** $y=\ln x+\frac{C}{x}$. **147.** $y=1+\frac{\ln(C\operatorname{tg}x/2)}{\cos x}$. **148.** $y=\frac{1}{x\ln Cx}$. **149.** $y^2=\frac{e^{x^2}}{2x+C}$. **150.** $y^2=\frac{1}{1+Ce^{x^2}}$.

151. $y(\ln x+1+Cx)=1$. **152.** $y^2(x^2+1/2+Ce^{2x^2})=1$. **153.** $y=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{3}{4}x^2+C_1x+C_2$. **154.** $y=-\frac{1}{4}\sin 2x+C_1x+C_2$. **155.** $y=C_1x^3+C_2$. **156.** $y=C_1\ln x+C_2$. **157.** $y=C_1x^2+C_2$. **158.** $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$. **159.** $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$. **160.** $y=C_1+C_2e^{x}$. **161.** $y=C_1\sin 5x+C_2\cos 5x$. **162.** $y=C_1+C_2e^{-25x}$. **163.** $y=C_1e^{2\sqrt{2}x}+$

$+C_2e^{-2\sqrt{2}x}$. 164. $y=C_1e^{5x}+C_2e^{-5x}$. 165. $y=e^{x}(C_1+C_2x)$. 166. $y=e^{3x}(C_1+C_2x)$. 167. $y=e^{-2x}(C_1\sin\sqrt{6}x+C_2\cos\sqrt{6}x)$. 168. $y=C_1\sin 10x+C_2\cos 10x$. 169. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x/2}$. 170. $y=C_1\sin\sqrt{3}x+C_2\cos\sqrt{3}x$. 171. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-4x}$. 172. $y=e^{-2x}(C_1+C_2x)$. 173. $y=C_1e^{(2+\sqrt{11})x}+C_2e^{(2-\sqrt{11})x}$. 174. $y=C_1+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}e^{x}$. 175. $y=e^{4x}(C_1+x)+C_2$. 176. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}+\frac{1}{4}e^{2x}$. 177. $y=e^{-x/2}\left(C_1\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{6}{13}\sin 2x-\frac{9}{13}\cos 2x$. 178. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}+\frac{5}{42}e^{5x}$. 179. $y=C_1\sin x+C_2\cos x-\frac{1}{24}\sin 5x$. 180. $y=(C_1+x/2)\sin x+C_2\cos x$. 181. $y=(C_1+x/6)\sin 3x+C_2\cos 3x$. 182. $y=\left(C_1-\frac{2}{3}x\right)e^{-2x}+C_2e^{x}+\frac{1}{4}e^{2x}$. 183. $y=C_1+C_2e^{x}-\frac{x^2}{2}-5x$. 184. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-\frac{x^2}{3}+\frac{4}{9}x-\frac{14}{27}$. 185. $y=(C_1+x/2)\sin x+C_2\cos x-\frac{1}{24}\sin 5x$. 186. $y=e^{-4x}(C_1-x/4)+x^2/8-x/16+C_2$. 187. $y=e^{2x}\left(C_1+\frac{x}{4}\right)+e^{-2x}\left(C_2-\frac{3}{4}x\right)$. 188. $y=C_1\sin 3x+\left(C_2-\frac{2}{3}x\right)\cos 3x+\frac{x}{9}$. 189. $y=C_1+C_2e^{3x}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{9}-\frac{20}{27}x$. 190. $y=C_1+C_2e^{-3x}+\frac{x}{3}$. 191. $y=\left(C_1+\frac{x^2}{4}\right)\sin x+(C_2+x/4)\cos x$. 192. $y=C_1+C_2e^{-x}+e^{x}\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)$. 193. $y=C_1+C_2e^{-x}+(1-x/2)\sin x-\frac{x+1}{2}\cos x$. 194. $y=\frac{x^2+3}{2}$. 195. $y=\sqrt{1+x^2}$. 196. $y=3x^3$. 197. $y^2=2x$. 198. Параболоид вращения. Уравнение сечения плоскостью Oxy: $y^2=2xC+C^2$, если источник поместить в начале координат. 199. $\approx 4{,}3\%$. 200. $y=y_0e^{kt}$, где $k>0$ — коэффициент пропорциональности. 201. $y=\frac{gt^2}{2}+v_0t$.

Решение. Примем за ось Oy вертикальную прямую, являющуюся траекторией движущейся точки, при этом положительное направление оси Oy установим к Земле. За начало координат возьмем начальное положение точки ($y=0$ при $t=0$). Так как ускорение равно второй производной от пути по времени ($a=y''$), а при свободном падении ускорение падающего тела равно $g\approx 9{,}81$ м/с^2, то получаем дифференциальное уравнение

$$y''=g,$$

из которого надо найти зависимость пути y от времени t, т. е. надо найти решение этого уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y|_{t=0}=0 \text{ и } y'|_{t=0}=v_0.$$

Полагая $v(t)=y'$, получаем уравнение $v'=g$ или $dv=g\,dt$. Интегрируя, находим

$$v=gt+C_1.$$

Полагая здесь $t=0$ и используя второе начальное условие, имеем уравнение $v_0=g\cdot 0+C_1$. Отсюда $C_1=v_0$ и

$$v=gt+v_0.$$

Заменяя v на $\frac{dy}{dt}$ и интегрируя еще раз, имеем

$$\frac{dy}{dt}=gt+v_0,\ dy=(gt+v_0)\,dt,\ y=\frac{gt^2}{2}+v_0t+C_2.$$

Для определения C_2 заметим, что в силу первого начального условия $y=0$ при $t=0$. Подставляя эти значения в последнее уравнение, получим

$$0=\frac{g\cdot 0}{2}+v_0\cdot 0+C_2,$$

откуда $C_2=0$. Следовательно,

$$y=\frac{gt^2}{2}+v_0t.$$

Таков закон движения точки при свободном падении с начальной скоростью v_0.

202. $y=v_0t-\frac{gt^2}{2}$. **203.** $S=6e^{t/2}$; $v=3e^{t/2}$; $a=\frac{3}{2}e^{t/2}$. **204.** $t=60$ мин. Решение. Обозначим температуру тела в некоторый момент времени t через $T(t)$, тогда скорость изменения температуры по времени равна производной $\frac{dT}{dt}$. Так как скорость охлаждения пропорциональна разности температур (закон Ньютона), то получаем уравнение

$$\frac{dT}{dt}=k(T-20)\ \text{или}\ \frac{dT}{T-20}=k\,dt. \qquad (*)$$

Здесь k — множитель пропорциональности, подлежащий определению. Это уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируя, находим:

$$\ln|T-20|=kt+\ln C_1\ (C_1>0),\ |T-20|=C_1e^{kt},$$
$$T-20=\pm C_1e^{kt}=Ce^{kt},\ T=Ce^{kt}+20.$$

Получили общее решение уравнения (*). Для выделения частного решения используем начальное условие $T|_{t=0}=100$. Подставляя это значение в последнее уравнение, получаем $Ce^{k\cdot 0}+20=100$, откуда находим, что $C=80$. Итак, частное решение имеет вид

$$T=80e^{kt}+20.$$

Для определения неизвестного множителя k используем второе дополнительное условие: при $t=20$ мин $T=60°C$. Тогда $\ln 40=20k+\ln 80$, откуда $k=-\frac{1}{20}\ln 2$. Таким образом, искомое решение уравнения (*)

$$T=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20},$$

которое и выражает закон охлаждения тела. При $T=30°C$ получаем уравнение $10=80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}$ или $\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}=\frac{1}{8}$, откуда находим $\frac{t}{20}=3$ или $t=60$ мин. **205.** $5\log_2 20\approx$ $\approx 21{,}5$ мин. **206.** $T=\frac{s}{\sigma}\sqrt{\frac{2H}{g}}$. **207.** ≈ 35 с. **208.** $x=e^{3t}(C_1+C_2t)$, $y=$

$=e^{3t}(C_1-C_2+C_2t)$. **209.** $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$, $z=-C_1e^{x}-\frac{3C_2}{2}e^{2x}$. **210.** $x=e^{2t}(C_1\cos t+C_2\sin t)$, $y=e^{2t}(C_1\sin t-C_2\cos t)$. **211.** $x=C_1\cos t+C_2\sin t$, $y=\frac{1}{2}[(C_1-C_2)\cos t+(C_1+C_2)\sin t]$. **212.** $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$, $z=C_1e^{x}-C_2e^{-x}$. **213.** $y=2C_1\cos x+2C_2\sin x$, $z=(C_1-C_2)\cos x+(C_1+C_2)\sin x$. **214.** $x=-2C_1e^{-t}+2C_2e^{3t}$, $y=C_1e^{-t}+C_2e^{3t}$. **215.** $x=e^{2t}(C_1\cos t+C_2\sin t)$, $y=e^{2t}(C_1\sin t-C_2\cos t)$. **216.** $x=e^{2t}(C_1\cos t+C_2\sin t)$, $y=e^{2t}(C_1\sin t-C_2\cos t)$. **217.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$, $z=C_1e^{2x}+2C_2e^{3x}$. **218.** $y=C_1+C_2e^{5x}$, $z=C_1-4C_2e^{5x}$. **219.** $y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$, $z=e^{2x}(C_1\sin 3x-C_2\cos 3x)$. **220.** $x=-2C_1e^{t}-8C_2e^{2t}-3C_3e^{3t}$, $y=C_1e^{t}+3C_2e^{2t}+C_3e^{3t}$, $z=2C_1e^{t}+7C_2e^{2t}+3C_3e^{3t}$. **221.** $x=2C_1+C_2e^{t}+C_3e^{2t}$, $y=3C_1-2C_3e^{2t}$, $z=C_1+C_2e^{t}+2C_3e^{2t}$. **222.** $x=(C_2+C_3)\cos t+(-C_2+C_3)\sin t$, $y=C_1e^{t}+C_2\cos t+C_3\sin t$, $z=C_1e^{t}-C_2\sin t+C_3\cos t$; $x=\cos t$, $y=\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)$, $z=\frac{1}{2}(\cos t-\sin t)$. **223.** $y=e^{-2x}(C_1+C_2x)$, $z=e^{-2x}[-C_1+C_2(1-x)]$. **224.** $x=e^{-t}(C_1+C_2t)$, $y=e^{-t}[2C_1+C_2(2t-1)]$. **225.** $x=C_1e^{2t}+C_2e^{t}$, $y=-2C_1e^{-2t}+3C_2e^{t}-3C_3e^{t}$, $z=2C_1e^{-2t}+C_3e^{t}$. **226.** $x=C_1e^{-t}+(C_2t+C_2+C_3)e^{t}$, $y=-2C_1e^{-t}+3C_2e^{t}$, $z=2C_1e^{-t}+(C_2t+C_3)e^{t}$. **227.** $x=C_1+C_3e^{-t}$, $y=3C_1-3C_2-2C_3e^{-t}$, $z=C_2+2C_3e^{-t}$. **228.** $x=C_1+C_2(t+1)+C_3e^{-t}$, $y=3C_2-2C_3e^{-t}$, $z=C_1+C_2t+2C_3e^{-t}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ