И.А.Виноградова С.Н.Олехник
В.А.Садовничий

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Ряды, несобственные интегралы, кратные и поверхностные интегралы

2

Издание второе, переработанное

**Рекомендовано
Министерством образования Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов
университетов и педагогических вузов**

Москва
«Высшая школа» 2000

УДК 517.1
ББК 22.16
В 48

*Федеральная целевая программа
книгоиздания России*

Рецензенты:
чл.-кор. РАН Л. Д. Кудрявцев, чл.-кор. РАН В. А. Ильин

Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А.
В 48 Задачи и упражнения по математическому анализу. В 2 кн. Кн. 2. Ряды, несобственные интегралы, кратные и поверхностные интегралы: Учеб. пособие для университетов, пед. вузов./Под ред. В. А. Садовничего. — 2-е изд., перераб. — М.: Высш. шк., 2000. — 712 с.: ил.

ISBN 5-06-003769-X

Учебное пособие соответствует программе курса математического анализа для студентов механико-математических и математических факультетов университетов, педагогических институтов и технических вузов. Задачник отражает современное развитие математики и должен заменить известное пособие Б. П. Демидовича. В отличие от задачника Б. Д. Демидовича бо́льшая часть задач в данном пособии приводится с решениями, в связи с чем оно может быть полезно при самостоятельном изучении предмета. В книге содержатся следующие разделы: ряды, бесконечные произведения, несобственные интегралы, ряды и преобразования Фурье.

Для студентов университетов, педагогических вузов, вузов с углубленным изучением математики.

УДК 517.1
ББК 22.16

Учебное издание

Виноградова Ирина Андреевна,
Олехник Слав Николаевич, **Садовничий** Виктор Антонович

**ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ**

Книга 2

Редактор *Ж. И. Яковлева.* Художественный редактор *Ю. Э. Иванова.*
Технические редакторы *Л. А. Овчинникова, Н. В. Быкова*

ЛР № 010146 от 25.12.96. Изд. № ФМ-202-б. Подп. в печать 10.01.2000. Формат 60x90$^1/_{16}$
Бум. газетн. Гарнитура «Таймс». Печать офсетная. Объем 44,5 усл. печ. л. + 0,25 усл. печ. л. форз.
44,75 усл. кр.-отт. 47,49 уч.-изд. л. + 0,41 уч.-изд. л. форз.
Тираж 10000 экз. Заказ № 235

ГУП издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.

Отпечатано в ГУП ИПК «Ульяновский Дом печати»,
432601, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14.

ISBN 5-06-003769-X
ISBN 5-06-003687-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

В России исторически сложилось так, что представление об образовании включает в себя органичное единство школы как системы приобретения знаний, фундаментальной науки как показателя уровня подготовки специалистов и гуманитарной культуры как основы духовного богатства человка.

Формулируя задачи образования, академик А. Н. Крылов говорил: «Школа не может дать вполне законченного знания; главная задача школы — дать общее развитие, дать необходимые навыки, одним словом ... главная задача школы — научить учиться, и для того, кто в школе *научится учиться*, практическая деятельность всю его жизнь будет наилучшей школой».

Отметим, что особенность отечественной школы состоит в сочетании четкости рассуждений с глубиной содержания и простотой, доступностью, конкретностью изложения материла, которые всегда предпочитаются формальным конструкциям. Практическое воплощение данных идей подразумевает наличие высококвалифицированных и творчески мыслящих преподавателей. Математическое образование и математическая культура составляют стержень научного знания и значение математики как основы фундаментальных исследований постоянно возрастает. Для решения этих задач требуются учебники, отражающие в определенной полноте современное состояние исследований и мировоззренческие принципы данной области науки.

Предлагаемые к публикации в серии «Высшая математика» избранные учебники по математике реализуют указанный выше подход. Они написаны, в основном, профессорами Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Книга И. А. Виноградовой, С. Н. Олехника, В. А. Садовничего «Задачи и упражнения по математическому анализу» (книга 1 и 2) является учебным пособием по основному курсу математического анализа и отражает опыт преподавания кафедры математического анализа. Она отличается широтой охвата и методической проработкой материала. Бо́льшая часть задач и упражнений отлична от задач, содержащихся в известном задачнике Б. П. Демидовича. Книга доступна широкому кругу читателей.

В данной серии уже изданы учебники Г. И. Архипова, В. А. Садовничего, В. Н. Чубарикова «Лекции по математическому анализу», И. М. Виноградова «Элементы высшей математики (Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление. Основы теории чисел)», И. И. Привалова «Введение в теорию функций комплексного переменного», В. А. Садовничего «Теория операторов», С. Б. Гашкова, В. Н. Чубарикова «Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений», В. И. Нечаева «Элементы криптографии (основы теории защиты информации)». Надеюсь, что данные книги положат начало новой серии базовых учебников по высшей математике для вузов с повышенным уровнем математической подготовки. Кроме практической ценности эта серия призвана подвести некоторые итоги работы российских ученых и педагогов-математиков по созданию базовых учебников по математике на рубеже второго и третьего тысячелетий. Серия не ограничивается указанными книгами. В дальнейшем предполагается продолжить отбор и издание как современных, так и классических учебников, которые отвечают изложенной выше концепции, не потеряли своей новизны и актуальности и пользуются заслуженной популярностью и авторитетом у студентов и педагогов.

Академик Российской академии наук
В. А. Садовничий

Глава I
РЯДЫ И БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

§ 1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Определение 1. Последовательность чисел (вообще говоря, комплексных) $\{a_n\}$, соединенных знаком плюс, $a_1+a_2+ + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ называется рядом (числовым рядом) и обозначается $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Определение 2. Ряд $a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+m}+\cdots$, членами которого являются все члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, начиная с $(k+1)$ -го, взятые в том же порядке, что и в исходном ряде, называется остатком k -го порядка ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и обозначается r_k, т. е.

$$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{k+m}.$$

Определение 3. Сумма $a_1+a_2+\cdots+a_k$ первых k членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется k-ой частичной суммой или частичной суммой порядка k этого ряда и обозначается S_k, т. е.

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n.$$

Таким образом, каждому ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ соответствует последовательность $\{S_k\}$ его частичных сумм. Обратно, каждой последовательности $\{A_k\}$ соответствует ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_1 = A_1$, $a_n = A_n - A_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, частичными суммами которого являются члены данной последовательности. Поэтому каждое свойство последовательностей перефразируется в некоторое свойство рядов заменой характеристики членов последовательности соответствующей характеристикой членов ряда.

Определение 4. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется сходящимся, если сходится (имеет предел) последовательность S_k его частичных сумм.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется расходящимся, если последовательность S_k расходится.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то число $S = \lim\limits_{k\to\infty} S_k$ называется его суммой, при этом пишут: $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Если ряд расходится, то и его остаток любого порядка расходится. Если ряд сходится, то и его остаток k-го порядка r_k при любом k сходится, в этом случае остаток r_k записывается в виде $r_k = S - S_k$ и $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = 0$.

Если члены ряда — комплексные числа $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — действительные последовательности, то сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha_n + i\beta_n)$ эквивалентна одновременной сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n$ и $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n + i\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n$. Таким образом, исследование свойств ряда с комплексными членами сводится к исследованию свойств рядов с действительными членами, поэтому в дальнейшем, в основном, рассматриваются ряды с действительными членами.

Приведем несколько примеров, показывающих взаимоотношение понятий ряда и последовательности, суммы ряда и предела последовательности.

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1},$$

где q — комплексное число и $|q| \neq 1$. Частичная сумма S_k этого ряда есть $1 + q + q^2 + \cdots + q^{k-1} = \dfrac{1 - q^k}{1 - q}$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} |q|^k = 0$ при $|q| < 1$ и $\lim\limits_{k\to\infty} |q|^k = +\infty$ при $|q| > 1$, то $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \dfrac{1}{1-q}$ при $|q| < 1$ и $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \infty$ при $|q| > 1$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ при $|q| < 1$ сходится и его сумма равна $\dfrac{1}{1-q}$, а при $|q| > 1$ расходится.

Записав q в виде $q = |q|e^{i\alpha} = |q|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} |q|^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) =$$
$$= \frac{1}{1 - |q|\cos\alpha - i|q|\sin\alpha} = \frac{1 - |q|\cos\alpha + i|q|\sin\alpha}{1 - 2|q|\cos\alpha + |q|^2}$$

и, следовательно, для действительного числа p, $-1 < p < 1$, имеем равенства:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1}\cos(n-1)\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \cos n\alpha = \frac{1 - p\cos\alpha}{1 - 2p\cos\alpha + p^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p^n \sin n\alpha = \frac{p\sin\alpha}{1 - 2p\cos\alpha + p^2}.$$

Пример 2. Рассмотрим ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$. Поскольку для этого ряда $S_{2m-1} = 1$, $S_{2m} = 0$ при любом натуральном m, то последовательность $\{S_k\}$ не имеет предела при $k \to \infty$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ расходится.

Пример 3. Рассмотрим последовательность $A_k = \dfrac{k}{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Членами соответствующего ряда, частичными суммами которого являются числа A_k, будут числа a_n:

$$a_1 = A_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1\cdot 2},$$
$$a_n = A_n - A_{n-1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant 2.$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится и сумма его равна 1.

Пример 4. Рассмотрим последовательность $\{A_k\}$: $A_k = \frac{1}{k^q}$, $k \in \mathbb{N}$. Соответствующим ей рядом будет ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_1 = A_1 = 1$, $a_n = A_n - A_{n-1} = \frac{1}{n^q} - \frac{1}{(n+1)^q}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Так как последовательность $\{A_k\}$ сходится при $q \geqslant 0$ и расходится при $q < 0$, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n^q} - \frac{1}{(n-1)^q}\right)$ сходится при $q \geqslant 0$ и расходится при $q < 0$.

Пример 5. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. Чтобы решить вопрос о сходимости последовательности $\{S_k\}$: $S_k = 1 + 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{8} + \cdots + k\cdot\frac{1}{2^k}$, преобразуем выражение S_k следующим образом:

$$S_k = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) + \cdots +$$
$$+ \left(\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k}\right) + \frac{1}{2^k} = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) +$$
$$+ \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2^{k-2}}\right) + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2 - \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{k}{2^k}.$$

Отсюда получаем, что $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = 2$, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ сходится и сумма его равна 2.

Пример 6. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Для упрощения частичных сумм

$$S_k = \frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

преобразуем выражение для члена ряда a_n, разложив его на простейшие дроби:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

Отсюда получаем, что

$$S_k = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}\right).$$

Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \frac{1}{4}$, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ сходится и сумма его равна $\frac{1}{4}$.

В приведенных примерах последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм соответствующего ряда или задавалась заранее, или выражалась достаточно просто, так что существование и величина предела S_n устанавливалась непосредственно. Таким образом, в силу определения одновременно устанавливались и сходимость, и величина суммы рассматриваемого ряда. В основном, непосредственный анализ последовательности $\{S_n\}$ не представляется возможным, поэтому основными задачами в теории числовых рядов являются установление сходимости или расходимости данного ряда без вычисления величины его сумм и оценка зависимости остатка ряда r_n от номера n (скорость сходимости ряда).

В силу равенства $S = S_n + r_n$, оценка r_n дает оценку погрешности при замене суммы ряда $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ частичной суммой S_n.

Перефразируя критерий Коши сходимости последовательности, получаем

Критерий Коши сходимости ряда. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда для любого положительного числа ε найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для любых натуральных чисел p и n, $n > N(\varepsilon)$, справедливо неравенство

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon.$$

Приведем формальную запись критерия Коши сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится } \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\mathcal{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N}:$$
$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > \mathcal{N}(\varepsilon), \Longrightarrow \left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon.$$

Заметим, что, как и при анализе последовательностей, критерий Коши редко применяется для доказательства сходимости конкретного ряда из-за технических трудностей. Область применения критерия Коши — как правило, или утверждения, в которых из сходимости одного ряда выводится сходимость другого, или установление расходимости ряда.

Пример 7. Покажем, пользуясь критерием Коши, что всякая бесконечная десятичная дробь $0{,}a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$, $0 \leqslant a_n \leqslant 9$, $n \in \mathbb{N}$, определяет действительное число α, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ сходится.

Возьмем произвольное натуральное число n и оценим сумму $\left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} \frac{a_k}{10^k}\right|$ при любом $p \in \mathbb{N}$. В силу условия $0 \leqslant a_k \leqslant 9$

получаем, что

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} \frac{a_k}{10^k} < \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{10^{k-1}} = \frac{1}{10^{n-1}}\left(1+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^p}\right) =$$

$$= \frac{1}{10^{n-1}} \cdot \frac{1-\frac{1}{10^{p+1}}}{1-\frac{1}{10}} < \frac{2}{10^{n-1}}.$$

Для произвольного положительного числа ε положим $\mathcal{N}_\varepsilon = \max\left\{1, \left[\lg\frac{2}{\varepsilon}\right]\right\} + 2$, тогда из полученной оценки следует, что для любых натуральных p и n, $n > \mathcal{N}_\varepsilon$, имеем:

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} \frac{a_k}{10^k} < \frac{2}{10^{n-1}} < \frac{2}{10^{\mathcal{N}_\varepsilon - 1}} < \varepsilon.$$

Итак, в силу критерия Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$, $0 \leqslant a_n \leqslant 9$, сходится.

Пример 8. Ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ называется гармоническим рядом.

Пользуясь критерием Коши, покажем, что гармонический ряд расходится. Для этого надо указать такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любого номера $\mathcal{N}$ и некоторой пары натуральных чисел p и n, $n > \mathcal{N}$, имеет место неравенство $\sum\limits_{k=n}^{n+p}\frac{1}{k} \geqslant \varepsilon_0$.

Возьмем произвольное натуральное число n. Тогда

$$\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, для $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ и произвольного номера $\mathcal{N}$ найдены натуральные числа $n = \mathcal{N}+1 > \mathcal{N}$ и $p = n$, для которых $\sum\limits_{k=n}^{n+p}\frac{1}{k} > \frac{1}{2} = \varepsilon_0$, что и требовалось установить. Следовательно, гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Из критерия Коши непосредственно следует

Необходимое условие сходимости ряда. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Гармонический ряд является примером расходящегося ряда, для которого $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Следовательно, условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ недостаточно для сходимости ряда.

Пример 9. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n$ расходится, так как последовательность $\{\sin n\}$ не является бесконечно малой (эта последовательность не имеет предела)*)

Пример 10. Как было показано (см. пример 2) ряд A:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$$

расходится. Рассмотрим ряд B:

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots.$$

Если в ряде B опустить (раскрыть) скобки, не производя сложения внутри них, то ряд B превратится в ряд A. В таких случаях принято говорить, что ряд B получен группировкой членов ряда A. Если же сделать сложение внутри скобок ряда B, то получим, что

$$B:\ 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 0.$$

Все частичные суммы S_k этого ряда равны нулю, следовательно, ряд B сходится и его сумма равна нулю.

---

*) Пусть $n_k = [2\pi k]$, $k \in \mathbb{N}$, тогда $2\pi k < n_k + 1 < 2\pi k + 1$ и, следовательно, $\sin(n_k + 2) - \sin n_k = 2\sin 1 \cos(n_k + 1) > 2 \sin 1 \cos 1 = \sin 2$. Таким образом, для $\varepsilon = \sin 2$ и любого числа M найдутся натуральные числа $n_k > M$ и $p = 2$ такие, что $|\sin(n_k + 2) - \sin n_k| > \varepsilon$, следовательно, в силу критерия Коши последовательность $a_n = \sin n$ не имеет предела.

Итак, группировка членов ряда может превратить расходящийся ряд в сходящийся. Это утверждение было доказано на примере ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$, не удовлетворяющего необходимому признаку сходимости — последовательность $\{(-1)^{n-1}\}$ его членов не является бесконечно малой. Покажем, что группировка членов может превратить расходящийся ряд в сходящийся и в том случае, когда последовательность членов ряда является бесконечно малой.

Пример 11. Ряд

$$A: \ 1-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\cdots+\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n \text{ раз}}-$$
$$-\underbrace{\frac{1}{n}-\frac{1}{n}-\cdots-\frac{1}{n}}_{n \text{ раз}}+\frac{1}{n+1}+\cdots$$

расходится. Докажем это, пользуясь критерием Коши.

Действительно, для любого натурального N существуют такие натуральные числа $n > N$ и p, что

$$a_{n+1}=\frac{1}{p},\ a_{n+1}=\frac{1}{p},\ldots,\ a_{n+p}=\frac{1}{p},$$

следовательно, $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_n = 1$. Условие Коши не выполнено, поэтому ряд A расходится.

Рассмотрим ряд

$$B: \ (1-1)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\cdots+$$
$$+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n}-\cdots-\frac{1}{n}\right)+\cdots,$$

полученный группировкой членов ряда A. Поскольку каждый член ряда B равен нулю, то ряд B сходится и его сумма равна нулю.

Проанализируем проблему группировки членов ряда в общем виде. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Сгруппировать члены этого ряда — это значит вместо ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ рассмотреть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, где $A_k = \sum\limits_{n=n_{k-1}}^{n_k - 1} a_n$, $1 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, т. е. A_k для каждого k есть сумма k-ой группы (скобки) членов ряда. Пусть S_n — частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\tilde{S}_k$ — частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Для конечных сумм раскрытие скобок законно, следовательно,

$$\tilde{S}_k = A_1 + A_2 + \cdots + A_k =$$
$$= \sum_{n=1}^{n_1-1} a_n + \sum_{n=n_1}^{n_2-1} a_n + \cdots + \sum_{n=n_{k-1}}^{n_k-1} a_n =$$
$$= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_k-1} = S_{n_k-1},$$

т. е. последовательность $\tilde{S}_k$ есть подпоследовательность последовательности S_n, именно, $\tilde{S}_k = S_{n_k-1}$.

Из теории пределов последовательностей известны следующие утверждения:

1. Если сходится последовательность S_n, то последовательность S_{n_k-1} сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k-1}$.

Для рядов это означает, что если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, то сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ и суммы обоих рядов равны.

2. Сходимость последовательности S_{n_k-1}, вообще говоря, не влечет сходимости последовательности S_n.

Для рядов это означает, что если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ может и расходится, это и показывают примеры 10 и 11.

Утверждение. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Пусть далее

$$A_k = \sum_{n=n_{k-1}}^{n_k-1} a_n, \quad 1 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ сходится. Тогда для того чтобы сходился ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{k\to\infty}\left(\max\left\{\left|\sum_{m=n_{k-1}}^{n} a_m\right|,\ n_{k-1} \leqslant n \leqslant n_k - 1\right\}\right) = 0.$$

Докажем это утверждение, используя критерий Коши. Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ в силу условия найдутся натуральные числа K и Q, такие, что

$$\max\left\{\left|\sum_{m=n_{k-1}}^{n} a_m\right|,\ n_{k-1} \leqslant n \leqslant n_k - 1\right\} < \frac{\varepsilon}{4}$$

для всех натуральных $k > K$ и

$$\left|\sum_{k=q}^{q+p} A_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех натуральных p и $q > Q$.

Для натуральных $n > 1$ и p положим

$$k_0 = \max\{k:\ n > n_k\} \quad \text{и} \quad k_1 = \max\{k:\ n + p \geqslant n_k\},$$

тогда $k_0 \leqslant k_1$. Используя эти обозначения, запишем

$$\sum_{m=n}^{n+p} a_m = \sum_{m=n_{k_0}}^{n_{k_1}-1} a_m - \sum_{m=n_{k_0}}^{n-1} a_m + \sum_{m=n_{k_1}}^{p+n} a_m =$$
$$= \sum_{k=k_0+1}^{k_1} A_k - \sum_{m=n_{k_0}}^{n-1} a_m + \sum_{m=n_k}^{p+n} a_m.$$

Так как из определения k_0 и k_1 следует, что $n_{k_0} < n \leqslant n_{k_0+1}$ и $n_{k_1} \leqslant n + p < n_{k_1+1}$, то

$$\left|\sum_{m=1}^{n+p} a_m\right| \leqslant \left|\sum_{k=k_0+1}^{k_1} A_k\right| +$$
$$+ \max_{n_{k_0} \leqslant n \leqslant n_{k_0+1}} \left|\sum_{m=n_{k_0}}^{n} a_m\right| + \max_{n_{k_1} \leqslant n \leqslant n_{k_1+1}} \left|\sum_{m=n_{k_1}}^{n} a_m\right|.$$

Положим $N = \max(n_K, n_Q)$. Тогда, если $n > N$, то $k_0 + 1 > Q$ и $k_1 + 1 \geqslant k_0 + 1 > K$, следовательно, в силу определения K и Q получаем, что

$$\left|\sum_{m=n}^{n+p} a_m\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Итак, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ удовлетворяет условиям критерия Коши и, следовательно, сходится.

С другой стороны, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то условие $\lim\limits_{k\to\infty} \max\limits_{n_{k-1} \leqslant n \leqslant n_k - 1} \left|\sum\limits_{m=n_{k-1}}^{n} a_m\right| = 0$ следует из соотношения $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = 0$, так как $\left|\sum\limits_{m=n_{k-1}}^{n} a_m\right| = |r_{n_{k-1}} - r_n|$.

Следствие 1. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $A_k = \sum\limits_{n=n_{k-1}}^{n_k-1} a_n$, $1 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и $\sup\limits_{k}(n_k - n_{k-1}) < < +\infty$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Следствие 2. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $A_k = \sum\limits_{n=n_{k-1}}^{n_k-1} a_n$, $1 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$. Если для $n_{k-1} \leqslant n \leqslant n_k - 1$ все числа a_n имеют одинаковый знак (нуль будем считать с любым знаком), то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Следствие 3. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Обозначим через $\{b_n\}$ последовательность, содержащую все те и только те члены последовательности $\{a_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, которые отличны от нуля, перенумерованные с сохранением порядка. Тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Если два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то для любых постоянных α и β ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ сходится и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Таким образом, множество сходящихся рядов представляет собой линейное пространство.

Отсюда получаем следующее утверждение.

Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ представлены в виде суммы: $a_n = c_n^{(1)} + c_n^{(2)} + \cdots + c_n^{(k)}$.

Тогда

1. Если все ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, сходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2. Если среди рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, только один расходится, а все остальные сходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Если среди рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, расходится более, чем один, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ может как сходиться, так и расходиться — такое представление не информативно в вопросе о сходимости ряда.

Приведем соответствующие примеры.

Пример 12. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{10^n}$. Так как $a_n = \frac{1}{5^n} + \frac{1}{2^n}$ и каждый из рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится (см. пример 1), то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{10^n}$ сходится.

Пример 13. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2}{n \cdot 2^n}$. Так как $a_n = \frac{1}{n} + \frac{n}{2^n}$; ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ сходится (см. пример 5), а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится (см. пример 8), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2}{n \cdot 2^n}$ расходится.

Пример 14. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$. Так как $a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$, то

$$S_k = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right),$$

следовательно, $\lim\limits_{k \to \infty} S_k = \frac{3}{4}$, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ сходится и его сумма равна $\frac{3}{4}$. В то же время, каждый из рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ расходится — расходимость первого установлена в примере 8, расходимость второго следует из равенства $\tilde{S}_k = S_{k+2} - 1 - \frac{1}{2}$, где S_k — частичные суммы гармонического ряда, а $\tilde{S}_k$ — частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$.

Пример 15. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{n}$. Так как $\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{2}{n}$ для $n \geqslant 4$, то $\frac{\sqrt{n}-1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{n}$ для $n \geqslant 4$. Пользуясь этими неравенствами, получаем, что для любых натуральных $n \geqslant 4$ и p

$$\sum_{k=n}^{n+p} \frac{\sqrt{k}-1}{k} \geqslant \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k}, \quad \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant 2\sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k}.$$

Пользуясь критерием Коши и установленной в примере 8 расходимостью гармонического ряда, отсюда получаем, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{n}$ расходятся. Итак, расходятся все три ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\right)$.

Свойство ряда быть сходящимся или расходящимся не зависит от изменения любого конечного числа его членов (это следует, в частности, из критерия Коши). Поэтому всюду в формулировках условий сходимости или расходимости ряда можно требование "для всех членов ряда" заменить на "для всех членов ряда, начиная с некоторого номера". В дальнейшем такая замена будет подразумеваться без специальной оговорки.

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то он сходится. Если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится неабсолютно.

Пример 16. Ряд

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$$

сходится неабсолютно.

Действительно, частичные суммы S_{2n} этого ряда с четными номерами равны нулю, частичные суммы S_{2n-1} с нечетными номерами равны $\frac{1}{n}$. Последовательность S_n сходится к нулю, следовательно, и рассматриваемый ряд сходится к нулю.

Покажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ расходится, используя критерий Коши. Для произвольного нечетного числа $n = 2q - 1$ возьмем $p = n + 2 = 2q + 1$, тогда получим, что

$$\sum_{k=n}^{n+p} |a_k| = \sum_{k=2q-1}^{4q} \frac{1}{\left[\frac{k+1}{2}\right]} =$$
$$= \frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{q+1} + \cdots + \frac{1}{2q} + \frac{1}{2q} > \frac{2q}{2q} = 1.$$

Итак, для $\varepsilon_0 = 1$ и любого номера N нашлись такие натуральные числа $n = 2N + 1 > N$ и $p = n + 2$, что $\sum\limits_{k=n}^{n+p} |a_k| > \varepsilon_0$, т. е. критерий Коши не выполнен и, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

Определение. Ряд называется безусловно сходящимся, если для любой перестановки $\varphi(n)$ натурального ряда (φ есть биекция $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ сходится.

Теорема. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится безусловно тогда и только тогда, когда он сходится абсолютно.

Теорема. При любой перестановке абсолютно сходящегося ряда сумма полученного ряда равна сумме исходного.

Часто используется краткая формулировка этой теоремы: сумма абсолютно сходящегося ряда не зависит от порядка его членов. Такая формулировка удобна, если речь идет о сумме некоторого счетного множества чисел, нумерация которого еще не установлена или устанавливается произвольно.

В силу вышесказанного, для числовых рядов принято вместо термина "неабсолютная сходимость" использовать термин "условная сходимость".

Теорема Римана. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с действительными членами сходится условно, то для любой точки A расширенной числовой прямой найдется такая перестановка натурального ряда $\varphi(n)$, что для последовательности $\tilde{S}_n$ частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{S}_n = A$.

Пример 17. Рассмотрим ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ имеет предел. Обозначим этот предел через $C_э$, тогда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + C_э + \varepsilon_n,$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Для частичной суммы S_{2k} четного порядка ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ отсюда получаем равенство:

$$\begin{aligned}
S_{2k} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2k}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right) = \\
&= \ln 2k + C_э + \varepsilon_{2k} - (\ln k + C_э + \varepsilon_k) = \ln 2 + \varepsilon_{2k} - \varepsilon_k
\end{aligned}$$

и, следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k} = \ln 2$. Так как $S_{2k+1} = S_{2k} + \dfrac{1}{2k+1}$, то

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} S_{2k} = \ln 2,$$

откуда получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ln 2$, т. е.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

Сделаем перестановку членов этого ряда таким образом, чтобы за двумя положительными членами шел один отрицательный, тогда получим ряд

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

где $a_{3k-2} = \dfrac{1}{4k-3}$, $a_{3k-1} = \dfrac{1}{4k-1}$, $a_{3k} = -\dfrac{1}{2k}$, $k \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\tilde{S}_n$ частичные суммы этого ряда, тогда для любого натурального k справедливы соотношения

$$\tilde{S}_{3k-1} = \tilde{S}_{3k} + \frac{1}{2k}, \quad \tilde{S}_{3k-2} = \tilde{S}_{3k} + \frac{1}{2k} - \frac{1}{4k-1}.$$

Следовательно, полученный ряд будет сходиться, если сходится последовательность $\{\tilde{S}_{3k}\}$ и при этом справедливо равенство

$$\tilde{S} = \lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n = \lim_{k\to\infty} \tilde{S}_{3k}.$$

Так как

$$\tilde{S}_{3k} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{4k} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}\right) =$$

$$= \ln 4k + C_э + \varepsilon_{4k} - \frac{1}{2}(\ln 2k + C_э + \varepsilon_{2k}) - \frac{1}{2}(\ln k + C_э + \varepsilon_k) =$$

$$= \frac{3}{2}\ln 2 + \varepsilon_{4k} - \frac{1}{2}\varepsilon_{2k} - \frac{1}{2}\varepsilon_k,$$

то $\lim\limits_{k\to\infty} \tilde{S}_{3k} = \dfrac{3}{2}\ln 2$. Итак, сумма $\tilde{S}$ переставленного ряда равна $\dfrac{3}{2}\ln 2$ и не совпадает с суммой $S = \ln 2$ исходного ряда. Это, как показывает сформулированная выше теорема Римана, есть следствие неабсолютной (условной) сходимости данного ряда. Действительно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ есть гармонический ряд, расходимость которого уже была установлена в примере 8.

Как указывалось выше, сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n)$ с комплексными членами эквивалентна одновременной сходимости двух рядов с действительными членами: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$. Из неравенств

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=n}^{n+p}|a_k| + \sum_{k=n}^{n+p}|b_k|\right) \leqslant \sum_{k=n}^{n+p}|a_k + ib_k| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p}|a_k| + \sum_{k=n}^{n+p}|b_k|$$

в силу критерия Коши следует, что и абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n)$ эквивалентна одновременной абсолютной сходимости двух рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ с действительными членами.

Приведем несколько примеров анализа абсолютной и неабсолютной сходимости рядов с комплексными членами.

Пример 18. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(1+i)^{2n}}$ сходится абсолютно, так как $\left|\dfrac{n}{(1+i)^{2n}}\right| = \dfrac{n}{2^n}$, а сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$ установлена в примере 5. Так как

$$\frac{n}{(1+i)^{2n}} = \frac{n}{2^{2n}}(1-i)^{2n} =$$
$$= \frac{n}{2^{2n}}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_{2n}^{2k} + i\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_{2n}^{2k-1}\right),$$

то из абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+i)^{2n}}$ следует сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, где

$$a_n = \frac{n}{2^{2n}} \left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_{2n}^{2k} \right| \quad \text{и} \quad b_n = \frac{n}{2^{2n}} \left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_{2n}^{2k-1} \right|.$$

Пример 19. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(1+i+ni)}{n(n+1)}.$$

Сходимость (абсолютная сходимость) этого ряда эквивалентна одновременной сходимости (абсолютной сходимости) рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Так как $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\right| = \frac{1}{n(n+1)}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится (см. пример 3), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$ сходится абсолютно. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, как показано в примере 17, сходится условно (неабсолютно). Итак, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(1+i+ni)}{n(n+1)}$$

сходится условно.

Пример 20. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$. Так как

$$\frac{(i)^n}{n} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n = 4k, \\ \frac{i}{n}, & n = 4k+1, \\ -\frac{1}{n}, & n = 4k+2, \\ -\frac{i}{n}, & n = 4k+3, \ k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

то сходимость (абсолютная сходимость) данного ряда эквивалентна одновременной сходимости (абсолютной сходимости) рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ где } a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n = 4k, \\ -\dfrac{1}{n}, & n = 4k+2, \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \text{ где } b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n = 4k+1, \\ -\dfrac{1}{n}, & n = 4k+3, \\ 0, & n = 2k. \end{cases}$$

Следствие 3 утверждения о группировке членов ряда (см. стр. 17) говорит, что сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{2k}$, а сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{2k-1}$. Сходимость рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{2k}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{2k-1}$ устанавливается так же, как и сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ в примере 17. Итак, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{i^n}{n}$ сходится. Ряд же $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{i^n}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится — это гармонический ряд (см. пример 8). Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{i^n}{n}$ сходится условно.

Пример 21. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^n$. Так как $\left|\dfrac{1+i}{1-i}\right|^n = \dfrac{2^{n/2}}{2^{n/2}} = 1$, то данный ряд расходится — для не-го не выполнено необходимое условие сходимости. Так как

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_{2n}^{2k} - i\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_{2n}^{2k-1}\right),$$

то, следовательно, расходится, по крайней мере, один из рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{1}{2^n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k C_{2n}^{2k}\right)$, или $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, где $b_n = \frac{1}{2^n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k C_{2n}^{2k-1}\right)$.

Поскольку из абсолютной сходимости ряда следует его сходимость, начнем с изучения исследования сходимости рядов, члены которых действительные неотрицательные числа. Заметим еще, что для ряда, члены которого, начиная с некоторого номера, не меняют знака, сходимость эквивалентна абсолютной сходимости.

Все дальнейшие утверждения относятся только к действительным последовательностям $\{a_n\}$, поскольку в этих утверждениях явно или неявно используются условия, содержащие неравенства.

Ряды с неотрицательными членами

Если все члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ неотрицательны, то последовательность $\{S_k\}$ его частичных сумм не убывает. Для неубывающей последовательности ее сходимость и ограниченность эквивалентны. Поэтому для рядов с неотрицательными членами — и только для них! — вместо слов "ряд сходится" и "ряд расходится" употребляют соответственно символы

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty.$$

Теорема сравнения. Пусть даны два ряда A : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geqslant 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, и B : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n \geqslant 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Если $a_n \geqslant b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то из сходимости ряда A следует сходимость ряда B, из расходимости ряда B следует расходимость ряда A.

Следствие 1. Если $a_n \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ и $a_n = O(b_n)$ при $n \to \infty$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Следствие 2. Если $a_n \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ и $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Внимание! Если в ходе анализа ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geqslant 0$, получена оценка $a_n \leqslant b_n$, или $a_n = O(b_n)$, $n \to \infty$, или $a_n = o(b_n)$, $n \to \infty$, где ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то такие оценки не дают возможности сказать, сходится или расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — они не информативны в вопросе о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — неотрицательные бесконечно малые последовательности. Тогда из теоремы сравнения получаем следующие утверждения.

Если a_n и b_n бесконечно малые одного порядка, т. е. $a_n = O(b_n)$ и $b_n = O(a_n)$ при $n \to \infty$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Если последовательность $\{a_n\}$ стремится к нулю быстрее последовательности $\{b_n\}$, т. е. $a_n = o(b_n)$ при $n \to \infty$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Таким образом, сходимость ряда с неотрицательными членами связана со скоростью стремления к нулю его членов.

К сожалению, не существует такой "граничной" последовательности $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n \geqslant 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, для которой все ряды, члены которых стремятся к нулю быстрее, чем α_n, сходятся, а все ряды, члены которых стремятся к нулю медленнее, чем α_n, расходятся (см. задачи 9, 11, 13 и вывод из них, стр. 314)

Сама формулировка теоремы сравнения показывает, что для ее применения необходимо наличие достаточно широкого запаса "эталонных" рядов, сходимость или расходимость которых известна.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ сходится при $0 \leqslant q < 1$ и расходится при $q \geqslant 1$. Используя такой ряд, из теоремы сравнения можно вывести:

Признак Даламбера. Пусть дан ряд с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, тогда

если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, то ряд сходится,

если $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, в частности, если $\varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$, то ряд расходится.

На практике, в основном, применяется более слабое условие: если все члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то ряд сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$.

Признак Коши (радикальный). Пусть дан ряд с неотрицательными членами: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geqslant 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда

если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, то ряд сходится,

если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, то ряд расходится.

На практике, в основном, применяется более слабое условие: если все члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то ряд сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$.

В теории последовательностей доказывается, что для последовательности $\{a_n\}$ с положительными членами из существования предела $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ следует существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ и равенство этих пределов. Следовательно, если для ряда с положительными членами выполняется одно из условий признака Даламбера, то обязательно выполняется и соответствующее условие признака Коши. Но на практике отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ часто аналитически проще, чем радикал с переменным показателем $\sqrt[n]{a_n}$, поэтому проще применить признак Даламбера. В то же время область применения признака Коши шире, чем область применения признака Даламбера. В частности, для выполнения каждого из условий признака Даламбера необходима монотонность последовательности $\{a_n\}$, а условия признака Коши не требуют сравнения друг с другом соседних членов последовательности $\{a_n\}$.

Приведем характерные примеры исследования рядов признаками Даламбера и Коши.

Пример 22. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2}{3^n + n}$. Для членов этого ряда имеем:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} + (n+1)^2}{3^{n+1} + (n+1)} \cdot \frac{3^n + n}{2^n + n^2} = \frac{\left(2 + \frac{(n+1)^2}{2^n}\right)\left(1 + \frac{n}{3^n}\right)}{\left(3 + \frac{n+1}{3^n}\right)\left(1 + \frac{n^2}{2^n}\right)},$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{3}\sqrt[n]{\frac{1 + \frac{n^2}{2^n}}{1 + \frac{n}{3^n}}},$$

откуда легко получаются оба равенства: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{3}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{3}$.

Итак, данный ряд достаточно просто анализируется как признаком Даламбера, так и признаком Коши.

Пример 23. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. Для этого ряда исследование последовательности $\sqrt[n]{a_n} = \frac{(n!)^{\frac{2}{n}}}{[(2n)!]^{\frac{1}{n}}}$ существенно сложнее, чем последовательности $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{(2+2n)(2n+1)}$.

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4} < 1,$$

то в силу признака Даламбера данный ряд сходится.

Замечание. В теории последовательностей доказывается неравенство $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^n$, откуда следует, что

$$\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}} < \frac{e^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{n}{2}}{\frac{2n}{e}} = \frac{e^{1+\frac{1}{n}}}{4}$$

и, следовательно, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} < \left(\frac{e}{4}\right)^2 < 1$. Таким образом, данный ряд можно было исследовать и с помощью признака Коши, но при этом пришлось бы использовать более сложные соотношения.

Пример 24. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$. Поскольку члены ряда аналитически записаны в виде степени с переменным показателем, то следует ожидать, что исследование последовательности $\sqrt[n]{a_n}$ будет проще, чем последовательности $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Действительно, вычисление

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^{n-1}(2n^2+5n+4)^{\frac{n+3}{2}}}$$

явно громоздко и проводить его не будем. Применим для анализа данного ряда признак Коши: так как

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n\cdot n^{-\frac{1}{n}}}{\left(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n+1}{2n}}\cdot n\cdot n^{\frac{1}{2n}}},$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, следовательно, данный ряд сходится.

Пример 25. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}}\right)^n$. Покажем, что признак Даламбера непригоден для анализа этого ряда. Так как

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{2+(-1)^{n+1}}{5+(-1)^{n+2}}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{5+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}\right)^n =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{3^{n+1} \cdot 6^n}{4^{n+1} \cdot 1^n} = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{9}{4}\right)^{n+1}, & n = 2k-1, \\ \dfrac{1^{n+1} \cdot 4^n}{6^{n+1} \cdot 3^n} = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{4}{9}\right)^n, & n = 2k, \end{cases}$$

то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$. Таким образом, ни то условие признака Даламбера, из которого следует сходимость исследуемого ряда, ни то, из которого следует его расходимость, не имеют места.

Попробуем применить признак Коши. Из равенства $\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}}$ получаем, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{3}{4} < 1$. Следовательно, в силу признака Коши, данный ряд сходится.

Итак, вопрос — каким из признаков — Даламбера или Коши исследовать данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ решается в зависимости от конкретного вида последовательности $\{a_n\}$. Однако, поскольку оба эти признака основаны на сравнении исследуемого ряда с геометрической прогрессией, то ни тот, ни другой не дают ответа на вопрос о поведении ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, члены которого стремятся к нулю медленнее, чем последовательность вида $\{q^n\}$, $0 < q < 1$. Для таких рядов нужна другая эталонная шкала.

Выделим новую серию эталонных рядов, используя результат примера 2. В этом примере было показано, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^q} - \frac{1}{(n+1)^q}\right)$$

сходится при $q > 0$ и расходится при $q < 0$. Оценим скорость стремления к нулю последовательности $\{a_n\}$, $a_n = \dfrac{1}{n^q} - \dfrac{1}{(n+1)^q}$, при $q \neq 0$. Имеем

$$\frac{1}{n^q} - \frac{1}{(n+1)^q} = \frac{1}{n^q}\left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-q}\right) =$$
$$= \frac{1}{n^q}\left(1 - 1 + \frac{q}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim \frac{q}{n^{q+1}}, \ n \to \infty.$$

В силу следствия 2 теоремы сравнения (см. стр. 27) получаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p = q + 1 > 1$ и расходится при $p < 1$; если же $p = 1$, то перед нами гармонический ряд, расходимость которого установлена в примере 8. Отсюда следует

Признак сравнения. *Если для последовательности положительных чисел $\{a_n\}$ существуют такие числа p и $C > 0$, что*

$$a_n \sim \frac{C}{n^p}, \ n \to \infty, \tag{1}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если $p > 1$, и расходится, если $p \leqslant 1$.

Сравнением с тем же рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ получается

Признак Гаусса. *Если $a_n > 0$ и существует такое число $\varepsilon > 0$, что*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right), \ n \to \infty, \tag{2}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если $\mu < -1$, и расходится, если $\mu \geqslant -1$.

Заметим, что условие признака Гаусса часто формулируется для обратного отношения $\frac{a_n}{a_{n+1}}$. Приведенная здесь формулировка подчеркивает связь признаков Гаусса и Даламбера. Оба эти признака основаны на анализе отношения $\frac{a_n}{a_{n+1}}$. Признак Даламбера рассматривает тот случай, когда это отношение отделено от единицы снизу или сверху, и сравнивает последовательность $\{a_n\}$ с геометрической прогрессией. Признак Гаусса рассматривает тот случай, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, и сравнивает последовательность $\{a_n\}$ с последовательностью $\{n^{-\mu}\}$.

Вопрос — каким из признаков — сравнения или Гаусса — исследовать данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ решается в зависимости от того, какое из представлений (1) или (2) легче получить. В частности, если a_n или отношение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ являются достаточно гладкими функциями от n, необходимое представление получается применением формулы Тейлора.

Рассмотрим характерные примеры.

Пример 26. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p} \sin \dfrac{\pi}{n}$.

Так как $a_n \sim \dfrac{\pi}{n^{p+1}}$, $n \to \infty$, то этот ряд сходится при $p > 0$ и расходится при $p \leqslant 0$ в силу признака сходимости.

Пример 27. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}} \right).$$

Для последовательности $\{a_n\}$, $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \dfrac{n+1}{n}}$, как отношение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, так и радикал $\sqrt[n]{a_n}$ имеют достаточно сложный вид. Выделим главную часть переменной a_n следующими преобразованиями:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n}\right)} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{4n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{4n\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \; n \to \infty.$$

Итак, $a_n \sim \frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}}$, $n \to +\infty$, следовательно, в силу признака сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пример 28. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(p^{\frac{1}{n}} - \frac{q^{\frac{1}{n}} + r^{\frac{1}{n}}}{2} \right), \; p > 0, \; q > 0, \; r > 0.$$

Для последовательности $\{a_n\}$, $a_n = \left| p^{\frac{1}{n}} - \frac{q^{\frac{1}{n}} + r^{\frac{1}{n}}}{2} \right|$, как отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, так и радикал $\sqrt[n]{a_n}$ имеют достаточно сложный вид. Для того, чтобы выделить главную часть переменной a_n, запишем a_n в виде

$$a_n = \left| 1 + \frac{\ln p}{n} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\ln q}{n} + 1 + \frac{\ln r}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| =$$
$$= \frac{1}{2n}|2\ln p - \ln q - \ln r| + O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2n}\left|\ln \frac{p^2}{qr}\right| + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \; n \to \infty.$$

Переменная $\frac{1}{2n}\left|\ln \frac{p^2}{qr}\right|$ является главной частью a_n при $n \to \infty$, если $\ln \frac{p^2}{qr} \neq 0$, т. е. $p \neq \sqrt{qr}$. При этом условии $a_n \sim \frac{1}{2n}\left|\ln \frac{p^2}{qr}\right|$, $n \to \infty$, и в силу признака сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Если же $p = \sqrt{qr}$, то $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $n \to \infty$. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то в силу следствия 1 из теоремы сравнения получаем, что в этом случае ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Так как $p^{\frac{1}{n}} - \dfrac{q^{\frac{1}{n}} + r^{\frac{1}{n}}}{2} = a_n$, если $p^2 > qr$, и $p^{\frac{1}{n}} - \dfrac{q^{\frac{1}{n}} + r^{\frac{1}{n}}}{2} = -a_n$, если $p^2 \leqslant qr$, то данный ряд сходится, если $p^2 = qr$, и расходится, если $p^2 \neq qr$.

Заметим, что формула Тейлора позволяет получать точную величину константы C в равенстве $a_n = p^{\frac{1}{n}} - \dfrac{q^{\frac{1}{n}} + r^{\frac{1}{n}}}{2} \sim C\dfrac{1}{n^2}$, $p^2 = qr$, $n \to \infty$. Но следствие 1 теоремы сравнения позволяет обойтись без этой величины, что часто упрощает ход решения.

Пример 29. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!e^n}{n^{n+p}}$. В формулу общего члена входит функция $n!$. В таком случае естественно рассмотреть отношение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)!e^{n+1}n^{n+p}}{(n+1)^{n+p+1}n!e^n}$. Так как

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = e\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-(n+p)} = 1 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} - p\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty,$$

то данный ряд сходится при $p > \dfrac{3}{2}$ и расходится при $p \leqslant \dfrac{3}{2}$ в силу признака Гаусса.

Пример 30. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2-q)(2-q^{\frac{1}{2}})(2-q^{\frac{1}{3}})\ldots(2-q^{\frac{1}{n}}), \quad q > 0.$$

Прежде всего заметим, что если $q = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$, то, начиная с некоторого номера, все члены данного ряда обращаются в нуль, следовательно, ряд сходится. Если же q не является целой степенью двух, то, начиная с некоторого номера, все члены данного ряда не меняют знака. Поскольку

$$a_{n+1} = (2-q)(2-q^{\frac{1}{2}})\ldots(2-q^{\frac{1}{n}})(2-q^{\frac{1}{n+1}}) = a_n(2-q^{\frac{1}{n+1}}),$$

то естественно рассматривать отношение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2 - q^{\frac{1}{n+1}}$, $q \neq 2^m$, $m \in \mathbb{N}$. Так как $2 - q^{\frac{1}{n+1}} = 1 - \dfrac{\ln q}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, $n \to \infty$, то данный ряд сходится при $\ln q > 1$ и расходится при $\ln q \leqslant 1$ в силу признака Гаусса. Окончательно получаем, что данный ряд сходится при $q = 2$ и $q > e$, а расходится при $0 < q < 2$ и $2 < q \leqslant e$.

Две основные элементарные функции — показательная e^x и логарифмическая $\ln x$ — при $x \to +\infty$ не являются бесконечно большими степенного порядка, т. е. для любого $a > 0$ имеем соотношения $x^a = o(e^x)$ и $\ln x = o(x^a)$, $x \to +\infty$. Поэтому ряды, в формулу общего члена которых входят эти функции с бесконечно большим при $n \to +\infty$ аргументом, не анализируются с помощью признака сравнения. Однако, иногда возможно получить оценку общего члена такого ряда через степенную функцию и, пользуясь теоремой сравнения, сделать вывод о поведении этого ряда.

Пример 31. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 e^{-\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}} e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1,$$

то ни радикальный признак Коши, ни, тем более, признак Даламбера не решают вопрос о сходимости этого ряда.

Функция $e^{-\sqrt{n}}$ при $n \to \infty$ убывает быстрее, чем любая отрицательная степень показателя $\sqrt{n}$, т. е. $e^{-\sqrt{n}} = o\left(n^{-\frac{a}{2}}\right)$ при $n \to \infty$ $(a > 0)$. Если $a_0 > 6$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{a_0}{2}-2}}$ сходится. В силу теоремы сравнения отсюда делаем вывод, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$ сходится.

Заметим, что оценка $n^2 e^{-\sqrt{n}} = o\left(n^{2-\frac{a_0}{2}}\right)$ верна и для $0 < a_0 < 6$, но, как указывалось выше, такая оценка не информативна в вопросе о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$, поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-a_0}}$, $a_0 \leqslant 3$, расходится.

Пример 32. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^q}$, $q > 0$. Из неравенства $\frac{\ln n}{n^q} > \frac{1}{n^q}$, $n > 3$, $q > 0$, в силу теоремы сравнения следует, что данный ряд расходится при $0 < q \leqslant 1$. Пусть $q > 1$. Так как $\ln n = o(n^a)$ при $n \to \infty$ для любого $a > 0$, то для каждого $a > 0$ найдется номер $\mathcal{N}(a)$, такой, что $\frac{\ln n}{n^q} < \frac{1}{n^{q-a}}$ для всех $n > \mathcal{N}(a)$. Чтобы из этого неравенства сделать вывод о сходимости рассматриваемого ряда, необходима сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{q-a}}$, а для этого, в свою очередь, необходимо условие $q - a > 1$. Итак, для каждого фиксированного $q > 1$ берем зависящее от q значение $a = \frac{q-1}{2}$, тогда для всех $n > \mathcal{N}(a)$ справедливо неравенство $\frac{\ln n}{n^q} < \frac{1}{n^{\frac{q+1}{2}}}$, откуда в силу теоремы сравнения сделаем вывод, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^q}$ сходится. Окончательный результат таков: данный ряд сходится, если $q > 1$, и расходится, если $0 < q \leqslant 1$.

Поскольку и признак сравнения, и признак Гаусса основаны на сравнении членов исследуемого ряда с последовательностью вида $\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$, то ни тот, ни другой не дают ответа на вопрос о поведении ряда, члены которого стремятся к нулю быстрее, чем $\frac{1}{n}$, но медленнее, чем $\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ для любого $\varepsilon > 0$. Рассмотрим, например, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. Так как $\frac{1}{n \ln n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$, но $\frac{1}{n^{1+\varepsilon}} = o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$ при $n \to \infty$ для любого $\varepsilon > 0$, то признак сравнения не решает вопрос о поведении этого ряда. Точно так же отношение

$$\frac{(n+1)}{(n+2)} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \ln(n+2)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty,$$

не представляется в виде (2). Итак, данный ряд не анализируется сравнением со шкалой $\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$.

Интегральный признак Коши. Если $f\colon [1, +\infty) \to R$ —

неотрицательная, невозрастающая, непрерывная функция, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится или расходится одновременно с интегралом $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$; если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, то

$$\int\limits_{n}^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant r_n \leqslant \int\limits_{n-1}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

где $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f(k)$.

Пример 33. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln^p n}$, $p > 0$. Так как $\dfrac{1}{n\ln^p n} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $p > 0$, но $\dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}} = o\left(\dfrac{1}{n\ln^p n}\right)$, $p > 0$, для любого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$, то признак сравнения не решает вопрос о поведении этого ряда. Не должен давать ответ на этот вопрос и признак Гаусса; действительно, отношение $\dfrac{(n+1)\ln^p(n+1)}{(n+2)\ln^p(n+2)} = 1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{pn\ln(n+2)} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ не представляется в виде (2).

Положим $f(x) = \dfrac{1}{x\ln^p x}$, $x \geqslant 2$. Функция $f(x)$ удовлетворяет всем условиям интегрального признака Коши. Так как интеграл $\int\limits_{2}^{+\infty} \dfrac{1}{x\ln^p x}\,dx$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$, то ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln^p n}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$. Таким образом, мы выяснили, что ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$ расходится.

Пример 34. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4}$ с точностью до 10^{-3}.

Решение. Задача поставлена корректно, так как данный ряд сходится. В силу интегрального признака Коши получаем, что

$$r_n = S - S_n \leqslant \int\limits_{n-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = \frac{1}{3(n-1)^3}.$$

Следовательно, для вычисления $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ с заданной погрешностью достаточно взять сумму

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{8^4},$$

так как $\frac{1}{3{\cdot}7^3} = \frac{1}{3{\cdot}343} < \frac{1}{10^3}$.

Ряды с членами произвольного знака

Признак Абеля. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Если последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Признак Дирихле. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Если последовательность $\{B_n\}$, $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$, ограничена, а последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Следствие (признак Лейбница). Если последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ сходится и его остаток r_n удовлетворяет неравенству $|r_n| \leqslant a_{n+1}$.

Пример 35. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n - \ln n}$. Так как $a_n = \frac{1}{n - \ln n} \sim \frac{1}{n}$, $n \to \infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n - \ln n} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \ln n}$

расходится. Итак, если данный ряд сходится, то он сходится условно. Последовательность $\{a_n\}$ положительна и стремится к нулю при $n \to \infty$. Так как $(x - \ln x)' = 1 - \dfrac{1}{x} \geqslant 0$, $x \geqslant 1$, то эта последовательность монотонна. Итак, данный ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница и, следовательно, сходится условно.

Пример 36. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \operatorname{arctg} \dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}$. Так как $\ln(n+1) < \sqrt{n+1}$ для $n > 2$, то

$$0 < \operatorname{arctg} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} < \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} < \frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}, \ n > 2.$$

Из этого неравенства в силу признака сравнения следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}$ сходится, следовательно, данный ряд сходится абсолютно.

Пример 37. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(\cos \dfrac{a}{n}\right)^{n^3}$. При любом a для достаточно больших n имеем, что $\left|\cos \dfrac{a}{n}\right| = \cos \dfrac{a}{n}$. Для исследования сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\cos \dfrac{a}{n}\right|^{n^3}$ используем радикальный признак Коши. Так как

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\cos \frac{a}{n} - 1\right) = -\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{a^2}{2n^2} = -\frac{a^2}{2},$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\cos \frac{a}{n}\right)^{n^3}} = \lim_{n\to\infty} e^{n^2 \ln\left(\cos \frac{a}{n}\right)} =$$
$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\cos \frac{a}{n} - 1\right)} = e^{-\frac{a^2}{2}}.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\cos \dfrac{a}{n}\right|^{n^3}$ сходится при $a \neq 0$. Если же $a = 0$, то $\left(\cos \dfrac{a}{n}\right)^{n^3} = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. не выполнен необходимый признак сходимости и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}$ расходится. Итак, данный ряд абсолютно сходится при $a \neq 0$ и расходится при $a = 0$.

Пример 38. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{(-1)^{n+1}\pi}{4n^q}$. Так как

$$\left|\operatorname{tg}\frac{(-1)^{n+1}\pi}{4n^q}\right| \sim \frac{\pi}{4\cdot n^q},$$

$n \to \infty$, то данный ряд сходится абсолютно при $q > 1$. Так как $\operatorname{tg}\frac{(-1)^{n+1}\pi}{4n^q} = (-1)^{(n+1)}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n^q}$ и положительная последовательность $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n^q}$ $(q > 0)$ монотонно стремится к нулю при $n \to \infty$, то в силу признака Лейбница данный ряд сходится условно при $0 < q \leqslant 1$. Если же $q \leqslant 0$, то данный ряд расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости.

Замечание. Условия $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} > 1$ расходимости ряда соответственно в признаках Даламбера и Коши, как это видно из их доказательств, являются условиями нарушения необходимого условия сходимости ряда. Поэтому, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ удовлетворяет этим условиям, то не только он, но и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится, так как последовательность $\{a_n\}$ не является бесконечно малой при $n \to \infty$.

Пример 39. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\cdot n!}{n^n}$. Начнем с исследования абсолютной сходимости. Пусть $a_n = \frac{|q|^n\cdot n!}{n^n}$, тогда $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|q|(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{|q|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$. Если $|q| < e$, то в силу неравенства $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|q|}{e} < 1$ признак Даламбера показывает, что данный ряд сходится абсолютно. Если $|q| \geqslant e$, то для любого натурального n верно неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|q|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1,$$

следовательно, в силу сделанного выше замечания данный ряд расходится.

Пример 40. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(qn+\frac{1}{n}\right)^n}$, $q > 0$.

Начнем с исследования абсолютной сходимости. Так как $\sqrt[n]{\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(qn+\frac{1}{n}\right)^n}} = \frac{n^{1+\frac{1}{n^2}}}{qn+\frac{1}{n}}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{q}$. В силу радикального признака Коши данный ряд сходится абсолютно при $q > 1$ и в силу сделанного выше замечания расходится при $0 < q < 1$. Осталось выяснить поведение данного ряда при $q = 1$, поскольку радикальный признак Коши не дает в этом случае определенного ответа. Рассмотрим поведение последовательности $|a_n| = \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$ при $n \to \infty$. Из соотношений $|a_n| = \frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = n^{\frac{1}{n}} e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$ и $n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n}$, $n \to \infty$, следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 1$. Итак, последовательность $\{a_n\}$ не является бесконечно малой при $n \to \infty$ и, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Объединяя все сказанное, получаем, что данный ряд абсолютно сходится при $q > 1$ и расходится при $q \leqslant 1$.

Абсолютная сходимость ряда, как уже говорилось при рассмотрении рядов с неотрицательными членами, обусловливается скоростью стремления членов ряда к нулю. Это хорошо видно в формулировке критерия Коши: при условии, что все слагаемые неотрицательны, малость суммы $\left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} a_k\right|$ требует малости каждого из слагаемых. Если же слагаемые имеют разные знаки, то малость суммы $\left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} a_k\right|$ может быть обязана не малости каждого слагаемого, а взаимной интерференции положительных и отрицательных слагаемых. Перестановка членов ряда меняет порядок этой интерференции — в этом суть теоремы Римана. Этот факт позволяет ожидать, что условие $a_n \sim b_n$, $n \to \infty$, не гарантирует одновременную сходимость или расходимость рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, если числа a_n (следовательно, и b_n) меняют знак. Покажем, что это действительно так.

Пример 41. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} \right)$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ сходится в силу признака Лейбница, гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится, следовательно, данный ряд расходится. В то же время $\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} \sim \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, $n \to \infty$. Итак, последовательность членов данного расходящегося ряда эквивалентна последовательности членов сходящегося ряда.

Внимание! Делать вывод о сходимости или расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ по поведению ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, где $a_n \sim b_n$, $n \to \infty$, возможно только для рядов с неотрицательными членами!

Тот же эффект интерференции положительных и отрицательных слагаемых лежит в основе признаков Абеля и Дирихле. Хотя в отличие от признака Лейбница в формулировках этих признаков формально не указано, что рассматриваемые ряды имеют члены разных знаков, но область их применения — именно такие ряды. Действительно, в силу условия монотонности члены последовательности $\{a_n\}$ в обоих этих признаках могут без ограничения общности считаться положительными. Если и члены последовательности $\{b_n\}$ неотрицательны, то ограниченность последовательности $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ и сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ эквивалентны, а так как при этом

$a_n b_n = O(b_n)$, $n \to \infty$, то сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ следует просто из признака сравнения. Если же в основе сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ или ограниченности последовательности $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ лежит интерференция положительных и отрицательных членов последовательности $\{b_n\}$, то именно признаки Абеля и Дирихле позволяют установить сходимость соответствующих рядов, чаще всего условную.

На практике в признаках Абеля и Дирихле в качестве последовательности $\{b_n\}$ чаще всего берется или последовательность $\{(-1)^{\varphi(n)}\}$, или одна из последовательностей $\{\cos n\alpha\}$ и $\{\sin n\alpha\}$. Ограниченность последовательности $\left\{\sum\limits_{q=1}^{n}(-1)^{\varphi(q)}\right\}$ при данной функции $\varphi(n)$ устанавливается непосредственно. Рассмотрим последовательности

$$B_n = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha = \sum_{q=1}^{n} \cos q\alpha$$

и

$$\tilde{B}_n = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin n\alpha = \sum_{q=1}^{n} \sin q\alpha.$$

Так как

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot B_n = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{3\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{5\alpha}{2} - \sin\frac{3\alpha}{2}\right) + \\ + \cdots + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{2n+1}{2}\alpha - \sin\frac{2n-1}{2}\alpha\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{2n+1}{2}\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}\right) = \cos(n+1)\alpha\cdot\sin n\alpha,$$

то для любого $\alpha \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, получаем, что

$$|B_n| = \left|\frac{\cos(n+1)\alpha\cdot\sin n\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}.$$

Точно так же получаем, что

$$|\tilde{B}_n| = \left|\frac{\sin(n+1)\alpha \cdot \sin n\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}, \quad \alpha \neq 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Итак, установлено, что последовательности B_n и $\tilde{B}_n$ ограничены при любом $\alpha \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому, если при исследовании рядов вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)\cos n\alpha$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)\sin n\alpha$ простейшая оценка $|\cos n\alpha| \leqslant 1$, $|\sin n\alpha| \leqslant 1$ не дает возможности сделать вывод об абсолютной сходимости, то обычно проще начать исследование сходимости, а уже потом перейти к исследованию абсолютной сходимости.

Пример 42. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$. Простейшая оценка $\left|\frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$ не дает информации о поведении ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right|$. Покажем, что данный ряд сходится. Положим $b_n = \cos n$ и $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, тогда $|B_n| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n} \cos k\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$, а последовательность $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ монотонно стремится к нулю при $n \to \infty$. В силу признака Дирихле данный ряд сходится. Для исследования абсолютной сходимости этого ряда удобно воспользоваться оценкой $|\cos n| \geqslant \cos^2 n$. Имеем: $\left|\frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right| \geqslant \frac{\cos^2 n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{\cos 2n}{2\sqrt{n}}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2\sqrt{n}}$ так же, как и исходный ряд, сходится в силу признака Дирихле, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ расходится. Следовательно, расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{\sqrt{n}}$, а в силу теоремы сравнения и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right|$. Итак, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$ сходится условно.

Пример 43. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \cdot \arccos \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$. Простейшая оценка $\left|\frac{\cos n \cdot \arccos \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}\right| \leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{n}}$ не дает информации о поведении ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos n \cdot \arccos \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}\right|$. Покажем, что данный ряд сходится. Положим $b_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$ и $a_n = \arccos \frac{1}{n}$. Условная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$ установлена в предыдущем примере. Так как последовательность $\left\{\arccos \frac{1}{n}\right\}$ монотонна и ограничена, $0 \leqslant \arccos \frac{1}{n} \leqslant \frac{\pi}{2}$, то в силу признака Абеля данный ряд сходится. Расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos n \cdot \arccos \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}\right|$ следует из неравенства

$$\left|\frac{\cos n \cdot \arccos \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}\right| \geqslant \frac{|\cos n|}{\sqrt{n}} \cdot \arccos \frac{1}{2} \quad (n \geqslant 2)$$

и расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right|$. Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \cdot \arccos \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$ сходится условно.

Заметим, что сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \cdot \arccos \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$ можно было обосновать и признаком Дирихле. Но если выполнение условий ограниченности последовательности $B_n = \sum_{k=1}^{n} \cos k$ и стремления $\frac{\arccos \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$ к нулю при $n \to \infty$ видим непосредственно, то проверка монотонности последовательности $\frac{\arccos \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$ достаточно громоздка. В данном случае проверка выполнения условий признака Абеля существенно проще.

Пример 44. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(1 - \sin n)}{n}$.

Простейшая оценка $\left|\dfrac{\sin n(1-\sin n)}{n}\right| \leqslant \dfrac{1}{n}$ не дает информации о поведении ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\sin n(1-\sin n)}{n}\right|$. Представление $\dfrac{\sin n(1-\sin n)}{n}$ в виде произведения $a_n b_n$, где $a_n = \sin n$ и $b_n = \dfrac{1-\sin n}{n}$ также не дает информации о сходимости этого ряда, поскольку хотя последовательность $\{A_n\}$, $A_n = \sum\limits_{q=1}^{n} a_q$, ограничена и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, но последовательность $\{b_n\}$ не монотонна; таким образом, условия признака Дирихле не выполнены. Покажем, что этот ряд расходится. Действительно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n}$ сходится в силу признака Дирихле. Так как $\dfrac{\sin^2 n}{n} = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{\cos 2n}{2n}$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2n}{2n}$ сходится в силу признака Дирихле, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$ расходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n}{n}$ расходится, откуда следует расходимость и данного ряда, поскольку $\dfrac{\sin n(1-\sin n)}{n} = \dfrac{\sin n}{n} - \dfrac{\sin^2 n}{n}$.

Пример 45. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\sqrt{n}\alpha}{n^q}$. Последовательность $a_n = \cos\sqrt{n}\alpha$ не является бесконечно малой (достаточно рассмотреть подпоследовательность a_{n^2}), откуда следует, что данный ряд расходится при $q \leqslant 0$ и любом α. При любом α и $q > 1$ данный ряд сходится абсолютно. Если $\alpha = 0$, то данный ряд расходится и при $0 < q \leqslant 1$. Итак, осталось исследовать поведение ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\sqrt{n}\alpha}{n^q}$ при $\alpha \neq 0$ и $0 < q \leqslant 1$.

Имея в виду формулу Тейлора

$$\Phi(n+1)-\Phi(n) = \Phi'(n) + \Phi''(n+\Theta_n), \quad 0 < \Theta_n < 1,$$

рассмотрим функцию $\Phi(x) = \int\limits_1^x \frac{\cos\sqrt{t}\alpha}{t^q}\,dt$, производная которой при $x = n$ равна $\frac{\cos\sqrt{n}\alpha}{n^q}$. Приведенная выше формула Тейлора показывает, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Phi''(n+\Theta_n)$ сходится, то сходимость рассматриваемого ряда эквивалентна существованию предела $\Phi(n)$ при $n \to \infty$.

Начнем с оценки $\Phi''(n+\Theta_n)$. Из равенства

$$\Phi''(x) = \frac{-\alpha\sin\sqrt{x}\alpha}{2x^{q+\frac{1}{2}}} - \frac{q\cos\sqrt{x}\alpha}{x^{q+1}}$$

получаем, что $|\Phi''(x)| \leqslant \frac{k}{x^{q+\frac{1}{2}}}$, где k зависит только от q и α. Следовательно, для $q \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Phi''(n+\Theta_n)$ абсолютно сходится.

Покажем, пользуясь критерием Коши, что для этих значений q существует и $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x)$. Действительно, пусть $\xi > 0$. Интегрируя по частям, получаем

$$|\Phi(x+\xi) - \Phi(x)| =$$

$$\left| \left.\frac{2\sin\sqrt{t}\alpha}{\alpha t^{q-\frac{1}{2}}}\right|_x^{x+\xi} + \frac{2}{\alpha}\left(q - \frac{1}{2}\right)\int\limits_x^{x+\xi} \frac{\sin\sqrt{t}\alpha}{t^{q+\frac{1}{2}}}\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\alpha(x+\xi)^{q-\frac{1}{2}}} + \frac{2}{\alpha x^{q-\frac{1}{2}}} + \frac{2}{\alpha}\left(q - \frac{1}{2}\right)\int\limits_x^{x+\xi} \frac{dt}{t^{q+\frac{1}{2}}} \leqslant \frac{8}{\alpha x^{q-\frac{1}{2}}},$$

откуда и следует существование $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x)$. Итак, данный ряд сходится для $\alpha \neq 0$ и $\frac{1}{2} < q \leqslant 1$.

Пусть теперь $\alpha \neq 0$ и $0 < q \leqslant \frac{1}{2}$. В таком случае приведенные выше рассуждения не позволяют утверждать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Phi''(n+\Theta_n)$ сходится. Напишем для функции $\Phi(x)$ формулу Тейлора второго порядка

$$\Phi(n+1) - \Phi(n) =$$
$$= \frac{\cos\sqrt{n}\alpha}{n^q} - \frac{\alpha\sin\sqrt{n}\alpha}{2n^{q+\frac{1}{2}}} - \frac{q\cos\sqrt{n}\alpha}{n^{q+1}} + \Phi'''(n+\Theta_n),$$
$$0 < \Theta_n < 1.$$

Из равенства

$$\Phi'''(x) = \frac{-\alpha^2\cos\sqrt{x}\alpha}{4x^{q+1}} + \frac{\alpha\left(q+\frac{1}{2}\right)\sin\sqrt{x}\alpha}{2x^{q+\frac{3}{2}}} +$$
$$+ \frac{\alpha q\sin\sqrt{x}\alpha}{2x^{q+\frac{3}{2}}} + \frac{q(q+1)\cos\sqrt{x}\alpha}{x^{q+2}},$$

получаем, что $|\Phi'''(x)| \leqslant \frac{k}{x^{q+1}}$, где k зависит только от α и q, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Phi'''(n+\Theta_n)$ абсолютно сходится. Заменив функцию $\Phi(x)$ на функцию $\Psi(x) = \int\limits_1^x \frac{\sin\sqrt{t}\alpha}{t^q}\,dt$, такими же как выше рассуждениями получим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha\sin\sqrt{n}\alpha}{2n^{q+\frac{1}{2}}}$ сходится. Таким образом, сходимость рассматриваемого ряда при $\alpha \neq 0$ и $0 < q < \frac{1}{2}$ эквивалентна существованию предела $\Phi(n)$ при $n \to \infty$. Интегрируя по частям, получаем равенство

$$\Phi(n) = \frac{2}{\alpha}n^{\frac{1}{2}-q}\sin\sqrt{n}\alpha - \frac{2}{\alpha}\sin\alpha + \frac{\left(q-\frac{1}{2}\right)}{2\alpha}\int\limits_1^n \frac{\sin\sqrt{t}\alpha}{t^{q+\frac{1}{2}}}\,dt.$$

Существование предела $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_1^x \frac{\sin\sqrt{t}\alpha}{t^{q+\frac{1}{2}}}\,dt$, $0 < q \leqslant \frac{1}{2}$, устанавливается точно так же, как и существование предела $\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(x)$ при $q \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$. Поскольку $\alpha \neq 0$, то последовательность $b_n = \sin\sqrt{n}\alpha$ не имеет предела (достаточно рассмотреть подпоследовательность b_{n^2} при $\alpha \neq \pi k$, $|k| \in \mathbb{N}$, и подпоследовательность b_{n^2+n} при $\alpha = \pi k$, $|k| \in \mathbb{N}$), то и последовательность $\Phi(n)$ не имеет предела. Итак, данный ряд при $\alpha \neq 0$ и $0 < q \leqslant \frac{1}{2}$ расходится.

Для исследования абсолютной сходимости при $\frac{1}{2} < q \leqslant 1$ воспользуемся стандартной методикой — используем неравенство

$$\frac{|\cos\sqrt{n}\alpha|}{n^q} \geqslant \frac{\cos^2\sqrt{n}\alpha}{n^q} = \frac{1}{2n^q} + \frac{\cos 2\sqrt{n}\alpha}{n^q}.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^q}$, $\frac{1}{2} < q \leqslant 1$, расходится, то из этого неравенства следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2\sqrt{n}\alpha}{n^q}$, $\frac{1}{2} < q \leqslant 1$, и тем самым расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos\sqrt{n}\alpha|}{n^q}$, $\frac{1}{2} < q \leqslant 1$.

Сведем вместе все полученные выводы. Данный ряд сходится абсолютно при $q > 1$ и любом α; сходится условно при $\frac{1}{2} < q \leqslant 1$ и $\alpha \neq 0$; расходится при всех остальных комбинациях значений q и α.

Гораздо чаще, чем для рядов с неотрицательными членами, при исследовании рядов, члены которых меняют знак, используется разложение членов a_n ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ в сумму:

$$a_n = c_n^{(1)} + c_n^{(2)} + \cdots + c_n^{(k)}.$$

Это связано с тем, что оценка скорости стремления последовательностей $\{c_n^{(i)}\}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, к нулю обычно ничем не легче, чем последовательности $\{a_n\}$, а интерференция положительных и отрицательных членов в каждой из последовательностей $\{c_n^{(i)}\}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, может быть существенно более простой, чем в последовательности $\{a_n\}$. Напомним, что определенный ответ о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ при таком разложении возможно дать только тогда, когда среди рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, расходится не более чем один.

Будем считать, что a_n достаточно гладко зависит от n. Если последовательность $\{a_n\}$ не является бесконечно малой, то в силу необходимого условия ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то, пользуясь формулой Тейлора, можно получить представление a_n в виде суммы:

$$a_n = \frac{c_{1,n}}{n^{\alpha_1}} + \frac{c_{2,n}}{n^{\alpha_2}} + \dots + \frac{c_{k,n}}{n^{\alpha_k}} + r_{k,n},$$

где или $r_{k,n} = o\left(\frac{c_{k,n}}{n^{\alpha_k}}\right)$, или $r_{k,n} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha_{k+1}}}\right)$, $n \to \infty$, и $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k < \alpha_{k+1}$. Главная трудность здесь — исследование ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_{k,n}$. Практически применяется два способа:

1. Если $\alpha_{k+1} > 1$, то представление $r_{k,n} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha_{k+1}}}\right)$, $n \to \infty$, показывает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_{k,n}$ сходится абсолютно.

2. Если последовательность $\{c_{k,n}\}$ положительна, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c_{k,n}}{n^{\alpha_k}} + r_{k,n}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c_{k,n}}{n^{\alpha_k}} + o\left(\frac{c_{k,n}}{n^{\alpha_k}}\right)\right)$ является рядом с неотрицательными членами и, следовательно, сходится или расходится одновременно с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_{k,n}}{n^{\alpha_k}}$.

Пример 46. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(1 - e^{\frac{(-1)^n}{n^q}}\right)$, $q > 0$.

Так как $\left|\sqrt{n}\left(1 - e^{\frac{(-1)^n}{n^q}}\right)\right| \sim \frac{1}{n^{q-\frac{1}{2}}}$, $n \to \infty$, то данный ряд расходится при $q \leqslant \frac{1}{2}$, поскольку не выполнено необходимое условие сходимости, и абсолютно сходится при $q > \frac{3}{2}$ в силу признака сравнения. Используя формулу Тейлора, получаем, что

$$a_n = \sqrt{n}\left(1 - e^{\frac{(-1)^n}{n^q}}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n^{q-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2n^{2q-\frac{1}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{2q-\frac{1}{2}}}\right),$$
$$q > 0,\ n \to \infty.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{q-\frac{1}{2}}}$, $q > \frac{1}{2}$, сходится в силу признака Лейбница. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n^{2q-\frac{1}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{2q-\frac{1}{2}}}\right)\right)$, $n \to \infty$, сходится при $q > \frac{3}{4}$ и расходится при $q \leqslant \frac{3}{4}$ в силу признака сравнения. Объединяя все сказанное, получаем, что данный ряд расходится при $0 < q \leqslant \frac{3}{4}$, сходится условно при $\frac{3}{4} < q \leqslant \frac{3}{2}$ и сходится абсолютно при $q > \frac{3}{2}$.

Пример 47. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2n^q + \sin n}$, $q > 0$. Простейшая оценка $\left|\frac{\sin n}{2n^q + \sin n}\right| \leqslant \frac{1}{2n^q - 1}$ показывает, что при $q > 1$ данный ряд сходится абсолютно в силу признака сравнения. Для $q \in (0, 1]$ начнем с исследования сходимости. Используя формулу Тейлора, получаем, что

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\sin n}{2n^q + \sin n} = \frac{\sin n}{2n^q}\left(1 + \frac{\sin n}{2n^q}\right)^{-1} = \\ &= \frac{\sin n}{2n^q}\left(1 - \frac{\sin n}{2n^q} + o\left(\frac{\sin n}{2n^q}\right)\right) = \\ &= \frac{\sin n}{2n^q} - \frac{\sin^2 n}{4n^{2q}} + o\left(\frac{\sin^2 n}{n^{2q}}\right), \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2n^q}$, $q > 0$, сходится в силу признака Дирихле. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin^2 n}{4n^{2q}} + o\left(\frac{\sin^2 n}{n^{2q}}\right)\right)$, $n \to \infty$, сходится или расходится одновременно с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{4n^{2q}}$. Так как $\frac{\sin^2 n}{4n^{2q}} = \frac{1}{8n^{2q}} - \frac{\cos 2n}{8n^{2q}}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{8n^{2q}}$ при $q > 0$ сходится в силу признака Дирихле, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8n^{2q}}$ сходится тогда и только тогда, когда $q > \frac{1}{2}$, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin^2 n}{4n^{2q}} + o\left(\frac{\sin^2 n}{n^{2q}}\right)\right)$, $n \to \infty$, сходится при $q > \frac{1}{2}$ и расходится при $0 < q \leqslant \frac{1}{2}$. Используя соотношение

$$|a_n| \geqslant \frac{\sin^2 n}{2n^q + \sin n} = \frac{1}{4n^q + 2\sin n} \cdot (1 - \cos 2n)$$

так же, как и выше, получим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится при $0 < q \leqslant 1$. Объединяя все сказанное, получаем, что данный ряд расходится при $0 < q \leqslant \frac{1}{2}$, сходится условно при $\frac{1}{2} < q \leqslant 1$ и сходится абсолютно при $q > 1$.

Пример 48. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n \cdot \ln\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$.

Простейшая оценка $\left|\sin n \cdot \ln\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$ не дает информации о поведении ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sin n \cdot \ln\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)\right|$.

Используя формулу Тейлора, получаем, что

$$a_n = \sin n \cdot \ln\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right) =$$
$$= \sin n \cdot \left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right), \quad n \to \infty.$$

Так как $(-1)^n \sin n = \sin(1+\pi)n$, то оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin n}{\sqrt{n}}$

и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2n}$ сходятся в силу признака Дирихле. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, где $b_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ сходится в силу признака сравнения. Следовательно, данный ряд сходится. Далее, $|a_n| \sim \frac{|\sin n|}{\sqrt{n}}$, $n \to \infty$, и $\frac{|\sin n|}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{\cos 2n}{2\sqrt{n}}$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2\sqrt{n}}$ сходится в силу признака Дирихле, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ расходится в силу признака сравнения, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится. Итак, данный ряд сходится условно.

Пример 49. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^q}$. Поскольку

$$\left|\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^q}\right| = \frac{1}{n^q},$$

то данный ряд сходится абсолютно при $q > 1$ в силу признака сравнения и расходится при $q \leqslant 0$, так как не выполнено необходимое условие сходимости. Пусть $q \in (0, 1]$. Члены последовательности $\{a_n\}$, $a_n = \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$, меняют знак тогда, когда номер n переходит от значения $m^2 - 1$ к значению m^2, $m \in \mathbb{N}$. Отсюда можно вывести, что последовательность $B_n = \sum\limits_{m=1}^{n} (-1)^{[\sqrt{m}]}$ неограничена, но поскольку этот факт ничего не дает в решении вопроса о сходимости данного ряда, не будем проводить его доказательство. Воспользуемся следствием 2 утверждения о группировке членов ряда (см. стр. 16). Если

$$A_k = \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^q} = (-1)^k \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{n^q},$$

то в силу этого следствия ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ сходится или расходится одновременно с данным рядом. Из неравенств

$$\frac{2}{k^{2q-1}} + O\left(\frac{1}{k^{2q}}\right) = \frac{2k+1}{k^{2q}} < \left|\sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{n^q}\right| <$$
$$< \frac{2k+1}{(k^2+k)^q} = \frac{2}{k^{2q-1}} + O\left(\frac{1}{k^{2q}}\right), \ k \to \infty,$$

следует, что $A_k = (-1)^k \dfrac{2}{k^{2q-1}} + b_k$, где $b_k = O\left(\dfrac{1}{k^{2q}}\right)$, $k \to \infty$. Отсюда видно, что при $q \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ расходится, поскольку не выполнено необходимое условие сходимости. Если же $q \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right]$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится в силу следствия 1 из теоремы сравнения, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k \dfrac{2}{k^{2q-1}}$ сходится в силу признака Лейбница. Итак, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ сходится при $q \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right]$ и расходится при $q \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$. Объединяя все сказанное, получаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^q}$ расходится при $q \leqslant \dfrac{1}{2}$, сходится условно при $q \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right]$ и сходится абсолютно при $q > 1$.

Заметим, что из полученного вывода о поведении ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^q}$ следует, что последовательность $B_n = \sum\limits_{m=1}^{n}(-1)^{[\sqrt{m}]}$ неограничена, ибо в противном случае в силу признака Дирихле этот ряд сходился бы при $q > 0$.

Произведение рядов

Пусть даны два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$. Рассмотрим все возможные пары произведений $(a_n \cdot b_m)$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, т. е. бесконечную матрицу:

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \cdots & a_nb_1 & \cdots \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \cdots & a_nb_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1b_m & a_2b_m & a_3b_m & \cdots & a_nb_m & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Занумеровать члены этой матрицы можно многими способами; таким образом получим множество рядов, составленных из этих чисел, например:

$$A_1\colon a_1b_1+a_2b_1+a_2b_2+a_1b_2+a_3b_1+a_3b_2+a_3b_3+a_2b_3+a_1b_3+\cdots$$

или

$$A_2 : \ a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3 + \cdots.$$

Каждый такой ряд называется произведением рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$.

Если один из рядов A_1, $A_2, \ldots$ сходится абсолютно, то и все остальные также сходятся абсолютно и суммы всех таких рядов равны. Таким образом, в случае абсолютной сходимости полученного ряда значение произведения рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$ определено однозначно, хотя представляется это произведение различными рядами.

Теорема Коши. Если каждый из рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$ сходится абсолютно к A и B соответственно, то произведение этих рядов сходится абсолютно к AB.

Если члены матрицы (3) не образуют абсолютно сходящегося ряда, то и сходимость, и величина полученного из нее ряда зависят от способа нумерации этих членов. Одним из распространенных методов рассмотрения произведения рядов является его представление в форме Коши.

Определение. Пусть даны два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, где $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$ называется произведением этих рядов в форме Коши.

В силу теоремы Коши из абсолютной сходимости двух рядов следует и сходимость их произведения в форме Коши. Как показывает следующая теорема, произведение в форме Коши сходится и при более слабых условиях на сомножители.

Теорема Мертенса. Если из двух сходящихся рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$ хотя бы один сходится абсолютно, то их произведение в форме Коши сходится и его сумма равна произведению сумм сомножителей.

Пример. Оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ и $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{m}{2^m}$ сходятся абсолютно, первый — к 1, второй — к 2 (см. стр. 8). Следовательно, их произведение абсолютно сходится к 2. Записывая это произведение в форме Коши, получаем равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{q=1}^{n} \frac{n-q}{q(q+1)2^{n-q}} \right) = 2.$$

Пример. Оба ряда

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{и} \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

расходятся. В то же время ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится абсолютно, так как

$$c_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^n}\right) -$$
$$-\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-3}\left(2^{n-2}+\frac{1}{2^{n-1}}\right) - \dots -$$
$$-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(2+\frac{1}{2^2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(1+\frac{1}{2}\right) =$$
$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}\right) < \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}.$$

Таким образом, теорема Коши дает только достаточное, но не необходимое условие абсолютной сходимости произведения рядов в форме Коши.

Точно так же и теорема Мертенса дает только достаточное, но не необходимое условие сходимости произведения рядов в форме Коши даже при условии сходимости каждого из сомножителей.

Пример. Рассмотрим произведение неабсолютно сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ на себя. В этом случае

$$c_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n-1}}+\dots+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Поскольку $\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}} > \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$ ($n>1$) и число слагаемых в сумме равно n, то $|c_n|>1$ и, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ расходится.

Пример. Рассмотрим произведение неабсолютно сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n}$ на себя. В этом случае

$$c_n = (-1)^{n-1}\left[\frac{1}{1\cdot n} + \frac{1}{2(n-1)} + \dots + \frac{1}{q(n-q+1)} + \dots + \frac{1}{n}\right] =$$
$$= (-1)^{n-1}\left[\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1}\right) + \dots +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = (-1)^n \frac{2}{n+1}\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{q} =$$
$$= (-1)^n \frac{2}{n+1}\left(\ln n + C_э + o(1)\right).$$

Полученное соотношение показывает, что $\lim\limits_{n\to\infty}|c_n| = 0$. Так как $|c_n| > \dfrac{2}{n+1}$ и $|c_{n+1}| = |c_n| + \dfrac{1}{n+2}\left(\dfrac{2}{n+2} - |c_n|\right)$, то последовательность $|c_n|$ монотонна. Таким образом, в силу признака Лейбница ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, т. е. произведение ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ на себя в форме Коши, сходится.

Сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ равна $\ln 2$ (см. стр. 22). Теорема Мертенса не применима к произведению

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Равенство $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \ln^2 2$, где $c_n = (-1)^{n-1}\cdot\dfrac{2}{n+1}\sum\limits_{q=1}^{n}\dfrac{1}{q}$, устанавливается следующей теоремой:

Теорема Абеля. Если оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$ сходятся и их произведение в форме Коши $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$.

§ 2. БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Определение. Пусть дана числовая последовательность $\{p_n\}$. Символ $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n \cdot \ldots$ называют бесконечным произведением и обозначают $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$. Число $P_n = \prod\limits_{q=1}^{n} p_q$ называется n-ым частичным произведением.

Определение. Бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ называется сходящимся, если последовательность P_n имеет предел, отличный от нуля, в противном случае это произведение называется расходящимся. Если $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0$, то говорят, что произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ расходится к нулю. Если бесконечное произведение сходится, то число $P = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$ называют значением этого произведения и пишут: $P = \prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$.

Пример 1. Рассмотрим бесконечное произведение

$$\prod_{n=3}^{\infty} \left(1 - \frac{6}{n(n+1)}\right).$$

Так как

$$1 - \frac{6}{n(n+1)} = \frac{(n-2)(n+3)}{n(n+1)},$$

то $P_n = \dfrac{1\cdot 6}{3\cdot 4}\cdot\dfrac{2\cdot 7}{4\cdot 5}\cdots\dfrac{n(n+5)}{(n+2)(n+3)}$, откуда получаем, что

$$P_n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{3\cdot 4\cdot 5\cdots(n+2)}\cdot\frac{6\cdot 7\cdots(n+5)}{4\cdot 5\cdots(n+3)} =$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot(n+4)(n+5)}{(n+1)(n+2)\cdot 4\cdot 5} = \frac{1}{10}\frac{(n+4)(n+5)}{(n+1)(n+2)}.$$

Из полученного равенства видим, что $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \dfrac{1}{10}$, т. е. данное бесконечное произведение сходится и

$$\frac{1}{10} = P = \prod_{n=3}^{\infty}\left(1 - \frac{6}{n(n+1)}\right).$$

Пример 2. Рассмотрим бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}$. Имеем:

$$P_n=\frac{(2\cdot4\cdot6\cdots2n)^2}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)(2n+1)}=\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}.$$

Для нахождения $\lim\limits_{n\to\infty}P_n$ поступим следующим образом. Методом математической индукции проверяется, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx=\begin{cases}\dfrac{(m-1)!!}{m!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & m=2k,\ k\in\mathbb{N},\\[2mm] \dfrac{(m-1)!!}{m!!}, & m=2k-1,\ k\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Из этого равенства и неравенства

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x\,dx,\ n\in\mathbb{N},$$

получаем следующие соотношения:

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}<\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1}<\frac{\pi}{2}<\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n},$$

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n}-\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1}=$$

$$=\frac{1}{2n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1}<\frac{\pi}{4n}.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}$, т. е. $\frac{\pi}{2}=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}$. Это равенство называется формулой Валлиса.

Из формулы Валлиса можно получить следующие равенства:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-1}{4n^2}=\frac{2}{\pi},$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n(2n+2)}{(2n+1)^2}=\frac{\pi}{4}.$$

Действительно, для первого бесконечного произведения имеем:

$$P_n^{(1)}=\frac{1}{\prod\limits_{q=1}^{n}\frac{4q^2}{4q^2-1}}$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}P_n^{(1)}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{q=1}^{n}\frac{4q^2}{4q^2-1}}=\frac{2}{\pi}.$$

Для второго бесконечного произведения имеем:

$$P_n^{(2)}=\frac{4\cdot 2\cdot 6\cdot 4\cdots(2n+2)\cdot 2n}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdots(2n+1)(2n+1)}=$$

$$=\frac{2\,[4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdots(2n-2)\cdot 2n\cdot 2n]\cdot(2n+2)}{[3\cdot 5\cdots(2n+1)]^2}=$$

$$=\frac{2n+2}{2(2n+1)}\cdot\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1},$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}P_n^{(2)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

Пример 3. Рассмотрим бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}$. Используя равенство

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+C_э+o(1),\quad n\to\infty,$$

где $C_э$ — постоянная Эйлера, получим, что

$$P_n=\frac{n!e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}}{(n+1)!}=\frac{e^{\ln n+C_э+o(1)}}{n+1}=e^{C_э}\cdot\frac{n}{n+1}\left(1+o(1)\right),$$
$$n\to\infty.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=e^{C_э}$.

Отбросив в бесконечном произведении $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ первые m членов, получаем остаточное произведение $\prod\limits_{n=m+1}^{\infty} p_n$.

Если произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится, то сходится и любое остаточное произведение $\prod\limits_{n=m+1}^{\infty} p_n$; обратно, из сходимости любого из остаточных произведений $\prod\limits_{n=m+1}^{\infty} p_n$ и условия $p_k \neq 0$, $1 \leqslant k \leqslant m$, следует сходимость произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$. Другими словами, отбрасывание или присоединение в начале бесконечного произведения конечного числа множителей, отличных от нуля, не влияет на его сходимость.

Прежде чем формулировать основные свойства бесконечных произведений, заметим, что из сходимости бесконечного произведения следует, что, начиная с некоторого номера, его сомножители не должны менять знака. Поэтому в дальнейшем будем всегда предполагать, что все числа p_n положительны.

Утверждение. Если бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится, то $\lim\limits_{m\to\infty} \prod\limits_{n=m+1}^{\infty} p_n = 1$.

Следствие. (Необходимое условие сходимости бесконечного произведения.) Если бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$.

Пример 4. Рассмотрим бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n}$. Здесь $p_n = \dfrac{n+1}{n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$; $P_n = \prod\limits_{q=1}^{n} \dfrac{q+1}{q} = n+1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = +\infty$, т. е. данное бесконечное произведение расходится.

Таким образом, условие $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$ является необходимым, но не достаточным условием сходимости произведения $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ (сравните с условием $a_n \to 0$ для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$).

Основным утверждением в теории бесконечных произведений является

Теорема. Сходимость бесконечного произведения $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$, $p_n > 0$, эквивалентна сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$. При этом, если $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n = S$, то $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = e^S$.

Пример 5. Исследовать сходимость бесконечного произведения $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$.

Решение. Так как $\ln\left(1+\frac{1}{n^x}\right) \sim \frac{1}{n^x}$ при $x > 0$, $n \to \infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$, соответствующий данному произведению, сходится при $x > 1$ и расходится при $0 < x \leqslant 1$. Если же $x \leqslant 0$, то $p_n = \left(1+\frac{1}{n^x}\right)$ не стремится к 1 при $n \to \infty$. Следовательно, произведение $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$ сходится при $x > 1$ и расходится при $x \leqslant 1$.

Пример 6. Исследовать сходимость бесконечного произведения $\prod_{n=0}^{\infty}(1+e^{an})$.

Решение. Если $a \geqslant 0$, то $p_n = 1+e^{a(n-1)}$ не стремится к 1 при $n \to \infty$, следовательно, данное произведение расходится. Пусть $a < 0$. Тогда $\ln(1+e^{an}) \sim e^{-|a|n}$, $n \to \infty$, и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-|a|n}$ сходится, откуда следует сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \ln(1+e^{an})$ и, следовательно, сходимость произведения $\prod_{n=0}^{\infty}(1+e^{an})$.

Как видно из этих примеров, при исследовании сходимости бесконечного произведения $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ удобно представить его сомножители p_n в виде $p_n = 1 + \alpha_n$. Тогда произведение и соответствующий ему ряд принимают вид $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\alpha_n)$ и условие $p_n \to 1$, $n \to \infty$, эквивалентно условию $\alpha_n \to 0$, $n \to \infty$. Если $\alpha_n \to 0$, $n \to \infty$, то $\ln(1+\alpha_n) = \alpha_n - \frac{\alpha_n^2}{2} + o(\alpha_n^2)$, $n \to \infty$. Применяя основную теорему, получим следующие утверждения:

I. Если $p_n = 1 + \alpha_n$ и последовательность α_n локально сохраняет знак, то сходимость произведения $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ эквивалентна сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$.

II. Если $p_n = 1 + \alpha_n$ и оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ сходятся, то произведение $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится.

Заметим, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ сходится абсолютно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ сходится (см. задачу 25, стр. 317).

III. Если один из рядов $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ сходится, а второй **расходится**, то произведение $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ расходится.

Пример 7. Исследовать сходимость бесконечного произведения $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+4n+8}{n^3+1}$.

Решение. Так как $0 < \frac{n^3+4n+8}{n^3+1} - 1 = \frac{4n+7}{n^3+1}$, $n \in \mathbb{N}$, и $\frac{4n+7}{n^3+1} \sim \frac{4}{n^2}$, $n \to \infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+7}{n^3+1}$ сходится и, следовательно, сходится произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+4n+8}{n^3+1}$.

Пример 8. Исследовать сходимость бесконечного произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение. Так как $\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1<0$, $n\in\mathbb{N}$, и $1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2n}$, $n\to\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right)$ расходится и, следовательно, расходится произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Пример 9. Исследовать сходимость бесконечного произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+\sin n}{n}\right)$.

Решение. Здесь последовательность $\alpha_n = \frac{n+\sin n}{n} - 1 = \frac{\sin n}{n}$ не сохраняет локально знака, поэтому необходимо рассмотреть оба ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$. Так как первый ряд сходится в силу признака Дирихле, а второй — в силу теоремы сравнения, то произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+\sin n}{n}\right)$ сходится.

Пример 10. Исследовать сходимость бесконечного произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$.

Решение. Так же как и в предыдущем примере, необходимо рассмотреть оба ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Первый ряд сходится в силу признака Лейбница, а второй — гармонический ряд — расходится. Следовательно, произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$ расходится.

Пример 11. Исследовать сходимость бесконечного произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{[\log_2 n]}}{n}\right)$.

Решение. Опять необходимо рассмотреть два ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\log_2 n]}}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Второй ряд сходится. Таким образом, сходимость данного произведения эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\log_2 n]}}{n}$. Покажем, что он расходится, пользуясь критерием Коши. Так как $[\log_2 n]$ сохраняет знак, если $2^m \leqslant n < 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$, то

$$\left|\sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1}\frac{(-1)^{[\log_2 n]}}{n}\right| = \sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1}\frac{1}{n} > \frac{2^m}{2^{m+1}} = \frac{1}{2}.$$

В силу произвольности $m \in \mathbb{N}$ полученное неравенство показывает расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\log_2 n]}}{n}$ и, следовательно, расходимость произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{[\log_2 n]}}{n}\right)$.

Пример 12. Исследовать сходимость бесконечного произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где

$$a_{2m-1} = \left(1+\frac{1}{\sqrt{m}}\right), \quad a_{2m} = \left(1-\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{m}\right), \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Решение. В этом случае

$$\alpha_n = a_n - 1 = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{m}}, & n = 2m-1, \\ \dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{\sqrt{m}}, & n = 2m, \end{cases} \qquad m \in \mathbb{N}$$

и оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ расходятся, поэтому ни одно из вышеприведенных утверждений не позволяет сделать вывод о сходимости или расходимости данного произведения. Рассмотрим непосредственно последовательность $P_n = \prod_{q=1}^{n} a_q$. Соотношения

$$P_{2n} = \prod_{q=1}^{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{q}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{q}}+\frac{1}{q}\right) = \prod_{q=1}^{n}\left(1+\frac{1}{q\sqrt{q}}\right),$$

$$P_{2n+1} = P_{2n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

показывают, что сходимость последовательности P_n эквивалентна сходимости последовательности $P_m^* = \prod_{q=1}^{m}\left(1+\frac{1}{q\sqrt{q}}\right)$, т. е. произведения $\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{m\sqrt{m}}\right)$. Так как ряд $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\sqrt{m}}$ сходится, то и произведение $\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{m\sqrt{m}}\right)$, и, следовательно, произведение $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ сходятся.

Теорема. Бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$, $p_n > 0$, расходится к нулю тогда и только тогда, когда $\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\ln p_n = -\infty$.

Следствие. Бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$, $\alpha_n > -1$, $n \in \mathbb{N}$, расходится к нулю, если

1. $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, $-1 < \alpha_n < 0$, $n \in \mathbb{N}$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ расходится;

2. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ расходится.

Пример 13. Исследовать сходимость бесконечного произведения $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n+2}{2n+3}$.

Решение. В этом случае $\alpha_n = \dfrac{2n+2}{2n+3} - 1 = \dfrac{-1}{2n+3} < 0$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$ расходится. Следовательно, данное произведение расходится к нулю.

Точно так же расходятся к нулю и бесконечные произведения из примеров 8 и 10 (стр. 66).

Определение. Бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$, $p_n > 0$, сходится абсолютно, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ сходится абсолютно.

Бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$, $p_n > 0$, сходится условно, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ сходится условно.

Критерий абсолютной сходимости бесконечного произведения. Бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$, $p_n > 0$, сходится абсолютно тогда и только тогда, когда абсолютно сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (p_n - 1)$.

Пример 14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^\alpha \ln(n+1)}\right)$, $\alpha > 0$.

Решение. Так как $\frac{1}{n^\alpha \ln(n+1)} > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то сходимость этого произведения может быть только абсолютная. Согласно критерию абсолютной сходимости, рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln(n+1)}$. Так как в силу интегрального признака этот ряд сходится (абсолютно) при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \leqslant 1$, то и данное бесконечное произведение абсолютно сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \leqslant 1$.

Пример 15. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha \ln(n+1)}\right)$, $\alpha > 0$.

Решение. Так как $\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha \ln(n+1)}\right| = \dfrac{1}{n^\alpha \ln(n+1)}$, то данное произведение сходится абсолютно одновременно с бесконечным произведением, рассмотренным в предыдущем примере, т. е. при $\alpha > 1$. Далее, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha \ln(n+1)}$ сходится при всех $\alpha > 0$ в силу признака Лейбница, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{2\alpha} \ln^2(n+1)}$ сходится при $\alpha \geqslant \dfrac{1}{2}$ и расходится при $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ в силу интегрального признака. Итак, данное произведение абсолютно сходится при $\alpha > 1$, условно сходится при $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$ и расходится (к нулю) при $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

Рассмотрим некоторые приложения.

I. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)} = 0$, если $0 < \beta < \alpha$. Действительно, выражение $\dfrac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}$ можно рассматривать как частичное произведение P_{n+1} бесконечного произведения $\prod\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\beta+n)}{(\alpha+n)}$. Поскольку $\dfrac{\beta+n}{\alpha+n} - 1 = \dfrac{\beta-\alpha}{\alpha+n} < 0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+n}$ расходится, то произведение $\prod\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\beta+n}{\alpha+n}$ расходится к нулю, а это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)} = 0$ $(0 < \beta < \alpha)$.

II. Исследуем поведение ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} n^n}{n! e^n}$. Этот ряд — знакочередующийся, причем

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)! e^{n+1}} \cdot \frac{n! e^n}{n^n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e} < 1,$$

т. е. последовательность $|a_n|$ монотонна. Следовательно, сходимость этого ряда эквивалентна выполнению равенства $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{n!e^n}=0$. Введем обозначения: $b_n=\dfrac{n^n}{n!e^n}$, $p_n=\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ и рассмотрим бесконечное произведение $P=\dfrac{1}{e}\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$. Так как частичное произведение $P_n=\dfrac{1}{e}\cdot p_1\cdot p_2\cdots p_n=\dfrac{b_{n+1}}{eb_1}=b_{n+1}$, то равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{n!e^n}=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$ есть расходимость к нулю этого бесконечного произведения, а эта расходимость эквивалентна условию $\ln p_n<0$, $n\in\mathbb{N}$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ расходится. Так как

$$\ln p_n=\ln\frac{b_{n+1}}{b_n}=\ln\frac{(n+1)^{n+1}}{e(n+1)n^n}=\ln\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e},$$

то первое из этих условий следует из неравенства $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e$, $n\in\mathbb{N}$, а второе — из соотношения

$$\ln\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right)=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1=$$
$$=n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1\sim-\frac{1}{2n},\quad n\to\infty.$$

Итак, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}n^n}{n!e^n}$ сходится.

III. Выведем важную формулу представления функции $\sin x$ бесконечным произведением.

Из формулы Муавра $(\cos z+i\sin z)^m=\cos mz+i\sin mz$, применяя формулу бинома Ньютона и приравнивая коэффициенты при мнимой единице в левой и правой частях, получаем равенство

$$\sin mz=$$
$$=m\cos^{m-1}z\sin z-\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\cos^{m-3}z\sin^3 z+\cdots.$$

Если m нечетно, то все степени $\cos z$ в правой части этого равенства четные, следовательно, $\sin(2n+1)z=\sin z\cdot P(\sin^2 z)$, где $P(y)$ — многочлен степени n. Если $\sin z_0 \neq 0$, а $\sin(2n+1)z_0 = 0$, то, как видно из полученного равенства, число $y = \sin^2 z_0$ является корнем многочлена $P(y)$. Непосредственно проверяется, что таким свойством обладают числа $y_k = \sin^2 \dfrac{m\pi}{2n+1}$, $m = 1, 2, \ldots, n$, причем все они различны. Следовательно, многочлен $P(y)$ имеет n различных действительных корней, ни один из которых не равен нулю, и, тем самым, представляется в виде произведения

$$P(y) = A(y - y_1)\ldots(y - y_n) =$$
$$= B\left(1 - \frac{y}{y_1}\right)\left(1 - \frac{y}{y_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{y}{y_n}\right),$$

где $B = P(0)$. Значение B находится из соотношения

$$P(0) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} = 2n+1.$$

Итак,

$$\sin(2n+1)z = (2n+1)\sin x \cdot \prod_{m=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 \frac{\pi m}{2n+1}}\right)$$

или

$$\sin x = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod_{m=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi m}{2n+1}}\right).$$

Пусть $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Фиксируем число q такое, что $|x| < (q+1)\pi$. Для $n > q$ запишем полученное равенство в виде $\sin x = U_q^{(n)} \cdot V_q^{(n)}$, где

$$U_q^{(n)} = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod_{m=1}^{q}\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi m}{2n+1}}\right)$$

и

$$V_q^{(n)} = \prod_{m=q+1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi m}{2n+1}}\right).$$

Для рассматриваемых x, q, n имеем: $U_q^{(n)} \neq 0$ и, следовательно, $V_q^{(n)} = \dfrac{\sin x}{U_q^{(n)}}$.

Так как при этих x и q имеем

$$\lim_{n\to\infty} U_q^{(n)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left((2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod_{m=1}^{q}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi m}{2n+1}}\right)\right) =$$
$$= x\cdot\prod_{m=1}^{q}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 m^2}\right) = U_q,$$

то существует и предел

$$V_q = \lim_{n\to\infty} V_q^{(n)} = \frac{\sin x}{U_q}.$$

Итак, для $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и любого q, удовлетворяющего неравенству $|x| < (q+1)\pi$, имеем равенство

$$\sin x = U_q\cdot V_q = x\left(\prod_{m=1}^{q}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 m^2}\right)\right)V_q.$$

Из выпуклости вверх функции $y = \sin x$ на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ следует, что $\frac{2}{\pi}\varphi < \sin\varphi$ для $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, откуда получаем, что

$$\sin^2\frac{\pi m}{2n+1} > \frac{4\pi^2 m^2}{\pi^2(2n+1)^2}, \quad m = q+1,\ q+2, \ldots,\ n,$$

и так как $\sin^2\frac{x}{2n+1} \leqslant \frac{x^2}{(2n+1)^2}$, то

$$\prod_{m=q+1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{4m^2}\right) < V_q^{(n)} < 1.$$

Так как ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{x^2}{4m^2}$ при любом x сходится абсолютно, то бесконечное произведение $V_q^* = \prod\limits_{m=q+1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4m^2}\right)$ сходится абсолютно. Так как последовательность $\prod_{m=q+1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{4m^2}\right)$ убывающая, то отсюда получаем неравенство

$$V_q^* < \prod_{m=q+1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{4m^2}\right) < V_q^{(n)} < 1.$$

Переходя в нем к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $V_q^* \leqslant \leqslant V_q \leqslant 1$. Так как $\lim\limits_{q\to\infty} V_q^* = \lim\limits_{q\to\infty} \prod_{m=q+1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4m^2}\right) = 1$, то, переходя в последнем неравенстве к пределу при $q \to \infty$, получаем, что $\lim\limits_{q\to\infty} V_q = 1$, и, следовательно,

$$\sin x = \lim_{q\to\infty} U_q \cdot \lim_{q\to\infty} V_q = \lim_{q\to\infty} x \prod_{m=1}^{q}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 m^2}\right).$$

Итак, получаем формулу:

$$\sin x = x\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 m^2}\right).$$

Заметим, что это равенство было выведено при условии, что $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Но если $x = k_0\pi$, $k_0 \in \mathbb{Z}$, то левая его часть равна нулю и правая часть также равна нулю, поскольку один из сомножителей в бесконечном произведении обращается в нуль. Таким образом, полученная формула верна для всех $x \in \mathbb{R}$.

§ 3. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ

Отметив в предыдущем параграфе взаимосвязь рядов и последовательностей, мы рассматривали только свойства числовых рядов, поскольку соответствующие свойства числовых последовательностей изучаются ранее. В этом же параграфе центральное место занимает новое понятие — равномерная сходимость, и поэтому свойства последовательностей и рядов будут рассматриваться параллельно.

Определение. Пусть дана последовательность функций $\{f_n(x)\}$, $x \in X$. Точка $x_0 \in X$ называется точкой сходимости этой последовательности, если все функции $f_n(x)$ определены в точке x_0 и числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится.

Определение. Пусть дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Точка $x_0 \in X$ называется точкой сходимости этого ряда, если все члены ряда — функции $u_n(x)$ — определены в точке x_0 и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сходится.

Определение. Совокупность всех точек сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ называется множеством сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$.

Определение. Совокупность всех точек сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется множеством сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Аналогично определяются множества абсолютной и условной сходимости ряда.

На множестве M сходимости последовательности (ряда) определена функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ $\left(S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)$.

Фактически мы уже находили множество сходимости последовательности (ряда), когда исследовали последовательность (ряд), члены которой зависели от некоторого параметра. Так, множество сходимости последовательности $\left\{\frac{1}{n^x}\right\}$ будет множество $M = \{x : \ x > 1\}$, множеством сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{n-1}}$ будет множество $M = \{x : \ |x| > 1\}$ и т. д. Рассмотрим еще два примера.

Пример 1. Последовательность $\{f_n(x)\}$, $f_n(x) = n^x \ln n$, имеет своим множеством сходимости множество $M = \{x : \ x < 0\}$ — отрицательную полуось — и сходится на M к нулю.

Пример 2. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$. Если $|x| < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{1+x^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{1+x^{2n}}} = |x| < 1.$$

Если $|x| > 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{1+x^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x|} \sqrt[n]{\frac{1}{1+x^{-2n}}} = \frac{1}{|x|} < 1.$$

Если $|x| = 1$, то $\left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right| = \frac{1}{2}$. В силу радикального признака Коши и необходимого условия сходимости ряда получаем, что множеством сходимости (абсолютной) данного ряда является множество $M = \{x, \ |x| \neq 1\}$ — числовая ось с выколотыми точками 1 и -1.

Пусть M есть множество сходимости последовательности (ряда) и $E \subset M$, тогда будем говорить, что последовательность (ряд) сходится поточечно или, короче, сходится на E.

Определение. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на множестве E и $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in E$. Последовательность $\{f_n(x)\}$ называется равномерно сходящейся на множестве E, если для любого положительного ε можно указать такой номер $\mathcal{N}$, что условие $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ выполнено для всех $x \in E$ и всех $n > \mathcal{N}$.

В этом случае употребляются также выражения: "последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на E к $f(x)$", "сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ на E равномерна".

Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на множестве E, но не удовлетворяет приведенному выше определению, то говорят, что эта последовательность сходится неравномерно на E. Выражение "последовательность $\{f_n(x)\}$ не является равномерно сходящейся на множестве E" принято употреблять тогда, когда последовательность или сходится неравномерно на E, или расходится хотя бы в одной точке множества E. Равномерная сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ на множестве E обозначается: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на E.

Приведем формальную запись этого определения.

$$(f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ на } E) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathcal{N}(\varepsilon) :$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n > \mathcal{N},\ \forall x \in E \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется равномерно сходящимся на множестве E, если последовательность $S_n(x)$ его частичных сумм равномерно сходится на E.

Другими словами, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ является равномерно сходящимся на множестве E, если последовательность его остатков $\{r_k(x)\}$, $r_k = \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} u_n(x)$, сходится к нулю равномерно на E.

Так же, как и для последовательности, для ряда используются термины: "ряд сходится равномерно на E", "сходимость ряда на E равномерна", "ряд сходится неравномерно на множестве E" и "ряд не является равномерно сходящимся на множестве E".

Приведем формальную запись равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на E

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x) \text{ на } E\right) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathcal{N}(\varepsilon) :$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n > \mathcal{N}(\varepsilon),\ \forall x \in E \Longrightarrow |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

или

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x) \text{ на } E\right) \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\mathcal{N}(\varepsilon):$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n > \mathcal{N}(\varepsilon),\ \forall x \in E \Longrightarrow |r_n(x)| < \varepsilon.$$

Пример 3. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}$ на интервале $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Во всех точках этого интервала ряд сходится как геометрическая прогрессия, и его остаток $r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} x^{2n}$ равен $\frac{x^{2k+2}}{1-x^2}$. Из того, что для всех $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ справедливо неравенство $0 \leqslant r_k \leqslant \frac{1}{3\cdot 4^k}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{3\cdot 4^k} = 0$, следует, что данный ряд сходится равномерно на множестве $E = \left\{x :\ |x| < \frac{1}{2}\right\}$.

Пример 4. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}$ на интервале $(-1, 1)$. Как и в предыдущем примере, во всех точках этого интервала ряд сходится и его остаток $r_k = \frac{x^{2k+2}}{1-x^2}$. Покажем, что последовательность $r_k(x)$ неравномерно сходится к нулю на $E = \{x :\ |x| < 1\}$, т. е. данный ряд неравномерно сходится на E. Для этого надо указать такое положительное число ε_0, что для любого номера $\mathcal{N}$ найдутся натуральное число $k_0 > \mathcal{N}$ и точка $x_{\mathcal{N}} \in E$, для которых $r_{k_0}(x_{\mathcal{N}}) > \varepsilon_0$. Действительно, для произвольного $\mathcal{N}$ положим $k = \mathcal{N} + 1$ и $x_{\mathcal{N}} = 1 - \alpha(\mathcal{N})$, $0 < \alpha(\mathcal{N}) < 1$. Тогда, используя неравенство Бернулли*), получаем, что

$$r_{\mathcal{N}+1}(x_{\mathcal{N}}) = \frac{(1-\alpha(\mathcal{N}))^{2\mathcal{N}+4}}{1-\alpha^2(\mathcal{N})} \geqslant \frac{(2\mathcal{N}+4)\alpha(\mathcal{N})}{1-\alpha^2(\mathcal{N})}.$$

Отсюда видно, что если $\alpha(\mathcal{N}) = \frac{1}{\mathcal{N}+1}$, то $r_{\mathcal{N}+1}(x) \geqslant \frac{1}{2}$, что и требовалось доказать.

---

*) Если $a > -1$, то для любого натурального n имеем, что $(1+a)^n > 1 + na$.

Пример 5. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x}{\sqrt{n^2+x^2}}$ на интервале $(0,1)$. Для каждого $x_0 \in (0,1)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x_0}{\sqrt{n^2+x_0^2}}$ знакочередующийся и последовательность $\frac{x_0}{\sqrt{n^2+x_0^2}}$ монотонно стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, в силу теоремы Лейбница, для любого $x \in (0,1)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x_0}{\sqrt{n^2+x_0^2}}$ сходится и его остаток $r_n(x_0)$ удовлетворяет неравенству $|r_n(x_0)| < \frac{x_0}{\sqrt{(n+1)^2+x_0^2}}$. Итак, для всех $x \in (0,1)$ справедливо неравенство $|r_n(x)| < \frac{x}{\sqrt{(n+1)^2+x^2}} < \frac{1}{n+1}$, откуда, если учесть соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, следует, что данный ряд равномерно сходится на интервале $(0,1)$.

Критерий Коши равномерной сходимости последовательности. Для того чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходилась на множестве E, необходимо и достаточно выполнение условия: для любого положительного числа ε можно найти такой номер $\mathcal{N}$, что неравенство $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ справедливо для всех точек x множества E и любой пары натуральных чисел n и m при условии $n > \mathcal{N}$, $m > \mathcal{N}$.

Приведем формальную запись критерия Коши равномерной сходимости последовательности:

$$(f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ на } E) \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\mathcal{N}(\varepsilon):$$
$$\forall n,\ m\in\mathbb{N},\ n>\mathcal{N}(\varepsilon),\ m>\mathcal{N}(\varepsilon),\ \forall x\in E \Longrightarrow |f_n(x)-f_m(x)| < \varepsilon.$$

Критерий Коши равномерной сходимости ряда. Для того чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходился на множестве E, необходимо и достаточно выполнение условия: для любого положительного числа ε можно найти такой номер $\mathcal{N}$, что неравенство $\left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$ справедливо для всех точек x множества E и любой пары натуральных чисел n и p при условии $n > \mathcal{N}$.

Приведем формальную запись критерия Коши равномерной сходимости ряда:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x) \text{ на } E\right) \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\mathcal{N}(\varepsilon):$$

$$\forall x \in E,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > \mathcal{N}(\varepsilon) \Longrightarrow \left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Необходимое условие равномерной сходимости ряда. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на множестве E, то последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится к нулю равномерно на E.

Как и для числовых рядов, это условие не является достаточным даже для того, чтобы множество E входило в множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, как показывает следующий пример.

Пример 6. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x+n}$ на интервале $(0,1)$. Неравенство $0 < \dfrac{1}{x+n} < \dfrac{1}{n}$, $x \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$, показывает, что последовательность $\left\{\dfrac{1}{x+n}\right\}$ сходится к нулю равномерно на $(0,1)$, но в то же время для любого значения $x_0 \in (0,1)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x_0+n}$ расходится.

Пример 7. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$ на интервале $(1,2)$. С одной стороны, неравенство $0 < \dfrac{1}{n^x} < \dfrac{1}{n}$, $x \in (1,2)$, $n \in \mathbb{N}$, показывает, что последовательность $\left\{\dfrac{1}{n^x}\right\}$ сходится к нулю равномерно на $(1,2)$. С другой стороны, применяя интегральную оценку остатка ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$ при фиксированном $x \in (1,2)$, получаем, что $r_k(x) > \int\limits_{k+2}^{+\infty}\dfrac{dt}{t^x} = \dfrac{1}{(x-1)(k+2)^{x-1}}$.

Для произвольного $\mathcal{N}$ положим $k = \mathcal{N}+1$ и $x_{\mathcal{N}} = 1 + \dfrac{1}{\mathcal{N}}$, тогда $r_{\mathcal{N}+1}(x_{\mathcal{N}}) > \dfrac{\mathcal{N}}{(\mathcal{N}+3)^{\frac{1}{\mathcal{N}}}} > \dfrac{1}{4}$, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$ сходится неравномерно на $(1,2)$.

На практике удобно пользоваться следующим критерием — фактически переформулировкой определения равномерной сходимости последовательности.

Последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на E к $f(x)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty}\sup|f_n(x) - f(x)| = 0, \ x \in E.$$

Пример 8. Рассмотрим последовательность $\{f_n(x)\}$, $f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx$. Если $x > 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{\pi x}{2}$; если $x < 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = -\dfrac{\pi x}{2}$, $f_n(0) = 0$ для всех n. Следовательно, множеством сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ является вся числовая ось $\mathbb{R}$ и $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{\pi}{2}|x|$.

Оценим $\sup\left|\dfrac{\pi}{2}|x| - x\operatorname{arctg} nx\right|$, $x \in \mathbb{R}$. В силу четности функций $y = x\operatorname{arctg} nx$, $y = \dfrac{\pi}{2}|x|$ и неравенств $|\operatorname{arctg} nx| < \dfrac{\pi}{2}$, $|\operatorname{arctg}\alpha| \leqslant |\alpha|$ имеем, что

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\left|\frac{\pi}{2}|x| - x\operatorname{arctg} nx\right| = \sup_{x\geqslant 0} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx\right) =$$
$$= \sup_{x>0}(x \operatorname{arcctg} nx) = \sup_{x>0} x \operatorname{arctg}\frac{1}{nx} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Отсюда получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|f_n(x) - f(x)| = 0$ и, следовательно, последовательность $\{f_n(x)\}$, $f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx$, равномерно сходится на $\mathbb{R}$ к $\frac{\pi}{2}|x|$.

Пример 9. Рассмотрим последовательность $\{f_n(x)\}$, $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$. Как и в предыдущем примере, получаем, что эта последовательность сходится на всей числовой оси $\mathbb{R}$ и $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x$. Так как

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \left|\operatorname{arctg} nx - \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x\right| = \sup_{x>0} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(n\cdot\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

то последовательность $\{f_n(x)\}$ неравномерно сходится к $\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x$ на $\mathbb{R}$.

Обратим внимание на то, что равномерная сходимость последовательности (ряда) на множестве E является глобальным свойством, характеризующим поведение последовательности на множестве "в целом", т. е. множество рассматривается как единый объект. Поэтому недопустима формулировка локального типа: "последовательность (ряд) равномерно сходится в точках множества E" или "последовательность (ряд) сходится неравномерно в точках множества E". В то же время определение равномерной сходимости имеет смысл и для множества E, состоящего из одной точки: $E = \{x_0\}$, и эквивалентно в этом случае сходимости последовательности (ряда) в точке x_0. Если мы хотим говорить о равномерной сходимости в таком случае, то формулировка должна быть следующей: последовательность (ряд) сходится равномерно на множестве $E = \{x_0\}$ (т. е. не в точке x_0, а на множестве, состоящем из одной точки x_0).

Следующие утверждения немедленно следуют из определения равномерной сходимости.

1. Если последовательности (ряды) $\{f_n(x)\}$ и $\{g_n(x)\}$ $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ и } \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)\right)$ равномерно сходятся на множестве E, то любая их линейная комбинация $\{\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)\}$

$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha u_n(x)+\beta v_n(x))\right)$, где α и β — постоянные, равномерно сходится на E.

2. Если последовательность (ряд) сходится равномерно на множестве E, то сходимость будет равномерной и на любом множестве $E_1 \subset E$.

3. На всяком конечном подмножестве множества сходимости последовательности (ряда) эта последовательность (ряд) сходится равномерно.

4. Если последовательность (ряд) равномерно сходится на каждом из множеств E_1 и E_2, то на множестве $E = E_1 \cup E_2$ эта последовательность (ряд) сходится равномерно.

Внимание! Это утверждение не переносится на бесконечное объединение множеств, как показывает следующий пример.

Пример 10. Рассмотрим последовательность $\{f_n(x)\}$, $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$, на множестве $E_m = \left[\frac{1}{m}, +\infty\right)$ при фиксированном $m \in \mathbb{N}$. Так как для $x \in E_m$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2}$ и $\sup\limits_{x\in E_m}\left|\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx\right| = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{n}{m} \to 0$, $n \to \infty$, то на E_m последовательность $\{\operatorname{arctg} nx\}$ сходится равномерно. Но, как было показано в предыдущем примере, $\sup\limits_{x>0}\left|\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx\right| \geqslant \frac{\pi}{4}$, т. е. на множестве $(0, +\infty) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$ эта последовательность сходится неравномерно.

5. Понятие равномерной сходимости на множестве предполагает, что рассматриваемая функциональная последовательность (функциональный ряд) определена на данном множестве. Иногда удобно рассматривать числовую последовательность (числовой ряд) как последовательность (ряд) функций, каждая из которых есть константа на данном множестве. Сходимость такой последовательности (ряда) на любом множестве равномерна.

Как и в случае поточечной сходимости, при исследовании равномерной сходимости ряда непосредственный анализ поведения последовательности $\{S_n(x)\}$ или $\{r_n(x)\}$ в подавляющем большинстве заменяется косвенным — применением признаков равномерной сходимости, выраженных через свойства членов ряда.

Признак Вейерштрасса (мажорантный признак). Если для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ существует сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ такой, что $|u_n(x)| \leqslant a_n$ для всех $x \in E$ и $n \in \mathbb{N}$ (мажорантный ряд), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на E.

Область применения признака Вейерштрасса — исследование абсолютно сходящихся, в частности, знакопостоянных рядов. Но множество функциональных рядов, для которых на множестве E существует сходящийся мажорантный числовой ряд, уже множества рядов, абсолютно и равномерно сходящихся на E. Дело в том, что при применении признака Вейерштрасса остаток $r_k(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ оценивается неравенством $\sup_{x\in E} |r_k(x)| \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} \sup_{x\in E} |u_n(x)|$, а такая оценка может оказаться слишком завышенной, т. е. последовательность $\{\tilde{r}_k\}$, $\tilde{r}_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} \sup_{x\in E} |u_n(x)|$ может не стремиться к нулю, в то время как последовательность $\{r_k(x)\}$ равномерно сходится к нулю на E.

Приведем соответствующий пример.

Пример 11. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, где

$$u_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \dfrac{1}{2^n}\right), \\ \dfrac{1}{n}\sin^2 2^n \pi x, & x \in \left[\dfrac{1}{2^n}, \dfrac{1}{2^{n-1}}\right], \\ 0, & x \in \left(\dfrac{1}{2^{n-1}}, 1\right], \ n \geqslant 2. \end{cases}$$

В каждой точке $x_0 \in [0,1]$ все члены ряда, кроме, может быть, одного, обращаются в нуль (в точках $x_k = \frac{1}{2^k}$ все члены ряда равны нулю). Отсюда получаем, что

$$r_k(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n(x) =$$

$$= \begin{cases} 0, & x \in \left(\frac{1}{2^k}, 1\right], \\ \frac{1}{n}\sin^2 2^n\pi x, & x \in \left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right], \ n \geqslant k+1, \end{cases}$$

следовательно,

$$\sup_{x\in[0,1]} |r_k(x)| = \frac{1}{k+1}, \quad \lim_{k\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |r_k(x)| = 0,$$

т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на отрезке $[0,1]$. С другой стороны, $M_n = \sup\limits_{x\in[0,1]} |u_n(x)| = \frac{1}{n}$, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ расходится. Итак, для абсолютно (поскольку $u_n(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [0,1]$) и равномерно на $[0,1]$ сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ не существует сходящегося числового мажорантного ряда.

При анализе функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ методом Вейерштрасса оптимальным — с наиболее точной оценкой — мажорантным рядом является ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sup\limits_{x\in E} |u_n(x)|$. Однако часто бывает достаточно более грубой, но легче получаемой оценки для $|u_n(x)|$. Приведем несколько характерных примеров.

Пример 12. Проверим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(x^n + 3x^{-n})$ равномерно сходится на $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

Решение. Первое слагаемое в сумме $x^n + 3x^{-n}$ принимает наибольшее значение в точке $x_1 = 2$, второе — в точке $x_2 = \frac{1}{2}$. Следовательно, для всех $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ имеем, что $0 \leqslant \frac{1}{n!}(x^n + 3x^{-n}) \leqslant \frac{4 \cdot 2^n}{n!}$, и в силу признака Вейерштрасса получаем, что данный ряд сходится равномерно на $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

Замечание. Точная оценка

$$\frac{1}{n!}(x^n + 3x^{-n}) \leqslant \sup_{x \in [\frac{1}{2}, 2]} \left(\frac{1}{n!}(x^n + 3x^{-n})\right)$$

дает мажорантный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^n}{n!}$, члены которого имеют тот же порядок малости, что и полученный.

Пример 13. а) Проверим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$.

б) Проверим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{x}{n^2}}{\sqrt{n^2 + x^2}}$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$.

Для любых α имеем неравенство $|\sin \alpha| \leqslant \min\{|\alpha|, 1\}$. Отсюда видно, что, желая получить лучшую оценку для $|\sin \alpha|$, надо брать оценку $|\sin \alpha| \leqslant 1$, если α принимает значение вне отрезка $[-1, 1]$, и оценку $|\sin \alpha| \leqslant |\alpha|$, если $\alpha \in [-1, 1]$.

В пункте а) при $x \neq 0$ аргумент синуса принимает сколь угодно большие значения, поэтому удобна оценка $|\sin nx| \leqslant 1$. Итак,

$$|u_n(x)| = \left|\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}} < \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$$

для всех $x \in \mathbb{R}$, следовательно, в силу признака Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

В пункте б) для любого $x \in \mathbb{R}$ имеем $\frac{x}{n^2} \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому удобна оценка $\left|\sin\frac{x}{n^2}\right| \leqslant \left|\frac{x}{n^2}\right|$. Итак,

$$|u_n(x)| = \frac{\left|\sin\frac{x}{n^2}\right|}{\sqrt{n^2+x^2}} \leqslant \frac{|x|}{n^2\sqrt{n^2+x^2}} < \frac{1}{n^2}$$

для всех $x \in \mathbb{R}$, следовательно, в силу признака Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{x}{n^2}}{\sqrt{n^2+x^2}}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

Проверьте, что в пункте а) оценка $|\sin nx| \leqslant |nx|$, а в пункте б) оценка $\left|\sin\frac{x}{n^2}\right| \leqslant 1$ не дают сходящихся мажорантных рядов.

Внимание! При анализе ряда в пункте б) использовалось неравенство $|\sin\alpha| \leqslant |\alpha|$, а не соотношение эквивалентности $\sin\alpha \sim \alpha$, $\alpha \to 0$. Из соотношения $u_n(x) \sim v_n(x)$, $n \to \infty$, вообще говоря, не следует одновременная равномерная или неравномерная сходимость рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ даже при условии $u_n(x) \geqslant 0$, $v_n(x) \geqslant 0$.

Приведем соответствующий пример.

Пример 14. Рассмотрим ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x^2+n^2)}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^3}$, $x \in \mathbb{R}$. С одной стороны имеем, что $\frac{x}{nx^2+n^3} \sim \frac{x}{n^3}$, $n \to \infty$. С другой стороны, неравенство

$$\left|\frac{x}{n(x^2+n^2)}\right| = \frac{1}{n^2}\frac{|xn|}{x^2+n^2} \leqslant \frac{1}{2n^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

в силу признака Вейерштрасса показывает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x^2+n^2)}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$, а соотношение $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \frac{|x|}{n^3} = +\infty$ — что последовательность $\left\{\frac{x}{n^3}\right\}$ неравномерно сходится к нулю на $\mathbb{R}$ и, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^3}$ неравномерно сходится на $\mathbb{R}$.

Пример 15. Проверим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ равномерно сходится на $[0,1]$.

Решение. Поскольку $\sup\limits_{x\in[0,1]} x^2 = 1$ и $\sup\limits_{x\in[0,1]} e^{-nx} = 1$, то оценка $\sup\limits_{x\in[0,1]} x^2e^{-nx} \leqslant \sup\limits_{x\in[0,1]} x^2\cdot \sup\limits_{x\in[0,1]} e^{-nx} = 1$ не дает сходящегося мажорантного ряда. Найдем $\sup\limits_{x\in[0,1]} x^2e^{-nx}$. Поскольку $(x^2e^{-nx})' = xe^{-nx}(2-nx)$, то $\sup\limits_{x\in[0,1]} x^2e^{-nx} = \left(\frac{2}{n}\right)^2 e^{-2} = \frac{4}{e^2n^2}$, следовательно, $0 \leqslant x^2e^{-nx} \leqslant \frac{4}{e^2n^2}$, $x\in[0,1]$, и в силу признака Вейерштрасса данный ряд сходится равномерно на $[0,1]$.

Пример 16. Проверим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^4+x^2}\ln\frac{(n^2+x^2)^2}{n^4+x^4}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

Решение. Найти $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \frac{x}{n^4+x^2}\ln\frac{(n^2+x^2)^2}{n^4+x^4}$ технически сложно, поэтому попробуем провести оценки каждого из сомножителей. Используя неравенства $\ln(1+\alpha) \leqslant \alpha$, $\alpha > 0$, и $2|xy| \leqslant x^2+y^2$, получим, что

$$\ln\frac{(n^2+x^2)^2}{n^4+x^4} = \ln\left(1+\frac{2n^2x^2}{n^4+x^4}\right) \leqslant \frac{2n^2x^2}{n^4+x^4} \leqslant 1.$$

Так как $\left(\frac{x}{n^4+x^2}\right)' = \frac{n^4-x^2}{(n^4+x^2)^2}$, то $\left|\frac{x}{n^4+x^2}\right| \leqslant \frac{n^2}{n^4+n^4} = \frac{1}{2n^2}$ и, следовательно, $\frac{x}{n^4+x^2}\ln\frac{(n^2+x^2)^2}{n^4+x^4} \leqslant \frac{1}{2n^2}$. Итак, в силу признака Вейерштрасса, данный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

Определение. Последовательность $\{f_n(x)\}$ называется равномерно ограниченной на множестве E, если существует такая константа M, что неравенство $|f_n(x)| \leqslant M$ справедливо для всех $n\in\mathbb{N}$ и всех $x\in E$.

Признак Дирихле. Если члены функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ могут быть представлены в виде $u_n(x) = a_n(x)b_n(x)$, где

а) последовательность сумм $\sum_{n=1}^{m} a_n(x)$ равномерно ограничена на множестве E,

б) для каждого $x_0 \in E$ последовательность $b_n(x_0)$ монотонна ($\{b_n(x)\}$ монотонна относительно параметра n),

в) последовательность $\{b_n(x)\}$ сходится к нулю равномерно на E,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно на E.

Признак Абеля. Если члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ могут быть представлены в виде $u_n(x) = a_n(x)b_n(x)$, где

а) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно сходится на E,

б) для каждого $x_0 \in E$ последовательность $\{b_n(x_0)\}$ монотонна (последовательность $\{b_n(x)\}$ монотонна относительно параметра n),

в) последовательность $\{b_n(x)\}$ равномерно ограничена на E,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно на E.

Так же, как и для числовых рядов, область применения признаков Абеля и Дирихле — неабсолютно сходящиеся ряды. При исследовании конкретных рядов с помощью этих признаков монотонность последовательности $\{b_n(x)\}$ относительно n часто не требует особого анализа — она очевидна. Но грубой (и частой!) ошибкой является пропуск указания на то, что это условие выполнено. Отметим, что именно при применении признаков Абеля и Дирихле иногда возникает необходимость рассматривать числовые последовательности или ряды как равномерно сходящиеся на данном множестве.

Пример 17. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$

а) на интервале $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < \pi$;

б) на интервале $(0, 2\pi)$.

а) Так как $\left|\sum_{n=1}^{m}\sin nx\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$, $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то для $x \in (\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$ имеем, что $\left|\sum_{n=1}^{m}\sin nx\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{\varepsilon}{2}\right|} \leqslant \frac{\pi}{\varepsilon}$. Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ монотонно сходится к нулю при $n \to \infty$. А поскольку эта последовательность числовая, то сходимость равномерна на любом множестве, в том числе и на $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$. Итак, в силу признака Дирихле на интервале $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < \pi$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ сходится равномерно.

б) На интервале $(0, 2\pi)$ приведенное в пункте а) рассуждение уже неприменимо, так как оценка $\left|\sum_{n=1}^{m}\sin nx\right| < \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$ не дает возможности равномерно ограничить последовательность $\left\{\sum_{n=1}^{m}\sin nx\right\}$ на $(0, 2\pi)$. Эта оценка дает только возможность утверждать, что для любого фиксированного $x \in (0, 2\pi)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ сходится (этот результат был получен при рассмотрении числовых рядов), т. е. интервал $(0, 2\pi)$ входит в множество сходимости рассматриваемого ряда. Пользуясь критерием Коши, покажем, что на $(0, 2\pi)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ сходится неравномерно, т. е. можно указать такое число $\varepsilon > 0$, что для любого номера $\mathcal{N}$ найдутся такие значения p, $n \in \mathbb{N}$, $n > \mathcal{N}$, и $x_n \in (0, 2\pi)$, что $\left|\sum_{k=n}^{n+p}\frac{\sin kx_n}{k}\right| \geqslant \varepsilon$. Прежде всего подберем $x_n \in (0, 2\pi)$ так, чтобы на достаточно большом промежутке изменения k: $n \leqslant k \leqslant n + p$ величина $\sin kx_n$ была отделена от нуля. Если взять $x_n = \frac{\pi}{6n}$, то для $n \leqslant k \leqslant 5n$ имеем, что $\sin kx_n \geqslant \frac{1}{2}$. Для произвольного номера $\mathcal{N}$ положим $n = \mathcal{N} + 1$, тогда

$$\left|\sum_{k=n}^{5n} \frac{\sin kx_n}{k}\right| \geqslant \frac{1}{2}\left|\sum_{k=n}^{5n} \frac{1}{k}\right| > \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5n}\cdot 4n = \frac{2}{5},$$

следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ сходится неравномерно на $(0, 2\pi)$.

Замечание 1. Еще раз обращаем внимание на то, что признаки равномерной сходимости Вейерштрасса, Абеля и Дирихле — достаточные. Для утверждения, что данный ряд сходится неравномерно, обычно опираемся или на критерий Коши, или на его следствие — необходимый признак равномерной сходимости.

Замечание 2. Сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ на $(0, 2\pi)$ можно обосновать и так: $(0, 2\pi) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{m}, 2\pi - \dfrac{1}{m}\right)$; на каждом интервале $\left(\dfrac{1}{m}, 2\pi - \dfrac{1}{m}\right)$ данный ряд сходится (даже равномерно), следовательно, этот ряд сходится и на $(0, 2\pi) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{m}, 2\pi - \dfrac{1}{m}\right)$. Здесь отчетливо видна разница между глобальным (рассматривающим множество "в целом") свойством равномерной сходимости и локальным (рассматривающим множество как совокупность точек) свойством поточечной сходимости. Локальное свойство естественно сохраняется при объединении множеств — оно имеет место в каждой точке каждого множества, следовательно, и в каждой точке их объединения, — а глобальное свойство при таком объединении может и не сохраняться, что и имеет место в данном примере.

Замечание 3. Из того, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ на $(0, 2\pi)$ сходится неравномерно, следует, что последовательность $\left\{\sum\limits_{n=1}^{m} \sin nx\right\}$ не является равномерно ограниченной на $(0, 2\pi)$. Более глубокий анализ, выходящий за обычный объем нашего курса, показывает, что оценка $\left|\sum\limits_{n=1}^{m}\sin nx\right| \leqslant \dfrac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$ завышена, но отражает качественную характеристику — неограниченный рост $\sup\limits_{x\in(\varepsilon,2\pi-\varepsilon)}\left|\sum\limits_{n=1}^{m}\sin nx\right|$ при $\varepsilon \to 0+$ и $m \to +\infty$.

Пример 18. Проверим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\cos nx)\sin x \operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n^2+x^2}}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

Так как

$$\left|\sum_{n=1}^{m}(\cos nx)\sin x\right| = \left|\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2}(\sin(n+1)x - \sin(n-1)x)\right| =$$
$$= \frac{1}{2}|\sin(m+1)x + \sin mx - \sin x| \leqslant \frac{3}{2},$$

то достаточно показать, что последовательность $\left\{\dfrac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n^2+x^2}}\right\}$ монотонна относительно n и равномерно сходится к нулю на $\mathbb{R}$. Второе утверждение следует из неравенства

$$\left|\frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n^2+x^2}}\right| \leqslant \frac{\pi}{2n}, \quad x \in \mathbb{R},$$

а первое требует более глубокого анализа. Поэтому применим другой способ. Рассмотрим сначала ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx \sin x}{\sqrt{n^2+x^2}}$. Из полученных выше соотношений следует, что этот ряд удовлетворяет условиям признака Дирихле, если $a_n = (\cos nx)\sin x$ и $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}$, следовательно, сходится равномерно на $\mathbb{R}$. Последовательность $\{\operatorname{arctg} nx\}$ монотонна относительно n (на это достаточно указать) и равномерно ограничена: $|\operatorname{arctg} nx| < \dfrac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, в силу признака Абеля ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\cos nx)\sin x \operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n^2+x^2}}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

Внимание! Иногда при применении признака Дирихле из неравенства $0 \leqslant b_n(x) \leqslant \beta_n$, $x \in E$, где β_n — монотонная бесконечно малая последовательность, делается совершенно необоснованный вывод о монотонности последовательности $b_n(x)$ относительно n. Это является грубой ошибкой.

Пример 19. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\cos nx)\cos nx}{n}$. Для всех $x \in \mathbb{R}$ члены последовательности $\left\{\frac{1-\cos nx}{n}\right\}$ удовлетворяют неравенству $0 \leqslant \frac{1-\cos nx}{n} \leqslant \frac{2}{n}$, следовательно, $\frac{1-\cos nx}{n} \rightrightarrows 0$ на $\mathbb{R}$. Если бы эта последовательность была и монотонна относительно n на $\mathbb{R}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\cos nx)\cos nx}{n}$ сходился бы равномерно на $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Положим $x_0 = \frac{\pi}{2}$, тогда

$$\frac{(1-\cos nx_0)\cos nx_0}{n} = \begin{cases} 0, & n = 4k, \\ 0, & n = 4k+1, \\ -\frac{2}{n}, & n = 4k+2, \\ 0, & n = 4k+3. \end{cases}$$

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{4k+2}$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\cos nx_0)\cos nx_0}{n}$. Итак, хотя последовательность $\left\{\sum\limits_{n=1}^{k} \cos nx\right\}$ равномерно ограничена на $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ и последовательность $\left\{\frac{1-\cos nx}{n}\right\}$ равномерно стремится к нулю на $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\cos nx)\cos nx}{n}$ не только не сходится равномерно на $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, но даже расходится, по крайней мере, в одной точке этого отрезка. Признак Дирихле в данном случае не применим, поскольку нарушено условие монотонности относительно n последовательности $\left\{\frac{1-\cos nx}{n}\right\}$.

Из критерия Коши выводится следующее утверждение.

Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывны на замкнутом множестве F и ряд сходится равномерно на множестве внутренних точек F. Тогда этот ряд сходится равномерно на F.

Это утверждение позволяет в некоторых случаях установить неравномерную сходимость ряда. Именно, если рассматривается ряд, члены которого непрерывны на замкнутом множестве F, но ряд расходится в некоторой граничной точке множества F, то тогда ряд сходится неравномерно на множестве внутренних точек F.

Приведем соответствующий пример.

Пример 20. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arcctg} nx}{n}$ а) на луче $(\varepsilon, +\infty)$, $\varepsilon > 0$, б) на луче $(0, +\infty)$.

а) Если $x \in (\varepsilon, +\infty)$, $\varepsilon > 0$, то

$$0 \leqslant \frac{\operatorname{arcctg} nx}{n} = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{nx} \leqslant \frac{1}{n^2 x} \leqslant \frac{1}{n^2 \varepsilon},$$

следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arcctg} nx}{n}$ сходится равномерно на $(\varepsilon, +\infty)$, $\varepsilon > 0$.

б) В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ и неравенства

$$0 \leqslant \frac{\operatorname{arcctg} nx}{n} \leqslant \frac{1}{n^2 \varepsilon}$$

заключаем, что луч $(0, +\infty)$ входит в множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arcctg} nx}{n}$. Поскольку все члены этого ряда непрерывны на $[0, +\infty)$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arcctg} 0}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2n}$ расходится, то делаем вывод, что на луче $(0, +\infty)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arcctg} nx}{n}$ сходится неравномерно.

Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов.

Теорема о непрерывности предела последовательности (суммы ряда). Если все члены последовательности (ряда) непрерывны относительно множества E*) в точке $x_0 \in E$ и последовательность (ряд) сходится равномерно на E, то предельная функция (сумма ряда) непрерывна в точке $x_0 \in E$ относительно множества E.

Обратим внимание на сочетание локальных и глобальных свойств последовательности (ряда) относительно множества в формулировке этой теоремы. Равномерная сходимость — глобальное свойство, а непрерывность в точке — свойство локальное. Разумеется, если члены последовательности (ряда) непрерывны относительно E в каждой точке $x \in E$, то при условии равномерной сходимости этой последовательности (ряда) на E предельная функция (сумма ряда) непрерывна на E относительно этого множества.

Теорема о почленном интегрировании последовательности (ряда). Если все члены последовательности $\{f_n(x)\}$ (ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$) интегрируемы в смысле Римана на отрезке $[a,b]$ и последовательность $\{f_n(x)\}$ (ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$) сходится равномерно на $[a,b]$, то функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ $(S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x))$ интегрируема на $[a,b]$ и для любого $x_0 \in [a,b]$ имеем, что $\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ на $[a,b]$ $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} S(t)\,dt \text{ на } [a,b]\right)$.

---

*) Функция $f(x)$ непрерывна относительно множества — это значит, что сужение функции на это множество непрерывно.

Теорема о почленном дифференцировании последовательности (ряда). Если все члены последовательности $\{f_n(x)\}$ (ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$) дифференцируемы на $[a,b]$, последовательность $\{f_n'(x)\}$ (ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$) сходится равномерно на $[a,b]$, последовательность $\{f_n(x)\}$ (ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$) сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a,b]$, то последовательность $\{f_n(x)\}$ (ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$) сходится равномерно на $[a,b]$ к дифференцируемой на $[a,b]$ функции и $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ $\left(\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)\right)$ для всех $x \in [a,b]$.

Условие равномерной сходимости последовательности (ряда) производных в теореме о почленном дифференцировании естественно потребовало существования этих производных на всем отрезке $[a,b]$. Таким образом, хотя эта теорема и говорит о локальном свойстве — дифференцируемости предела последовательности (суммы ряда), но условия ее более глобальные, чем условия теоремы о непрерывности.

Отметим еще, что все три теоремы — о непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости предела последовательности (суммы ряда) дают только достаточные условия того, что предельная функция (сумма ряда) обладает соответствующими свойствами (см. задачи 60, 61, 62, 63 стр. 324–325).

Обращением (с некоторыми дополнительными условиями) теоремы о непрерывности предельной функции (суммы ряда) является теорема Дини.

Теорема Дини для последовательности. Если все функции последовательности $\{f_n(x)\}$ непрерывны на компакте K, последовательность монотонна относительно n и функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ определена и непрерывна на K, то $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на K.

Теорема Дини для рядов. Если все члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывны и неотрицательны на компакте K и на этом компакте ряд сходится к непрерывной функции $S(x)$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на K.

Пример 21. Определим область существования функции $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, где $u_n(x) = n^2x^2e^{-n^2x^2}$, и исследуем ее непрерывность.

Так как для всех $n \in \mathbb{N}$ функция $u_n(x)$ четная и $u_n(0) = 0$, а для $x \neq 0$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2x^2e^{-n^2x^2}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}}x^{\frac{2}{n}}e^{-nx^2} = 0,$$

то функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой $\mathbb{R}$, является четной функцией и $f(0) = 0$. Так как

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} u_n(x) \geqslant u_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-1},$$

то на $\mathbb{R}$ не выполнено необходимое условие равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ — последовательность $\{u_n(x)\}$ неравномерно сходится к нулю на $\mathbb{R}$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится неравномерно на $\mathbb{R}$ и его сумма $f(x)$ не обязана быть непрерывной на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим луч $E_m = \left(\frac{1}{m}, +\infty\right)$, $m \in \mathbb{N}$. Так как

$$u_n'(x) = 2n^2x(1 - n^2x^2)e^{-n^2x^2},$$

то для $n > m$ и $x \in E_m$ имеем, что $0 \leqslant u_n(x) \leqslant u_n\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{n^2}{m^2}e^{-\frac{n^2}{m^2}}$, следовательно, на луче E_m ряд из непрерывных функций $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно. Отсюда получаем, что функция $f(x)$ непрерывна на каждом луче E_m и, тем самым, на их объединении — луче $(0, +\infty) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$. Осталось невыясненным поведение $f(x)$ в точке $x_0 = 0$.

Так как $0 \leqslant u_n(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$, то $f\left(\frac{1}{q}\right) > u_q\left(\frac{1}{q}\right) = e^{-1}$, т. е. существует последовательность $x_q = \frac{1}{q}$, сходящаяся к нулю, для которой значения $f(x_q) > e^{-1}$ не сходятся к $f(0) = 0$. Это показывает, что точка $x_0 = 0$ есть точка разрыва функции $f(x)$.

Замечание. Разрывность $f(x)$ в точке $x_0 = 0$ можно было установить и на основании теоремы Дини. Действительно, в рассматриваемом ряде члены непрерывны и неотрицательны на отрезке $[-1, 1]$; если бы функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ была непрерывна на этом отрезке, то ряд сходился бы на $[-1, 1]$ равномерно. Но было показано, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится неравномерно на $[-1, 1]$, а других точек разрыва кроме $x_0 = 0$ функция $f(x)$ на $[-1, 1]$ не имеет.

Пример 22. Определить область существования, исследовать непрерывность и дифференцируемость функции $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, где $u_n(x) = \frac{1}{n^2} \operatorname{arctg} n^2 x^2$.

Решение. Все функции $u_n(x)$ непрерывны и дифференцируемы на $\mathbb{R}$. Так как $|u_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{2n^2}$ для $x \in \mathbb{R}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$, следовательно, функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ определена и непрерывна на $\mathbb{R}$. Рассмотрим "формально продифференцированный ряд": $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$, где $\varphi_n(x) = u_n'(x) = \frac{2x}{1 + n^4 x^4}$. Так как $\varphi_n(0) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$,

$\varphi_n(x) = -\varphi_n(-x)$ и $|\varphi_n(x)| = \dfrac{2|x|}{1+n^4x^4} \sim \dfrac{2}{n^4x^3}$, $n \to \infty$, для всех $x \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ абсолютно сходится на $\mathbb{R}$ к нечетной функции $\varphi(x)$. Пусть $\dfrac{1}{n+1} < x \leqslant \dfrac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда для $n \leqslant k \leqslant 2n$ справедливы неравенства:

$$\frac{n}{n+1} < kx \leqslant 2; \quad 1 + k^4x^4 \leqslant 17;$$

$$\sum_{k=n}^{2n} \varphi_n(x) > \sum_{k=n}^{2n} \frac{2}{17(n+1)} > \frac{2n}{17(n+1)} > \frac{1}{17}.$$

Отсюда получаем, что, во-первых, в силу критерия Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ сходится на $[-1, 1]$ неравномерно, во-вторых, $\varphi(x) > \dfrac{1}{17}$ для всех $x > 0$ и $\varphi(x) < -\dfrac{1}{17}$ для всех $x < 0$. Итак, на отрезке $[-1, 1]$ не выполнены условия теоремы о почленном дифференцировании ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Возьмем луч $E_m = \left(\dfrac{1}{m}, +\infty\right)$. Для всех $x \in E_m$ справедливо неравенство

$$0 \leqslant \varphi_n(x) = \frac{2x}{1+n^4x^4} = \frac{2n^2x^2}{1+n^4x^4} \cdot \frac{1}{n^2x} \leqslant \frac{m}{n^2},$$

откуда следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ на E_m сходится равномерно. Итак, на E_m выполнены условия теоремы о почленном дифференцировании ряда, следовательно, функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ дифференцируема на E_m и $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in E_m$. Пользуясь локальностью дифференцирования и равенством $(0, +\infty) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$, получаем, что $f(x)$ дифференцируема и $f'(x) = \varphi(x)$ для всех $x > 0$, а в силу четности $f(x)$ и нечетности $\varphi(x)$ это равенство верно и для $x < 0$.

Теперь можно показать, что $f(x)$ не дифференцируема в точке $x_0 = 0$. Действительно, в противном случае $f(x)$ была бы дифференцируема на интервале $(-1, 1)$, причем $f'(x) = \varphi(x)$ для $x \neq 0$. Но функция $f'(x)$ как точная производная должна обладать свойством Дарбу — ее значения должны заполнять промежуток между любыми двумя значениями $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$, x_1, $x_2 \in (-1, 1)$, а это условие противоречит полученным выше неравенствам: $f'(x) = \varphi(x) > \dfrac{1}{17}$, $0 < x < 1$; $f'(x) = \varphi(x) < -\dfrac{1}{17}$, $-1 < x < 0$.

§ 4. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ В СТЕПЕННОЙ РЯД

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, где $\{a_n\}$ — числовая последовательность, называется степенным рядом с начальной точкой z_0. Числа a_n называются коэффициентами данного степенного ряда.

Линейная замена $\xi = z - z_0$ переводит степенной ряд с начальной точкой z_0 в степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$ с начальной точкой в нуле. Те свойства степенных рядов, которые не меняются при линейном переносе, удобнее формулировать для рядов вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Первая теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится в некоторой точке z_0, $|z_0| \neq 0$, то он сходится абсолютно для всех z таких, что $|z| < |z_0|$.

Следствие. Каждому степенному ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ соответствует действительное число $R \geqslant 0$ или символ $+\infty$ так, что для всех $z: |z| < R$ этот ряд сходится абсолютно и для всех $z: |z| > R$ этот ряд расходится (более того, при этих значениях z члены данного ряда не представляют бесконечно малой последовательности).

Число или символ R называется радиусом сходимости данного степенного ряда. Радиус сходимости является основной характеристикой степенного ряда.

Если радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ равен нулю, то множество сходимости этого ряда состоит из единственной точки $z = 0$. Таким образом, этот ряд определяет единственное число a_0.

Если радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ есть символ $+\infty$ ($R = +\infty$), то множеством сходимости этого ряда является вся комплексная плоскость. Таким образом, этот ряд определяет функцию $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ для любого комплексного числа.

Если радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ есть число $R > 0$, то множество сходимости этого ряда представляет собой внутренность круга радиуса R с центром в нуле, т. е. множество $\{z: |z| < R\}$ с возможным добавлением точек, лежащих на границе этого круга. Как будет показано ниже, множество точек сходимости данного ряда на окружности $|z| = R$ может быть пустым, может быть правильной частью этой окружности, может полностью совпадать с ней. Таким образом, этот ряд определяет функцию $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ для всех комплексных чисел, удовлетворяющих условию $|z| < R$, и, может быть, для некоторых или всех чисел, удовлетворяющих условию $|z| = R$.

Если радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ есть число $R > 0$, то открытый круг $\{z : |z - z_0| < R\}$ называют кругом сходимости этого ряда. Если радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ есть символ $+\infty$ ($R = +\infty$), то в целях единообразия формулировок кругом сходимости этого ряда называют всю комплексную плоскость. Еще раз обратим внимание на то, что круг сходимости степенного ряда обязательно входит во множество абсолютной сходимости этого ряда, но не обязательно совпадает с этим множеством и, тем более, со множеством сходимости.

Радиус сходимости R степенного ряда связан с его коэффициентами формулой Коши-Адамара:

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \tag{1}$$

Если $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = A$, то $A = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, следовательно, в таком случае

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}. \tag{2}$$

(Если $A = 0$, то $R = +\infty$).

Какой формулой — (1) или (2) — пользоваться для вычисления радиуса сходимости конкретного степенного ряда, определяется видом зависимости a_n от n. Приведем характерные примеры.

Пример 1. Найти радиус сходимости и множество сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 z^n}{[2n + (n^2-1)i]^n}.$$

Решение. Имеем: $|a_n| = \dfrac{(n!)^2}{(n^2+1)^n}$. Здесь удобно применить формулу (2), поскольку в выражение $|a_n|$ входит $n!$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+2n+2)^{n+1}}{(n+1)^2(n^2+1)^n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+2}{(n+1)^2} \left(1 + \frac{2n+1}{n^2+1}\right)^n = e^2,$$

то радиус сходимости данного ряда $R = e^2$. Для окончательного определения множества сходимости исследуем поведение этого ряда на окружности круга сходимости, т. е. на множестве $|z| = e^2$. Если $|z| = e^2$, то $|a_n z^n| = \dfrac{(n!)^2 e^{2n}}{(n^2+1)^n}$ и

$$\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{(n+1)^2(n^2+1)^n e^2}{(n^2+2n+2)^{n+1}} =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+2}\right) e^{2 - n\ln\left(1 - \frac{2n+1}{n^2+2n+2}\right)} =$$
$$= \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) e^{2 - 2 + \frac{4}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 + \frac{4}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= 1 + \frac{4}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty.$$

Отсюда следует, что положительная последовательность $|a_n z^n|$, $|z| = e^2$, по крайней мере, начиная с некоторого номера, возрастает и, тем самым, не является бесконечно малой. Следовательно, для любого z, $|z| = e^2$, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 z^n}{[2n + (n^2 - 1)i]^n}$ расходится в силу необходимого условия сходимости. Таким образом, множество M сходимости данного ряда совпадает с его кругом сходимости: $M = \{z : |z| < e^2\}$.

Пример 2. Найти радиус сходимости и множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n z^n}{\sqrt[n]{n^{2n} + 1}}$.

Решение. Имеем $|a_n| = \frac{5^n}{\sqrt[n]{n^{2n} + 1}}$. Здесь удобно применить формулу (1). Так как

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to +\infty} \frac{5}{n^{\frac{2}{n}} \left(1 + \frac{1}{n^{2n}}\right)^{\frac{1}{n^2}}} = 5,$$

то радиус сходимости данного ряда $R = \frac{1}{5}$. Для окончательного определения множества сходимости исследуем поведение этого ряда на окружности круга сходимости, т. е. на множестве $|z| = \frac{1}{5}$. Если $|z| = \frac{1}{5}$, то

$$|a_n z^n| = \frac{1}{\sqrt[n]{n^{2n} + 1}} = \frac{1}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}}} \sim \frac{1}{n^2}, \ n \to \infty.$$

Отсюда видно, что данный ряд сходится и притом абсолютно во всех точках окружности $|z| = \frac{1}{5}$. Таким образом, множество M сходимости данного ряда является замыканием его круга сходимости: $M = \left\{z : |z| \leqslant \frac{1}{5}\right\}$.

Заметим, что в данном примере можно было вычислить R и по формуле (2), но это вычисление технически сложнее.

Пример 3. Найти радиус сходимости и множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1-\sqrt{3}i)^n z^n}{n(3+(-1)^n)}$.

Решение. Имеем: $|a_n| = \dfrac{2^n}{n(3+(-1)^n)}$. Здесь последовательность $\dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ не имеет предела (проверьте!), поэтому если в предыдущем примере выбор формулы (1) для вычисления R был сделан из соображений удобства, то в данном примере формула (2) просто не применима. Так как $\dfrac{2}{\sqrt[n]{4n}} \leqslant \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt[n]{n}}$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2$ и, следовательно, радиус сходимости данного ряда $R = \dfrac{1}{2}$. Если $|z| = \dfrac{1}{2}$, то $z = \dfrac{1}{2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ и

$$a_n z^n = \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n}{n(3+(-1)^n)} =$$

$$= \frac{\left[\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n}{n(3+(-1)^n)} =$$

$$= \frac{\left[\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)\right]^n}{n(3+(-1)^n)},$$

и по формуле Муавра получаем, что

$$a_n z^n = \frac{\cos\left[n\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)\right] + i\sin\left[n\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)\right]}{n(3+(-1)^n)}.$$

Таким образом, исследование сходимости данного ряда на окружности круга сходимости состоит в исследовании сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos\left[n\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)\right]}{n(3+(-1)^n)}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\left[n\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)\right]}{n(3+(-1)^n)}$ на $[0, 2\pi)$; именно, если для $\varphi_1 \in [0, 2\pi)$ оба эти ряда сходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ сходится при $z = \dfrac{1}{2}(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, если для $\varphi_2 \in$ $\in [0, 2\pi)$ хотя бы один из этих рядов расходится, то ряд

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ расходится при $z = \dfrac{1}{2}(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left[n\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)\right]}{n\left(3 + (-1)^n\right)} \tag{3}$$

представим как сумму двух рядов

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos\left[m\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)\right], \quad b_m = \begin{cases} 0, & m = 2n-1, \\ \dfrac{1}{4m}, & m = 2n \end{cases}$$

и

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos\left[m\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)\right], \quad c_m = \begin{cases} 2\dfrac{1}{m}, & m = 2n-1, \\ 0, & m = 2n. \end{cases}$$

Отсюда видно, что если оба ряда $A: \sum\limits_{q=1}^{\infty} \dfrac{\cos\left[q\left(2\varphi - \frac{2\pi}{3}\right)\right]}{8q}$ и $B: \sum\limits_{q=1}^{\infty} \dfrac{\cos\left[(2q-1)\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)\right]}{2q-1}$ сходятся, то сходится и ряд (3), если один из этих рядов сходится, а второй расходится, то расходится ряд (3), а если расходятся оба эти ряда, то вопрос о сходимости ряда (3) остается открытым. Из соотношений:

$$\left|\sum_{q=1}^{Q} \cos\left[q\left(2\varphi - \frac{2\pi}{3}\right)\right]\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)\right|},$$

$$\left|\sum_{q=1}^{Q} \cos\left[(2q-1)\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)\right]\right| \leqslant \left|\sum_{m=1}^{2Q} \cos\left[m\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)\right]\right| +$$

$$+ \left|\sum_{m=1}^{Q} \cos\left[m\left(2\varphi - \frac{2\pi}{3}\right)\right]\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right|} + \frac{1}{\left|\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)\right|}$$

в силу признака Дирихле следует сходимость рядов A и B для $\varphi \neq \dfrac{\pi}{3}$ и $\varphi \neq \dfrac{4\pi}{3}$ (мы рассматриваем только $\varphi \in [0, 2\pi)$).

При $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ и $\varphi = \dfrac{4\pi}{3}$ ряды A и B становятся расходящимися рядами:

$$\varphi = \frac{\pi}{3}, \quad A: \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{8q}, \quad B: \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{2q-1};$$

$$\varphi = \frac{4\pi}{3}, \quad A: \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{8q}, \quad B: -\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{2q-1},$$

поэтому при этих значениях φ рассматриваем непосредственно ряд (3). Если $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$, то ряд (3) принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(3+(-1)^n)}$$

и неравенство $\dfrac{1}{n\,(3+(-1)^n)} \geqslant \dfrac{1}{4n}$ показывает, что этот ряд расходится. Если $\varphi = \dfrac{4\pi}{3}$, то ряд (3) принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,(3+(-1)^n)}.$$

Поскольку члены этого ряда стремятся к нулю при $n \to \infty$, то его сходимость эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2(2m-1)} - \frac{1}{8m} \right)$$

(см. стр. 16). Неравенство $\dfrac{1}{2(2m-1)} - \dfrac{1}{8m} > \dfrac{1}{8m}$ показывает расходимость этого ряда и, следовательно, расходимость ряда (3).

Итак, ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left[n\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)\right]}{n\,(3+(-1)^n)}$ сходится при $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\varphi \neq \dfrac{\pi}{3}$, $\varphi \neq \dfrac{4\pi}{3}$, и расходится при $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ и $\varphi = \dfrac{4\pi}{3}$. Совершенно аналогично доказывается, что ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left[n\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)\right]}{n\,(3+(-1)^n)}$ сходится при $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\varphi \neq \frac{\pi}{3}$, $\varphi \neq \frac{4\pi}{3}$, в точках же $\varphi = \frac{\pi}{3}$ и $\varphi = \frac{4\pi}{3}$ все члены этого ряда равны нулю. Окончательно получаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ сходится во всех точках окружности $|z| = \frac{1}{2}$ кроме двух: $z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{4}$ и $z_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{4}$. Таким образом, множеством M сходимости данного ряда является множество M : $\left\{z :\ |z| \leqslant \frac{1}{2},\ z \neq \frac{1+\sqrt{3}i}{4},\ z \neq \frac{-1-\sqrt{3}i}{4}\right\}$.

Ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,[f(z)]^n$ называют обобщенным степенным рядом. Множеством сходимости такого ряда является множество $M = \{z :\ f(z) \in E\}$, где E — множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

Пример 4. Найти множество сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{\left[(5+6\,(-1)^n)^n\,(z-i)\right]^n}.$$

Решение. Положим $t = \frac{z+i}{z-i}$ и найдем множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{[5+6\,(-1)^n]^n}$. Так как $|a_n| = \frac{1}{[6+(-1)^n{\cdot}5]^n}$, то

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{6+5{\cdot}(-1)^n} = 1$$

и, следовательно, $R = 1$. Если $|t| = 1$, то $|a_n t^n| = \frac{1}{[6+5{\cdot}(-1)^n]^n}$ и так как $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{[6+5{\cdot}(-1)^n]^n} = 1$, то последовательность $|a_n t^n|$ не является бесконечно малой. Следовательно, в силу необходимого признака ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ расходится во всех точках окружности $|t| = 1$. Итак, множество E сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(5+6\,(-1)^n)^n}$ совпадает с его кругом сходимости: $E = \{t : |t| < 1\}$. Множеством сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{[(5+6\cdot(-1)^n)\,(z-i)]^n}$ является множество

$$M = \left\{ z : \left| \frac{z+i}{z-i} \right| < 1 \right\},$$

т. е. множество тех комплексных чисел z, для которых расстояние до точки i больше расстояния до точки $-i$ (см. рис. 1).

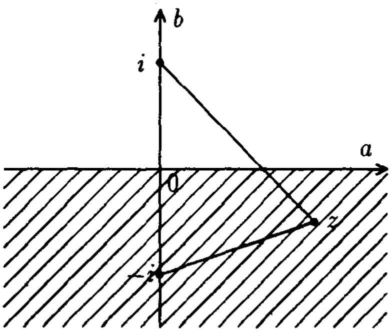


Рис. 1

Таким множеством является комплексная полуплоскость, лежащая ниже действительной оси: $M = \{z : z = a + bi,\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ b < 0\}$.

Вопрос о свойствах суммы степенного ряда имеет смысл, если эта сумма определена более, чем в одной точке, т. е. если радиус сходимости этого ряда не равен нулю. Не углубляясь в теорию дифференцирования и интегрирования функций комплексного переменного, заметим только, что производной степенной функции z^n, $n \in \mathbb{N}$, является функция nz^{n-1} (производная $f'(z_0)$ функции комплексного переменного $f(z)$ определяется как производная функции действительного переменного равенством

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

при условии, что этот предел существует), и, соответственно, первообразной степенной функции z^n, $n \in \mathbb{N}$, является функция $\frac{z^{n+1}}{n+1}$. Определение равномерной сходимости ряда непосредственно переносится на ряды в комплексной плоскости; теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании рядов также справедливы в комплексной области.

Из формулы Коши-Адамара немедленно следует, что ряды $A : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $B : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^{n+1}}{n+1}$ (почленно проинтегрированный ряд A), $C : \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ (почленно продифференцированный ряд A) имеют один и тот же радиус сходимости.

Теорема. Если $R > 0$ есть радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, то для любого r, $0 < r < R$, этот ряд сходится равномерно на множестве $\{z : |z| \leqslant r\}$ (на любом круге с центром в нуле, лежащем строго внутри круга сходимости данного ряда).

Следствие. Сумма $S(z)$ степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ бесконечно дифференцируема в круге сходимости, при этом

$$S^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-m+1) a_n z^{n-m};$$

функция $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ является в круге сходимости первообразной для $S(z)$, принимающей нулевое значение при $z = 0$.

Определение. Функция $f(z)$ называется аналитической в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, если существует степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, сходящийся к $f(z)$ в некоторой окрестности $U(z_0)$ точки z_0: $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $\forall z \in U(z_0)$. Точка z_0 в этом случае называется точкой аналитичности функции f; ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ называется рядом, представляющим функцию f в $U(z_0)$.

Из определения немедленно следует, что сумма степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, радиус сходимости которого не равен нулю, является аналитической в точке z_0. Более глубокое утверждение теории функций комплексного переменного состоит в том, что каждая точка круга сходимости степенного ряда есть точка аналитичности его суммы.

Если z_0 — точка аналитичности функции f, то эта функция бесконечно дифференцируема в точке z_0 (как сумма степенного ряда) и коэффициенты степенного ряда, представляющего эту функцию, определяются равенством $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ называется рядом Тейлора функции f в точке z_0.

Итак, с одной стороны, каждый степенной ряд есть ряд Тейлора для своей суммы; с другой стороны, существует единственный ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, представляющий данную функцию в некоторой окрестности точки z_0, именно, ряд Тейлора этой функции.

Как уже говорилось, степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, радиусом сходимости которого является положительное число R, в круге сходимости $K=\{z : |z-z_0|<R\}$ определяет функцию $S(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

Предположим, что два ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = S_1(z)$ и

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n = S_2(z)$ имеют частично пересекающиеся круги сходимости K_1 и K_2, соответственно, и их суммы совпадают на общей части этих кругов: $S_1(z) = S_2(z)$, $\forall z \in K_1 \cap K_2$. Тогда каждая точка части окружности одного круга, лежащей внутри другого, является точкой аналитичности функции

$$f(z) = \begin{cases} S_1(z), & z \in K_1, \\ S_2(z), & z \in K_2. \end{cases}$$

Определение. 1. Точки ξ окружности круга сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, обладающие такой окрестностью $U(\xi)$, в которой существует аналитическая функция $f(z)$, совпадающая с суммой данного ряда на пересечении его круга сходимости с $U(\xi)$, называются правильными или регулярными точками данного ряда.

2. Точки ξ окружности круга сходимости, не обладающие такой окрестностью, называются особыми точками данного ряда.

Теорема. На окружности круга сходимости степенного ряда находится, по крайней мере, одна особая точка этого ряда.

Пример 5. Найти регулярные и особые точки ряда $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

Решение. Радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ равен 1, и для всех z, $|z| < 1$, имеем равенство $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. Функция $f(z) = \frac{1}{1-z}$ определена для всех $z \neq 1$. Покажем, что для любого $\alpha \neq 1$ функция $f(z)$ представляется степенным рядом в некоторой окрестности точки α.

Обозначив $t = z - \alpha$, получим, что

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-\alpha-t} = \frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{1-\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(1-\alpha)^n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-\alpha)^{n+1}}(z-\alpha)^n, \quad |z-\alpha| < |1-\alpha|.$$

Итак, все точки окружности $|z| = 1$ кроме точки $z_0 = 1$ являются регулярными точками ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$. Поскольку в силу приведенной выше теоремы на окружности $|z| = 1$ должна быть хотя бы одна особая точка этого ряда, то таковой является точка $z_0 = 1$.

Обратим внимание на то, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ расходится во всех точках окружности $|z| = 1$ как в особой точке, так и в регулярных. Выше был приведен пример степенного ряда, сходящегося во всех точках окружности круга сходимости также независимо от того, особые это точки или регулярные. Таким образом, сходимость степенного ряда в точках окружности круга сходимости, вообще говоря, не связана с регулярностью его точек.

Для функций комплексного переменного справедливо утверждение: если функция f дифференцируема в каждой точке области G, то каждая точка этой области является точкой аналитичности функции f*).

Степенные ряды в действительной области

Если все коэффициенты степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - x_0)^n$ и точка x_0 действительны, то его сужение на действительную ось дает степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. Теперь в дальнейшем будем считать числа a_n действительными, не оговаривая этого специально.

Вместо круга сходимости $\{z\colon |z| < R\}$ на комплексной плоскости на действительной оси получаем интервал сходимости $\{x : |x| < R\}$. Множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$

---

*) Можно было обосновать аналитичность функции $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ в любой точке $z \neq 1$ ссылкой на эту теорему, но мы предпочли дать прямое доказательство этого свойства $f(z)$.

или совпадает с интервалом сходимости, или получается добавлением к нему одной или обеих концевых точек.

Пример 6. Найти множество сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^n+\frac{b^n}{n}+\frac{c^n}{n^2}\right)x^n, \quad a>0,\ b>0,\ c>0.$$

Решение. Положим $M=\max\{a,b,c\}$. Тогда

$$\sqrt[n]{a^n+\frac{b^n}{n}+\frac{c^n}{n^2}}=M\sqrt[n]{\left(\frac{a}{M}\right)^n+\frac{1}{n}\left(\frac{b}{M}\right)^n+\frac{1}{n^2}\left(\frac{c}{M}\right)^n}.$$

В силу неравенства

$$\frac{1}{n^2}\leqslant\left(\frac{a}{M}\right)^n+\frac{1}{n}\left(\frac{b}{M}\right)^n+\frac{1}{n^2}\left(\frac{c}{M}\right)^n\leqslant 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\leqslant 3$$

отсюда получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a^n+\frac{b^n}{n}+\frac{c^n}{n^2}}=M$$

и, следовательно, $R=\dfrac{1}{M}$. Осталось исследовать поведение данного ряда в концевых точках интервала $(-R,R)=\left(-\dfrac{1}{M},\dfrac{1}{M}\right)$. В зависимости от соотношения величин a, b, c возможны три случая.

I. $M=a$. Тогда $R=\dfrac{1}{a}$ и для $|x|=\dfrac{1}{a}$ имеем:

$$\left|\left(a^n+\frac{b^n}{n}+\frac{c^n}{n^2}\right)x^n\right|=1+\frac{1}{n}\left(\frac{b}{M}\right)^n+\frac{1}{n^2}\left(\frac{c}{M}\right)^n\to 1, \quad n\to+\infty,$$

откуда следует расходимость данного ряда как в точке $x_1=-R$, так и в точке $x_2=R$.

II. $M=b>a$. Тогда $R=\dfrac{1}{b}$ и $0<\dfrac{a}{M}<1$. Для $x=-\dfrac{1}{b}$ имеем равенство

$$\left(a^n+\frac{b^n}{n}+\frac{c^n}{n^2}\right)x^n=\frac{(-1)^n}{n}+(-1)^n\left[\left(\frac{a}{M}\right)^n+\frac{1}{n^2}\left(\frac{c}{M}\right)^n\right].$$

Ряд с членами $(-1)^n \left[\left(\frac{a}{M}\right)^n + \frac{1}{n^2}\left(\frac{c}{M}\right)^n\right]$ сходится абсолютно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится условно. Следовательно, в точке $x_1 = -R$ данный ряд сходится условно.

Для $x = \frac{1}{b}$ имеем равенство

$$\left(a^n + \frac{b^n}{n} + \frac{c^n}{n^2}\right) x^n = \frac{1}{n} + \left[\left(\frac{a}{M}\right)^n + \frac{1}{n^2}\left(\frac{c}{M}\right)^n\right] \sim \frac{1}{n}, \quad n \to +\infty.$$

Следовательно, в точке $x_2 = R$ данный ряд расходится.

III. $M = c > \max\{a, b\}$. Тогда $R = \frac{1}{c}$ и $0 < \frac{a}{M} < 1$, $0 < \frac{b}{M} < 1$. Для $|x| = \frac{1}{c}$ имеем равенство

$$\left|\left(a^n + \frac{b^n}{n} + \frac{c^n}{n^2}\right) x^n\right| = \left(\frac{a}{M}\right)^n + \frac{1}{n}\left(\frac{b}{M}\right)^n + \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}, \quad n \to +\infty.$$

Следовательно, данный ряд абсолютно сходится как в точке $x_1 = -R$, так и в точке $x_2 = R$.

Итак, окончательно получаем, что

а) если $\max\{a, b, c\} = a$, то множество M сходимости данного степенного ряда совпадает с его интервалом сходимости: $M = \left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$;

б) если $\max\{a, b, c\} = b > a$, то множество M сходимости данного степенного ряда есть полуинтервал $\left[-\frac{1}{b}, \frac{1}{b}\right)$, т. е. интервал сходимости этого ряда с добавлением левого конца;

в) если $\max\{a, b, c\} = c > \max\{a, b\}$, то множество M сходимости данного степенного ряда есть отрезок $\left[-\frac{1}{c}, \frac{1}{c}\right]$, т. е. интервал сходимости этого ряда с добавлением обоих концов.

Предлагаем читателям проверить, что эти три случая исчерпывают все возможные взаимные соотношения между числами a, b, c.

Из равенства $|a_n(-R)^n| = |a_n R^n|$ следует, что абсолютная сходимость степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ на одном из концов интервала сходимости влечет абсолютную сходимость его и на другом конце этого интервала. Таким образом, множество сходимости степенного ряда может быть полуинтервалом только тогда, когда в соответствующем конце этот ряд сходится условно. Из этого же равенства видно, что если расходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ на одном из концов интервала сходимости следует из того, что последовательность $\{a_n R^n\}$ не является бесконечно малой, то и на другом конце интервала сходимости этот ряд расходится по той же причине.

Из формулы Коши-Адамара следует, что

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n R^n|} = 1.$$

Отсюда видим, что ни радикальный признак Коши, ни признак Даламбера не дают возможности установить сходимость степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ в концевых точках интервала сходимости. Однако, расходимость этого ряда в концевых точках иногда устанавливается с помощью этих признаков в допредельной формулировке.

Пример 7. Найти множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$.

Решение. Так как

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4,$$

то $R = \frac{1}{4}$. Положим $b_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$. Тогда, если $x = 4$, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$, а если $x = -4$, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$. Так как $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2(n+1)}{2n+1} > 1$, то оба ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ расходятся.

Таким образом, множество M сходимости данного ряда совпадает с его интервалом сходимости: $M = (-4, 4)$.

Пример 8. Найти множество сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[4+(-1)^n]^n}{n} x^n.$$

Решение. Если последовательность $\{\alpha_n\}$ имеет предел, то для любой последовательности $\{\beta_n\}$ имеем равенство:

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \alpha_n\beta_n = \lim_{n\to+\infty} \alpha_n \cdot \varlimsup_{n\to+\infty} \beta_n.$$

Пользуясь этим свойством, получаем, что

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{[4+(-1)^n]^n}{n}} = \varlimsup_{n\to\infty} [4+(-1)^n] = 5,$$

следовательно, $R = \frac{1}{5}$. Положим

$$b_n = \left[\frac{4+(-1)^n}{5}\right]^n \cdot \frac{1}{n} = \begin{cases} \dfrac{1}{2m}, & n = 2m, \\ \left(\dfrac{3}{5}\right)^{2m-1} \cdot \dfrac{1}{2m-1}, & n = 2m-1. \end{cases}$$

Если $x = \frac{1}{5}$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Пусть

$$c_n = \begin{cases} 0, & n = 2m-1. \\ \dfrac{1}{2m}, & n = 2m. \end{cases}$$

Расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ и неравенство $b_n \geqslant c_n \geqslant 0$ показывают, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

Если $x = -\frac{1}{5}$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} q_n - \sum_{n=1}^{\infty} r_n,$$

где

$$q_n = \begin{cases} 0, & n = 2m-1, \\ \dfrac{1}{2m}, & n = 2m \end{cases}$$

и

$$r_n = \begin{cases} 0, & n = 2m, \\ \dfrac{1}{2m-1} \cdot \left(\dfrac{3}{5}\right)^{2m-1}, & n = 2m-1. \end{cases}$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n$ сходится абсолютно, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ расходится.

Таким образом, множество M сходимости данного ряда совпадает с его интервалом сходимости: $M = \left(-\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{5}\right)$.

Пример 9. Найти множество сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n.$$

Решение. Так как

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)!!(2n)!!}{(2n+2)!!(2n-1)!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1,$$

то $R = 1$.

Положим $b_n = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

Если $x = 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Так как

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to +\infty,$$

то в силу признака Гаусса ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

Если $x = -1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$. Из неравенств

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \quad \ldots, \quad \frac{2n-3}{2n-2} < \frac{2n-2}{2n-1}, \quad \frac{2n-1}{2n} < 1$$

получаем, что

$$b_n = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n} < \frac{2\cdot 4\cdots(2n-2)}{3\cdot 5\cdots(2n-1)} = \frac{1}{2n\cdot b_n},$$

откуда следует, что $0 < b_n < \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$, т. е. $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$. Соотношение $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{2n+1}{2n+2} < 1$ показывает, что положительная последовательность $\{b_n\}$ монотонна. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ сходится в силу признака Лейбница.

Таким образом, множество M сходимости данного ряда есть полуинтервал $[-1, 1)$.

Пусть x_0 — точка действительной оси и функция $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-x_0)^n$ аналитическая в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0. Сужение этой функции на действительную ось дает аналитическую, т. е. представимую как сумма степенного ряда, функцию $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

Теорема о единственности степенного ряда. Если функция f в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 представляется как сумма степенного ряда:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \ x \in U(x_0),$$

то эта функция бесконечно дифференцируема в $U(x_0)$ и коэффициенты a_n однозначно определяются равенством

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0,\ 1, \ldots,$$

т. е. единственным рядом, представляющим функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0, может быть ее ряд Тейлора в этой точке.

Следствие. Для того чтобы функция f представлялась степенным рядом в окрестности точки x_0, необходимо, чтобы в некоторой окрестности этой точки функция f имела производные всех порядков.

В отличие от функций комплексного переменного дифференцируемость функции действительного переменного в некотором интервале (a, b) не влечет ее аналитичности в этом интервале. Действительно, существует функция f, непрерывная на $\mathbb{R}$, но не дифференцируемая ни в одной точке $x \in \mathbb{R}$ (см. задачу 68, стр. 327). Функция f_1, первообразная для f на $\mathbb{R}$, является непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{R}$ функцией, не имеющей ни в одной точке $x \in \mathbb{R}$ второй производной. Беря последовательно первообразную f_2 от f_1, первообразную f_3 от f_2 и т. д., получим для любого $n \in \mathbb{N}$ функцию, имеющую n непрерывных производных на $\mathbb{R}$, но не имеющую производной порядка $n+1$ ни в одной точке действительной числовой прямой.

Покажем, что и условие $f \in C^\infty(U(x_0))$, где $U(x_0)$ — некоторая окрестность точки x_0, только необходимо, но не достаточно для того, чтобы функция f была аналитической в точке x_0. Пусть $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x \neq 0$. Так как $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, то, полагая $f(0) = 0$, получим функцию f, непрерывную на всей числовой прямой. Для $x \neq 0$ имеем:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f''(x) = -\frac{6}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{4}{x^6} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

$$f'''(x) = \frac{24}{x^5} e^{-\frac{1}{x^2}} - \frac{36}{x^7} e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{8}{x^9} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

продолжая операцию дифференцирования, получим, что $f^{(n)}(x)$, $x \neq 0$, есть сумма выражений вида $\frac{A}{x^m} e^{-\frac{1}{x^2}}$, $m \in \mathbb{N}$. Из равенства $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^m} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, $m \in \mathbb{N}$, и непрерывности функции f в нуле следует, что f' в нуле существует и равна нулю и, таким образом, непрерывна; точно так же получаем, что f'' в нуле существует, равна нулю и непрерывна. Продолжая эти рассуждения, получим, что функция f имеет в любой точке $x \in \mathbb{R}$ производные всех порядков, причем в нуле все ее производные равны нулю. Следовательно, ряд Тейлора функции f в нуле представляет собой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n$, все коэффициенты a_n которого равны нулю. Радиус сходимости этого ряда $R = +\infty$, т. е. ряд сходится при любом $x \in \mathbb{R}$ (это видно и непосредственно), но сумма его есть тождественный нуль и ни в какой точке, кроме нуля, не равна $f(x)$. А поскольку единственным степенным рядом, представляющим в некоторой окрестности нуля функцию f, может быть только ее ряд Тейлора в точке $x_0 = 0$, то, следовательно, функция f не представляется степенным рядом в окрестности нуля, т. е. не является аналитической в точке $x_0 = 0$.

Еще один пример неаналитической в нуле функции $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ приведен в задаче 75, стр. 329. Для приведенной там функции f ряд Тейлора в нуле представляет степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ с нулевым радиусом сходимости, т. е. не существует такой окрестности нуля, в которой этот ряд представлял бы какую-нибудь функцию. Поскольку другого степенного ряда, представляющего f в окрестности нуля, не существует, то эта функция в окрестности нуля не представляется степенным рядом, т. е. не является аналитической в точке $x_0 = 0$.

Если радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - x_0)^n$ есть число $R > 0$, то функция $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - x_0)^n$ не может на круге сходимости совпадать с функцией, аналитической в области, включающей замыкание круга сходимости, поскольку хотя бы одна точка окружности $\{z : \ |z - z_0| = R\}$ должна быть особой точкой рассматриваемого ряда. Но эта точка не обязательно лежит на действительной оси. Так что в отличие от функций комплексного переменного функция действительного переменного $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ может совпадать на интервале сходимости этого ряда $(-R, R)$ с функцией $f(x)$, аналитической на интервале $(a, b) \supset [-R, R]$.

Пример 10. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$.

Радиус сходимости его равен 1, и

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \tag{4}$$

для всех x, $|x| < 1$. Покажем, что функция $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ является аналитической в каждой точке $\alpha > 0$.

Положим $t = x - \alpha$, тогда $x = t + \alpha$ и

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\alpha^2+t(t+2\alpha)} = \frac{1}{1+\alpha^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{t(t+2\alpha)}{1+\alpha^2}} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+\alpha^2)^{n+1}}\left(t(t+2\alpha)\right)^n.$$

Полученный ряд сходится абсолютно, если $\left|\dfrac{t(t+2\alpha)}{1+\alpha^2}\right| < 1$, т. е. для $t \in (-\alpha - \sqrt{2\alpha^2+1}, -\alpha + \sqrt{2\alpha^2+1})$. Если $t \in$ $\in (0, -\alpha+\sqrt{2\alpha^2+1})$, то все слагаемые в многочлене $[t(t+2\alpha)]^n$ положительны, следовательно, ряд, полученный после раскрытия всех скобок, также сходится абсолютно для $t \in$ $\in (0, -\alpha+\sqrt{2\alpha^2+1})$ (см. стр. 16). Делая перестановку членов этого ряда и группируя члены с одинаковыми степенями t, мы получим ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\alpha)^n,$$

абсолютно сходящийся при $t \in (0, -\alpha + \sqrt{2\alpha^2+1})$, сумма которого равна $\dfrac{1}{1+\alpha^2+t(t+2\alpha)} = \dfrac{1}{1+x^2}$. Выпишем несколько первых членов этого ряда:

$$\frac{1}{1+\alpha^2} - \frac{2\alpha t}{(1+\alpha^2)^2} + \frac{t^2(3\alpha^2-1)}{(1+\alpha^2)^3} - \frac{t^3(4\alpha^3-2\alpha)}{(1+\alpha^2)^4} +$$
$$+ \frac{t^4(5\alpha^4-10\alpha^2+1)}{(1+\alpha^2)^5} + \ldots.$$

Итак, для любой точки $\alpha > 0$ существует ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-\alpha)^n$, радиус сходимости которого $R \geqslant \sqrt{2\alpha^2+1}-\alpha$, а сумма равна $\frac{1}{1+x^2}$, т. е. функция $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ аналитична в точке α. Аналитичность f в нуле установлена равенством (4), а аналитичность в точках отрицательной полуоси следует из четности f. Таким образом, сумма ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ не определена вне интервала $(-1,1)$ и в то же время всюду в этом интервале совпадает с функцией $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, аналитической в каждой точке действительной числовой оси.

Полное объяснение подобного поведения степенных рядов для действительного переменного получается только в теории функций комплексного переменного. Если для действительного аргумента функция $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ бесконечно дифференцируема в нуле, то для комплексного аргумента нуль является неаналитической — особой — точкой функции $f(z)=e^{-\frac{1}{z^2}}$. Если все точки действительной оси аналитические для функции $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, то в комплексной плоскости точки $z_1=i$ и $z_2=-i$ являются неаналитическими точками функции $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ и, соответственно, кругом сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$, представляющего эту функцию для z, $|z|<1$, естественно является круг $\{z:\ |z|<1\}$, на окружности которого лежат эти особые точки.

Представление функции $f(x)$ в виде $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, $x\in U(x_0)$, называют разложением $f(x)$ в степенной ряд в окрестности точки x_0.

Сравнивая представление функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 многочленом Тейлора и ряд Тейлора с центром в x_0 этой функции, видим, что стремление к нулю при $n\to\infty$ остаточного члена формулы Тейлора $r_n(f,x,x_0)$ является необходимым и достаточным условием разложения $f(x)$ в степенной ряд с центром в x_0. Из представления остаточного члена в форме Лагранжа

$$r_n(f, x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\Theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \ 0 < \Theta < 1,$$

получаем следующее утверждение:

Теорема. Если для некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 функция $f(x) \in C^\infty(U(x_0))$ и существуют такие числа M и q, что $|f^{(n)}(x)| \leqslant Mq^n$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ и всех $x \in U(x_0)$, то функция $f(x)$ раскладывается в ряд Тейлора в окрестности точки x_0:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

и интервал сходимости этого ряда включает $U(x_0)$.

Если функция f удовлетворяет условиям этой теоремы, то задача: разложить f в степенной ряд в окрестности точки x_0 сводится к вычислению коэффициентов Тейлора $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ этой функции в точке x_0.

Обратно, если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ представляет функцию f в окрестности точки x_0, то значения производных $f^{(n)}(x_0)$ вычисляются через коэффициенты этого ряда: $f^{(n)}(x_0) = n!a_n$.

Пример 11. В примере 10 был получен степенной ряд, представляющий функцию $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ в окрестности точки $x = \alpha$:

$$f(x) = \frac{1}{1+\alpha^2} - \frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)^2}(x-\alpha) + \frac{3\alpha^2-1}{(1+\alpha^2)^3}(x-\alpha)^2 -$$
$$- \frac{2\alpha(2\alpha^2-1)}{(1+\alpha^2)^4}(x-\alpha)^3 + \frac{5\alpha^4-10\alpha^2+1}{(1+\alpha^2)^5}(x-\alpha)^4 -$$
$$- \frac{2\alpha(3\alpha^4-10\alpha^2+3)}{(1+\alpha^2)^6}(x-\alpha)^5 + \dots.$$

Следовательно,

$$f'(\alpha) = \frac{-2\alpha}{(1+\alpha^2)^2};$$

$$f''(\alpha) = \frac{2(3\alpha^2-1)}{(1+\alpha^2)^3};$$

$$f'''(\alpha) = \frac{-12(2\alpha^3-\alpha)}{(1+\alpha^2)^4};$$

$$f^{(\mathrm{IV})}(\alpha) = \frac{24(5\alpha^4-10\alpha^2+1)}{(1+\alpha^2)^5};$$

$$f^{(\mathrm{V})}(\alpha) = \frac{240\alpha(3\alpha^4-10\alpha^2+3)}{(1+\alpha^2)^6}.$$

Разложение функций в степенной ряд

Возможность почленного дифференцирования и интегрирования степенного ряда внутри его интервала сходимости, а также относительная простота степенной функции делают степенные ряды незаменимыми как в теоретических, так и в практических исследованиях. Естественно, встает вопрос о разложении функции в степенной ряд и исследовании области его сходимости. Существуют различные методы разложения функции в степенной ряд. При этом основными здесь являются следующие утверждения:

1) Каким бы образом функция $f(x)$ ни была разложена в степенной ряд, этот ряд будет для нее рядом Тейлора (т. е. единственность разложения функции в степенной ряд).

2) Если функция $f(z)$ (комплексного переменного z) аналитична в точке $z = a$, $a \in \mathbb{R}$, и $z_0 = x_0 + iy_0$ — ближайшая к a особая точка функции $f(z)$, то функция $f(x)$ (действительного переменного) разложима в степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, сходящийся к $f(x)$ в интервале $(a-R, a+R)$, радиус R которого равен расстоянию между точками a и z_0 (особая точка функции $f(z)$ — точка, в которой $f(z)$ не является аналитической).

С помощью этих утверждений гарантирована возможность применения различных приемов разложения функции в степенной ряд в интервале $(a - |z_0 - a|, a + |z_0 - a|)$ без дополнительного исследования остаточного члена соответствующей формулы Тейлора и применения других достаточных условий сходимости полученного ряда к функции $f(x)$.

Перейдем к конкретным приемам разложения функции в степенной ряд.

а) Непосредственное разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора. В этом случае, находя $f^{(n)}(x_0)$, формально составляют ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

находят область сходимости этого ряда и анализируют, для каких значений x из области сходимости этого ряда справедливо равенство $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.

Пример 12. Разложить функцию $f(x) = e^x \sin x$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$.

Решение. Применяя формулу Эйлера

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

получаем

$$f(x) = e^x \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) = \frac{e^{(1+i)x} - e^{(1-i)x}}{2i}$$

и для n-ой производной имеем

$$f^{(n)}(x) = \frac{(1+i)^n e^{(1+i)x} - (1-i)^n e^{(1-i)x}}{2i} =$$

$$= \frac{e^x \left((1+i)^n e^{ix} - (1-i)^n e^{-ix} \right)}{2i}.$$

В силу формулы Муавра

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{\pi}{4} n + i \sin \frac{\pi}{4} n \right) = (\sqrt{2})^n e^{i \frac{\pi}{4} n},$$

$$
\begin{aligned}
(1-i)^n &= (\sqrt{2})^n \left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)^n = \\
&= (\sqrt{2})^n \left(\cos\frac{7\pi}{4}n + i\sin\frac{7\pi}{4}n\right) = \\
&= (\sqrt{2})^n \left(\cos\left(-\frac{\pi n}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi n}{4}\right)\right) = (\sqrt{2})^n e^{-\frac{\pi n}{4}i},
\end{aligned}
$$

поэтому

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= e^x(\sqrt{2})^n \frac{e^{\left(\frac{\pi}{4}n+x\right)i} - e^{-\left(\frac{\pi}{4}n+x\right)i}}{2i} = \\
&= (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}n\right)
\end{aligned}
$$

и

$$
f^{(n)}(0) = (\sqrt{2})^n \sin\frac{\pi n}{4}.
$$

Составим для функции $f(x)$ ряд Тейлора:

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n \sin\frac{\pi n}{4}}{n!} x^n.
$$

Поскольку для радиуса сходимости R этого степенного ряда имеем

$$
\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2}\sqrt[n]{\sin\frac{\pi n}{4}}}{\sqrt[n]{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^n(1+o(1))}} = 0,
$$

то ряд сходится при любом x.

Выясним, для каких значений x найденное разложение сходится к функции $e^x \sin x$. Рассмотрим произвольный промежуток $[-a, a]$. Для x из этого промежутка имеем:

$$
|f^{(n)}(x)| \leqslant (\sqrt{2})^n e^a,
$$

откуда следует, что выполнено достаточное условие вида $|f^{(n)}(x)| \leqslant \lambda^n$ при любом $n \in \mathbb{N}$, $|x| \leqslant a$ (см. стр. 124).

Отметим, что метод разложения функции $f(x)$ в степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ непосредственным вычислением ее производных $f^{(n)}(x_0)$, $n = 1, 2, \ldots$, в основном, позволяет найти, как правило, только любое конечное число членов этого ряда, поскольку найти общую формулу для $f^{(n)}(x_0)$ бывает затруднительно, не говоря уже об исследовании сходимости ряда к функции $f(x)$. Разумеется, вычислив конечное число коэффициентов ряда Тейлора, можно утверждать, что это есть коэффициенты степенного ряда, представляющего функцию в окрестности данной точки, только опираясь на общие теоремы, сформулированные выше, именно, на теоремы существования и единственности степенного ряда.

Пример 13. Написать три члена разложения функции $f(x)=x^x$, $x > 0$, в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 1$.

Решение. Поскольку $x^x \equiv e^{x\ln x}$, $x > 0$, то для производных этой функции последовательно имеем

$$(e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}(1 + \ln x),$$

$$(e^{x\ln x})'' = e^{x\ln x}\left(1 + 2\ln x + \ln^2 x + \frac{1}{x}\right),$$

$$(e^{x\ln x})''' = e^{x\ln x}\left(1 + 3\ln x + 3\ln^2 x + \ln^3 x + \right.$$
$$\left. + \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} + \frac{2\ln x}{x} - \frac{1}{x^2}\right), \ldots .$$

Значения этих производных в точке $x = 1$ соответственно равны 1, 2, 2, откуда получаем, что для данной функции степенной ряд с центром в точке $x = 1$ имеет вид

$$1 + (x-1) + \frac{2(x-1)^2}{2!} + \frac{2(x-1)^3}{3!} + \cdots . \tag{5}$$

Заметим, что поскольку $z = 0$ — особая точка функции $e^{z\ln z}$, то разложение (5) представляет $f(x)$ в интервале $(0, 2)$.

В некоторых случаях для нахождения значений $f^{(n)}(x_0)$ совсем не обязательно искать производные функции $y = f(x)$ в точке x_0, дифференцируя $f(x)$, затем $f'(x)$ и т. д. Иногда значения $f^{(n)}(x_0)$ находятся из соотношения, связывающего функцию, ее производные и некоторые известные функции. Дифференцируя затем последовательно это соотношение, получаем другие соотношения, из которых последовательно находятся значения производных высшего порядка.

Пример 14. Написать пять членов разложения функции $y = e^{\operatorname{arcctg} x}$ в степенной ряд в окрестности точки $x_0 = 0$.

Решение. Производная функции $y = e^{\operatorname{arcctg} x}$ и сама функция y связаны соотношением

$$y' = -y \cdot \frac{1}{1+x^2},$$

т. е.

$$y'(1+x^2) = -y, \tag{6}$$

поскольку $y' = -e^{\operatorname{arcctg} x} \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$. Так как $y(0) = e^{\frac{\pi}{2}}$, то $y'(0) = -e^{\frac{\pi}{2}}$. Дифференцируя равенство (6), учитывая, что $y = y(x)$, имеем

$$y''(1+x^2) + y' \cdot 2x = -y', \tag{7}$$

откуда

$$y''(0) = -y'(0) = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Далее, дифференцируя равенство (7), имеем

$$y''' \cdot (1+x^2) + 2xy'' + y'' \cdot 2x + 2y' = -y'',$$

откуда

$$y'''(0) = -y''(0) - 2y'(0) = -e^{\frac{\pi}{2}} + 2e^{\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Аналогично находим

$$y^{(\mathrm{IV})} \cdot (1+x^2) + 6y'' + 6xy''' = -y''',$$

откуда

$$y^{(\mathrm{IV})}(0) = -y'''(0) - 6y''(0) = -7e^{\frac{\pi}{2}};$$

$$y^{(\mathrm{V})} \cdot (1+x^2) + 8xy^{(\mathrm{IV})} + 12y''' = -y^{(\mathrm{IV})},$$

откуда

$$y^{(\mathrm{V})}(0) = -7e^{\frac{\pi}{2}} + 12e^{\frac{\pi}{2}} = 5e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Применяя метод математической индукции, находим, что $y^{(n)}(x)(1+x^2) + 2(n-1)xy^{(n-1)}(x) + (n-2)(n-1)y^{(n-2)}(x) = -y^{(n-1)}(x)$, откуда

$$y^{(n)}(0) = -y^{(n-1)}(0) - (n-2)(n-1)y^{(n-2)}(0), \quad n = 3,\ 4, \ldots. \tag{8}$$

$$
\begin{aligned}
(1+x)^m &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n = \\
&= 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+ \\
&+\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots, \\
&\qquad m\in\mathbb{R},\ -1<x<1.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Приведем некоторые частные случаи последней формулы:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots,\ |x|<1,$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots,\ |x|<1,$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots+ \\
&+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+\cdots,\ |x|<1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x}} &= 1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots+ \\
&+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+\cdots,\ |x|<1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\cdots+ \\
&+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}x^{n+1}+\cdots,\ |x|<1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1-x} &= 1-\frac{1}{2}x-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\cdots- \\
&-\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}x^{n+1}+\cdots,\ |x|<1.
\end{aligned}
$$

Пример 15. Разложить функцию $f(x)=e^{1-2x^3}$ в степенной ряд с центром в точке $x_0=0$.

Итак, для нахождения $y^{(n)}(0)$ получили рекуррентную формулу (8), причем

$$y(0) = e^{\frac{\pi}{2}}, \quad y'(0) = -y(0) = -e^{\frac{\pi}{2}}, \quad y''(0) = y(0)$$

и разложение данной функции в степенной ряд с центром в точке $x = 0$ имеет вид

$$e^{\operatorname{arcctg} x} = e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}} \cdot x + \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2!}x^2 + \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{3!}x^3 - \frac{7}{24}e^{\frac{\pi}{2}}x^4 + \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{24}x^5 + \cdots.$$

б) **Использование основных табличных разложений.** Как уже указывалось, на практике выразить зависимость a_n от n непосредственно дифференцированием функции $f(x)$, т. е. найти явное выражение $f^{(n)}(x_0)$ как функции n, чаще всего не удается. Для разложения конкретной функции $f(x)$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ пользуются разложениями основных функций:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \ |x| < \infty,$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n =$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad |x| < \infty,$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^n =$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad |x| < \infty,$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}(-1)^{n-1} =$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \quad -1 < x \leqslant 1,$$

Решение. Поскольку $e^{1-2x^3} = e \cdot e^{-2x^3}$, то, полагая $-2x^3 = y$ и используя табличное разложение (9) для функции e^y, имеем ряд

$$e\left(1 + (-2x^3) + \frac{(-2x^3)^2}{2!} + \dots + \frac{(-2x^3)^n}{n!} + \dots\right) =$$
$$= e - 2ex^3 + \frac{2^2 e}{2!}x^6 - \frac{2^3 e}{3!}x^9 + \dots + (-1)^n \frac{2^n e}{n!}x^{3n} + \dots .$$

Так как разложение в ряд функции e^y имеет место для всех y, то и разложение в ряд данной функции справедливо для всех $|x| < \infty$.

Пример 16. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$.

Решение. Полагая $x^4 = y$ и используя формулу (9) для функции $z = \dfrac{1}{1+y}$, имеем ряд

$$\frac{1}{1+x^4} = 1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \dots + (-1)^n x^{4n} + \dots .$$

Этот ряд представляет данную функцию для x таких, что $|y| < 1$, т. е. $|x^4| < 1$ и, значит, для x из промежутка $-1 < x < 1$.

Заметим, что на первый взгляд кажется странным тот факт, что функция $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$ является бесконечно дифференцируемой *на всей прямой*, а разлагается в степенной ряд $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{4n}$ только для x из промежутка $|x| < 1$. Дело, однако, в том, что соответствующая функция комплексного переменного $f(z) = \dfrac{1}{1+z^4}$, сужением которой на действительную ось является функция $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$, имеет особые точки $z_1 = i$ и $z_2 = -i$, и поэтому разложение $f(z)$ в степенной ряд верно для $|z| < 1$, что соответствует $|x| < 1$ (сравните пример 10).

в) Использование сложения и вычитания рядов и умножение ряда на многочлен и ряд. В некоторых случаях разложение функции в степенной ряд можно получить, суммируя табличные разложения или ранее найденные. Так, например, для разложения функций $y=x^2e^x$, $y=(x^2+1)\sin x^3$ достаточно разложение функции e^x умножить на x^2, а разложение функции $\sin x^3$ умножить на (x^2+1). При этом иногда надо аналитическое представление функции преобразовать так, чтобы представить ее в виде удобной комбинации функций, разложения которых известны.

Так, например, для разложения функций $y = 5^x$, $y = \sin^2 x$, $y = \dfrac{1}{x^2-4x+3}$, $y = \ln(1+x+x^2+x^3)$ в степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ достаточно преобразовать их соответственно к виду $y = e^{x\ln 5}$, $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos 2x}{2}$, $y = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x-3}\right)$, $y = \ln\dfrac{1-x^4}{1-x} = \ln(1-x^4) - \ln(1-x)$.

Помимо перечисленных выше утверждений законность такого метода разложения функций в степенной ряд основывается на следующих результатах.

Рассмотрим два ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{10}$$

с радиусом сходимости R_1 и ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \equiv b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

с радиусом сходимости R_2.

Пусть $R = \min\{R_1, R_2\}$.

Тогда для $|x| < R$ эти два ряда можно складывать, вычитать и перемножать, причем в результате опять получим соответственно степенные ряды:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)x^n,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \dots + a_nb_0)x^n.$$

Такое приведение подобных членов в произведении степенных рядов является представлением этого произведения степенных рядов в форме Коши (см. стр. 57). Ясно, что степенной ряд (10) на интервале сходимости $|x| < R$ можно возводить в любую натуральную степень m и в результате опять получится степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} x^n$, коэффициенты которого $a_n^{(m)}$ находятся путем перемножения ряда (10) самого на себя m раз и приведением любым способом подобных членов αx^n, $n = 0, 1, 2 \dots$

Пример 17. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$ в степенной ряд:

а) с центром в точке $x_0 = 0$,

б) с центром в точке $x_0 = 4$.

Решение. а) Представим данную функцию в виде

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right) =$$
$$= -\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}.$$

Применяя известные разложения для функций $y = \dfrac{1}{x+1}$ и $y = \dfrac{1}{1-x}$, имеем

$$\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = 1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x}{3}\right)^n + \dots, \quad \left|\frac{x}{3}\right| < 1$$

и

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots, \quad |x| < 1.$$

Следовательно, получаем:

$$
\begin{aligned}
f(x) = &-\frac{1}{12}\left(1+\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\dots+\left(\frac{x}{3}\right)^n+\dots\right)- \\
&-\frac{1}{4}\left(1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^n x^n+\dots\right)= \\
&=-\frac{1}{3}+\frac{2}{9}x-\frac{7}{27}x^2+\dots+ \\
&+\left(\frac{(-1)^{n+1}}{4}-\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)x^n+\dots.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Поскольку первый ряд сходится к функции $y=\dfrac{1}{1-\frac{x}{3}}$ при $|x|<3$, а второй — к функции $y=\dfrac{1}{x+1}$ при $|x|<1$, то ряд (11) представляет функцию $y=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$ при $|x|<1$.

Итак,

$$
\frac{1}{x^2-2x-3}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{4}-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)x^n,\ |x|<1.
$$

б) Представим данную функцию в виде

$$
f(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-4+1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-4+5}=
$$
$$
=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+(x-4)}-\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-4}{5}},
$$

откуда имеем

$$
f(x)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-4)^n-\frac{1}{20}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-4}{5}\right)^n,
$$

т. е.

$$
f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{4}-\frac{1}{20}\cdot\frac{(-1)^n}{5^n}\right)(x-4)^n.
$$

Полученное разложение верно при x таких, что одновременно выполняются неравенства $|x-4|<1$ и $\left|\dfrac{x-4}{5}\right|<1$, т. е. при $|x-4|<1$.

Пример 18. Разложить в степенной ряд функцию $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$.

Решение. Представим функцию $y = \ln(1 + x + x^2)$ в виде $y = \ln\dfrac{1 - x^3}{1 - x}$ или так $y = \ln(1 - x^3) - \ln(1 - x)$. Раскладывая теперь в степенной ряд каждую из функций $y = \ln(1 - x^3)$ и $y = \ln(1 - x)$, имеем

$$\ln(1 - x^3) = -x^3 - \frac{x^6}{2} - \frac{x^9}{3} - \dots - \frac{x^{3n}}{n} + \cdots,$$
$$|x^3| < 1, \text{ т. е. } |x| < 1,$$

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \cdots, \quad |x| < 1.$$

Следовательно,

$$\ln(1 + x + x^2) = -x - \frac{x^2}{2} - \left(1 + \frac{1}{3}\right)x^3 -$$
$$- \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^6 - \frac{x^7}{7} - \cdots, \quad |x| < 1.$$

Отметим, что предложенное преобразование функции $y = \ln(1 + x + x^2)$, определенной на всей действительной оси, к функции $y = \ln\left(\dfrac{1 - x^3}{1 - x}\right)$ не сужает области разложимости функции $y = \ln(1 + x + x^2)$ в степенной ряд, поскольку разложение функции $y = \ln(1 + x + x^2)$ возможно до первой особой точки функции $y = \ln(1 + z + z^2) = f(z)$. Особые же точки этой функции есть точки $z_1 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $z_2 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, которые находятся на окружности $|z| = 1$, т. е. кругом сходимости степенного ряда с центром в нуле, представляющего функцию $f(z)$, является круг $|z| < 1$. Его сужение на действительную ось есть интервал $(-1, 1)$, поэтому интервалом сходимости степенного ряда с центром в нуле, представляющего функцию $y(x)$, является именно этот интервал, в котором функция $y = \ln(1 + x + x^2)$ тождественно равна функции $y = \ln(1 - x^3) - \ln(1 - x)$.

Для разложения функции $f(x)$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 \neq 0$ чаще всего применяется следующий метод: вводится новая переменная $t = x - x_0$ и ищется разложение функции $f^*(t) = f(t + x_0)$ в степенной ряд по степеням t (с центром в точке $t = 0$) $f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $|t| < R$. Откуда получаем, что

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \; |x - x_0| < R.$$

Пример 19. Разложить функцию $f(x) = \cos^4 x$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Поскольку

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

то

$$f(x) = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{8} =$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$$

Обозначим $t = x - \frac{\pi}{4}$, тогда $x = t + \frac{\pi}{4}$, $\cos 2x = -\sin 2t$, $\cos 4x = -\cos 4t$. Следовательно,

$$f(x) = f^*(t) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{8}\cos 4t.$$

Применяя разложения (9), имеем

$$f^*(t) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{2n} t^{2n}}{(2n)!},$$
$$|t| < \infty.$$

Возвращаясь к x, получаем

$$\cos^4 x = \frac{1}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n}}{(2n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{4n-3}}{(2n)!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n}, \; |x| < \infty.$$

Остановимся более подробно на сложении бесконечного множества степенных рядов.

Пусть дана последовательность степенных рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm}x^n, \quad m = 0,\ 1,\ 2, \ldots.$$

Из них составим повторный ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm}x^n\right). \qquad (12)$$

Если при значении x, равном x_0, сходится ряд, полученный заменой всех членов их абсолютными величинами, т. е. $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_{nm}||x_0^n|\right)$, то сходится и ряд (12), причем сумма его $S(x)$ может быть представлена степенным рядом просто путем приведения подобных членов: $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n x^n$, где $A_n = \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_{nm}$, $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$.

Пример 20. Разложить функцию

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!}\frac{a^m}{1 + a^{2m}x^2}, \quad |x| < 1,\ 0 < a < 1,$$

в степенной ряд с центром в точке $x = 0$.

Решение. Поскольку

$$\frac{a^m}{1 + a^{2m}x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^{m(2n+1)}x^{2n}, \quad |x| < 1,$$

то, подставляя это выражение в $f(x)$, получаем

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^{m(2n+1)}x^{2n}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m a^{(2n+1)m}}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-a^{2n+1}}x^{2n}.$$

Перестановка суммирования законна, поскольку ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{n=0}^{\infty} a^{(2n+1)m}x^{2n}$$

сходится:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a^{(2n+1)m} x^{2n} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{a^m}{1 - a^{2m} x^2} <$$

$$< \frac{1}{1-x^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} = \frac{e^a}{1-x^2}.$$

Пример 21. Разложить в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ функцию $y = \operatorname{ctg} x$.

Решение. Используя результаты задачи 80 п. 1 (стр. 330), имеем соотношение

$$x \operatorname{ctg} x = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2 - \pi^2 m^2}, \quad x \neq \pi k, \quad k = 0, \ 1, \ 2 \ldots.$$

Если $|x| < 1$, то для любого $m = 1, \ 2, \ 3, \ldots$

$$\frac{x^2}{x^2 - \pi^2 m^2} = \frac{-\frac{x^2}{\pi^2 m^2}}{1 - \frac{x^2}{\pi^2 m^2}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{\pi^2 m^2} \right)^n,$$

поэтому

$$\begin{aligned} x \operatorname{ctg} x &= 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{m^2 \pi^2} \right)^n \right) = \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{m^2 \pi^2} \right)^n = \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\pi^{2n}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m^2} \right)^n \right) = \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\pi^{2n}} r_{2n}, \end{aligned} \qquad (13)$$

где $r_{2n} = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}}$, $n = 1, \ 2, \ldots$. Отметим, что если искать разложение функции $f(x) = x \operatorname{ctg} x$ в виде ряда

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

(см. пункт г) настоящего параграфа), то коэффициенты a_k можно найти из равенства $x\cos x = \sin x$, т. е.

$$x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots\right)=$$
$$=\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\dots\right)\times$$
$$\times\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots\right).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x как в левой, так и в правой частях этого соотношения, последовательно находим $a_0=1$, $a_1=0$, $a_2-\frac{a_0}{6}=-\frac{1}{2}$, т. е. $a_2=-\frac{1}{3}$, $a_3=0$, $\frac{1}{24}=\frac{a_0}{120}-\frac{a_2}{6}+a_4$, т. е. $a_4=-\frac{1}{45}$. Сопоставляя коэффициенты при x^2 и x^4 в разложении (13) со значением a_2 и a_4, получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6},\qquad \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

г) Метод неопределенных коэффициентов. В некоторых случаях для нахождения разложения функции в степенной ряд используется метод неопределенных коэффициентов. Суть его состоит в следующем: ищется разложение функции $f(x)$ в виде $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k$, затем составляется некоторое соотношение, связывающее функцию $f(x)$ или ее производные с другими функциями, и из условия тождественного равенства нулю степенного ряда на некотором множестве приравниваются к нулю его коэффициенты. В результате получаются соотношения, связывающие числа a_k, из которых они последовательно могут быть все или в достаточном количестве (нам необходимом) найдены. Этот метод полезен при разложении в ряд функций $y=e^{f(x)}$, $y=\ln f(x)$ и т. д., и, кроме того, при решении обыкновенных дифференциальных уравнений, нахождении $y^{(n)}(x_0)$ с помощью рядов и т. д.

Отметим еще, что в этом методе существенно можно облегчить вычисление, пользуясь тем, что степенной ряд с центром в точке $x = 0$, представляющий четную функцию, имеет вид $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^{2k}$, а соответствующий ряд для нечетной функции имеет вид $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x^{2k-1}$.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 22. Разложить в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ функцию $y = e^{\operatorname{arctg} x}$.

Решение. Дифференцируя функцию $y = e^{\operatorname{arctg} x}$, имеем

$$y' = e^{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1 + x^2},$$

откуда $(1 + x^2)y' = y$.

Будем искать разложение функции $y = e^{\operatorname{arctg} x}$ в виде $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}(1 + x^2)(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots +\\ + n a_n x^{n-1} + (n+1)a_{n+1} x^n + \cdots) =\\ = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots.\end{aligned} \tag{14}$$

Приравнивая свободные члены и коэффициенты при одинаковых степенях x как в левой, так и в правой части (14), находим

$$\begin{aligned}&a_1 = a_0,\\ &2a_2 = a_1,\\ &1 \cdot a_1 + 3a_3 = a_2,\\ &2a_2 + 4a_4 = a_3,\\ &\quad\vdots\\ &(n-1)a_{n-1} + (n+1)a_{n+1} = a_n,\\ &\quad\vdots\end{aligned}$$

Поскольку при $x = 0$ имеем $e^{\operatorname{arctg} x} = 1$, то $a_0 = y(0) = 1$. Следовательно, $a_0 = 1$, а тогда $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = -\frac{1}{6}$, $a_4 = -\frac{7}{24}$, $a_5 = \frac{5}{120}$ и т. д.

Итак,

$$y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{24}x^5 + \cdots.$$

Заметим, что разложение для функции $y = e^{\operatorname{arctg} x}$ можно получить, зная разложение функции $y = e^{\operatorname{arcctg} x}$ (см. пример 14), поскольку

$$e^{\operatorname{arctg} x} = e^{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x} = e^{\frac{\pi}{2} - (\pi - \operatorname{arcctg}(-x))} = e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot e^{\operatorname{arcctg}(-x)} =$$

$$= e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot e^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{24}x^5 + \cdots\right) =$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{24}x^5 + \cdots.$$

д) Подстановка ряда в ряд. Пусть функция $y = f(x)$ в промежутке $(-R, R)$ разлагается в степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, а функция $\varphi(y)$ разлагается в степенной ряд $\varphi(y) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m y^m$ для $y \in (-\rho, \rho)$.

Если $a_0 = |f(0)| < \rho$, то при достаточно малом x будет верно неравенство $|f(x)| < \rho$ и имеет смысл функция $\varphi\left(f(x)\right)$.

Справедлива следующая

Теорема. Если $|a_0| < \rho$, то функция $\varphi\left(f(x)\right)$ разлагается в окрестности точки $x = 0$ в степенной ряд, который можно получить, подставляя в ряд для $\varphi(y)$ вместо y ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и производя возведение в степень и объединяя затем подобные члены x^p, $p = 0, 1, 2, \ldots$

Заметим, что область изменения x, для которых обеспечивается возможность разложения функции $\varphi\left(f(x)\right)$ в ряд по степеням x, можно, например, определить из условий $|x| < R$ и неравенства $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| < \rho$. Если представляет интерес вся область, в которой возможно разложение $\varphi(f(x))$, то этот вопрос требует отдельного исследования.

Пример 23. Рассмотрим функции

$$f(x) = -2x - x^2, \ R = +\infty, \quad \text{и} \quad \varphi(y) = \sum_{m=0}^{\infty} y^m, \ \rho = 1.$$

Функция $\varphi(f(x)) \equiv \dfrac{1}{1+2x+x^2} = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ имеет смысл при $-1 < -2x - x^2 < 1$, т. е. при $-1-\sqrt{2} < x < -1+\sqrt{2}$, $x \neq -1$. Ее разложение по степеням x есть

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots + (-1)^{n-1} n x^n + \dots .$$

Этот ряд сходится при $|x| < 1$. Равенство

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-2x - x^2)^m = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots \tag{15}$$

имеет место при условии $-1 < x < -1+\sqrt{2}$. Согласно же приведенной выше теореме и замечанию, разложение (15) имеет место во всяком случае для таких x, что $2|x| + x^2 < 1$, т. е. $1-\sqrt{2} < x < -1+\sqrt{2}$. Следовательно, равенство (15) верно в более широкой области.

Пример 24. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} \ln \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

в ряд по степеням x.

Решение. Так как при любом x

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots ,$$

то для $x \neq 0$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-2}}{(2k-1)!} + \dots ,$$

а тогда для функции $y = \ln \dfrac{\sin x}{x}$ получаем

$$\ln \frac{\sin x}{x} = \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{840} + \cdots\right) - \\ - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{840} + \cdots\right)^2 + \cdots = \\ = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + \cdots. \tag{16}$$

Поскольку полученный ряд при $x = 0$ сходится и его сумма равна нулю, то этот ряд представляет функцию $f(x)$ для всех x. Отметим, что с другой стороны имеем (см. стр. 74)

$$\ln \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{\pi^2 n^2} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{\pi^4 n^4} + \cdots\right). \tag{17}$$

Разлагая этот ряд по степеням x и приравнивая коэффициенты соответственно при x^2, x^4,... в (16) и (17), находим

$$\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}, \quad \text{откуда} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6};$$

$$-\frac{1}{2\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = -\frac{1}{180}, \quad \text{откуда} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Пример 25. Найти первые пять членов разложения функции $y = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ e, & x = 0 \end{cases}$ в степенной ряд в окрестности точки $x = 0$.

Решение. Перепишем функцию в виде

$$y = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}, & x \neq 0, \\ e, & x = 0. \end{cases}$$

Поскольку для $|x| < 1$ имеем

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots,$$

то

$$\frac{1}{x}\ln(1+x) = 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}+\cdots,\ 0<|x|<1.$$

Подставляя это выражение в данную функцию, получим, что

$$y = e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}+\cdots} =$$

$$= e\cdot e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}+\cdots},\quad 0<|x|<1.$$

Используя ряд для e^y и предыдущую теорему, находим

$$y = e\cdot\left(1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}+\cdots\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}+\cdots\right)^2+$$

$$+\frac{1}{3!}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}+\cdots\right)^3+\dots+$$

$$\left.+\frac{1}{n!}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}+\cdots\right)^n+\cdots\right)=$$

$$= e\left(1-\frac{x}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right)x^2+\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{48}\right)x^3+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{18}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{24\cdot16}\right)x^4+\cdots\right)=$$

$$= e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+\frac{7341}{17280}x^4+\cdots\right).$$

Пример 26. Разложить бесконечное произведение

$$f(x) = \prod_{m=1}^{\infty}(1+q^m x),\ |q|<1,$$

в степенной ряд с центром в точке $x=0$.

Решение. При $|x|<1$ произведение сходится и $f(x)>0$. Рассмотрим логарифм $f(x)$:

$$\ln f(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\ln(1+q^m x).$$

Для $|x| < 1$ имеем

$$\ln f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(q^m x - \frac{1}{2} q^{2m} x^2 + \frac{1}{3} q^{3m} x^3 - \cdots \right).$$

Так как этот ряд сходится при замене всех членов в скобках их абсолютными значениями, то $\ln f(x)$ в окрестности нуля разлагается в степенной ряд, а тогда в силу теоремы на стр. 142 в степенной ряд можно разложить и функцию $e^{\ln f(x)}$.

Итак, для достаточно малых x имеем

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots.$$

Поскольку

$$f(x) = (1 + qx)(1 + q^2 x)(1 + q^3 x) \ldots =$$
$$= (1 + qx)[(1 + q \cdot qx)(1 + q^2 \cdot qx) \ldots] = (1 + qx) \cdot (f(qx)),$$

то имеем

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots =$$
$$= (1 + qx)(b_0 + b_1 qx + b_2 q^2 x^2 + \cdots + b_n q^n x^n + \cdots),$$

откуда, замечая, что $b_0 = f(0) = 1$, имеем

$$b_1 = qb_0 + b_1 q, \quad b_2 q^2 + b_1 q^2 = b_2, \ldots,$$
$$b_n q^n + b_{n-1} q^n = b_n,$$

т. е.

$$b_1 = \frac{q}{1-q}, \quad b_2 = \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)}, \ldots,$$
$$b_n = \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}.$$

Итак,

$$f(x) = 1 + \frac{q}{1-q} x + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} x^2 + \cdots +$$
$$+ \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)} x^n + \cdots.$$

Заметим, что поступая формально, получаем:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = \\
&= (1+qx)(1+q^2x)(1+q^3x)(1+q^4x)\dots(1+q^nx)\dots = \\
&= 1 + (q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + \cdots)x + \\
&+ \left(q{\cdot}q^2 + (q + q^2)q^3 + (q + q^2 + q^3)q^4 + \cdots\right) x^2 + \cdots = \\
&= 1 + q(1 + q + q^2 + \cdots)x + \\
&+ q^2 \left(q + (q + q^2) + (q + q^2 + q^3) + \cdots\right) x^2 + \cdots = \\
&= 1 + \frac{q}{1-q}x + \bigl(q(q^2 + q^3 + q^4 + \cdots) + \\
&+ q^2(q^3 + q^4 + q^5 + \cdots) + q^3(q^4 + q^5 + \cdots) + \cdots + \\
&+ q^n(q^{n+1} + q^{n+2} + \cdots + q^m + \cdots) + \cdots\bigr)x^2 + \\
&+ (q{\cdot}q^2{\cdot}q^3 + \cdots)x^3 + \cdots = \\
&= 1 + \frac{q}{1-q}x + \bigl(q^3(1 + q + q^2 + \cdots) + \\
&+ q^5(1 + q + q^2 + \cdots) + \\
&+ q^7(1+q+q^2+\cdots)+\cdots\bigr)x^2+(q{\cdot}q^2{\cdot}q^3+\cdots)x^3+\cdots = \\
&= 1 + \frac{q}{1-q}x + \left(\frac{q^3}{1-q} + \frac{q^5}{1-q} + \frac{q^7}{1-q} + \cdots\right) x^2 + \\
&+ (q^6 + \cdots)x^3 + \cdots = \\
&= 1 + \frac{q}{1-q}x + \frac{q^3}{1-q}(1 + q^2 + q^4 + \cdots)x^2 + \\
&+ (q^6 + \cdots)x^3 + \cdots = \\
&= 1 + \frac{q}{1-q}x + \frac{q^3}{1-q}\cdot\frac{1}{1-q^2}x^2 + \cdots.
\end{aligned}
$$

е) Деление степенных рядов. Важным применением теоремы о подстановке ряда в ряд является деление степенных рядов.

Рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, где $a_0 \neq 0$, $x \in (-R_1, R_1)$.

Представим этот ряд в виде

$$a_0\left(1+\frac{a_1}{a_0}x+\frac{a_2}{a_0}x^2+\cdots+\frac{a_n}{a_0}x^n+\cdots\right)=a_0(1+y),$$

где

$$y=\frac{a_1}{a_0}x+\frac{a_2}{a_0}x^2+\cdots+\frac{a_n}{a_0}x^n+\cdots.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots}&=\frac{1}{a_0}\cdot\frac{1}{1+y}=\\&=\frac{1-y+y^2-\cdots+(-1)^my^m+\cdots}{a_0}.\end{aligned}\tag{18}$$

Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{m=0}^{\infty}(-1)^my^m$ есть 1.

Подставляя вместо y соответствующий ряд в (18), получаем в силу общей теоремы выражение $\dfrac{1}{a_0+a_1x+\cdots}$ в виде степенного ряда с центром в точке $x_0=0$ для достаточно малых значений x (например, для таких, что $\left|\dfrac{a_1}{a_0}\right||x|+$ $+\left|\dfrac{a_2}{a_0}\right||x|^2+\cdots+\left|\dfrac{a_n}{a_0}\right||x|^n+\cdots<1$), т. е.

$$\frac{1}{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots}=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n+\cdots.$$

Пусть есть еще ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ с радиусом сходимости R_2. Тогда частное $\dfrac{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+\cdots}{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots}$ может быть записано в виде

$$(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+\cdots)\cdot(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots),$$

т. е. представлено степенным рядом

$$d_0+d_1x+d_2x^2+\cdots+d_nx^n+\cdots.$$

Коэффициенты d_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, можно определить, например, методом неопределенных коэффициентов, исходя из равенства

$$(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots)(d_0+d_1x+\cdots+d_nx^n+\cdots)= \\ = b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+\cdots, \tag{19}$$

производя перемножение рядов и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и в правой частях равенства.

Пример 27. Написать несколько членов разложения функции $y = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(1+x)}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ в ряд по степеням x.

Решение. Для $|x| < 1$ имеем

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots.$$

Поэтому

$$\frac{x}{x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots} = \frac{1}{1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{x^4}{5} - \cdots} =$$

$$= 1 - \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} - \cdots\right) +$$

$$+ \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} - \cdots\right)^2 -$$

$$- \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} - \cdots\right)^3 +$$

$$+ \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} - \cdots\right)^4 -$$

$$- \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} - \cdots\right)^5 =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{24}x^3 - \frac{17}{288}x^4 - \frac{3}{20}x^5 + \cdots.$$

ж) Почленное интегрирование ряда. Пусть $f(x)$ представляется в виде

$$f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt,$$

где разложение $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ известно или достаточно легко получается. Тогда в силу общей теоремы (см. стр. 110) равенство

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x-x_0)^{n+1}}{n+1} \tag{20}$$

справедливо внутри общего интервала сходимости рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x-x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

Вторая теорема Абеля. Пусть R — радиус сходимости степенного ряда и $S(x)$ — его сумма для $x \in (-R, R)$. Если ряд сходится в точке $x = R$ $(x = -R)$, то его сумма является функцией непрерывной в точке $x = R$ ($x = -R$), т. е.

$$\lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

$$\left(\lim_{x \to -R+0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n \right).$$

Из этой теоремы следует, что если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ или ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$ сходится в одном или обоих концах промежутка $(-R, R)$, то и равенство (20) имеет место при соответствующих значениях x $(x = R,\ x = -R)$.

Пример 28. Разложить функцию $y = \operatorname{arctg} x$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$.

Решение. Поскольку $\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{dx}{1+x^2}$, то, разлагая функцию $\frac{1}{1+x^2}$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ и интегрируя почленно полученный ряд, имеем

$$\operatorname{arctg} x =$$
$$= \int\limits_0^x \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + \dots\right) dx =$$
$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} + \dots.$$

Разложение функции $\frac{1}{1+x^2}$ справедливо для x, удовлетворяющих условию $|x| < 1$. Для этих же x верно и разложение

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} + \dots. \tag{21}$$

Отметим также, что одновременно получено разложение в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ функции $y = \operatorname{arcctg} x$, так как $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, т. е.

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n-1} + \dots. \tag{22}$$

Заметим также, что в силу сходимости ряда (21) в точках $x = +1$ и $x = -1$ из второй теоремы Абеля (стр. 150) следует, что разложения (21) и (22) справедливы и для этих значений x, т. е.

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad \text{для } |x| \leqslant 1,$$
$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad \text{для } |x| \leqslant 1.$$

Пример 29. Разложить функцию $y = \operatorname{arctg}^2 x$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$.

Решение. Возводя в квадрат ряд для $y = \operatorname{arctg} x$, имеем

$$\operatorname{arctg}^2 x = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} + \dots\right)^2,$$
$$|x| \leqslant 1,$$

т. е.

$$\operatorname{arctg}^2 x = x^2+\left(-\frac{2}{3}\right)x^4+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}\right)x^6+$$

$$+\left(-\frac{1}{7}-\frac{1}{7}+\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right)x^8+\dots+$$

$$+\left(\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\frac{(-1)^{n-1}}{3}\cdot\frac{1}{2n-3}+\dots\right)x^{2n}+\dots=$$

$$+x^2-\left(1+\frac{1}{3}\right)\frac{x^4}{2}+\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\frac{x^6}{3}-$$

$$-\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)\frac{x^8}{4}+\dots+$$

$$+(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2n-1}\right)\frac{x^{2n}}{n}+\dots.$$

Итак,

$$\operatorname{arctg}^2 x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2n-1}\right)\frac{x^{2n}}{n},\quad |x|\leqslant 1.$$

Для доказательства формулы общего члена полученного ряда $a_n = 1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2n-1}$ можно воспользоваться методом математической индукции (проверьте!).

Пример 30. Разложить функцию $\int\limits_0^x f(x)\,dx$, где

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$$

в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$.

Решение. Разложение функции $f(x)$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ есть

$$\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\dots\right),$$

$$-1 < x \leqslant 1,\ x\neq 0,$$

т. е. есть

$$f(x) = 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}+\dots.$$

Это разложение верно и в точке $x = 0$, т. е. для всех x из промежутка $-1 < x \leqslant 1$. Следовательно,

$$\int\limits_0^x f(x)\,dx = x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2} + \cdots.$$

Предложенный способ находит широкое применение при приближенном вычислении определенных интегралов, когда найти первообразную в конечном виде не представляется возможным (см. далее гл. II § 2).

Пример 31. Разложить функцию $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$.

Решение. Для производной данной функции имеем

$$y' = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Эта функция разлагается в степенной ряд

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

Интегрируя почленно этот ряд от 0 до x, имеем

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \int\limits_0^x dx + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \int\limits_0^x \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\,dx =$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1}, \ |x| < 1.$$

Поскольку этот ряд сходится и в точках $x = \pm 1$ (проверьте!), то по второй теореме Абеля отсюда имеем, что полученное разложение справедливо для всех $|x| \leqslant 1$. В частности, получаем, что

$$1 - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} - \cdots +$$

$$+ (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot(2n)}\cdot\frac{1}{2n+1} + \cdots = \ln(1+\sqrt{2}),$$

$$-1+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}+\dots+$$
$$+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot\frac{1}{2n+1}+\dots=\ln(\sqrt{2}-1).$$

з) Почленное дифференцирование ряда. Суть метода состоит в следующем. Пусть надо найти разложение некоторой функции в степенной ряд. Если удается найти такую функцию $g(x)$, что $f(x)=g'(x)$, то, разложив функцию $g(x)$ в степенной ряд и продифференцировав его почленно, получим разложение в ряд функции $f(x)$. При этом полученное разложение верно всюду, где соответствующее разложение было верно для функции $g(x)$.

Пример 32. Разложить функцию $y=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ в степенной ряд с центром в точке $x_0=0$.

Решение. Поскольку $\dfrac{1}{(1-x)^2}=\left(\dfrac{1}{1-x}\right)'$, то имеем

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=(1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+\dots)'=$$
$$=1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1}+\dots.$$

Так как при дифференцировании интервал сходимости степенного ряда не меняется, то найденное разложение имеет место при x, удовлетворяющих условию $-1<x<1$.

и) Представление степенным рядом неявно заданной функции. Пусть функция $y(x)$ определяется уравнением $F(x,y)=0$ и условием $y(x_0)=y_0$ (числа x_0 и y_0 должны, естественно, удовлетворять равенству $F(x_0,y(x_0))=0$).

Теорема. Пусть функция $F(x,y)$ в окрестности точки (x_0,y_0) разлагается в ряд по степеням $x-x_0$ и $y-y_0$ и коэффициент при $y-y_0$ этого разложения отличен от нуля ($F'_y(x_0,y_0)\neq 0$). Тогда функция $y(x)$, определяемая уравнением $F(x,y)=0$ в окрестности точки x_0, разлагается в ряд по степеням $x-x_0$.

Другими словами, эта теорема означает, что если $F(x, y)$ аналитическая в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) такой, что $F(x_0, y_0) = 0$, то функция $y = y(x)$, определяемая уравнением $F(x, y) = 0$, также будет аналитической в окрестности точки x_0, если $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Без ограничения общности будем считать, что $x_0 = y_0 = 0$.

Пусть $F(x, y) = \sum\limits_{i,k=0}^{\infty} c_{ik} x^i y^k$. Так как $F(x, y(x)) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки $(0, 0)$, то, следовательно,

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} c_{ik} x^i y^k \equiv 0.$$

Если выделить член с первой степенью y, то, перенося его в другую часть и деля на коэффициент при нем, можно данное уравнение переписать так:

$$y = c_{10}x + c_{20}y + c_{11}xy + c_{02}y^2 + c_{30}x^3 + c_{21}x^2y + \cdots. \quad (23)$$

Ряд для функции $y(x)$ будем искать в виде

$$y(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots.$$

Подставляя это выражение y в (23) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, после возведения соответствующих рядов в степень и приведения подобных членов, получим систему уравнений, из которой последовательно найдем коэффициенты a_i:

$$a_1 = c_{10}, \quad a_2 = c_{20} + c_{11}a_1 + c_{02}a_1^2 \text{ и т. д.}$$

Заметим, что сформулированная теорема носит лишь локальный характер и устанавливает только возможность разложения y по степеням $x - x_0$ вблизи x_0. Определение точного промежутка сходимости этого разложения требует особого исследования.

Известно, что если для $F(x, y)$ ее разложение в ряд по степеням x и y справедливо для $|x| < r$ и $|y| < \rho$, то ряд для $y(x)$ сходится, по крайней мере, для $|x| < r_1$, где $r_1 = r\left(\dfrac{\rho}{\rho + 2M}\right)^2$ и $|c_{ik}|r^i\rho^k \leqslant M$.

Пример 33. Найти пять членов разложения в степенной ряд функции $y(x)$, являющейся решением уравнения $y = 1 + xe^y$ и удовлетворяющей условию $y(0) = 1$.

Решение. Функция e^y является аналитической в окрестности любой точки, в частности, в точке $y = 1$. Поэтому на основании предыдущей теоремы из уравнения $y = 1 + xe^y$ и условия $y(0) = 1$ функция $y(x)$ определяется как функция x, аналитическая в точке $x = 0$:

$$y = 1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots .$$

Подставляя из последнего равенства выражение $y - 1$ в уравнение $y - 1 = xe^{y-1} \cdot e$, получаем, что

$$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots =$$

$$= xe \cdot e^{a_1x + a_2x^2 + \dots} = xe\Big[(1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots) +$$

$$+ \frac{(a_1x + a_2x^2 + \dots)^2}{2!} + \frac{(a_1x + a_2x^2 + \dots)^3}{3!} + \dots\Big],$$

откуда

$$a_1 = e, \quad a_2 = a_1e = e^2,$$

$$a_3 = a_2e + \frac{a_1^2e}{2} = e^3 + \frac{e^3}{2} = \frac{3}{2}e^3,$$

$$a_4 = a_3e + a_1a_2e + \frac{a_1^3e}{6} = \frac{3}{2}e^4 + e^4 + \frac{1}{6}e^4 = \frac{11}{6}e^4 \text{ и т. д.}$$

Следовательно, в некоторой окрестности нуля имеет место представление

$$y = 1 + ex + e^2x^2 + \frac{3}{2}e^3x^3 + \frac{11}{6}e^4x^4 + \dots .$$

Пример 34. Рассмотрим уравнение

$$y = a + x\varphi(y), \tag{24}$$

где функцию $\varphi(y)$ будем предполагать аналитической в точке $y = a$. Тогда из предыдущего следует, что в окрестности точки $x = 0$ можно определить y как функцию x, аналитическую в точке $x = 0$, такую, что $y(0) = a$. Пусть $u = f(y)$ — любая функция от y, аналитическая при $y = a$. Если вместо y подставить в функцию $u = f(y)$ функцию $y(x)$, определяемую из (24), то u также будет аналитической в точке $x = 0$. Найдем разложение $u(x)$ по степеням x. Заметим, что $y = y(x, a)$. Дифференцируя соотношение (24) по x и по a, находим

$$y'_x = \varphi(y) + x\varphi'_y \cdot y'_x$$

и

$$y'_a = x\varphi'_y \cdot y'_a + 1,$$

т. е.

$$(1 - x\varphi'_y)\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi(y), \quad (1 - x\varphi'_y)\frac{\partial y}{\partial a} = 1,$$

откуда

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi(y)\frac{\partial y}{\partial a}.$$

Поскольку $y = y(x, a)$, то и $u = f(y) = f\left(y(x, a)\right)$ и

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \varphi(y)\frac{\partial y}{\partial a} = \varphi(y)\frac{\partial u}{\partial a}. \tag{25}$$

Для любой функции $F(y)$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right) = \frac{\partial}{\partial a}\left(F(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Справедлива формула

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \frac{\partial^{n-1}\left[\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right]}{\partial a^{n-1}}.$$

В самом деле, при $n = 1$ это следует из (25). Если при $n = k$ она верна, то при $n = k + 1$ имеем

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}}u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left(\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right)\right) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right) =$$

$$= \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\frac{\partial}{\partial a}\left(\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\varphi^{n+1}(y)\frac{\partial y}{\partial a}\right).$$

Поскольку

$$u = u_0 + x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=0} + \frac{x^2}{2!}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\bigg|_{x=0} + \cdots +$$
$$+ \frac{x^n}{n!}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^n\bigg|_{x=0} + \cdots .$$

и при $x = 0$ имеем

$$u(0) = f(y(0)) = f(a) = u_0,$$

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\bigg|_{x=0} = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[\varphi^n(a)f'(a)],$$

то

$$f(y) = f(a) + x\varphi(a)f'(a) +$$
$$+\frac{x^2}{2!}\frac{d}{da}\left(\varphi^2(a)f'(a)\right) + \cdots + \frac{x^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[\varphi^n(a)f'(a)] + \cdots . \tag{26}$$

Такой ряд называется рядом Лагранжа.

При $f(y) = y$ получаем

$$y = a + x\varphi(a) + \frac{x^2}{2!}\frac{d}{da}\left(\varphi^2(a)\right) + \cdots + \frac{x^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left(\varphi^n(a)\right) + \cdots .$$

Пример 35. Для уравнения Кеплера

$$E = M + \varepsilon \sin E,$$

где E — эксцентрическая аномалия планеты, M — средняя аномалия, ε — эксцентриситет планетной орбиты, сообразно вышесказанному имеем

$$E = M + \varepsilon \sin M + \frac{\varepsilon^2}{2!}\frac{d}{dM}(\sin^2 M) + \cdots +$$
$$+ \frac{\varepsilon^n}{n!}\frac{d^{n-1}(\sin^n M)}{dM^{n-1}} + \cdots$$

(Лаплас установил, что для этого ряда сходимость имеет место при $0 < \varepsilon < 0{,}6627\ldots$).

к) "Обращение степенного ряда". Пусть функция $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки $x = x_0$ представляется рядом по степеням $x - x_0$, т. е.

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots .$$

Ясно, что $a_0 = y(x_0) = y_0$, поэтому имеем

$$y - y_0 = a_1(x - x_0). \tag{27}$$

Предположим, что $a_1 \neq 0$ в окрестности точки y_0. Тогда x определяется по предыдущей теореме как функция y, причем $x(y)$ разлагается в ряд по степеням $y - y_0$.

Вывод: Если y является аналитической функцией от x в точке x_0, то в соответствующей точке $y_0 = f^{-1}(x_0)$ (при условии $y'(x_0) \neq 0$) обратная функция также будет аналитической.

Если $x_0 = y_0 = 0$, то из (27) имеем

$$x = \alpha y + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \cdots \tag{28}$$

и коэффициенты искомого разложения $x = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \cdots$ последовательно определяются из соотношения

$$\alpha y + \beta_2(b_1 y + b_2 y^2 + \cdots)^2 + \beta_3(b_1 y + b_2 y^2 + \cdots)^3 + \cdots =$$
$$= b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \cdots,$$

т. е.

$$b_1 = \alpha, \quad b_2 = \beta_2 b_1^2, \quad b_3 = 2\beta_2 b_1 b_2 + \beta_3 b_1^3 + \cdots \quad \text{и т. д.}$$

Пример 36. Используя разложение функции $y = \operatorname{arctg} x$ в степенной ряд

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \cdots,$$

найти разложение в степенной ряд функции

$$x = \operatorname{tg} y = y + a_3 y^3 + a_5 y^5 + a_7 y^7 + a_9 y^9 + \cdots.$$

(Выписаны только нечетные степени y, так как $y = \operatorname{tg} x$ есть нечетная функция.)

Решение. Из уравнения

$$y = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \cdots$$

имеем

$$x = y + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{9}x^9 + \cdots.$$

Подставляя в это соотношение вместо x ряд

$$y + a_3y^3 + a_5y^5 + a_7y^7 + a_9y^9 + \cdots,$$

получим равенство

$$y + a_3y^3 + a_5y^5 + a_7y^7 + a_9y^9 + \cdots =$$
$$= y + \frac{1}{3}(y + a_3y^3 + a_5y^5 + a_7y^7 + \cdots)^3 -$$
$$- \frac{1}{5}(y + a_3y^3 + a_5y^5 + \cdots)^5 +$$
$$+ \frac{1}{7}(y + a_3y^3 + a_5y^5 + \cdots)^7 + \cdots,$$

откуда

$$a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_5 = \frac{1}{3}\cdot 3a_3 - \frac{1}{5} = \frac{2}{15},$$

$$a_7 = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot a_5 + \frac{1}{3}\cdot 3a_3^2 - \frac{1}{5}\cdot 5a_3 + \frac{1}{7} = a_5 + a_3^2 - a_3 + \frac{1}{7} = \frac{17}{315}.$$

Итак,

$$x = \operatorname{tg} y = y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{2}{15}y^5 + \frac{17}{315}y^7 + \cdots,$$

т. е.

$$y = \operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots.$$

Задача разложения в степенной ряд функции y, определяемой уравнением (24) (см. стр. 156), и обращения ряда связаны между собой. Если предположить, что $\varphi(a) \neq 0$, то уравнение (24) можно переписать в виде $x = \dfrac{y-a}{\varphi(y)}$ и ясно, что нахождение разложения в степенной ряд функции $x(y)$ равносильно обращению степенного ряда функции $\varphi(y)$ с центром в точке a.

Обратно, если надо обратить ряд

$$y = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \quad (a_1 \neq 0),$$

то перепишем это соотношение в виде

$$y = x(a_1 + a_2x + \cdots) \equiv x\psi(x)$$

и придем к уравнению типа (24)

$$x = y\cdot\frac{1}{\psi(x)} \equiv 0 + y\cdot\varphi(x).$$

Тогда имеем в силу соотношения (26)

$$x = y\cdot\frac{1}{\psi(0)} + \frac{y^2}{2!}\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{\psi^2(x)}\right)\Bigg|_{x=0} + \cdots +$$
$$+ \frac{y^n}{n!}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{1}{\psi^n(x)}\right)\Bigg|_{x=0} + \cdots.$$

Пример 37. Рассмотрим уравнение

$$y = x(a + x), \quad a \neq 0.$$

Перепишем его в виде $x = y\cdot\dfrac{1}{a+x}$. Так как

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{1}{a+x}\right)^n = \frac{(-1)^{n-1}\cdot n(n+1)\ldots(2n-2)}{(a+x)^{2n-1}},$$

то получаем разложение

$$x = \frac{y}{a} - \frac{y^2}{a^3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}\frac{y^n}{a^{2n-1}} + \cdots.$$

Пример 38. Рассмотрим уравнение

$$y^2 = ay + x \qquad \left(y = a + \frac{x}{y}\right).$$

Здесь $\varphi(y) = \dfrac{1}{y}$. Полагая $f(y) = y^{-k}$, по формуле Лагранжа (26) находим

$$\frac{1}{y^k} = \frac{1}{a^k} - x\cdot\frac{k}{a^{k+2}} + \frac{x^2}{2!}\frac{k(k+3)}{a^{k+4}} -$$
$$- \frac{x^3}{3!}\frac{k(k+4)(k+5)}{a^{k+6}} + \frac{x^4}{4!}\frac{k(k+5)(k+6)(k+7)}{a^{k+8}} - \cdots.$$

С другой стороны, $y = \dfrac{a}{2} + \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + x}$ $(y(0) = a)$. Отсюда получаем, например, при $a = 2$, что

$$\left(\frac{2}{1+\sqrt{1+x}}\right)^k = 1 - k\cdot\frac{x}{4} + \frac{k(k+3)}{2!}\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \\ - \frac{k(k+4)(k+5)}{3!}\left(\frac{x}{4}\right)^3 + \cdots.$$

л) Разложение функций в обобщенный степенной ряд. Иногда возникает необходимость разложить функцию не по степеням $x - x_0$, а по степеням некоторой другой функции, т. е. в обобщенный степенной ряд. При этом можно пользоваться всеми рассмотренными выше приемами и, конечно, табличными разложениями функций в степенные ряды.

Пример 39. Разложить в ряд по степеням $\sqrt{x}$ функцию $y = \arcsin(1-x)$ при $x \geqslant 0$.

Решение. Для производной функции $y = \arcsin(1-x)$ имеем $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}$. Применяя разложение для бинома $(1+z)^{-\frac{1}{2}}$, получаем

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{2x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}x}} = -\frac{1}{\sqrt{2x}}\left(1 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{32}x^2 + \cdots\right) = \\ = -\frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{x} - \frac{3}{32\sqrt{2}}(\sqrt{x})^3 - \cdots = -\frac{1}{\sqrt{2x}} + \varphi(x).$$

Функция $\varphi(x) = -\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{x} - \dfrac{3}{32\sqrt{2}}(\sqrt{x})^3 - \cdots$ представляет собой равномерно сходящийся ряд на $[0, \alpha]$, $0 < \alpha < 2$. Поэтому первообразная для функции $-\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ есть $-\sqrt{2x}$, а для функции $\varphi(x)$ есть $-\dfrac{2}{6\sqrt{2}}x^{\frac{3}{2}} - \dfrac{3}{80\sqrt{2}}x^{\frac{5}{2}} - \cdots$. Поскольку $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$, то $y = \dfrac{\pi}{2} - \sqrt{2}x^{\frac{1}{2}} - \dfrac{2}{6\sqrt{2}}x^{\frac{3}{2}} - \dfrac{3}{80\sqrt{2}}x^{\frac{5}{2}} + \cdots$, $0 \leqslant x < 2$.

Отметим, что получить разложение данной функции по положительным степеням x невозможно, иначе, основываясь на теореме о том, что внутри промежутка сходимости степенного ряда функция, его представляющая, имеет производную, получили бы, что ее имела бы в точке $x = 0$ и исходная функция, что не так.

Пример 40. Разложить функцию $f(x) = \ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|$ в ряд по степеням $\cos x$.

Решение. Поскольку $\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \frac{1}{2}\ln(1+\cos x) - \frac{1}{2}\ln 2$, то полагая $y = \cos x$ и разлагая в степенной ряд функцию $y = \ln(1+y)$, получаем

$$\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \frac{1}{2}\ln(1+y) - \frac{1}{2}\ln 2 =$$
$$= \frac{1}{2}\left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}y^n}{n} + \dots\right) - \frac{1}{2}\ln 2 =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos^n x}{n}, \quad x \neq \pi(2k-1),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 41. Функция $y(x)$ задана уравнением

$$x = y - \operatorname{arctg} y.$$

Выделив главную часть вида Cx^α, $C \neq 0$, функции y при $x \to 0$, найти три ненулевых члена разложения этой функции в ряд по степеням x^α.

Решение. Из равенства

$$\operatorname{arctg} y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \frac{y^9}{9} + \cdots$$

(см. пример 28) следует, что $y \sim \sqrt[3]{3}x^{1/3}$, $x \to 0$. Итак, будем искать три ненулевые члена разложения функции $y(x)$ в ряд по степеням $x^{1/3}$. Замечая, что из уравнения $x = y - \operatorname{arctg} y$ следует нечетность функции $y(x)$, делаем вывод, что коэффициенты у $x^{n/3}$ при четном n должны равняться нулю. Итак, представим функцию y в виде

$$y(x) = \sqrt[3]{3}x^{1/3} + a_1 x + a_2 x^{5/3} + \cdots$$

и будем искать коэффициенты a_1, a_2 так же, как при "обращении" степенного ряда (см. стр.157). Из соотношений

$$x = \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7} - \frac{y^9}{9} + \cdots$$

и

$$y = \sqrt[3]{3}x^{1/3} + a_1 x + a_2 x^{5/3} + \cdots$$

получаем:

$$y^3 = 3x + 3\sqrt[3]{9}a_1 x^{5/3} + 3\sqrt[3]{3}a_1^2 x^{7/3} + 3\sqrt[3]{9}x^{7/3} + \cdots,$$

$$y^5 = 3\sqrt[3]{9}x^{5/3} + 15\sqrt[3]{3}a_1 x^{7/3} + \cdots,$$

$$y^7 = 9\sqrt[3]{3}x^{7/3} + \cdots,$$

$$x = x + x^{5/3}\left(\sqrt[3]{9}a_1 - \frac{3}{5}\sqrt[3]{9}\right) +$$

$$+ x^{7/3}\left(\sqrt[3]{3}a_1^2 + \sqrt[3]{3}a_2 - 3\sqrt[3]{3}a_1 + \frac{9}{7}\sqrt[3]{3}\right) + \cdots.$$

Откуда следует, что $a_1 = \dfrac{3}{5}$, $a_2 = \dfrac{9\sqrt[3]{9}}{175}$. Итак,

$$y(x) = \sqrt[3]{3}x^{1/3} + \frac{3}{5}x + \frac{9\sqrt[3]{9}}{175}x^{5/3} + \cdots.$$

§ 5. ПОВТОРНЫЕ И ДВОЙНЫЕ РЯДЫ

Пусть задано счетное множество числовых последовательностей

$$\begin{array}{l} a_{11},\ a_{12},\ a_{13}, \ldots,\ a_{1n}, \ldots \\ a_{21},\ a_{22},\ a_{23}, \ldots,\ a_{2n}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1},\ a_{m2},\ a_{m3}, \ldots,\ a_{mn}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{1}$$

Можно считать, что элементы этих последовательностей расположены в виде матрицы с бесконечным числом строк и столбцов.

Элементы матрицы (1) можно многими способами представить в виде последовательности

$$u_1,\ u_2, \ldots,\ u_p, \ldots$$

и составить из нее простой ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} u_p = \sum_{q,r=1}^{\infty} a_{qr}. \tag{2}$$

Если просуммировать каждую строку матрицы (1) отдельно, то получим бесконечную последовательность рядов

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_{1r},\ \sum_{r=1}^{\infty} a_{2r}, \ldots,\ \sum_{r=1}^{\infty} a_{qr}, \ldots. \tag{3}$$

Запишем формальную сумму

$$\sum_{q=1}^{\infty}\left(\sum_{r=1}^{\infty} a_{qr}\right). \tag{4}$$

Эту сумму принято называть *повторным* рядом.

Если сначала просуммировать элементы каждого столбца, то получим последовательность

$$\sum_{q=1}^{\infty} a_{q1},\ \sum_{q=1}^{\infty} a_{q2}, \ldots,\ \sum_{q=1}^{\infty} a_{qr}, \ldots. \tag{5}$$

Суммируя эту последовательность, получим другой *повторный* ряд

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\sum_{q=1}^{\infty} a_{qr}\right). \tag{6}$$

Определение. Повторный ряд (4) называется сходящимся, если сходится каждый из рядов (3) и сходится ряд $\sum\limits_{q=1}^{\infty} A_q$, где $A_q = \sum\limits_{r=1}^{\infty} a_{qr}$ — сумма q-го ряда (3). В этом случае сумма $\sum\limits_{q=1}^{\infty} A_q$ называется суммой повторного ряда (4).

Определение. Повторный ряд (6) называется сходящимся, если сходится каждый из рядов (5) и сходится ряд $\sum\limits_{r=1}^{\infty} \tilde{A}_r$, где $\tilde{A}_r = \sum\limits_{q=1}^{\infty} a_{qr}$ — сумма r-го ряда (5). В этом случае сумма $\sum\limits_{r=1}^{\infty} \tilde{A}_r$ называется суммой повторного ряда (6).

Как показывает следующий пример, суммы обоих повторных рядов не обязаны совпадать; более того, сходимость одного повторного ряда, вообще говоря, не влечет сходимости другого.

Пример 1. Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^2} & -\frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^3} & -\frac{1}{2^4} & \cdots \\
\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & -\frac{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)}{2^2} & \frac{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)}{2^2} & -\frac{\left(1-\frac{1}{2^3}\right)}{2^3} & \frac{\left(1-\frac{1}{2^3}\right)}{2^3} & -\frac{\left(1-\frac{1}{2^4}\right)}{2^4} & \cdots \\
\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} & -\frac{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)^2}{2^2} & \frac{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)^2}{2^2} & -\frac{\left(1-\frac{1}{2^3}\right)^2}{2^3} & \frac{\left(1-\frac{1}{2^3}\right)^2}{2^3} & -\frac{\left(1-\frac{1}{2^4}\right)^2}{2^4} & \cdots \\
\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^3} & -\frac{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)^3}{2^2} & \frac{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)^3}{2^2} & -\frac{\left(1-\frac{1}{2^3}\right)^3}{2^3} & \frac{\left(1-\frac{1}{2^3}\right)^3}{2^3} & -\frac{\left(1-\frac{1}{2^4}\right)^3}{2^4} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{pmatrix}.$$

Каждый из рядов по строке сходится абсолютно и суммы их равны: первого $\frac{1}{2}$, второго $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$, третьего $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}$ и т. д. Эти суммы образуют сходящийся ряд, сумма которого равна

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

Рассмотрим теперь ряды по столбцам. Для первого получаем сумму

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^r}+\cdots\right)=1.$$

Для второго

$$-\frac{1}{2^2}\left(1+\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\left(1-\frac{1}{2^2}\right)^2+\cdots+\left(1-\frac{1}{2^2}\right)^r+\cdots\right)=$$

$$=-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2^2}}=-1.$$

Для столбца с номером $2q+1$ сумма равна

$$\frac{1}{2^{q-1}}\left(1+\left(1-\frac{1}{2^{q-1}}\right)+\left(1-\frac{1}{2^{q-1}}\right)^2+\cdots+\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{1}{2^{q-1}}\right)^r+\cdots\right)=\frac{1}{2^{q-1}}\cdot\frac{1}{2^{1-q}}=1.$$

Для столбца с номером $2q$ сумма равна

$$-\frac{1}{2^{q-1}}\left(1+\left(1-\frac{1}{2^{q-1}}\right)+\left(1-\frac{1}{2^{q-1}}\right)^2+\cdots+\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{1}{2^{q-1}}\right)^r+\cdots\right)=-1.$$

Поскольку ряд $1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n+1}+\cdots$ расходится, то повторный ряд вида (6) расходится, в то время как повторный ряд вида (4) сходится и сумма его равна 1, причем как все внутренние, так и внешние ряды сходятся абсолютно.

Определение. Пусть дана бесконечная матрица (1). Символ

$$\sum_{q=1,r=1}^{\infty} a_{qr} \tag{7}$$

называется двойным рядом.

Определение. Частичной суммой двойного ряда (7) называется конечная сумма $S_{mn} = \sum\limits_{q=1}^{m}\sum\limits_{r=1}^{n} a_{qr}$, т. е. сумма тех элементов матрицы (1), которые находятся в прямоугольнике из ее первых n столбцов и m строк:

$$\left(\begin{array}{cccc|cc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1n+1} & \cdots \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2n+1} & \cdots \\
\multicolumn{4}{c|}{\dotfill} & \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & a_{mn+1} & \cdots \\
\hline
a_{m+11} & a_{m+12} & \cdots & a_{m+1n} & a_{m+1n+1} & \cdots
\end{array}\right).$$

Заметим, что множество S_{mn}, $m = 1, 2, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$ представляет собой опять бесконечную матрицу.

Определение. Двойной ряд называется сходящимся, если при независимом стремлении переменных m и n к бесконечности существует предел

$$\lim_{\substack{m\to+\infty \\ n\to+\infty}} S_{mn}.$$

Значение этого предела называют суммой двойного ряда (7) и пишут $S = \sum\limits_{q,r=1}^{\infty} a_{qr}$. Если предел S_{mn} при $m \to \infty$, $n \to \infty$ не существует, то ряд (7) называется расходящимся.

Пример 2. Ряд $\sum\limits_{k=1,\, l=1}^{\infty} x^k y^l$ является сходящимся для $|x| < 1$, $|y| < 1$. В самом деле,

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} x^k y^l = \sum_{k=1}^{m} x^k \Bigl(\sum_{l=1}^{n} y^l\Bigr) =$$
$$= \Bigl(\sum_{k=1}^{m} x^k\Bigr)\Bigl(\sum_{l=1}^{n} y^l\Bigr) = \frac{1-x^{m+1}}{1-x}\cdot\frac{1-y^{n+1}}{1-y}.$$

Поскольку

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{1-x^{m+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}, \; |x| < 1,$$

и

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-y^{n+1}}{1-y}=\frac{1}{1-y},\ |y|<1,$$

то

$$\lim_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty}}\frac{1-x^{m+1}}{1-x}\cdot\frac{1-y^{n+1}}{1-y}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-y}.$$

Значит, сумма исходного двойного ряда $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} x^k y^l$ равна $\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-y}$.

Естественно поставить вопрос о взаимосвязи сходимости рядов (2), (4), (6) и (7).

Теорема. Если простой ряд (2) абсолютно сходится к сумме u, то каким бы образом ни расположить его члены в виде матрицы (1), сходятся оба повторных ряда (4) и (6) и их суммы равны u.

Отметим, что эта теорема формулирует важные результаты сочетательного и переместительного свойства абсолютно сходящегося ряда: для такого ряда его члены можно переставлять произвольным образом и объединять в любом количестве в скобки, составляя таким образом новый ряд, и суммы всех таких рядов равны между собой. Так, например, сумма ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^2}+\cdots,$$

т. е. ряда, где перемежаются члены рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$, равна сумме $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$.

Теорема. Пусть дан повторный ряд (4). Если после замены его членов их абсолютными величинами получается сходящийся ряд, то сходится не только сам повторный ряд (4), но и простой ряд (2), состоящий из тех же членов, что и ряд (4), расположенных в любом порядке, и притом к той же сумме.

Следствие. Пусть дана матрица (1). Если после замены всех членов повторного ряда (4) их абсолютными величинами получится сходящийся ряд, то сходятся оба повторных ряда (4) и (6) и их суммы равны.

Отметим, что предположения об абсолютной сходимости рядов по строкам (или по столбцам) и об абсолютной сходимости ряда, составленного из их сумм, не может заменить требования сходимости повторного ряда для матрицы абсолютных величин.

Пример 3. Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$a_{qq} = 1$, $a_{qq+1} = -1$, $a_{qr} = 0$, если $r \neq q$ и $r \neq q+1$. Для этой матрицы все ряды как по строкам, так и по столбцам являются конечными суммами и, следовательно, сходятся абсолютно. Сумма в каждой строке и во всех столбцах, начиная со второго, равна нулю. Оба ряда $\sum\limits_{q=1}^{\infty} A_q = \sum\limits_{q=1}^{\infty} 0 = 0$ и $\sum\limits_{r=1}^{\infty} \tilde{A}_r = 1 + \sum\limits_{r=2}^{\infty} 0 = 1$ сходятся абсолютно; однако, суммы повторных рядов (4) и (6) не равны. Если же заменить все члены данной матрицы их абсолютными величинами, т. е. рассматривать матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$a_{qq} = a_{qq+1} = 1$, $a_{qr} = 0$, если $r \neq q$ и $r \neq q+1$, то все суммы по строкам и суммы по всем столбцам, начиная со второго, равны 2, следовательно, в этом случае оба повторных ряда (4) и (6) расходятся, как и надо было ожидать.

Основные свойства двойных рядов:

1. Если ряд $\sum\limits_{q,r=1}^{\infty} a_{qr}$ сходится к сумме S, то ряд $\sum\limits_{q,r=1}^{\infty} \lambda a_{qr}$ сходится к сумме λS, где λ — константа.

2. Если ряды $\sum\limits_{q,r=1}^{\infty} a_{qr}$ и $\sum\limits_{q,r=1}^{\infty} b_{qr}$ сходятся, то сходится ряд $\sum\limits_{q,r=1}^{\infty} (a_{qr} + b_{qr})$ и его сумма равна $\sum\limits_{q,r=1}^{\infty} a_{qr} + \sum\limits_{q,r=1}^{\infty} b_{qr}$.

3. Если ряд $\sum\limits_{q,r=1}^{\infty} a_{qr}$ сходится, то $\lim\limits_{\substack{q\to+\infty\\ r\to+\infty}} a_{qr} = 0$ (необходимое условие сходимости двойного ряда).

4. Если все члены двойного ряда $\sum\limits_{q,r=1}^{\infty} a_{qr}$ неотрицательны, то ограниченность множества $\{S_{mn}\}$ его частичных сумм есть необходимое и достаточное условие сходимости этого ряда.

5. Если ряд $\sum\limits_{q,r=1}^{\infty} a_{qr}$ с неотрицательными членами сходится и существует такое число C, что $0 \leqslant b_{qr} \leqslant Ca_{qr}$, то ряд $\sum\limits_{q,r=1}^{\infty} b_{qr}$ также сходится (теорема сравнения для двойных рядов).

6. Если члены двойного ряда определены равенством $a_{qr} = b_q \cdot c_r$ и ряды $\sum\limits_{q=1}^{\infty} b_q$, $\sum\limits_{r=1}^{\infty} c_r$ сходятся (ряд $\sum\limits_{q,r=1}^{\infty} a_{qr}$ получен произведением рядов $\sum\limits_{q=1}^{\infty} b_q$ и $\sum\limits_{r=1}^{\infty} c_r$), то двойной ряд $\sum\limits_{q,r=1}^{\infty} a_{qr}$ сходится и его сумма равна $\sum\limits_{q=1}^{\infty} b_q \cdot \sum\limits_{r=1}^{\infty} c_r$.

Пример 4. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n,m=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+m}}{mn}$. Так как

$\dfrac{(-1)^{n+m}}{mn} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \dfrac{(-1)^{m+1}}{m}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$, то, следовательно, данный двойной ряд сходится и его сумма равна $\ln^2 2$.

Пример 5. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4 + m^4}$.

Решение. Поскольку для любых n и m справедливо неравенство

$$\frac{1}{n^4 + m^4} \leqslant \frac{1}{2m^2 n^2},$$

то для сходимости данного ряда достаточно установить сходимость ряда $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \dfrac{1}{m^2 n^2}$. Так как члены этого ряда получены умножением двух сходящихся рядов $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{1}{m^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, то ряд $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 m^2}$ сходится, а значит, сходится и данный ряд.

Пример 6. Рассмотрим двойной ряд $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+m}}{\sqrt{nm}}$. Равенство $\dfrac{(-1)^{n+m}}{\sqrt{nm}} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot \dfrac{(-1)^{m+1}}{\sqrt{m}}$ показывает, что этот двойной ряд представляет собой произведение сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ на себя. Следовательно, ряд $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+m}}{\sqrt{nm}}$ сходится и его сумма равна квадрату суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

В то же время, как показано в примере на стр. 58, произведение ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ на себя в форме Коши является расходящимся рядом. Этот пример показывает, что определенное выше (стр. 171) представление произведения рядов в виде двойного ряда не эквивалентно ранее рассмотренному (стр. 57) представлению этого произведения в форме Коши.

Теорема. Если сходится двойной ряд $\sum\limits_{q,r=1}^{\infty} a_{qr}$ и сходятся все ряды по строкам (или столбцам) $\sum\limits_{r=1}^{\infty} a_{qr}$, $q = 1, 2, \ldots$ $\left(\sum\limits_{q=1}^{\infty} a_{qr},\ r=1, 2, \ldots\right)$, то сходится и повторный ряд $\sum\limits_{q=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{r=1}^{\infty} a_{qr}\right)$ $\left(\sum\limits_{r=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{q=1}^{\infty} a_{qr}\right)\right)$ и его сумма равна сумме двойного ряда.

Заметим, что условие сходимости всех рядов по строкам не следует из сходимости двойного ряда, т. е. это условие не может быть пропущено в формулировке теоремы.

Пример 7. Рассмотрим ряд, определяемый матрицей:

$$\begin{pmatrix}
1 & -1 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n+1} & \cdots \\
-1 & 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{n} & \cdots \\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \cdots & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} & \cdots \\
-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & \frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & \cdots & \left(-\frac{1}{m}\right)^{n+1} & \cdots \\
-\frac{1}{m} & \frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \cdots & \left(-\frac{1}{m}\right)^{n} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{pmatrix}.$$

Каждый ряд по строке этой матрицы имеет вид $\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n c$ и является расходящимся. Покажем, что двойной ряд сходится к нулю.

Действительно, поскольку $\sum\limits_{r=1}^{n} a_{2m-1\,r} + \sum\limits_{r=1}^{n} a_{2m\,r} = 0$ для любых m и n, то $S_{2m\,n} = 0$; точно так же $S_{m\,2n} = 0$ для любых m и n. Далее,

$$S_{2m+1\,2n+1} =$$
$$= S_{2m\,2n+1} + \underbrace{\left(-\frac{1}{m} + \frac{1}{m} - \frac{1}{m} + \frac{1}{m} - \cdots + \frac{1}{m}\right)}_{2n \text{ членов}} - \frac{1}{m} = -\frac{1}{m}.$$

Полученные равенства показывают, что $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty\\ m\to+\infty}} S_{mn} = 0$.

Пусть для ряда $\sum\limits_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}$ сходятся как все ряды $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{nm}$ по строкам, так и все ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{nm}$ по столбцам. Тогда в силу приведенной теоремы условие сходимости и равенства сумм повторных рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{nm}\right)$ и $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{nm}\right)$ необходимо для сходимости двойного ряда $\sum\limits_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}$. Однако, как показывает следующий пример, это условие не является достаточным.

Пример 8. Рассмотрим ряд, определяемый матрицей:

$$\begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & 0\cdots \\
-1 & 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & 0\cdots \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \;\; -\frac{1}{2} \;\; -\frac{1}{2} \;\; 0 & 0 \;\; \cdots\cdots\cdots & 0\cdots \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \;\; \frac{1}{2} \;\; \frac{1}{2} \;\; 0 & 0 \;\; \cdots\cdots\cdots & 0\cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & \underbrace{\frac{1}{q}\;\frac{1}{q}\cdots\frac{1}{q}}_{q \text{ членов}} \;\; \underbrace{-\frac{1}{q}\cdots-\frac{1}{q}}_{q \text{ членов}} & 0\cdots \\
0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & \underbrace{-\frac{1}{q}\cdots-\frac{1}{q}}_{q \text{ членов}} \;\; \underbrace{\frac{1}{q}\;\frac{1}{q}\cdots\frac{1}{q}}_{q \text{ членов}} & 0\cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots
\end{pmatrix},$$

$a_{2q-1\,m} = \frac{1}{q}$, $q(q-1) < m \leqslant q^2$, $a_{2q-1\,m} = -\frac{1}{q}$, $q^2 < m < q(q+1)$,
$a_{2q-1\,m} = 0$ для всех остальных индексов m, $a_{2qm} = -a_{2q-1\,m}$.

Каждая строка и каждый столбец этой матрицы содержат только конечное число отличных от нуля членов; половина из них положительны, половина — отрицательны, причем абсолютные величины этих членов равны. Итак, все ряды $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{nm}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{nm}$ сходятся к нулю, откуда следует, что и оба повторных ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Bigl(\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{nm}\Bigr)$ и $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\Bigl(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{nm}\Bigr)$ сходятся и суммы их равны нулю.

Покажем теперь, что двойной ряд $\sum\limits_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}$ расходится. Действительно,

$$S_{2m\,(m+1)^2} = \sum_{q=1}^{m}\Bigl(\sum_{r=1}^{(m+1)^2} a_{2q-1\,r} + \sum_{r=1}^{(m+1)^2} a_{2qr}\Bigr) = 0,$$

$$S_{2m+1\,(m+1)^2} =$$

$$= S_{2m\,(m+1)^2} + \underbrace{\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{m+1}}_{(m+1)\text{ членов}} = 1.$$

Полученные равенства показывают, что предела S_{nm} при $n \to +\infty$, $m \to \infty$ не существует.

Определение. Двойной ряд $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}|$.

Как и для простых рядов, из абсолютной сходимости двойного ряда следует его сходимость.

Если двойной ряд $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ сходится абсолютно, то любой простой ряд, составленный из чисел a_{mn}, также сходится абсолютно. Отсюда следует, что a_{mn} стремится к нулю не только при одновременном возрастании обоих индексов m и n, но и при возрастании хотя бы одного из этих индексов. Отсюда же следует, что множество $\{a_{mn}\}$ ограничено. Если же ряд $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ сходится неабсолютно, то множество $\{a_{mn}\}$ может быть и неограниченным.

Пример 9. Рассмотрим ряд, определяемый матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & \cdots \\ 1 & -1 & -2 & -3 & -4 & \cdots & -n & \cdots \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m & -m & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Для этого ряда $S_{mn} = 1$, когда $m + n > 2$, следовательно, он сходится к 1, но множество $\{a_{mn}\}$ его членов неограничено.

Обратим внимание на то, что в силу сходимости двойного ряда $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ имеем, что $\lim\limits_{m,n\to+\infty} a_{mn} = 0$; таким образом, для множества $\{a_{mn}\}$ чисел, занумерованных двумя индексами, существование предела $\lim\limits_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty}} a_{mn}$ не влечет ограниченности этого множества в отличие от множества чисел $\{\alpha_n\}$, занумерованных одним индексом.

Как следует из вышесказанного, данный ряд не сходится абсолютно. Покажем это непосредственно. Действительно,

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{mn} &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} |a_{kl}| = \\ &= (1+2+\cdots+(n-1)) + (1+1+2+\cdots+(n-1)) + \\ &+ 2\cdot 2+\cdots+2(m-1) = \\ &= (n-1)(n-2)+1+2\,(2+3+\cdots+(m-1)) = \\ &= (n-1)(n-2)-1+(m-1)m \to +\infty \end{aligned}$$

при $n\to+\infty$, $m\to\infty$.

Теорема. Пусть дан двойной ряд $\sum\limits_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}$. Составим каким-либо образом простой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, состоящий из тех же членов. Тогда абсолютная сходимость одного из этих рядов влечет за собой абсолютную сходимость другого и равенство их сумм.

Теорема. Рассмотрим четыре ряда: два повторных (4), (6), двойной (7) и простой ряд (2). Если хотя бы один из этих рядов сходится при замене всех его членов их абсолютными величинами, то все четыре указанных ряда сходятся и имеют одну и ту же сумму.

Следствие. Если все числа $a_{mn} \geqslant 0$, то из сходимости одного из четырех рядов: $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}\Big)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{mn}\Big)$, $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$, $\sum\limits_{q=1}^{\infty} u_q$ (u_q есть произвольно занумерованное одним индексом множество $\{a_{mn}\}$) следует сходимость остальных трех и равенство сумм всех четырех рядов.

Пример 10. Доказать сходимость и найти сумму ряда

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^{m+1}}.$$

Решение. В силу вышеприведенного утверждения для ответа на заданный вопрос достаточно доказать сходимость и найти сумму повторного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^{m+1}}\Big)$. Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^{m+1}}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n)^2} + \frac{1}{(2n)^3} + \cdots\right) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{(2n)^2}}{1 - \frac{1}{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)},$$

то этот ряд сходится. Для вычисления его суммы проведем следующие преобразования:

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}_q &= \sum_{n=1}^{q} \frac{1}{2n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{q} \frac{1}{2n-1} - \sum_{n=1}^{q} \frac{1}{2n} = \\
&= \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2q-1}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{q}\right) = \\
&= \sum_{n=1}^{2q} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{q} \frac{1}{n} = \\
&= \ln 2q + C_э - \ln q - C_э + o(1) = \ln 2 + o(1), \quad n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Отсюда получаем, что

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^{m+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)} = \lim_{q\to\infty} \tilde{S}_q = \ln 2.
$$

Итак, ряд $\displaystyle\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^{m+1}}$ сходится к $\ln 2$.

Пример 11. Исследовать на сходимость ряд

$$
\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(m+n)^{\alpha}}, \quad \alpha > 0.
$$

Решение. Матрица, соответствующая данному ряду, есть

$$
\left(
\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{(1+1)^{\alpha}} & \to & \frac{1}{(1+2)^{\alpha}} & & \frac{1}{(1+3)^{\alpha}} & \to & \cdots & \frac{1}{(1+n)^{\alpha}} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{1}{(2+1)^{\alpha}} & & \frac{1}{(2+2)^{\alpha}} & & \frac{1}{(2+3)^{\alpha}} & & \cdots & \frac{1}{(2+n)^{\alpha}} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
\frac{1}{(3+1)^{\alpha}} & & \frac{1}{(3+2)^{\alpha}} & & \frac{1}{(3+3)^{\alpha}} & & \cdots & \frac{1}{(3+n)^{\alpha}} & \cdots \\
 & \swarrow & & & & & & & \\
\multicolumn{9}{c}{\dotfill}
\end{array}
\right).
$$

Составим простой ряд, расположив его члены так, как указано стрелками (по диагоналям).

$$\frac{1}{(1+1)^\alpha}+\frac{1}{(1+2)^\alpha}+\frac{1}{(2+1)^\alpha}+ \\ +\frac{1}{(3+1)^\alpha}+\frac{1}{(2+2)^\alpha}+\frac{1}{(1+3)^\alpha}+\ldots. \tag{8}$$

Так как все члены этого ряда положительны, то он сходится одновременно с рядом

$$\frac{1}{(1+1)^\alpha}+\left(\frac{1}{(1+2)^\alpha}+\frac{1}{(2+1)^\alpha}\right)+ \\ +\left(\frac{1}{(3+1)^\alpha}+\frac{1}{(2+2)^\alpha}+\frac{1}{(1+3)^\alpha}\right)+\ldots+ \\ +\left(\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\frac{1}{(n-1+2)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(1+n)^\alpha}+\ldots\right),$$

полученным его группировкой (см. стр. 16). Итак, сходимость рассматриваемого двойного ряда эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n^\alpha}$. Соотношение $\frac{n-1}{n^\alpha}\sim\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ $(n\to+\infty)$ показывает, что этот ряд и, следовательно, ряд (8), сходится при $\alpha>2$ и расходится при $\alpha\leqslant 2$. В силу теоремы о сходимости двойного ряда с неотрицательными членами, получаем отсюда, что ряд $\sum\limits_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{(m+n)^\alpha}$, $\alpha>0$, сходится при $\alpha>2$ и расходится при $0<\alpha\leqslant 2$.

Пример 12. Рассмотрим матрицу

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{1\cdot2} & \frac{1}{2\cdot3} & \frac{1}{3\cdot4} & \frac{1}{4\cdot5} & \frac{1}{5\cdot6} & \ldots \\ \frac{1}{1\cdot2\cdot3} & \frac{1}{2\cdot3\cdot4} & \frac{1}{3\cdot4\cdot5} & \frac{1}{4\cdot5\cdot6} & \frac{1}{5\cdot6\cdot7} & \ldots \\ \frac{2}{1\cdot2\cdot3\cdot4} & \frac{2}{2\cdot3\cdot4\cdot5} & \frac{2}{3\cdot4\cdot5\cdot6} & \frac{2}{4\cdot5\cdot6\cdot7} & \frac{2}{5\cdot6\cdot7\cdot8} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

$$a_{qr}=\frac{(q-1)!}{r(r+1)\ldots(r+q)}=\frac{(r-1)!}{q(q+1)\ldots(q+r)}.$$

Сумма членов q-ой строки этой матрицы равна

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(q-1)!}{r(r+1)\dots(r+q)} =$$
$$= (q-1)! \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{q}\left(\frac{1}{r(r+1)\dots(r+q-1)} - \frac{1}{(r+1)\dots(r+q)}\right) =$$
$$= (q-1)! \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot q} = \frac{(q-1)!}{q \cdot q!} = \frac{1}{q^2}.$$

Следовательно, сумма $\sum\limits_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^2}$ есть сумма повторного ряда

$$\sum_{q=1}^{\infty}\left(\sum_{r=1}^{\infty} a_{qr}\right). \tag{9}$$

Ясно, что поскольку $a_{qr} = a_{rq}$, то сумма и второго повторного ряда также равна $\sum\limits_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2}$. Рассмотрим теперь матрицу B:

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots\right) & 0 & 0 & 0\,0\cdots \\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} & \left(\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \cdots\right) & 0 & 0\,0\cdots \\ \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} & \frac{2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} & \sum\limits_{q=3}^{\infty}\frac{2}{q(q+1)(q+2)(q+3)} & 0\,0\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

т. е. в m-ой строке ($m = 1, 2, \dots$) до ее диагонали сохраняем члены предыдущей матрицы, на диагонали ставим сумму всех членов m-ой строки предыдущей матрицы, начиная с m-го, а остальные члены заменим нулями.

Для такой матрицы суммы по ее строкам останутся равными суммам по тем же строкам предыдущей матрицы, т. е. сумма повторного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_{nm}\right)$ также будет равна $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Найдем теперь суммы по столбцам матрицы B. Для этого сначала упростим выражения диагональных членов b_{mm} этой матрицы:

$$b_{mm} = \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{(m-1)!}{i(i+1)\dots(i+m)} =$$
$$= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(m-1)!}{(m-1+q)\dots(2m-1+q)} = \frac{(m-1)!}{m^2(m+1)\dots(2m-1)}.$$

Теперь найдем сумму оставшихся членов m-го столбца. Она равна

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{(m-1)!}{i(i+1)\dots(i+m)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(m-1)!}{(m+k)\dots(2m+k)} =$$
$$= \frac{(m-1)!}{m(m+1)\dots(2m)}.$$

Следовательно, сумма всех членов m-го столбца равна

$$\frac{(m-1)!}{m^2(m+1)\dots(2m-1)} + \frac{(m-1)!}{m(m+1)\dots(2m)} =$$
$$= \frac{(m-1)!}{m(m+1)\dots(2m)} \cdot \frac{2m+m}{m} = 3 \cdot \frac{((m-1)!)^2}{(2m)!}.$$

Суммируя теперь эти числа, получаем сумму повторного ряда, которая в силу приведенной выше теоремы, должна совпадать с суммой повторного ряда (9) (см. стр. 180). Итак, используя равенство, выведенное на стр. 140, получаем

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{((m-1)!)^2}{(2m)!}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2!} + \frac{1^2}{4!} + \frac{(2!)^2}{6!} + \dots + \frac{(n!)^2}{(2n+2)!} + \dots = \frac{\pi^2}{18}.$$

Пример 13. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} x^m y^n$. Поскольку он получен умножением рядов $\sum\limits_{m=0}^{\infty} x^m$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y^n$, каждый из которых абсолютно сходится соответственно при $|x| < 1$ и $|y| < 1$, то для этих же значений x и y абсолютно сходится и двойной ряд. Если $|x| > 1$ и $|y| > 1$, то $x^m y^n$ не стремится к нулю и данный ряд расходится.

Рассмотрим множество $\{(x,y) : |x| = 1, |y| < 1\}$. При $x = 1$ матрица $(x^m y^n)$ принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & y & y^2 & \cdots & y^n & \cdots \\ 1 & y & y^2 & \cdots & y^n & \cdots \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 1 & y & y^2 & \cdots & y^n & \cdots \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \end{pmatrix},$$

а при $x = -1$ — вид

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -y & -y^2 & \cdots & -y^n & \cdots \\ 1 & y & y^2 & \cdots & y^n & \cdots \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ -1 & -y & -y^2 & \cdots & -y^n & \cdots \\ 1 & y & y^2 & \cdots & y^n & \cdots \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}.$$

Сумма рядов по строкам равна $\dfrac{1}{1-y}$ для матрицы A и $\dfrac{(-1)^{q+1}}{1-y}$, где q — номер строки, для матрицы B; таким образом, повторный ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}\right)$ расходится как для матрицы A, так и для матрицы B. Если бы двойной ряд $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} x^m y^n$ был сходящимся, то в силу теоремы на стр. 173 эти повторные ряды сходились бы. Итак, рассматриваемый ряд расходится на множестве $\{(x,y) : |x| = 1, |y| < 1\}$. В силу симметрии переменных x и y этот ряд расходится и на множестве $\{(x,y) : |x| < 1, |y| = 1\}$. Таким образом, множеством сходимости ряда $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} x^m y^n$ является открытый квадрат $(-1,1) \times (-1,1)$.

Пример 14. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i \frac{x^i}{1-x^i}$, где a_i — произвольные числа. Справедливо утверждение, что этот ряд сходится, если сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i \cdot x^i$ и $|x| \neq 1$ (см. задачу 78, стр. 330). Пусть радиус сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i \cdot x^i$ не меньше 1, тогда функция $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \cdot x^i}{1-x^i}$ определена для всех x, $|x| < 1$. Для x, $|x| < 1$, справедливо равенство

$$\frac{x^i}{1-x^i} = x^i + x^{2i} + \dots + x^{mi} + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} x^{mi}.$$

Составим матрицу

$$A: \begin{pmatrix} a_1x & a_1x^2 & a_1x^3 & a_1x^4 & a_1x^5 & a_1x^6 & a_1x^7 & a_1x^8 & a_1x^9 & \cdots \\ 0 & a_2x^2 & 0 & a_2x^4 & 0 & a_2x^6 & 0 & a_2x^8 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_3x^3 & 0 & 0 & a_3x^6 & 0 & 0 & a_3x^9 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_4x^4 & 0 & 0 & 0 & a_4x^8 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5x^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Повторный ряд по строкам будет

$$\begin{aligned} &(a_1x + a_1x^2 + \dots + a_1x^k + \dots) + (a_2x^2 + a_2x^4 + \dots) + \\ &\quad + (a_3x^3 + a_3x^6 + \dots) + \dots = \\ &\quad = \frac{a_1x}{1-x} + \frac{a_2x^2}{1-x^2} + \dots + \frac{a_mx^m}{1-x^m} + \dots = \\ &\quad = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_ix^i}{1-x^i} = \varphi(x). \end{aligned}$$

Так как повторный ряд сходится к $\varphi(x)$, а ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \frac{x^i}{1-x^i}$ сходится при тех же x, что и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i \cdot x^i$, то после замены x на $|x|$ и a_i на $|a_i|$ получим, что вместе с рядом $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i||x|^i$ сходится и ряд $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|\frac{|x|^i}{1-|x|^i}$. В силу теоремы на стр. 177 можно просуммировать элементы матрицы вначале по столбцам; тогда получим разложение в степенной ряд функции $\varphi(x)$: $\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x^n$, где $\alpha_n=\sum_{i|n}a_i$. Значок $i|n$ условно означает, что сумма распространяется лишь на делители i числа n.

Если взять $a_i=1$, то получим, что

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^i}{1-x^i}=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)x^n,$$

где $\tau(n)$ — число делителей n.

Если взять $a_i=i$, то получим, что

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{ix^i}{1-x^i}=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma(n)x^n,$$

где $\sigma(n)$ — сумма делителей числа n.

Рассмотрим еще матрицу

$$B:\begin{pmatrix} a_1x & a_1x^2 & a_1x^3 & \cdots & a_1x^n & \cdots \\ a_2x^2 & a_2x^4 & a_2x^6 & \cdots & a_2x^{2n} & \cdots \\ \hdotsfor{6} \\ a_kx^k & a_kx^{2k} & a_kx^{3k} & \cdots & a_kx^{kn} & \cdots \\ \hdotsfor{6} \end{pmatrix}.$$

Суммы по строкам матрицы B те же, что и матрицы A; суммируя же по столбцам, получим: в первом: ряд $\sum_{m=1}^{\infty}a_mx^m$, во втором: ряд $\sum_{m=1}^{\infty}a_mx^{2m}$.

Итак, повторный ряд $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_{mn}\right)$ имеет вид $\sum_{m=1}^{\infty}f(x^n)$, где $f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}a_mx^m$. В силу равенства сумм повторных рядов имеем равенство:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(x^n). \tag{10}$$

Полагая $a_i = a^i$, $|a| \leqslant 1$, получим, что

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a^i x^i = \frac{ax}{1-ax},$$

поэтому в силу (10) имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(ax)^i}{1-x^i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ax^n}{1-ax^n}, \ |a| \leqslant 1, \ |x| < 1.$$

В частности, при $a = \frac{1}{2}$ и $x = \frac{1}{2}$ получаем равенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i(2^i-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}-1}.$$

Определение. Степенным рядом с двумя переменными x и y называется двойной ряд вида

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n. \tag{11}$$

Множество всех тех точек (x_0, y_0), для каждой из которых сходится ряд $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x_0^m y_0^n$, называется областью сходимости ряда (11).

Пример 15. Найти множество сходимости ряда

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n,$$

где $a_{00} = 0$, $a_{0n} = a_{n0} = n!$, $n \in \mathbb{N}$, $a_{1m} = a_{m1} = -m!$, $m \in \mathbb{N}$, $a_{mn} = 0$, если или $m \geqslant 2$, или $n \geqslant 2$.

Решение. Для частичных сумм S_{mn} данного ряда имеем равенство

$$S_{mn} = (1-y)\sum_{q=1}^{m} q!x^q + y + (1-x)\sum_{r=1}^{n} r!y^r. \tag{12}$$

Отсюда видно, что $S_{mn}(0,0) = 0$ и $S_{mn}(1,1) = 0$ при любых m и n, следовательно, рассматриваемый ряд сходится в точках $(0,0)$ и $(1,1)$.

Покажем, что этими двумя точками и исчерпывается множество сходимости данного ряда. Действительно, применяя формулу Коши-Адамара, получим, что радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\,t^n$ равен нулю, следовательно, для любого $t > 0$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{q=1}^{n} q!\,t^q = +\infty.$$

Далее, при $t \neq 0$ и $q > \dfrac{1}{|t|}$ справедливо неравенство

$$(2q-1)!\,|t|^{2q-1}(2q|t|-1) > (2q-1)!\,|t|^{2q-1},$$

откуда для $t < 0$ и $n > n_0 = \left[\dfrac{1}{|t|}\right] + 1$ получаем, что

$$\sum_{q=1}^{2n} q!\,t^q = \sum_{q=1}^{n} (2q-1)!\,|t|^{2q-1}(2q|t|-1) >$$
$$> \sum_{q=1}^{2n_0} q!\,t^q + \sum_{q=n_0+1}^{n} (2q-1)!\,|t|^{2q-1}.$$

Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{q=1}^{\infty}(2q-1)!\,\tau^{2q-1}$ равен нулю, следовательно, для $\tau > 0$ имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{q=1}^{n}(2q-1)!\,\tau^{2q-1} = +\infty$, откуда получаем, что и

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{q=1}^{2n} q!\,t^q = +\infty, \ t < 0.$$

Таким образом, если $(x,y) \neq (0,0)$ или $(x,y) \neq (1,1)$, то либо одно, либо оба слагаемых в сумме (12) неограниченно растут, когда m и n четны и возрастают. Следовательно, в этом случае

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{2m,2n}(x,y) = \infty.$$

Этот пример показывает, что для двойных степенных рядов нет аналога первой теоремы Абеля и структура множества сходимости двойного степенного ряда существенно сложнее структуры множества сходимости простого степенного ряда. В то же время имеет место

Теорема. Если ряд $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}x^m y^n$ сходится в некоторой точке $M_0(x_0, y_0)$, обе координаты которой отличны от нуля, и множество $\{a_{mn}x_0^m y_0^n\}$ ограничено, то этот ряд сходится абсолютно во всех точках $M(x,y)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам: $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$, т. е. во всех точках открытого прямоугольника с центром в начале координат и вершиной в точке M_0.

Как показывает эта теорема, причиной разного поведения двойных и простых рядов является то, что имеющая предел $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ последовательность $\{\alpha_n\}$, занумерованная одним индексом, обязательно ограничена, а имеющая предел $\lim\limits_{m,n\to\infty} \alpha_{mn}$ последовательность $\{\alpha_{mn}\}$, занумерованная двумя индексами, не обязана быть ограниченной (см. стр. 175).

Следствие. Если ряд $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}x^m y^n$ абсолютно сходится в точке $M_0(x_0, y_0)$, обе координаты которой отличны от нуля, то этот ряд сходится абсолютно во всех точках $M(x,y)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам: $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$.

Пример 16. Найти множество абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} \dfrac{(m+n)!}{m!n!} x^m y^n$.

Решение. Покажем, что множество абсолютной сходимости данного ряда совпадает с множеством сходимости ряда

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(|x|+|y|)^n$. Действительно, пусть ряд $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty}\frac{(m+n)!}{m!n!}x^m y^n$ сходится. Занумеруем числа $\alpha_{mn}=\frac{(m+n)!}{m!n!}|x|^m|y|^n$, чтобы полученный простой ряд принял вид

$$\begin{aligned}&1+(|x|+|y|)+(|x|^2+2|x||y|+|y|^2)+\\&+(|x|^3+3|x|^2|y|+3|x||y|^2+|y|^3)+\cdots,\end{aligned}\tag{13}$$

т. е. упорядочение идет по возрастанию суммы $(m+n)$, а для членов $\alpha_{n,q-n}$ — по возрастанию степени $|y|$. Такое упорядочение есть нумерация членов соответствующей матрицы "по диагоналям". Так как все члены ряда неотрицательны, то сходимость этого простого ряда эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{q=0}^{n}\frac{q!}{n!(n-q)!}|x|^{n-q}|y|^q\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}(|x|+|y|)^n$$

(см. стр. 176).

Обратно, если сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(|x|+|y|)^n$, то сходится и ряд (13), откуда следует сходимость ряда $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty}\frac{(m+n)!}{m!n!}|x|^m|y|^n$, т. е. абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty}\frac{(m+n)!}{m!n!}x^m y^n$.

Применяя признак Даламбера, получаем, что множеством сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(|x|+|y|)^n$ является открытый квадрат $|x|+|y|<1$. Итак, множество абсолютной сходимости ряда есть $M=\{(x,y):|x|+|y|<1\}$ (см. рис. 2).

Пример 17. Найти множество абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{\substack{n=0,\\ m\geqslant n}}^{\infty}x^m y^n$.

Решение. Для абсолютной сходимости двойного ряда не-

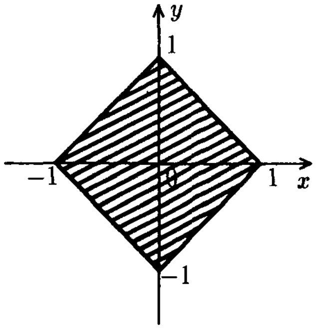


Рис. 2

обходимо, чтобы сходился каждый из рядов $\sum\limits_{m=n}^{\infty} |x|^m |y|^n = |x|^n |y|^n \sum\limits_{q=0}^{\infty} |x|^q$, отсюда получаем необходимость условия $|x| < 1$. При этом условии имеем, что

$$\sum_{m=n}^{\infty} |x|^m |y|^n = |x|^n |y|^n \frac{1}{1-|x|}.$$

Так как далее необходима сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{m=n}^{\infty} |x|^m |y|^n \Big) = \frac{1}{1-|x|} \sum_{n=0}^{\infty} |xy|^n,$$

то, следовательно, необходимо условие $|xy| < 1$. Обратно, если $|x| < 1$ и $|xy| < 1$, то сходятся все ряды $\sum\limits_{m=n}^{\infty} |x|^m |y|^n$ и сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \Big(\sum\limits_{m=n}^{\infty} |x|^m |y|^n \Big)$, следовательно, сходится двойной ряд с неотрицательными членами $\sum\limits_{\substack{n=0,\\ m\geqslant n}}^{\infty} |x|^m |y|^n$, т. е.

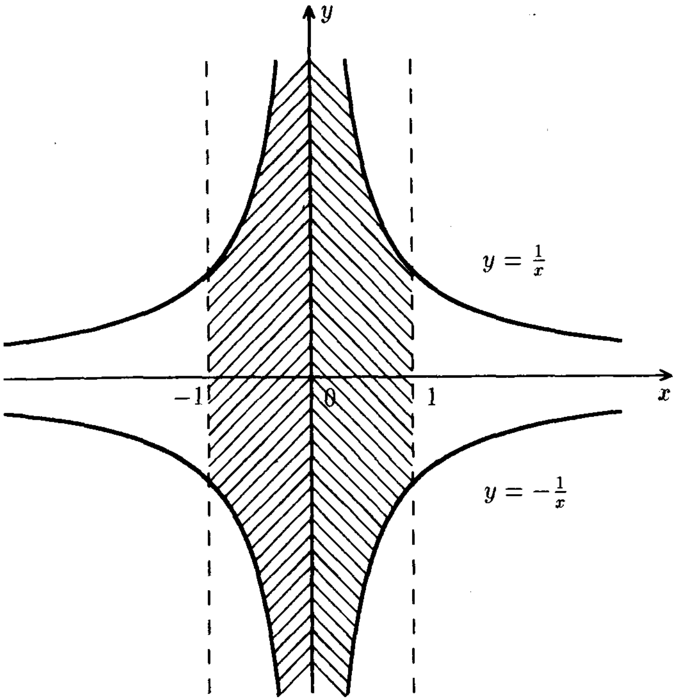


Рис. 3

ряд $\sum\limits_{\substack{n=0,\\ m\geqslant n}}^{\infty} x^m y^n$ сходится абсолютно.

Итак, множество абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{\substack{n=0,\\ m\geqslant n}}^{\infty} x^m y^n$ есть $M = \{(x,y): \ |x| < 1, \ |xy| < 1\}$ (см. рис. 3).

В силу абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{\substack{n=0,\\ m\geqslant n}}^{\infty} x^m y^n$ оба повторных ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{m=n}^{\infty} x^m y^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(xy)^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-xy}$ и $\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{m} x^n y^n\Big)$ сходятся к одной сумме, если $|x| < 1$, $|xy| < 1$. Следовательно, для таких значений x и y имеем равенство:

$$1 + x(1+y) + x^2(1+y+y^2) + \cdots +$$
$$+ x^m(1+y+\cdots+y^m) + \cdots = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-xy}.$$

Откуда получаем, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{1}{(1-x)^2},\quad |x| < 1,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m(1-y^{m+1})}{1-y} = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-xy},\quad |x| < 1,\ |xy| < 1.$$

§ 6. УПРАЖНЕНИЯ

1. Числовые ряды

В следующих примерах, рассмотрев предел частичной суммы ряда, установить его сходимость и величину суммы или расходимость.

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$. 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$.

3) $1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 + \cdots$.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1,1)^n$. 5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \ln^{2n} 2$.

6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \ln^{\frac{n}{2}} 5$. 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+5)}$.

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}$, $\alpha \geqslant 0$.

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. 10) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2-4}$.

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(c+n-1)(c+n)(c+n+1)}$, $c \neq -n$, $n \in \mathbb{N}$.

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$. 13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3}$.

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+4n-3}$. 15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n+2} - 2\sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n})$.

16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. 17) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$. 19) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\frac{n^3+1}{n^3-1}$.

20) $\sum_{n=3}^{\infty} \lg \frac{\lg(n+1)}{\lg n}$.

21) $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$, $|q| < 1$.

22) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^n$, $|q| < 1$.

23) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}$.

24) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2}$.

25) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}(n^2 + n + 1)$.

26) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n+2)}$.

27) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n \cos \frac{x}{2^n}}\right)^2$.

28) $\sum_{n=1}^{\infty} \left((n+3)\sin\frac{\pi}{2(n+3)} - (n+2)\sin\frac{\pi}{2(n+2)}\right)$.

29) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n}}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

30) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{2^{n-1}}}{1 + x^{2^{n-1}}}$.

31) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^{n-1}}}{1 - x^{2^n}}$.

32) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x^{3n} + 1}{x^{2n} + 1}$.

В следующих примерах, не находя явной зависимости частичной суммы ряда S_n от n, проверить, что последовательность S_n не является ограниченной.

33) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

34) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$.

35) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1} + \sqrt{3n-1}}$.

36) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Установить расходимость следующего ряда, используя необходимое условие сходимости.

37) $1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 - 1 + \cdots$.

38) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n+1}$.

39) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{1}{n^2 + n + 1}$.

40) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{2n^2+3}\right)^{n^2}$

41) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}$.

42) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$. 43) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{0,3}}$.

44) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$.

45) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\ln n! - 2\ln(2!\cdot 3!\cdots n!)}{n^2+n}$.

46) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha,\ \alpha \neq \pi m,\ m \in \mathbb{Z}$. 47) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos n^2$.

Следующие ряды удобно исследовать, применяя признак Даламбера.

48) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}$. 49) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(2n+1)!}{(3n)!}$.

50) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot 7\cdot 13\cdot \ldots \cdot (3n+4)}{3\cdot 7\cdot 11\cdot \ldots \cdot (4n+3)}$. 51) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{n\cdot 2^{n+1}}$.

52) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 6\cdot \ldots \cdot (3n)}{(n+1)!}\operatorname{arctg}\frac{1}{2^n}$. 53) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(3k+1)}{(2n)^n}$.

54) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \sin\frac{\pi}{2^n}}{n!}$. 55) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\,3^n}$.

Следующие ряды удобно исследовать, применяя радикальный признак Коши.

56) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n+n}$. 57) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n-n}$.

58) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(5-(-1)^n)^n}{n^2\cdot 4^n}$. 59) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

60) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(5+(-1)^n)^n}{n^2 7^n}$. 61) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+3}{n^2+4}\right)^{n^3+1}$.

62) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

63) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1}}$.

Следующие ряды удобно исследовать, применяя теорему сравнения или признак сравнения (см. стр. 26 и стр. 32).

64) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)2^n}$.

65) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$.

66) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+2)(n^2+1)}}$.

67) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+2}{an^4+bn^3+2n+1}$.

68) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$, $a > 0$.

69) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+bn)^s}$, $a > 0, b \geqslant 0$, $s > 0$.

70) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^{\sqrt{n}}}$.

71) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

72) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n^2}}$.

73) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^4+3n^3}{n^4+1}$.

74) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}}$.

75) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$.

76) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

77) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}$.

78) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2})^{\alpha} \ln \frac{3n+1}{3n-1}$.

79) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{n+1}{\sqrt[3]{bn^7+3n^3+1}}$.

80) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{\pi n}{n^2\sqrt{n}+n+1}$.

81) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^3+1}} \left(e^{\frac{1}{n^{\alpha}+1}} - 1\right)$.

Следующие ряды удобно исследовать, применяя признак Гаусса.

82) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$.

83) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^{\alpha}$.

84) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^{p} \cdot \frac{1}{n^7}$.

85) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\alpha^2 + \frac{1}{4}\right)\left(\alpha^2 + \frac{9}{4}\right) \cdots \left(\alpha^2 + \frac{(2n-1)^2}{4}\right)}{(n!)^2}$.

86) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (n!)^2}{4 \cdot 11 \cdots (2n^2+n+1)}$.

87) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-4)}{3^n \cdot n!}$.

88) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!! \sin \frac{\pi}{2^n}}{n^{n+p}}$, $p > 0$.

89) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\prod\limits_{k=1}^{n} \cos \frac{\pi}{\sqrt{k+4}} \right)$.

Применяя различные признаки сходимости, исследовать сходимость знакоположительных рядов.

90) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n+1}$.

91) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{2n}}$.

92) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+a^n}$.

93) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{5^n+3^n}$.

94) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n^{10}}{3^n+n^2}$.

95) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{7^n-5^n}$.

96) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$.

97) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}$.

98) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{5^n \cdot n}$.

99) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$.

100) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$.

101) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{555}$.

102) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,555}$.

103) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+4n^2+1}}$.

104) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+6n-2}}$.

105) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^{\alpha} \frac{\pi}{n+2}$.

106) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^{\alpha}} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{n^{\beta}}, \ \alpha > 0, \ \beta > 0.$

107) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \ln^n \left(1 + \frac{1}{2n}\right)$.

108) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{5 \cdot 18 \cdot 47 \cdot \ldots \cdot (n^3 + 2n^2 + 2)}$.

109) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{e^n}$.

110) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi n}{3}}{2^n}$.

111) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{3^n}$.

112) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^{n^2}}{3^n}$.

113) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right) \ln \frac{3n^2+1}{n^2+2}, \ \alpha > 0.$

114) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)^{n+1}}{(n+1)^{3n}}$.

115) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n}$.

116) $\sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}}$.

117) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + 4n^2 + 1}{2^n}$.

118) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{(1,1)^n}$.

119) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - n^2}$.

120) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}$.

121) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$.

122) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{n^2}$

123) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n \cdot (2n)!!}$.

124) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)(5\sqrt[3]{n}-1)}$.

125) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n}$.

126) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$.

127) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{tg}^5 \frac{\pi}{\sqrt{n^3}}$.

128) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{15}}{(n+2)!}$.

129) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n!)^2}$.

130) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$.

131) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^m}$, $m \in \mathbb{N}$.

132) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n^p}\right)$, $p > 0$.

133) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1,2)^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

134) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n + 2}{n(\ln^3 n + 1)}$.

135) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n+\alpha}}$, $\alpha > 0$.

136) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!\, n^\alpha}$, $\alpha > 0$.

137) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln^p \left(\frac{n+1}{n-1}\right)$, $p > 0$.

138) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(5+\frac{1}{n}\right)^n}$.

139) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{5}+\sqrt[n]{3}}{\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{2}} \cdot \frac{1}{n^\alpha}$.

140) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{3^n(3^n-1)} \cdot \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.

141) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^5 e^{-\sqrt[3]{n}}$.

142) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot 3^{-n}$.

143) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.

144) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{[\log_2 n]}}$.

145) $\sum\limits_{n=15}^{\infty} \frac{1}{[\lg n]}$.

146) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

147) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt[n]{n^2}}{2^n}$.

148) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\cos\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^n$.

149) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{\left(4+\frac{1}{n}\right)^n}$.

150) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n}$. 151) $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{p} n \ln^{q} \ln n}$.

152) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, n^{p}}{q(q+1)\dots(q+n)}$, $q>0$.

153) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(3+\sqrt{1})\dots(3+\sqrt{n})}$. 154) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+n}\right)^{n^2}$.

155) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{n^2\sqrt{n}+n+1}$. 156) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin^{n} \left(\frac{2\pi n}{3n+1}\right)$.

157) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi n}{2n+5}\right)^{n^3}$. 158) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n+1}}{(2n^2-n+4)^{n+3}}$.

159) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\,(2+(-1)^n)^n}{5^n}$. 160) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}}$.

161) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{2^{2n}}{n^{p}}$, $p>0$. 162) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log_2 n)^{\alpha}}$.

163) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdots \ln(n+1)}{\ln(2+p) \cdot \ln(3+p) \cdots \ln(n+1+p)}$, $p>0$.

164) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^3 \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha>0$. 165) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{n^2+4}$.

166) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arccos \frac{1}{n^2+4}$. 167) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arccos \frac{n^3}{n^3+4}$.

168) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arccos \frac{n}{n+2}$. 169) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a})$, $a>0$.

170) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdots \cos 2^{n}\alpha$.

171) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^3 \cdot \sqrt[n]{n}}{n^4+3n^2+2}$. 172) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$.

173) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n^2}$.

174) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{n}{n+3}\right)^n$.

175) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{n^2}{n^2+4}\right)^{2n}$.

176) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2n}}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n^2}}$.

177) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!!}$.

178) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n^n}$.

179) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2))\,(5\cdot 8\cdot 11\cdots(3n+2))}{n!\,(n+1)!\cdot 9^n}$.

180) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$.

181) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\cdot(n!)^n}{11\cdot 84\cdots(3n^4+4n^3+4)}$.

182) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg} \frac{1-n^3}{n+4}$.

183) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{b(b+1)\ldots(b+n-1)}\right)^p$, $b>\alpha$.

184) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,n^p}{(1+a)(2+a)\ldots(n+a)}$, $a>0$.

185) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg} \frac{n^3-1}{n+4}$.

186) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{n^3-1}{n+4}$.

187) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n^2}{5^n-3^n-2^n}$.

188) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\ln^n(n+1)}$.

189) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha n}{n+5}\right)^n$, $\alpha>0$.

190) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{2\cdot 7\cdot 12\cdots(5n-3)}\right)^{\alpha} \cdot \frac{1}{n^p}$.

191) $\sum_{n=1}^{\infty} e^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+n}$.

192) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$.

193) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2}\right)^{\sqrt{n^3+3n+2}}$.

194) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin\frac{1}{3^n}\right)\frac{n!}{(2n)!!}$.

195) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}\right)^p$, $\alpha > 0$.

196) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)\ldots(n\alpha+1)}{(\beta+1)(2\beta+1)\ldots(n\beta+1)}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n$, $\alpha > 0,\ \beta > 0$.

197) $\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma\cdot(\gamma+1)}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}+\cdots+$
$+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)\ldots(\alpha+n)\cdot\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)}{(n+1)!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)}+\cdots,$
$\gamma > 0$.

198) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)\ldots(2\alpha+4n-1)}{(2\cdot4\cdots2n)(2\alpha+2)\ldots(2\alpha+2n)}\cdot2^{2n}$, $\alpha \geqslant 0$.

199) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin\frac{n-1}{n}}{n\sqrt{\ln(n+2)}}$.

200) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n^3+n+1)}{n^2+\sqrt{n}}$.

201) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$.

202) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n+7}\right)^n\left(\frac{n+3}{n+4}\right)^{n^2}$.

203) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\ln n}{\sqrt{n^2+1}\cdot\ln^3 n}$.

204) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\sqrt[5]{\frac{n-1}{n+1}}\right)^{\alpha}$, $\alpha>0$.

205) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n$.

206) $\sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt[n]{2}-1)$.

207) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a}-1)$, $a > 0$.

208) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n!}}$.

209) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\sqrt{n^n}}$.

210) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^3 n}{\sqrt[4]{5n^3+1}}\sin\frac{1}{n^p}$, $p>0$.

211) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n!}{n^{\alpha}+1}$.

212) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt[n]{(n!)^{\alpha}}$.

213) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{1}{\ln n!}$.

214) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

215) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2\right)$, $a>0$.

216) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \ln \frac{n^3+1}{n^3}$.

217) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$.

218) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi(n^2-1)}{n^2+1}$.

219) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n}{2n+5}$.

220) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{\ln n!}{n \ln(n^n)}$.

221) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+\ln^5 n}$.

222) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^3+3n}-\sqrt{n^2-2n})$.

223) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\log_2 n!}$.

224) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^{\alpha}}\right)}{\sqrt[3]{n^{\beta}+1}}$, $\alpha>0$, $\beta>0$.

225) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})$.

226) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha}[\ln(1+n)-\ln n]^2}{1+n^{\beta}}$.

227) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n^{\alpha}})^p$.

228) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}}}_{n \text{ корней}}$.

229) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}}-a^{\sin\frac{1}{n}}\right)$, $a>0$.

230) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ch}\frac{1}{n}-1\right)^p$.

231) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{sh}\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)^p$.

232) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}$.

233) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{n^k}-\sin\frac{\pi x}{n^k}\right)^p$, $k>0$, $p>0$.

234) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-1}$.

235) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{ne^{\frac{1}{n}}}{1+\sqrt{n^2+1}}$.

236) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n$, $a>0,\ b>0$.

237) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{n^3+2n+1}{n^3+n+1}}-1\right)^{\alpha}$, $\alpha>0$.

238) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arccos\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$.

239) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{\pi}{n}-\operatorname{arctg}\frac{\pi}{n+1}\right)\sqrt{n}$.

240) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin\frac{\pi}{n}-\operatorname{arctg}\frac{\pi}{n}\right)^n$.

241) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi-4}{4}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}\right)$.

242) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{3n}-\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]$.

243) $\sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})^p \ln\left|\frac{1+\sqrt{n}}{1-\sqrt{n}}\right|$.

244) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha}-2}{n^2+1}\left(3^{\frac{n}{2n^2+1}}-1\right)$.

245) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\left(\sqrt{\frac{n^2+1}{n}}-\sqrt{n}\right)$.

246) $\sum_{n=1}^{\infty} \arccos\frac{1}{n}\cdot\arccos\frac{n+2}{n}$.

247) $\sum_{n=1}^{\infty} \arccos\frac{n^4+3n^2+4}{n^4+3n^2+n+1}$.

248) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e\right)^q$.

249) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}\right)$.

250) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt[4]{16n^{\alpha}+7n+1}}$.

251) $\sum_{n=1}^{\infty} n^k\left[\left(1+\frac{a}{n}\right)^m-1\right]^p$.

252) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^k \left(\dfrac{n^l + a}{n^l + b}\right)^p$, $a > 0$, $b > 0$.

253) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^k \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)^p$, $a \neq 1$. 254) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left((n^p - 1)^{\frac{1}{p}} - n\right)$, $p > 0$.

255) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2 + an + b} - \sqrt{n^2 + a_1 n + b_1})^{\alpha}$.

256) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\ln \dfrac{n+1}{n-1} - \dfrac{a}{n}\right)$.

257) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a \sin \dfrac{\pi}{n} - b \ln \dfrac{n+1}{n}\right)$.

258) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n + \ln n}{n - \ln n}\right)^{\frac{n}{\ln n}}$.

259) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin \dfrac{1}{n} + \cos \dfrac{1}{n}\right)^n$.

260) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \ln \left(n \sin \dfrac{1}{n}\right)$.

261) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \left(\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{n} - \dfrac{\pi}{n}\right)^{\alpha}$.

262) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{1 + 2^{n \cdot (-1)^n}}}$.

263) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{1 + 2^{n^{(-1)^n}}}}$.

264) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1 + \cos n}{2 + \cos n}\right)^{2n - \ln^2 n}$.

265) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{2} - \sqrt[n]{3}}{2}\right)^{\alpha}$.

266) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\ln \left(\dfrac{\ln n}{\ln(n-1)}\right) - \dfrac{1}{n \ln n}\right)$.

267) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n^{(n^{\alpha})} - 1\right)$.

268) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{\ln\left(\frac{2}{n} - 2\left(\ln\left(1 + \operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)\right)\right)}{\ln(n^2 + n + 1)}\right)$.

269) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \ln \operatorname{ch} \dfrac{1}{n}$.

270) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln\left(1 + \operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n + \ln^2 n}$.

271) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k!}{(2n)!}$.

272) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln \frac{n+1}{n}}{\ln^{\alpha}(n+1)}$.

273) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\ln(n^2+e^{-2n})-\ln(n^3+e^{-n})]\cdot n^{\alpha}$.

274) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\ln(n^2+e^{2n})-\ln(n^3+e^{n})]\cdot n^{\alpha}$.

275) $\sum\limits_{n=5}^{\infty}(\ln\ln(n+1)^{\alpha}-\ln\ln n^{\alpha})$, $\alpha\neq 0$.

276) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}}-e^{\frac{1}{n^2}}\right)$. 277) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\arcsin\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)}{\ln^{\alpha}(1+n^2)}$.

278) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\left(\arccos\dfrac{1}{n}+\sin\dfrac{1}{n}\right)\right)\right|^{\alpha}$.

279) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\left(\ln\left(1-\operatorname{tg}\dfrac{1}{n}\right)+e^{\sin\frac{1}{n}}\right)^{n^{\alpha}}\right)$.

280) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left(\dfrac{\operatorname{sh}\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}}\right)^{2n}-1\right)^{\alpha}$. 281) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^2+1)\ln^{\alpha}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\operatorname{sh}\frac{1}{n}}$.

282) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{\alpha}\sin\left(\dfrac{1}{n}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n}\right)$.

283) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}}-\cos\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha}$.

284) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\dfrac{1}{n}-\cos\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha}$.

285) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{n+1}{n^2}-\ln\left(1+\operatorname{tg}\dfrac{1}{n}\right)\right)^{\alpha}$.

286) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{sh}\dfrac{1}{n}-\operatorname{sh}\dfrac{1}{2n}\right)^{\alpha}$.

287) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{n^2+2}-\sqrt[3]{n^2+1})^{\alpha}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n^2}$.

288) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\sin\frac{1}{n}}-e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}}\right)^{\alpha}$.

289) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^{\alpha}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{n}+\sin\frac{1}{n}\right)\left(e^{1-\cos\frac{1}{n}}-1\right)^{\beta}$.

290) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\sin\frac{\pi n^2}{2n^2+1}\right)^{\alpha}\cdot n^{\beta}\cdot\sin\left(\arcsin\frac{1}{n}-\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right)$.

291) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

292) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[4]{n}\left(n\operatorname{sh}\frac{1}{n}-\operatorname{ch}\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$.

293) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\ln(n^2+1)-2\ln n\right)^{\alpha}|\cos n|$.

294) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\ln n+\ln\sin\frac{1}{n}\right|^{\alpha}\left(e^{\operatorname{tg}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}-1\right)$.

295) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin(2\pi n!\,e)$.

296) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+\operatorname{arctg}n^{\alpha}}-\sqrt{n})$.

297) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left(n\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right)^{n^{\alpha}}-1\right)$.

298) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\ln\cos\left(\operatorname{tg}\frac{1}{n}-\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right)\right|^{\alpha}$.

299) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{n\sin\frac{1}{n^3}}-n^{\alpha}-1\right)$.

300) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\alpha}}{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^2}\left(1+\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)$.

301) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{e^3-\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{n}\right)^{\alpha}$.

302) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\pi}{2n+2}-\cos\dfrac{\pi n}{2n+2}\right)^{\alpha}\ln\cos\dfrac{1}{n}$.

303) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{n\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}}-1-\operatorname{tg}\dfrac{1}{n}-n^{\alpha}\right)$.

304) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-\operatorname{sh}\dfrac{1}{n}\right)^{n^{\alpha}}-1$.

305) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\operatorname{tg}^2\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right)-\ln\cos\dfrac{1}{n^{\beta}}\right)$, $\alpha>0,\ \beta>0$.

306) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(\cos\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)-\cos\left(\operatorname{ch}\dfrac{1}{n}\right)\right)^{\alpha}\cdot\left(\ln\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n}}{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}\right)^{\beta}\right]$.

Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ со следующим общим членом a_n.

307) $a_n=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^3}\,dx$.

308) $a_n=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{dx}{1+x^3}$.

309) $a_n=\dfrac{1}{\int_0^n\sqrt[3]{1+x^3}\,dx}$.

310) $a_n=\displaystyle\int_{\pi n}^{\pi n+\pi}\frac{\sin^2x}{x}\,dx$.

311) $a_n=\displaystyle\int_{\pi n}^{\pi n+\pi}\frac{\cos^2x}{x}\,dx$.

312) $a_n=\displaystyle\int_{\pi n}^{\pi n+\pi}\frac{\cos^2x}{x^q}\,dx$, $q>0$.

313) $a_n=\displaystyle\int_n^{n+1}e^{-\sqrt[3]{x}}\,dx$.

314) $a_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin^3x}{1+x^2}\,dx$.

315) $a_n=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n\right)n^{-\alpha}$, $\alpha>0$.

316) $a_n = \dfrac{1}{\ln^2 n}\left|\int\limits_n^{n+1} \dfrac{\sin x}{x}\,dx\right|$. 317) $a_n = \left|\int\limits_{n^2}^{n^2+1} \sin u^2\,du\right|$.

318) $a_n = \left|\int\limits_n^{n+10} \sin u^3\,du\right|$. 319) $a_n = n^2\cdot \int\limits_n^{n+1} \dfrac{x}{1+x^5}\,dx$.

320) $a_n = n^2 \int\limits_n^{2n} \dfrac{x}{1+x^5}\,dx$. 321) $a_n = n \int\limits_n^{n^2} \dfrac{x}{1+x^5}\,dx$.

322) $a_n = \dfrac{1}{n^3}\left(\int\limits_n^{n+1} x^x\,dx\right)^{\frac{1}{n}}$. 323) $a_n = \dfrac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k!\right)^2}{(2n+2)!}$.

Рассматривая a_n как члены соответствующего ряда, показать, что данные последовательности $\{a_n\}$ сходятся.

324) $a_n = \dfrac{n^5}{2^n}$. 325) $a_n = \dfrac{5^n}{n!}$.

326) $a_n = \dfrac{a^n}{n!}$. 327) $a_n = \dfrac{\log_a n}{n^k}$, $k \in \mathbb{N}$.

328) $a_n = n^\alpha q^n$, $|q| < 1$. 329) $a_n = \dfrac{(2n)!!}{n^n}$.

330) $a_n = \dfrac{(2n)^n}{(2n+1)!}$. 331) $a_n = \dfrac{n^n}{3^n\cdot n!}$.

332) $a_n = \dfrac{(n!)^n}{n^{n!}}$. 333) $a_n = \dfrac{(2n)!}{(2^n)!}$.

334) $a_n = \dfrac{n^n}{(2n)!}$. 335) $a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)}$.

336) $a_n = \dfrac{(n!)^n}{n^{n^n}}$. 337) $a_n = \dfrac{n^{n^2}}{((3n)!)^n}$.

Рассматривая S_n как частичные суммы соответствующего ряда, показать, что данные последовательности сходятся.

338) $S_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dots + \dfrac{1}{3n}$.

339) $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.

340) $S_n = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \dots + \frac{1}{n\ln n} - \ln\ln n$.

341) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{\ln^2 n}{2}$.

342) Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, где $a(n)$ — число цифр числа n.

343) Пусть λ_n — последовательные положительные корни уравнения $\operatorname{tg} x = x$. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}$.

344) Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tau(n)a^n$, $a > 0$, где $\tau(n)$ — число делителей числа n.

345) Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{-\varphi(n)}$, где $\varphi(n) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

346) Исследовать сходимость ряда

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln^2 k}{n^\alpha}, \ \alpha > 0; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{n^\alpha}, \ \alpha > 0.$$

347) Найти все значения a, для которых сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^{\varphi(n)}}{n^2}$, где $\varphi(n)$ — число нулей в десятичной записи числа n.

Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

348) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{n}$.

349) $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{na_n}{n+2}$.

350) $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = a_n - na_n^2$.

351) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}.$

352) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+na_n}.$

353) $a_1 = 1, \quad a_2 = 2-\sqrt{3}, \quad a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 0.$

354) $a_1 = 1 = S_1, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{S_n}$, где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k.$

Доказать сходимость ряда и найти его сумму.

355) $1 - \dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{4} - \dfrac{7}{8} + \cdots.$

356) $1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{32} + \cdots.$

357) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \cdots.$

358) $1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{12} + \cdots.$

359) $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{11} - \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{8} + \cdots.$

360) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{11} - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{13} + \dfrac{1}{15} - \dfrac{1}{7} + \cdots.$

361) $1 + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{4k-3} + \dfrac{1}{4k-1} - \dfrac{1}{2k} + \cdots.$

362) $1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{14} - \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{5} - \cdots.$

Применяя признак Лейбница, показать, что данный ряд сходится условно.

363) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2-4n+1}}.$

364) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot n^9}{\sqrt{n^{20}+4n^3+1}}.$

365) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \ln^{25} n}{n}.$

366) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{(n+1)\sqrt[3]{n+2}}.$

367) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n^{3,1}}{2^{\sqrt{n}}+n}.$

368) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+20}.$

369) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+\alpha})$.

Применяя признаки Абеля или Дирихле, показать, что данный ряд сходится условно.

370) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{3n+2}$.

371) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{\cos 2n}{\ln\ln n}$.

372) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{\pi}{3}\right)}{n-\ln^2(n+2)}$.

373) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$.

374) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin 3n}{\sqrt{n^2+1}}$.

375) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{(n+2)\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{n^2-n+1}$.

Исследовать сходимость (абсолютную и условную) ряда.

376) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$.

377) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

378) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln^2(n+1)}{2^n+3^n}$.

379) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right)\sin\frac{1}{n}$.

380) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos(\pi\sqrt{n^2+n})$.

381) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+n})$.

382) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$.

383) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$.

384) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2-3n+1})$.

385) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{5^{\frac{n}{2}}-n^2}$.

386) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2+\sin^2 n}$.

387) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)a^{2n}}$.

388) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

389) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n$.

390) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$

391) $\sum\limits_{n=10}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln n}{n\ln\ln n}.$

392) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(n+1)^{n-1}}{(2n+3)^{n+1}}.$

393) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4+5\cdot(-1)^{n}}{10}\right)^{n}.$

394) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\arccos\frac{n-1}{n+1}.$

395) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\operatorname{arcctg} n}{\sqrt{n}}.$

396) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}}.$

397) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(2n)!!}{(n+1)^{n}}.$

398) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)^{n}}{n^{n+1}}.$

399) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(n+1)(\sqrt{n+1}-1)}.$

400) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n+\sqrt{n}}.$

401) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^{\alpha}\ln^{\beta}n}.$

402) $\sum\limits_{n=10}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n\ln^{p}n\ln^{q}\ln(n+1)}.$

403) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\left(2+\frac{1}{n}\right)^{n}}{5^{n}}.$

404) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^{2}}{n^{2}}.$

405) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{4}\cos n^{2}\cdot e^{-\sqrt[3]{n}}.$

406) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}}\right)}{n^{2}+1}.$

407) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt[n^{2}]{n}}.$

408) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3^{n}}.$

409) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\operatorname{tg}^{p}\frac{1}{n},\ p>0.$

410) $\sum\limits_{n=10}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln\ln(n+2)}{n\ln(n+1)\ln^{2}(n+2)}.$

411) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n}.$

412) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{5n+2}$

413) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{3^n}$.

414) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$, $\alpha > 0$.

415) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$.

416) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$.

417) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 + (-1)^n}{n}$.

418) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n - \sqrt[3]{n}}$.

419) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

420) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arcctg} n}{n^q}$.

421) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt{2n+1}} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$

422) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2} (-1)^{n+1}}{n!}$.

423) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n + \ln n}$.

424) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n^2} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$.

425) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n} \sin \frac{\pi n}{4}$.

426) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n} \cos \frac{\pi n}{4}$.

427) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$.

428) $\sum\limits_{n=10}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n - \ln^3 n}$.

429) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n+1}) \cdot \sin \frac{1}{n}$.

430) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n+2}) \cdot \cos \frac{1}{n}$.

431) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha + \frac{1}{n}}}$.

432) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n^2}{1+n}}{\sqrt[3]{\ln n}}$.

433) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+10})$.

434) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n + \sqrt{\ln^3 n}}$.

435) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (3^n + 1)}{3^n \cdot n}$.

436) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n + (-5)^n}$.

437) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{3+(-1)^n}{n\ln n}$.

438) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\operatorname{arctg} n}{n^q}$.

439) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{arctg}\dfrac{n^2+4}{n+4}$.

440) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt[4]{n}}\cos\dfrac{\pi(n^2+1)}{n}$.

441) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos\frac{\pi}{n}}{n}$.

442) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin(\pi\sqrt{n^2+2})$.

443) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{arcctg}\dfrac{n^2+4}{n+4}$.

444) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\dfrac{\sin n}{n^2}\right)$.

445) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha}$.

446) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\sin\dfrac{\pi n^q}{2n^q+1}\right)$, $q>0$.

447) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\ln^{\alpha}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, $\alpha>0$.

448) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{e}-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\right)^{\alpha}$, $\alpha>0$.

449) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^{\alpha}}$.

450) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{n^{\alpha}}$.

451) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2\pi n}{3}$.

452) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^3 n}{\sqrt{n}}$.

453) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos^2 n}{\sqrt{n^q+1}}$, $q>0$.

454) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin 2n\cdot\ln^{\alpha} n}{n^{\beta}}$.

455) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+1}{n^2+3}\cos n$.

456) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)\cos 2n}{n^3-\ln n}$.

457) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi n}{4}}{n^p+\sin\frac{\pi n}{4}}$.

458) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^3 n}{n}\sin\dfrac{\pi n}{6}$.

459) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n \cdot \arccos \dfrac{n}{n+5}$.

460) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \sin^2\left(\frac{n}{4}\right)}{n-\ln n}$.

461) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cos^2 2n}{\sqrt{n}}$.

462) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+2)\sin 3n}{\sqrt{n^5+3n+2}}$.

463) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \sin^2(n+1)}{n\ln^2 n}$.

464) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin 3n}{2n-\sin 3n}$.

465) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n}{n-\cos n}$.

466) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{3n^\alpha+\sin n}$, $\alpha > 0$.

467) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \sin n}{\sqrt{n^q+1}}$, $q > 0$.

468) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^4 n - \frac{1}{3}}{\sqrt{n}}$.

469) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n \cdot \cos n^2}{n}$

(без исследования абсолютной сходимости).

470) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}$

(без исследования абсолютной сходимости).

471) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln n+5}$.

472) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{n}+2}$.

473) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin^4 n - \dfrac{3}{8}\right) \operatorname{arcctg} n$.

474) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \sin^4 n}{\sqrt{n \ln n}}$.

475) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{(-1)^n}{n^q}\right)-1\right)$, $q > 0$.

476) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\sin\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^q}\right)$, $q > 0$.

477) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+(-1)^n)^p}$.

478) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n^q+(-1)^{n+1})^p}$, $q>0$.

479) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}(\pi\sqrt[4]{n^4+(-1)^n \cdot n^2+4})$.

480) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}\ln(n+1)}\right)$, $\alpha > 0$.

481) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{(-1)^n}{n^p}}-1\right)$, $p>0$. 482) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n}+(-1)^{n-1}}$.

483) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\sin\frac{1}{n}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right)$.

484) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\cos\pi\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}\cdot\frac{n}{(n+1)\sqrt{n+2}}$.

485) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\pi\left(n+\frac{1}{n}\right)}{3^n+1}\cdot 2^n\cdot n^2$. 486) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt[3]{n}]}}{n^q}$.

487) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\alpha}$.

488) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\frac{n}{2}]}}{n^{\alpha}}$. 489) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin(\pi\sqrt[4]{n^4+n^3+4})\right)^n$.

490) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n})\operatorname{arcctg} n^q$, $q>0$.

491) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^q+(-1)^{n+1}}-\sqrt{n^q})$, $q \geqslant 0$.

492) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\arcsin\frac{4n+1}{n^2+10n+1}$.

493) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[4]{n^q+1}-\sqrt[4]{n^q})\operatorname{arctg}\frac{(-1)^n}{n}$, $q>0$.

494) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n\arccos\frac{1}{n}\right)}{n}$. 495) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln^{\alpha}\left(1+\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)$.

496) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^3 n\cdot\operatorname{arctg}\frac{\sin n}{n^2+2}$.

497) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\sqrt{n+1} - \cos\sqrt{n}}{n^p}$, $p > 0$.

498) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$.

499) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos^3 n\alpha}{n - 2\sin n\alpha}$.

500) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n \sin \frac{1}{n}} - \cos \frac{1}{n} \right)$.

501) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\sin n}{\sqrt[5]{n^3}} - \sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[5]{n^3}} \right) \right)$.

502) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\ln n}} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{\ln n}} \right)$.

503) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^3 + k}} \right)$.

504) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum\limits_{k=n}^{2n} \cos k}{n + \cos 3n}$.

505) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) \sin 3n}{3n+1}$.

506) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \right) \cos 2n}{\ln n}$.

507) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1+\alpha)(2+\alpha)\ldots(n+\alpha)}{n^{\beta} \cdot n!}$, $\alpha > 0$.

В задачах 508–522 для исследования условной сходимости использовать группировку ряда.

508) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \ldots$.

509) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \ldots$.

510) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\cdots$.

511) $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}-\frac{1}{4\ln 4}-\frac{1}{5\ln 5}-\frac{1}{6\ln 6}+\frac{1}{7\ln 7}+\frac{1}{8\ln 8}-\cdots$.

512) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2^n}+\cdots$.

513) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots+$
$+\frac{1}{\sqrt{3n-2}}-\frac{1}{\sqrt{3n-1}}-\frac{1}{\sqrt{3n}}+\cdots$.

514) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+$
$+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots$.

515) $1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots$.

516) $1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}-\frac{1}{8^2}-\frac{1}{9^2}-\frac{1}{10^2}+\cdots$.

517) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots$,
здесь знак минус имеют члены вида 2^{-k}, $k\in\mathbb{N}$.

518) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{10}}+\cdots$.

519) $1+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{1}{4^p}+\frac{1}{9^p}+\frac{1}{11^p}-\cdots$.

520) $1+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{1^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{1}{3^p}+\frac{1}{9^p}+\frac{1}{11^p}-\frac{1}{5^p}+\cdots$.

521) $\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^q}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^q}+\frac{1}{5^p}-\frac{1}{6^q}+\cdots$.

522) $1-\frac{2}{2^q}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}-\frac{2}{5^q}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{2}{8^q}+\frac{1}{9^p}+\cdots$.

523) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$, $|a_n|=\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$, знаки расставлены следующим образом: два плюса, пять минусов, два плюса, пять минусов и т. д.

524) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin an}{n}, \ a\neq 2\pi k, \ k\in\mathbb{Z}.$

525) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,e^n}{n^{n+2}}\sin\frac{\pi n}{4}.$ 526) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\cos an}{\sqrt[5]{n^4+1}}.$

527) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\frac{1}{3^n\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}.$

528) а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\frac{1}{n^2}}\sin(\pi\sqrt[3]{n^3+n^2})}{\ln^{\alpha}n}$; б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{\sin(\pi\sqrt[3]{n^3+n})}{\ln^{\alpha}n}, \alpha>0.$

529) а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(\alpha\ln n)}{n\ln n}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(\alpha\ln n)}{n\ln n}.$

530) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^1 x\sin nx\,dx.$ 531) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int\limits_0^1 x^n\operatorname{arctg}\frac{x}{n}dx.$

532) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\int\limits_0^n\operatorname{arctg}nx\,dx.$

533) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\int\limits_0^n e^{-x^2}\,dx.$

534) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int\limits_{n-1}^{n+1}\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^5}\,dx.$ 535) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int\limits_n^{2n}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+n^2}}.$

536) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi}\frac{\sin x}{x^q}\,dx.$ 537) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi}\frac{\cos x}{x^q}\,dx.$

538) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^1(1-x^2)^{n^2}\sin n\,dx.$ 539) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^{\frac{\sin n}{n}}\frac{\sin x}{x}\,dx.$

540) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int\limits_n^{n^2}\frac{dx}{1+x^6}.$ 541) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\int\limits_n^{n+1}\frac{dx}{\ln^2 x}.$

542) $\sum\limits_{n=10}^{\infty}(-1)^{n+1}\int\limits_{n}^{n+1}\frac{dx}{\ln\ln x}$. 543) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\int\limits_{0}^{\pi n}\frac{\sin x}{x}\,dx$.

544) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, где $a_1=-1,\ a_2=\frac{1}{2}$,

$(n+2)a_{n+2}+2(n+1)a_{n+1}+na_n=0$.

Исследовать абсолютную и условную сходимость ряда.

545) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+i}{2}\right)^{n}$. 546) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2-i}{3}\right)^{n^2}$.

547) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!\,(e-i)^n}$. 548) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i+n}{2in}\right)^{n}$.

549) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3i+n}{2in}\right)^{n}$. 550) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^2}$.

551) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{2-in}$. 552) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{2^{n/2}(n+i)}$.

2. Бесконечные произведения

Выяснить, сходится или расходится бесконечное произведение, и в случае сходимости найти его значение.

553) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$. 554) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

555) $\prod\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)$. 556) $e\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(n+1)^{2n+1}}{n^n(n+2)^{n+1}}\right)$.

557) $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1+x^{2^n})$. 558) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n+1}$.

559) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}$. 560) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}$.

561) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}$. 562) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{ch}\frac{x}{2^n}$.

563) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{2}{n^2+3n+2}\right)$.

564) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^x}\right)$, $0<x\leqslant 1$.

565) $\prod_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n}{3n-1}\cdot\dfrac{3n}{3n+1}$.

566) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{(2n+1)^2}\right)$.

567) $\prod_{n=3}^{\infty}\dfrac{n^2-4}{n^2-1}$.

568) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n+n^2}\right)$.

569) $\prod_{n=1}^{\infty}\dfrac{\beta+n}{\alpha+n}$, $\alpha>\beta$.

570) $\prod_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$.

571) $\prod_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

572) $\prod_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n-1}{4n+1}$.

573) $\prod_{n=1}^{\infty}a^{\frac{(-1)^n}{n}}$, $a>0$.

574) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)$, $a_1=1$, $a_{n+1}=(n+1)(1+a_n)$, $n\geqslant 1$.

Исследовать сходимость бесконечного произведения.

575) $\prod_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-1}$.

576) $\prod_{n=0}^{\infty}\sqrt{\dfrac{n+1}{n+2}}$.

577) $\prod_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

578) $\prod_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi n^\alpha+1}{4n^\alpha+2}\right)$.

579) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$.

580) $\prod_{n=1}^{\infty}n^{\frac{1}{n}}$.

581) $\prod_{n=1}^{\infty}n^{\frac{1}{n^2}}$.

582) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n+1}}$.

583) $\prod_{n=1}^{\infty}a^{\frac{1}{n}}$, $a>0$.

584) $\prod_{n=1}^{\infty}a^{\frac{1}{n^2}}$, $a>0$.

585) $\prod_{n=1}^{\infty}\cos(\operatorname{arcctg} n)$.

586) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^\alpha$, $\alpha>0$.

587) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}\right)$, $\alpha>0$.

588) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\right]^{\alpha}$, $\alpha>0$.

589) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{\alpha}{n}}}{1+\frac{\alpha}{n}}$, $\alpha>0$.

590) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$.

591) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\operatorname{tg}\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\right)$, $\alpha>0$.

592) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\arccos\left(\frac{n^{\alpha}-1}{n^{\alpha}}\right)$, $\alpha>0$.

593) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{n}^{n+1}\frac{x^2\,dx}{1+x^2}$.

594) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a}{b+n}\right)e^{\frac{a}{n}}$, $b>0$, $a\neq b+k$, $k\in\mathbb{N}$.

595) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{a^n}{2^n}\right)$.

596) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)e^{-\frac{a}{n}}$, $a\neq -k$, $k\in\mathbb{N}$.

597) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\ln(n+a)-\ln n}$, $a>0$.

598) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{a^n}\right)$, $a\neq 0$.

599) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{a}{n}}{\frac{a}{n}}\right)$, $a\neq\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

600) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a}{\sqrt{n}}\right)e^{\left(\frac{a}{\sqrt{n}}+\frac{a^2}{2n}\right)}$, $a \neq \sqrt{k}$, $k \in \mathbb{N}$.

601) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_n\right)$, $|\alpha_n| < \pi/4$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n| < +\infty$.

602) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\right]$, $p > 0$.

603) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)$.

Исследовать абсолютную и условную сходимость бесконечного произведения.

604) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

605) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right)$.

606) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{\ln n}\right)$.

607) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}\right)$.

608) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}n^{(-1)^n}$.

609) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$.

610) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-x^n)$.

611) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$.

612) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}\right)$.

613) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\pi/4\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}\right)$, $x > 0$.

614) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, где a_n :

$$a_{2m} = 1-\frac{1}{\sqrt[3]{m}},\quad a_{2m-1} = \left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{m}}+\frac{1}{\sqrt[3]{m^2}}+\frac{1}{m}\right),\quad m \in \mathbb{N}.$$

615) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где a_n :

$$a_{2m} = 1 - \frac{1}{m^\alpha},\ \alpha > 0,\ a_{2m-1} = \left(1 + \frac{1}{m^\alpha} + \frac{1}{m^{2\alpha}}\right),\ m \in \mathbb{N}.$$

616) $\left(1+\frac{1}{\sqrt{1}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\times$
$\times\left(1-\frac{1}{\sqrt{9}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ldots$

617) $\left(1+\frac{1}{1^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)^2\left(1+\frac{1}{3^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{4^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{5^\alpha}\right)^2\left(1+\frac{1}{6^\alpha}\right)\ldots.$

618) Используя представление $\sin x = x\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$ (см. стр. 74), получить равенство $\cos x = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)$.

619) Используя рассуждения, аналогичные рассуждениям при представлении функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ бесконечным произведением, получить равенства

$$\operatorname{sh} x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right),$$

$$\operatorname{ch} x = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right).$$

3. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость

Найти предельную функцию для последовательности $\{f_n(x)\}$ и построить ее график.

620) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$.

621) $f_n(x) = x(1+e^{-nx})$.

622) $f_n(x) = \sqrt{nx}\,e^{-n^2-x^2}$.

623) $f_n(x) = \sqrt[n]{x^2+\dfrac{1}{n^2}}$.

624) $f_n(x) = \sqrt[n]{x^n+x^{2n}+1}$.

625) $f_n(x) = \sqrt[n]{x^{2n}+4x^n+3}$.

626) $f_n(x) = \cos\pi\left(\sqrt{4n^2 + nx}\right)$.

627) $f_n(x) = \sin\left(\pi\sqrt{n^2 + x^2}\right)$.

628) $f_n(x) = \sin\left(2\pi\sqrt{n^2 + \frac{n}{2} + x^2}\right)$.

629) $f_n(x) = \sin\left(2\pi\sqrt{n^2 + nx + x^2}\right)$.

630) $f_n(x) = \left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx\right)^{2n-1}$.

631) $f_n(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \cos^m(n!\,2\pi x)$.

632) $f_n(x) = ne^{-nx^2}$.

633) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$.

634) $f_n(x) = x\operatorname{sign}|\sin^2(n!\,\pi x)|$.

635) $f_n(x) = \dfrac{x\operatorname{tg}^{2n}\frac{\pi x}{4} + \sqrt{x}}{\operatorname{tg}^{2n}\frac{\pi x}{4} + 1}$, $x \geqslant 0$.

636) $f_n(x) = \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$.

637) $f_n(x) = (x - 1)\operatorname{arctg} x^n$.

638) $f_n(x) = \underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}}}_{n\ \text{корней}}$, $x > 0$.

639) $f_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dfrac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Исследовать равномерную сходимость последовательности $f_n(x)$ на заданном множестве E.

640) $f_n(x) = x^{2n}$, а) $E = \left[0; \frac{1}{2}\right]$, б) $E = [0; 1]$.

641) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, а) $E = [0; 1]$, б) $E = [1; 2]$.

642) $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2 + n}$, $E = (0; +\infty)$.

643) $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2 + nx + 1}$, а) $E = [1; +\infty)$, б) $E = [0; 1]$.

644) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x}$, а) $E=[0;1]$, б) $E=[1;+\infty)$.

645) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, а) $E=[0;1]$, б) $E=[1;10]$.

646) $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$, а) $E=[0;1]$, б) $E=[1;+\infty)$.

647) $f_n(x) = \dfrac{2n^2x}{1+n^\alpha x^2}$, $E=(-\infty;+\infty)$.

648) $f_n(x) = \sqrt{x^4+\dfrac{1}{n^4}}$, $E=(-\infty;+\infty)$.

649) $f_n(x) = n\left(\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{x^2}\right)$, $E=(0;+\infty)$.

650) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$, а) $E=[-A;A]$, б) $E=(-\infty;+\infty)$.

651) $f_n(x) = \sin\dfrac{x}{n}$, а) $E=[-A;A]$, б) $E=(-\infty;+\infty)$.

652) $f_n(x) = \sqrt[n]{\cos^n x+\sin^n x}$, $E=\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

653) $f_n(x) = \sqrt[n]{1+\operatorname{arctg}^n x}$, $E=[0;+\infty)$.

654) $f_n(x) = e^{n(x-2)}$, $E=[0;4)$.

655) $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2}\ln\dfrac{x}{n^2}$, $E=(0;1)$.

656) $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}}$, а) $E=[0;4]$, б) $E=[4;+\infty)$.

657) $f_n(x) = n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$, а) $E=[0;A]$, б) $E=(0;+\infty)$.

658) $f_n(x) = n\ln\left(1+\dfrac{1}{nx}\right)$, а) $E=(0;2)$, б) $E=(2;+\infty)$.

659) $f_n(x) = \dfrac{n+x}{n+x+\sqrt{nx}}$, а) $E=[0;1]$, б) $E=(0;+\infty)$.

660) $f_n(x) = \dfrac{nx+n^2+x^2}{n^2+x^2}$, $E=[0;1]$.

661) $f_n(x) = \sin^{2n} x+\dfrac{1}{n^2}$, а) $E=[0;\pi]$, б) $E=[\delta;\pi-\delta]$, $\delta>0$.

662) $f_n(x) = \dfrac{\ln^4 n+x^2}{2\ln^4 n+x^2+x\ln^2 n}$, $E=(0;+\infty)$.

663) $f_n(x) = \sqrt[n]{x\sin x}$, $E = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

664) $f_n(x) = \sqrt[n]{\cos x}$, $E = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

665) $f_n(x) = \varphi^n(x)$, $E = (0; \pi)$, где $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

666) $f_n(x) = \varphi^n(x)$, $E = (0; 1)$, где $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

667) $f_n(x) = \operatorname{arctg} 3nx - \operatorname{arctg} 2nx$, а) $E = (0; 1)$, б) $E = (1; +\infty)$.

668) $f_n(x) = \operatorname{arcctg} \dfrac{nx-1}{nx+1}$, а) $E = (0; 1)$, б) $E = (1; +\infty)$.

669) $f_n(x) = n^4 \left(\operatorname{ch} x^n - \dfrac{1}{1+x^n}\right)$,

а) $E = [0; \delta]$, $\delta > 0$, б) $E = (\delta; 1-\delta)$, $0 < \delta < 1$, в) $E = [0; 1)$.

670) $f_n(x) = \dfrac{1}{2 - (x^2-1)^n}$, $E = [0; 4]$.

671) $f_n(x) = n(1-x)x^{n-1}$, $E = [0; 1]$.

672) $f_n(x) = n^2(1-x)x^{n-1}$, $E = [0; 1]$.

673) $f_n(x) = nx(1-x)^n$, $E = [0; 1]$.

674) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$, а) $E = [0; 1]$, б) $E = [1; +\infty)$.

675) $f_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{n\sqrt[3]{n+1}}\right)$, $E = [0; 3]$.

676) $f_n(x) = \dfrac{n+x}{nx+1}$, а) $E = [0; 1]$, б) $E = [1; +\infty)$ в) $E = \left[\dfrac{1}{4}; 4\right]$.

677) $f_n(x) = 1 - (1-x^2)^n$, $E = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

678) $f_n(x) = n \operatorname{arcctg} \dfrac{n}{x^2}$, $E = [1; +\infty)$.

679) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2} \operatorname{tg} \dfrac{x}{n}$, $E = [0; 1]$.

680) $f_n(x) = n \sin \dfrac{1}{nx}$, а) $E = [1; +\infty)$, б) $E = (0; +\infty)$.

681) $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n^2+x^2}}$, $E = [0; +\infty)$.

682) $f_n(x) = \dfrac{nx}{n^2+x^2} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{n}$, $E = [-1; 1]$.

683) $f_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{n^3 e^x}{n^6 + e^{2x}}\right)$, $E = [0; +\infty)$.

684) $f_n(x) = \dfrac{n+1}{n+x^2}$, а) $E = [-1; 1]$, б) $E = (-\infty; +\infty)$.

685) $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{n+x}$, а) $E = [1; +\infty)$, б) $E = [0; 2]$.

686) $f_n(x) = \sqrt{n} x e^{-\sqrt{nx}}$, $E = [0; +\infty)$.

687) $f_n(x) = nx^2 e^{-nx}$, а) $E = [2; +\infty)$, б) $E = [0; 2]$.

688) $f_n(x) = \sin(n^2 e^{-nx})$, а) $E = (0; +\infty)$, б) $E = [1; +\infty)$.

689) $f_n(x) = \dfrac{\ln(nx)}{\sqrt{nx}}$, а) $E = [1; +\infty)$, б) $E = (0; 1)$.

690) $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$, $E = (0; +\infty)$.

691) $f_n(x) = n\left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{n}} - \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt[3]{n}}\right)$, а) $E = (0; 1)$, б) $E = (1; +\infty)$.

692) $f_n(x) = \sin\left(e^{-nx} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$,
а) $E = (\alpha; +\infty)$, $\alpha > 0$, б) $E = (0; +\infty)$.

693) $f_n(x) = \cos\left(\dfrac{1}{2nx^2}\right)$, а) $E = (0; \pi)$, б) $E = (\pi; +\infty)$.

694) $f_n(x) = \dfrac{x^4 + x^2 n + xn^2}{x^2 + n^2}$, а) $E = (0; a)$, б) $E = (0; +\infty)$.

695) $f_n(x) = \ln\left(x^4 + \dfrac{1}{n}\right)$,
а) $E = (0; +\infty)$, б) $E = (\alpha; +\infty)$, $\alpha > 0$.

696) $f_n(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} e^{\frac{x}{n^2}}\right)$, а) $E = (0; \alpha)$, $\alpha > 0$, б) $E = [0; +\infty)$.

697) $f_n(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}}$, а) $E = \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$, б) $E = \left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$.

698) $f_n(x) = \dfrac{1}{x} \cos \dfrac{x-1}{n}$, а) $E = (0; 2)$, б) $E = (2; +\infty)$.

699) $f_n(x) = \dfrac{\cos nx \cdot \sin \frac{1}{nx}}{4 + \ln^2(n+1)x}$, а) $E = (0; 1]$, б) $E = [1; +\infty)$.

700) $f_n(x) = (x-1) \operatorname{arctg} x^{2n}$, $E = (0; +\infty)$.

701) $f_n(x) = \sqrt[2n]{1 + x^n}$, $E = (0; +\infty)$.

702) $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{x^2 + nx + n}$, $E = [0; +\infty)$.

703) $f_n(x) = n^2 \left(x^{\frac{1}{n^2}} - 1 \right)$, $E = [1; 10)$.

704) $f_n(x) = xe^{-n^2 x} \cdot \ln^3 n$, $E = [0; +\infty)$.

705) $f_n(x) = \sin \left(\dfrac{1 + nx}{2n} \right)$, $E = (-\infty; +\infty)$.

706) $f_n(x) = e^{-2x^2 - 3nx}$, а) $E = (0; 1)$, б) $E = (1; +\infty)$.

707) $f_n(x) = n^4 \left(e^{x^n} - \cos x^n \right)$,
а) $E = (0; 1)$, б) $E = [0; \delta)$, $0 < \delta < 1$.

708) $f_n(x) = \sin^2(\sqrt{1 + nx^2} - \sqrt{n}x)$, а) $E = (0; 1)$, б) $E = (1; +\infty)$.

709) $f_n(x) = \sqrt{nx + \ln(nx)} - \sqrt{nx}$, а) $E = (0; 1)$, б) $E = (1; +\infty)$.

710) $f_n(x) = \arcsin \dfrac{2x^n}{1 + 2x^n}$, а) $E = [0; a)$, $0 < a < 1$, б) $E = [0; 1)$.

711) $f_n(x) = \arcsin \dfrac{nx}{1 + nx}$, $E = (0; 1)$.

712) $f_n(x) = n^2 \left(\operatorname{ch} x^n - \dfrac{1}{1 + x^n} \right)$,
а) $E = [0; 1)$, б) $E = [0; \alpha)$, $0 < \alpha < 1$.

713) $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n} \right)^n$, а) $E = (a; b)$, $0 < a < b$, б) $E = (-\infty; +\infty)$.

714) $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n} \right)^n$, а) $E = (-a; a)$, $a > 0$, б) $E = (-\infty; +\infty)$.

715) $f_n(x) = x^n$, $E = \left\{ \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{4} \right\}$.

716) $f_n(x) = x^n$, $E = \left(0; \dfrac{1}{2} \right) \cup \{1\}$.

717) $f_n(x) = x^{2n} - x^n$, $E = \left\{ \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3} \right\}$.

718) $f_n(x) = x^{2n} - x^n$, а) $E = \{0; 1\}$, б) $E = (0; 1)$.

719) $f_n(x) = nxe^{-n|x|}$,

а) $E = [-10; -9] \cup [1; 2]$, б) $E = [-2; -1] \cup [0; 1]$.

720) $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$, а) $E = [-5; -3] \cup \{0\}$, б) $E = \{-5\} \cup [0; 1]$.

721) $f_n(x) = \dfrac{1}{(nx-1)^2 \cdot (x-n)^2 + 1}$,

а) $E = [0; 1]$, б) $E = [1; 2]$, в) $E = [2; +\infty)$.

Для следующей функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, $x \in E$,

1) установить ее сходимость и исследовать ее равномерную сходимость на множестве E;

2) выяснить, справедливо или нет равенство

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right), \; x_0 \in E.$$

722) $f_n(x) = x^n$, $E = [0; 1]$, а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = 1$; в) $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

723) $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\Psi(x)$, $E = (-\infty; +\infty)$,

где $\Psi(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ — иррациональное число,} \\ 1, & x \text{ — рациональное число} \end{cases}$

а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = \sqrt{2}$.

724) $f_n(x) = \dfrac{1}{x + n^5}$, $E = [0; +\infty)$, $\quad x_0 = 1$.

725) $f_n(x) = \dfrac{[nf(x)]}{n}$, $E = [a; b], f(x)$ — произвольная функция, определенная на $[a; b]$, а) $x_0 = a$; б) $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$.

726) $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ n^2\left(\dfrac{2}{n} - x\right), & \dfrac{1}{n} < x < \dfrac{2}{n}, \\ 0, & x \geqslant \dfrac{2}{n}, \end{cases}$ $\quad E = [0; 1]$, $x_0 = 0$.

727) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$, $E = [0; 1]$, а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

728) $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$, $E = [0;2]$ а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = 1$; в) $x_0 = 2$.

Для следующей функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, $x \in [a;b]$,

1) установить ее сходимость и исследовать ее равномерную сходимость на множестве $x \in [a;b]$;

2) выяснить, справедливо или нет равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\,dx.$$

729) $f_n(x) = x^n$, $[a;b] = [0;1]$.

730) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $[a;b] = [0;1]$.

731) $f_n(x) = n^\alpha xe^{-nx}$, $[a;b] = [0;1]$.

732) $f_n(x) = nx(1-x)^n$, $[a;b] = [0;1]$.

733) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^4}$, $[a;b] = [0;1]$.

734) $f_n(x) = nx^\alpha e^{-nx}$, $\alpha > 0$, $[a;b] = [0;1]$.

735) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$, $[a;b] = [0;1]$.

736) $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$, $[a;b] = [0;1]$.

737) $f_n(x) = n^2 \sin x \cos^{2n} x$, $[a;b] = [0;\pi/2]$.

738) $f_n(x) = \sqrt{n} \sin x \cos^{2n} x$, $[a;b] = [0;\pi/2]$.

739) $f_n(x) = 2n^2xe^{-n^2x^2}$, $[a;b] = [0;1]$.

740) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $[a;b] = [0;1]$.

Для следующей функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, $x \in E$,

1) установить ее сходимость и исследовать равномерную сходимость последовательности $\{f_n'(x)\}$ на E;

2) выяснить, справедливо или нет равенство

$$(\lim_{n\to\infty} f_n(x))'\Big|_{x=x_0} = \lim_{n\to\infty} f_n'(x_0),\ x_0 \in E.$$

741) $f_n(x) = \dfrac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n$, $E = [0;1]$, $x_0 = 1$.

742) $f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\sin\left(n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$, $E = (-\infty; +\infty)$, $x_0 \in E$.

743) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, $E = (-\infty; +\infty)$, $x_0 \in E$.

744) $f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$, $E = (-\infty; +\infty)$, $x_0 \in E$.

745) $f_n(x) = e^{-n^2x^2}$, $E = [-1; 2]$, а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = 1$.

Найти множество сходимости (абсолютной и условной) ряда.

746) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n + x}$.

747) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^{n \sin x}}$.

748) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln x)^n}$.

749) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot \sin^n x}{n(n+2)}$.

750) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos^n x}{n^4}$.

751) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(x+1)^n}$.

752) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^n x}{n^2 + n + 1}$.

753) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^3}$.

754) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3x-2}}$.

755) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x-3)^n}$.

756) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{|x|}}{2^{n \sin x}}$.

757) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$.

758) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x + 2^n}$.

759) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{x^2 + n^2}$.

760) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + n^{2/3}}$.

761) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^n}{x^2 + n^2}$.

762) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^4 + n}$.

763) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 x^2 + 1}$.

764) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \cos^2 x}$.

765) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$.

766) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{x+\frac{1}{n}}}$.

767) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\cos x}}$.

768) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\sin 2x}}$.

769) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$.

770) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{n^2}$.

771) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x(1+x)}{n}\right)^n$.

772) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(n+e^x)}$.

773) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{xn^x}$.

774) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{3^{nx}+2}$.

775) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{1}{1+4^n \cdot x^2}$.

776) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$.

777) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n\sqrt{n}+x^2}$.

778) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n^x}$.

779) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{nx}}{n^x}$.

780) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3-x^2}{n}\right)^n$.

781) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \frac{1}{xn}}{n+1}$.

782) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{x+n}}$.

783) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+x^2 \ln n}}$.

784) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^{\alpha} \frac{x}{a+n}$, $a > 0$, $\alpha > 0$, $x > 0$, $\frac{\pi}{2} > \frac{x}{a} > 0$.

785) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^{\alpha} \frac{x}{a+n}$, $\alpha > 0$, $x > 0$, $\frac{\pi}{2} > \frac{x}{a} > 0$.

786) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n \operatorname{tg} x}$.

787) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$.

788) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n+x^{2n}}$.

789) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^4+\sqrt{x}}}$.

790) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}}$.

791) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$.

792) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} nx^2 \cdot \sin x}{\sqrt{n^3+x^2}}$.

793) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{n!}$.

794) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x^4}}$.

795) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2+e^x}$.

796) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+e^x)}$.

797) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \ln^n \left(1+\frac{x}{n}\right)$.

798) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi n x$.

799) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3}\right)^n \left(e^{\frac{x}{n}}-1\right)^n$.

800) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{\pi x^2}{n}\right)^{n^3}$.

801) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nx}$.

802) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^n)}$.

803) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^{40} n}{n^x}$.

804) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2+x^{2n}}$.

805) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n n^{-x}$.

806) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x} \cos nx$.

807) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1+n^4 x^2}$.

808) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{4n} x}{n^x}$.

809) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^n x}{n^2}$.

810) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx} \cdot n}{\sqrt{n^3+1} \cdot e^{-\frac{n}{x}}}$.

811) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt[5]{n^4+|x|}}$.

812) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(x-n)^2}$.

813) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)}$.

814) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^x n}{\sqrt[3]{n^3+1}}$.

815) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1+n^q}$, $q>0$.

816) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\arcsin x + n}$.

817) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\arccos x + n}$.

818) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.

819) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{x}}{1+x^n}$, $x \geqslant 0$.

820) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \ln^x(n+1)}$.

821) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^x n}{\sqrt{n^3+1}}$.

822) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n}$.

823) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt[3]{n^2+1}}$.

824) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^n x}{n^3}$.

825) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n} e^{-nx}}{\sqrt[n]{n!}}$.

826) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n} (2+(-1)^n)^n$.

827) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}} \cdot \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n^2}$.

828) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n} \cos nx$.

829) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin nx}{n^2x^2+1}$.

830) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^2+1}}$.

831) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{\sqrt{n}}$.

832) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2} \cdot x^{n^2}}$.

833) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n (x+n)^n}{n^n}$.

834) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n+\sqrt{x}}$.

835) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi(\sqrt{n^2+x^2})$.

836) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+x^2)(2+x^2)\ldots(n+x^2)}$.

837) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sqrt[3]{\sin^n x}$.

838) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+\sin x}$.

839) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^{2n}\cos nx}{9^n \ln^3 n}$.

840) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dots+\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{\sin nx}{n}$.

841) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sin(xn)}$.

842) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\cos nx+\sqrt[5]{n^2}}$.

843) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2 nx\cdot\cos 3nx}{n\ln(n+1)}$.

844) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos^3 nx}{\sqrt[3]{n^2+n}}$.

845) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}\cos nx}{\sqrt{n}\ln^2(n+1)}$.

846) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(4n+1)x}{\sqrt[3]{n^3+1}}$.

847) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(4n-1)x}{n(7+(-5)^n)}$.

848) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos\left(n+\frac{1}{n}\right)}{n^x}$.

849) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{n^x}$.

850) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos^3 nx}{n^{x/3}}$.

851) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos^{[|x|]} nx}{n^{x/4}}$.

852) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(nx+y^2)^n\cdot n!}{n^{2n}}$.

853) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^n\left(x+\dfrac{y}{\sqrt{n}}\right)$.

854) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^{x+y}}$.

Исследовать равномерную сходимость ряда на множестве E.

855) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 e^{n^2x^2}}, \quad E=(-\infty;+\infty)$.

856) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+2^n}, \quad E=(-2;+\infty)$.

857) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n\cdot 2^n}, \quad E=[-3/2;3/2]$.

858) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(\pi-x)\cos^2 nx}{\sqrt[5]{n^7+1}}, \quad E=[0;\pi]$.

859) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{2n} + (n+1)x}}, \quad E = [0; +\infty).$

860) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)\sin^2 nx}{n\sqrt{n+1}}, \quad E = [-3; 0].$

861) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n} + \sqrt{x}}, \quad E = [0; +\infty).$

862) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + (nx)^3}, \quad E = [0; 1].$

863) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-xn}, \quad E = [0; +\infty).$

864) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4 + 1}, \quad E = (-\infty; +\infty).$

865) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^x}{n!}, \quad E = [-1; 1].$

866) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}, \quad$ а) $E = (-0{,}2; 0{,}75)$; б) $E = (-0{,}2; 1)$.

867) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + nx + x^2}, \quad E = (0; 10).$

868) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \sqrt{1 + (2n+1)x}}, \quad E = (0; +\infty).$

869) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^x (n+2)}{n!}, \quad E = (0; +\infty).$

870) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sin nx}{2^n}, \quad E = (-\infty; +\infty).$

871) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{x}{n}, \quad E = (-\infty; +\infty).$

872) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-n^2x^2}}{1+n^2}, \quad E=(-\infty;+\infty).$

873) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}, \quad$ а) $E=(0;5)$; б) $E=(1;+\infty)$.

874) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{1+n^2x^2} \operatorname{tg}\sqrt{\dfrac{x}{n}}, \quad$ а) $E=\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$; б) $E=\left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

875) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^\alpha}$, $0<\alpha\leqslant 1$, а) $E=[0;2\pi]$;
б) $E=[\delta;2\pi-\delta]$, $0<\delta<\pi$.

876) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{\sin nx}{n\ln^\alpha n}\right)$, $\alpha>0, \quad E=(-\infty;+\infty)$.

877) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2\cdot x^n - x^{2n}), \quad E=[0;1)$.

878) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\left(\dfrac{1}{2}-x^{n-1}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}-x^n\right)^2\right), \quad E=[0;1]$.

879) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}\cos nx, \quad E=[0;\pi/2]$.

880) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2e^{-n|x|}}{x^2+n^2}, \quad E=(-\infty;+\infty)$.

881) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-nx}\cos nx}{n}, \quad E=(0;\pi/2)$.

882) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2e^{-nx}\cos nx, \quad E=[0;\pi/2]$.

883) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-\ln(n+x)}. \quad E=(0;1]$.

884) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x\sin\dfrac{\pi}{1+n^5x^3}, \quad E=(-\infty;+\infty)$.

885) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} e^{-nx} \cos nx, \quad E = [0; \pi/2].$

886) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha x)}{n}, \ \alpha > 0; \quad$ а) $E = \left[\varepsilon; \frac{2\pi}{\alpha} - \varepsilon\right], \ 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{\alpha};$

б) $E = \left[0; \frac{2\pi}{\alpha}\right].$

887) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x \cos nx}{\sqrt[4]{n^4 + x^4}}, \quad E = [0; \pi/2].$

888) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \varphi(n, x)}{n},$

$$\varphi(n, x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < n, \\ \sin nx, & x > n, \end{cases} \qquad E = (0; +\infty).$$

889) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n + n^2 x^2}, \quad E = (0; \pi/2).$

890) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{n^3 + e^{nx}}, \quad E = (-\infty; +\infty).$

891) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x \cos nx}{n^2 x^2 + n}, \quad E = (0; \pi/2).$

892) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^4 + x}, \quad E = [0; +\infty).$

893) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2 x^2 + n}, \quad E = [0; 1].$

894) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-x^2 n}}{n^2 + x^2}, \quad E = (-\infty; +\infty).$

895) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{10n + \cos nx}, \quad$ а) $E = (0; \pi/2]$, б) $E = [\pi/2; \pi).$

896) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \cdot \cos nx}{\ln(n + x^2)}, \quad E = (-\infty; +\infty).$

897) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2x^2+n}, \quad E=(0;1].$

898) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n+x}, \quad E=[1;+\infty).$

899) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n+x-\ln(n^2+x^2)}, \quad E=[0;+\infty).$

900) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \sin^2 x}{n^2+x^2}, \quad E=(-\infty;+\infty).$

901) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\sin 2x}}{n^{3/2}+1}, \quad E=(-\infty;+\infty).$

902) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n}, \quad E=[-1;1].$

903) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}}, \quad E=[-1;1].$

904) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n-1}, \quad E=[-1;1].$

905) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}, \quad E=[1;3].$

906) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^3}, \quad E=(-\infty;+\infty).$

907) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}, \quad E=(-\infty;+\infty).$

908) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-\sqrt{n}\cdot x}, \quad E=[0;+\infty).$

909) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)}, \quad$ а) $E=(\delta;+\infty),\ \delta>0,$
б) $E=(0;+\infty).$

910) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{x} e^{-\frac{n^2}{x}}, \quad E = (0; +\infty).$

911) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin nx}{\sqrt{n^3+1} + e^{n|x|}}, \quad E = (-\infty; +\infty).$

912) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \operatorname{arcctg}(x^2 + n^3), \quad E = (-\infty; +\infty).$

913) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{n^3} + |\operatorname{arctg} nx|}, \quad E = (-\infty; +\infty).$

914) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x \ln x}{n^2 + \cos^2 x}, \quad E = (0; +\infty).$

915) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln x}{n^2 + n^x}, \quad E = (0; +\infty).$

916) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^x(n+2)}{n^{x+2}}, \quad E = (-1; +\infty).$

917) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^{2n}(x \cdot 2^n)}{2^{nx}}, \quad E = (0; +\infty).$

918) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{nx}]}}{n}$, а) $E = (0; 1)$; б) $E = (1; 2)$.

Определить область E существования функции $f(x)$ и исследовать ее на непрерывность.

919) $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x e^{-nx}.$

920) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + x^2}.$

921) $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^2 e^{-nx}.$

922) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$

923) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$

924) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot 3^{n-1} x^{n-1}.$

925) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{n^3 + x^2}.$

926) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}.$

927) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$. 928) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{\sqrt{n}}$.

929) $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n \ln^2 n}$.

930) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(1+n^2x^2)}$, $\alpha > 0$.

931) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x-1)\left(\frac{2}{2-x^2}\right)^n$.

932) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$.

933) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$.

934) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$. 935) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x + n\cdot(-1)^n}{x^2+n^2}$.

936) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{\sqrt{n}}$. 937) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$.

938) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n+2}$. 939) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^2+n}{n^2}$.

940) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+2x^2)(1+4x^2)\ldots(1+2nx^2)}$.

941) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} [nxe^{-nx} - x(n-1)e^{-(n-1)x}]$.

942) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(x-2)^{2n}}{(n+1)^2 \ln(n+1)}$.

943) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-x)(3^x-1)^n$.

944) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{x}+n)(\sqrt{x}+n+1)}$.

945) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x^2)(1+2x^2)\dots(1+nx^2)}$.

946) $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n} e^{-nx}$.

947) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin nx$.

948) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{nx}} \cos nx$.

Определить область E существования функции и исследовать ее на дифференцируемость во внутренних точках E.

949) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

950) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

951) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$.

952) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!}$.

953) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |x|^{n-1}$.

954) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{|x|}{n^2}$.

955) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$.

956) $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\ln^2 n}$.

957) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^4 e^{-nx}$.

958) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2+x^2}$.

959) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3\ln^3(n+1)}$.

960) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n \pi x)}{3^n}$.

961) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$.

Показать, что данный ряд допускает почленное интегрирование на $[a;b]$ и написать полученный при этом числовой ряд.

962) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$, $[a;b]=[0{,}2;5]$.

963) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$, $[a;b]=[-1;6]$.

964) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$, $[a;b]=[-1;2]$.

965) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$, $[a;b]=[-2;3]$.

966) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$, $[a;b]=[0;1]$.

4. Степенные ряды

Найти множество сходимости ряда.

967) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

968) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}x)^n$.

969) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

970) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

971) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n!}x^n$.

972) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$.

973) $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n x^{2n}$.

974) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln^4 n}$.

975) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n}}{\ln n}$.

976) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n/3}x^{2n}}{n!}$.

977) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,x^n}{a^{n^2}}$, $a>1$.

978) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,x^n}{(2n-1)!!}$.

979) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{n!} x^{2n}$.

980) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{4n+1} \cdot 5^{n/2}}$.

981) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}$, $a > 0$.

982) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

983) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{3^n (n+1)^{3/2}}$.

984) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{\sqrt{4^n n^2 + 1}}$.

985) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n}}{5^n \sqrt[3]{n^2+1}}$.

986) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{[\log_2 n]}} x^n$.

987) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) x^n$.

988) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{x+3}{3}\right)^n$.

989) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \ln n}$.

990) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 (x+4)^{2n+1}}{(n+1)!}$.

991) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n(5^n+1)}$.

992) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{2^n \cdot n!}$.

993) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{3^n}$.

994) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$.

995) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{3^n + 2^n}$.

996) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{3n-2}$.

997) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n (x+1)^{3n}$.

998) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} (x+2)^{2n}$.

999) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + (-1)^n \cdot 5)^n}{\sqrt{n^2+1}} (x+1)^n$.

1000) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3+(-1)^n \cdot 4}{3+2(-1)^{n+1}}\right)^n (x+3)^n$.

1001) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1 + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\right)^n}{\sqrt[3]{n^3+1}} x^n$.

1002) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(2+5(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\right)^n}{n \ln n} (x-3)^n$.

1003) $\sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \cdot (x-2)^n$.

1004) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}$.

1005) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \cdot \left(\frac{x}{3x+1}\right)^n$.

1006) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^n n^2 x^4 (1+x)^n$.

1007) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x(x+1)}{n}\right)^n$.

1008) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

1009) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} (\operatorname{tg} x)^n$.

1010) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \sin^{2n} x}{n^2}$.

1011) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$.

1012) $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n \cdot x^{n^2}$.

1013) $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{n^2} (x+2)^{n^2}$.

1014) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}} x^n$.

1015) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) x^{n^2}$.

1016) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} x^n$.

Найти круг сходимости ряда.

1017) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

1018) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

1019) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i+1}{2}\right)^n z^n$.

1020) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2-i}{3}\right)^{n^2} (z-i)^n$.

1021) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$.

1022) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\,(1-i)^n} (z+1)^n$.

1023) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2+i)^n} z^n$.

1024) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i+n}{2in}\right)^n (z+2)^n$.

1025) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{(n+1)(n+2)}(z-2)^n.$

1026) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{(i+n)^2}.$ 1027) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(iz)^n}{2-ni}.$

1028) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(z-1)^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}.$ 1029) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n + i\sin n}{n^2}(z-i)^n.$

1030) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3-4i)^n}{5^n(ni-1)}z^n.$ 1031) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^{2n}}{(3+i)^n}.$

1032) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+4i)^{n^2}}{(1-\sqrt{3}i)^n}.$ 1033) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1+i)^n}{3^n(n-i)}.$

1034) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{2^n(n+1)}.$ 1035) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2n+(n-1)^2 i}.$

1036) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{3}\right)^n (z+i)^n.$

Вычислив значения производных $f^{(n)}(x_0)$, написать n отличных от нуля членов разложения функции $f(x)$ в степенной ряд с центром в точке x_0.

1037) $f(x) = 2^{\sqrt{x}},\ x_0 = 4,\ n = 4.$

1038) $f(x) = \operatorname{tg} x,\ x_0 = \pi/4,\ n = 4.$

1039) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases},\ x_0 = 0,\ n = 4.$

1040) $f(x) = \begin{cases} \ln\dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},\ x_0 = 0,\ n = 3.$

1041) $f(x) = \ln(\sqrt[4]{x} + 1),\ x_0 = 16,\ n = 4.$

1042) $f(x) = \sin\sqrt[3]{x},\ x_0 = -1,\ n = 4.$

1043) $f(x) = e^{\sqrt{1+x^2}},\ x_0 = -1,\ n = 3.$

1044) $f(x) = \frac{1}{\sin x},\ x_0 = \pi/2,\ n = 3.$

1045) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}$, $x_0 = 1$, $n = 3$.

1046) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, $x_0 = 0$, $n = 4$.

Разложить функцию $f(x)$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$, используя разложения основных элементарных функций. Указать радиус сходимости полученного ряда.

1047) $f(x) = e^{-2x}$.

1048) $f(x) = \sin 5x$.

1049) $f(x) = \cos \dfrac{x^3}{3}$.

1050) $f(x) = \ln \dfrac{1}{1-2x}$.

1051) $f(x) = x \ln \left(1 + \dfrac{x^3}{3}\right)$.

1052) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

1053) $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1054) $f(x) = \sqrt[3]{1-4x}$.

1055) $f(x) = \operatorname{ch}\left(-\dfrac{x}{2}\right)$.

1056) $f(x) = \operatorname{sh}(-3x)$.

1057) $f(x) = \operatorname{arctg} 2x$.

1058) $f(x) = \arcsin \dfrac{1}{3}x$.

Разложить в степенной ряд с центром в точке x_0 функцию $f(x)$, преобразовав ее при необходимости так, чтобы можно было применить формулы стр. 130–131. Указать радиус сходимости полученного ряда.

1059) $f(x) = e^{-x/2}$, а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = 10$.

1060) $f(x) = 2^x$, $x_0 = a$.

1061) $f(x) = 2^x \cdot 3^{-x}$, $x_0 = 0$.

1062) $f(x) = (2+x)e^{x-1}$, а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = 1$; в) $x_0 = -2$.

1063) $f(x) = \sin(a+x)$, $x_0 = 0$.

1064) $f(x) = \cos(a+x)$, $x_0 = 0$.

1065) $f(x) = \cos^3 x$, а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = \pi/2$.

1066) $f(x) = \sin x \cos 3x$, $x_0 = 0$.

1067) $f(x) = \sin x \cos x$, а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = \pi/6$.

1068) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$.

1069) $f(x) = \ln x$, а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = e^2$.

1070) $f(x) = \ln(4 + 3x - x^2)$, $x_0 = 2$.

1071) $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$, $x_0 = 0$.

1072) $f(x) = \operatorname{sh}^3 x$, $x_0 = 0$.

1073) $f(x) = \operatorname{ch}^2 x$, $x_0 = 0$.

1074) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 7x + 12}$, $x_0 = 0$.

1075) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4x + 3}$, а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = 1/2$.

1076) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 + 4x + 8}$, $x_0 = -2$.

1077) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, а) $x_0 = -8$; б) $x_0 = 125$.

Используя методы дифференцирования либо интегрирования степенного ряда, разложить функцию $f(x)$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ и указать его радиус сходимости.

1078) $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

1079) $f(x) = \operatorname{arcctg} x$.

1080) $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$.

1081) $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x)^3}$.

1082) $f(x) = \arcsin x$.

1083) $f(x) = \arccos x$.

1084) $f(x) = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

1085) $f(x) = \arccos(1 - 2x^2)$.

1086) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t^2}{t}\, dt$.

1087) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\, dt$.

1088) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1 + t)}{t}\, dt$.

1089) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1 - t^{17}}$.

1090) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln\frac{2 + t}{2 - t}\, dt$.

1091) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1 - \operatorname{ch} t}{t}\, dt$.

1092) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1 - \cos 2t}{t^2}\, dt$.

1093) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\arcsin t^2}{t^2}\, dt$.

Применяя различные методы, разложить функцию $f(x)$ в степенной ряд с центром в точке x_0. Указать радиус сходимости полученного ряда.

1094) $f(x) = \ln(1-x^2)$, $x_0 = 0$.

1095) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$, $x_0 = 0$.

1096) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$, $x_0 = 0$.

1097) $f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, $x_0 = 0$.

1098) $f(x) = e^{x-1}$, а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = 4$.

1099) $f(x) = e^{3x} - 2e^{-x}$, $x_0 = 0$.

1100) $f(x) = xe^{-x^2}$, $x_0 = 0$.

1101) $f(x) = \dfrac{1}{2^{3x-2}}$, $x_0 = -1$.

1102) $f(x) = 2^x \cdot e^{x-1}$, $x_0 = 1$.

1103) $f(x) = \sin 3x$, а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

1104) $f(x) = \cos\dfrac{x}{2}$, а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = -\dfrac{\pi}{3}$.

1105) $f(x) = \dfrac{1}{4}(e^x + e^{-x} + 2\cos x)$, $x_0 = 0$.

1106) $f(x) = \sin^2 x$, а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

1107) $f(x) = \cos^2 x$, а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$; в) $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

1108) $f(x) = \sin^4 x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

1109) $f(x) = \sin x \cos^2 x$, $x_0 = 0$.

1110) $f(x) = \cos x \cos 2x$, $x_0 = 0$.

1111) $f(x) = x\cos^3 2x$, $x_0 = 0$.

1112) $f(x) = (x - \operatorname{tg} x)\cos x$, $x_0 = 0$.

1113) $f(x) = x \sin 2x \cos 3x$, $x_0 = 0$.

1114) $f(x) = \ln(4+x^2)$, $x_0 = 0$.

1115) $f(x) = x\ln(1+x^2)$, $x_0 = 0$.

1116) $f(x) = x\ln x$, а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = 4$.

1117) $f(x) = \ln(2x+3)$, а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = -1$; в) $x_0 = 4$.

1118) $f(x) = \ln(3-4x)$, $x_0 = -2$.

1119) $f(x) = \ln(2-7x)$, $x_0 = -1$.

1120) $f(x) = \ln\dfrac{2x+1}{x+1}$, а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = 1$.

1121) $f(x) = \ln\dfrac{3-2x}{2+3x}$, а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = 1$.

1122) $f(x) = \ln(x^2+5x+6)$, $x_0 = 0$.

1123) $f(x) = \ln\dfrac{2+x^2}{1-x}$, $x_0 = 0$.

1124) $f(x) = \ln\dfrac{1}{x^2-5x+6}$, $x_0 = 1$.

1125) $f(x) = \ln\sqrt[m]{\dfrac{1+x}{1-x}}$, $x_0 = 0$.

1126) $f(x) = \ln(2+x)(3+x)(1+x)$, а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = 1$.

1127) $f(x) = \ln(1-x+x^2)$, $x_0 = 0$.

1128) $f(x) = \ln(1+x+x^2+x^3)$, $x_0 = 0$.

1129) $f(x) = (x^2+x+1)\ln(2+x)$, $x_0 = -1$.

1130) $f(x) = (x^2+5)\ln\dfrac{9-x^2}{4-x^2}$, $x_0 = 0$.

1131) $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$, а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = 2$.

1132) $f(x) = \dfrac{x}{2+x}$, а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = -1$.

1133) $f(x) = x^5$, а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = -1$.

1134) $f(x) = x^6 - 2x^2 + 4x$, а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = 1$.

1135) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2x^3$, $x_0 = 1$.

1136) $f(x) = \dfrac{1}{1-x-x^2}$, $x_0 = 0$.

1137) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$, $x_0 = 0$.

1138) $f(x) = \dfrac{1}{2x^2+5x-3}$, $x_0 = 0$.

1139) $f(x) = \dfrac{3-8x}{1-5x+6x^2}$, $x_0 = 0$.

1140) $f(x) = \dfrac{5-x}{12-x-x^2}$, $x_0 = 0$.

1141) $f(x) = \dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$, $x_0 = 0$.

1142) $f(x) = \dfrac{1}{x^4+x^3+x^2+x+1}$, $x_0 = 0$.

1143) $f(x) = \dfrac{x^2}{(1+x)^2}$, $x_0 = 0$.

1144) $f(x) = \dfrac{1}{(2+x^2)^2}$, $x_0 = 0$.

1145) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x^3)^2}$, $x_0 = 0$.

1146) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^4}$, $x_0 = 0$.

1147) $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$, $x_0 = 0$.

1148) $f(x) = \dfrac{x}{x+1} \cdot \dfrac{1}{x^2-1}$, $x_0 = 0$.

1149) $f(x) = \dfrac{1}{x^3+x^2+5x+5}$, $x_0 = 0$.

1150) $f(x) = \dfrac{2-x+x^2}{(1-x)^3}$, $x_0 = 0$.

1151) $f(x) = \dfrac{3x+8}{(2x-3)(x^2+4)}$, $x_0 = 0$.

1152) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x-2)}$, $x_0 = 0$.

1153) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$, $x_0 = 1$.

1154) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-2x}}$, $x_0 = -1$.

1155) $f(x) = \dfrac{2x-3}{\sqrt{3x+4}}$, $x_0 = 1$.

1156) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 12x + 40}}, \ x_0 = 6.$

1157) $f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2 - 6x + 18}}, \ x_0 = 3.$

1158) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \ x_0 = 0.$

1159) $f(x) = \operatorname{arctg}(x+1), \ x_0 = -1.$

1160) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{a-x}{a+x}, \ x_0 = 0.$

1161) $f(x) = \dfrac{1}{3} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{1-x^2} + \dfrac{2}{3} \operatorname{arctg} x, \ x_0 = 0.$

1162) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}, \ x_0 = 0.$

1163) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{2-2x}{1+4x}, \ x_0 = 0.$

1164) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{2+x^2}{2-x^2}, \ x_0 = 0.$

1165) $f(x) = \operatorname{arcctg} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \ x_0 = 0.$

1166) $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2}, \ x_0 = 0.$

1167) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \ x_0 = 0.$

1168) $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \ln \dfrac{x^2 + x\sqrt{3} + 1}{x^2 - x\sqrt{3} + 1}, \ x_0 = 0.$

1169) $f(x) = \dfrac{1}{3} \ln \dfrac{1 + 2x + x^2}{1 - x + x^2}, \ x_0 = 0.$

1170) $f(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 2}), \ x_0 = 0.$

1171) $f(x) = x^2 \arccos 2x, \ x_0 = 0.$

1172) $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}, \ x_0 = 0.$

1173) $f(x) = x \arcsin(x + \sqrt{1-x^2}), \ x_0 = 0.$

1174) $f(x) = x \arccos(x - \sqrt{1 - x^2}),\ x_0 = 0.$

1175) $f(x) = x \arccos \dfrac{x^2}{\sqrt{4 + x^4}},\ x_0 = 0.$

1176) $f(x) = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \dfrac{1}{2} \arcsin x,\ x_0 = 0.$

1177) $f(x) = 1 - \dfrac{\sqrt{1 - x^2} \arcsin x}{x},\ x \neq 0,\ f(0) = 0.$

1178) $f(x) = \displaystyle\int_0^x t^3 e^{-t^2}\, dt,\ x_0 = 0.$

1179) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \cos t^3\, dt,\ x_0 = 0.$

1180) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt,\ x_0 = 0.$

1181) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}},\ x_0 = 0.$

1182) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \cos \sqrt{t}\, dt,\ x_0 = 0.$

1183) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1 + t^5}\, dt,\ x_0 = 0.$

1184) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\arcsin t}{t}\, dt,\ x_0 = 0.$

1185) $f(x) = \displaystyle\int_0^x t^2 \operatorname{sh} t\, dt,\ x_0 = 0.$

1186) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2}\, dt,\ x_0 = 0.$

Используя функции комплексного переменного, найти разложение функции $f(x)$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ и указать радиус сходимости полученного ряда.

1187) $f(x) = e^x \sin x$.

1188) $f(x) = e^x \cos x$.

1189) $f(x) = e^{3x} \sin 2x$.

1190) $f(x) = e^{-x} \cos 3x$.

1191) $f(x) = \operatorname{ch} x \cos x$.

1192) $f(x) = \operatorname{sh} x \sin x$.

1193) $f(x) = e^{x \operatorname{ctg} \alpha} \cos x$.

1194) $f(x) = e^{x \cos \alpha} \cos(x \sin \alpha)$.

1195) $f(x) = \operatorname{arctg}(x+1)$.

1196) а) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x + 1}$, б) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$.

Используя метод неопределенных коэффициентов, написать n первых ненулевых членов разложения функции $f(x)$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$.

1197) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $n = 5$.

1198) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $n = 2$.

1199) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, $n = 3$.

1200) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sin x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ $n = 4$.

1201) $f(x) = \dfrac{e^x}{2 + \sin x}$, $n = 3$.

1202) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{ctg} x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ $n = 4$.

1203) $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{\ln(1+x)}$, $n = 4$.

1204) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\ln(1+x)^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $n = 4$.

1205) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{1+x^2}}$, $n = 5$.

1206) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\operatorname{ch} x - 1}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases}$ $n = 3.$

1207) $f(x) = \dfrac{\sin \pi x}{1 + e^x}$, $n = 3.$

1208) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ $n = 4.$

1209) $f(x) = e^x \ln(1 + x)$, $n = 4.$

1210) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(1 - x)}, & x \neq 0, \\ -1, & x = 0, \end{cases}$ $n = 4.$

1211) $f(x) = \dfrac{1}{1 + \sin^2 x}$, $n = 4.$

1212) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ -\dfrac{1}{2}, & x = 0, \end{cases}$ $n = 4.$

Используя умножение степенных рядов, написать n первых ненулевых членов разложения функции $f(x)$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$.

1213) $f(x) = \dfrac{e^x}{1 - x}$, $n = 7.$

1214) $f(x) = e^x \ln(1 - x)$, $n = 6.$

1215) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1 - x}$, $n = 6.$

1216) $f(x) = \operatorname{arctg} x \cdot \cos x$, $n = 4.$

1217) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1 + x}}$, $n = 5.$

1218) $f(x) = e^{-x} \cos \sqrt{x}$, $n = 4.$

1219) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 - x^2}$, $n = 4.$

1220) $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt[3]{1 + x^2}}$, $n = 7.$

1221) $f(x) = \sin x \cdot \ln(1 - x^2)$, $n = 4.$

1222) $f(x) = (a + bx + cx^2 + dx^3 + fx^4 + kx^5 + \cdots)^2,\ n = 6.$

Проверить равенство.

1223) $\ln^2(1-x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1},\ -1 \leqslant x < 1.$

1224) $\operatorname{arctg}^2 x =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right)\cdot\frac{x^{2n}}{n},\ |x| \leqslant 1.$$

1225) $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x} =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right),\ |x| < 1.$$

1226) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^3 = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n,\ |x| < 1.$

1227) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\right) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n.$

1228) $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n x^n}{n!},\ |x| < \infty.$

1229) $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!},\ |x| < \infty.$

1230) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n x^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!},\ |x| < \infty.$

Найти произведение двух рядов.

1231) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}.$

1232) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n,\quad \sum_{n=0}^{\infty} q^n,\quad |q| < 1.$

1233) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$, $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n(n+1)}$.

1234) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

1235) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$, $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$.

1236) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$, $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)^n}{n!}$.

1237) Доказать, что $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}\right)^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\tau(k)}{k^x}$, где $\tau(k)$ — число делителей числа k.

Используя деление степенных рядов, написать n первых ненулевых членов разложения функции $f(x)$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$.

1238) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\cos x}$, $n = 4$.

1239) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\operatorname{arctg} x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ $n = 5$.

1240) $f(x) = \operatorname{th} x$, $n = 3$.

1241) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$, $n = 4$.

1242) $f(x) = \frac{x}{\ln \frac{1}{1-x}}$, $n = 4$.

1243) $f(x) = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$, $a_0 \neq 0$, $n = 4$.

Проверить равенство.

1244) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n!} : \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{7^n x^n}{n!}$, $|x| < \infty$.

1245) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)x^n : \sum_{n=0}^{\infty} x^n =$

$= 6+3\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n,\ |x|<1.$

1246) $1 : \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!},\ |x| < \infty.$

1247) $\left\{1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n\right\} : \sum_{n=0}^{\infty} x^n =$

$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n,\ |x| < 1.$

Используя метод обращения ряда, найти n первых ненулевых членов разложения в степенной ряд с центром в точке $x_0 = g(0)$ функции $f(x)$, обратной к функции $g(x)$.

1248) $g(x) = e^x - 1,\ n = 3 \quad (f(x) = \ln(1+x))$.

1249) $g(x) = \sin x,\ n = 3 \quad (f(x) = \arcsin x)$.

1250) $g(x) = x + \sin x,\ n = 3$.

1251) $g(x) = x - e^{-x},\ n = 4$.

1252) $g(x) = 2x - \sqrt{1+x^2},\ n = 3$.

1253) $g(x) = x - \ln(1+x^2),\ n = 4$.

Используя метод подстановки ряда в ряд, найти n первых ненулевых членов разложения функции $f(g(x))$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$, если известны разложения в степенные ряды функций $f(x)$ и $g(x)$.

1254) $f(x) = \sin(\sin x),\ n = 3$.

1255) $f(x) = \ln(1+e^x),\ n = 4$.

1256) $f(x) = -\ln\cos x,\ n = 3$.

1257) $f(x) = \ln(1+\sin x),\ n = 3$.

1258) $f(x) = \sqrt{1+\sin x},\ n = 4$.

1259) $f(x) = 2^{\cos^2 x},\ n = 4$.

1260) $f(x) = \ln \operatorname{tg}(x+\pi/4),\ n = 3$.

1261) $f(x)=\sqrt{1+4x+12x^2}$, $n=4$.

1262) $f(x)=\ln(x^2-x+1)$, $n=4$.

Получив соотношение между y и y', последовательным дифференцированием установить соотношение между функцией y и ее производными до порядка k. Исходя из полученных равенств, написать n отличных от нуля членов разложения в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ функции $y=f(x)$.

1263) $f(x)=e^{x\sin x}$, $n=4$.

1264) $f(x)=e^{\cos x}$, $n=4$.

1265) $f(x)=e^{\operatorname{tg} x}$, $n=6$.

1266) $f(x)=e^{\operatorname{arctg} x}$, $n=5$.

1267) $f(x)=e^{\sin x}$, $n=8$.

1268) $f(x)=(1+x)^x$, $n=5$.

1269) $f(x)=e^{\frac{x}{\cos x}}$, $n=4$.

1270) $f(x)=e^{\arcsin x}$, $n=4$.

1271) $f(x)=\operatorname{tg} x$, $n=3$.

1272) $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$, $n=5$.

Составив дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $f(x)$, доказать справедливость равенства.

1273) $$\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^n}=x-n(n+1)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\frac{x^2}{2!}+ \\ +n(n+1)(n+2)\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\frac{x^3}{3!}+\cdots.$$

1274) $$\sqrt{1-x^2}\arcsin x=x-\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{2\cdot4}{3\cdot5}\cdot\frac{x^7}{7}-\cdots.$$

1275) $$\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})=x+\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{2\cdot4}{3\cdot5}\cdot\frac{x^7}{7}-\cdots.$$

1276) $$\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^2=\frac{1}{2}-\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{x}{3}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{x^2}{4}-\cdots.$$

1277) $$\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^2=1-\left(1+\frac{1}{3}\right)\frac{x^2}{2}+\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\frac{x^4}{3}-\cdots.$$

1278) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\ln(1+x^2) =$

$$= \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{x^3}{3} - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\frac{x^5}{5} + \cdots.$$

1279) $\cos(m\arcsin x) = 1 - \frac{m^2}{2!}x^2 + \frac{m^2(m^2-4)}{4!}x^4 +$

$$+ \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{6!}x^6 + \cdots.$$

1280) $\sin(m\arcsin x) =$

$$= mx - \frac{m(m^2-1)}{3!}x^3 + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{5!}x^5 - \cdots.$$

1281) $\cos(m\arccos x) =$

$$= \cos\frac{\pi m}{2}\left(1 - \frac{m^2}{2!}x^2 + \frac{m^2(m^2-4)}{4!}x^4 - \cdots\right) +$$

$$+ \sin\frac{\pi m}{2}\left(mx - \frac{m(m^2-1)}{3!}x^3 + \cdots\right).$$

Разложив функции $y = \sin(m\arcsin x)$ и $y = \cos(m\arcsin x)$ в ряды по степеням буквы m, получить разложение в ряд по степеням x функции

1282) $f(x) = \arcsin x$.

1283) $f(x) = \arcsin^2 x$.

1284) $f(x) = \arcsin^3 x$.

1285) $f(x) = \arcsin^4 x$.

Доказать справедливость разложения.

1286) $\frac{\ln(1+x)}{1-x} = x - \left(1+\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3 -$

$$- \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4 + \cdots, \quad |x| < 1.$$

1287) $-\ln(1+x)\cdot\ln(1-x) = x^2 + \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{x^4}{2} +$

$$+ \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\frac{x^6}{3} + \cdots, \quad |x| < 1.$$

1288) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x =$

$$= \frac{x^2}{2} - \left(1 + \frac{1}{3}\right)\frac{x^4}{4} + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\frac{x^6}{6} - \dots, \quad |x| < 1.$$

1289) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x \cdot \ln\frac{1+x}{1-x} = x^2 + \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\frac{x^3}{3} +$

$$+ \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right)\frac{x^{10}}{5} + \dots, \quad |x| < 1.$$

1290) $\ln\frac{1+\sqrt{1-x}}{2} =$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^2}{4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^3}{6} - \dots, \quad |x| < 1.$$

1291) $\ln\frac{2(1-\sqrt{1-x})}{x} =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^2}{4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^3}{6} + \dots, \quad |x| < 1.$$

1292) $\left(\frac{2(1-\sqrt{1-x})}{x}\right)^m = 1 + \frac{m}{1}\cdot\frac{x}{4} + \frac{m}{2!}(m+3)\left(\frac{x}{4}\right)^2 +$

$$+ \frac{m(m+4)(m+5)}{3!}\left(\frac{x}{4}\right)^3 + \dots, \quad |x| < 1.$$

Написать n ненулевых членов разложения в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ функции $y = f(x)$, являющейся аналитической ветвью кривой $F(x, y) = 0$.

1293) $F(x, y) = y^3 + xy - 8 - x^2$, $n = 3$.

1294) $F(x, y) = 2y - \sin y - x$, $n = 2$.

1295) $F(x, y) = y^2 - ay - x$, $y(0) = 0$, $a \neq 0$, $n = 4$.

1296) $F(x, y) = y - a + xy^5$, $a \neq 0$, $n = 5$.

1297) $F(x, y) = y^4 - 4y - x$, $n = 2$.

1298) $F(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$, $n = 2$.

1299) $F(x, y) = 4(x-1)y^5 + 2xy^3 - 3x^3y + x^4$, $n = 2$.

1300) Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Написать разложение функции $F(x) = \frac{f(x)}{1-x}$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$.

1301) Доказать справедливость разложения

$$\frac{1}{1-x-x^2-x^3} =$$
$$= 1 + x + 2x^2 + 4x^3 + 7x^4 + 13x^5 + 24x^6 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

где $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, $n \geqslant 4$, $|x| < \delta$, $\delta > 0$.

1302) Доказать справедливость разложения

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad |x| < \sqrt{\frac{3}{2}},$$

где коэффициенты a_n есть последовательные числа Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., каждое из которых равно сумме двух предыдущих.

1303) Разложив в ряд по степеням x обе части тождества

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2} + x} + \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2} - x} \right],$$

найти формулу, выражающую числа Фибоначчи a_n.

1304) Доказать, что если справедливо равенство

$$1 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \cdots = \frac{1}{1 + bx + ax^2},$$

то справедливо также и равенство

$$1 + p_1^2 x + p_2^2 x^2 + p_3^2 x^3 + \cdots = \frac{1 + ax}{(1-ax)[(1+ax)^2 - b^2 x]}.$$

Пользуясь разложением функции $f(x)$ в степенной ряд, найти значение производной $f^{(n)}(x_0)$ указанного порядка n.

1305) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $f^{(10)}(0)$.

1306) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, $f^{(6)}(0)$.

1307) $f(x) = x^6 \operatorname{arctg} x$, $f^{(18)}(0)$.

1308) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[4]{1+x}$, $f^{(5)}(0)$.

1309) $f(x) = \cos x \cdot \operatorname{ch} x$, $f^{(7)}(0)$.

1310) $f(x) = \dfrac{3x-5}{x^2-4x+3}$, $f^{(16)}(0)$.

1311) $f(x) = x^3 \ln(1-x+x^2-x^3)$, $f^{(8)}(0)$.

1312) $f(x) = x^5 \cos\dfrac{x}{2}$, $f^{(11)}(0)$.

1313) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+5}$, а) $f^{(38)}(-1)$; б) $f^{(1001)}(-1)$.

1314) $f(x) = (x-2)^2 \ln(3x+2)$, $f^{(7)}(2)$.

1315) $f(x) = x^2 e^{2x}$, $f^{(20)}(1)$.

1316) $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, $f^{(100)}(0)$.

1317) $f(x) = \dfrac{1}{a^2+b^2x^2}$, $f^{(n)}(0)$.

1318) $f(x) = \ln\dfrac{a+bx}{a-bx}$, $(ab \neq 0)$, $f^{(n)}(0)$.

Разложить функцию $y = f(x)$ в обобщенный степенной ряд относительно функции $g(x)$ и указать множество сходимости полученного ряда.

1319) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $\quad g(x) = \dfrac{1}{x}$.

1320) $f(x) = \ln x$, $\quad g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

1321) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$, $\quad g(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

1322) $f(x) = x$, $\quad g(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1323) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\quad g(x) = \cos\dfrac{x}{2}$.

1324) $f(x) = x$, $\quad g(x) = \sin x$.

1325) $f(x) = x$, $\quad g(x) = \operatorname{ctg} x$.

1326) $f(x) = \dfrac{1}{2\cos^2 x}$, $\quad g(x) = \cos 2x$.

1327) $f(x) = \arccos(1-x)$, $\quad g(x) = \sqrt{x}$.

1328) $f(x) = \int\limits_0^x \ln(1+\sqrt{t})\,dt, \quad g(x) = \sqrt{x}.$

1329) $f(x) = \arcsin\sqrt{\dfrac{2x}{1+x^2}}, \quad g(x) = \sqrt{x}.$

Выделив главную часть вида cx^α, $c \neq 0$, функции $y(x)$ при $x \to 0$, найти n ненулевых членов разложения этой функции в ряд по степеням x^α.

1330) $x = y - 1 + e^{-y}$, $n = 4$.

1331) $x = y - \ln(1+y)$, $n = 4$.

1332) $x = y - \sin y$, $n = 3$.

1333) $x = \operatorname{tg} y - y$, $n = 3$.

1334) $x = \dfrac{y^2}{2} - 1 + \cos y$, $n = 3$.

Проверить равенство.

1335) $\int\limits_1^x \dfrac{\sin t^2}{t^3}\,dt = C + \ln|x| + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{4n(2n+1)!}x^{4n}, \quad x \neq 0.$

1336) $\int\limits_1^x \dfrac{t\,dt}{\ln(1+t)} = C + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n - 1}{n \cdot n!} \ln^n(1+x).$

1337) $\int\limits_1^x \dfrac{\operatorname{arctg}^2 t}{t}\,dt = C + \ln|x| +$

$+ \dfrac{1}{2}\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n-1)}\left(1 + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{2n-1}\right) x^{2n-2},$

$0 < |x| < 1$.

1338) $\int\limits_2^x \dfrac{dt}{\ln^2 t} = C - \dfrac{1}{\ln x} + \ln|\ln x| + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln^{n-1} x}{n!\,(n-1)},$

$0 < x < 1$, $1 < x < \infty$.

1339) $\int\limits_1^x \dfrac{e^t}{t^2}\,dt = C - \dfrac{1}{x} + \ln|x| + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+2)!\,(n+1)}.$

$$1340)\ \int\limits_{e}^{x} \frac{dt}{\ln t} = \ln|\ln x| + \frac{\ln x}{1\cdot 1!} + \frac{\ln^2 x}{2\cdot 2!} + \dots +$$

$$+ \frac{\ln^n x}{n\cdot n!} + \dots - \left(1 + \frac{1}{2\cdot 2!} + \dots + \frac{1}{n\cdot n!}\right), \quad x > 0,\ x \neq 1.$$

5. Двойные ряды

Для данной матрицы рассмотреть соответствующие повторные ряды и двойной ряд и выяснить их сходимость.

$$1341)\ \begin{pmatrix} \frac{1}{1\cdot 2} & \frac{1}{2\cdot 3} & \frac{1}{3\cdot 4} & \frac{1}{4\cdot 5} & \frac{1}{5\cdot 6} & \dots \\ 0 & \frac{1}{2\cdot 3} & \frac{1}{3\cdot 4} & \frac{1}{4\cdot 5} & \frac{1}{5\cdot 6} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3\cdot 4} & \frac{1}{4\cdot 5} & \frac{1}{5\cdot 6} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4\cdot 5} & \frac{1}{5\cdot 6} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

$$1342)\ \begin{pmatrix} x & -x^2 & x^2 & -x^3 & x^3 & \dots \\ x(1-x) & -x^2(1-x^2) & x^2(1-x^2) & -x^3(1-x^3) & x^3(1-x^3) & \dots \\ x(1-x)^2 & -x^2(1-x^2)^2 & x^2(1-x^2)^2 & -x^3(1-x^3)^2 & x^3(1-x^3)^2 & \dots \\ x(1-x)^3 & -x^2(1-x^2)^3 & x^2(1-x^2)^3 & -x^3(1-x^3)^3 & x^3(1-x^3)^3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$0 < x < 1$.

$$1343)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \dots \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \dots \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \dots \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Исследовать сходимость следующего ряда, используя в случае необходимости результаты задач 105, 107, 108, 113 стр. 336, 337.

1344) $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\alpha} n^{\beta}}, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$

1345) $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(m+n)^{\alpha}}, \quad \alpha > 0.$

1346) $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(Am^2 + 2Bmn + Cn^2)^{\alpha}}, \quad \alpha > 0,$
$AC - B^2 > 0,\ A > 0,\ C > 0.$

1347) $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)^{\alpha}}, \quad \alpha > 0.$

1348) $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{n + \left[\frac{m-1}{2}\right]}.$

1349) $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \frac{\ln(m+n)}{m^{\alpha} + n^{\beta}}.$

1350) $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \frac{\cos(m+n)}{mn^2 + 5m}.$

1351) $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m^{\alpha} + n^{\beta}}.$

1352) $\sum\limits_{m,n=2}^{\infty} \frac{(m!)^n}{(nm)!}.$

1353) $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \frac{n^{\ln m} \cdot m^{\ln n}}{(\ln(m+n))^{m+n}}.$

1354) $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \frac{\cos mx \sin ny}{1 + m^2 n^2}.$

Найти сумму ряда.

1355) $\displaystyle\sum_{m,n=2}^{\infty} \frac{1}{m^n}.$

1356) $\displaystyle\sum_{m,n=2}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^m}, \quad p > -1.$

1357) $\displaystyle\sum_{m=2,n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^m}.$

1358) $\displaystyle\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^{2m+1}}.$

1359) $\displaystyle\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-2)^{2m}}.$

1360) $\displaystyle\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^{2m}}.$

ОТВЕТЫ К ГЛАВЕ I

1) $\frac{3}{2}$. 2) $\frac{2}{3}$. 3) Расходится. 4) Расходится. 5) $\frac{1}{1-\ln^2 2}$. 6) Расходится. 7) $\frac{137}{300}$. 8) $\frac{1}{\alpha+1}$. 9) $\frac{1}{4}$. 10) $\frac{25}{48}$. 11) $\frac{1}{2c(c+1)}$. 12) 1. 13) 1. 14) $\frac{1}{3}$. 15) $1-\sqrt[3]{2}$. 16) Расходится. 17) $-\ln 2$. 18) $\ln 3$. 19) $\ln 3/2$. Указание. $S_n = -\ln\frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$. 20) Расходится. 21) $\frac{q}{(1-q)^2}$. Указание. Рассмотреть $S_n - S_n{\cdot}q$, а также см. пример 5 на стр. 8. 22) $\frac{q(1+q)}{(1-q)^3}$. Указание. Использовать результат и метод решения задачи 21. 23) $\pi/4$. Указание. Воспользоваться соотношением

$$\operatorname{arctg}\frac{c}{a+n-1} - \operatorname{arctg}\frac{c}{a+n} = \operatorname{arctg}\frac{c}{c^2+(a+n)(a+n-1)};$$

$S_n = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$. 24) $\frac{3\pi}{4}$. См. указание к задаче 23. 25) $\frac{\pi}{4}$. 26) 1. Указание. Проверить, что $S_n = 1-\frac{1}{(n+2)!}$. 27) $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$. Указание. Проверить, что $S_n = \frac{1}{\sin^2 x} - \left(\frac{1}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}\right)^2$. 28) $-3/2$. 29) $\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x$. Указание. Рассмотреть функцию

$$\prod\nolimits_n(x) = \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}$$

и найти $\prod_n'(x)$. Доказать, что частичная сумма данного ряда равна $-\frac{\prod_n'(x)}{\prod_n(x)}$, т. е. равна $\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n} - \operatorname{ctg} x$. 30) $\frac{x}{1-x}$. Указание. Проверить, что $S_n = \frac{x}{1-x} - \frac{2^n{\cdot}x^{2^n}}{1-x^{2^n}}$. 31) $\frac{x}{1-x}$ при $|x|<1$ и $S = -\frac{1}{x-1}$ при $|x|>1$. Указание. Прологарифми-

ровать и продифференцировать равенство $\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+x^{2^{k-1}}\right) = \frac{1-x^{2^n}}{1-x}$. Проверить, что $S_n = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^n}}$. 32) Расходится. 33) Указание. $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$. 34) Указание. $\frac{1}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+2}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+3n+2}} > \frac{1}{2n}$. 35) Указание. $\frac{1}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n-1}} > \frac{1}{2\sqrt{3n+1}} > \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}+1}$.
36) Указание. $\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$. 45) Указание. $\ln n! = O(n\ln n)$, $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\ln n! - 2\ln(2!\cdot 3!\dots n!)}{n^2+n} = \frac{1}{2}.$$

47) Указание. Предположив, что $\cos n^2 \to 0$ при $n \to +\infty$ придти к противоречию, рассматривая разность $\cos n^2 - \cos(n+1)^2$ и используя то, что последовательности $\cos(n+1)$ и $\sin(2n+1)$ не являются бесконечно малыми при $n \to +\infty$. 48) Расходится. 49) Сходится. 50) Сходится. 51) Сходится. 52) Расходится. 53) Сходится. 54) Расходится. 55) Сходится. 56) Расходится. 57) Сходится. 58) Расходится. 59) Сходится. 60) Сходится. 61) Сходится. 62) Расходится. 63) Расходится. 64) Сходится. 65) Расходится. 66) Сходится. 67) Сходится при $a \neq 0$, расходится при $a = 0$. 68) Сходится при $a > 1$, расходится при $0 < a \leqslant 1$. 69) Сходится при $b > 0$ и $s > 1$, расходится при $b > 0$, $0 < s \leqslant 1$ и $b = 0$, s любом. 70) Сходится. 71) Расходится. 72) Сходится. 73) Расходится. 74) Расходится. 75) Расходится. Указание. $\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}} = \frac{1}{e^{(\ln\ln n)^2}} > \frac{1}{e^{\ln n}} = \frac{1}{n}$. 76) Сходится. Указание. $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln\ln n}} < \frac{1}{n^2}$. 77) Сходится. Указание. $\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln\ln\ln n}} < \frac{1}{n^2}$.
78) Сходится при $\alpha > 0$. Расходится при $\alpha \leqslant 0$. 79) Расходится при $b = 0$, сходится при $b \neq 0$. 80) Сходится. 81) Сходится при $\alpha > 0$, расходится при $\alpha \leqslant 0$. 82) Сходится. 83) Сходится

при $\alpha > 2$, расходится при $\alpha \leqslant 2$. 84) Сходится при $p < 12$, расходится при $p \geqslant 12$. 85) Расходится при любых α. 86) Расходится. 87) Сходится. 88) Сходится при $p > \frac{1}{2}$, расходится при $0 < p \leqslant \frac{1}{2}$. 89) Сходится. 90) Расходится. 91) Сходится. 92) Сходится при $a > 1$, расходится при $a \leqslant 1$. 93) Сходится. 94) Сходится. 95) Сходится. 96) Сходится. 97) Расходится. 98) Расходится. 99) Расходится. 100) Сходится. 101) Расходится. 102) Расходится. 103) Сходится. 104) Расходится. 105) Сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leqslant 1$. 106) Сходится при $\alpha + \beta > 1$, расходится при $\alpha + \beta \leqslant 1$. 107) Сходится. 108) Сходится. 109) Расходится. 110) Сходится. 111) Сходится. 112) Сходится. 113) Сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leqslant 1$. 114) Сходится. 115) Сходится. 116) Сходится при $\alpha > 1/2$, расходится при $\alpha \leqslant 1/2$. 117) Сходится. 118) Сходится. 119) Сходится. 120) Сходится. 121) Сходится. 122) Сходится. 123) Сходится. 124) Расходится. 125) Сходится. 126) Сходится. 127) Сходится. 128) Сходится. 129) Расходится. 130) Сходится. 131) Расходится. 132) Сходится при $p > 1/2$, расходится при $p \leqslant 1/2$. 133) Сходится. 134) Сходится. 135) Сходится. 136) Сходится при любом $\alpha > 0$. 137) Сходится при $p > \frac{1}{2}$, расходится при $p \leqslant \frac{1}{2}$. 138) Сходится. 139) Сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leqslant 1$. 140) Расходится. 141) Сходится. 142) Сходится. 143) Расходится. 144) Расходится. 145) Расходится. 146) Сходится. 147) Сходится. 148) Сходится. 149) Сходится. 150) Сходится при $\alpha > 1$ и при $\alpha = 1$, $\beta > 1$, расходится при $\alpha \leqslant 1$ и при $\alpha = 1$, $\beta \leqslant 1$. 151) Сходится при $\alpha > 1$, при $\alpha = 1$, $p > 1$, при $\alpha = 1$, $p = 1$, $q > 1$; расходится при $\alpha < 1$, при $\alpha = 1$, $p < 1$, при $\alpha = 1$, $p = 1$, $q < 1$. 152) Сходится при $q - p > 1$, расходится при $q - p \leqslant 1$. 153) Сходится. 154) Сходится. 155) Сходится. 156) Сходится. 157) Сходится. 158) Сходится. 159) Сходится. 160) Сходится. 161) Сходится при $p > \frac{3}{2}$, расходится при $p \leqslant \frac{3}{2}$. 162) Расходится. 163) Сходится при $p > 1$, расходится при $p \leqslant 1$. Указание. $a_n(p)$ — монотонная функция, и для

$p > 1$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, $n \geqslant N_0(p, \varepsilon)$, где $b_n = n \ln^{p-\varepsilon} n$ при любом $\varepsilon > 0$ (см. также задачу 22 стр. 316). 164) Сходится при $\alpha > \frac{1}{3}$, расходится при $\alpha \leqslant \frac{1}{3}$. 165) Сходится. 166) Расходится. 167) Сходится. 168) Расходится. 169) Расходится при любом $a \neq 1$. 170) Сходится при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Расходится при $\alpha = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Указание. $a_n \sin\alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^n}$. 171) Расходится. 172) Расходится. 173) Сходится. 174) Расходится. 175) Сходится. 176) Сходится. 177) Сходится. 178) Сходится. 179) Расходится. 180) Расходится. 181) Сходится. 182) Расходится. 183) Сходится при $p > \frac{3}{2}$, расходится при $p \leqslant \frac{3}{2}$. 184) Сходится при $a - p > 1$, расходится при $a - p \leqslant 1$. 185) Сходится. 186) Расходится. 187) Сходится. 188) Расходится. 189) Сходится при $\alpha < 1$, расходится при $\alpha \geqslant 1$. 190) Сходится при $\alpha > 0$, p любом, расходится при $\alpha = 0$, $p \leqslant 1$ и при $\alpha < 0$, p любом. 191) Расходится. 192) Сходится. 193) Сходится. 194) Расходится. 195) Сходится при $p(1-\alpha) < 1$, расходится при $p(1-\alpha) \leqslant 1$. 196) Сходится при $\alpha - \beta - \alpha\beta > 0$, расходится при $\alpha - \beta - \alpha\beta \leqslant 0$. 197) Сходится при $\gamma - \alpha - \beta > 0$, расходится при $\gamma - \alpha - \beta \leqslant 0$. 198) Сходится при всех $\alpha \geqslant 0$. 199) Расходится. 200) Сходится. 201) Сходится. 202) Расходится. 203) Сходится. 204) Сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leqslant 1$. 205) Расходится. 206) Расходится. 207) Расходится при $a \neq 1$. 208) Сходится. 209) Расходится. 210) Сходится при $p > \frac{1}{4}$, расходится при $p \leqslant \frac{1}{4}$. 211) Сходится при $\alpha > 2$, расходится при $\alpha \leqslant 2$. 212) Сходится при $\alpha < -1/2$, расходится при $\alpha \geqslant -1/2$. 213) Расходится. 214) Расходится. 215) Сходится при любом $a > 0$. 216) Сходится при $\alpha < 2$, расходится при $\alpha \geqslant 2$. 217) Расходится. 218) Сходится. 219) Сходится. 220) Расходится. 221) Расходится. 222) Расходится. 223) Расходится. 224) Сходится при $\beta - 3\alpha > 3$, расходится при $\beta - 3\alpha \leqslant 3$. 225) Сходится при $\alpha < 2$, расходится при $\alpha \geqslant 2$. 226) Сходится при $\beta - \alpha + 1 > 0$, расходится при $\beta - \alpha + 1 \leqslant 0$. 227) Сходится при $\alpha = 1$, $p > 2$, расходится при $\alpha \neq 1$ и любом p и при $\alpha = 1$, $p \leqslant 2$. 228) Сходится. Указание. $\sqrt{2} = 2\cos\pi/4$. 229) Сходится при любых $a > 0$. 230) Сходится при $p > \frac{1}{2}$, расходится при $p \leqslant 1/2$. 231) Сходится при $p > \frac{1}{3}$, расходится при $p \leqslant \frac{1}{3}$. 232) Расходится. 233) Сходится при $x = 0$ и любом p и при $x \neq 0$ и $p < \frac{1}{3k}$. 234) Расходится. 235) Сходится. 236) Расходится при любых $a > 0$ и $b > 0$. 237) Сходится при $\alpha > 1/2$, расходится при $\alpha \leqslant 1/2$. 238) Расходится. 239) Сходится. 240) Сходится. 241) Расходится. 242) Расходится. 243) Сходится при $p > 3/4$, расходится при $p \leqslant 3/4$. 244) Сходится при $\alpha < 2$, расходится при $\alpha \geqslant 2$. 245) Сходится при $\alpha < 1/2$, расходится при $\alpha \geqslant 1/2$. 246) Расходится. 247) Сходится. 248) Сходится при $q > 1$, расходится при $q \leqslant 1$. 249) Сходится. 250) Сходится при $\alpha > 6$, расходится при $\alpha \leqslant 6$. 251) Сходится при $p - k > 1$, расходится при $p - k \leqslant 1$. 252) Сходится при $k < -1$, расходится при $k \geqslant -1$. 253) Сходится при $p - k > 1$, расходится при $p - k \leqslant 1$. 254) Сходится при $p > 2$, расходится при $0 < p \leqslant 2$. 255) Если $a \neq a_1$, то сходится при $\alpha < 0$ и расходится при $\alpha \geqslant 0$, если $a = a_1$, $b \neq b_1$, то сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$, если $a = a_1$, $b = b_1$, то сходится при любом α. 256) Сходится при $a = 2$, расходится при $a \neq 2$. 257) Сходится при $a = \frac{b}{\pi}$, расходится при $a \neq \frac{b}{\pi}$. 258) Расходится. 259) Расходится. 260) Сходится при $\alpha < 1$, расходится при $\alpha \geqslant 1$. 261) Сходится при $\alpha > 2/3$, расходится при $\alpha \leqslant 2/3$. 262) Расходится. 263) Расходится. 264) Сходится. 265) Сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leqslant 1$. 266) Сходится. 267) Сходится при $\alpha < -1$, расходится при $\alpha \geqslant -1$. 268) Расходится. 269) Сходится при $\alpha < 1$, расходится при $\alpha \geqslant 1$. 270) Сходится. 271) Сходится. Указание. $0 < a_n \leqslant \frac{n \cdot n!}{(2n)!}$. 272) Сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leqslant 1$. 273) Сходится при $\alpha < -1$, расходится при $\alpha \geqslant -1$. 274) Сходится при $\alpha < -2$, расходится при $\alpha \geqslant -2$. 275) Расходится при любом $\alpha \neq 0$. 276) Сходится.

277) Сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leqslant 1$. 278) Сходится при $\alpha > \frac{1}{3}$, расходится при $\alpha \leqslant \frac{1}{3}$. 279) Сходится при $\alpha < 2$, расходится при $\alpha \geqslant 2$. 280) Сходится при $\alpha > \frac{1}{3}$, расходится при $\alpha \leqslant \frac{1}{3}$. 281) Сходится при $\alpha > \frac{3}{2}$, расходится при $\alpha \leqslant \frac{3}{2}$. 282) Сходится при $\alpha < 2$, расходится при $\alpha \geqslant 2$. 283) Сходится при $\alpha > \frac{1}{2}$, расходится при $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. 284) Сходится при $\alpha > \frac{1}{2}$, расходится при $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. 285) Сходится при $\alpha > \frac{1}{3}$, расходится при $\alpha \leqslant \frac{1}{3}$. 286) Сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leqslant 1$. 287) Сходится при $\alpha > -\frac{3}{4}$, расходится при $\alpha \leqslant -\frac{3}{4}$. 288) Сходится при $\alpha > 1/2$, расходится при $\alpha \leqslant 1/2$. 289) Сходится при $2\beta + \alpha > 1$, расходится при $2\beta + \alpha \leqslant 1$. 290) Сходится при $4\alpha - \beta > -2$, расходится при $4\alpha - \beta \leqslant -2$. 291) Расходится. 292) Сходится при $\alpha > \frac{5}{8}$, расходится при $\alpha \leqslant \frac{5}{8}$. 293) Сходится при $\alpha > \frac{1}{2}$, расходится при $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. 294) Сходится при $\alpha > 1/4$, расходится при $\alpha \leqslant 1/4$. 295) Расходится. Указание. Найти предел a_n при $n \to +\infty$. 296) Сходится при $\alpha < -\frac{1}{2}$, расходится при $\alpha \geqslant -\frac{1}{2}$. 297) Сходится при $\alpha < 1$, расходится при $\alpha \geqslant 1$. 298) Сходится при $\alpha > \frac{1}{6}$, расходится при $\alpha \leqslant \frac{1}{6}$. 299) Сходится при $\alpha < -1$, расходится при $\alpha \geqslant -1$. 300) Сходится при $\alpha > 5$, расходится при $\alpha \leqslant 5$. 301) Сходится при $\alpha > \frac{1}{2}$, расходится при $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. 302) Сходится при $\alpha > -\frac{1}{2}$, расходится при $\alpha \leqslant -\frac{1}{2}$. 303) Сходится при $\alpha < -1$, расходится при $\alpha \geqslant -1$. 304) Сходится при $\alpha < 1$, расходится при $\alpha \geqslant 1$. 305) Сходится при $\min(\alpha, \beta) > \frac{1}{2}$, расходится при $\min(\alpha, \beta) \leqslant \frac{1}{2}$. 306) Сходится

при $\alpha+\beta > \frac{1}{2}$, расходится при $\alpha+\beta \leqslant \frac{1}{2}$. 307) Сходится. 308) Расходится. 309) Сходится. 310) Расходится. Указание. Сравнить a_n и $\frac{1}{\pi(n+1)}$. 311) Расходится. Указание. Сравнить a_n и $\frac{1}{\pi(n+1)}$. 312) Сходится при $q > 1$, расходится при $0 < q \leqslant 1$. 313) Сходится. 314) Сходится. 315) Сходится при $\alpha > 1$, расходится при $0 < \alpha \leqslant 1$. Указание. Последовательность $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ имеет конечный предел — константу Эйлера. 316) Сходится. Указание. Для оценки интеграла $\int\limits_{n}^{n+1} \frac{\sin x}{x}\,dx$ применить формулу интегрирования по частям. 317) Сходится. Указание. Применить формулу интегрирования по частям к интегралу $\int\limits_{a}^{a+1} \frac{2u \sin u^2}{2u}\,du$. 318) Сходится. Указание. Применить формулу интегрирования по частям к интегралу $\int\limits_{a}^{a+b} \frac{3u^2 \sin u^3}{3u^2}\,du$. 319) Сходится. 320) Расходится. 321) Сходится. 322) Сходится. 323) Сходится. Указание. $\sum\limits_{k=1}^{n} k! \leqslant (n+1)!$ 342) Сходится при $\alpha > 1$, расходится при $0 < \alpha \leqslant 1$. 343) Сходится. 344) Сходится при $0 < a < 1$, расходится при $a \geqslant 1$. 345) Сходится при $a > e$, расходится при $a \leqslant e$. См. указание к задаче N 315. 346) а) Сходится при $\alpha > 2$, расходится при $0 < \alpha \leqslant 2$. См. указание к задаче N 45. б) Сходится при $\alpha > 1$, расходится при $0 < \alpha \leqslant 1$. См. указание к задаче N 315. 347) Сходится при $|a| \leqslant 1$, расходится при $|a| > 1$. 348) Сходится. Указание. Применить признак Даламбера. 349) Сходится. Указание. Применить признак Гаусса. 350) Сходится. Указание. Методом математической индукции доказать, что справедлива оценка $\frac{1}{n^2} \leqslant a_n \leqslant \frac{2}{n^2}$.

351) Сходится. Указание. Доказать методом математической индукции справедливость неравенства $0 \leqslant \dfrac{1}{a_n} < n^2$. 352) Сходится. Указание. Доказать методом математической индукции справедливость неравенства $0 \leqslant \dfrac{1}{a_n} < n^2$. 353) Сходится. Указание. Найти такие постоянные C и q, что $a_n = Cq^n$. 354) Расходится. Указание. Показать, что условия: S_n ограничена и $a_n \to 0$ не могут выполняться одновременно. 355) $\dfrac{2}{9}$. Указание. Представить члены ряда a_n в виде $a_n = \dfrac{(-1)^n \cdot n}{2^{n-1}} + \dfrac{(-1)^n}{2^n}$ и воспользоваться методом решения примера 5 на стр. 8. 356) $\dfrac{10}{7}$. Указание. Представить S_{3n} в виде $S_{3n} = \sum\limits_{k=0}^{3n} \dfrac{1}{2^k} - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{8^k}$. 357) $\ln 2$. Указание. Представить S_{2n} в виде $S_{2n} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. 358) $\dfrac{1}{2}\ln 2$. Указание. Представить S_{3n} в виде $S_{3n} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. 359) $\dfrac{1}{2}\ln 6$. Указание. Представить S_{5n} в виде $S_{5n} = \sum\limits_{k=1}^{6n} \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{3n} \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k}$. 360) $1 + \dfrac{1}{2}\ln 2$. Указание. Представить S_{3n} в виде $S_{3n} = 1 - \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} + \sum\limits_{k=1}^{4n+4} \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{2n+2} \dfrac{1}{k}$. 361) $\dfrac{3}{2}\ln 2$. Указание. Представить S_{3n} в виде $S_{3n} = \sum\limits_{k=1}^{4n} \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. 362) 0. Указание. Представить S_{5n} в виде $S_{5n} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{4n} \dfrac{1}{k}$. 369) Сходится

условно для всех $\alpha \neq 0$. Указание. Представить выражение $\sin \pi\sqrt{n^2+\alpha}$ в виде $(-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+\alpha} - \pi n)$. 376) Сходится условно. 377) Расходится. 378) Сходится абсолютно. 379) Сходится условно. 380) Сходится условно. 381) Расходится. 382) Сходится условно. 383) При $p > 2$ сходится абсолютно, при $0 < p \leqslant 2$ сходится условно, при $p \leqslant 0$ расходится. 384) Расходится. 385) Сходится абсолютно. 386) Сходится абсолютно. 387) Сходится абсолютно при $|a| > 1$, сходится условно при $|a| = 1$, расходится при $|a| < 1$. 388) Сходится условно. 389) Сходится абсолютно. 390) Сходится условно. 391) Сходится условно. 392) Сходится абсолютно. 393) Сходится абсолютно. 394) Сходится условно. 395) Сходится абсолютно. 396) Сходится условно. 397) Сходится абсолютно. 398) Сходится условно. 399) Сходится абсолютно. 400) Сходится условно. 401) При $\alpha > 1$ сходится абсолютно, при $\alpha = 1$, $\beta > 1$ сходится абсолютно, при $\alpha = 1$, $\beta \leqslant 1$ сходится условно, при $0 < \alpha < 1$ сходится условно, при $\alpha = 0$, $\beta > 0$ сходится условно, при $\alpha = 0$, $\beta \leqslant 0$ расходится, при $\alpha < 0$ расходится. 402) При $p > 1$ и любом q сходится абсолютно, при $p = 1$, $q > 1$ сходится абсолютно, при $p = 1$, $q \leqslant 1$ сходится условно, при $0 < p < 1$ и любом q сходится условно, при $p \leqslant 0$ и любом q расходится. 403) Сходится абсолютно. 404) Сходится абсолютно. 405) Сходится абсолютно. 406) Сходится абсолютно. 407) Расходится. 408) Сходится абсолютно. 409) Сходится абсолютно при $p > 1$, сходится условно при $p \leqslant 1$. 410) Сходится абсолютно. 411) Сходится абсолютно. 412) Расходится. 413) Сходится абсолютно. 414) Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \leqslant 1$. 415) Сходится условно. 416) Сходится абсолютно. 417) Расходится. 418) Сходится условно. 419) Сходится абсолютно. 420) Сходится абсолютно при $q > 0$, сходится условно при $-1 < q \leqslant 0$, расходится при $q \leqslant -1$. 421) Сходится условно. 422) Расходится. 423) Сходится условно. 424) Сходится абсолютно. 425) Сходится абсолютно. 426) Сходится условно. 427) Сходится условно. 428) Сходится условно. 429) Сходится условно. Указание. Сравнить с примером 45 на стр. 47–50 430) Расходится. Указание. Рассмотреть a_{k^2+k}. 431) При

$\alpha > 1$ сходится абсолютно, при $0 < \alpha \leqslant 1$ сходится условно, при $\alpha \leqslant 0$ расходится. 432) Сходится условно. **433) Сходится условно. 434) Сходится условно. 435) Сходится условно.** 436) Сходится абсолютно. 437) Расходится. 438) При $q > 1$ сходится абсолютно, при $0 < q \leqslant 1$ сходится условно, при $q \leqslant 0$ расходится. 439) Расходится. 440) Сходится условно. 441) Сходится условно. 442) Расходится. 443) Сходится условно. 444) Сходится условно. 445) Сходится абсолютно при $\alpha > \frac{1}{2}$, сходится условно при $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, расходится при $\alpha \leqslant 0$. 446) Сходится абсолютно при $q > 1$, сходится условно при $q \leqslant 1$. 447) При $\alpha > 1$ сходится абсолютно, при $\alpha \leqslant 1$ сходится условно. 448) При $\alpha > 1$ сходится абсолютно, при $\alpha \leqslant 1$ сходится условно. 449) При $\alpha > 1$ сходится абсолютно, при $0 < \alpha \leqslant 1$ сходится условно. 450) При $\alpha > 1$ сходится абсолютно, при $0 < \alpha \leqslant 1$ сходится условно. 451) Расходится. 452) Сходится условно. 453) При $q > 2$ сходится абсолютно, при $q \leqslant 2$ сходится условно. 454) При $\beta > 1$ и любом α и при $\beta = 1$ и $\alpha < -1$ сходится абсолютно, при $\beta = 1$ и $\alpha \geqslant -1$ сходится условно, при $0 < \beta < 1$ и любом α сходится условно, при $\beta = 0$, $\alpha < 0$ сходится условно, при $\beta > 0$ и $\alpha \geqslant 0$ расходится, при $\beta < 0$ и любом α расходится. 455) Сходится условно. 456) Сходится абсолютно. 457) Сходится абсолютно при $p > 1$, сходится условно при $0 < p \leqslant 1$, расходится при $p \leqslant 0$. 458) Сходится условно. 459) Сходится условно. 460) Сходится условно. 461) Сходится условно. 462) Сходится абсолютно. 463) Сходится абсолютно. 464) Сходится условно. 465) Сходится условно. 466) Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$, расходится при $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Указание. $\frac{1}{3n^\alpha + \sin n} = \frac{1}{3n^\alpha} - \frac{\sin n}{3n^\alpha(3n^\alpha + \sin n)}$. 467) При $q > 2$ сходится абсолютно, при $0 < q \leqslant 2$ сходится условно. 468) Расходится. 469) Сходится условно. 470) Сходится условно. 471) Сходится условно. 472) Сходится условно. 473) Сходится условно. 474) Сходится условно. 475) Сходится абсолютно при $q > 1$, сходится условно при $\frac{1}{2} < q \leqslant 1$, расходится при $0 < q \leqslant \frac{1}{2}$. 476) Сходится абсолютно при $q > 1$, сходится условно при $\frac{1}{2} < q \leqslant 1$, расходится при $0 < q \leqslant \frac{1}{2}$. 477) Сходится абсолютно при $p > 1$, сходится условно при $0 < p \leqslant 1$, расходится при $p \leqslant 0$. 478) Сходится абсолютно при $p > \frac{1}{q}$, сходится условно при $\max\left(\frac{1}{q} - 1, 0\right) < p \leqslant \frac{1}{q}$, расходится при $p \leqslant \max\left(\frac{1}{q} - 1, 0\right)$. 479) Сходится условно. 480) Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \leqslant 1$. 481) Сходится абсолютно при $p > 1$, сходится условно при $1/2 < p \leqslant 1$. 482) Сходится условно. 483) Сходится условно. 484) Сходится условно. 485) Сходится абсолютно. 486) Сходится абсолютно при $q > 1$, сходится условно при $\frac{2}{3} < q \leqslant 1$, расходится при $q \leqslant \frac{2}{3}$. 487) Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $0 < \alpha \leqslant 1$, расходится при $\alpha < 0$. 488) Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $0 < \alpha \leqslant 1$, расходится при $\alpha \leqslant 0$. 489) Сходится абсолютно. 490) Сходится абсолютно при $q > \frac{1}{2}$, сходится условно при $q \leqslant \frac{1}{2}$. 491) Сходится абсолютно при $q > 2$, сходится условно при $\frac{2}{3} < q \leqslant 2$, расходится при $q \leqslant \frac{2}{3}$. 492) Сходится условно. 493) Сходится абсолютно при всех $q > 0$. 494) Сходится условно. 495) Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $0 < \alpha \leqslant 1$, расходится при $\alpha \leqslant 0$. 496) Сходится абсолютно. 497) Сходится абсолютно при $p > \frac{1}{2}$, сходится условно при $0 < p \leqslant \frac{1}{2}$. 498) Расходится. 499) Сходится условно при $\alpha \neq \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$, расходится при $\alpha = \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. 500) Сходится абсолютно. 501) Сходится абсолютно. 502) Сходится условно. 503) Сходится условно при любом k. 504) Сходится условно. Указание. $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos k = \frac{\sin\frac{n+1}{2} - \sin\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}$. 505) Сходится условно. Указание. Показать, что последовательность $A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ монотонна. 506) Сходится условно. См. указание к задаче N 505. 507) Сходится абсолютно при $\beta > \alpha+1$, сходится условно при $\alpha < \beta \leqslant \alpha+1$, расходится при $\beta \leqslant \alpha$. 508) Сходится. 509) Расходится. 510) Расходится. 511) Расходится. 512) Сходится абсолютно. 513) Расходится. 514) Расходится. 515) Расходится. 516) Сходится абсолютно. 517) Расходится. 518) Сходится условно. 519) Сходится абсолютно при $p > 1$, расходится при $p < 1$. 520) Сходится абсолютно при $p > 1$, сходится условно при $p = 1$, расходится при $p < 1$. 521) Сходится абсолютно при $p > 1$, $q > 1$, сходится условно при $0 < p = q \leqslant 1$, при остальных значениях параметров расходится. 522) Сходится абсолютно при $p > 1$, $q > 1$, сходится условно при $0 < p = q \leqslant 1$, при остальных значениях параметров расходится. 523) Сходится абсолютно. 524) Сходится условно. 525) Сходится абсолютно. 526) Сходится условно при $a \neq 2\pi k + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, расходится при $a = 2\pi k + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 527) Сходится абсолютно. 528 а) Сходится условно при $\alpha > 0$. 528 б) Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \leqslant 1$. 529 а) Сходится условно при $\alpha \neq 0$. 529 б) Сходится условно при $\alpha \neq 0$, сходится абсолютно при $\alpha = 0$. Указание. Сравнить с примером 45 на стр. 47–50 (см. также задачу 42 на стр. 321). 530) Сходится условно. 531) Сходится абсолютно. 532) Расходится. 533) Сходится условно. 534) Сходится абсолютно. 535) Расходится. 536) Сходится абсолютно при $q > 1$, сходится условно при $0 < q \leqslant 1$, расходится при $q \leqslant 0$. 537) Сходится абсолютно при $q \geqslant 0$, сходится условно при $-1 < q < 0$, расходится при $q \leqslant -1$. Указание. Применить формулу интегрирования по частям к интегралу $\int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi} \frac{\cos x}{x^q}\, dx$ и использовать результат задачи 536. 538) Сходится условно. Указание. Показать, что $\int\limits_0^1 (1-x^2)^{n^2}\, dx$ монотонно стремится к нулю при $n \to \infty$ и проверить справедливость оценок $\int\limits_0^1 (1-x^2)^{n^2}\,dx \geqslant \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \geqslant \frac{1}{2en}$, $n \geqslant N_0$. 539) Сходится условно. Указание. Проверить справедливость оценки $\int\limits_0^{\frac{\sin n}{n}} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\sin n}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$, $n \to +\infty$. 540) Сходится абсолютно. 541) Сходится условно. 542) Сходится условно. 543) Расходится. 544) Сходится условно. 545) Сходится абсолютно. 546) Сходится абсолютно. 547) Расходится. 548) Сходится абсолютно. 549) Сходится абсолютно. 550) Сходится абсолютно. 551) Сходится условно. 552) Сходится условно. 553) Расходится к нулю. 554) $\frac{1}{2}$. 555) 2. 556) 2. 557) $\frac{1}{1-x}$ при $|x| < 1$, расходится при $|x| \geqslant 1$. 558) Расходится. 559) Расходится к нулю. 560) $e^{C_э}$, $C_э$ — константа Эйлера. 561) $\frac{\sin x}{x}$. 562) $\frac{\operatorname{sh} x}{x}$. 563) $\frac{1}{3}$. 564) Расходится к нулю. 565) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. 566) $\frac{\pi}{4}$. Указание. Воспользоваться формулой Валлиса. 567) $\frac{1}{4}$. 568) 2. 569) Расходится к нулю. 570) $\frac{3}{7}$. 571) Расходится к нулю. Указание. $0 < P_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. Умножить P_n на $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$. 572) Расходится к нулю. 573) $a^{-\ln 2}$. 574) 2. Указание. Проверить, что $a_n = 2(n!)$ и $P_n = \frac{a_n+1}{a_1 \cdot n!}$. 575) Расходится к нулю. 576) Расходится к нулю. 577) Сходится. 578) Сходится. 579) Сходится. 580) Расходится. 581) Сходится. 582) Сходится. 583) Расходится. 584) Сходится. 585) Сходится. 586) Сходится при $\alpha > \frac{1}{2}$, расходится при $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$. 587) Сходится при $\alpha > 1$, расходится к нулю при $0 < \alpha \leqslant 1$. 588) Сходится при $\alpha > 1$, расходится при $0 < \alpha \leqslant 1$. 589) Сходится. 590) Сходится. 591) Сходится при $\alpha > 1$, расходится при $0 < \alpha \leqslant 1$. 592) Расходится к нулю при $0 < \alpha \leqslant 2$. 593) Сходится.

594) Сходится. 595) Сходится при $|a| < 2$, расходится при $|a| \geqslant 2$. 596) Сходится. 597) Расходится. 598) Сходится при $|a| > e$. 599) Сходится. 600) Сходится. 601) Сходится. 602) Сходится при $p > \frac{1}{2}$, расходится к нулю при $0 > p \leqslant \frac{1}{2}$. 603) Расходится к нулю. 604) Сходится условно. 605) Сходится абсолютно при $p > 1$, сходится условно при $\frac{1}{2} < p \leqslant 1$. 606) Расходится. 607) Расходится. 608) Расходится. 609) Сходится условно. 610) Сходится абсолютно при $|x| < 1$, расходится при $|x| \geqslant 1$. 611) Сходится абсолютно при $|x| < 2$, расходится при $|x| \geqslant 2$. 612) Сходится условно. 613) Сходится абсолютно при $x > 1$, сходится условно при $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$. 614) Сходится условно. 615) Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\frac{1}{3} < \alpha \leqslant 1$. 616) Расходится. 617) Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$. 618) Указание. $\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2\sin x}$.

620) $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ 1, & |x| > 1. \end{cases}$ 621) $f(x) = x$, $x \geqslant 0$.

622) $f(x) \equiv 0$. 623) $f(x) = |x|$.

624) $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ x^2, & |x| > 1. \end{cases}$ 625) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant |x| < 1, \\ 1, & x = 1, \\ x^2, & |x| > 1. \end{cases}$

626) $f(x) = \cos \dfrac{\pi x}{4}$. 627) $f(x) \equiv 0$.

628) $f(x) \equiv 1$. 629) $f(x) = \sin \pi x$.

630) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{4}{\pi x}}, & x > 0, \\ -e^{\frac{4}{\pi x}}, & x < 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

631) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ рациональное}, \\ 0, & x \text{ иррациональное}. \end{cases}$

632) $f(x)=0,\ x\neq 0.$ 633) $f(x)\equiv 0.$

634) $f(x)=\begin{cases} 0, & x \text{ рациональное},\\ x, & x \text{ иррациональное}.\end{cases}$

635) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}, & 0\leqslant x<1 \text{ и } 4k-1<x<4k+1,\\ x, & 4k-3<x<4k-2 \text{ и}\\ & 4k-2<x<4k-1,\\ \dfrac{1}{2}(\sqrt{x}+x), & x=2k-1,\\ & k=1,2,\ldots. \end{cases}$

636) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

637) $f(x)=\begin{cases} 0, & -1<x\leqslant 1,\\ \dfrac{\pi}{2}(x-1), & x>1.\end{cases}$

638) $f(x)=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{1+4x}).$ 639) $f(x)=0.$

640) а) Сходится равномерно. б) Сходится неравномерно. 641) а) Сходится равномерно. б) Расходится. 642) Сходится равномерно. 643) а) Сходится равномерно. б) Сходится неравномерно. 644) а) Сходится равномерно. б) Сходится неравномерно. 645) а) Сходится неравномерно. б) Расходится. 646) а) Сходится неравномерно. б) Сходится равномерно. 647) При $\alpha\leqslant 2$ расходится всюду кроме $x=0$, при $\alpha>2$ сходится равномерно. 648) Сходится равномерно. 649) Сходится неравномерно. 650) а) Сходится равномерно. б) Сходится равномерно. 651) а) Сходится равномерно. б) Сходится неравномерно. 652) Сходится неравномерно. 653) Сходится равномерно. 654) Сходится неравномерно. 655) Сходится равномерно. 656) а) Сходится равномерно. б) Сходится равномерно. 657) а) Сходится равномерно. б) Сходится неравномерно. 658) а) Сходится неравномерно. б) Сходится равномерно. 659) а) Сходится равномерно. б) Сходится неравномерно. 660) Сходится равномерно. 661) а) Сходится неравномерно. б) Сходится равномерно. 662) Сходится неравномерно. 663) Сходится неравномерно. 664) Сходится

неравномерно. 665) Сходится неравномерно. 666) Сходится неравномерно. 667) а) Сходится неравномерно. б) Сходится равномерно. 668) а) Сходится неравномерно. б) Сходится равномерно. 669) а) Сходится равномерно. б) Сходится равномерно. в) Сходится неравномерно. 670) Сходится неравномерно. 671) Сходится неравномерно. 672) Сходится неравномерно. 673) Сходится неравномерно. 674) а) Сходится неравномерно. б) Сходится равномерно. 675) Сходится равномерно. 676) а) Сходится неравномерно. б) Сходится неравномерно. в) Сходится равномерно. 677) Сходится неравномерно. 678) Сходится неравномерно. 679) Сходится равномерно. 680) а) Сходится равномерно. б) Сходится неравномерно. 681) Сходится равномерно. 682) Сходится равномерно. 683) Сходится неравномерно. 684) а) Сходится равномерно. б) Сходится неравномерно. 685) а) Сходится неравномерно. б) Сходится равномерно. 686) Сходится неравномерно. 687) а) Сходится равномерно. б) Сходится равномерно. 688) а) Сходится неравномерно. б) Сходится равномерно. 689) а) Сходится равномерно. б) Сходится неравномерно. 690) Сходится равномерно. 691) а) Сходится равномерно. б) Сходится неравномерно. 692) а) Сходится равномерно. б) Сходится неравномерно. 693) а) Сходится неравномерно. б) Сходится равномерно. 694) а) Сходится равномерно. б) Сходится неравномерно. 695) а) Сходится неравномерно. б) Сходится равномерно. 696) а) Сходится равномерно. б) Сходится неравномерно. 697) а) Сходится равномерно. б) Сходится неравномерно. 698) а) Сходится неравномерно. б) Сходится равномерно. 699) а) Сходится неравномерно. б) Сходится равномерно. 700) Сходится равномерно. 701) Сходится равномерно. 702) Сходится неравномерно. 703) Сходится равномерно. 704) Сходится равномерно. 705) Сходится равномерно. 706) а) Сходится неравномерно. б) Сходится равномерно. 707) а) Сходится неравномерно. б) Сходится равномерно. 708) а) Сходится неравномерно. б) Сходится равномерно. 709) а) Сходится неравномерно. б) Сходится равномерно. 710) а) Сходится равномерно. б) Сходится неравномерно. 711) Сходится неравномерно. 712) а) Сходится неравномерно. б) Сходится равномерно. 713) а) Сходится равномерно. б) Сходится неравномерно. 714) а) Сходится равномерно. б) Сходится неравномерно. 715) Сходится равномерно. 716) Сходится равномерно. 717) Сходится равномерно. 718) а) Сходится равномерно. б) Сходится неравномерно. 719) а) Сходится равномерно. б) Сходится неравномерно. 720) а) Сходится равномерно. б) Сходится неравномерно. 721) а) Сходится неравномерно. б) Сходится равномерно. в) Сходится неравномерно. 722) Сходится неравномерно. а) Да. б) Нет. в) Да. 723) Сходится равномерно. а) Нет. б) Нет. 724) Сходится равномерно; да. 725) Сходится равномерно; а) и б), если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то "да", в противном случае "нет". Указание. $nf(x)-1 \leqslant [nf(x)] \leqslant nf(x)$. 726) Сходится неравномерно; да. 727) Сходится неравномерно. а) Да. б) Да. 728) Сходится равномерно. а) Да. б) Да. в) Да. 729) Сходится неравномерно; да. 730) Сходится неравномерно; да 731) Для $\alpha \geqslant 1$ сходится неравномерно и равенства нет; для $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$ сходится неравномерно, равенство есть; для $\alpha < -1$ сходится равномерно и равенство есть. 732) Сходится неравномерно; да. 733) Сходится неравномерно; нет. 734) Для $\alpha > 1$ сходится равномерно и равенство есть; для $0 < \alpha \leqslant 1$ сходится неравномерно, равенство есть. 735) Сходится неравномерно; да. 736) Сходится неравномерно; нет. 737) Сходится неравномерно; нет. 738) Сходится неравномерно; да. 739) Сходится неравномерно; нет. 740) Сходится неравномерно; да. 741) 1) Сходится равномерно. 2) Нет. 742) 1) Сходится равномерно. 2) Нет. 743) 1) Сходится равномерно. 2) Справедливо всюду, кроме нуля. 744) 1) Сходится равномерно. 2) Справедливо всюду, кроме нуля. 745) 1) Сходится неравномерно. 2) а) Нет. б) Да. 746) Сходится абсолютно при $x = 0$. 747) Сходится абсолютно при $2\pi k < x < (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 748) Сходится абсолютно при $x > e$ и $0 < x < \frac{1}{e}$. 749) Сходится абсолютно при $\pi k - \arcsin\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \pi k + \arcsin\frac{1}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. 750) Сходится абсолютно при $\frac{\pi}{3} + \pi k \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 751) Сходится абсолютно при $x \geqslant 0$ и $x \leqslant -2$. 752) Сходится абсолютно при $-\frac{\pi}{4}+\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 753) Сходится абсолютно при $x \neq -k$, $k \in \mathbb{N}$. 754) Сходится абсолютно при $x > 1$, сходится условно при $\frac{2}{3} < x \leqslant 1$. 755) Расходится при всех $x \neq 3$. 756) Сходится абсолютно при $2\pi k < x < (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 757) Сходится абсолютно при $|x| > 1$. 758) Сходится абсолютно при $x \neq -2^n$, $n \in \mathbb{N}$. 759) Сходится абсолютно при $|x| < \infty$. 760) Сходится условно при $|x| < \infty$. 761) Сходится абсолютно при $|x| \leqslant 1/2$. 762) Сходится условно при $|x| < \infty$. 763) Сходится абсолютно при $x \neq 0$. 764) Сходится абсолютно при $|x| < \infty$. 765) Сходится абсолютно при $x > 1$. 766) Сходится условно при $0 < x \leqslant 1$, сходится абсолютно при $x > 1$. 767) Сходится условно при $-\pi/2+2\pi k < x < \pi/2+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 768) Сходится условно при $\pi k < x < \pi k + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. 769) Сходится абсолютно при $|x| < \infty$. 770) Сходится абсолютно при $|x| < \infty$. 771) Сходится абсолютно при $|x| < \infty$. 772) Сходится абсолютно при $|x| < \infty$. 773) Сходится абсолютно при $x > 2$. 774) Сходится абсолютно при $x \geqslant 0$. 775) Сходится абсолютно при $x \neq 0$. 776) Сходится абсолютно при $|x| > 1$. 777) Сходится абсолютно при $|x| \leqslant 1/2$. 778) Сходится абсолютно при $|x| < \infty$. 779) Сходится абсолютно при $x < 0$. 780) Сходится абсолютно при $|x| < \infty$. 781) Сходится абсолютно при $x \neq 0$. 782) Сходится условно при $x \neq -k$, $k \in \mathbb{N}$. 783) Сходится условно при $|x| < \infty$. 784) Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, расходится при $0 < \alpha \leqslant 1$. 785) Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, расходится при $0 < \alpha \leqslant 1$. 786) Сходится абсолютно при $1 < |x| < \pi/2$ и $\pi k < |x| < \pi k + \pi/2$, $k \in \mathbb{N}$. 787) Сходится абсолютно при $x > 1$. 788) Сходится условно при $|x| \leqslant 1$. 789) Сходится абсолютно при $x \geqslant 0$. 790) Сходится абсолютно при $|x| < 1$. 791) Сходится абсолютно при $|x| \neq 1$, сходится условно при $x = -1$. 792) Сходится абсолютно при $|x| < \infty$. 793) Сходится абсолютно при $x \leqslant -1$, $x = 0$. 794) Сходится абсолютно при $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, сходится условно при $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 795) Сходится абсолютно при $|x| \leqslant 1$. 796) Сходится абсолютно при $|x| < \infty$. 797) Сходится абсолютно при $|x| < 1$. 798) Сходится абсолютно при $x \in \mathbb{Z}$. 799) Сходится абсолютно при

$|x| < 3$. 800) Сходится абсолютно при $x \neq 0$. 801) Сходится абсолютно при $x > 0$. 802) Сходится абсолютно при $|x| < \infty$, $x \neq -1$. 803) Сходится абсолютно при $x > 1$. 804) Сходится абсолютно при $|x| \neq 1$. 805) Сходится абсолютно при $x > 1$. 806) Сходится абсолютно при $x > 0$. 807) Сходится абсолютно при $|x| < \infty$. 808) Сходится абсолютно при $x \geqslant 1$ и $x \neq \pi/2 - \pi k$, $k \in \mathbb{N}$. 809) Сходится абсолютно при $-\pi/4+\pi k \leqslant x \leqslant \pi/4+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 810) Сходится абсолютно при $x > 1$ и $-1 < x < 0$, сходится условно при $|x| = 1$. 811) Сходится условно при $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 812) Сходится абсолютно при $|x| < \infty$. 813) Сходится абсолютно при $x \neq -\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. 814) Сходится абсолютно при $x < -1$. 815) Если $p < q - 1$, то сходится абсолютно при $|x| < \infty$, если $q - 1 \leqslant p < q$, то сходится условно при $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и абсолютно при $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, если $p \geqslant q$, то сходится абсолютно при $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 816) Сходится условно при $|x| \leqslant 1$. 817) Сходится условно при $|x| \leqslant 1$. 818) Сходится абсолютно при $|x| < \infty$. 819) Сходится абсолютно при $x > 1$ и $x = 0$. 820) Сходится абсолютно при $x > 1$, сходится условно при $x \leqslant 1$ и $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 821) Сходится абсолютно при $|x| < \infty$. 822) Сходится абсолютно при $\frac{1}{e} < x < e$, сходится условно при $x = \frac{1}{e}$. 823) Сходится условно при $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 824) Сходится абсолютно при $|x| \leqslant \operatorname{tg} 1$. 825) Сходится абсолютно для x таких, что $x^2 < e^x$. 826) Расходится при любом x. 827) Расходится при любом x. 828) Сходится абсолютно при $|x| < 1$. 829) Сходится абсолютно при $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, сходится условно при $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 830) Сходится абсолютно при $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, сходится условно при $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 831) Сходится абсолютно при $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, сходится условно при $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 832) Сходится абсолютно при $|x| > \frac{1}{e}$. 833) Сходится абсолютно при $|x| < 1$. 834) Сходится условно при $x \geqslant 0$. 835) Сходится абсолютно при $x = 0$, сходится условно при $x \neq 0$. 836) Сходится абсолютно при $x > 1$, сходится условно при $0 < x \leqslant 1$. Указание. Для $0 < x \leqslant 1$ показать, что $|a_n| = O(n^{-x^2})$, $n \to \infty$, рассмотрев $\ln |a_n|$. 837) Сходится абсолютно при $x \neq \pi k + \frac{\pi}{2}$,

$k \in \mathbb{Z}$. 838) Сходится абсолютно при $|x| < 1$, сходится условно при $x = 1$. 839) Сходится абсолютно при $-4 < x < 2$, сходится условно при $x = 2$ и $x = -4$. 840) Сходится условно при $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, сходится абсолютно при $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 841) Сходится условно при всех x. 842) Сходится условно при $x \neq \pi(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. 843) Сходится абсолютно при $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, сходится условно при $x \neq \frac{8\pi k}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$. 844) Сходится условно при $x \neq \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. 845) Сходится условно при $x \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 846) Сходится абсолютно при $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, сходится условно при $x \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. 847) Сходится абсолютно при $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, сходится условно при $x \neq \frac{\pi k}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$. 848) Сходится абсолютно при $x > 1$, сходится условно при $0 < x \leqslant 1$. 849) Сходится абсолютно при $x > 1$, сходится условно при $0 < x \leqslant 1$. 850) Сходится абсолютно при $x > 3$, сходится условно при $0 < x \leqslant 3$, $x \neq \frac{2\pi}{3}$. 851) Сходится абсолютно при $x > 4$, сходится условно при $1 \leqslant x < 2$, $3 \leqslant x < 4$. 852) Сходится абсолютно при $|x| < e$. 853) Сходится абсолютно, если существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $|x - \pi k| < \frac{\pi}{4}$. 854) Сходится абсолютно при $x = \pi k$, $k \in \mathbb{N}$, или $x + y > 1$, сходится условно при $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и $0 < x + y \leqslant 1$. 855) Равномерно. 856) Равномерно. 857) Равномерно. 858) Равномерно. 859) Равномерно. 860) Равномерно. 861) Равномерно. 862) Неравномерно. 863) Равномерно. 864) Равномерно. 865) Равномерно. 866) а) Равномерно. б) Неравномерно. 867) Равномерно. 868) Равномерно. 869) Неравномерно. 870) Равномерно. 871) Равномерно. 872) Равномерно. 873) а) Неравномерно. б) Равномерно. 874) а) Неравномерно. б) Равномерно. 875) а) Неравномерно. б) Равномерно. Указание. См. пример 17 на стр. 89. 876) Равномерно. 877) Неравномерно. 878) Неравномерно. 879) Неравномерно. 880) Равномерно. 881) Неравномерно. 882) Равномерно. 883) Равномерно. 884) Равномерно. 885) Равномерно. 886) а) Равномерно. б) Неравномерно.

887) Равномерно. 888) Неравномерно. Указание. Рассмотреть $\sum\limits_{n=k}^{2k} \frac{\sin nx}{n}\varphi(n, x_k)$, где $x_k = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$. 889) Неравномерно. 890) Равномерно. 891) Равномерно. 892) Равномерно. 893) Равномерно. 894) Равномерно. 895) а) Неравномерно. б) Равномерно. 896) Равномерно. 897) Равномерно. 898) Равномерно. 899) Равномерно. 900) Равномерно. 901) Равномерно. 902) Равномерно. 903) Равномерно. 904) Равномерно. 905) Равномерно. 906) Равномерно. 907) Равномерно. 908) Равномерно. Указание. Рассмотреть $\sum\limits_{n=k}^{2k} x_k^2 e^{-\sqrt{n}x_k}$, где $x_k = \frac{1}{\sqrt{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$. 909) а) Равномерно. б) Неравномерно. 910) Неравномерно. 911) Равномерно. 912) Равномерно. 913) Неравномерно. Указание. Проверить, что $a_n \to 0$, $n \to \infty$, неравномерно. 914) Неравномерно. Указание. Проверить, что $a_n \to 0$, $n \to \infty$, неравномерно. 915) Неравномерно. Указание. Проверить, что $a_n \to 0$, $n \to \infty$, неравномерно. 916) Неравномерно. 917) Неравномерно. 918) а) Неравномерно. б) Равномерно. 919) $E = [0; \infty)$, разрыв в нуле. 920) $E = \mathbb{R}$, непрерывна. 921) $E = [0; +\infty)$, непрерывна. 922) $E = (1; +\infty)$, непрерывна. 923) $E = [-1; +1]$, непрерывна. 924) $E = (-1/3; 1/3)$, непрерывна. 925) $E = \mathbb{R}$, непрерывна. 926) $E = \mathbb{R}$, непрерывна. 927) $E = \mathbb{R}$, разрыв в нуле. 928) $E = \mathbb{R} \setminus \{2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$, непрерывна. 929) $E = \mathbb{R}$, непрерывна. 930) $E = \mathbb{R}$ при $\alpha > 1$, $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ при $0 < \alpha \leqslant 1$; непрерывна. 931) $E = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \cup \{1\}$, непрерывна. 932) $E = (-1; +1)$, непрерывна. 933) $E = [-1; +1]$, непрерывна. 934) $E = (0; +\infty)$, непрерывна. 935) $E = \mathbb{R}$, непрерывна. 936) $E = \left[\frac{1}{e}; e\right)$, непрерывна. 937) $E = \{x \neq -n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, непрерывна. 938) $E = \mathbb{R}$, непрерывна. 939) $E = \mathbb{R}$, непрерывна. 940) $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, непрерывна. 941) $E = \mathbb{R}$, непрерывна. 942) $E = [1; 3]$, непрерывна. 943) $E = (-\infty; \log_3 2) \cup \{1\}$, непрерывна. 944) $E = (0; +\infty)$, непрерывна. 945) $E = \mathbb{R}$, разрыв в нуле. Указание. Рассмотреть $f\left(\pm\frac{1}{n}\right)$. Использо-

вать неравенство $1 + kx^2 \leqslant 1 + \frac{1}{n}$. Доказать, что $|f(x)| > \frac{1}{e}$. 946) $E = [0; +\infty)$, непрерывна. 947) $E = [0; +\infty)$, разрыв в нуле. Указание. Вычислить $f(x)$, перейдя к комплексным переменным. 948) $E = (0; +\infty)$, непрерывна. 949) $E = [-1; 1)$, дифференцируема на $(-1; 1)$. 950) $E = [-1; 1)$, дифференцируема на $(-1; 1)$. 951) $E = \mathbb{R}$, дифференцируема. 952) $E = \mathbb{R}$, дифференцируема. 953) $E = (-1; 1)$, дифференцируема при $x \neq 0$. 954) $E = \mathbb{R}$, дифференцируема. 955) $E = \mathbb{R}$, дифференцируема. 956) $E = \mathbb{R}$, $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, дифференцируема. 957) $E = [0; +\infty)$, дифференцируема. 958) $E = \mathbb{R}$, дифференцируема при $x \neq 0$. 959) $E = \mathbb{R}$, дифференцируема. 960) $E = \mathbb{R}$, дифференцируема. 961) $E = \mathbb{R}$, в нуле не дифференцируема. Указание. Рассмотреть $\frac{f(0) - f(x_n)}{x_n}$ при $x_n = \frac{1}{n^3}$.

962) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n!} \left(\sin 5n - \sin \frac{1}{5} n \right)$.

963) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^n} \cdot \frac{3^{n+1} - (-1)^{n+1}}{n+1}$.

964) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 9^n} \frac{(1 - (-2)^{2n+1})}{2n+1}$.

965) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} (\cos 2n - \cos 3n)$.

966) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2n(n+1)} = -\frac{1}{2}$.

967) $|x| < 1$. 968) $x = 0$. 969) $-1 \leqslant x < 1$.

970) $-1 \leqslant x \leqslant 1$. 971) $x = 0$. 972) $|x| < \infty$.

973) $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. 974) $-1 \leqslant x < 1$. 975) $|x| < 1$.

976) $|x| < \infty$. 977) $|x| < \infty$. 978) $|x| < 2$.

979) $|x| < \frac{1}{\sqrt{e}}$. 980) $-\frac{\sqrt{5}}{2} \leqslant x < \frac{\sqrt{5}}{2}$.

981) $|x| \leqslant 1$ при $a > 1$, $|x| < 1$ при $a \leqslant 1$.

982) $|x| < \frac{1}{e}$.

983) $|x| \leqslant \sqrt{3}$. 984) $|x| < 2$.

985) $-\sqrt[3]{5} < x \leqslant \sqrt[3]{5}$. 986) $-1 \leqslant x < 1$.

987) $|x| < 1$. 988) $|x+3| < 3/2$.

989) $0 \leqslant x < 2$. 990) $|x| < \infty$. 991) $-10 \leqslant x < 0$.

992) $|x| < \infty$. 993) $|x-1| < 3$. 994) $|x-1| \leqslant 4$.

995) $|x-2| < \sqrt{3}$. 996) $-1 \leqslant x < 0$. 997) $|x+1| < \sqrt[3]{2}$.

998) $|x+2| \leqslant \frac{1}{16}$. 999) $|x+1| < \frac{1}{6}$. 1000) $|x+3| < \frac{1}{7}$.

1001) $-\frac{1}{4} \leqslant x < \frac{1}{4}$. 1002) $-\frac{1}{7} \leqslant x - 3 < \frac{1}{7}$.

1003) $1 \leqslant x \leqslant 3$.

1004) $x \leqslant -3,\ x > -1$. 1005) $x > -\frac{1}{4},\ x < -\frac{1}{2}$.

1006) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$.

1007) $|x| < \infty$. 1008) $x \geqslant 0$.

1009) $-\frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant x < \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

1010) $-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi k \leqslant x \leqslant \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

1011) $|x| \leqslant 1$. 1012) $|x| < 1$. 1013) $-\frac{11}{5} < x < -\frac{9}{5}$.

1014) $|x| < e$. 1015) $|x| < 1$. 1016) $|x| \leqslant 1$.

1017) $|z| < 1$. 1018) $z \in \mathbb{C}$. 1019) $|z| < \sqrt{2}$.

1020) $z \in \mathbb{C}$. 1021) $|z| < e$. 1022) $|z+1| < \frac{\sqrt{2}}{e}$.

1023) $|z| < \sqrt{5}$. 1024) $|z+2| < 2$. 1025) $|z-2| < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

1026) $|z-1|<1.$ 1027) $|z|<1.$ 1028) $|z-1|<\frac{\sqrt{2}}{3}.$

1029) $|z-i|<1.$ 1030) $|z|<1.$ 1031) $|z+i|<\sqrt[4]{10}.$

1032) $|z+4i|<1.$ 1033) $|z+1+i|<3.$ 1034) $|z-2i|<2.$

1035) $|z-1|<1.$ 1036) $|z+i|<\frac{3}{\sqrt{2}}.$

1037) $4+\ln 2\cdot(x-4)+\frac{1}{16}\ln 2(2\ln 2-1)(x-4)^2+$
$$+\frac{4\ln^3 2-6\ln^2 2+3\ln 2}{384}\cdot(x-4)^3+\cdots.$$

1038) $1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots.$

1039) $1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+\cdots.$

1040) $-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}+\cdots.$

1041) $\ln 3+\frac{1}{3\cdot 32}(x-16)-\frac{23}{9\cdot 2048}(x-16)^2+\cdots.$

1042) $-\sin 1+\frac{1}{3}\cos 1\cdot(x+1)+\left(\frac{\sin 1}{9}-\frac{2}{9}\cos 1\right)\frac{(x+1)^2}{2}+$
$$+\frac{\left(\frac{1}{3}\cos 1-\frac{2}{9}\sin 1\right)}{6}(x+1)^3+\cdots.$$

1043) $e^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{x+1}{2}+\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{(x+1)^2}{4}+\cdots\right).$

1044) $1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{5}{24}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4+\cdots.$

1045) $\frac{4}{\pi}-\frac{8}{\pi^2}(x-1)+\frac{4(\pi+4)}{\pi^3}(x-1)^2+\cdots.$

1046) $1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\cdots.$

1047) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n!}x^n,\ R=\infty.$

1048) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 5^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1},\ R=\infty.$

1049) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{6n}}{3^{2n}(2n)!}$, $R = \infty$.

1050) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}$, $R = \frac{1}{2}$.

1051) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3^n \cdot n}$, $R = \sqrt[3]{3}$.

1052) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$, $R = 1$.

1053) $1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n$, $R = 1$.

1054) $1 - \frac{4}{3}x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3n-4)}{3^n \cdot n!} x^n$, $R = 1$.

1055) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{2n} \cdot (2n)!}$, $R = \infty$.

1056) $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$.

1057) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$, $R = \frac{1}{2}$.

1058) $\frac{x}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)3^{2n+1}}$, $R = 1$.

1059) a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n \cdot n!}$, $R = \infty$;

б) $e^{-5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{(x-10)^n}{2^n}$, $R = \infty$.

1060) $2^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n 2}{n!} (x-a)^n$, $R = \infty$.

1061) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \cdot \left(\ln \frac{2}{3}\right)^n$, $R = \infty$.

1062) а) $\frac{1}{e}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2+n}{n!}\right)x^n,\ R=\infty.$

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3+n}{n!}\right)(x-1)^n,\ R=\infty.$

в) $\frac{1}{e^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^{n+1}}{n!},\ R=\infty.$

1063) $\sin a\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cos a\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ R=\infty.$

1064) $\cos a\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}-\sin a\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ R=\infty.$

1065) а) $\frac{3}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+3^{2n-1})}{(2n)!}x^{2n},\ R=\infty.$

б) $-\frac{3}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(3^{2n}-1)}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1},\ R=\infty.$

1066) $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(4x)^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!},\ R=\infty.$

1067) а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ R=\infty.$

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{2n+1}$

$-\sqrt{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{2n}}{(2n)!},\ R=\infty.$

1068) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n)!},\ R=\infty.$

1069) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n},\ R=1,$

б) $2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-e^2)^n}{e^{2n}\cdot n},\ R=e^2.$

1070) $\ln 6+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{3^n-2^n}{6^n}\right)(x-2)^n,\ R=2.$

1071) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{3n}}{n}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\ R=1.$

1072) $\frac{3}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9^n-1}{(2n+1)!}x^{2n+1},\ R=\infty.$

1073) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!},\ R=\infty.$

1074) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(4^{n+1}-3^{n+1})}{12^{n+1}}x^n,\ R=1.$

1075) а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2}\left(\frac{3^n-1}{3^n}\right)x^n,\ R=1.$

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3^{n+2}-7^{n+1})}{21^{n+1}}2^n\left(x-\frac{1}{2}\right)^n,\ R=\frac{3}{2}.$

1076) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x+2}{2}\right)^{2n+1}-\left(\frac{x+2}{2}\right)^{2n}\right],\ R=2.$

1077) а) $-2+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdots(3n-2)}{24^n}(x+8)^n,\ R=8.$

б) $5+5\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2\cdot 5\cdots(3n-2)}{15^n\cdot n!}(x-125)^n,\ R=125.$

1078) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}.$

1079) $\frac{\pi}{2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-1}}{2n-1}.$

1080) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{n(n+1)},\ R=1.$

1081) $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n,\ R=1.$

1082) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $R=1$.

1083) $\frac{\pi}{2}-x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $R=1$.

1084) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{2n+1}$, $R=1$.

1085) $2|x|\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n}}{2n+1}\right\}$, $|x|\leqslant 1$.

1086) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!(4n+2)}$, $R=\infty$.

1087) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$, $R=1$.

1088) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n^2}$, $R=1$. 1089) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{17n+1}}{17n+1}$, $R=1$.

1090) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n^2}$, $R=1$. 1091) $-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n\cdot(2n)!}$, $R=\infty$.

1092) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n x^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!}$, $R=\infty$.

1093) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!x^{4n+1}}{(2n)!!(2n+1)(4n+1)}$, $R=1$.

1094) $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$, $R=1$. 1095) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n}$, $R=1$.

1096) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(4\cdot 7\cdots(3n-2))}{3^n\cdot n!}x^{3n}$, $R=1$.

1097) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$, $R=1$.

1098) а) $\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $R=\infty$; б) $e^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n!}$, $R=\infty$.

1099) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n-2(-1)^n}{n!}x^n$, $R=\infty$.

1100) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n+1}$, $R=\infty$.

1101) $32\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 8)^n}{n!}(x+1)^n$, $R=\infty$.

1102) $2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2+1)^n}{n!}(x-1)^n$, $R=\infty$.

1103) а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$, $R=\infty$.

б) $$\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{2n}}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}-$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}, \quad R=\infty.$$

1104) а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}\cdot(2n)!}$, $R=\infty$.

б) $$\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+\pi/3)^{2n}}{(2n)!2^{2n+1}}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!2^{2n+1}}(x+\pi/3)^{2n+1}, \quad R=\infty.$$

1105) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+4\cdot(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$, $R=\infty$.

1106) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2x)^{2n}}{2(2n)!}$, $R=\infty$.

б) $\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-\pi/4)^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot 2^{2n}$, $R=\infty$.

1107) а) $\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\cdot 2^{2n-1}$, $R=\infty$.

б) $\frac{1}{2}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{n-1}(x-\pi/2)^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$.

в) $\frac{1}{2}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n}(x-\pi/4)^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R=\infty$.

1108) $\frac{1}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n}}{(2n+1)!}(x-\pi/4)^{2n+1}+$

$+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{4n-3}}{(2n)!}(x-\pi/4)^{2n}$, $R=\infty$.

1109) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4(2n)!}(1+3^{2n+1})x^{2n+1}$, $R=\infty$.

1110) $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{(2n)!}+\frac{3^{2n}}{(2n)!}\right)x^{2n}$, $R=\infty$.

1111) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3\cdot(-1)^n\cdot 2^{2(n-1)}}{(2n)!}(1+3^{2n-1})x^{2n+1}$, $R=\infty$.

1112) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2nx^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

1113) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^{2n+1}-1}{2(2n+1)!}x^{2n+2}$, $R=\infty$.

1114) $\ln 4+\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^4}{2\cdot 2^4}+\frac{x^6}{3\cdot 2^6}-\cdots$, $R=2$.

1115) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n}$, $R=1$.

1116) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^{n+1}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^{n}}{n}, \quad R=1.$

б) $4\ln 4+(x-4)\ln 4+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-4)^{n+1}}{4^n\cdot n}+$

$+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-4)^{n}}{4^n\cdot n}, \quad R=4.$

1117) а) $\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^n x^n}{n}, \quad R=\frac{3}{2}.$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n}{n}x^n, \quad R=\frac{1}{2}.$

в) $\ln 11+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{11}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}(x-4)^{n+1}, \quad R=\frac{11}{2}.$

1118) $\ln 11-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{11}\right)^n\frac{(x+2)^n}{n}, \quad x\in\left[-\frac{19}{4};\frac{3}{4}\right].$

1119) $\ln 9-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n\frac{(x+1)^n}{n}, \quad x\in\left[-\frac{16}{7};\frac{2}{7}\right).$

1120) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^n}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}, \quad R=\frac{1}{2}.$

б) $\ln\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n(x-1)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}(x-1)^n,$

$R=\frac{1}{2}.$

1121) а) $\ln\frac{3}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^n\frac{x^n}{n}, \quad R=\frac{2}{3}.$

б) $-\ln 5+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}(x-1)^n+$

$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{3}{5}\right)^n(x-1)^n, \quad R=\frac{1}{2}.$

1122) $\ln 6+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right), \quad R=2.$

1123) $\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n,$

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2k-1}, & n=2k-1,\\[2mm] \dfrac{1}{2k}+\dfrac{(-1)^{k-1}}{2^k\cdot k}, & n=2k,\end{cases} \quad R=1.$$

1124) $-\ln 6+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)x^n, \quad R=2.$

1125) $\frac{2}{m}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad R=1.$

1126) a) $\ln 6+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+1\right)x^n, \quad R=1.$

б) $\ln 24+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}\right)(x-1)^n, \quad R=2.$

1127) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{3n}}{n}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}, \quad R=1.$

1128) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+4}}{n+1}, \quad R=1.$

1129) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x+1)^{2+n}}{n}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x+1)^{n+1}}{n}+$

$+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x+1)^n}{n}, \quad R=1.$

1130) $5\ln\frac{9}{4}+\left(\frac{25}{36}+\ln\frac{9}{4}\right)x^2+\sum\limits_{n=2}^{\infty}x^{2n}\left(\frac{5}{n}(4^{-n}-9^{-n})+\right.$

$\left.+\frac{1}{n-1}(4^{1-n}-9^{1-n})\right), \quad R=2.$

1131) а) $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot x^n, \quad R=\frac{3}{2}.$

б) $\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{7}\right)^n(x-2)^n, \quad R=\frac{7}{2}.$

1132) а) $1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}, \quad R=2.$

б) $1-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1+x)^n, \quad R=1.$

1133) а) $x^5, \quad R=\infty.$

б) $-1+5(x+1)+10(x+1)^2+10(x+1)^3+5(x+1)^4+(x+1)^5,$
$R=\infty.$

1134) а) $x^6-2x^2+4x, \quad R=\infty.$

б) $3+6(x-1)+13(x-1)^2+20(x-1)^3+30(x-1)^4+6(x-1)^5+$
$+(x-1)^6, \quad R=\infty.$

1135) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n+2+6(x-1)+6(x-1)^2+2(x-1)^3, \quad R=1.$

1136) $\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}(b^{n+1}-a^{n+1})x^n,$

$R=\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \; a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \; b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$

1137) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n, \quad R=1.$

1138) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}-2^{n+1}\right)\frac{x^n}{7}, \quad R=\frac{1}{2}.$

1139) $\sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}+3^n)x^n, \quad R=\frac{1}{3}.$

1140) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{21}\cdot\frac{1}{3^n}+\frac{9}{28}\cdot\frac{(-1)^n}{4^n}\right)x^n, \quad R=3.$

1141) $1 - 2x + 2x^2 - 2x^4 + 2x^5 - \dots + a_n x^n + \dots,$

$a_{3k} = 0,\ a_{3k-1} = 2,\ a_{3k-2} = -2,\ k \in \mathbb{N}, \quad R = 1.$

Указание. $f(x) = 1 - \dfrac{2x}{1-x^3} + \dfrac{2x^2}{1-x^3}.$

1142) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{5n} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{5n+1}, \quad R = 1.$

1143) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^{n+2}, \quad R = 1.$

1144) $\dfrac{1}{4} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (n+1)}{2^n} x^{2n}, \quad R = \sqrt{2}.$

1145) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) x^{3n}, \quad R = 1.$

1146) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} x^n, \quad R = 1.$

1147) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^n, \quad R = 1.$

1148) $-\dfrac{1}{2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n} + \dfrac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1}, \quad R = 1.$

1149) $\dfrac{1}{6} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n - \dfrac{1}{30} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{5^n} + \dfrac{1}{30} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{5^n},$

$R = 1.$

1150) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} [(n+1)^2 + 1] x^n, \quad R = 1.$

1151) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n+1} x^{2n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n+2} \right) x^{2n+1},$

$R = \dfrac{3}{2}.$

1152) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(3 - 3n - \dfrac{7}{2^{n+1}}\right) x^n, \quad R = 1.$

1153) $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!3^n}(x-1)^n, \quad R=1.$

1154) $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!3^n}(x+1)^n-$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1)-\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!3^n}(x+1)^{n+1}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}(x+1)^2+\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!3^n}(x+1)^{n+2}, \quad R=\frac{3}{2}.$$

1155) $-\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{2}{\sqrt{7}}(x-1)+\frac{2}{\sqrt{7}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{7^n}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(x-1)^{n+1}-$

$$-\frac{1}{\sqrt{7}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{7^n}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(x-1)^n, \quad R=\frac{7}{3}.$$

1156) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{n!2^{3n+1}}(x-6)^{2n}, \quad R=2.$

1157) $2+\frac{1}{3}(x-3)+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{3^{2n}(2n)!!}(x-3)^{2n+1}+$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{3^{2n}(2n)!!}(x-3)^{2n}, \quad R=3.$$

1158) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^{2n-1}, \quad R=1.$

1159) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(1+x)^{2n-1}}{2n-1}, \quad R=1.$

1160) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)a^{2n-1}}+\frac{\pi}{4}, \quad R=|a|.$

1161) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6n+1}x^{6n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6n+5}x^{6n+5}, \quad R=1.$

1162) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+1}}{4n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+3}}{4n+3}, \quad R=1.$

1163) $\operatorname{arctg} 2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{2n-1} x^{2n-1}, \quad -\frac{1}{4} < x \leqslant \frac{1}{2}.$

1164) $\frac{\pi}{4} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)2^{2n+1}}, \quad R = \sqrt{2}.$

1165) $\frac{\pi}{2} - 2x^2 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)n!} \cdot 2^{2n+1} \cdot x^{4n+2}, \quad R = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

1166) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}, \quad R = 1.$

1167) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad R = 1.$

1168) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x^{6n+1}}{6n+1} - \frac{x^{6n+5}}{6n+5} \right), \quad R = 1.$

1169) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x^{3n+1}}{3n+1} - \frac{x^{3n+2}}{3n+2} \right), \quad R = 1.$

1170) $x \ln \sqrt{2} + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1/2}} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{x^{2n}}{2n-1}, \quad R = \sqrt{2}.$

1171) $\frac{\pi}{2} x^2 - 2x^3 - 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{x^{2n+3}}{2n+1}, \quad R = \frac{1}{2}.$

1172) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad R = 1.$

1173) $1 + \frac{x^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \frac{x^{2n+2}}{2n+1} \right), \quad R = 1.$

1174) $-1 + \frac{\pi}{2} x - \frac{x^2}{2} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)}, \quad R = 1.$

1175) $\frac{\pi}{2} x + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{4n+3}}{4^n (4n+2)}, \quad R = \sqrt{2}.$

1176) $-\dfrac{3}{2}+x-\dfrac{x^3}{6}-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(2n-3)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1}$, $R=1$.

1177) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2(n-1))!!}{(2n+1)!!}x^{2n}$, $R=1$.

1178) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+4}}{(2n+4)n!}$, $R=\infty$.

1179) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{6n+1}}{(6n+1)(2n)!}$, $R=\infty$.

1180) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$, $R=\infty$.

1181) $x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!x^{4n+1}}{(2n)!!(4n+1)}$, $R=1$.

1182) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(2n)!}$, $x>0$.

1183) $x+\dfrac{x^6}{12}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n\cdot n!(5n+1)}x^{5n+1}$, $R=1$.

1184) $x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!(2n+1)^2}x^{2n+1}$, $R=1$.

1185) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+4}}{2(2n+2)(2n+1)!}$, $R=\infty$.

1186) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n-1}}{n!(2n-1)}$, $R=\infty$.

1187) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{\pi n}{4}}{n!}x^n$, $R=\infty$.

1188) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{\pi n}{4}}{n!}x^n$, $R=\infty$.

1189) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(13)^{n/2}}{n!} \sin\left(n \operatorname{arctg} \frac{2}{3}\right) x^n, \quad R = \infty.$

1190) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{10})^n \cos(n \operatorname{arctg} 3)}{n!} x^n, \quad R = \infty.$

1191) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(4n)!} x^{4n}, \quad R = \infty.$

1192) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{4n+2}}{(4n+2)!} x^{4n+2}, \quad R = \infty.$

1193) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha)}{\sin^n \alpha} \frac{x^n}{n!}, \ \sin\alpha \neq 0, \quad R = \infty.$

1194) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha)}{n!} x^n, \quad R = \infty.$

1195) $\frac{\pi}{4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin\frac{\pi n}{4}}{(\sqrt{2})^n \cdot n} x^n, \quad R = \sqrt{2}.$

1196) а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{\sqrt{3}} x^n \sin\frac{2\pi(n+1)}{3}, \quad R = 1.$

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{3}} (-1)^n x^n \sin\frac{2\pi(n+1)}{3}, \quad R = 1.$

1197) $x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \cdots.$

1198) $\frac{x}{6} + \frac{7}{360}x^3 + \cdots, \quad x \neq \pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$

1199) $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \cdots.$

1200) $1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + \frac{13}{3780}x^6 + \cdots.$

1201) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{7}{16}x^2 + \cdots.$

1202) $1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{945}x^6 + \cdots.$

1203) $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{12}x^4+\cdots.$

1204) $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{24}x^3+\frac{1}{48}x^4+\cdots.$

1205) $1-x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4-\frac{3}{10}x^5+\cdots.$

1206) $2-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+\cdots.$

1207) $\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi x^2}{4}-\left(\frac{3\pi^3+4\pi}{24}\right)x^3+\cdots.$

1208) $1-\frac{x}{2}+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{720}x^4+\cdots.$

1209) $x+\frac{x^2}{2!}+\frac{2x^3}{3!}+\frac{9x^5}{5!}+\cdots.$

1210) $-1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{24}x^3+\cdots.$

1211) $1-x^2+\frac{4}{3}x^4-\frac{46}{45}x^6+\cdots.$

1212) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}x-\frac{1}{720}x^3+\frac{1}{46\cdot 6!}x^5+\cdots.$

1213) $1+2x+\frac{5}{2}x^2+\frac{8}{3}x^3+\frac{65}{24}x^4+\frac{163}{60}x^5+\frac{1957}{720}x^6+\cdots.$

1214) $x+\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{3}x^3+x^4+\frac{89}{120}x^5+\frac{409}{720}x^6+\cdots.$

1215) $x+x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}x^4+\frac{13}{15}x^5+\frac{13}{15}x^6.$

1216) $x-\frac{5}{6}x^3+\frac{49}{120}x^5-\frac{1301}{5040}x^7+\cdots.$

1217) $1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+\frac{49}{384}x^4+\cdots.$

1218) $1-\frac{3}{2}x+\frac{25}{24}x^2-\frac{331}{720}x^3+\cdots.$

1219) $x+\frac{5}{6}x^3+\frac{101}{120}x^5+\frac{4241}{5040}x^7+\cdots.$

1220) $1+x+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{7}{72}x^4+\frac{7}{40}x^5-\frac{481}{6480}x^6+\cdots.$

1221) $-x^3-\dfrac{x^5}{3}-\dfrac{11}{120}x^7-\dfrac{43}{252}x^9+\cdots.$

1222) $a^2+2abx+(b^2+2ac)x^2+(2ad+2bc)x^3+$
$+(c^2+2af+2bd)x^4+(2ak+2bf+2cd)x^5+\cdots.$

1231) 1.

1232) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n=\dfrac{1}{(1-q)^2}.$

1233) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}\cdot q^n.$

1234) $\dfrac{1}{6}+\dfrac{4}{45}+\cdots+$
$+\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}\cdot\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)\cdot\frac{1}{1\cdot 3}}\right)+\cdots.$

1235) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot 2^{2n-2}}{(2n-1)!}.$ 1236) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-3)^n}{n!}=e^{-3}.$

1238) $x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{5}{6}x^3-\dfrac{1}{2}x^4+\cdots.$

1239) $1+\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{4}{45}x^4+\dfrac{44}{945}x^6+\cdots.$

1240) $x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{15}x^5+\cdots.$

1241) $1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{5x^4}{4!}+\dfrac{53x^6}{6!}+\dfrac{921}{8!}x^8+\dfrac{23513}{10!}x^{10}+\cdots.$

1242) $1-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{12}x^2-\dfrac{1}{24}x^3+\cdots.$

1243) $\dfrac{1}{a_0}-\dfrac{a_1}{a_0^2}x+\left(\dfrac{a_1^2}{a_0^3}-\dfrac{a_2}{a_0^2}\right)x^2+\left(\dfrac{2a_1a_2}{a_0^3}-\dfrac{a_3}{a_0^2}-\dfrac{a_1^3}{a_0^4}\right)x^3+$
$+\left(\dfrac{2a_1a_3}{a_0^3}+\dfrac{a_2^2}{a_0^3}-\dfrac{a_4}{a_0^2}-\dfrac{3a_1^2a_2}{a_0^4}+\dfrac{a_1^4}{a_0^5}\right)x^4-\cdots.$

1248) $x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+\cdots.$ 1249) $x+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\dfrac{x^5}{5}+\cdots.$

1250) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^3}{90}+\dfrac{x^5}{1280}+\cdots.$

1251) $\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{8}(x+1)^2+\frac{1}{24}(x+1)^3+\frac{1}{64}(x+1)^4+\cdots.$

1252) $\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{16}(x+1)^2+\frac{1}{64}(x+1)^3+\cdots.$

1253) $x+x^2+2x^3+\frac{9}{2}x^4+\cdots.$ 1254) $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+\cdots.$

1255) $\ln 2+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^4}{8\cdot 4!}+\cdots.$ 1256) $\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+\cdots.$

1257) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots.$ 1258) $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{48}+\cdots.$

1259) $2-(2\ln 2)x^2+\left(\ln^2 2+\frac{2}{3}\ln 2\right)x^4+\cdots.$

1260) $2x+\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{3}x^5+\cdots.$

1261) $1+2x+4x^2-8x^3+\cdots.$

1262) $-x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}+\cdots.$

1263) $1+x^2+\frac{x^4}{3}+\frac{1}{120}x^6+\cdots.$

1264) $e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{4x^4}{4!}-\frac{31x^6}{760}+\cdots\right).$

1265) $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{3x^3}{3!}+\frac{9x^4}{4!}+\frac{29x^5}{5!}+\frac{129x^6}{6!}+\cdots.$

1266) $1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\frac{7}{24}x^4+\cdots.$

1267) $1+x+\frac{x^2}{2!}-\frac{3x^4}{4!}-\frac{8x^5}{5!}-\frac{3x^6}{6!}+\frac{56x^7}{7!}-\frac{119x^8}{8!}-\frac{440x^9}{9!}+\cdots.$

1268) $1+x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{5x^4}{6}-\frac{5}{4}x^5+\cdots.$

1269) $1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\cdots.$

1270) $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots.$

1271) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\cdots.$

1272) $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{5x^4}{4!}+\frac{53x^6}{6!}+\frac{921x^8}{8!}+\cdots$.

1282) $2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2(2n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$.

1283) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$.

1284) $6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{2}{2n+1}\left[1+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$.

1285) $6\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4^{n-1}[(n-1)!]^2}{(2n)!}x^{2n}\cdot\left[1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}\right]$.

1293) $y=2-\frac{x}{6}+\frac{x^2}{12}+\cdots$.

1294) $y=x-\frac{x^3}{6}+\cdots$.

1295) $y=-\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^3}-\frac{2x^3}{a^5}+\frac{5x^4}{a^7}-\cdots$.

1296) $y=a-a^5x+5a^9x^2-15a^{13}x^3+35a^{17}x^4+\cdots$.

1297) $y=-\frac{x}{4}+\frac{x^4}{1024}+\cdots$.

1298) $y=\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{81}x^5+\cdots$.

1299) $y=\frac{\sqrt{3}-1}{2}x-\frac{(\sqrt{3}-1)^4}{24}x^2+\cdots$.

1300) $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n,\quad S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$.

1303) $u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right],\ n\in\mathbb{N}$.

1305) -945. 1306) 0. 1307) 0.

1308) $\frac{105}{16}$. 1309) 0. 1310) $-16!\left(1+\frac{2}{3^{17}}\right)$.

1311) $-\dfrac{8!}{5}$.

1312) $-\dfrac{3465}{4}$.

1313) а) $-\dfrac{(38)!}{2^{40}}$; б) 0.

1314) $\dfrac{7!}{5}\left(\dfrac{3}{8}\right)^5$.

1315) $2^{20}\cdot 116e^2$.

1316) $\dfrac{197!!399}{2^{100}}$.

1317) $\dfrac{(-1)^n b^n n!}{a^{n+2}}\sin\left[(n+1)\dfrac{\pi}{2}\right]$.

1318) $f^{(n)}(0)=0$ при $n=2k,\ k\in\mathbb{N}$;

$f^{(n)}(0)=2\cdot\left(\dfrac{b}{a}\right)^n\cdot(n-1)!$ при $n=2k-1,\ k\in\mathbb{N}$.

1319) $-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}-\ldots-\dfrac{1}{x^n}-\ldots,\quad |x|>1$.

1320) $-2z-\dfrac{2}{3}z^3-\ldots-\dfrac{2}{2n-1}z^{2n-1}-\ldots,\quad 0<x<+\infty$.

1321) $z+\dfrac{1}{2}z^2+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}z^3+\ldots+\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}z^{n+1}+\ldots,\quad x>-\dfrac{1}{2}$.

1322) $\dfrac{1}{2}z+\dfrac{1}{2\cdot 4}z^3+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}z^5+\ldots,\quad |x|<1$.

1323) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^n\cos^{2n}\frac{x}{2},\quad \frac{\pi}{4}+2\pi k<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Указание. $\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{y^2}$ разложить по степеням

$y+1=\cos x+1=2\cos^2\dfrac{x}{2}$.

1324) $\displaystyle\sin x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}(\sin x)^{2n+1}$.

Указание. Применить формулу $x=\arcsin(\sin x)$.

1325) $\displaystyle\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}(\operatorname{ctg}x)^{2n-1},\quad \frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}$.

Указание. Применить формулу

$x=\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}x)=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}x)$.

1326) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cos^{n-1}(2x),\quad x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

1327) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}}(\sqrt{x})^3+\dfrac{3}{80\sqrt{2}}(\sqrt{x})^5+\cdots,\quad 0\leqslant x<2.$

1328) $\dfrac{2}{3}(\sqrt{x})^3-\dfrac{1}{4}(\sqrt{x})^4+\dfrac{2}{5\cdot 3}(\sqrt{x})^5+\cdots+$
$+(-1)^{n-1}\dfrac{(\sqrt{x})^{n+2}}{\left(\frac{n}{2}+1\right)n}+\cdots,\quad 0\leqslant x<1.$

1329) $\sqrt{2}\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{3}(\sqrt{x})^3-\dfrac{1}{5}(\sqrt{x})^5-\dfrac{1}{7}(\sqrt{x})^7+\cdots\right),\ 0\leqslant x<1.$

1330) $y=\sqrt{2}x^{1/2}+\dfrac{1}{3}x+\dfrac{\sqrt{2}}{18}x^{3/2}+\dfrac{2}{135}x^2+\cdots.$

1331) $y=\sqrt{2}x^{1/2}+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{\sqrt{2}}{18}x^{3/2}-\dfrac{22}{135}x^2+\cdots.$

1332) $y=\sqrt[3]{6}x^{1/3}+\dfrac{x}{10}+\dfrac{\sqrt[3]{36}\cdot 9}{1400}x^{5/3}+\cdots.$

1333) $y=\sqrt[3]{3}x^{1/3}-\dfrac{2}{5}x-\dfrac{\sqrt[3]{9}\cdot 307}{525}x^{5/3}+\cdots.$

1334) $y=\sqrt[4]{24}x^{1/4}+\dfrac{\sqrt[4]{54}}{30}x^{3/4}+\dfrac{11\sqrt[4]{24}}{2800}x^{5/4}+\cdots.$

1341) Сходятся ряды по столбцам и по строкам. Оба повторных ряда и двойной расходятся. 1342) Сходятся ряды по строкам и по столбцам. Один из повторных рядов сходится, а другой повторный и двойной ряды расходятся. 1343) Все ряды по строкам расходятся, все ряды по столбцам сходятся. Соответствующий повторный ряд и двойной ряд сходятся. 1344) При $\alpha>1$, $\beta>1$ сходится, при $\alpha\leqslant 1$ или $\beta\leqslant 1$ расходится. 1345) Сходится при $\alpha>2$, расходится при $\alpha\leqslant 2$. 1346) Сходится при $\alpha>1$, расходится при $\alpha\leqslant 1$. 1347) Сходится абсолютно при $\alpha>2$, сходится условно при $0<\alpha\leqslant 2$. 1348) Сходится условно. 1349) Сходится абсолютно при $\alpha>1$ и $\beta>1$, расходится при $\alpha\leqslant 1$ или $\beta\leqslant 1$. 1350) Сходится условно. 1351) Сходится абсолютно при $\alpha>2$ и $\beta>2$, сходится условно при $0<\alpha\leqslant 2$ и $0<\beta\leqslant 2$. 1352) Сходится. 1353) Сходится. 1354) Сходится условно. 1355) 1. 1356) $\dfrac{1}{p+1}$. 1357) $\ln 2$. 1358) $\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{2}\ln 2$. 1359) $\dfrac{\pi}{8}$. 1360) $\dfrac{1}{4}\ln 2$.

§ 7. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

1. Числовые ряды*)

1. Пусть $a_n > 0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot n = 0$.

2. Пусть $a_n > 0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{S_n}{n}$ расходится.

3. Привести пример сходящегося ряда с ненулевыми членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, для которого ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{S_n}{n}$ сходится.

4. Привести пример сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами, для которого ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n$ расходится.

5. Привести пример сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами, для которого ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n$ сходится.

6. Доказать, что для монотонной последовательности $\{a_n\}$ из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует, что $a_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$.

7. Пусть $a_n \downarrow 0$, $p > 1$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{\frac{p-1}{p}} \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1/p}$ сходится. Используя результат задачи 6, показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

8. Привести пример сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами, для которого $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n a_n > 0$.

---

*) Всюду S_n обозначает n-ую частичную сумму, а r_n — n-ый остаток рассматриваемого ряда.

9. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами сходится. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}}$ сходится.

10. Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2}$. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ расходится.

11. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами расходится. Доказать, что расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$.

12. Положим $a_n = 2^{n^2}$. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_{n+1}}$ сходится.

13. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две последовательности положительных чисел, причем последовательность $\{a_n\}$ монотонна, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится и $a_n = o(b_n)$, $n \to \infty$. Доказать, что существует такая монотонная последовательность $\{\beta_n\}$, что $a_n = o(\beta_n)$, $n \to \infty$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ сходится.

Вывод из задач 9, 11, 13. Пусть $\{a_n\}$ — произвольная монотонная последовательность. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то существует такая монотонная последовательность $\{b_n\}$, что $a_n = o(b_n)$, $n \to \infty$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то существует такая монотонная последовательность $\{b_n\}$, что $b_n = o(a_n)$, $n \to \infty$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

14. Доказать, что для любой бесконечно малой последовательности $\{a_n\}$ найдется последовательность $b_n = (-1)^{\varphi(n)}$,

$\varphi(n) = 1, 2$, такая, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

15. Пусть последовательность $\{a_n\}$ бесконечно малая и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится. Доказать, что 1) для любого числа A найдется такая последовательность $b_n = (-1)^{\varphi(n)}$, $\varphi(n) = 1, 2$, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится к A; 2) найдется такая последовательность $b_n = (-1)^{\varphi(n)}$, $\varphi(n) = 1, 2$, что $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{m} b_n a_n = +\infty$ (сравните с теоремой Римана).

16. Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ существует такая перестановка $\varphi(n)\colon \mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{N}$, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ сходится. Доказать, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n| + a_n)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n| - a_n)$ сходятся или расходятся одновременно.

17. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится. Доказать, что $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{P_m}{N_m} = 1$, где $P_m = \sum\limits_{n=1}^{m}(a_n + |a_n|)$ и $N_m = \sum\limits_{n=1}^{m}(|a_n| - a_n)$.

18. а) Доказать, что если последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ монотонна, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^m a_{2^m}$ сходятся или расходятся одновременно.

б) Пусть $\{u_n\}$ — монотонно возрастающая последовательность положительных чисел. Доказать, что ряды

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \quad \text{и} \quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right)$$

сходятся, если эта последовательность ограничена, и расходится, если она неограничена.

19. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две последовательности положительных чисел и существует такое число $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$, что $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ для всех $n > \mathcal{N}$. Доказать, что из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

20. Пусть $a_n > 0$ и $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1-\alpha_n$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если, начиная с некоторого номера, $\alpha_n > \dfrac{q}{n}$, где $q > 1$, и расходятся, если, начиная с некоторого номера, $\alpha_n < \dfrac{q}{n}$, где $q < 1$ (признак Раабе).

21. Пусть $a_n > 0$ и $\sqrt[n]{a_n} = 1-\alpha_n$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если, начиная с некоторого номера, $\alpha_n > \dfrac{q\ln n}{n}$, где $q > 1$, и расходится, если, начиная с некоторого номера, $\alpha_n < \dfrac{q\ln n}{n}$, где $q < 1$.

22. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность положительных чисел и $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right]\ln n = b$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если $b > 1$, и расходится, если $b < 1$.

23. Привести пример двух последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ таких, что $a_n \geqslant b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

24. Привести пример двух последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ таких, что $|a_n| \geqslant |b_n|$ для всех $n \in \mathbb{N}$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

25. Доказать, что из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1+\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$.

26. Привести пример монотонной последовательности положительных чисел $\{a_n\}$ такой, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

27. Доказать, что ряд

$$\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{3\ln 3} - \frac{1}{3\ln 3} - \frac{1}{3\ln 3} + \dots +$$
$$+ \frac{1}{\ln n} \underbrace{- \frac{1}{n\ln n} - \frac{1}{n\ln n} - \dots - \frac{1}{n\ln n}}_{n \text{ членов}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

где

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln m}, & n = \dfrac{m^2+m-4}{2}, \\ -\dfrac{1}{m\ln m}, & \dfrac{m^2+m-4}{2} < n \leqslant \dfrac{m^2+3m-2}{2}, \end{cases}$$

сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q \operatorname{sign} a_n$ расходится при любом $q \neq 1$.

28. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность неотрицательных чисел. Доказать, что из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует сходимость рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+a_n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+na_n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, a_{n+1}, a_{n+2})$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1})$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n-1}}{n}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_n a_{n+1} \ldots a_{2n-1}}$.

29. Пусть $\{b_n\}$ — последовательность неотрицательных чисел. Доказать, что из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует расходимость рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{1+b_n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max(b_n, b_{n+1}, b_{2n-1})$.

30. Пусть

$$b_n = \begin{cases} 0, & n \neq 2^k, \\ \dfrac{1}{2^k}, & n = 2^k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max(b_n, b_{n+1}, \ldots, b_{2n-1})$$

расходится (ср. с п. 4) задачи 28 и с п. 2) задачи 29).

31. Пусть

$$b_n = \begin{cases} 0, & n = 2k-1, \\ \dfrac{1}{k}, & n = 2k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, а ряды

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{b_n b_{n+1}}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min(b_n, b_{n+1}, \ldots, b_{2n-1})$

сходятся (ср. с пп. 4), 6) задачи 28 и с п. 2) задачи 29).

32. Пусть

$$b_n = \begin{cases} 0, & n \neq 2^k, \\ \dfrac{1}{k}, & n = 2^k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{1 + nb_n}$ сходится (ср. с п. 2) задачи 28).

33. Доказать, что из сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ следует сходимость рядов:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cdot b_n|, \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2, \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}.$$

34. Пусть $f(x)$ — непрерывная, строго возрастающая на $[0; +\infty)$ функция, $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, и $g(x)$ — функция, обратная к $f(x)$. Доказать, что для любых положительных чисел a и b справедливо неравенство Юнга

$$ab \leqslant \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b g(x)\,dx.$$

В частности, получить неравенство:

$$ab \leqslant \lambda \cdot a^{1/\lambda} + \mu \cdot b^{1/\mu}, \quad a > 0,\ b > 0,\ 0 < \lambda < 1,\ \mu = 1 - \lambda.$$

35. Пусть $f(x)$ — непрерывная, строго возрастающая на $[0; +\infty)$ функция, $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, и $g(x)$ — функция, обратная к $f(x)$. Доказать, что если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ неотрицательны, то из сходимости обоих рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f(a_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n g(b_n)$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

36. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две последовательности положительных чисел, $0 < \lambda < 1$, $\mu = 1 - \lambda$. Используя результат задачи 34, доказать неравенство Гельдера:

1) для любого $m \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство:

$$\sum_{n=1}^{m} a_n b_n \leqslant \left(\sum_{n=1}^{m} a_n^{\frac{1}{\lambda}}\right)^{\lambda} \cdot \left(\sum_{n=1}^{m} b_n^{\frac{1}{\mu}}\right)^{\mu};$$

2) если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{\frac{1}{\lambda}}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^{\frac{1}{\mu}}$ сходятся, то сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, и его сумма не превосходит $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{\frac{1}{\lambda}}\right)^{\lambda} \cdot \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^{\frac{1}{\mu}}\right)^{\mu}$.

37. Пользуясь результатом задачи 34, доказать, что при $q > 1$ для любых положительных чисел a и b имеет место неравенство:

$$ab^{q-1} \leqslant \frac{1}{q}(a^q + (q-1)b^q).$$

38. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность положительных чисел, $b_0 = 0$, $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$. Пользуясь результатом задачи 37, показать, что для $q > 1$

1) $b_n^q - \dfrac{q}{q-1} b_n^{q-1} a_n \leqslant \dfrac{1}{q-1}[(n-1)b_{n-1}^q - n b_n^q]$,

2) $\sum\limits_{n=1}^{m} b_n^q \leqslant \dfrac{q}{q-1} \sum\limits_{n=1}^{m} b_n^{q-1} a_n$.

39. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность положительных чисел, $q > 1$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^q$ сходится. Пользуясь результатами задач 36 и 38, доказать неравенство Харди – Ландау:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^q \leqslant \left(\frac{q}{q-1}\right)^q \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^q.$$

40. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность положительных чисел и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Пользуясь результатом задачи 39, доказать неравенство Карлемана:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant e \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

41. а) Пусть последовательность $\{a_n\}$ монотонна, но не бесконечно малая. Доказать, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\alpha$$

расходятся при любом $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) Пусть последовательность $\{a_n\}$ монотонна, бесконечно малая и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Доказать, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha$$

сходятся условно для любого $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Вывод из задачи 41. Для рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha,$$

где последовательность $\{a_n\}$ монотонна, условия 1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ не только достаточны, но и необходимы соответственно для сходимости и абсолютной сходимости этих рядов при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

42. Пусть $f \in C^1[1; +\infty)$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f'(x)\,dx$ сходится абсолютно. Доказать, что сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ эквивалентна сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

43. Доказать, что хотя бы одна из точек 0 или 1 является предельной точкой последовательности $\{\pi n - [\pi n]\}$, $n \in \mathbb{N}$.

44. Пользуясь результатом задачи 43, привести пример последовательности $\{a_n\}$, не являющейся бесконечно малой, для которой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin n$ сходится абсолютно.

45. Положим

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}.$$

Доказать, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, а их произведение по Коши, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, где $c_m = a_1 b_{m-1} + a_2 b_{m-2} + \dots + a_{m-1} b_1$ расходится.

2. Функциональные ряды и последовательности

46. Пусть последовательность непрерывных на $\overline{M}$ функций $f_n(x)$ сходится равномерно на M. Доказать, что эта последовательность сходится равномерно на $\overline{M}$.

47. Привести пример ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, равномерно сходящегося на $[0; 1]$ такого, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится на $[0; 1]$ неравномерно.

48. Как показывает результат задачи 47, из условий:

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на E равномерно,

2) последовательность $\{v_n(x)\}$ ограничена в совокупности на E,

вообще говоря, не следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x) u_n(x)$ равномерно сходится на E. Какие дополнительные условия достаточно наложить: а) на последовательность $\{u_n(x)\}$; б) на последовательность $\{v_n(x)\}$, чтобы можно было гарантировать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x) u_n(x)$ на E?

49. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2(x)$ сходится на множестве M к огра-

ниченной функции. Доказать, что из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ следует равномерная сходимость на M ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n u_n(x)|$.

50. Может ли последовательность разрывных на $[a;b]$ функций $f_n(x)$ равномерно сходиться на $[a;b]$ к функции $f(x)$, непрерывной на $[a;b]$? Если да, то привести пример, если нет, то объяснить, почему.

51. Может ли последовательность непрерывных на $[a;b]$ функций $\{f_n(x)\}$ равномерно сходиться на $[a;b]$ к функции, разрывной на $[a;b]$? Если да, то привести пример, если нет, то объяснить, почему.

52. Привести пример последовательности $\{f_n(x)\}$, равномерно на $[0;1]$ сходящейся к неограниченной функции $f(x)$.

53. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на M к функции $f(x)$, ограниченной на M. Доказать, что существуют такие числа $A > 0$, $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$, что $|f_n(x)| \leqslant A$ для всех $n > \mathcal{N}$ и всех $x \in M$.

54. Пусть две последовательности $\{u_n(x)\}$ и $\{v_n(x)\}$ равномерно сходятся на M к ограниченным на M функциям $u(x)$ и $v(x)$ соответственно. Доказать, что последовательность $\{u_n(x)v_n(x)\}$ сходится равномерно на M.

55. Привести пример двух последовательностей $\{u_n(x)\}$ и $\{v_n(x)\}$, равномерно сходящихся на $[0;1]$ таких, что последовательность $\{u_n(x)v_n(x)\}$ сходится на $[0;1]$ неравномерно.

56. Привести пример последовательности $\{f_n(x)\}$, удовлетворяющей условиям: 1) все функции $f_n(x)$ непрерывны на $(0;1)$; 2) для любого $x_0 \in (0;1)$ последовательность $\{f_n(x_0)\}$ монотонна; 3) последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к непрерывной на $(0;1)$ функции $f(x)$ неравномерно на $(0;1)$. Какое условие теоремы Дини нарушено?

57. Пусть последовательность непрерывных на $[a;+\infty)$ функций $f_n(x)$ сходится к непрерывной на $[a;+\infty)$ функции $f(x)$ и при этом:

1) существуют $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$;

3) для любого $x_0 \in [a; +\infty)$ последовательность $\{f_n(x_0)\}$ монотонна.

Доказать, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на $[a; +\infty)$.

58. Пусть последовательность непрерывных и монотонных на $[a; b]$ функций $f_n(x)$ сходится к непрерывной на $[a; b]$ функции $f(x)$. Доказать, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на $[a; b]$ равномерно. Верно ли будет аналогичное утверждение на компакте K?

59. Пусть последовательность непрерывных на $(\alpha; \beta)$ функций $f_n(x)$ сходится на $(\alpha; \beta)$ к $f(x)$. Доказать, что для непрерывности f на $(\alpha; \beta)$ необходимо и достаточно следующее условие: для любого отрезка $[a; b] \subset (\alpha; \beta)$ и любых чисел $\varepsilon > 0$ и $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$ существует конечный набор интервалов $U_q \subset (\alpha; \beta)$ и чисел $n_q \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant q \leqslant Q$, таких, что

1) $\displaystyle\bigcup_{q=1}^{Q} U_q \supset [a; b]$;

2) $n_q > \mathcal{N}$, $1 \leqslant q \leqslant Q$;

3) $|f_{n_q}(x) - f(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in U_q$, $1 \leqslant q \leqslant Q$.

60. Привести пример последовательности непрерывных на $[0; 1]$ функций $f_n(x)$, сходящейся на $[0; 1]$ к функции $f \,\overline{\in}\, \tilde{R}[0; 1]$.

61. Привести пример последовательности непрерывных на $[0; 1]$ функций $f_n(x)$, сходящейся к непрерывной на $[0; 1]$ функции, и такой, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx < \varlimsup_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

62. Привести пример последовательности непрерывных на $[0; 1]$ функций $f_n(x)$, сходящейся к непрерывной на $[0; 1]$ функции $f(x)$, и такой, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 f(x)\,dx.$$

63. Привести пример неравномерно сходящейся к $f \in C[0;1]$ последовательности непрерывных на $[0;1]$ функций $f_n(x)$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Вывод из задач 60–63. Условие равномерной сходимости интегрируемых на $[a;b]$ функций существенно, но не необходимо для возможности перехода к пределу под знаком интеграла.

64. Занумеруем множество чисел $\dfrac{m}{2^q}$, $1 \leqslant m \leqslant 2^q-1$, $q \in \mathbb{N}$, и обозначим через $\dfrac{m_n}{2^{q_n}}$ элемент этого множества с номером n.

Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = \dfrac{m_n}{2^{q_n}}, \\ 0, & x \in \left(-\infty; \dfrac{m_n}{2^{q_n}} - \dfrac{1}{2^{q_n-1}}\right] \cup \\ & \cup \left[\dfrac{m_n}{2^{q_n}} + \dfrac{1}{2^{q_n-1}}; +\infty\right), \\ 2^{q_n-1}\cdot\left(x - \dfrac{m_n}{2^{q_n}} + \dfrac{1}{2^{q_n-1}}\right), & x \in \left(\dfrac{m_n}{2^{q_n}} - \dfrac{1}{2^{q_n-1}}; \dfrac{m_n}{2^{q_n}}\right), \\ -2^{q_n-1}\cdot\left(x - \dfrac{m_n}{2^{q_n}} - \dfrac{1}{2^{q_n-1}}\right), & x \in \left(\dfrac{m_n}{2^{q_n}}; \dfrac{m_n}{2^{q_n}} + \dfrac{1}{2^{q_n-1}}\right) \end{cases}$$

(см. рис. 4).

Показать, что последовательность $\{f_n(x)\}$ расходится в каждой точке отрезка $[0;1]$, но $\displaystyle\int_0^1 f_n^2(x)\,dx \to 0$, $n \to \infty$.

65. Показать, что последовательность гладких функций $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sin nx$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$, а последовательность $f_n'(x)$ расходится при любом $x \in \mathbb{R}$.

66. Пусть

$$f_n(x) = \frac{1-(x-1)^{2n}}{n}, \quad x \in [0;1],$$

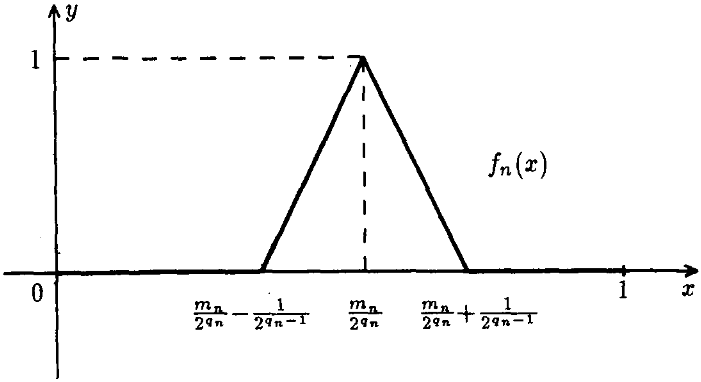


Рис. 4

$$f_n(x) = \frac{1}{n}, \quad x > 1,$$

и

$$f_n(x) = -f_n(-x), \quad x < 0.$$

Показать, что

1) $f_n \in C^1(\mathbb{R})$ для любого $n \in \mathbb{N}$;
2) $f_n(x) \rightrightarrows f(x) \equiv 0$ на отрезке $[-1; 1]$;
3) $f_n'(1) = f'(-1) = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$;
4) $f'(0) = 0 \neq \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(0)$ (см. рис. 5).

67. Пусть

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{f_n\left[2^{q+1}\left(x - \frac{3}{2^{q+1}}\right)\right] + \frac{1}{n}}{2^{q+1}} + \dfrac{1}{n2^q}, & x \in \left(\dfrac{1}{2^q}; \dfrac{1}{2^{q-1}}\right], \\ & q \in \mathbb{N}, \\ \dfrac{1}{n}, & x > 1, \end{cases}$$

где $f_n(x)$ — функции, определенные в задаче 66. Показать, что

1) $\varphi_n \in C^1(\mathbb{R})$ для любого $n \in \mathbb{N}$;

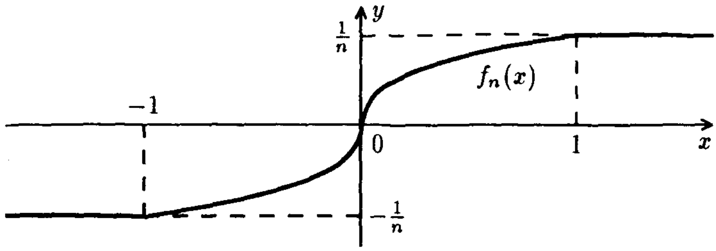


Рис. 5

2) $\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x) \equiv 0$ на $\mathbb{R}$;

3) последовательность $\varphi_n'(x)$ сходится на $\mathbb{R}$;

4) для любого $q \in \mathbb{N}$ имеем $\varphi'\left(\frac{3}{2^{q+1}}\right) = 0 \neq \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n'\left(\frac{3}{2^{q+1}}\right)$.

68. Функция $f_0(x)$ определена условиями:

1) $f_0(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \\ 1 - x, & x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right), \end{cases}$

2) периодична с периодом 1.

Положим $f_n(x) = \dfrac{f_0(4^n x)}{4^n}$ (см. рис. 6) и $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

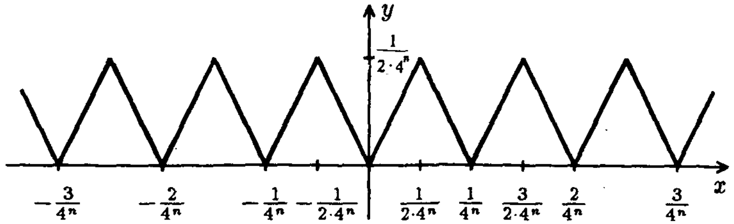


Рис. 6

Показать, что $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и не имеет производной ни в одной точке $x \in \mathbb{R}$.

69. Показать, что последовательность

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2\pi} \arccos\left(\cos\frac{x}{2\pi} - \frac{1}{n}\operatorname{sign}\cos\frac{x}{2\pi}\right)$$

равномерно сходится на $\mathbb{R}$ к функции $f_0(x)$ из задачи 68. Пользуясь этим, доказать, что непрерывная, нигде не дифференцируемая функция $f(x)$ из задачи 68 может быть представлена как предел равномерно сходящейся последовательности функций класса $C^\infty(\mathbb{R})$.

Вывод из задач 65 и 69. Условие равномерной сходимости последовательности производных существенно для дифференцируемости предельной функции даже при условии, что все функции этой последовательности бесконечно гладкие и последовательность сходится равномерно.

70. Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)}{n^x}$. Показать, что

а) $f(x)$ определена на $[1; +\infty)$;

б) $f(x) \in C^\infty(1; +\infty)$;

в) $1 < f(x) < x$ для всех $x \in (1; +\infty)$;

г) $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = 1 \neq f(1)$;

д) прямая $y = x - 1$ является правой асимптотой графика функции $y = f(x)$.

71. а) Пусть последовательность $\{b_n\}$ монотонна и $b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$. Доказать, что последовательность $S_m(x) = \sum\limits_{n=1}^{m} b_n \sin nx$ ограничена в совокупности на $[0; 2\pi]$.

б) Пусть последовательность $\{b_n\}$ монотонна. Доказать, что условие $b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$, необходимо и достаточно для равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ на $[0; 2\pi]$.

72. Пользуясь результатом задачи 71, привести пример равномерно сходящегося на $[0;\pi]$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin x$ такого, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n \sin nx|$ расходится при любом $x \in (0;\pi)$.

73. Пусть

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{n}}, & x > \sqrt{\dfrac{8}{n}}, \\ \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}, & 0 < x \leqslant \sqrt{\dfrac{8}{n}}. \end{cases}$$

Показать, что

1) $\varphi_n(x) \rightrightarrows 0$ на $[0;2\pi]$;

2) для любого $x_0 \in [0;2\pi]$ найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что последовательность $\varphi_n(x_0)$, $n \geqslant n_0$, монотонна;

3) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \sin nx \sin x$ сходится на $[0;2\pi]$ неравномерно.

74. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ сходится на отрезке $[\alpha;\beta]$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} (|a_n| + |b_n|) = 0$ (ср. с задачей 44).

75. Показать, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n} \cos n^2 x$ имеет производные всех порядков в любой точке $x \in \mathbb{R}$, а ее ряд Тейлора с центром в нуле имеет нулевой радиус сходимости.

76. Показать, что радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\ln n} x^n$ равен 1 и для любого натурального q ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{n,q} x^{n+q}$, полученный q-кратным почленным интегрированием данного ряда, расходится при $|x| = 1$.

77. Доказать, что если $|x| < 1$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ следует абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) x^n$.

78. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^n}{1-x^n}$ сходится при всех x, $|x| \neq 1$; если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то на множестве $\{x : |x| \neq 1\}$ ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^n}{1-x^n}$ одновременно сходятся или расходятся.

79. Пусть M_1 — множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ и M_2 — множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n! a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}$. Доказать, что

$$M_2 = M_1 - \{0, -1, -2, \ldots, -m, \ldots\},\ m \in \mathbb{N}.$$

80. Используя равенство

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$$

(см. стр. 74), получить равенства:

1. $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - \pi^2 n^2} = \frac{1}{x} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x - \pi n} + \frac{1}{x + \pi n}\right)$, $x \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

2. $\operatorname{tg} x = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4}} =$
$= -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x - \frac{(2n-1)\pi}{2}} + \frac{1}{x + \frac{(2n-1)\pi}{2}}\right)$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

3. $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - \pi^2 n^2} =$
$= \frac{1}{x} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x - \pi n} + \frac{1}{x + \pi n}\right)$, $x \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

4. $\dfrac{1}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{x^2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{(x-\pi n)^2} + \dfrac{1}{(x+\pi n)^2}\right)$,
$x \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

81. Используя равенство

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^n}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

(см. задачу 561 стр. 220), доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg}\frac{x}{2^n} = \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

82. Используя равенства

$$\operatorname{sh} x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x}{n^2\pi^2}\right), \quad \operatorname{ch} x = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x^2}{\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}}\right),$$

получить равенства

1. $\operatorname{cth} x = \dfrac{1}{x} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2x}{x^2 + \pi^2 n^2}$,

2. $\dfrac{1}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{1}{x} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot 2x}{x^2 + \pi^2 n^2}$.

3. Суммирование числовых рядов методами (C, 1) и Абеля

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Сопоставим ему последовательность $\sigma_n = \dfrac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n}$ средних арифметических его частичных сумм. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = S$, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируется методом $(C, 1)$ (методом средних арифметических) к числу S или, короче, $(C,1)$-суммируется к S; если величина S несущественна, то говорят: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(C,1)$-суммируем.

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ сходится на интервале $(0; 1)$ и $\lim_{x \to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = S$, то говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируется методом Абеля к числу S; если величина S несущественна, то говорят: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируем методом Абеля.

83. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, сходящийся к числу S, $(C, 1)$-суммируется к тому же числу S (регулярность $(C, 1)$-суммирования).

84. Доказать, что если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ имеем $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, то $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$.

85. Показать, что $S_n - \sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{m=2}^{n} (m-1)a_m$.

86. Доказать, что из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует, что $\sum_{n=1}^{m} n a_n = o(m)$, $m \to +\infty$.

87. Привести пример последовательности $\{a_n\}$, не являющейся бесконечно малой, для которой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(C, 1)$-суммируем.

88. Доказать, что из $(C, 1)$-суммируемости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует, что $a_n = o(n)$, $n \to +\infty$.

89. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(C, 1)$-суммируем и $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$. Пользуясь результатом задачи 85, доказать, что этот ряд сходится.

90. Привести пример бесконечно малой последовательности $\{a_n\}$, для которой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, но $(C, 1)$-суммируем.

91. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, сходящийся к числу S, суммируем методом Абеля к тому же числу S (регулярность суммирования методом Абеля).

92. Показать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ сходится на $(0;1)$, то для $x \in (0;1)$ справедливы равенства

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = (1-x) \sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n x^{n-1}$,

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = (1-x)^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sigma_n x^{n-1}$.

93. Пусть последовательность $\{a_n\}$ такова, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ сходится на интервале $(0;1)$ и $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{m} a_n = +\infty$. Пользуясь результатом задачи 92, доказать, что

$$\lim_{x\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = +\infty.$$

94. Пользуясь результатом задачи 92 и равенством

$$1 = (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \quad x \in (0;1),$$

доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $(C,1)$-суммируемый к числу S, суммируется методом Абеля к тому же числу S.

95. Пользуясь результатом задачи 88, привести пример ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, суммируемого методом Абеля, но не суммируемого методом $(C,1)$.

96. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируем методом Абеля, то $a_n = o(1+\varepsilon)^n$, $n \to \infty$, при любом $\varepsilon > 0$.

97. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируется методом

Абеля и $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

98. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируется методом Абеля и $a_n \geqslant 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

4. Бесконечные произведения

99. Пусть $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ — последовательности положительных чисел, для которых сходятся бесконечные произведения: $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\prod\limits_{n=1}^{\infty} q_n$. Что можно сказать о сходимости бесконечных произведений: 1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(p_n + q_n)$; 2) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n^{\alpha}$, $\alpha > 0$; 3) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$; 4) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n q_n$; 5) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}$?

100. Доказать критерий Коши сходимости бесконечного произведения: условие — для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\mathcal{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что для любых натуральных чисел m и $n > \mathcal{N}(\varepsilon)$ справедливо неравенство $\left|\left(\prod\limits_{q=n}^{n+m} p_q\right) - 1\right| < \varepsilon$, — необходимо и достаточно для сходимости бесконечного произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$, если $p_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

101. Пусть последовательность $\{p_n\}$ монотонна. Доказать, что бесконечные произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\prod\limits_{q=0}^{\infty} p_{2^q}^{2^q}$ сходятся или расходятся одновременно.

102. Пусть последовательность $\{p_n\}$ монотонна, $p_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, и произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится. Доказать, что

$$\ln p_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to +\infty.$$

103. Пусть $p_n \geqslant 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, и произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится. Доказать, что $\varliminf\limits_{n\to\infty} n \ln p_n = 0$.

104. Привести пример последовательности $\{p_n\}$ такой, что $p_n \geqslant 1$, произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} n \ln p_n > 0$.

5. Двойные ряды

Для последовательности с двумя индексами $a_{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, введем обозначения:

$$
\begin{aligned}
&\Delta_{1,0}(a_{m,n}) = a_{m,n} - a_{m+1,n},\\
&\Delta_{0,1}(a_{m,n}) = a_{m,n} - a_{m,n+1},\\
&\Delta_{1,1}(a_{m,n}) = a_{m,n} - a_{m+1,n} - a_{m,n+1} + a_{m+1,n+1} =\\
&\qquad = \Delta_{1,0}(a_{m,n}) - \Delta_{0,1}(a_{m+1,n}).
\end{aligned}
$$

Последовательность $a_{m,n}$ называется убывающей, если $\Delta_{1,0}(a_{m,n}) \geqslant 0$ и $\Delta_{0,1}(a_{m,n}) \geqslant 0$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$. Последовательность $a_{m,n}$ называется убывающей в строгом смысле, если $\Delta_{1,0}(a_{m,n}) \geqslant 0$, $\Delta_{0,1}(a_{m,n}) \geqslant 0$ и $\Delta_{1,1}(a_{m,n}) \geqslant 0$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$.

Для двойных сумм имеет место преобразование Харди, аналогичное преобразованию Абеля простых сумм:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\cdot b_{i,j} &= \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} s_{i,j}\Delta_{1,1}(b_{i,j}) +\\
&+ \sum_{i=1}^{m-1} s_{i,n}\Delta_{1,0}(b_{i,n}) + \sum_{j=1}^{n-1} s_{n,j}\Delta_{0,1}(b_{m,j}) + s_{m,n}b_{m,n},
\end{aligned}
$$

где $s_{i,j} = \sum\limits_{q=1}^{i}\sum\limits_{p=1}^{j} a_{p,q}$.

105. Пусть $a_{m,n} > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$, и существует $q < 1$ такое, что $\dfrac{a_{m,n+1}}{a_{m,n}} \leqslant q$ и $\dfrac{a_{m+1,1}}{a_{m,1}} \leqslant q$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n}$ сходится.

106. Пусть $a_{m,n} > 0$, $b_{m,n} > 0$, $\dfrac{a_{m,n+1}}{a_{m,n}} \leqslant \dfrac{b_{m,n+1}}{b_{m,n}}$, $\dfrac{a_{m+1,1}}{a_{m,1}} \leqslant$ $\leqslant \dfrac{b_{m+1,1}}{b_{m,1}}$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$. Доказать, что из сходимости ряда $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} b_{m,n}$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n}$.

107. Пусть $a_{m,n} \geqslant 0$, $m, n \in \mathbb{N}$, и существует такое $q < 1$, что $\sqrt[m+n]{a_{m,n}} \leqslant q$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n}$ сходится.

108. Пусть $f(x, y) > 0$ на $[a; +\infty) \times [b; +\infty)$. Доказать, что из условий

1) при любом $x_0 \in [a; +\infty)$ функция $f(x_0, y)$ убывает;
2) при любом $y_0 \in [b; +\infty)$ функция $f(x, y_0)$ убывает;
3) при любом $x \in [a; +\infty)$ определена функция

$$\Phi(x) = \int\limits_{b}^{+\infty} f(x, y)\, dy;$$

4) интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} \Phi(x)\, dx$ сходится,

следует сходимость ряда $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} f(a + m, b + n)$.

109. Пусть $a_{m,n} > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$, и последовательность $a_{m,n}$ — убывающая. Доказать, что ряды

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n} \quad \text{и} \quad \sum_{p,q=0}^{\infty} 2^{p+q} a_{2^p, 2^q}$$

одновременно сходятся или расходятся.

110. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две неотрицательные последовательности, $p > 1$, $q = \dfrac{p}{p-1}$. Пользуясь результатами задач 39 и 36, доказать, что из сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p$ и

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^q$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{m+n}$.

111. Пусть последовательности $a_{m,n}$ и $b_{m,n}$ удовлетворяют условиям:

1) существует такое число A, что $\left|\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| \leqslant A$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$;

2) последовательность $b_{m,n}$ — убывающая в узком смысле.

Доказать, что $\left|\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot b_{i,j}\right| \leqslant Ab_{1,1}$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$.

112. Пусть последовательность $a_{m,n}$ — убывающая в узком смысле. Используя результат задачи 111, показать, что если $a_{m,1} \to 0$, $m \to +\infty$, и $a_{1,n} \to 0$, $n \to +\infty$, то ряд $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} a_{m,n}$ сходится.

113. Пусть последовательность $a_{m,n}$ — убывающая в узком смысле и $\lim\limits_{m\to\infty} a_{m,1} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{1,n} = 0$. Доказать, что ряды

1) $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n} \cos n\alpha \cos n\beta$, 2) $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n} \cos n\alpha \sin n\beta$;

3) $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n} \sin n\alpha \sin n\beta$

сходятся при любых $\alpha \neq \pi k$, $\beta \neq \pi q$, $k, q \in \mathbb{Z}$.

114. Пусть радиус сходимости каждого из степенных рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ равен 1. Доказать, что для всех x, $|x| < 1$, сходятся оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m x^{mn}$ и $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^{nm}$ и суммы их равны.

115. Пусть ряд $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n} x^m y^n$ сходится в точке (x_0, y_0). Обозначим через R_n и R_m радиусы сходимости рядов

$\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} x^m$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} y^n$ соответственно. Положим

$$a = \min(|x_0|, \inf_n R_n), \quad b = \min(|y_0|, \inf_m R_m).$$

Доказать, что ряд $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n} x^m y^n$ абсолютно сходится в точке $(x, y) \in (-a; a) \times (-b; b)$.

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, УКАЗАНИЯ

3. Например, $a_{2q-1} = \frac{1}{q}$, $a_{2q} = -\frac{1}{q}$, $q \in \mathbb{N}$.

4. Например, $a_n = \frac{1}{n^2}$. Здесь $r_n \geqslant \int\limits_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n+1}$.

5. Например, $a_n = \frac{1}{n^3}$. Здесь $0 < r_n \leqslant \int\limits_{n}^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2n^2}$.

6. Указание. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ рассмотреть $\sum\limits_{q=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n} a_q$.

7. Решение. Так как последовательность $\left\{a_n^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$ монотонна, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{\frac{p-1}{p}} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}}$ следует, что $a_n^{\frac{p-1}{p}} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{p-1}{p}}}\right)$, $n \to \infty$, т. е. $a_n^{\frac{1}{p}} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\right)$, $n \to \infty$. Умножая обе части этого соотношения на $a_n^{\frac{p-1}{p}}$, получаем, что $a_n = o\left(a_n^{\frac{p-1}{p}} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}}\right)$, $n \to \infty$, откуда и следует требуемое утверждение.

8. Например, $a_n = \frac{1}{n^2}$, $n \neq m^2$, $a_n = \frac{1}{n}$, $n = m^2$, $n, m \in \mathbb{N}$.

9. Сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}}$ следует из неравенства

$$0 \leqslant \frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}} = \frac{r_{n-1} - r_n}{\sqrt{r_{n-1}}} =$$
$$= \left(\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}\right) \cdot \frac{\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n}}{\sqrt{r_{n-1}}} \leqslant 2\left(\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}\right).$$

10. Решение. Из условия следует, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{N}$ имеем неравенство: $a_{n+p} \leqslant \frac{a_n^2}{2^p}$. Отсюда получаем,

во-первых, что $0 < a_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$ и, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, во-вторых, что

$$r_n \leqslant a_n^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^m} + \cdots\right) = a_n^2$$

и, следовательно, $\dfrac{a_n}{\sqrt{r_n}} \geqslant 1$, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ расходится.

11. Решение. Из соотношения

$$\frac{a_m}{S_m} + \frac{a_{m+1}}{S_{m+1}} + \cdots + \frac{a_q}{S_q} \geqslant \frac{S_q - S_{m-q}}{S_q}, \quad m \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N},\ q > m,$$

и расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует, что при фиксированном m

$$\lim_{q \to +\infty} \left(\frac{a_m}{S_m} + \cdots + \frac{a_q}{S_q}\right) \geqslant 1,$$

откуда в силу критерия Коши вытекает расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n}$.

12. Указание: $S_{n+1} > a_n \cdot 2^n$.

13. Решение. Положим $n_0 = 1$ и определим числа n_q, $q \in \mathbb{N}$, условием $n_q = \min\{n : n > n_{q-1},\ b_n < b_{n_{q-1}}\}$. Так как $b_n \to 0+$ при $n \to +\infty$, то числа n_q определены для всех $q \in \mathbb{N}$ и $n_q \uparrow +\infty$. Положим $\beta_n = b_{n_q}$, $n_q \leqslant n < n_{q+1}$. Если $n_q \leqslant n < n_{q+1}$, то справедливы неравенства $0 \leqslant \beta_n = b_{n_q} \leqslant b_n$ и $0 \leqslant \dfrac{a_n}{\beta_n} = \dfrac{a_n}{b_{n_q}} \leqslant \dfrac{a_{n_q}}{b_{n_q}}$. Первое из них показывает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n$ сходится, а второе — что $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{\beta_n} = 0$.

14. Указание. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то $b_n = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$; если этот ряд расходится, то утверждение доказывается аналогично теореме Римана.

15. Утверждение доказывается аналогично теореме Римана.

17. Утверждение следует из соотношений:

$$\lim_{m\to+\infty} P_m = \lim_{m\to+\infty} N_m = +\infty, \quad S_m = P_m - N_m.$$

18 а). Указание. Сравнить последовательности S_{2^q} и $\tilde{S}_q$, где $S_n = \sum\limits_{q=1}^{n} a_q$, $\tilde{S}_n = \sum\limits_{r=1}^{n} 2^r a_{2^r}$.

18 б). Решение.

1. Из условия следует, что для любых натуральных m и p справедливо соотношение

$$\frac{u_{m+p+1} - u_m}{u_{m+p+1}} \leqslant \sum_{n=m}^{m+p} \left(1 - \frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \sum_{n=m}^{m+p} \frac{u_{n+1} - u_n}{u_{n+1}} \leqslant \leqslant \frac{u_{m+p+1} - u_m}{u_{m+1}} \leqslant \frac{u_{m+p+1} - u_m}{u_1}. \tag{1}$$

Если последовательность $\{u_n\}$ неограничена, то при фиксированном m

$$\lim_{p\to\infty} \frac{u_{m+p+1} - u_m}{u_{m+p+1}} = 1,$$

откуда в силу соотношения (1) и критерия Коши следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$. Если последовательность $\{u_n\}$ ограничена, то она сходится, следовательно, в силу критерия Коши для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\mathcal{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что $0 < u_{m+p+1} - u_m < \varepsilon \cdot u_1$ для всех натуральных p и $m > \mathcal{N}(\varepsilon)$, откуда в силу соотношения (1) следует, что для этих p и m имеем: $0 \leqslant \sum\limits_{n=m}^{m+p} \left(1 - \dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right) < \varepsilon$ и в силу критерия Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ сходится. Пункт 2) доказывается аналогично.

19. Утверждение следует из неравенства

$$a_{n_0+q} \leqslant a_{n_0} \cdot \frac{b_{n_0+q}}{b_{n_0}}, \quad q \in \mathbb{N}.$$

20. Указание. Использовать результат задачи 19 и признак Гаусса.

21. Решение. Из условия следует, что $a_n = e^{n\ln(1-\alpha_n)}$, $1-\alpha_n > 0$. Если $\alpha_n > \dfrac{q\ln n}{n}$, $q > 1$, то имеем: $n\ln(1-\alpha_n) < < -n\alpha_n < -q\ln n$, откуда следует, что $0 < a_n < \dfrac{1}{n^q}$, $q > 1$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Если $0 < \alpha_n < \dfrac{q\ln n}{n}$, $0 < q < 1$, для $n > N_0$, то $\alpha_n \to 0$, $n \to +\infty$, и, следовательно, найдутся такие числа q_1, $0 < q_1 < 1$, и $N_1 \in \mathbb{N}$, что $\ln(1-\alpha_n) > \dfrac{-q_1\ln n}{n}$ для $n > N_1$. Отсюда получаем, что $a_n > \dfrac{1}{n^{q_1}}$, $0 < q_1 < 1$, $n > N_1$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Если же существует бесконечная подпоследовательность n_k, для которой $a_{n_k} \leqslant 0$, то расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует из того, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant 1$.

22. Решение. Проведем доказательство для случая $b < 1$. Доказательство для $b > 1$ проводится аналогично.

Из условия

$$\lim_{n\to+\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]\ln n = b$$

следует существование таких чисел ε, $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$, и N_1, $N_1 \in \mathbb{N}$, что для $n > N_1$ справедливо неравенство

$$\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]\ln n \leqslant 1-\varepsilon$$

и, следовательно, $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1-\varepsilon}{n\ln n}$, $n > N_1$ Положим $\alpha_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^{1-\varepsilon/2}}$, $n \geqslant 2$. Так как ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\alpha_n$ расходится, то в силу результата задачи 19 для доказательства расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ достаточно найти такое число N, $N \in \mathbb{N}$, что при $n > N$ справедливо неравенство

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}. \tag{2}$$

Возьмем такое $N_2 \in \mathbb{N}$, чтобы для $n > N_2$ выполнялось неравенство $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geqslant \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{1}{n}$. Тогда для $n > N_2$ имеем, что

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{1-\frac{\varepsilon}{2}} =$$
$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^{1-\frac{\varepsilon}{2}} \geqslant$$
$$\geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\frac{1}{n\ln n}\right) >$$
$$> 1+\frac{1}{n}+\frac{1-\varepsilon}{n\ln n}.$$

Отсюда следует справедливость неравенства (2) при $n > \max(N_1, N_2)$, что и завершает доказательство.

23. Например, $a_n = \frac{1}{n^2}$, $\quad b_n = -\frac{1}{n}$.

24. Например, $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $\quad b_n = \frac{1}{n+1}$.

26. Например, $a_n = \frac{1}{n}$.

27. Решение. Так как для данного ряда

$$S_{\frac{m^2+m-6}{2}} = 0, \quad m = 2, 3, \ldots,$$

$$0 < S_n \leqslant \frac{1}{\ln m}, \quad \frac{m^2+m-4}{2} \leqslant n < \frac{m^2+3m-4}{2},$$

го этот ряд сходится и его сумма равна нулю.

Так как $a_n \to 0$, $n \to \infty$, то для $q \leqslant 0$ последовательность $\{|a_n|^q \operatorname{sign} a_n\}$ не является бесконечно малой, таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^q \operatorname{sign} a_n$ расходится. Пусть $q > 0$, $q \neq 1$, $n_m = \frac{m^2+m-6}{2}$, $m = 2, 3, \ldots$, и $S_{n_m}^{(q)}$ — соответствующая частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^q \operatorname{sign} a_n$. Записав в сумме $S_{n_m}^{(q)}$ сначала все положительные, а затем все отрицательные слагаемые, получим:

$$S_{n_m}^{(q)} = \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{\ln^q n} - \sum_{n=2}^{m} \frac{n}{n^q \ln^q n} = \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{\ln^q n} \left(1 - \frac{1}{n^{q-1}}\right).$$

Для любого $q > 0$, $q \neq 1$, разность $1 - \dfrac{1}{n^{q-1}}$, $n = 2, 3, \ldots$, не меняет знака и существует такое $C_q > 0$, что $\left|1 - \dfrac{1}{n^{q-1}}\right| > C_q$ для всех $n = 2, 3, \ldots$. Следовательно,

$$|S_{n_m}^{(q)}| \geqslant C_q \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{\ln^q n}, \quad m = 2, 3, \ldots,$$

откуда в силу расходимости ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln^q n}$ при любом $q > 0$ следует, что $\lim\limits_{m \to +\infty} |S_{n_m}^{(q)}| = +\infty$ при любом $q > 0$, $q \neq 1$, что и доказывает расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^q \operatorname{sign} a_n$ при $q > 0$, $q \neq 1$.

28. 1) Следует из неравенства $0 \leqslant \dfrac{a_n}{1 + a_n} \leqslant a_n$. 2) Следует из неравенства $0 \leqslant \dfrac{a_n}{1 + n a_n} \leqslant a_n$. 3) Следует из неравенства $\max\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}\} < a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$. 4) Следует из неравенства $\min\{a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1}\} \leqslant a_n$. 5) Обозначим через $\tilde{S}_n$ последовательность частичных сумм ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n-1}}{n}.$$

Тогда

$$\tilde{S}_n = a_1 + \frac{a_2 + a_3}{2} + \frac{a_3 + a_4 + a_5}{3} + \cdots +$$
$$+ \frac{a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n-1}}{n} \leqslant$$

$$\leqslant a_1 + a_2\cdot\frac{1}{2} + a_3\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) + a_4\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right) + \dots +$$

$$+ a_q\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q-1}+\dots+\frac{1}{\left[\frac{q}{2}\right]+1}\right) + \dots +$$

$$+ a_{2n-1}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-2}+\dots+\frac{1}{n}\right) \leqslant \sum_{q=1}^{2n-1} a_q.$$

Полученное неравенство показывает, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1+a_2+\dots+a_{2n-1}}{n}$$

сходится. 6) Следует из неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим. 7) Следует из п. 5 и неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим.

29. 1) Так как $\dfrac{b_n}{1+b_n} = 1 - \dfrac{1}{1+b_n}$, то для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{1+b_n}$ необходимо, чтобы $b_n \to 0$, $n \to +\infty$, а при этом $\dfrac{b_n}{1+b_n} \sim b_n$, $n \to +\infty$, и расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{1+b_n}$ следует из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. 2) Следует из неравенства

$$\max\{b_n,\, b_{n+1}, \dots, b_{2n-1}\} \geqslant b_n.$$

30. Решение. Если $2^k+1 \leqslant n \leqslant 2^{k+1}$, то

$$2^{k+1}+1 \leqslant 2n-1 \leqslant 2^{k+2}-1,$$

следовательно,

$$\max\{a_n,\, a_{n+1}, \dots, a_{2n-1}\} = \frac{1}{2^{k+1}}$$

для $2^k+1 \leqslant n \leqslant 2^{k+1}$. Отсюда получаем неравенство:

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \max\{a_n,\, a_{n+1}, \dots, a_{2n-1}\} = \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2},$$

что и доказывает расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1}\}.$$

33. 1) Следует из неравенства $|a_n b_n| \leqslant \dfrac{a_n^2 + b_n^2}{2}$. 2) Следует из неравенства $(a_n + b_n)^2 \leqslant 2(a_n^2 + b_n^2)$. 3) Следует из п. 1).

34. Решение. Построим график функции $y = f(x)$ (см. рис. 7). Величина $S_1 = \int\limits_0^a f(x)\,dx$ представляет собой пло-

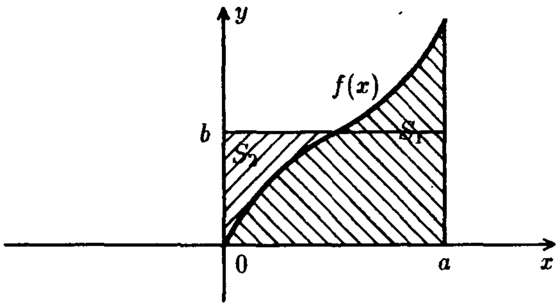


Рис. 7

щадь фигуры, ограниченной полученной кривой, осью OX и прямой $x = a$; величина $S_2 = \int\limits_0^b g(x)\,dx$ представляет собой площадь фигуры, ограниченной полученной кривой, осью OY и прямой $y = b$. Нужное неравенство вытекает из того, что площадь прямоугольника со сторонами a и b не превосходит суммы площадей $S_1 + S_2$. Полагая $f(x) = x^{\frac{1}{\lambda} - 1}$, получим последнее неравенство.

35. Утверждение следует из неравенств $\int\limits_0^a f(x)\,dx \leqslant a\cdot f(a)$, $\int\limits_0^b g(x)\,dx \leqslant b\cdot g(b)$ и результатов задачи 34.

36. 1) Решение. Пусть $\alpha_n = \dfrac{a_n}{\left(\sum\limits_{n=1}^m a_n^{\frac{1}{\lambda}}\right)^\lambda}$ и $\beta_n = \dfrac{b_n}{\left(\sum\limits_{n=1}^m b_n^{\frac{1}{\mu}}\right)^\mu}$.

Тогда

$$\frac{a_n b_n}{\left(\sum\limits_{n=1}^m a_n^{\frac{1}{\lambda}}\right)^\lambda \cdot \left(\sum\limits_{n=1}^m b_n^{\frac{1}{\mu}}\right)^\mu} = \alpha_n\cdot\beta_n \leqslant \frac{\lambda a_n^{1/\lambda}}{\sum\limits_{n=1}^m a_n^{1/\lambda}} + \frac{\mu b_n^{1/\mu}}{\sum\limits_{n=1}^m b_n^{1/\mu}}$$

и

$$\sum_{n=1}^m a_n b_n \leqslant \left(\sum_{n=1}^m a_n^{\frac{1}{\lambda}}\right)^\lambda \cdot \left(\sum_{n=1}^m b_n^{\frac{1}{\mu}}\right)^\mu \cdot \frac{\lambda \sum\limits_{n=1}^m a_n^{\frac{1}{\lambda}}}{\sum\limits_{n=1}^m a_n^{\frac{1}{\lambda}}} +$$

$$+ \frac{\mu \sum\limits_{n=1}^m b_n^{\frac{1}{\mu}}}{\sum\limits_{n=1}^m b_n^{\frac{1}{\mu}}} = \left(\sum_{n=1}^m a_n^{\frac{1}{\lambda}}\right)^\lambda \cdot \left(\sum_{n=1}^m b_n^{\frac{1}{\mu}}\right)^\mu.$$

2) Следует из п. 1).

37. Указание. Применить последнее неравенство из задачи 34, положив $\lambda = \dfrac{1}{q}$, $\mu = 1 - \dfrac{1}{q}$.

39. Решение. Из п. 2 задачи 38 получаем, что

$$\sum_{n=1}^m \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^q \leqslant$$

$$\leqslant \frac{q}{q-1} \sum_{n=1}^m a_n \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^{q-1}$$

для любого натурального m. Полагая $\lambda = \dfrac{1}{q}$, $\mu = 1 - \dfrac{1}{q}$, отсюда в силу неравенства Гельдера получаем, что

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^q \leqslant$$

$$\leqslant \frac{q}{q-1}\left(\sum_{n=1}^{m} a_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left[\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^q\right]^{1-\frac{1}{q}}.$$

Так как

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^q > 0,$$

то отсюда следует требуемое неравенство.

40. Указание. Применить утверждение задачи 39 к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{\frac{1}{q}}$ и перейти к пределу при $q \to +\infty$.

41. а) Решение. При любом $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, последовательности $\{\sin n\alpha\}$, $\{\cos n\alpha\}$ не являются бесконечно малыми (доказательство этого факта проводится так же, как доказательство в сноске на стр. 12). Так как из условия следует, что последовательность $\{a_n\}$ отделена от нуля, то и последовательности $\{a_n \sin n\alpha\}$ и $\{a_n \cos n\alpha\}$, $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, не являются бесконечно малыми, следовательно, данные ряды расходятся.

б) Утверждение следует из соотношений:

$$|a_n \sin n\alpha| \geqslant |a_n| \sin^2 n\alpha = \frac{|a_n|}{2}(1-\cos 2n\alpha);$$

$$|a_n \cos n\alpha| \geqslant |a_n| \cos^2 n\alpha = \frac{|a_n|}{2}(1+\cos 2n\alpha).$$

42. Решение. Положим $\Phi(x) = \int\limits_1^x f(t)\,dt$. Сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ эквивалентна существованию предела $\Phi(x)$ при $x \to +\infty$. Применяя формулу Тейлора, получаем, что

$$\Phi(n+1) - \Phi(n) = f(n) + \int\limits_n^{n+1} f'(t)(n+1-t)\,dt.$$

Неравенство

$$\left|\int\limits_n^{n+1} f'(t)(n+1-t)\,dt\right| \leqslant \int\limits_n^{n+1} |f'(t)|\,dt$$

показывает, что при заданных условиях ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_n^{n+1} f'(t)(n+1-t)\,dt$$

сходится абсолютно, откуда следует, что из условия существования предела $\Phi(x)$ при $x \to +\infty$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Обратно, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, то из предыдущего рассуждения вытекает существование предела $\Phi(n)$ при $n \to +\infty$. Для $x \in (0; 1)$ в силу формулы Тейлора имеем

$$|\Phi(n+x) - \Phi(n)| = |xf(n) + \int\limits_n^{n+x} f'(t)(n+x-t)\,dt| \leqslant$$

$$\leqslant f(n) + \int\limits_n^{n+1} |f'(t)|\,dt.$$

В силу сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ и абсолютной сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} f'(x)\,dx$ отсюда следует, что $\Phi(n+x)-\Phi(n) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно на $(0; 1)$, что и показывает одновременное существование пределов $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(n)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x)$.

43. Решение. Обозначим через a минимальную, в через b — максимальную из предельных точек последовательности $\{\pi n - [\pi n]\}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$. Предположим, что $0 < 1 - b \leqslant a$, тогда найдется такое натуральное число m,

что или 1) $1-b=\dfrac{1}{m}$ или 2) $0<1-m(1-b)<a$. Возьмем такую последовательность $n_k\uparrow+\infty$, что $(\pi n_q-[\pi n_q])\to b$, $q\to+\infty$. В первом случае получаем, что

$$\lim_{q\to+\infty} m(\pi n_k-[\pi n_k])=mb=m-1,$$

т. е.

$$\lim_{q\to+\infty}(\pi m n_q-m[\pi n_q]-m+1)=0,$$

откуда следует, что для последовательности $\{(\pi m n_q-[\pi m n_q])\}$ либо нуль, либо единица являются предельной точкой. Так как последовательность $\{(\pi m n_q-[\pi m n_q])\}$ есть подпоследовательность последовательности $\{(\pi n-[\pi n])\}$, то полученное утверждение противоречит принятому предположению. Во втором случае, не ограничивая общности, можно считать, что неравенство $0<1< m(1-(\pi n_q-[\pi n_q]))<Q$ справедливо для всех $q\in\mathbb{N}$, откуда получаем, что $m-1<m(\pi n_q-[\pi n_q])<m$, т. е. $[\pi m n_q]=m[\pi n_q]+m-1$. Следовательно,

$$\lim_{q\to+\infty}(\pi m n_q-[\pi m n_q])=$$
$$=\lim_{q\to+\infty}(m(\pi n_q-[\pi n_q])-m+1)=1-m(1-b)<a,$$

что противоречит определению a. Итак, предположив, что $0<1-b\leqslant a$, мы пришли к противоречию. Аналогично доказывается, что предположение $0<a<1-b$ также приводит к противоречию. Следовательно, верно хотя бы одно из равенств: $a=0,\quad b=1$.

44. Решение. В силу утверждения задачи 43 существует последовательность $n_q\uparrow+\infty$, для которой $|\sin n_q|<\dfrac{1}{q^2}$.

Последовательность

$$a_n=\begin{cases}0, & n\neq n_q,\\ 1, & n=n_q,\end{cases}\qquad q\in\mathbb{N},$$

удовлетворяет требованиям задачи.

45. Указание. Так как $\sqrt{k(m-k)}\leqslant\dfrac{m}{2}$, $1\leqslant k\leqslant m-1$, то $|c_m|\geqslant\dfrac{2}{m}\cdot m=2$.

46. Указание. Написать условие критерия Коши равномерной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ на M и перейти в нем к пределу при $x \to x_0$, где $x \in M$, $x_0 \in \overline{M}$.

47. Например,

$$u_n(x) = (-1)^n[x^n - x^{n+1}].$$

48. а) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится равномерно на E.

б) Последовательность $\{v_n(x_0)\}$ монотонна при любом $x_0 \in E$.

49. Решение. Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n u_n(x)|$ выполнено условие критерия Коши равномерной сходимости на M. Действительно, пусть $A = \sup\limits_{x\in M} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2(x) + 1$, тогда $0 \leqslant \sum\limits_{n=m}^{m+q} u_n^2(x) < A$ для любых натуральных m, q и $A \geqslant 1$. В силу критерия Коши и сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N \in \mathbb{N}$, что для всех натуральных q и $m > N$ верно неравенство $\sum\limits_{n=m}^{m+q} a_n^2 < \dfrac{\varepsilon^2}{A}$. Отсюда, применяя неравенство Коши-Буняковского, получаем, что

$$\sum_{n=m}^{m+q} |a_n u_n(x)| \leqslant \left(\sum_{n=m}^{m+q} u_n^2(x)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=m}^{m+q} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

для всех натуральных q и $m > N$, что и требовалось доказать.

50. Да, например, $f_n(x) = x + \dfrac{D(x)}{n}$, где

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ рационально}, \\ 0, & x \text{ иррационально} \end{cases} \quad -$$

функция Дирихле. Здесь каждая функция $f_n(x)$ разрывна во всех точках отрезка $[0; 1]$ и в то же время $f_n(x) \rightrightarrows x$ на $[0; 1]$.

51. Нет. Это предположение противоречит теореме о непрерывности предельной функции.

52. Например,

$$f_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{n}, \ x \neq 0, \quad f_n(0) = 0.$$

54. Указание. Использовать равенство

$$u_n(x)v_n(x) - u(x)v(x) =$$
$$= u_n(x)[v_n(x) - v(x)] + v(x)[u_n(x) - u(x)]$$

и результат задачи 53.

55. Например,

$$v_n(x) = \frac{n^2x^2}{(1+nx)(2n-x)},$$

$$u_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2n}, \ x \neq 0, \quad u_n(0) = 0.$$

56. Например, $f_n(x) = x^n$. Нарушено требование компактности множества, на котором заданы все остальные условия.

57. Решение. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Из условия 2) следует существование такого числа $N_1 \in \mathbb{N}$, что $|A_{N_1} - A| < \frac{\varepsilon}{3}$, а из условия 1) — существование такого числа $b > a$, что $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{3}$ и $|f_{N_1}(x) - A_{N_1}| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ для всех $x \geqslant b$. Для всех $x \in [b; +\infty)$ и любого натурального числа $n > N_1$ из условия 3) следует, что

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_{N_1}(x) - f(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |f_{N_1}(x) - A_{N_1}| + |A_{N_1} - A| + |A - f(x)| < \varepsilon.$$

На отрезке $[a; b]$ последовательность $f_n(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дини, следовательно, существует такое число $N_2 \in \mathbb{N}$, что $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in [a; b]$ и всех натуральных $n > N_2$. Отсюда получаем, что $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in [a; +\infty)$ и всех натуральных $n > N = \max\{N_1, N_2\}$, что и требовалось доказать.

58. Решение. Не ограничивая общности, можно считать, что каждая из функций $f_n(x)$ неубывающая, тогда и функция $f(x)$ — неубывающая на $[a;b]$. Положим

$$x_{q,m} = a + \frac{q(b-a)}{m}, \ 0 \leqslant q \leqslant m, \ m \in \mathbb{N}.$$

Для любого числа $\varepsilon > 0$ в силу непрерывности $f(x)$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $|f(x_{q,m}) - f(x_{q-1,m})| < \frac{\varepsilon}{4}$, $1 \leqslant q \leqslant m$, а в силу сходимости $f_n(x)$ и $f(x)$ на $[a;b]$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $0 \leqslant |f_n(x_{q,m}) - f(x_{q,m})| < \frac{\varepsilon}{4}$ для всех q, $0 \leqslant q \leqslant m$, и всех натуральных $n > N$. Если $x \in [x_{q-1,m}; x_{q,m}]$, $1 \leqslant q \leqslant m$, то, используя неубывание функций $f_n(x)$ и $f(x)$, получаем, что

$$\begin{aligned}
&|f_n(x) - f(x)| \leqslant \\
&\quad \leqslant |f_n(x_{q,m}) - f(x_{q-1,m})| + |f_n(x_{q-1,m}) - f(x_{q,m})| \leqslant \\
&\quad \leqslant |f_n(x_{q,m}) - f(x_{q,m})| + |f(x_{q,m}) - f(x_{q-1,m})| + \\
&\quad + |f_n(x_{q-1,m}) - f(x_{q-1,m})| + |f(x_{q-1,m}) - f(x)| < \varepsilon
\end{aligned}$$

для любого натурального $n > N$. Так как

$$[a;b] = \bigcup_{q=1}^{m} [x_{q-1,m}; x_{q,m}],$$

то неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ при $n > N$ справедливо для всех $x \in [a;b]$, что и требовалось доказать. На компакт K доказательство переносится дословно.

59. Решение. Необходимость. Пусть $[a;b] \subset (\alpha;\beta)$. Для произвольных фиксированных чисел $\varepsilon > 0$ и $N \in \mathbb{N}$ положим $E_m = \{x : x \in (\alpha;\beta), |f(x) - f_{N+m}(x)| < \varepsilon\}$, $m \in \mathbb{N}$. Из сходимости $f_n(x)$ к $f(x)$ на $(\alpha;\beta)$ и непрерывности функций $f_n(x)$ и $f(x)$ на $(\alpha;\beta)$ следует, что каждое из множеств E_m, $m \in \mathbb{N}$, является объединением интервалов и совокупность всех этих интервалов представляет покрытие отрезка $[a;b]$. Выбрав из полученной совокупности интервалов конечное покрытие, обозначим полученные интервалы через U_q и соответствующие им числа вида $N + m$ через n_q, $1 \leqslant q \leqslant Q$. Полученный набор интервалов и натуральных чисел удовлетворяет требуемому условию.

Достаточность. Пусть $x_0 \in (\alpha;\beta)$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. В силу сходимости $f_n(x_0)$ к $f(x_0)$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех натуральных $n > N$. Возьмем отрезок $[a;b] \subset (\alpha;\beta)$, содержащий внутри себя точку x_0. Пусть набор интервалов U_q и чисел $n_q \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant q \leqslant Q$, соответствует отрезку $[a;b]$ и числам $\frac{\varepsilon}{3}$, N. Обозначим через U_0 интервал U_q, содержащий точку x_0, и через n_0 — соответствующее натуральное число. В силу непрерывности функции $f_{n_0}(x)$ на $(\alpha;\beta)$ существует такое число $\delta > 0$, что $(x_0-\delta; x_0+\delta) \subset U_0$ и $|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. Отсюда для $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ получаем соотношение: $|f(x_0) - f(x)| \leqslant |f(x_0) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x)| < 3\cdot\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, что и доказывает непрерывность функции $f(x)$ в произвольной точке

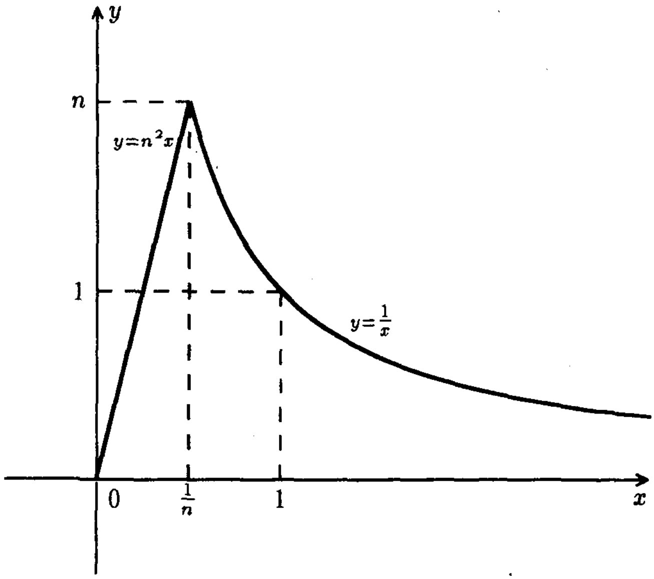


Рис. 8

$x_0 \in (\alpha; \beta)$.

60. Например,

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \\ n^2 x, & 0 \leqslant x < \frac{1}{n} \end{cases}$$

(см. рис. 8).

61. Например,

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n \cdot n^{(-1)^n} x, & 0 \leqslant x < \dfrac{1}{2n}, \\ -2n \cdot n^{(-1)^n} \left(x - \frac{1}{n}\right), & \dfrac{1}{2n} \leqslant x < \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

(см. рис. 9а, б).

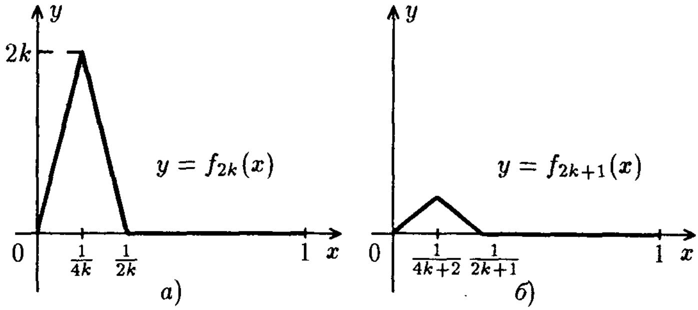


Рис. 9

62. Например,

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2 x, & 0 \leqslant x < \dfrac{1}{2n}, \\ -4n^2 \left(x - \dfrac{1}{n}\right), & \dfrac{1}{2n} \leqslant x < \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

(см. рис. 10).

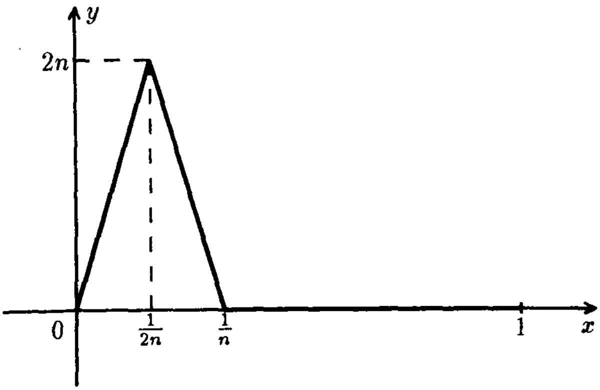


Рис. 10

63. Например,

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx, & 0 \leqslant x < \dfrac{1}{2n}, \\ -2n\left(x - \dfrac{1}{n}\right), & \dfrac{1}{2n} \leqslant x < \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

(см. рис. 11).

64. Решение. Из определения $f_n(x)$ получаем, что

$$0 \leqslant \int\limits_0^1 f_n^2(x)\,dx \leqslant \frac{1}{2^{q_n-2}}$$

и так как $q_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, то, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n^2(x)\,dx = 0.$$

Пусть $x_0 \in [0;1]$. С одной стороны, существует такая подпоследовательность $n_j \uparrow +\infty$, что $f_{n_j}(x_0) = 0$, а с другой

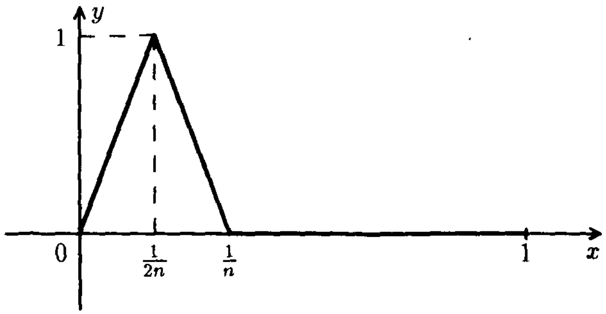


Рис. 11

стороны, существует такая бесконечная последовательность $n_i \uparrow +\infty$, что $x_0 \in \left[\frac{m_{n_i}}{2^{q_{n_i}}} - \frac{1}{2^{q_{n_i}}}; \frac{m_{n_i}}{2^{q_{n_i}}} + \frac{1}{2^{q_{n_i}}}\right]$ и, следовательно, $f_{n_i}(x_0) \geqslant \frac{1}{2}$, откуда и следует расходимость последовательности $f_n(x_0)$.

65. Указание. Использовать то, что последовательность $\{\cos nx\}$ не является бесконечно малой ни при каком $x \in \mathbb{R}$.

68. Решение. Так как $0 \leqslant f_0(x) \leqslant \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, то $0 \leqslant f_n(x) < < \frac{1}{2 \cdot 4^n}$, $x \in \mathbb{R}$, и непрерывность функции $f(x)$ следует из равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ на $\mathbb{R}$. Для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ найдется последовательность вложенных отрезков $\Delta_n = \left[\frac{q_n - 1}{2 \cdot 4^n}; \frac{q_n}{2 \cdot 4^n}\right]$, $q_n \in \mathbb{N}$, содержащих x_0. На отрезке Δ_n возьмем точку x_n, отстоящую от x_0 на $\frac{1}{4^{n+1}}$. Если $m > n$, то число $\frac{1}{4^{n+1}}$ является периодом для функции $f_m(x)$, следовательно, $\frac{f_m(x_n) - f_m(x_0)}{x_n - x_0} = 0$. Если $m \leqslant n$, то функция $f_m(x)$ линейна на Δ_n и ее угловой коэффициент по модулю равен 1.

Поэтому

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f_m(x_n)-f_m(x_0)}{x_n-x_0}=\sum_{m=0}^{n}(-1)^{\varphi(m)},$$

где $\varphi(m)$ равно 0 или 1 и, следовательно,

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\begin{cases}\text{четному целому числу при нечетном } n,\\ \text{нечетному целому числу при четном } n.\end{cases}$$

Отсюда видно, что отношение $\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$ не имеет предела при $n\to+\infty$. Так как при этом $x_n\to x_0$, то, следовательно, и отношение $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ не имеет предела при $x\to x_0$.

70. Решение. Пункты а) и б) следуют из определения $f(x)$ и равномерной сходимости при любых фиксированных $k\in\mathbb{N}$ и $\varepsilon>0$ ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln^k n}{n^x}$ на $[\varepsilon;+\infty)$. Запишем функцию $f(x)$ в виде $f(x)=x-1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x-1}{n^x}$. Из неравенства

$$\frac{1}{2^{x-1}}=\int\limits_2^{+\infty}\frac{x-1}{t^x}\,dt<\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x-1}{n^x}<\int\limits_1^{+\infty}\frac{x-1}{t^x}\,dt=1,\quad x>1,$$

получаем правую часть неравенства в). Так как $\ln 2<1$, то $1-\dfrac{\ln 2}{2^{x-1}}>0$ для $x\geqslant 1$, откуда следует, что функция $x-1+\dfrac{1}{2^{x-1}}$ монотонно возрастает на $[1;+\infty)$, и следовательно, для всех $x>1$ имеем неравенство $x-1+\dfrac{1}{2^{x-1}}>1$. Пункт г) следует непосредственно из п. а) и п. в). Соотношения

$$f(x)-x-1=\frac{x-1}{2^x}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x-1}{n^x},$$

$$0<\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x-1}{n^x}<\int\limits_2^{+\infty}\frac{x-1}{t^x}\,dt=\frac{1}{2^{x-1}},\ x>1,$$

показывают, что $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=0$, т. е. справедливость п. д).

71. а) Решение. В силу периодичности и нечетности функций $S_m(x)$ достаточно найти такое число M, что $|S_m(x)|\leqslant M$ для всех $x\in(0;\pi)$ и всех $m\in\mathbb{N}$. Пусть $C=\sup\limits_{n\geqslant 1}|nb_n|$. Для $x\in(0;\pi)$ положим $\mu=\left[\dfrac{\pi}{x}\right]$. Если $m\leqslant\mu$, то

$$|S_m(x)|\leqslant\sum_{n=1}^{m}|b_n\sin nx|\leqslant\sum_{n=1}^{\mu}|nb_nx|\leqslant C\mu x\leqslant C\pi.$$

Если же $m>\mu$, то

$$|S_m(x)|\leqslant\sum_{n=1}^{\mu}|nb_nx|+\left|\sum_{n=\mu+1}^{m}b_n\sin nx\right|\leqslant$$
$$\leqslant C\pi+\left|\sum_{n=\mu+1}^{m}b_n\sin nx\right|.$$

Для оценки суммы $\sum\limits_{n=\mu+1}^{m}b_n\sin nx$ применим к ней преобразование Абеля:

$$\left|\sum_{n=\mu+1}^{m}b_n\sin nx\right|=$$
$$=\left|\sum_{n=\mu+1}^{m-1}(b_n-b_{n+1})B_n(x)+b_mB_m(x)-b_{\mu+1}B_\mu(x)\right|,$$

где $B_q(x)=\sum\limits_{n=1}^{q}\sin nx$. Так как

$$|B_q(x)|\leqslant\frac{2}{x},\quad x\in(0;\pi),\ q\in\mathbb{N},$$

(см. стр. 44–45) и последовательность $\{b_n\}$ монотонна, то отсюда получаем, что

$$\left|\sum_{n=\mu+1}^{m}b_n\sin nx\right|\leqslant 2|b_{\mu+1}|\cdot\frac{2}{x}+2|b_m|\cdot\frac{2}{x}\leqslant\frac{8b_{\mu+1}}{x}\leqslant\frac{8C}{x(\mu+1)}.$$

Из определения числа μ следует, что $\frac{\pi}{x} < \mu + 1$, откуда окончательно получаем для $m > \mu$ оценку:

$$|S_m(x)| \leqslant C\pi + 8C\pi = 9C\pi,$$

что завершает доказательство.

б) Указание. Для доказательства необходимости рассмотреть $\sum\limits_{n=m}^{2m} b_n \sin x_m$, где $x_m = \frac{\pi}{4m}$. Доказательство достаточности проводится аналогично доказательству в решении предыдущей задачи.

72. Например, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\ln(n+1)}$.

73. Указание. Для любого $m \in \mathbb{N}$ рассмотреть

$$\sum_{n=m}^{2m} \varphi_n(x_m) \sin nx_m \sin x_m,$$

где $x_m = \frac{2}{\sqrt{m}}$.

74. Решение. Запишем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_n \cos[n(x - \varphi_n)]$, где $\rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Надо доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$. Если это не так, то найдутся такая последовательность натуральных чисел $n_q \uparrow +\infty$ и такое число $C > 0$, что $|\rho_{n_q}| > C$ для всех $q \in \mathbb{N}$. Пусть m_1 — первый член последовательности n_q, больший, чем $\frac{2\pi}{\beta - \alpha}$. Тогда на отрезке $[\alpha; \beta]$ функция $\cos[m_1(x - \varphi_{m_1})]$ принимает все значения от -1 до 1, следовательно, существует отрезок $[\alpha_1; \beta_1] \subset [\alpha; \beta]$, на котором $\cos[m_1(x - \varphi_{m_1})] \geqslant \frac{1}{2}$, и тем самым

$$|\rho_{m_1} \cos[m_1(x - \varphi_{m_1})]| > \frac{C}{2}, \quad x \in [\alpha_1; \beta_1].$$

Рассуждая аналогично, найдем число m_2 и отрезок $[\alpha_2;\beta_2]\subset[\alpha_1;\beta_1]$ такие, что

$$|\rho_{m_2}\cos[m_2(x-\varphi_{m_2})]|>\frac{C}{2},\quad x\in[\alpha_2;\beta_2].$$

Продолжая этот процесс неограниченно, получим возрастающую последовательность натуральных чисел m_k, $k\in\mathbb{N}$, и последовательность вложенных отрезков $[\alpha_k;\beta_k]$ таких, что $|\rho_{m_k}\cos[m_k(x-\varphi_{m_k})]|>\dfrac{C}{2}$, $x\in[\alpha_k;\beta_k]$. Для точки $\xi\in$ $\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}[\alpha_k;\beta_k]$ имеем

$$\varlimsup_{n\to\infty}|\rho_n\cos[n(\xi-\varphi_n)]|\geqslant\frac{C}{2}>0,$$

и, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\rho_n\cos[n(\xi-\varphi_n)]$ расходится, что противоречит условию.

75. Решение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n}\cos n^2x$ сходится при $x=0$; все его члены $u_n(x)$ бесконечно дифференцируемы на $\mathbb{R}$; для любого натурального q имеем: $(u_n(x))^{(q)}=e^{-n}\cdot n^{2q}\cos\left(n^2x+\dfrac{\pi q}{2}\right)$ и в силу сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n}n^{2q}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n(x))^{(q)}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$. Следовательно, $f\in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Ряд Тейлора $f(x)$ с центром в нуле имеет вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2q}}{(2q)!}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n}n^{4q}$.

Итак, для доказательства утверждения задачи достаточно показать, что

$$\sqrt[2q]{\frac{1}{(2q)!}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}n^{4q}}\to+\infty,\quad q\to+\infty.\tag{3}$$

Используя неравенство $n!<e\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$, получаем, что

$$\frac{1}{(2q)!}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}n^{4q}\geqslant\frac{(4q)^{4q}}{e\cdot q^{2q}e^{4q}}=\frac{1}{e}\left(\frac{16q}{e^2}\right)^{2q},$$

откуда и следует соотношение (3).

76. Следует из равенств

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{\ln n}{n}} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\ln n}}{n(n+1)(n+2)\dots(n+q)} = \infty$$

для любого натурального q.

77. Следует из неравенства:

$|u_n(x)x^n| \leqslant |x|^n \sup\limits_n |u_n(x)|$.

78. Решение. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ не меньше 1, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно для любого x, $|x| < 1$. Если $|x| < 1$, то $\left|\dfrac{a_n x^n}{1-x^n}\right| \leqslant \dfrac{|a_n x^n|}{1-|x|}$, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n x^n}{1-x^n}$ сходится абсолютно. Если же $|x| > 1$, то сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n x^n}{1-x^n}$ следует из равенства $\dfrac{a_n x^n}{1-x^n} = -a_n - \dfrac{a_n \left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$ и вышеприведенного рассуждения. Пусть теперь ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Если $|x| < 1$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n x^n}{1-x^n}$ сходится, то, применяя результат задачи 77 и равенство $a_n x^n = \dfrac{a_n x^n}{1-x^n} - \dfrac{a_n x^n}{1-x^n} \cdot x^n$, получаем, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Обратно, пусть $|x| < 1$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ сходится. Так как последовательность $\dfrac{1}{1-x^{2n}}$ монотонна и ограничена, то в силу признака Абеля сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n x^n}{1-x^{2n}}$. Опять применяя результат

задачи 77, получаем, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^n}{1-x^{2n}}$, откуда в силу равенства

$$\frac{a_n x^n}{1-x^n} = \frac{a_n}{1-x^{2n}} + \frac{a_n x^n}{1-x^{2n}}$$

получаем, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^n}{1-x^n}$. Осталось показать, что из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^n}{1-x^n}$ для всех $x : |x| > 1$. Действительно, если $|x| > 1$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^n}{1-x^n}$ сходится, то из равенства $\frac{a_n x^n}{1-x^n} = \frac{-a_n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$ и результата задачи 77 следует, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$, откуда в силу равенства $a_n = \frac{a_n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} - \frac{a_n \left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, что противоречит принятому условию.

79. Решение. Равенство

$$\frac{a_n n!}{x(x+1)\ldots(x+n)} = \frac{a_n}{n^x} \cdot \frac{n!n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

показывает, что в силу признака Абеля для доказательства данного утверждения достаточно показать, что для любого $x \neq 0, -1, -2, \ldots, -m$, $m \in \mathbb{N}$, обе последовательности $P_n = \frac{n!n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}$ и $\frac{1}{P_n}$ ограничены и локально монотонны. Так как

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{(n+1)^{x+1}}{n^x(x+n+1)} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+1} \cdot \left(1+\frac{x+1}{n}\right)^{-1},$$

то это утверждение эквивалентно тому, что последовательность $P_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+1} \cdot \left(1+\frac{x+1}{n}\right)^{-1}$ локально сохраняет знак и произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} P_n$ сходится, а это утверждение следует из соотношения

$$P_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+1}\cdot\left(1+\frac{x+1}{n}\right)^{-1} =$$
$$= \left(1+\frac{x+1}{n}+\frac{x(x+1)}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{x+1}{n}+\frac{(x+1)^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$
$$= 1+\frac{x(x+1)}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

80. Указание. 1) Показать, что ряд $\ln|x|+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left|1-\dfrac{x^2}{\pi^2 n^2}\right|$ допускает почленное дифференцирование в окрестности любой точки $x\neq\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 2) Использовать равенство $\operatorname{tg}x = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$, $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 3) Использовать равенство $\dfrac{1}{\sin x} = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$, $x\neq\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 4) Показать, что ряд из п. 1 допускает почленное дифференцирование в окрестности любой точки $x\neq\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

81. Указание. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\cos\dfrac{x}{2^n}$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, допускает почленное дифференцирование в окрестности любой точки $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

82. Указание. Обоснование этих равенств полностью аналогично обоснованию равенств 1) и 3) в задаче 80.

83. Решение. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и найдем такое число $N\in\mathbb{N}$, что для $n>N$ имеем $|S-S_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Пусть $m>N$. Представив разность S_m-S в виде

$$\frac{(S_1-S)+(S_2-S)+\dots+(S_N-S)}{m}+$$
$$+\frac{(S_{N+1}-S)+\dots+(S_m-S)}{m-N}\cdot\frac{m-N}{m},$$

видим, что

$$|\sigma_m - S| \leqslant \frac{1}{m}\left|\sum_{q=1}^{N}(S_q - S)\right| + \frac{\varepsilon(m-N)}{m},$$

откуда следует, что существует число $N_1 \in \mathbb{N}$, $N_1 > N$, обладающее свойством: для всех $m > N_1$ имеем $|\sigma_m - S| < \varepsilon$, что и завершает доказательство.

84. Доказательство аналогично доказательству утверждения задачи 83.

86. Следует из результатов задач 83 и 85.

87. Например, $a_n = (-1)^{n+1}$.

88. Следует из соотношения:

$$a_n = n\cdot\sigma_n + (n-2)\sigma_{n-2} - 2(n-1)\sigma_{n-1}.$$

90. Например,

$$\{a_n\} = \left\{1; -1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\ldots\right\},$$

т. е.

$$a_n = \frac{1}{m},\ m(m-1) < n \leqslant m^2, \quad a_n = -\frac{1}{m},\ m^2 < n \leqslant m(m+1).$$

95. Например, $a_n = (-1)^n\cdot n$.

96. Указание. Использовать формулу Коши для определения радиуса сходимости степенного ряда.

97. Решение. Применяя результат задачи 83 к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|na_n| - |(n-1)a_{n-1}|)$, получим, что $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum\limits_{n=1}^{m}|na_n| = 0$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $m > N$ имеем:

$$|a_m| < \frac{\varepsilon}{2^m} \quad \text{и} \quad \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}|na_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $x_m = 1 - \dfrac{1}{m}$, тогда в силу неравенства Бернулли для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $1 - x_m^{n-1} = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{m}\right)^{n-1} \leqslant \dfrac{n-1}{m} < \dfrac{n}{m}$.

Таким образом, для $m > N$ получаем:

$$\left|\sum_{n=1}^{m} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_m^{n-1}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{m} |a_n|(1 - x_m^{n-1}) + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\varepsilon x_m^{n-1}}{2n} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} |na_n| + \frac{\varepsilon}{2m}\sum_{n=m+1}^{\infty} x_m^{n-1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2m}\cdot\frac{1}{1-x_m} = \varepsilon,$$

откуда в силу соотношения $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = 1$ следует требуемое утверждение.

98. Следует из результата задачи 94.

99. 1) Расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости бесконечного произведения.

2) Сходится к $\left(\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n\right)^{\alpha}$.

3) Сходится к $\dfrac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n}$.

4) Сходится к $\left(\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n\right)\cdot\left(\prod\limits_{n=1}^{\infty} q_n\right)$.

5) Сходится к $\left(\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n\right) : \left(\prod\limits_{n=1}^{\infty} q_n\right)$.

100. Заметим, что как из сходимости $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$, так и из условия критерия Коши следует существование таких чисел $a > 0$, $A > a$, $N \in \mathbb{N}$, что

$$a < \prod_{q=1}^{n} p_q < A, \tag{4}$$

$m > N$ и $n > N$, поэтому будем использовать это соотношение как в доказательстве достаточности, так и в доказательстве необходимости условия критерия Коши.

Достаточность. Из соотношения (4) получаем, что для

$n > N+1$ и любого натурального m справедливо неравенство

$$\left|\prod_{k=1}^{n+m} p_k - \prod_{k=1}^{n-1} p_k\right| =$$

$$= \left|\prod_{k=1}^{n-1} p_k\right| \left|\left(\prod_{q=n}^{n+m} p_q\right) - 1\right| < A \left|\left(\prod_{q=n}^{n+m} p_q\right) - 1\right|$$

откуда в силу условия критерия Коши вытекает, что последовательность частичных произведений $P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k$ удовлетворяет критерию Коши сходимости последовательности и, следовательно, сходится.

Необходимость. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и положим $\varepsilon_1 = a\varepsilon$, где число a определено в соотношении (4). В силу критерия Коши сходимости последовательности $P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k$ найдется число $N_1 \in \mathbb{N}$ такое, что для любых натуральных m и $n > N$ справедливо неравенство $|P_{n+m} - P_{n-1}| < \varepsilon_1$. Отсюда для $n > \max\{N_1, N\}$ получаем, что

$$\varepsilon_1 = a\varepsilon > |P_{n-1}| \left|\left(\prod_{q=n}^{n+m} p_q\right) - 1\right| > a \left|\left(\prod_{q=n}^{n+m} p_q\right) - 1\right|,$$

т. е. неравенство $\left|\left(\prod_{q=n}^{n+m} p_q\right) - 1\right| < \varepsilon_1$ справедливо для любых натуральных m и $n > N_2$, где $N_2 = \max\{N_1, N\}$.

101. Указание. Сравнить $\prod_{i=1}^{2^k} p_i$ и $\prod_{j=0}^{k} p_{2^j}^{2^j}$.

102. См. решение задачи 6.

104. Например,

$$p_n = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{n^2}, & n \neq m^2, \\ 1 + \dfrac{1}{n}, & n = m^2, \end{cases} \qquad n, m \in \mathbb{N}$$

(ср. с задачей 8).

105. Следует из неравенства $0 < a_{m,n} \leqslant a_{1,1}q^{m+n-2}$ и сходимости ряда $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} q^{m+n}$.

106. Следует из неравенства $0 < a_{m,n} \leqslant b_{m,n}\cdot\dfrac{a_{1,1}}{b_{1,1}}$.

107. Следует из неравенства $0 \leqslant a_{m,n} \leqslant q^{m+n}$ и сходимости ряда $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} q^{m+n}$.

108. Решение. В силу интегрального признака сходимости простых рядов ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a+m, b+n)$ сходится и его сумма $S(m)$ удовлетворяет неравенству $0 \leqslant S(m) \leqslant F(a+m)$. Из условия следует, что $F(x)$ — неотрицательная убывающая функция на $[a; +\infty)$. Снова применяя интегральный признак сходимости простых рядов, получаем, что ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} S(m)$ сходится. Так как последовательность $f(a+m, b+n)$ неотрицательная, то сходимость повторного ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty} S(m) = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a+m, b+n)$ эквивалентна сходимости двойного ряда $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} f(a+m, b+n)$.

109. Указание. Сравнить $\sum\limits_{m=1}^{2^i}\sum\limits_{n=1}^{2^j} a_{m,n}$ и $\sum\limits_{p=0}^{i}\sum\limits_{q=0}^{j} 2^{p+q}a_{2^p,2^q}$ и использовать то, что сходимость ряда с положительными членами эквивалентна ограниченности множества его частичных сумм.

110. Решение. Равенство

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} = \sum_{\substack{m=1\\ 1\leqslant n<m}}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} + \sum_{\substack{n=1\\ 1\leqslant m\leqslant n}}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n}$$

и симметрия рядов $S_1 = \sum\limits_{\substack{m=1\\ 1\leqslant n\leqslant m}}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n}$ и $S_2 = \sum\limits_{\substack{n=1\\ 1\leqslant m\leqslant n}}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n}$ показывают, что достаточно провести доказательство сходимости только для ряда S_2. Положим $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, тогда $S_2 \leqslant \sum\limits_{\substack{n=1\\ n\geqslant m}}^{\infty} \frac{a_m b_n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n} b_n$. Неравенство Харди-Ландау (см. задачу 39) показывает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{n}\right)^p$ сходится, а неравенство Гельдера (см. задачу 36), — что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n} \cdot b_n$, откуда и следует сходимость ряда $\sum\limits_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n}$.

112. Указание. Записать разность $S_{m+p,n+q} - S_{m,n}$ в виде

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(-1)^{m+n+i+j} a_{m+i,n+j} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{q}(-1)^{r+n+j} a_{r,n+j} + \\ + \sum_{i=1}^{p}\sum_{s=1}^{n}(-1)^{m+i+s} a_{m+i,s}$$

и применить результат задачи 111.

113. См. указание к задаче 112.

114. Указание. Использовать неравенство

$$|a_n b_m x^{mn}| \leqslant |a_n x^n| \cdot |b_m x^m|, \quad m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N},\ m > 1,\ n > 1,$$

и свойства абсолютно сходящихся рядов.

115. Указание. Доказать, что для $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in (-a; a) \times (-b; b)$ последовательность $a_{m,n} \tilde{x}^m \tilde{y}^n$ ограничена.

Глава II

НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ИНТЕГРАЛЫ С ПАРАМЕТРОМ

§ 1. НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определение А. Пусть ω — собственная или правая несобственная $(+\infty)$ точка числовой прямой и функция $f\colon [a;\omega) \to \mathbb{R}$ интегрируема в смысле Римана на каждом отрезке $[a;b] \subset [a;\omega)$. Тогда, если существует предел

$$\lim_{b\to\omega-} \int\limits_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

то его величина обозначается $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ и называется несобственным интегралом функции f по промежутку $[a;\omega)$ и функция f называется интегрируемой в несобственном смысле на $[a;\omega)$.

Сам символ $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ также называют несобственным интегралом. Если предел (1) существует, то говорят, что данный интеграл сходится или является сходящимся интегралом. Если предел (1) не существует, то говорят, что данный интеграл расходится или является расходящимся интегралом. Таким образом, вопрос о сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ есть по сути дела вопрос о том, является ли символ $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ определенным числом или нет.

Точно так же, рассматривая $\lim\limits_{a\to\omega+} \int\limits_a^b f(x)\,dx$, можно определить сходимость и величину или расходимость несобственного интеграла $\int\limits_{\omega}^{b} f(x)\,dx$, где ω — собственная или левая несобственная ($-\infty$) точка числовой прямой.

Поскольку оба определения симметричны, то все утверждения в дальнейшем приводятся для интеграла вида $\int\limits_{a}^{\omega} f(x)dx$.

Если ω есть собственная точка числовой прямой и $f \in R[a;\omega]$, то $f \in R[a;b]$ для всех $b \in (a;\omega)$ и $\lim\limits_{b\to\omega-} \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{\omega} f(x)\,dx$. Это свойство выражают так: несобственный интеграл есть обобщение интеграла Римана, и эти интегралы непротиворечивы.

Рассмотрим, насколько расширилась область применения операции интегрирования с введением понятия несобственного интеграла.

Во-первых, появляется возможность интегрирования по бесконечному промежутку. Символ $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ не может быть определен конструкцией Римана или Дарбу, поскольку в эти конструкции входит длина промежутков разбиения промежутка интегрирования, что подразумевает конечность этих промежутков и, следовательно, всего промежутка.

Во-вторых, появляется возможность интегрировать неограниченные функции.

Согласно определению А для того, чтобы ставить вопрос о сходимости интеграла $\int\limits_{a}^{\omega} f(x)\,dx$, необходимо, чтобы функция f была интегрируема в смысле Римана на каждом отрезке $[a;b] \subset [a;\omega)$. Пусть $\{\varepsilon_n\}$ — монотонно возрастающая последовательность: $\varepsilon_1 \geqslant a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = \omega$. Тогда в силу критерия

Лебега*) функция f ограничена на каждом отрезке $[a;\varepsilon_n]$ и множество M_n точек разрыва f на $[a;\varepsilon_n]$ есть множество меры нуль. Следовательно, функция f может быть неограничена только в левой полуокрестности точки ω и множество M точек разрыва f на $[a;\omega)$ в силу равенства $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ есть множество меры нуль.

Обозначим символом $\langle a, b\rangle$ собственный или несобственный промежуток, не уточняя, является ли он интервалом, полуинтервалом или отрезком, с возможным исключением конечного множества точек. Точки a и b будем называть концевыми точками промежутка $\langle a, b\rangle$ независимо от того, являются ли они собственными или несобственными точками числовой прямой. Несобственную точку числовой прямой и такую собственную точку, что в любой левой или любой правой полуокрестности ее функция f неограничена, будем называть особыми точками функции f.

Пользуясь введенными терминами, заметим, что определение А есть определение несобственного интеграла функции f на промежутке $\langle a, \omega\rangle$ в том случае, когда особой точкой функции f является только правая концевая точка промежутка $\langle a, \omega\rangle$; а затем определен несобственный интеграл $\int\limits_{\omega}^{a} f(x)dx$, если особой точкой функции f является только левая концевая точка промежутка $\langle \omega, a\rangle$.

Определение В. Пусть функция $f\colon \langle\alpha, \beta\rangle \to \mathbb{R}$ имеет на промежутке $\langle\alpha, \beta\rangle$ конечное число особых точек и

$$T:\ \alpha = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = \beta$$

— такое разбиение промежутка $\langle\alpha, \beta\rangle$, что на каждом из $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$, $1 \leqslant i \leqslant n$, особой точкой функции f является только одна из концевых точек. Тогда

*) Функция $f \in R[a;b]$ тогда и только тогда, когда она ограничена на $[a;b]$ и множество ее точек разрыва на $[a;b]$ есть множество меры нуль.

а) если каждый из интегралов $\int\limits_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx$, $1 \leqslant i \leqslant n$, сходится, то интеграл $\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx$ называется сходящимся (интеграл $\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx$ сходится), его величина полагается равной $\sum\limits_{i=1}^n \int\limits_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx$ и функция f называется интегрируемой в несобственном смысле на $\langle\alpha,\beta\rangle$;

б) если хотя бы один из интегралов $\int\limits_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx$ называется расходящимся (интеграл $\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx$ расходится).

Это определение корректно, т. е. ни сходимость или расходимость интеграла $\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx$, ни его величина в случае сходимости не зависят от выбора разбиения T, удовлетворяющего сформулированному условию.

Обратим внимание на то, что выражения "функция f не интегрируема в несобственном смысле на $\langle\alpha,\beta\rangle$" и "интеграл $\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx$ расходится" не полностью тождественны. Именно, говоря "интеграл $\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx$ расходится", мы предполагаем и конечность множества особых точек функции f на $\langle\alpha,\beta\rangle$, и интегрируемость в смысле Римана функции f на любом отрезке $[a;b] \subset \langle\alpha,\beta\rangle$, не содержащем особых точек, и утверждаем только то, что хотя бы один из пределов, входящих в определение несобственного интеграла по промежутку $\langle \alpha_{i-1}; \alpha_i \rangle$ с концевой особой точкой, не существует. Выражение "функция f не интегрируема на $\langle \alpha; \beta \rangle$ в несобственном смысле" может, кроме того, обозначать и то, что множество особых точек функции f на $\langle \alpha; \beta \rangle$ бесконечно, и то, что f не интегрируема в смысле Римана на некотором отрезке $[a; b] \subset \langle \alpha; \beta \rangle$, не содержащем особых точек функции f (в силу критерия Лебега это эквивалентно тому, что множество точек разрыва f на $[a; b]$ и, тем более, на $\langle \alpha; \beta \rangle$, не есть множество меры нуль).

Пример 1. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. Функция $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ на $\langle 0; +\infty \rangle$ имеет одну концевую особую точку — несобственную точку $\omega = +\infty$. Так как

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^b \frac{dx}{1+x^2}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2},$$

то по определению интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ сходится и его величина равна $\frac{\pi}{2}$.

Пример 2. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\, dx$. Функция $f(x) = \sin x$ на $\langle 0; +\infty \rangle$ имеет только одну концевую особую точку — несобственную точку $\omega = +\infty$. Так как

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^b \sin x\, dx = \lim_{b\to+\infty} (-\cos b)$$

не существует, то по определению интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\, dx$ расходится.

Пример 3. Рассмотрим интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$, б) $\displaystyle\int\limits_0^{1}\frac{dx}{x^p}$, в) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$.

Начнем с пункта а). На промежутке $\langle 1;+\infty\rangle$ функция $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$ имеет одну особую точку — несобственную точку $(+\infty)$. Так как

$$\int\limits_a^b\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}(b^{1-p}-a^{1-p}), & p\neq 1,\\[2mm] \ln\dfrac{b}{a}, & p=1,\end{cases}\qquad 0<a<b<+\infty,$$

то интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x^p}$ сходится при $p>1$ и расходится при $p\leqslant 1$.

Переходим к пункту б). На промежутке $\langle 0;1\rangle$ функция $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$ интегрируема в смысле Римана при $p\leqslant 0$ и имеет особую точку $x_0=0$ при $p>0$. Пользуясь приведенным выше равенством, получаем, что

$$\int\limits_b^1\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}(1-b^{1-p}), & p\neq 1,\\[2mm] -\ln b, & p=1,\end{cases}$$

откуда следует, что интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{dx}{x^p}$ сходится при $p<1$ и расходится при $p\geqslant 1$.

Переходим к пункту в). Разбиение $T:\ (0,1,+\infty)$ представляет промежуток $\langle 0;+\infty\rangle$ как объединение двух промежутков $\langle 0;1\rangle$ и $\langle 1;+\infty\rangle$, на каждом из которых функция $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$ имеет не более одной особой точки, причем эта точка конечная. Согласно определению B интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся оба интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$ и $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$.

Первый из этих интегралов расходится при $p \geqslant 1$, второй — при $p \leqslant 1$, таким образом, одновременно оба эти интеграла не сходятся ни при каком значении p. Итак, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ расходится при любом значении p.

Пример 4. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx$.

Функция $f(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ на промежутке $\langle 0; +\infty\rangle$ имеет две особые точки — собственную точку $x_0 = 0$ и несобственную точку $(+\infty)$. Разбиение $T:\ (0, \pi, +\infty)$ представляет промежуток $\langle 0; +\infty\rangle$ как объединение двух промежутков $\langle 0; \pi\rangle$ и $\langle \pi; +\infty\rangle$, на каждом из которых функция $f(x)$ имеет только одну концевую особую точку.

Так как

$$\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx = d\left(\frac{\sin x}{x}\right), \quad x \neq 0,$$

то

$$\int\limits_a^b \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx = \left(\frac{\sin b}{b} - \frac{\sin a}{a}\right), \quad 0 < a < b < +\infty.$$

Отсюда получаем, что

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to 0+} \int\limits_b^{\pi} d\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{b\to 0+}\left(-\frac{\sin b}{b}\right) = -1$$

и

$$\int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to +\infty} \int\limits_{\pi}^{+\infty} d\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{b\to +\infty} \frac{\sin b}{b} = 0.$$

Итак, по определению В интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx$ сходится, поскольку сходятся оба интеграла

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx,$$

и при этом $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx = -1 + 0 = -1.$

Пример 5. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{1-x^2}$. На промежутке $\langle 0; 2\rangle$ функция $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ имеет одну, но уже не концевую особую точку $x_0 = 1$. По определению В для сходимости интеграла $\int\limits_0^2 \frac{dx}{1-x^2}$ необходима сходимость обоих интегралов: $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$ и $\int\limits_1^2 \frac{dx}{1-x^2}$.

Если $0 < b < 1$, то $\int\limits_0^b \frac{dx}{1-x^2} = \ln\frac{1-b}{1+b}$. Так как функция $F(b) = \ln\frac{1-b}{1+b}$ не имеет предела при $b \to 1-$, то, следовательно, интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$ расходится. Итак, независимо от поведения интеграла $\int\limits_1^2 \frac{dx}{1-x^2}$ интеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{1-x^2}$ расходится.

Замечание. Функция $F(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$ определена при $x = 0$ и $x = 2$ и $F(2) - F(0) = \ln\frac{1}{3}$. Если не обратить внимание на то, что функция $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ неограничена и, тем самым, неинтегрируема на $\langle 0;2\rangle$, то, формально применив формулу Ньютона—Лейбница, можно сделать неверный вывод: интеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{1-x^2}$ сходится и его величина равна $\ln\frac{1}{3}$.

Внимание! Прежде чем применить формулу Ньютона—Лейбница к интегралу $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, необходимо убедиться, что функция $f(x)$ интегрируема в смысл Римана на $\langle a;b\rangle$.

Пример 6. Функция Дирихле

$$D(x)=\begin{cases}0, & x \text{ — иррационально,}\\ 1, & x \text{ — рационально}\end{cases}$$

не интегрируема в смысле Римана ни на каком отрезке $[a;b]\subset \subset [0;1]$. Следовательно, функция $D(x)$ не интегрируема и в несобственном смысле на $\langle 0;1\rangle$.

Множество функций, интегрируемых в несобственном смысле на промежутке $\langle a;b\rangle$ (собственном или несобственном), обозначим через $\widetilde{R}\langle a;b\rangle$. Еще раз обратим внимание, что для собственного промежутка $\langle a;b\rangle$ множество $R[a;b]$ интегрируемых в смысле Римана на $[a;b]$ функций есть подмножество $\widetilde{R}\langle a;b\rangle$.

Основные свойства несобственного интеграла.

1. Если $f\in\widetilde{R}\langle a;b\rangle$ и $g\in\widetilde{R}\langle a;b\rangle$, то для любых постоянных α, β функция $\alpha f+\beta g\in\widetilde{R}\langle a;b\rangle$ и

$$\int\limits_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx=\alpha\int\limits_a^b f(x)\,dx+\beta\int\limits_a^b g(x)\,dx \text{ (линейность).}$$

Другими словами, несобственный интеграл есть линейный функционал на линейном пространстве $\widetilde{R}\langle a;b\rangle$.

Следствие. Если $f(x)=f_1(x)+\dots+f_q(x)$ и интегралы $\int\limits_a^b f_i(x)\,dx$, $1\leqslant i\leqslant q-1$, сходятся, а интеграл $\int\limits_a^b f_q(x)\,dx$

расходится, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ расходится.

2. Если $f \in \widetilde{R}\langle a; b\rangle$ и $c \in \langle a; b\rangle$, то $f \in \widetilde{R}\langle a; c\rangle$, $f \in \widetilde{R}\langle c; b\rangle$ и

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx \qquad \text{(аддитивность).}$$

3. Если $f \in \widetilde{R}\langle a; b\rangle$, $g \in \widetilde{R}\langle a; b\rangle$ и $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in \langle a; b\rangle$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx \quad \text{(монотонность интеграла).}$$

Следствие. Если $f \in \widetilde{R}\langle a; b\rangle$ и $|f| \in \widetilde{R}\langle a; b\rangle$, то

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

4. Если ω — единственная особая точка функции f на $\langle a; \omega\rangle$ и $f \in \widetilde{R}\langle a; \omega\rangle$, то для любой строго монотонной и непрерывно дифференцируемой на $[\alpha; \beta)$ функции $\varphi\colon [\alpha; \beta) \to [a; \omega)$ функция $(f \circ \varphi)\varphi' \in \widetilde{R}\langle \alpha; \beta\rangle$ и

$$\int\limits_a^\omega f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

(замена переменного в несобственном интеграле).

5. Если функции $f\colon [a; \omega) \to \mathbb{R}$ и $g\colon [a; \omega) \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемы на $[a; \omega)$ и существует $\lim\limits_{b \to \omega-} f(x)g(x)$, то интегралы $\int\limits_a^\omega f(x)g'(x)\,dx$ и $\int\limits_a^\omega f'(x)g(x)\,dx$ одновременно сходятся или расходятся, и в случае их сходимости имеет место равенство

$$\int\limits_a^\omega f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^\omega - \int\limits_a^\omega f'(x)g(x)\,dx,$$

где

$$f(x)g(x)\Big|_a^\omega = \lim_{b\to\omega-}(f(x)g(x)) - f(a)g(a)$$

(интегрирование по частям в несобственном интеграле).

Из рассмотренных выше примеров видно, что если первообразная функция $F\colon\langle a;b\rangle \to \mathbb{R}$ для функции $f\colon\langle a;b\rangle \to \mathbb{R}$ аналитически представлена как элементарная функция, то исследование сходимости и вычисление несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сводится к ранее изученному вопросу существования и вычисления предела элементарной функции. Поэтому основным вопросом в этом разделе является исследование сходимости несобственного интеграла в том случае, когда такое представление первообразной или невозможно или достаточно громоздко.

Заметим, что условие: множество точек разрыва функции f на промежутке $\langle a;b\rangle$ есть множество меры нуль — необходимо и достаточно для того, чтобы функция f была интегрируема в смысле Римана на любом отрезке $[\alpha;\beta]\subset\langle a;b\rangle$, не содержащем особых точек f. Поскольку функции, не обладающие этим свойством или имеющие бесконечное множество особых точек на $\langle a;b\rangle$, заведомо не интегрируемы в несобственном смысле на $\langle a;b\rangle$, то в дальнейшем изложении, не оговаривая этого специально, будем считать, что все рассматриваемые функции имеют на промежутке интегрирования конечное множество особых точек и что множество точек разрыва этих функций на данном промежутке есть множество меры нуль.

Поскольку несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся все составляющие его интегралы вида $\int\limits_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx$, где особой точкой функции f на $\langle a_{i-1};a_i\rangle$ является только одна из точек a_{i-1}, a_i, а сходимость несобственного интеграла этого вида симметрично определяется как для левой, так и для правой концевой точки, то дальнейшие утверждения и соотношения в целях простоты изложения формулируем для интеграла вида $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$, где $f \in R[a;b]$ для всех $[a;b] \subset [a;\omega)$, если специально не оговорено противное.

Так как сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ есть существование предела функции $F(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ при $b \to \omega-$, то условия сходимости интеграла $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$, в основном, получаются перефразировкой условий существования предела функции. В частности, если функция f неотрицательна на $[a;\omega)$, то функция $F(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ монотонна на $[a;\omega)$ и существование предела $\lim\limits_{b\to\omega-} F(b)$ эквивалентно ограниченности F на $[a;\omega)$.

Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. Интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $B > a$, что для любых чисел b_1, b_2, удовлетворяющих условию $B < b_1 < b_2 < \omega$, справедливо неравенство $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$.

Пример 7. Покажем, пользуясь критерием Коши, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\operatorname{sign}\sin \pi x}{x+2}\,dx$ сходится.

Если $x \in [n; n+1]$, $n \in \mathbb{N}$, то $\operatorname{sign}\sin \pi x = (-1)^n$. Следовательно, если $[b_1] \leqslant [b_2] - 2$, то

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{\operatorname{sign}\sin \pi x}{x+2}\,dx =$$

$$= \int\limits_{b_1}^{[b_1]+1} \frac{(-1)^{[b_1]}}{x+2}\,dx + \sum_{n=[b_1]+1}^{[b_2]-1} \int\limits_{n}^{n+1} \frac{(-1)^n}{x+2}\,dx + \int\limits_{[b_2]}^{b_2} \frac{(-1)^{[b_2]}}{x+2}\,dx;$$

если $[b_1] = [b_2] - 1$, то

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{\operatorname{sign}\sin \pi x}{x+2}\,dx = \int\limits_{b_1}^{[b_2]} \frac{(-1)^{[b_1]}}{x+2}\,dx + \int\limits_{[b_2]}^{b_2} \frac{(-1)^{[b_2]}}{x+2}\,dx;$$

если же $[b_1] = [b_2]$, т. е. точки b_1 и b_2 лежат на одном полуинтервале с целочисленными концами $[n; n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{\operatorname{sign}\sin \pi x}{x+2}\,dx = \int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{(-1)^{[b_1]}}{x+2}\,dx.$$

Так как

$$\left|\int\limits_{b_1}^{[b_1]+1} \frac{(-1)^{[b_1]}}{x+2}\,dx\right| < \frac{1}{[b_1]+2} < \frac{1}{b_1+1},$$

$$\left|\int\limits_{[b_2]}^{b_2} \frac{(-1)^{[b_2]}}{x+2}\,dx\right| < \frac{1}{[b_2]+2} < \frac{1}{b_1+1}$$

и

$$\left|\sum_{n=[b_1]+1}^{[b_2]-1} \int\limits_{n}^{n+1} \frac{(-1)^n}{x+2}\,dx\right| = \left|\sum_{n=[b_1]+1}^{[b_2]-1} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n+2}\right)\right| <$$

$$< 2\ln\left(1 + \frac{1}{[b_1]+3}\right) < \frac{2}{b_1+1,}$$

то

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{\operatorname{sign}\sin \pi x}{x+2}\,dx\right| < \frac{4}{b_1+1}.$$

Итак, если $\frac{4}{\varepsilon} < b_1 < b_2$, то $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{\operatorname{sign}\sin \pi x}{x+2}\,dx\right| < \varepsilon$. Таким образом, для интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sign}\sin \pi x}{x+2}\,dx$ выполнены условия критерия Коши и, следовательно, этот интеграл сходится.

Пример 8. Покажем, пользуясь критерием Коши, что интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sign}\sin(\pi \ln x)}{x+2}\,dx$ расходится.

Начнем с формулировки отрицания критерия Коши. Надо найти такое число ε_0, что для любого $B > 1$ можно указать пару чисел b_1, b_2, для которых $B < b_1 < b_2$, но

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{\operatorname{sign}\sin(\pi \ln x)}{x+2}\,dx\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

Поскольку интеграл $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{\operatorname{sign}\sin(\pi \ln x)}{x+2}\,dx\right|$ оценивается снизу, то естественно взять такой промежуток интегрирования $[b_1; b_2]$, на котором подынтегральная функция не меняет знака. Определим числа b_1 и b_2 равенствами: $\ln b_1 = 2n$, $\ln b_2 = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$; тогда для любого числа $B > 1$ условие $B < b_1 < b_2$ выполнено, если взять достаточно большое n. Для $x \in (b_1; b_2)$ имеем $\operatorname{sign}\sin(\pi \ln x) = 1$, следовательно,

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{\operatorname{sign}\sin(\pi \ln x)}{x+2}\,dx = \int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{dx}{x+2} = \ln(b_2+2) - \ln(b_1+2) =$$
$$= \ln b_2 - \ln b_1 + \ln\left(1 + \frac{2}{b_2}\right) - \ln\left(1 + \frac{2}{b_1}\right) > 1 - \frac{2}{b_1} > \frac{1}{2}.$$

Итак, если $\varepsilon = \frac{1}{2}$, то для любого числа $B > 1$ находится такая пара чисел b_1, b_2, что $B < b_1 < b_2$ и $\int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{\operatorname{sign}\sin(\pi \ln x)}{x+2}\,dx > \varepsilon$.

Следовательно, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sign}\sin(\pi\ln x)}{x+2}\,dx$ расходится.

Пример 9. Покажем, пользуясь критерием Коши, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} x|\cos\pi x^2|\sin^{2[x^2]^2}\pi x^2\,dx$ сходится.

Пусть $1 < b_1 < b_2$. Так как подынтегральная функция неотрицательна, то для целых чисел q_1, q_2 таких, что $1 \leqslant q_1 \leqslant b_1^2 < b_2^2 \leqslant q_2$, имеет место неравенство

$$0 \leqslant \int\limits_{b_1}^{b_2} x|\cos\pi x^2|\sin^{2[x^2]^2}\pi x^2\,dx \leqslant \int\limits_{\sqrt{q_1}}^{\sqrt{q_2}} x|\cos\pi x^2|\sin^{2[x^2]^2}\pi x^2\,dx.$$

Так как

$$\int\limits_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} x|\cos\pi x^2|\sin^{2[x^2]^2}\pi x^2\,dx = \int\limits_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} x|\cos\pi x^2|\sin^{2n^2}\pi x^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_n^{n+1} |\cos\pi t|\sin^{2n^2}\pi t\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n^2} z\,d(\sin z) = \frac{1}{2\pi n^2},$$

то

$$\int\limits_{\sqrt{q_1}}^{\sqrt{q_2}} x|\cos\pi x^2|\sin^{2[x^2]^2}\pi x^2\,dx = \sum_{n=q_1}^{q_2-1} \frac{1}{2\pi n^2} < \frac{1}{2\pi(q_1-1)}.$$

Итак, если $\sqrt{\frac{1}{2\pi\varepsilon}+2} < b_1 < b_2$, то

$$0 \leqslant \int\limits_{b_1}^{b_2} x|\cos\pi x^2|\sin^{2[x^2]^2}\pi x^2\,dx < \varepsilon,$$

следовательно, в силу критерия Коши, интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} x|\cos\pi x^2|\sin^{2[x^2]^2}\pi x^2\,dx$$

сходится.

Обратите внимание на то, что подынтегральная функция $f(x) = x|\cos\pi x^2|\sin^{2[x^2]^2}\pi x^2$ в данном сходящемся интеграле не стремится к нулю при $x \to +\infty$ и даже не ограничена на $[1;+\infty)$.

Предлагаем читателю самостоятельно сформулировать утверждение критерия Коши сходимости несобственного интеграла и его отрицание в том случае, когда единственной особой точкой подынтегральной функции является левая концевая точка промежутка интегрирования.

Из критерия Коши немедленно следует, что сходимость или расходимость интеграла $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ зависит от поведения функции f только в левой полуокрестности точки ω — промежутке вида $\langle c;\omega\rangle$. Будем говорить, что функция f локально слева (справа) в точке ω обладает некоторым свойством, если существует такая левая (правая) полуокрестность точки ω, в которой f обладает этим свойством. Например, выражение "функция f монотонно локальна слева в точке ω" обозначает, что f монотонна на некотором промежутке $\langle c;\omega\rangle$.

Как уже не раз отмечалось при исследовании существования предела, применение критерия Коши для исследования сходимости конкретного несобственного интеграла, по большей части, технически сложно. Поэтому, в основном, при решении этого вопроса используются достаточные условия, в совокупности имеющие большой объем применения.

Теорема сравнения. Пусть функции $f\colon [a;\omega) \to \mathbb{R}$ и $g\colon [c;\omega) \to \mathbb{R}$ удовлетворяют неравенству $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ локально слева в точке ω. Тогда из сходимости интеграла $\int\limits_c^\omega g(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$, а из расходимости $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_c^\omega g(x)dx$.

Следствием этой теоремы является

Признак сравнения. Пусть функция $f\colon [a;\omega) \to \mathbb{R}$ неотрицательна, функция $g\colon [c;\omega) \to \mathbb{R}$ локально слева неотрицательна в точке ω и $f(x) \sim g(x)$ при $x \to \omega$. Тогда интегралы

$\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ и $\int\limits_c^\omega g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Заметим, что для локально неотрицательных слева в точке ω функций $f\colon [a;\omega) \to \mathbb{R}$ ограниченность функции $F(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ на $[a;\omega)$ эквивалентна сходимости интеграла $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$. Поэтому для таких — и только для таких! — функций вместо выражений "интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ сходится" и "интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ расходится" применяют соответственно символы: $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx < \infty$ и $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx = \infty$.

Применение теоремы и признака сравнения для анализа сходимости несобственных интегралов требует, как и для рядов, набора "эталонных" функций, сходимость или расходимость соответствующего интеграла для которых установлена. Наиболее употребительным таким набором является семейство степенных функций: $g(x) = \dfrac{1}{x^p}$ для анализа интегралов вида $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $g(x) = \dfrac{1}{(b-x)^p}$ для анализа интегралов вида $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, где особой точкой функции f является точка b $(-\infty < a < b < +\infty)$.

Как было показано выше, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$. Дословно повторяя ход анализа интеграла $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^p}$ получаем, что интеграл $\int\limits_a^b \dfrac{dx}{(b-x)^p}$ $(-\infty <$

$< a < b < +\infty$) сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geqslant 1$. В силу линейности для любого $c > 0$ получаем, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{c\,dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$, расходится при $p \leqslant 1$, а интеграл $\int\limits_a^b \frac{c\,dx}{(b-x)^p}$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geqslant 1$.

Обратим внимание на то, что хотя в теореме сравнения и признаке сравнения есть условия как сходимости, так и расходимости интеграла $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$, однако ни то, ни другое не являются критерием сходимости. Дело в том, что нет такой универсальной (зависящей только, может быть, от промежутка $[a;\omega)$) функции $g\colon [a;\omega) \to \mathbb{R}$, чтобы из неравенства $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, $x \in [a;\omega)$, следовала бы сходимость, а из неравенства $f(x) > g(x)$, $x \in [a;\omega)$, — расходимость интеграла $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ (или из неравенства $0 \leqslant f(x) < g(x)$ сходимость, а из неравенства $f(x) \geqslant g(x)$ расходимость).

Признаки Дирихле—Абеля сходимости несобственного интеграла.

I. Пусть функции $f\colon [a;\omega) \to \mathbb{R}$ и $g\colon [a;\omega) \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям:

а) интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ сходится,

б) функция g локально монотонна слева в точке ω и ограничена на $[a;\omega)$.

Тогда интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)g(x)\,dx$ сходится.

II. Пусть функций $f\colon [a;\omega) \to \mathbb{R}$ и $g\colon [a;\omega) \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям:

а) функция $F(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ ограничена на $[a;\omega)$,

б) функция g локально монотонна слева в точке ω и $\lim\limits_{x\to\omega-} g(x) = 0$.

Тогда интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)g(x)\,dx$ сходится.

Теорема. Если интеграл $\int\limits_a^\omega |f(x)|\,dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ сходится.

Определение. Если интеграл $\int\limits_a^\omega |f(x)|\,dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ называется абсолютно сходящимся. Если интеграл $\int\limits_a^\omega |f(x)|\,dx$ расходится, а интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ сходится, то этот интеграл называется условно сходящимся.

Пользуясь этими терминами, предыдущую теорему можно сформулировать так: "абсолютно сходящийся интеграл сходится" или "множество абсолютно сходящихся интегралов есть подмножество сходящихся интегралов".

Для функций, локально сохраняющих знак в соответствующей полуокрестности особой точки, сходимость несобственного интеграла, очевидно, совпадает с абсолютной сходимостью. Таким образом, теорема и признак сравнения говорят по сути об абсолютной сходимости несобственного интеграла. В формулировке признаков Абеля—Дирихле ограничений на знак подынтегральной функции нет, так что они могут применяться как к интегралу от функции, локально сохраняющей знак в левой полуокрестности точки ω, так и к интегралу от функции, не обладающей этим свойством. На деле, признаки Абеля и Дирихле существенно используются именно для установления сходимости, чаще всего условной, интегралов от функций, не являющихся знакопостоянными в левой полуокрестности точки ω. Действительно, из условия, что сомножитель $g(x)$ — локально монотонная и ограниченная слева в точке ω функция, следует, что g локально сохраняет знак слева в точке ω. Если произведение $f(x)g(x)$ локально сохраняет знак слева в точке ω, то, не ограничивая общности, можно считать, что обе функции g и f локально неотрицательны слева в точке ω, поэтому ограниченность функции $F(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ и сходимость интеграла $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ эквивалентны. Из всего этого следует, что при выполнении условий признаков Абеля и Дирихле сходимость интеграла $\int\limits_a^\omega f(x)g(x)\,dx$ следует из теоремы сравнения и сходимости интеграла $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$. Проверка же того, что для данной подынтегральной функции выполнены условия теоремы сравнения, обычно проще проверки выполнения условий признаков Абеля или Дирихле.

Чаще всего признаки Абеля—Дирихле применяются для установления сходимости интегралов вида $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\sin x\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\cos x\,dx$, если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ расходится. В таком случае проще начать с установления сходимости интеграла, а для анализа абсолютной сходимости широко используемым приемом является оценка:

$$|f(x)\sin x| \geqslant |f(x)|\sin^2 x = \frac{|f(x)|}{2}(1-\cos 2x);$$

$$|f(x)\cos x| \geqslant |f(x)|\cos^2 x = \frac{|f(x)|}{2}(1+\cos 2x).$$

Распространенной ошибкой при применении признаков Абеля—Дирихле является пропуск установления монотонности сомножителя $g(x)$. Часто она происходит из-за очевидности этой монотонности, но всегда необходимо отмечать, что это свойство выполнено. Иногда считают достаточным написать оценку $0 \leqslant g(x) \leqslant \varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$. Следует ясно понимать, что из этой оценки следует только равенство $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, но никоим образом не монотонность $g(x)$. Заметим, что алгебраическая (в частности, рациональная) функция локально монотонна слева в $+\infty$: этим фактом будем в дальнейшем пользоваться.

Пример 10. Исследовать сходимость интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^4 - 2x^2 - 1}{x^6 + 4x^3 + 3}\,dx.$$

Решение. Прежде всего заметим, что поскольку функция $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^2 - 1}{x^6 + 4x^3 + 3}$ рациональна, то ее первообразная выражается в виде элементарной функции. Найдя это выражение, можно было бы не только решить вопрос о сходимости данного интеграла, но и в случае положительного решения найти его величину. Но вычисление первообразной здесь технически громоздко, а задача определения величины интеграла не ставится, поэтому вместо нахождения и исследования первообразной воспользуемся признаком сравнения. Так как единственной особой точкой функции $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^2 - 1}{x^6 + 4x^3 + 3}$ на $\langle 0; +\infty\rangle$ является несобственная точка $+\infty$, интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится и $\dfrac{x^4 - 2x^2 - 1}{x^6 + 4x^3 + 3} \sim \dfrac{1}{x^2}$ при $x \to +\infty$, то в силу признака сравнения интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^4 - 2x^2 - 1}{x^6 + 4x^3 + 3}\,dx$ сходится.

Пример 11. Исследовать сходимость интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4 + 8x^9}}.$$

Решение. Функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4 + 8x^9}}$ имеет на промежутке $\langle 0; +\infty\rangle$ две особые точки: 0 и $+\infty$. Следовательно, необходимо отдельно рассмотреть сходимость каждого из интегралов: $\int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+8x^9}}$ и $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+8x^9}}$ для некоторого $a \in \in (0;+\infty)$.

Пользуясь признаком сравнения и соотношениями

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+8x^9}} \sim \frac{1}{2x^3} \text{ при } x \to +\infty, \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+8x^9}} \sim \frac{1}{x^{4/3}} \text{ при } x \to 0,$$

получаем, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+8x^9}}$ сходится, а интеграл $\int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+8x^9}}$ $(0 < a < +\infty)$ расходится. Таким образом, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+8x^9}}$ расходится.

Пример 12. Исследовать сходимость интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}.$$

Решение. Функция $\frac{1}{\sqrt{x+x^3}}$ имеет на промежутке $(0;+\infty)$ две особые точки — собственную $x_0 = 0$ и несобственную точку $(+\infty)$. Следовательно, необходимо отдельно рассмотреть сходимость каждого из интегралов $\int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$ и $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$ для некоторого $a \in (0;+\infty)$.

Пользуясь признаком сравнения, из соотношений

$$\frac{1}{\sqrt{x+x^3}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ при } x \to 0+, \qquad \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} \sim \frac{1}{x^{3/2}} \text{ при } x \to +\infty$$

получаем, что каждый из этих интегралов сходится, т. е. сходится $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$.

Пример 13. Зависимость периода колебаний T математического маятника от его длины L и начального угла отклонения от вертикали φ_0 выражается формулой

$$T = 2\sqrt{\frac{L}{g}} \int\limits_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$

Показать, что этот интеграл сходится при $0 < \varphi_0 < \pi$.

Решение. На промежутке $\langle 0; \pi \rangle$ функция

$$\frac{1}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}$$

имеет одну особую точку $\varphi = \varphi_0$. Так как

$$\frac{1}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \sim \frac{2}{(\sin^{1/2} \varphi_0)(\varphi_0 - \varphi)^{1/2}} \quad (\varphi \to \varphi_0),$$

то в силу признака сравнения интеграл $\int\limits_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}$ сходится.

Если представить маятник как невесомый стержень, один конец которого закреплен в шарнире без трения, а второй, с закрепленной на нем точечной массой, свободен, то можно говорить и о начальных углах $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = \pi$. При этом маятник качаться вообще не будет, ибо в первом случае он находится в устойчивом, а во втором — в неустойчивом равновесии. Если $\varphi_0 \to 0+$, то $T \to 0$, а если $\varphi_0 \to \pi-$, то $T \to +\infty$, т. е. по мере приближения начального положения маятника к состоянию неустойчивого равновесия период его колебаний неограниченно растет.

Пример 14. Исследовать сходимость интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\, dx.$$

Решение. Функция $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$ имеет на промежутке $\langle 0; +\infty)$ одну особую точку $(+\infty)$. Поскольку функция

$f(x) = e^{-\sqrt{x}}$ при $x \to +\infty$ не эквивалентна никакой степенной функции, то применяем не признак сравнения, а теорему сравнения. Для любого $a > 0$ неравенство $0 < e^{-\sqrt{x}} < \dfrac{1}{x^a}$ справедливо, если $x > B(a)$ (обратите внимание, что значение B зависит от a). Если $a \leqslant 1$, то такая оценка неинформативна — интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$ расходится, а этот факт ничего не говорит о поведении интеграла от меньшей функции. Значит, нужно взять такое значение a, чтобы интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^a}$ сходился, тогда оценка $0 < e^{-\sqrt{x}} < \dfrac{1}{x^a}$ будет информативна. Поскольку единственное ограничение на a есть условие $a > 0$, то имеем право взять $a = 2$, и тогда из неравенства $e^{-\sqrt{x}} < \dfrac{1}{x^2}$, $x > B(2)$, в силу теоремы сравнения получим, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\, dx$ сходится.

Пример 15. Исследовать сходимость интеграла

$$\int\limits_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx.$$

Решение. Подынтегральная функция $f(x) = \ln \sin x$ неположительна и имеет на $\left\langle 0; \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$ одну особую точку $x_0 = 0$. В силу линейности сходимость интеграла $\int\limits_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx$ эквивалентна сходимости интеграла от неотрицательной функции $\int\limits_0^{\pi/2} |\ln \sin x| \, dx = -\int\limits_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx$. Так как аргумент логарифма при $x \to 0$ является бесконечно малой величиной, то функция $|\ln \sin x|$ не эквивалентна никакой степенной функции аргумента логарифма, т. е. функции вида $\dfrac{1}{\sin^a x}$ *). Поэтому применим не признак сравнения, а теорему сравнения. Для любого числа $a > 0$ неравенство $|\ln\sin x| < \dfrac{1}{\sin^a x}$ справедливо, если $0 < x < B(a)$ (величина B зависит от a). Если $a > 1$, то из соотношения $\dfrac{1}{\sin^a x} \sim \dfrac{1}{x^a}$, $x \to 0$, и признака сравнения следует, что интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{1}{\sin^a x}\,dx$ расходится — эта оценка неинформативна, поскольку расходимость интеграла от большой функции ничего не говорит о поведении интеграла от меньшей. Значит, надо взять такое значение a, чтобы интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{dx}{\sin^a x}$ сходился, тогда оценка $|\ln\sin x| < \dfrac{1}{\sin^a x}$ будет информативна. Поскольку единственное ограничение на a есть условие $a > 0$, то имеем право положить $a = \dfrac{1}{2}$. Тогда из соотношения $\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \to 0$ и признака сравнения получим, что интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ сходится, а из неравенства $|\ln\sin x| < \dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}$ и теоремы сравнения получим окончательно, что сходится интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$.

Обратим внимание на то, что в ходе решения использовалось соотношение эквивалентности $\sin x \sim x$, $x \to 0$, а не $\ln\sin x \sim \ln x$, $x \to 0+$. Из соотношения $g(x) \sim f(x)$, $x \to a$, вообще говоря, не следует соотношение $h(g(x)) \sim h(f(x))$, $x \to a$; такое утверждение в каждом конкретном случае требует обоснования. Соотношение $\ln\sin x \sim \ln x$, $x \to 0+$ верно (проверьте), но его обоснование было бы излишним усложне-

---

*) $\ln\alpha = o\left(\dfrac{1}{\alpha^a}\right)$, $\alpha \to 0+$, для любого $a > 0$.

нием решения примера.

Пример 16. Исследуем сходимость интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\cos x}{40+x^2}\,dx.$$

Функция $f(x) = \dfrac{x\cos x}{40+x^2}$ имеет на $\langle 0;+\infty\rangle$ одну особую точку $(+\infty)$ и не сохраняет знак локально слева в этой точке. Теоретически надо было бы начать с анализа абсолютной сходимости данного интеграла, но так как $\dfrac{x}{40+x^2} \sim \dfrac{1}{x}$, $x \to +\infty$, то простейшая оценка $|f(x)| \leqslant \dfrac{x}{40+x^2}$ не дает возможности утверждать, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится. Как уже говорилось, в данном случае проще начать с проверки выполнения условий признаков Абеля—Дирихле. Действительно, функция $F(b) = \int\limits_0^{b} \cos x\,dx = \sin b$ ограничена на $[0;+\infty)$, рациональная функция $g(x) = \dfrac{x}{40+x^2}$ локально монотонна слева в точке $(+\infty)$ ($g(x)$ монотонна на луче $x \geqslant \sqrt{40}$) и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Итак, в силу признака Дирихле—Абеля интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x\cos x}{40+x^2}\,dx$ сходится.

Для исследования абсолютной сходимости данного интеграла применим указанную выше оценку $|\cos x| \geqslant \cos^2 x$. Имеем

$$\left|\frac{x\cos x}{40+x^2}\right| \geqslant \frac{x\cos^2 x}{40+x^2} = \frac{x}{40+x^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right).$$

Дословно повторяя приведенные выше рассуждения, получаем, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x\cos 2x}{2(40+x^2)}\,dx$ сходится. Соотношение

$\dfrac{x}{2(40+x^2)} \sim \dfrac{1}{2x}$, $x \to +\infty$, и признак сравнения показывают, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x}{2(40+x^2)}\,dx$ расходится. Следовательно, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x\cos^2 x}{40+x^2}\,dx$ расходится, откуда в силу теоремы сравнения следует, что расходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \left|\dfrac{x\cos x}{40+x^2}\right| dx$, т. е. интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x\cos x}{40+x^2}\,dx$ сходится условно.

Пример 17. Исследуем сходимость интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}\,dx.$$

Решение. Функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}$ имеет на $\langle 0;+\infty\rangle$ две особые точки $x_0 = 0$ и $(+\infty)$, следовательно, необходимо отдельно рассмотреть сходимость каждого из интегралов $\int\limits_0^{a} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}\,dx$ для некоторого $a \in (0;+\infty)$.

Начнем с простейших оценок. Так как $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ при $x \to 0$ и подынтегральная функция неотрицательна, то в силу признака сравнения интеграл $\int\limits_0^{a} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}\,dx$ сходится абсолютно.

Так как $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x^3+x^5}}$ и $\dfrac{1}{\sqrt{x^3+x^5}} \sim \dfrac{1}{x^{5/2}}$ при $x \to +\infty$, то в силу теоремы и признака сравнения интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}\right| dx$ сходится. Следовательно, интеграл

$\int\limits_0^{+\infty} \left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}\right| dx$ сходится, т. е. интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}\, dx$ сходится абсолютно.

Пример 18. Исследуем сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \dfrac{\cos\frac{1}{x}}{x^{3/2}}\, dx$.

Функция $f(x) = \dfrac{\cos\frac{1}{x}}{x^{3/2}}$ на $\langle 0;1\rangle$ имеет одну особую точку $x_0 = 0$. Начнем опять с проверки условий признаков Абеля—Дирихле, поскольку простейшая оценка $\left|\dfrac{\cos\frac{1}{x}}{x^{3/2}}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^{3/2}}$ не дает возможности утверждать о сходимости (абсолютной) данного интеграла.

Особой точкой подынтегральной функции является левый конец промежутка интегрирования, поэтому и условия в признаках Абеля—Дирихле симметрично изменяются. Функция $F(b) = \int\limits_b^1 \dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}\, dx = \sin\dfrac{1}{b} - \sin 1$ ограничена на $(0;1)$, функция $g(x) = \sqrt{x}$ монотонна на $(0;1]$ и $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, следовательно, интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{\cos\frac{1}{x}}{x^{3/2}}\, dx = \int\limits_0^1 \sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}\, dx$ сходится.

Применяя оценку $\left|\dfrac{\cos\frac{1}{x}}{x^{3/2}}\right| \geqslant \dfrac{\cos^2\frac{1}{x}}{x^{3/2}} = \dfrac{1+\cos\frac{2}{x}}{2x^{3/2}}$, видим, что интеграл $\int\limits_0^1 \left|\dfrac{\cos\frac{1}{x}}{x^{3/2}}\right| dx$ расходится, так как интеграл $\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 \dfrac{\cos\frac{2}{x}}{x^{3/2}}\, dx$ сходится, а интеграл $\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^{3/2}}$ расходится. Итак, интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{\cos\frac{1}{x}}{x^{3/2}}\, dx$ сходится условно.

Замечание. При исследовании сходимости интегралов вида $\int\limits_a^\omega f(x)\sin(\varphi(x))\, dx$ и $\int\limits_a^\omega f(x)\cos(\varphi(x))\, dx$, где $\varphi(x)$ локально монотонна слева в точке ω и $\varphi(x) \to +\infty$ при $x \to \omega-$, часто делают замену: $\varphi(x) = t$ с тем, чтобы прийти к интегралу “стандартного” вида: $\int\limits_{\alpha}^{+\infty} f^*(t)\sin t\,dt$ и $\int\limits_{\alpha}^{+\infty} f^*(t)\cos t\,dt$.

В данном примере можно было, сделав замену $t = \dfrac{1}{x}$, перейти к интегралу $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt$, но поскольку проверка выполнения условий признака Дирихле—Абеля оказалась несложной, особой необходимости в этом преобразовании нет.

Пример 19. Исследовать сходимость интеграла

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \sin(x^2 - x)\,dx.$$

Решение. Функция $t = x^2 - x$ монотонна на луче $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$, но обратная функция $x = \dfrac{1}{2} + \sqrt{t + \dfrac{1}{4}}$ на соответствующем луче $\left(-\dfrac{1}{4}; +\infty\right)$ имеет неограниченную производную. Поскольку непрерывность производной x'_t является одним из условий замены переменного в несобственном интеграле (см. пункт 4 в основных свойствах несобственного интеграла), то замену $t = x^2 - x$, $x = \dfrac{1}{2} + \sqrt{t + \dfrac{1}{4}}$, $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{4t+1}}$ сделаем в интеграле $\int\limits_{1}^{+\infty} \sin(x^2 - x)\,dx$, так как на луче $[1; +\infty)$ уже все условия замены переменной выполнены. Так как функция $\sin(x^2 - x)$ непрерывна на $[0; 1]$, следовательно, интегрируема в смысле Римана на $[0; 1]$, то сходимость интеграла $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin(x^2 - x)\,dx$ и сходимость интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty} \sin(x^2 - x)\,dx =$

$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{4t+1}}\,dt$ эквивалентны. Функция $F(b) = \int\limits_0^b \sin t\,dt = 1 - \cos b$ ограничена на $[0; +\infty)$, функция $g(t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}}$ монотонна на $[0; +\infty)$, $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$, следовательно, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{4t+1}}\,dt$ сходится в силу признаков Дирихле—Абеля. Так как

$$\left|\frac{\sin t}{\sqrt{4t+1}}\right| \geqslant \frac{\sin^2 t}{\sqrt{4t+1}} = \frac{1}{2\sqrt{4t+1}} - \frac{\cos 2t}{2\sqrt{4t+1}},$$

интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{2\sqrt{4t+1}}$ расходится, а интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 2t}{2\sqrt{4t+1}}\,dt$ сходится, то интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{\sqrt{4t+1}}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} |\sin(x^2 - x)|\,dx$ расходится. Итак, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2 - x)\,dx$ сходится условно.

Пример 20. Исследуем сходимость интеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{(\sin x)\ln x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$$

Функция $F(b) = \int\limits_1^b \sin x\,dx = \cos 1 - \cos b$ ограничена на $\langle 1; \infty)$. Неравенство $\frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}} < \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{x}}}$ показывает, что функция $g(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}}$ стремится к нулю при $x \to +\infty$, но ничего не говорит о монотонности $g(x)$. Так как $g(x)$ не является алгебраической функцией, локальную монотонность которой слева в $(+\infty)$ мы считаем известной, то в решении данного примера проверка монотонности $g(x)$ необходима.

Действительно, соотношение $g'(x) = \dfrac{1 - x^2(\ln x - 1)}{x(x^2+1)^{3/2}}$ показывает, что $g(x)$ монотонна на $[e^2; +\infty)$. Итак, все условия признаков Дирихле—Абеля выполнены, следовательно, интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)\sin x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ сходится. Из соотношений:

$$\left|\frac{(\ln x)\sin x}{\sqrt{x^2+1}}\right| \geqslant \frac{(\ln x)\sin^2 x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x^2+1}} - \frac{(\ln x)\cos 2x}{2\sqrt{x^2+1}};$$

$$\frac{\ln x}{2\sqrt{x^2+1}} > \frac{1}{4x} \quad (x \geqslant 1)$$

следует, что интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{(\ln x)\sin x}{\sqrt{x^2+1}}\right| dx$ расходится, ибо интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{4x}$ расходится, а интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)\cos 2x}{2\sqrt{x^2+1}}\,dx$ сходится. Итак, интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)\sin x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ сходится условно.

Пример 21. Исследуем сходимость интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{(x\sin x - \cos x)}{x^2}\cos x\,dx.$$

Функция $F(b) = \displaystyle\int_1^{b} \cos x\,dx = \sin b - \sin 1$ ограничена на $\langle 1; +\infty\rangle$. Неравенство $\left|\dfrac{x\sin x - \cos x}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ показывает, что функция $g(x) = \dfrac{x\sin x - \cos x}{x^2}$ стремится к нулю при $x \to +\infty$, но функция $g(x)$, очевидно, не является локально монотонной слева в $(+\infty)$. Таким образом, представление подынтегральной функции в виде произведения

$$\cos x \cdot \frac{x\sin x - \cos x}{x^2}$$

не дает возможности применить к данному интегралу признаки Дирихле—Абеля. Испробуем другой путь: представим подынтегральную функцию в виде суммы:

$$\frac{\cos x(x\sin x-\cos x)}{x^2}=\frac{\sin 2x}{2x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}.$$

Из неравенства $0\leqslant\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\leqslant\dfrac{1}{x^2}$ $(x\geqslant 1)$ следует, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\,dx$ сходится абсолютно. К интегралу $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\sin 2x}{2x}\,dx$ уже легко применяются признаки Дирихле—Абеля. Предлагаем читателю самостоятельно доказать, что этот интеграл сходится условно. Следовательно, интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x(x\sin x-\cos x)}{x^2}\,dx$$

сходится условно.

Читатель, наверное, обратил внимание, на параллелизм многих понятий и методов в теории рядов и несобственных интегралов, как, например, условная и абсолютная сходимость, теоремы сравнения, признаки Абеля—Дирихле и т. д. Эта взаимосвязь есть отражение взаимосвязи понятий предела последовательности (сумма ряда) и предела функции (несобственный интеграл). Как предел последовательности есть предел функции, определенной на множестве натуральных чисел, так и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ является интегралом $\int\limits_1^{+\infty}f(x)\,dx$, где $f(x)=a_n$, $n\leqslant x<n+1$, $n\in\mathbb{N}$. В свою очередь, определение Гейне предела $\lim\limits_{b\to\omega-}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ приводит к утверждению: если $f\in R[a;b]$ для любого $[a;b]\subset[a;\omega)$, то для сходимости интеграла $\int\limits_a^{\omega}f(x)\,dx$ необходимо и достаточно условие:

для любой монотонной последовательности $b_n \to \omega-$, $a = b_0$, $n \in \mathbb{N}$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{b_{n-1}}^{b_n} f(x)\,dx$ сходится.

Существенное — но не принципиальное! — отличие теории рядов от теории несобственного интеграла — как и отличие теории предела последовательности от теории предела функции, — это то, что в первом случае параметр перехода к пределу меняется по дискретному множеству натуральных чисел с единственной предельной точкой $(+\infty)$, а во втором этот параметр меняется непрерывно и предельной (односторонней) точкой может быть любая точка расширенной числовой прямой. Не имеют аналогов в теории несобственного интеграла те методы исследования сходимости рядов, которые существенно используют свойства натурального ряда — признаки Даламбера, Коши, Гаусса. В свою очередь, специфика несобственного интеграла проявляется при исследовании интегралов вида $\int\limits_a^{\omega} f(x)\,dx$, где $f \in R[a;b]$ для любого $[a;b] \subset [a;\omega)$ и ω — собственная точка числовой прямой. Так, в этом случае для сходимости интеграла от степенной функции: $\int\limits_a^{\omega} \frac{dx}{(\omega - x)^p}$ необходимым и достаточным является условие $p < 1$, а для сходимости аналогичного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ — условие $p > 1$. Обратим еще внимание на то, что из сходимости — даже абсолютной — интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ (см. пример 9) не следует, что функция $f(x)$ стремится к нулю при $x \to +\infty$, в то время как условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ необходимо для сходимости ряда.

Необходимо ясно и четко понимать как общность, так и особенности теории рядов и теории несобственных интегралов и не допускать ложных аналогий и неверных переносов утверждений из одной в другую.

§ 2. СОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ, ЗАВИСЯЩИЙ ОТ ПАРАМЕТРА

В функциональном ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ член ряда представляет собой функцию двух переменных: натурального числа n — индекса суммирования и параметра x из некоторого множества X. Параллельным понятием в теории несобственных интегралов является несобственный интеграл от функции двух переменных $f(x,t)$, из которых одно является переменным интегрирования, а второе — параметром из некоторого множества T. Такой интеграл определяется предельным переходом в интеграле Римана от $f(x,t)$ так, как сумма ряда — предельным переходом в последовательности конечных сумм $\{S_n(x)\}$. Поэтому прежде, чем рассмотреть свойства несобственного интеграла, зависящего от параметра, необходимо рассмотреть свойства интеграла Римана, зависящего от параметра.

Определение. Пусть для каждого $t \in T$ функция $f(x,t)$ интегрируема в смысле Римана на отрезке $[a(t); b(t)]$. Тогда функция $F(t) = \int\limits_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx$ называется собственным интегралом, зависящим от параметра t.

Замечание 1. Термин "собственный интеграл, зависящий от параметра" принят вместо термина "интеграл Римана, зависящий от параметра" в целях однородности терминологии.

Замечание 2. Собственным интегралом, зависящим от параметра, называют и сам символ $\int\limits_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx$. Естественной областью изменения t в таком случае является совокупность тех значений t_0, для которых $f(x,t_0) \in R[a(t_0); b(t_0)]$.

Теорема о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра. Пусть $D = \{(x,t)\colon a \leqslant x \leqslant$

$\leqslant b,\ c \leqslant t \leqslant d\}$, функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ непрерывны на $[c;d]$ и $\alpha[c;d] \subset [a;b]$, $\beta[c;d] \subset [a;b]$. Тогда, если $f(x,t) \in C(D)$, то функция $F(t) = \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,dx$ определена и непрерывна на $[c;d]$.

Теорема об интегрировании собственного интеграла, зависящего от параметра. Пусть $D = \{(x,t)\colon a \leqslant \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant t \leqslant d\}$. Если $f(x,t) \in C(D)$ и $F(t) = \int\limits_a^b f(x,t)\,dx$, то

$$\int\limits_c^d F(t)\,dt = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,t)\,dt\right) dx.$$

В силу предыдущей теоремы функция $F(t)$ непрерывна и, тем более, интегрируема на $[c;d]$.

Теорема о дифференцировании собственного интеграла, зависящего от параметра. Пусть $D = \{(x,t)\colon a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant t \leqslant d\}$ и функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[c;d]$, причем $\alpha[c;d] \subset [a;b]$, $\beta[c;d] \subset [a;b]$. Если $f \in C(D)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial t} \in C(D)$, то функция $F(t) = \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,dx$ непрерывно дифференцируема на $[c;d]$ и

$$F'(t) = f(\beta(t),t)\cdot\beta'(t) - f(\alpha(t),t)\cdot\alpha'(t) + \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dt.$$

Пример 22. Найти $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{1}{t} \int\limits_1^3 \sin tx\cdot\sqrt{x^2+t^2+tx-1}\,dx$.

Решение. Функция

$$f(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\sin tx}{t}\cdot\sqrt{x^2+t^2+tx-1}, & t \neq 0,\ x \in [1;3], \\ x\sqrt{x^2-1}, & t = 0,\ x \in [1;3], \end{cases}$$

непрерывна на прямоугольнике $[1;3]\times[0;1]$. Следовательно, в силу теоремы о непрерывности интеграла, зависящего от параметра,

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\int\limits_1^3 \sin tx\cdot\sqrt{x^2+t^2+tx-1}\,dx = \lim_{t\to 0+}\int\limits_1^3 f(x,t)\,dx =$$

$$= \int\limits_1^3 f(x,0)\,dx = \int\limits_1^3 x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{3}(x^2-1)^{3/2}\Big|_1^3 = \frac{16\sqrt{2}}{3}.$$

Пример 23. Найти $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}$.

Решение. Для того, чтобы применить теорему о непрерывности интеграла, зависящего от параметра, введем функцию двух переменных:

$$f(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+(1-tx)^{1/t}}, & x\in[0;1],\ t\in(0;1), \\ \dfrac{1}{1+e^{-x}}, & x\in[0;1],\ t=0. \end{cases}$$

Функция $f(x,t)$ непрерывна на прямоугольнике $[0;1]\times[0;1]$ (проверьте!), следовательно, в силу указанной теоремы:

$$\lim_{t\to 0+}\int\limits_0^1 f(x,t)\,dx = \int\limits_0^1 f(x,0)\,dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+e^{-x}} = \ln(1+e).$$

Так как

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n} = \int\limits_0^1 f\left(x,\frac{1}{n}\right)\,dx,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f\left(x,\frac{1}{n}\right)\,dx =$$

$$= \lim_{t\to 0+}\int\limits_0^1 f(x,t)\,dt = \ln(1+e).$$

Пример 24. Функции

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi \quad \text{и} \quad F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

где $0 < k < 1$, называются полными эллиптическими интегралами. Доказать, что

$$F'_k = \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{F(k)}{k}$$

для любого $k \in (0; 1)$.

Решение. Для любого $k \in (0; 1)$ существует такой отрезок $[\alpha; \beta] \subset (0; 1)$, что $k \in (\alpha; \beta)$. На прямоугольнике $\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \times [\alpha; \beta]$ функция $f(\varphi, k) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$ удовлетворяет условиям теоремы о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра, следовательно,

$$F'_k = \int_0^{\pi/2} \frac{k \sin^2 \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}\, d\varphi, \quad k \in (\alpha; \beta).$$

Алгебраическими преобразованиями из этого равенства получаем следующее:

$$F'_k = \frac{1}{k^2} \int_0^{\pi/2} \frac{k \sin^2 \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}\, d\varphi +$$
$$+ \frac{1}{k^2} \int_0^{\pi/2} \frac{k \cos^2 \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}\, d\varphi - \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

где $k \in (\alpha; \beta)$, откуда выводим, что

$$(1 - k^2) F'_k = k F(k) - \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \frac{d(k \sin \varphi)}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}, \quad k \in (\alpha; \beta).$$

Так как $\dfrac{dz}{(1-z^2)^{3/2}} = d\left(\dfrac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right)$, то

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi \frac{d(k\sin\varphi)}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{3/2}} =$$

$$= \frac{k\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\Bigg|_0^{\pi/2} + \int\limits_0^{\pi/2} \frac{k\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} =$$

$$= \frac{1}{k}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{k}\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,\ \ k\in(\alpha;\beta),$$

и следовательно,

$$k(1-k^2)F_k' = k^2F(k) - F(k) + E(k), \quad k\in(\alpha;\beta)\subset(0;1),$$

откуда и получаем, что для любого $k\in(0;1)$ верно равенство

$$F_k' = \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{F(k)}{k}.$$

§ 3. НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ, ЗАВИСЯЩИЙ ОТ ПАРАМЕТРА

Определение. Пусть для каждого $t \in T$ функция $f(x,t) \in \in \widetilde{R}\langle a;b\rangle$, причем $f(x,t_0) \overline{\in} R\langle a;b\rangle$ хотя бы для одного $t_0 \in T$. Тогда функция $F(t) = \int\limits_a^b f(x,t)\,dx$ и сам символ $\int\limits_a^b f(x,t)\,dx$ называются несобственным интегралом, зависящим от параметра t.

Замечание 1. Необходимость исследовать несобственный интеграл, в котором от параметра зависят не только подынтегральная функция, но и пределы интегрирования, возникает крайне редко. Поэтому здесь будем рассматривать только несобственные интегралы, зависящие от параметра такого вида, как определены выше.

Замечание 2. Требование неинтегрируемости в смысле Римана на $\langle a;b\rangle$ функции $f(x,t_0)$ хотя бы для одного значения $t_0 \in T$ существенно, поскольку в противном случае мы имеем дело с уже рассмотренным собственным интегралом, зависящим от параметра. В то же время в целях удобства формулировок и применений соответствующих утверждений не стоит вводить жесткое условие: для всех $t \in T$ функция $f(x,t)$ не интегрируема в смысле Римана на $\langle a;b\rangle$.

Определение. Пусть задан несобственный интеграл

$$F(t) = \int\limits_a^b f(x,t)\,dx.$$

Множеством сходимости (абсолютной сходимости, условной сходимости) этого интеграла называется множество M тех значений t, при которых он сходится (абсолютно сходится, условно сходится).

Пример 25. Для интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^t}\,dx$ из признаков Абеля–Дирихле и теоремы сравнения получаем, что луч $t > 0$ есть множество сходимости и луч $t > 1$ — множество абсолютной сходимости, полуинтервал $(0;1]$ — множество условной сходимости.

По тем же соображениям, как и для несобственных интегралов, не зависящих от параметра, будем в дальнейшем изложении рассматривать только интегралы вида $\int\limits_a^\omega f(x,t)\,dx$, где $f(x,t) \in R[a;b]$ для всех $[a;b] \subset [a;\omega)$, если не оговорен специально другой вариант.

Определение. Функцию $f(x,t)$, определенную на множестве $X \times T$, называют семейством функций, зависящих от параметра t, если переменная t выделена и называется параметром. Множество T в таком случае называется множеством значений параметра.

Семейство $f(x,t)$ функций, зависящих от параметра t, иногда записывают в виде $f_t(x)$, явно выделяя параметр.

Определение. Пусть $f(x,t)$, $x \in X$, $t \in T$, — семейство функций, зависящих от параметра t, а x_0 — предельная точка множества X. Множество $M \subset T$ тех значений $t \in T$, для которых существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,t) = \varphi(t)$, называется множеством сходимости семейства $f(x,t)$ при $x \to x_0$. Функция $\varphi(t)$, $t \in M$, называется предельной функцией или пределом семейства $f(x,t)$ при $x \to x_0$.

В дальнейшем для любого множества $E \subset M$ будем коротко говорить: семейство $f(x,t)$ сходится на E при $x \to x_0$ к $\varphi(t)$, и записывать $\varphi(t) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x,t)$, $t \in E$, или $f(x,t) \to \varphi(t)$ при $x \to x_0$, $t \in E$.

Пример 26. Рассмотрим семейство функций

$$f(x,t) = \sin(t^x), \quad x \geqslant 0,\ t \geqslant 0.$$

Если $0 \leqslant t < 1$, то при $x \to +\infty$ имеем, что $t^x \to 0$ и, следовательно, $f(x,t) \to 0$. Если $t = 1$, то при любом $x \geqslant 0$ имеем, что $f(x,t) = \sin 1$. Если $t > 1$, то при $x \to +\infty$ аргумент синуса неограниченно растет и функция $\sin(t^x)$ при этом не имеет предела. Итак, множеством сходимости семейства $f(x,t) = \sin(t^x)$, $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, при $x \to +\infty$ является отрезок $[0;1]$.

Определение. Пусть семейство $f(x,t)$ сходится на E при $x \to x_0$ к $\varphi(t)$. Если выполнено условие: для любого положительного числа ε найдется такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \cap X$ и всех $t \in E$ справедливо неравенство $|f(x,t) - \varphi(t)| < \varepsilon$, то говорят, что семейство $f(x,t)$ сходится равномерно к $\varphi(t)$ на множестве E при $x \to x_0$.

Если семейство $f(x,t)$ сходится на E при $x \to x_0$ к $\varphi(t)$, но не удовлетворяет приведенному выше определению, то говорят, что это семейство сходится к $\varphi(t)$ неравномерно на E при $x \to x_0$.

Равномерная сходимость семейства $f(x,t)$ к функции $\varphi(t)$ на E при $x \to x_0$ обозначается символом $f(x,t) \rightrightarrows \varphi(t)$ на E при $x \to x_0$.

Приведем формальную запись сходимости и равномерной сходимости к $\varphi(t)$ семейства $f(x,t)$ на E при $x \to x_0$ в случае, когда x_0 — собственная точка числовой прямой и функция $f(x,t)$ при всех $t \in E$ определена в некоторой, может быть, проколотой, окрестности точки x_0:

$$f(x,t) \to \varphi(t) \text{ при } x \to x_0 \text{ на } E \iff$$
$$\forall t \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(t,\varepsilon)\colon\ \forall x\colon\ 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow$$
$$|f(x,t) - \varphi(t)| < \varepsilon;$$

$$f(x,t) \rightrightarrows \varphi(t) \text{ при } x \to x_0 \text{ на } E \iff$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)\colon\ \forall x\colon\ 0 < |x - x_0| < \delta,\ \forall t \in E \Longrightarrow$$
$$|f(x,t) - \varphi(t)| < \varepsilon.$$

Предлагаем читателю самостоятельно записать в таком виде определение сходимости и равномерной сходимости на множестве E семейства $f(x,t)$ к $\varphi(t)$ при $x \to +\infty$.

Пример 27. Семейство функций

$$f(x,t) = \frac{3t + x}{t + x}, \quad x \in (0;1),\ t \in (0;2),$$

на интервале $(0;2)$ сходится при $x \to 0+$ к функции $\varphi(t) = 3$. Покажем, что а) на интервале $(1;2)$ семейство $f(x,t)$ сходится к $\varphi(t)$ равномерно; б) на интервале $(0;1)$ семейство $f(x,t)$ сходится к $\varphi(t)$ неравномерно.

Для любого $t \in (0;2)$ имеем, что $f(x,t) = 3 - \dfrac{2x}{t + x}$, т. е.

$|f(x,t) - \varphi(t)| = \dfrac{2x}{t+x}$.

Начнем с пункта а). Если $1 < t < 2$ и $x > 0$, то $\dfrac{2x}{t+x} < 2x$, откуда следует, что если $0 < x < \dfrac{\varepsilon}{2}$, то для всех $t \in (1;2)$ выполнено неравенство $|f(x,t) - \varphi(t)| < \varepsilon$, т. е. $f(x,t) \rightrightarrows \varphi(t)$ на $(1;2)$ при $x \to 0+$.

Переходим к пункту б). Нужно указать такое положительное число ε_0, что для любого $\delta > 0$ найдутся значения x_δ: $0 < x_\delta < \delta$ и $t_\delta \in (0;2)$, для которых $|f(x_\delta, t_\delta) - \varphi(t_\delta)| \geqslant \varepsilon_0$. Возьмем $x_\delta = \dfrac{\delta}{2}$ и $t_\delta = x_\delta$, тогда $\dfrac{2x_\delta}{t_\delta + x_\delta} = 1$, откуда и следует, что $f(x,t)$ неравномерно сходится к $\varphi(t)$ на $(0;1)$ при $x \to 0+$.

Следующие утверждения немедленно следуют из определения равномерной сходимости семейства функций.

1. Если два семейства $f_1(x,t)$ и $f_2(x,t)$ равномерно сходятся на множестве E при $x \to x_0$, то любая их линейная комбинация $\alpha f_1(x,t) + \beta f_2(x,t)$, где α и β — постоянные, равномерно сходится на E при $x \to x_0$.

2. Если семейство $f(x,t)$ равномерно сходится на множестве E при $x \to x_0$, то это семейство равномерно сходится при $x \to x_0$ на любом подмножестве E.

3. Если семейство $f(x,t)$ равномерно сходится на каждом из множеств E_1 и E_2 при $x \to x_0$, то это семейство при $x \to x_0$ сходится равномерно на множестве $E_1 \cup E_2$.

Внимание! Это утверждение не переносится на бесконечное объединение множеств, как показывает

Пример 28. Рассмотрим семейство

$$f(x,t) = \frac{\sin tx}{x}, \quad x > 0, \ t \in \mathbb{R}.$$

Для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем: $\lim\limits_{x \to 0+} f(x,t) = t$. Из неравенства $\left|t - \dfrac{\sin tx}{x}\right| < \left|\dfrac{t^3x^3}{x}\right| = |t^3x^2|$ следует, что если $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, $|t| \leqslant n$ и $0 < x < \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{n^3}}$, то $\left|t - \dfrac{\sin tx}{x}\right| < \varepsilon$. Таким образом, на множестве $E_n = \{t,\ |t| \leqslant n\}$ семейство $f(x,t)$ сходится к $\varphi(t) = t$ при $x \to 0+$ равномерно. Покажем, что на множестве $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ семейство $f(x,t)$ сходится к $\varphi(t)$ при $x \to x_0$ неравномерно. Для этого нужно указать такое положительное число ε_0, что для любого числа $\delta > 0$ найдутся числа x_δ, $0 < x_\delta < \delta$, и $t_\delta \in \mathbb{R}$, для которых верно неравенство $\left| t_\delta - \dfrac{\sin t_\delta x_\delta}{x_\delta} \right| \geqslant \varepsilon_0$. Действительно, пусть $x_\delta = \min\left\{\dfrac{\delta}{2}; 1\right\}$ и $t_\delta = \dfrac{2}{x_\delta}$, тогда имеем, что

$$t_\delta - \frac{\sin t_\delta x_\delta}{x_\delta} = \frac{t_\delta x_\delta - \sin t_\delta x_\delta}{x_\delta} = \frac{2 - \sin 2}{x_\delta} \geqslant \frac{1}{x_\delta} > 1.$$

Итак, семейство $f(x,t) = \dfrac{\sin tx}{x}$ сходится при $x \to 0+$ к $\varphi(t) = t$ равномерно на каждом из множеств $E_n = \{t\colon |t| \leqslant n\}$ и неравномерно на множестве $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

На практике удобно пользоваться следующим критерием — фактически переформулировкой определения равномерной сходимости: семейство $f(x,t)$, $x \in X$, $t \in E$, сходится при $x \to x_0$ равномерно на E тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \to x_0} \sup_{t \in E} |f(x,t) - \varphi(t)| = 0.$$

Критерий Коши равномерной сходимости семейства функций. Семейство $f(x,t)$, $x \in X$, $t \in T$, равномерно сходится при $x \to x_0$ на множестве $E \subset T$ тогда и только тогда, когда для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для любой пары $x_1 \in \mathring{U}(x_0) \cap X$, $x_2 \in \mathring{U}(x_0) \cap X$ и всех $t \in E$ справедливо неравенство $|f(x_1,t) - f(x_2,t)| < \varepsilon$.

Если критерий Коши не выполнен для семейства $f(x,t)$, $x \in X$, $t \in E$, при $x \to x_0$, т. е. можно указать такое положительное число ε, что для любой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 найдутся точки x_1, x_2 из проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ и значение $t_0 \in E$, для которых верно неравенство $|f(x_1,t_0) -$

$- f(x_2, t_0)| \geqslant \varepsilon$, то говорят, что семейство $f(x,t)$ не сходится равномерно на E при $x \to x_0$.

Обратите внимание, что говоря "семейство $f(x,t)$ сходится неравномерно при $x \to x_0$ на E" мы утверждаем существование предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x,t) = \varphi(t)$ для всех $t \in E$. Говоря же "семейство $f(x,t)$ не сходится равномерно на E при $x \to x_0$", мы не утверждаем, что множество E входит в множество сходимости семейства $f(x,t)$ при $x \to x_0$. Только, если сходимость $f(x,t)$ при $x \to x_0$ на E заранее известна или доказана, утверждения " $f(x,t)$ при $x \to x_0$ сходится на E неравномерно" и " $f(x,t)$ при $x \to x_0$ не сходится равномерно на E" эквивалентны.

Теорема о перестановке двух предельных переходов. Пусть $f(x,t)$ — семейство функций, $x \in X$, $t \in T$, x_0 — предельная точка X, t_0 — предельная точка T. Если

1) для любого $x \in X$ существует $\lim\limits_{t \to t_0} f(x,t) = \psi(x)$,

2) при $x \to x_0$ семейство $f(x,t)$ сходится равномерно на T к $\varphi(t)$,

то существуют оба предела $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} (\lim\limits_{t \to t_0} f(x,t))$ и $\lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = \lim\limits_{t \to t_0} (\lim\limits_{x \to x_0} f(x,t))$ и справедливо равенство

$$\lim_{x \to x_0} \psi(x) = \lim_{t \to t_0} \varphi(t).$$

Следствие 1. Пусть семейство функций $f(x,t)$, $x \in X$, $t \in T$, удовлетворяет условиям:

1) для любого $x \in X$ функция $f(x,t)$ непрерывна на T;

2) семейство $f(x,t)$ при $x \to x_0$ сходится равномерно на T к $\varphi(t)$.

Тогда функция $\varphi(t)$ непрерывна на T.

Следствие 2. Пусть семейство функций $f(x,t)$, $x \in X$, $t \in [a;b)$, удовлетворяет условиям:

1) для любого $x \in X$ функция $f(x,t)$ непрерывна на $[a;b)$;

2) семейство $f(x,t)$ при $x \to x_0$ сходится на $(a;b)$ к $\varphi(t)$.

Тогда, если предел функции $f(x,a)$ при $x \to x_0$ не существует или не существует предел $\varphi(t)$ при $t \to a+$, или оба предела существуют, но $\lim\limits_{x \to x_0} f(x,a) \neq \lim\limits_{t \to a+} \varphi(t)$, то семейство $f(x,t)$ сходится неравномерно на $(a;b)$ при $x \to x_0$.

Так, например, в силу следствия 2 семейство $f(x,t)=\sin t^x$, $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, рассмотренное в примере, сходится на интервале $(0;1)$ и, тем более, на отрезке $[0;1]$ неравномерно, поскольку при любом $x \geqslant 0$ функция $\sin t^x$ непрерывна на $[0;1]$, а предельная функция

$$\varphi(t)=\begin{cases}0, & 0 \leqslant x < 1,\\ \sin 1, & x=1\end{cases}$$

разрывна на $(0;1]$.

Пример 29. Рассмотрим семейство функций

$$f(x,t)=e^{xt}\cos x(t+1), \quad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}.$$

При любом $x \in \mathbb{R}$ функция $e^{xt}\cos x(t+1)$ непрерывна на $[0;1]$. Если $x \to -\infty$, то при $t \in (0;1)$ имеем, что $e^{xt} \to 0$, и, следовательно, $\varphi(t) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{xt}\cos x(t+1) = 0$. В то же время функция $f(x,0)=\cos x$ не имеет предела при $x \to -\infty$. Следовательно, в силу следствия 2 семейство $f(x,t)=e^{xt}\cos x(t+1)$ сходится при $x \to -\infty$ на интервале $(0;1)$ неравномерно.

Если семейство $f(x,t)$, $x \in X$, $t \in T$, сходится при $x \to x_0$ к непрерывной на T функции $\varphi(t)$ и для любого $x \in X$ функции $f(x,t)$ непрерывны на T, то сходимость может быть как равномерной, так и неравномерной.

Пример 30. Рассмотрим два семейства $f_1(x,t)=te^{-xt}$, $x \geqslant 0$, $t \in [0;1]$ и $f_2(x,t)=xte^{-xt}$, $x \geqslant 0$, $t \in [0;1]$. Так как $f_1(x,0)=f_2(x,0)=0$, $\forall x \geqslant 0$, а для $t>0$ при $x \to +\infty$ имеем, что $t=o(e^{-xt})$ и $xt=o(e^{-xt})$, то как семейство $f_1(x,t)$, так и семейство $f_2(x,t)$ при $x \to +\infty$ сходятся к функции $\varphi(t)=0$, $t \in [0;1]$. Покажем, что сходимость семейства $f_1(x,t)$ на отрезке $[0;1]$ равномерная, а семейства $f_2(x,t)$ — неравномерная.

Действительно, так как для любого $x>0$, $f_1(x,0)=0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} f_1(x,t)=0$ и $(f_1)'_t = e^{-xt}(1-xt)$, то при $x>1$ имеем, что $\sup\limits_{t\in[0;1]}|f_1(x,t)| = \left|f_1\left(x,\dfrac{1}{x}\right)\right| = \dfrac{1}{xe}$, и соотношение $\lim\limits_{x\to+\infty}\sup\limits_{t\in[0;1]}|f_1(x,t)|=0$ показывает, что $f_1(x,t)=te^{-xt} \rightrightarrows 0$ при $x \to +\infty$ на $[0;1]$.

Функция $f_2(x,t) = txe^{-tx}$ при любом $x > 1$ принимает максимальное на $[0;1]$ значение также в точке $t = \dfrac{1}{x}$. Но в этом случае величина $\sup\limits_{t\in[0;1]} |f_2(x,t)| = \left|f_2\left(x, \dfrac{1}{x}\right)\right| = \dfrac{1}{e}$ не является бесконечно малой при $x \to +\infty$, откуда следует, что $f_2(x,t) = txe^{-tx} \to 0$ при $x \to +\infty$ на $[0;1]$ неравномерно.

Теорема Дини. Пусть семейство функций $f(x,t)$, $x \in X$, $t \in T$, удовлетворяет условиям:

1) множество T есть компакт;

2) для любого $x \in X$ функция $f(x,t)$ непрерывна на T;

3) для любого $t \in T$ функция $f(x,t)$ монотонна на X;

4) предельная функция $\varphi(t) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x,t)$ определена и непрерывна на T.

Тогда $f(x,t) \rightrightarrows \varphi(t)$ при $x \to x_0$ на T.

Пример 31. Рассмотрим семейство функций

$$f(x,t) = \operatorname{arctg}\frac{1}{t+x}, \quad x > 0,\ t \in [0;1].$$

Отрезок $[0;1]$ — компакт. Для любого $x_0 > 0$ функция $f(x,t) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{t+x_0}$ непрерывна на $[0;1]$. Для любого $t_0 \in T$ функция $f(x,t_0) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{t_0+x}$ монотонна на луче $x > 0$. Так как при $t \neq 0$ $\lim\limits_{x\to 0+} f(x,t) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{t}$ и $\lim\limits_{x\to 0+} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$, то при $x \to 0+$ предельной функцией семейства $f(x,t)$ является функция

$$\varphi(t) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{t}, & t \in (0;1], \\ \dfrac{\pi}{2}, & t = 0, \end{cases}$$

определенная и непрерывная на $[0;1]$. Итак, все условия теоремы Дини выполнены и, следовательно, $f(x,t) \rightrightarrows \varphi(t)$ при $x \to x_0$ на $[0;1]$.

Теорема Дини не является полным обращением теоремы о непрерывности предельной функции равномерно сходящегося семейства функций — в ней введены дополнительные требования компактности множества значений параметра и монотонности функции $f(x,t)$, определяющей семейство, относительно переменной x. Эти условия существенны. Так, например, семейство $f(x,t) = xte^{-xt}$, рассмотренное в примере 30, сходится при $x \to +\infty$ к непрерывной на $[0;1]$ функции $\varphi(t) = 0$ неравномерно. Здесь множество значений параметра — компакт, функция $f(x_0,t)$ непрерывна на $[0;1]$ при любом $x_0 \geqslant 0$, предельная функция $\varphi(t) = 0$ определена и непрерывна на $[0;1]$. Нарушено только условие 3 теоремы Дини — функция $f(x,t_0)$ при любом $t_0 \in (0;1]$ не монотонна на положительной полуоси.

Пример 32. Рассмотрим семейство функций

$$f(x,t) = \frac{t}{1+xt}, \quad x \geqslant 0,\ t \geqslant 0.$$

Для любого $x_0 \geqslant 0$ функция $f(x_0,t) = \dfrac{t}{1+x_0t}$ непрерывна на $T = \{t\colon t \geqslant 0\}$. Для любого $t_0 \geqslant 0$ функция $f(x,t_0) = \dfrac{t_0}{1+xt_0}$ монотонна на $X = \{x\colon x \geqslant 0\}$. Предельная функция $\varphi(t) = \lim\limits_{x\to 0+} f(x,t) = t$ непрерывна на T. Покажем, что $f(x,t) \to \varphi(t)$ при $x \to 0+$ на T неравномерно. Действительно, при каждом $x_0 > 0$ разность $t - \dfrac{t}{1+x_0t} = \dfrac{x_0t^2}{1+x_0t}$ неограничена на положительной полуоси, т. е. условие $\lim\limits_{x\to 0+} (\sup\limits_{t\in T} |f(x,t) - \varphi(t)|) = 0$ не выполнено. Здесь нарушено условие 1 теоремы Дини — множество значений параметра не компакт.

Заметим, что на любом отрезке $[0;a]$ выполнены уже все условия теоремы Дини, следовательно, $f(x,t) \rightrightarrows \varphi(t)$ при $x \to 0+$ на $[0;a]$.

Если множеством значений переменной x является множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел, то семейство $f(x,t)$ представляет собой последовательность $f(n,t)$.

В дальнейшем для краткости вместо "несобственный интеграл, зависящий от параметра" там, где это ясно из контекста, будем говорить просто "интеграл".

Определение. Пусть множество T есть множество сходимости интеграла $\int\limits_a^\omega f(x,t)\,dx$ и $E \subset T$. Если для любого положительного числа ε существует такое число B, $a < B < \omega$, что для всех b: $B < b < \omega$ и всех $t \in E$ справедливо неравенство $\left|\int\limits_b^\omega f(x,t)\,dx\right| < \varepsilon$, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^\omega f(x,t)\,dx$ сходится равномерно на E.

Заметим, что равномерная сходимость на E интеграла $\int\limits_a^\omega f(x,t)\,dx$ есть равномерная сходимость семейства функций $F(b,t) = \int\limits_a^b f(x,t)\,dx$ к $J(t) = \int\limits_a^\omega f(x,t)\,dx$ при $b \to \omega-$ на E.

Следующие утверждения являются перефразировкой свойств равномерно и неравномерно сходящихся семейств функций, рассмотренных выше, на случай несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Критерий Коши равномерной сходимости интеграла. Интеграл $\int\limits_a^\omega f(x,t)\,dx$ сходится равномерно на множестве E тогда и только тогда, когда для любого положительного числа ε найдется такое число B, $a < B < \omega$, что для любой пары чисел b_1, b_2, удовлетворяющих неравенству $B < b_1 < b_2 < \omega$ и любого $t \in E$ справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,t)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Как и при рассмотрении семейства функций, следует отличать утверждения "интеграл $\int\limits_a^\omega f(x,t)\,dx$ сходится неравномерно на множестве E" и "интеграл $\int\limits_a^\omega f(x,t)\,dx$ не сходится равномерно на множестве E". Первое утверждение подразумевает, что E есть подмножество множества сходимости интеграла, а второе допускает, что в некоторых (может быть, и всех) точках множества E интеграл $\int\limits_a^\omega f(x,t)\,dx$ расходится.

Следующие утверждения непосредственно следуют из определения равномерной сходимости интеграла.

Если интегралы $\int\limits_a^\omega f_1(x,t)\,dx$ и $\int\limits_a^\omega f_2(x,t)\,dx$ равномерно сходятся на множестве E, то и интеграл

$$\int\limits_a^\omega (\alpha f_1(x,t) + \beta f_2(x,t))\,dx,$$

где α и β — постоянные, равномерно сходится на множестве E.

Если интеграл $\int\limits_a^\omega f(x,t)\,dx$ равномерно сходится на множестве E, то он равномерно сходится на любом подмножестве E.

Если интеграл $\int\limits_a^\omega f(x,t)\,dx$ равномерно сходится на каждом из множеств E_1 и E_2, то он равномерно сходится на множестве $E = E_1 \cup E_2$.

Это утверждение не переносится на бесконечное объединение множеств.

Пример 33. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-xt}\,dx$.

а) Покажем, что на множестве $E_n = \left\{t\colon t > \frac{1}{n}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$, этот интеграл сходится равномерно. Действительно, если $t > \frac{1}{n}$, то для любого $b > 0$ имеем неравенство

$$0 < \int\limits_b^{+\infty} e^{-xt}\,dx = \frac{1}{t}e^{-bt} < ne^{-\frac{b}{n}}.$$

Так как $\lim\limits_{b\to+\infty} ne^{-\frac{b}{n}} = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $B > 0$, что для всех $b > B$ верно неравенство $0 < \int\limits_b^{+\infty} e^{-xt}\,dx < \varepsilon$, т. е. по определению интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-xt}\,dx$ сходится равномерно на E_n.

б) Покажем, что на множестве $\mathbb{R}^+ = \{t\colon t > 0\}$, $\mathbb{R}^+ = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, интеграл сходится неравномерно. Для этого нужно указать такое положительное число ε, что для любого $B > 0$ при некоторых значениях $b > B$ и $t_0 > 0$ справедливо неравенство $\int\limits_b^{+\infty} e^{-xt_0}\,dx \geqslant \varepsilon$. Возьмем $\varepsilon = 1$, $b = \max(B+1, e)$ и $t_0 = \dfrac{1}{b}$. Тогда $\int\limits_b^{+\infty} e^{-xt_0}\,dt = \dfrac{1}{t_0}e^{-bt_0} = \dfrac{b}{e} \geqslant 1$, что и требовалось проверить.

Теорема о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра. Если семейство функций $f(x,t)$, $x \in [a;\omega)$, $t \in T$, удовлетворяет условиям:

1) $f(x,t) \in C([a;\omega) \times T)$,

2) интеграл $\int\limits_a^{\omega} f(x,t)\,dx$ сходится равномерно на T,

то функция $J(t) = \int\limits_a^{\omega} f(x,t)\,dx$ непрерывна на T.

Эта теорема является переносом следствия 1 теоремы о перестановке двух предельных переходов. Переносом следствия 2 является следующее утверждение.

Если семейство функций $f(x,t)$, $x \in [a;\omega)$, $t \in [c;d]$, удовлетворяет условиям:

1) $f(x,t) \in C([a;\omega) \times [c;d])$,

2) для любого $t \in (c;d)$ интеграл $\int\limits_a^{\omega} f(x,t)\,dx$ сходится,

3) интеграл $\int\limits_a^{\omega} f(x,c)\,dx$ расходится, или он сходится, но

на $[c;d]$ разрывна функция $J(t) = \int\limits_a^{\omega} f(x,t)\,dx$, тогда интеграл $\int\limits_a^{\omega} f(x,t)\,dx$ сходится неравномерно на $(c;d)$.

Пример 34. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^t}$, $t \in [2;10]$.

Покажем, пользуясь критерием Коши, что этот интеграл сходится равномерно на $[2;10]$. Действительно, для любой пары b_1, b_2, $1 < b_1 < b_2$, и любого $t \in [2;10]$ имеет место неравенство

$$0 < \int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{dx}{1+x^t} \leqslant \int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} b_2 - \operatorname{arctg} b_1.$$

Поскольку функция $\operatorname{arctg} z$ имеет предел при $z \to +\infty$, то в силу критерия Коши для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $B > 1$, что для любой пары b_1, b_2 из неравенства $B < b_1 < b_2$ следует неравенство $0 < \operatorname{arctg} b_2 - \operatorname{arctg} b_1 < \varepsilon$, т. е. $0 < \int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{dx}{1+x^t} < \varepsilon$ для $B < b_1 < b_2$ и всех $t \in [2;10]$. Так как функция $f(x,t) = \frac{1}{1+x^t}$ непрерывна на множестве $[2;10]$ и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^t}$ сходится равномерно на $[2;10]$, то на отрезке $[2;10]$ функция $J(t) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^t}$ непрерывна.

Пример 35. Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}\cos tx}{x}\,dx$. Для любого $t > 0$ существует такое $x_0(t)$, что $\left|\frac{e^{-tx}}{x}\cos tx\right| \leqslant \frac{e^{-tx}}{x} < \frac{1}{x^2}$ для всех $x > x_0(t)$. Следовательно, в силу теоремы сравнения интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}\cos tx}{x}\,dx$ сходится абсолютно для всех $t > 0$. Интеграл же $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-0\cdot x}\cos 0\cdot x}{x}\,dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится. Следовательно, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}\cos tx}{x}\,dx$ сходится на луче $t > 0$ и на любом интервале $(0; a)$ неравномерно.

Пример 36. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}\sin tx}{x}\,dx, \quad t \geqslant 0.$$

Для любого $t > 0$ существует такое $x_0(t)$, что $\left|\frac{e^{-tx}\sin tx}{x}\right| \leqslant \frac{e^{-tx}}{x} < \frac{1}{x^2}$ для всех $x > x_0(t)$. Следовательно, в силу теоремы сравнения интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}\sin tx}{x}\,dx$ сходится абсолютно для всех $t > 0$. В отличие от предыдущего примера интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-0\cdot x}\sin 0\cdot x}{x}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} 0\,dx$$

сходится. Покажем, что функция $J(t) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}\sin tx}{x}\,dx$ разрывна на $[0; +\infty)$, откуда следует, что интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}\sin tx}{x}\,dx$$

сходится на $(0; +\infty)$ и, тем более, на $[0; +\infty)$ неравномерно.

Как уже установлено, $J(0) = 0$. Если $t > 0$, то

$$J(t) = \int\limits_t^{+\infty} \frac{e^{-u}\sin u}{u}\,du = \int\limits_t^{1} \frac{e^{-u}\sin u}{u}\,du + K,$$

где $K = \int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-u}\sin u}{u}\,du$ (сходимость этого интеграла уже установлена). Функция

$$\varphi(u) = \begin{cases} e^{-u}\dfrac{\sin u}{u}, & u > 0, \\ 1, & u = 0 \end{cases}$$

интегрируема на $[0; 1]$ в смысле Римана, откуда получаем, что

$$\lim_{t\to 0+} J(t) = \int\limits_0^1 \frac{e^{-u}\sin u}{u}\,du + K = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-u}\sin u}{u}\,du.$$

Итак, для доказательства разрывности функции $J(t)$ на $[0; 1]$ (точнее, справа в нуле) осталось показать, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-u}\sin u}{u}\,du \neq 0.$$

Применяя теорему о среднем, получаем, что для любого натурального n имеет место равенство

$$\int\limits_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \frac{e^{-u}\sin u}{u}\,du =$$

$$= \int\limits_{2\pi n}^{\pi(2n+1)} \frac{e^{-u}\sin u}{u}\,du + \int\limits_{\pi(2n+1)}^{2\pi(n+1)} \frac{e^{-u}\sin u}{u}\,du = 2\frac{e^{-\xi_1}}{\xi_1} - 2\frac{e^{-\xi_2}}{\xi_2},$$

где $\xi_1 \in (2\pi n; \pi(2n+1))$ и $\xi_2 \in (\pi(2n+1); 2\pi(n+1))$. Так как функция $\frac{e^{-z}}{z}$ монотонно убывает и $\xi_1 < \xi_2$, то

$$\int\limits_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \frac{e^{-u}\sin u}{u}\,du > 0$$

для любого $n \in \mathbb{N}$.

Так как функция $\frac{e^{-u}}{u}$ не определена при $u = 0$, то оценку интеграла $\int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{-u}\sin u}{u}\,du$ проведем другим способом. Из неравенств $\frac{\sin u}{u} \geqslant 0$, $u \in (0;\pi)$, и $\sin u \geqslant \frac{2u}{\pi}$, $u \in (0;\pi/2)$, получаем, что

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{e^{-u}\sin u}{u}\,du > e^{-\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\,du > e^{-\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin u}{u}\,du \geqslant e^{-\pi}.$$

Так как $\left|\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{-u}\sin u}{u}\,du\right| \leqslant e^{-\pi}\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{du}{u} = e^{-\pi}\ln 2$, то окончательно имеем, что

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{-u}\sin u}{u}\,du = \int\limits_0^{\pi} \frac{e^{-u}\sin u}{u}\,du - \left|\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{-u}\sin u}{u}\,du\right| >$$
$$> e^{-\pi}(1 - \ln 2) > 0.$$

Объединяя все полученные неравенства, выводим, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-u}\sin u}{u}\,du = \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{-u}\sin u}{u}\,du + \int\limits_{2\pi}^{+\infty} \frac{e^{-u}\sin u}{u}\,du =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{-u}\sin u}{u}\,du + \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \frac{e^{-u}\sin u}{u}\,du > 0,$$

что и требовалось установить.

Замечание. Неравномерную сходимость на $[0,+\infty)$ интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}\sin tx}{x}\,dx$ можно было доказать и с помощью критерия Коши, но в данном примере главной целью было показать разрывность функции $J(t) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}\sin tx}{x}\,dx$, а заключение о неравномерной сходимости интеграла есть следствие этого основного факта.

Теорема Дини. Если семейство функций $f(x,t)$, $x \in [a;\omega)$, $t \in T$, удовлетворяет условиям:

1) множество T есть компакт,

2) функция $f(x,t)$ непрерывна и неотрицательна на $[a;\omega) \times T$,

3) функция $J(t) = \int\limits_a^\omega f(x,t)\,dx$ определена и непрерывна на T,

тогда интеграл $\int\limits_a^\omega f(x,t)\,dx$ сходится равномерно на T.

Пример 37. Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{t\,dx}{t^2+x^2}$, $t \in [0;1]$.

Множество значений параметра t есть компакт. Функция $f(x,t) = \frac{t}{t^2+x^2}$ непрерывна и неотрицательна на множестве $[1;+\infty) \times [0;1]$. Функция

$$J(t) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{t\,dx}{t^2+x^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{t}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

определена и непрерывна на $[0;1]$. Все условия теоремы Дини выполнены, следовательно, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{t\,dx}{t^2+x^2}$ сходится равномерно на $[0;1]$.

Переходим к свойствам несобственного интеграла, зависящего от параметра, не являющимся перефразировкой сформулированных выше свойств семейства функций. Рекомендуем читателю сравнить все рассматриваемые свойства интеграла с соответствующими свойствами функциональных рядов.

Достаточные признаки равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра

Признак Вейерштрасса (мажорантный признак). Пусть семейство функций $f(x,t)$, $x \in [a;\omega)$, $t \in T$, удовлетворяет условиям:

1) для любого $[a;b] \subset [a;\omega)$ функция $f(x,t_0) \in R[a;b]$ при любом $t_0 \in T$;

2) существует функция $g\colon [a;\omega) \to \mathbb{R}$ такая, что при всех $x \in [a;\omega]$, $t \in T$ справедливо неравенство $|f(x,t)| \leqslant g(x)$ (мажорантная функция семейства $f(x,t)$ на T) и интеграл $\int\limits_a^\omega g(x)\,dx$ сходится.

Тогда интеграл $\int\limits_a^\omega f(x,t)\,dx$ сходится абсолютно и равномерно на множестве T.

Пример 38. Показать, что интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{(1+x^2t^2)\sqrt{1-x^2}}$ сходится равномерно на положительной полуоси.

Решение. Функция $f(x,t_0) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2t_0^2)}$ непрерывна на множестве $[0;1)$ при любом $t_0 \in [0;+\infty)$, следовательно, для любого b, $0 < b \leqslant 1$, функция $f(x,t_0) \in R[0;b]$. Так как $0 < \dfrac{1}{(1+x^2t^2)\sqrt{1-x^2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ для любого $t \in [0;+\infty)$ и интеграла $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ сходится, то в силу признака Вейерштрасса данный интеграл сходится равномерно на положительной полуоси.

Признак Вейерштрасса представляет собой аналог теоремы сравнения для несобственных интегралов, независящих от параметра. Существенное отличие этих двух утверждений состоит в то, что в теореме сравнения требовалось выполнение неравенства $|f(x)| \leqslant g(x)$ локально слева в точке ω, а в признаке Вейерштрасса требуется выполнение неравенства $|f(x,t)| \leqslant g(x)$ как для всех $t \in T$, так и для всех $x \in [a;\omega)$. Дело в том, что если $g(x) \in \widetilde{R}[a;\omega)$ и неравенство $|f(x,t)| \leqslant g(x)$ для каждого $t \in T$ выполнено для $x_0(t) < x < \omega$, т. е. левая полуокрестность точки ω, в которой это неравенство справедливо, зависит от значения t, то интеграл может сходиться неравномерно. Приведем соответствующий пример.

Пример 39. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^1 \frac{|\ln x|^t}{\sqrt{x}}\,dx$, если а) $T = (0; A)$, $0 < A < +\infty$, и б) $T = (0; +\infty)$.

Покажем, что в случае а) данный интеграл сходится равномерно, пользуясь признаком Вейерштрасса. Действительно, из неравенства $0 < t < A$ следует, что

$$|\ln x|^t \leqslant \max\{1, |\ln x|^A\}.$$

Таким образом, функция $g(x) = \frac{1 + |\ln x|^A}{\sqrt{x}}$ является мажорантной функцией семейства $f(x,t) = \frac{|\ln x|^t}{\sqrt{x}}$ для $t \in (0; A)$. Так как существует такое X, что $1 + |\ln x|^A < \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ для $x \in \in (0; X)$, то функция $g(x)$ локально справа в точке 0 удовлетворяет неравенству $0 < g(x) < \frac{1}{x^{3/4}}$, следовательно, сходится интеграл $\int\limits_0^1 g(x)\,dx$, и в силу признака Вейерштрасса интеграл $\int\limits_0^1 \frac{|\ln x|^t}{\sqrt{x}}\,dx$ сходится равномерно на $(0; A)$.

Покажем, что в случае б) данный интеграл сходится неравномерно. Действительно, сходимость этого интеграла для любого $t \in (0; +\infty)$ показана в пункте а). Далее, для любой пары b_1, b_2 из неравенства $0 < b_1 < b_2 < \frac{1}{e}$ следует неравенство $\int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{|\ln x|^t}{\sqrt{x}}\,dx > 2|\ln b_2|^t(\sqrt{b_2} - \sqrt{b_1})$. Если числа b_1 и b_2 фиксированы, то $\lim\limits_{t\to\infty} 2|\ln b_2|^t(\sqrt{b_2} - \sqrt{b_1}) = +\infty$, следовательно, для любого $M > 0$ и любой пары b_1, b_2, удовлетворяющей неравенству $0 < b_1 < b_2 < \frac{1}{e}$, найдется такое значение $t \in (0; +\infty)$, что $\int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{|\ln x|^t}{\sqrt{x}}\,dx > M$. В силу критерия Коши отсюда следует, что интеграл $\int\limits_0^1 \frac{|\ln x|^t}{\sqrt{x}}\,dx$ сходится неравномерно на луче $(0;+\infty)$.

Теперь обратим внимание на то, что для любого $t\in(0;+\infty)$ неравенство $0 < \frac{|\ln x|^t}{\sqrt{x}} < \frac{1}{x^{3/4}}$ верно, если $0 < x < x_0(t)$, т. е. для каждого $t \in (0;+\infty)$ оценка $0 < \frac{|\ln x|^q}{\sqrt{x}} < \frac{1}{x^{3/4}}$ справедлива локально справа в точке 0. Но, как было показано, из этого факта и интегрируемости функции $g(x) = \frac{1}{x^{3/4}}$ на $[0;1]$ не следует равномерной сходимости интеграла $\int\limits_0^1 \frac{|\ln x|^t}{\sqrt{x}}\,dx$ на луче $(0;+\infty)$.

Пример 40. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-t)^2+1}$, если а) $t \in (0;A)$ и б) $t \in (0;+\infty)$.

Покажем, пользуясь признаком Вейерштрасса, что в случае а) данный интеграл сходится равномерно. Если $t_1 < t_2$, то неравенство $\frac{1}{(x-t_1)^2+1} < \frac{1}{(x-t_2)^2+1}$ верно только на луче $x > c(t_1,t_2)$, где $t_1 < c(t_1,t_2) < t_2$ (см. рис. 12). Таким образом, функция $g_1(x) = \frac{1}{(x-A)^2+1}$ не является мажорантой семейства $f(x,t) = \frac{1}{(x-t)^2+1}$ для $t \in (0;A)$. Поскольку для любого $t \in (0;+\infty)$ имеем, что $0 \leqslant f(x,t) \leqslant 1$, то функция $g_2(x) = 1$ является мажорантой семейства $f(x,t)$ для $t \in (0;A)$ и для $t \in (0;+\infty)$, но интеграл $\int\limits_0^{+\infty} g_2(x)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} dx$ расходится. Возьмем функцию

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant A, \\ \dfrac{1}{(x-A)^2+1}, & x > A. \end{cases}$$

Эта функция уже удовлетворяет обоим условиям: она являет-

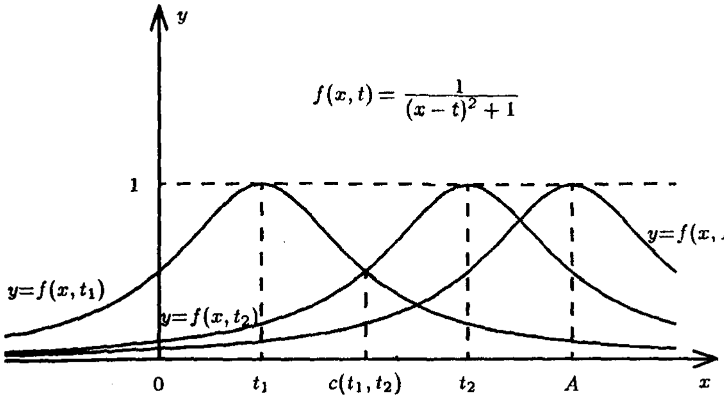


Рис. 12

ся мажорантой семейства $f(x,t) = \dfrac{1}{(x-t)^2+1}$ для $t \in (0; A)$ и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится, так как $g(x) \sim \dfrac{1}{x^2}$ при $x \to +\infty$.

Покажем, что в случае б) данный интеграл сходится неравномерно, пользуясь критерием Коши. Действительно, сходимость этого интеграла для любого $t \in (0; +\infty)$ показана в пункте а). Далее, так как максимальное значение функция $f(x,t) = \dfrac{1}{(x-t)^2+1}$ принимает в точке $x = t$, то для того, чтобы получить интеграл $\int\limits_{b_1}^{b_2} \dfrac{dx}{(x-t)^2+1}$ большой величины естественно взять числа b_1, b_2 так, чтобы $b_1 < t < b_2$. Пусть $b_1 = t - 1$, $b_2 = t + 1$, тогда

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{dx}{(x-t)^2+1} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dz}{z^2+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Итак, для любого $B > 0$ найдется значение $t = B + 2$ на луче $(0; +\infty)$ и числа $b_1 = t - 1 = B + 1$, $b_2 = t + 1 = B + 3$

такие, что $B < b_1 < b_2$ и $\int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{dx}{(x-t)^2+1} = \frac{\pi}{2}$, т. е. интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-t)^2+1}$ сходится неравномерно на луче $(0;+\infty)$.

В обоих приведенных примерах неравномерная сходимость интеграла на соответствующем множестве доказывалась с помощью критерия Коши.

Разумеется, если интеграл $\int\limits_a^{\omega} f(x,t)\,dx$ сходится неравномерно на множестве T, то никакая мажорантная функция $g(x)$ семейства $f(x,t)$, $t \in T$, не интегрируема на $[a;\omega)$. Но неинтегрируемость наиболее точной мажорантной функции $g(x) = \sup\limits_{t\in T} |f(x,t)|$ на $[a;\omega)$ еще не обозначает, что интеграл $\int\limits_a^{\omega} f(x,t)\,dx$ не сходится равномерно на T. Во-первых, если интеграл $\int\limits_a^{\omega} f(x,t)\,dx$ при некоторых $t \in T$ сходится условно, то его равномерная сходимость заведомо не может быть установлена с помощью признака Вейерштрасса, поскольку из выполнения условий этого признака следует абсолютная сходимость рассматриваемого интеграла на T. Во-вторых, даже в случае абсолютной и равномерной сходимости на множестве T интеграла $\int\limits_a^{\omega} f(x,t)\,dx$ функция $g(x) = \sup\limits_{t\in T} |f(x,t)|$ может не интегрироваться на $[a;\omega)$. Приведем соответствующий пример.

Пример 41. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{t\,dx}{(tx-1)^2 - \ln t}$, $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$. Множество значений t не является компактом. Доопределим функцию $f(x,t) = \frac{t}{(tx-1)^2 - \ln t}$, $x \geqslant 0$, $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$, положив $f(x,0) = 0$ для всех $x > 0$. Тогда к интегралу $\int\limits_0^{+\infty} f(x,t)\,dx$ применима теорема Дини. Действительно, множество значений t — отрезок $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ — есть компакт, функция $f(x,t)$ неотрицательна на множестве $[0;+\infty)\times\left[0;\frac{1}{2}\right]$, неравенство $0<f(x,t)\leqslant\frac{t}{\ln 2}$ показывает, что $f(x,t)$ непрерывна на этом множестве, функция

$$J(t)=\int\limits_0^{+\infty} f(x,t)\,dx=$$

$$=\begin{cases}\int\limits_{-1}^{+\infty}\frac{dz}{z^2-\ln t}=\frac{1}{\sqrt{|\ln t|}}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{|\ln t|}}\right), & t\in\left(0;\frac{1}{2}\right],\\ 0, & t=0,\end{cases}$$

определена и непрерывна на $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Следовательно, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x,t)\,dx$ сходится равномерно на $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ и, тем более, интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{t\,dx}{(tx-1)^2-\ln t}$ сходится равномерно на $\left(0;\frac{1}{2}\right]$.

В то же время для $x>2$ имеем неравенство

$$g(x)=\sup_{t\in\left(0;\frac{1}{2}\right]} f(x,t)\geqslant f\left(x,\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x\ln x},$$

т. е. функция $g(x)$ локально слева в $+\infty$ совпадает с функцией $\frac{1}{x\ln x}$, и, так как интеграл $\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} g(x)\,dx$.

Признак Абеля—Дирихле равномерной сходимости интеграла, зависящего от параметра. Пусть функции $f(x,t)$: $x\in[a;\omega)$, $t\in T$, и $g(x,t)$: $x\in[a;\omega)$, $t\in T$, при каждом $t \in T$ интегрируемы в смысле Римана на любом отрезке $[a; b] \subset [a; \omega)$. Если при этом выполнена одна из следующих пар условий:

а$_1$) функция $F(b,t) = \int\limits_a^b f(x,t)\,dx$ ограничена на $[a;\omega) \times T$,

б$_1$) при любом $t \in T$ функция $g(x,t)$ монотонна на $[a;\omega)$ и $g(x,t) \rightrightarrows 0$ при $x \to \omega-$ на T;

а$_2$) интеграл $\int\limits_a^\omega f(x,t)\,dx$ сходится равномерно на T,

б$_2$) функция $g(x,t)$ ограничена на $[a;\omega) \times T$ и при любом $t \in T$ монотонна на $[a;\omega)$.

Тогда интеграл $\int\limits_a^\omega f(x,t)g(x,t)\,dx$ сходится равномерно на T.

Так же, как и для несобственных интегралов, независящих от параметра, область применения признака Абеля—Дирихле, в основном, неабсолютно сходящиеся интегралы. При этом иногда одна или обе функции $f(x,t)$, $g(x,t)$ не зависят от t. Тогда соответствующая сходимость, естественно, является равномерной на рассматриваемом множестве значений параметра t.

Пример 42. Показать, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{t \sin tx}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ сходится равномерно на $[0; 1]$.

Решение. Положим $f(x,t) = t \sin tx$ и $g(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Функция $g(x,t)$ монотонна на $[0; +\infty)$ и, поскольку эта функция не зависит от t, $g(x,t) \rightrightarrows 0$ при $x \to +\infty$ на $[0; 1]$. Далее,

$$\left|\int\limits_0^b f(x,t)\,dx\right| = \left|\int\limits_0^b t \sin tx\,dx\right| = |-\cos tb + 1| \leqslant 2.$$

Итак, выполнены условия а) и б) признака Абеля—Дирихле и, следовательно, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{t \sin tx}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ сходится равномерно на $[0; 1]$.

Пример 43. Показать, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{t^2 \cos tx}{x+t^2}\,dx$ сходится равномерно на $[0;+\infty)$.

Решение. Положим $f(x,t) = t\cos tx$ и $g(x,t) = \frac{t}{x+t^2}$. Функция $g(x,t)$ монотонна на $[1;+\infty)$ при любом $t \in [0;+\infty)$, а неравенство $0 \leqslant g(x,t) < \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \in [1;+\infty)$, $t \in [0;+\infty)$, показывает, что $g(x,t) \rightrightarrows 0$ при $x \to +\infty$ на $[0;+\infty)$. Далее,

$$\left|\int\limits_1^b t\cos tx\,dx\right| = |\sin bt - \sin t| \leqslant 2, \quad t \in [0;+\infty),\ b \in [1;+\infty).$$

Итак, выполнены условия а) и б) признака Абеля—Дирихле и, следовательно, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{t^2\cos tx}{x+t^2}\,dx$ сходится равномерно на $[0;+\infty)$.

Пример 44. Показать, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{2x-t}\operatorname{arctg} tx\,dx$ сходится равномерно на $[0;1]$.

Решение. Если положить $f(x,t) = \cos x$ и $g(x,t) = \frac{\operatorname{arctg} tx}{2x-t}$, то неравенство $\left|\int\limits_1^b f(x,t)\,dx\right| = \left|\int\limits_1^b \cos x\,dx\right| \leqslant 2$ верно для всех $t \in [0;1]$ и $b \in [1;+\infty)$, но монотонность функции $g(x,t)$ не очевидна — и числитель, и знаменатель при $t > 0$ растут с ростом x — следовательно, требуется дополнительное исследование. В данном случае проще представить подынтегральную функцию в виде произведения $\frac{\cos x}{2x-t} \cdot \operatorname{arctg} tx$ и проверить выполнение второй пары условий признака Абеля—Дирихле. Действительно, поскольку, как уже установлено, функция $F(b,t) = \int\limits_1^b \cos x\,dx$ ограничена на $[1;+\infty) \times [0;1]$ и неравенство $\dfrac{1}{2x-t} \leqslant \dfrac{1}{2x-1}$, $x \in [1;+\infty)$, $t \in [1;2]$, показывает, что функция $\dfrac{1}{2x-t}$ монотонна и равномерно сходится к нулю при $x \to +\infty$ на $[0;1]$, то интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\cos x\, dx}{2x-t}$ сходится равномерно на $[0;1]$. Функция $g(x,t) = \operatorname{arctg} tx$ ограничена на $[1;+\infty) \times [0;1]$ и при любом $t \in [0;1]$ монотонна на $[1;+\infty)$. Следовательно, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\cos x}{2x-t} \operatorname{arctg} tx\, dx$ сходится равномерно на $[0;1]$.

Пример 45. Показать, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{t\sin\left(x+\frac{t}{x}\right)}{x}\, dx$ сходится равномерно на $[0;1]$.

Решение. При любом $t \neq 0$ функция $f(x,t) = \dfrac{t\sin\left(x+\frac{t}{x}\right)}{x}$ на $(0;+\infty)$ имеет две особые точки — 0 и $(+\infty)$. В таком случае, как и для интеграла, независящего от параметра, промежуток интегрирования разбивается на два так, чтобы на полученных промежутках только одна и при этом краевая точка являлась особой для подынтегральной функции, интеграл сходится равномерно тогда и только тогда, когда равномерно сходятся интегралы по каждому из полученных промежутков.

Следуя этому правилу, представим данный интеграл в виде

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{t\sin\left(x+\frac{t}{x}\right)}{x}\, dx = \int\limits_0^{1/2} \frac{t\sin\left(x+\frac{t}{x}\right)}{x}\, dx + \int\limits_{1/2}^{\infty} \frac{t\sin\left(x+\frac{t}{x}\right)}{x}\, dx$$

и проверим, что каждое из слагаемых есть равномерно сходящийся на $[0;1]$ интеграл.

Интеграл $\int\limits_0^{1/2} \dfrac{t\sin\left(x+\frac{t}{x}\right)}{x}\, dx$, в свою очередь, представлястся суммой $\int\limits_0^{1/2} \frac{t \sin x \cos \frac{t}{x}}{x}\, dx + \int\limits_0^{1/2} \frac{t \cos x \sin \frac{t}{x}}{x}\, dx$.

Рассмотрим каждое слагаемое отдельно. Неравенство

$$\left|\frac{t \sin x \cos \frac{t}{x}}{x}\right| \leqslant \left|t \cos \frac{t}{x}\right| \leqslant 1, \quad x \in \left(0; \frac{1}{2}\right), \ t \in [0; 1],$$

показывает, что интеграл $\int\limits_0^{1/2} \frac{t \sin x \cos \frac{t}{x}}{x}\, dx$ сходится равномерно на $[0; 1]$ (заметим, что $\frac{t \sin x \cos \frac{t}{x}}{x} \in R\left[0; \frac{1}{2}\right]$ для всех $t \in [0; 1]$, но равномерная сходимость интеграла является следствием ограниченности функции двух переменных $g(x, t) = \frac{t \sin x \cos \frac{t}{x}}{x}$ на $\left(0; \frac{1}{2}\right) \times [0; 1]$). Подынтегральную функцию во втором слагаемом представим как произведение следующим образом: $\frac{t \cos x \sin \frac{t}{x}}{x} = \frac{t}{x^2} \cdot \sin \frac{t}{x} \cdot x \cos x$. Так как $g(x, t) = x \cos x$ не зависит от t, то $g(x, t) \rightrightarrows 0$ при $x \to 0+$ на $[0; 1]$, а неравенство $(x \cos x)' = \cos x - x \sin x > 0$, $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, показывает, что $g(x)$ монотонна на $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. Функция $F(b, t) = \int\limits_b^{1/2} \frac{t}{x^2} \sin \frac{t}{x}\, dx$ ограничена на $\left(0; \frac{1}{2}\right) \times [0; 1]$. Итак, интеграл $\int\limits_0^{1/2} \frac{t \sin \left(x + \frac{t}{x}\right)}{x}\, dx$ как сумма двух равномерно сходящихся на $[0; 1]$ интегралов сходится равномерно на $[0; 1]$.

Интеграл $\int\limits_{1/2}^{+\infty} \frac{t \sin \left(x + \frac{t}{x}\right)}{x}\, dx$ тоже разобьем на два слагаемых

$$\int\limits_{1/2}^{+\infty} \frac{t \sin x \cos \frac{t}{x}}{x}\, dx + \int\limits_{1/2}^{+\infty} \frac{t \cos x \sin \frac{t}{x}}{x}\, dx$$

и будем рассматривать каждое из них.

Так как

$$\left| \frac{t \cos x \sin \frac{t}{x}}{x} \right| \leqslant \frac{t^2}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}, \quad x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right), \ t \in [0; 1],$$

то в силу признака Вейерштрасса интеграл $\int\limits_{1/2}^{+\infty} \frac{t \cos x \sin \frac{t}{x}}{x}\, dx$ сходится равномерно и абсолютно на $[0; 1]$.

В первом слагаемом подынтегральную функцию удобно представить как произведение $\frac{\sin x}{x} \cdot t \cos \frac{t}{x}$ (если же взять произведение $\sin x \cdot \frac{t \cos \frac{t}{x}}{x}$, то придется дополнительно проверять монотонность функции $\frac{\cos \frac{t}{x}}{x}$ на $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ при $t \in [0; 1]$). Интеграл $\int\limits_{1/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ сходится в силу признака Абеля—Дирихле, а поскольку подынтегральная функция не зависит от t, то эта сходимость равномерна на $[0; 1]$. Функция $g(x, t) = t \cos \frac{t}{x}$ ограничена на $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \times [0; 1]$ и монотонна на $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ при любом $t \in [0; 1]$. Итак, интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{t \sin x \cos \frac{t}{x}}{x}\, dx$ сходится равномерно на $[0; 1]$, следовательно, интеграл $\int\limits_{1/2}^{+\infty} \frac{t \sin \left(x + \frac{t}{x}\right)}{x}\, dx$ сходится равномерно на $[0; 1]$.

Объединяя все вышесказанное, получаем, что интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{t \sin \left(x + \frac{t}{x}\right)}{x}\, dx$ сходится равномерно на $[0; 1]$.

Сравнивая формулировки признаков Абеля—Дирихле для сходимости несобственного интеграла, независящего от параметра, и для равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, видим, что требование локальной монотонности слева в точке ω функции $g(x)$ заменено требованием монотонности функции $g(x,t)$ при фиксированном t на всем промежутке $[a;\omega)$. Если же функция $g(x,t)$ монотонна на промежутке $[b(t);\omega)$, где $a \leqslant b(t) < \omega$, то равномерная сходимость интеграла $\int\limits_a^{\omega} f(x,t)\,dx$ на T и ограниченность $g(x,t)$ на $[a;\omega) \times T$ не гарантируют равномерную сходимость интеграла $\int\limits_a^{\omega} f(x,t)g(x,t)\,dx$ на T. Приведем соответствующий пример.

Пример 46. Для $t \in (0;1]$ найдем натуральное число $n(t)$ такое, что $\sum\limits_{q=1}^{n(t)} \frac{1}{q} > \frac{1}{t}$. Положим

$$g(x,t) = \begin{cases} \sin tx, & 1 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi(4n+5)}{2t},\ t \in (0;1], \\ \dfrac{\pi(4n+5)}{2tx}, & x > \dfrac{\pi(4n+5)}{2t},\ t \in (0;1], \\ 0, & x \geqslant 1,\ t = 0, \end{cases}$$

где $n = n(t)$, и

$$f(x,t) = \frac{t \sin tx}{x}.$$

Тогда получим, что

1) так как функция $F(b,t) = \int\limits_0^b t \sin tx\,dx = \cos t - \cos bx$ ограничена на $[1;+\infty) \times [0;1]$, функция $\frac{1}{x}$ монотонна на $[1;+\infty)$ и $\frac{1}{x} \rightrightarrows 0$ при $x \to +\infty$ на $[0;1]$, то интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x,t)\,dx$ схо-

дится равномерно на $[0;1]$;

2) функция $g(x,t)$ непрерывна и ограничена на $[1;+\infty)\times[0;1]$ и при каждом $t\in[0;1]$ локально монотонна слева в $+\infty$.

Следовательно, при каждом фиксированном $t\in[0;1]$ интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x,t)g(x,t)\,dt$ сходится в силу признака Абеля—Дирихле. Покажем, пользуясь критерием Коши, что сходимость этого интеграла на $[0;1]$ неравномерная.

Пусть $t\in(0;1]$, $b_1=\dfrac{2\pi}{t}$, $b_2=\dfrac{2\pi(n(t)+1)}{t}$, тогда

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,t)g(x,t)\,dx=\int\limits_{b_1}^{b_2}\frac{t\sin^2 tx}{x}\,dx=t\sum_{q=1}^{n(t)}\int\limits_{\frac{2q\pi}{t}}^{\frac{2\pi(q+1)}{t}}\frac{\sin^2 tx}{x}\,dx.$$

Так как подынтегральная функция неотрицательна, то

$$\int\limits_{\frac{2\pi q}{t}}^{\frac{2\pi(q+1)}{t}}\frac{\sin^2 tx}{x}\,dx\geqslant\int\limits_{\frac{2\pi q+\pi/4}{t}}^{\frac{2\pi q+3\pi/4}{t}}\frac{\sin^2 tx}{x}\,dx.$$

Так как $\sin^2 tx\geqslant\dfrac12$ для $x\in\left[\dfrac{2\pi q+\pi/4}{t};\dfrac{2\pi q+3\pi/4}{t}\right]$, $q\in\mathbb{N}$, то

$$\int\limits_{\frac{2\pi q+\pi/4}{t}}^{\frac{2\pi q+3\pi/4}{t}}\frac{\sin^2 tx}{x}\,dx\geqslant\frac12\ln\frac{2\pi q+3\pi/4}{2\pi q+\pi/4}>\frac12\cdot\frac{\pi}{4\pi q+\pi/2}>\frac{1}{10q},$$

$$q\in\mathbb{N}.$$

Объединяя все полученные неравенства, имеем, что

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,t)g(x,t)\,dx\geqslant\frac{t}{10}\sum_{q=1}^{n(t)}\frac1q>\frac{1}{10}.$$

Итак, для любого $B>1$ возьмем такое $t_0\in(0;1]$, что $\dfrac{2\pi}{t_0}>B$; тогда числа $b_1=\dfrac{2\pi}{t_0}$ и $b_2=\dfrac{2\pi(n(t)+1)}{t_0}$ удовлетворяют неравенству $B < b_1 < b_2$ и $\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,t_0)g(x,t_0)\,dx > \frac{1}{10}$, откуда следует, что $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x,t)g(x,t)\,dx$ сходится неравномерно на $[0;1]$.

Теорема об интегрировании несобственного интеграла по параметру. Пусть семейство функций $f(x,t)$, $x \in [a;\omega)$, $t \in [c;d]$ удовлетворяет условиям:

1) $f(x,t) \in C([a;\omega) \times [c;d])$;

2) интеграл $J(t) = \int\limits_a^{\omega} f(x,t)dx$ сходится равномерно на $[c;d]$.

Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^{\omega} f(x,t)\,dx\right) dt = \int\limits_a^{\omega} \left(\int\limits_c^d f(x,t)\,dt\right) dx.$$

Заметим, что функция $J(t)$ в силу теоремы о непрерывности несобственного интеграла непрерывна и, следовательно, интегрируема на $[c;d]$.

Пример 47. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$, пользуясь формулой $\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int\limits_0^1 \frac{dt}{1+x^2t^2}$, $x > 0$.

Решение. Запишем данный интеграл в виде

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \frac{dt}{(1+x^2t^2)\sqrt{1-x^2}}\right) dx.$$

Покажем, что функция $f(x,t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)\sqrt{1-x^2}}$ удовлетворяет условиям теоремы об интегрировании несобственного интеграла по параметру и, следовательно,

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 f(x,t)\,dt\right) dx = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 f(x,t)\,dx\right) dt.$$

Функция $f(x,t)=\dfrac{1}{(1+x^2t^2)\sqrt{1-x^2}}$ непрерывна на $[0;1)\times[0;1]$. Для $t\in[0;1]$ имеем, что

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x^2t^2)\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dz}{1+t^2\sin^2 z} =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{du}{1+t^2+u^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+t^2}}.$$

Таким образом, интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x^2t^2)\sqrt{1-x^2}}$ сходится для любого $t\in[0;1]$. Поскольку множество значений t есть компакт, функция $\dfrac{1}{(1+x^2t^2)\sqrt{1-x^2}}$ неотрицательна и непрерывна на $[0;1)\times[0;1]$ и функция $J(t)=\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x^2t^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+t^2}}$ непрерывна на $[0;1]$, то в силу теоремы Дини интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x^2t^2)\sqrt{1-x^2}}$ сходится на $[0;1]$ равномерно.

Итак,

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x^2t^2)\sqrt{1-x^2}}\right) dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{\pi}{2\sqrt{1+t^2}}\,dt = \frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

Пример 48. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} e^{-\beta x}\,dx$, $\beta>0$, $a\in\mathbb{R}$.

Решение. Запишем данный интеграл в виде

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^a e^{-\beta x}\cos tx\,dt\right)dx.$$

Покажем, что при любых $\beta > 0$ и $a \in \mathbb{R}$ функция $f(x,t) = e^{-\beta x}\cos tx$ удовлетворяет условиям теоремы об интегрировании несобственного интеграла по параметру и, следовательно,

$$\int_a^{+\infty}\frac{\sin ax e^{-\beta x}}{x}\,dx = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^a f(x,t)\,dt\right)dx =$$

$$= \int_0^a\left(\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dx\right)dt = \int_0^a\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta x}\cos tx\,dx\right)dt.$$

Функция $f(x,t) = e^{-\beta x}\cos tx$ непрерывна на $[0;+\infty)\times[0;a)$, $a \in \mathbb{R}$. Так как для любого $\beta > 0$ интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\,dx$ сходится, то неравенство $|f(x,t)| \leqslant e^{-\beta x}$, $t \in [0;a]$, показывает, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\cos tx\,dx$ сходится равномерно на $[0;a]$ в силу признака Вейерштрасса. Итак,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax e^{-\beta x}}{x}\,dx = \int_0^a\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta x}\cos tx\,dx\right)dt =$$

$$= \int_0^a \frac{\beta}{\beta^2+t^2}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{a}{\beta}, \quad \beta > 0,\ a \in \mathbb{R}.$$

Пример 49. Вычислить интеграл Дирихле $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}\,dx$, $a \in \mathbb{R}$.

Решение. Воспользуемся результатом предыдущего примера: $J(t) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin ax}{x}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{a}{t}$, $t > 0$. Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin ax}{x}\,dx$ сходится равномерно на множестве $[0;1]$ в силу признака Абеля—Дирихле, поскольку интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx$ сходится равномерно на $[0;1]$, функция e^{-tx} монотонна на $[0;+\infty)$ при любом $t \in [0;1]$ и $0 < e^{-tx} \leqslant 1$ для всех $x \in [0;+\infty)$, $t \in [0;1]$. Следовательно, в силу теоремы о непрерывности интеграла, зависящего от параметра, функция $J(t) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin ax}{x}\,dx$ непрерывна на $[0;1]$, откуда получаем, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx = J(0) = \lim_{t\to 0+} J(t) = \lim_{t\to 0+} \operatorname{arctg}\frac{a}{t} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} a.$$

Внимание! В приведенных примерах вычисления несобственных интегралов проверка выполнения условий теоремы об интегрировании несобственного интеграла по параметру — существенная часть решения. Отсутствие такой проверки — грубая ошибка, и формальное вычисление никоим образом не представляет решения.

Приведем пример, показывающий, что условие равномерной сходимости интеграла $J(t) = \int\limits_a^{\omega} f(x,t)\,dx$ на $[c;d]$ существенно для справедливости равенства

$$\int\limits_c^d J(t)\,dt = \int\limits_a^{\omega}\left(\int\limits_c^d f(x,t)\,dt\right)dx.$$

Пример 50. Функция $f(x,t) = t\operatorname{arcctg} tx^2 - \dfrac{2x^2t^2}{1+t^2x^4}$ определена и непрерывна на множестве $[0; +\infty) \times [0; 1]$. Так как

$$J(t) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dx = \int_0^{+\infty} (t \operatorname{arcctg} tx^2 - \frac{2x^2t^2}{1+t^2x^4})\,dx =$$
$$= \lim_{b\to+\infty} bt \operatorname{arcctg} b^2 t = 0$$

для всех $t \in [0; 1]$, то $\int\limits_0^1 J(t)\,dt = 0$. Функция

$$\varphi(x) = \int_0^1 f(x,t)\,dt = \int_0^1 \left(t \operatorname{arcctg} tx^2 - \frac{2x^2t^2}{1+t^2x^4}\right) dt =$$
$$= \frac{t^2}{2} \operatorname{arcctg}(tx^2)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2x^2}{1+t^2x^4}\,dt - 2\int_0^1 \frac{x^2t^2}{1+t^2x^4}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arcctg} x^2 - \frac{3}{2x^2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2x^4}\right) dt =$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arcctg} x^2 + \frac{3}{2x^4}\operatorname{arctg} tx^2\Big|_0^1 - \frac{3}{2x^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arcctg} x^2 - \frac{3}{2x^2} + \frac{3}{2x^4}\operatorname{arctg} x^2, \quad x \neq 0,$$

непрерывна на $[0; +\infty)$, если $\varphi(0) = \frac{\pi}{4}$, так как

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{2x^4}\operatorname{arctg} x^2 - \frac{3}{2x^2}\right) = 0.$$

Найдем первообразную $F(x)$ функции $\varphi(x)$ на произвольном отрезке $[a; b] \subset (0; +\infty)$.

Так как x не обращается в нуль на $[a; b]$, то

$$F(x) + C = \int \varphi(x)\,dx =$$
$$= \int \left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} x^2 - \frac{3}{x^2} + \frac{3}{2x^4}\operatorname{arctg} x^2\right) dx =$$
$$= \frac{x}{2}\operatorname{arcctg} x^2 + \int \frac{x^2}{1+x^4}\,dx + \frac{3}{2x} - \frac{1}{2}\int \operatorname{arctg} x^2\, d\left(\frac{1}{x^3}\right) =$$

$$= \frac{x}{2}\operatorname{arcctg} x^2 + \frac{3}{2x} + \int \frac{x^2}{1+x^4}\,dx - \frac{1}{2x^3}\operatorname{arctg} x^2 +$$

$$+ \int \frac{dx}{x^2(1+x^4)} = \frac{x}{2}\operatorname{arcctg} x^2 + \frac{3}{2x} - \frac{1}{2x^3}\operatorname{arctg} x^2 +$$

$$+ \int \frac{dx}{x^2} + 2\int \frac{x^2\,dx}{1+x^4} =$$

$$= \frac{x}{2}\operatorname{arcctg} x^2 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^3}\operatorname{arctg} x^2 + 2\int \frac{x^2\,dx}{1+x^4}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^3}\operatorname{arctg} x^2\right) = 0$, то

$$\int\limits_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx + \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2b} + \frac{b}{2}\operatorname{arcctg} b^2 -\right.$$

$$\left.- \frac{\operatorname{arctg} b^2}{2b^3}\right) = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \neq 0 = \int\limits_0^1 J(t)\,dt.$$

В теореме об интегрировании несобственного интеграла по параметру речь идет об интегрировании функции $J(t) = \int\limits_a^{\omega} f(x,t)\,dx$ в смысле Римана. Если же рассматривается несобственный интеграл $\int\limits_c^{\tilde{\omega}} J(t)\,dt$, то обычно используют термин "перестановка двух несобственных интегралов".

Теорема о перестановке двух несобственных интегралов. Пусть семейство функций $f(x,t)$, $x \in [a;\omega)$, $t \in [c;\tilde{\omega})$, удовлетворяет условиям:

1) $f(x,t) \in C([a;\omega) \times [c;\tilde{\omega}))$;

2) интеграл $F(t) = \int\limits_a^{\omega} f(x,t)\,dx$ сходится равномерно на любом отрезке $[c;d] \subset [c;\tilde{\omega})$, интеграл $\Phi(x) = \int\limits_c^{\tilde{\omega}} f(x,t)\,dt$ сходится равномерно на любом отрезке $[a;b] \subset [a;\omega)$;

3) существует хотя бы один из двух интегралов

$$\int_a^{\omega}\left(\int_c^{\tilde\omega}|f(x,t)|\,dt\right)dx \text{ или } \int_c^{\tilde\omega}\left(\int_a^{\omega}|f(x,t)|\,dx\right)dt.$$

Тогда справедливо равенство

$$\int_a^{\omega}\Phi(x)\,dx=\int_c^{\tilde\omega}F(t)\,dt$$

или

$$\int_a^{\omega}\left(\int_c^{\tilde\omega}f(x,t)\,dt\right)dx=\int_c^{\tilde\omega}\left(\int_a^{\omega}f(x,t)\,dx\right)dt.$$

Используя теорему Дини, получим следующее

Следствие. Пусть семейство функций $f(x,t)$, $x\in[a;\omega)$, $t\in[c;\tilde\omega)$, удовлетворяет условиям:

1) функция $f(x,t)$ непрерывна и неотрицательна на $[a;\omega)\times[c;\tilde\omega)$;

2) функции $F(t)=\int\limits_a^{\omega}f(x,t)\,dx$ и $\Phi(x)=\int\limits_c^{\tilde\omega}f(x,t)\,dt$ непрерывны на $[c;\tilde\omega)$ и $[a;\omega)$ соответственно;

3) существует один из интегралов $\int\limits_c^{\tilde\omega}F(t)\,dt$ или $\int\limits_a^{\omega}\Phi(x)\,dx$.

Тогда существуют оба эти интеграла и

$$\int_c^{\tilde\omega}F(t)\,dt=\int_a^{\omega}\Phi(x)\,dx$$

или

$$\int_c^{\tilde\omega}\left(\int_a^{\omega}f(x,t)\,dx\right)dt=\int_a^{\omega}\left(\int_c^{\tilde\omega}f(x,t)\,dt\right)dx.$$

Пример 51. Вычислить интеграл Эйлера—Пуассона $J=\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx$, используя перестановку двух несобственных интегралов.

Решение. Положим $\psi(t) = \int\limits_0^{+\infty} te^{-(xt)^2}\,dx$, тогда $\psi(0) = 0$ и $\psi(t) = \int\limits_0^{+\infty} te^{-(xt)^2}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = J$ при $t > 0$. Следовательно,

$$\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} te^{-(1+x^2)t^2}\,dx\right)dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\psi(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} J\,dt = J\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = J^2.$$

Функция $f(x,t) = te^{-(1+x^2)t^2}$ непрерывна и неотрицательна на $[0;+\infty) \times [0;+\infty)$. Функция $\Phi(x) = \int\limits_0^{+\infty} te^{-(1+x^2)t^2}\,dt = \dfrac{1}{2(1+x^2)}$ непрерывна на $[0;+\infty)$ и интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\Phi(x)\,dx = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^2} = \dfrac{\pi}{4}$ сходится. Функция же $F(t) = \int\limits_0^{+\infty} te^{-(1+x^2)t^2}\,dx = e^{-t^2}\psi(t)$ непрерывна только на луче $[\varepsilon;+\infty)$, где $\varepsilon > 0$. Таким образом, условия следствия теоремы о перестановке двух несобственных интегралов выполнены для семейства $f(x,t)$, $x \in [0;+\infty)$, $t \in [\varepsilon;+\infty)$, при любом $\varepsilon > 0$, т. е.

$$\int\limits_\varepsilon^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} f(x,t)\,dx\right)dt = \int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_\varepsilon^{+\infty} f(x,t)\,dt\right)dx = \int\limits_0^{+\infty} G(x,\varepsilon)\,dx$$

при любом $\varepsilon > 0$, где $G(x, \varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} f(x,t)\,dt$, $x \in [0; +\infty)$, $\varepsilon \in [0; 1)$.

Неравенство $0 < G(x, \varepsilon) < \int\limits_{0}^{+\infty} f(x,t)\,dt = \Phi(x)$, $\varepsilon \geqslant 0$, показывает, что в силу признака Вейерштрасса $\int\limits_{0}^{+\infty} G(x,\varepsilon)\,dx$ сходится равномерно на $[0; 1]$, следовательно,

$$J^2 = \int\limits_{0}^{+\infty}\left(\int\limits_{0}^{+\infty} f(x,t)\,dx\right)dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\left(\int\limits_{0}^{+\infty} f(x,t)\,dx\right)dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0}^{+\infty} G(x,\varepsilon)\,dx = \int\limits_{0}^{+\infty} G(x,0)\,dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty}\left(\int\limits_{0}^{+\infty} f(x,t)\,dt\right)dx = \frac{\pi}{4}.$$

Отсюда получаем, что $J = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Пример 52. Вычислить интеграл Френеля

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x^2\,dx \equiv \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx,$$

пользуясь формулой $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-xt^2}\,dt$, $x > 0$.

Решение. Интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ сходится в силу признака Абеля—Дирихле, интеграл $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ сходится в силу неравенства $\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$ и теоремы сравнения, следовательно, интеграл Френеля сходится. Запишем его в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \cos x e^{-xt^2}\, dt \right) dx.$$

Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \cos x e^{-xt^2}\, dt$ расходится при $x = 0$, следовательно, сходится неравномерно на $(0; a]$ при любом $a > 0$; интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \cos x e^{-xt^2}\, dx$ расходится при $t = 0$, следовательно, сходится неравномерно на $(0; c]$ при любом $c > 0$. Таким образом, теорема о перестановке двух несобственных интегралов непосредственно к интегралу $\int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} \cos x e^{-xt^2}\, dt \right) dx$ неприменима. Поскольку именно нулевые значения x и t дали расходящиеся интегралы, рассмотрим интеграл

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \left(\int_\delta^{+\infty} \cos x e^{-xt^2}\, dt \right) dx$$

для $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$. Покажем, что для такого интеграла условия теоремы о перестановке двух несобственных интегралов выполнены.

Функция $f(x,t) = \cos x e^{-xt^2}$ непрерывна на $[\varepsilon; +\infty) \times [\delta; +\infty)$. Если $t \in [\delta; c]$, то $|f(x,t)| \leqslant e^{-x\delta^2}$, и из сходимости интеграла $\int\limits_\varepsilon^{+\infty} e^{-x\delta^2}\, dx$ и признака Вейерштрасса следует равномерная сходимость интеграла $F(\varepsilon, t) = \int\limits_\varepsilon^{+\infty} f(x,t)\, dx$ на $[\delta; c]$. Если $x \in [\varepsilon; a]$, то $|f(x,t)| \leqslant e^{-\varepsilon t^2}$ и из сходимости интеграла $\int\limits_{\delta}^{+\infty} e^{-\varepsilon t^2}\,dt$ и признака Вейерштрасса следует равномерная сходимость интеграла $\Phi(x,\delta) = \int\limits_{\delta}^{+\infty} f(x,t)\,dt$ на $[\varepsilon; a]$. Так как $|f(x,t)| < e^{-xt^2}$ для $x \in [\varepsilon; +\infty)$, $t \in [\delta; +\infty)$, то

$$0 \leqslant \psi(t) = \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} |f(x,t)|\,dx \leqslant \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-xt^2}\,dx = \frac{e^{-\varepsilon t^2}}{t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$$

и в силу теоремы сравнения интеграл

$$\int\limits_{\delta}^{+\infty}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} |f(x,t)|\,dx\right)dt = \int\limits_{\delta}^{+\infty} \psi(t)\,dt$$

сходится. Итак, $\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \Phi(x,\delta)\,dx = \int\limits_{\delta}^{+\infty} F(\varepsilon,t)\,dt$ для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$.

Функция $F(\varepsilon,t) = \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \cos x e^{-xt^2}\,dx = e^{-xt^2}\dfrac{t^2\cos\varepsilon - \sin\varepsilon}{1+t^4}$ для $\varepsilon > 0$ и $t \in [0; +\infty)$. Если положить $F(0,t) = \dfrac{t^2}{1+t^4}$, $t \in [0; +\infty)$, то получим функцию $F(\varepsilon,t)$, непрерывную на $[0;1] \times [0; +\infty)$. Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{\delta}^{+\infty} F(\varepsilon,t)\,dt = \int\limits_{\delta}^{+\infty} F(0,t)\,dt, \quad \delta > 0.$$

Для этого достаточно установить равномерную сходимость интеграла $\int\limits_{\delta}^{+\infty} F(\varepsilon,t)\,dt$ на $[0;1]$, что следует из неравенства $|F(\varepsilon,t)| \leqslant \dfrac{t^2+1}{t^4+1}$, $\varepsilon \in [0;1]$, $t \in [\delta; +\infty)$, и сходимости интеграла $\int\limits_{\delta}^{+\infty} \frac{t^2+1}{t^4+1}\,dt$. Из всего вышесказанного следует, что

$$\int\limits_{\delta}^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\,dt = \int\limits_{\delta}^{+\infty} F(0,t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{\delta}^{+\infty} F(\varepsilon,t)\,dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \Phi(x,\delta)\,dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \Phi(x,\delta)\,dx.$$

Если $x > 0$, то $\Phi(x,0) = \int\limits_{0}^{+\infty} \cos x e^{-xt^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$, т. е. подынтегральная функция в интеграле $\int\limits_{0}^{+\infty} \Phi(x,0)\,dx$ имеет на $\langle 0;+\infty\rangle$ две особые точки. Поэтому отдельно докажем, что

$$\lim_{\delta\to 0+} \int\limits_{0}^{1} \Phi(x,\delta)\,dx = \int\limits_{0}^{1} \Phi(x,0)\,dx$$

и

$$\lim_{\delta\to 0+} \int\limits_{1}^{+\infty} \Phi(x,\delta)\,dx = \int\limits_{1}^{+\infty} \Phi(x,0)\,dx.$$

Так как функция e^{-xt^2}, $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, неотрицательна, то для $\delta \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$|\Phi(x,\delta)| \leqslant \int\limits_{\delta}^{+\infty} e^{-xt^2}\,dt \leqslant \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-xt^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi x}},$$

откуда в силу признака Вейерштрасса следует равномерная сходимость интеграла $\int\limits_{0}^{1} \Phi(x,\delta)\,dx$ на $[0;1]$. Так как функция $\Phi(x,\delta) = \int\limits_{\delta}^{+\infty} \cos x e^{-xt^2}\, dt$ непрерывна на $(0;1] \times [0;1]$, то, следовательно, $\lim\limits_{\delta\to 0+} \int\limits_0^1 \Phi(x,\delta)\, dx = \int\limits_0^1 \Phi(x,0)\, dx$.

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \Phi(x,\delta)\, dx$ запишем в виде $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \varphi(x,\delta)\, dx$, где $\varphi(x,\delta) = \int\limits_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-xt^2}\, dt$. Соотношение

$$0 \leqslant \varphi(x,\delta) = \int\limits_{\delta\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-z^2}\, dz \leqslant \int\limits_0^{+\infty} e^{-z^2}\, dz$$

показывает, что функция $\varphi(x,\delta)$ ограничена на $[1;+\infty)\times[0;1]$ и монотонна на $[1;+\infty)$ при любом $\delta \in [0;1]$. Функция $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ не зависит от δ, поэтому интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx$ сходится равномерно на $[0;1]$. Отсюда следует, что в силу признака Абеля—Дирихле интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \varphi(x,\delta)\, dx$ сходится равномерно на $[0;1]$. Так как функция $\Phi(x,\delta)$ непрерывна на $[1;+\infty) \times \times [0;1]$, то $\lim\limits_{\delta\to 0+} \int\limits_1^{+\infty} \Phi(x,\delta)\, dx = \int\limits_1^{+\infty} \Phi(x,0)\, dx$.

Объединяя все вышесказанное, получим, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} \cos x e^{-xt^2}\, dt \right) dx = \int\limits_0^{+\infty} \Phi(x,0)\, dx =$$

$$= \lim_{\delta\to 0+} \int\limits_0^{+\infty} \Phi(x,\delta)\, dx = \lim_{\delta\to 0+} \int\limits_{\delta}^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\, dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\, dt,$$

откуда следует, что

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \cos x e^{-xt^2}\, dt \right) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Теорема о дифференцировании несобственного интеграла по параметру. Пусть семейство функций $f(x,t)$, $x \in [a;\omega)$, $t \in [c;d]$, удовлетворяет условиям:

1) функции $f(x,t)$ и $f_t'(x,t)$ непрерывны на $[a;\omega) \times [c;d]$;

2) интеграл $\int_a^\omega f(x,t)\, dx$ сходится хотя бы при одном значении $t \in [c;d]$;

3) интеграл $\int_a^\omega f_t'(x,t)\, dx$ сходится равномерно на $[c;d]$.

Тогда интеграл $\int_a^\omega f(x,t)\, dx$ сходится равномерно на $[c;d]$ к непрерывно дифференцируемой на $[c;d]$ функции $J(t)$ и $J'(t) = \int_a^\omega f_t'(x,t)\, dx$.

В силу локальности существования и величины производной получаем

Следствие. Пусть семейство функций $f(x,t)$, $x \in [a;\omega)$, $t \in [c;d]$, удовлетворяет условиям:

1) функции $f(x,t)$ и $f_t'(x,t)$ непрерывны на $[a;\omega) \times [c;d]$;

2) интеграл $\int_a^\omega f(x,t)\, dx$ сходится равномерно на $[c;d_1]$ для любого d_1, $c < d_1 < d$;

3) интеграл $\int_a^\omega f_t'(x,t)\, dx$ сходится равномерно на любом отрезке $[\gamma;\delta] \subset (c;d)$.

Тогда функция $J(t) = \int\limits_a^\omega f(x,t)\,dx$ непрерывна на $[c;d)$, дифференцируема на $(c;d)$ и $J'(t) = \int\limits_a^\omega f'_t(x,t)\,dx$ для всех $t \in (c;d)$.

Это следствие позволяет применить дифференцирование по параметру для вычисления таких интегралов $\int\limits_a^\omega f(x,t)\,dx$, для которых функция $J(t)$ не является непрерывно дифференцируемой на соответствующих отрезках изменения параметра, и, тем самым, семейство $f(x,t)$ заведомо не удовлетворяет условиям теоремы о дифференцировании по параметру.

Пример 53. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos tx\,dx$, $a > 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Решение. Функции

$$f(x,t) = e^{-ax^2}\cos tx \quad \text{и} \quad f'_t(x,t) = -xe^{-ax^2}\sin tx$$

непрерывны на $[0;+\infty) \times \mathbb{R}$. Если $t = 0$, то интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos tx\,dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-z^2}\,dz$$

есть интеграл Эйлера–Пуассона, вычисленный в примере 51. Таким образом, выполнено второе условие теоремы о дифференцировании по параметру и $J(0) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-az}\,dz$ сходится, поэтому неравенство $|f'_t(x,t)| \leqslant xe^{-ax^2}$, $t \in \mathbb{R}$, показывает, что в силу признака Вейерштрасса интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} f'_t(x,t)\,dx = -\int\limits_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin tx\,dx$$

сходится равномерно на любом отрезке $[c;d] \subset \mathbb{R}$. Итак, все условия теоремы о дифференцировании по параметру выполнены, следовательно, функция $J(t) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos tx\, dx$, $a > 0$, непрерывно дифференцируема на любом отрезке $[c;d] \subset \mathbb{R}$, т. е. $J(t) \in C^1(\mathbb{R})$ и для любого $t \in \mathbb{R}$

$$J'(t) = -\int\limits_0^{+\infty} xe^{-ax^2} \sin tx\, dx.$$

Первообразная функции $xe^{-ax^2} \sin tx$ относительно x, если ни a, ни t не равны нулю, не выражается в элементарных функциях, но из равенства

$$-\int\limits_0^{+\infty} xe^{-ax^2} \sin tx\, dx = \frac{1}{2a} e^{-ax^2} \sin tx \Big|_0^{+\infty} -$$
$$-\frac{t}{2a} \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos tx\, dx = -\frac{t}{2a} \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos tx\, dx$$

следует, что функция $J(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $J'(t) = -\frac{t}{2a} J(t)$. Из этого уравнения и начального условия $J(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ получаем, что $J(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{t^2}{4a}}$.

Если аналитическое выражение функции $f(x,t)$ или $f'_t(x,t)$ не определено при некоторых значениях $x \in [a;\omega)$, но эти функции могут быть доопределены так, чтобы получились функции, непрерывные на $[a;\omega) \times [c;d]$ (или $[a;\omega) \times [c;d)$), то такое доопределение всегда подразумевается. При вычислении конкретного интеграла в таком случае проверка возможности доопределения функции "по непрерывности" — обязательная часть решения.

Пример 54. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx$, $0 < a < b$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x,t) = \dfrac{e^{-tx^2} - e^{-bx^2}}{x^2}$, $t \in \mathbb{R}$. Ее аналитическое выражение не имеет смысла при $x = 0$. Следовательно, необходимо проверить возможность определения значений $f(0,t)$ так, чтобы функция $f(x,t)$ стала непрерывной на $[0;+\infty) \times \mathbb{R}$. Соотношение

$$\lim_{x \to 0+} \frac{e^{-tx^2} - e^{-bx^2}}{x^2} = b - t$$

показывает, что, положив $f(0,t) = b - t$, получим функцию, непрерывную на $[0;+\infty) \times \mathbb{R}$. Итак, возможность доопределения "по непрерывности" функции $f(x,t)$ на $[0;+\infty) \times \mathbb{R}$ проверена. Далее, непрерывность функции $f_t'(x,t) = e^{-tx^2}$ следует из ее аналитического выражения. Так как $a > 0$, то интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx$ сходится. Отсюда и из неравенства $0 < e^{-tx^2} < e^{-ax^2}$, $t \in [a;b]$, в силу признака Вейерштрасса следует равномерная сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty} e^{-tx^2}\,dx = -\int\limits_0^{+\infty} f_t'(x,t)\,dx$ на $[a;b]$. Наконец, $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{e^{-tx^2} - e^{-bx^2}}{x^2}\,dx = 0$ при $t = b$. Итак, все условия теоремы о дифференцировании по параметру выполнены для семейства $f(x,t)$, $x \in [0;+\infty)$, $t \in [a;b]$, где функция $f(x,t) = \dfrac{e^{-tx^2} - e^{-bx^2}}{x^2}$, $x \neq 0$, и доопределена "по непрерывности" на множестве $[0;+\infty) \times [a;b]$. Следовательно, функция $J(t) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{e^{-tx^2} - e^{-bx^2}}{x^2}\,dx$ непрерывно дифференцируема на $[a;b]$ и удовлетворяет равенствам:

$$J(b) = 0$$

$$J'(t) = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-tx^2}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{t}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}$$

(см. пример 51). Отсюда получаем, что $J(t) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi t}$.

Окончательно,

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2}\, dx = J(a) = \sqrt{\pi}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) \quad (0 < a < b).$$

Пример 55. Вычислить интеграл Лапласа $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\, dx$.

Решение. Функции $f(x,t) = \dfrac{\cos tx}{1+x^2}$ и $f'_t(x,t) = \dfrac{-x\sin tx}{1+x^2}$ непрерывны на $[0;+\infty)\times\mathbb{R}$. Неравенство $\left|\dfrac{\cos tx}{1+x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$ и сходимость интеграла $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ показывают, что в силу признака Вейерштрасса интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} f(x,t)\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+x^2}\, dx$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$. При любом $\varepsilon > 0$ функция $F(b,t) = \displaystyle\int\limits_0^{b} \sin tx\, dx = \frac{\sin bt}{t}$ ограничена на $[0;+\infty)\times[\varepsilon,+\infty)$; функция $g(x,t) = \dfrac{x}{1+x^2}$ не зависит от t, монотонна на $[1;+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x,t) = 0$. Следовательно, в силу признака Абеля—Дирихле интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \sin tx\cdot\frac{x}{1+x^2}\, dx$ сходится равномерно на $[\varepsilon;+\infty)$ при любом $\varepsilon > 0$. Применяя критерий Коши, видим, что равномерная сходимость интеграла $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} \sin tx\, dx$ на $[\varepsilon;+\infty)$ эквивалентна равномерной сходимости интеграла $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{-x}{1+x^2} \sin tx\, dx$ на $[\varepsilon;+\infty)$. Итак, семейство $f(x,t) = \dfrac{\cos tx}{1+x^2}$, $x \in [0;+\infty)$, $t \in [0;+\infty)$, удовлетворяет всем условиям следствия теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру, следовательно, функция

$$J(t)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos tx}{1+x^2}\,dx$$

непрерывна на $[0;+\infty)$, дифференцируема на $(0;+\infty)$ и

$$J'(t)=-\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin tx}{1+x^2}\,dx$$

для $t>0$.

При любом $t\in\mathbb{R}$ интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{x\sin tx}{1+x^2}\right)'_t dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2\cos tx}{1+x^2}\,dx$$

расходится, поэтому семейство $g(x,t)=\dfrac{x\sin tx}{1+x^2}$ не удовлетворяет условиям теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру. Используем равенство

$$\frac{\pi}{2}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}\,dx,\quad t>0$$

(см. пример 49). Складывая его с равенством

$$J'(t)=-\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin tx}{1+x^2}\,dx,$$

получаем, что $J'(t)+\dfrac{\pi}{2}=\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{x(1+x^2)}\,dx$ для $t>0$. Аналитическое выражение $\dfrac{\sin tx}{x(1+x^2)}$ не имеет смысла при $x=0$, но соотношение $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin tx}{x(1+x^2)}=t$ показывает, что функция $\varphi(x,t)=\dfrac{\sin tx}{x(1+x^2)}$ доопределяется "по непрерывности" на

$[0;+\infty) \times [0;+\infty)$ равенством $\varphi(0,t) = t$. Функция $\varphi_t'(x,t) = \dfrac{\cos tx}{1+x^2}$ непрерывна на $[0;+\infty) \times [0;+\infty)$, интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \varphi(x,t)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x(1+x^2)}\,dx$$

сходится при $t = 0$, неравенство $\left|\dfrac{\cos tx}{1+x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$ и сходимость интеграла $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ показывают, что в силу признака Вейерштрасса интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \varphi_t'(x,t)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+x^2}\,dx$ сходится равномерно на $[0;+\infty)$. Итак, семейство $\varphi(x,t)$, $x \in [0;+\infty)$, $t \in [0;+\infty)$, удовлетворяет всем условиям теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру, следовательно,

$$J''(t) = \left(J'(t) + \frac{\pi}{2}\right)' = \int\limits_0^{+\infty} \varphi_t'(x,t)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+x^2}\,dx = J(t)$$

для $t > 0$.

Итак, функция $J(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $J(t)$ — четная непрерывная функция на $\mathbb{R}$;

2) $J''(t) = J(t)$ для $t > 0$;

3) $J(0) = \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$;

4) $|J(t)| \leqslant \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Из дифференциального уравнения $J''(t)=J(t)$ (условие 2) следует, что $J(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}$ для $t>0$. Из ограниченности $J(t)$ на $\mathbb{R}$ (условие 4) следует, что $C_1=0$. Из непрерывности $J(t)$ на $\mathbb{R}$ и равенства $J(0)=\frac{\pi}{2}$ (условия 1 и 3) следует, что

$$C_2=\frac{\pi}{2}.$$

Из честности $J(t)$ (условие 1) следует, что

$$J(t)=\frac{\pi}{2}e^{-|t|},\ t\in\quad .$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos xa}{1+x^2}\,dx=J(a)=\frac{\pi}{2}e^{-|a|},\ a\in\quad .$$

Заметим, что функции

$$J'(t)=-\frac{\pi}{2}e^{-|t|}\operatorname{sign}t=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin tx}{1+x^2}\,dx$$

дифференцируема при всех $t>0$, хотя интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2\cos tx}{1+x^2}\,dx=\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{x\sin tx}{1+x^2}\right)'_t dx$$

расходится. Этот факт показывает, что теорема о дифференцировании несобственного интеграла по параметру дает только достаточное, но не необходимое условие дифференцируемости функции.

Внимание! При вычислении несобственного интеграла с помощью дифференцирования или интегрирования по параметру проверка выполнения достаточных условий соответствующих равенств является существенной частью решения. Отсутствие или неполнота такой проверки — грубая ошибка. Формальное вычисление в таком случае не представляет решения.

ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ (БЕТА- И ГАММА-ФУНКЦИИ)

1. Бета-функция. Так называется интеграл Эйлера первого рода

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt, \tag{1}$$

где $x > 0$, $y > 0$.

Данный интеграл равномерно сходится по x и y на множестве $x \geqslant x_0 > 0$, $y \geqslant y_0 > 0$ соответственно.

В области $x > 0$, $y > 0$ функция $B(x, y)$ непрерывна и бесконечно дифференцируема. Делая в интеграле (1) замену $t = \dfrac{z}{1+z}$, получаем другое аналитическое выражение функции $B(x, y)$:

$$B(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{z^{x-1}}{(1+z)^{x+y}}\,dz. \tag{2}$$

Непосредственно из определения Бета-функции следует (если положить $t = 1 - z$), что

$$B(x,y) = B(y,x),$$

а с помощью формулы интегрирования по частям получаем, что

$$\begin{aligned} B(x+1,y) &= \frac{x}{x+y}B(x,y),\\ B(x,y+1) &= \frac{y}{x+y}B(x,y). \end{aligned} \tag{3}$$

Если y есть натуральное число, то, последовательно применяя формулу (3), получим равенство

$$B(x,n) = \frac{n-1}{x+n-1}\cdot\frac{n-2}{x+n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{x+1}\cdot B(x,1),$$

и поскольку

$$B(x,1) = \int_0^1 t^{x-1}\,dt = \frac{1}{x},$$

то

$$B(n,x)=B(x,n)=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}. \tag{4}$$

Полагая в формуле (2) $y=1-x$, $0<x<1$, имеем

$$B(x,1-x)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{z^{x-1}}{1+z}\,dz.$$

2. Гамма-функция. Так называется интеграл Эйлера второго рода

$$\Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\,dt. \tag{5}$$

Данный интеграл сходится равномерно в области $x\geqslant x_0>0$. В области $x>0$ функция $\Gamma(x)$ непрерывна и бесконечно дифференцируема, причем

$$\Gamma^{(n)}(x)=\int\limits_0^{+\infty}\ln^n t\cdot t^{x-1}\cdot e^{-t}\,dt.$$

Положив в (5) $t=\ln\dfrac{1}{z}$, получаем другое аналитическое выражение функции $\Gamma(x)$:

$$\Gamma(x)=\int\limits_0^{1}\left(\ln\frac{1}{z}\right)^{x-1}dz. \tag{6}$$

Поскольку $\ln\dfrac{1}{z}=\lim\limits_{n\to\infty}n(1-z^{\frac{1}{n}})$ и выражение $n(1-z^{\frac{1}{n}})$ при возрастании n стремится к своему пределу, возрастая (рассмотрите производную функции $\dfrac{1-z^\alpha}{\alpha}$ по α), то аналогично утверждению задачи № 51 гл. I § 5 из (6) следует, что

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}n^{x-1}\int\limits_0^{1}(1-z^{\frac{1}{n}})^{x-1}\,dz.$$

Полагая $z = t^n$, имеем

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} n^x \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{x-1}\, dt.$$

Применяя формулы (1) и (4), получаем

$$\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{x-1}\, dt = B(n,x) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.$$

Следовательно,

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} n^x\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.$$

Из этого равенства следует, что

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{x+1+n} = x,$$

откуда получаем формулу приведения

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0. \tag{7}$$

Из этой формулы, в частности, следует, что

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

так как

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1.$$

Для любых $x > 0$ и $y > 0$ справедлива формула, устанавливающая связь между эйлеровыми интегралами Г-функцией и B-функцией:

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{9}$$

Рассмотрим функцию $G(x) = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}$, $x \neq 0$, $x \neq z$, z — целое отрицательное число.

Поскольку

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}} = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1} =$$

$$= \left[1 + x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{x^2\ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\times$$

$$\times\left(1 - \frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= \left[1 + x\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) + \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\times$$

$$\times\left(1 - \frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 + \frac{x(x-1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$n \to \infty,$$

то бесконечное произведение сходится абсолютно для любого $x \neq 0$. Так как n-ое частичное произведение есть

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{(1+1)^x\left(1+\frac{1}{2}\right)^x\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)} = \frac{(n+1)^x}{x(1+x)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)} =$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^x\cdot\frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)},$$

то

$$G(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \Gamma(x), \quad x > 0.$$

Итак, функция $G(x)$ совпадает с функцией $\Gamma(x)$ для $x > 0$, и, следовательно, получено разложение функции $\Gamma(x)$ в бесконечное произведение

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}, \quad x > 0. \tag{10}$$

Так как это произведение сходится для всех отрицательных нецелых x, то можно принять равенство (10) за определение функции $\Gamma(x)$ для таких значений x.

Используя связь $\Gamma(x)$ и $G(x)$, можно непосредственно проверить, что для отрицательных нецелых x справедливо равенство

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1).$$

График функции $y = \Gamma(x)$ приведен на рис. 13.

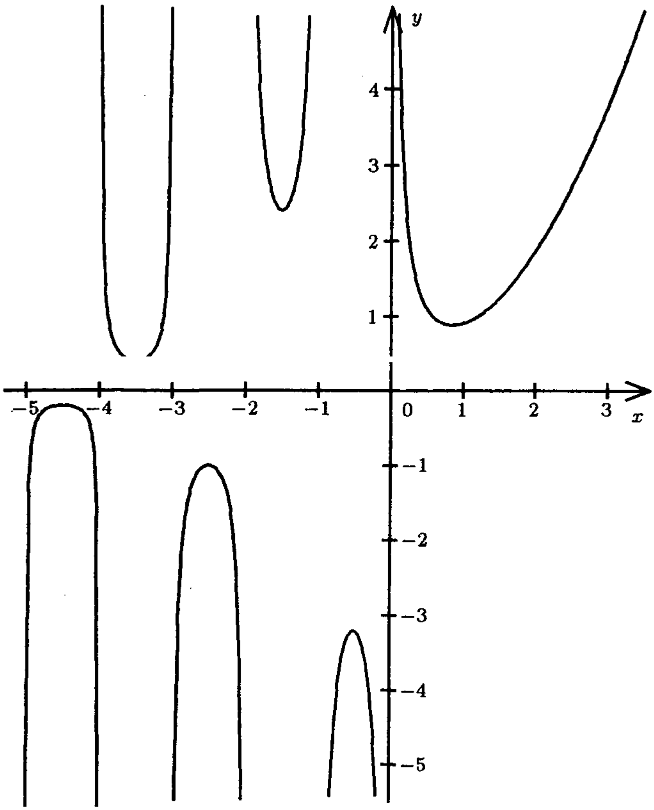


Рис. 13

Пример 56 . Вычислить $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[5]{x}}{(1+x)^2}\,dx.$

Решение. Используя представление

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[5]{x}}{(1+x)^2}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{6}{5}-1}}{(1+x)^{\frac{6}{5}+\frac{4}{5}}}\,dx,$$

получаем, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[5]{x}}{(1+x)^2}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{6}{5}-1}}{(1+x)^{\frac{6}{5}+\frac{4}{5}}}\,dx = B\left(\frac{6}{5},\frac{4}{5}\right) =$$
$$= \frac{\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}{\Gamma(2)} = \Gamma\left(1+\frac{1}{5}\right)\Gamma\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{5}\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)\Gamma\left(\frac{4}{5}\right) =$$
$$= \frac{1}{5}\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\pi}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}.$$

Применим формулу представления функции $\sin x$ бесконечным произведением (см. с. 73). Имеем

$$\sin x = x\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 m^2}\right), \quad |x|<\infty.$$

Полагая здесь πx вместо x, получаем

$$\sin \pi x = \pi x\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right), \quad |x|<\infty.$$

Поскольку

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

$$\Gamma(1-x) = -x\Gamma(-x) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-x}}{1-\frac{x}{n}},$$

то

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-x}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)} = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{x^2}{n^2}}.$$

Значит,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{x\sin\pi x},$$

т. е.

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}, \quad x\neq n, \quad n\in\mathbb{Z}. \tag{11}$$

Положив здесь $x=\frac{1}{2}$, получим $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

Из формул (2), (9) и (11) следует, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{z^{x-1}}{(1+z)}\,dz = B(x, 1-x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

$$0 < x < 1.$$

Пример 57. Определить область существования и вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m}{(a+bx^n)^p}\,dx, \quad n > 0.$

Решение. Введем новую переменную t, полагая $\left(\frac{a}{b}t\right)^{\frac{1}{n}} = x$, тогда $\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}t\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot \frac{a}{b}\,dt = dx$, поэтому

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m\,dx}{(a+bx^n)^p} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}}{na^p} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m+1}{n}-1}}{(1+t)^p}\,dt =$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}}{na^p} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m+1}{n}-1}}{(1+t)^{\frac{m+1}{n}+p-\frac{m+1}{n}}}\,dt =$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} \cdot \frac{1}{na^p} B\left(\frac{m+1}{n}, p - \frac{m+1}{n}\right).$$

Следовательно, данный интеграл сходится при условии $0 < \frac{m+1}{n} < p$. Заметим, что подобные преобразования являются обратимыми, поэтому из сходимости последнего интеграла следует сходимость исходного.

Таким образом, при решении задач подобного рода можно не выяснять предварительно сходимость заданного интеграла, поскольку она эквивалентна определенности полученных Бета- или Гамма-функций.

Пример 58. Определить область существования и вычислить $I = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\,dx.$

Решение. Положим $\sin x = \sqrt{t}$, $t \geqslant 0$. Тогда $\cos x\,dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$,

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{m+1}{2}-1}(1-t)^{\frac{n+1}{2}-1}\,dt.$$

Следовательно, данный интеграл сходится при условии $\frac{m+1}{2} > 0$ и $\frac{n+1}{2} > 0$ и его значение равно

$$I = \frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$

Пример 59. Найти площадь области, ограниченной кривой $(x^2+y^2)^6 = x^4y^2$.

Решение. Поскольку x и y входят в данное уравнение в четной степени, то кривая симметрична относительно обеих координатных осей. Следовательно, достаточно найти площадь $|D_1|$ области D_1, ограниченной этой кривой и осями координат и лежащей в области $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Введем полярную систему координат, совмещенную с декартовой системой, и сделаем замену $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, тогда уравнение кривой в полярной системе, ограничивающей область D_1, запишется в виде $r^{12} = r^6\cos^4\varphi\sin^2\varphi$, т. е. $r^6 = \cos^4\varphi\sin^2\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$|D_1| = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^{\frac{4}{3}}\varphi\sin^{\frac{2}{3}}\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}B\left(\frac{\frac{4}{3}+1}{2}, \frac{\frac{2}{3}+1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}B\left(\frac{7}{6}, \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma(2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(1+\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{12}\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right) =$$

$$= \frac{1}{12}\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}\frac{\pi}{\sin\pi/6} = \frac{\pi}{6},$$

и площадь всей области, ограниченной данной кривой, есть $4\cdot\frac{\pi}{6}$, т. е. $\frac{2\pi}{3}$.

Пример 60. Вычислить $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4}\,dx$.

Решение. Полагая $x^4 = t$, получаем, что

$$I = \frac{1}{64} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{-3/4} \ln^2 t}{1+t}\, dt.$$

Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{-3/4} \ln^2 t}{1+t}\, dt$ равен $\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{4}-1} \ln^2 t}{(1+t)^{\frac{1}{4}+\left(1-\frac{1}{4}\right)}}\, dt$ и является второй производной функции $B(p, 1-p)$, вычисленной в точке $p = \frac{1}{4}$. Поэтому

$$I = \frac{1}{64} \left(\frac{d^2}{dp^2} (B(p, 1-p)) \right)\Bigg|_{p=\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{64} \left(\frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{\pi}{\sin \pi p} \right) \right)\Bigg|_{p=\frac{1}{4}} = \frac{1}{64} \left(\left(-\frac{\pi^2 \cos \pi p}{\sin^2 \pi p} \right)'_p \right)\Bigg|_{p=\frac{1}{4}} =$$

$$= -\frac{\pi^2}{64} \left(\frac{-\pi \sin^3 \pi p - 2\pi \sin \pi p \cos^2 \pi p}{\sin^4 \pi p} \right)\Bigg|_{p=\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{\pi^3}{64} \frac{\sin^2 \frac{\pi}{4} + 2\cos^2 \frac{\pi}{4}}{\sin^3 \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^3}{64} \cdot \frac{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3} = \frac{3\pi^3\sqrt{2}}{64}.$$

Пример 61. Доказать формулу Лежандра

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}} \Gamma(2x).$$

Решение. Преобразуем интеграл

$$B(x, x) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}\, dt$$

следующим образом:

$$B(x, x) = \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t \right)^2 \right]^{x-1} dt = 2 \int\limits_0^{1/2} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t \right)^2 \right]^{x-1} dt$$

и сделаем в нем замену $\frac{1}{2} - t = \frac{1}{2}\sqrt{u}$, тогда получим

$$B(x, x)=\frac{1}{2^{2x-1}}\int_0^1 u^{-1/2}(1-u)^{x-1}\,du=\frac{1}{2^{2x-1}}\,B\left(\frac{1}{2}, x\right)$$

Выражая функцию $B(x, y)$ через функцию $\Gamma(x)$, имеем

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(2x)}=\frac{1}{2^{2x-1}}\,\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(x)}{\Gamma(1/2+x)},$$

откуда получаем искомое соотношение.

Пример 62. Доказать, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{-\frac{1}{2}},$$

n натуральное.

Решение. Обозначив данное произведение через E, рассмотрим его квадрат

$$E^2=\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{1}{n}\right).$$

Так как

$$\Gamma\left(\frac{n-m}{n}\right)\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{m}},$$

то

$$E^2=\frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin 2\frac{\pi}{n}\cdot\ldots\cdot\sin(n-1)\frac{\pi}{n}}.$$

Для вычисления $\prod\limits_{p=1}^{n-1}\sin\frac{\pi p}{n}$ рассмотрим тождество

$$\frac{z^n-1}{z-1}=\prod_{p=1}^{n-1}\left(z-\cos\frac{\pi p}{n}-i\sin\frac{2p\pi}{n}\right).$$

В пределе при $z\to 1$ имеем

$$n=\prod_{p=1}^{n-1}\left(1-\cos\frac{\pi p}{n}-i\sin\frac{2p\pi}{n}\right).$$

откуда

$$n=\prod_{p=1}^{n-1}\left|1-\cos\frac{\pi p}{n}-i\sin\frac{2p\pi}{n}\right|=2^{n-1}\prod_{p=1}^{n-1}\sin\frac{p\pi}{n}.$$

Поэтому $\prod\limits_{p=1}^{n-1} \sin\frac{p\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$ и, значит, $E = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}$.

Пример 63. Вычислить $I(a) = \int\limits_a^{a+1} \ln\Gamma(x)\,dx, \quad a > 0.$

Решение. Заметим, что функция $\ln\Gamma(x)$ непрерывна как функция двух переменных на $(x;a) = (0;+\infty)\times(0;+\infty)$. Таким образом, при любом $a > 0$ интеграл $\int\limits_a^{a+1} \ln\Gamma(x)\,dx$ есть собственный интеграл, подынтегральная функция в котором непрерывна как функция двух аргументов x и a, а пределы интегрирования — непрерывные функции параметра a. Предельное значение этого интеграла — интеграл $\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx$ — является уже несобственным интегралом, так как подынтегральная функция $\ln\Gamma(x)$ является неограниченной на $\langle 0;1\rangle$.

Из равенства $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ получаем, что $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$, $x \to 0+$, откуда из равенства $\ln\Gamma(x) = \ln x\Gamma(x) + \ln\frac{1}{x}$, следует, что $\ln\Gamma(x) \sim \ln\frac{1}{x}$, $x \to 0+$, и следовательно, $\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx$ сходится.

Дифференцируя данный интеграл по параметру a, имеем

$$I'(a) = \ln\Gamma(1+a) - \ln\Gamma(a) = \ln(a\Gamma(a)) - \ln\Gamma(a) = \ln a,$$

откуда

$$I(a) = a(\ln a - 1) + C, \tag{13}$$

где C — константа.

Интеграл $\int\limits_1^{a+1} \ln\Gamma(x)\,dx$ стремится к нулю при $a \to 0$ как непрерывная функция переменной a. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что для любого a, удовлетворяющего условию $0 < a < \delta$, $a < 1$, имеем

$$\left|\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx - \int_a^{a+1} \ln\Gamma(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_0^a \ln\Gamma(x)\,dx\right| +$$

$$+ \left|\int_1^{a+1} \ln\Gamma(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

т. е.

$$\lim_{a\to 0+} \int_a^{a+1} \ln\Gamma(x)\,dx = \int_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx.$$

Для вычисления интеграла $I = \int_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx$ заметим, что $I = \int_0^1 \ln\Gamma(1-x)\,dx$. Тогда

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(\Gamma(x)\Gamma(1-x))\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln\frac{\pi}{\sin\pi x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (\ln\pi - \ln\sin\pi x)\,dx = \frac{1}{2}\ln\pi - \frac{1}{2}\int_0^1 \ln\sin\pi x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\pi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \ln\sin x\,dx = \frac{1}{2}\ln\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx.$$

Для вычисления этого интеграла положим $x = 2t$, тогда

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = 2\int_0^{\pi/4} \ln\sin 2t\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\pi/4} \ln\sin t\,dt + 2\int_0^{\pi/4} \ln\cos t\,dt.$$

Подставляя в последнем интеграле $t = \dfrac{\pi}{2} - u$, приведем его к виду $2\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \ln\sin u\,du$, откуда $I_1 = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I_1$, и значит, $I_1 = -\frac{\pi}{2}\ln 2$. Поэтому

$$I = \int\limits_0^1 \ln\Gamma(1-x)\,dx = \frac{1}{2}\ln\pi - \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right) = \ln\sqrt{2\pi}.$$

Переходя к пределу при $a \to 0+$ в (13), имеем

$$\lim_{a\to 0+} a(\ln a - 1) + C = \ln\sqrt{2\pi},$$

откуда $C = \ln\sqrt{2\pi}$, и следовательно, $I(a) = \ln\sqrt{2\pi} + a(\ln a - 1)$.

При вычислении многих интегралов большую роль играет так называемая логарифмическая производная функции $\Gamma(x)$ — функция

$$\frac{d\ln\Gamma(x)}{dx} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \quad x > 0,$$

именно, важны различные ее представления в виде интеграла. Рассмотрим тождественное равенство при $x > 0$, $y > 0$

$$\Gamma(y) - B(x,y) = \Gamma(y) - \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} =$$

$$= \frac{\Gamma(y)\cdot y}{\Gamma(x+y)}\cdot\frac{\Gamma(x+y)-\Gamma(x)}{y} = \frac{\Gamma(1+y)}{\Gamma(x+y)}\cdot\frac{\Gamma(x+y)-\Gamma(x)}{y}.$$

Если перейти к пределу при $y \to 0+$ в этом равенстве, то в силу дифференцируемости функции $\Gamma(x)$ и ее непрерывности получаем, что

$$\lim_{y\to 0+}(\Gamma(y) - B(x,y)) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

Поскольку $\Gamma(y) = \int\limits_0^{+\infty} t^{y-1}e^{-t}\,dt$, $B(x,y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt$,

то

$$
\begin{aligned}
\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} &= \lim_{y\to 0+} \int\limits_0^{+\infty} t^{y-1}\left(e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^{x+y}}\right) dt = \\
&= \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^{x}}\right) \frac{dt}{t}.
\end{aligned} \tag{14}
$$

Для обоснования законности предельного перехода заметим, что функция

$$
f(t;y) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^{1-y}}\left(e^{-t} - \dfrac{1}{(1+t)^{x+y}}\right), & t \neq 0, \\ x+y-1, & t = 0, \end{cases}
$$

непрерывна как функция двух переменных на множестве $[0;t]\times[0;+\infty)$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} t^{y-1}\left(e^{-t} - \dfrac{1}{(1+t)^{x+y}}\right) dt$ сходится равномерно на $\left[0;\dfrac{x}{2}\right]$, так как при $t \geqslant 1$ и $y \in \left[0;\dfrac{x}{2}\right]$ справедливо неравенство

$$
t^{y-1}\cdot\left|e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^{x+y}}\right| \leqslant t^{\frac{x}{2}-1}\left|\frac{1}{(1+t)^{x}} - e^{-t}\right|
$$

и $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^{1-\frac{x}{2}}}\left(\dfrac{1}{(1+t)^{x}} - e^{-t}\right) dt$ сходится.

Из формулы (14) получаем, что (полагая $t = e^u - 1$)

$$
\begin{aligned}
\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left\{\int\limits_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}\,dt}{t} - \int\limits_\varepsilon^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t)^{x}}\right\} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left\{\int\limits_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du - \int\limits_{\ln(1+\varepsilon)}^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{1-e^{-u}}\,du\right\} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left\{\int\limits_\varepsilon^{+\infty} \left(\frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-ux}}{1-e^{-u}}\right) du + \int\limits_{\ln(1+\varepsilon)}^{\varepsilon} \frac{e^{-ux}}{1-e^{-u}}\,du\right\}.
\end{aligned}
$$

Поскольку для $0 < \varepsilon < x$

$$\frac{e^{-ux}}{1-e^{-u}} = \frac{e^{-ux}}{e^{-u}(e^u-1)} = \frac{1}{e^{u(x-1)}(e^u-1)} < \frac{1}{(1+\varepsilon)^{x-1}\cdot\varepsilon};$$

$$\left|\int\limits_{\ln(1+\varepsilon)}^{\varepsilon} \frac{e^{-ux}}{1-e^{-u}}\,du\right| < \frac{\varepsilon-\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon(1+\varepsilon)^{x-1}} < \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)^{x-1}};$$

$\ln(1+\varepsilon) = \varepsilon - \dfrac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to 0+$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{\ln(1+\varepsilon)}^{\varepsilon} \dfrac{e^{-ux}}{1-e^{-u}}\,du = 0$

и, значит,

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-ux}}{1-e^{-u}}\right) du.$$

Полагая в (14) $x = 1$, имеем

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \Gamma'(1) = \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-t} - \frac{1}{1+t}\right) \frac{dt}{t}.$$

Вычитая это равенство из (14), получим

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \Gamma'(1) = \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^x}\right) \frac{dt}{t}.$$

Введя новую неизвестную $\dfrac{1}{1+t} = z$, получаем формулу Гаусса

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \Gamma'(1) = \int\limits_0^{1} \frac{1-z^{x-1}}{1-z}\,dz. \tag{15}$$

Поскольку $\dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots$, $|z| < 1$, то

$$\int\limits_0^1 \frac{1-z^{x-1}}{1-z}\,dz = \int\limits_0^1 (1-z^{x-1})(1+z+z^2+\cdots)\,dz =$$

$$= \int\limits_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} (z^m - z^{m+x-1})\,dz.$$

При любом $x > 0$ члены ряда, стоящего под знаком интеграла, являются непрерывными и знакопостоянными на $[0;1]$ функциями, причем сумма ряда, равная $\dfrac{1-z^{x-1}}{1-z}$, непрерывна на $[0;1]$ при любом x. Следовательно, этот ряд в силу теоремы Дини сходится равномерно на $[0;1]$ и его можно интегрировать почленно.

Итак,

$$\int_0^1 \frac{1-z^{x-1}}{1-z}\,dz = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+x}\right)$$

и

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \Gamma'(1) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+x}\right). \tag{16}$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{d^2\ln\Gamma(x)}{dx^2} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+x)^2}$$

и вообще

$$\frac{d^n\ln\Gamma(x)}{dx^n} = (-1)^n(n-1)!\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+x)^n}.$$

Дифференцировать почленно ряды по x можно, т. к. они сходятся равномерно вследствие оценки $\dfrac{1}{(m+x)^n} < \dfrac{1}{m^n}$. Интегрируя почленно ряд (16) по x от 1 до $x > 0$ (это законно в силу его равномерной сходимости), имеем равенство

$$\ln\Gamma(x) - \Gamma'(1)(x-1) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{m+1} - \ln\frac{x+m}{m+1}\right).$$

Полагая здесь $x = 2$ и учитывая, что $\ln\Gamma(2) = 0$, получаем равенство

$$\Gamma'(1) = -\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{m+1} - \ln\frac{2+m}{m+1}\right),$$

т. е.

$$\Gamma'(1) = -\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m} - \ln\frac{1+m}{m}\right).$$

Частичная сумма S_n этого ряда равна

$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right).$$

Следовательно, в силу равенства

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = C_Э$$

где $C_Э$ — постоянная Эйлера, получаем, что

$$\Gamma'(1) = -C_Э, \quad (C_Э \simeq 0{,}577). \tag{17}$$

Пример 64. Вычислить $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\ln^2 x\,dx$.

Решение. Полагая $x^2 = t$, перепишем исходный интеграл в виде $2\int\limits_0^{+\infty} t^{-1/2}e^{-t}\ln^2 t\,dt$. Рассмотрим функцию $\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$. Последовательно имеем

$$\Gamma'(x) = \int\limits_0^{+\infty} \ln t\cdot t^{x-1}e^{-t}\,dt, \quad \Gamma''(x) = \int\limits_0^{+\infty} \ln^2 t\cdot t^{x-1}e^{-t}\,dt,$$

и следовательно, данный интеграл равен $2\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)$. Значение $\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)$ выводится из формулы (16):

$$\frac{d^2\ln\Gamma(x)}{dx^2} = \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right)'_x = \frac{\Gamma''(x) - (\Gamma'(x))^2}{\Gamma^2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+x)^2}.$$

При $x = \frac{1}{2}$ имеем

$$\frac{\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{(2n+1)^2}.$$

Поскольку по формулам (15) и (17)

$$\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = C_Э + \int\limits_0^1 \frac{1-t^{-1/2}}{1-t}\,dt = C_Э - \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})} =$$
$$= C_Э - 2\ln 2,$$

то

$$\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}(C_Э - 2\ln 2).$$

Поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12}\right) = \frac{\pi^2}{8}$$

и

$$\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4\frac{\pi^2}{8}\cdot\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} =$$
$$= \frac{\pi^2}{2}\sqrt{\pi} + (\sqrt{\pi})^2(C_Э - 2\ln 2)^2 = \pi\left(\frac{\pi\sqrt{\pi}}{2} + (C_Э - 2\ln 2)^2\right).$$

Пример 65. Вычислить интеграл

$$I(\alpha,\beta,\gamma) = \int\limits_0^1 \frac{(1-x^\alpha)(1-x^\beta)(1-x^\gamma)}{(1-x)\ln x}\,dx,$$

$\alpha > -1,\ \beta > -1,\ \gamma > -1, \quad \alpha+\beta > -1,\ \alpha+\gamma > -1,$
$\beta+\gamma > -1, \quad \alpha+\beta+\gamma > -1.$

Решение. По формулам (15) и (17) имеем, что

$$\frac{d\ln\Gamma(x)}{dx} = -C_Э + \int\limits_0^1 \frac{1-t^{x-1}}{1-t}\,dt.$$

Значит,

$$\int\limits_0^1 \frac{t^p - t^q}{1-t}\,dt = \frac{d\ln\Gamma(q+1)}{dq} - \frac{d\ln\Gamma(p+1)}{dp}.$$

Рассмотрим интеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{(1-t^\alpha)(1-t^\beta)(1-t^\gamma)}{(1-t)\ln t}\,dt$. Его производная по α равна $\frac{dI}{d\alpha} = -\int\limits_0^1 \frac{t^\alpha(1-t^\beta)(1-t^\gamma)}{1-t}\,dt$. Поскольку

$$t^\alpha(1-t^\beta)(1-t^\gamma) = (t^\alpha - t^{\alpha+\beta}) - (t^{\alpha+\gamma} - t^{\alpha+\beta+\gamma}),$$

то

$$\frac{dI}{d\alpha} = -\left(\frac{d\ln\Gamma(\alpha+\beta+1)}{d\alpha} - \frac{d\ln\Gamma(\alpha+1)}{d\alpha}\right) +$$
$$+\left(\frac{d\ln\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}{d\alpha} - \frac{d\ln\Gamma(\alpha+\gamma+1)}{d\alpha}\right) =$$
$$= \frac{d}{d\alpha}\ln\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\gamma+1)}$$

и

$$I(\alpha,\beta,\gamma) = \ln\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\gamma+1)} + C(\beta,\gamma).$$

При $\alpha = 0$ имеем $I(0,\beta,\gamma) = 0$, следовательно,

$$C(\beta,\gamma) = -\ln\frac{\Gamma(1)\Gamma(\beta+\gamma+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma+1)}$$

и

$$I(\alpha,\beta,\gamma) = \ln\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\gamma+1)} -$$
$$-\ln\frac{\Gamma(\beta+\gamma+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma+1)} =$$
$$= \ln\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\gamma+1)\Gamma(\beta+\gamma+1)}.$$

§ 4. УПРАЖНЕНИЯ

Несобственные интегралы, независящие от параметра

В следующих примерах непосредственно установить сходимость интеграла, и в этом случае найти его величину, или установить расходимость.

1) $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \alpha > 1.$

2) $\displaystyle\int_0^{10} \frac{dx}{x^\alpha}.$

3) $\displaystyle\int_a^{b} \frac{dx}{(x-a)^\alpha}.$

4) $\displaystyle\int_a^{b} \frac{dx}{(b-x)^\alpha}.$

5) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{(1-x)(2x-1)}.$

6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3}\,dx.$

7) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}.$

8) $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{2x\,dx}{(x^2-1)^2}.$

9) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{2x\,dx}{(x^2-1)^2}.$

10) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2+b^2x^2}, \quad a \neq 0,\ b \neq 0.$

11) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^2+4x+3}.$

12) $\displaystyle\int_{-5}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+3}.$

13) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-4x+11}.$

14) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{3x-1}{x^2+5x-7}\,dx.$

15) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}.$

16) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \quad ab \neq 0.$

17) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$. 18) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.

19) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, $\quad a^2+b^2 \neq 0$.

20) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, $\quad ab \neq 0$.

21) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$. 22) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}\,dx$.

23) $\displaystyle\int_{0}^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$. 24) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

25) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$. 26) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3}}$.

27) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$. 28) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}$, $\quad a > 1$.

29) $\displaystyle\int_{a}^{b} \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,dx$, $\quad a < b$. 30) $\displaystyle\int_{a}^{b} x\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,dx$, $\quad a < b$.

31) $\displaystyle\int_{a}^{b} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, $a < b$. 32) $\displaystyle\int_{a}^{b} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, $a < b$.

33) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^4\,dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}$.

34) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}}$,

$0<\alpha\beta<1,\ |\alpha|<1,\ |\beta|<1.$

35) $\displaystyle\int_{-2}^{+\infty} e^{1-2x}\,dx.$

36) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^2\cdot 5^{-x}\,dx.$

37) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx.$

38) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^3}.$

39) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \sin 2x\,dx.$

40) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \cos\alpha x\,dx.$

41) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \ln x\,dx.$

42) $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln x\,dx.$

43) $\displaystyle\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^\alpha x}.$

44) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2 x}.$

45) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{x\ln^2 x}.$

46) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{x\ln x}.$

47) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx.$

48) $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx.$

49) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

50) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx.$

51) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt[3]{\arcsin x}}.$

52) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

53) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sqrt[7]{\cos^5 x}}\,dx.$

54) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{tg} x\,dx.$

55) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1-a^2x^2)}.$

56) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}(a^2x^2-1)}.$

57) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}.$

58) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-1}}.$

59) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^3}\,dx.$

60) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}\,dx.$

61) $\displaystyle\int_0^1 x\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx.$

62) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx.$

63) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx.$

64) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\sin x\,dx.$

65) $\displaystyle\int_0^2 \left(2x\sin\frac{\pi}{x^2}-\frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2}\right)dx.$

66) $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{-x^3}(2x^4-1).$

Исследовать сходимость интеграла от неотрицательной функции.

67) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{5/2}}{(1+x^2)^2}\,dx.$

68) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx.$

69) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^{\alpha-1}}{|1-x|}\,dx.$

70) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{|1-x|^{\alpha}}\,dx.$

71) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^3-1)^p}$.

72) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3+x}{x^4+x^2+1}\,dx$.

73) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2-5x+1}{x^4+18x+100}\,dx$.

74) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p+2}$.

75) $\displaystyle\int_0^{1} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$.

76) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha(x+2)}{x+1}\,dx$.

77) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+2x^2}}$.

78) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$.

79) $\displaystyle\int_2^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x^2)^2}}$.

80) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^3}}$.

81) $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-\alpha)(x-\beta)}}, \quad \alpha>\beta>5.$

82) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{|x-3|}}$.

83) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$.

84) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad k^2<1.$

85) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,dx$.

86) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^3 x}{x^2}\,dx$.

87) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x}\,dx$.

88) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$.

89) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\beta x}\,dx, \quad \alpha>0,\ \beta>0.$

90) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx.$ 91) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x^{\alpha}}\,dx.$

92) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{e^{3x}-1}}.$ 93) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\,dx,\ n>0.$

94) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^x e^{-x^n}\,dx.$ 95) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^{2n-1}e^{x^2}\,dx.$

96) $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^x}.$ 97) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{|k-\sin\varphi|},\quad 0<k<1.$

98) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}}.$

99) $\displaystyle\int\limits_0^{b} \frac{dx}{\sqrt{\cos x-\cos b}},\quad 0<b<2\pi.$

100) $\displaystyle\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right)^p d\theta,\quad p>0.$

101) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\,dx.$ 102) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} (\operatorname{tg} x)^p\,dx.$

103) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{\alpha} x\cos^{\beta} x\,dx,\quad \alpha>-1,\ \beta>-1.$

104) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \sin\left(\frac{1}{\cos x}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}.$ 105) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{1-\cos x}{x^{\alpha}}\,dx.$

106) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p}\,dx,\quad p>0.$ 107) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

108) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{\sqrt{x^5+2x^3}}\,dx.$ 109) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x \operatorname{arctg} \beta x}{x^2}\,dx.$

110) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x - \operatorname{arctg} \beta x}{x}\,dx.$ 111) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{\sqrt{4+x^n}}\,dx, \quad n \geqslant 0.$

112) $\displaystyle\int\limits_0^{1/8} \frac{\arcsin(x^2+x^5)}{x\ln^2(1+x)}\,dx.$ 113) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{|\pi^2-x^2|}\,dx.$

114) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\left|\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right|dx.$ 115) $\displaystyle\int\limits_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$

116) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{1+\cos x}{(\pi-x)^p}\,dx.$ 117) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x-\sin x}.$

118) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \left|\frac{x^{\beta-1}-x^{\alpha-1}}{\ln x}\right|dx, \quad \alpha>0,\ \beta>0.$

119) $\displaystyle\int\limits_0^{1} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}|\ln x|\,dx.$ 120) $\displaystyle\int\limits_0^{1} x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx.$

121) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}.$ 122) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{|\ln x|}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx.$

123) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x|\ln x|^\alpha}.$ 124) $\displaystyle\int\limits_{100}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x|\ln\ln x|^\alpha}.$

125) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+|\ln x|^\alpha}.$ 126) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{1,1}}\,dx.$

127) $\displaystyle\int\limits_0^{2} \frac{1}{|\ln x|^p}\,dx.$ 128) $\displaystyle\int\limits_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$

129) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[3]{x^4+3x^5}}\,dx.$

130) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\,dx.$

131) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx.$

132) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\left|\ln\cos\frac{1}{x}\right|}{x^p}\,dx.$

133) $\displaystyle\int_0^{\pi} |\ln\sin x|\,dx.$

134) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\ln\cos\frac{1}{x}\right| \operatorname{ctg}\frac{1}{x}\,dx.$

135) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{|\ln\sin x|}{\sqrt{x(\pi-2x)^5}}\,dx.$

136) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{|\ln\sin x|}{x}\,dx.$

137) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{|\ln x|}{\sqrt{\sin x}}\,dx.$

138) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\ln x|}{1+x^2}\,dx.$

139) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} |\ln|\sin^2\varphi-k^2||\,d\varphi, \quad |k|<1.$

140) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,dx.$

141) $\displaystyle\int_0^{1/3} \frac{\ln^\alpha\frac{1}{x}}{\operatorname{tg}^\beta x}\,dx.$

142) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^k\cdot\frac{x+\sin x}{x-\sin x}\,dx.$

143) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{e^x-\cos x}.$

144) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt[3]{\ln(1+x)}}{1-\cos x}.$

145) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{e^x-1}}{\sin x}\,dx.$

146) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\sqrt{x-1}}{\ln x}\,dx.$

147) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\,dx.$

148) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)\,dx.$

149) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\,dx.$

150) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$

151) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3+3x^2}}{x\ln^2 x}\,dx.$

152) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4+4x^3}\right)dx.$

153) $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(x^2+1)-2\ln x)\,dx.$

154) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(e^x-x)}{x^\alpha}\,dx.$

155) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{\alpha^2}{x^2}}-e^{-\frac{\beta^2}{x^2}}\right)dx.$

156) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^\alpha+1}-\sqrt[3]{|x^\alpha-1|}}{\sqrt{x}}\,dx.$

157) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^6\sin^2 x}\,dx.$

158) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2 x}.$

159) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4\sin^2 x}.$

160) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin^2\left(\pi\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)dx.$

161) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx.$

162) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\left(\frac{3x+1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} dx.$

163) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{\left(e^{x^2}+3\right)^{\frac{1}{x}}}\,dx.$

164) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{x^2\sqrt{x^2+1}}}\,dx.$

165) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q}.$

166) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^{100}+1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\sqrt{x}}}\,dx.$

Исследовать сходимость (абсолютную и условную) интеграла.

167) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{k^2+x^2}\,dx.$

168) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a}\,dx, \quad a>0.$

169) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx.$

170) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx.$

171) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^\alpha}\,dx, \quad \alpha\geqslant 0.$

172) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x^3+3x}}\,dx.$

173) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x^2+x}}\,dx.$

174) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^a}\sin x\,dx.$

175) $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^p+x^q}\,dx.$

176) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^p\sin x\,dx}{1+x^q}, \quad q\geqslant 0.$

177) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+10}\,dx.$

178) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\,dx$, где $P_m(x)$ и $P_n(x)$ — целые многочлены и $P_n(x)>0$ при $x\geqslant 0$.

179) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^p\cos x}{1+x^q}\,dx, \quad q\geqslant 0.$

180) $\displaystyle\int_{100}^{+\infty} (\ln x)^\lambda \frac{\sin x}{x}\,dx.$

181) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{\sin x}\cdot\frac{\sin 2x}{x}\,dx.$

182) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\operatorname{arctg} x\,dx.$

183) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{\sin 3x}{x^\alpha}\,dx.$

184) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x\sin x}{x(e^x+1)}\,dx.$

185) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p}\,dx.$

186) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{(1-x^2)^p}\,dx.$

187) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx.$

188) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^3)\,dx.$

189) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos\frac{1}{x}}{x}\,dx.$

190) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin\frac{\pi}{x}}{x(1-x)^p}\,dx.$

191) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(\sec x)\,dx.$

192) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\cos(e^x)\,dx.$

193) $\displaystyle\int_0^{+\infty} (e^x+x)\sin e^{2x}\,dx.$

194) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha \sin e^x\,dx.$

195) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x+x^3)\,dx.$

196) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x+x^2)}{\alpha^2+x}\,dx.$

197) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^p}\,dx.$

198) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\cos(x+x^2)}{x^p}\,dx.$

199) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\,dx.$

200) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\cos(x^3-x)\,dx.$

201) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin|\ln x|^q\cdot\frac{dx}{x},\quad q>0.$

202) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^{x^2+\sin x}}\,dx.$

203) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\cdot\left(\frac{x+1}{x}\right)^x dx.$

204) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x+\sin x}\,dx.$

205) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2+\sin x)\,dx.$

206) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^3+\sin 2x)\,dx.$

207) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} e^{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\,dx.$

При помощи сравнения с рядами исследовать сходимость следующих интегралов.

208) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\,dx,\ f(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{n},\ x\in[n-1;n],\ n\in\mathbb{N}.$

209) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} (-1)^{[x^2]}\,dx.$

210) $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x^\alpha}\,dx.$

211) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{(-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]}}{x}\,dx.$

212) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{\sin x}(\sin(\sin x))}{x}\,dx.$

213) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^\alpha\,dx}{1+x^\beta|\sin x|},\quad \alpha>0,\ \beta>0.$

214) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^\alpha\,dx}{1+x^\beta\sin^2 x},\quad \alpha>0,\ \beta>0.$

215) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin^{\left[\frac{x}{\pi}\right]} x}{1+\ln^2(x+1)}\,dx.$

216) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos^{\left[\frac{x}{\pi}\right]^2} x}{1+\ln^2(x+1)}\,dx.$

Установить, собственным или несобственным является интеграл, и, если он несобственный, то исследовать его сходимость.

217) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)dx.$

218) $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x}-\operatorname{arcctg} x\right)dx.$

219) $\displaystyle\int\limits_{0}^{a} \frac{\ln\left(2-\frac{x}{a}\right)}{\sin(x-a)}\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\pi x}{a}}\,dx,\quad a\neq 0.$

220) $\displaystyle\int\limits_{10}^{+\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{x-5}{x+5}\, dx.$ 221) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x \sin^{\alpha} x}\, dx.$

222) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1/3} \frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x^{3/2}(e^x-1)}\, dx.$

223) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^3-2}{(x^2+1)^2} \left(3^{\frac{x}{2x^2+1}}-1\right) dx.$

224) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} x \ln\ln \frac{1}{x}\, dx.$ 225) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2} \frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}\, dx.$

226) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2} \frac{e^{\sqrt[3]{x}}-e^{-\sqrt[3]{x}}-2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}}\, dx.$ 227) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2} \frac{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}-2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-\sin\sqrt[3]{x}}\, dx.$

228) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2} \frac{e^{\sqrt[3]{x}}-e^{-\sqrt[3]{x}}-2\sqrt[3]{x}}{x^{2/3}-\sin x^{2/3}}\, dx.$

229) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{\operatorname{tg} \pi x-(1-6x^2+4x^3)\sin \pi x}{x^4 \ln^4 x}\, dx.$

230) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{\operatorname{tg} \pi x-(1-6x^2+4x^3)\sin \pi x}{x^4 \ln^3 x}\, dx.$

231) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{\operatorname{tg} \pi x-(1-6x^2+4x^3)\sin \pi x}{x^3 \ln^3 x}\, dx.$

232) $\displaystyle\int\limits_{0}^{5} \frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt{x^{11}+11x^{19}}}\, dx.$

233) $\displaystyle\int\limits_{0}^{5} \frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt{x^{13}+11x^{19}}}\, dx.$

234) $\displaystyle\int_0^5 \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt{x^{10}+11x^{19}}}\,dx.$

235) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt{x^{11}+11x^{19}}}\,dx.$

236) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\sqrt[4]{x^2-x+1} - \sqrt[8]{e^{x^2-1}}}{(e^{x^2}-e)\ln^{7/3} x}\,dx.$

237) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x^2-x+1} - \sqrt[8]{e^{x^2-1}}}{(e^{x^2}-e)\ln^{7/3} x}\,dx.$

238) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x^2-x+1} - \sqrt[8]{e^{x^2-1}}}{(e^{x^2}-e)\ln^{10/3} x}\,dx.$

239) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\sqrt{x^2-x+1} - \sqrt[8]{e^{x^2-1}}}{(e^{x^2}-e)\ln^{2} x}\,dx.$

240) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln(1+3x+3x^2)^2+3(x-1)^2-3)\sqrt{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^{13}+x^{15}}}\,dx.$

241) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln(1+3x+3x^2)^2+3(x-1)^2-3)\sqrt{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^{13}+x^{15}}}\,dx.$

242) $\displaystyle\int_0^{10} \frac{(\ln(1+3x+3x^2)^2+3(x-1)^2-3)\sqrt{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^{12}+x^{13}}}\,dx.$

243) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln(1+3x+3x^2)^2+3(x-1)^2-3)\sqrt{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^{12}+x^{13}}}\,dx.$

244) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{x}+5} - e^x}{\ln(1+x^2)}\,dx.$ 245) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{x}+5} - e^x}{\ln^{3/2}(1+x^2)}\,dx.$

246) $\int\limits_0^1 \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{x}+5}-e^x}{\ln^{4/3}(1+x^2)}\,dx.$

Доказать справедливость неравенств.

247) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx > 0.$

248) $\left|\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx\right| < \frac{\pi}{2}.$

249) $0 < \int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\pi}.$

250) $0 < \int\limits_{100\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx < \frac{1}{100\pi}.$

251) $0 < \int\limits_0^1 \frac{\sin \pi x}{x\sqrt{x}}\,dx < 2\pi + 2\sqrt{2} - 2.$

252) $0 < \int\limits_{100\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx < \frac{1}{50\pi}.$

253) $\int\limits_0^1 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx > 0.$

254) $0 < \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{2x^4+x+2} < \frac{1}{5}.$

255) $\frac{1}{2} < \int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} < \frac{3}{5},\quad n\in\mathbb{N}.$

256) $\frac{1}{19} < \int\limits_1^{+\infty} \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}\,dx < \frac{1}{19} + \frac{1}{39}.$

257) $\frac{20}{19} < \int\limits_0^{+\infty} \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}} < \frac{20}{19} + \frac{1}{20}.$

258) $1 - \frac{1}{n} < \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^n}\,dx < 1 + \frac{1}{n},\quad n > 1.$

259) $0 < \int\limits_1^{+\infty} e^{-x^n}\,dx < \frac{1}{n}.$

260) $0 < \int\limits_2^{+\infty} e^{-x^2}\,dx < \frac{1}{4e^4}.$

261) $\displaystyle\int\limits_{1,9}^{2} \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt[4]{2+x-x^2}} < 0{,}03.$ 262) $\displaystyle 0 < \int\limits_{3}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx < \left(\frac{1}{2}\right)^{11}$

263) $\displaystyle \left|\int\limits_{2}^{+\infty} e^{-x^4}\cos x^4\,dx\right| < \left(\frac{1}{2}\right)^{21}.$

264) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x} > \frac{1}{100}.$

265) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{\alpha}\pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1+(n+1)^{\beta}\pi^{\beta}}} \leqslant \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{\alpha}\,dx}{1+x^{\beta}\sin^2 x} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{\alpha}\pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1+n^{\beta}\pi^{\beta}}},$
$\beta > 2(\alpha+1).$

266) $\displaystyle 0 \leqslant \int\limits_{100}^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{x}\,dx < 0{,}01.$ 267) $\displaystyle\int\limits_{100}^{+\infty} \sin \pi x^2\,dx < 0{,}01.$

Вычислить.

268) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(\alpha^2-x^2)\sqrt{1-x^2}},\quad \alpha > 1.$

269) $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-\alpha^2)\sqrt{x^2-1}},\quad 0 < \alpha < 1.$

270) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)\sqrt{1-x^2}},\quad \alpha > 0.$

271) $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)\sqrt{x^2-1}},\quad \alpha > 0.$

272) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)\sqrt{x^2+1}},\quad \alpha > 0.$

Применяя формулу интегрирования по частям, получить рекуррентную формулу для интеграла I_n, $n \in \mathbb{N}$, и найти его значение.

273) $I_n = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} x^n \, dx.$ 274) $I_n = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2n} \, dx.$

275) $I_n = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin^n x \, dx, \quad \alpha > 0.$

276) $I_n(m) = \int\limits_0^{1} x^n \ln^m x \, dx, \quad m \in \mathbb{N}.$

277) $I_n(m) = \int\limits_0^{1} x^{n-1} (1-x)^{m-1} \, dx, \quad m \in \mathbb{N}.$

278) $I_n = \int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x} \sin x \, dx.$ 279) $I_n = \int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x} \cos x \, dx.$

280) $I_n = \int\limits_0^{1} (1-x^2)^n \, dx.$

281) $I_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(Ax^2 + 2Bx + C)^n}, \quad AC - B^2 > 0.$

282) $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \ln \cos x \cdot \cos 2nx \, dx.$

283) $I_n = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\cos(2n-1)x}{\cos x} \, dx, \quad \alpha > 0.$

284) $I_n = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \frac{\cos(2n-1)x}{\cos x} \, dx, \quad \alpha > 0.$

285) $I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$ 286) $I_n = \int\limits_0^1 (\ln x)^n\,dx.$

287) $I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$ 288) $I_n = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n+1} x}.$

289) $I_n = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)\dots(n+x)}.$

290) Доказать, что существует $M > 0$, такое, что при $a > M$ справедливо равенство

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{x+a} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1\cdot 2}{a^3} - \frac{1\cdot 2\cdot 3}{a^4} + \dots +$$
$$+ (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{a^n} + (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}}\cdot\theta, \quad 0 < \theta < 1.$$

Доказать равенства.

291) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\cos x\,dx = -\int\limits_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\,dx.$

292) $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = -\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx.$

293) $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{x}\,dx.$

294) $\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = -\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$

295) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = -\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx.$

296) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{1+x^4} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx.$

297) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{\operatorname{tg}\varphi}} = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg}\varphi}\,d\varphi = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}.$

298) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} e^{\sin x}\,dx.$

299) $\displaystyle\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-k^2)}} = 2\int\limits_0^{1/\sqrt{x_0}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$

300) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^4}\,dx = 0.$

301) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \cos x\cdot\ln\frac{1-x}{1+x}\,dx = 0.$

302) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\ln x\,dx}{1+x} = -\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx.$

303) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\ln x}{1-x}\,dx = \int\limits_0^{1} \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = -2\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx.$

Используя разложение подынтегральной функции в ряд и равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

вычислить следующие интегралы.

304) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx.$

305) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx.$

306) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \ln\frac{1}{1-x}\,dx.$

307) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \ln\frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx.$

308) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^x - 1}$.

309) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^x + 1}$.

310) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^{ax} - e^{-ax}}$.

311) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{1+x}\,dx$.

312) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{1-x}\,dx$.

313) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx$.

314) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x\ln x\,dx}{1-x^2}$.

315) $\displaystyle\int_0^{1} \ln\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{dx}{x}$.

316) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln^2 \operatorname{tg} x\,dx$.

317) $\displaystyle\int_0^{1} \ln x\cdot\ln(1-x)\,dx$.

Вычислить.

318) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$.

319) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln|\sin^2\varphi - a^2|\,d\varphi, \quad a^2 \leqslant 1$.

320) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

321) $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{1-x^2}\ln\left|1-\frac{1}{x^2}\right|\,dx$.

322) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg}\varphi}\,d\varphi$.

323) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx$.

324) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$.

325) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sqrt{\operatorname{ctg} x}\,dx$.

326) $\displaystyle\int\limits_0^{\varphi} \frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sqrt{2(\cos x - \cos\varphi)}}\,dx.$ 327) $\displaystyle\int\limits_0^{\varphi} \frac{\cos\frac{3}{2}x}{\sqrt{2(\cos x - \cos\varphi)}}\,dx.$

328) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m \ln x}{1 + x^{2m+2}}\,dx, \quad m > -1.$

329) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx.$ 330) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \ln\cos x\,dx.$

331) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} x\ln\sin x\,dx.$ 332) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2\sqrt{x}}\,dx.$

333) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\arcsin x}{x}\,dx.$ 334) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

335) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{(1-x^2)\ln x\,dx}{(1+x^2)^2}.$ 336) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x\,dx}{1-x^2}.$

337) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{x\ln x\,dx}{(1-x^2)^{3/2}}.$ 338) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}\ln\left(x+\frac{1}{x}\right).$

339) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\pi - 2x}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}\,dx.$ 340) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin nx\cos x}{\sin x}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$

341) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \ln\sin x\cdot\cos nx\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$

342) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2}\,dx.$ 343) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha^2x^2} - e^{-\beta^2x^2}}{x^2}\,dx.$

344) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2x^2) - \ln(1+\beta^2x^2)}{x^2}\,dx.$

345) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}}\,dx.$ 346) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}}\,dx.$

347) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^{2\mu+1}}\,dx, \quad n \in \mathbb{N},\ \mu \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2\mu + 1.$

348) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^{2n+1} px}{x}\,dx,\ p > 0.$ 349) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx.$

350) Доказать теорему Фруллани:

а) если существует $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ и для любого $a > 0$ имеем $\dfrac{f(x)}{x} \in \widetilde{R}\langle a, +\infty\rangle$, то $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x}\,dx$ сходится для любых $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и равен $f(0+)\ln\dfrac{\beta}{\alpha}$;

б) если существует $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A$ и для любого $a > 0$ имеем $\dfrac{f(x)}{x} \in \widetilde{R}\langle 0, a\rangle$, то $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x}\,dx$ сходится для любых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ и равен $A\cdot\ln\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Используя теорему Фруллани, вычислить интегралы.

351) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\,dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$

352) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \ln\frac{p + qe^{-\alpha x}}{p + qe^{-\beta x}}\cdot\frac{dx}{x}, \quad p > 0,\ q > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$

353) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x - \operatorname{arctg}\beta x}{x}\,dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$

354) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x}\, dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$

355) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2}\right) \frac{dx}{x^2}.$

356) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x} + x(\alpha - \beta)e^{-\beta x}}{x^2}\, dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$

357) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x - \sin \beta x}{x}\, dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$

358) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x - \alpha \sin x}{x^2}\, dx.$ 359) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\alpha x \cos x - \sin \alpha x}{x^2}\, dx.$

360) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x}\, dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha \neq \beta.$

361) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x} \cos \beta x\, dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha \neq \beta.$

362) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^{\alpha-1} - x^{\beta-1}}{\ln x}\, dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$

363) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\beta \sin \alpha x - \alpha \sin \beta x}{x^2}\, dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$

364) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\beta \ln(1 + \alpha x) - \alpha \ln(1 + \beta x)}{x^2}\, dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$

365) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right)^2 \frac{dx}{x^2}, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$

366) Доказать формулу:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{A_1 \cos \alpha_1 x + A_2 \cos \alpha_2 x + \dots + A_n \cos \alpha_n x}{x}\,dx =$$

$$= -(A_1 \ln \alpha_1 + A_2 \ln \alpha_2 + \dots + A_n \ln \alpha_n),$$

$$\alpha_i > 0,\ i = 1, 2, \dots, n,\ A_1 + A_2 + \dots + A_n = 0$$

Вычислить.

367) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^{2n} \alpha x - \sin^{2n} \beta x}{x}\,dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ n \in \mathbb{N}.$

368) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos^{2n+1} \alpha x - \cos^{2n+1} \beta x}{x}\,dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ n \in \mathbb{N}.$

369) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos^{2n} \alpha x - \cos^{2n} \beta x}{x}\,dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ n \in \mathbb{N}.$

370) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \cos \beta x\,dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$

371) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x \sin \gamma x}{x}\,dx,$

$$\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0,\ \alpha = \max(\alpha, \beta, \gamma)$$

372) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot \frac{\sin \beta x}{x}\,dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$

373) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin a x}{x} \cdot \frac{\sin \alpha_1 x}{x} \dots \frac{\sin \alpha_n x}{x}\,dx,$

$$a > 0,\ \alpha_i > 0,\ i = 1, 2, \dots, n,\ a > \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

374) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} (\sin \alpha x - \sin \beta x)^2 \frac{dx}{x^2}.$

Собственные интегралы, зависящие от параметра

Исследовать равномерную сходимость относительно множества X семейства функций $f(x,y)$ при $y \to y_0$.

375) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $X = [-1;1]$, $y \to 0$.

376) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{1 + x^2y^2}$, $X = (0;+\infty)$, $y \to +\infty$.

377) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{1 + x^2y^2}$, $X = (1;+\infty)$, $y \to 0+$.

378) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{1 + x^2y^2}$, $X = (1;+\infty)$, $y \to +\infty$.

379) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{1 + x^2y^2}$, $X = (1;A)$, $y \to 0+$.

380) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, $X = (1;+\infty)$, $y \to +\infty$.

381) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, $X = (0;+\infty)$, $y \to 0+$.

382) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, $X = (1;A)$, $y \to +\infty$.

383) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, $X = (1;+\infty)$, $y \to 0+$.

384) $f(x,y) = \ln(1 - y^2\cos x)$, $X = \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, $y \to 0$.

385) $f(x,y) = \ln(1 + y^2\operatorname{tg}^2 x)$, $X = \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, $y \to 0$.

386) $f(x,y) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{y^2}\sin^2 x\right)$, $X = \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $y \to +\infty$.

387) $f(x,y) = y\ln(x^2 + y^2)$, $X = (0;1)$,
а) $y \to 0$; б) $y \to 1$.

388) $f(x,y) = \dfrac{\ln(x + y)}{\ln(x^2 + y^2)}$, $X = (1;2)$, $y \to +\infty$.

389) $f(x,y) = \dfrac{y\operatorname{arctg}(xy)}{y + 1}$, $X = (0;+\infty)$,
а) $y \to 0+$; б) $y \to +\infty$.

390) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{arctg}(xy)}{y(y+1)}$, $X = [1; +\infty)$,

а) $y \to 0+$; б) $y \to +\infty$.

391) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}}$, $X = (1; +\infty)$,

а) $y \to +\infty$; б) $y \to 0+$.

392) $f(x,y) = \dfrac{xy\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$, $X = (1; +\infty)$,

а) $y \to +\infty$; б) $y \to 0+$.

393) $f(x,y) = \dfrac{1}{x}\left(e^{xy} - 1\right)$, $X = (0; +\infty)$,

а) $y \to 0+$; б) $y \to 0$ [illegible]; в) y [illegible] ∞; г) y [illegible] 1; д) y [illegible]

394) $f(x,y) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2y}$, $X = (0; 1)$, а) $y \to 1+$; б) $y \to 2$.

395) $f(x,y) = (x-1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{y}$, $X = (0; 1)$,

а) $y \to 2+$; б) $y \to 3$.

Проверить, выполняется или нет равенство

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x,y)\,dx$$

для следующей функции $f(x,y)$.

396) $f(x,y) = x^2\sqrt{x^2+y^2}$, $[a;b] = [0;1]$, $y_0 = 0$.

397) $f(x,y) = \dfrac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}$, $[a;b] = [0;1]$, $y_0 = 0$.

398) $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$, $[a;b] = [0;1]$, $y_0 = 0$.

399) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y}}$, $[a;b] = [0;1]$, $y_0 = 0$.

400) $f(x,y) = \dfrac{e^{-xy}}{\sqrt{x}+y^2}$, $[a;b] = [0;2]$, $y_0 = +\infty$.

401) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{xy}{1+y}$, $[a;b] = [-1;3]$, $y_0 = 0$.

402) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x^2}{y}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $[a;b]=\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $y_0=+\infty$.

Найти следующие пределы.

403) $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_0^3 x^2\cos(xy)\,dx$.

404) $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_{-1/2}^{1/2}\sqrt{x^2+y^2}\,dx$.

405) $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_y^{\sqrt{3}+y}\dfrac{dx}{1+x^2+y^2}$.

406) $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_0^{\pi/2}\dfrac{d\varphi}{\sqrt{1-y^2\sin^2\varphi}}$.

407) $\lim\limits_{y\to 1}\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-y^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$.

408) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1}{y}\int\limits_a^x[f(t+y)-f(t)]\,dt$,

где $f(x)$ непрерывна на $[A;B]$, $A<a<x<B$.

409) $\lim\limits_{y\to+\infty}\int\limits_1^2\dfrac{\ln(x+y)}{\ln(x^2+y^2)}\,dx$.

410) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{\pi/2}e^{-n\sin x}\,dx$.

411) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1\dfrac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$.

412) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{\pi/2}\dfrac{\sin^n x}{1+x^2}\,dx$.

Исследовать на непрерывность функцию

$$F(y)=\int\limits_a^b f(x,y)\,dx,\quad y\in Y.$$

413) $F(y)=\int\limits_0^1 f(x,y)\,dx$, $f(x,y)=\begin{cases}-1, & x<y,\\ 1, & x\geqslant y,\end{cases}$

$Y=(-\infty;+\infty)$.

414) $F(y) = \int\limits_0^1 K(y,x)v(x)\,dx, \quad Y = (-\infty; +\infty),$

где $K(y,x) = \begin{cases} y(1-x), & y \leqslant x, \\ x(1-y), & y > x, \end{cases} \quad v(x) \in C[0;1].$

415) $F(y) = \int\limits_0^1 \operatorname{arctg} \frac{x}{y}\,dx, \quad Y = \{y\colon\ y > 0\}.$

416) $F(y) = \int\limits_0^1 \ln(x^2 + y^2)\,dx, \quad Y = \{y\colon\ y \neq 0\}.$

417) $F(y) = \int\limits_0^1 x^y\,dx, \quad Y = \{y\colon\ y \neq 0\}.$

418) $F(y) = \int\limits_0^1 \frac{ye^x}{x^2 + y^2}\,dx, \quad Y = \{y\colon\ |y| < \infty\}.$

419) $F(y) = \int\limits_0^1 \frac{yf(x)}{x^2 + y^2}\,dx, \quad f \in C[0;1], \quad Y = \{y\colon |y| < \infty\}.$

420) $F(y) = \int\limits_0^1 \frac{y^2 x^2}{x^2 + y^2}\,dx, \quad Y = \{y\colon |y| < \infty\}.$

421) $F(y) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x - x + y}, \quad Y = \{y\colon y > 0\}.$

422) $F(y) = \int\limits_0^1 (1 + x)^{xy}\,dx, \quad Y = (-\infty; +\infty).$

423) $F(y) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{xy - \sin x + 1}, \quad Y = \{y\colon y > 0\}.$

424) $F(y)=\int\limits_{\sqrt{y}}^{y} x^{\cos(xy)}\,dx,\quad Y=\{y\colon y>0\}.$

Можно или нет вычислить по правилу Лейбница производную функции $F(y)$ в точке $y_0=0$?

425) $F(y)=\int\limits_0^1 \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx.$

426) $F(y)=\int\limits_0^1 f(x,y)\,dx,$

$$f(x,y)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & 0<x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ 0\leqslant y\leqslant 1.\end{cases}$$

427) $F(y)=\int\limits_0^1 f(x,y)\,dx,$

$$f(x,y)=\begin{cases}xe^{-\frac{x^2}{y}}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0<y\leqslant 1,\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant 1,\ y=0.\end{cases}$$

428) $F(y)=\int\limits_0^1 f(x,y)\,dx,\quad f(x,y)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}, & y\neq 0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & y=0.\end{cases}$

Вычислить производную функции $F(y)$.

429) $F(y)=\int\limits_a^b e^{x^2+y^2}\,dx.$ 430) $F(y)=\int\limits_0^y (x+xy)^{10}\,dx.$

431) $F(y)=\int\limits_y^2 \sqrt{xy}\sin xy\,dx.$ 432) $F(y)=\int\limits_y^{y^2} e^{-x^2}\,dx.$

433) $F(y)=\int\limits_y^{y^2} e^{-x^2y}\,dx.$ 434) $F(y)=\int\limits_{a+y}^{b+y} \dfrac{\sin xy}{x}\,dx.$

435) $F(y) = \int\limits_{\sin y}^{\cos y} \cos\sqrt{x}y\,dx$. 436) $F(y) = \int\limits_0^y \frac{\ln(1+yx)}{x}\,dx$.

437) $F(y) = \int\limits_0^y f(x+y, x-y)\,dx$,

$f(x,y) \in C^1((-\infty;+\infty) \times (-\infty;+\infty))$.

438) $F(y) = \int\limits_0^{1/y} \frac{\ln(1+yx)}{1+y}\,dx$, $y > 0$.

439) $F(y) = \int\limits_0^{y^2} dx \int\limits_{x-y}^{x+y} \sin(x^2+z^2-y^2)\,dz$.

440) $F(y) = \int\limits_y^{y^2} \exp(-y(x+y)^2)\,dx$.

441) $F(y) = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{sign}(\sin yx)\,dx$, $y > 0$, $f \in C^1([0;1])$.

442) $F(y) = \int\limits_0^y \left(\int\limits_{-yx}^{yx} e^{yx^3z^3}\,dz\right) dx$, $y > 0$.

Вычислить вторую производную функции $F(y)$.

443) $F(y) = \int\limits_0^y (x+y)e^x\,dx$.

444) $F(y) = \int\limits_0^y (x+y)f(x)\,dx$,

где $f(x)$— дифференцируемая на $(-\infty;+\infty)$ функция.

445) $F(y)=\int\limits_a^b f(x)|x-y|\,dx$,

где $f(x)$— непрерывная на $[a;b]$ функция.

446) $F(y)=\int\limits_0^y f(x)(y-x)\,dx$,

где $f(x)$— непрерывная на $(-\infty;+\infty)$ функция.

447) $F(y)=\dfrac{1}{\alpha^2}\int\limits_0^\alpha d\xi\int\limits_0^\alpha f(y+\xi+\eta)\,d\eta,\quad \alpha>0$,

где $f(x)$— непрерывная на $(-\infty;+\infty)$ функция.

448) Найти F''_{xy}, если $F(x,y)=\int\limits_{x/y}^{xy}(x-yz)f(z)\,dz$,

где $f(z)$ — дифференцируемая функция.

449) Проверить, что функция $F(y)$ удовлетворяет уравнению

$$F''(y)=-v(y),\quad y\in[0;1],$$

где $F(y)=\int\limits_0^1 K(y,x)v(x)\,dx$; $K(y,x)=\begin{cases} y(1-x), & y\leqslant x,\\ x(1-y), & y>x\end{cases}$

и $v(x)$ — непрерывная на $[0;1]$ функция.

450) Проверить, что функция $u_1(r)=\int\limits_0^\pi e^{nr\cos\varphi}\,d\varphi$ удовлетворяет уравнению $u''+\dfrac{1}{r}u'-n^2u=0$.

451) Проверить, что функции $y=x^n\int\limits_0^\pi\cos(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi\,d\varphi$ и $y=\int\limits_0^\pi\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\,d\varphi$ удовлетворяют уравнению $x^2y''+{}$ $+xy'+(x^2-n^2)y=0$.

452) Проверить равенство $F^{(n)}(x) = (n-1)!f(x)$, где

$$F(x) = \int_0^x f(y)(x-y)^{n-1}\,dy.$$

Применяя дифференцирование по параметру, вычислить следующие интегралы.

453) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(a^2 - \sin^2\varphi)\,d\varphi, \quad |a| > 1.$

454) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(1 + (m^2-1)\sin^2 x)\,dx, \quad m > 1.$

455) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\,dx.$

456) $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 + 2a\cos x + a^2)\,dx.$ 457) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx.$

458) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\frac{1 + a\sin x}{1 - a\sin x}\cdot\frac{dx}{\sin x}, \quad |a| < 1.$

459) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\frac{1 + a\cos x}{1 - a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}, \quad |a| < 1.$

460) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{a\cos x}\cos(a\sin x)\,dx, \quad a > 0.$

461) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{arctg}(a\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x})\,dx.$ 462) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(a\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx.$

463) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a\sin x)}{\sin x}\,dx.$

464) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx, \quad 0<a<1.$

465) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx, \quad 0<a<1.$

466) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln(1+a\sin x)}{\sin x}\,dx, \quad 0<a<1.$

467) $\displaystyle\int\limits_0^{a} \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}\,dx.$

468) Функцию $f(x)=x^2$ на промежутке $[1;3]$ приближенно заменить линейной функцией $a+bx$ так, чтобы интеграл

$$I(a,b)=\int\limits_1^3 (a+bx-x^2)^2\,dx$$

принимал наименьшее значение.

Выяснить, справедливо или нет равенство

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$$

для следующих интегралов.

469) $\displaystyle\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3}\,dy.$

470) $\displaystyle\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \left(\frac{x^5}{y^4}-\frac{2x^3}{y^3}\right) e^{-\frac{x^2}{y}}\,dy.$

471) $\displaystyle\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy.$ 472) $\displaystyle\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \frac{\cos xy}{x+y}\,dx.$

473) $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} dy \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{tg}(xy)}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\,dx$. 474) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-1}^1 \frac{1}{y} \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,dx$.

Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислить следующий интеграл.

475) $\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx, \quad a > 0,\ b > 0.$

476) $\int\limits_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx, \quad a > 0,\ b > 0.$

477) $\int\limits_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx, \quad a > 0,\ b > 0.$

478) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\frac{a + b\sin x}{a - b\sin x}\cdot\frac{dx}{\sin x}, \quad a > b > 0.$

479) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^{2n} x\,dx}{(1 - 2a\cos x + a^2)^n}, \quad n \in \mathbb{N}$, а) $|a| < 1$, б) $|a| > 1$.

Несобственные интегралы, зависящие от параметра

480) Показать, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

а) сходится равномерно на промежутке $1 < \alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty$;

б) сходится неравномерно на промежутке $1 < \alpha < +\infty$.

481) Показать, что интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится неравномерно на промежутке $(0; 1)$.

482) Показать, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + 1}$

а) сходится равномерно на промежутке $1 < \alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty$;

б) сходится неравномерно на промежутке $1 < \alpha < +\infty$.

483) Показать, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}\, dx$

а) сходится равномерно на промежутке $0 < a \leqslant \alpha \leqslant b$, $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$;

б) сходится неравномерно на промежутке $0 \leqslant \alpha \leqslant b$, $b \in \mathbb{R}$.

Исследовать равномерную сходимость интеграла на множестве M.

484) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x}\, dx$, а) $M = (-1; 0)$; б) $M = \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

485) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\, dx}{1 + (x-\alpha)^4}$,

а) $M = (-\infty; a]$, $a > 0$; б) $M = [0; +\infty)$.

486) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2 + \alpha^2}$, $M = (-\infty; +\infty)$.

487) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\alpha^2 - x^2}{(\alpha^2 + x^2)^2}\, dx$, а) $M = (-1; 1)$; б) $M = \mathbb{R}$.

488) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\alpha - x}{(x+\alpha)^3}\, dx$, $M = [0; 1]$.

489) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}((x-\alpha)^2 + 1)}$, $M = (2; +\infty)$.

490) $\int\limits_0^{1} \frac{\alpha^2 - x^2}{\sqrt{x}(\alpha^2 + x^2)^2}\, dx$, $M = (0; 1)$.

491) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^2\alpha - \alpha^3}{\sqrt{x}(\alpha^2 + x^2)^2}\,dx, \quad M = (0;1).$

492) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1-\alpha x)}},$

а) $M = (0;\alpha_0),\ \alpha_0 < 1;$ б) $M = (0;1).$

493) $\displaystyle\int\limits_3^{+\infty} \frac{\alpha + x}{(\alpha^2 + x^2)\sqrt{\alpha^2 + x^2}}\,dx, \quad M = (0;+\infty).$

494) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\alpha + x^2}{1 + (\alpha^2 + x^2)^2}\,dx, \quad M = [0;+\infty).$

495) $\displaystyle\int\limits_3^{+\infty} \frac{\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha + 4}}{(\alpha + 1)x^2}\,dx, \quad M = (5;+\infty).$

496) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + (\alpha + x^2)^2}, \quad M = [0;+\infty).$

497) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\alpha\,dx}{1 + \alpha^2 x^2},$

а) $M = [1;3];$ б) $M = [1;+\infty);$ в) $M = [0;3].$

498) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\alpha}{(x^2 + \alpha^2)\sqrt{x}}\,dx, \quad M = (0;+\infty).$

499) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{|2x - 1|^\alpha},$ а) $M = \left(0;\dfrac{2}{3}\right);$ б) $M = (0;1).$

500) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx,$

а) $M = (-\infty;\alpha_0),\ 0 < \alpha_0 < 2;$ б) $M = (-\infty;2).$

501) $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{(1-x^2)^\alpha}\,dx$, а) $M = \left(-2; \frac{2}{3}\right)$; б) $M = (-1; 1)$.

502) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \operatorname{arctg} x}{4+x^n}\,dx$, $n > 2$,

а) $M = \left(0; \frac{n}{2}\right)$; б) $M = (0; n-1)$.

503) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\alpha \operatorname{arctg} x}{x^2+\alpha}\,dx$, а) $M = (0; A)$; б) $M = (0; +\infty)$.

504) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \operatorname{arctg} \alpha x^2\,dx$,

а) $M = (\alpha_0; +\infty)$, $\alpha_0 > 0$; б) $M = (0; +\infty)$.

505) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-|x-\alpha|}\,dx$, а) $M = (-\infty; a]$, $a > 0$; б) $M = [0; +\infty)$.

506) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+\alpha}}{e^x}\,dx$, $M = [0; +\infty)$.

507) $\int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}\,dx$,

а) $M = [a; b]$, $b > a > 0$; б) $M = [0; b]$, $b > 0$.

508) $\int\limits_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx$, $M = [a; b] \subset (0; +\infty)$, $a < 1$.

509) $\int\limits_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx$, $M = [a; b] \subset (0; +\infty)$.

510) $\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\,dx$,

а) $M = (0; A)$; б) $M = (0; +\infty)$; в) $M = (-1; +\infty)$.

511) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx,$

а) $M=(\alpha_0;+\infty)$, $\alpha_0>0$; б) $M=(0;+\infty)$.

512) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} (\alpha^3+x)e^{-\alpha x^2}\,dx,$ а) $M=(1;5)$; б) $M=(0;5)$.

513) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha e^{x^\alpha}\,dx,$ а) $M=(1/2;2)$; б) $M=(0;+\infty)$.

514) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}\,dx,$ $M=(0;+\infty)$.

515) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2(1+\alpha^2)}\,dx,$ $M=[a;b]\subset(0;+\infty)$.

516) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)}\,dx,$ $M=[c;d]\subset(0;+\infty)$.

517) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{x^a\ln^2 x}{x^2-1}\,dx,$ а) $M=(-1;0)$; б) $M=(-9/10;0)$.

518) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx,$ $M=[-1;1]$.

519) $\displaystyle\int\limits_0^{1} x^{\alpha-1}\ln^m x\,dx,$

а) $M=[\alpha_0;+\infty)$, $\alpha_0>0$; б) $M=(0;+\infty)$.

520) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{1+x^3}\,dx,$ а) $M=(0;10)$; б) $M=(0;+\infty)$.

521) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha x)}{\alpha^2x^2+4}\,dx,$

а) $M=(a_0;+\infty)$, $a_0>0$; б) $M=(0;+\infty)$.

522) $\displaystyle\int\limits_1^{2} \frac{dx}{|\ln x|^\alpha},$ а) $M=[1/2;2/3]$; б) $M=(0;1)$.

523) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{1+\alpha^2x^2},$ $M=\mathbb{R}$.

524) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{x}}\,dx,$ а) $M=(\alpha_0;+\infty)$, $\alpha_0>0$; б) $M=(0;+\infty)$.

525) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}\,dx,$ $M=[\alpha_0;+\infty)$, $\alpha_0>0$.

526) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\cdot\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx,$ а) $M=(1;10)$; б) $M=(0;10)$.

527) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{1+x^2}\,dx,$ а) $M=[a_0;+\infty)$, $a_0>0$; б) $M=(0;+\infty)$.

528) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha^2x)}{x+\alpha}\,dx,$ $M=[1;+\infty)$.

529) $\displaystyle\int\limits_0^{1} x^\alpha\sin\frac{1}{x}\,dx,$

а) $M=[-2+\varepsilon;+\infty)$, $\varepsilon>0$; б) $M=(-2;+\infty)$.

530) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{\alpha^2+x^2}}\,dx,$ а) $M=[\alpha_0;+\infty)$, $\alpha_0>0$; б) $M=(0;+\infty)$.

531) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\alpha\cos(\alpha^2 x)}{1+x^\alpha}\,dx$, а) $M=(1;10)$; б) $M=(0;10)$.

532) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \cos(\alpha x^3)\,dx$, $M=[1;+\infty)$.

533) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x^3)}{x}\,dx$, $M=[1/2;+\infty)$.

534) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha \sin x^3\,dx$, а) $M=(0;1)$; б) $M=(0;2)$.

535) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^\alpha}\,dx$, $M=(0;+\infty)$.

536) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\cos\pi x\,dx}{(x-\alpha)^2+1}$, а) $M=(0;A)$, $A>0$; б) $M=(0;+\infty)$.

537) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^\alpha}\,dx$, $M=(0;+\infty)$.

538) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \sin x^\alpha\,dx$, а) $M=(A;+\infty)$, $A>1$; б) $M=(1;+\infty)$.

539) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \sin x \sin\frac{\alpha}{x}\,dx$, $M=[0;1]$.

540) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(\alpha^2 x)}{\sqrt{x}}\operatorname{arctg}\alpha x\,dx$, $M=[1/2;+\infty)$.

541) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 \operatorname{arctg}\alpha x\,dx$, $M=\mathbb{R}$.

542) $\int\limits_0^{+\infty} \sin(\alpha e^x)\,dx$, а) $M = (1;+\infty)$; б) $M = (0;1)$.

543) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\alpha x \cos \alpha x\, dx}{\alpha^4 x^2 + 4}$,

а) $M = (0;+\infty)$; б) $M = (a_0;+\infty)$, $a_0 > 0$.

544) $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2 + \alpha x)\,dx$, $M = (0;+\infty)$.

545) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x\,dx$, $M = (\alpha_0;+\infty)$, $\alpha_0 > 0$.

546) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2(1+\alpha^2)} \sin x\,dx$, $M = \mathbb{R}$.

547) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x}\,dx$, $M = [0;+\infty)$.

548) $\int\limits_0^{1} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot 2^{\alpha x}\,dx$, $M = (-\infty;1]$.

549) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \cos x\,dx$, $M = [a, b]$

и отрезок $[a;b]$ не содержит точек $\alpha = \pm 1$.

550) $\int\limits_a^{+\infty} e^{-x\alpha} f(x)\,dx$, $M = [0;+\infty)$, если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

551) $\int\limits_a^{+\infty} e^{-x^2\alpha} f(x)\,dx$, $M = [0;+\infty)$, если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

552) $\displaystyle\int_0^1 (1 + x + \cdots + x^{n-1})\sqrt{\ln\frac{1}{x}}\,dx, \quad M = \{0, 1, 2, \ldots\}.$

553) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}}\,dx, \quad M = \{1, 2, 3, \ldots\}.$

554) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{\alpha + 1}{\alpha x^3 + x}}\,dx,$ а) $M = (0; 1)$; б) $M = (1; +\infty)$.

Исследовать равномерную сходимость интеграла относительно параметра α на множестве M.

555) $\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha-1}(1 - x)^{\beta-1}\,dx, \quad M = [\alpha_0; +\infty),\ \alpha_0 > 0.$

556) $\displaystyle\int_0^1 x^{\beta-1}(1 - x)^{\alpha-1}\,dx, \quad M = [\alpha_0; +\infty),\ \alpha_0 > 0.$

557) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln^2 x}{\sqrt{x^3(x^8 - \beta^2)}}\,dx, \quad M = (1; 4),\ \beta > 0.$

558) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln x}{\sqrt{x^2 - \beta^2}}\,dx, \quad M = (-1; 1),\ \beta > 0.$

559) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x\alpha}\frac{\cos x}{x^\beta\,dx},\ 0 < \beta < 1, \quad M = [0; +\infty).$

560) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{\beta^2 + x^2}\,dx,\ \beta > 0, \quad M = [\alpha_0; +\infty),\ \alpha_0 > 0.$

561) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x\alpha}{x^\beta}\,dx,\ 0 < \beta < 1,$

а) $M = [\alpha_0; +\infty)$, $\alpha_0 > 0$; б) $M = (0; +\infty)$.

Доказать равенства.

562) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_0^1 \dfrac{2\,dx}{(\alpha x^3+1)\sqrt{x}} = 1.$

563) $\lim\limits_{\alpha\to 0+}\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} e^{-\alpha x}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx.$

564) $\lim\limits_{\alpha\to 0+}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$, если $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

565) $\lim\limits_{\alpha\to 0+}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,dx = 1.$

566) $\lim\limits_{\alpha\to 0+}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos x\,dx = 0.$

567) $\lim\limits_{\alpha\to +\infty}\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{dx}{1+\alpha^2 x^2} = 0.$

568) $\lim\limits_{\alpha\to +\infty}\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{arctg}\,\alpha x\,dx = \dfrac{\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\,dx.$

569) $\lim\limits_{\alpha\to +\infty}\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{arctg}\,\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx = \dfrac{\pi}{2}.$

570) $\lim\limits_{\alpha\to 0+}\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx = \dfrac{\pi}{2}.$

571) $\lim\limits_{\alpha\to 0+}\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{1+(\alpha+x^2)^2} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}.$

572) $\lim\limits_{\alpha\to 0+}\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{(\alpha+x^2)\,dx}{1+(\alpha+x^2)^2} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

573) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-x}\, dx.$

574) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1-e^{-nx}}{x} \sin x\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$

575) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{1} \frac{x^n}{\sqrt[3]{1-x}}\, dx = 0.$ 576) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{1} \frac{\sin^n \pi x}{\sqrt[3]{\ln 2x}}\, dx = 0.$

577) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\sqrt{|1-x|}} x\, dx = 0.$ 578) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1+x^n}{1+x^{2n}} = 1.$

579) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^\alpha}\, dx = 1.$

580) $\lim\limits_{\alpha\to 0+} \int\limits_0^{+\infty} \alpha^2 e^{-\alpha^2 x^2} \sin x\, dx = 0.$

581) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \alpha^2 e^{-\alpha^2 x^2} \sin x\, dx = \frac{1}{2}.$

582) $\lim\limits_{\alpha\to 0} \alpha \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x+u)}{\alpha^2+u^2}\, du = \pi\cdot \frac{\lim\limits_{\alpha\to 0} f(x+\alpha) + \lim\limits_{\alpha\to 0} f(x-\alpha)}{2}.$

583) $\lim\limits_{\alpha\to 0+} \alpha \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{\pi}{2}.$

Исследовать на непрерывность в указанном множестве M следующую функцию $F(\alpha)$.

584) $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\, dx}{10-4x+x^\alpha}, \quad M = (2; +\infty).$

585) $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{\sqrt{1+x^3}\,dx}, \quad M = \mathbb{R}.$

586) $F(\alpha) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\frac{\alpha}{x}}{x^{4/3}}\,dx, \quad M = (0;2).$

587) $F(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{4+x^\alpha}\,dx, \quad M = (0;+\infty).$

588) $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \sin(\alpha x^2)\,dx, \quad M = (0;+\infty).$

589) $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+(x+\alpha)^2}\,dx, \quad M = \mathbb{R}.$

590) $F(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{(x-\alpha)^2+1}, \quad M = \mathbb{R}.$

591) $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-x\alpha^2}\,dx, \quad M = \mathbb{R}.$

592) $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-x\alpha}\,dx, \quad M = [0;+\infty).$

593) $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin\sqrt{x}\,dx, \quad M = (0;+\infty).$

594) $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{2+x}} e^{-\alpha x}\,dx, \quad M = [0;+\infty).$

595) $F(\alpha) = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^\alpha x}, \quad M = [0;1).$

596) $F(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx, \quad M = (0; 2).$

597) $F(\alpha) = \int\limits_0^1 \ln^\alpha(1 + x^2)\,dx, \quad M = (-1/2; +\infty).$

598) $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x^2\,dx, \quad M = [0; +\infty).$

599) $F(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\alpha}{x^2}\right) \ln x\,dx, \quad M = \mathbb{R}.$

600) $F(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{|x - \alpha|}}, \quad M = [0; 1].$

601) $F(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{\sin \frac{\alpha}{x}}{x^\alpha}\,dx, \quad M = (0; 2).$

602) $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(1 - \alpha^2)x}{x}\,dx, \quad M = \mathbb{R}.$

603) $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2}\,dx, \quad M = \mathbb{R}.$

604) $F(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2 + \alpha^2 + 1)}, \quad M = \mathbb{R}.$

605) $F(\alpha) = \begin{cases} \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(e^{\alpha^2 x} + 1)}{x^{2+\alpha^2}}\,dx, & \alpha \neq 0 \\ \ln 2, & \alpha = 0, \end{cases} \quad M = \mathbb{R}.$

606) $F(\alpha) = \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{\operatorname{arctg}(x^2+\alpha^2)\sin x}, & \alpha \neq 0 \\ 0, & \alpha = 0, \end{cases}$ $\quad M = \mathbb{R}.$

607) $F(\alpha) = \displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\alpha \sin x}{x^\alpha + 1}\,dx, \quad M = \mathbb{R}.$

Найти производную функции $F(\alpha)$.

608) $F(\alpha) = \displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x^2}, \ \alpha > 0.$

609) $F(\alpha) = \displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + (x+\alpha)^2}\,dx, \ |\alpha| < \infty.$

610) $F(\alpha) = \displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2} \cos \alpha x\,dx, \ |\alpha| < \infty.$

611) $F(\alpha) = \displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + x^2}$, а) $\alpha > 0$; б) $|\alpha| < \infty$.

612) $F(\alpha) = \displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{(1+x^2)^2}\,dx, \ |\alpha| < \infty.$

613) $F(\alpha) = \displaystyle\int\limits_{\alpha}^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx, \ \alpha > 0.$

614) $F(\alpha) = \displaystyle\int\limits_{\alpha}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx, \ \alpha > 0.$

615) $F(\alpha) = \displaystyle\int\limits_{\alpha}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{1 + x^3}\,dx.$

Найти множество M точек дифференцируемости функции $F(\alpha) = \int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx$ и проверить, справедливо или нет равенство $F'_\alpha = \int\limits_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$ для $\alpha \in M$.

616) $F(\alpha) = \int\limits_0^2 \dfrac{e^{-x\alpha}}{\sqrt{x}} \sin\dfrac{1}{x}\,dx$.

617) $F(\alpha) = \int\limits_{\frac{1}{\,}}^{1} \cos\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{dx}{x^3+|\alpha|+2}$.

618) $F(\alpha) = \begin{cases} \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin\alpha x\,dx}{x}, & \alpha \neq 0 \\ 0, & \alpha = 0. \end{cases}$

619) Пусть $I(\alpha) = \int\limits_0^\alpha \dfrac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{\alpha - x}}\,dx$, где функция $\varphi(x)$ непрерывна вместе со своей производной на $[0;a]$. Доказать, что при $0 < \alpha < a$ справедливо равенство $I'_\alpha = \dfrac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}} + \int\limits_0^\alpha \dfrac{\varphi'(x)\,dx}{\sqrt{\alpha - x}}$.

620) Пользуясь равенством $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt = \dfrac{1}{\alpha}$, $\alpha > 0$, вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x}\,dx$.

621) Пользуясь равенством $\int\limits_0^1 x^{n-1}\,dx = \dfrac{1}{n}$, вычислить интеграл $\int\limits_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,dx$.

622) Пользуясь равенством $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$, $a > 0$, вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$.

623) Пользуясь равенствами

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \quad \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2},$$

вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-nx}\sin x\,dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-nx}\cos x\,dx$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} x^2e^{-nx}\sin x\,dx$; г) $\int\limits_0^{+\infty} x^2e^{-nx}\cos x\,dx$;

д) $\int\limits_0^{+\infty} x^3e^{-nx}\sin x\,dx$; е) $\int\limits_0^{+\infty} x^3e^{-nx}\cos x\,dx$.

624) Пользуясь равенством $\int\limits_0^{1} x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}$, вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{1} \frac{x^{n-1}-1}{\ln x}\,dx$; б) $\int\limits_0^{1} \left(\frac{x^{n-1}}{x\ln^2 x} - \frac{n}{\ln x}\right)dx$;

в) $\int\limits_0^{1} \left(\frac{x^{n-1}}{x\ln^3 x} - \frac{n}{x\ln^2 x} - \frac{n^2}{2\ln x}\right)dx$.

625) Пользуясь результатами задачи 624, вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}\,dx$;

б) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{ne^{-x}}{x} - \frac{1-e^{-nx}}{x^2}\right) dx;$

в) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{n^2e^{-x}}{2x} - \frac{n}{x^2} + \frac{1-e^{-nx}}{x^3}\right) dx.$

Используя значение интеграла Дирихле

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha$$

(см. пример 49, § 3), вычислить интеграл.

626) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3\alpha x}{x}\, dx.$

627) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4\alpha x}{x^2}\, dx.$

628) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^5\alpha x}{x^3}\, dx.$

629) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^5\alpha x}{x^5}\, dx.$

630) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3\alpha x}{x^3}\, dx.$

631) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4\alpha x}{x^4}\, dx.$

632) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x}\, dx.$

633) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\cdot\sin\beta x}{x^2}\, dx.$

634) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}\, dx.$

635) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\sin\beta x\cos\gamma x}{x^2}\, dx.$

636) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\sin\beta x\sin\gamma x}{x^3}\, dx.$

637) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\cos\beta x\cos\gamma x}{x}\, dx.$

638) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x\cos\alpha x}{x}\, dx.$

639) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\cdot\sin^2 x}{x^3}\,dx.$ 640) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x\cos\alpha x}{x^2}\,dx.$

641) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^3}\,dx.$ 642) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}\,dx.$

Используя значение интеграла Пуассона

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(см. пример 51, § 3), вычислить интеграл.

643) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha^2x^2}\,dx,\ \alpha>0.$

644) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^{2n}e^{-\alpha^2x^2}\,dx,\ n\in\mathbb{N},\ \alpha>0.$

645) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^{2n+1}e^{-\alpha^2x^2}\,dx,\ \alpha>0.$

646) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha x^2+2\beta x+c)}\,dx,\ \alpha>0,\ \alpha c-\beta^2>0.$

647) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} (\alpha_1x^2+2\beta_1x+c_1)e^{-(\alpha x^2+2\beta x+c)}\,dx,\ \alpha>0,\ \alpha c-\beta^2>0.$

648) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha^2x^2-\frac{\beta^2}{x^2}}\,dx,\ \alpha>0,\ \beta>0.$

649) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\operatorname{ch}\beta x\,dx,\ \alpha>0.$

650) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-\alpha^2x^2}\operatorname{sh}\beta x\,dx,\ \alpha>0.$

651) $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\operatorname{ch}2\beta x\,dx.$

652) $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n-1}e^{-x^2}\operatorname{sh}2\beta x\,dx.$

653) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha^2x^2}\cos 2\beta x\,dx,\ \alpha>0.$

654) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\operatorname{sh}(\beta\sqrt{x})\,dx,\ \alpha>0.$

655) $\int\limits_0^{+\infty} x^2e^{-x^2}\cos 2x\,dx.$

656) $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\cos 2\beta x\,dx,\ n\in\mathbb{N}.$

657) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2}\sin\beta x\,dx,\ \alpha>0.$

658) $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n-1}e^{-x^2}\sin 2\beta x\,dx,\ n\in\mathbb{N}.$

Используя значение интеграла Лапласа

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}$$

(см. пример 55, § 3), вычислить интеграл.

659) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{\alpha^2 + x^2}\, dx,\ \alpha > 0.$ 660) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1 + x^2}\, dx.$

661) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x(1 + x^2)}\, dx,\ \alpha > 0.$ 662) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1 + x^2)^2}\, dx.$

663) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{ax^2 + 2bx + c}\, dx,\ \alpha > 0,\ ac - b^2 > 0.$

664) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 - \alpha^2}{x^2 + \alpha^2} \cdot \frac{\sin x}{x}\, dx,\ \alpha > 0.$

665) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{(1 + x^2)^2}\, dx,\ \alpha > 0.$

Используя значение интегралов Френеля

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{+\infty} \cos(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

(см. пример 52, § 3), вычислить интеграл.

666) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + 2bx + c)\, dx.$ 667) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2) \cos 2ax\, dx.$

668) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 \cdot \cos 2ax\, dx.$

Применяя метод дифференцирования по параметру, вычислить интеграл.

669) $\int\limits_0^{1} \frac{x^{\alpha-1} - x^{\beta-1}}{\ln x}\, dx,\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$

670) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos\beta x}{x^2}\,dx,\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$

671) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-nx}}{x}\cos x\,dx,\ n > 0.$

672) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx,\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$

673) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-nx}}{x}\sin x\,dx,\ n > 0.$

674) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx,\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$

675) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{\alpha^2}{x^2}} - e^{-\frac{\beta^2}{x^2}}\right)dx,\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$

676) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\,dx,\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$

677) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\,dx,\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$

678) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}\,dx,\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$

679) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx,\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$

680) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x\cos\gamma x}{x}\,dx,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0.$

681) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\beta x - \sin\gamma x}{x} e^{-\alpha x}\,dx,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0.$

682) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos\beta x - \cos\gamma x}{x} e^{-\alpha x}\,dx,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0.$

683) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x}}{xe^{x}}\,dx,\ \alpha > 0.$

684) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2}\,dx,\ \beta > \alpha > 0.$

685) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i e^{-\alpha_i x}}{x}\,dx,\ \sum_{i=1}^{n} A_i = 0,\ \alpha_i > 0.$

686) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x} - e^{-\alpha x} - x(\alpha - \beta)e^{-\alpha x}}{x^2}\,dx,\ \alpha > \beta > 0.$

687) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}\sin^2\beta x}{x}\,dx,\ \alpha > 0.$

688) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}\sin^2\beta x}{x^2}\,dx,\ \alpha > 0.$

689) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x\sin\gamma x}{x^2}\,dx,\ \alpha > 0,\ \beta \geqslant \gamma > 0.$

690) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin^3\beta x}{x}\,dx,\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$

691) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin^3\beta x}{x^2}\,dx,\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$

692) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ |\alpha|\leqslant 1.$

693) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ |\alpha|\leqslant 1.$

694) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ |\alpha|\leqslant 1.$

695) а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx;$ б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

696) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+\beta^2x^2}\,dx,\ \alpha>0,\ \beta>0.$

697) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{\beta^2+x^2}\,dx,\ \alpha>0,\ \beta>0.$

698) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\,dx,\ \alpha>0,\ \beta>0.$

699) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx.$

700) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x(1+\beta^2x^2)}\,dx,\ \alpha>0,\ \beta>0.$

701) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\operatorname{arctg}\beta x}{x^3}\,dx,\ \alpha>0,\ \beta>0.$

702) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\cdot\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}\,dx,\ \alpha>0,\ \beta>0.$

703) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x\cdot \operatorname{arctg}\beta x}{x^2}\,dx,\ \alpha>0,\ \beta>0.$

704) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \ln\frac{b^2+x^2}{c^2+x^2}\cos\alpha x\,dx,\ \alpha>0,\ b>0,\ c>0.$

705) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x(1+x^2)^2}\,dx,\ \alpha>0.$

706) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^3}\,dx,\ \alpha>0.$

707) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos\beta x}{x^2}e^{-\alpha x}\,dx,\ \alpha>0,\ \beta>0.$

708) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{2x\beta\sin 2\beta x+\cos 2\beta x-1}{x^2}e^{-\alpha^2x^2}\,dx,\ \alpha>0,\ \beta>0.$

709) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin\sqrt{mx}\,dx,\ \alpha>0.$

710) Вычислить $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$ следующими способами:

1) используя равенство $\displaystyle\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\int\limits_0^1\frac{d\alpha}{1+\alpha^2x^2}$;

2) рассмотреть функцию $\displaystyle I(\alpha)=\int\limits_0^1\frac{\operatorname{arctg} x\alpha}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$ и применить метод дифференцирования по параметру.

711) Рассматривая производные функций, стоящих в правой и левой частях, проверить справедливость равенств:

а) $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt = e^{x^2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sin 2xt\,dt;$

б) $\displaystyle\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{e^{-x^2(u^2+1)}}{u^2+1}\,du;$

в) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+a^x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}\ln(1+a^2) - \int_0^a \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt,\ a>0;$

г) $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\frac{\sin 2tx}{t}\,dt.$

712) Используя равенства

$$\frac{1}{1+t^2} = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin x\,dx,\qquad \frac{t}{1+t^2} = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos x\,dx,$$

доказать равенства

а) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x\,dx}{x+a} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}}{1+t^2}\,dt,\ a>0;$

б) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{x+a} = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-at}}{1+t^2}\,dt,\ a>0.$

Преобразование Вейерштрасса $\Phi(p)$ функции $f(t)$ определяется формулой

$$\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(p-t)^2} f(t)\,dt.$$

Найти преобразование Вейерштрасса функции $f(t)$.

713) $f(t)=1$. 714) $f(t)=t^2$.

715) $f(t)=e^{2\alpha t}$. 716) $f(t)=\cos\alpha t$.

Преобразование Лапласа $F(p)$ функции $f(t)$ определяется формулой

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt.$$

Найти преобразование Лапласа функции $f(t)$.

717) $f(t) = 1$.

718) $f(t) = e^{\alpha t}$.

719) $f(t) = \sin \beta t$.

720) $f(t) = \cos \beta t$.

721) $f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$.

722) $f(t) = \sqrt{t}$.

723) $f(t) = te^{-\alpha t}$.

724) $f(t) = \sin(\alpha\sqrt{t})$.

725) $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-t}}{t}, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$

726) Пусть $f(x)$ ограничена на $\mathbb{R}$ и интегрируема на любом конечном отрезке. Доказать, что при $x > 0$ функция $u = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{xf(z)}{x^2 + (y-z)^2}\, dz$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

727) Пусть $f(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty; +\infty)$. Доказать, что интеграл

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}\, d\xi$$

удовлетворяет уравнению теплопроводности $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и начальному условию $\lim\limits_{t\to 0+} u(x,t) = f(x)$.

Пусть ω — особая точка функции f и $\omega \in (a; b)$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int\limits_a^{\omega-\varepsilon} f(x)\, dx + \int\limits_{\omega+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx\right),$$

если он существует, называется главным значением интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ в смысле Коши и обозначается v.p. $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Главным значением в смысле Коши интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, если $f \in \widetilde{R}[-A; A]$ для любого $A \in \mathbb{R}$, называется $\lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx$ и обозначается v.p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Найти v.p. $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ для следующих интегралов.

728) $\int\limits_a^b \dfrac{dx}{x-c}$, $a < c < b$.

729) $\int\limits_a^b \dfrac{dx}{(x-c)^{2n+1}}$, $a < c < b$, $n \in \mathbb{N}$.

730) $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{d\varphi}{k - \sin\varphi}$, $0 < k < 1$.

731) $\int\limits_0^2 \dfrac{x^{\alpha-1}}{1-x}\,dx$, $\alpha > 0$.

732) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2 - 3x + 2}$.

733) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{1-x^2}$.

734) $\int\limits_{1/2}^2 \dfrac{dx}{x\ln x}$.

735) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1+x}{1+x^2}\,dx$.

736) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x\,dx$.

737) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{x}\sqrt[3]{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$.

738) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx$.

739) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos x\,dx$.

Используя значения интегралов Эйлера, вычислить следующие интегралы.

740) $\int\limits_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx.$

741) $\int\limits_0^1 x^3\sqrt{1-x^3}\,dx.$

742) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}}.$

743) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx.$

744) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^3}.$

745) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{1+x^4}.$

746) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$

747) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{(1+x^3)^2}.$

748) $\int\limits_0^1 (1-x^2)^n\,dx, \quad n\in\mathbb{N}.$

749) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \quad n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2.$

750) $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

751) $\int\limits_0^a x^{2n}\sqrt{a^2-x^2}\,dx, \quad n\in\mathbb{N}.$

752) $\int\limits_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}}\,dx, \quad n\in\mathbb{N}.$

753) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 x\cos^4 x\,dx.$

754) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{3/2} x\cos^{1/2} x\,dx.$

755) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}.$

756) $\int\limits_0^{+\infty} t^b e^{-\alpha t}\,dt.$

757) $\int\limits_0^{+\infty} t^b e^{-\alpha t^2}\,dt.$

758) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{1+x^3}\,dx.$

759) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4}\,dx.$

760) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x \ln\cos x\, dx,\ n>-1.$

761) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x \ln\sin x\, dx,\ n>-1.$

762) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \ln\Gamma(x)\sin\pi x\, dx.$

763) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x\, dx,\ n\in\mathbb{N}.$

Определить область существования и выразить через интегралы Эйлера следующие интегралы.

764) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}\, dx,\quad n>0.$ 765) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\, dx.$

766) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m}{(1+x)^n}\, dx.$

767) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m\, dx}{(a+bx^n)^p},\quad a>0,\ b>0,\ n>0.$

768) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^\alpha}}.$

769) $\displaystyle\int\limits_0^{1} x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\, dx,\quad m>0.$

770) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{[\alpha x+\beta(1-x)+\gamma]^{p+q}}\, dx,\quad \alpha\geqslant 0,\ \beta>0,\ \gamma>0.$

771) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x^m)^n}; \quad m > 0.$

772) $\int\limits_a^b \frac{(x-a)^m(b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}}\,dx, \quad 0 \leqslant a < b,\ c > 0.$

773) $\int\limits_{-1}^1 \frac{(1+x)^{2m-1}(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}}\,dx.$

774) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^m}\,dx.$

775) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg} x}{x^m}\,dx.$

776) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+ax)}{x^m}\,dx, \quad a > 0.$

777) а) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1} x\,dx,$ б) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{\alpha-1} x\,dx.$

778) $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^{\alpha} x\,dx.$

779) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} x}{(1+k\cos x)^n}\,dx, \quad 0 < |k| < 1.$

780) $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}\right)^{\cos 2\alpha} dx.$

781) $\int\limits_0^{\pi} \left(\frac{\sin x}{1+k\cos x}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{dx}{1+k\cos x}, \quad 0 < k < 1.$

782) $\int\limits_0^{+\infty} x^m e^{-x^n}\,dx.$

783) $\int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx.$

784) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\,dx.$

785) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha}\ln x}{1+x^2}\,dx.$

786) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln^2 x}{1+x}\,dx.$

787) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha}\ln^2 x}{1+x^2}\,dx.$

788) Проверив, что $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx$, $0 < p < 1$, равен $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\big(B(p,\varepsilon)-B(1-p,\varepsilon)\big)$, вычислить этот интеграл.

789) Используя равенство $B(x,1-x) = \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{t+1}\,dt = \frac{\pi}{\sin \pi x}$, проверить, что $I = \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}\,dx$ равен

$$\int\limits_{1/2}^{p} B(x,1-x)\,dx - \int\limits_{1/2}^{q} B(x,1-x)\,dx \quad (0<p<1,\ 0<q<1).$$

Найти величину интеграла I.

Вычислить.

790) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{sh}\beta x}\,dx$, $0<\alpha<\beta$.

791) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}\mu x}{\operatorname{ch}\nu x}\,dx$, $0<\mu<\nu$.

Доказать.

792) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^n}\,dx = 1.$

793) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^n}\,dx\right) = -\Gamma'(1).$

Проверить равенства.

794) $\displaystyle\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\int\limits_0^{1}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}.$

795) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin 2x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$

796) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \cdot \int_0^1 \frac{x^n\, dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} = \frac{\pi}{2n}.$

797) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} \cdot \int_0^1 \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1-x^n}}\, dx = \frac{2\pi}{n(n-2)} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}, \quad n > 2.$

798) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^n}\, dx \cdot \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^n}\, dx =$

$\displaystyle= \frac{2\pi n}{(3n-2)(n^2-4)} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}, \quad n > 2.$

799) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^p x\, dx \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x} = \frac{\pi}{2p} \operatorname{tg} \frac{\pi p}{2}, \quad 0 < p < 1.$

800) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^4}\, dx \cdot \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^4}\, dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$

801) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-x^3}\, dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-x^3}\, dx = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}.$

802) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^n} x^{m-1}\, dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-x^n} x^{n-m-1}\, dx =$

$\displaystyle= \frac{\pi}{n^2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi m}{n}}, \quad n > 0,\ 0 < m < n.$

803) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{ch} x}} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{ch}^3 x}} = \pi.$

804) $\displaystyle\prod_{m=1}^{n} \int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-x^n}\, dx = \left(\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$

805) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} (1-x^3)^{-1/2}\,dx = \sqrt{3}\int_{1}^{+\infty} (x^3-1)^{-1/2}\,dx.$

806) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{p-3/2}}{(x^2+ax+b)^p}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b}(a+2\sqrt{b})^{p-1/2}}\cdot\frac{\Gamma(p-1/2)}{\Gamma(p)},$

$b>0,\ a+2\sqrt{b}>0,\ p>1/2.$

Используя равенство $\displaystyle\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)}\int_{0}^{+\infty} t^{m-1}e^{-xt}\,dt$, $x>0$, и возможность перестановки интегралов, вычислить интегралы.

807) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x^m}\,dx,\quad 0<m<2.$ 808) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{x^m}\,dx,\quad 0<m<1.$

Обосновав возможность дифференцирования по параметру интеграла задачи 807, вычислить интегралы.

809) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ln x\,dx.$ 810) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ln^2 x\,dx.$

811) Используя соотношение $\Gamma'(1) = -C_Э$, $C_Э$ — константа Эйлера, и дифференцируя по x формулу $\Gamma(x) = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$, вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\ln x\,dx;$ б) $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln(-\ln x)\,dx;$

в) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2}\ln t\,dt;$ г) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\ln^2 x\,dx;$

д) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2}\ln^2 t\,dt.$

812) Используя формулу Лобачевского (см. задачу 39 § 5 гл. II), вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^p x}{x}\,dx$, где p есть рациональная дробь с нечетным числителем и знаменателем.

813) Используя формулу Гаусса (гл. II формула 16), вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{x^p - x^q}{1-x}\,dx$, $p+1>0$, $q+1>0$.

814) Используя результат задачи 813, вычислить следующие интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \frac{(1-x^\alpha)(1-x^\beta)}{(1-x)\ln x}\,dx$, $\alpha+1>0$, $\beta+1>0$, $\alpha+\beta+1>0$;

б) $\int\limits_0^1 \frac{x^\alpha(1-x^\beta)(1-x^\gamma)}{(1-x)\ln x}\,dx$, $\alpha>-1$, $\alpha+\beta>-1$, $\alpha+\gamma>-1$, $\alpha+\beta+\gamma>-1$;

в) $\int\limits_0^1 \frac{x^{\alpha-1} - x^{\beta-1}}{(1+x)\ln x}\,dx$, $\alpha>0$, $\beta>0$;

г) $\int\limits_0^1 \frac{x^{\alpha-1} - x^{-\alpha}}{(1+x)\ln x}\,dx$, $0<\alpha<1$.

815) Используя формулу $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2\alpha-1}\varphi\,d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1/2)}$, $\alpha>0$, вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n}\varphi \ln\sin\varphi\,d\varphi$.

816) Найти площадь области, ограниченной кривой

$$(x^2+y^2)^4 = xy^3.$$

817) Найти площадь области, ограниченной одной петлей кривой $r^m = a^m \cos m\varphi$, $m \in \mathbb{N}$, и длину этой петли.

818) Найти объем тела, ограниченного поверхностью $x^n + y^n + z^n = a^n$, $n > 0$, и координатными плоскостями, находящегося в первом октанте $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

819) Исходя из определения функции $\Gamma(x)$ для $x < 0$, $x \neq -n$, $n \in \mathbb{N}$ (гл. II, с. 461), проверить равенства

а) $\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\dfrac{\pi}{x \sin \pi x}$, $x \in (0; 1)$;

б) $\Gamma(1+x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi x}{\sin \pi x}$, $0 < |x| < 1$;

в) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2} + x\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{2} - x\right) = \dfrac{\pi}{\cos \pi x}$, $|x| < \dfrac{1}{2}$;

г) $\Gamma\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$;

д) $\Gamma\left(-n + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(-2)^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi}$, $n \in \mathbb{N}$.

Исследовать сходимость интеграла.

820) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2\, dx}{\Gamma(2x+1)}$.

821) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\Gamma(2x)\, dx}{3^x \Gamma(2x+1)\Gamma(x)}$.

822) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\Gamma(2x+1)}{\Gamma^2(x+1)}\, dx$.

823) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{16^x \Gamma^3(x+1)}{\Gamma(3x+1)}\, dx$.

824) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{x^x}\, dx$.

Найти предел.

825) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}\,\Gamma(x + 1/2)}{\Gamma(x+1)}$.

826) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^\alpha B(\alpha, x)$, $\alpha > 0$.

ОТВЕТЫ К ГЛАВЕ II

1) При $\alpha > 1$ сходится к $\dfrac{1}{\alpha - 1}a^{1-\alpha}$, при $\alpha \leqslant 1$ расходится.

2) Сходится при $\alpha < 1$ к $\dfrac{1}{1-\alpha}\cdot 10^{1-\alpha}$, при $\alpha \geqslant 1$ расходится.

3) При $\alpha < 1$ сходится к $\dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, при $\alpha \geqslant 1$ расходится.

4) При $\alpha < 1$ сходится к $\dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$, при $\alpha \geqslant 1$ расходится.

5) Расходится. 6) $\dfrac{1}{2}$. 7) $\dfrac{\pi}{2}$. 8) $\dfrac{1}{8}$. 9) Расходится. 10) $\dfrac{1}{ab}\cdot\dfrac{\pi}{2}$.

11) Расходится. 12) Расходится. 13) $\dfrac{\pi}{\sqrt{6}}$. 14) Расходится.

15) $\dfrac{\pi}{4a}$. 16) $\dfrac{\ln|b| - \ln|a|}{b^2 - a^2}$, $|a| \neq |b|$; $\dfrac{1}{2a^2}$, $|a| = |b|$. 17) $\dfrac{3\pi}{8}$.

18) $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{3}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}$. 19) $\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{|a|+|b|}$. 20) $\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{|ab|(|a|+|b|)}$.

21) $\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}} - \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$. 22) $-\dfrac{4}{3}$. 23) $2\ln 6$. 24) π.

25) $\dfrac{\pi}{2} - \arcsin\dfrac{3}{4}$. 26) $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$. 27) π. 28) $\dfrac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$. 29) $\dfrac{\pi(b-a)}{2}$.

30) $\dfrac{\pi}{8}(b-a)(a+3b)$. 31) π. 32) $\dfrac{\pi(a+b)}{2}$. 33) $\dfrac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)$.

34) $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\ln\dfrac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}}$. 35) $\dfrac{1}{2}e^5$. 36) $-\dfrac{1}{\ln 5} + \dfrac{2}{(\ln 5)^2} - \dfrac{2}{(\ln 5)^3}$.

37) $-2e^{-1}$. 38) Расходится. 39) Расходится.

40) Расходится при всех α. 41) Расходится. 42) -1.

43) Сходится при $\alpha > 1$ к $\dfrac{1}{\alpha-1}$, расходится при $\alpha \leqslant 1$.

44) $\dfrac{1}{\ln 2}$. 45) Расходится. 46) Расходится. 47) $-\dfrac{4}{3}$. 48) 1.

49) $\dfrac{\pi^2}{2}$. 50) 2. 51) $\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{2/3}$. 52) $\dfrac{\pi^2}{8}$. 53) $\dfrac{49}{16}$. 54) Расходится.

55) Сходится при $|a| < 1$ к $\dfrac{\pi}{2\sqrt{1-a^2}}$, расходится при $|a| \geqslant 1$.

56) Сходится при $|a| > 1$ к $\dfrac{\pi}{4\sqrt{a^2-1}}$, расходится при $|a| \leqslant 1$.

57) $\dfrac{\pi}{4}$. 58) Расходится. 59) $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi^2}{16} + \dfrac{1}{2}\ln 2$. 60) $-\dfrac{1}{8}$. 61) 1.

62) $\dfrac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$. 63) $\dfrac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$. 64) $\dfrac{1}{2}$. 65) $2\sqrt{2}$. 66) $\dfrac{1}{2e}$.
67) Сходится.
68) Сходится при $0<\alpha<1$, расходится при $\alpha\leqslant 0$ и при $\alpha\geqslant 1$.
69) Расходится.
70) Сходится при $\alpha < 1$, расходится при $\alpha \geqslant 1$.
71) Сходится при $\dfrac{1}{3} \leqslant p < 1$, расходится при $p \geqslant 1$.
72) Расходится. 73) Сходится.
74) Сходится при $p > 1$, расходится при $p \leqslant 1$.
75) Сходится при $\alpha > 0$, $\beta > 0$, расходится при $\alpha \leqslant 0$, β — любом и при $\beta \leqslant 0$, α — любом.
76) При любом α расходится. 77) Сходится. 78) Сходится.
79) Сходится. 80) Сходится. 81) Сходится. 82) Расходится.
83) Сходится. 84) Сходится.
85) Сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leqslant 1$.
86) Сходится. 87) Сходится. 88) Сходится. 89) Сходится.
90) Сходится.
91) Сходится при $1<\alpha<2$, расходится при $\alpha\leqslant 1$ и при $\alpha\geqslant 2$.
92) Сходится. 93) Сходится.
94) Сходится при $n > 1$, расходится при $n \leqslant 1$.
95) Расходится. 96) Сходится. 97) Расходится.
98) Сходится. 99) Сходится.
100) Сходится при $p < 1$, расходится при $p \geqslant 1$.
101) Сходится при $\alpha \geqslant 0$, расходится при $\alpha < 0$.
102) Сходится при $|p| < 1$, расходится при $|p| \geqslant 1$.
103) Сходится. 104) Сходится.
105) Сходится при $\alpha < 3$, расходится при $\alpha \geqslant 3$.
106) Сходится при $1 < p < 2$, расходится при $0 < p \leqslant 1$ и при $p \geqslant 2$.
107) Сходится. 108) Сходится. 109) Сходится.
110) Сходится, если $\alpha\beta > 0$.
111) Сходится при $m > -2$, $\dfrac{n}{2} - m > 1$, расходится в противном случае.
112) Расходится. 113) Сходится. 114) Сходится.
115) Сходится.
116) Сходится при $p < 3$, расходится при $p \geqslant 3$.
117) Расходится. 118) Сходится.

119) Сходится при $\alpha > 0$ и $\beta > -1$; расходится при $\alpha \leqslant 0$ и любом β и при $\beta \leqslant -1$ и любом α.

120) Сходится при $p > -1$, любом q и при $p = -1$, $q > -1$; расходится при $p = -1$, $q \leqslant -1$ и при $p < -1$ и любом q.

121) Сходится при $p > 1$, q любом и при $p = 1$, $q > 1$; расходится при $p = 1$, $q \leqslant 1$ и при $p < 1$ и любом q.

122) Сходится. 123) Расходится при любом α.

124) Сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leqslant 1$.

125) Расходится при любом α. 126) Сходится.

127) Сходится при $p < 1$, расходится при $p \geqslant 1$.

128) Сходится. 129) Сходится.

130) Сходится при $1 < \alpha < 2$, расходится при $\alpha \leqslant 1$ и при $\alpha \geqslant 2$.

131) Сходится.

132) Сходится при $p > -1$, расходится при $p \leqslant -1$.

133) Сходится. 134) Расходится. 135) Расходится.

136) Расходится. 137) Сходится. 138) Сходится.

139) Сходится.

140) Сходится при $\alpha < -\frac{1}{2}$, расходится при $\alpha \geqslant -\frac{1}{2}$.

141) Сходится при $\beta < 1$, α — любом и при $\beta = 1$, $\alpha < -1$, расходится в противном случае.

142) Сходится при $k < -1$, расходится при $k \geqslant -1$.

143) Расходится. 144) Расходится. 145) Сходится.

146) Сходится. 147) Сходится. 148) Расходится.

149) Сходится. 150) Расходится. 151) Сходится.

152) Расходится. 153) Сходится.

154) Сходится при $2 < \alpha < 3$, расходится при $\alpha \leqslant 2$ и $\alpha \geqslant 3$.

155) Сходится.

156) Сходится при $\alpha > \frac{3}{4}$, расходится при $\alpha \leqslant \frac{3}{4}$.

157) Сходится. Указание. Использовать соотношение

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\pi(n-1)}^{\pi n} f(x)\,dx.$$

158) Сходится при $n > 4$, расходится при $n \leqslant 4$. См. указание к № 157.

159) Сходится. См. указание к № 157. 160) Расходится.

161) Сходится. 162) Сходится. 163) Сходится.

164) Сходится.

165) Сходится, если $\min(p, q) < 1$ и $\max(p, q) > 1$, расходится в противном случае.

166) Сходится.

167) Сходится условно при всех k и $a \neq 0$, сходится абсолютно при $a = 0$.

168) Сходится условно при всех $a > 0$.

169) Сходится абсолютно при $1 < \alpha < 2$, сходится условно при $0 < \alpha \leqslant 1$, расходится при $\alpha \leqslant 0$ или $\alpha \geqslant 2$.

170) Сходится условно при $0 < a < 1$, расходится при $a \leqslant 0$ или $a \geqslant 1$.

171) Сходится условно при $a \neq 0$ и $0 < \alpha \leqslant 1$, сходится абсолютно при $\alpha > 1$ и любом a; расходится при $\alpha = 0$ и любом a и при $\alpha \leqslant 1$ и $a = 0$.

172) Сходится абсолютно. 173) Сходится условно.

174) Сходится абсолютно при $a > 2$, сходится условно при $1 < a \leqslant 2$.

175) Сходится абсолютно при $\max(p, q) > 2$. Сходится условно, если $1 < \max(p, q) \leqslant 2$, расходится, если $\max(p, q) \leqslant$ $\leqslant 1$.

176) Сходится абсолютно, если $q > p + 1$ и $p > -2$, сходится условно, если $p < q \leqslant p + 1$, $p > -2$; расходится, если $p \geqslant q$ или $p \leqslant -2$ при любом q.

177) Сходится условно.

178) Сходится абсолютно при $n > m + 1$, сходится условно при $m < n \leqslant m + 1$, расходится, если $m \geqslant n$.

179) Сходится абсолютно, если $p > -1$ и $q > p + 1$, сходится условно, если $p > -1$ и $p < q \leqslant p + 1$, расходится, если $p > -1$ и $p \geqslant q$ или $p \leqslant -1$ при любом q.

180) Сходится абсолютно, если $\lambda < -1$. Сходится условно, если $\lambda \geqslant -1$.

181) Сходится условно. 182) Сходится условно.

183) Сходится условно при $0 < \alpha \leqslant 1$, сходится абсолютно при $\alpha > 1$; расходится при $\alpha \leqslant 0$.

184) Сходится условно.

185) Сходится абсолютно при $-1 < \dfrac{1-p}{q} < 0$, сходится условно при $0 \leqslant \dfrac{1-p}{q} < 1$, расходится при $q = 0$ и любом p или при $\left|\dfrac{1-p}{q}\right| \geqslant 1$.

186) Сходится абсолютно при $p < 1$, сходится условно при $1 \leqslant p < 2$.

187) Сходится условно. 188) Сходится условно.

189) Сходится условно.

190) Сходится условно при $p < 2$; расходится при $p \geqslant 2$.

191) Сходится абсолютно. 192) Сходится условно.

193) Сходится условно.

194) Сходится условно при $\alpha > -1$; расходится при $\alpha \leqslant -1$.

195) Сходится условно.

196) Сходится условно при $\alpha \neq 0$; расходится при $\alpha = 0$.

197) Сходится условно при $-1 < p \leqslant 1$; расходится при $p \leqslant -1$ или $p \geqslant 2$; сходится абсолютно при $1 < p < 2$.

198) Сходится условно при $0 < p \leqslant 1$, сходится абсолютно при $p > 1$.

199) Сходится условно при $0 < p < 2$. 200) Сходится условно.

201) Сходится условно при $q > 1$, расходится при $0 < q \leqslant 1$.

202) Сходится абсолютно. 203) Сходится условно.

204) Сходится условно.

205) Сходится условно. Указание. См. задачу 48 гл. I § 5.

206) Сходится условно. Указание. См. задачу 48 гл. I § 5.

207) Расходится. Указание. Показать, что функция $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\sin x} \sin x\, dx$ удовлетворяет условию $C_1 x \leqslant F(x) \leqslant C_2 x$ для $x > 2\pi$, где $0 < C_1 < C_2$.

208) Сходится условно. 209) Сходится условно.

210) Сходится условно при $0 < \alpha \leqslant 1$, сходится абсолютно при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leqslant 0$.

211) Сходится условно. Сравните с предыдущим примером.

212) Расходится.

213) Сходится абсолютно при $\beta > \alpha + 1$, расходится при $\beta \leqslant \alpha + 1$.

214) Сходится абсолютно при $\beta > 2(\alpha + 1)$, расходится при $\beta \leqslant 2(\alpha + 1)$.

215) Сходится условно. Указание.

$$\frac{1}{2\sqrt{n-1}} \leqslant \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx \leqslant \frac{2}{\sqrt{n-1}}.$$

216) Сходится абсолютно. См. указание к № 215.

217) Собственный. 218) Сходится. 219) Сходится.

220) Сходится.

221) Расходится при $\alpha \geqslant 1$, сходится при $\alpha < 1$.

222) Сходится. 223) Сходится. 224) Сходится.

225) Собственный. 226) Сходится. 227) Собственный.

228) Расходится. 229) Расходится. 230) Сходится.

231) Собственный. 232) Сходится. 233) Расходится.

234) Собственный. 235) Сходится. 236) Сходится.

237) Сходится. 238) Расходится. 239) Собственный.

240) Сходится. 241) Сходится. 242) Собственный.

243) Расходится. 244) Собственный. 245) Расходится.

246) Сходится. 268) $\dfrac{\pi}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}}$. 269) $\dfrac{\arcsin\alpha}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}$.

270) $\dfrac{\pi}{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}}$. 271) $\dfrac{\ln(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2})}{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}}$.

272) $\dfrac{\ln(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}}$ при $\alpha > 1$; 1 при $\alpha = 1$;
$\dfrac{\arccos\alpha}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}$ при $0 < \alpha < 1$.

273) $I_n = nI_{n-1}$, $I_n = n!$.

274) $I_n = \dfrac{2n-1}{2} I_{n-1}$, $I_n = \dfrac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$. Указание. Применить результат примера 51 гл. 1 § 3.

275) $I_n = \dfrac{n(n-1)I_{n-2}}{n^2+\alpha^2}$, $I_0 = \dfrac{1}{\alpha}$, $I_1 = \dfrac{1}{1+\alpha^2}$,

$$I_{2k-1} = \frac{(2k-1)!}{(1+\alpha^2)(3^2+\alpha^2)\dots[(2k-1)^2+\alpha^2]},$$

$$I_{2k} = \frac{(2k)!}{\alpha(\alpha^2+2^2)(\alpha^2+4^2)\dots(\alpha^2+(2k)^2)}.$$

276) $I_n(m) = -\dfrac{m}{n+1}I_n(m-1)$, $I_n(m) = \dfrac{(-1)^m m!}{(n+1)^{m+1}}$.

277) $I_n(m) = \dfrac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$. 278) $I_n = \dfrac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}}\sin(n+1)\dfrac{\pi}{4}$.

279) $I_n = \dfrac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}}\cos(n+1)\dfrac{\pi}{4}$. 280) $2^{2n}\cdot\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)^2}$.

281) $\dfrac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\dfrac{\pi A^{n-1}}{(AC-B^2)^{n+\frac{1}{2}}}$. 282) $\dfrac{(-1)^{n-1}\pi}{4n}$.

283) $(-1)^n\left(-\dfrac{1}{\alpha}+2\displaystyle\sum_{m=1}^{n-1}\dfrac{(-1)^{m-1}\cdot\alpha}{\alpha^2+4m^2}\right)$.

284) $(-1)^n\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\left(-\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{m=1}^{n-1}(-1)^{m-1}e^{\frac{m^2}{\alpha}}\right)$. 285) $\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

286) $(-1)^n\cdot n!$. 287) $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}$.

288) $I_n = \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\pi$, $n=2k$; $I_n = \dfrac{(n-1)!!}{n!!}$, $n = 2k-1$.

289) $n!\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k\ln(k+1)$. 304) $\dfrac{\pi^2}{12}$. 305) $-\dfrac{\pi^2}{6}$. 306) 1.

307) $\dfrac{\pi^2}{4}$. 308) $\dfrac{\pi^2}{6}$. 309) $\dfrac{\pi^2}{12}$. 310) $\dfrac{\pi^2}{8a^2}$. 311) $-\dfrac{\pi^2}{12}$. 312) $-\dfrac{\pi^2}{6}$.

313) $-\dfrac{\pi^2}{8}$. 314) $-\dfrac{\pi^2}{24}$. 315) $\dfrac{\pi^2}{4}$. 316) $\dfrac{\pi^3}{8}$. 317) $2-\dfrac{\pi^2}{6}$.

318) $\ln(1+\sqrt{2})$.

319) $-\pi\ln 2$. Указание. $\sin^2\varphi - \sin^2\omega = \sin(\varphi-\omega)\cdot\sin(\varphi+\omega)$, $a = \sin\omega$.

320) $\dfrac{\pi}{2}\ln 2$. Указание. Сделать замену $\ln\dfrac{1}{\sin t} = x$ и проинтегрировать по частям.

321) $\frac{\pi}{2}$. Указание. Сделать замену $x = \sin t$ и проинтегрировать по частям.

322) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 323) $\frac{\pi}{2}$. 324) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 325) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\pi + \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right]$.

326) $\frac{\pi}{2}$. Указание. Обозначить $\cos\varphi = u$ и сделать замены $\cos\varphi = z$ и $(1-z)t = \sqrt{(z-u)(1-z)}$.

327) $\frac{\pi}{2}\cos\varphi$. Указание. Обозначить $\cos\varphi = u$ и сделать замены $\cos\varphi = z$ и $(1-z)t = \sqrt{(z-u)(1-z)}$.

328) 0. Указание. В интеграле $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^m\ln x\,dx}{1+x^{2m+2}}$ сделать замену $x = \frac{1}{y}$.

329) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$. 330) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

331) $-\frac{\pi^2}{2}\ln 2$. Указание. Сделать замену $\pi - x = y$.

332) $\frac{\pi}{\sqrt{2}\cdot 3}$. Указание. Проинтегрировать по частям.

333) $\frac{\pi}{2}\ln 2$. Указание. Сделать замену $x = \sin y$.

334) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$. Указание. Сделать замену $x = \sin y$. 335) $\frac{-\pi}{2}$.

336) 0. 337) $-2\ln 2$.

338) $\pi\ln 2$. Указание. Сделать замену $x = \operatorname{tg} y$. 339) $\pi\sqrt{2}$.

340) 0 при n нечетном, π при n четном. Указание. Выразить этот интеграл через $\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin(n-2)\cos x}{\sin x}\,dx$.

341) 0 при n нечетном; $-\frac{\pi}{n}$ при n четном.

342) $\frac{\pi}{2}(|b| - |a|)$. Указание. Проинтегрировать по частям и применить результат примера 49 гл. I § 3.

343) $\sqrt{\pi}(|b| - |a|)$. Указание. Проинтегрировать по частям и применить результат примера 51 гл. I § 3.

344) $\pi(|a| - |b|)$. Указание. Проинтегрировать по частям.

345) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. Указание. Проинтегрировать по частям.

346) $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$. Указание. Проинтегрировать по частям.

347) $\dfrac{(-1)^{\nu+\mu}}{2^{2\nu}\cdot(2\mu)!}\cdot\dfrac{\pi}{2}\Bigl[(2\nu+1)^{2\mu}-(2\nu+1)(2\nu-1)^{2\mu}+$
$+\dfrac{(2\nu+1)\cdot 2\nu}{1\cdot 2}(2\nu-3)^{2\mu}-\cdots\Bigr]$, $n=2\nu+1$, $\nu\in\mathbb{N}$;
$\dfrac{(-1)^{\nu+\mu+1}}{2^{2\nu-1}(2\mu)!}\Bigl[(2\nu)^{2\mu}\ln 2\nu-2\nu(2\nu-2)^{2\mu}\ln(2\nu-2)+$
$+\dfrac{2\nu(2\nu-1)}{1\cdot 2}(2\nu-4)^{2\mu}\ln(2\nu-4)-\cdots\Bigr]$, $n=2\nu$, $\nu\in\mathbb{N}$.

348) $\dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

349) $\dfrac{\pi}{2^n(n-1)!}\Bigl[n^{n-1}-n(n-2)^{n-1}+\dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}(n-4)^{n-1}-\ldots\Bigr]$.

351) $\ln\dfrac{\beta}{\alpha}$. 352) $\ln\left(1+\dfrac{q}{p}\right)\cdot\ln\dfrac{\beta}{\alpha}$. 353) $\dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{\alpha}{\beta}$. 354) $\ln\dfrac{\beta}{\alpha}$.

355) $-\dfrac{1}{2}\ln 2$. Указание. Рассмотреть тождество
$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2x}(e^{-x}-e^{-2x})+$$
$$+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}e^{-x}\right)-\frac{1}{x}\left(\frac{1}{e^{2x}-1}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right).$$

356) $\beta-\alpha+\alpha\ln\dfrac{\alpha}{\beta}$. Указание. Использовать равенство
$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}+x(\alpha-\beta)e^{-\beta x}}{x^2}\,dx=$$
$$=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x^2}\,dx+(\alpha-\beta)\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\beta x}}{x}\,dx$$
и преобразовать $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x^2}\,dx$ интегрированием по частям.

357) 0. 358) $\alpha\ln\alpha$.

359) $\alpha\ln\alpha-\alpha$. Указание. Использовать равенство
$ax\cos x-\sin ax=ax(\cos x-\cos ax)+ax\cos ax-\sin ax$.

360) $\ln\sqrt{\dfrac{\alpha+\beta}{|\alpha-\beta|}}$. 361) $\ln\dfrac{\sqrt{|\alpha^2-\beta^2|}}{\beta}$. 362) $\ln\dfrac{\alpha}{\beta}$. 363) $\alpha\beta\ln\dfrac{\beta}{\alpha}$.

364) $\alpha\beta \ln \frac{\beta}{\alpha}$. 365) $2b \ln \frac{2b}{a+b} + 2a \ln \frac{2a}{a+b}$.

366) Указание. Полагая $A_n = -A_1 - A_2 - \dots - A_{n-1}$, рассмотреть интегралы
$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{A_i \cos \alpha_i x - A_i \cos \alpha_n x}{x}\, dx = -A_i \ln \frac{\alpha_i}{\alpha_n}.$$

367) $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \ln \frac{\beta}{\alpha}$. Указание. Свести интеграл к интегралу Фруллани, заменив $\sin^{2n} x$ на
$\sin^{2n} x - \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{1 \cdot 2 \dots n}$.

368) $\ln \frac{\beta}{\alpha}$.

369) $\left(1 - \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right) \ln \frac{\beta}{\alpha}$. Указание. Свести интеграл к интегралу Фруллани, заменив $\cos^{2n} x$ на
$\cos^{2n} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{1 \cdot 2 \dots n}$.

370) $\frac{\pi}{2}$ при $\beta < \alpha$; $\frac{\pi}{4}$ при $\beta = \alpha$; 0 при $\beta > \alpha$.

371) $\frac{\pi}{4}$ при $\alpha < \beta + \gamma$; $\frac{\pi}{8}$ при $\alpha = \beta + \gamma$; 0 при $\alpha > \beta + \gamma$.

372) $\frac{\pi}{2}\beta$ при $\beta \leqslant \alpha$; $\frac{\pi}{2}\alpha$ при $\beta \geqslant \alpha$.

373) $\frac{\pi}{2}\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$.374) $\frac{\pi}{2}|\alpha - \beta|$. 375) Равномерно.

376) Неравномерно. 377) Неравномерно. 378) Равномерно.

379) Равномерно. 380) Неравномерно. 381) Неравномерно.

382) Равномерно. 383) Равномерно. 384) Равномерно.

385) Неравномерно. 386) Равномерно.

387) а) Равномерно, б) равномерно. 388) Равномерно.

389) а) Равномерно, б) неравномерно.

390) а) Неравномерно, б) равномерно.

391) а) Неравномерно, б) равномерно.

392) а) Неравномерно, б) равномерно.

393) а) Неравномерно, б) неравномерно, в) неравномерно, г) равномерно, д) равномерно.

394) а) Неравномерно, б) равномерно.

395) а) Неравномерно, б) равномерно. 396) Да. 397) Нет.
398) Нет. 399) Нет. 400) Да. 401) Да. 402) Да. 403) 9.
404) $\frac{1}{4}$. 405) $\frac{\pi}{3}$. 406) $\frac{\pi}{2}$. 407) 1. 408) $f(x) - f(a)$. 409) $\frac{1}{2}$.
410) 0. 411) $\ln\frac{2e}{1+e}$. 412) 0. 413) Непрерывна.
414) Непрерывна. 415) Непрерывна. 416) Непрерывна.
417) Непрерывна. 418) Непрерывна.
419) Если $f(0) \neq 0$, то разрывна в точке $y = 0$; если $f(0) = 0$, то непрерывна при $|y| < \infty$.
420) Разрывна в точке $y = 0$. 421) Непрерывна.
422) Непрерывна. 423) Непрерывна. 424) Непрерывна.
425) Нет. 426) Нет. 427) Нет. 428) Нет.
429) $\int_a^b 2ye^{x^2+y^2}\,dx$. 430) $(y^2+y)^{10} + \int_0^y x(x+xy)^9\,dx$.
431) $-|y|\sin y^2 + \int_y^2 \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}\sin xy + x\sqrt{xy}\cos xy\right)dx$.
432) $2ye^{-y^4} - e^{-y^2}$.
433) $2ye^{-5} - e^{-y^3} - \int_y^{y^2} x^2 e^{-x^2 y}\,dx$.
434) $\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y+b}\right)\sin y(y+b) - \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{a+y}\right)\sin y(a+y)$.
435) $-\cos(\sqrt{\cos y}\cdot y)\sin y - \cos(\sqrt{\sin y}\cdot y)\cos y -$
$- \int_{\sin y}^{\cos y} \sqrt{x}\sin(\sqrt{x}y)\,dx$.
436) $\frac{2}{y}\ln(1+y^2)$.
437) $f(y,-y) + 2\int_0^y f'_u(u,v)\,dx,\ u = x+y,\ v = x-y$.
438) $-\frac{1}{y^2}\frac{\ln 2}{1+y} + \int_0^{1/y} \frac{1+y-(1+xy)\ln(1+xy)}{(1+y)^2(1+xy)}\,dx$.

439) $2y\int\limits_{y^2-y}^{y^2+y}\sin(z^2+y^4-y^2)\,dz+2\int\limits_0^{y^2}\sin 2z^2\cos 2yz\,dz-$

$$-2y\int\limits_0^{y^2}dx\int\limits_{x-y}^{x+y}\cos(x^2+z^2-y^2)\,dz.$$

440) $-\int\limits_y^{y^2}((x+y)^2+2y(x+y))\exp(-y(x+y)^2)\,dx+$

$$+2y\exp(-y^3(1+y)^2)-y\exp(-4y^3).$$

441) $\dfrac{1}{y}f(1)\,\mathrm{sign}(\sin y)-\dfrac{1}{y}\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{sign}(\sin xy)\,dx-$

$$-\frac{1}{y}\int\limits_0^1 xf'(x)\,\mathrm{sign}(\sin yx)\,dx,\quad y\neq\pi n,\ n\in\mathbb{Z},$$

если $f(1)=0$, то $F'(y)$ существует всюду на $\mathbb{R}$.

442) $\int\limits_{-y^2}^{y^2}\exp(y^4z^3)\,dz+$

$$+\int\limits_0^y\left\{x^3\int\limits_{-yx}^{y+x}\exp(x^3z^3y)z^3\,dz+x\exp(y^4x^4)-x\exp(-y^4x^4)\right\}dx.$$

443) $3e^y+2ye^y$. 444) $3f(y)+2yf'(y)$.

445) $F''(y)=2f(y),\ y\in(a;b);\quad F''(y)=0,\ y\,\overline{\in}\,(a;b)$.
Если $f(a)=f(b)=0$, то $F''(a)=F''(b)=0$;
если $f(x)\neq 0$ для $x=a$ и $x=b$, то существуют односторонние производные $F''_+(a)=2f(a)$, $F''_+(b)=0$, $F''_-(a)=0$, $F''_-(b)=2f(b)$.

446) $f(y)$. 447) $\dfrac{f(y+2\alpha)-2f(y+\alpha)+f(y)}{\alpha^2}$.

448) $F''_{xy}(x,y)=x(2-3y^2)f(xy)+\dfrac{x}{y^2}f\left(\dfrac{x}{y}\right)+x^2y(1-y^2)f'(xy)$.

453) $\pi\ln\dfrac{|a|+\sqrt{a^2-1}}{|a|}$. 454) $\pi\ln\dfrac{m+1}{2}$.

455) $\pi \ln \dfrac{|a|+|b|}{2}$. 456) $2\pi \ln|a|$, $|a|>1$; 0, $|a| \leqslant 1$.

457) $\dfrac{\pi}{2}\operatorname{sign} a \cdot \ln(1+|a|)$. 458) $\pi \arcsin a$. 459) $\pi \arcsin a$.

460) π. 461) $\dfrac{\pi}{2}\left[\operatorname{arctg} a\sqrt{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right]$.

462) $\dfrac{\pi}{2}(1-e^{|a|})\operatorname{sign} a$. 463) $\dfrac{\pi}{2}\ln(a+\sqrt{1+a^2})$. 464) $\pi \arcsin a$.

465) $-\dfrac{\arccos^2 a}{2}+\dfrac{\pi^2}{8}$. 466) $\dfrac{\pi^2}{4}-\arccos^2 a$. 467) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} a \cdot \ln(1+a^2)$.

468) $y = 4x - \dfrac{11}{3}$. 469) Нет. 470) Нет. 471) Нет. 472) Да.

473) Да. 474) Нет. 475) $\ln\dfrac{1+b}{1+a}$. 476) $\operatorname{arctg}\dfrac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}$.

477) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}$. 478) $\pi \arcsin\dfrac{b}{a}$.

479) а) $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}$; б) $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}a^{-2n}$. Указание. Доказать, что I удовлетворяет уравнению
$I''(a) + \dfrac{2n+1}{a}I(a) = 0$.

484) а) Неравномерно, б) равномерно.

485) а) Равномерно, б) неравномерно. 486) Равномерно.

487) а) Равномерно, б) равномерно. 488) Равномерно.

489) Равномерно. 490) Неравномерно. 491) Неравномерно.

492) а) Равномерно, б) неравномерно. 493) Равномерно.

494) Равномерно. 495) Равномерно. 496) Равномерно.

497) а) Равномерно, б) равномерно, в) неравномерно,

498) Неравномерно. 499) а) Равномерно, б) неравномерно.

500) а) Равномерно, б) неравномерно.

501) а) Равномерно, б) неравномерно.

502) а) Равномерно, б) неравномерно.

503) а) Равномерно, б) неравномерно.

504) а) Равномерно, б) неравномерно.

505) а) Равномерно, б) неравномерно.

506) Неравномерно. 507) а) Равномерно, б) неравномерно.

508) Равномерно. 509) Равномерно.

510) а) Равномерно, б) неравномерно, в) неравномерно.
511) а) Равномерно, б) неравномерно.
512) а) Равномерно, б) неравномерно.
513) а) Равномерно, б) неравномерно. 514) Неравномерно.
515) Равномерно. 516) Равномерно.
517) а) Неравномерно, б) равномерно. 518) Равномерно.
519) а) Равномерно, б) неравномерно.
520) а) Равномерно, б) неравномерно.
521) а) Равномерно, б) неравномерно.
522) а) Равномерно, б) неравномерно. 523) Равномерно.
524) а) Равномерно, б) неравномерно. 525) Равномерно.
526) а) Равномерно, б) неравномерно.
527) а) Равномерно, б) равномерно. 528) Равномерно.
529) а) Равномерно, б) неравномерно.
530) а) Равномерно, б) неравномерно.
531) а) Равномерно, б) неравномерно. 532) Равномерно.
533) Равномерно. 534) а) Равномерно, б) неравномерно.
535) Неравномерно. 536) а) Равномерно, б) неравномерно.
537) Равномерно. 538) а) Равномерно, б) неравномерно.
539) Равномерно. 540) Равномерно. 541) Равномерно.
542) а) Равномерно, б) неравномерно.
543) а) Неравномерно, б) равномерно. 544) Равномерно.
545) Равномерно. 546) Равномерно. 547) Равномерно.
548) Равномерно. 549) Равномерно. 550) Равномерно.
551) Равномерно. 552) Неравномерно. 553) Равномерно.
554) а) Неравномерно, б) неравномерно. 555) Равномерно.
556) Равномерно. 557) Равномерно. 558) Неравномерно.
559) Равномерно. 560) Равномерно.
561) а) Равномерно, б) неравномерно. 584) Непрерывна.
585) Непрерывна. 586) Непрерывна. 587) Непрерывна.
588) Непрерывна. 589) Непрерывна. 590) Непрерывна.
591) Непрерывна всюду, кроме $\alpha = 0$.
592) Непрерывна всюду, кроме $\alpha = 0$. 593) Непрерывна.
594) Непрерывна. 595) Непрерывна. 596) Непрерывна.
597) Непрерывна. 598) Непрерывна. 599) Непрерывна.
600) Непрерывна. 601) Непрерывна.
602) Непрерывна всюду, кроме $\alpha = \pm 1$. 603) Непрерывна.
604) Непрерывна. 605) Непрерывна всюду, кроме $\alpha = 0$.

606) Непрерывна всюду, кроме $\alpha = 0$. 607) Непрерывна.

608) $F'_\alpha = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x}\, dx$. 609) $F'_\alpha = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{2(x+\alpha)\cos x}{(1+(x+\alpha)^2)^2}\, dx$.

610) $F'_\alpha = -\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2} \sin \alpha x\, dx$.

611) а) $F'_\alpha = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\, dx$; б) $F'_\alpha = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\, dx$, $\alpha \neq 0$, в нуле $F(\alpha)$ не имеет производной. Указание. Представив $F'(\alpha)$ для $\alpha \neq 0$ в виде $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x(1+x^2)}\, dx - \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$, найти $\lim\limits_{\alpha \to 0+} F'_\alpha$ и $\lim\limits_{\alpha \to 0-} F'(\alpha)$.

612) $F'_\alpha(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 \cos \alpha x}{(1+x^2)^2}\, dx$.

613) $F'_\alpha = -\int\limits_\alpha^{+\infty} xe^{-\alpha x}\, dx - e^{-\alpha^2} = -2e^{-\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha^2}$. Указание. Для любого $\alpha > 0$ имеем $F(\alpha) = \int\limits_\alpha^1 e^{-\alpha x}\, dx + \int\limits_1^{+\infty} e^{-\alpha x}\, dx$. Второй способ. Вычислив интеграл, найти явно функцию $F(\alpha)$ и продифференцировать ее.

614) $F'_\alpha(\alpha) = -\int\limits_\alpha^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}\, dx - e^{-\alpha^3}$. См. указание к задаче 613.

615) $F'_\alpha(\alpha) = \int\limits_\alpha^{+\infty} \frac{x \cos \alpha x}{1+x^3}\, dx - \frac{\sin \alpha^2}{1+\alpha^3}$. См. указание к задаче 613.

616) Равенство справедливо. $M = \mathbb{R}$.

617) Равенство справедливо. $M = \mathbb{R}$.

618) Равенство несправедливо. $M = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ или $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Указание. $\int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(x, \alpha)\, dx$ расходится.

620) $\dfrac{2}{\alpha^3}$. 621) $\dfrac{(-1)^m\cdot m!}{n^{m+1}}$. 622) $\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$.

623) а) $\dfrac{2n}{(n^2+1)^2}$; б) $\dfrac{n^2-1}{(n^2+1)^2}$; в) $\dfrac{2(3n^2-1)}{(n^2+1)^3}$; г) $\dfrac{2n(n^2-3)}{(n^2+1)^3}$;
д) $\dfrac{24n(n^2-1)}{(n^2+1)^4}$; е) $\dfrac{6(n^4-5)}{(n^2+1)^4}$.

624) а) $\ln n$; б) $n\ln n-n$; в) $\dfrac{n^2}{2}\ln n-\dfrac{3}{4}n^2$.

625) а) $\ln n$; б) $n\ln n-n$; в) $\dfrac{n^2}{2}\ln n-\dfrac{3}{4}n^2$. 626) $\dfrac{\pi}{4}\operatorname{sign}\alpha$.

627) $\dfrac{\pi|\alpha|}{4}$. 628) $\dfrac{5\pi}{32}\alpha|\alpha|$. 629) $\dfrac{225}{128}\pi\alpha^3|\alpha|$. 630) $\dfrac{3}{8}\pi a|a|$.

631) $\dfrac{1}{3}\pi|a|^3$. 632) $\dfrac{\pi}{4}$. 633) $\dfrac{\beta\pi}{2}$ при $\alpha>\beta$; $\dfrac{\alpha\pi}{2}$ при $\alpha\leqslant\beta$.

634) 0 при $|\alpha|<|\beta|$; $\dfrac{\pi}{4}\operatorname{sign}\alpha$ при $|\alpha|=|\beta|$, $\dfrac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha$ при $|\alpha|>|\beta|$.

635) $\dfrac{\pi}{2}\beta$ при $\alpha\geqslant\beta+\gamma$; $\dfrac{\pi}{4}(\alpha+\beta-\gamma)$ при $|\beta-\gamma|\leqslant\alpha\leqslant\beta+\gamma$;
$\dfrac{\pi}{2}\alpha$ при $\beta>\gamma$, $\alpha\leqslant\beta-\gamma$; 0 при $\beta<\gamma$, $\alpha\leqslant\gamma-\beta$.

636) $\dfrac{1}{2}\pi\beta\gamma$ при $\alpha\geqslant\beta+\gamma$; $\dfrac{\pi}{8}(2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)$ при $\alpha\leqslant\beta+\gamma$.

637) $\dfrac{\pi}{2}$ при $\alpha>\beta+\gamma$; $\dfrac{3\pi}{8}$ при $\alpha=\beta+\gamma$; $\dfrac{\pi}{4}$ при $|\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma$; $\dfrac{\pi}{8}$ при $\alpha=|\beta-\gamma|$; 0 при $\alpha<|\beta-\gamma|$.

638) $\dfrac{\pi}{4}$ при $|\alpha|<1$; $\dfrac{\pi}{8}$ при $|\alpha|=1$, $-\dfrac{\pi}{8}$ при $1<|\alpha|\leqslant3$, 0 при $|\alpha|>3$.

639) $\dfrac{\pi\alpha}{2}-\dfrac{\pi\alpha|\alpha|}{8}$ при $|\alpha|<2$; $\dfrac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha$ при $|\alpha|\geqslant2$.

640) $\dfrac{\pi}{4}(2-|\alpha|)$ при $|\alpha|\leqslant2$, 0 при $|\alpha|>2$. 641) $\dfrac{\pi}{4}$. 642) $\dfrac{\pi}{4}$.

643) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}$. 644) $\dfrac{(2n-1)!!}{\alpha^{2n+1}\cdot2^{n+1}}\sqrt{\pi}$. 645) $\dfrac{n!}{2\cdot\alpha^{2n+2}}$.

646) $\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\alpha c-\beta^2}{\alpha}}$.

647) $\dfrac{(\alpha+2\beta^2)\alpha_1-4\alpha\beta\beta_1+2\alpha^2c_1}{2\alpha^2}\cdot\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\alpha c-\beta^2}{\alpha}}$.

648) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}e^{-2\alpha\beta}$ Указание. Представить $(0;+\infty)$ как $\left(0;\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}\right)\cup\left[\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}};+\infty\right)$, в интеграле по $\left(0;\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}\right)$ положить $x=\dfrac{\beta}{\alpha t}$.

649) $\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}$. 650) $\dfrac{\beta\sqrt{\pi}}{4\alpha^3}e^{\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}$. 651) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^n}\,\dfrac{d^{2n}}{d\beta^{2n}}(e^{\beta^2})$.

652) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{n-1}}\,\dfrac{d^{2n-1}}{d\beta^{2n-1}}(e^{\beta^2})$. 653) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}e^{-\frac{\beta^2}{\alpha^2}}$. 654) $\dfrac{\beta\sqrt{\pi}}{2\alpha\sqrt{\alpha}}e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}$.

655) $-\dfrac{\sqrt{\pi}}{4e}$. 656) $(-1)^n\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}}\,\dfrac{d^{2n}}{d\beta^{2n}}(e^{-\beta^2})$. 657) $\dfrac{\beta\sqrt{\pi}}{4\alpha\sqrt{\alpha}}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}$.

658) $(-1)^n\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}}\,\dfrac{d^{2n-1}}{d\beta^{2n-1}}(e^{-\beta^2})$. 659) $\dfrac{\pi}{4}\,\dfrac{(1-e^{-2\alpha})}{\alpha}$.

660) $\dfrac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}\operatorname{sign}\alpha$. 661) $\dfrac{\pi}{2}(1-e^{-\alpha})$. 662) $\dfrac{\pi}{4}(1+|\alpha|)e^{-|\alpha|}$.

663) $\dfrac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}e^{-\frac{|\alpha|}{a}\sqrt{ac-b^2}}\cos\dfrac{\alpha b}{a}$. 664) $\dfrac{\pi}{2}(2e^{-\alpha}-1)$.

665) $\dfrac{\pi\alpha}{4}e^{-\alpha}$.

666) $\sqrt{\dfrac{\pi}{|a|}}\sin\left(\dfrac{ac-b^2}{a}+\dfrac{\pi}{4}\operatorname{sign}a\right)$. Указание. Сделать замену $\sqrt{a}x+\dfrac{b}{\sqrt{a}}=t$, $a>0$.

667) $\sqrt{\pi}\sin\left(a^2+\dfrac{\pi}{4}\right)$. 668) $\sqrt{\pi}\cos\left(a^2+\dfrac{\pi}{4}\right)$. 669) $\ln\dfrac{\alpha}{\beta}$.

670) $\dfrac{\pi}{2}\beta-\pi\sqrt{\alpha}$. 671) $\dfrac{1}{2}\ln(1+n^2)$. 672) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\beta^2+m^2}{\alpha^2+m^2}$.

673) $\operatorname{arctg}n$. 674) $\operatorname{arctg}\dfrac{m(\beta-\alpha)}{m^2+\alpha\beta}$. 675) $(\beta-\alpha)\sqrt{\pi}$. 676) $\ln\dfrac{\beta}{\alpha}$.

677) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\beta}{\alpha}$. 678) $\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})$. 679) $\ln\dfrac{(2\alpha)^{2\alpha}\cdot(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2(\alpha+\beta)}}$.

680) $\dfrac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha}+\operatorname{arctg}\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha}\right]$. 681) $\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha(\beta-\gamma)}{\alpha^2+\beta\gamma}$.

682) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha^2+\beta^2}$. 683) $\ln(1+\alpha)$. 684) $\dfrac{\pi}{2}(\beta-\alpha)$.

685) $-\sum\limits_{i=1}^{n} A_i \ln \alpha_i$. 686) $\alpha - \beta + \beta \ln \dfrac{\beta}{\alpha}$. 687) $\ln \sqrt[4]{1 + \dfrac{4\beta^2}{\alpha^2}}$.

688) $\beta \operatorname{arctg} \dfrac{2\beta}{\alpha} - \dfrac{\alpha}{4} \ln \left(1 + \dfrac{4\beta^2}{\alpha^2}\right)$.

689) $-\dfrac{\beta + \gamma}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{\alpha}{\beta + \gamma} + \dfrac{\pi\gamma}{2}$.

690) $\dfrac{1}{4}\left[\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{\alpha}{3\beta} - 3 \operatorname{arctg} \dfrac{\alpha}{\beta}\right]$.

691) $\dfrac{3}{8}\beta \ln \dfrac{\alpha^2 + 9\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} + \dfrac{\alpha}{4}\left[\operatorname{arctg} \dfrac{3\beta}{\alpha} - 3 \operatorname{arctg} \dfrac{\beta}{\alpha}\right]$.

692) $\pi(\sqrt{1 - \alpha^2} - 1)$. 693) $-(\arcsin \alpha)^2$. 694) $\pi \ln \dfrac{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}{2}$.

695) а) $\pi \ln \dfrac{\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2}}{2}$, б) $\pi \ln \dfrac{1 + \sqrt{\alpha^2 + 1}}{2}$.

696) $\dfrac{\pi}{\beta} \ln \left(1 + \dfrac{\alpha}{\beta}\right)$. 697) $\dfrac{\pi}{\beta} \ln(1 + \alpha\beta)$. 698) $\dfrac{\pi}{\beta} \ln(\alpha + \beta)$.

699) $\dfrac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha (1 + |\alpha| - \sqrt{1 + \alpha^2})$. 700) $\dfrac{\pi}{2} \ln \left(1 + \dfrac{\alpha}{\beta}\right)$.

701) $\dfrac{\pi}{2}[\alpha\beta + (\alpha^2 - \beta^2) \ln(\alpha + \beta) - \alpha^2 \ln \alpha + \beta^2 \ln \beta]$.

702) $\dfrac{2\pi}{3}[\alpha\beta(\alpha + \beta) - (\alpha^3 + \beta^3) \ln(\alpha + \beta) + \alpha^3 \ln \alpha + \beta^3 \ln \beta]$.

703) $\dfrac{\pi}{2} \ln \dfrac{(\alpha + \beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta}$. 704) $\dfrac{\pi}{a}(e^{-\alpha c} - e^{-\alpha b})$.

705) $\dfrac{\pi}{4}(2 - \alpha e^{-\alpha} - 2e^{-\alpha})$. 706) $\dfrac{\pi}{16}(\alpha^2 + 3\alpha + 3)e^{-\alpha}$.

707) $\beta \operatorname{arctg} \dfrac{\beta}{\alpha} - \dfrac{\alpha}{2} \ln \dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2}$. 708) $2\alpha\sqrt{\pi}\left(1 - e^{-\frac{\beta^2}{\alpha^2}}\right)$.

709) $\dfrac{\sqrt{\pi m}}{2\alpha\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{m}{4\alpha}}$. 710) $\dfrac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$.

712) Указание. Рассмотреть

$$\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} e^{-(at+bx+xt)} \sin x \, dx \, dt, \quad \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} e^{-(at+bx+xt)} \cos x \, dx \, dt, \ b > 0.$$

713) 1. 714) $p^2 + \dfrac{1}{2}$. 715) $e^{2\alpha p + \alpha^2}$. 716) $\dfrac{1}{2} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \cos \alpha p$.

717) $\dfrac{1}{p}$, $p > 0$. 718) $\dfrac{1}{p - \alpha}$, $p > \alpha$. 719) $\dfrac{\beta}{p^2 + \beta^2}$, $p > 0$.

720) $\frac{p}{p^2+\beta^2}$, $p>0$. 721) $\frac{n!}{p^{n+1}}$. 722) $\frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$, $p>0$.

723) $\frac{1}{(p+\alpha)^2}$, $p>-\alpha$. 724) $\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}$, $p>0$.

725) $\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$, $p>-1$. 728) $\ln\left|\frac{b-c}{a-c}\right|$.

729) $\frac{1}{2n}\left[\frac{1}{(a-c)^{2n}}-\frac{1}{(b-c)^{2n}}\right]$. 730) $\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\ln\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{k}$.

731) $\int\limits_0^1\frac{(1-t)^{\alpha-1}-(1+t)^{\alpha-1}}{t}\,dt$. 732) $-\ln 2$. 733) 0. 734) 0.

735) π. 736) 0. 737) 0. 738) 0. 739) Не существует.

740) $\frac{\pi}{8}$. 741) $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$. 742) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

743) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. 744) $\frac{\pi}{3}$. 745) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

746) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. 747) $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$. 748) $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

749) $\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$. 750) $\frac{\pi a^4}{16}$.

751) $\frac{(2n-1)!!}{(n+1)!2^{2n+2}}\cdot a^{2n+2}\pi$. 752) $\frac{1\cdot4\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3\cdot6\cdot\ldots\cdot3n}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

753) $\frac{3\pi}{512}$. 754) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

755) $\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right)^2$.

Указание. Сделать замену $\cos x = 1-2\sqrt{u}$.

756) $\frac{\Gamma(b+1)}{\alpha^{b+1}}$. 757) $\frac{\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)}{2\alpha^{\frac{b+1}{2}}}$. 758) $\frac{2}{27}\pi^2$. 759) $\frac{3\pi^3}{32\sqrt{2}}$.

760) $\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)-\Gamma'(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(\Gamma(n+1))^2}$.

761) $\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\Gamma'(n+1)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)-\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{(\Gamma(n+1))^2}$.

762) $\dfrac{1}{\pi}\left(1+\ln\dfrac{\pi}{2}\right)$. Указание. Сделать замену $x = 1 - t$ и применить формулу дополнения для функции $\Gamma(x)$.

763) $\dfrac{1}{4n}$. Указание. Сделать замену $x = 1 - t$ и применить формулу дополнения для функции $\Gamma(x)$. Представив интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 \ln\sin\pi x\cos 2n\pi x\,dx$ в виде

$$\int\limits_0^{1/2} \ln\sin\pi x\cos 2\pi nx\,dx + \int\limits_{1/2}^{1} \ln\sin\pi x\cos 2\pi nx\,dx,$$

в первом интеграле сделать замену $\dfrac{\pi}{2} - \pi x = y$, а во втором — $\pi x - \dfrac{\pi}{2} = y$.

764) $0 < m+1 < n$, $\quad\dfrac{\pi}{n\sin\frac{\pi(m+1)}{n}}$.

765) $-\dfrac{1}{2} < m < n - \dfrac{1}{2}$, $\quad\dfrac{\pi}{n}\cdot\dfrac{1}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}$.

766) $0 < m+1 < n$, $\quad B(n-m-1, m+1)$.

767) $0 < \dfrac{m+1}{n} < p$, $\quad\dfrac{a^{-p}}{n}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} B\left(\dfrac{m+1}{n}, p - \dfrac{m+1}{n}\right)$.

768) $\alpha > 0$, $\quad\dfrac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{2}\right)}$.

769) $p > 0$, $\quad q > 0$, $\quad\dfrac{1}{m}\dfrac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)}$.

770) $p > 0, q > 0$, $\dfrac{B(p,q)}{(\alpha+\gamma)^p(\beta+\gamma)^q}$. Указание. Сделать замену $\dfrac{(\alpha+\gamma)x}{\alpha x + \beta(1-x)+\gamma} = t$.

771) $n < 1$, $\dfrac{1}{m}B\left(\dfrac{1}{m}, 1-n\right)$.

772) $\dfrac{(b-a)^{m+n+1}}{(a+c)^{n+1}(b+c)^{m+1}}$, $m > -1$, $n > -1$. Указание. Сделать замену $\dfrac{x-a}{x+c} = \dfrac{b-a}{b+c}t$.

773) $m > 0, n > 0$. $2^{m+n-2}B(m,n)$. Указание. Сделать замену $t = \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x)^2}{1+x^2}$.

774) $1 < m < 2$. $\frac{\pi}{2(m-1)} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\pi m}{2}}$.

775) $0 < m < 1$. $\frac{\pi}{2(1-m)} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\pi m}{2}}$.

776) $1 < m < 2$. $\frac{a^{m-1}}{m-1}B(2-m, m-1)$.

777) а) $\alpha > 0$, $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}$; б) $\alpha > 0$, $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}$.

778) $|\alpha| < 1$, $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}$.

779) $n > 0$, $\frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{n/2}}B\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)$. Указание. Сделать замену $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

780) $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{N}$. $\frac{\pi}{2\sin(\pi\cos^2\alpha)}$. Указание. В интеграле задачи 773 положить $n = 1-m$, $2m-1 = \cos 2\alpha$ и сделать подстановку $t = \operatorname{tg} x$.

781) $\alpha > 0$, $\frac{2^{\alpha-1}}{(1-k^2)^{\alpha/2}}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}$. Указание. Сделать подстановку $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

782) $\frac{m+1}{n} > 0$, $\frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$.

783) $p > -1$, $\Gamma(p+1)$.

784) $0 < p < 1$, $\frac{-\pi^2\cos\pi p}{\sin^2\pi p}$. Указание. Данный интеграл является производной по p от функции $B(p, 1-p)$.

785) $|\alpha| < 1$, $\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\pi\alpha}{2}}$.

786) $0 < p < 1$, $\pi^3\cdot\frac{1+\cos^2\pi p}{\sin^3\pi p}$.

787) $|\alpha|<1,\ \dfrac{\pi^3}{8}\cdot\dfrac{1+\sin^2\frac{\pi\alpha}{2}}{\cos^3\frac{\pi\alpha}{2}}$.

788) $\pi\,\mathrm{ctg}\,\pi p$. Указание. Доказать возможность предельного перехода при $\varepsilon\to 0+$ под знаком интеграла

$$\int\limits_0^1 (x^{p-1}-x^{-p})(1-x)^{-1+\varepsilon}\,dx.$$

Использовать формулу $\Gamma(\varepsilon)=\dfrac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon}$ и применить правило Лопиталя.

789) $\pi\ln\left|\dfrac{\mathrm{tg}\,\frac{\pi p}{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{\pi q}{2}}\right|$.

790) $\dfrac{\pi}{2\beta}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi\alpha}{2\beta}$. Указание. Сделать замену $e^{-2\beta x}=t$ и использовать результат задачи 788.

791) $\dfrac{\pi}{2\nu}\cdot\dfrac{1}{\cos\frac{\pi\mu}{2\nu}}$.

792) Указание. Сделать замену $x^n=t$, использовать формулу дополнения и непрерывность функции $\Gamma(x)$, $x>0$.

804) Указание. Полагая $x^n=t$, доказать, что

$$\prod_{m=1}^{n}\int\limits_0^{+\infty} x^{m-1}e^{-x^n}\,dx=\frac{1}{n^n}\prod_{m=1}^{n}\Gamma\left(\frac{m}{n}\right).$$

Записывая произведение $\prod\limits_{m=1}^{n}\Gamma\left(\dfrac{m}{n}\right)$ в прямом и обратном порядке и применяя формулу дополнения для функции $\Gamma(x)$, получить, что

$$\prod_{m=1}^{n}\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{\sqrt{\pi^{n-1}}}{\sqrt{\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{\pi k}{n}}}.$$

Для вычисление произведения $\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\dfrac{\pi k}{n}$ разложить двучлен z^n-1 на множители $(z-1)(z-z_1)\ldots(z-z_{n-1})$, $z_k=e^{ik\frac{2\pi}{n}}$, $k=1,2,\ldots,n-1$, и использовать равенства

$$\lim_{z\to 1}\frac{z^n-1}{z-1}=n=\lim_{z\to 1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(z-e^{ik\frac{2\pi}{n}}\right)=\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-e^{ik\frac{2\pi}{n}}\right),$$

$$\left|1-e^{ik\frac{2\pi}{n}}\right|=2\sin\frac{\pi k}{n}.$$

805) Указание. Положить

$$I_1=\int_0^1(1-x^3)^{-1/2}dx,\quad I_2=\int_1^{+\infty}(x^3-1)^{-1/2}dx,\quad I_3=\int_{-\infty}^0(1-x^3)^{-1/2}dx$$

и применить к этим интегралам соответственно подстановки $x^3=t$, $\dfrac{1}{x^3}=t$, $\dfrac{1}{x^3+1}=t$.

807) $\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\alpha^{m-1}}{\cos\frac{\pi m}{2}}\cdot\dfrac{1}{\Gamma(m)}$. **808)** $\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\alpha^{m-1}}{\cos\frac{\pi m}{2}}\cdot\dfrac{1}{\Gamma(m)}$.

809) $-\dfrac{\pi}{2}C_Э$. **810)** $\dfrac{\pi}{2}C_Э^2+\dfrac{\pi^3}{24}$.

811) а) $-C_Э$; б) $-C_Э$; в) $-\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}(C_Э+2\ln 2)$; г) $\Gamma''(1)=C_Э^2+\dfrac{\pi^2}{6}$; д) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{8}\left[(C_Э+2\ln 2)^2+\dfrac{\pi^2}{2}\right]$.

812) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\dfrac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}$. **813)** $\dfrac{\Gamma'(q+1)}{\Gamma(q+1)}-\dfrac{\Gamma'(p+1)}{\Gamma(p+1)}$.

814) а) $\ln\dfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$, б) $\ln\dfrac{\Gamma(\alpha+\gamma+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}$, в) $\ln\dfrac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}$, г) $\ln\operatorname{tg}\dfrac{\alpha\pi}{2}$. Указание. В интеграле п. б) сделать замену $x=t^2$, положить , $\gamma=\dfrac{1}{2}$. В интеграле п. в) положить $\beta=1-a$.

815) $\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dots-\dfrac{1}{2n}-\ln 2\right)$.

Указание. Продифференцировать по α данную формулу. К полученному результату применить формулу Гаусса (см. формулу (16) гл. III) и положить $2\alpha-1=2n$.

816) $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{3}$.

817) $\dfrac{\pi a^2}{\sqrt[m]{4}}\cdot\dfrac{\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{m}\right)}$; $\dfrac{a}{m}\cdot 2^{\frac{1}{m}-1}\cdot\dfrac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2m}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}$. Указание. Использовать формулу Лежандра (см. пример 12 гл. III § 5).

818) $\dfrac{a^3\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{3n^2\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}$.

820) Сходится. **821)** Сходится. **822)** Расходится. **823)** Сходится. **824)** Сходится. **825)** 1. **826)** $\Gamma(a)$.

§ 5. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Интегралы, независящие от параметра

1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(n), & x = n,\ n \in \mathbb{N}, \\ 0, & x \leqslant \dfrac{1}{2},\ x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [n + \delta_{n-1} - 1; n - \delta_n], \\ & 0 \leqslant \delta_n \leqslant \dfrac{1}{2},\ n \in \mathbb{N}, \\ \text{линейна на } [n - \delta_n; n] \text{ и } [n; n + \delta_n] \end{cases}$$

(см. рис. 14).

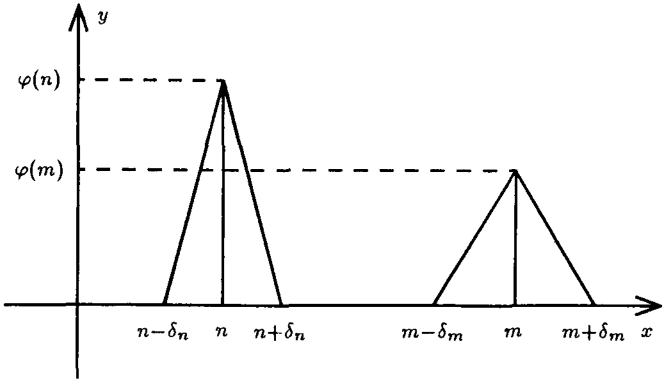


Рис. 14

При каких условиях на $\varphi(n)$ и δ_n справедливы утверждения:

а) функция f неограничена на $[0; +\infty)$, а интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

абсолютно сходится;

б) интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, а $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. Пусть 0 — единственная особая точка функции f на $\langle 0; 1\rangle$ и $\varliminf\limits_{x\to 0+} xf(x) > 0$. Доказать, что интеграл $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ расходится.

3. Пусть функция f монотонна на $(0;1]$ и $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \infty$. Доказать, что из сходимости интеграла $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ следует, что $\lim\limits_{x\to 0+} xf(x) = 0$.

4. Привести пример непрерывной и неотрицательной на $(0;1]$ функции $f \in \widetilde{R}\langle 0;1\rangle$, для которой $\varlimsup\limits_{x\to 0+} xf(x) > 0$.

5. Пусть функция f монотонна на $[a;+\infty)$, $a \geqslant 1$, и интеграл $\int\limits_0^1 x^q f(x)\,dx$ сходится. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} x^{q+1} f(x) = 0$.

6. Пусть функция f монотонна на $(0;1)$ и интеграл $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ сходится. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int\limits_0^1 f(x)\,dx.$$

7. Пусть функция f монотонна на $(0;1)$ и только один из концов этого интервала является особой точкой f. Доказать, что из существования $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)$ следует сходимость интеграла $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

8. Показать, что функция $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$ монотонна на $(0;1)$ и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)$, хотя интеграл

$\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ расходится.

9. Пусть функция f монотонна на $(0;1)$ и интеграл $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ сходится. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)=\int\limits_0^1 f(x)\,dx.$$

10. Пусть функция f монотонна на $[a;+\infty)$. Доказать, что условие: "для любого h, $0<h\leqslant 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a+nh)$ сходится и существует предел $\lim\limits_{h\to 0+} h\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a+nh)=A$" необходимо и достаточно для сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и при этом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx=A$.

11. Пусть ω — единственная особая точка функции f на $\langle a;\omega\rangle$ ($\langle\omega;a\rangle$). Доказать, что условие "для любой последовательности $\{x_n\}$: $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n<\omega$ ($a=x_0>x_1>x_2>\ldots>\omega$), $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\omega$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)\,dt$ сходится" необходимо и достаточно для сходимости интеграла $\int\limits_a^{\omega} f(x)\,dx$ ($\int\limits_{\omega}^{a} f(x)\,dx$).

12. Пусть $f(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\dfrac{x}{n}$, $x\in[\pi n(n-1);\pi n(n+1)]$, $n\in\mathbb{N}$, (см. рис. 15).

Показать, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\pi n(n-1)}^{\pi n(n+1)} f(x)\,dx$ — сходится.

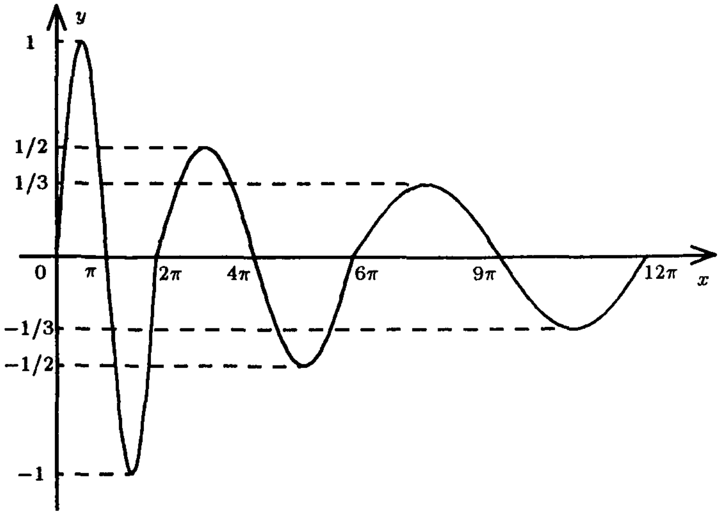


Рис. 15

13. Пусть функция $f(x)$ неотрицательна на $[a;\omega)$ и ω — единственная особая точка f на $\langle a;\omega\rangle$. Доказать, что, если найдется хотя бы одна последовательность, удовлетворяющая условиям

1) $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots < \omega$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \omega$;

3) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$ сходится,

то интеграл $\int\limits_a^{\omega} f(x)\,dx$ сходится.

14. Пусть ω — единственная особая точка функции f на $\langle a;\omega\rangle$ и последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условиям:

1) $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots < \omega$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \omega$;

3) на отрезке $[x_{n-1}; x_n]$, $n \in \mathbb{N}$, функция f не меняет знака;

4) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$ сходится.

Доказать, что интеграл $\int\limits_{a}^{\omega} f(x)\,dx$ сходится.

15. Пусть $f \in \widetilde{R}\langle a;b\rangle$. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует функция g_ε, удовлетворяющая условиям:

1) g_ε равна нулю в некоторой окрестности каждой особой точки функции f на $\langle a;b\rangle$;

2) $g_\varepsilon \in C\langle a;b\rangle$;

3) $\left|\int\limits_{a}^{x} (f(t) - g_\varepsilon(t))\,dt\right| < \varepsilon$ для любого $x \in \langle a;b\rangle$.

16. Пусть $f \in \widetilde{R}\langle a;b\rangle$ и $|f| \in \widetilde{R}\langle a;b\rangle$. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует функция g_ε, удовлетворяющая условиям:

1) g_ε равна нулю в некоторой окрестности каждой особой точки функции f на $\langle a;b\rangle$;

2) $g_\varepsilon \in C\langle a;b\rangle$;

3) $\int\limits_{a}^{b} |f(x) - g_\varepsilon(x)|\,dx < \varepsilon$.

17. Пусть $f \in \widetilde{R}\langle a;b\rangle$ и $|f| \in \widetilde{R}\langle a;b\rangle$. Доказать, что для любого промежутка $\langle \alpha;\beta\rangle$, $a < \alpha < \beta < b$,

$$\lim_{h\to 0} \int\limits_{\alpha}^{\beta} |f(x+h) - f(x)|\,dx = 0$$

(интегральная непрерывность функции f).

18. Пусть $f \in \widetilde{R}\langle a;+\infty\rangle$ и $|f(x)| \in \widetilde{R}\langle a;+\infty\rangle$, $a > -\infty$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\sin nx\,dx = 0$.

19. Пусть 0 — единственная особая точка положительной функции f на $\langle 0;1\rangle$, $f \in \widetilde{R}\langle 0;1\rangle$ и $\Phi(x) = \int\limits_{0}^{x} f(t)\,dt$. Доказать,

что $\dfrac{f}{\sqrt{\Phi}} \in \widetilde{R}\langle 0;1\rangle$.

20. Пусть 0 — единственная особая точка положительной функции f на $\langle 0;1\rangle$, $\Phi(x) = \int\limits_x^1 f(t)\,dt$ и интеграл $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ расходится. Доказать, что расходится интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{f(x)}{\Phi(x)}\,dx$.

21. Привести пример двух функций f и g, для каждой из которых 0 — единственная особая точка на $\langle 0;1\rangle$, таких, что $f(x) \geqslant g(x)$, $x \in (0;1]$, интеграл $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ сходится, а интеграл $\int\limits_0^1 g(x)\,dx$ расходится.

22. Привести пример двух функций f и g, для каждой из которых 0 — единственная особая точка на $\langle 0;1\rangle$, таких, что $|f(x)| \geqslant |g(x)|$, $x \in (0;1]$, интеграл $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ сходится, а интеграл $\int\limits_0^1 g(x)\,dx$ расходится.

23. Доказать, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x}\,dx$ расходится, хотя $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} \sim \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ при $x \to +\infty$, и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ сходится.

24. Пусть $f \in \widetilde{R}\langle 0;+\infty\rangle$ и $\Phi(x) \doteq \int\limits_0^x f(t)\,dt$. Доказать, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\Phi(2x) - \Phi(x)}{x}\,dx$ сходится.

25. Пусть $a > 1$ и $f \in \widetilde{R}(a;+\infty)$, $g \in \widetilde{R}(a;+\infty)$, $f^2 \in \widetilde{R}(a;+\infty)$, $g^2 \in \widetilde{R}(a;+\infty)$. Доказать, что сходятся интегралы

1) $\int\limits_a^{+\infty} |fg|\,dx$; 2) $\int\limits_a^{+\infty} (f+g)^2\,dx$; 3) $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{|f(x)|}{x}\,dx$.

26. Пусть неотрицательная функция $f \in \widetilde{R}\langle 0;1\rangle$. Доказать, что $\int\limits_x^1 \frac{f(t)}{t}\,dt = o\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \to 0+$.

27. Пусть неотрицательная функция $f \in C[\varepsilon;1]$ для любого ε, $0 < \varepsilon < 1$, и $g(x) = \int\limits_x^1 \frac{f(t)}{t}\,dt$. Доказать, что, если $f \in \widetilde{R}\langle 0;1\rangle$, то $g \in \widetilde{R}\langle 0;1\rangle$ и $\int\limits_0^1 g(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

28. Пусть неотрицательная функция $f \in C[\varepsilon;1]$ для любого ε, $0 < \varepsilon < 1$, $f \in \widetilde{R}\langle 0;1\rangle$, $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$ и интеграл $\int\limits_0^1 \frac{F(x)}{x}\,dx$ сходится. Доказать, что интеграл $\int\limits_0^1 f(x)|\ln x|\,dx$ сходится и равен $\int\limits_0^1 \frac{F(x)}{x}\,dx$.

Обозначим через $\widetilde{R}^q\langle a;b\rangle$ класс функций f, для которых интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится абсолютно и $|f|^q \in \widetilde{R}\langle a;b\rangle$.

29. Пусть $q > 1$ и функции $f \in \widetilde{R}^q\langle a;b\rangle$ и $g \in \widetilde{R}^{\frac{q}{q-1}}\langle a;b\rangle$ неотрицательны на $\langle a;b\rangle$. Доказать, что $fg \in \widetilde{R}\langle a;b\rangle$ и справедливо неравенство Гельдера:

$$\int\limits_a^b |f(x)\cdot g(x)|\,dx \leqslant \left\{\int\limits_a^b |f(x)|^q\,dx\right\}^{\frac{1}{q}} \cdot \left\{\int\limits_a^b |g(x)|^{\frac{q}{q-1}}\,dx\right\}^{\frac{q-1}{q}}.$$

30. Пусть неотрицательная на $\langle 0;1\rangle$ функция f принадлежит классу $\widetilde{R}^q\langle 0;1\rangle$, $q > 1$. Доказать, что

$$\int\limits_0^x f(t)\,dt = o(x^{\frac{q-1}{q}}), \quad x \to 0+.$$

31. Пусть неотрицательная на $\langle a;+\infty\rangle$ функция f принадлежит классу $\widetilde{R}^q\langle a;+\infty\rangle$, $q>1$. Доказать, что

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt = o\left(x^{\frac{q-1}{q}}\right), \quad x\to+\infty.$$

32. Пусть 0 — единственная особая точка функции f на $\langle 0;1\rangle$ и интеграл $\int\limits_0^1 xf^2(x)\,dx$ сходится. Доказать, что

$$\int\limits_x^1 f(t)\,dt = o\left(\sqrt{|\ln x|}\right), \quad x\to 0+.$$

33. Пусть $f\in C[0;+\infty)$, $F(x)=\int\limits_0^x f(t)\,dt$ и интегралы $\int\limits_0^{+\infty} f^2(x)\,dx$ и $\int\limits_0^{+\infty} x^2F^2(x)\,dx$ сходятся. Доказать, что

$$\int\limits_0^{+\infty} F^2(x)\,dx \leqslant 2\left\{\int\limits_0^{+\infty} x^2F^2(x)\,dx\right\}^{1/2}\cdot\left\{\int\limits_0^{+\infty} f^2(x)\,dx\right\}^{1/2}$$

34. Пусть $f\in C(-\infty;+\infty)$ и интеграл $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. Доказать, что

$$I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)\,dx.$$

35. Пусть $f\in C(0;+\infty)$ и интегралы $I_1=\int\limits_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{dx}{x}$ и $I_2=\int\limits_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x\,dx}{x}$ сходятся. Доказать, что $I_2=I_1\cdot\ln a$.

36. Пусть $f \in C[0;+\infty)$ и интеграл $I = \int\limits_0^{+\infty} f(x^2)\,dx$ сходится. Доказать, что $I = a\int\limits_0^{+\infty} f\left[\left(ax - \frac{b}{x}\right)^2\right] dx$, $a > 0$, $b > 0$.

37. Пусть $f \in C(0;+\infty)$ и интеграл $I = \int\limits_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx$, $a>0$, $b>0$, сходится. Доказать, что $I = \frac{1}{a}\int\limits_0^{+\infty} f(\sqrt{x^2+4ab})\,dx$.

38. Пусть $f \in C(0;+\infty)$ и $g(x) = f(x^p + x^{-p})\ln x$, $p > 0$. Доказать, что если интегралы $\int\limits_0^{+\infty} \frac{g(x)}{x}\,dx$ и $\int\limits_0^{+\infty} \frac{g(x)}{1+x^2}\,dx$ сходятся, то они равны нулю.

39. Пусть для функции $f \in C[0;+\infty)$ выполняется тождество $f(\pi-x) \equiv f(x) \equiv f(\pi+x)$ и интеграл $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(x)\sin x}{x}\,dx$ сходится. Пользуясь равенством

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{x+\pi n} + \frac{1}{x-\pi n}\right], \quad x \neq 0,$$

доказать, что $I = \int\limits_0^{\pi/2} f(x)\,dx$ (формула Лобачевского).

40. Пусть $u_n \in R[a;b]$ при любом $n \in \mathbb{N}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a;b]$ к $S(x)$. Доказать, что если интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится абсолютно, то

$$\int_a^b g(x)S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b g(x)u_n(x)\,dx.$$

41. Пусть последовательность $\{\varphi_n\}$ обладает следующими свойствами:

1) $\varphi_n \in R[-A; A]$ при любом $A > 0$;

2) $\varphi_n \rightrightarrows 0$ на $\mathbb{R} \setminus (-\delta; -\delta)$ при любом $\delta > 0$;

3) $\int\limits_{-A}^{A} \varphi_n(x)\, dx \to 1,\ n \to \infty$, при любом $A > 0$;

4) при любом $A > 0$ последовательность $\int\limits_{-A}^{A} |\varphi_n(x)|\, dx$ ограничена.

Доказать, что если интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx$ сходится абсолютно и $x_0 \in (a; b)$ — точка непрерывности f, то

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{a}^{b} f(t)\varphi_n(t - x_0)\, dt = f(x_0).$$

42. Пусть

$$f(x) = \frac{1}{n},\ g(x) = \cos\frac{x}{n}, \quad x \in [\pi n(n-1); \pi n(n+1)),\ n \in \mathbb{N}.$$

Показать, что хотя f монотонна на $[0; +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, но интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)g(x)\, dx$ расходится. Какое условие признака Дирихле нарушено?

43. Пусть $f(x) = \dfrac{\operatorname{sign}(\cos x)}{\sqrt{x}}$, $x > 0$. Показать, что хотя $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ и функция $\Phi(x) = \int\limits_{1}^{x} \cos t\, dt$ ограничена на $[1; +\infty)$, но интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\cos x\, dx$ расходится. Какое условие признака Дирихле нарушено?

44. Пусть функция f монотонна на $[a; +\infty)$ и интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\sin x\, dx$ сходится. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

45. Пусть функция f монотонна на $[a;+\infty)$ и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\sin x\,dx$ сходится абсолютно. Доказать, что

$$|f| \in \widetilde{R}\langle a;+\infty\rangle.$$

46. Привести пример непрерывной, неотрицательной, неограниченной на $[0;+\infty)$ функции f, для которой интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\sin x\,dx$ сходится абсолютно, а интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится.

47. Пусть функция f монотонна на $[a;+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$; функция $g \in R[a;a+T]$, $T > 0$, и периодическая с периодом T. Доказать, что если $\int\limits_a^{a+T} g(x)\,dx = 0$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится, а если $\int\limits_a^{a+T} g(x)\,dx \neq 0$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ одновременно сходятся или расходятся.

48. Доказать, что если $f \in C^1[a;+\infty)$, f' монотонно возрастает на $[a;+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, то интегралы

$$\int\limits_a^{+\infty} \cos(f(x))\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^{+\infty} \sin(f(x))\,dx$$

условно сходятся.

Интегралы, зависящие от параметра

49. Задана функция $f(x,y) = \begin{cases} xy, & 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{1-y^2}, \\ 2x, & \sqrt{1-y^2} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$ Показать, что функция $f(x,y)$ разрывна на $[0;1]\times[0;1]$, а функ-

ция $F(y)=\int\limits_0^1 f(x,y)\,dx$ непрерывна на $[0;1]$.

50. Пусть y_0 — предельная точка множества E; $f(x,\bar{y})\in$ $\in R[a;b]$ при любом $\bar{y}\in E$; $f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x)$ на $[a;b]$ при $y\to y_0$, $g\in\widetilde{R}\langle a;b\rangle$ и $|g|\in\widetilde{R}\langle a;b\rangle$. Доказать, что $\varphi g\in\widetilde{R}\langle a;b\rangle$ и

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x,y)g(x)\,dx=\int\limits_a^b \varphi(x)g(x)\,dx.$$

51. Пусть y_0 — предельная точка множества E; $f(x,y)\in$ $\in R[a;b]$ при любом $b>a$ и любом $y\in E$; $f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x)$ при $y\to y_0$ на$[a;b]$ для любого $b>a$; $|f(x,y)|\leqslant F(x)$ при любом $y\in E$ и $F\in\widetilde{R}\langle a;+\infty\rangle$. Доказать, что

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx.$$

52. Пусть $f\in C([a;b]\times[c;d])$, $\varphi\in\widetilde{R}\langle a;b\rangle$, $|\varphi|\in\widetilde{R}\langle a;b\rangle$. Доказать, что функция $F(y)=\int\limits_a^b\varphi(x)f(x,y)\,dx$ непрерывна на $[c;d]$.

53. Пусть $f\in C[0;1]$. Доказать, что

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_0^1\frac{1}{y^2}e^{-\frac{x}{y^2}}f(x)\,dx=f(0),$$

т. е. равенство

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_0^1\frac{1}{y^2}e^{-\frac{x}{y^2}}f(x)\,dx=\int\limits_0^1\lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{y^2}e^{-\frac{x}{y^2}}f(x)\right)\,dx$$

имеет место только тогда, когда $f(0)=0$.

54. Пусть $b>1$. Доказать, что

1) $\lim\limits_{a\to 0+}\int\limits_0^{+\infty}e^{-ax^b}\cos x\,dx=0$; 2) $\lim\limits_{a\to 0+}\int\limits_0^{+\infty}e^{-ax^b}\sin x\,dx=1$

(сравните с задачей 50).

55. Пусть $f \in C([a;b] \times [c;d])$, $g \in \widetilde{R}\langle a;b\rangle$ и $|g| \in \widetilde{R}\langle a;b\rangle$. Доказать, что

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

56. Задана функция

$$f(x) = \begin{cases} y^2 x, & 0 \leqslant x \leqslant y^2, \\ x^2, & y^2 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Показать, что функция f разрывна на $[0;1] \times [0;1]$; функция $F(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx$ определена и непрерывна на $[0;1]$; для любого $y \in [0;1]$ функция $f(x,y)$ интегрируема на $[0;1]$;

$$\int_0^1 F(y)\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy.$$

57. Задана функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y-x}{(x+y)^3}, & y > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Показать, что функция $F(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx$ определена и непрерывна на $[0;1]$; для любого $x \in [0;1]$ функция $f(x,y)$ интегрируема на $[0;1]$, но $\int_0^1 F(y)\,dy \neq \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy$.

58. Доказать, что

$$\left(\frac{\sin x}{x} \right)^{(n)} = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x y^n \cos\left(y + \frac{\pi n}{2} \right) dy.$$

Пользуясь этой формулой, показать, что $\left| \left(\dfrac{\sin x}{x} \right)^{(n)} \right| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

59. Пусть функции $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ непрерывны на $[a;b]\times[c;d]$, $g\in\widetilde{R}\langle a;b\rangle$, $|g|\in\widetilde{R}\langle a;b\rangle$, $F(y)=\int\limits_a^b g(x)f(x,y)\,dx$. Доказать, что $F\in C^1[a;b]$ и $F'(y)=\int\limits_a^b g(x)f'_y(x,y)\,dx$.

60. Задана функция

$$f(x,y)=\begin{cases} x\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x^2}, & x\neq 0,\ -1\leqslant y\leqslant 1;\\ 0, & x=0,\ -1\leqslant y\leqslant 1.\end{cases}$$

Показать, что $f\in C([0;1]\times[-1;1])$; функция $f'_y(x,y)$ определена на $[0;1]\times[-1;1]$; для любого $y_0\in[-1;1]$ функция $f'_y(x,y_0)$ интегрируема на $[0;1]$, а функция $F(y)=\int\limits_0^1 f(x,y)\,dy$ определена и непрерывна на $[-1;1]$, но не дифференцируема в нуле.

61. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a;\omega)\times[c;d]$ и интеграл $\int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на $(c;d)$. Доказать, что этот интеграл равномерно сходится на $[c;d]$.

62. Пусть $f(x,y_0)\in R[a;b]$ для любого $y_0\in M$ и любого b, $a<b<\omega$. Доказать, что из равномерной сходимости на M интеграла $\int\limits_a^\omega |f(x,y)|\,dx$ следует равномерная сходимость на M интеграла $\int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx$.

63. Задана функция

$$f(x,y)=\begin{cases} 0, & y=0,\ x\geqslant 0,\\ 1, & y>0,\ 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{y},\\ 0, & y>0,\ x>\dfrac{1}{y}.\end{cases}$$

Показать, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{f(x,y)\sin x}{x}\,dx$ сходится равномерно на $[0;1]$, а интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(x,y)|\sin x|}{x}\,dx$ сходится неравномерно на $[0;1]$.

64. Как показывает результат задачи 63, из условий

1) интеграл $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на M,

2) функция $g(x,y)$ ограничена на $[a;+\infty)\times M$

вообще говоря не следует, что интеграл $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,dx$ равномерно сходится на M. Какие дополнительные условия достаточно наложить а) на функцию $f(x,y)$, б) на функцию $g(x,y)$, чтобы можно было гарантировать равномерную сходимость интеграла $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,dx$ на M?

65. Пусть $f\in R[0;a]$ для всех $a>0$ и интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^y f(x)\,dx$ сходится при $y=c$ и $y=d$, $c<d$. Доказать, что этот интеграл сходится равномерно на $[c;d]$.

66. Задана функция

$$f(x,y)=\begin{cases} 0, & y=0,\ x\geqslant 2,\\ \dfrac{y\sin\pi xy}{\ln x}, & \dfrac{2}{y}<x<\dfrac{3}{y},\ 0<y\leqslant 1,\\ 0, & 0<y\leqslant 1,\ 2\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{y}\ \text{и}\ \dfrac{3}{y}\leqslant x.\end{cases}$$

Показать, что функция $f(x,y)$ неотрицательна на $[2;+\infty)\times[0;1]$ и интеграл $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на $[0;1]$, хотя для любой функции $\varphi(x)$, $x\geqslant 2$, удовлетворяющей условию $f(x,y)\leqslant\varphi(x)$, $x\in[2;+\infty)$, $y\in[0;1]$, интеграл $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ расходится.

67. Задана функция

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & y = 0,\ x \geqslant 0, \\ \dfrac{\sin x}{x}, & 0 < y \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{y}, \\ 0, & 0 < y \leqslant 1,\ \dfrac{1}{y} < x. \end{cases}$$

Показать, что для любого $y_0 \in [0;1]$ функция $f(x, y_0)$ локально монотонна в правой несобственной точке $+\infty$, $f(x,y) \rightrightarrows 0$ на $[0;1]$ при $x \to +\infty$, а интеграл $\int\limits_0^1 f(x,y)\sin x\,dx$ сходится неравномерно на $[0;1]$.

68. Задана функция

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & y = 0,\ x \geqslant 0, \\ 1, & 0 < y \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{y}, \\ \dfrac{1}{xy}, & 0 < y \leqslant 1,\ \dfrac{1}{y} < x. \end{cases}$$

Показать, что при любом $y_0 \in [0;1]$ функция $f(x,y_0)$ монотонна на $[0;+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,y_0) = 0$, а интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x,y)\sin x\,dx$ сходится неравномерно на $[0;1]$. Какое условие признака Дирихле нарушено?

69. Пусть интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x,y)\sin x\,dx$ сходится равномерно на M и для любого $y_0 \in M$ функция $f(x,y_0)$ монотонна на $[0;+\infty)$ и стремится к нулю при $x \to +\infty$. Доказать, что $f(x,y)$ при $x \to +\infty$ сходится к нулю равномерно на M.

70. Пусть для любого $y_0 \in M$ единственной особой точкой функции $f(x,y_0)$ на $\langle a;\omega\rangle$ является точка ω. Доказать, что условие “для любой последовательности $\{x_n\}$, $a = x_0 < < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots < \omega$, $\lim_{n\to\infty} x_n = \omega$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(t,y)\,dt$ сходится равномерно на M” необходимо

и достаточно для равномерной сходимости интеграла $\int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx$ на M.

71. Показать, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}\cos x\,dx$ сходится неравномерно на $(0;1)$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{2\pi(n-1)^2}^{2\pi n^2} e^{-xy}\cos x\,dx$ сходится равномерно на $(0;1)$.

72. Пусть для любого $y_0\in M$ единственной особой точкой функции $f(x,y_0)$ на $\langle a;\omega\rangle$ является точка ω. Доказать, что если $f(x,y)$ неотрицательна на $\langle a;\omega\rangle\times M$ и хотя бы для одной последовательности $\{x_n\}$: $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<$ $<x_n<x_{n+1}<\ldots<\omega$, $\lim_{n\to\infty}x_n=\omega$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(t,y)\,dt$ сходится равномерно на M, то интеграл $\int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на M.

73. Пусть для любого $y_0\in M$ единственной особой точкой функции $f(x,y_0)$ на $\langle a;\omega\rangle$ является точка ω и последовательность $\{x_n\}$, $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n<x_{n+1}<\ldots<\omega$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\omega$, такова, что функция $f(x,y)$ не меняет знака на $[x_{n-1},x_n]\times M$, $n\in\mathbb{N}$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(t,y)\,dt$ сходится равномерно на M. Доказать, что интеграл $\int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на M.

74. Обосновать возможность перестановки двух несобственных интегралов в интеграле

$$\int\limits_0^{+\infty}\left(\sin ax\int\limits_0^{+\infty} y^{m-1}e^{-xy}\,dy\right)dx,\quad 0<m<2,\ a>0.$$

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, УКАЗАНИЯ

1. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) = \infty$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n |\varphi(n)| < +\infty$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) = 0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n \varphi(n)$ расходится.

3. Указание. Рассмотреть $\int\limits_{x/2}^{x} f(t)\,dt$, $0 < x < 1$.

4. Например,

$$f(x) = \begin{cases} 2^m \sin\left(\frac{\pi}{2}(2^{2m}x - 2^m + 1)\right), & x \in [2^{-m} - 4^{-m}; 2^{-m} + 4^{-m}], \\ & m \in \mathbb{N},\ m > 1, \\ 0, & x \in \bigcup\limits_{m=2}^{+\infty} [2^{-m} - 4^{-m}; 2^{-m} + 4^{-m}]. \end{cases}$$

5. Указание. Рассмотреть $\int\limits_{x}^{2x} t^q f(t)\,dt$, если f не возрастает и $\int\limits_{x/2}^{x} t^q f(t)\,dt$, если f не убывает.

6. Решение. Если функция f не убывает на $(0; 1)$ и интеграл $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ сходится, то $\int\limits_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx = \sum\limits_{i=2}^{n} \int\limits_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx \geqslant$ $\geqslant \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n-1} \int\limits_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx = \int\limits_0^{1-\frac{1}{n}} f(x)\,dx$, откуда следует требуемое утверждение. Для невозрастающей функции доказательство аналогично.

7. Решение. Если функция f не убывает на $(0; 1)$ и ее особой точкой является 1, то сходимость интеграла $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ и ограниченность последовательности $\int\limits_0^{1-\frac{1}{n}} f(x)\,dx$ эквивалент-

ны. Таким образом, из неравенства

$$\int\limits_{0}^{1-\frac{1}{n}} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

следует требуемое утверждение. Все остальные варианты доказываются аналогично.

8. Указание. Использовать равенство $f(x) = -f(1-x)$.

9. Решение. Если функция f не убывает на $(0;1)$, то

$$\int\limits_{\frac{1}{2n}}^{1-\frac{1}{2n}} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_{\frac{2i-1}{2n}}^{\frac{2i+1}{2n}} f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{2i+1}{2n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(\frac{2i-1}{2n}\right) - \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{2n}\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_{\frac{2i-1}{2n}}^{\frac{2i+1}{2n}} f(x)\,dx + \frac{1}{n}f\left(\frac{2n-1}{2n}\right) - \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{2n}}^{1-\frac{1}{2n}} f(x)\,dx + \frac{1}{n}f\left(1-\frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{2n}\right).$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{2n}\right) + \int\limits_{\frac{1}{2n}}^{1-\frac{1}{2n}} f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\frac{1}{2n}}^{1-\frac{1}{2n}} f(x)\,dx + \frac{1}{n}f\left(1-\frac{1}{2n}\right).$$

Используя результат задачи 3, имеем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{2n}\right) = 0$.

Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}f\left(1-\frac{1}{2n}\right) = 0$. Из полученных соотношений следует требуемое утверждение. Для невозрастающей функции доказательство аналогично.

10. Решение. Из результата задачи 5 следует, что $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что функция f положительная и невозрастающая на $[a; +\infty)$. Тогда для $0 < h \leqslant 1$ имеют место неравенства

$$\int\limits_{a+h}^{a+(m+1)h} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{m} \int\limits_{a+nh}^{a+(n+1)h} f(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant h\sum_{n=1}^{m} f(a+nh) \leqslant \sum_{n=1}^{m} \int\limits_{a+(n-1)h}^{a+nh} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{a+mh} f(x)\,dx.$$

В силу неотрицательности f отсюда следует эквивалентность сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a+nh)$ и интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$, а также неравенство

$$\int\limits_{a+h}^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant h\sum_{n=1}^{\infty} f(a+nh) \leqslant \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

из которого следует требуемое утверждение.

11. Решение. Необходимость. Пусть интеграл $\int\limits_{a}^{\omega} f(x)\,dx$ сходится и $\{x_n\}$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая условию. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу критерия Коши сходимости интеграла, существует число $B > a$, такое, что для любых b_1 и b_2, $B < b_1 < b_2 < \omega$, имеем $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$. Так как $x_n \to \omega$, $n \to \infty$, то существует такое число $N \in \mathbb{N}$, что для любых $p \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ имеем $B < x_{m-1} < x_{m+p} < \omega$. Отсюда получаем, что

$$\left|\sum_{n=m}^{m+p} \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)\,dt\right| = \left|\int\limits_{x_{m-1}}^{x_{m+p}} f(t)\,dt\right| < \varepsilon$$

и, следовательно, в силу критерия Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)\,dt$ сходится.

Достаточность. Предположим, что интеграл $\int\limits_a^{\omega} f(t)\,dt$ расходится. В силу критерия Коши сходимости интеграла существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $B > a$ найдется пара чисел b_1 и b_2, $B < b_1 < b_2 < \omega$, для которых $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(t)\,dt\right| \geqslant \varepsilon_0$. Пусть c_n — некоторая возрастающая последовательность, $c_0 = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \omega$. Пусть $B_1 = c_1$, найдем числа $b_1^{(1)}$, $b_2^{(1)}$, $B_1 < b_1^{(1)} < b_2^{(1)}$, для которых $\left|\int\limits_{b_1^{(1)}}^{b_2^{(1)}} f(t)\,dt\right| > \varepsilon_0$, и положим $x_1 = b_1^{(1)}$, $x_2 = b_2^{(1)}$, $x_0 = a$. Для $B_2 = \max(x_2, c_2)$ найдем соответствующие $b_2^{(1)}$, $b_2^{(2)}$ и положим $x_3 = b_2^{(1)}$, $x_4 = b_2^{(2)}$. Из построения видно, что $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \omega$ и $c_1 < x_1 < x_2 < \omega$, $c_2 < x_3 < x_4 < \omega$. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющую условиям

1) $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots < \omega$,

2) $c_n < x_{2n-1} < x_{2n} < \omega$, $n \in \mathbb{N}$,

3) $\left|\int\limits_{x_{2n-1}}^{x_{2n}} f(t)\,dt\right| > \varepsilon_0$.

Условие 2) показывает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \omega$, а условие 3) — что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)\,dt$ расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости.

Итак, предположив, что интеграл $\int\limits_a^{\omega} f(x)\,dx$ расходится, мы построили такую последовательность $\{x_n\}$: $a = x_0 < x_1 <$

$< x_2 < \ldots < x_n < \omega$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \omega$, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)\,dt$ расходится, что противоречит требованию сходимости такого ряда для любой последовательности $\{x_n\}$: $a < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \ldots < \omega$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \omega$. Полученное противоречие показывает, что при выполнении этого требования интеграл $\int\limits_a^{\omega} f(x)\,dx$ сходится.

13. Указание. Если $x_{n-1} < b_1 < b_2 < x_m$, то

$$0 \leqslant \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx \leqslant \sum_{i=n}^{m} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt.$$

14. Указание. Если $x_{n-1} < b_1 < b_2 < x_m$, то величина $\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx$ заключена между наибольшей и наименьшей из величин $\sum\limits_{i=n+1}^{m} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt$, $\sum\limits_{i=n+1}^{m-1} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt$, $\sum\limits_{i=n}^{m-1} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt$, $\sum\limits_{i=n}^{m} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt$.

15. Решение. Не ограничивая общности, можно считать, что единственной особой точкой функции f на $\langle a; b\rangle$ является точка a. Зададим число $\varepsilon > 0$. Найдем такое $h > a$, что $\left|\int\limits_a^{\eta} f(t)\,dt\right| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ для всех η, $a < \eta \leqslant h$. Так как $f \in R[h; b]$, то найдется такое разбиение

$$T : \{h = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\},$$

для которого

$$0 \leqslant \underline{S}(f, T) - \int\limits_h^b f(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{4},$$

где $\underline{S}(f,T) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$, $M_i = \sup f(x)$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$, — верхняя сумма Дарбу. Положим

$$\varphi_\varepsilon = \begin{cases} 0, & x \in (a; h], \\ M_i, & x \in (x_{i-1}; x_i),\ 1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

Так как $\varphi_\varepsilon(x) - f(x) \geqslant 0$ и $x \in (h; b)$

$$0 \leqslant \int\limits_h^x [\varphi_\varepsilon(t) - f(t)]\,dt \leqslant \underline{S}(f,T) - \int\limits_h^b f(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{4},\ x \in [h; b].$$

Пусть λ — диаметр разбиения T и $M = \sup|f(x)|$, $x \in [h; b]$. Если $\delta = \min\left\{\frac{\lambda}{4}, \frac{\varepsilon}{8Mn}\right\}$, то отрезки $[x_i - \delta; x_i + \delta]$, $[x_j - \delta; x_j + \delta]$, $0 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant n$, $i \neq j$, не пересекаются. Пусть

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varphi_\varepsilon(x), & x \overline{\in} \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} [x_i - \delta; x_i + \delta] \cup [h; h + \delta], \\ \text{линейна на } [h; h+\delta] \text{ и } [x_i - \delta; x_i + \delta], & 1 \leqslant i \leqslant n-1. \end{cases}$$

Функция g_ε отлична от функции φ_ε только на n отрезках $[h; h+\delta]$, $[x_i - \delta; x_i + \delta]$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, причем

$$|g_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \leqslant 2M, \quad x \in [h; b],$$

следовательно, $\int\limits_h^x |g_\varepsilon(t) - \varphi_\varepsilon(t)|\,dt \leqslant n \cdot 2\delta \cdot 2M \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $x \in [h; b]$.

Покажем, что функция g_ε удовлетворяет всем требованиям задачи. Условия а) и б) выполнены в силу определения g_ε. Если $x \in (a; h]$, то $\left|\int\limits_a^x (f(t) - g(t))\,dt\right| = \left|\int\limits_a^x f(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{4}$. Если $x \in [h; b]$, то

$$\int\limits_a^x (f(t) - g_\varepsilon(t))\,dt = \int\limits_a^h f(t)\,dt + \int\limits_h^x (f(t) - g_\varepsilon(t))\,dt =$$

$$= \int\limits_a^h f(t)\,dt + \int\limits_h^x (f(t) - \varphi_\varepsilon(t))\,dt + \int\limits_h^x (\varphi_\varepsilon(t) - g_\varepsilon(t))\,dx.$$

Применяя полученные выше оценки, получаем, что

$$\left|\int\limits_a^x (f(t) - g_\varepsilon(t))\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, условие в) выполнено.

16. Указание. Если a — единственная особая точка f на $\langle a; b\rangle$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $h > a$, что $\int\limits_a^\eta |f(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{4}$ для всех η, $a < \eta \leqslant h$. Далее доказательство дословно повторяет решение задачи 15.

17. Решение. Не ограничивая общности, можно считать, что единственной особой точкой функции f на $\langle a; b\rangle$ является точка a. Возьмем число $\varepsilon > 0$. Используя результат задачи 16, найдем непрерывную на $\langle a; b\rangle$ функцию g, равную нулю в некоторой окрестности точки a, для которой $\int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{4}$. Если $c = \inf\{x,\ x \in \langle a; b\rangle,\ g(x) \neq 0\}$, то $-\infty < c$ и $a < c$. Так как $a < \alpha < \beta < b$, то найдется такое $\eta > 0$, что $a < c - \eta$ и $a < \alpha - \eta < \beta + \eta < b$. Так как функция g непрерывна на $[c - \eta; b]$, то найдется такое $\lambda > 0$, что $|g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b - c + \eta)}$ для любой пары x_1, x_2, $x_1, x_2 \in [c - \eta, b]$, $|x_1 - x_2| < \lambda$. Положим $\delta = \min\left[\frac{\eta}{2}; \lambda\right]$, тогда для любого h, $|h| < \delta$, имеем

$$0 \leqslant \int\limits_\alpha^\beta |f(x+h) - f(x)|\,dx \leqslant \int\limits_\alpha^\beta |f(x) - g(x)|\,dx +$$

$$+ \int\limits_\alpha^\beta |f(x+h) - g(x+h)|\,dx + \int\limits_\alpha^\beta |g(x+h) - g(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,dx + \int\limits_{c-\eta}^{b-\eta} |g(x+h)-g(x)|\,dx <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + (b-c)\frac{\varepsilon}{2[b-c+\eta]} < \varepsilon,$$

откуда следует, что $\lim\limits_{h\to 0}\int\limits_\alpha^\beta |f(x+h)-f(x)|\,dx = 0.$

18. Указание. Сделать в интеграле $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\sin nx\,dx$ замену $x = t - \dfrac{\pi}{n}$ и воспользоваться свойством интегральной непрерывности (см. задачу 17).

19. Решение. Возьмем число $\varepsilon > 0$ и найдем такое $h > 0$, что $0 < \int\limits_0^\eta f(x)\,dx = \Phi(\eta) < \dfrac{4\varepsilon^2}{25}$ для любого η, $0 < \eta < h$. Пусть $0 < b_1 < b_2 < h$. Так как $f \in R[b_1; b_2]$, то найдется такое разбиение $T:\ \{b_1 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b_2\}$, что

$$0 \leqslant S(f,T) - \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx < \frac{\Phi(b_1)}{4},$$

где $S(f,T) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$, $M_i = \sup f(x)$, $x \in [x_{i-1}; x_i]$, — верхняя сумма Дарбу функции f. Положим

$$g(x) = \begin{cases} M_1, & x \in [b_1; x_1], \\ M_i, & x \in (x_{i-1}; x_i],\ 2 \leqslant i \leqslant n, \end{cases}$$

тогда $\int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)\,dx = S(f,T)$. Так как $g(x) \geqslant f(x)$, $x \in [b_1; b_2]$, то отсюда получаем, что

$$0 \leqslant \int\limits_{b_1}^{x} (g(t) - f(t))\,dt \leqslant \int\limits_{b_1}^{b_2} g(t)\,dt - \int\limits_{b_1}^{b_2} f(t)\,dt < \frac{\Phi(b_1)}{4}$$

для всех $x \in [b_1; b_2]$. Так как функция g на $[b_1; b_2]$ имеет только конечное число точек разрыва, то функция

$$G(x) = \Phi(b_1) - \int_{b_1}^{x} g(t)\, dt$$

является первообразной для g на $[b_1; b_2]$. В силу монотонности функции Φ отсюда получаем, что

$$0 \leqslant G(x) - \Phi(x) = \int_{b_1}^{x} (g(t) - f(t))\, dx < \frac{\Phi(b_1)}{4} < \frac{\Phi(x)}{4}, \quad x \in [b_1; b_2],$$

и, следовательно, $0 < G(x) < \frac{5}{4}\Phi(x)$, $x \in [b_1; b_2]$. Из всех полученных соотношений имеем, что

$$\int_{b_1}^{b_2} \frac{f(x)}{\sqrt{\Phi(x)}}\, dx < \frac{\sqrt{5}}{2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{f(x)}{\sqrt{G(x)}}\, dx \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{g(x)}{\sqrt{G(x)}}\, dx =$$
$$= \sqrt{5}\left(\sqrt{G(b_2)} - \sqrt{G(b_1)}\right) < \frac{5}{2}\sqrt{\Phi(b_2)} < \varepsilon.$$

Отсюда в силу критерия Коши следует сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{\Phi(x)}}\, dx$.

20. Указание. Рассмотреть поведение интеграла $\int_\alpha^\beta \frac{f(x)\, dx}{\Phi(x)}$ при фиксированном β, $0 < \alpha < \beta < 1$, и $\alpha \to 0+$.

21. Например, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in (0; 1]$, $g(x) = -\frac{1}{x}$, $x \in (0; 1]$.

22. Например, $f(x) = (-1)^n (n+1)$, $x \in \left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$, $g(x) = \frac{1}{x}$.

23. Указание.

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} - \frac{\cos 2x}{2x} + \frac{\sin^3 x}{x(\sqrt{x} - \sin x)}.$$

24. Решение. Так как $\Phi \in C[0;+\infty)$, то для любого отрезка $[a;b] \subset (0;+\infty)$ имеем

$$\int_a^b \frac{\Phi(2x)-\Phi(x)}{x}\,dx = \int_{a/2}^{b/2} \frac{\Phi(t)\,dt}{t} - \int_a^b \frac{\Phi(x)}{x}\,dx =$$

$$= \int_{a/2}^{a} \frac{\Phi(x)}{x}\,dx - \int_{b/2}^{b} \frac{\Phi(x)}{x}\,dx = \ln 2\cdot[\Phi(\xi_1) - \Phi(\xi_2)],$$

где $\xi_1 \in \left(\frac{a}{2}; a\right)$, $\xi_2 \in \left(\frac{b}{2}; b\right)$. Так как $\Phi(x)$ имеет предел при $x \to +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое C, что $|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)| < \dfrac{\varepsilon}{\ln 2}$ для всех x_1, x_2, $x_1 > C$, $x_2 > C$; следовательно, если $a > 2C$ и $b > 2C$, то $\left|\int_a^b \dfrac{\Phi(2x)-\Phi(x)}{x}\,dx\right| < \varepsilon$. В силу критерия Коши отсюда следует сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \dfrac{\Phi(2x)-\Phi(x)}{x}\,dx$. Сходимость интеграла $\int_0^1 \dfrac{\Phi(2x)-\Phi(x)}{x}\,dx$ доказывается точно так же.

25. 1) Следует из неравенства $|fg| \leqslant \dfrac{f^2+g^2}{2}$;

2) Следует из неравенства $(f+g)^2 \leqslant 2(f^2+g^2)$;

3) Следует из 1).

26. Решение. Возьмем число $\varepsilon > 0$ и найдем такое h, $0 < h < 1$, что $0 \leqslant \int_0^\eta f(x)\,dx < \dfrac{\varepsilon}{2}$ для всех η, $0 < \eta \leqslant h$. Если

$0 < x < \min\left(h, \dfrac{\varepsilon}{2\int_h^1 f(t)\,dt}\right)$, то

$$0 \leqslant x\int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,dt = x\int_x^h \frac{f(t)}{t}\,dt + x\int_h^1 \frac{f(t)}{t}\,dt < \int_x^h f(t)\,dt + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0+} x\int\limits_x^1 \frac{f(t)}{t}\,dt = 0.$

27. Указание. Применить к интегралу $\int\limits_\varepsilon^1 g(x)\,dx$, $0<\varepsilon<1$, формулу интегрирования по частям и использовать результат задачи 26.

28. Решение. Равенство

$$\int\limits_\alpha^1 \frac{F(x)}{x}\,dx = F(\alpha)|\ln\alpha| + \int\limits_\alpha^1 f(x)|\ln x|\,dx,\ 0<\alpha<1,$$

показывает, что требуемое утверждение эквивалентно выполнению условия $\lim\limits_{\alpha\to 0+} F(\alpha)|\ln\alpha| = 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ в силу сходимости интеграла $\int\limits_0^1 \frac{F(x)}{x}\,dx$ найдется такое h, $0 < h < 1$, что $0 \leqslant \int\limits_\eta^h \frac{F(x)}{x}\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех η, $0 < \eta < h$, а в силу непрерывности F на $[0;1]$ найдется такое δ, $0 < \delta < 1$, что $F(x)|\ln h| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех x, $0<x<\delta$. Если $0<\alpha<\alpha_0 = \min(h,\delta)$, то в силу монотонности F на $[0;1]$ имеем

$$\frac{\varepsilon}{2} > \int\limits_\alpha^h \frac{F(x)}{x}\,dx \geqslant F(\alpha)(\ln h - \ln\alpha) =$$
$$= F(\alpha)|\ln\alpha| - F(\alpha)|\ln h| \geqslant F(\alpha)|\ln\alpha| - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что $0 \leqslant F(\alpha)|\ln\alpha| < \varepsilon$ для всех α, $0<\alpha<\alpha_0$, т. е. $\lim\limits_{\alpha\to 0+} F(\alpha)|\ln\alpha| = 0$.

29. Решение. Покажем сначала, что если $p > 1$ и $q = \frac{p}{p-1}$, то для любых $a > 0$, $b > 0$ имеем неравенство $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. Действительно, функции $v = u^{p-1}$ и $u = v^{q-1}$ взаимно обратны; площадь фигуры, ограниченной осью Ou, кривой $v=u^{p-1}$ и прямой $u = a$, равна $\frac{a^p}{p}$, площадь фигуры, ограниченной

осью Ov, кривой $u = v^{q-1}$ и прямой $v = b$, равна $\dfrac{b^q}{q}$, сумма этих площадей не меньше площади прямоугольника $[0;a]\times[0;b]$ (см. рис. 16).

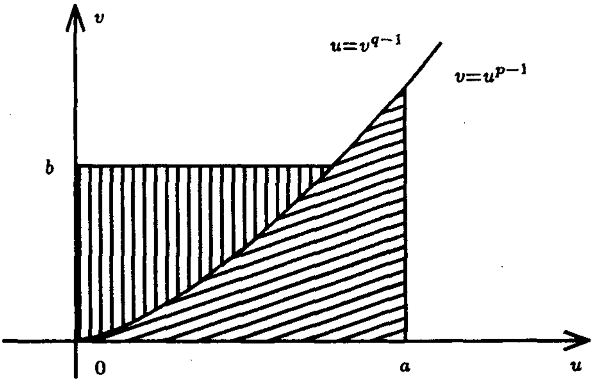


рис. 16 ,

Положим $a = \dfrac{|f(x)|}{\left(\int\limits_a^b |f(x)|^q\,dx\right)^{1/q}}$, $b = \dfrac{|g(x)|}{\left(\int\limits_a^b |g(x)|^{\frac{q}{q-1}}\,dx\right)^{(q-1)/q}}$.

Из неравенства $ab \leqslant \dfrac{a^q}{q} + \dfrac{b^{\frac{q}{q-1}}}{q}(q-1)$ получаем, что

$$|f(x)\cdot g(x)| = ab\left\{\int\limits_a^b |f(x)|^q\,dx\right\}^{1/q}\cdot\left\{\int\limits_a^b |g(x)|^{\frac{q}{q-1}}\,dx\right\}^{\frac{q-1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{q}\left(\frac{|f(x)|^q}{\int\limits_a^b |f(x)|^q\,dx} + (q-1)\frac{|g(x)|^{\frac{q}{q-1}}}{\int\limits_a^b |g(x)|^{\frac{q}{q-1}}\,dx}\right)\times$$

$$\times\left\{\int\limits_a^b |f(x)|^q\,dx\right\}^{\frac{1}{q}}\cdot\left\{\int\limits_a^b |g(x)|^{\frac{q}{q-1}}\,dx\right\}^{\frac{q-1}{q}}.$$

Это неравенство показывает, что $|f(x)g(x)| \in \widetilde{R}\langle a;b\rangle$. Интегрируя по промежутку $\langle a;b\rangle$, получаем:

$$\int\limits_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{q}\left(\frac{\int\limits_a^b |f(x)|^q\,dx}{\int\limits_a^b |f(x)|^q\,dx} + (q-1)\frac{\int\limits_a^b |g(x)|^{\frac{q}{q-1}}\,dx}{\int\limits_a^b |g(x)|^{\frac{q}{q-1}}\,dx}\right)\times$$

$$\times\left\{\int\limits_a^b |f(x)|^q\,dx\right\}^{\frac{1}{q}}\cdot\left\{\int\limits_a^b |g(x)|^{\frac{q}{q-1}}\,dx\right\}^{\frac{q-1}{q}} =$$

$$= \left\{\int\limits_a^b |f(x)|^q\,dx\right\}^{\frac{1}{q}}\cdot\left\{\int\limits_a^b |g(x)|^{\frac{q}{q-1}}\,dx\right\}^{\frac{q-1}{q}}.$$

30. Решение. Возьмем число $\varepsilon > 0$ и найдем такое h, $0 < h < 1$, что $\int\limits_0^\eta |f(x)|^q\,dx < \varepsilon^q$ для всех η, $0 < \eta < h$. Если $0 < x < h$, то применяя неравенство Гельдера (см. задачу 29), получаем, что $\int\limits_0^x 1\cdot f(t)\,dt \leqslant \left\{\int\limits_0^x |f(x)|^q\,dx\right\}^{\frac{1}{q}}\cdot x^{\frac{q-1}{q}} < \varepsilon\cdot x^{\frac{q-1}{q}}$.

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{q}{q-1}}\cdot\int\limits_0^x f(t)\,dt = 0$.

31. Указание. Провести рассуждение, аналогичное решению задачи 30.

32. Решение. Возьмем число $\varepsilon > 0$ и найдем такое h, $0 < h < 1$, что $\int\limits_0^\eta x f^2(x)\,dx < \varepsilon^2$ для всех η, $0 < \eta \leqslant h$. Если $0 < x < h$, то, применяя неравенство Гельдера (см. задачу 29), получаем неравенство

$$\left|\int\limits_x^1 f(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int\limits_h^1 f(t)\,dt\right| + \int\limits_x^h \frac{|f(t)|}{\sqrt{t}}\sqrt{t}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant K + \left\{\int\limits_x^h t f^2(t)\,dt\right\}^{1/2} \cdot \left\{\int\limits_x^h \frac{dt}{t}\right\}^{1/2} \leqslant K + \varepsilon\cdot\sqrt{|\ln x|}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{\sqrt{|\ln x|}} \int\limits_x^1 f(t)\,dt = 0.$

33. Решение. Так как $F(x) \in C[0;+\infty)$, то из неравенства $0 \leqslant F^2(x) \leqslant \dfrac{x^2\cdot F^2(x)}{x^2}$, $x \geqslant 1$, следует сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty} F^2(x)\,dx$. Отсюда следует, что $\varliminf\limits_{x\to+\infty} xF^2(x) = 0$ (сравните с задачей 2). Обозначим через $\{a_k\}$ такую монотонно возрастающую неограниченную последовательность, что $a_k\cdot F^2(a_k) \to 0$, $k \to \infty$. Из равенства

$$\int\limits_0^{a_k} F^2(x)\,dx = xF^2(x)\Big|_0^{a_k} - 2\int\limits_0^{a_k} F(x)f(x)x\,dx$$

получаем, что

$$0 \leqslant \int\limits_0^{a_k} F^2(x)\,dx \leqslant a_k F^2(a_k) + 2\int\limits_0^{a_k} F(x)|f(x)|x\,dx.$$

Применяя неравенство Гельдера (см. задачу 29), получаем отсюда, что

$$\int\limits_0^{a_k} F^2(x)\,dx \leqslant a_k F^2(a_k) + 2\left\{\int\limits_0^{a_k} x^2F^2(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{\int\limits_0^{a_k} f^2(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{2}},$$

и, переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем требуемое неравенство.

34. Указание. Представить $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \dfrac{1}{x}\right) dx$ в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{0} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx + \int\limits_0^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx$$

и в первом слагаемом сделать замену $x = -\dfrac{1}{t}$.

35. Указание. В обоих интегралах сделать замену $x = ae^t$.

36. Решение. Так как функция $f(x^2)$ четная, то

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x^2)\,dx.$$

Сделав в этом интеграле замену $x = at - \frac{b}{t}$, получаем

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty} f\left(at - \frac{b}{t}\right)^2\left(a + \frac{b}{t^2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}a\int\limits_{0}^{+\infty} f\left(\left(at - \frac{b}{t}\right)^2\right)dt + \frac{1}{2}b\int\limits_{0}^{+\infty} f\left(\left(at - \frac{b}{t}\right)^2\right)\frac{dt}{t^2}.$$

Сделав во втором интеграле замену $t = -\frac{b}{au}$, получим

$$I = \frac{1}{2}a\int\limits_{0}^{+\infty} f\left(\left(at - \frac{b}{t}\right)^2\right)dt + \frac{1}{2}a\int\limits_{-\infty}^{0} f\left(\left(au - \frac{b}{u}\right)^2\right)du =$$

$$= \frac{1}{2}a\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(\left(ax - \frac{b}{x}\right)^2\right)dx$$

и в силу четности подынтегральной функции имеем требуемое равенство $I = a\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(\left(ax - \frac{b}{x}\right)^2\right)dx$.

37. Указание. Представить I в виде $\int\limits_{0}^{x_0} f\left(ax + \frac{b}{x}\right)dx + \int\limits_{x_0}^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right)dx$, где x_0 — точка минимума функции $ax + \frac{b}{x}$, и в каждом из слагаемых сделать замену $ax + \frac{b}{x} = \sqrt{t^2 + 4ab}$.

38. Указание. Представить луч $(0; +\infty)$ в виде $(0; 1) \cup [1; +\infty)$ и в интеграле по промежутку $(0; 1)$ сделать замену $t = \frac{1}{x}$.

39. Решение. Представим интеграл I в виде

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{f(x)\sin x}{x}\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{\pi}{2}(2n-1)}^{\pi n} \frac{f(x)\sin x}{x}\,dx + \int_{\pi n}^{\frac{\pi}{2}(2n+1)} \frac{f(x)\sin x}{x}\,dx\right) =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{f(x)\sin x}{x}\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi/2}(-1)^n\left[\frac{1}{x+\pi n}+\frac{1}{x-\pi n}\right]f(x)\sin x\,dx.$$

Так как функция $f(x)\sin x$ ограничена на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{x+\pi n}+\frac{1}{x-\pi n}\right]f(x)\sin x$$

сходится равномерно на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi/2}(-1)^n\left[\frac{1}{x+\pi n}+\frac{1}{x-\pi n}\right]f(x)\sin x\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{x+\pi n}+\frac{1}{x-\pi n}\right)f(x)\sin x\,dx,$$

и в силу равенства

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{x+\pi n}+\frac{1}{x-\pi n}\right],\quad x \neq 0,$$

получаем

$$I=\int_0^{\pi/2}\left(f(x)\sin x\left[\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{x+\pi n}+\frac{1}{x-\pi n}\right]\right]\right)dx=\int_0^{\pi/2}f(x)dx.$$

40. Указание. Показать, что $S(x) \in R[a;b]$ и $g \cdot S \in \widetilde{R}\langle a;b\rangle$, затем оценить $\left|\int\limits_a^b g(x)S(x)\,dx - \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_a^b g(x)u_i(x)\,dx\right|$.

41. Решение. Пусть $A > 0$ и $[-A;A] \subset (a - x_0; b - x_0)$. В силу условия 1) несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(t)\varphi_n(t-x_0)\,dt$ определен для любого $x_0 \in (a;b)$ и равен $\int\limits_{a-x_0}^{b-x_0} f(t+x_0)\varphi_n(t)\,dt$. В силу абсолютной сходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и условия 2) имеем

$$\left|\int\limits_{a-x_0}^{-A} f(t+x_0)\varphi_n(t)\,dt\right| \leqslant \sup_{t\in[a-x_0;-A]} |\varphi_n(t)| \int\limits_a^b |f(t)|\,dx = o(1), \quad n \to \infty,$$

$$\int\limits_A^{b-x_0} f(t+x_0)\varphi_n(t)\,dt = o(1), \ n \to \infty.$$

Следовательно, достаточно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(t+x_0)\varphi_n(t)\,dt = f(x_0).$$

Из условия 3) получаем, что $\int\limits_{-A}^{A} \varphi_n(t)\,dt = 1+\varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$. Следовательно,

$$\int\limits_{-A}^{A} f(t+x_0)\varphi_n(t)\,dt - f(x_0) =$$

$$= \int\limits_{-A}^{A} (f(t+x_0) - f(x_0))\varphi_n(t)\,dt - \varepsilon_n \cdot f(x_0).$$

Возьмем число $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности f в точке x_0 найдется такое δ, $0 < \delta < A$, что $|f(t + x_0) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{4M}$ для всех t, $|t| \leqslant \delta$, где $M = \sup\limits_n \int\limits_{-A}^{A} |\varphi_n(x)|\,dx$ (см. условие 4)).

Отсюда получаем:

$$\left|\int\limits_{-A}^{A} (f(t + x_0) - f(x_0))\varphi_n(t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_{-A}^{-\delta} (f(t + x_0) - f(x_0))\varphi_n(t)\,dt\right| +$$

$$+ \left|\int\limits_{\delta}^{A} (f(t + x_0) - f(x_0))\varphi_n(t)\,dt\right| +$$

$$+ \int\limits_{-\delta}^{\delta} |f(t + x_0) - f(x_0)|\varphi_n(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 4 \sup_{[-A;A]\setminus[-\delta;\delta]} |\varphi_n(t)| \int\limits_a^b |f(x)|\,dx + \frac{\varepsilon}{4}.$$

В силу условия 2) и условия $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$, найдем такое $N \in \mathbb{N}$, что $|\varepsilon_n f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{4}$, $n > N$, и

$$\sup_{[-A;A]\setminus[-\delta;\delta]} |\varphi_n(t)| < \frac{\varepsilon}{8\int\limits_a^b |f(x)|\,dx}, \quad n > N.$$

Для $n > N$ получаем окончательно

$$\left|\int\limits_{-A}^{A} f(t + x_0)\varphi_n(t)\,dt - f(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

чем и завершается доказательство.

42. Не выполнено требование ограниченности функции $G(x) = \int\limits_0^x g(t)\,dt$. Указание. Рассмотреть $\int\limits_{\pi n(n-1)}^{\pi n(n+1)} f(x)g(x)\,dx$ и $\int\limits_{\pi n(n-1)}^{\pi n(n+1)} g(x)\,dx$.

43. Не выполнено требование монотонности f. Указание. Рассмотреть $\int\limits_{\pi n-\frac{\pi}{2}}^{\pi n+\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx$, $n \in \mathbb{N}$, и использовать результат задачи 11.

44. Решение. В силу монотонности f, не ограничивая общности, можно считать, что $f(x) \geqslant 0$, $x \geqslant a$. Если не выполнено условие $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, то найдутся такие числа $c > 0$ и $C > a$, что $f(x) > c$, $x \geqslant C$. Если $2\pi k > C$, то $\int\limits_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} f(x)\sin x\,dx > 2c$. Отсюда в силу критерия Коши следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\sin x\,dx$. Полученное противоречие показывает, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

45. Решение. Из результата задачи 44 следует, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $f(x) > 0$, $x \geqslant a$. Так как в силу признака Дирихле интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\cos 2x\,dx$ сходится, то соотношение $f(x) \geqslant$ $\geqslant |f(x)\sin x| \geqslant f(x)\sin^2 x = \dfrac{f(x)}{2} - \dfrac{f(x)\cos 2x}{2}$ показывает, что интегралы $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)\sin x|\,dx$ одновременно сходятся или расходятся.

46. Например,

$$f(x) = \begin{cases} n, & x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{N}, \\ 0, & x \overline{\in} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(2\pi n - \dfrac{1}{n^2}; 2\pi n + \dfrac{1}{n^2}\right), \\ \text{линейна на отрезках } \left[2\pi n - \dfrac{1}{n^2}; 2\pi n\right], & \\ \qquad \left[2\pi n; 2\pi n + \dfrac{1}{n^2}\right],\ n \in \mathbb{N}. & \end{cases}$$

47. Решение. Если $\int\limits_a^{a+T} g(x)\,dx = 0$, то функция $G(x) = \int\limits_a^x g(t)\,dt$ ограничена на $[a; +\infty)$ и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится в силу признака Дирихле. Если $\int\limits_a^{a+T} g(x)\,dx = A \neq 0$, то равенство

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx = \frac{A}{T}\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx + \int\limits_a^{+\infty} f(x)\left[g(x) - \frac{A}{T}\right] dx$$

показывает, что интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ одновременно сходятся или расходятся.

48. Решение. Из условия следует существование такого $x_0 > a$, что функция f строго возрастает на $[x_0; +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Пусть $x(t)$ — функция, обратная к f на $[f(x_0); +\infty)$, тогда $x(t)$ монотонно возрастает на $[f(x_0); +\infty)$, $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$ и x'_t монотонно стремится к нулю при $t \to +\infty$ на $[f(x_0); +\infty)$. Делая замену $x = x(t)$, получаем, что

$$\int\limits_a^{+\infty} \cos(f(x))\,dx = \int\limits_a^{x_0} \cos(f(x))\,dx + \int\limits_{f(x_0)}^{+\infty} (\cos t)x'_t\,dt$$

и

$$\int\limits_{a}^{+\infty} \sin(f(x))\,dx = \int\limits_{a}^{x_0} \sin(f(x))\,dx + \int\limits_{f(x_0)}^{+\infty} (\sin t)x'_t\,dt,$$

откуда в силу признака Дирихле следует сходимость этих интегралов. Так как

$$\int\limits_{f(x_0)}^{+\infty} x'_t\,dt = \lim_{t\to+\infty} x(t) - x_0 = +\infty,$$

то, применяя результат задачи 45, получаем, что

$$\int\limits_{a}^{+\infty} |\cos(f(x))|\,dx = +\infty \quad \text{и} \quad \int\limits_{a}^{+\infty} |\sin(f(x))|\,dx = +\infty.$$

50. Указание. Показать, что выполнены все условия теоремы о переходе к пределу под знаком несобственного интеграла.

51. Указание. Проверить, что интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно.

52. Следует из результата задачи 50.

53. Указание. Доказательство данного равенства аналогично доказательству в решении задачи 41.

54. Решение. Пункт 1. Интегрируя по частям, получаем, что

$$I_a = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax^b}\cos x\,dx = e^{-ax^b}\sin x\Big|_0^{+\infty} + b\int\limits_{0}^{+\infty} ax^{b-1}e^{-ax^b}\sin x\,dx.$$

Функция $f(x) = ax^{b-1}e^{-ax^b}$ неотрицательна на положительной полуоси, и для любого $a > 0$ существует такое $x_a > 0$, что f монотонно возрастает на $[0; x_a]$ и монотонно убывает на $[x_0; +\infty)$. В силу второй теоремы о среднем

$$\int\limits_{0}^{x_a} ax^{b-1}e^{-ax^b}\sin x\,dx = \int\limits_{0}^{x_a} f(x)\sin x\,dx = f(x_a)\int\limits_{\xi_1}^{x_a} \sin x\,dx,$$

$$\xi_1 \in (0; x_a)$$

и

$$\int\limits_{x_a}^{+\infty} ax^{b-1}e^{-ax^b}\sin x\,dx = \int\limits_{x_a}^{+\infty} f(x)\sin x\,dx = f(x_a)\int\limits_{x_a}^{\xi_2}\sin x\,dx,$$
$$\xi_2 \in (x_a; +\infty).$$

Отсюда получаем, что

$$|I_a| = \left| b\int\limits_0^{x_a} f(x)\sin x\,dx + b\int\limits_{x_a}^{+\infty} f(x)\sin x\,dx \right| =$$
$$= bf(x_a)\left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}\sin x\,dx\right| \leqslant 2bf(x_a) =$$
$$= 2ba^{\frac{1}{b}}(a^{\frac{1}{b}}x_a)^{b-1}e^{-(a^{\frac{1}{b}}x_a)} \leqslant 2ba^{\frac{1}{b}}K,$$

где постоянная $K = \max\limits_{t>0} t^{b-1}e^{-t}$ не зависит от a. Полученное неравенство показывает, что $\lim\limits_{a\to 0+} I_a = 0$. Решение в пункте 2 проводится точно так же.

55. Указание. Показать, что интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)g(x)\,dx$ сходится равномерно.

58. Указание. Применить метод математической индукции.

59. Указание. Показать, что выполнены все условия теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру.

61. Указание. Написать условие критерия Коши равномерной сходимости интеграла на $(c; d)$ и перейти к пределу при $y \to c+$ и $y \to d-$.

63. Решение. Возьмем число $\varepsilon > 0$. Так как интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится, то найдется такое число $B > 1$, что для любой пары чисел b_1, b_2, $B < b_1 < b_2$, имеем $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{\sin x}{x}\,dx\right| < \varepsilon$.

Если $1 \geqslant y \geqslant \dfrac{1}{B}$ или $y = 0$, то для любой такой пары

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)\frac{\sin x}{x}\,dx = 0;$$

если же $0 < y < \dfrac{1}{B}$, то для любой такой пары или $B < b_1 \leqslant \dfrac{1}{y}$, тогда

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)\frac{\sin x}{x}\,dx\right| = \left|\int\limits_{b_1}^{\min\left(b_2,\frac{1}{y}\right)} \frac{\sin x}{x}\,dx\right| < \varepsilon,$$

или $B < \dfrac{1}{y} \leqslant b_1$, тогда $\displaystyle\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)\frac{\sin x}{x}\,dx = 0$. Следовательно, в силу критерия Коши интеграл $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} f(x,y)\frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится равномерно на $[0;1]$. Для доказательства неравномерной сходимости на $[0;1]$ интеграла $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(x,y)|\sin x|}{x}\,dx$ прежде всего заметим, что при любом $y \in [0;1]$ этот интеграл сходится, так как подынтегральная функция отлична от нуля только на конечном интервале. Пусть $y_n = \dfrac{1}{4\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда

$$\int\limits_{2\pi n}^{4\pi n} f(x,y_n)\frac{|\sin x|}{x}\,dx = \int\limits_{2\pi n}^{4\pi n} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geqslant \frac{2n}{4\pi n}\int\limits_{0}^{\pi} |\sin x|\,dx = \frac{1}{\pi},$$

что в силу произвольности $n \in \mathbb{N}$ и показывает неравномерную сходимость рассматриваемого интеграла на $[0;1]$.

64. а) Интеграл $\displaystyle\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x,y)|\,dx$ сходится равномерно на M;

б) Функция $g(x,y_0)$ монотонна на $[a;+\infty)$ для любого $y_0 \in M$ на $[\alpha;\beta]$.

65. Решение. Интегралы

$$\int_0^1 x^y f(x)\,dx = \int_0^1 x^{y-c}(x^c f(x))\,dx$$

и

$$\int_1^{+\infty} x^y f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} x^{y-d}(x^d f(x))\,dx$$

сходятся равномерно в силу признака Абеля.

66. Решение. Неотрицательность $f(x,y)$ следует из ее определения. Если $x \geqslant 5$, то $0 < \frac{5}{2x} \leqslant \frac{1}{2}$ и

$$\sup_{y\in[0;1]} f(x,y) \geqslant f\left(x, \frac{5}{2x}\right) = \frac{5}{2x\ln x}.$$

Следовательно, если $f(x,y) \leqslant \varphi(x)$, $x \in [2;+\infty)$, $y \in [0;1]$, то $\varphi(x) \geqslant \frac{5}{2x\ln x}$ для $x \geqslant 5$ и интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ расходится. Покажем, что интеграл $\int\limits_2^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на $[0;1]$. Возьмем число $\varepsilon > 0$ и найдем такое $B > 2$, что $\ln B \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$. Пусть $B < b_1 < b_2$. Если $1 \geqslant y \geqslant \frac{3}{b_1}$ или $0 \leqslant y \leqslant \frac{2}{b_2}$, то $\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx = 0$. Если же $\frac{2}{b_2} < y < \frac{3}{b_1}$, то

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx \leqslant \int_{\max\left(b_1,\frac{2}{y}\right)}^{\frac{3}{y}} \frac{y\sin\pi xy}{\ln x}\,dx \leqslant \frac{1}{\ln b_1}\int_{\frac{2}{y}}^{\frac{3}{y}} y\sin\pi xy\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\ln B}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{2\pi}^{3\pi}\sin t\,dt < \frac{1}{\ln B} \leqslant \varepsilon.$$

Итак, в силу критерия Коши данный интеграл сходится равномерно на $[0;1]$.

67. Решение. Локальная монотонность функции $f(x, y_0)$, $y_0 \in [0;1]$, в правой несобственной точке $+\infty$ следует из определения; равномерное стремление $f(x,y)$ к нулю при $x \to +\infty$ — из неравенства $|f(x,y)| \leqslant \frac{1}{x}$, $y \in [0;1]$. Пусть $y_n = \frac{1}{4\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда

$$\int\limits_{2\pi n}^{4\pi n} f(x,y)\sin x\,dx = \int\limits_{2\pi n}^{4\pi n} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx \geqslant \frac{2n}{4\pi n}\int\limits_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{4},$$

что в силу произвольности $n \in \mathbb{N}$ и показывает неравномерную сходимость рассматриваемого интеграла на $[0;1]$.

Функция $g_y(x) = f(x,y)$ монотонна на $(b(y), +\infty)$, и $b(y)$ зависит от y (ср. с примером 46 гл. I § 3).

68. Решение. Монотонность на $[0;+\infty)$ и стремление к нулю $f(x,y_0)$ при $x \to +\infty$ для любого $y_0 \in [0;1]$ следует из определения. В силу признака Дирихле интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x,y_0)\sin x\,dx$ сходится при любом $y_0 \in [0;1]$. Положим $B_1 = 2\pi n$, $B_2 = \pi(2n+1)$, $y_0 = \frac{1}{2\pi(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда $B_1 < B_2 < \frac{1}{y_0}$ и, следовательно, $f(x,y_0) = 1$ для $x \in [B_1; B_2]$. Отсюда получаем, что $\int\limits_{B_1}^{B_2} f(x,y_0)\sin x\,dx = \int\limits_{2\pi n}^{\pi(2n+1)} \sin x\,dx = 2$. Так как $y_0 \in [0;1]$, а B_1 может быть сколь угодно большим за счет выбора n, то полученное равенство показывает, что $\int\limits_0^{+\infty} f(x,y)\sin x\,dx$ сходится неравномерно на $[0;1]$.

Функция $f(x,y)$ неравномерно стремится к нулю на $[0;+\infty)$.

69. Решение. Не ограничивая общности, можно предполагать, что $f(x,y) \geqslant 0$ на $[0;+\infty) \times M$ и, следовательно, $f(x,y_0)$ монотонно не возрастает на $[a;+\infty)$ при любом $y_0 \in M$. Если $f(x,y)$ при $x \to +\infty$ сходится к нулю неравномерно на $[0;1]$,

то существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся $y_n \in M$ и $x_n > \pi(2n+1)$, удовлетворяющие условию $f(x_n, y_n) > \varepsilon_0$. Так как $f(x, y_n)$ монотонно не возрастает, то, не ограничивая общности, можно считать, что $f(x, y_n) > \varepsilon_0$ для всех $x \leqslant \pi(2n+1)$. Отсюда получаем, что

$$\int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} f(x, y_n) \sin x \, dx \geqslant \varepsilon_0 \int\limits_0^{\pi} \sin x \, dx = 2\varepsilon_0,$$

откуда следует неравномерная сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty} f(x, y) \sin x \, dx$ на M. Полученное противоречие доказывает, что $f(x, y) \rightrightarrows 0$ на M при $x \to +\infty$.

70. Решение. Необходимость. Пусть интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно на M и $\{x_n\}$ — последовательность, удовлетворяющая данному условию. Возьмем число $\varepsilon > 0$ и найдем такое $B > a$, что для любой пары b_1, b_2, $B < b_1 < b_2$, имеем $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x, y) \, dx\right| < \varepsilon$ для всех $y \in M$. В силу монотонности последовательности $\{x_n\}$ и условия $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \omega$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что $x_{m-1} > B$ для всех $m \in \mathbb{N}$, $m > N$. Тогда для всех $y \in M$ и любых натуральных чисел p и $m > N$ имеем

$$\left|\sum_{n=m}^{m+p} \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(t, y) \, dt\right| = \left|\int\limits_{x_{m-1}}^{x_{m+p}} f(t, y) \, dt\right| < \varepsilon$$

и в силу критерия Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(t, y) \, dt$ сходится равномерно на M.

Достаточность. Предположим, что интеграл $\int\limits_a^{\omega} f(x, y) \, dx$ сходится неравномерно на M. Построим такую последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющую заданным условиям, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(t,y)\,dt$ будет также сходиться неравномерно на M. Возьмем некоторую последовательность $\{c_n\}$: $a = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_n < \ldots < \omega$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \omega$. Так как интеграл $\int\limits_a^{\omega} f(x,y)\,dx$ сходится неравномерно на M, то существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $B > a$ найдутся числа b_1, b_2, $B < b_1 < b_2 < \omega$, и $y_1 \in M$, для которых $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx\right| > \varepsilon_0$. Положим $x_0 = a$ и найдем x_1, x_2, $a < x_1 < x_2 < \omega$, $y_1 \in M$ так, что $\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(t,y)\,dt\right| > \varepsilon_0$. Положим $B_1 = \max(x_2, c_1)$ и найдем x_3, x_4, $B_1 < x_3 < x_4 < \omega$, $y_2 \in M$ так, что $\left|\int\limits_{x_3}^{x_4} f(t,y_2)\,dt\right| > \varepsilon_0$. Продолжая этот процесс, получим последовательность $\{x_n\}$ и последовательность y_n такие, что

1) $y_n \in M$ для любого $n \in \mathbb{N}$,
2) $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \ldots < x_{2m-1} < x_{2m} < \ldots < \omega$,
3) $c_{m-1} < x_{2m-1} < x_{2m}$ для любого $m \in \mathbb{N}$,
4) $\left|\int\limits_{x_{2m-1}}^{x_{2m}} f(t,y_m)\,dt\right| > \varepsilon_0$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

Свойства 2) и 3) показывают, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \omega$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условиям формулировки задачи, а свойства 1) и 3) — что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(t,y)\,dt$ сходится неравномерно на M. Итак, получено противоречие с требованием равномерной сходимости этого ряда при любой последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющей этим условиям. Полученное противоречие заканчивает доказательство.

71. Решение. Сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty} e^{-yx}\cos x\,dx$ на $(0;1)$ следует из признака Дирихле, а неравномерная сходимость на $(0;1)$ — из расходимости этого интеграла при $y=0$ (см. задачу 61). Так как функция $\varphi(t)=te^{-kt}$, $k\neq 0$ на $[0;1]$ неотрицательна, принимает наибольшее значение $\dfrac{1}{ke}$ при $t=\dfrac{1}{k}$ и

$$\int\limits_{2\pi(n-1)^2}^{2\pi n^2} e^{-yx}\cos x\,dx = \frac{e^{-yx}}{1+y^2}(\sin x - y\cos x)\Big|_{2\pi(n-1)^2}^{2\pi n^2} =$$
$$= \frac{y}{1+y^2}e^{-2\pi y(n-1)^2}\left(1-e^{-2\pi y(2n-1)}\right),\ y\neq 0,$$

то

$$0\leqslant \int\limits_{2\pi(n-1)^2}^{2\pi n^2} e^{-yx}\cos x\,dx \leqslant ye^{-2\pi y(n-1)^2}\leqslant \frac{1}{2\pi e(n-1)^2},$$
$$y\in(0;1).$$

В силу признака Вейерштрасса полученное неравенство доказывает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ \int\limits_{2\pi(n-1)^2}^{2\pi n^2} e^{-yx}\cos x\,dx$ сходится равномерно на $(0;1)$.

72. Указание. Если $x_{n-1}<b_1<b_2<x_m$, то

$$0\leqslant \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx \leqslant \sum_{i=n}^{m}\ \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(t,y)\,dt.$$

73. Указание. Если $x_{n-1}<b_1<b_2<x_m$, то величина $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx\right|$ заключена между наибольшей и наименьшей

величинами:

$$\left|\sum_{i=n}^{m}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(t,y)\,dt\right|, \quad \left|\sum_{i=n}^{m-1}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(t,y)\,dt\right|,$$

$$\left|\sum_{i=n+1}^{m}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(t,y)\,dt\right|, \quad \left|\sum_{i=n+1}^{m-1}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(t,y)\,dt\right|.$$

74. Указание. Обоснование производится так же, как обоснование перестановки двух несобственных интегралов при вычислении интеграла Френеля (см. пример 52 гл. II § 3).

Глава III

РЯДЫ ФУРЬЕ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

§ 1. РЯДЫ ФУРЬЕ

Определение. Функция $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ называется функцией с интегрируемым квадратом на $[a;b]$, если $f \in \widetilde{R}\langle a,b\rangle$ и $f^2 \in \widetilde{R}\langle a,b\rangle$. Множество функций с интегрируемым квадратом на $[a;b]$ будем обозначать $\widetilde{R}^2\langle a,b\rangle$.

Отметим, что множества $\widetilde{R}\langle a,b\rangle$ и $\widetilde{R}^2\langle a,b\rangle$ частично пересекаются. Действительно, если неограниченная функция $f \in \widetilde{R}\langle a,b\rangle$, то f^2 не обязательно интегрируема на $[a;b]$, например, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ на $(0;1)$. Для ограниченных на $\langle a,b\rangle$ функций из интегрируемости f на $[a;b]$ следует интегрируемость f^2 на $[a;b]$, но из интегрируемости f^2 на $[a;b]$ не следует интегрируемости f на $[a;b]$, например, $f(x) = \dfrac{1}{2} - D(x)$ на $[0;1]$, где $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ — рационально}, \\ 0, & x \text{ — иррационально} \end{cases}$ — функция Дирихле.

Множество $\widetilde{R}^2\langle a,b\rangle$ представляет собой линейное пространство. Интеграл $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$ определен для любых двух функций из $\widetilde{R}^2\langle a,b\rangle$. Его можно рассматривать как скалярное произведение в $\widetilde{R}^2\langle a,b\rangle$ и ввести соответствующую норму:

$$\|f\| = \left(\int\limits_a^b f^2(x)\,dx\right)^{1/2}.$$

Отметим, что фукционал $\left(\int\limits_a^b f^2(x)\,dx\right)^{1/2}$ не удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым в определении нормы линейного пространства; именно, если $f \in \widetilde{R}^2\langle a,b\rangle$ и множество $M = \{x,\ x \in [a;b],\ f(x) \neq 0\}$ является множеством меры нуль, то $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx = 0$. Таким образом, из условия $\|f\| = 0$ не следует, что f есть нулевой элемент пространства $\widetilde{R}^2\langle a, b\rangle$, т. е. $f(x) \equiv 0$, $x \in [a;b]$, а следует только то, что $f(x) = 0$ для $x \in [a;b] \setminus M$, где M — множество меры нуль. Будем называть две функции $f \in \widetilde{R}^2\langle a, b\rangle$ и $g \in \widetilde{R}^2\langle a, b\rangle$ эквивалентными, если они отличаются только на множестве меры нуль; тогда можно сказать, что функционал $\left(\int\limits_a^b f^2(x)\,dx\right)^{1/2}$ есть норма в пространстве (линейном), элементами которого являются классы эквивалентных функций из $\widetilde{R}^2\langle a, b\rangle$.

Определение. Система функций $\{\psi_i(x)\}$, $\psi_i \in \widetilde{R}^2\langle a, b\rangle$, называется ортогональной на $[a;b]$, если

$$\int\limits_a^b \psi_i(x)\psi_j(x)\,dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ e_i > 0, & i = j. \end{cases}$$

Определение. Система функций $\{\psi_i(x)\}$, $\psi_i \in \widetilde{R}^2\langle a, b\rangle$, называется ортонормированной на $[a;b]$, если эта система ортогональна на $[a;b]$ и

$$\|\psi_i\| = \left(\int\limits_a^b \psi_i^2(x)\,dx\right)^{1/2} = 1$$

для всех i.

Если $\{\psi_i(x)\}$ — ортогональная система на $[a;b]$, то система $\left\{\dfrac{\psi_i(x)}{\|\psi_i\|}\right\}$ ортонормированная на $[a;b]$.

Пример 1. Рассмотрим функции $u(x)$, являющиеся решениями уравнения $u'' + q(x)u = \lambda u$, где функция $q \in C^\infty[a,b]$ и λ — некоторое число.

Если при некотором λ существует отличная от тождественного нуля на $[a;b]$ функция $u_\lambda(x) \in C^2[a,b]$, удовлетворяющая этому уравнению и условиям $u(a) = u(b) = 0$, то такое число λ назовем собственным значением задачи, а функцию u_λ — собственной функцией задачи, соответствующей собственному значению λ. Предположим, что существует последовательность $\{\lambda_i\}$ различных собственных значений задачи. Покажем, что система $u_i(x) = u_{\lambda_i}(x)$ соответствующих собственных функций ортогональна на $[a; b]$.

Действительно, во-первых, из непрерывности и отличия от тождественного нуля функции $u_i(x)$ следует неравенство $\int\limits_a^b u_i^2(x)\,dx > 0$. Во-вторых, интегрируя по частям, получаем равенство

$$\lambda_i \int\limits_a^b u_i(x)u_j(x)\,dx = \int\limits_a^b (u_i'' + qu_i)u_j\,dx =$$
$$= \int\limits_a^b qu_iu_j\,dx + u_i'u_j\Big|_a^b - \int\limits_a^b u_i'u_j'\,dx = \int\limits_a^b qu_iu_j\,dx - u_iu_j'\Big|_a^b +$$
$$+ \int\limits_a^b u_iu_j''\,dx = \int\limits_a^b u_i(u_j'' + qu_j)\,dx = \lambda_j \int\limits_a^b u_iu_j\,dx$$

и так как $\lambda_i \neq \lambda_j$, то отсюда следует, что $\int\limits_a^b u_iu_j\,dx = 0$.

Пример 2. Пусть $0 < \xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \ldots < \xi_i < \ldots$ — последовательность корней уравнения $\operatorname{ctg} x = x$. Покажем, что система $\{\cos(\xi_i x)\}$ ортогональна на $[0; 1]$.

Действительно, во-первых, $\int\limits_0^1 \cos^2(\xi_j x)\,dx > 0$. Во-вторых, если $i \neq j$, то

$$\int\limits_0^1 \cos(\xi_i x)\cos(\xi_j x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\xi_i - \xi_j)}{\xi_i - \xi_j} + \frac{\sin(\xi_i + \xi_j)}{\xi_i + \xi_j}\right) =$$
$$= \frac{1}{(\xi_i^2 - \xi_j^2)\sin\xi_i \cdot \sin\xi_j}(\xi_i \operatorname{ctg}\xi_j - \xi_j \operatorname{ctg}\xi_i) = 0.$$

Определение. Пусть $\{\psi_i\}$ — ортогональная система на $[a;b]$ и $f \in \widetilde{R}^2\langle a,b\rangle$. Числа

$$c_i = c_i(f) = \frac{1}{\|\psi_i\|^2}\int_a^b f(x)\psi_i(x)\,dx$$

называются коэффициентами Фурье функции f по системе $\{\psi_i\}$.

Определение. Пусть $\{\psi_i\}$ — ортогональная система на $[a;b]$, $f \in \widetilde{R}^2\langle a,b\rangle$. Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i\psi_i(x)$, где $c_i = c_i(f)$ — коэффициенты Фурье функции f по системе $\{\psi_i\}$, называется рядом Фурье функции f по системе $\{\psi_i\}$.

В дальнейшем, говоря о коэффициентах или ряде Фурье функции f по системе $\{\psi_i\}$, постоянно будем иметь в виду, что $f \in \widetilde{R}^2\langle a,b\rangle$ и система $\{\psi_i\}$ ортогональна на $[a;b]$, не оговаривая этого специально.

Если функция f представляет собой многочлен по ортогональной на $[a;b]$ системе $\{\psi_i\}$: $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i\psi_i$, то, очевидно,

$$c_i = \frac{1}{\|\psi_i\|^2}\cdot\int_a^b f(x)\psi_i(x)\,dx = \begin{cases} \gamma_i, & 1 \leqslant i \leqslant n, \\ 0, & i > n. \end{cases}$$

Таким образом, любой многочлен по ортогональной системе является своим рядом Фурье по этой системе, все коэффициенты c_i которого равны нулю, если $i > n$, где n — степень рассматриваемого многочлена.

Для коэффициентов Фурье $c_i = c_i(f)$ функции f по системе $\{\psi_i\}$ справедливо неравенство Бесселя:

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2\cdot\|\psi_i\|^2 \leqslant \|f\|^2 = \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Если для системы $\{\psi_i\}$ выполнено условие $\inf\|\psi_i\| > 0$, в частности, если система $\{\psi_i\}$ ортонормированная, то из неравенства Бесселя следует, что последовательность $c_i(f)$ коэффициентов Фурье функции по системе $\{\psi_i\}$ бесконечно малая.

Определение. Последовательность $\{f_n\}$, $f_n \in \widetilde{R}^2\langle a, b\rangle$, называется сходящейся по норме, или сходящейся в среднем, к функции $f \in \widetilde{R}^2\langle a, b\rangle$, если $\|f_n - f\| \to 0$, $n \to \infty$, т. е. $\int\limits_a^b (f_n(x) - f(x))^2\, dx \to 0$, $n \to \infty$.

Пусть $\{f_n\}$ — последовательность, сходящаяся в среднем к f; $\{c_{n,i}\}$, $\{c_i\}$ соответственно — коэффициенты Фурье функций f_n и функции f по системе $\{\psi_i\}$. Из неравенства Бесселя следует, что

$$\lim_{n\to\infty} c_{n,i} = c_i \qquad (1)$$

для любого i.

Определение. Ортогональная система $\{\psi_i\}$ называется полной в $\widetilde{R}^2\langle a, b\rangle$ (или полной на $[a; b]$), если для любой функции $f \in \widetilde{R}^2\langle a, b\rangle$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой полином $T_n(\psi_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\psi_i$ по системе $\{\psi_i\}$, что $\|f - T_n(\psi_i)\| < \hat{\varepsilon}$.

Если система $\{\psi_i\}$ полна в $\widetilde{R}^2\langle a, b\rangle$, то неравенство Бесселя превращается в равенство Парсеваля

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2\|\psi_i\|^2 = \|f\|^2 = \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Если выполнено равенство Парсеваля и все коэффициенты Фурье функции f по системе $\{\psi_i\}$ равны нулю, то получаем, что $\|f\| = 0$; следовательно, функция f эквивалентна тождественному нулю на $[a; b]$. Итак, если ортогональная система $\{\psi_i\}$ полна в $\widetilde{R}^2[a, b]$, то каждому классу эквивалентных функций из $\widetilde{R}^2[a, b]$ взаимно однозначно соответствует последовательность $\{c_i\}$ коэффициентов Фурье этих функций по системе $\{\psi_i\}$.

Коэффициенты Фурье $c_i(f) = c_i$ функции f по системе $\{\psi_i\}$ обладают экстремальным свойством: для любого полинома $T_n(\psi_i)$ степени не выше n по системе $\{\psi_i\}$ имеет место неравенство $\|f - T_n(\psi_i)\| \geqslant \|f - \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\psi_i\|$. Отсюда следует, что если система $\{\psi_i\}$ полна в $\widetilde{R}^2[a,b]$, то $\|f-S_n\|\to 0$, $n\to\infty$, для любой функции $f\in\widetilde{R}^2[a,b]$, где $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\psi_i$ — частичная сумма ряда Фурье функции f по системе $\{\psi_i\}$, т. е. ряд Фурье функции f по системе $\{\psi_i\}$ сходится в среднем к f.

Простейшей полной ортогональной системой является тригонометрическая система

$$\{\varphi_i\}=\{1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,\ldots,\sin nx,\cos nx,\ldots\},\quad n\in\mathbb{N},$$

на отрезке $[-\pi;\pi]$.

В силу периодичности входящих в нее функций эта система является ортогональной и полной также на любом отрезке $[a;a+2\pi]$. В основном, тригонометрическую систему рассматривают на отрезках $[-\pi;\pi]$ и $[0;2\pi]$.

Линейная замена $t=\dfrac{lx}{\pi}$ переводит тригонометрическую систему в полную ортогональную систему $\{\varphi_i^{(l)}\}$:

$$\varphi_i^{(l)}(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi nx}{l}, & i=2n-1,\\ \sin\dfrac{\pi nx}{l}, & i=2n,\end{cases}\quad n\in\mathbb{N}$$

на отрезке $[-l;l]$ или $[0;2l]$. Ряд Фурье функции $f\in\widetilde{R}^2[-l,l]$ по системе $\{\varphi_i^{(l)}\}$ записывается в виде

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right),$$

где

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx,$$
$$n=0,1,2,\ldots,$$

и обозначается $\sigma_l(f)$ ($\sigma_\pi(f)$ будем одозначать просто $\sigma(f)$ так же, как систему $\{\varphi_i^{(\pi)}\}$ — просто $\{\varphi_i\}$). Равенство Парсеваля для системы $\{\varphi_i^{(l)}\}$ имеет вид:

$$\frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f^2(x)\,dx.$$

Как и для любой ортогональной системы, многочлен

$$T(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(\alpha_n \cos\frac{\pi n x}{l} + \beta_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right)$$

по системе $\{\varphi_i^{(l)}\}$ является своим рядом Фурье по этой системе. Из ограниченности тригонометрических функций следует и более общее утверждение.

Если тригонометрический ряд

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n \cos\frac{\pi n x}{l} + \beta_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right)$$

сходится равномерно на $[-l; l]$ к функции $f(x)$, то этот ряд является рядом Фурье функции f по системе $\{\varphi_i^{(l)}\}$.

Будем говорить, что функция $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ представляется тригонометрическим рядом или раскладывается в тригонометрический ряд по системе $\{\varphi_i^{(l)}\}$, если существуют такие две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, что

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right)$$

для $x \in [a; b] \setminus M$, где M — конечное множество.

В силу полноты системы $\{\varphi_i^{(l)}\}$ в $\widetilde{R}^2[-l, l]$ для любой функции $f \in \widetilde{R}^2[-l, l]$ справедливо равенство

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\int\limits_{-l}^{l}\left(f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right)\right)\right)^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left\| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right)\right)\right\| = 0,$$

где a_i и b_i есть коэффициенты Фурье функции f по системе $\{\varphi_i^{(l)}\}$. Это свойство формулируют так: любая функция

$f \in \widetilde{R}^2[-l, l]$ представляется своим рядом Фурье, $\sigma_l(f)$, в смысле сходимости в среднем. Однако, поскольку сходимость в среднем последовательности $\{f_n\}$, $f_n \in \widetilde{R}^2[a, b]$, к функции $f \in \widetilde{R}^2[a, b]$ не влечет поточечной сходимости $f_n(x)$ к $f(x)$ на $[a; b]$, даже если все функции f_n и f непрерывны на $[a; b]$ **(см. задачу 1 гл. III § 5), то вопрос о поточечной сходимости** ряда $\sigma_l(f)$ требует специального исследования.

Определение. Точка x_0 из множества определения функции f называется регулярной точкой этой функции, если существуют пределы:

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0 + 0), \quad \lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0 - 0)$$

и

$$f(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)). \tag{2}$$

Все точки непрерывности функции, очевидно, являются ее регулярными точками.

Определение. Функция f, определенная на отрезке $[a; b]$, называется кусочно гладкой (или кусочно дифференцируемой) на $[a; b]$, если

1. множество M точек разрыва функции f на $[a; b]$ конечно и каждая точка $x_0 \in M$ есть точка разрыва первого рода функции f;

2. функция f дифференцируема во всех точках $[a; b] \setminus M^1$, где M^1 — конечное множество (очевидно, $M^1 \supset M$);

3. для каждой точки $x_0 \in M^1$ существуют пределы

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h}, \quad \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 - 0) - f(x_0 - h)}{h} \tag{3}$$

(если $x_0 \in M^1 \setminus M$, то существование этих пределов есть существование односторонних производных $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$).

Теорема (признак Дини поточечной сходимости тригонометрического ряда Фурье). Пусть $x_0 \in (-l; l)$ — регулярная точка функции $f \in \widetilde{R}^2[-l, l]$. Если для некоторого $\delta > 0$ сходится интеграл

$$\int_0^\delta |f(x_0 + u) + f(x_0 - u) - 2f(x_0)| \frac{du}{u},$$

то ряд Фурье $\sigma_l(f)$ (по системе $\{\varphi_i^{(l)}\}$) функции f сходится в точке x_0 к $f(x_0)$.

Из этой теоремы вытекают следующие утверждения.

1. Принцип локализации Римана. Если функция $f \in \in \widetilde{R}^2[-l,l]$ равна нулю в некоторой окрестности точки $x_0 \in \in (-l;l)$, то $\sigma_l(f)$ сходится в точке x_0 к нулю.

Отсюда следует, что для двух функций $f \in \widetilde{R}^2[-l,l]$ и $g \in \widetilde{R}^2[-l,l]$, совпадающих в некоторой окрестности точки $x_0 \in (-l;l)$, ряды $\sigma_l(f)$ и $\sigma_l(g)$ в точке x_0 одновременно сходятся или расходятся.

Принцип локализации часто выражают в такой форме: сходимость тригонометрического ряда Фурье функции $f \in \in \widetilde{R}^2[-l;l]$ в точке $x_0 \in (-l;l)$ зависит от поведения f только в окрестности этой точки.

2. Если функция f непрерывна на $[-l;l]$ и в каждой точке интервала $(-l;l)$ имеет односторонние производные f'_- и f'_+, то $\sigma_l(f)$ сходится к $f(x)$ для всех $x \in (-l;l)$.

3. Если функция f кусочно гладкая на $(-l;l)$, то для любой регулярной точки $x_0 \in (-l;l)$ этой функции ряд $\sigma_l(f)$ сходится к $f(x_0)$.

В силу периодичности тригонометрических функций ряд Фурье $\sigma_l(f)$, представляющий функцию $f(x)$ на $[-l;l]$, представляет в каждом отрезке $[a;b] \supset [-l;l]$ функцию $f^*(x)$, полученную $2l$-периодическим продолжением функции $f(x)$ с интервала $(-l;l)$ на всю числовую прямую за исключением точек $l(2m+1)$, $m \in \mathbb{Z}$. Значения $f^*(l(2m+1))$, $m \in \mathbb{Z}$, выбираются произвольно. Если определены значения $f(l-0)$ и $f(-l+0)$ (см. (2)), то обычно полагают

$$f^*(l(2m+1)) = \frac{1}{2}(f(l-0)+f(l+0)), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Тогда при выполнении условия признака Дини для функции $f^*(x)$ в точке $x = l$, в частности, если функция $f^*(x)$ удовлетворяет условию (3) в точке $x = l$, ряд $\sigma_l(f^*)$ сходится в точках $x = l(2m+1)$ к $f^*(l(2m+1))$, $m \in \mathbb{Z}$.

Для определенности все формулы и утверждения были записаны для системы $\{\varphi_i^{(l)}\}$ на отрезке $[-l;l]$. Заменяя всюду промежуток $\langle -l;l\rangle$ на промежуток $\langle 0;2l\rangle$, получим соответствующие формулы и утверждения для системы $\{\varphi_i^{(l)}\}$ на отрезке $[0; 2l]$.

Итак, для достаточно широкого класса функций задача представления функции тригонометрическим рядом по системе $\{\varphi_i^{(l)}\}$ решается с помощью ряда Фурье по этой системе. Для сравнения рассмотрим представление функции степенным рядом Тейлора. Для определения коэффициентов ряда Тейлора функции f в окрестности точки x_0 необходима бесконечная дифференцируемость f в этой точке. Если полученный ряд Тейлора сходится в некоторой точке, отличной от x_0, то, как степенной ряд, ряд Тейлора сходится на целом интервале. Однако сумма этого ряда может и не совпадать с порождающей функцией f. Разложение в ряд Тейлора или представление степенным рядом имеет место только для аналитических в некотором интервале функций, а этот класс уже класса функций, бесконечно дифференцируемых на этом интервале. Таким образом, величина коэффициентов ряда Тейлора есть локальное, а сходимость этого ряда к порождающей его функции есть глобальное свойство функции.

В отличие от степенных рядов принцип локализации Римана показывает, что сходимость тригонометрического ряда Фурье к порождающей его функции есть локальное свойство; в то время как величина коэффициентов Фурье — глобальное свойство. Поэтому, с одной стороны, исследовать сходимость тригонометрического ряда Фурье приходится в полном смысле "поточечно", — в каждой точке независимо от других; а, с другой стороны, представление функции тригонометрическим рядом Фурье возможно для гораздо более широкого класса функций, нежели аналитические. В частности, одним из примеров непрерывной нигде не дифференцируемой функции является именно функция, представимая равномерно сходящимся к ней тригонометрическим рядом Фурье.

Если представление функции тригонометрическим рядом является частью решения другой задачи, то система $\{\varphi_i^{(l)}\}$ и соответствующий отрезок определяются условиями этой задачи. Поскольку здесь разложение в тригонометрический ряд рассматривается как самостоятельная задача, то необходимо указание, по какой именно системе $\{\varphi_i^{(l)}\}$ и на каком отрезке требуется получить представление данной функции тригонометрическим рядом. Формулировка "найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции f на отрезке $[-l; l]$ (или $[0; 2l]$)" и будет обозначать, что ряд Фурье образуется по системе $\{\varphi_i^{(l)}\}$ и рассматривается на соответствующем отрезке. Вопрос о сходимости полученного ряда к данной функции при этом не возникает, так как все рассматриваемые функции удовлетворяют условию Дини всюду на $(-l; l)$ $((0; 2l))$ за исключением, может быть, нескольких особых точек.

Пример 3. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ на отрезке $[-1; 1]$.

Формулировка показывает, что ряд Фурье образуется по системе

$$\{\varphi_i^{(1)}\} = \{1, \cos\pi x, \sin\pi x, \cos 2\pi x, \sin 2\pi x, \ldots, \cos n\pi x, \sin n\pi x, \ldots\}.$$

Таким образом,

$$a_0 = \int_{-1}^{1} (x^3 + x^2 - x - 1)\, dx = -\frac{4}{3},$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} (x^3 + x^2 - x - 1) \cos n\pi x\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left((x^2 - 1)\sin\pi n x\Big|_{-1}^{1} - 2\int_{-1}^{1} x \sin n\pi x\, dx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi^2 n^2}\left(x\cos\pi n x\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \cos\pi n x\, dx \right) =$$

$$= \frac{4}{\pi^2 n^2}(-1)^n, \quad n \neq 0.$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} (x^3 + x^2 - x - 1) \sin\pi n x\, dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\left((x^3-x)\cos\pi nx\Big|_{-1}^{1} - \int\limits_{-1}^{1}(3x^2-1)\cos\pi nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2 n^2}\left((3x^2-1)\sin\pi nx\Big|_{-1}^{1} - 6\int\limits_{-1}^{1}x\sin\pi nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{6}{\pi^3 n^3}\left(x\cos\pi nx\Big|_{-1}^{1} - \int\limits_{-1}^{1}\cos\pi nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{12}{\pi^3 n^3}(-1)^n.$$

Так как функция $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ дифференцируема на $(-1; 1)$, то равенство

$$x^3+x^2-x-1 = -\frac{2}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx + \frac{3\cdot(-1)^n}{\pi n^3}\sin nx\right)$$

имеет место для всех $x \in (-1; 1)$. Так как $f(-1) = f(1) = 0$, то 2-периодическое продолжение функции $f(x)$ на всю числовую прямую дает непрерывную на всей числовой прямой функцию $f^*(x)$. Легко проверить, что

$$f^*_+(2k+1) = 0, \quad f^*_-(2k+1) = 4$$

(см. рис. 17). Следовательно, в силу признака Дини равенство

$$f^*(x) = -\frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx + \frac{3\cdot(-1)^n}{n^3\pi}\sin nx\right)$$

имеет место на всей числовой прямой.

Пример 4. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = e^{ax}$, $a \neq 0$, на отрезке $[0; 1]$.

Формулировка показывает, что ряд Фурье образуется по системе $\{\varphi_i^{(\frac{1}{2})}(x)\}$: $\{1, \sin 2\pi x, \cos 2\pi x, \sin 4\pi x, \cos 4\pi x, \ldots, \sin 2n\pi x, \cos 2n\pi x, \ldots\}$. Таким образом,

$$a_0 = 2\int\limits_0^1 e^{ax}\,dx = \frac{2}{a}(e^a - 1);$$

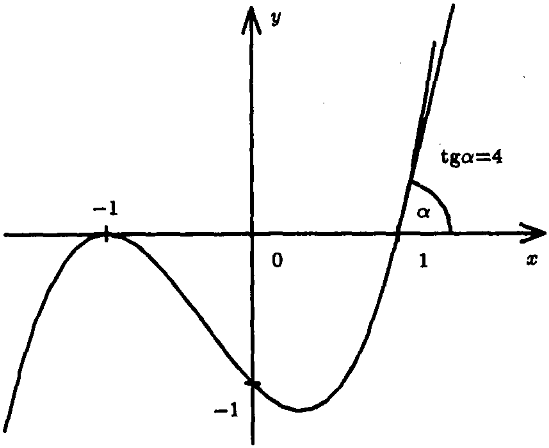


Рис. 17

$$a_n = 2\int\limits_0^1 e^{ax}\cos 2\pi nx\,dx =$$

$$= \left(\frac{2e^{ax}}{a^2+4\pi^2n^2}\cdot(a\cos 2\pi nx + 2\pi n\sin 2\pi nx)\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2a(e^a-1)}{a^2+4\pi^2n^2};$$

$$b_n = 2\int\limits_0^1 e^{ax}\sin 2\pi nx\,dx =$$

$$= \left(\frac{2e^{ax}}{a^2+4\pi^2n^2}\cdot(a\sin 2\pi nx + 2\pi n\cos 2\pi nx)\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{4\pi n}{a^2+4\pi^2n^2}(1-e^a).$$

Так как функция $f(x) = e^{ax}$ дифференцируема на $(0;1)$, то равенство

$$e^{ax} = \frac{e^a-1}{a} +$$

$$+ 2(e^a-1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{a^2+4\pi^2n^2}\cdot\cos 2\pi nx - \frac{4\pi n}{a^2+4\pi^2n^2}\sin 2\pi nx\right)$$

имеет место для всех $x \in (0;1)$. 1-периодическое продолжение функции $f(x) = e^{ax}$ дает функцию $f^*(x)$, разрывную в точках $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$ (см. рис. 18). Так как

$$f(1-0) = \lim_{x\to 1-} e^{ax} = e^a,$$
$$f(0+0) = \lim_{x\to 0+} e^{ax} = 1,$$

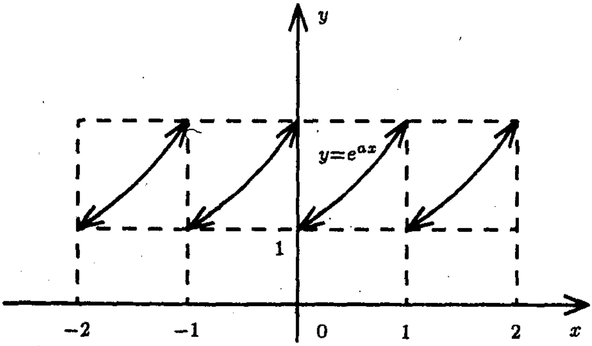


Рис. 18

то положим $f^*(k) = \dfrac{e^a+1}{2}$, $\quad k \in \mathbb{Z}$. Так как

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f^*(k+h) - f^*(k+0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{e^{ah}-1}{h} = a;$$
$$\lim_{h\to 0-} \frac{f^*(k+h) - f^*(k+0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{e^{a(1+h)}-e^a}{h} = ae^a,$$

то в каждой точке $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$, условие признака Дини выполнено. Следовательно,

$$f^*(k) = \frac{e^a+1}{2} = \frac{e^a-1}{a} +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2a(e^a-1)}{a^2+4\pi^2n^2} \cos 2\pi nk + \frac{4\pi n(1-e^a)}{a^2+4\pi^2n^2} \sin 2\pi nk \right) =$$
$$= \frac{e^a-1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^a-1)2a}{a^2+4\pi^2n^2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 5. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = \sin 2x + \cos 5x$ на отрезке

а) $[-\pi; \pi]$; б) $[-\pi/2; \pi/2]$.

Отрезку $[-\pi; \pi]$ соответствует система

$$\{\varphi_i(x)\} = \{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots\}.$$

Поскольку данная функция является многочленом относительно этой системы, то, следовательно, этот многочлен и представляет собой соответствующий ряд Фурье, т. е.

$$\sigma(f) = \sin 2x + \cos 5x.$$

Отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ соответствует система $\{\varphi_i^{(\frac{\pi}{2})}(x)\} = \{1,$ $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\sin 4x$, $\cos 4x, \ldots$, $\sin 2nx$, $\cos 2nx, \ldots\}$. Относительно этой системы данная функция уже не является многочленом, так как функция $\cos 5x$ не входит в систему. Вычислим коэффициенты Фурье $f(x)$ по системе $\{\varphi_i^{(\pi/2)}\}$ стандартным способом:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin 2x + \cos 5x) \cos 2nx \, dx =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} [\cos(5 + 2n)x + \cos(2n - 5)x] \, dx =$$
$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(5 + 2n)x}{5 + 2n} + \frac{\sin(2n - 5)}{2n - 5} \right] \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$
$$= \frac{20}{\pi} (-1)^n \cdot \frac{1}{4n^2 - 25};$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin 2x + \cos 5x) \sin 2nx \, dx = 0, \quad n \neq 1.$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^2 2x + \sin 2x \cdot \cos 5x) \, dx = 1.$$

Функция $f(x) = \sin 2x + \cos 5x$ дифференцируема на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Так как $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, то ее π-периодическое продолжение дает функцию $f^*(x)$, непрерывную на всей числовой прямой. Легко проверить, что

$$(f^*(x))'_+\Big|_{x=\frac{\pi}{2}+\pi k} = 3, \quad (f^*(x))'_-\Big|_{x=-\frac{\pi}{2}+\pi k} = -7$$

(см. рис. 19). Следовательно, применяя признак Дини, получа-

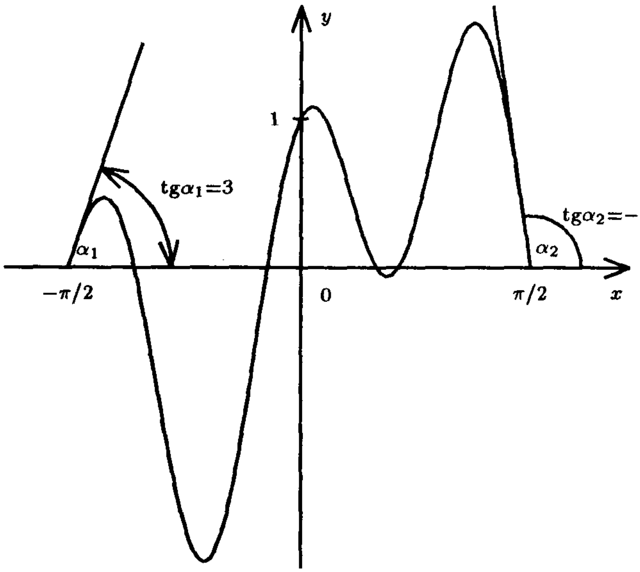


Рис. 19

ем, что равенство

$$f^*(x) = -\frac{2}{5\pi} + \sin 2x + \frac{20}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-25}\cos 2nx$$

справедливо для всех значений x. Обратим внимание на то, что функция $f^*(x)$ равна $\sin 2x + \cos 5x$ на отрезках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi m; \frac{3\pi}{2} + 2\pi m\right]$, $m \in \mathbb{Z}$, а на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi m; \frac{\pi}{2} + 2\pi m\right)$, $m \in \mathbb{Z}$, равна $\sin(2(x-\pi)) + \cos(5(x-\pi)) = \sin 2x - \cos 5x$.

Если рассматривается отрезок $[-l;l]$, симметричный относительно начала координат, то для четной функции $f \in \in \widetilde{R}^2[-l,l]$ имеем

$$b_n = 0, \ n \in \mathbb{N};$$
$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx, \ n = 0,1,2,\ldots, \tag{4}$$

а для нечетной функции $g \in \widetilde{R}^2[-l,l]$

$$a_n = 0, \ n = 0,1,2,\ldots;$$
$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx, \ n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Пример 6. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = x\cos x$ на отрезке $[-\pi/2;\pi/2]$.

Отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ соответствует система $\{\varphi_i^{(\pi/2)}(x)\} = \{1, \sin 2x, \cos 2x, \sin 4x, \cos 4x, \ldots, \sin 2nx, \cos 2nx, \ldots\}$. В силу нечетности функции f получаем, что $a_n = 0$, $n = 0,1,2,\ldots$, и

$$b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\cos x\sin 2nx\,dx =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x(\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x)\,dx =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left\{\left[x\left(\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1} + \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}\right)\right]\Bigg|_0^{\pi/2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2}\cos(2n+1)x\,dx + \frac{1}{2n-1}\int_0^{\pi/2}\cos(2n-1)x\,dx\right\} =$$
$$= \frac{2\cdot(-1)^n}{\pi}\left[\frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{(2n-1)^2}\right] = \frac{16\cdot(-1)^{n-1}n}{\pi(4n^2-1)}.$$

Периодическое с периодом π продолжение функции $f(x) = x\cos x$ с $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ дает функцию f^*, непрерывно дифференцируемую на всей числовой прямой (проверьте!). Следовательно, равенство

$$x\cos x = \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{4n^2-1}\sin 2nx$$

имеет место на всем отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Справедливость этого равенства в точках $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ видна и непосредственно, так как в этих точках обе его части обращаются в нуль. Но хотелось обратить внимание на общий принцип исследования поведения тригонометрического ряда Фурье в концевых точках рассматриваемого отрезка.

Пример 7. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = x\sin 2x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Отрезку $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ соответствует система $\{\varphi_i^{(\pi/4)}(x)\} = \{1, \sin 4x, \cos 4x, \sin 8x, \cos 8x, \ldots, \sin 4nx, \cos 4nx, \ldots\}$. В силу четности функции f получаем, что $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, и

$$a_0 = \frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/4} x\sin 2x\,dx = -\frac{4}{\pi}\left(x\cos 2x\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4}\cos 2x\,dx\right) = \frac{2}{\pi};$$

$$a_n = \frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/4} x\sin 2x\cos 4nx\,dx =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4} x[\sin(4n+2)x - \sin(4n-2)x]\,dx =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left\{\left[x\left(\frac{\cos(4n-2)x}{4n-2} - \frac{\cos(4n+2)x}{4n+2}\right)\right]\Bigg|_0^{\pi/4} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\sin(4n-2)x}{(4n-2)^2} - \frac{\sin(4n+2)x}{(4n+2)^2}\right)\Bigg|_0^{\pi/4}\right\} =$$

$$= \frac{(-1)^n\cdot 2(4n^2+1)}{\pi(4n^2-1)^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Периодическое с периодом $\frac{\pi}{2}$ продолжение функции $f(x) = x\sin 2x$ с $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ дает функцию f^*, непрерывную на всей числовой прямой*), но не дифференцируемую в точках $x_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Равенства

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f^*\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + h\right) - f^*\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{f\left(-\frac{\pi}{4} + h\right) - f\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{h} = (x\sin 2x)'\Big|_{x=-\pi/4} = -1,$$

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f^*\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + h\right) - f^*\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0-} \frac{f\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h} = (x\sin 2x)'\Big|_{x=\pi/4} = 1$$

показывают, что в этих точках условие Дини выполнено. Итак, равенство

$$x\sin 2x = \frac{1}{\pi} + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{4n^2 - 1}\cos 4nx$$

имеет место во всех точках отрезка $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Поскольку аргументы всех функций системы $\{\varphi_i^{(l)}(x)\}$ кратны аргументу $\frac{\pi x}{l}$ второй и третьей функции этой системы, то минимальный период $2l$ функций $\sin\frac{\pi x}{l}$ и $\cos\frac{\pi x}{l}$ является и минимальным общим периодом всех функций системы $\{\varphi_i^{(l)}(x)\}$. Поэтому, если функция f имеет период $T = 2l$ и $f \in \widetilde{R}^2[-l, l]$, то при отсутствии других условий естественно рассматривать разложение f в ряд Фурье по системе $\{\varphi_i^{(l)}(x)\}$ на отрезке $[-l; l]$. Как следует из результата задачи 10 гл. II § 5 коэффициенты ряда

$$\sigma_l(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

*) Для непрерывных и четных на $[-l; l]$ функций $2l$-периодическое продолжение с $[-l; l)$ всегда непрерывно на всей числовой прямой.

не зависят от того, является ли $T = 2l$ минимальным периодом функции или нет, т. е. этот ряд есть ряд Фурье функции f по любой системе

$$\{\varphi_i^{(ml)}\} = \left\{1, \sin\frac{\pi x}{ml}, \cos\frac{\pi x}{ml}, \sin\frac{2\pi x}{ml}, \cos\frac{2\pi x}{ml}, \ldots\right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Поэтому, если $T = 2l$ — минимальный период функции $f \in \widetilde{R}^2$ и в условии задачи не указан отрезок, на котором ищется разложение f в тригонометрический ряд Фурье, то это разложение производится по системе $\{\varphi_i^{(l)}\}$ на отрезке $[-l; l]$.

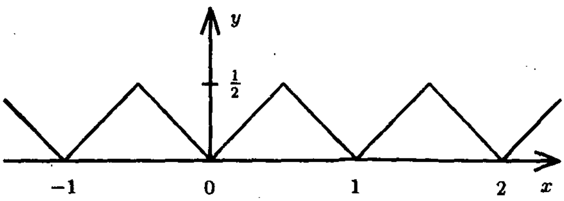
Если же отрезок $[-a; a]$ (или $[0; 2a]$) указан, то необходимо различать два варианта. Первый — $2a$ не является кратным T — в таком случае разложение производится согласно общему правилу по системе $\{\varphi_i^{(a)}\}$ (см. пример 5 гл. II § 1). Второй вариант — $2a$ является кратным T, т. е. $2a = kT$, $k \in \mathbb{N}$. В таком случае, как указано выше, достаточно вычислить коэффициенты Фурье функции f по системе $\{\varphi_i^{(\frac{T}{2})}\}$, и полученный ряд будет одновременно и рядом Фурье по системе $\{\varphi_i^{(a)}\} = \{\varphi_i^{(\frac{kT}{2})}\}$.

Пример 8. Символ (x) обозначает расстояние от числа x до ближайшего целого числа. Найти разложение функции $f(x) = (x)$ в тригонометрический ряд Фурье

а) на $[0; 3/2]$,

б) на $[0; 8]$.

Решение. Функция f имеет минимальный период 1 (см. рис. 20, *а*). Поскольку длина отрезка $\left[0; \frac{3}{2}\right]$, заданного в п. а),

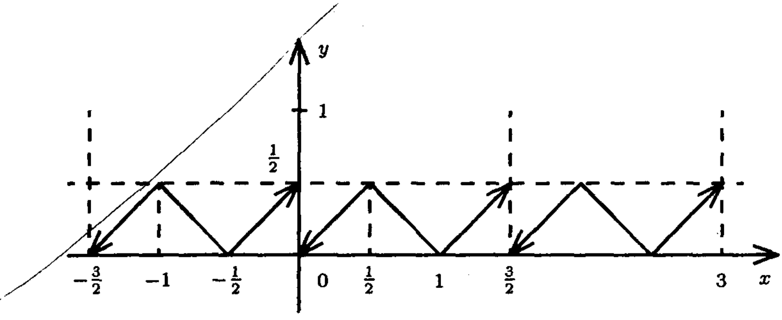


а) Рис. 20

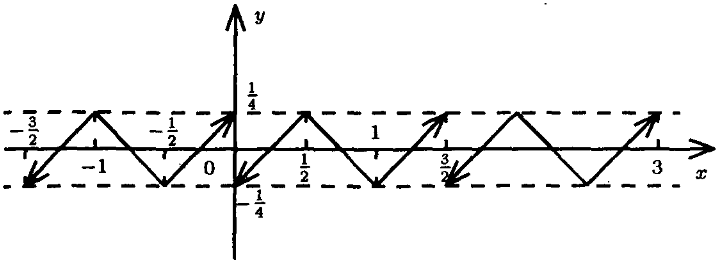
не кратна 1, то производим разложение по системе $\{\varphi_i^{(3/4)}\} =$
$= \left\{1, \sin\frac{4\pi x}{3}, \cos\frac{4\pi x}{3}, \ldots, \sin\frac{4\pi n x}{3}, \cos\frac{4\pi n x}{3}, \ldots\right\}$. Имеем

$$a_0 = \frac{4}{3}\int\limits_0^{3/2} f(x)\,dx = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{8} = \frac{1}{2}.$$

Для упрощения выкладок заметим, что функция $f(x) - \frac{1}{4}$, периодически продолженная с интервала $\left(0; \frac{3}{2}\right)$ с периодом $T = \frac{3}{2}$, дает нечетную функцию (см. рис. 20, *б, в*). Следователь-



б)



в) Рис. 20

но, $a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Вычисляем коэффициенты b_n:

$$b_n = \frac{4}{3}\int\limits_0^{1/2} x\sin\frac{4\pi nx}{3}\,dx + \int\limits_{1/2}^{1}(1-x)\sin\frac{4\pi nx}{3}\,dx +$$

$$+\int\limits_1^{3/2}(x-1)\sin\frac{4\pi nx}{3}\,dx = \frac{1}{\pi n}\left[-x\cos\frac{4\pi nx}{3}\Big|_0^{1/2} +\right.$$

$$+\int\limits_0^{1/2}\cos\frac{4\pi nx}{3}\,dx - (1-x)\cos\frac{4\pi nx}{3}\Big|_{1/2}^{1} -$$

$$\left.-\int\limits_{1/2}^{1}\cos\frac{4\pi nx}{3}\,dx - (x-1)\cos\frac{4\pi nx}{3}\Big|_1^{3/2} + \int\limits_1^{3/2}\cos\frac{4\pi nx}{3}\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left[-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi n}{3} + \frac{3}{4\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3} + \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi n}{3} -\right.$$

$$- \frac{3}{4\pi n}\sin\frac{4\pi n}{3} + \frac{3}{4\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3} - \frac{1}{2}\cos 2\pi n +$$

$$\left.+\frac{3}{4\pi n}\sin 2\pi n - \frac{3}{4\pi n}\sin\frac{4\pi n}{3}\right] = -\frac{3}{8\pi n} + \frac{9}{4\pi^2 n^2}\sin\frac{2\pi n}{3}.$$

Так как во всех точках интервала $(0;3/2)$ функция f удовлетворяет условию признака Дини, то равенство

$$f(x) = \frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{8\pi n}\left(1 - \frac{6}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3}\right)\sin\frac{4\pi nx}{3}$$

верно для всех $x \in (0;3/2)$.

В пункте б) формально надо было производить разложение по системе

$$\{\varphi_i^{(4)}\} = \left\{1,\ \sin\frac{\pi x}{4},\ \cos\frac{\pi x}{4}, \ldots, \sin\frac{\pi nx}{4},\ \cos\frac{\pi nx}{4}, \ldots\right\},$$

но так как длина отрезка $[0;8]$, заданного в этом пункте кратна 1 — минимальному периоду f, то требуемым тригонометрическим рядом будет ряд по системе $\{\varphi_i^{(\frac{1}{2})}\} = \{1, \sin 2\pi x,$

$\cos 2\pi x$, $\sin 4\pi x$, $\cos 4\pi x, \ldots, \sin 2\pi n x$, $\cos 2\pi n x\}$. В силу четности функции $f(x)$ получаем, что $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, и

$$a_0 = 4\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \frac{1}{2},$$

$$a_n = 4\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\cos 2\pi n x\,dx = \frac{2}{\pi n}\left(x\sin 2\pi n x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\frac{1}{2}} \sin 2\pi n x\,dx\right) = \frac{1}{\pi^2 n^2}\cos 2\pi n x\Big|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2m, \\ -\dfrac{2}{\pi^2(2m-1)^2}, & n = 2m-1, \end{cases} \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Так как функция f 1-периодическая и в каждой точке числовой оси удовлетворяет условию признака Дини, то равенство

$$(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)2\pi x}{(2m-1)^2}$$

верно на всей числовой оси.

Используя связь показательной и тригонометрических функций, можно получить тригонометрический ряд Фурье аналитической относительно $\cos x$ и $\sin x$ функции f на отрезке $[-\pi; \pi]$, не прибегая к интегральному вычислению коэффициентов. Для этого положим $t = e^{ix}$, тогда $\cos x = \dfrac{t^2+1}{2t}$ и $\sin x = \dfrac{t^2-1}{2t}$. После разложения функции f в степенной ряд по t обратным переходом к функциям $\cos nx$ и $\sin nx$ получается тригонометрический ряд по системе $\{\varphi_i(x)\}$. Из аналитичности функции f следует равномерная сходимость этого ряда на $[-\pi; \pi]$ к f, откуда в силу приведенной выше теоремы следует, что полученный тригонометрический ряд есть именно ряд Фурье $\sigma(f)$ по системе $\{\varphi_i(x)\}$ функции f.

Пример 9. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = \ln(1 - 2q\cos x + q^2)$ $\quad (|q| < 1)$.

Функция $f(x) = \ln(1 - 2q\cos x + q^2)$ имеет минимальный период $T = 2\pi$. Поскольку в условии не указан отрезок, на котором производится разложение, то, как сказано выше, берем отрезок $[-\pi; \pi]$ и соответствующую систему $\{\varphi_i(x)\}$. Полагая $t = e^{ix}$, получаем, что

$$\ln(1 - 2q\cos x + q^2) = \ln\left(1 - q\left(t + \frac{1}{t}\right) + q^2 \cdot t \cdot \frac{1}{t}\right) =$$
$$= \ln\left((1 - qt)\left(1 - \frac{q}{t}\right)\right) = \ln(1 - qt) + \ln\left(1 - \frac{q}{t}\right).$$

Так как $|qt| = |qe^{ix}| = |qe^{-ix}| = \left|\frac{q}{t}\right| = |q| < 1$, то для любого $t = e^{ix}$, $x \in [-\pi; \pi]$, имеем равенства:

$$\ln(1 - qt) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n t^n}{n}, \quad \ln\left(1 - \frac{q}{t}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n t^{-n}}{n},$$
$$\ln(1 - qt) + \ln\left(1 - \frac{q}{t}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n}(t^n + t^{-n}).$$

Отсюда следует, что для любого $x \in [-\pi; \pi]$ имеем равенство

$$\ln(1 - 2q\cos x + q^2) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos nx \quad (|q| < 1),$$

и поскольку этот ряд сходится равномерно на $[-\pi; \pi]$, то он есть тригонометрический ряд Фурье своей суммы. Таким образом, разложение функции $f(x) = \ln(1 - 2q\cos x + q^2)$ в тригонометрический ряд Фурье получено.

Заметим, что из полученного разложения для любого натурального n следует равенство

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2q\cos x + q^2)\cos nx\, dx = -\frac{\pi q^n}{n} \quad (|q| < 1).$$

Пример 10. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$ $(x \neq 2\pi k)$.

Функция $f(x) = \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$ имеет минимальный период 2π, следовательно, разложение производится по системе $\{\varphi_i(x)\}$

на $[-\pi;\pi]$. В данном случае полученная заменой $t=e^{ix}$ функция $\tilde{f}(t)=\ln\left|\frac{t-1}{2\sqrt{t}}\right|$ не является аналитической. Заметив, что

$$\lim_{q\to 1-}\ln(1-2q\cos x+q^2)=\ln 2(1-\cos x)=$$
$$=\ln 4+2\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|,\quad x\neq 2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z},$$

постараемся найти связь коэффициентов Фурье функций $f_q(x)=\ln(1-2q\cos x+q^2)$ и $f(x)=\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$. Обозначим для краткости $\ln(1-2q\cos x+q^2)=f_q(x)$ и $\ln 4\sin^2\frac{x}{2}=f_1(x)$, тогда $f(x)=-\ln 2+\frac{1}{2}f_1(x)$. Пусть $a_{q,n}$ — коэффициенты Фурье $f_q(x)$; как показано в примере 9, $a_{q,n}=-\frac{2q^n}{n}$.

Функция $f_1(x)\in\widetilde{R}^2[-\pi,\pi]$. Если семейство $f_q(x)$ сходится при $q\to 1-$ к $f_1(x)$ не только поточечно на $(-\pi;\pi)\setminus\{0\}$, но и в среднем на $[-\pi;\pi]$, то в силу соотношения (1) числа $a_n=\lim\limits_{q\to 1-}a_{q,n}=-\frac{2}{n}$ являются соответствующими коэффициентами Фурье функции $f_1(x)$ и, следовательно, ряд

$$-\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$$

есть тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)=\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$ по системе $\{\varphi_i(x)\}$. В силу 2π-периодичности функции f и ее дифференцируемости для всех $x\neq 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, равенство

$$\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|=-\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$$

справедливо для всех $x\neq 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Для полноты решения осталось проверить, что семейство $\{f_q(x)\}$ сходится при $q\to 1-$ к $f_1(x)$ в среднем на $[-\pi;\pi]$, поскольку это утверждение не следует из поточечной сходимости $f_q(x)$ при $q\to 1-$ к $f_1(x)$ для $x\neq 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Функция

$$\varphi(x,q)=[f_q(x)-f_1(x)]^2=\ln^2\frac{1-2q\cos x+q^2}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

непрерывна на $[\delta; \pi] \times [0; 1]$ при любом δ, $0 < \delta < \pi$; следовательно,

$$\lim_{q \to 1-} \int_\delta^\pi \varphi(x, q)\, dx = \int_\delta^\pi \lim_{q \to 1-} \varphi(x, q)\, dx = 0, \quad 0 < \delta < \pi.$$

Если $\cos \frac{x}{2} \geqslant \frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4} < q < 1$, то

$$2 \geqslant 1 - 2q \cos x + q^2 = (1 - q \cos x)^2 + q^2 \sin^2 x \geqslant$$
$$\geqslant 4q^2 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \geqslant \sin^2 \frac{x}{2},$$

следовательно,

$$\ln \frac{1}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \geqslant \ln \frac{1 - 2q \cos x + q^2}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \geqslant -\ln 4,$$

откуда получаем неравенство

$$0 \leqslant \varphi(x, q) = \ln \frac{1 - 2q \cos x + q^2}{4} \leqslant \ln^2 \frac{1}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} + \ln^2 4$$
$$\left(\frac{3}{4} < |q| < 1, \quad 0 < |x| \leqslant 2 \arccos \frac{2}{3} \right).$$

Так как функция $\ln^2 \frac{1}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} + \ln^2 4$ интегрируема на $[0; \pi]$ в смысле несобственного интеграла, то отсюда следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое δ, $0 < \delta < \pi$, для которого неравенство $\int_0^\delta \varphi(x, q)\, dx < \frac{\varepsilon}{4}$ верно при любом q, $\frac{3}{4} < q < 1$. Зафиксируем такое δ, найдем такое $q_0 > \frac{3}{4}$, что $\int_\delta^\pi \varphi(x, q)\, dx < \frac{\varepsilon}{4}$, $q \in (q_0; 1)$.

Окончательно, для $q \in (q_0; 1)$ в силу четности функций

$f_q(x)$, $0 \leqslant q < 1$, и $f_1(x)$ имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f_q(x) - f_1(x))^2\,dx = 2\int_0^{\pi} \varphi(x,q)\,dx =$$

$$= 2\int_0^{\delta} \varphi(x,q)\,dx + 2\int_{\delta}^{\pi} \varphi(x,q)\,dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и показывает утверждение о сходимости в среднем на $[-\pi;\pi]$ семейства $f_q(x)$ к $f_1(x)$ при $q \to 1-$.

Замечание. Равенства

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_1(x)\cos nx\,dx = \lim_{q\to 1-} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_q(x)\cos nx\,dx = \lim_{q\to 1-} a_{q,n},$$
$$n \in \mathbb{N},$$

можно было получить и переходом к пределу под знаком интеграла, но обоснование законности такого перехода требует рассуждений, схожих с проведенными. В данном случае хотелось обратить внимание на связь сходимости в среднем последовательности функций и сходимости соответствующих коэффициентов Фурье.

Пусть функция $f \in \widetilde{R}^2[-\pi,\pi]$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$ и $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$, $x \in [-\pi;\pi]$. Тогда коэффициенты a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}$, ряда $\sigma(f)$ и коэффициенты A_n, B_n, $n \in \mathbb{N}$, ряда $\sigma(F)$ связаны равенствами:

$$A_n = \frac{b_n}{n}, \quad B_n = -\frac{a_n}{n}.$$

Так как в силу равенства Парсеваля ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left|\frac{a_n}{n}\right| + \left|\frac{b_n}{n}\right|\right)$. Итак, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

сходится к $f(x)$ в среднем на $[-\pi;\pi]$, а ряд

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n}{n}\cos nx - \frac{a_n}{n}\sin nx\right)$$

уже равномерно на $[-\pi;\pi]$ сходится к $F(x)$. Таким образом, получаем, что ряд Фурье по системе $\{\varphi_i(x)\}$ независимо от того, сходится он равномерно на $[-\pi;\pi]$ или нет, допускает почленное интегрирование. Обратно, если 2π-периодическая функция $F(x)$ является обобщенной первообразной функции $f(x) \in \widetilde{R}^2[-\pi,\pi]$, то ряд Фурье $\sigma(f)$ является почленно продифференцированным рядом Фурье $\sigma(F)$. Так как коэффициенты Фурье функции f образуют бесконечно малую последовательность, то в этом случае коэффициенты Фурье функции F имеют порядок $o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$. Продолжая это рассуждение по индукции, получаем утверждение:

Если функция $F \in C^{m-1}[-\pi;\pi]$, $m \in \mathbb{N}$, $F^{(m)} \in \widetilde{R}^2[-\pi,\pi]$ и $F^{(j)}(-\pi) = F^{(j)}(\pi)$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$, то коэффициенты ряда Фурье $\sigma(F)$ имеют порядок $o\left(\frac{1}{n^m}\right)$, $n \to \infty$.

Аналогичное утверждение имеет место и для любой системы $\{\varphi_i^{(l)}(x)\}$.

Пример 11. Напишем тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = x$ на отрезке $[-\pi,\pi]$. В силу нечетности данной функции получаем, что $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx =$$
$$= \frac{2}{\pi n}\left(-x\cos nx\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Так как для любого $x \in (-\pi;\pi)$ условие признака Дини выполнено, то равенство

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

верно для любого $x \in (-\pi; \pi)$. Непосредственно видно, что в точках $x_m = (2m+1)n$, $m \in \mathbb{Z}$, ряд $2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$ сходится к $\dfrac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2} = 0$.

Функция $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$ является первообразной для $f(x) = x$ на $[-\pi; \pi]$. Следовательно, как разобрано выше, ряд

$$\frac{A_0}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

является рядом $\sigma(F)$, равномерно сходящимся к 2π-периодической функции F^*, совпадающей на $[-\pi; \pi]$ с F. Значение коэффициента A_0 находится по общей формуле

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x^2}{2}\, dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

Итак, для всех $x \in [-\pi; \pi]$ имеем равенство

$$\frac{x^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

Очевидно, функция $\varphi(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\pi^2}{6}$ удовлетворяет условию $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\, dx = 0$ и одной из ее первообразных является нечетная функция $\Phi(x) = \dfrac{x^3 - \pi^2 x}{6}$. Следовательно, ряд $2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^3} \sin nx$ является рядом $\sigma(\Phi)$ ($A_0 = 0$ в силу нечетности Φ). Так как ряд $\dfrac{\pi^2}{3} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$ есть ряд $\sigma(y)$, где $y = \dfrac{\pi^2 x}{6}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^3} \left[2 - \dfrac{\pi^2 n^2}{3}\right] \sin nx$ есть ряд $\sigma(G)$, где $G(x) = \dfrac{x^3}{6}$.

Функция $\Phi \in C^{\infty}[-\pi; \pi]$ и удовлетворяет условиям $\Phi(-\pi) = \Phi(\pi)$, $\Phi'(-\pi) = \Phi'(\pi)$; согласно вышеприведенному утверждению, ее коэффициенты Фурье имеют порядок $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $n\to\infty$. Хотя функция G также бесконечно дифференцируема на $[-\pi;\pi]$, но на концах этого отрезка принимает различные значения. Этим обстоятельством и объясняется, почему коэффициенты Фурье функции G имеют порядок $o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n\to\infty$, а не $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $n\to\infty$.

Непосредственно проверяется, что каждая из систем:

$$\varphi_i(x)=\cos(i-1)x,$$

$$\psi_i(x)=\sin ix,\quad i\in\mathbb{N},$$

ортогональна на $[0;\pi]$. Если функция $f\in\widetilde{R}^2[0,\pi]$, то для функции g, совпадающей с f на $(0;\pi]$ и являющейся четным продолжением f с $(0;\pi]$ на $[-\pi;0)$, тригонометрический ряд Фурье имеет вид $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$.

Из сходимости в среднем этого ряда на $[-\pi;\pi]$ к g следует, что на $[0;\pi]$ этот ряд сходится в среднем к f, т. е.

$$\int\limits_0^\pi\left(f(x)-\frac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{k}a_n\cos nx\right)^2dx\to0,\quad k\to\infty,$$

что показывает полноту системы $\varphi_i(x)=\cos(i-1)x$, $i\in\mathbb{N}$, в $\widetilde{R}^2[0,\pi]$. Точно так же, только используя нечетное продолжение функции с $(0;\pi]$ на $[-\pi;0)$, показывается полнота системы $\psi_i(x)=\sin ix$, $i\in\mathbb{N}$, на $\widetilde{R}^2[0,\pi]$. Одновременно видно, что для рядов Фурье по каждой из этих систем сохраняет силу условие Дини поточечной сходимости. Коротко задачу разложения функции в ряд Фурье по этим системам, а также и полученных из них линейным переносом на отрезок $[0;l]$, формулируют так: найти разложение функции $f\in\widetilde{R}^2[0,l]$ в ряд Фурье по косинусам (синусам) кратных углов. При этом коэффициенты искомого ряда находятся по формулам (4) или (5) соответственно, а четное или нечетное продолжение подразумевается.

Пример 12. Найти разложение функции $y = 2x - x^2$ по косинусам кратных углов на отрезке $[0; 2]$.

По общему правилу получаем, что

$$a_0 = \int_0^2 f(x)\,dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{4}{3},$$

$$a_n = \int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left[x \sin\frac{\pi n x}{2}\Big|_0^2 - 2\int_0^2 (1-x)\sin\frac{\pi n x}{2}\,dx\right] =$$

$$= \frac{8}{\pi^2 n^2}\left[(1-x)\cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_0^2 + \int_0^2 \cos\frac{\pi n x}{2}\,dx\right] =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi^2 k^2}, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k-1. \end{cases}$$

В силу условия Дини равенство

$$2x - x^2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi n x}{(2n)^2}$$

верно для всех $x \in (0; 2)$. Из вышесказанного вытекает, что сумма равномерно сходящегося на всей числовой прямой ряда $\frac{2}{3} - \frac{1}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi n x}{n^2}$ равна функции $f^*(x)$, полученной из функции $f(x) = 2x - x^2$ сначала четным продолжением на $[-2; 0)$, а затем периодическим с периодом 4 продолжением на всю числовую прямую (**рис. 21**).

Пример 13. Найти разложение функции $y = \cos x$ по синусам кратных углов на отрезке $[0; \pi]$.

По общему правилу получаем, что для $n \neq 1$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x \cdot \sin nx\,dx =$$

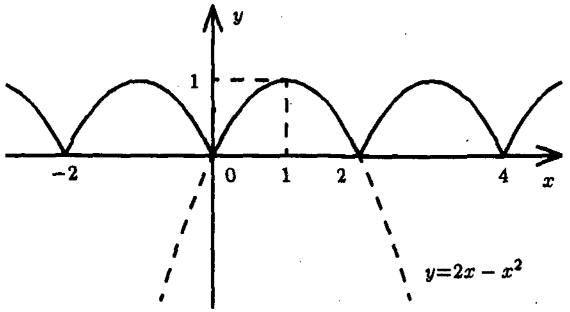


Рис. 21

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(n+1)x + \sin(n-1)x]\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k-1, \\ \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{4n}{\pi(n^2-1)}, & n = 2k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N};$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\cdot\sin x\,dx = 0.$$

В силу условия Дини равенство $\cos x = \frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{4n^2-1}$ верно для всех $x \in (0;\pi)$; если $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то непосредственно видно, что сумма полученного ряда равна

$$0 = \frac{\cos(0+0) + \cos(\pi - 0)}{2}.$$

В заключение скажем о некоторых вопросах, выходящих за рамки курса математического анализа. Мы рассматривали представление интегрируемой с квадратом функции f рядом Фурье по системе, состоящей из тригонометрических функций. Справедливо утверждение, если тригонометрический ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l}\right)$ сходится к функции $f \in \widetilde{R}^2[-l, l]$ для всех $x \in [-l; l] \setminus M$, где M — не более чем счетное множество, то этот ряд есть ряд $\sigma_l(f)$ функции f. Таким образом, на множестве кусочно гладких функций представление функции ее рядом Фурье по системе $\{\varphi_i^{(l)}\}$ является единственно возможным представлением этой функции тригонометрическим рядом. В то же время сумма сходящегося всюду на $[-\pi; \pi]$ тригонометрического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$ может быть функцией не интегрируемой с квадратом на $[-\pi; \pi]$ (и даже не входящей в класс $\widetilde{R}[-\pi, \pi]$; см. задачи 22 и 23 гл. II § 5), т. е. такой ряд не является рядом Фурье никакой функции $f \in \widetilde{R}^2[-\pi, \pi]$. Вопрос о характеристике класса функций, являющихся суммами всюду сходящихся тригонометрических рядов до сих пор не имеет полного решения.

Как показывает результат задачи 19 гл. II § 5, даже для непрерывных функций f ряд $\sigma(f)$ может расходиться в некоторых точках. Более того, известны примеры непрерывных функций f, для которых ряд $\sigma(f)$ расходится на множестве мощности континуума. В то же время известно, что для всех функций $f \in \widetilde{R}^2[-\pi, \pi]$, в частности, для всех непрерывных на $[-\pi; \pi]$, ряд $\sigma(f)$ сходится к f для $x \in [-\pi; \pi] \setminus M$, где M — множество меры нуль. Но известны также примеры тригонометрических рядов $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$, содержащих отличные от нуля коэффициенты и сходящихся к нулю всюду, кроме некоторого множества меры нуль. Таким образом, если требовать в задаче представления функции тригонометрическим рядом поточечную сходимость этого ряда к данной функции всюду или за исключением не более чем счетного множества, то задача не имеет решения даже для некоторых непрерывных функций. Если же ограничиться требованием сходимости всюду, кроме множества меры нуль, то задача решается неоднозначно.

§ 2. СУММИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Пусть ряды

$$\frac{1}{2}q_0 + \sum_{m=1}^{\infty} q_m \cos mx, \qquad \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin mx \tag{6}$$

сходятся на отрезке $[0; 2\pi]$ соответственно к $f(x)$ и $g(x)$, кроме быть может конечного множества точек. Рассмотрим степенной ряд с теми же коэффициентами, расположенный по степеням комплексной переменной z:

$$\frac{1}{2}q_0 + \sum_{m=1}^{\infty} q_m z^m., \tag{7}$$

На окружности $|z| = 1$, т. е. при $z = e^{ix}$, этот ряд сходится, кроме, быть может, конечного множества точек. Следовательно, ряд (7) сходится всюду при $|z| < 1$ и его сумма

$$W(z) = W(re^{ix}) = \frac{1}{2}q_0 + \sum_{m=1}^{\infty} q_m z^m$$

при $0 \leqslant |z| = r < 1$ есть аналитическая функция. Тогда по второй теореме Абеля, если ряд (7) сходится, то

$$f(x) + ig(x) = \lim_{r \to 1} W(re^{ix}) = W(e^{ix}). \tag{8}$$

Найдя функцию W в явном виде и вычислив ее значение $W(e^{ix})$, тем самым найдем и суммы рядов (6).

Пример 1. Найти сумму рядов

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos mx}{m} \quad \text{и} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mx}{m}.$$

Решение. Первый ряд сходится для $x \neq 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, второй сходится для всех $x \in \mathbb{R}$. Оба ряда являются рядами Фурье для определяемых ими функций $f(x)$ и $g(x)$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{z^m}{m}$. Его сумма $\varphi(z)$ равна $-\ln(1-z)$, т. е. равна $\ln\dfrac{1}{1-z}$, $|z|<1$. Следовательно,

$$f(x)+ig(x)=\ln\frac{1}{1-e^{ix}},\qquad x\in(0;2\pi).$$

Поскольку

$$\frac{1}{1-e^{ix}}=\frac{1}{1-\cos x-i\sin x}=\frac{1-\cos x+i\sin x}{(1-\cos x)^2+\sin^2 x}=$$
$$=\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sin x}{2(1-\cos x)}=\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=$$
$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{x}{2}+i\cos\frac{x}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right),$$

то

$$\ln\frac{1}{1-e^{ix}}=-\ln 2\sin\frac{x}{2}+i\cdot\frac{\pi-x}{2}.$$

Таким образом,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=-\ln 2\sin\frac{x}{2},\qquad x\in(0;2\pi),$$
$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2},\qquad x\in(0;2\pi).$$

Отметим, что для применения изложенного выше метода обязательно надо быть уверенным в сходимости рядов (6), чтобы определять их сумму с помощью предельного перехода (8). Одно существование предела в правой части равенства (8) еще не позволяет сделать заключение о сходимости рядов (6). Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим ряды

$$\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\cos mx\quad\text{и}\quad\sum_{m=1}^{\infty}\sin mx.$$

Эти ряда расходятся при $0 < x < 2\pi$, однако для соответствующего ряда

$$\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty} z^m = \frac{1}{1-z}-\frac{1}{2}$$

при стремлении точки $z = re^{ix}$ по радиусу к точке e^{ix} на окружности имеем

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{1-re^{ix}}-\frac{1}{2} = \lim_{r\to 1}\frac{1-r\cos x - ir\sin x}{(1-r\cos x)^2+r^2\sin^2 x}-\frac{1}{2} =$$

$$= \lim_{r\to 1}\left[\left(\frac{1-r\cos x}{1+r^2-2r\cos x}-\frac{1}{2}\right)-\frac{ir\sin x}{1+r^2-2r\cos x}\right] =$$

$$= \lim_{r\to 1}\left[\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos x}-\frac{i\sin x}{1+r^2-2r\cos x}\right] =$$

$$= \frac{i\sin x}{(1-\cos x)^2} = \frac{i\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{2}, \quad x \neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Пример 2. Найти сумму рядов

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}$$

и

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

Решение. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{z^{2n-1}}{2n-1}, \quad |z|\leqslant 1,\ z\neq \pm i.$$

В теории функций комплексного переменного выводится, что сумма этого ряда равна $\operatorname{arctg} z$. Функция $w = \operatorname{tg} z$ не принимает значений $\pm i$ (проверьте!). Применяя формулы Эйлера, получаем, что при $z \neq \left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$,

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{zi}-e^{-iz}}{e^{zi}+e^{-iz}} = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{2zi}-1}{e^{2zi}+1}.$$

Уравнение $w = \frac{1}{i}\frac{e^{2zi}-1}{e^{2zi}+1}$ разрешимо относительно z:

$$e^{2zi} = \frac{1+wi}{1-wi}, \quad z = \frac{1}{2i}\,\mathrm{Ln}\,\frac{1+wi}{1-wi},$$

т. е. получено выражение обратной многозначной функции $\mathrm{Arctg}\, w$.

Если для логарифма взять его главное значение, то получится главное значение арктангенса

$$\mathrm{arctg}\, w = \frac{1}{2i}\ln\frac{1+wi}{1-wi}, \quad w \neq \pm i, \tag{9}$$

которое характеризуется тем, что его вещественная часть содержится в промежутке $(-\pi/2, \pi/2)$. Положим в формуле (9) $w = e^{ix}$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $x \neq \frac{\pi}{2}$, тогда имеем

$$\frac{1+ie^{ix}}{1-ie^{ix}} = \frac{1-\sin x + i\cos x}{1+\sin x - i\cos x} =$$

$$= \frac{(1-\sin x + i\cos x)(1+\sin x + i\cos x)}{(1+\sin x)^2+\cos^2 x} = \frac{i\cos x}{1+\sin x} =$$

$$= i\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$$

Так как модуль этого числа равен $\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|$, а аргумент равен $\frac{\pi}{2}$, если $x < \frac{\pi}{2}$, и $-\frac{\pi}{2}$, если $x > \frac{\pi}{2}$, то

$$\ln\frac{1+zi}{1-zi} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right| \pm \frac{\pi}{2}i$$

и

$$\mathrm{arctg}\, z = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{i}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|.$$

Следовательно,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{4}, & \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

и

$$g(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ x \neq \frac{\pi}{2}.$$

§ 3. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Определение. Функция $f(x)$ называется *абсолютно интегрируемой* на $(-\infty;+\infty)$, если $f(x)$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[-l;l]$, $l>0$, и существует несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$.

В этом случае будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит на прямой $(-\infty;+\infty)$ классу $\widetilde{R}^1$ и писать $f(x) \in \widetilde{R}^1(-\infty,+\infty)$*).

Определение. Пусть $f(x) \in \widetilde{R}^1(-\infty,+\infty)$. Интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} (a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x)\,d\lambda, \quad |x|<\infty, \tag{10}$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt \tag{11}$$

и

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt, \quad \lambda \in [0;+\infty), \tag{12}$$

называется интегралом Фурье функции $f(x)$ для любой $f(x) \in \widetilde{R}^1(-\infty,+\infty)$.

Отметим, что оба интеграла $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ существуют для любой функции $f(x) \in \widetilde{R}^1(-\infty,+\infty)$. Подставляя в (10) выражения (11) и (12) для $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$, получим, что функции $f(x) \in \widetilde{R}^1(-\infty,+\infty)$ сопоставляется интеграл Фурье

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt. \tag{13}$$

---

*) Аналогично определяется класс функций $\widetilde{R}^1[0,+\infty)$

Как и в теории рядов Фурье, так и в теории интегралов Фурье основная проблема — это указать условия на функцию $f(x)$, при выполнении которых интеграл Фурье сходится к $f(x)$ или к $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

Теорема. (Признак Дини сходимости интеграла Фурье). Пусть $f(x)\in \widetilde{R}^1(-\infty,+\infty)$ и в точке $x_0\in(-\infty,+\infty)$ существуют конечные односторонние пределы $f(x_0\pm 0) = \lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x)$. Если в точке x_0 выполнены условия Дини, т. е. существует $h>0$, такое, что несобственные интегралы

$$\int\limits_0^h \frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u}\,du \quad \text{и} \quad \int\limits_0^h \frac{f(x_0-u)-f(x_0-0)}{u}\,du$$

сходятся, то интеграл Фурье (13) для функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к $\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$.

Итак, теорема утверждает, что при выполнении условия Дини

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x_0)\,dt =$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)], & \text{если } x_0 \text{ — точка разрыва 1 рода функции } f(x); \\ f(x_0), & \text{если } x_0 \text{ — точка непрерывности функции } f(x). \end{cases}$$

Следствие. Пусть $f(x)\in\widetilde{R}^1(-\infty,+\infty)$ и кусочно непрерывна на любом конечном отрезке. Пусть для любого $x\in$ $\in(-\infty;+\infty)$ либо существует конечная производная, либо существуют конечные односторонние производные. Тогда интеграл Фурье (13) для функции $f(x)$ сходится всюду на $(-\infty,+\infty)$ к функции $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

Следствие. Пусть $f(x)\in\widetilde{R}^1(-\infty,+\infty)$ и $f(x)\in$ $\in C^1(-\infty,+\infty)$, тогда интеграл Фурье (4) для функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ на $(-\infty,+\infty)$.

Заметим, что для четной функции $f(x) \in \widetilde{R}^1(-\infty,+\infty)$

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt \\ b(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

следовательно, ее интеграл Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\cos\lambda x\,d\lambda\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt, \quad |x| < \infty; \tag{15}$$

для нечетной функции $f(x)$ соответственно имеем

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\sin\lambda x\,d\lambda\int\limits_0^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt, \quad |x| < \infty. \tag{16}$$

Если функция $f(x)$ определена в промежутке $[0;+\infty)$, $f(x) \in \in \widetilde{R}^1[0,+\infty)$, то ее интеграл Фурье можно представить как в виде (15), так и в виде (16), доопределив на луч $x < 0$ в первом — четным, а во втором — нечетным образом.

Теорема. Пусть функция $f(x) \in \widetilde{R}^1(-\infty,+\infty)$, $f(x) \in \in C(-\infty,+\infty)$ и для любого $x \in (-\infty;+\infty)$ выполнены условия Дини, тогда

1) если функция $f(x)$ четная, то

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\cos\lambda x\,d\lambda\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt, \quad x \in (-\infty;+\infty);$$

2) если функция $f(x)$ нечетная, то

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\sin\lambda x\,d\lambda\int\limits_0^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt, \quad x \in (-\infty;+\infty).$$

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$ и $T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ — любое разбиение отрезка $[a;b]$. Тогда величина $\bigvee\limits_a^b f(x) = \sup\limits_T \sum\limits_{k=1}^m |\Delta f_k|$, где $\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$, называется полной вариацией функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Если $\bigvee\limits_a^b f(x) < +\infty$, то в этом случае говорят, что функция $f(x)$ имеет в промежутке $[a;b]$ ограниченное изменение (или ограниченную вариацию).

Примером функции с ограниченным изменением может служить любая монотонная на отрезке $[a;b]$ функция. Укажем, кроме того, пример непрерывной функции

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\dfrac{\pi}{x}, & 0 < x \leqslant 2, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

которая не является функцией с ограниченным изменением (проверьте!).

Классы функций с ограниченным изменением:

1. Если функция $f(x)$, заданная на промежутке $[a;b]$ такова, что этот промежуток может быть разложен на конечное число промежутков $[a_k; a_{k+1}]$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, $a_0 = a$, $a_m = b$, в каждом из которых $f(x)$ монотонна (такая функция называется кусочно-монотонной), то $f(x)$ имеет на $[a;b]$ ограниченное изменение.

2. Если функция $f(x)$ в промежутке $[a;b]$ удовлетворяет условию Липшица $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L \cdot |x_1 - x_2|$ (L — константа, $x_1, x_2 \in [a;b]$), то $f(x)$ имеет ограниченное изменение, причем

$$\bigvee_a^b f(x) \leqslant L \cdot (b-a).$$

3. Если $f(x)$ в промежутке $[a;b]$ имеет ограниченную производную: $|f'(x)| \leqslant L$, $x \in [a;b]$, то она имеет ограниченное изменение.

4. Если $f(x)$ в промежутке $[a;b]$ представима в виде интеграла

$$f(x) = C + \int_a^x \varphi(t)\,dt,$$

где $\varphi(t)$ предполагается абсолютно интегрируемой (хотя бы и в несобственном смысле) на $[a;b]$, то $f(x)$ имеет ограниченное изменение, причем

$$\bigvee_a^b f(x) \leqslant \int_a^b |\varphi(t)|\,dt.$$

Свойства функций с ограниченным изменением:

1. Функция с ограниченным изменением ограничена.

2. Сумма, разность и произведение двух функций с ограниченным изменением на $[a;b]$ есть функция с ограниченным изменением на $[a;b]$.

3. Если $f(x)$ и $g(x)$ — функции с ограниченным изменением на $[a;b]$ и $|g(x)| \geqslant \alpha > 0$, то и частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ есть функция с ограниченным изменением на $[a;b]$.

4. Если $f(x)$ имеет ограниченное изменение на $[a;b]$, то для любого $x \in [a;b]$ функция $g(x) = \bigvee_a^x f(t)$ будет монотонно возрастающей функцией, ограниченной на $[a;b]$; если $f(x)$ непрерывна в $x = x_0$, то и $g(x)$ непрерывна в x_0.

Критерий для функций с ограниченным изменением. Для того, чтобы функция $f(x)$ имела в промежутке $[a;b]$ ограниченное изменение, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в этом промежутке в виде разности двух монотонно возрастающих функций.

Для функции $f(x)$ с ограниченным изменением в промежутке $[a;b]$ в любой точке x_0 этого промежутка существуют конечные односторонние пределы.

Отметим, что непрерывная функция с ограниченным изменением представима в виде разности двух непрерывных возрастающих функций.

Теорема. (Признак Дирихле—Жордана сходимости интеграла Фурье). Пусть $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей прямой и в некотором интервале $[x_0 - h; x_0 + h]$, $h > 0$, функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение, тогда интеграл Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к $\frac{1}{2}[f(x_0+0)+$ $+ f(x_0 - 0)]$.

Пример 1. Найти интеграл Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & 1 < x < +\infty, \\ 0, & -\infty < x < 0 \end{cases}$$

и нарисовать его график (рис. 22, *а*).

Решение. По определению интеграл Фурье $F(x)$ функции $f(x)$ равен:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \Big(a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x\Big)\, d\lambda,$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda t\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos\lambda t\, dt = \frac{\sin\lambda}{\pi\lambda};$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda t\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin\lambda t\, dt = \frac{1}{\pi\lambda}(1-\cos\lambda).$$

Следовательно,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \left[\frac{\cos\lambda x\sin\lambda}{\pi\lambda} + \frac{(1-\cos\lambda)}{\pi\lambda}\sin\lambda x\right] d\lambda$$

является искомым интегралом Фурье. Согласно общей теореме $F(x)$ имеет график, представленный на рис. 22, *б*.

Пример 2. Найти интеграл Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

а) продолжив ее четным образом; б) продолжив ее нечетным образом.

а) Если продолжение функции $f(x)$ четное, то имеем

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos\lambda x\, d\lambda \int_0^1 \cos\lambda t\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos\lambda x\sin\lambda}{\lambda}\, d\lambda.$$

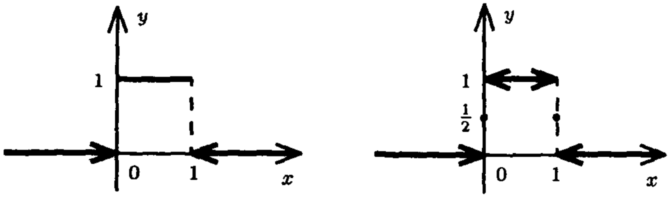


График $f(x)$

а)

График интеграла Фурье функции $f(x)$

б)

Рис. 22

Следовательно, в силу теоремы о сходимости интеграла Фурье имеем, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\lambda x \sin x}{x}\,dx = \begin{cases} \pi/2, & \text{при } |\lambda| < 1, \\ \pi/4, & \text{при } |\lambda| = 1, \\ 0, & \text{при } |\lambda| > 1. \end{cases}$$

б) Если продолжение нечетное, то

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \sin\lambda x\,d\lambda \int\limits_0^1 \sin\lambda t\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\lambda x(1-\cos\lambda)}{\lambda}\,d\lambda,$$

откуда в силу теоремы о сходимости интеграла Фурье получаем, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\lambda x(1-\cos x)}{x}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{при } |\lambda| > 1, \\ -\frac{1}{2}, & \text{при } |\lambda| = -1, \\ -1, & \text{при } -1 < \lambda < 0, \\ 0, & \text{при } \lambda = 0, \\ 1, & \text{при } 0 < \lambda < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{при } \lambda = 1. \end{cases}$$

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на $(-\infty;+\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[-l;l]$, $l > 0$.

Если существует $\lim\limits_{T\to+\infty}\int\limits_{-T}^{T} f(x)\,dx = A$, то он называется главным значением интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

В этом случае пишут:

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{T\to+\infty} \int\limits_{-T}^{T} f(x)\,dx.$$

Заметим, что из существования несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ следует, что существует v.p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ и их значения совпадают.

Однако, обратное утверждение не имеет места, например, интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-\cos x)}{x}\,dx$ не существуют как несобственные, но в смысле главного значения существуют и равны нулю.

В дальнейшем будем рассматривать комплекснозначные функции вещественного аргумента: $w(x) = u(x) + iv(x)$. Предел и непрерывность таких функций определяется обычным образом. Производная такой функции $w'(x)$ определяется формулой

$$w'(x) = u'(x) + iv'(x).$$

Аналогично определяются интегралы: Римана, несобственный и интеграл в смысле главного значения, например,

$$\int\limits_a^b w(x)\,dx = \int\limits_a^b u(x)\,dx + i\int\limits_a^b v(x)\,dx.$$

Функция называется абсолютно интегрируемой, если абсолютно интегрируемы каждая из функций $u(x)$ и $v(x)$. Справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_a^b w(x)\,dx\right| < \int\limits_a^b |w(x)|\,dx.$$

Теорема (формула Фурье для интеграла Фурье в комплексной форме). Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty;+\infty)$, $f \in C(-\infty,+\infty)$ и для любого $x \in (-\infty;+\infty)$ выполнены условия Дини.

Тогда интеграл Фурье для функции $f(x)$ сходится к функции $f(x)$ всюду и имеет место формула Фурье в комплексной форме:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda(t-x)}\,dt\right]d\lambda\right), \quad |x| < \infty. \quad (17)$$

Заметим, что если кроме перечисленных выше условий на $f(x)$ функции

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(t-x)\,dt, \quad |x| < \infty,$$

абсолютно интегрируемы на $(-\infty;+\infty)$, то внешний интеграл в (17) понимается в обычном смысле.

Преобразование Фурье

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty;+\infty)$ и $f(x)$ непрерывна на $(-\infty;+\infty)$. Тогда, если для любого $x \in (-\infty;+\infty)$ выполнены условия Дини, то существует несобственный интеграл

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt$$

и в силу формулы Фурье из теоремы Фурье имеем равенство

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda\right)$$

для любого $x \in (-\infty;+\infty)$, где несобственный интеграл понимается в смысле главного значения.

Определение. Пусть $f(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty; +\infty)$, тогда функция

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t}\, dt$$

называется преобразованием Фурье функции $f(x)$ и обозначается $F[f]$ или $F(\lambda)$. Отметим, что хотя преобразование Фурье определено для абсолютно интегрируемой функции, но ее преобразование Фурье совсем не обязательно будет абсолютно интегрируемой функцией.

Пример 3. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

Решение. Пусть $\lambda \neq 0$, тогда

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a}^{a} e^{-i\lambda x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-i\lambda x}}{-i\lambda}\bigg|_{-a}^{a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-i\lambda a} - e^{i\lambda a}}{-i\lambda} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2\frac{\sin\lambda a}{\lambda} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin\lambda a}{\lambda}.$$

Если $\lambda = 0$, то

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2a = a\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Итак,

$$F[f] = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{\sin\lambda a}{\lambda}, & \lambda \neq 0, \\ a\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}, & \lambda = 0. \end{cases}$$

Как известно, эта функция не является абсолютно интегрируемой на $(-\infty; +\infty)$. Выше было отмечено, что если $f(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty; +\infty)$, непрерывна на $(-\infty; +\infty)$ и для нее выполнены условия Дини в любой точке $x \in \in (-\infty; +\infty)$, то из формулы Фурье получается формула обращения для преобразования Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} \, d\lambda \right), \quad |x| < \infty.$$

Надо отчетливо понимать разницу между "формулами"

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} \, dt, \quad |\lambda| < \infty,$$

и

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} \, d\lambda \right), \quad |x| < \infty.$$

Эти "формулы" различны по существу (а не знаком минус в показателе $\exp z$). Первая из них является не формулой, а определением, в котором несобственный интеграл существует в обычном смысле для $f(x) \in \widetilde{R}^1(-\infty, +\infty)$, вторая — является формулой, которая доказывается при некоторых дополнительных условиях на $f(x)$ (например, $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$ и удовлетворяет условию Дини) и в ней несобственный интеграл понимается в смысле главного значения.

Преобразование Фурье определено для функций, заданных на всей прямой. Иногда в физических задачах используют преобразование Фурье функций, заданных на $[0; +\infty)$. Заметим, что если $f(x) \in \widetilde{R}^1(-\infty, +\infty)$, $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$ и $f(x)$ удовлетворяет условию Дини для всех $x \in (-\infty; +\infty)$, то в случае четной функции $f(x)$ имеет место формула Фурье

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \cos \lambda x \, d\lambda \int\limits_{0}^{+\infty} f(t) \cos \lambda t \, dt, \quad |x| < \infty,$$

а в случае нечетной функции $f(x)$ имеет место формула

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \sin \lambda x \, d\lambda \int\limits_{0}^{+\infty} f(t) \sin \lambda t \, dt, \quad |x| < \infty.$$

Поэтому, если непрерывная на $[0;+\infty)$ функция $f(x) \in \widetilde{R}^1[0,+\infty)$, то ее можно непрерывно продолжить четным образом на $(-\infty;0)$ по закону $f(-x) = f(x)$, а если $f(0) = 0$, то и нечетным образом на $(-\infty;0)$ по закону $f(-x) = -f(x)$. Тогда при выполнении еще и условий Дини имеем для одной и той же функции формулу

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \lambda x \, d\lambda \int_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t \, dt, \quad x \in [0;+\infty), \tag{18}$$

или

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \lambda x \, d\lambda \int_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t \, dt, \quad x \in [0;+\infty). \tag{19}$$

Определение. Пусть $f(x) \in \widetilde{R}^1[0,+\infty)$. Функция

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t \, dt$$

называется косинус-преобразованием Фурье функции $f(x)$ и обозначается $F_c[f]$ либо $F_c(\lambda)$.

Определение. Пусть $f(x) \in \widetilde{R}^1[0,+\infty)$. Функция

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t \, dt$$

называется синус-преобразованием Фурье функции $f(x)$ и обозначается $F_s[f]$ либо $F_s(\lambda)$.

Немедленно из этих определений и теоремы Фурье получаем формулы обращения для косинус-преобразования и синус-преобразования Фурье.

Теорема. Пусть $f(x) \in \widetilde{R}^1[0,+\infty)$, $f(x) \in C[0,+\infty)$ и для любой точки $x \in [0;+\infty)$ выполнены условия Дини. Тогда имеет место формула обращения для косинус-преобразования Фурье:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_c(\lambda) \cos \lambda x \, dt, \quad x \in [0;+\infty),$$

и если $f(0) = 0$, то имеет место и формула обращения для синус-преобразования Фурье:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} F_s(\lambda) \sin \lambda x \, dt, \quad x \in [0; +\infty).$$

Отметим, что если $f(0) \neq 0$, то формула обращения для синус-преобразования Фурье имеет место для $x \in (0; +\infty)$. Сформулированные результаты используются для нахождения значений определенных интегралов.

Пример 4. Найти косинус- и синус-преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-\beta x}$, $\beta > 0$, $x \geqslant 0$.

Решение. Согласно определению косинус-преобразования Фурье для функции $f(x) = e^{-\beta x}$ имеем:

$$F_c[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta t} \cos \lambda t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\beta}{\beta^2 + \lambda^2}.$$

Согласно определению синус-преобразования Фурье для функции $f(x) = e^{-\beta x}$ имеем

$$F_s[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta t} \sin \lambda t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\lambda}{\beta^2 + \lambda^2}.$$

Из полученных результатов следует, что

$$e^{-\beta x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\beta}{\beta^2 + \lambda^2} \cos \lambda x \, d\lambda = \frac{2\beta}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{\beta^2 + \lambda^2} \, d\lambda, \quad x \geqslant 0,$$

$$e^{-\beta x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{\beta^2 + \lambda^2} \sin \lambda x \, d\lambda = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x}{\beta^2 + \lambda^2} \, d\lambda, \quad x > 0.$$

Таким образом, получаем значения следующих интегралов Лапласа:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{\beta^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2\beta}e^{-\alpha\beta}, \quad \alpha \geqslant 0,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{\beta^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta}, \quad \alpha > 0.$$

Пример 5. Рассмотрим интегральный логарифм

$$\mathrm{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}, \quad 0 < x < 1.$$

Отметим, что этот интеграл является собственным при любом $x \in (0;1)$.

Положим $z = e^{-x}$, $x > 0$, и $t = e^{-u}$, тогда

$$\mathrm{Li}(e^{-x}) = -\int_x^{+\infty} \frac{du}{ue^u}.$$

Отсюда видно, что функция $\mathrm{Li}(x)$ непрерывно дифференцируема на $(0;1)$ и функция

$$f(x) = \mathrm{Li}(e^{-x}) \in C^1(0,+\infty).$$

Поскольку при $x > 1$ имеем $\int\limits_x^{+\infty} \frac{du}{ue^u} < e^{-x}$, а при $0 < x < 1$ имеем $\int\limits_x^{1} \frac{du}{ue^u} < |\ln x|$, то $f(x) = \mathrm{Li}(e^{-x})$ абсолютно интегрируема на $(0;+\infty)$.

Значит, справедливы обе формулы Фурье (18) и (19).

Найдем косинус-преобразование Фурье функции $y = \mathrm{Li}(e^{-x})$:

$$F_c[\mathrm{Li}(e^{-x})] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathrm{Li}(e^{-z}) \cos zx\,dz =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos zx\,dz \int_z^{+\infty} \frac{du}{ue^u} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\left(\frac{\sin zx}{x} \int\limits_z^{+\infty} \frac{du}{ue^u} \right) \Bigg|_0^{+\infty} - \frac{1}{x} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin zx}{ze^z}\, dz \right] =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{x} \int\limits_0^{+\infty} e^{-z} \frac{\sin zx}{z}\, dz.$$

Поскольку $\int\limits_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{k}$, $\alpha > 0$ (см. пример 48 гл. I § 3), то

$$F_c[\mathrm{Li}(e^{-x})] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}, \quad x > 0.$$

Применяя теорему обращения, находим значение интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} z}{z} \cos zx\, dz = -\frac{\pi}{2} \mathrm{Li}(e^{-x}), \quad x > 0.$$

Аналогичным образом, использовав синус-преобразование Фурье, найдем значение интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + z^2)}{z} \sin zx\, dz = -\pi \mathrm{Li}(e^{-x}), \quad x > 0.$$

Пример 6. Найти косинус-преобразование Фурье функции $y = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$.

Решение. Рассмотрим косинус-преобразование Фурье функции $f(x) = \frac{1 - e^{-\beta x}}{x}$, $\beta \geqslant 0$. Имеем

$$F_c(\lambda, \beta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\beta x}}{x} \cos \lambda x\, dx.$$

Для вычисления этого интеграла применим дифференцирование по β под знаком интеграла:

$$\frac{\partial F_c(\lambda, \beta)}{\partial \beta} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos \lambda x\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\beta}{\beta^2 + \lambda^2}, \quad \beta \neq 0,$$

откуда

$$F_c(\lambda,\beta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\ln(\beta^2+\lambda^2)+C,\quad \beta\neq 0.$$

Так как $F_c(\lambda,\beta)$ непрерывна в точке $\beta>0$ и при $\beta=0$ $F_c(\lambda,0)=0$, то $C=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\ln\lambda^2$. Итак,

$$F_c(\lambda,\beta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ln\frac{\sqrt{\beta^2+\lambda^2}}{\lambda}.$$

Отсюда при $\beta=1$ находим

$$F_c(\lambda,1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ln\left(1+\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Используя теорему обращения косинус-преобразования Фурье при $\lambda\geqslant 0$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}F_c(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda,$$

находим, что косинус-преобразование Фурье функции $y=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ равно $\sqrt{2\pi}f(\lambda,1)$, т. е. равно $\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$. Для обоснования законности применения теоремы обращения косинус-преобразования Фурье и теоремы дифференцирования по параметру заметим, что функция

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{-\beta x}}{x}, & x\neq 0,\\ -\beta, & x=0,\end{cases}$$

абсолютно интегрируема на $[0;+\infty)$, непрерывна и имеет непрерывную производную и интеграл $\int\limits_0^{+\infty}e^{-\beta x}\cos\lambda x\,dx$ сходится равномерно на множестве $\beta\geqslant\varepsilon>0$. Следовательно, дифференцирование по параметру законно для любого $\beta>0$.

Определение. Пусть $\varphi(x)$ определена на $(-\infty;+\infty)$. Обратным преобразованием Фурье функции $\varphi(x)$ называется функция

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda\right),$$

если главное значение несобственного интеграла существует.

Обратное преобразование Фурье функции $\varphi(x)$ обозначается $F^{-1}[\varphi]$.

Заметим, что если $\varphi(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty;+\infty)$, то обратное преобразование Фурье существует и

$$F^{-1}[\varphi]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda$$

(несобственный интеграл существует в обычном смысле).

Теорема обращения (для преобразования Фурье и для обратного преобразования Фурье). Пусть $f(x)\in\in\widetilde{R}^1(-\infty,+\infty)$, $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$ и для любого $x\in(-\infty;+\infty)$ выполнены условия Дини. Тогда имеют место равенства

$$F^{-1}[F[f]]=F[F^{-1}[f]]=f.$$

Справедливы следующие свойства преобразования Фурье:

1. $F[\alpha_1f_1+\alpha_2f_2]=\alpha_1F[f_1]+\alpha_2F[f_2]$ — линейность преобразования Фурье.

2. Пусть C_D — множество непрерывных на $(-\infty;+\infty)$ функций, абсолютно интегрируемых на $(-\infty;+\infty)$ и удовлетворяющих условию Дини в любой точке $x\in(-\infty;+\infty)$; тогда

$$F[f_1]=F[f_2]\Longleftrightarrow f_1\equiv f_2,\ f_i\in C_D,\quad i=1,2.$$

3. Пусть $f(x)\in\widetilde{R}^1(-\infty,+\infty)$, тогда

1) $F(\lambda)\in C(-\infty,+\infty)$;

2) $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty}|F(\lambda)|=0$;

3) $|F(\lambda)|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt.$

4. Пусть $f(x) \in \widetilde{R}^1(-\infty, +\infty)$, $f'(x) \in \widetilde{R}^1(-\infty, +\infty)$, тогда $F[f'] = i\lambda F[f]$.

5. Пусть $f(x) \in D^k(-\infty, +\infty)$, $D^l f(x) \in \widetilde{R}^1(-\infty, +\infty)$, $1 \leqslant l \leqslant k$, $k \in \mathbb{N}$, тогда

$$F[f^{(l)}] = (i\lambda)^l F[f], \quad 1 \leqslant l \leqslant k.$$

6. Пусть $f(x) \in D^k(-\infty, +\infty)$ и $D^l f(x) \in \widetilde{R}^1(-\infty, +\infty)$ для всех $1 \leqslant l \leqslant k$; тогда при $|\lambda| \to \infty$

$$|F(\lambda)| = o\left(\frac{1}{|\lambda|^k}\right).$$

7. Если $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$ абсолютно интегрируемы на $(-\infty; +\infty)$, то $F[f]$ абсолютно интегрируема на $(-\infty; +\infty)$.

8. Если $f(x) \in C^\infty(-\infty, +\infty)$ и $D^l f(x) \in \widetilde{R}^1(-\infty, +\infty)$ при любом l, то

$$F[f^{(l)}] \in \widetilde{R}^1(-\infty, +\infty)$$

при любом l, причем $|F[f^{(l)}]|$ убывает при $|\lambda| \to +\infty$ быстрее любой степени $\dfrac{1}{|\lambda|^k}$, $k \in \mathbb{N}$.

9. Пусть $f(x)$ и $xf(x)$ абсолютно интегрируемы на $(-\infty; +\infty)$. Тогда

$$F[f] \in C^1(-\infty, +\infty), \quad \lim_{|\lambda| \to \infty} |(F[f])'| = 0,$$

причем

$$(F[f])'_\lambda = F[-ixf(x)].$$

10. Пусть $x^l f(x) \in \widetilde{R}^1(-\infty, +\infty)$ при $l = 0, 1, 2, \ldots, k$. Тогда

$$F[f] \in C^k(-\infty, +\infty), \ \lim_{|\lambda| \to \infty} |D^l F[f]| = 0, \quad l = 0, 1, 2, \ldots, k,$$

причем

$$(F[f])^{(l)} = F[(-ix)^l f(x)], \quad l = 0, 1, 2, \ldots, k.$$

§ 4. УПРАЖНЕНИЯ

Разложить функцию $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на заданном отрезке. В примерах 3, 8, 9, 10, 11, 28, 29, 32, 34 указать функцию $g(x)$, к которой сходится полученный ряд.

1) $f(x) = x\sin x$ на $[-\pi;\pi]$. 2) $f(x) = x\cos x$ на $[-\pi;\pi]$.

3) $f(x) = \begin{cases} bx, & -\pi < x \leqslant 0, \\ ax, & 0 < x < \pi, \end{cases}$ на $[-\pi;\pi]$.

4) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi, \end{cases}$ на $[0;\pi]$.

5) $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x \leqslant 0, \\ 1 - x, & 0 < x < \pi, \end{cases}$ на $[-\pi;\pi]$.

6) $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leqslant x < 0, \\ x + 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$ на $[-1;1]$.

7) $f(x) = x^2$ на $[-\pi;\pi]$. 8) $f(x) = x^2$ на $[0;2\pi]$.

9) $f(x) = x^2$ на $[0;\pi]$.

10) $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < \pi, \\ -x^2, & -\pi < x < 0, \end{cases}$ на $[-\pi;\pi]$.

11) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x^2, & 0 < x < \pi, \end{cases}$ на $[-\pi;\pi]$.

12) $f(x) = \begin{cases} a, & |x| < h, \\ 0, & h \leqslant |x| \leqslant \pi, \end{cases}$ на $[-\pi;\pi]$.

13) $f(x) = \begin{cases} a, & 0 < x < h, \\ 0, & h \leqslant x \leqslant 2\pi, \end{cases}$ на $[0;2\pi]$.

14) $f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2h}, & |x| \leqslant h, \\ 0, & h \leqslant |x| \leqslant \pi, \end{cases}$ $h \neq \dfrac{\pi}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, на $[-\pi;\pi]$.

15) $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{\pi x}{h}, & 0 \leqslant x < h, \\ 0, & h \leqslant x \leqslant 2\pi, \end{cases}$ $h \neq \dfrac{\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, на $[0;2\pi]$.

16) $f(x) = \operatorname{sign}(\sin x)$ на $[-\pi;\pi]$.

17) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ \sin x, & 0<x\leqslant\pi,\end{cases}$ на $[-\pi;\pi]$.

18) $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{2}x, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 1+\cos\dfrac{1}{2}x, & \pi<x\leqslant 2\pi,\end{cases}$ на $[0;2\pi]$.

19) $f(x)=\begin{cases}0, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant |x|\leqslant\pi,\\ \cos x, & |x|<\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ на $[-\pi;\pi]$.

20) $f(x)=\begin{cases}-\sin x, & -\pi\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\end{cases}$ на $[-\pi;\pi]$.

21) $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ \dfrac{x^2}{\pi}, & 0<x\leqslant\pi,\end{cases}$ на $[-\pi;\pi]$.

22) $f(x)=\sin^5 x$ на $[-\pi;\pi]$.

23) $f(x)=\cos^4 x$ на $[-\pi;\pi]$.

24) $f(x)=\arcsin(\cos x)$ на $[-10\pi;10\pi]$.

25) $f(x)=\arcsin(\sin x)$ на $[6\pi;20\pi]$.

26) $f(x)=\operatorname{ch} x$ на $[-\pi;\pi]$.

27) $f(x)=\operatorname{sh} x$ на $[-\pi;\pi]$.

28) $f(x)=\sin x$ на $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

29) $f(x)=\cos x$ на $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

30) $f(x)=\cos x$ на $[0;\pi]$.

31) $f(x)=\begin{cases}-1, & -c<x\leqslant 0,\\ 1, & 0<x<c,\end{cases}$ на $[-c;c]$.

32) $f(x)=\begin{cases}0, & -c<x\leqslant 0,\\ 1, & 0<x<c,\end{cases}$ на $[-c;c]$.

33) $f(x)=x$ на $[-c;c]$.

34) $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\leqslant c,\\ 0, & -c<x\leqslant 0,\end{cases}$ на $[-c;c]$.

35) $f(x)=|x|$ на $[-c;c]$.

36) $f(x) = x - [x]$ на $[0;3]$. 37) $f(x) = x^2$ на $[-1;1]$.

38) $f(x) = x^2$ на $[0;2]$. 39) $f(x) = c^2 - x^2$ на $[-c;c]$.

40) $f(x)=x(c^2-x^2)$ на $[-c;c]$. 41) $f(x) = (c^2 - x^2)^2$ на $[-c;c]$.

42) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right], \\ -\cos x, & x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right], \end{cases}$ на $[0;\pi]$.

43) $f(x) = e^{ax}$, $a \neq 0$, на $[-\pi;\pi]$.

44) $f(x) = \cos ax$, a — не целое, на $[-\pi;\pi]$.

45) $f(x) = x^2 \cos x$ на $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на заданном отрезке по косинусам кратных дуг.

46) $f(x) = \sin x$ на $[0;\pi]$. 47) $f(x) = x\cos x$ на $[0;\pi]$.

48) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{l}{2}, \\ 2x - l, & \dfrac{l}{2} < x \leqslant l, \end{cases}$ на $[0;l]$.

49) $f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2h}, & 0 \leqslant x \leqslant 2h, \\ 0, & 2h < x \leqslant \pi, \end{cases}$ на $[0;\pi]$.

50) $f(x) = e^{ax}$ на $[0;\pi]$. 51) $f(x) = \sin ax$ на $[0;\pi]$.

52) $f(x) = \operatorname{ch} ax$ на $[0;\pi]$.

Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на заданном отрезке по синусам кратных дуг.

53) $f(x) = \cos x$ на $[0;\pi]$. 54) $f(x) = x\sin x$ на $[0;\pi]$.

55) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{hx}{c}, & 0 \leqslant x \leqslant c, \\ \dfrac{h}{l-c}(l-x), & c < x \leqslant l, \end{cases}$ $0 < c < l$, на $[0;l]$.

56) $f(x) = e^{ax}$ на $[0;\pi]$.

57) $f(x) = \sin ax, a$ — не целое, на $[0;\pi]$.

58) $f(x) = \operatorname{sh} ax$ на $[0;\pi]$.

Пользуясь формулами

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}),$$

разложить в тригонометрический ряд Фурье следующую функцию

59) $y = \cos^{2m} x, \quad m \in \mathbb{N}.$

60) $y = \dfrac{q\sin x}{1 - 2q\cos x + q^2}, \quad |q| < 1.$

61) $y = \dfrac{1 - q^2}{1 - 2q\cos x + q^2}, \quad |q| < 1.$

62) $y = \dfrac{1 - q\cos x}{1 - 2q\cos x + q^2}, \quad |q| < 1.$

Разложить в тригонометрический ряд Фурье следующую неограниченную периодическую функцию

63) $y = \ln\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|.$ 64) $y = \ln\left|\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right|.$

65) $y = \displaystyle\int_0^x \ln\sqrt[3]{\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|}\,dt, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$

66) Как следует продолжить заданную в интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ непрерывную функцию $f(x)$ в интервал $(-\pi; \pi)$, чтобы ее разложение в ряд Фурье имело вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x, \quad -\pi < x < \pi.$$

67) Как следует продолжить заданную в интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ непрерывную функцию $f(x)$ в интервал $(-\pi; \pi)$, чтобы ее разложение в ряд Фурье имело вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)x, \quad -\pi < x < \pi.$$

68) Пользуясь разложением функции $y = \operatorname{sign} x$, $-\pi < x < \pi$, в тригонометрический ряд Фурье, найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}.$$

69) Пользуясь разложением функции $y = x^2$ в ряд Фурье

1) по синусам кратных дуг,

2) по косинусам кратных дуг,

3) в интервале $(0; 2\pi)$,

найти суммы

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

70) Пользуясь разложением функции $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ в тригонометрический ряд Фурье на промежутке $(0; 2\pi)$, получить разложения

а) $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k}$, $0 < x < \pi$;

б) $\frac{\pi}{4} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$, $0 < x < \pi$.

71) Найти сумму ряда, используя результат задачи 70:

а) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$;

б) $1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \cdots$;

в) $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \cdots$.

72) Написать равенство Парсеваля для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \alpha, \\ 0, & 0 < |x| < \pi, \end{cases}$$

и, исходя из этого равенства, найти сумму ряда

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$.

73) Исходя из разложения

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}, \quad |x| < \pi,$$

и результатов, изложенных в примере 11, почленным интегрированием получить разложение в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(-\pi; \pi)$ функции

а) $x^2 + 2x$; б) $x^3 + x^2$; в) x^4.

74) Доказать справедливость равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^4} = \frac{1}{96}\pi(\pi - 2x)(\pi^2 + 2\pi x - 2x^2), \quad x \in [0; \pi].$$

75) Используя разложение функций $y = x$ и $y = x^2$ в ряд Фурье по косинусам кратных дуг, получить формулу

$$\frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad x \in [0; 2\pi].$$

76) Исходя из разложения $\dfrac{\pi - x}{2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, $0 < x < 2\pi$, получить формулу для $-\infty < x < +\infty$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi nx}{n} = \begin{cases} x - E(x), & x \text{ — нецелое}, \\ \dfrac{1}{2}, & x \text{ — целое}, \end{cases}$$

где $E(x)$ — целая часть числа x.

77) Исходя из разложения функции $y = \cos ax$ в ряд Фурье (см. задачу 44), получить формулу

а) $\dfrac{1}{\sin a\pi} = \dfrac{1}{a\pi} + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\pi \cdot (-1)^n}{(a\pi)^2 - (\pi n)^2}$, a не целое;

б) $\dfrac{1}{\sin z} = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{z - \pi n} + \frac{1}{z + \pi n}\right]$, $z \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

в) $\operatorname{ctg} z = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z - \pi n} + \frac{1}{z + \pi n}\right]$, $z \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

78) Исходя из разложений функций $y = \operatorname{ch} ax$ и $y = \operatorname{sh} ax$ в ряд Фурье (см. задачи 26 и 27), получить формулу

а) $\dfrac{1}{\operatorname{sh} z} = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z}{z^2 + \pi^2 n^2}$;

б) $\operatorname{cth} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + \pi^2 n^2}, \quad z \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

79) Доказать формулы:

а) $\cos x - \frac{\cos 5x}{5} + \frac{\cos 7x}{7} - \frac{\cos 11x}{11} + \dots =$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2\sqrt{3}}, & 0 \leqslant x < \frac{\pi}{3}, \\ \frac{\pi}{4\sqrt{3}}, & x = \frac{\pi}{3}, \\ 0, & \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}, \\ -\frac{\pi}{4\sqrt{3}}, & x = \frac{2\pi}{3}, \\ -\frac{\pi}{2\sqrt{3}}, & \frac{2\pi}{3} < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

б) $\sin x - \frac{\sin 5x}{5^2} + \frac{\sin 7x}{7^2} - \frac{\sin 11x}{11^2} + \dots =$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2\sqrt{3}} x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}, \\ \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}, & \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}, \\ \frac{\pi}{2\sqrt{3}}(\pi - x), & \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

в) $\frac{1}{4}\sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1} \sin nx = \sin x \cdot \ln 2\cos\frac{x}{2}, \quad |x| < \pi.$

г) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cos x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 - 1} \cos nx = \cos x \cdot \ln 2\cos\frac{x}{2}, \quad |x| < \pi.$

Найти сумму ряда.

80) а) $1 + \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{\cos nx}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} + \dots,$

б) $\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{\sin nx}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} + \dots.$

81) а) $\frac{\cos x}{1!}-\frac{\cos 3x}{3!}+\frac{\cos 5x}{5!}-\ldots$, б) $\frac{\sin x}{1!}-\frac{\sin 3x}{3!}+\frac{\sin 5x}{5!}-\ldots$

82) а) $1-\frac{\cos 2x}{2!}+\frac{\cos 4x}{4!}-\ldots$, б) $\frac{\sin 2x}{2!}-\frac{\sin 4x}{4!}+\frac{\sin 6x}{6!}-\ldots$

83) а) $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n(n+1)}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n(n+1)}$.

84) а) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos nx}{n^2-1}$, б) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin nx}{n^2-1}$.

85) а) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n^2-1}\cos nx$, б) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n^2-1}\sin nx$.

86) а) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos nx}{(n+1)(n+2)}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{(n+1)(n+2)}$.

87) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2n-1)x}{n}$.

88) а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{(n-1)n}$, б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{(n-1)n(n+1)}$.

89) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)2n}$.

90) а) $\cos x+\frac{1}{2}\frac{\cos 3x}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\cos 5x}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\cos 7x}{7}+\ldots$,

б) $\sin x+\frac{1}{2}\frac{\sin 3x}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\sin 5x}{5}+\ldots$.

91) а) $\frac{\cos x}{1\cdot 2}+\frac{1}{2}\frac{\cos 3x}{3\cdot 4}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\cos 5x}{5\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\cos 7x}{7\cdot 8}+\ldots$,

б) $\frac{\sin x}{1\cdot 2}+\frac{1}{2}\frac{\sin 3x}{3\cdot 4}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\sin 5x}{5\cdot 6}+\ldots$.

Доказать равенства.

92) $\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\ldots=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\sin x,\quad 0<x<\pi$.

93) $\dfrac{\sin x}{1^3}+\dfrac{\sin 3x}{3^3}+\dfrac{\sin 5x}{5^3}+\dots=\dfrac{\pi x}{8}(\pi-x),\quad 0<x<\pi.$

94) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+2)\varphi}{n(n+1)}=\sin 2\varphi-(\pi-2\varphi)\sin^2\varphi-$$
$$-\sin\varphi\cos\varphi\cdot\ln(4\sin^2\varphi),\quad 0<x<\pi.$$

95) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\varphi}{n^2(n+1)^2}=2(\pi-2\varphi)\sin\varphi+$$
$$+\left(\frac{\pi^2}{3}-2\pi\varphi+2\varphi^2-3\right)\cos\varphi,\quad 0<x<\pi.$$

96) $\dfrac{\cos 3x}{1\cdot 3\cdot 5}-\dfrac{\cos 5x}{3\cdot 5\cdot 7}+\dfrac{\cos 7x}{5\cdot 7\cdot 9}-\dots=\dfrac{\pi}{8}\cos^2 x-\dfrac{1}{3}\cos x,\quad 0<x<\pi.$

97) $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2-1}=\frac{1}{2}+\frac{\cos x}{4}-\frac{\pi-x}{2}\sin x,\quad 0<x<2\pi.$$

98) $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2-1}=\sin x\left(\frac{1}{4}-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\right),\quad 0<x<2\pi.$$

99) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n(n^2+a^2)}=\frac{1}{2a^2}[\pi-x-\pi\operatorname{ch}ax+\pi\operatorname{cth}a\pi\cdot\operatorname{sh}ax],$$
$0<x<\pi.$

100) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n(n^2+a^2)}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{\pi\operatorname{sh}ax}{2\operatorname{sh}\pi a}-\frac{x}{2}\right),\quad -\pi<x<\pi.$$

101) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^4-4}=\frac{1}{8}\left[1-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{\cos(x\sqrt{2})}{\sin(\pi\sqrt{2})}-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{\operatorname{ch}(x\sqrt{2})}{\operatorname{sh}(\pi\sqrt{2})}\right],$$
$-\pi<x<\pi.$

Разложив функцию $f(x)$ в ряд Фурье, вычислить интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. Использовать следующие разложения:

$$\frac{1-a\cos bx}{1-2a\cos bx+a^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos nbx,\quad |a|<1;$$

$$\frac{a\sin bx}{1-2a\cos bx+a^2}=\sum_{n=1}^{\infty}a^n\sin nbx,\quad |a|<1;$$

$$\frac{1-a^2}{1-2a\cos bx+a^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos nbx,\quad |a|<1.$$

102) $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\,dx.$

103) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos nx\ln(1-2a\cos x+a^2)\,dx,\quad n\in\mathbb{N}.$

104) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\ln\sin x\,dx}{1-2a\cos x+a^2}.$ 105) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin mx\,dx}{1-2a\cos x+a^2},\quad m\in\mathbb{N}.$

106) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}\,dx.$

107) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^2}\cdot\frac{\sin bx}{1-2a\cos bx+a^2},\quad b>0.$

108) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2}\,dx.$ 109) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\,dx}{1-2a\cos 2x+a^2}.$

110) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{x^2\sin x\,dx}{1-2a\cos x+a^2}.$ 111) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{x\cos mx\,dx}{1-2a\cos x+a^2},\quad m\in\mathbb{N}.$

112) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin mx\sin x\,dx}{1-2a\cos x+a^2},\quad m\in\mathbb{N}.$ 113) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\ln\sin x\,dx}{1-a\cos x},\quad |a|<1.$

114) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos mx\,dx}{1-a\cos x},\quad m\in\mathbb{N},\ |a|<1.$

115) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos mx}{1-2a\cos x+a^2}\,dx, \quad m \in \mathbb{N},\ |a|<1.$

116) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{\sin mx\,dx}{1-a\cos x}, \quad m \in \mathbb{N},\ |a|<1.$

117) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x\,dx}{1-a\cos x}, \quad |a|<1.$

118) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \ln(1-a\cos x)\,dx, \quad |a|<1.$

119) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos nx\cdot\ln(1-a\cos x)\,dx, \quad |a|<1.$

120) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{x\,dx}{1-a\cos 2x}, \quad |a|<1.$

121) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{x\cos mx\,dx}{1-a\cos x}, \quad |a|<1,\ m \in \mathbb{N}.$

122) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{x^2\sin x\,dx}{1-a\cos x}, \quad |a|<1.$

123) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\sin mx\cdot\sin x\,dx}{1-a\cos x}, \quad m \in \mathbb{N},\ |a|<1.$

124) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin bx\,dx}{(1+x^2)(1-a\cos bx)}, \quad |a|<1,\ b>0.$

125) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1-a\cos bx)}, \quad |a|<1,\ b>0.$

Найти интеграл Фурье $F(x)$ функции $f(x)$. Построить график функции $F(x)$.

126) $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$ 127) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

128) $f(x) = \begin{cases} e^{-\beta x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

129) $f(x) = \begin{cases} h\left(1 - \dfrac{|x|}{a}\right), & |x| \leqslant a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$

130) $f(x) = \dfrac{1}{a^2 + x^2}, \quad a > 0.$ 131) $f(x) = \dfrac{x}{a^2 + x^2}, \quad a > 0.$

132) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leqslant \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$ 133) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

134) $f(x) = \operatorname{sign}(x - a) - \operatorname{sign}(x - b), \quad b > a.$

135) $f(x) = \begin{cases} A \sin \omega x, & |x| \leqslant \dfrac{2\pi n}{\omega}, \\ 0, & |x| > \dfrac{2\pi n}{\omega}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$

136) $f(x) = e^{-\alpha|x|}, \quad \alpha > 0.$

137) $f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -e^{\alpha x}, & x < 0, \end{cases} \quad \alpha > 0.$

138) $f(x) = e^{-\alpha|x|} \cos \beta x, \quad \alpha > 0.$

139) $f(x) = e^{-\alpha|x|} \sin \beta x, \quad \alpha > 0.$

140) $f(x) = e^{-x^2}.$

141) $f(x) = xe^{-x^2}.$

Найти преобразование Фурье функции $f(x)$.

142) $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

143) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & -\infty < x \leqslant 0 \ \cup \ 1 < x < +\infty. \end{cases}$

144) $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

145) $f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leqslant 1, \\ 1, & 1 < |x| < 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$

146) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & |x| \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{2}, & 1 < |x| \leqslant 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$

147) $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

148) $f(x) = \begin{cases} x\cos x, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

149) $f(x) = \begin{cases} e^{-x}\cos x, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

150) $f(x) = e^{-\alpha|x|}, \quad \alpha > 0.$

151) $f(x) = xe^{-\alpha|x|}, \quad \alpha > 0.$

152) $f(x) = e^{-|x|}\cos\omega x.$

153) $f(x) = e^{-|x|}\sin\omega x.$

154) $f(x) = e^{-\alpha^2x^2}.$

155) $f(x) = xe^{-x^2}.$

156) $f(x) = e^{-2|x-1|}.$

157) $f(x) = (2x+1)e^{-|x|}.$

158) $f(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}.$

159) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\cos\alpha x.$

160) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+x^4}.$

161) $f(x) = \dfrac{x\cos x}{(1+x^2)^2}.$

Найти синус-преобразование Фурье функции $f(x)$.

162) $f(x) = \begin{cases} 4x - 1, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{4}, \\ 0, & x > \dfrac{1}{4}. \end{cases}$

163) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant a, \\ \dfrac{1}{2}, & x = a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$

164) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$

165) $f(x) = 5^{-x}.$

166) $f(x) = x^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$

167) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}.$

168) $f(x) = xe^{-x^2/2}.$

169) $f(x) = \dfrac{1}{e^{2\pi x} + 1}$.

170) $f(x) = \dfrac{1}{e^{\sqrt{2\pi x}} - 1} - \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}}$.

171) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sh} \pi x}$.

172) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sh}\left(x\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)} - \dfrac{1}{x\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$.

173) $f(x) = \max((2x - x^2), 0)$.

174) $f(x) = \begin{cases} \arcsin(\sin x), & 0 \leqslant x < \pi, \\ 0, & x \geqslant \pi. \end{cases}$

175) $f(x) = \dfrac{x}{(1 + x^2)^2}$.

176) $f(x) = \dfrac{x}{a^2 + x^2}$.

177) $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2 + b^2)}$.

178) $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2 + b^2)^2}$.

179) $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x}$.

180) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^{1+a}}, \quad 0 < a < 1$.

Найти косинус-преобразование Фурье функции $f(x)$.

181) $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & 0 \leqslant x \leqslant 3/2, \\ 0, & x > 3/2. \end{cases}$

182) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$

183) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$

184) $f(x) = 2^{-x}$.

185) $f(x) = x^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$.

186) $f(x) = \dfrac{1 - e^{-\beta x}}{x}, \quad \beta \geqslant 0$.

187) $f(x) = e^{-x^2}$.

188) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

189) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^4}$.

190) $f(x) = \dfrac{1}{a^2 + x^2}$.

191) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

192) $f(x) = \dfrac{x \sin \pi x}{1 - x^2}$.

ОТВЕТЫ К ГЛАВЕ III

1) $1-\frac{1}{2}\cos x - 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}\cos nx.$

2) $-\frac{1}{2}\sin x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2-1}\sin nx.$

3) $\frac{\pi}{4}(a-b)-\frac{2}{\pi}(a-b)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n};$

$$g(x)=\begin{cases} bx, & -\pi<x<0,\\ ax, & 0\leqslant x<\pi,\\ \frac{a-b}{2}\pi, & x=\pm\pi.\end{cases}$$

4) $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(4n+2)x}{(2n+1)^2}.$

5) $\frac{4-\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n}.$

6) $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+3(-1)^{n+1}}{n}\sin \pi nx.$

7) $\frac{\pi^2}{3}-4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2}.$

8) $\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2}-\frac{\pi\sin nx}{n}\right),$

$$g(x)=\begin{cases} x^2, & x\in(0;2\pi),\\ 2\pi^2, & x=0,\ x=2\pi.\end{cases}$$

9) $\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos 2nx}{n^2}-\frac{\pi\sin 2nx}{n}\right),\ g(x)=\begin{cases} x^2, & x\in(0;\pi),\\ \frac{1}{2}\pi^2, & x=0,\ x=\pi.\end{cases}$

10) $2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}-\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3},$

$$g(x)=\begin{cases} x^2, & x\in(0;\pi),\\ -x^2, & x\in(-\pi,0),\\ 0, & x=\pi,\ x=0,\ x=-\pi.\end{cases}$$

11) $f(x) = \dfrac{\pi^2}{6} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}\cos nx}{n^2} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n} -$

$-\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}$, $g(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leqslant 0, \\ x^2, & 0 < x < \pi, \\ \frac{1}{2}\pi^2, & x = \pm\pi. \end{cases}$

12) $\dfrac{ah}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2a}{\pi n} \sin nh \cos nx.$

13) $\dfrac{ah}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a}{\pi n}[(1 - \cos nh)\sin nx + \sin nh \cos nx].$

14) $\dfrac{2h}{\pi^2} + 4h\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nh}{4\pi^2 h^2 - \pi^2} \cos nx.$

15) $\dfrac{h}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{h \sin nh}{\pi^2 - h^2 n^2} \sin nx + \dfrac{h(1 + \cos nh)}{\pi^2 - h^2 n^2} \cos nx \right).$

16) $\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$

17) $\dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{2}\sin x - \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{\pi(4n^2-1)} \cos 2nx.$

18) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2\cos(2n-1)x}{(4n-3)(4n-1)} - \dfrac{\sin(2n-1)x}{(4n-3)(4n-2)(4n-1)} \right).$

19) $\dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{2}\cos x - \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{\pi(4n^2-1)} \cos 2nx.$

20) $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{\pi} - \dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{2}{\pi}\cos x +$

$+\sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(\dfrac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} + \dfrac{(-1)^{n+1} - 1}{\pi(n^2-1)} \right) \cos nx + \dfrac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n} \right].$

21) $\dfrac{5}{12}\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx - \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4\sin(2n-1)x}{\pi^2(2n-1)^3}.$

22) $\dfrac{5}{8}\sin x - \dfrac{5}{16}\sin 3x + \dfrac{1}{16}\sin 5x.$

23) $\dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{8}\cos 4x.$

24) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2}\cos(2n+1)x.$

25) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)^2}\sin(2n+1)x.$

26) $\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi} + \frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos nx.$

27) $\frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{1+n^2}\sin nx.$

28) $\frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{4n^2-1}\sin 2nx,\ g(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

29) $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\cos 2nx}{4n^2-1},\ g(x) = \cos x,\ |x| \leqslant \frac{\pi}{2}.$

30) $\frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin 2nx}{4n^2-1}.$

31) $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{c}.$

32) $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{c},$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & -c < x < 0, \\ 1, & 0 < x < c, \\ \frac{1}{2}, & x = 0,\ x = c,\ x = -c. \end{cases}$$

33) $\frac{2c}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{c}.$

34) $\frac{c}{4} - \frac{2c}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\frac{(2n+1)\pi x}{c}}{(2n+1)^2} + \frac{c}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi n x}{c}}{n},$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & -c < x < 0, \\ x, & 0 \leqslant x < c, \\ \frac{c}{2}, & x = \pm c. \end{cases}$$

35) $\dfrac{c}{2}-\dfrac{4c}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}\cos\dfrac{(2n+1)\pi x}{c}$.

36) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2\pi nx}{n}$.

37) $\dfrac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{4(-1)^n}{(\pi n)^2}\cos\pi nx$.

38) $\dfrac{4}{3}+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{\cos\pi nx}{\pi^2n^2}-\left(\dfrac{2}{\pi n}-\dfrac{1}{n^3\pi^3}\right)\sin\pi nx\right]$.

39) $\dfrac{2}{3}c^2+\dfrac{4c^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos\dfrac{\pi nx}{c}$.

40) $\dfrac{12c^3}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^3}\sin\dfrac{\pi nx}{c}$.

41) $\dfrac{8}{15}c^4+\dfrac{48c^4}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^4}\cos\dfrac{\pi nx}{c}$.

42) $\dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\cos 2nx}{4n^2-1}\right]$.

43) $\dfrac{2}{\pi}\operatorname{sh}a\pi\left\{\dfrac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{a^2+n^2}[a\cos nx-n\sin nx]\right\}$.

44) $\dfrac{\sin a\pi}{\pi a}+\dfrac{2a}{\pi}\sin a\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos nx}{a^2-n^2}$.

45) $\dfrac{\pi^2-8}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\dfrac{192n^2+4}{\pi(16n^2-1)^3}-\dfrac{\pi}{16n^2-1}\right)\cos 4nx-\right.$
$\left.-\left(\dfrac{8n}{(16n^2-1)^2}+\dfrac{128n^3+24n}{\pi(16n^2-1)^3}\right)\sin 4nx\right]$.

46) $\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nx}{4n^2-1}$.

47) $-\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{\pi}{2}\cos x-\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n^2+1}{(4n^2-1)^2}\cos 2nx$.

48) $\dfrac{l}{4}-\dfrac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos\frac{\pi(2n+1)x}{l}}{(2n+1)^2}+\dfrac{8l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\frac{\pi(4n+2)x}{l}}{(4n+2)^2}$.

49) $\dfrac{2h}{\pi}\left\{\dfrac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin hn}{hn}\right)^2\cos nx\right\}$.

50) $\dfrac{e^{a\pi}-1}{a\pi}+\dfrac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot e^{a\pi}-1}{a^2+n^2}\cos nx$.

51) Если a целое, то при $a=2m$

$$\sin 2mx=\frac{8m}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2m)^2-(2n-1)^2},$$

при $a=2m-1$

$$\sin(2m-1)x=\frac{2}{\pi}\left\{1+2(2m-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(2m-1)^2-(2n)^2}\right\};$$

если a не целое, то

$$\sin ax=\frac{1-\cos\pi a}{\pi}\left\{1+2a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{a^2-(2n)^2}+\right.$$

$$\left.+2a\frac{1+\cos\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{a^2-(2n-1)^2}\right\}.$$

52) $\dfrac{\operatorname{sh} a\pi}{\pi a}+2\operatorname{sh} a\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{a}{a^2+n^2}\cos nx$.

53) $\dfrac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{4n^2-1}\sin 2nx$.

54) $-\dfrac{\pi}{2}\sin x-\dfrac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx$.

55) $\dfrac{2hl^2}{\pi^2c(l-c)}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{\pi nc}{l}\sin\dfrac{\pi nx}{l}$.

56) $\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[1-(-1)^n e^{\pi a}]\dfrac{n}{a^2+n^2}\sin nx$.

57) $\dfrac{2\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n\sin nx}{a^2-n^2}$.

58) $\dfrac{2\operatorname{sh} a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{a^2+n^2}\sin nx$.

59) $\dfrac{1}{2^m}C_{2m}^m+\dfrac{1}{2^{m-1}}\sum_{n=1}^{m}C_{2m}^{m-n}\cos 2nx$.

60) $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx$.

61) $1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos nx$.

62) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx$.

63) $-\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n}$.

64) $2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}$.

65) $-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

66) $f(-x) = f(x)$, $f(\pi - x) = -f(x)$.

67) $f(-x) = -f(x)$, $f(\pi - x) = f(x)$.

68) $\frac{\pi}{4}$. Указание. $y = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$.

69) а) $\frac{\pi^2}{6}$; б) $\frac{\pi^2}{12}$; в) $\frac{\pi^2}{8}$.

70) Указание. $\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, $0 < x < 2\pi$; а) в разложении функции $y = \frac{\pi - x}{2}$ заменить x на $2x$; б) вычесть из разложения функции $y = \frac{\pi - x}{2}$ разложение функции $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$.

71) а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

72) а) $\frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}$; б) $\frac{\pi^2 - 3\pi\alpha + 3\alpha^2}{6}$.

73) а) $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin nx}{n}$;

б) $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + 2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{2} +$
$+ 12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin nx}{n^3}$;

в) $\frac{1}{5}\pi^4 + 8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + 48\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}\cos nx$.

74) Указание. Разлагая в ряд Фурье функцию, приведенную в правой части, при повторном интегрировании по частям учесть, что значения ее производной в точках 0 и π равны 0.

75) Указание. Получив разложение функции $\dfrac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12}$ на $[0;\pi]$, доказать, что обе части полученного равенства не меняются при замене x на $2\pi - x$.

80) а) $e^{\cos x}\cdot\cos(\sin x)$; б) $e^{\cos x}\sin(\sin x)$. Указание. Рассмотреть $\varphi(e^{ix})$, где $\varphi(z)=e^z$.

81) а) $\sin(\cos x)\operatorname{ch}(\sin x)$; б) $\cos(\cos x)\operatorname{sh}(\sin x)$. Указание. Рассмотреть $\varphi(\cos x+i\sin x)$, где $\varphi(z)=\sin z$ и использовать формулу $\sin(\alpha+\beta i)=\sin\alpha\operatorname{ch}\beta+i\cos\alpha\operatorname{sh}\beta$.

82) а) $\cos(\cos x)\cdot\operatorname{ch}(\sin x)$; б) $\sin(\cos x)\operatorname{sh}(\sin x)$. Указание. Рассмотреть $\varphi(\cos x+i\sin x)$, где $\varphi(z)=\cos z$ и использовать формулу $\cos(\alpha+\beta i)=\cos\alpha\operatorname{ch}\beta-i\sin\alpha\operatorname{sh}\beta$.

83) а) $(1+\cos x)\ln 2\cos\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}x\sin x$, $|x|<\pi$; б) $\dfrac{1}{2}x(1+\cos x)-$ $-\sin x\ln\left(2\cos\dfrac{x}{2}\right)$, $|x|<\pi$. Указание. Рассмотреть $\varphi(e^{ix})$, где $\varphi(z)=\left(1+\dfrac{1}{z}\right)\ln(1+z)$ и использовать равенства $\varphi(z)=1+\ln(1+z)+\dfrac{1}{z}(\ln(1+z)-z)$ и $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$.

84) а) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\cos x-\dfrac{x\sin x}{2}$;

б) $\begin{cases}\sin x\left(\ln 2\cos\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}\right), & x\neq k\pi,\\ 0, & x=k\pi.\end{cases}$ Указание. Применяя равенство $\dfrac{1}{n^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)$, рассмотреть функцию $\varphi(z)=\ln(1+z)$.

85) а) $\sin x\cdot\ln 2\cos\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}\sin x$, $|x|<\pi$;

б) $\cos x\cdot\ln 2\cos\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\cos x$, $|x|<\pi$.

86) а) $(\cos x+\cos 2x)\ln 2\cos\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}(\sin x+\sin 2x)-\cos x$;

б) $(\sin x + \sin 2x)\ln 2\cos\frac{x}{2} - \frac{x}{2}(\cos x + \cos 2x) - \sin x$.

87) $\cos x \ln 2\cos x + x\sin x,\ 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$;

$\cos x \ln 2|\cos x| + (x - \pi)\sin x,\ \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi$.

Указание. Рассмотреть функцию $\varphi(z) = \frac{1}{z}\ln(1 + z^2)$.

88) а) $(1 - \cos x)\ln 2\sin\frac{x}{2} - \frac{\pi - x}{2}\sin x + \cos x,\ 0 < x < 2\pi$;

б) $(1 - \cos x)\ln 2\sin\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\cos x - \frac{1}{2},\ 0 < x < 2\pi$.

Указание. Использовать равенства $\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$; $\frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}$. Рассмотреть функцию $\varphi(z) = \ln(1 - z)$.

89) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\cos x \ln 2\cos x + x\sin x),\ 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$;

$-\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\cos x \ln 2|\cos x| + (x - \pi)\sin x),\ \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi$.

Указание. См. пример 2 гл. II § 2 и задачу 87.

90) а) $\arcsin\frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}},\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$;

б) $\ln(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{\sin x}),\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$. Указание. Рассмотреть функцию $\varphi(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{z^{2n-1}}{2n-1} = \arcsin z$; проверить формулу

$$\arcsin e^{ix} = \arcsin\frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}} + i\ln(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{\sin x}).$$

91) а) $\arcsin\frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}} + \sqrt{2\sin x}\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$;

б) $\ln(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{\sin x}) - \sqrt{2\sin x}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Указание. Рассмотреть функцию

$$\varphi(z) = \arcsin z + \frac{1}{z}(\sqrt{1-z^2} - 1) =$$

$$= \left\{ z + \frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{z^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{z^7}{7} + \cdots \right\} -$$

$$- \frac{1}{z}\left\{ \frac{1}{2}z^2 + \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}z^4 + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}z^6 + \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}z^8 + \cdots \right\} =$$

$$= \frac{z}{1\cdot 2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3\cdot 4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{z^5}{5\cdot 6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{z^7}{7\cdot 8} + \cdots.$$

102) 0 при $|a| < 1$, $2\pi \ln |a|$ при $|a| > 1$. Указание. Продифференцировать по a.

103) $-\frac{\pi}{n}a^n$ при $|a| < 1$, $-\frac{\pi}{na^n}$ при $|a| > 1$. Указание. Продифференцировать по a.

104) $\frac{\pi}{1-a^2}\ln\frac{1-a^2}{2}$ при $|a| < 1$, $\frac{\pi}{a^2-1}\ln\frac{a^2-1}{2a^2}$ при $|a| > 1$.
Указание. Разложив функцию $\frac{1}{1-2a\cos x + a^2}$ в ряд, проинтегрировать по частям.

105) 0. 106) 2π.

107) $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{e^b - a}$ при $|a| < 1$, $\frac{\pi}{2a}\frac{1}{ae^b - 1}$ при $|a| > 1$. Указание. Разложить $\frac{\sin bx}{1 - 2a\cos bx + a^2}$ в ряд по системе $\{\sin nbx\}$ и использовать значение интеграла Лапласа (см. пример 55 гл. I § 3).

108) π при $|a| < 1$, 0 при $|a| > 1$.

109) $\frac{\pi^2}{2(1-a^2)}$ при $|a| < 1$, $\frac{\pi^2}{2(a^2-1)}$ при $|a| > 1$.

110) $\frac{4\pi^2}{a}\ln(1-a)$ при $|a| < 1$, $\frac{4\pi^2}{a}\ln\left(1 - \frac{1}{a}\right)$ при $|a| > 1$.

111) $\frac{2\pi^2 a^m}{1-a^2}$ при $|a| < 1$, $\frac{2\pi^2}{a^m(a^2-1)}$ при $|a| > 1$.

112) $\frac{\pi}{2}a^{m-1}$ при $|a| < 1$, $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{a^{m+1}}$ при $|a| > 1$.

113) $\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\ln\frac{\sqrt{1-a^2}}{1+\sqrt{1-a^2}}$. Указание. Положив $a = \sin\alpha$,

привести знаменатель к виду $1 - 2\lambda\cos x + \lambda^2$, $\lambda = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. Восстановить a из уравнения $\lambda = \dfrac{a}{1+\sqrt{1-a^2}}$.

114) $\dfrac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\left(\dfrac{a}{1+\sqrt{1-a^2}}\right)^m$. См. указание к задаче 113.

115) $2\pi\dfrac{a^m}{1-a^2}$. 116) 0. См. указание к задаче 113.

117) $\dfrac{2\pi}{a}\ln\left(1+\dfrac{a}{1+\sqrt{1-a^2}}\right)$. См. указание к задаче 113.

118) $\pi\ln\dfrac{1+\sqrt{1-a^2}}{2}$. См. указание к задаче 113.

119) $-\dfrac{\pi}{n}\left(\dfrac{a}{1+\sqrt{1-a^2}}\right)^n$. См. указание к задаче 113.

120) $\dfrac{2\pi^2}{\sqrt{1-a^2}}$. См. указание к задаче 113.

121) $\dfrac{2\pi^2}{\sqrt{1-a^2}}\left(\dfrac{a}{1+\sqrt{1-a^2}}\right)^m$. См. указание к задаче 113.

122) $\dfrac{8\pi^2}{a}\ln\left(1-\dfrac{a}{1+\sqrt{1-a^2}}\right)$. См. указание к задаче 113.

123) $\dfrac{\pi}{a}\left(\dfrac{a}{1+\sqrt{1-a^2}}\right)^m$. См. указание к задаче 113.

124) $\dfrac{\pi}{e^b(1+\sqrt{1-a^2})-a}$. См. указания к задачам 113 и 107.

125) $\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\dfrac{1+\sqrt{1-a^2}+ae^{-b}}{1+\sqrt{1-a^2}-ae^{-b}}$. См. указания к задачам 113 и 107.

126) $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda$. 127) $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{1-\cos\lambda}{\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda$.

128) $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\beta\cos\lambda x+\lambda\sin\lambda x}{\lambda^2+\beta^2}\,d\lambda$. 129) $\dfrac{2h}{\pi a}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{1-\cos a\lambda}{\lambda^2}\cos\lambda x\,d\lambda$.

130) $\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-a\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda$. 131) $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-a\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda$.

132) $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda\pi}{1-\lambda^2}\sin\lambda x\,d\lambda.$ 133) $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\frac{\lambda\pi}{2}}{1-\lambda^2}\cos\lambda x\,d\lambda.$

134) $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda(x-a)-\sin\lambda(x-b)}{\lambda}\,d\lambda.$

135) $\frac{2A\omega}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{2\pi n\lambda}{\omega}}{\lambda^2-\omega^2}\sin\lambda x\,d\lambda.$

136) $\frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{\lambda^2+\alpha^2}\,d\lambda.$ 137) $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{\lambda^2+\alpha^2}\,d\lambda.$

138) $\frac{\alpha}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left[\frac{1}{(\lambda-\beta)^2+\alpha^2}+\frac{1}{(\lambda+\beta)^2+\alpha^2}\right]\cos\lambda x\,d\lambda.$

139) $\frac{4\alpha\beta}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{[(\lambda-\beta)^2+\alpha^2][(\lambda+\beta)^2+\alpha^2]}\,d\lambda.$

140) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\cos\lambda x\,d\lambda.$ 141) $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\lambda e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\sin\lambda x\,d\lambda.$

142) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\lambda}{\lambda}.$ 143) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\lambda}\sin\frac{\lambda}{2}e^{-\frac{i\lambda}{2}}.$

144) $i\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{i\lambda}.$

145) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{2(\sin 2\lambda-\sin\lambda)}{\lambda}+\frac{4\cos\lambda}{\lambda^2}+\left(\frac{2}{\lambda}-\frac{4}{\lambda^3}\right)\sin\lambda\right].$

146) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin 2\lambda-\sin\lambda}{\lambda}+i\frac{\lambda\cos\lambda-\sin\lambda}{\lambda^2}\right).$

147) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+i\lambda)}.$ 148) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}ie^{i\lambda}\cos 1.$

149) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2-3\lambda^2+i(4\lambda-\lambda^3)}{4+\lambda^4}.$ 150) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\lambda^2+\alpha^2}.$

151) $-i\sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{\alpha\lambda}{(\lambda^2+\alpha^2)^2}$.

152) $\sqrt{2\pi}\left[\frac{1}{(\lambda-\omega)^2+1}+\frac{1}{(\lambda+\omega)^2+1}\right]$.

153) $-i\sqrt{2\pi}\left[\frac{1}{(\lambda-\omega)^2+1}-\frac{1}{(\lambda+\omega)^2+1}\right]$.

154) $\frac{1}{|\alpha|}\sqrt{2}e^{-\frac{\lambda^2}{4\alpha^2}}$. 155) $-\frac{i\lambda}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$.

156) $\frac{4\sqrt{2}\pi e^{-i\lambda}}{\lambda^2+4}$. 157) $\frac{2\sqrt{2}\pi(\lambda^2-4\lambda+1)}{(\lambda^2+1)^2}$.

158) $-\frac{i\sqrt{2\pi}}{4}\lambda e^{-\lambda}$. 159) $e^{-\frac{\lambda^2+\alpha^2}{2}}\operatorname{ch}\alpha\lambda$.

160) $-\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}\left[e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{\lambda-1}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right)-e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{\lambda+1}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

161) $\frac{i}{\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\lambda}(\lambda\operatorname{ch}1-\operatorname{sh}1)$. 162) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{4\sin\frac{\lambda}{4}}{\lambda^2}\right)$.

163) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1-\cos a\lambda}{\lambda}$. 164) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\pi\lambda}{1-\lambda^2}$.

165) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\ln 5}{(\ln^2 5+\lambda^2)}$. 166) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\alpha^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)\sin\frac{\pi\lambda}{2}}$ *).

167) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ln(1+\lambda^2)$. 168) $\lambda e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$.

169) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{2\operatorname{sh}\frac{\lambda}{2}}\right)$. Указание. $\frac{1}{\operatorname{sh}a}=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2a}{a^2+\pi^2n^2}$.

170) $\frac{1}{e^{\sqrt{2\pi}\lambda}-1}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\lambda}$. 171) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{th}\lambda$.

172) $\operatorname{th}\left(\lambda\sqrt{\frac{\pi}{2}}-1\right)$.

173) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\lambda^3}(1-\cos 2\lambda-\lambda\sin 2\lambda)$

174) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\,\lambda^2}\left(2\sin\dfrac{\pi\lambda}{2}-\sin\pi\lambda\right).$

175) $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\lambda e^{-\lambda}.$ 176) $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}\,e^{-\lambda a}.$ 177) $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\dfrac{1-e^{-\lambda}}{b^2}.$

178) $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{4b^2}\,(2-(2+|b\lambda|)\,e^{-|b\lambda|})\operatorname{sign}\lambda.$

179) $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1;\quad \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\quad \lambda=1;\quad 0,\quad \lambda>1.$

180) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\,\Gamma(a+1)\sin\dfrac{a\pi}{2}}\,(|1+\lambda|^a-|1-\lambda|^a).$

181) $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{2\left(\cos\dfrac{3\lambda}{2}-1\right)}{\lambda^2}.$ 182) $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{\lambda\sin\pi\lambda}{1-\lambda^2}.$

183) $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{1+\cos\pi\lambda}{1-\lambda^2}.$ 184) $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{\ln 2}{\ln^2 2+\lambda^2}.$

185) $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\dfrac{\alpha^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)\cos\dfrac{\pi\lambda}{2}}.$ 186) $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\ln\dfrac{\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}{\lambda}.$

187) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-\frac{\lambda^2}{4}}.$ 188) $e^{-\frac{\lambda^2}{2}}.$

189) $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}\sin\left(\dfrac{\lambda}{\sqrt{2}}+\dfrac{\pi}{4}\right).$ 190) $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2a}\,e^{-a\lambda}.$

191) $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1;\quad \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\quad \lambda=1;\quad 0,\ \lambda>1.$

192) $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\cos\lambda,\ 0\leqslant\lambda<\pi;\quad 0,\ \lambda>\pi.$

§ 5. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

1. Занумеруем множество чисел $\frac{m}{2^q}$, $1 \leqslant m \leqslant 2^q - 1$, $q \in \mathbb{N}$, и обозначим через $\frac{m_n}{2^{q_n}}$ элемент этого множества с номером n. Пусть $f_n\left(\frac{m_n}{2^{q_n}}\right) = 1$ в точке $\frac{m_n}{2^{q_n}}$, $f_n(x) = 0$ на $\left(-\infty; \frac{m_n}{2^{q_n}} - \frac{1}{2^{q_n-1}}\right] \cup \left[\frac{m_n}{2^{q_n}} + \frac{1}{2^{q_n-1}}; +\infty\right)$ и $f_n(x)$ линейна на отрезках $\left[\frac{m_n}{2^{q_n}} - \frac{1}{2^{q_n-1}}; \frac{m_n}{2^{q_n}}\right]$, $\left[\frac{m_n}{2^{q_n}}, \frac{m_n}{2^{q_n}} + \frac{1}{2^{q_n-1}}\right]$ (см. рис. 23).

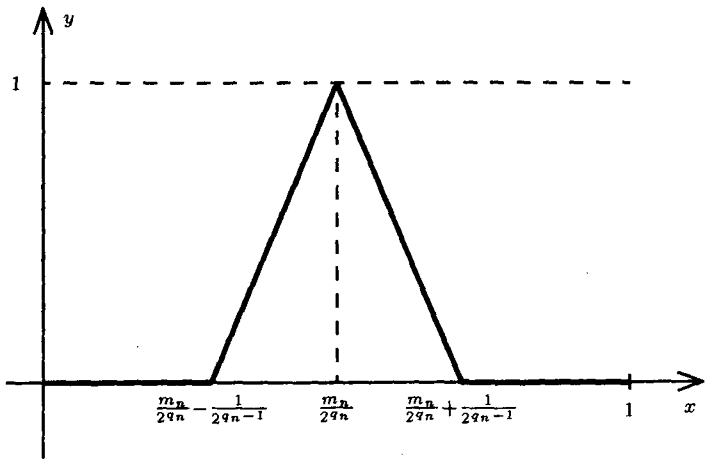


Рис. 23

Показать, что последовательность $\{f_n(x)\}$ расходится в каждой точке отрезка $[0; 1]$, но

$$\int_0^1 f_n^2(x)\,dx \to 0, \quad n \to +\infty.$$

2. Пусть $\{\psi_n\}$ — ортонормированная система на $[a; b]$; $f \in \widetilde{R}^2\langle a, b\rangle$ и $S_n(x)$ — частичная сумма порядка n ряда Фурье

функции f по системе $\{\psi_n\}$. Функция $K_n(t,x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\psi_i(t)\psi_i(x)$ называется ядром порядка n системы $\{\psi_n\}$.

Показать, что

$$S_n(x)=\int\limits_a^b f(t)K_n(t,x)\,dt.$$

3. Система Хаара состоит из следующих функций: $\chi_0^{(0)}\equiv 1$;

$$\chi_0^{(1)}=\begin{cases}1, & x\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right),\\ 0, & x=\dfrac{1}{2},\\ -1, & x\in\left(\dfrac{1}{2};1\right];\end{cases}$$

для $m\in\mathbb{N}$ и $1\leqslant q\leqslant 2^m$

$$\chi_m^{(q)}(x)=\begin{cases}2^{\frac{m}{2}}, & x\in\left(\dfrac{q-1}{2^m};\dfrac{q-\frac{1}{2}}{2^m}\right),\\ -2^{\frac{m}{2}}, & x\in\left(\dfrac{q-\frac{1}{2}}{2^m};\dfrac{q}{2^m}\right),\\ 0, & x\in\left(\dfrac{r-1}{2^m};\dfrac{r}{2^m}\right),\quad r\neq q,\ 1\leqslant r\leqslant 2^m,\end{cases}$$

$\chi_m^{(q)}(0)=\chi_m^{(q)}\left(\dfrac{1}{2^{m+2}}\right)$; $\chi_m^{(q)}(1)=\chi_m^{(q)}\left(1-\dfrac{1}{2^{m+2}}\right)$, в тех точках интервала $(0;1)$, где значение $\chi_m^{(q)}$ не определено предыдущими условиями, это значение равно полусумме значений $\chi_m^{(q)}$ на прилегающих интервалах. Проверить, что система Хаара ортонормирована на $[0;1]$.

4. Пусть

$$K_m^{(q)}(t,x)=\chi_0^{(0)}(t)\chi_0^{(0)}(x)+\chi_0^{(1)}(t)\chi_0^{(1)}(x)+$$
$$+\chi_1^{(1)}(t)\chi_1^{(1)}(x)+\dots+\chi_m^{(q)}(t)\chi_m^{(q)}(x),$$

где $\chi_i^{(j)}(x)$ — функции Хаара, определенные в задаче 3, т. е. ядро системы Хаара соответствующего порядка. Обозначим через Q квадрат $[0;1]\times[0;1]$. Разделим его горизонтальными и вертикальными прямыми на 2^{2n} равных квадратов $Q_{i,j}^{(n)}$, $1\leqslant i\leqslant 2^n$, $1\leqslant j\leqslant 2^n$, занумерованных первым индексом слева направо и вторым — снизу вверх. При этом считаем, что квадраты, не прилегающие к границе Q, открытые, а прилежащие к границе Q включают соответствующий интервал этой границы (например, квадрат $Q_{0,3}^{(2)}$ включает интервал $\left\{\frac{1}{2}<t<\frac{3}{4},\ x=0\right\}$). Таким образом, при любом фиксированном n каждая точка Q либо принадлежит одному из $Q_{i,j}^{(n)}$, $1\leqslant i\leqslant 2^n$, $1\leqslant j\leqslant 2^n$, либо лежит на общей границе двух или четырех этих квадратов.

Показать, что

а) $K_0^{(0)}(t,x)=1$, $(t,x)\in Q$;

б) $K_{n-1}^{(2^{n-1})}(t,x)=$

$$=\begin{cases} 2^n, & (t,x)\in\bigcup\limits_{i=1}^{2^n} Q_{i,i}^{(n)},\\ 0, & (t,x)\in Q_{i,j}^{(n)},\quad 1\leqslant i\leqslant 2^n,\ 1\leqslant j\leqslant 2^n,\ i\neq j,\end{cases}$$

а значение $K_{n-1}^{2^{n-1}}$ в точках общей границы двух или четырех квадратов $Q_{i,j}^{(n)}$ равно среднему арифметическому ее значений на этих квадратах;

в) функция $K_n^{(q)}$, $1\leqslant q\leqslant 2^n$, совпадает с функцией $K_{n-1}^{(2^{n-1})}$ во всех точках Q, не принадлежащих замыканию квадратов $Q_{i,i}^{(n)}$, $1\leqslant i\leqslant q$, лежащих на главной диагонали Q; если $(t,x)\in Q_{i,i}^{(n)}$, $1\leqslant i\leqslant q$, то

$$K_n^{(q)}(t,x)=2^nK_0^{(1)}\left(\left(t-\frac{i-1}{2^n}\right)\cdot 2^n;\left(x-\frac{i-1}{2^n}\right)\cdot 2^n\right);$$

в тех точках, лежащих на границах квадратов $Q_{i,j}^{(n+1)}$, где значение $K_n^{(q)}$ не определено предыдущими условиями, это значение равно среднему арифметическому значений $K_n^{(q)}$ в прилегающих квадратах.

5. Пусть $f \in \widetilde{R}^2\langle 0, 1\rangle$. Пользуясь результатами задач 2 и 4, доказать, что в любой точке x_0 непрерывности функции f ее ряд Фурье по системе Хаара сходится к $f(x_0)$.

Многочлен $P_n(x) = \dfrac{(-1)^n\sqrt{2n+1}}{n!2^{n+1/2}} \cdot \dfrac{d^n(1-x^2)^n}{dx^n}$ называется нормированным многочленом Лежандра порядка n.

6. Показать, что нормированные многочлены Лежандра $P_n(x)$ образуют ортонормальную систему на $[-1;1]$.

7. Доказать, что система нормированных многочленов Лежандра полна на $[-1;1]$.

8. Обозначим через A_n множество всех многочленов $\Pi_n(x)$ степени n со старшим коэффициентом 1. Доказать, что

$$\min_{A_n} \int_{-1}^{1} \Pi_n^2(x)\,dx = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n)![(2n+1)!]^2} \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx.$$

9. Обозначим через B_n множество всех многочленов $\Pi_n(x)$ степени не выше n, удовлетворяющих условию $\int\limits_{-1}^{1} \Pi_n^2(x)\,dx \leqslant 1$. Доказать, что $\max\limits_{B_n} \Pi_n^2(0) = \sum\limits_{k=0}^{n} P_k^2(0)$.

10. Пусть $2l$-периодическая функция $f \in \widetilde{R}^2\langle -l, l\rangle$. Для $q \in \mathbb{N}$ обозначим через $a_{n,1}$, $b_{n,1}$ коэффициенты Фурье функции f по системе $\{\varphi_i^{(l)}\}$ и через $a_{m,q}$, $b_{m,q}$ — по системе $\{\varphi_i^{(ql)}\}$. Доказать, что если $m = nq$, то $a_{m,q} = a_{n,1}$, $b_{m,q} = b_{n,1}$, а если m не кратно q, то $a_{m,q} = 0$, $b_{m,q} = 0$; т. е. ряд $\sigma_l(f)$ совпадает с рядом $\sigma_{ql}(f)$.

11. Пусть функция f, определенная на $\mathbb{R}$, удовлетворяет условиям: $f \in \widetilde{R}^2[-\pi, \pi]$; $f(x+\pi) \equiv -f(x)$. Показать, что f является 2π-периодической, и найти, какой особенностью обладают ее коэффициенты Фурье a_n, b_n по системе $\{\varphi_i\}$.

12. Пусть f — периодическая функция $f \in \widetilde{R}^2[-\pi, \pi]$ и a_n, b_n — ее коэффициенты Фурье по системе $\{\varphi_i\}$. Какими особенностями обладают последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, если график f симметричен

а) относительно оси OY и точки $\left(\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$;

б) относительно оси OY и прямой $x = -\frac{\pi}{2}$?

13. Показать, что системы $\{\cos 2nx\}$ и $\{\sin(2n-1)x\}$, $n \in \mathbb{N}$, являются полными ортогональными системами соответственно на $[0;\pi]$ и $[0;\pi/2]$.

14. Пусть f — 2π-периодическая функция, $f \in \widetilde{R}^2[-\pi,\pi]$. Функция $w_1(\delta, f) = \sup\limits_{0 \leqslant |h| \leqslant \delta-\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+h)-f(x)|\,dx$ называется интегральным модулем непрерывности f. Доказать, что

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} w_1\left(\frac{\pi}{n}, f\right), \quad |b_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} w_1\left(\frac{\pi}{n}, f\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

где a_n, b_n — коэффициенты Фурье f по системе $\{\varphi_i\}$.

15. Пусть f — 2π-периодическая функция с ограниченным изменением на $[-\pi;\pi]$ и V — ее полная вариация на $[-\pi;\pi]$. Доказать, что

$$|a_n| \leqslant \frac{V}{2n}, \quad |b_n| \leqslant \frac{V}{2n},$$

где a_n, b_n — коэффициенты Фурье f по системе $\{\varphi_i\}$.

16. Доказать, что семейство функций $\Phi_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$ ограничено в совокупности на $[-\pi;\pi]$.

17. Пусть

$$Q(x,n) = \frac{\cos nx}{n} + \frac{\cos(n+1)x}{n-1} + \cdots + \frac{\cos(2n-1)x}{1} - \\ - \left\{\frac{\cos(2n+1)x}{1} + \frac{\cos(2n+2)x}{2} + \cdots + \frac{\cos 3nx}{n}\right\}.$$

Используя результат задачи 16, доказать, что существует такая постоянная C, что $|Q(x,n)| \leqslant C$ для всех $x \in [-\pi;\pi]$ и всех $n \in \mathbb{N}$.

18. Пусть $\varphi(x,Q)$ обозначает сумму любого числа первых слагаемых тригонометрического полинома $Q(x,n)$, определенного в задаче 17. Доказать, что для любого $\delta > 0$ существует такое число M_δ, что $|\varphi(x,n)| \leqslant M_\delta$ для всех x: $\delta \leqslant |x| \leqslant \pi$ и всех $n \in \mathbb{N}$.

19. Пусть $Q_m(x) = Q(x, 2^{m^2})$, где тригонометрический полином $Q(x,n)$ определен в задаче 17. Доказать, что функция

$f(x)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{m^2}Q_m(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, а ряд $\sigma(f)$ расходится при $x=0$.

20. Доказать, что для любой функции $f\in\widetilde{R}\langle-\pi,\pi\rangle$ и всех $n\in\mathbb{N}$ определены числа

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,\quad n=0,1,2,\ldots.$$

21. Функция f определяется на $[-\pi;\pi]$ следующими условиями:

$$f(x)=3^n\cdot\sin 4^n x,\quad x\in\left(\frac{\pi}{2^n};\frac{\pi}{2^{n-1}}\right],\ n\in\mathbb{N},$$

$$f(0)=0,$$

$$f(x)=-f(-x),\quad x\in[-\pi;0).$$

Показать, что

а) $f\in C[\varepsilon,\pi]$ для любого $\varepsilon>0$;

б) $f\in\widetilde{R}\langle-\pi,\pi\rangle$;

в) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,b_n=\infty$, где $b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$ (ср. с задачей 18 гл. I § 5).

22. Пусть $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$. Показать, что $f\in\widetilde{R}\langle-\pi,\pi\rangle$, но $f\,\overline{\in}\,\widetilde{R}^2[-\pi,\pi]$.

23. Пусть $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\ln n}$. Показать, что

$$f\in C\left([-\pi;\pi]\setminus[-\varepsilon;\varepsilon]\right)$$

при любом $\varepsilon>0$, но $f\,\overline{\in}\,\widetilde{R}\langle-\pi,\pi\rangle$.

24. Пусть $f\in C[-\pi;\pi]$ и ряд $\sigma(f)$ сходится к функции $g(x)$ для всех $x\in(-\pi;\pi)$. Доказать, что $f(x)=g(x)$ для всех $x\in(-\pi;\pi)$.

25. Пусть 2π-периодическая функция $f\in C[-\pi;\pi]$ и a_n, b_n — ее коэффициенты Фурье по системе $\{\varphi_i\}$. Доказать, что если $a_n=o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $b_n=o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $n\to\infty$, то $\sigma(f)\rightrightarrows f$ на $[-\pi;\pi]$.

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, УКАЗАНИЯ

1. Решение. Из определения $f_n(x)$ получаем, что

$$0 \leqslant \int_0^1 f_n^2(x)\,dx \leqslant \frac{1}{2^{q_n-2}}$$

и так как $q_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, то, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n^2(x)\,dx = 0.$$

Пусть $x_0 \in [0;1]$. С одной стороны, существует такая подпоследовательность $n_j \uparrow +\infty$, что $f_{n_j}(x_0) = 0$; а с другой стороны, существует такая бесконечная последовательность $n_i \uparrow +\infty$, что $x_0 \in \left[\frac{m_{n_i}}{2^{q_{n_i}}} - \frac{1}{2^{q_{n_i}}}; \frac{m_{n_i}}{2^{q_{n_i}}} + \frac{1}{2^{q_{n_i}}}\right]$ и, следовательно, $f_{n_i}(x_0) \geqslant \frac{1}{2}$; откуда и следует расходимость последовательности $\{f_n(x)\}$.

4. Указание. Пункт а) проверяется непосредственно. Пункт б) доказывается по индукции. Для доказательства пункта в) воспользоваться равенством

$$K_n^{(q)}(t,x) = K_{n-1}^{(2^{n-1})}(t,x) + \sum_{i=1}^{q} \chi_n^{(i)}(t)\chi_n^{(i)}(x), \quad 1 \leqslant q < 2^n.$$

5. Решение. Пусть $x_0 \in (0;1)$ и не является двоично рациональным числом. Тогда, применяя результаты задач 2 и 4, получаем, что

$$S_m^{(q)}(x_0) = \int_0^1 f(t)K_m^{(q)}(t,x_0)\,dt = \frac{1}{|I_m^{(q)}|}\int_{I_m^{(q)}} f(t)\,dt, \qquad (*)$$

где $I_m^{(q)}$ есть интервал длины $\frac{1}{2^m}$ или $\frac{1}{2^{m+1}}$. Если же $x_0 \in [0;1]$ — двоично рациональное число, то либо $K_m^{(q)}(t,x_0)$ равно 2^{m+1}, 2^m или 2^{m-1} на интервале $I_m^{(q)}$, включающем x_0, и длины $\frac{1}{2^{m+1}}$, $\frac{1}{2^m}$ или $\frac{1}{2^{m-1}}$ соответственно; либо $K_m^{(q)}(t, x_0) = 2^m$ на интервале $I_m^{(q)} = \left(x_0 - \frac{1}{2^{m+1}}; x_0\right)$ и 2^{m-1} на интервале $J_m^{(q)} = \left(x_0; x_0 + \frac{1}{2^m}\right)$. В первом случае для $S_m^{(q)}(x_0)$ справедлива формула (*), а во втором — равенство

$$S_m^{(q)}(x_0) = \frac{1}{2|I_m^{(q)}|} \int\limits_{I_m^{(q)}} f(t)\,dt + \frac{1}{2|J_m^{(q)}|} \int\limits_{J_m^{(q)}} f(t)\,dt$$

(см. рис. 24). В силу непрерывности f в обоих случаях имеем

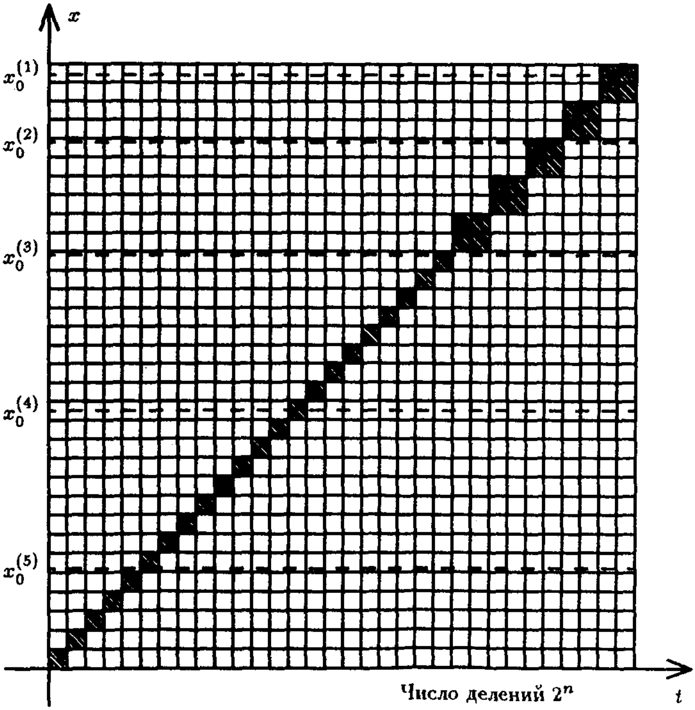


Рис. 24

равенство

$$\lim_{m\to\infty} S_m^{(q)}(x_0) = f(x_0).$$

6. Решение. Интегрируя n раз по частям, получаем равенство

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx =$$

$$= \frac{(2n+1)}{(n!)^2 2^{2n+1}}\Bigl(\sum_{q=1}^{n}(-1)^{q-1}[(1-x^2)^n]^{(n-q)}\cdot[(1-x^2)^m]^{(m+q-1)} +$$

$$+(-1)^n \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n[(1-x^2)^m]^{(m+n)}\,dx\Bigr).$$

Так как -1 и 1 — корни порядка n многочлена $(1-x^2)^n$, то отсюда получаем, что

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \frac{(-1)^n(2n+1)}{(n!)^2 2^{2n+1}}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n[(1-x^2)^m]^{(m+n)}\,dx.$$

Если $m<n$, то степень многочлена $(1-x^2)^m$ меньше, чем $m+n$, и следовательно,

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0.$$

Если $m=n$, то поскольку старший коэффициент многочлена $(1-x^2)^n$ равен $(-1)^n$, то

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2 2^{2n+1}}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx =$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2 2^{2n+1}} B\left(n+1, \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!(2n+1)!!} \overset{\bullet}{=} 1.$$

7. Указание. Если $f \in \widetilde{R}^2[-1,1]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический полином

$$T_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m}(a_n\cos\pi nx + b_n\sin\pi nx),$$

приближающий f в среднем с погрешностью не больше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$, а тригонометрический полином на $[-1;1]$ равномерно приближается алгебраическим многочленом с погрешностью не больше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$.

8. Решение. Представим многочлен $\Pi_n(x) \in A_n$ в виде $\Pi_n(x) = \sum\limits_{m=0}^{n} \alpha_m P_m(x)$. Так как степень многочлена $P_m(x)$ равна m, старший коэффициент $\Pi_n(x)$ равен 1, а в $P_n(x)$ старший коэффициент $a_0 = \dfrac{(-1)^n(2n+1)!!}{(n!)^2 2^{n+1/2}}$, то $\alpha_n = \dfrac{1}{a_0}$. В силу полноты системы $\{P_i(x)\}$ справедливо равенство Парсеваля:

$$\int\limits_{-1}^{1} \Pi_n^2(x)\,dx = \frac{1}{a_0^2} + \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m^2,$$

откуда видно, что интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \Pi_n^2(x)\,dx$ принимает минимальное значение на множестве A, если $\sum\limits_{m=0}^{n-1} \alpha_m^2 = 0$, т. е.

$$\Pi_n(x) = \frac{1}{a_0} P_n(x).$$

9. Решение. Представим многочлен $\Pi_n(x) \in B$ в виде $\Pi_n(x) = \sum\limits_{m=0}^{n} \beta_m P_m(x)$. В силу неравенства Коши—Буняковского имеем: $\Pi_n^2(0) \leqslant \sum\limits_{m=0}^{n} \beta_m^2 \sum\limits_{m=0}^{n} P_m^2(0)$. Так как система $\{P_i\}$ полна, то, используя равенство Парсеваля и условие $\Pi_n \in B$, получаем, что $1 = \int\limits_{-1}^{1} \Pi_n^2(x)\,dx = \sum\limits_{m=0}^{n} \beta_m^2$, откуда следует, что $\Pi_n^2(0) \leqslant \sum\limits_{m=0}^{n} P_m^2(0)$ для всех $\Pi_n(x) \subset B$. В то же время для многочлена $\Pi_{1/2}^1(x) = \left\{\sum P_m(0)\right\}^{1/2} \cdot \sum\limits_{m=0}^{n} P_m(0) P_m(x)$

справедливы соотношения $\text{П}_n^1 \subset B$, $(\text{П}_n^1)^2(0) = \left(\sum\limits_{m=0}^{n} P_m^2(0)\right)^{1/2}$, что и завершает доказательство.

10. Указание. Равенства $a_{m,q} = a_{n,1}$, $b_{m,q} = b_{n,1}$ для $m = nq$ проверяются непосредственно, а равенство нулю всех остальных коэффициентов следует из равенства Парсеваля.

11. $a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

12. а) $b_n = 0$, $a_{2n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$; б) $b_n = 0$, $a_{2n-1} = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

13. Указание. Продлить функцию f с отрезка $[0;\pi]$ или $[0;\pi/2]$ на $[-\pi;\pi]$ таким образом, чтобы в ряде $\sigma(f)$ коэффициенты при функциях, не входящих в рассматриваемые системы, равнялись нулю (ср. с задачей 12), и использовать полноту системы $\{\varphi_i\}$ на $[-\pi;\pi]$.

14. Указание. В интеграле, определяющем a_n и b_n, сделать замену $t = x + \dfrac{\pi}{n}$.

15. Указание. Проверить, что неравенство

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(x+\frac{\pi k}{n}\right) - f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right| dx$$

справедливо для любого $k \in \mathbb{Z}$, и сложить эти неравенства для $k = 1, 2 \ldots, 2n$. То же самое рассуждение проводится для b_n.

16. Решение. Пр любом $n \in \mathbb{N}$ функция $\Phi_n(x)$ нечетная, поэтому достаточно доказать ограниченность в совокупности семейства $\Phi_n(x)$ на $(0;\pi]$. Для $x \in (0;\pi]$ положим $n_x = \left[\dfrac{1}{x}\right]$. Если $n \leqslant n_x$, то

$$|\Phi_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant nx \leqslant n_x x \leqslant 1.$$

Если $n > n_x$, то представим $\Phi_n(x)$ в виде

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n_x}\frac{\sin kx}{k} + \sum_{k=n_x+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}.$$

Первое слагаемое, как и выше, по абсолютной величине не превосходит 1. Второе слагаемое преобразуем:

$$\sum_{k=n_x+1}^{n}\frac{\sin kx}{k} = \frac{B_n}{n} + \sum_{k=n_x+1}^{n-1} B_k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{B_{n_x}}{n_x+1},$$

где $B_m = \sum\limits_{k=1}^{m} \sin kx = \dfrac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(m + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$ (проверьте). Следовательно,

$$\left|\sum_{k=n_x+1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \frac{2}{n_x+1}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \leqslant \frac{2\pi}{x(n_x+1)} \leqslant 2\pi,$$

и окончательно,

$$|\Phi_n(x)| \leqslant 1 + 2\pi.$$

17. Указание. Получить равенство

$$Q(x, n) = 2\sin nx\cdot \sum_{m=1}^{n} \frac{\sin mx}{m}.$$

18. Указание. К сумме членов $\varphi(x, Q)$ с положительными коэффициентами и к сумме членов с отрицательными коэффициентами (если они присутствуют) применить преобразование Абеля и оценку $\left|\sum\limits_{n=1}^{N} \cos nx\right| \leqslant \dfrac{1}{|\sin x/2|}$ (см. решение задачи N 16).

19. Указание. Показать, что ряд, полученный раскрытием скобок в ряде $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{1}{m^2}(Q_m(x))$, есть $\sigma(f)$ и этот ряд при $x = 0$ не удовлетворяет критерию Коши.

21. Указание. При $m = 4^n$, $n \in \mathbb{N}$, имеем:

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin 4^n x\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n-1} 3^n \int_{\pi/2^k}^{\pi/2^{k-1}} \sin 4^n x \sin 4^k x\,dx + \right.$$

$$+ 3^n \int_{\pi/2^n}^{\pi/2^{n-1}} \sin^2 4^n x\,dx + \sum_{k=n+1}^{2n-1} 3^n \int_{\pi/2^k}^{\pi/2^{k-1}} \sin 4^n x \sin 4^k x\,dx +$$

$$\left. + \sum_{k=2n}^{\infty} 3^n \int_{\pi/2^k}^{\pi/2^{k-1}} \sin 4^n x \sin 4^k x\,dx\right).$$

Показать, что первое и третье слагаемые равны нулю, четвертое является бесконечно малым, а второе — бесконечно большим при $n \to +\infty$.

22. Решение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ сходится равномерно на каждом из отрезков $[2k\pi + \varepsilon; 2(k+1)\pi - \varepsilon]$, $k \in \mathbb{Z}$, при любом $\varepsilon \in (0;\pi)$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{m} \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$, следовательно, функция $F(x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и $F'(x) = f(x)$ для всех $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда $\int\limits_{\varepsilon}^{\pi} f(x)\,dx = F(\pi) - F(\varepsilon)$ для любого $\varepsilon \in (0;\pi)$, и в силу непрерывности F существует $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{\varepsilon}^{\pi} f(x)\,dx = F(\pi) - F(\varepsilon)$. Так как функция f нечетна, то отсюда следует, что $f \in \widetilde{R}\langle -\pi, \pi\rangle$. Поскольку ряд $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$ сходится равномерно, то этот ряд есть $\sigma(F)$. Из равенства $F'(x) = f(x)$, $x \neq 2\pi k$, следует, что если $f \in \widetilde{R}^2\langle -\pi, \pi\rangle$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ есть $\sigma(f)$, что противоречит равенству Парсеваля, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$ расходится.

23. Решение. Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ сходится равномерно на каждом из отрезков $[2\pi k + \varepsilon; 2\pi(k+1) - \varepsilon]$ при любом $\varepsilon \in (0;\pi)$. Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \ln n}$ также сходится равномерно на каждом таком отрезке. Следовательно, функция $F(x) = -\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \ln n}$ на каждом интервале $(2\pi k; 2(k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, является первообразной функции f. Ряд $-\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 \ln n}$ сходится равномер-

но на $\mathbb{R}$, следовательно, его сумма $\Phi(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и этот ряд есть $\sigma(\Phi)$. Функция F непрерывна на множестве $M = [-\pi;\pi] \setminus \{0\}$, и $\Phi'(x) = F(x)$ для всех $x \in M$. Предположим, что $\lim\limits_{x\to 0+} F(x) = A$. Так как функция F четна, то в таком случае $\lim\limits_{x\to 0-} F(x) = A$, функция F ограничена на $[-\pi;\pi]$ и ряд $-\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n\ln n}$ есть $\sigma(F)$. В таком случае в силу теоремы Фейера последовательность $\sigma_n = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{m=2}^{n} S_m$, где $S_m = \sum\limits_{k=2}^{m} \dfrac{1}{k\ln k}$, должна сходится к $-A$, а так как $\lim\limits_{m\to\infty} S_m = +\infty$, то и $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = +\infty$. Полученное противоречие показывает, что функция F не имеет предела при $x \to 0+$, а так как $\int\limits_{\varepsilon}^{\pi} f(x)\,dx = F(\pi) - F(\varepsilon)$ для любого $\varepsilon \in (0;\pi)$, то интеграл $\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\,dx$ расходится. В силу нечетности f отсюда следует, что $f \mathrel{\overline{\in}} \widetilde{R}\langle -\pi, \pi\rangle$.

24. Решение. Пусть

$$S_0(x) = \frac{a_0}{2}, \quad S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

и

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} S_m(x).$$

В силу теоремы Фейера $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x)$ для всех $x \in (-\pi;\pi)$. Так как из равенства $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = g(x)$, $x \in (-\pi;\pi)$, следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x) = g(x)$, $x \in (-\pi;\pi)$, то $f(x) \equiv g(x)$ на $(-\pi;\pi)$.

25. Решение. Пусть

$$S_0(x) = \frac{a_0}{2}, \quad S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

и

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} S_m(x).$$

В силу теоремы Фейера $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x)$ для всех $x \in (-\pi; \pi)$. Из равенства $S_n(x) - \sigma_n(x) = \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{m=1}^{n} m(a_m \cos mx + b_m \sin mx)$ получаем, что $0 \leqslant |S_n(x) - \sigma_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{m=1}^{n} m[|a_m| + |b_m|]$, откуда в силу условия $a_m = o\left(\dfrac{1}{m}\right)$, $b_m = o\left(\dfrac{1}{m}\right)$, $m \to \infty$, следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} (S_n(x) - \sigma(x)) = 0$. Отсюда получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x)$ для всех $x \in (-\pi; \pi)$.

ОГЛАВЛЕНИЕ