ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

АКАДЕМИЯ НАУК УЗБЕКСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ имени В. И. РОМАНОВСКОГО

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ФАН» УЗБЕКСКОЙ ССР
ТАШКЕНТ
1989

В сборнике излагаются результаты исследований по теории корректных краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными: вырождающихся, смешанного, составного типов, дифференциальным играм с различными органичениями; теории ветвления решений нелинейных уравнений.

Для специалистов, занимающихся вопросами теории и приложений задач для дифференциальных уравнений, аспирантов, студентов старших курсов университетов, специализирующихся в данном направлении.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Утверждено к печати Ученым советом Института математики имени В. И. Романовского, Отделением физико-математических наук АН УзССР

Редактор *Л. М. Мазурина*
Художник *И. А. Цыганов*
Художественный редактор *О. И. Жаринова*
Технический редактор *О. А. Бакалова*
Корректор *Т. А. Кан*

ИБ № 4614

Сдано в набор 6.12.88. Подписано к печати 15.03.89. Р01521. Формат 60×90¹/₁₆ Бумага типографская № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 12,0. Уч.-изд. л. 7,3. Тираж 1000. Заказ 6. Цена 1 р. 50 к.

Издательство «Фан» УзССР: 700047, Ташкент, ул. Гоголя, 70.
Типография Издательства «Фан»: Ташкент, проспект М. Горького, 79

Д $\frac{1602070000-4139}{М\ 355(04)-89}$ 57—89

ISBN 5-648-00280-7

М. С. САЛАХИТДИНОВ, А. М. НАГОРНЫЙ, Н. К. МАМАДАЛИЕВ

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial y}(Lu) = 0, \tag{1}$$

где

$$L = \frac{1+\operatorname{sgn} x}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{1-\operatorname{sgn} x}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (-x)^m\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right],$$

$$-1 < m < 0.$$

Пусть D — конечная односвязная область, ограниченная отрезками OA, AD, BD прямых $y=0$, $x=1$, $y=1$ и характеристиками

$$OC: y - \frac{2}{m+2}(-x)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC: y + \frac{2}{m+2}(-x)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

уравнения

$$Lu = 0. \tag{2}$$

Общее решение уравнения (1) представимо в виде [1, 2]

$$u(x, y) = z(x, y) + \omega(x), \tag{3}$$

где $z(x, y)$ является регулярным решением уравнения (2) в области D_1, а в области D_2 — обобщенным решением уравнения (2) класса R_2 [3].

Введем обозначения

$$D_1 = D \cap \{x > 0\}, \quad D_2 = D \cap \{x < 0\},$$

$$\omega(x) = \begin{cases} \omega_1(x) & \text{при } x > 0, \\ \omega_2(x) & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

причем функция $\omega(x)$, равная $\omega_1(x)$, в области D_1 обладает всеми производными, входящими в уравнение (1), а в области D_2 представление (3) и гладкость функции $\omega(x)=\omega_2(x)$ даются определением обобщенного решения класса R_{2y} [4] уравнения (1).

Задача. Требуется определить функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x, y) \in C(\bar{D})$;

2) функция $u(x, y)$ — является регулярным решением уравнения (1) в области D_1, а в области D_2 — обобщенным решением уравнения (1) класса R_{2y};

3) на линии вырождения выполняется условие склеивания

$$\lim_{x \to -0} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = - \lim_{x \to +0} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}; \tag{4}$$

4) u_x непрерывна вплоть до линии перехода как слева, так и справа;

5) удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{gathered} u|_{OA} = \tau_1(x), \quad u|_{AD} = \psi(y), \quad u|_{BD} = \psi_1(x), \\ [u - \omega(x)]|_{OC} = \psi_2(x), \quad u|_{CB} = \psi_3(x), \end{gathered} \tag{5}$$

где τ_1, ψ, ψ_1, ψ_2, ψ_3 — заданные достаточно гладкие функции, причем

$$\tau_1(0) = \psi_2(0), \ \ \tau_1(1) = \psi(0), \ \ \psi(1) = \psi_1(1), \ \ \psi_1(0) = \psi_3(0),$$

$$\psi_2\left[-\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}}\right] = \psi_3\left[-\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}}\right].$$

Отметим, что задача Дирихле в случае $m=0$ исследована в работе [5]. Без ограничения общности можно предполагать, что $\omega(0)=0$, $\omega(1)=0$. На основании (3), (5) задача редуцируется к определению регулярного в области D_1, обобщенного в области D_2 решения уравнения (2), удовлетворяющего условиям

$$\begin{gathered} z|_{OA} = \tau_1(x) - \omega_1(x), \quad z|_{AD} = \psi(y), \quad z|_{BD} = \psi_1(x) - \omega_1(x), \\ z|_{OC} = \psi_2(x), \quad z|_{CB} = \psi_3(x) - \omega_2(x). \end{gathered} \tag{6}$$

Единственность решения рассматриваемой задачи докажем методом интегралов энергии.

В области D_1 получим [5]

$$-\int_0^1 z z_x \, dy - \iint_{D_1} z_x^2 \, dx \, dy = 0. \tag{7}$$

Отсюда

$$\int_0^1 z(0, y) z_x(0, y) dy \leqslant 0. \tag{8}$$

Интегрируя тождество

$$z[z_{xx} - (-x)^m z_{yy}] = \frac{\partial}{\partial x}(z z_x) - \frac{\partial}{\partial y}[(-x)^m z z_y] - z_x^2 + (-x)^m z_y^2$$

по области D_2 и применяя формулу Грина с учетом (4), имеем

$$\begin{gathered}\int_0^1 z(0, y) z_x(0, y) dy = -\int_C^B z[z_x dy + (-x)^m z_y dx] + \\ + \int_C^O z[z_x dy + (-x)^m z_y dx] - \iint_{D_2} [z_x^2 - (-x)^m z_y^2]\, dx\, dy.\end{gathered} \tag{9}$$

На характеристиках CB, CO, $dy = (-x)^{m/2} dx$, $dy = -(-x)^{m/2} dx$ соответственно, и так как $\omega(0) = \omega(1) = 0$, то получим

$$-\int_C^B z[z_x dy + (-x)^m z_y dx] + \int_C^O z[z_x dy + (-x)^m z_y dx] \geqslant 0. \tag{10}$$

На основании условия на характеристике OC последний интеграл в правой части равенства (9) неположителен [3].

Таким образом, из (9) имеем

$$\int_0^1 z(0, y) z_x(0, y) dy \geqslant 0.$$

Последнее неравенство и (8) приводят к равенству

$$\int_0^1 z(0, y) z_x(0, y) dy = 0.$$

Следовательно, из (7) получаем $u \equiv 0$ в D [5].

Переходим к доказательству существования решения этой задачи. Известно решение задачи Коши для уравнения (2) в области D_2

$$z(\xi, \eta) = \int_0^\xi (\eta - \zeta)^{-\beta} (\xi - \zeta)^{-\beta} T(\zeta)\, d\zeta +$$

$$+\int_{\xi}^{\eta}(\eta-\zeta)^{-\beta}(\zeta-\xi)^{-\beta}N(\zeta)\,d\zeta, \tag{11}$$

где

$$N(\zeta)=\frac{1}{2\cos\pi\beta}T(\zeta)-\gamma_2\nu(\zeta), \tag{12}$$

$$\tau(y)=z(0,y),\quad 0\leqslant y\leqslant 1, \tag{13}$$

$$\nu(y)=\lim_{x\to 0}\frac{\partial u}{\partial x}=[2(1-2\beta)]^{-2\beta}\lim_{\eta-\xi\to 0}(\eta-\xi)^{2\beta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right), \tag{14}$$

$$\beta=\frac{m}{2(m+2)},\quad \gamma_2=[2(1-2\beta)]^{2\beta-1}\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}.$$

Так как функция $z(\xi,\eta)$ есть обобщенное решение задачи Коши для уравнения (2) из класса R_2, то имеет место представление (11), где

$$\tau(y)=\tau(0)+\int_0^y(y-t)^{-2\beta}T(t)dt, \tag{15}$$

а $T(t)$ и $\nu(t)$ непрерывны и интегрируемы на $(0,1)$ функции.

Решение уравнения (2) в области D_1, удовлетворяющее краевым условиям

$$z|_{OB}=\tau(y),\quad z|_{AD}=\psi(y),\quad z|_{OA}=\tau_1(x)-\omega_1(x),$$

представимо в виде

$$z(x,y)=\int_0^y\tau(\eta)G_\xi(x,y;0,\eta)\,d\eta+$$

$$+\int_0^1[\tau_1(\xi)-\omega_1(\xi)]G(x,y;\xi,0)\,d\xi-\int_0^y\psi(\eta)G_\xi(x,y;1,\eta)\,d\eta, \tag{16}$$

где $G(x,y;\xi,\eta)$ — функции Грина первой краевой задачи. Для определения неизвестной функции $\omega_1(x)$ реализуем условие

$$z|_{BD}=\psi_1(x)-\omega_1(x). \tag{17}$$

На основании (16) и (17) получим

$$\omega_1(x)-\int_0^1\omega_1(\xi)G(x,1;\xi,0)\,d\xi=g(x), \tag{18}$$

где
$g(x)$ — известная функция, причем

$$g(x) = \psi_1(x) - \int_0^1 \tau(\eta) G_\xi(x, 1; 0, \eta)\, d\eta -$$

$$- \int_0^1 \tau_1(\xi) G(x, 1; \xi, 0)\, d\xi + \int_0^1 \psi(\eta) G_\xi(x, 1; 1, \eta)\, d\eta. \qquad (19)$$

Уравнение (18) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из единственности решения задачи и определяется формулой

$$\omega_1(x) = g(x) + \int_0^1 g(\xi)\Gamma(x, \xi; -1)d\xi = -\int_0^1 \tau(\eta) G_\xi(x, 1; 0, \eta)d\eta -$$

$$- \int_0^1 \int_0^1 \tau(\eta) G_\xi(t, 1; 0, \eta)d\eta \Gamma(x, t; -1)dt + \Phi_1(x), \qquad (20)$$

где $\Gamma(x, \xi; -1)$ — резольвента уравнения (18), а функция $\Phi_1(x)$ определяется по формуле

$$\Phi_1(x) = \psi_1(x) - \int_0^1 \tau_1(\xi) G(x, 1; \xi, 0)\, d\xi + \int_0^1 \psi(\eta) G_\xi(x, 1; 1, \eta)\, d\eta +$$

$$+ \int_0^1 \psi_1(\xi)\Gamma(x, \xi; -1)\, d\xi - \int_0^1\int_0^1 \tau_1(t) G(\xi, 1; t, 0)\, dt \Gamma(x, \xi; -1)\, d\xi +$$

$$+ \int_0^1\int_0^1 \psi(\eta) G_\xi(t, 1; 1, \eta) d\eta \Gamma(x, t; -1) dt.$$

Вычислив производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ в (16) и затем преобразовав первый интеграл устремляя x к нулю, получим [6]

$$\nu(y) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\tau'(\eta)\, d\eta}{\sqrt{y-\eta}} + \int_0^y K_1(y, \eta)\tau(\eta)\, d\eta +$$

$$+ \int_0^1 [\tau_1(\xi) - \omega_1(\xi)]\, G_x(0, y; \xi, 0) d\xi - \int_0^y \psi(\eta) G_{\xi x}(0, y; 1, \eta)\, d\eta.$$

Учитывая выражения (15) и (20), имеем

$$\nu(y) = \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}}\int_0^y T(t)dt\int_t^y (\eta - t)^{-2\beta-1}(y-\eta)^{-1/2}d\eta +$$

$$+\int_0^y T(t)dt\int_t^y K_1(y,\eta)(\eta - t)^{\gamma-2\beta}d\eta + \int_0^1 T(s)ds\int_0^1 G_x(0, y; t, 0)\,dt \times$$

$$\times\int_s^1 (\eta - s)^{-2\beta} G_\xi(t, 1; 0, \eta)d\eta + \int_0^1 T(s)ds\int_0^1 G_x(0, y; z, 0)\,dz \times \tag{21}$$

$$\times\int_0^1 \Gamma(z, t; -1)dt\int_s^1 G_\xi(t, 1; 0, \eta)(\eta - s)^{-2\beta}d\eta + \Phi_2(y).$$

Здесь

$$K_1(y, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(y-\eta)^{3/2}}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty} e^{-\frac{n^2}{y-\eta}} -$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}(y-\eta)^{5/2}}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty} n^2 e^{-\frac{n^2}{y-\eta}},$$

$$\Phi_2(y) = -\int_0^1 \Phi_1(\xi)G_x(0, y; \xi, 0)d\xi + \int_0^1 \tau_1(\xi)G_x(0, y; \xi, 0)d\xi -$$

$$-\int_0^y \psi(\eta)G_{\xi x}(0, y; 1, \eta)d\eta.$$

Первый и второй интегралы доопределим по t до $(0, 1)$, т. е.

$$\int_0^1 K_2(y, t)T(t)dt = \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}}\int_0^y T(t)dt\int_t^y (\eta - t)^{-2\beta-1}(y-\eta)^{-1/2}d\eta,$$

$$\int_0^1 K_3(y, t)T(t)dt = \int_0^y T(t)dt\int_t^y K_1(y, \eta)(\eta - t)^{-2\beta}d\eta,$$

где

$$K_2(y, t) = \begin{cases} \dfrac{2\beta}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_t^y (\eta - t)^{-2\beta-1}(y-\eta)^{-1/2}d\eta & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant y, \\ 0 & \text{при } y < t \leqslant 1, \end{cases}$$

$$K_3(y, t) = \begin{cases} \int\limits_t^y (\eta - t)^{-2\beta} K_1(y, \eta)\, d\eta & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant y, \\ 0 & \text{при} \quad y < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда (21) имеет вид

$$\nu(y) = \int\limits_0^1 K(y, t) T(t) dt + \Phi_2(y), \tag{22}$$

где

$$K(y, t) = K_2(y, t) + K_3(y, t) + \int\limits_0^1 G_x(0, y; t, 0)\, dt \times$$

$$\times \int\limits_0^1 (\eta - s)^{-2\beta} G_1(t, 1; 0, \eta) d\eta + \int\limits_0^1 G_x(0, y; z, 0) dz \int\limits_0^1 \Gamma(z, t; -1) dt \times$$

$$\times \int\limits_0^1 G_1(t, 1; 0, \eta)(\eta - s)^{-2\beta}\, d\eta.$$

Из (12) находим

$$-\nu(y) = \frac{1}{\gamma_2}\left[N(y) - \frac{1}{2\cos \pi\beta} T(y)\right]. \tag{23}$$

Учитывая условие (4) и исключая $z_x(0, y) = \nu(y)$ из (22) и (23), имеем

$$N(y) - \frac{1}{2\cos \pi\beta} T(y) = \gamma_2 \int\limits_0^1 K(y, t) T(t) dt + \gamma_2 \Phi_2(y)$$

или

$$T(y) + 2\gamma_2 \cos \pi\beta \int\limits_0^1 K(y, t) T(t)\, dt =$$

$$= 2\cos \pi\beta\, N(y) - 2\gamma_2 \cos \pi\beta \Phi_2(y). \tag{24}$$

Уравнение (24) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода со слабой особенностью, разрешимость которого следует из единственности решения задачи и его решение с помощью резольвенты можно записать в виде

$$T(y) = 2\cos\pi\beta\,[N(y) - \gamma_2\Phi_2(y)] - 4\gamma_2\cos^2\pi\beta\times$$

$$\times\int\limits_0^1 \Gamma_1(y, s; \lambda)[N(s) - \Phi_2(s)]\,ds, \tag{25}$$

где $\Gamma_1(y, s; \lambda)$ — резольвента уравнения (24).

Подчиняя (11) условиям из (6) на характеристиках OC и BC и учитывая (25), получаем

$$\psi_2\{-[2(1-2\beta)]^{2\beta-1}\eta^{1-2\beta}\} = \int\limits_0^\eta (\eta - \zeta)^{-\beta}\zeta^{-\beta}N(\zeta)d\zeta, \tag{26}$$

$$\omega_2\{-[2(1-2\beta)]^{2\beta-1}(1-\xi)^{1-2\beta}\} + \int\limits_0^1 K_4(\xi, \zeta)(1-\zeta)^{-\beta}\times$$

$$\times|\xi - \zeta|^{-\beta}d\zeta = F(\xi), \tag{27}$$

где

$$K_4(\xi, \zeta) = \begin{cases} 2\cos\pi\beta N(\zeta) - 4\gamma_2\cos^2\pi\beta\int\limits_0^1 N(s)\Gamma_1(\zeta, s; \lambda)ds & \text{при } 0 \leqslant \zeta < \xi, \\ N(\zeta) & \text{при } \xi < \zeta \leqslant 1, \end{cases}$$

$$F(\xi) = \psi_2\{-[2(1-2\beta)]^{2\beta-1}(1-\xi)^{1-2\beta}\} - 4\gamma_2^2\cos^2\pi\beta\times$$

$$\times\int\limits_0^\xi (1-\zeta)^{-\beta}(\xi-\zeta)^{-\beta}\int\limits_0^1 \Phi_2(s)\Gamma_1(\zeta, s; \lambda)\,ds\,d\zeta +$$

$$+ 2\gamma_2\cos\pi\beta\int\limits_0^\xi (1-\zeta)^{-\beta}(\xi-\zeta)^{-\beta}\Phi_2(\zeta)d\zeta.$$

Последняя система имеет решение, что и доказывает существование решения задачи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Салахитдинов М. С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: Фан, 1974. 156 с.
2. Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979. 238 с.
3. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 296 с.
4. Нагорный А. М. Об одной краевой задаче для вырождающегося уравнения гиперболического типа//Тезисы докладов республиканского симпозиума по дифференциальным уравнениям. Ашхабад, 1978. С. 25—26.
5. Мередов М., Базаров Д. Задача Дирихле для одного уравнения треть-

его порядка параболо-гиперболического типа//Дифференциальные уравнения. 1986 Т. 22. № 6. С. 1016—1020.
6. Капустин Н. Ю. Об обобщенной разрешимости задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения//Докл. АН СССР. 1984. Т. 274. № 6. С. 1294—1298.

М. С. САЛАХИТДИНОВ, Б. ИСЛОМОВ

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С НЕГЛАДКОЙ ЛИНИЕЙ И РАЗЛИЧНЫМ ПОРЯДКОМ ВЫРОЖДЕНИЯ ВНУТРИ ОБЛАСТИ

Рассмотрим уравнение

$$|y|^m u_{xx} + |x|^n u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = d(x, y),$$

$$m, n = \text{const} > 0 \tag{1}$$

в конечной односвязной области Ω, ограниченной дугами кривых

$$\frac{1}{q^2}|x|^{2q} + \frac{1}{p^2}|y|^{2p} = 1, \quad \text{где} \quad 2q = n + 2,\ 2p = m + 2.$$

Для вырождающегося внутри области эллиптического уравнения с одной линией вырождения задача Дирихле рассмотрена в работе [1].

В данной статье изучается задача Дирихле для уравнения (1), т. е. для вырождающегося эллиптического уравнения с перпендикулярными линиями вырождения, лежащими внутри области.

Введем обозначения:

$$\Omega_1 = \Omega \cap \{x > 0, y > 0\}, \quad \Omega_2 = \Omega \cap \{x < 0, y > 0\},$$

$$\Omega_3 = \Omega \cap \{x < 0, y < 0\}, \quad \Omega_4 = \Omega \cap \{x > 0, y < 0\},$$

$$I_1 = \{(x, y) : 0 < x < h_1, y = 0\}, \quad I_2 = \{(x, y) : -h_1 < x < 0, y = 0\},$$

$$I_3 = \{(x, y) : x = 0, 0 < y < h_2\}, \quad I_4 = \{(x, y) : x = 0, -h_2 < y < 0\},$$

$$\Delta_1 = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup I_3, \quad \Delta_2 = \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup I_2,$$

$$\Delta_3 = \Omega_3 \cup \Omega_4 \cup I_4,\ \Delta_4 = \Omega_4 \cup \Omega_1 \cup I_1,\ h_1 = q^{1/q},\ h_2 = p^{1/p}.$$

Криволинейную границу областей Ω_i обозначим через σ_i $(i=\overline{1, 4})$ соответственно.

Относительно коэффициентов и свободного члена уравнения (1) предполагаем, что

$$c(x, y) \leqslant 0, \quad (x, y) \in \Omega, \tag{2}$$

$$a(x, y) = |x|^{qk_1+1} |y|^{p(k_2+1)} \bar{a}(x, y),$$

$$b(x, y) = |x|^{q(k_1+1)} |y|^{pk_2+1} \bar{b}(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \tag{3}$$

$$c(x, y) = |x|^{q(k_1+1)} |y|^{pk_2} \bar{c}(x, y),$$

$$d(x, y) = |x|^{q(k_1+1)} |y|^{pk_2} \bar{d}(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \tag{4}$$

$$\bar{a}(x, y),\ \bar{b}(x, y),\ \bar{c}(x, y),\ \bar{d}(x, y) \in C^1(\bar{\Omega}), \tag{5}$$

где

$k_1 = 0$ при $n < 2$ и $k_1 > 4\alpha - 1$ при $n \geqslant 2$, $2\alpha = n/(n+2)$,

$k_2 = 0$ при $m < 2$ и $k_2 > 4\beta - 1$ при $m \geqslant 2$, $2\beta = m/(m+2)$.

Пусть линии σ_2 и σ_3 симметричны относительно оси Oy линиям σ_1 и σ_4, а линии σ_3 и σ_4 — относительно Ox линиям σ_2 и σ_1. Тогда области Ω_2 и Ω_3 (Ω_3 и Ω_4) симметричны областям Ω_1 и Ω_4 (Ω_2 и Ω_1) относительно оси Oy (Ox) соответственно. Под регулярным в области Ω решением уравнения (1) будем понимать функцию $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4)$, удовлетворяющую уравнению (1) в областях Ω_i $(i = \overline{1, 4})$ и такую, что u_x, u_y могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы на концах интервала I_i $(i = \overline{1, 4})$.

Задача D. Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, y)|_{\sigma_i} = \varphi_i(x, y), \ (x, y) \in \sigma_i, \tag{6_i}$$

где $\varphi_i(x, y)$ $(i = \overline{1, 4})$ — заданные функции, причем

$$\varphi_i(x, y) = xy\bar{\varphi}_i(x, y), \quad \bar{\varphi}_i(x, y) \in C(\bar{\sigma}_i). \tag{7}$$

Теорема 1. Если выполнены условия (2) и

$$a(-0, y) = a(+0, y), \quad y \in I_3 \cup I_4, \tag{8}$$

$$b(x, -0) = b(x, +0), \quad x \in I_1 \cup I_2,$$

$$\frac{\partial a(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial b(x, y)}{\partial y} \geqslant 0, \ (x, y) \in \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4, \tag{9}$$

то в области Ω не может существовать более одного решения задачи D.

Доказательство теоремы 1 проведем методом интегралов энергии.

Пусть $u(x, y)$ — решение однородной задачи D. Проинтегрируем тождество

$$u[|y|^m u_{xx} + |x|^n u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u] = 0$$

по областям Ω_i $(i=\overline{1, 4})$. Затем, применив формулу Грина, получим

$$\iint_{\Omega_1} [y^m u_x^2 + x^n u_y^2 - c(x, y)u^2]\, dx\, dy + \frac{1}{2}\iint_{\Omega_1}\left[\frac{\partial a(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial b(x, y)}{\partial y}\right]u^2\, dx\, dy + \int_0^{h_2}\left[y^m u_x(+0, y) + \frac{1}{2}a(+0, y)u(+0, y)\right]u(+0, y)dy + \int_0^{h_1}\left[x^n u_y(x, +0) + \frac{1}{2}b(x, +0)u(x, +0)\right]u(x, +0)dx = 0, \tag{10}$$

$$\iint_{\Omega_2} [y^m u_x^2 + (-x)^n u_y^2 - c(x, y)u^2]\, dx\, dy + \frac{1}{2}\iint_{\Omega_2}\left[\frac{\partial a(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial b(x, y)}{\partial y}\right]u^2\, dx\, dy - \int_0^{h_2} [y^m u_x(-0, y) + \frac{1}{2}a(-0, y) \times u(-0, y)]\, u(-0, y)\, dy + \int_{-h_1}^{0}\left[(-x)^n u_y(x, +0) + \frac{1}{2}b(x, +0)u(x, +0)\right] u(x, +0)\, dx = 0, \tag{11}$$

$$\iint_{\Omega_3} [(-y)^m u_x^2 + (-x)^n u_y^2 - c(x, y)u^2]\, dx\, dy + \frac{1}{2}\iint_{\Omega_3}\left[\frac{\partial a(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial b(x, y)}{\partial y}\right]u^2\, dx\, dy - \int_{-h_2}^{0}\left[(-y)^m u_x(-0, y) + \right.$$

$$+\frac{1}{2}a(-0,y)u(-0,y)\Big]u(-0,y)\,dy-$$

$$-\int_{-h_1}^{0}\Big[(-x)^n u_y(x,-0)+\frac{1}{2}b(x,-0)u(x,-0)\Big]u(x,-0)\,dx=0, \tag{12}$$

$$\iint_{\Omega_4}[(-y)^m u_x^2+x^n u_y^2-c(x,y)u^2]\,dx\,dy+\frac{1}{2}\iint_{\Omega_4}\Big[\frac{\partial a(x,y)}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial b(x,y)}{\partial y}\Big]u^2\,dx\,dy+\int_{-h_2}^{0}\Big[(-y)^m u_x(+0,y)+$$

$$+\frac{1}{2}a(+0,y)u(+0,y)\Big]u(+0,y)\,dy-$$

$$-\int_{0}^{h_1}\Big[x^n u_y(x,-0)+\frac{1}{2}b(x,-0)u(x,-0)\Big]u(x,-0)\,dx=0. \tag{13}$$

На основании (8) и непрерывности склеивания на отрезках I_i $(i=\overline{1,4})$ из (10)—(13) имеем

$$\iint_{\Omega_1}[y^m u_x^2+x^n u_y^2]\,dx\,dy+\iint_{\Omega_2}[y^m u_x^2+(-x)^n u_y^2]\,dx\,dy+$$

$$+\iint_{\Omega_3}[(-y)^m u_x^2+(-x)^n u_y^2]\,dx\,dy+\iint_{\Omega_4}[(-y)^m u_x^2+x^n u_y^2]\,dx\,dy-$$

$$-\iint_{\Omega}c(x,y)u^2\,dx\,dy+\frac{1}{2}\iint_{\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3\cup\Omega_4}\Big[\frac{\partial a(x,y)}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial b(x,y)}{\partial y}\Big]u^2\,dx\,dy=0. \tag{14}$$

В силу условий (2), (9) из (14) следует $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{\Omega}$, что и требовалось доказать.

При исследовании однозначной разрешимости задачи D существенную роль играют следующие задачи.

Задача DN_1. Найти решение

$$u(x, y) \in C(\overline{\Delta}_{2i-1}) \cap C^1(\Delta_{2i-1} \cup I_1 \cup I_2) \cap C^2(\Delta_{2i-1})$$

уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (6_{2i-1}), (6_{2i}) и

$$\left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right|_{y=0} = \nu_1(x), \quad x \in I_1, \tag{15_1}$$

$$\left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right|_{y=0} = \nu_2(x), \quad x \in I_2, \tag{15_2}$$

где $\nu_k(x) \in C(I_k)$ $(k = 1, 2)$— заданные функции, которые могут иметь особенность порядка меньше единицы на концах интервала I_k; здесь $i = 1, 2$.

Задача DN_3. Найти решение $u(x, y) \in C(\overline{\Delta}_2) \cap C^1(\Delta_2 \cup I_3 \cup I_4) \cap$ $\cap C^2(\Delta_2)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (6_2), (6_3) и

$$\left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\right|_{x=0} = \nu_3(y), \quad y \in I_3, \tag{15_3}$$

$$\left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\right|_{x=0} = \nu_4(y), \quad y \in I_4, \tag{15_4}$$

где $\nu_j(y) \in C(I_j)$ $(j = 3, 4)$— заданные функции, которые могут иметь особенность порядка меньше единицы на концах интервала I_j.

Задача DN_4. Найти решение $u(x, y) \in C(\overline{\Delta}_4) \cap C^1(\Delta_4 \cup I_3 \cup I_4) \cap$ $\cap C^2(\Delta_4)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (6_1), (6_4), (15_3) и (15_4).

Задача N_l. Найти решение $u(x, y) \in C(\overline{\Omega}_l) \cap C^1(\Omega_l \cup I_l \cup I_3) \cap$ $\cap C^2(\Omega_l)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (6_l), (15_l) и (15_3); здесь $l = 1, 2$.

Задача N_3 $[N_4]$. Найти решение

$$u(x, y) \in C(\overline{\Omega}_3) \cap C^1(\Omega_3 \cup I_2 \cup I_4) \cup C^2(\Omega_3) \times$$
$$\times [C(\overline{\Omega}_4) \cap C^1(\Omega_4 \cup I_1 \cup I_4) \cap C^2(\Omega_4)]$$

уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (6_3), (15_2), (15_4) $[(6_4), (15_1), (15_4)]$.

На основании условий (2), (3), (8), (9) единственность решения задач DN_l и N_l $(l = \overline{1, 4})$ доказывается методом интегралов энергии.

Определение. Функцией Грина задача N_1 для уравнения (1) при $a\equiv b\equiv c\equiv d\equiv 0$ в области Ω_1 называется функция $G_{01}(\xi, \eta; x, y)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) внутри области Ω_1, кроме точки (x, y), эта функция является регулярным решением уравнения (1) при $a\equiv b\equiv c\equiv d\equiv 0$;

2) она удовлетворяет граничным условиям

$$G_{01}(\xi, \eta; x, y)|_{\sigma_1}=0, \quad \frac{\partial}{\partial\xi} G_{01}(\xi, \eta; x, y)|_{\xi=0}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta} G_{01}(\xi, \eta; x, y)|_{\eta=0}=0;$$

3) ее можно представить в виде

$$G_{01}(\xi, \eta; x, y)=q_1(\xi, \eta; x, y)-\left(\frac{1}{R^2}\right)^{\alpha+\beta} q_1(\xi, \eta; \bar{x}, \bar{y}), \tag{16}$$

где

$$R^2=\frac{1}{q^2}x^{2q}+\frac{1}{p^2}y^{2p}, \quad \bar{x}^q=\frac{1}{R^2}x^q, \quad \bar{y}^p=\frac{1}{R^2}y^p;$$

$q_1(\xi, \eta; x, y)$ — фундаментальное решение уравнения (1) при $a\equiv b\equiv c\equiv d\equiv 0$ в области Ω_1 [2].

С помощью функции Грина решения задач $N_i(i=\overline{1, 4})$ представимы в виде

$$u(x, y)=\mp\int_0^{\pm h}[G_{01}(\pm t, 0; \pm x, y)+Q_1(\pm t, 0; \pm x, y)+$$

$$+Q_2(\pm t, 0; \pm x, y)](\pm t)^n\nu_l(t)\,dt\mp\int_0^{h_1}[G_{01}(0, t; \pm x, y)+$$

$$+\tilde{Q}_1(0, t; \pm x, y)+\tilde{Q}_2(0, t; \pm x, y)]t^m\nu_2(t)\,dt-$$

$$-\int_{\sigma_l}\left\{A_s^{\mp(-1)^l}\left[G_{01}(\pm\xi, \eta; \pm x, y)\right]+\bar{Q}_1(\pm\xi, \eta; \pm x, y)+\right.$$

$$\left.+\bar{Q}_2(\pm\xi, \eta; \pm x, y)\right\}\varphi_l(\xi, \eta)\,ds-D^{\mp(-1)^l}(\pm x, y), \tag{17}$$

$$u(x, y)=\pm\int_0^{\pm h_1}[G_{01}(\pm t, 0; \pm x, -y)+Q_1(\pm t, 0; \pm x, -y)+$$

$$+Q_2(\pm t, 0; \pm x, -y)](\pm t)^n\nu_l(t)\,dt\pm\int_0^{-h_2}]G_{01}(0, -t; \pm x, -y)+$$

$$+\bar{Q}_1(0,-t;\pm x,-y)+\tilde{Q}_2(0,-t;\pm x,-y)](-t)^m\nu_i(t)\,dt-$$

$$-\int_{\overleftarrow{\sigma}_j}\Big\{A_s^{\mp(-1)^j}[G_{01}(\pm\xi,-\eta;\pm x,-y)]+\bar{Q}_1(\pm\xi,-\eta;\pm x,-y)+$$

$$+\bar{Q}_2(\pm\xi,-\eta;\pm x,-y)\Big\}\varphi_j(\xi,\eta)\,ds-D^{\mp(-1)^j}(\pm x,-y); \quad (18)$$

здесь при $i=1$ и $j=4$ берется верхний знак, а при $i=2$ и $j=3$ — нижний;

где

$$A_s^{\mp(-1)^i}[\;]=[\mp(-1)^i\eta]^m\frac{d\eta}{ds}\frac{\partial}{\partial\xi}-(\pm\xi)^n\frac{d\xi}{ds}\frac{\partial}{\partial\eta},$$

$$Q_1(\pm t,0;\mp x,\mp(-1)^i y)=\iint_{\Omega_i}G_{01}(\xi,\eta;\pm x,\mp(-1)^i y)\times$$

$$\times\Big[K(\pm t,0;\xi,\eta)+\iint_{\Omega_i}K(\pm t,0;\xi',\eta')K(\xi',\eta';\xi,\eta)\,d\xi'd\eta'\Big]d\xi d\eta,$$

$$Q_2(\pm t,0;\pm x,\mp(-1)^i y)=\iint_{\Omega_i}\iint_{\Omega_i}G_{01}(\xi,\eta;\pm x,\mp(-1)^i y)\times$$

$$\times\Gamma_2(\xi',\eta';\xi,\eta)\Big[K(\pm t,0;\xi',\eta')+\iint_{\Omega_i}K(\xi_1,\eta_1;\xi',\eta')\times$$

$$\times K(\pm t,0;\xi_1,\eta_1)\,d\xi_1d\eta_1\Big]d\xi'd\eta'd\xi d\eta,$$

$$\tilde{Q}_1(0,\mp(-1)^i t;\pm x,\mp(-1)^i y)=\iint_{\Omega_i}G_{01}(\xi,\eta;\pm x,\mp(-1)^i y)\times$$

$$\times\Big[\bar{K}(0,\mp(-1)^i t;\xi,\eta)+\iint_{\Omega_i}\tilde{K}(0,\mp(-1)^i t;\xi',\eta')K(\xi',\eta';$$

$$\xi,\eta)\,d\xi'd\eta'\Big]d\xi d\eta,$$

$$\tilde{Q}_2(0,\mp(-1)^i t;\pm x,\mp(-1)^i y)=\iint_{\Omega_i}\iint_{\Omega_i}G_{01}(\xi,\eta;\pm x,\mp(-1)^i y)\times$$

$$\times\Gamma_2(\xi',\eta';\xi,\eta)\Big[\bar{K}(0,\mp(-1)^i t;\xi',\eta')+\iint_{\Omega_i}K(\xi_1,\eta_1;\xi',\eta')\times$$

$$\times\bar{K}(0,\mp(-1)^i t;\xi_1,\eta_1)\,d\xi_1d\eta_1\Big]d\xi'd\eta'd\xi d\eta,$$

$$\bar{Q}_1(\pm\xi,\mp(-1)^i\eta;\pm x,\mp(-1)^i y)=\iint_{\Omega_i}G_{01}(\xi_1,\eta_1;\pm x,\mp(-1)^i y)\times$$

$$\times\Bigg[\tilde{K}(\pm\xi,\ \mp(-1)^i\eta;\ \xi_1,\ \eta_1)+\iint\limits_{\Omega_i}\bar{K}(\pm\xi,\ \mp(-1)^i\eta;\ \xi',\ \eta')\times$$

$$\times K(\xi',\ \eta';\ \xi_1,\ \eta_1)\,d\xi'\,d\eta'\Bigg]\,d\xi_1\,d\eta_1,$$

$$\bar{Q}_2(\pm\xi,\mp(-1)^i\eta;\ \pm x,\ \mp(-1)^i y)=\iint\limits_{\Omega_i}\iint\limits_{\Omega_i}G_{01}(\xi_1,\ \eta_1;\ \pm x,\ \mp(-1)^i y)\times$$

$$\times\Gamma_2(\xi',\ \eta';\ \xi_1,\ \eta_1)\Bigg[\tilde{K}(\pm\xi,\ \mp(-1)^i\eta;\ \xi',\ \eta')+\iint\limits_{\Omega_i}K(\xi_2,\ \eta_2;\ \xi',\ \eta')\times$$

$$\times\bar{K}(\pm\xi,\ \mp(-1)^i\eta;\ \xi_2,\ \eta_2)\,d\xi_2\,d\eta_2\Bigg]\,d\xi'\,d\eta'\,d\xi_1\,d\eta_1,$$

$$\left.\begin{matrix}K(\pm\xi,\ \mp(-1)^i\eta;\ x,\ y)\\ \tilde{K}(0,\ \mp(-1)^i t;\ x,\ y)\\ \bar{K}(\pm\xi,\ \mp(-1)^i\eta;\ x,\ y)\end{matrix}\right\}_i=\Bigg[a(x,\ y)\frac{\partial}{\partial x}+b(x,\ y)\frac{\partial}{\partial y}+$$

$$+c(x,\ y)\Bigg]\ \left|\begin{matrix}G_{01}(\pm\xi,\ \mp(-1)^i\eta;\ x,\ y),\\ G_{01}(0,\ \mp(-1)^i t;\ x,\ y),\\ A_x^{\mp(-1)^i}\,[G_{01}(\pm\xi,\ \mp(-1)^i\eta;\ x,\ y)],\end{matrix}\right.$$

$$D^{\mp(-1)^i}(\pm x,\ \mp(-1)^i y)=\iint\limits_{\Omega_i}G_{01}(\xi,\ \eta;\ \pm x,\ \mp(-1)^i y)\times$$

$$\times\Bigg\{d(\xi,\ \eta)+\iint\limits_{\Omega_i}\Bigg[(K(\xi',\ \eta';\ \xi,\ \eta)+\Gamma_2(\xi',\ \eta';\ \xi,\ \eta))\,d(\xi',\ \eta')+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_i}\Gamma_2(\xi',\ \eta';\ \xi,\ \eta)\,K(\xi_1,\ \eta_1;\ \xi',\ \eta')\,d(\xi_1,\ \eta_1)\,d\xi_1\,d\eta_1\Bigg]\,d\xi'\,d\eta'\Bigg\}\,d\xi\,d\eta,$$

здесь $\Gamma_2(\xi,\ \eta;\ x,\ y)$ — резольвента ядра;

$$K_2(\xi,\eta;x,y)=\iint\limits_{\Omega_i}K(\xi',\eta';x,y)K(\xi,\eta;\xi',\eta')d\xi'\,d\eta',$$

где $(i=\overline{1,\ 4})$ и при $i=1$, 4 берется верхний знак, а при $i=2$, 3 — нижний.

Теорема 2. Если выполнены условия (3), (4), (5) и (7), то существует решение задачи D.

Доказательство. Пусть $i=1$, 2, тогда, полагая в (17) $x=0$ с учетом (16), имеем

$$\tau_2(y) = (-1)^i \gamma \int_0^{h_2} t^m \nu_2(t) \left\{ \frac{F\left(\beta-\alpha, \beta; 2\beta; \dfrac{\frac{4}{p^2}\eta^p y^p}{\left(\frac{1}{p}\eta^p + \frac{1}{p}y^p\right)^2}\right)}{\left|\frac{1}{p}\eta^p - \frac{1}{p}y^p\right|^{2\alpha}\left(\frac{1}{p}\eta^p + \frac{1}{p}y^p\right)^{2\beta}} - \right.$$

$$\left. - \frac{F\left(\beta-\alpha, \beta; 2\beta; \dfrac{\frac{4}{p^2}\eta^p y^p}{\left(1+\frac{1}{p^2}\eta^p y^p\right)^2}\right)}{\left(1 - \frac{1}{p^2}\eta^p y^p\right)^{2\alpha}\left(1+\frac{1}{p^2}\eta^p y^p\right)^{2\beta}} \right\} dt +$$

$$+ (-1)^i \int_0^{h_2} \bar{Q}(y, t) t^m \nu_2(t) dt + F_i(y, \nu_i, \varphi_i), \quad (i = 1, 2), \qquad (19_i)$$

где

$$\tau_2(y) = u(0, y), \quad \gamma = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2}{q}\right)^{2\alpha}\left(\frac{2}{p}\right)^{2\beta} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(2\beta)},$$

$$\bar{Q}(y, t) = \bar{Q}_1(0, t; 0, y) + \bar{Q}_2(0, t; 0, y),$$

$$F_i(y, \nu_i, \varphi_i) = \mp \int_0^{\pm h_1} [G_{01}(\pm t, 0; 0, y) + Q_1(\pm t, 0, 0, y) +$$

$$+ Q_2(\pm t, 0; 0, y)] (\pm t)^n \nu_i(t)\, dt - \int_{\sigma_i} \left\{ A_s^{\mp(-1)^i} [G_{01}(\pm \xi, \eta; 0, y)] + \right.$$

$$\left. + \bar{Q}_1(\pm \xi, \eta; 0, y) + \bar{Q}_2(\pm \xi, \eta; 0, y) \right\} \varphi_i(\xi, \eta)\, ds - D^{\mp(-1)^i}(0, y);$$

здесь при $i=1$ берется верхний знак, а при $i=2$ — нижний.

Последовательно применяя формулы [3]

$$F(a', b'; c'; z) = A_1 z^{-a'} F(a', a'-c'+1; a'+b'+1-c'; 1-z^{-1}) +$$

$$+ A_2 z^{a'-c'}(1-z)^{c'-a'-b'} F(c'-a', 1-a'; c'+1-a'-b'; 1-z^{-1}), \qquad (20)$$

$$A_1 = \Gamma(c')\Gamma(c'-a'-b')/\Gamma(c'-a')\Gamma(c'-b'),$$

$$A_2 = \Gamma(c')\Gamma(a'+b'-c')/\Gamma(a')\Gamma(b'),\ |\arg z| < \pi,$$

$$F(a', b'; c'; z) = (1-z)^{c'-a'-b'} F(c'-a', c'-b'; c'; z), \tag{21}$$

$$F(a', 1-a'; c'; -z) = (1+z)^{c'-1} (\sqrt{1+z} + \sqrt{z})^{2-2a'-2c'} \times$$
$$\times F\left[c'+a'-1, c'-\frac{1}{2};\ 2c'-1;\ 4\sqrt{z(1+z)}(\sqrt{1+z}+\sqrt{z})^{-2}\right], \tag{22}$$

предыдущее равенство (19_i) приводим к виду

$$\tilde{\tau}_2(y) = (-1)^i \left\{ \gamma_1 y^{\alpha-\beta} F_{0y} \begin{bmatrix} \beta-\alpha, & \frac{1-2\alpha}{2} \\ 1-2\alpha & y \end{bmatrix} y^{\frac{2\beta-1}{2}} \tilde{\nu}_2(y) + \right.$$
$$+ \gamma_1 y^{\alpha-\beta} F_{y1} \begin{bmatrix} \beta-\alpha, & \frac{1-2\alpha}{2} \\ 1-2\alpha & y \end{bmatrix} y^{\frac{2\beta-1}{2}} \tilde{\nu}_2(y) +$$
$$+ \gamma_2 y^{-\alpha-\beta} \int_0^1 t^{\frac{2\beta-1}{2}} \tilde{\nu}_2(t)\, F\left(\alpha+\beta, \frac{1}{2}+\alpha;\ 1+2\alpha;\ \frac{y-t}{y}\right) dt -$$
$$- \frac{\gamma_1}{\Gamma(1-2\alpha)} \int_0^1 t^{\frac{2\beta-1}{2}} \tilde{\nu}_2(t)(1-yt)^{-2\alpha} F\left(\beta-\alpha, \frac{1}{2}-\alpha;\ 1-2\alpha;\ 1-yt\right) dt -$$
$$- \gamma_2 \int_0^1 t^{\frac{2\beta-1}{2}} \tilde{\nu}_2(t)\, F\left(\beta+\alpha, \frac{1}{2}+\alpha;\ 1+2\alpha;\ 1-yt\right) dt +$$
$$\left. + \int_0^1 \tilde{Q}(y, t)\, t^{\frac{2\beta-1}{2}} \tilde{\nu}_2(t)\, dt \right\} + F_i\left[(p^2 y)^{1/2p},\ \nu_i,\ \varphi_i\right],\ (i = 1, 2), \tag{23_i}$$

где

$$\tilde{\tau}_2(y) = \tau_2[(p^2 y)^{1/2p}], \quad \tilde{\nu}_2(y) = \nu_2[(p^2 y)^{1/2p}],$$

$$\tilde{Q}(y, t) = \frac{p^{2\beta}}{2} \bar{Q}[(p^2 y)^{1/2p}, (p^2 t)^{1/2p}],$$

$$\gamma_1 = \frac{2^{2\alpha-3}}{\pi} \left(\frac{2}{q}\right)^{2\alpha} \frac{\Gamma(1-2\alpha)\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)},$$

$$\gamma_2 = \frac{2^{-2\alpha-3}}{\pi}\left(\frac{2}{q}\right)^{2\alpha} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)},$$

F_{0y} и F_{y1} — известные операторы, введенные в работах [2], [4]:

$$F_{0y}\begin{bmatrix} a', b' \\ c'\ y^k \end{bmatrix} f(y) = \frac{1}{\Gamma(c')}\int_0^y f(t)(y^k - t^k)^{c'-1} \times$$

$$\times F\left(a', b'; c'; \frac{y^k - t^k}{y^k}\right) k t^{k-1}\, dt.$$

$$F_{y1}\begin{bmatrix} a', b' \\ c'\ y^k \end{bmatrix} f(y) = \frac{1}{\Gamma(c')}\int_y^1 f(t)(t^k - y^k)^{c'-1} \times$$

$$\times F\left(a', b'; c'; \frac{y^k - t^k}{y^k}\right) k t^{k-1}\, dt, \quad k > 0, \quad c' > 0.$$

Исключая $\tilde{\tau}_3(y)$ из соотношений (23_1), (23_2) и применяя затем оператор

$$y^{\frac{1-2\beta}{2}} \frac{d}{dy}\, y^{\frac{1-2\alpha}{2}} F_{0y}\begin{bmatrix} \alpha+\beta, & \frac{2\alpha-1}{2} \\ 2\alpha & y \end{bmatrix} y^{\frac{2\beta-1}{2}}$$

к обеим частям полученного равенства, после некоторых вычислений получаем сингулярное интегральное уравнение, эквивалентное задаче DN_1:

$$\mu_3(z_2) + \lambda_2 \int_0^1 \frac{\mu_3(\xi)}{\xi - z_2}\, d\xi + \int_0^1 Q_2(z_2, \xi)\mu_3(\xi)\, d\xi =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 Q_4(z_2, \xi)[\mu_1(\xi) - \mu_2(\xi)]\, d\xi + \Phi_3(z_2). \qquad (24)$$

Аналогичным методом, используя представления решения задач N_i (17), (18) $(i = \overline{1, 4})$, свойства гипергеометрических функций Горна [3] и преобразования Меллина [5], задачи DN_3, DN_4 и DN_2 сведем к эквивалентным сингулярным интегральным уравнениям:

$$\mu_j(z_1) + \lambda_1 \int_0^1 \frac{\mu_j(\xi)}{\xi - z_1}\, d\xi + \int_0^1 Q_1(z_1, \xi)\mu_j(\xi)\, d\xi =$$

$$= (-1)^j \frac{1}{2} \int_0^1 Q_3(z_1, \xi)[\mu_3(\xi) - \mu_4(\xi)] d\xi + \Phi_j(z_1), \ (j = 1, 2), \tag{25$_j$}$$

$$\mu_4(z_2) + \lambda_2 \int_0^1 \frac{\mu_4(\xi)}{\xi - z_2} d\xi + \int_0^1 Q_3(z_2, \xi) \mu_4(\xi) d\xi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 Q_4(z_2, \xi)[\mu_1(\xi) - \mu_2(\xi)] d\xi + \Phi_4(z_2), \tag{26}$$

$$z_1 = \frac{2x}{1 + x^2}, \ z_2 = \frac{2y}{1 + y^2}, \ \xi = \frac{2t}{1 + t^2},$$

$$\mu_j(z_1) = (1 + x^2) x^{\frac{1}{2} - \beta} \nu_j[(-1)^{j+1} (q^2 x)^{1/2q}],$$

$$\mu_k(z_2) = (1 + y^2) y^{\frac{1}{2} - \alpha} \nu_k[(-1)^{k+1} (p^2 y)^{1/2p}], \quad (k = 3, 4),$$

$$Q_j(z_j, \xi) = \frac{\overline{Q}_j(z_j, \xi) - \overline{Q}_j(z_j, z_j)}{\xi - z_j} + \overline{\overline{Q}}_j(z_j, \xi), \quad (j = 1, 2),$$

$$\overline{Q}_1(z_1, \xi) = \frac{1}{1 - t^2} \Big[\overline{\lambda}_1 (1 - xt - t^{\beta + \alpha} + xt^{\beta + \alpha - 1}) -$$

$$- \overline{\overline{\lambda}}_1 \left(\frac{x}{t}\right)^{\frac{1}{2} - \beta} (1 - xt - t^{\beta - \alpha + 1} + xt^{\beta - \alpha}) \Big],$$

$$\overline{Q}_2(z_2, \xi) = \frac{1}{1 - t^2} \Big[\overline{\lambda}_2 (1 - yt - t^{\alpha + \beta} + yt^{\alpha + \beta - 1}) -$$

$$- \overline{\overline{\lambda}}_2 \left(\frac{y}{t}\right)^{\frac{1}{2} - \alpha} (1 - yt - t^{\alpha - \beta + 1} + yt^{\alpha - \beta}) \Big],$$

$$\overline{\overline{Q}}_1(z_1, \xi) = \frac{(1 + x^2)(1 + t^2)}{8\gamma_3 \sin^2 \pi\beta (1 - t^2)} \left(\frac{x}{t}\right)^{1 - \alpha - \beta} \frac{d}{dx} x^{\frac{1}{2} - \beta} \times$$

$$\times F_{0x} \begin{bmatrix} \alpha + \beta, & \frac{2\beta - 1}{2} \\ 2\beta & x \end{bmatrix} x^{\frac{2\alpha - 1}{2}} Q(x, t),$$

$$\overline{\overline{Q}}_2(z_2, \xi) = \frac{(1 + y^2)(1 + t^2)}{8\gamma_1 \sin^2 \pi\alpha (1 - t^2)} \left(\frac{y}{t}\right)^{1 - \alpha - \beta} \frac{d}{dy} y^{\frac{1}{2} - \alpha} \times$$

$$\times F_{0y}\begin{bmatrix} \alpha+\beta, & \frac{2\alpha-1}{2} \\ 2\alpha & y \end{bmatrix} y^{\frac{2\beta-1}{2}}\, \tilde{Q}(y,\ t),$$

$$Q_2(z_1,\ \xi)=\frac{(1+x^2)(1+t^2)\,x^{\alpha-\frac{1}{2}}}{4\gamma_2\sin^2\pi\beta\,(1-t^2)}\left(\frac{x}{t}\right)^{1-\alpha-\beta}\overline{Q}_3(x,\ t),$$

$$Q_4(z_2,\ \xi)=\frac{(1+y^2)(1+t^2)\,y^{\beta-\frac{1}{2}}}{4\gamma_1\sin^2\pi\alpha\,(1-t^2)}\left(\frac{y}{t}\right)^{1-\alpha-\beta}\overline{Q}_4(y,\ t),$$

$$\gamma_2=\frac{2^{2\beta-3}}{\pi}\left(\frac{2}{p}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma(1-2\beta)\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)},\ \lambda_1=\frac{\operatorname{ctg}\pi\beta}{\pi},\ \lambda_2=\frac{\operatorname{ctg}\pi\alpha}{\pi}.$$

Здесь $Q(x,\ t)$, $\overline{Q}_3(x,\ t)$, $\overline{Q}_4(y,\ t)$ и $\Phi_i(\cdot)$ $(i=\overline{1,\ 4})$ — известные функции, зависящие от коэффициентов, свободного члена уравнения (1) и функции Грина задачи N_i для уравнения (1) при $a\equiv b\equiv c\equiv d\equiv 0$ в области Ω_i, а $\overline{\lambda}_j$ и $\overline{\overline{\lambda}}_j$ $(j=1,\ 2)$ — известные постоянные.

Систему уравнений (24), (25_1), (25_2), (26) можно исследовать способом, описанным в [6], [7].

Введя обозначения

$$\mu_1(z_1)-\mu_2(z_1)=\rho_1(z_1),$$
$$\mu_3(z_2)-\mu_4(z_2)=\rho_2(z_2),$$
$$\Phi_1(z_1)-\Phi_2(z_1)=\tilde{\Phi}_1(z_1),$$
$$\Phi_3(z_2)-\Phi_4(z_2)=\tilde{\Phi}_2(z_2),$$

получим систему уравнений, эквивалентную системе (24), (25_1), (25_2), (26):

$$\rho_1(z_1)+\lambda_1\int_0^1\frac{\rho_1(\xi)}{\xi-z_1}d\xi+\int_0^1 Q_1(z_1,\xi)\rho_1(\xi)\,d\xi=$$
$$=\tilde{\Phi}_1(z_1)-\int_0^1 Q_2(z_1,\xi)\rho_2(\xi)\,d\xi, \qquad (27_1)$$

$$\rho_2(z_2)+\lambda_2\int_0^1\frac{\rho_2(\xi)}{\xi-z_2}d\xi+\int_0^1 Q_3(z_2,\xi)\rho_2(\xi)\,d\xi=$$
$$=\tilde{\Phi}_2(z_2)-\int_0^1 Q_4(z_2,\xi)\,\rho_1(\xi)\,d\xi. \qquad (27_2)$$

На основании (3), (4), (5), свойств заданных функций задач DN_i $(i=\overline{1, 4})$ и функции Грина нетрудно убедиться, что

$$\tilde{\Phi}_j(z_j) \in C^2(0, 1), \ (j=1, 2).$$

Эти функции ограничены при $z_j \to 0$ и обращаются в бесконечность порядка меньше β при $z_j \to 1$, а ядра $Q_i(\cdot, \xi)$ — имеют слабую особенность.

Решение $\mu_j(z_j)$, $(j=1, 2)$ системы (27_j) ищем в классе функций, ограниченных при $z_j \to 0$ и не ограниченных при $z_j \to 1$, т. е. в классе $h(0)$, где индекс равен нулю.

Систему сингулярных интегральных уравнений (27_j) известным методом регуляризации Карлемана — Векуа [8] сведем к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно ν_i $(i=\overline{1, 4})$, эквивалентной задаче D. Разрешимость последней следует из единственности решения задачи D, что и требовалось доказать.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gellerstedt S. Sur un probleme aux limites pour l'equation $y^{2s} Z_{xx} + Z_{yy}=0$. Arkiv f. M. A. o. F., 25 A. 1936. T. 10. P. 1—12.
2. Хасанов А. Об одной смешанной задаче для уравнения $\operatorname{sign} y |y|^m U_{xx} + x^n U_{yy} = 0$ // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1982. №2.С. 28—32.
3. Бейгмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965. Т. 1. 296 с.
4. Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions//Math. Rep. Kyushu Univ. 1978. Vol. 11. P. 135—143.
5. Маричев О. И. Метод вычисления интегралов от специальных функций. Минск: Наука и техника, 1978. 313 с.
6. Зайнулабидов М. И. О некоторых краевых задачах для уравнений смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения// Дифференциальные уравнения 1969. Т. V. № 1. С. 91—99.
7. Салахитдинов М. С., Уринов А. К. О некоторых краевых задачах со смешением для уравнения смешанного типа//Дифференциальные уравнения и вопросы теории ветвления. Ташкент: Фан, 1987. С. 3—21.
8. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 С.

Т. Д. ДЖУРАЕВ, Б. В. ЛОГИНОВ, И. А. МАЛЮГИНА

ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТРЕТЬЕГО И ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКОВ

В настоящей работе определяются собственные значения и собственные функции некоторых неклассических и сопряженных к ним краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных третьего и четвертого порядков. Используется метод Фурье разделения переменных. Появление этой работы вызвано отсутствием в известной нам литературе результатов такого типа. Ищутся регулярные в области Ω решения рассматриваемых краевых задач, непрерывные вместе с первыми производными в $\bar{\Omega}$. Регулярность означает непрерывность в Ω всех производных, входящих в уравнение. Используются обозначения и терминология [1].

1. Краевые задачи для уравнения (1)

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta u + \lambda u = 0. \tag{1}$$

1.1. Для уравнения (1) рассмотрим краевую задачу в квадрате $\Omega = \{x, y \mid -1 < x, y < 1\}$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(0, y) = 0. \tag{2}$$

Метод разделения переменных приводит к следующим задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} X''' - \mu X' + \lambda X = 0, \\ X(0) = 0, \quad X(-1) = 0, \quad X(1) = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} Y'' + \mu Y = 0, \\ Y(1) = 0, \quad Y(-1) = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Решая (4), находим

$$\mu_k = \left(\frac{k\pi}{2}\right)^2, \quad k = 1, 2, \ldots, \; Y_k(y) = \begin{cases} \sin\frac{k\pi}{2}y, & k = 2j \\ \cos\frac{k\pi}{2}y, & k = 2j-1. \end{cases}$$

Пусть характеристическое уравнение задачи (3)

$$m^3 - \left(\frac{k\pi}{2}\right)^2 m + \lambda = 0 \tag{5}$$

имеет вещественные корни (они не могут быть совпадающими), два из которых равны: $m_1 = 2\sqrt[3]{\frac{-\lambda}{2}}$, $m_{2,3} = -\sqrt[3]{\frac{-\lambda}{2}}$. Подставляя общее решение в краевые условия (3), получаем условие существования собственных функций (3) $\Delta = 2 - 2\operatorname{ch} 3 \times \sqrt[3]{\frac{-\lambda}{2}} = 0$. Это возможно только при $\lambda = 0$, что означает $m_1 = m_2 = m_3$, в противоречие с предположением.

Если корни (5) действительны и различны: $m_1=-m_2-m_3$, m_2, m_3, то в этом случае

$$\Delta = 2\,\mathrm{sh}\,(m_2-m_3)+2\,\mathrm{sh}\,(m_2+2m_3)-2\,\mathrm{sh}\,(2m_2+m_3)=0. \tag{6}$$

Полагая $m_2+2m_3=t_1$, $m_3+2m_2=t_2$, $m_2-m_3=t_2-t_1$, преобразуем (6) к виду

$$F(t_1)=\frac{\mathrm{ch}\,t_1-1}{\mathrm{sh}\,t_1}=\frac{\mathrm{ch}\,t_2-1}{\mathrm{sh}\,t_2} \tag{6'}$$

(если $\mathrm{sh}\,t_1=0$, то это означает, что $m_2=-2m_3$, и, следовательно, $m_1=m_3$). Так как $F(t)$ монотонная функция, (6′) возможно только при $t_1=t_2$, т. е. при $m_2=m_3$, в то время как корни m_i предполагались различными.

В случае одного действительного и двух комплексно-сопряженных корней $m_1=-2a$, $m_{2,3}=a\pm ib$, подставляя общее решение $X(x)=c_1e^{-2ax}+(c_2\cos bx+c_3\sin bx)e^{ax}$ в граничные данные, находим условие существования нетривиальных решений $X(x)$:

$$\Delta(a,b)=2\sin b(\mathrm{ch}\,3a-\cos b)=0. \tag{7}$$

Равенство $\mathrm{ch}\,3a=\cos b$ возможно только при $a=b=0$, поэтому условие (7) выполнимо лишь при $b=\pi l$, $l=1,2,\ldots$. Тогда из характеристического уравнения (5) находим

$$\pi^2l^2-3a^2=-\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2$$

$$2a\pi^2l^2+2a^3=\lambda,$$

откуда

$$\lambda=\lambda_{kl}=\pm\frac{\pi^3}{12}(k^2+16l^2)\sqrt{\frac{1}{3}(k^2+4l^2)},\quad k,l=1,2,\ldots \tag{8}$$

Следовательно, собственные числа задачи (1), (2) имеют вид (8) и им соответствуют собственные функции

$$u_{kl}(x,y)=\begin{cases} e^{ax}\sin\pi lx\,\sin\frac{k\pi}{2}y, & k=2j\\ e^{ax}\sin\pi lx\,\cos\frac{k\pi}{2}y, & k=2j-1\end{cases}\qquad k,l=1,2,\ldots, \tag{9}$$

где $a=\pm\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{3}(k^2+4l^2)}$.

Система собственных функций $\{Y_k(y)\}$ двухточечной краевой задачи (4) является полной в пространстве $L_2[-1,1]$ функций, обращающихся в нуль при $y=\pm1$, так как при помощи функции Грина (4) сводится к линейному интегральному уравнению с симметричным ядром ([4], гл. IV). Разлагая в (1) функцию $u(x,y)$ в ряд Фурье по $Y_k(y)$, для коэффициентов Фурье $X_k(x)$ получаем краевую задачу (3). Следовательно, примененный метод разделения переменных позволяет найти все собственные значения задачи (1), (2).

Сопряженная к (1), (2) в $C^{3+\varepsilon}(\Omega)$ краевая задача имеет вид

$$-\frac{\partial}{\partial x}\Delta v_1+\lambda v_1=0 \text{ в } \Omega_1=\left\{\begin{matrix}-1<x<0\\-1<y<1\end{matrix}\right\};$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\Delta v_2+\lambda v_2=0 \text{ в } \Omega_2=\left\{\begin{matrix}0<x<1\\-1<y<1\end{matrix}\right\},$$

$$v_1(-1,y)=0,\qquad v_2(1,y)=0,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}(-1,y)=0,\qquad \frac{\partial v_2}{\partial x}(1,y)=0,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}(x,\pm1)=0,\qquad \frac{\partial v_2}{\partial x}(x,\pm1)=0$$

с условиями склеивания на прямой $x=0$

$$v_1(-0,y)=v_2(+0,y),\quad \frac{\partial v_1}{\partial x}(-0,y)=\frac{\partial v_2}{\partial x}(+0,y).$$

При разделении переменных получаем ту же самую задачу (4), а для $X_1(x)$, $X_2(x)$ следующую:

$$X_1'''-\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2X_1'-\lambda X_1=0,\quad -1<x<0;$$

$$X_2'''-\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2X_2'-\lambda X_2=0,\quad 0<x<1,$$

$$X_1(-1)=0,\ X_1'(-1)=0,\ X_2(1)=0,\ X_2'(1)=0, \tag{10}$$

$$X_1(-0)=X_2(+0),$$

$$X_1'(-0)=X_2'(+0).$$

Собственные значения задачи (10) существуют только при одном действительном и двух комплексно-сопряженных корнях характеристического уравнения $m_1 = -2a$, $m_{2,3} = a \pm ib$:

$$X_i(x) = c_1^{(i)} e^{-2ax} + c_2^{(i)} e^{ax} \cos bx + c_3^{(i)} e^{ax} \sin bx, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Граничные данные и непрерывность $X(x)$, $X'(x)$ при $x=0$ приводят к следующему условию существования собственных чисел $b(18a^2 + 2b^2)(\operatorname{ch} 3a - \cos b) \sin b = 0$, выполняющемуся при $b = \pi l$, $l = 1, 2, \ldots$. Поэтому собственные значения сопряженной задачи имеют тот же вид (8) с собственными функциями

$$v_{kl}(x, y) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{e^{-3a} + (-1)^{l+1}}{e^{3a} + (-1)^{l+1}} \left[\pi l e^{3a+2ax} + (-1)^{l+1} e^{-ax} (\pi l \cos \pi l x + 3a \sin \pi l x)\right], & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \pi l e^{-3a+2ax} + (-1)^{l+1} e^{-ax} (\pi l \cos \pi l x + 3a \sin \pi l x), & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \times$$

$$\times \begin{cases} \sin \dfrac{k\pi}{2} y \text{ при } k = 2j \\ \cos \dfrac{k\pi}{2} y \text{ при } k = 2j-1 \end{cases} \quad k,\ l = 1, 2, \ldots, \quad a = \pm \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{3}(k^2 + 4l^2)}.$$

Присоединенные элементы отсутствуют, так как (см. [3] § 30)

$$\langle u_{kl}, v_{kl} \rangle = 6a(-1)^{l+1} (9a^2 + \pi^2 l^2)[\operatorname{ch} 3a + (-1)^{l+1}] \neq 0$$

при $a \neq 0$.

1.2 Пусть для уравнения (1) заданы граничные условия

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0. \tag{11}$$

Разделение переменных дает (4) и

$$X''' - \left(\frac{k\pi}{2}\right)^2 X' + \lambda X = 0,$$

$$X(\pm 1) = 0, \quad X'(0) = 0. \tag{12}$$

Аналогично предылущему соответствующее (12) характеристическое уравнение (5) не может иметь совпадающих корней. Если два из них равны ($m_1 = -2m$, $m_{2,3} = m$), то граничные данные приводят к следующему необходимому условию существования собственных функций:

$$\Delta = 2(\operatorname{sh} 3m - m \operatorname{ch} 3m - 2m) = 0. \tag{13}$$

Полагая $3m=t$, сводим (13) к уравнению $t=\frac{3\,\mathrm{sh}\,t}{\mathrm{ch}\,t+2}=f(t)$. Так как $f'(t)=\frac{3+6\,\mathrm{ch}\,t}{(\mathrm{ch}\,t+2)^2}>0$, то функция $f(t)$ — возрастающая. Для вычисления углового коэффициента касательной к кривой $y=f(t)$ в точке $t=0$ находим $\lim\limits_{t\to 0}\frac{3\,\mathrm{sh}\,t}{t\,(\mathrm{ch}\,t+2)}=1$. Кроме того,

$$t-f(t)=\frac{t\,\mathrm{ch}\,t-2t-2\,\mathrm{sh}\,t}{2+\mathrm{ch}\,t}=\frac{1}{2+\mathrm{ch}\,t}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n-2}{(2n+1)!}\,t^{2n+1}>0$$

при $t>0$.

Поэтому графики функций t и $f(t)$ пересекаются только в нуле, и в рассматриваемом случае задача (1), (11) не имеет собственных значений.

Если один из корней (5) $m_1=0$, то $m_{2,3}=\pm\frac{k\pi}{2}$ и $\lambda=0$. Удовлетворение граничным условиям дает решение задачи (12)

$$\varphi_0=\mathrm{sh}\,\frac{k\pi}{4}(x+1)\,\mathrm{sh}\,\frac{k\pi}{4}(x-1).$$

Пусть корни (5) действительные и различные: $m_1=-m_2-m_3$ m_2, m_3, тогда

$$\Delta=m_2\,\mathrm{ch}\,(2m_2+2m_3)+(2m_3+m_2)\,\mathrm{ch}\,2m_2-(2m_2+m_3)\,\mathrm{ch}\,2m_3-$$

$$-m_3\,\mathrm{ch}\,(2m_2+2m_3)=\left(\mathrm{sh}\,\frac{3}{2}m_3\,\mathrm{ch}\,\frac{1}{2}m_3\right)m_2\,\mathrm{ch}\,m_2+$$

$$+\left(\mathrm{sh}\,\frac{3}{2}m_3\,\mathrm{sh}\,\frac{1}{2}m_3\right)m_2\,\mathrm{sh}\,m_2-(m_3\,\mathrm{ch}\,m_3)\,\mathrm{sh}\,\frac{3}{2}m_2\,\mathrm{ch}\,\frac{1}{2}m_2-$$

$$-(m_3\,\mathrm{sh}\,m_3)\,\mathrm{sh}\,\frac{3m_2}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{m_2}{2}.$$

Рассмотрим систему функций

$$t\,\mathrm{ch}\,t,\ t\,\mathrm{sh}\,t,\ \mathrm{sh}\,\frac{3}{2}t\,\mathrm{ch}\,\frac{1}{2}t,\ \mathrm{sh}\,\frac{3}{2}t\,\mathrm{sh}\,\frac{1}{2}t \tag{14}$$

в области $D=\{t\,|\,t\neq 0\}$. Если ее определитель Вронского $W(t)$ не обращается в нуль ни в одной точке D, то это означает линейную независимость системы (14) в D ([2], § 3.3). Здесь $W(t)$ имеет вид

$$W(t)=-2\left[\left(\frac{3t}{2}\right)^2+\frac{3t}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{3}{2}t\,\mathrm{ch}\,\frac{3}{2}t-2\,\mathrm{sh}^2\,\frac{3}{2}t\right]^{s=\frac{3}{2}t}=$$

$$= -2[s^2 + \operatorname{sh} s (s \operatorname{ch} s - 2 \operatorname{sh} s)] = -2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n s^n,$$

где

$$a_n = \frac{2n-2}{(2n+1)!} + \frac{2n-3}{(2n-1)!} \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{3!} \frac{1}{(2n-1)!} > 0.$$

Следовательно, (14) линейно независима в D и равенство $\Delta = 0$ выполняется только при $m_3 = 0$, т. е. при $\lambda = 0$, а этот случай уже рассматривался.

Если (5) имеет один вещественный и два комплексно-сопряженных корня: $m_1 = -2a$, $m_2 = a + ib$, $m_3 = a - ib$, $a \neq 0$, то $\Delta = (\sin 2b)\, a - (b \cos b) \operatorname{sh} 3a + (\sin b)\, a \operatorname{ch} 3a$.

Определитель Вронского $W(a)$ системы функций a, $\operatorname{sh} 3a$, $a \operatorname{ch} 3a$ имеет вид

$$W(a) = 3 \operatorname{sh} 3a (3a \operatorname{ch} 3a - 2 \operatorname{sh} 3a) + 27a^2 = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (3a)^{2n+2},$$

где

$$a_n = \frac{2n-2}{(2n+1)!} + \frac{2n-3}{(2n-1)!} \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{3!} \frac{1}{(2n-1)!} > 0.$$

Он отличен от нуля в рассматриваемой области $D = \{a \mid a \neq 0\}$ и равенство $\Delta = 0$ возможно только при $b = 0$, что противоречит комплексной сопряженности корней m_2, m_3. Таким образом, задача (1), (11) имеет счетнократное собственное значение $\lambda = 0$, которому соответствуют собственные функции

$$u_k = \operatorname{sh} \frac{k\pi}{4} (x+1) \operatorname{sh} \frac{k\pi}{4} (x-1) \sin \frac{k\pi}{2} y, \quad k = 1, 2, \dots$$

Сопряженная к (1), (11) в $C^{3+\alpha}$ задача имеет вид

$$-\frac{\partial}{\partial x} \Delta v_1 + \lambda v_1 = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_1 = \left\{ \begin{matrix} -1 < x < 0 \\ -1 < y < 1 \end{matrix} \right\},$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \Delta v_2 + \lambda v_2 = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_2 = \left\{ \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ -1 < y < 1 \end{matrix} \right\},$$

$$v_1(-1, y) = 0 \qquad v_2(1, y) = 0$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}(-1, y) = 0 \qquad \frac{\partial v_2}{\partial x}(1, y) = 0$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}(x, \pm 1) = 0 \qquad \frac{\partial v_2}{\partial x}(x, \pm 1) = 0$$

$$v_1(-0, y) = v_2(+0, y),$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}(-0, y) = \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}(+0, y)$$

и $\lambda = 0$ является счетнократным собственным значением с собственными функциями

$$v_k(x, y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-k\pi}+1}{e^{k\pi}+1}\left(e^{\frac{k\pi}{2}x+k\pi} - 2e^{\frac{k\pi}{2}} + e^{-\frac{k\pi}{2}x}\right), \\ \qquad\qquad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ e^{\frac{k\pi}{2}x-k\pi} - 2e^{-\frac{k\pi}{2}} + e^{-\frac{k\pi}{2}x}, \\ \qquad\qquad 0 < x \leqslant 1 \end{cases} \times$$

$$\times \begin{cases} \sin\dfrac{k\pi}{2}y & \text{при } k = 2j, \\ \cos\dfrac{k\pi}{2}y & \text{при } k = 2j-1. \end{cases}$$

Так как

$$\langle u_k, v_k \rangle = 8\,\mathrm{ch}\frac{k\pi}{2}\left[\mathrm{ch}\frac{k\pi}{2} - 2\,\mathrm{sh}\frac{k\pi}{2}\left(1 + 2\,\mathrm{ch}\frac{k\pi}{2}\right)\right] \neq 0,$$

то присоединенные элементы отсутствуют.

Аналогично 1.1 можно показать, что нами найдены все действительные собственные значения задач (1), (11) и сопряженной.

1.3 Рассмотрим задачу для уравнения (1) со следующими граничными условиями:

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 0. \tag{15}$$

Разделение переменных приводит к (4) и

$$X''' - \left(\frac{k\pi}{2}\right)^2 X' + \lambda X = 0,$$

$$X(\pm 1) = 0, \quad X'(1) = 0,$$

Во всех возможных случаях существования корней характеристического уравнения наличие указанных выше граничных условий для $X(x)$ приводит к отсутствию собственных значений.

Задаче (1), (15) соответствует сопряженная

$$-\frac{\partial}{\partial x}\Delta v+\lambda v=0, \tag{16}$$

$$v(\pm 1, y)=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}(-1, y)=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, \pm 1)=0; \tag{17}$$

(16, 17) имеет только тривиальное решение $v(x, y)\equiv 0$, т. е. собственные значения отсутствуют.

2. Рассмотрим краевую задачу для уравнения четвертого порядка в квадрате Ω:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta u+\lambda u=0, \tag{18}$$

$$u|_{\partial\Omega}=0,\ u(0, y)=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y)=0. \tag{19}$$

Разделяя переменные, получаем следующие краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений (4) и

$$\begin{gathered} X^{(4)}-\mu X^{(2)}+\lambda X=0 \\ X(\pm 1)=0,\quad X(0)=0,\quad X'(0)=0. \end{gathered} \tag{20}$$

Используя решение (4), рассмотрим задачу Штурма — Лиувилля на собственные значения

$$\begin{gathered} X^{(4)}-\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2 X^{(2)}+\lambda X=0, \\ X(\pm 1)=0,\quad X(0)=0,\quad X'(0)=0. \end{gathered} \tag{21}$$

Если характеристическое уравнение задачи (21)

$$m^4-\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2 m^2+\lambda=0,\quad k=1, 2, \ldots \tag{22}$$

имеет два двукратных корня

$$m_{1,2}=-\frac{k\pi}{2\sqrt{2}},\quad m_{3,4}=\frac{k\pi}{2\sqrt{2}}=m\neq 0,$$

то, подставляя общее решение в краевые условия (21), получаем

$$\Delta=\operatorname{sh} m\,(m\operatorname{ch} m-\operatorname{sh} m)=0,$$

т. е. либо $\operatorname{sh} m=0$, либо $m=\operatorname{th} m$. Это возможно только при $m=0$, что противоречит предположению $k\neq 0$.

В случае нулевого двукратного корня $m_{1,2}=0$ и $m_{3,4}=\pm\frac{k\pi}{2}$ получаем $\lambda=0$ и $\Delta=\left(1-\operatorname{ch}\frac{k\pi}{2}\right)\left(\operatorname{sh}\frac{k\pi}{2}-\frac{k\pi}{2}\right)$ обращается в нуль только при $k=0$.

Если корни характеристического уравнения действительны и различны, то эти корни имеют вид

$$m_1=\sqrt{\frac{k^2\pi^2}{8}-\sqrt{\frac{k^4\pi^4}{64}-\lambda}}=m,\quad m_2=-m$$

$$m_3=\sqrt{\frac{k^2\pi^2}{8}+\sqrt{\frac{k^4\pi^4}{64}-\lambda}}=n,\quad m_4=-n.$$

Условие существования собственных функций

$$\Delta=(2m\operatorname{sh} n-2n\operatorname{sh} m)(\operatorname{ch} m-\operatorname{ch} n)=0$$

выполняется, когда $2m\operatorname{sh} n=2n\operatorname{sh} m$ или $\operatorname{ch} m=\operatorname{ch} n$. Из линейной независимости m, $\operatorname{sh} m$ следует, что первое равенство невозможно, а последнее выполняется только при $m=n$; поэтому в данном случае (18), (19) имеет только тривиальное решение.

В случае, если два корня (22) различны, а два других мнимые

$$m_{1,2}=\pm i\sqrt{-\frac{k^2\pi^2}{8}+\sqrt{\frac{k^4\pi^4}{64}-\lambda}},$$

$$m_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{k^2\pi^2}{8}+\sqrt{\frac{k^4\pi^4}{64}-\lambda}} \tag{23}$$

$$(m_{1,2}=\pm im,\quad m_{3,4}=\pm n,\quad k=1, 2, \ldots),$$

то подставляя общее решение $X(x)=c_1\cos mx+c_2\sin mx+c_3e^{nx}+c_4e^{-nx}$ в граничные данные, получаем условие $\Delta=(n\sin m-m\operatorname{sh} n)(\cos m-\operatorname{ch} n)=0$. Это равенство выполняется лишь при $m=n$ (противоречие с предположением), либо при $m=n=0$, что также противоречит (23). Четырех чисто мнимых корней характеристическое уравнение не имеет, оно может иметь комплексно-сопряженные корни:

$$m_{1,2}=\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}}{2}+\frac{k^2\pi^2}{16}}\pm i\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}}{2}-\frac{k^2\pi^2}{16}}=a\pm ib,$$

$$m_{3,4}=-\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}}{2}+\frac{k^2\pi^2}{16}}\pm i\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}}{2}-\frac{k^2\pi^2}{16}}=-a\pm ib.$$

Здесь условие существования нетривиальных решений задачи имеет вид

$$\Delta=\operatorname{sh} a\sin b\,(b\operatorname{sh} a\cos b-a\operatorname{ch} a\sin b)=0.$$

Оно выполняется, если $b\operatorname{sh} a\cos b-a\operatorname{ch} a\sin b=0$, либо $\sin b=0$. Первое равенство в силу линейной независимости системы функций $\operatorname{sh} a$, $a\operatorname{ch} a$ невозможно, второе — справедливо при $b=\pi l$, $l=1, 2, \ldots$. Из характеристического уравнения получаем собственные числа

$$\lambda_{kl}=\frac{\pi^4(k^2+16\,l^2)^2}{64}\quad kl=1, 2, \ldots,$$

которым отвечают собственные функции

$$u_{kl}^{(1)}(x,\ y)=\sin\pi lx\operatorname{ch}\pi\sqrt{l^2+\frac{k^2}{8}}\,x\times$$

$$\times\left|\begin{array}{l}\sin\frac{k\pi}{2}y,\ k=2j\\[2mm] \cos\frac{k\pi}{2}y,\ k=2j-1.\end{array}\right. \tag{24}$$

Сопряженная задача, соответствующая (18), (19), имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta v_1+\lambda v_1=0\quad\text{в}\quad\Omega_1=\left\{\begin{array}{c}-1<x<0\\-1<y<1\end{array}\right\},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta v_2+\lambda v_2=0\quad\text{в}\quad\Omega_2=\left\{\begin{array}{c}0<x<1\\-1<y<1\end{array}\right\},$$

$$v_1(-1,y)=0,\qquad\qquad v_2(1,y)=0,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}(-1,y)=0,\qquad\qquad \frac{\partial v_2}{\partial x}(1,y)=0,$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}(-1,y)=0,\qquad\qquad \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}(1,y)=0,$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}(x, \pm 1) = 0, \qquad \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = (x, \pm 1) = 0$$

с условиями склеивания на прямой $x=0$

$$v_1(-0, y) = v_2(+0, y), \quad \frac{\partial v_1}{\partial x}(-0, y) = \frac{\partial v_2}{\partial x}(+0, y).$$

Метод Фурье приводит к той же задаче (4) для $Y_i(y)$, $i = 1, 2$, а для $X_1(x)$, $X_2(x)$ —

$$X_1^{(4)} - \frac{k^2\pi^2}{4} X_1^{(2)} + \lambda X_1 = 0, \quad -1 < x < 0,$$

$$X_2^{(4)} - \frac{k^2\pi^2}{4} X_2^{(2)} + \lambda X_2 = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$X_1(-1) = 0 \qquad X_2(1) = 0$$

$$X_1'(-1) = 0 \qquad X_2'(1) = 0$$

$$X_1''(-1) = 0 \qquad X_2''(1) = 0$$

$$X_1(-0) = X_2(+0) \tag{25}$$

$$X_1'(-0) = X_2(+0).$$

Собственные значения задачи (25) как и ранее существуют только в том случае, когда характеристическое уравнение имеет корни $m_{1,2} = a \pm ib$; $m_{3,4} = -a \pm ib$, т. е.

$$X_q(x) = c_1^{(q)} e^{ax} \cos bx + c_2^{(q)} e^{ax} \sin bx + c_3^{(q)} e^{-ax} \cos bx +$$

$$+ c_4^{(q)} e^{-ax} \sin bx \qquad q = 1, 2.$$

Согласно граничным данным и условиям непрерывности $X(x)$ при $x=0$, находим условие существования собственных значений

$$\Delta = 8(a^2 + b^2) \operatorname{sh} a [b \cos b \operatorname{sh} a - a \sin b \operatorname{ch} a] \sin b = 0.$$

Последнее возможно только при $\sin b = 0$, откуда следует, что собственные значения имеют тот же вид $\lambda_{kl} = \frac{\pi^4 (k^2 + 16 l^2)^2}{64}$, $k, l = 1, 2, \ldots$. Им отвечают собственные функции прямления свободной границы [2], позволяющий провести линеаризацию системы (1) и получить дисперсионное соотношение

$$m^2 a^2 \frac{\operatorname{cth} s_{mn}}{s_{mn}} = F^2_{mn}(1+\gamma s^2_{mn}), \tag{2}$$

связывающее числа m, n и периоды $\frac{2\pi}{a}, \frac{2\pi}{b}$ с параметрами F^2 и γ, $s^2_{mn} = (m^2 a^2 + n^2 b^2)$.

Выполнение условия (2) для пары чисел (m, n) обусловливает наличие подпространства нулей для оператора, определяемого линеаризованной системой [1]. Размерность подпространства зависит от числа пар (m_i, n_i), для которых условие (2) выполняется одновременно. Эти размерности указаны в [3, 4], однако в случае $i=3$ уже не остается свободным ни одного из параметров F, γ, a, b и существование 12-кратного вырождения требует доказательства [4].

Итак, пусть условие (2) выполняется для трех пар (m_i, n_i),

$$F^2(1+\gamma s_i^2) = \frac{m_i^2 a^2}{s_i} \operatorname{cth} s_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{3}$$

Систему (3) можно переписать следующим образом:

$$\frac{m_2^2}{s_2}(s_3^2 - s_1^2)\operatorname{cth} s_2 + \frac{m_1^2}{s_1}(s_1^2 - s_3^2)\operatorname{cth} s_1 +$$

$$+\frac{m_1^2}{s_1}(s_2^2 - s_1^2)\operatorname{cth} s_1 + \frac{m_3^2}{s_3}(s_1^2 - s_2^2)\operatorname{cth} s_3 = 0.$$

Наконец, полагая $\frac{m_i^2}{s_i}\operatorname{cth} s_i = f_i$, получаем

$$(s_3^2 - s_1^2)(f_2 - f_1) = (s_2^2 - s_1^2)(f_3 - f_1). \tag{4}$$

Уравнение (4) может быть реализовано, в частности, при следующих предположениях: пусть $s_2 = 2s_1$, тогда уравнение (4) записывается в виде

$$(s_3^2 - s_1^2)\left(\frac{4m_1^2}{2s_1}\operatorname{cth} 2s_1 - \frac{m_1^2}{s_1}\operatorname{cth} s_1\right) =$$

$$= 3s_1^2\left(\frac{m_3^2}{s_3}\operatorname{cth} s_3 - \frac{m_1^2}{s_1}\operatorname{cth} s_1\right)$$

или, обозначая $\frac{s_3}{s_1} = t$, имеем

$$u_1(t) = t\frac{m_1^2}{m_3^2}\operatorname{th}(ts_1) = \frac{\operatorname{th} s_1}{\frac{1}{3}(t^2-1)\operatorname{th}^2 s_1 + 1} = u_2(t). \tag{5}$$

Уравнение (5) будет иметь решение, если существует такой интервал $[t_1, t_2]$, что выполнены условия:

а) $u_1(t_1) < u_2(t_1), \quad u_1(t_2) > u_2(t_2)$;

б) $\gamma > 0, \quad \forall t \in]t_1, t_2[$.

Покажем, что для $m_1 = 2m_3$ требуемый интервал $[t_1, t_2]$ существует.

В силу $\gamma > 0$ следует цепочка неравенств

$$\frac{1}{t}\frac{\operatorname{th} s_1}{\operatorname{th} ts_1} < 4 < \frac{1}{t^3}\frac{\operatorname{th} s_1}{\operatorname{th} ts_1}, \quad t < 1. \tag{6}$$

Пусть $T(t)$ — множество значений t, для которых выбранной паре m_1, m_3 отвечает неотрицательное значение параметра γ. При этом левое неравенство (6) определяет нижнюю грань этого множества. Пусть $t^* = \inf_t \{T(t)\}$. Тогда

$$4t^* \operatorname{th} t^* s_1 = \operatorname{th} s_1 < \frac{\operatorname{th} s_1}{\frac{1}{3}(t^{*2}-1)\operatorname{th}^2 s_1 + 1},$$

откуда следует, что при $t = t^*$, $u_1(t^*) < u_2(t^*)$. Если выполняется цепочка неравенств (при $t < 1$)

$$\frac{t \operatorname{th} ts_1}{\operatorname{th} s_1} > t^2 \geqslant \frac{1}{4} \geqslant t^3 > t^3\frac{\operatorname{th} ts_1}{\operatorname{th} s_1},$$

то

$$\left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right] \subset T(t).$$

Поскольку

$$u_1\left(\frac{1}{2}\right) = 2\operatorname{th}\frac{s_1}{2} > \frac{\operatorname{th} s_1}{1 - \frac{1}{4}\operatorname{th}^2 s_1} = u_2\left(\frac{1}{2}\right)$$

проверяется непосредственно, то за искомый интервал достаточно взять $\left[t^*, \frac{1}{2}\right]$. Так, при выборе $m_1 = 2$, $4n_3 = n_1 = 4$ получаем следующее соотношение на числа a, b:

$$b^2 = \frac{a^2(4t^{*2} - 1)}{1 - 16t^{*2}}, \tag{7}$$

из чего следует, что $\frac{1}{4} < t^* < \frac{1}{2}$.

Зафиксируем параметр b. Тогда при a_0, получающемся из (7), имеем $t = t^*$ и $u_1(a_0, b) < u_2(a_0, b)$; при $a_\infty = a \to \infty$ имеем $t \to \frac{1}{2}$ и $u_1(a_\infty, b) > u_2(a_\infty, b)$. Этим завершается доказательство существования двенадцатикратного вырождения.

В случае одной или двух решеток периодичности система (1) может иметь решения, периодические только вдоль оси Ox, что соответствует плоской волне. Покажем, что для трех решеток (т. е. при наличии трех пар (m_i, n_i)) не может быть решений типа плоской волны. Для этого перепишем (4) в виде

$$f_3 = \frac{f_2 - f_1}{s_2^2 - s_1^2}(s_3^2 - s_1^2) + f_1$$

и, приняв $s_3 \equiv s$ за текущую переменную, $f_3 \equiv f \equiv s\,\mathrm{th}\,s$, $F = ks^2 + c$, $\left(k = \frac{f_2 - f_1}{s_2^2 - s_1^2}\right)$, рассмотрим функцию

$$U(s) = f(s) - F(s).$$

Утверждение. Вне зависимости от чисел s_1, s_2, функция $U(s)$ не может иметь трех корней, отличных от нуля.

Доказательство. Заметим, что при $s = 0$ функция $U(s)$ имеет минимум, поэтому для доказательства утверждения достаточно показать, что $U'''(s)$ не имеет корней, отличных от нуля.

Уравнение $U'''(s) = 0$ равносильно уравнению

$$3s\,\mathrm{cth}^2 s - 3\,\mathrm{cth}\,s - s = 0,$$

которое перепишем в виде

$$u_1(s) = s = \frac{3\,\mathrm{sh}\,2s}{4\,\mathrm{ch}^2 s + 2} = u_2(s). \tag{8}$$

Дифференцируя (8), после несложных выкладок приходим к уравнению $(\mathrm{ch}^2 s - 1)^2 = 0$, из которого следует, что $u_2'(s) < u_1'(s)$, при $s \neq 0$.

Из неравенства и условия $u_1(0) = u_2(0)$ следует, что $U'''(s)$ не имеет корней, отличных от нуля.

Утверждение доказано.

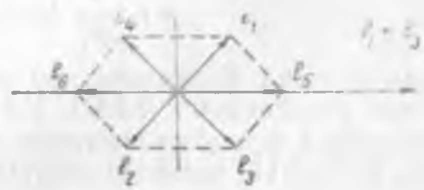
При построении УР в работах [1—3] использовалась группа сдвигов $L_{a,b}$ и группа прямоугольника. Действие этих групп на подпространстве $N(B)$ индуцирует соответственно группу вращений и группу подстановок в пространстве Ξ^n векторов ξ (координат произвольного вектора из $N(B)$). Теорема о наследовании групповых свойств исходного уравнения [1] уравнением разветвления позволяет использовать индуцированную группу вращений для редукции УР по числу неизвестных, а группу подстановок — для восстановления всей системы разветвления по некоторой ее части во всех случаях многомерного вырождения [4].

При этом вводится понятие трансляционной решетки периодов [5, 6], на которой осуществляется действие группы подстановок.

Пусть $a_1 = \frac{2\pi}{a} e_1$, $a_2 = \frac{2\pi}{b} e_2$ (e_i — единичные векторы по осям координат) — основные трансляции, порождающие решетку периодичности. Обратная решетка порождается векторами $l^{(1)} = ae_1$, $l^{(2)} = be_2$, ее произвольный вектор имеет вид $l = m_j l^{(1)} + n_j l^{(2)}$, $|l(m_j, n_j)| = s_{m_j n_j}$.

Базисные элементы N(B) и соответствующие им вершины прямоугольников в обратной решетке пронумерованы так, что если вектору l отвечает нечетный номер, то вектору $-l$ соответствует последующий четный номер. В случае использования группы прямоугольника достаточно построить по одному уравнению из УР, соответствующему каждой из решеток, остальные находятся с помощью подстановок.

Рассмотрим далее случай расположения двух решеток [3] (рис. 1), когда векторы l_i, $i = \overline{1, 6}$ инвариантны относительно дискретной группы эллипса. Наличие этой группы позволяет использовать для восстановления УР не два, а только одно уравнение, что существенно упрощает решение задачи. При этом подстановке $p_1 = (146235)$ соответствует подстановка



$$(\xi_1, \xi_4, \xi_6(d), \xi_2, \xi_3, \xi_5(d)),$$

где d — отношение полуосей эллипса и переход к (от) ξ_6, ξ_5 осуществляется умножением (делением) на d. Порождающий элемент группы в плоскости векторов (e_1, e_2) будет иметь представление

$$
\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} d \\ -\frac{\sqrt{3}}{2d} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.
$$

Параметр d определим из уравнения эллипса $X^2 + \frac{Y^2}{d} = m_2^2 a^2$, использовав точки $(m_1 a,\ n_1 b)$, $(m_2 a,\ 0)$:

$$
d = \frac{n_1^2 b^2}{a^2 (m_2^2 - m_1^2)}.
$$

Инвариантность уравнения разветвления

$$
\mathscr{A}_g t(\xi, \varepsilon) = t(\mathscr{A}_g \xi, \varepsilon)
$$

относительно группы вращений $\mathscr{A}_g$ означает, что многообразие $F: t - t(\xi) = 0$ в пространстве Ξ^{2n} векторов $(\xi_1, \ldots, \xi_n, t_1, \ldots, t_n)$ инвариантно. Вращения определяют базис алгебры Л [4] в Ξ^8 в следующем виде:

$$
X_1 = ma\left(-\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} - \xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} + \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_4} - \right.
$$

$$
\left. - t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + \cdots + t_4 \frac{\partial}{\partial t_4}\right),
$$

$$
X_2 = nb\left(-\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} - \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_4} - \right.
$$

$$
\left. - t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + \cdots + t_4 \frac{\partial}{\partial t_4}\right).
$$

Полная система функционально независимых инвариантов определяется уравнениями $X_1 I = 0$, $X_2 I = 0$ и состоит из 10 элементов. По теореме о неособом инвариантном многообразии [7] многообразие $F: t - t(\xi)$ можно представить в виде

$$
\Phi^j (I_1, \ldots, I_{10}) = 0, \quad j = \overline{1, 6}. \tag{9}
$$

В силу аналитической зависимости t от ξ и ε и шести инвариантов $I_j = \frac{t_j}{\xi_j}$, $j = \overline{1, 6}$, обеспечивающих независимость системы (9) по отношению к t_j, общий вид УР можно записать в виде

$$
\frac{t_j}{\xi_j} = a_0^{(j)}(\varepsilon) + \sum_q a_q^{(j)}(\varepsilon) I_1^{q_1} \cdots I_{10}^{q_{10}}.
$$

Для рассматриваемого взаимодействия решеток периодичности инварианты выписываются следующим образом:

$$
I_7 = \xi_1 \xi_2, \ I_8 = \xi_3 \xi_4, \ I_9 = \xi_5 \xi_6, \ I_{10} = \xi_1 \xi_3 \xi_6.
$$

УР при использовании дополнительного инварианта $I_{11}(\xi) = \xi_2 \xi_4 \xi_5$ (для учета всех возможных степеней ξ) запишется в виде:

$$
t_j(\xi, \varepsilon) = a_0^{(j)}(\varepsilon)\xi_j + \sum_q a_q^{(j)}(\varepsilon)(\xi_1 \xi_2)^{q_1} (\xi_3 \xi_4)^{q_2} (\xi_5 \xi_6)^{q_3} \times
$$

$$
\{(\xi_1 \xi_3 \xi_6)^{q_4} (\xi_2 \xi_4 \xi_5)^{q_5}\}^{\text{out}} = 0 \tag{10}
$$

(символ out означает, что в выражении (10) в фигурных скобках сомножители вида $(\xi_1 \xi_2)^{r_1} (\xi_3 \xi_4)^{r_2} (\xi_5 \xi_6)^{r_3}$ должны быть опущены вместе с возможными одинаковыми слагаемыми под знаком суммы). Выпишем главную часть УР (10):

$$
\begin{aligned}
t_1(\xi, \varepsilon) &= a_0^{(1)} \varepsilon \xi_1 + a_1^{(1)} \xi_4 \xi_6 = 0, \\
t_2(\xi, \varepsilon) &= a_0^{(1)} \varepsilon \xi_2 - a_1^{(1)} \xi_3 \xi_6 = 0, \\
t_3(\xi, \varepsilon) &= a_0^{(1)} \varepsilon \xi_3 + a_1^{(1)} \xi_2 \xi_5 = 0, \\
t_4(\xi, \varepsilon) &= a_0^{(1)} \varepsilon \xi_4 - a_1^{(1)} \xi_1 \xi_6 = 0, \\
t_5(\xi, \varepsilon) &= a_0^{(5)} \varepsilon \xi_5 + a_1^{(5)} \xi_1 \xi_3 = 0, \\
t_6(\xi, \varepsilon) &= a_0^{(5)} \varepsilon \xi_5 - a_1^{(5)} \xi_2 \xi_4 = 0.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Коэффициенты второго порядка в УР (11) будут мнимыми. Поэтому, в силу инвариантности системы относительно комплексного сопряжения коэффициенты в нечетных и четных уравнениях будут разных знаков. В вещественнозначном базисе система (11) будет иметь вид [3, 4]

$$
\begin{aligned}
A\eta_1 \varepsilon + B(\eta_3 \eta_6 + \eta_1 \eta_5) &= 0, \\
A\eta_2 \varepsilon + B(\eta_4 \eta_6 + \eta_2 \eta_5) &= 0,
\end{aligned} \tag{12}
$$

$$A\eta_2\varepsilon + B(-\eta_1\eta_6 + \eta_3\eta_5) = 0,$$

$$A\eta_4\varepsilon + B(-\eta_4\eta_5 + \eta_2\eta_6) = 0,$$

$$C\eta_5\varepsilon + \frac{D}{4}(-\eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2 + \eta_4^2) = 0,$$

$$C\eta_6\varepsilon + \frac{D}{2}(-\eta_1\eta_3 - \eta_2\eta_4) = 0,$$

где

$$A = a_0^{(1)} = -(1 + \gamma s_1^2); \quad C = a_0^{(5)} = Ad; \quad D = Bd$$

в силу инвариантности относительно дискретной группы эллип са. Значения коэффициента B мы не приводим ввиду его громозд кости [3, 4].

Редуцированная с помощью непрерывной группы система (12 имеет два решения, одно из которых получается из второго пу тем сдвигов по оси Ox на $\frac{\pi}{2m_1a}$, по оси Oy на $\frac{\pi}{2n_1b}$:

$$\eta^{(1)}(\varepsilon) = \left(0, 0, 0, \pm\sqrt{-\frac{AC}{BD}}\,\varepsilon, \frac{A}{B}\,\varepsilon, 0\right) + o(\varepsilon),$$

$$\eta^{(2)}(\varepsilon) = \left(\pm 2\sqrt{-\frac{AC}{BD}}\,\varepsilon, 0, 0, 0, -\frac{A}{B}\,\varepsilon, 0\right) + o(\varepsilon).$$

Теорема. Задача (1) в рассматриваемом случае двух решето периодичности в окрестности точки бифуркации $F_0^2 = F^2_{m_1n_1} = F^2_{m}$ с шестикратным вырождением линеаризованного оператора имеет с точностью до преобразования $y \to -y$ одно двупараметрическое семейство периодических решений:

$$\{\Phi, f\} = 2\sqrt{-\frac{AC}{BD}}(F^2 - F_0^2)\left\{\frac{m_1 a\sqrt{ab}}{\pi}\,\frac{\operatorname{ch}[s_1(\zeta + 1)]}{s_1 \operatorname{sh} s_1}\times\right.$$

$$\times\cos m_1a(x + \beta_1)\sin n_1b(y + \beta_2),\ \frac{\sqrt{ab}}{\pi}\sin m_1a(x + \beta_1)\times$$

$$\left.\times\sin n_1b(y + \beta_2)\right\} + \frac{A}{B}(F^2 - F_0^2)\times$$

$$\times\left\{-\frac{m_2 a\sqrt{ab}}{\pi}\,\frac{\operatorname{ch}[s_2(\zeta + 1)]}{s_2 \operatorname{sh} s_2}\sin m_2a(x + \beta_1),\right.$$

$$\left.\frac{\sqrt{ab}}{\pi}\cos m_2a(x + \beta_1)\right\} + o(F^2 - F_0^2),$$

$$\zeta = \frac{z - f(x, y)}{1 + f(x, y)}.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Логинов Б. В. Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности. Ташкент: Фан, 1985. 184 с.
2. Кузнецов А. О., Логинов Б. В. Вычисление периодических решений трехмерной задачи о капиллярно-гравитационных волнах над ровным дном//Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Ташкент: Фан, 1986. С. 296—314.
3. Кузнецов А. О., Логинов Б. В. Вычисление малых периодических решений трехмерной задачи о волнах над ровным дном в случаях высокого вырождения//Неклассические уравнения математической физики и теория ветвления. Ташкент: Фан, 1988. С. 104—117.
4. Кузнецов А. О., Логинов Б. В. Построение периодических решений задачи о капиллярно-гравитационных волнах над ровным дном методами группового анализа//Динамика сплошной среды. Новосибирск: ин-т Гидродинамики АН СССР, 1989. № 84.
5. Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике. М.: ГИТТЛ, 1958. 356 с.
6. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978. 792 с.
7. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.

Т. Д. ДЖУРАЕВ, Р. Р. КАДЫРОВ

ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНЫХ ЛЮБОГО ПОРЯДКА РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

В работе приведены интегральные оценки обобщенных решений первой начально-краевой задачи для параболических уравнений высокого порядка, аналогичные принципу Сен-Венана в теории упругости, характеризующие затухание интеграла энергии этих решений на бесконечности. Далее, на основе таких оценок исследовано поведение модуля решения и модуля любой его производной указанной выше задачи на бесконечности.

В неограниченной области $G = \Omega \times (0, T) \subset R^{n+1}_{x,t}$, $0 < T < \infty$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|}\mathcal{D}_x^\alpha(a_{\alpha\beta}(x, t)\mathcal{D}_x^\beta u) = f(x, t), \qquad (1)$$

где $x=(x_1,\dots,x_n)$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, α_j — целые неотрицательные числа, $|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n$, $\mathcal{D}_x^\alpha=\partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1},\dots,\partial x_n^{\alpha_n}$ — то же самое относится к β.

Предположим, что $a_{\alpha\beta}(x,t)$ — вещественные функции, ограниченные и непрерывные в G при всех $|\alpha|,|\beta|\leqslant m$ и

$$\lambda_1|\xi|^{2m}\leqslant\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}a_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta\leqslant\lambda_2|\xi|^{2m},\tag{2}$$

для всех $(x,t)\in G$, $\xi\in R^n$, где λ_1 и λ_2 — положительные постоянные.

Для целого неотрицательного k и множества $\gamma\subset\partial\Omega$ определим пространство $H^k(\Omega,\gamma)$ как пополнение по норме

$$\|v\|_{k,\Omega}=\Big(\int_\Omega\sum_{|\alpha|\leqslant k}|\mathcal{D}_x^\alpha v|^2\,dx\Big)^{1/2}$$

пространства бесконечно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ функций $v(x)$ с компактным носителем в $\overline{\Omega}\setminus\overline{\gamma}$. Положим

$$H^k(\Omega)=H^k(\Omega,\varnothing),\quad \overset{\circ}{H}{}^k=H^k(\Omega,\partial\Omega).$$

Через $L^2(0,T;X)$ обозначим пространство функций $u(t)$ со значениями в гильбертовом пространстве X, сильно измеримых относительно меры Лебега на $[0,T]$ [1] и таких, что

$$\|u\|_{L^2(0,T;X)}=\Big(\int_0^T\|u(t)\|_X^2\,dt\Big)^{1/2}<\infty.$$

Пусть $A(G,X)$ — пространство функций $u(x,t)$ в G с конечной нормой

$$\|u\|_{A(G,X)}=\Big(\|u\|^2_{L^2(0,T;X)}+\Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\Big)^{1/2}.$$

В области G рассмотрим уравнение (1) при следующих начальном и граничном условиях:

$$u(x,0)=0,\quad x\in\Omega\tag{3}$$

$$\mathcal{D}_x^\alpha u=0,\ |\alpha|\leqslant m-1,\quad\text{на}\quad \Gamma=\gamma\times(0,T),\ \gamma\subset\partial\Omega.\tag{4}$$

Функцию $u(x,t)\in A(G,H^m(\Omega,\gamma))$ назовем обобщенным решением задачи (1), (3), (4) в G, если выполнено условие (3) и для любой функции $\varphi(x,t)\in A(G,\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))$ имеет место тождество

$$\int_0^T\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial t},\varphi\Big)+\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}(a_{\alpha\beta}\mathcal{D}_x^\beta u,\mathcal{D}_x^\alpha\varphi)-(f,\varphi)\Big]dt=0;$$

здесь (,) означает скалярное произведение в $L^2(\Omega)$. В дальнейшем будем считать, что для $v(x)\in\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$

$$\int_\Omega\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}a_{\alpha\beta}\mathcal{D}_x^\beta v\mathcal{D}_x^\alpha v\,dx\geqslant\rho\int_\Omega\sum_{|\alpha|=m}|\mathcal{D}_x^\alpha v|^2\,dx\tag{5}$$

при почти всех $t\in[0,T]$, $\rho=\mathrm{const}>0$.

Ограничения на коэффициенты уравнения (1) или на структуру границы области Ω, при которых неравенство (5) имеет место, при выполнении условия (2), рассмотрены в работах [2, 3]. Пусть $\Omega\subset\{x:x_1>0\}$.

Введем некоторые обозначения. Пусть $\check{x}=(x_2,\dots,x_n)$,

$$\Omega_\tau=\Omega\cap\{x:x_1>\tau\},\ \Omega(\tau_1,\tau_2)=\Omega\cap\{x:\tau_1<x_1<\tau_2\},$$

$$s_\tau=\Omega\cap\{x:x_1=\tau\},\ G_\tau=\Omega_\tau\times(0,T),\ G(\tau_1,\tau_2)=\Omega(\tau_1,\tau_2)\times(0,T),$$

$S_\tau=s_\tau\times(0,T)$, $B_r(x^\circ)$ — шар радиуса r с центром в точке $x^\circ=(x_1^\circ,\dots,x_n^\circ)$.

Очевидно, s_τ состоит из не более чем счетного числа связных открытых множеств s_τ^l на гиперплоскости $x_1=\tau$, $l=1,2,\dots$. Пусть $\gamma=\partial\Omega\cap\partial\Omega_{\tau_*}$, $\tau_*=\mathrm{const}>0$, $\tau>\tau_*$ и $\lambda_l(\tau)$ — наименьшее собственное значение оператора Лапласа на s_τ^l с однородными условиями Дирихле на границе s_τ^l. Предположим, что при $\tau_0<x_1<\infty$, $\lambda_l(x_1)\geqslant\lambda(x_1)>0$, где $\lambda(x_1)\in C^\circ(\tau_0,\infty))$, $l=1,2,\dots$. Обозначим

$$B_{M,\delta}(\chi)=\prod_{s\in M}\frac{(\chi^{(s)})^{\delta_s}}{\chi^{\mu}},$$

где $\mu=\sum_{s\in M}\delta_s$, M — некоторое множество индексов s, $\delta=\{\delta_s\}$, $\chi(x_1)$ — достаточно гладкая функция. Положим $S(M,\delta)=\sum_{s\in M}s\delta_s$.

Приведем интегральную оценку обобщенного решения задачи (1), (3), (4), аналогичную энергетическому неравенству, выражающему принцип Сен-Венана.

Лемма 1. Пусть область Ω такова, что множество s_τ при $\tau>\tau_0$ не пусто и ограничено, $\tau_0=\mathrm{const}>0$.

Пусть $\chi(x_1)\in C^{2m}([\tau_0,\infty))$, $\chi(x_1)>0$ при $\tau_0\leqslant x_1<\infty$,

$\chi^2(x_1)\lambda^{-m}(x_1)$ монотонно стремится к нулю при $x_1 \to \infty$ и $\lambda^{-p}(x_1) | B_{M,\delta}(\chi(x_1))|^2 \leqslant \eta$ при $\tau_0 \leqslant x_1 < \infty$ (6) для всех M, δ и p таких, что $S(M, \delta) \leqslant p \leqslant 2m$, где η — некоторое положительное число, зависящее только от λ_1, λ_2, максимумов модулей коэффициентов $a_{\alpha\beta}(x, t)$ при $|\alpha|, |\beta| \leqslant m$. Тогда для обобщенного решения $u(x, t)$ уравнения (1) в G_{τ_0} с однородными условиями (3), (4) соответственно на Ω_{τ_0} и $\Gamma = (\partial\Omega \cap \partial\Omega_{\tau_0}) \times (0, T)$, при $f \equiv 0$ в G_{τ_0}, справедлива оценка

$$\int\limits_{G(\tau, 2\tau)} E(u)\,dx\,dt \leqslant c\,\frac{\chi^2(\tau)\lambda^{-m}(\tau)}{\tau^{2m}} \int\limits_{G_{\tau_0}} W(u)\,dx\,dt, \tag{7}$$

где

$$E(u) = \sum_{|\alpha|=m} |\mathcal{D}_x^\alpha u|^2, \quad W(u) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} |\mathcal{D}_x^\alpha u|^2, \quad \tau \geqslant \tau_0,$$

постоянная c не зависит от u и τ.

Лемма 1 доказывается аналогично теореме 1 работы [4].

На основе леммы 1 установим характер поведения модуля решения задачи (1), (3), (4) и модуля любой его производной при $x_1 \to \infty$ при некоторых дополнительных условиях на область Ω. Для этого используем известные априорные оценки производных решений параболических уравнений в норме L^2 и теоремы вложения.

Пространством $C_{x,t}^{2ml, l}(D)$ назовем множество функций, заданных в $D \subset R_{x,t}^{n+1}$ и имеющих конечную норму

$$\|u\|_D^{(l)} = \sum_{0 \leqslant 2mr + |s| \leqslant 2ml} \sup_D \left| \mathcal{D}_t^r \mathcal{D}_x^s u \right|,$$

где $l \geqslant 0$ — целое число. Для ограниченной области $D \subset R_{x,t}^{n+1}$ и целого $k \geqslant 0$ определим пространство $W_{x,t}^{2mk, k}(D)$ как замыкание гладких функций в норме

$$\|u\|_{k,D} = \left(\int\limits_D \sum_{0 \leqslant 2mr + |s| \leqslant 2mk} |\mathcal{D}_t^r \mathcal{D}_x^s u|^2\,dx\,dt \right)^{1/2}.$$

В дальнейшем нам понадобятся оценки, доказанные в работе [5]. Ниже мы приводим их в том виде, в каком они будут использованы при доказательстве теоремы 1.

Лемма 2. Пусть область Q является либо цилиндром $\{x : -1/2 < x_1 < 1/2,\ |\check{x}| < 1\}$, либо шаром $\{x : |x| < 1\}$ либо полушаром $\{x : |x| < 1,\ x_1 > 0\}$. Через Q_1 обозначим соответственно цилиндр $\{x : -1/4 < x_1 < 1/4,\ |\check{x}| < 1\}$, шар $\{x : |x| < 1/2\}$, полушар $\{x : |x| < 1/2,\ x_1 > 0\}$.

Пусть в $D = Q \times (0, a)$ задано уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^m \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} b_\alpha(x, t)\mathcal{D}_x^\alpha u = 0 \tag{8}$$

с начальным условием $u|_{t=0} = 0$, $x \in Q$, и выполняется условие параболичности: существуют постоянные $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ такие, что

$$\varkappa_1 |\xi|^{2m} \leqslant \sum_{|\alpha|=2m} b_\alpha(x, t)\xi^\alpha \leqslant \varkappa_2 |\xi|^{2m}$$

при любых $(x, t) \in \bar{D}$, $\xi \in R^n$.

Пусть $l = 2ms$, $s \geqslant 0$ — целое, и $b_\alpha(x, t) \in C^{l, l/2m}(\bar{D})$, причем $\| b_\alpha(x, t) \|_D^{(s)} \leqslant M$ при $|\alpha| \leqslant 2m$, $M = \text{const} > 0$.

Тогда существует постоянная c, такая, что для любого решения $u \in W_{x,t}^{l+2m, (l+2m)/2m}(D)$ уравнения (8) в D, которое в случае, когда Q есть полушар или цилиндр, удовлетворяет граничным условиям $\mathcal{D}_x^\alpha u = 0$, $|\alpha| \leqslant m-1$ соответственно на {плоская часть границы полушара} $\times [0, a]$ или {боковая поверхность цилиндра} $\times [0, a]$, имеет место оценка

$$\|u\|_{s+2,\, Q_1 \times [0, a]} \leqslant c \|u\|_{L^2(D)},$$

причем постоянная c зависит от $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, n, l, M.

Будем говорить, что локальное преобразование координат $y = \Phi(x)$ принадлежит классу (K, q) в области $Q \subset R_x^n$, если существует обратное преобразование $x = \Phi^{-1}(y)$, переводящее $Q' \subset R_y^n$ в Q, и производные вектор-функций $\Phi(x)$ и $\Phi^{-1}(y)$ до порядка q включительно соответственно в областях Q и Q' ограничены постоянной K, $(K \geqslant 1)$.

Следующая теорема характеризует поведение решений задачи (1), (3), (4) при $x_1 \to \infty$.

Теорема 1. Пусть область Ω лежит в полупространстве $x_1 > 0$ и множество s_τ не пусто и ограничено при $\tau > \tau_0$. Предположим, что при некоторых постоянных $K > 0$, $\gamma > 0$ для каждого $\tau > \tau_0 + \gamma \geqslant 3$ выполнено одно из следующих условий: 1) существует $\sigma(\tau)$ такое, что $0 < \sigma(\tau) \leqslant 1$ и область $\Omega(\tau - \sigma(\tau), \tau + \sigma(\tau))$ переходит при некотором отображении $y = \Phi(x)$ из класса (K, q), $q = l + 2m$, $l = 2m\left(k + \left[\frac{n+2m}{4m}\right]\right)$, $k \geqslant 0$ в цилиндр

$$\{y : \eta(\tau) - \delta(\tau) < y_1 < \eta(\tau) + \delta(\tau),\ |\check{y}| < p_1(\tau)\},$$

причем в боковую поверхность этого цилиндра переходят только точки границы, принадлежащие $\partial\Omega$, а образы точек s_τ содержатся в цилиндре $\{y: \eta(\tau) - \delta(\tau)/2 < y_1 < \eta(\tau) + \delta(\tau)/2,\ |\check{y}| < p_1(\tau)\}$, $p_1(\tau) \in (0, 1]$, $2\delta(\tau) \geqslant p_1(\tau)$, постоянная K не зависит от τ; 2) каждая точка $x = (\tau, \check{x})$ из s_τ либо является центром шара радиуса $2p_2(\tau) \leqslant 1$, принадлежащего Ω_{τ_0}, либо $(\tau, \check{x})$ принадлежит некоторой окрестности O_1 некоторой точки $x^\circ \in \bar{s}_\tau \cap \partial\Omega$ и существует окрестность O_2 точки x° такая, что O_2 при некотором преобразовании $y = F(x)$ из класса (K, q) переходит в шар радиуса $2p_3(\tau) < 1$, причем $O_2 \cap \Omega$ переходит в полушар, плоская часть границы которого является образом $O_2 \cap \partial\Omega$, и образ $O_1 \cap \Omega$ содержится в концентрическом полушаре радиуса $p_3(\tau)$.

Тогда если функции $\mathscr{D}_x^\alpha a_{\alpha\beta}(x, t)$, $|\alpha| \leqslant m$ принадлежат классу $C_{x,t}^{l,\, l/2m}(\bar{G}_{\tau_0})$ и ограничены в норме этого пространства постоянной M, то для обобщенного решения задачи (1), (3), (4) в G_{τ_0}, при $f \equiv 0$ в G_{τ_0}, принадлежащего классу

$$A\left(G_{\tau_0}, H^m(\Omega_{\tau_0}, \partial\Omega_{\tau_0} \cap \partial\Omega)\right) \cap W_{x,t}^{2m,1}(G(\tau_0, \tau))$$

при $\tau_0 < \tau < \infty$, справедлива оценка

$$\sup_{s_\tau} |\mathscr{D}_t^r \mathscr{D}_x^s u(x, t)|^2 \leqslant C(p(\tau))^{-2(|s|+2mr)-(n+2m)} \times$$

$$\times \sup_{|x_1 - \tau| \leqslant \Lambda(\tau)} \{\lambda^{-m}(x_1)\} \frac{\chi^2(\tau - \Lambda(\tau))\lambda^{-m}(\tau - \Lambda(\tau))}{(\tau - \Lambda(\tau))^{2m}} \int_{G_{\tau_0}} W(u)\, dx\, dt, \tag{9}$$

$2mr + |s| \leqslant 2mk$, $p(\tau) = \min\{p_1(\tau), p_2(\tau), p_3(\tau)\}$; $\Lambda(\tau) = \sigma(\tau)$, если для τ выполнено условие 1); $\Lambda(\tau) = 2p_2(\tau)$, если для $(\tau, \check{x})$ выполнено первое из условий 2), и $\Lambda(\tau) = \sup\limits_{x \in O_2 \cap \Omega_\tau} |\tau - x_1|$, если для $(\tau, \check{x})$ выполнено второе из условий 2); постоянная C не зависит от u и τ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть τ — такое, что выполнено условие 1). Полагая $y = \Phi(x)$, $z = t$, $V(y, z) = u(\Phi^{-1}(y), z)$, получаем, что $V(y, z)$ удовлетворяет в $Q_\tau \times (0, T)$, где цилиндр Q_τ является образом $\Omega(\tau - \sigma(\tau), \tau + \sigma(\tau))$, уравнению вида

$$\frac{\partial V}{\partial z} + (-1)^m \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} A_\alpha(y, z)\mathscr{D}_y^\alpha V(y, z) = 0, \tag{10}$$

а также граничному условию $\mathscr{D}_y^\alpha V(y, z) = 0$, $|\alpha| \leqslant m - 1$, на $\gamma \times (0, T)$, где γ — боковая поверхность цилиндра Q_τ, и начальному условию $V(y, z) = 0$ при $z = 0$.

Коэффициенты уравнения (10) выражаются через коэффициенты уравнения (1), функции $\mathscr{D}_x^\alpha a_{\alpha\beta}$ при $|\alpha| \leqslant m$, а также через производные функций, задающих отображение $y = \Phi(x)$, до порядка $2m$ включительно. Поэтому, согласно предположениям, эти коэффициенты принадлежат пространству $C_{y,z}^{l,\, l/2m}(\overline{Q_\tau \times (0, T)})$ и нормы их в этом пространстве ограничены постоянной, зависящей лишь от M и K. Кроме того, постоянная параболичности уравнения (10) оценивается через постоянную параболичности уравнения (1) и число K.

Преобразуем независимые переменные $\zeta = y/p_1(\tau)$, $\theta = z/p_1^{2m}(\tau)$ и положим $\omega(\zeta, \theta) = V\left(\zeta p_1(\tau), \theta p_1^{2m}(\tau)\right)$. Из уравнения (10) для функции $\omega(\zeta, \theta)$ получим уравнение

$$\frac{\partial\omega}{\partial\theta} + (-1)^m \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} (p_1(\tau))^{2m-|\alpha|} A_\alpha(\zeta p_1(\tau), \theta p_1^{2m}(\tau))\, \mathscr{D}_\zeta^\alpha \omega = 0. \tag{11}$$

Так как $2p_1(\tau) \leqslant 1$, то коэффициенты этого уравнения принадлежат пространству.

$$C_{\zeta,\theta}^{l,\, l/2m}\left(\left\{\zeta, \theta; \frac{\eta(\tau)}{p_1(\tau)} - \frac{\delta(\tau)}{p_1(\tau)} < \zeta_1 < \frac{\eta(\tau)}{p_1(\tau)} + \frac{\delta(\tau)}{p_1(\tau)},\right.\right.$$
$$\left.\left. |\check{\zeta}| < 1,\ \theta < \theta < \frac{T}{p_1^{2m}(\tau)}\right\}\right)$$

и нормы их в этом пространстве ограничены постоянной, не зависящей от τ. Функция $\omega(\zeta, \theta)$ удовлетворяет уравнению (11) в $\tilde{Q}_\tau \times \left(0, T/p_1^{2m}(\tau)\right)$, где $\tilde{Q}_\tau = \{\zeta: \eta(\tau)/p_1(\tau) - 1/2 < \zeta_1 < \eta(\tau)/p_1(\tau) + 1/2,\ |\check{\zeta}| < 1\}$ и условиям $\mathscr{D}_\zeta^\alpha \omega = 0$, $|\alpha| \leqslant m - 1$, на $\nu \times \left(0, T/p_1^{2m}(\tau)\right)$, ν — боковая поверхность цилиндра $\tilde{Q}_\tau$, $\omega = 0$ при $\theta = 0$. Поэтому, применяя к ω лемму 2, получаем, что

$$\|\omega\|_{l/2m+1,\, \tilde{Q}'_\tau \times \left(0,\, T/p_1^{2m}(\tau)\right)} \leqslant c_1 \|\omega\|_{L^2\left(\tilde{Q}_\tau \times \left(0,\, T/p_1^{2m}(\tau)\right)\right)}, \tag{12}$$

где постоянная c_1 не зависит от τ,

$$\tilde{Q}'_\tau = \{\zeta : \eta(\tau)/p_1(\tau) - 1/4 < \zeta_1 < \eta(\tau)/p_1(\tau) + 1/4, \ |\check{\zeta}| < 1\}.$$

Из оценки (12) и теоремы вложения 10.4 работы [6] следует, что

$$\|\omega\|^{(k)}_{\tilde{Q}'_\tau \times (0,\, T/p_1^{2m}(\tau))} \leqslant c_2 \|\omega\|_{L^2(\tilde{Q}_\tau \times (0,\, T/p_1^{2m}(\tau)))}. \quad (13)$$

Так как

$$\|\omega\|_{L^2(\tilde{Q}_\tau \times (0,\, T/p_1^{2m}(\tau)))} \leqslant c_3 (p_1(\tau))^{-(n+2m)/2} \|u\|_{L^2(N(\tau))} \leqslant$$

$$\leqslant c_3 (p_1(\tau))^{-(n+2m)/2} \left(\sup_{|x_1 - \tau| \leqslant \sigma(\tau)} \{\lambda^{-m}(x_1)\} \int_{N(\tau)} E(u)\, dx\, dt \right)^{1/2},$$

$$c_3 = \mathrm{const}, \ N(\tau) = G(\tau - \sigma(\tau), \tau + \sigma(\tau)),$$

$$|\mathcal{D}_t^r \mathcal{D}_x^s u| \leqslant c_4 (p_1(\tau))^{-(|s| + 2mr)} \sum_{|\beta| + 2m\alpha \leqslant |s| + 2mr} |\mathcal{D}_\theta^\alpha \mathcal{D}_\zeta^\beta \omega|,$$

$c_4 = \mathrm{const}$, $2mr + |s| \leqslant 2mk$, то из неравенства (13) имеем

$$\sup_{x_1} |\mathcal{D}_t^r \mathcal{D}_x^s u|^2 \leqslant c_5 (p_1(\tau))^{-2(|s|+2mr)-(n+2m)} \times$$

$$\times \sup_{|x_1 - \tau| \leqslant \sigma(\tau)} \{\lambda^{-m}(x_1)\} \int_{N(\tau)} E(u)\, dx\, dt, \quad (14)$$

$$2mr + |s| \leqslant 2mk, \quad c_5 = \mathrm{const}.$$

Поэтому из оценки (14) и леммы 1 следует неравенство (9).

Рассмотрим случай, когда для τ выполнено условие 2). Если $x^0 = (\tau, \check{x}) \in S_\tau$ и шар $B_{2p_2(\tau)}(x^0)$ содержатся в $\Omega_{-\infty}$, то, полагая $y = x/2p_2(\tau)$, $z = t/(2p_2(\tau))^{2m}$, $v(y, z) = u(2p_2(\tau) y, (2p_2(\tau))^{2m} z)$, из уравнения (1) получаем, что $v(y, z)$ удовлетворяет уравнению вида

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} \mathcal{D}_y^\alpha (b_{\alpha\beta}(y, z) \mathcal{D}_y^\beta v(y, z)) = 0, \quad (15)$$

где $b_{\alpha\beta}(y, z) = (2p_2(\tau))^{2m - |\alpha| - |\beta|} a_{\alpha\beta}(2p_2(\tau) y, (2p_2(\tau))^{2m} z)$ — в цилиндре высоты $T/(2p_2(\tau))^{2m}$, основанием которого является шар единичного радиуса, причем коэффициенты уравнения (15) в этом цилиндре ограничены в норме пространства $C^{l,\, l/2m}_{y,\, z}$ постоянной, не зависящей от τ.

Далее из леммы 2 и теорем вложения так же, как и в предыдущем случае, получаем неравенство (9).

Если выполнено второе предположение в условии 2), то сделаем замену переменных $y = F(x)$, $z = t$, $v(y, z) = u(F^{-1}(y), z)$ и затем

$$\zeta = y/(2p_3(\tau)), \ \theta = z/(2p_3(\tau))^{2m}, \ \omega(\zeta, \theta) = v(2p_3(\tau)\zeta, (2p_3(\tau))^{2m}\theta).$$

Функция $\omega(\zeta, \theta)$ удовлетворяет уравнению вида

$$\frac{\partial \omega}{\partial \theta} + (-1)^m \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} (2p_3(\tau))^{2m - |\alpha|} A_\alpha(2p_3(\tau)\zeta, (2p_3(\tau))^{2m}\theta) \mathcal{D}_\zeta^\alpha \omega = 0$$

в цилиндре высоты $T/(2p_3(\tau))^{2m}$, основанием которого является полушар радиуса 1, и условию $\mathcal{D}_\zeta^\alpha \omega = 0$, $|\alpha| \leqslant m - 1$ на плоской части боковой поверхности этого цилиндра. Далее, применяя лемму 2 и теоремы вложения, как и в предыдущих случаях, получаем оценку (9).

Рассмотрим характер поведения решений задачи (1), (3), (4) и их производных при $x_1 \to \infty$ для специальных классов областей G, для которых выполнены условия теоремы 1.

Пусть область Ω лежит в полупространстве $\{x : x_1 > 0\}$ и для $x_1 > \tau_0 > 0$ совпадает с областью $\{x : x_1 > \tau_0, |\check{x}| < g(x_1)\}$, где $g(x_1)$ — непрерывная положительная функция на $[\tau_0, \infty)$. Тогда в качестве $\lambda(\tau)$ можно взять $\pi^2/(4g^2(\tau))$. Укажем два типа условий на функцию $g(x_1)$, достаточных для применимости теоремы 1. Первому условию удовлетворяют функции $g(x_1) = Rx_1^\rho$ при $\rho \leqslant 0$, второму — при $0 \leqslant \rho \leqslant 1$.

Условие I. Пусть при всех $x_1 \in (\tau_0, \infty)$ и при некотором целом $k \geqslant 0$:

а) функция $g(x_1)$ имеет непрерывные производные до порядка $2m\left(k + \left[\frac{n+2m}{4m}\right] + 1\right) = q$ включительно;

б) $0 < g(x_1) \leqslant k_0$, $|g'(x_1)| \leqslant k_1$;

в) $\left|g^{(s)}(x_1)/g(x_1)\right| \leqslant M_s$, $s = 1, \ldots, q$; k_0, k_1, $M_s = \mathrm{const}$.

Покажем, что в этом случае область Ω удовлетворяет условию 1) теоремы 1.

Пусть $\check{\sigma} = \max(k_0, k_1)$. Для $\tau \geqslant \tau_0 + 3$ положим $\sigma(\tau) = g(\tau) \times (2\check{\sigma})^{-1}$.

Рассмотрим отображение $y = \Phi(x)$ вида $y_1 = \Phi_1(x) \equiv x_1$, $y_j = \Phi_j(x) \equiv x_j g(\tau)(\check{\sigma} g(x_1))^{-1}$, $j = 2, \ldots, n$. Это отображение переводит область $\Omega(\tau - g(\tau)(2\check{\sigma})^{-1}, \tau + g(\tau)(2\check{\sigma})^{-1})$ в цилиндр $\{y : |y_1 - \tau| < g(\tau)(2\check{\sigma})^{-1}, |\check{y}| < g(\tau)/\check{\sigma}\}$, Положим $p_1(\tau) = g(\tau)/\check{\sigma}$, $\delta(\tau) = g(\tau)(2\check{\sigma})^{-1}$, $\eta(\tau) = \tau$.

Принадлежность преобразования $y = \Phi(x)$ классу (K, q) показана в работе [7].

Докажем теперь, что функция $\chi(x_1) = \exp\left\{-d\int\limits_{\tau_0}^{x_1}\frac{d\tau}{g(\tau)}\right\}$ при достаточно малой положительной постоянной d удовлетворяет условию (6). Легко видеть, что

$$\mathcal{D}^{(s)}(\chi(x_1)) = dg^{-s}(x_1)\chi(x_1)\mathcal{P}(d, g, g', \ldots, g^{(s-1)}),$$

где $\mathcal{P}(\cdots)$ — полином относительно своих аргументов. Эту формулу легко доказать индукцией по s. Предположим, что $d < 1$. Тогда из условия I имеем

$$|B_{M,\delta}(\chi(x_1))| \leqslant c_1 d^{\mu}(g(x_1))^{-S(M,\delta)}, \quad c_1 = \text{const} > 0.$$

Поэтому

$$\lambda^{-p}(x_1)|B_{M,\delta}(\chi(x_1))|^2 \leqslant c_2 d^{2\mu}(g(x_1))^{2(p-S(M,\delta))}, \quad c_2 = \text{const} > 0.$$

При $S(M, \delta) \leqslant p$ отсюда следует, что

$$\lambda^{-p}(x_1)|B_{M,\delta}(\chi(x_1))|^2 \leqslant c_3 d^{2\mu}, \quad c_3 = \text{const} > 0.$$

Поэтому условие (6) выполнено, если d достаточно мало.

Заметим, что при $|x_1 - \tau| < \sigma(\tau) = g(\tau)(2\check{\sigma})^{-1}$ имеем

$$g(x_1) = g(\tau) + g'(\xi)(x_1 - \tau), \quad |g'(\xi)||x_1 - \tau| \leqslant g(\tau)/2,$$

и следовательно, $g(\tau)/2 \leqslant g(x_1) \leqslant 3g(\tau)/2$. Отметим также, что из условия I следует

$$|g(x_1)| \leqslant M_1 x_1 + M_2, \quad M_i = \text{const} > 0, \quad i = 1, 2.$$

Оценка (9) теоремы для областей $G = \Omega \times (0, T)$, где Ω удовлетворяет условию 1, принимает вид

$$\sup_{g_\tau}|\mathcal{D}_t^r\mathcal{D}_x^s u|^2 \leqslant c(g(\tau))^{-2(|s|+2mr)-n}\exp\left\{-2d\int\limits_{\tau_0}^{\tau-1}\frac{d\tau}{g(\tau)}\right\}\times$$

$$\times\int\limits_{G_{\tau_0}} W(u)\,dx\,dt, \quad 2mr + |s| \leqslant 2mk, \quad c = \text{const}.$$

Если $g(x_1) = Rx_1^{\rho}$, $R = \text{const} > 0$, $\rho \leqslant 0$, то отсюда имеем

$$\sup_{\sigma_\tau} |\mathscr{D}_t^r \mathscr{D}_x^s u|^2 \leqslant c_1 \tau^{-\rho(2(|s|+2mr)+n)} \exp\left\{-\frac{2d}{R(1-\rho)}(\tau-1)^{1-\rho}\right\} \times$$

$$\times \int_{\sigma_{\tau_0}} W(u)\,dx\,dt, \quad c_1 = \mathrm{const}.$$

Условие II. Пусть при всех $x_1 \in (\tau_0, \infty)$ и при некотором целом $k \geqslant 0$:

а) $g(x_1)$ имеет непрерывные производные до порядка $2m\left(k + \left[\frac{n+2m}{4m}\right] + 1\right) = q$ включительно;

б) $g(x_1) \geqslant \sigma_0 > 0$, $\sigma_0 = \mathrm{const}$;

в) $\left|g^{s-1}(x_1) g^{(s)}(x_1)\right| \leqslant \sigma_s$, $\sigma_s = \mathrm{const} > 0$, $s = 1, \ldots, q$.

Покажем, что в этом случае область Ω удовлетворяет условию 2) теоремы 1. Заметим, что если $x^0 \in S_\tau$, $\tau > \tau_0 + 1$, то шар $B_r(x^0)$ лежит в области Ω_{τ_0}, где $r = \min\{1, (g(\tau) - |\overset{\vee}{x}{}^0|)/(1+\sigma_1)^{1/2}\}$. Для $\tau > \tau_0 + 3$ рассмотрим точку $p(\tau, 0, \ldots, 0, g(\tau))$ на границе Ω. Положим $\omega_p = \{x : x_1 \in (\tau-1, \tau+1), |\tilde{x}| < \sigma_0/2, x_n > (g^2(x_1) - |\tilde{x}|^2)^{1/2} - \sigma_0/2\}$. Здесь $\overset{\vee}{x} = (x_2, \ldots, x_n)$, $\tilde{x} = (x_2, \ldots, x_{n-1})$. В ω_p определим преобразование $y = F(x)$, где $y_j = F_j(x) \equiv x_j$; $j = 1, \ldots, n-1$, $y_n = F_n(x) = (g^2(x_1) - |\tilde{x}|^2)^{1/2} - x_n$. При этом преобразовании ω_p переходит в $\tilde{\omega}_p = \{y : y_1 \in (\tau-1, \tau+1), |\tilde{y}| < \sigma_0/2, y_n < \sigma_0/2\}$. Принадлежность $y = F(x)$ классу (K, q) с некоторой постоянной K, не зависящей от τ, показана в работе [7]. Совершив подходящее ортогональное преобразование, можно для любой точки $Q \in \partial\Omega$ при $x_1 > \tau_0 + 3$ построить соответствующую окрестность ω_Q и преобразование $y = F(x)$. Постоянную K можно выбрать не зависящей от точки Q.

Заметим, что в $\tilde{\omega}_p$ лежит шар $B_\rho(\tilde{p})$, где $\tilde{p} = F(p)$, $\rho = \min \times (1, \sigma_0/2)$. Если положить $O_2 = F^{-1}(B_\rho(\tilde{p}))$, $O_1 = F^{-1}(B_{\rho/2}(\tilde{p}))$, то очевидно, что в O_1 лежит шар $B_{\rho/2nK}(p)$. Поэтому можно положить $p_2 = \rho/4nK(1+\sigma_1^2)^{1/2}$, $p_3 = \rho/2$.

Аналогично тому, как это сделано при выполнении условия I, легко показать, что функция $\chi(x_1) = \exp\left\{-d\int_{\tau_0}^{x_1}\frac{d\tau}{g(\tau)}\right\}$ при достаточно малой положительной постоянной d удовлетворяет условию (6) при выполнении условия II.

Таким образом, для областей $G=\Omega\times(0, T)$, где Ω удовлетворяет условию II, оценка (9), полученная в теореме 1, принимает вид

$$\sup_{B_\tau} |\mathscr{D}_1^r \mathscr{D}_x^s u|^2 \leqslant c \sup_{(\tau-1,\, \tau+1)} \{g^{2m}(x_1)\} \exp\left\{-2d \int_{\tau_0}^{\tau-1} \frac{d\tau}{g(\tau)}\right\} \times$$

$$\times \int_{G_{\tau_0}} W(u)\, dx\, dt,\ 2mr + |s| \leqslant 2mk,\ c = \mathrm{const} > 0,\ \tau > \tau_0 + 3.$$

В случае $g(x_1) = Rx_1^\rho$, $R = \mathrm{const} > 0$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ имеем

$$\sup_{B_\tau} |\mathscr{D}_1^r \mathscr{D}_x^s u|^2 \leqslant c_1 \tau^{2m\rho} \exp\left\{-\frac{2d}{R(1-\rho)} (\tau-1)^{1-\rho}\right\} \int_{G_{\tau_0}} W(u)\, dx\, dt,$$

$$0 \leqslant \rho < 1,$$

$$\sup_{B_\tau} |\mathscr{D}_1^r \mathscr{D}_x^s u|^2 \leqslant c_1 \tau^{2m-2d/R} \int_{G_{\tau_0}} W(u)\, dx\, dt, \quad \rho = 1, \tag{16}$$

$$c, c_1 = \mathrm{const}.$$

В случае $\rho=1$ оценка (16) дает степенное убывание решения на бесконечности лишь при достаточно малых R.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.
2. Шишков А. Е. Качественные свойства обобщенных решений квазилинейных дивергентных эллиптических и параболических уравнений. Ин-т мат АН УССР. Препринт 86, 29. Киев, 1986. 55 с.
3. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. С. 1—407.
4. Кондратьев В. А., Олейник О. А. О поведении обобщенных решений задачи Дирихле для эллиптических уравнений высокого порядка в окрестности границы//Зап. науч. сем. ЛОМИ. Л.: Наука, 1982. Т. 115. № 1. С. 114—125.
5. Солонников В. А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида//Труды МИАН им. В. А. Стеклова. М.—Л.: Наука, 1965. Т. 83. 163 с.
6. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
7. Копачек И., Олейник О. А. О поведении решений системы уравнений теории упругости в окрестности нерегулярных точек границы и на бесконечности//Труды ММО, 1981. Т. 43. С. 260—274.

Б. В. ЛОГИНОВ, Е. В. ТРОФИМОВ

ВЫЧИСЛЕНИЕ АСИМПТОТИКИ КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Н. Е. Кочиным [1] методами теории функций комплексного переменного исследована плоская задача о движении двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 в слое, ограниченном горизонтальными плоскостями, в котором линия раздела двух жидкостей обладает периодом λ и перемещается без изменения формы с постоянной горизонтальной скоростью.

В данной работе при использовании методов теории ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой симметрии [2, 3] исследуется соответствующая пространственная задача с учетом поверхностного натяжения на границе раздела. Рассмотрен случай четырехмерного подпространства нулей линеаризованной задачи. Потенциальные течения жидкостей, ответвляющиеся от течения с постоянной скоростью V в направлении оси Ox, описываются следующей системой в безразмерных переменных:

$$\Delta\Phi_1 = 0, \ -1 < z < f(x, y);$$

$$\Delta\Phi_2 = 0, \quad f(x, y) < z < k;$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = 0, \ z = -1; \ \ \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} = 0, \ z = k;$$

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_j}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad z = f, \quad j = 1, 2; \tag{1}$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} - k_0\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} + \frac{1}{2}\,|\nabla\,\Phi_1|^2 - \frac{k_0}{2}\,|\nabla\,\Phi_2|^2 + (1 - k_0)F^2 f =$$

$$= \gamma F^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}\right)\right], \ z = f.$$

Здесь $\Phi_j(x, y, z) = Vx - \varphi_j(x, y, z)$ — потенциал скоростей жидкостей, $f(x, y)$ — граница раздела жидкостей, близкая к горизонтали $z = 0$, $k = h_2/h_1$ — отношение толщин слоев, $k_0 = \rho_2/\rho_1$ — отношение плотностей жидкостей, $F = \frac{\sqrt{hg}}{V}$ — величина обратная числу Фруда, $\gamma = \frac{\sigma}{\rho_1 h^2 g}$, σ — коэффициент поверхностного натяжения, g — ускорение свободного падения. Система (1) допускает двупараметрическую группу сдвигов $L_\beta g(x, y) = g(x+\beta_1, y+\beta_2)$ и отражения $S_x: x \to -x$, $\Phi_j(x, y, z) \to -\Phi_j(-x, y, z)$, $f(x, y) \to f(-x, y)$; $S_y: y \to -y$, $\Phi_j(x, y, z) \to \Phi_j(x, -y, z)$, $f(x, y) \to f(x, -y)$. Разыскиваются периодические решения (1) с периодами $\frac{2\pi}{a} = a_1$ и $\frac{2\pi}{b} = b_1$ по осям координат.

Используя прием распрямления свободной границы [3] — замену

$$\zeta = \frac{(k+1)(z - f(x, y))}{(k - 2f(x, y) - 1)z + 2k + (k-1)f(x, y)},$$

$$u_i(x, y, \zeta) = \Phi_j\left(x, y, -\frac{\zeta[2k + kf(x, y) - f(x, y)] + (k+1)f(x, y)}{(k - 2f(x, y) - 1)\zeta - (k+1)}\right),$$

преобразуем (1) к нелинейной системе, линеаризация которой

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + a_0^2(\zeta)\frac{\partial^2 u_i}{\partial \zeta^2} + a_1(\zeta)\frac{\partial u_i}{\partial \zeta} = 0, \quad j = 1, 2,$$

$$a_0(\zeta) = \frac{[(k-1)\zeta - (k+1)]^2}{2k(k+1)}, \quad a_1(\zeta) = \frac{(k-1)[(k-1)\zeta - (k+1)]^3}{2k^2(k+1)^2};$$

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta}\right)_{-1} = 0; \quad \left(\frac{\partial u_2}{\partial \zeta}\right)_1 = 0; \tag{2}$$

$$\frac{k+1}{2k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \zeta}\right)_0 - \frac{\partial f}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} - k_0\frac{\partial u_2}{\partial x} + (1 - k_0)F^2 f - \gamma F^2 \Delta f = 0, \quad \zeta = 0,$$

определяет фредгольмов оператор B, действующий из пространства $C^{2+\alpha}([-1, 0] \times \Pi_0) \dot{+} C^{2+\alpha}([0, 1] \times \Pi_0) \dot{+} C^{2+\alpha}(\Pi_0)$ в пространство $C^\alpha([-1, 0] \times \Pi_0) \dot{+} C^\alpha([0, 1] \times \Pi_0) \dot{+} C^\alpha(\Pi_0)$. Здесь Π_0 — прямоугольник со сторонами a_1 и b_1 по осям координат, определяющий целочисленную решетку $\Lambda_p = (p_1 a_1, p_2 b_1)$; обратная [5] к Λ_p решетка Λ'_p также является прямоугольной: $\bar{l}^{(1)} = a\bar{e}_1$, $\bar{l}^{(2)} = b\bar{e}_2$ с общим вектором $\bar{l} = p_1\bar{l}^{(1)} + p_2\bar{l}^{(2)}$. Доказательство фредгольмовости B производится аналогично [3] с привлечением результата ([6], гл. III, § 3).

Метод Фурье разделения переменных в системе (2) приводит к условию

$$\frac{m^2 a^2}{s_{mn}}\left[k_0 \frac{\operatorname{ch} k s_{mn}}{\operatorname{sh} k s_{mn}} + \frac{\operatorname{ch} s_{mn}}{\operatorname{sh} s_{mn}}\right] = F_m^2 (1 - k_0 + \gamma s_{mn}^2), \tag{3}$$

$$s_{mn}^2 = m^2 a^2 + n^2 b^2,$$

связывающему числа m, n и периоды $\frac{2\pi}{a}, \frac{2\pi}{b}$ с параметрами F^2 и γ, при котором фредгольмов оператор B_{mn}, определяемый системой (2) при $m, n \neq 0$, имеет не менее чем четырехмерное подпространство нулей $N(B_{mn})$:

$$\hat{\varphi}_1 = \{-w_1(\zeta) \sin max \cos nby, \quad w_2(\zeta) \sin max \cos nby, \quad w_3 \cos max \cos nby\},$$

$$\hat{\varphi}_2 = \{-w_1(\zeta) \sin max \sin nby, \quad w_2(\zeta) \sin max \sin nby, \quad w_3 \cos max \sin nby\},$$

$$\varphi_3 = \{w_1(\zeta) \cos max \cos nby, \quad -w_2(\zeta) \cos max \cos nby, \quad w_3 \sin max \cos nby\},$$

$$\hat{\varphi}_4 = \{w_1(\zeta) \cos max \sin nby, \quad -w_2(\zeta) \cos max \sin nby, \quad w_3 \sin max \sin nby\},$$

где

$$w_1(\zeta) = \frac{ma\sqrt{ab}}{\pi s_{nm} \operatorname{sh} s_{mn}} \operatorname{ch}\left[\frac{(k+1)(\zeta+1)}{(k-1)\zeta-(k+1)} s_{mn}\right],$$

$$w_2(\zeta) = \frac{ma\sqrt{ab}}{\pi s_{mn} \operatorname{sh} k s_{mn}} \operatorname{ch}\left[\frac{k(k+1)(\zeta-1)}{(k-1)\zeta-(k+1)} s_{mn}\right], \quad w_3 = \frac{\sqrt{ab}}{\pi}.$$

Сопряженная по Лагранжу к (2) с условиями периодичности, система имеет вид

$$\frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}(a_0^2(\zeta) U_j) - \frac{\partial}{\partial \zeta}(a_1(\zeta) U_j) = 0, \quad j = 1, 2;$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial \zeta}[a_0^2(\zeta) U_1] - a_1(\zeta) U_1\right\}_{-1} = 0; \quad \left\{\frac{\partial}{\partial \zeta}[a_0^2(\zeta) U_2] - a_1(\zeta) U_2\right\}_1 = 0;$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}[a_0^2(\zeta)U_1]\right\}_0 - a_1(0)U_1(x, y, 0) + \frac{\partial g}{\partial x} = 0;$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}[a_0^2(\zeta)U_2]\right\}_0 - a_1(0)U_2(x, y, 0) - k_0\frac{\partial g}{\partial x} = 0;$$

$$-\left\{\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y}\right\}_0 \frac{2k}{k+1} a_0^2(0) + (1-k_0)F^2 g - \gamma F^2 \Delta g = 0,$$

U_1, U_2, g — периодичны по x и y.

Метод Фурье, примененный к сопряженной системе (4), дает то же условие (3) существования подпространства $N^*(B)$ ее нетривиальных решений с базисом

$$\hat{\psi}_1 = \{\omega_1(\zeta) \sin max \cos nby,\ -\omega_2(\zeta) \sin max \cos nby,$$
$$\omega_3 \cos max \cos nby\},$$

$$\hat{\psi}_2 = \{\omega_1(\zeta) \sin max \sin nby,\ -\omega_2(\zeta) \sin max \sin nby,$$
$$\omega_3 \cos max \sin nby\},$$

$$\hat{\psi}_3 = \{-\omega_1(\zeta) \cos max \cos nby,\ \omega_2(\zeta) \cos max \cos nby,$$
$$\omega_3 \sin max \cos nby\},$$

$$\hat{\psi}_4 = \{-\omega_1(\zeta) \cos max \sin nby,\ \omega_2(\zeta) \cos max \sin nby,$$
$$\omega_3 \sin max \sin nby\},$$

$$\omega_1(\zeta) = 2w_1(\zeta),\ \omega_2(\zeta) = -2k_0 w_2(\zeta),\ \omega_3 = w_3.$$

Для упрощения подсчета коэффициентов уравнения разветвления (УР) в подпространствах $N(B_{mn})$ и $N^*(B_{mn})$ следует перейти к комплексным базисам по формулам

$$\varphi = C'\hat{\varphi},\quad C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i, & i, & -i, & i \\ 1, & 1, & -1, & -1 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \\ i, & -i, & -i, & i \end{pmatrix},$$

$$\psi = d\hat{\psi},\quad d = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i, & 1, & 1, & -i \\ -i, & 1, & 1, & i \\ i, & -1, & 1, & i \\ -i, & -1, & 1, & -i \end{pmatrix}.$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\{+w_1(\zeta),\ -w_2(\zeta),\ -iw_3\}\, e^{i(max+nby)},$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\{+w_1(\zeta),\ -w_2(\zeta),\ iw_3\}\, e^{-i(max+nby)},$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{2}\{+w_1(\zeta),\ -w_2(\zeta),\ -iw_3\}\, e^{i(max-nby)},\tag{5}$$

$$\varphi_4 = \frac{1}{2}\{+w_1(\zeta),\ -w_2(\zeta),\ iw_3\}\, e^{-i(max-nby)},$$

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\{-\omega_1(\zeta),\ \omega_2(\zeta),\ i\omega_3\}\, e^{-i(max+nby)},$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2}\{-\omega_1(\zeta),\ \omega_2(\zeta),\ -i\omega_3\}\, e^{i(max+nby)},$$

$$\psi_3 = \frac{1}{2}\{-\omega_1(\zeta),\ \omega_2(\zeta),\ i\omega_3\}\, e^{-i(max-nby)},\tag{6}$$

$$\psi_4 = \frac{1}{2}\{-\omega_1(\zeta),\ \omega_2(\zeta),\ -i\omega_3\}\, e^{i(max-nby)}.$$

Стандартные построения, выполненные при нахождении сопряженной системы и примененные к неоднородной системе (2) с правыми частями

$$\mathrm{w}_{1j}(x, y, \zeta), \quad \mathrm{w}_{2j}(x, y), \quad \mathrm{w}_3(x, y),$$

дают условия ее разрешимости

$$\int_{-1}^{0}\int_{\Pi_0} \mathrm{w}_{11} U_1\, dx\, dy\, d\zeta + \int_{0}^{1}\int_{\Pi_0} \mathrm{w}_{12} U_2\, dx\, dy\, d\zeta -$$

$$-\frac{2k}{k+1}\, \overset{*}{a_0}(0) \int_{\Pi_0} [\mathrm{w}_{21} U_1(x, y, 0) + \mathrm{w}_{22} U_2(x, y, 0)]\, dx\, dy +$$

$$+\int_{\Pi_0} g\mathrm{w}_3\, dx\, dy = 0,$$

используемые при построении УР.

Положив $F^2 = F^2_{mn} + \varepsilon$, запишем нелинейную систему (1) с точностью до членов третьего порядка по u_j и f

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} + \frac{[(k+1)-\zeta(k-1)]^4}{4k^2(k+1)^2}\frac{\partial^2 u_j}{\partial \zeta^2} -$$

$$-\frac{(k-1)[(k+1)-\zeta(k-1)]^3}{2k^2(k+1)^2}\frac{\partial u_j}{\partial \zeta} - \frac{(k+1)(1-\zeta^2)}{k}\times$$

$$\times[f'_x u''_{j_{x\zeta}} + f'_y u''_{j_{y\zeta}}] - \frac{(k^2-1)(1-\zeta^2)}{k^2} f[f'_x u''_{j_{x\zeta}} + f'_y u''_{j_{y\zeta}}] +$$

$$+\frac{1}{2k^3(k+1)}[(k+1)^3(k^2-1) - 4(k+1)(k^3+1)\zeta + 6(k^4-1)\zeta^2 -$$

$$-4(k-1)(k^3-1)\zeta^3 + (k-1)^3(k^2-1)\zeta^4] f u''_{j_{\zeta\zeta}} -$$

$$-\frac{(k+1)^2(1-\zeta^2)^2}{4k^2}(f'^2_x + f'^2_y)u''_{j_{\zeta\zeta}} - \frac{1}{4k^4(k+1)}\times$$

$$\times[(k+1)^3(3k^2-4k+3) - 12(k^4-1)(k+1)\zeta +$$

$$+6(3k^5+k^4+k+3)\zeta^2 - 4(k-1)(3k^4+2k^3+2k^2+2k+3)\zeta^3 +$$

$$+3(k-1)(k^4-1)\zeta^4]f^2 u''_{j_{\zeta\zeta}} + \frac{k+1}{2k}(1-\zeta^2)\times$$

$$\times(f''_{xx} + f''_{yy})u'_{j_\zeta} - \frac{k^2-1}{2k^2}(1-\zeta^2)f(f''_{xx} + f''_{yy})u_{j_\zeta} -$$

$$-\frac{k+1}{2k^2}[(k-1)-\zeta(k+1)](1-\zeta^2)(f'^2_x + f'^2_y)u'_{j_\zeta} +$$

$$+\frac{(k+1)-\zeta(k-1)}{k^3(k+1)}[-(k^3+1) + \zeta(k-1)(2k^2+k+2) -$$

$$-\zeta^2(k^2-1)^2] f u_{j_\zeta} + \frac{3}{2k^4(k+1)}[(k+1-\zeta(k-1)]\times$$

$$\times [(k^4-1)-2(k^4+1)\zeta+(k^4-1)\zeta^2]\, f^2 u_{j_\zeta}+\cdots,\quad j=1,2;$$

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta}\right)_{-1}=0;\quad \left(\frac{\partial u_2}{\partial \zeta}\right)_{1}=0;$$

$$\frac{k+1}{2k}u'_{j_\zeta}-f'_x=\frac{k^2-1}{2k^2}fu'_{j_\zeta}-\frac{k^3+1}{2k^3}f^2u'_{j_\zeta}-$$

$$-\frac{k+1}{2k}(f'^2_x+f'^2_y)\,u'_{j_\zeta}+[f'_x u'_{j_x}+f'_y u'_{j_y}]+\cdots,\quad \zeta=0;$$

(8)

$$u'_{1_x}-k_0u'_{2_x}+(1-k_0)F^2_{mn}f-\gamma F^2_{mn}\Delta f=-\frac{1}{2}(u'^2_{1_x}-k_0u'^2_{2_x})-$$

$$-\frac{1}{2}(u'^2_{1_y}-k_0u'^2_{2_y})+\frac{k+1}{2k}(u'_{1_\zeta}-k_0u'_{2_\zeta})f'_x-\frac{k^2-1}{2k^2}(u'_{1_\zeta}-k_0u'_{2_\zeta})\times$$

$$\times ff'_x+\frac{k+1}{2k}[(u'_{1_x}u'_{1_\zeta}-k_0u'_{2_x}u'_{2_\zeta})f'_x+(u'_{1_y}u'_{1_\zeta}-k_0u'_{2_y}u'_{2_\zeta})f_y]-$$

$$-\frac{1}{2}(u'^2_{1_\zeta}-ku'^2_{2_\zeta})\left[\frac{(k+1)^2}{4k^2}-\frac{(k+1)(k^2-1)}{2k^3}f\right]+\gamma(F^2_m+\varepsilon)\times$$

$$\times\Big[-\frac{3}{2}(f'^2_xf''_{xx}+f'^2_yf''_{yy})-\frac{1}{2}(f'^2_yf''_{xx}+f'^2_xf''_{yy})-$$

$$-2f'_xf'_yf''_{xy}\Big]-(1-k_0)\varepsilon f+\gamma\varepsilon\Delta f+\cdots,\quad \zeta=0$$

Система разветвления

$$t_j(\xi,\varepsilon)=0,\quad j=\overline{1,4} \tag{9}$$

строится стандартными методами [2, 3, 7] с использованием ее групповой симметрии. Из вида базисных элементов (6) и групповой симметрии системы (1), согласно [3], следует, что в (9) t_j выражаются через $t_1(\xi,\varepsilon)$ следующим образом

$$t_{\underset{\circ}{(2)}}(\xi,\sigma)=\overline{t_{\underset{\circ}{(1)}}(\xi,\varepsilon)},\quad t_3(\xi,\varepsilon)=p_1t_1(\xi,\varepsilon),$$

где $p_1=(13)\,(24)$ подстановка индексов у ζ.

Отсюда видно, что в случае четырехмерного подпространства нулей $N(B_{mn})$, как и в [3, 7], УР имеет вид

$$t_k(\xi, \varepsilon) = t_0^{(1)}(\varepsilon)\xi_k + \sum_q t_q^{(1)}(\varepsilon)\xi_k(\xi_1\xi_2)^{q_1}(\xi_3\xi_4)^{q_2} = 0, \quad k = 1, ..., 4. \tag{10}$$

Используя лемму Шмидта и условия разрешимости (7) неоднородной системы (2), ищем малые решения (8) в виде

$$u_j = \Sigma u_{j_{\alpha;k}} \xi^\alpha \varepsilon^k, \quad f = \Sigma f_{\alpha;k} \xi^\alpha \varepsilon^k, \quad j = 1, 2.$$

Подставляя правые части $(w_{11}, w_{12}; w_{21}, w_{22}; w_3)_{\alpha;k}$ рекуррентных неоднородных систем вида (2), определяющих $u_{j_{\alpha;k}}$, $f_{\alpha;k}$ в условия разрешимости (7), получаем значения коэффициентов $t_{\alpha;k}^{(1)}$ первого уравнения системы разветвления

$$t_{\alpha,k}^{(1)} = \int_{-1}^{0} \int_{\Pi_0} w_{11_{\alpha;k}} \psi_{11}\, dx\, dy\, d\zeta + \int_{0}^{1} \int_{\Pi_0} w_{12_{\alpha;k}} \psi_{12}\, dx\, dy\, d\zeta -$$

$$- \frac{2k}{k+1} a_0^2(0) \int_{\Pi_0} [w_{21_{\alpha;k}} \psi_{11}(x, y, 0) + w_{22_{\alpha;k}} \psi_{12}(x, y, 0)]\, dx\, dy +$$

$$+ \int_{\Pi_0} w_{3_{\alpha;k}} \psi_{13}\, dx\, dy.$$

Они будут вещественными в силу инвариантности УР относительно комплексного сопряжения (см. [3, 7]). Если предположить, что

$$k_0 \neq 1 + \gamma s_{mn}^2, \text{ то } A = t_{e_i;1}^{(1)} = -(1 - k_0 + \gamma s_{mn}^2) \neq 0$$

($e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$, 1 стоит на i-ом месте) и жордановы цепочки имеют единичную длину. Мы не приводим здесь значений коэффициентов УР $\widetilde{B} = t_{2e_i+e_j;0}^{(1)}$, $\widetilde{C} = t_{e_1+e_2+e_j;0}^{(1)}$ ввиду их крайней громоздкости, по этой же причине мы не исследуем характер ветвления (подкритическое, надкритическое) в основном результате работы — теореме 1. Все это будет приведено в подробном варианте работы — депонированной рукописи.

Система разветвления имеет тот же вид, что и в работах [3, 7], групповая симметрия задачи позволяет понизить ее порядок на две единицы и указать вид ассимптотики малых решений системы (8).

Теорема 1. Пусть $k_0 \neq 1 + \gamma s_{mn}^2$. Тогда для основных трансляций, образующих прямой угол, задача (8) в окрестности точки бифуркации F_{mn}^2 — четырехкратного собственного значения, определяемого условием (3), имеет с точностью до преобразования $y \to -y$ два двупараметрических свойства периодических решений

$$\{u_1, u_2, f\} = \left[-\frac{A}{B+C}(F^2 - F_{mn}^2)\right]^{1/2} \{-w_1(\zeta) \times$$

$$\times \sin[ma(x + \beta_1) - nb(y + \beta_2)],$$

$$w_2(\zeta) \sin[ma(x + \beta_1) - nb(y + \beta_2)], \quad w_3 \cos[ma(x + \beta_1) -$$

$$- nb(y + \beta_2)]\} + o(|F^2 - F_{mn}^2|^{1/2}),$$

$$\operatorname{sign}(F^2 - F_{mn}) = -\operatorname{sign} A(B + C),$$

$$\{u_1, u_2, f\} = \left[-\frac{A}{B}(F^2 - F_{mn}^2)\right]^{1/2} \{w_1(\zeta) \times$$

$$\times \cos ma(x + \beta_1) \sin nb(y + \beta_2),$$

$$- w_2(\zeta) \cos ma(x + \beta_1) \sin nb(y + \beta_2), \quad w_3 \sin ma[x + \beta_1) \times$$

$$\times \sin nb(y + \beta_2)\} + o(|F^2 - F_{mn}^2|^{1/2}),$$

$$\operatorname{sign}(F^2 - F_{mn}) = -\operatorname{sign} AB$$

(характер ветвления зависит от неравенства $k \gtrless 1$).

Замечание. Случай $k = 1$ рассмотрен отдельно, так как прямая подстановка $k = 1$ в расчетные формулы невозможна.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кочин Н. Е. Определение точного вида волн конечной амплитуды на поверхности раздела двух жидкостей конечной глубины. Труды Всероссийского съезда математиков. М., 1928. С. 266—269; Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie à la surface de séparation de deux liquides de profondeur finie//Math. Ann. 1928. Bd. 98. S. 582—615.
2. Вайнберг М. М., Треногин В. Л. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 524 с.
3. Логинов Б. В. Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности. Ташкент: Фан, 1985. 184 с.

5—6

4. Пухначев В. В. К теории катящихся волн. Журнал ПМТФ. 1975. № 5. С. 47—58.
5. Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике. М., ГИФМЛ, 1958. 354 с.
6. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
7. Кузнецов А. О., Логинов Б. В. Построение периодических решений задачи о капиллярно-гравитационных волнах над ровным дном методами группового анализа. Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики, 1989. № 84.

М. А. АТАХОДЖАЕВ

ОБ ОДНОЙ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

1. Плоская задача

ПОЛНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ

Под полно-разрешимой задачей понимается задача, которая разрешима в полном множестве пространства данных [1; 2, с. 165—167].

Пусть D_j $(j=1,\ 2)$ — конечные области эвклидова пространства E^2, ограниченные соответственно контурами Ляпунова S_j $(j=1,\ 2)$, причем $D_1 \supset \bar{D}_2$.

Задача. Требуется найти функцию $u(p)$, $p=(x,\ y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\Delta^2 u(p) = 0, \quad p \in D_1, \tag{1}$$

$$u(p) = \varphi_1(p), \quad p \in S_1, \tag{2}$$

$$u(p) = \varphi_2(p), \quad p \in S_2, \tag{3}$$

где Δ — оператор Лапласа, а φ_j $(j=1,\ 2)$ — заданные непрерывные функции.

Так, если уравнение (1) эквивалентно системе

$$\begin{gathered} \Delta u(p) = u_2(p), \quad p \in D_1, \\ \Delta u_2(p) = 0, \quad p \in D_1, \end{gathered} \tag{4}$$

то его общее решение в D_1 имеет вид

$$u(p) = u_1(p) + \int_{D_1} u_2(Q) G(p, Q)\, dQ, \tag{5}$$

где

$$\Delta u_j(p) = 0, \quad p \in D_1\ (j=1,\ 2), \tag{6}$$

а $G(p,\ Q)$ — функция Грина задачи Дирихле в области D_1 для уравнения Лапласа.

Тогда в силу условий (2)—(3) и равенства (6) из (5) приходим к следующей системе интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода:

$$\int_{S_1} \mu_1(q) \frac{\partial G(p, q)}{\partial n_q} d_q S_1 + \int_{S_1} \mu_2(q) K(p, q) d_q S_1 = \varphi_j(p), \tag{7}$$

где

$$p \in S_j\ (j=1, 2); \quad K(p, q) = \int_{D_1} G(p, q) \frac{\partial G(p, q)}{\partial n_q} dQ.$$

Отметим, что задача (1)—(3), так же как и задача решения системы (7), существенно некорректна [3, с. 53].

Справедлива следующая

Теорема. Задача (1)—(3) в классе $C(\bar{D}_1) \cap C^4(D_1)$ функций полно-разрешима.

Доказательство. Для доказательства этой теоремы достаточно установить полную разрешимость системы (7).

Как известно, для полной разрешимости системы (7) необходима и достаточна тривиальность решений союзной однородной системы интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода

$$\left.\begin{aligned} &\int_{S_1} \nu_1(p) \frac{\partial G(p, q)}{\partial n_q} d_p S_1 + \int_{S_2} \nu_2(p) \frac{\partial G(p, q)}{\partial n_q} d_p S_2 = 0, \quad q \in S_1 \\ &\int_{S_1} \nu_2(p) K(p, q)\, d_p S_1 + \int_{S_2} \nu_2(p) K(p, q)\, d_p S_2 = 0, \quad q \in S_1 \end{aligned}\right| , \tag{8}$$

соответствующей однородной системе (7).

Доказательство тривиальности решения (8) основано на рассмотрении функций

$$v_1(q) = \int_{S_1} \nu_1(p) G(p, q) d_p S_1 + \int_{S_2} \nu_2(p) G(p, q) d_p S_2, \tag{9}$$

$$v_2(q) = \int_{D_1} v_1(Q) G(q, Q)\, dQ. \tag{10}$$

Можно показать, что в силу (8)

$$v_2(q) = \frac{\partial v_2(q)}{\partial n_q} = \Delta v_2(q) = \frac{\partial \Delta v_2(q)}{\partial n_q} = 0, \ q \in S_1, \tag{11}$$

$$\Delta^2 v_2(q) = 0, \quad q \in D_1 \setminus \bar{D}_2. \tag{12}$$

Из (11), (12) получим

$$v_2(q) = 0, \ \Delta v_2(q) = 0, \ q \in D_2 \setminus \bar{D}_2. \tag{13}$$

С другой стороны, из (10) имеем равенство

$$\Delta v_2(q) = v_1(q), \ q \in D_1. \tag{14}$$

Далее в силу свойства $G(q, p) = 0$, $q \in S_1$ из (9) получим

$$v_1(q) = \int_{S_1} \nu_2(q) G(p, q)\, d_p S_2. \tag{15}$$

Теперь, то что $\nu_2(p) = 0$, $p \in S_2$ следует из равенства $\int_{S_2} \nu_2(p)\, u_1(p)\, d_p S_2 = 0$ справедливого, в силу (14) и (15), для любого обобщенного решения в D_2 задачи Дирихле для уравнения Лапласа при $u_f(p) = \operatorname{sign} \nu_2(p)$, а $\nu_1(p) = 0$, $p \in S_1$ из аналогичного рассуждения в D_1 относительно (8) при $\nu_2(p) = 0$.

Следствие 1. Если S_2 — не представим в виде суммы конечного числа аналитических кривых, то решение задачи (1)—(3), кроме того, и единственно.

Докажем лемму.

Лемма. Функция, бигармоническая в области D_1, является аналитической в D_1. Действительно [4], на плоскости общее представление бигармонической функции u имеет вид

$$u(x, y) = x\Phi(x, y) + y\Psi(x, y) + P_1, \tag{16}$$

где Φ, Ψ и P_1 — гармонические функции, причем Φ и Ψ взаимно сопряженные. Теперь аналитичность бигармонической функции $u(x, y)$ в силу (4) следует из аналитичности гармонических функций (см. т. 3, § 30, гл. III [5]).

Доказательство следствия 1. Из доказанной леммы следует, что решение бигармонического уравнения $u(x, y)$ внутри области D_1 есть аналитическая функция двух вещественных переменных (x, y), аналитически продолжимая в некоторой комплексной окрестности. В теории аналитических функций нескольких комплексных переменных [6] доказана справедливость следующего утверждения.

Пусть $f(x, y)$ — аналитическая функция двух вещественных переменных в области D_1, аналитически продолжимая в некоторую комплексную окрестность области D_1. В D_3 $(\overline{D}_3 \subset D_1)$ $f(x, y) \not\equiv 0$, A — множество точек в D_3, для которых $f(x, y) = 0$. Тогда

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} \Gamma_k, \tag{17}$$

где Γ_k — аналитические кривые. Так как $S_2 \neq A$, то при $\varphi_2 = 0$ на S_2 $u(x, y) = 0$ в D_1 [7].

Замечание. Для справедливости нашего утверждения необязательно, чтобы аналитическая функция равнялась нулю на S_2.

Пусть D — звездная, относительно начала координат O, область евклидова пространства E^2, ограниченная контуром Ляпунова S, частично пересекается кругом D_R с граничной окружностью S_R.

Обозначим через S^e, S_R^e и S^i, S_R^i соответственно внешнюю и внутреннюю части S и S_R. Пусть

$$D_1 = D \cup D_R, \quad D_2 = D \cap D_R, \quad \partial D_j = S_j (j = 1, 2),$$

$$S_1 = S^e \cup S_R^e, \quad S_2 = S^i \cap S_R^i. \tag{18}$$

В частности, $D_1 = D_R$, а $D_2 = D$ или $D_1 = D$, а $D_2 = D_R$, причем

$$\overline{D}_1 \supset D_2. \tag{19}$$

Следствие 2. Задача (1) — (3) в $C(\overline{D}_1) \cap C^4(D_1)$ однозначно полно-разрешима.

При доказательстве этого следствия используем следующие две леммы [8, с. 397].

Лемма 1. Если $u_1(r, \varphi)$ и $u_2(r, \varphi)$ две гармонические функции в области D_1, то функция

$$u(r, \varphi) = u_1(r, \varphi) + (r^2 - R^2)\, u_2(r, \varphi)$$

бигармонична в области D_1.

Лемма 2. Для каждой заданной в звездной области D_1 бигармонической функции $u(r, \varphi)$ найдутся такие гармонические функции $u_1(r, \varphi)$ и $u_2(r, \varphi)$, что

$$u(r, \varphi) = u_1(r, \varphi) + (r^2 - R^2)\, u_2(r, \varphi).$$

Теперь для доказательства единственности решения задачи (1)—(3) в звездной области D_1 воспользуемся представлением

$$u(r, \varphi) = u_1(r, \varphi) + (r^2 - R^2)\, u_2(r, \varphi). \tag{20}$$

Предположим, что условиям (2), (3) удовлетворяют два решения $u_1^{(1)}$ и $u^{(2)}$ уравнения (1). Тогда разность $u = u^{(1)} - u^{(2)}$ равняется нулю на S_j $(j = 1, 2)$. Поэтому в силу представления (20) $u_1 = 0$ на S_R, а $u_2 = 0$ на S. Отсюда $u_1 = 0$ в D_R, а $u_2 = 0$ в D_2 в силу единственности решения внутренней задачи Дирихле.

Теперь равенства $u_j = 0$ $(j = 1, 2)$ в D_1 следуют из единственности решения задачи гармонического продолжения.

Отсюда в силу леммы 1 $u = 0$ в D_1, т. е. $u^{(1)} = u^{(2)}$.

Заметим, что следствие 2 справедливо и тогда, когда требование звездности D заменено аналитичностью S^i.

2. Пространственная задача

Пусть D_j $(j=1,\ 2)$ — конечные области эвклидова пространства E^m $(m \geqslant 3)$, ограниченные соответственно поверхностями Ляпунова S_j $(j=1, 2)$, причем $D_1 \supset \overline{D}_2$.

Задача. Требуется найти функцию $u(p)$, $p=(x_1, x_2, \dots, x_m) \in D_1$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\Delta^2 u(p) = 0,\ p \in D_1, \tag{1}$$

$$u(p) = \varphi_1(p),\ p \in S_1, \tag{2}$$

$$u(p) = \varphi_2(p),\ p \in S_2, \tag{3}$$

где Δ — оператор Лапласа, а φ_j $(j=1,\ 2)$ — заданные непрерывные функции.

Теорема. Задача (1)—(3) в классе $C(\overline{D}_1) \cap C^4(D_1)$ функций полно-разрешима.

Доказательство теоремы аналогично плоскому случаю.

Если S_j $(j=1,\ 2)$ — звездные относительно начала координат, то полную разрешимость задачи (1)—(3) можно показать с помощью представления [8, с. 397].

$$u(r, \theta) = u_1(r, \theta) + r^2 u_2(r, \theta), \tag{4}$$

где $(r,\ \theta)$ — сферические координаты, а u_j $(j=1,\ 2)$ — гармонические функции.

Действительно, полагая в (4)

$$u_j(p) = \int\limits_{S_1} \mu_j(q) \frac{\partial G(p, q)}{\partial n_q} d_q S_1 \ (j=1, 2)$$

в силу условий (2), (3) задачи (1)—(3), приходим к эквивалентной задаче (1)—(3) системы интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода

$$\begin{cases} \int\limits_{S_1} \mu_1(q) \dfrac{\partial G(p, q)}{\partial n_q} d_q S_1 + r_p^2 \int\limits_{S_2} \mu_2(q) \dfrac{\partial G(p, q)}{\partial n_q} d_q S_1 = \varphi_1(p),\ p \in S_1, \\ \int\limits_{S_1} \mu_1(q) \dfrac{\partial G(p, q)}{\partial n_q} d_q S_1 + r_p^2 \int\limits_{S_1} \mu_2(q) \dfrac{\partial G(p, q)}{\partial n_q} d_q S_1 = \varphi_2(p),\ p \in S_2. \end{cases} \tag{5}$$

Система интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода

$$\begin{cases} \int\limits_{S_1} \nu_1(p) \dfrac{\partial G(p, q)}{\partial n_q} d_p S_1 + \int\limits_{S_2} \nu_2(p) \dfrac{\partial G(p, q)}{\partial n_q} d_p S_2 = g_1(q),\ q \in S_1, \\ \int\limits_{S_1} r_p^2 \nu_1(p) \dfrac{\partial G(p, q)}{\partial n_q} d_p S_1 + \int\limits_{S_2} r_p^2 \nu_2(p) \dfrac{\partial G(p, q)}{\partial n_q} d_p S_2 = g_2(q),\ q \in S_1 \end{cases} \tag{6}$$

является союзной к (5) и наоборот.

Покажем тривиальность решений однородной системы, соответствующей (6). С этой целью рассмотрим функции

$$v_1(q) = \int_{S_1} \nu_1(p) G(p, q)\, d_p S_1 + \int_{S_2} \nu_2(p) G(p, q)\, d_p S_2, \tag{7}$$

$$v_2(q) = \int_{S_1} r_p^2 \nu_1(p) G(p, q)\, d_p S_1 + \int_{S_2} r_p^2 \nu_2(p) G(p, q)\, d_p S_2. \tag{8}$$

Очевидно, что

$$\Delta v_j(q) = 0, \ q \in D_1 \backslash \bar{D}_2, \tag{9}$$

и

$$v_j(q) = 0, \ q \in S_1, \tag{10}$$

$$\frac{\partial U_j(q)}{\partial n_q} = 0, \ q \in S_1 \tag{11}$$

при $g_j(q) = 0, \ q \in S_1 \ (j = 1, 2)$.

Поэтому $\nu_j = 0$ на $S_j \ (j = 1, 2)$, как в плоском случае, следует из равенств $\int_{S_j} \nu_j(p)\, u_j^{(j)}(p)\, d_p S_j = 0 \ (j = 1, 2)$ при $u_j^{(j)}(p) = \operatorname{sign} \nu_j(p) \ (j = 1, 2)$.

Пусть D — звездная область относительно внутренней точки O эвклидова пространства $E^m \ (m \geqslant 3)$, ограниченная поверхностью Ляпунова S, частично пересекается m-мерным шаром D_R с граничной сферой S_R.

Обозначим через S^e, S_R^e и S^i, S_R^i соответственно внешнюю и внутреннюю части S и S_R.

Пусть $D_1 = D \cup D_R$, $D_2 = D \cap D_R$, $\partial D_j = S_j \ (j = 1, 2)$. $S_1^e = S^e \cup S_R^e$, $S_2 = S^i \cap S_R^i$. Если $D_R \supset D$, то положим $D_1 = D_R$ и $D_2 = D$; а если $D \supset D_R$, то $D_1 = D$ и $D_2 = D_R$.

Следствие. Решение задачи (1)—(3) в D_1 кроме того и единственно.

Доказательство проводится аналогично плоскому случаю.

Пусть $D_1 = D_R$ — шар, то справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если функция $u(p)$, $p = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ удовлетворяет соотношениям

$$\|u(p)\|_{C(S_j)} \leqslant \varepsilon \ (j = 1, 2),$$

$$\left\| \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \right\|_{C(S_1)} + \|\Delta u(p)\|_{C(S_1)} \leqslant M,$$

то имеет место неравенство

$$\|u(p)\|_{C(D_R)} \leqslant 4R^2 M\tau(p, \varepsilon) + \varepsilon,$$

где τ корень уравнения

$$\mu(p, \tau)(k^{-1} + 1)\, c_1\varepsilon = M\tau.$$

Здесь k и c_1 — некоторые постоянные числа и $\tau \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. В шаре D_R для любой бигармонической функции $u(p)$ справедливо представление [8]

$$u(r, \theta) = u_1(r, 0) + (R^2 - r^2)u_2(r, \theta), \tag{12}$$

здесь u_j ($j=1, 2$) — произвольные функции, гармонические в D_R.

Благодаря представлению (12) в силу (2) и (3) находим u_j ($j=1, 2$) с помощью следующих задач:

$$\Delta u_1(p) = 0, \; p \in D_R, \tag{13}$$

$$u_1(p) = \varphi_1(p), \; p \in S_1, \tag{14}$$

$$\Delta u_2(p) = 0, \; p \in D_R, \tag{15}$$

$$u_2(p) = \varphi_3(p), \; p \in S_2, \tag{16}$$

где $\varphi_3(p) = \dfrac{\varphi_2(p) - u_1(p)}{R^2 - R_2^2(\theta)}$, а $r = R_2(\theta)$ — уравнение поверхности S_2.

Задача (13)—(14) является корректной задачей Дирихле для уравнения Лапласа в D_R, а задача (15)—(16) есть типичная некорректная задача гармонического продолжения.

Для исследования на условную корректность последней задачи определим данные Коши на сфере S_ρ шара D_ρ, лежащего внутри D_2, решив задачи Дирихле для уравнения Лапласа в D_2 с данными (8) и затем вычислив производную по r на S_ρ.

Тогда приходим к следующей задаче Коши для уравнения Лапласа в области $D_R \setminus \bar{D}_\rho$:

$$\Delta v(p) = 0, \; p \in (D_R \setminus \bar{D}_\rho), \tag{17}$$

$$v(p) = \int_{S_2} \frac{\partial G_2(p, q)}{\partial n_q} \varphi_3(q) d_q S_2, \; p \in S_\rho, \tag{18}$$

$$\frac{\partial v(p)}{\partial r} = \int_{S_2} \frac{\partial^2 G_2(Q, q)}{\partial r\, \partial n_q} \varphi_3(q)\, d_q S_2 \Big|_{Q=p}, \quad p \in S_\rho, \tag{19}$$

где G_2 — функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в D_2.

Теперь решение $u_2(p)$ задачи (15)—(16) определим следующим образом:

$$u_2(p) = \begin{cases} v(p), & p \in D_R \setminus \overline{D_\rho}, \\ \int\limits_{S_\rho} \frac{\partial G_2}{\partial n_q} \varphi_2(q)\, d_q S_2, & p \in \overline{D}_\rho. \end{cases} \tag{20}$$

Для исследования задачи (17)—(19) изложим обобщение понятия функции Карлемана. Назовем функцией Карлемана [9] для области $D = D_R \setminus \overline{D}_\rho$ и сферы S_ρ всякую функцию m-мерных векторов p, Q и скалярного параметра δ, удовлетворяющую условиям:

$$1)\ G(p, Q, \delta) = r_{pQ}^{2-m} + \widetilde{G}(p, Q, \delta),$$

где r_{pQ}^{2-m} — фундаментальное решение уравнения Лапласа, а $\widetilde{G}(p, Q, \delta)$ — гармоническая функция по координатам точки Q, регулярная и ограниченная вместе со своим градиентом в области D;

2) функция $G(p, Q, \delta)$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{|\Sigma|} \int\limits_{S_\rho} \left\{ |G| + \left| \frac{\partial G}{\partial r} \right| \right\} d\sigma_Q \leqslant \delta,$$

где Σ — площадь поверхности единичной сферы в E^m, $\frac{\partial}{\partial r}$ — производная по радиусу-вектору к сфере S_ρ и $d\sigma_Q$ — элемент площади S_ρ в точке Q. Существование функции Карлемана для произвольной области в трехмерном пространстве и для любого куска границы S_ρ, ограниченного гладкой поверхностью, и принципиальная возможность ее построения следуют из результатов работы [10].

Использовав функцию Карлемана $G(p, Q, \delta)$, получим оценки устойчивости и регуляризуем задачу (17)—(19).

Пусть

$$\mu(p, \delta) = \int\limits_{S_\rho} \left[|G| + \left| \frac{\partial G}{\partial r} \right| \right] d_Q S_\rho,$$
$$|v(p)| + \left| \frac{\partial v(p)}{\partial r} \right| \leqslant M, \quad p \in S_R. \tag{21}$$

Значение гармонической функции $v(p)$ внутри D выражается через значения v; $\frac{\partial v}{\partial r}$ на границе D, по формуле Грина:

$$v(p) = \frac{1}{|\Sigma|}\int_{s_\rho}\left\{G\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial G}{\partial r}\right\} d_q S_\rho +$$

$$+ \frac{1}{|\Sigma|}\int_{s_R}\left\{G\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial G}{\partial r} v\right\} d_q S_R, \quad (22)$$

откуда в силу (18), (19), (21) следует

$$\|v\|_{C(D)} \leqslant \mu(p, \delta)\|\varphi_3\|_{C(S_3)} c_1 + M\delta, \quad (23)$$

где постоянная c_1 зависит от

$$\max_p \int_{S_2}\left|\frac{\partial^2 G(p,q)}{\partial r\,\partial n_q}\right| d_q S_2,$$

а

$$\|\varphi_3\|_{C(S_3)} \leqslant k^{-1}(\|\varphi_1\|_{C(S_1)} + \|\varphi_2\|_{C(S_1)}), \quad k = \min_\theta R_2(\theta).$$

Полагая в (23) δ равным корню уравнения

$\mu(p, \tau)\|\varphi_3\|_{C(S_3)} c_1 = M\tau$, получаем

$$\|v\|_{C(D)} \leqslant 2M\tau\left(p, \|\varphi_1\|_{C(S_R)} \|\varphi_2\|_{C(S_1)}, \frac{c_1}{k}\right). \quad (24)$$

Сравнивая (24) с (20), для $u_2(p)$ имеем оценку

$$\|u_2(p)\|_{C(D_R)} \leqslant 2M\tau\left(p, \|\varphi_1\|_{C(S_R)}, \|\varphi_3\|_{C(S_3)}, \frac{c_1}{k}\right). \quad (25)$$

Оценку для $u(p)$ задачи (1)—(3) п. 2. получаем из (12) в силу оценки $\|u_1(p)\|_{C(D_R)} \leqslant \|\varphi_1\|_{C(S_R)}$ и (25)

$$\|u(p)\| \leqslant \|\varphi_1\|_{C(S_R)} + 4R^2 M\tau\left(p, \|\varphi_1\|, \|\varphi_2\|, \frac{c_1}{k}\right). \quad (26)$$

Отсюда следует требуемое неравенство. Из (22) и свойств функции Карлемана следует, что регуляризация с помощью функции Карлемана и оценка ее эффективности для задачи (17)—(19) проводится так же, как и для задачи аналитического продолжения [11]. В самом деле, семейство операторов, ставящих в соответствие каждой паре функций (18) и (19), определенных на сфере S_ρ, функцию $v_\alpha(p)$, определенную в D по формуле

$$v_\alpha(p) = \frac{1}{|\Sigma|}\int_{s_\rho}\left\{G\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial G}{\partial r} v\right\} d_q S_\rho,$$

является для задачи (17)—(19) регуляризирующим семейством.

Пусть теперь данные Коши для искомой функции $v(p)$ известны на S_j с точностью до ε, т. е. нам известны функции $\varphi_{j\varepsilon}$ $(j = 1, 2)$:

$$|\varphi_{j\varepsilon} - \varphi_j| \leqslant \varepsilon, \quad p \in S_j\ (j = 1, 2).$$

Далее

$$|\varphi_{3\varepsilon}(p) - \varphi_3(p)| \leqslant 2k^{-1}\varepsilon, \quad k = \min_\theta R_2(\theta),$$

$$|v_\varepsilon - v| \leqslant 2k^{-1}\varepsilon, \quad \left|\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial r}\right| \leqslant 2k^{-1} c_1 \varepsilon, \quad (27)$$

здесь c_1 — определена в (23), и имеет место (22).

Обозначим через

$$v_{\alpha\varepsilon}(p) = \frac{1}{|\Sigma|}\int_{s_\rho}\left\{G\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial r} - \frac{\partial G}{\partial r} v_\varepsilon\right\} d\sigma_q.$$

Оценим разность $v(p) - v_{\alpha\varepsilon}(p)$.

Подставляя вместо $v_{\alpha\varepsilon}(p)$ соответствующее выражение и используя (21), (22) и (27), получаем

$$|v(p) - v_{\alpha\varepsilon}(p)| \leqslant M\alpha + \mu(p, \alpha)2k^{-1} c_1 \varepsilon. \quad (28)$$

Отсюда с помощью представления (12) следует оценка эффективности для решения задачи (1)—(3) п. 2:

$$|u(p) - u_{\alpha\varepsilon}(p)| \leqslant \varepsilon + M\alpha + 2\mu(p, \alpha)k^{-1} c_1 \varepsilon; \quad (29)$$

здесь

$$u_{\alpha\varepsilon}(p) = u_{1\varepsilon}(p) + (R^2 - r^2)u_{2\alpha\varepsilon}(p).$$

Перейдем к вопросу о построении функций Карлемана. Примеры построения функции Карлемана в трехмерных односвязных областях приведены в [11], [10], [12] и [13]. Нетрудно заметить, что способ построения функции Карлемана в работах [9, 10] обобщается и для двухсвязной области.

Для этого обозначим через $\Omega(p, \eta)$ сферу с центром в точке η, проходящую через точку p.

Пусть точка $p \in D$ удовлетворяет одному из двух условий:

1) существует точка η такая, что сфера S_ρ лежит внутри $\Omega(p, \eta)$;

2) существует точка η, лежащая вне D_R такая, что сфера S_ρ лежит вне сферы $\Omega(p, \eta)$.

Рассмотрим случай, когда точка p удовлетворяет первому условию.

Разлагая функцию $r_{p,Q}^{1-m}$ в ряд Тейлора по переменным $y_j - \eta_j$, $Q = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$, получаем

$$r_{pQ}^{2-m} = \sum_{0}^{\infty} H_k(p, \eta, y-\eta), \quad (30)$$

где H_k есть однородный гармонический полином степени k по переменным $y_j = r_j (j = 1, 2, \dots, m)$. Обозначим через $G_n(p, \eta, Q)$ функцию

$$G_n(p, \eta, Q) = r_{p,Q}^{2-m} - \sum_{0}^{n} H_k(p, \eta, y-\eta).$$

Легко видеть, что функция $G_n(p, \eta, Q)$ удовлетворяет неравенству

$$|G_n| + |\text{grad } G_n| \leqslant \frac{2n^{m-2}}{|p-\eta|^{n+1}} \frac{|Q-\eta|^n}{(|p-\eta|-|Q-\eta|)^2}. \quad (31)$$

Действительно, на любом луче $Q-\eta=2\tau\nu$, где τ — скаляр, а ν — единичный вектор, сумма

$$\sum_{0}^{n} H_k(p, \eta, Q-\eta) = \sum_{0}^{n} H_k(p, \eta, \tau, \nu)$$

есть отрезок ряда Тейлора по переменной τ для аналитической функции

$$F(\tau, p, \eta, \nu) = [|p-\eta|^2 + 2\tau(p-\eta, \nu) + \tau^2]^{\frac{2-m}{2}}.$$

В силу изложенного выше неравенство (31) следует из известных оценок остаточного члена для элементарных аналитических функций. Из (31) следует, что если число n удовлетворяет неравенству

$$\Sigma_R \frac{2n^{m-2}}{|p-\eta|^{n+1}} \frac{l^n(S_R)}{(|p-\eta|-l(S_R))^{m-1}} \leqslant \delta, \quad (32)$$

где Σ_R — площадь поверхности сферы S_R, а

$$l(S_R) = \max|Q-\eta|, \quad Q \in S_R,$$

то функция $G_n(p, \eta, Q)$ является функцией Карлемана для области D и сферы S_p.

Построение функции Карлемана во втором случае производится аналогично. Функция r_{pQ}^{2-m} при этом разлагается в ряд во внешности сферы $\Omega(p, \eta)$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971. С. 104.

2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. С. 741.
3. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. С. 285.
4. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. С. 716.
5. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: ФМ, 1961. С. 400.
6. Янушаускас А. И. Аналитические и гармонические функции многих переменных. Новосибирск: Наука, СО, 1981. С. 183.
7. Лаврентьев М. М. О некоторых проблемах теории некорректных задач математического анализа. Препринт № 757. ВЦ СО АН СССР. Новосибирск. 1977. 9 с.
8. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. С. 724.
9. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: СО АН СССР, 1962. С. 91.
10. Мергелян Р. С. Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа//УМН. 1956. Т. 11. Вып. 5. С. 3—26.
11. Лаврентьев М. М. Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: НГУ, 1973. С. 74.
12. Ярмухамедов Ш. О задаче Коши для уравнения Лапласа. Докл. АН СССР. 1977. Т. 235. № 2. С. 281—285.

М. А. АТАХОДЖАЕВ, З. А. АХМЕДОВ

ОБ ОДНОЙ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

Пусть $D = \{(x, y, z): 0 < x < a, \ 0 < y < b, \ 0 < z < c\}$, $S = \partial D$, ν — внешняя нормаль к S.

Будем говорить, что непрерывная на прямоугольнике $Q = \{(x, y): 0 < x < a, \ 0 < y < b\}$ функция f принадлежит классу $H(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$, где $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ — положительные числа, не превосходящие единицы, если для любой пары точек (x_1, y_1), (x_2, y_2) из Q она удовлетворяет условиям

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leqslant k_1(y)|x_1 - x_2|^{\alpha'},$$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant k_2(x)|y_1 - y_2|^{\beta'},$$

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_1) + f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2)| \leqslant k|x_1 - x_2|^{\alpha}|y_1 - y_2|^{\beta},$$

где $k_1(y)$, $k_2(x)$ — суммируемые функции, а k — постоянная.

Задача. Требуется найти функцию $u(x, y, z)$ в D, удовлетворяющую условиям

$$\Delta^2 u(x, y, z) = 0 \text{ в } D, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta u(0,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}\Delta u(a,y,z)=0,\quad 0\leqslant y\leqslant b,\quad 0\leqslant z\leqslant c, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Delta u(x,0,z)=\frac{\partial}{\partial y}\Delta u(x,b,z)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant a,\quad 0\leqslant z\leqslant c, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u(0,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}u(a,y,z)=0,\quad 0\leqslant y\leqslant b,\quad 0\leqslant z\leqslant c, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x,0,z)=\frac{\partial}{\partial y}u(x,b,z)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant a,\quad 0\leqslant z\leqslant c, \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}u(x,y,0)=\varphi_1(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial z}u(x,y,c)=\varphi_2(x,y),\quad \begin{matrix}0\leqslant x\leqslant a,\\ 0\leqslant y\leqslant b,\end{matrix} \tag{6}$$

$$u(x,y,c_1)=\varphi_3(x,y),\quad u(x,y,c_2)=\varphi_4(x,y),\quad \begin{matrix}0\leqslant x\leqslant a,\\ 0\leqslant y\leqslant b,\end{matrix} \tag{7}$$

где $0<c_1<c_2<c$; Δ — оператор Лапласа, $\varphi_j(x,y)$ $(j=1,2,3,4)$ — заданные функции.

Легко показать, что в поставленной задаче нет непрерывно зависимости решения от данных, т. е. рассматриваемая задача является некорректной.

Плоский случай данной задачи рассмотрен в работе [1]. Справедлива следующая теорема.

Теорема. Если выполняются условия:

1) $u(x,y,z)$ бигармонична в D,

2) $u(x,y,z)$, $\frac{\partial}{\partial z}u(x,y,z)$ при $z=0$, c принадлежат класс $H(\alpha,\beta,\alpha',\beta')$, $\alpha,\beta,\alpha',\beta'>\frac{1}{2}$ являются периодическими функциями по каждой переменной,

3) $\frac{\partial}{\partial x}u(x,y,z)$, $\frac{\partial}{\partial x}\Delta u(x,y,z)$ равны нулю при $x=0$, a $0\leqslant y\leqslant b$, $0\leqslant z\leqslant c$ и

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x,y,z),\quad \frac{\partial}{\partial y}\Delta u(x,y,z)$$

равны нулю при $y=0$, b; $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant z\leqslant c$, то из равенств

$$\frac{\partial}{\partial z}u(x,y,0)=\frac{\partial}{\partial z}u(x,y,c)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant a,\quad 0\leqslant y\leqslant b, \tag{8}$$

$$u(x,y,c_1)=0,\quad u(x,y,c_2)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant a,\quad 0\leqslant y\leqslant b, \tag{9}$$

следует, что $u(x,y,z)=0$ в D.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$u(x,y,z)=\sum_{m,n=0}^{\infty}[\alpha_{m,n}A_{m,n}(z)+\beta_{m,n}B_{m,n}(z)+$$

$$+c_{m,n}\bar{A}_{m,n}(z)+d_{m,n}\bar{B}_{m,n}(z)]\cos\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y, \tag{10}$$

где

$$A_{0,0}(z)=1-\frac{3}{c^2}z^2+\frac{2}{c^3}z^3,$$

$$B_{0,0}(z)=\frac{3}{c^2}z^2-\frac{2}{c^3}z^3,$$

$$\bar{A}_{0,0}(z)=z-\frac{2}{c}z^2+\frac{1}{c^2}z^3,$$

$$\bar{B}_{0,0}(z)=\frac{1}{c^2}z^3-\frac{1}{c}z^2,$$

$$A_{m,n}(z)=L_{m,n}\{\operatorname{sh}\lambda_{m,n}c[\operatorname{sh}\lambda_{m,n}(c-z)+\lambda_{m,n}z\operatorname{ch}\lambda_{m,n}(c-z)]-$$
$$-\lambda_{m,n}c[\operatorname{sh}\lambda_{m,n}z+\lambda_{m,n}(c-z)\operatorname{ch}\lambda_{m,n}z]\},$$

$$B_{m,n}(z)=L_{m,n}[\operatorname{sh}\lambda_{m,n}c\operatorname{ch}\lambda_{m,n}z+\lambda_{m,n}(c\operatorname{ch}\lambda_{m,n}c\operatorname{ch}\lambda_{m,n}z-$$
$$-z\operatorname{sh}\lambda_{m,n}c\operatorname{ch}\lambda_{m,n}z)-c\lambda_{m,n}z\operatorname{ch}\lambda_{m,n}(c-z)],$$

$$\bar{A}_{m,n}(z)=L_{m,n}[\lambda_{m,n}c(c-z)\operatorname{sh}\lambda_{m,n}z-$$
$$-z\operatorname{sh}\lambda_{m,n}c\operatorname{sh}\lambda_{m,n}(c-z)],$$

$$\bar{B}_{m,n}(z)=L_{m,n}[(c-z)\operatorname{sh}\lambda_{m,n}c\operatorname{sh}\lambda_{m,n}z-$$
$$-\lambda_{m,n}cz\operatorname{sh}\lambda_{m,n}(c-z)],$$

$$L_{m,n}=(\operatorname{sh}^2\lambda_{m,n}c-\lambda_{m,n}c^2)^{-1},\quad \lambda_{m,n}=\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}},$$

$$\alpha_{m,n}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b u(x,y,0)\cos\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy,$$

$$\beta_{m,n}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b u(x,y,c)\cos\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy,$$

$$c_{m,n}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b\frac{\partial u(x,y,0)}{\partial z}\cos\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy,$$

$$d_{m,n}=\frac{4}{ab}\int\limits_0^a\int\limits_0^b \frac{\partial u(x,y,c)}{\partial z}\cos\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy.$$

Так как

$$u(x, y, 0),\ u(x, y, c),\ \frac{\partial}{\partial z}u(x, y, 0),\ \frac{\partial}{\partial z}u(x, y, c)$$

принадлежат классу $H(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$, $\alpha, \beta, \alpha', \beta' > \frac{1}{2}$ и являются периодическими функциями по каждой переменной, то по обобщенной теореме Бернштейна [2], двойные ряды Фурье этих функций абсолютно сходятся.

Отсюда и из (10) следует, что функция $u(x, y, z)$ бигармонична в D, удовлетворяет условию 3), $u(x, y, z)$, $\frac{\partial}{\partial z}u(x, y, z)$ непрерывны при $z=0,\ c,\ 0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b$ и

$$\lim_{z\to 0}u(x,y,z)=u(x,y,0),\quad \lim_{z\to c}u(x,y,z)=u(x,y,c),$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\partial}{\partial z}u(x,y,z)=u_z(x,y,0),\quad \lim_{z\to c}\frac{\partial}{\partial z}u(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial z}u(x,y,c).$$

Теперь из (8), (9) имеем

$$\alpha_{m,n}A_{m,n}(c_j)+\beta_{m,n}B_{m,n}(c_j)=0$$
$$j=1,2;\quad m,n=0,1,2,\dots .$$

Отсюда

$$\alpha_{m,n}=\frac{4}{ab}\int\limits_0^a\int\limits_0^b u(x,y,0)\cos\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy=0,$$

$$\beta_{m,n}=\frac{4}{ab}\int\limits_0^a\int\limits_0^b u(x,y,c)\cos\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy=0,$$

$$m,n=0,1,2,\dots .$$

Следовательно,

$$u(x,y,0)=u(x,y,c)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant a,\quad 0\leqslant y\leqslant b. \tag{11}$$

Пусть

$$D_\varepsilon=\{(x,y,z): \varepsilon<x<a-\varepsilon,\ \varepsilon<y<b-\varepsilon,\ \varepsilon<z<c-\varepsilon\},$$

$$\varepsilon>0,\quad S_\varepsilon=\partial D_\varepsilon.$$

Применяя формулу Грина

$$\iiint\limits_{D_\varepsilon} (\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_{s_\varepsilon} \left(\psi \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial\nu} \right) ds,$$

к функциям $\varphi = u$, $\psi = \Delta u$, получаем

$$\iiint\limits_{D_\varepsilon} (\Delta u)^2\, dx\, dy\, dz = \int\limits_{s_\varepsilon} \left(\Delta u \frac{\partial u}{\partial\nu} - u \frac{\partial\Delta u}{\partial\nu} \right) ds. \qquad (12)$$

Переходя к переделу при $\varepsilon\to 0$ в (12) и учитывая условие 3), (8), (11), имеем

$$\iiint\limits_{D} (\Delta u)^2\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Отсюда

$$\Delta u(x, y, z) = 0 \quad \text{в} \quad D.$$

Принимая во внимание, что

$$u(x, y, 0) = u(x, y, c) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(0, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} u(a, y, z) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \quad 0 \leqslant z \leqslant c,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x, 0, z) = \frac{\partial}{\partial y} u(x, b, z) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant z \leqslant c,$$

получаем $u(x, y, z) = 0$ в D. Теорема доказана.

Пусть функции $\varphi_j(x, y)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) известны с точностью до δ, т. е. для функций $\Phi_{j\delta}(x, y)$

$$\|\varphi_j(x, y) - \Phi_{j\delta}(x, y)\|_{L_2} \leqslant \delta, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Приведем способ построения приближенного решения поставленной задачи по приближенным данным.

В качестве приближенного решения (1)—(7) задачи возьмем функцию

$$u_\delta^\alpha(x, y, z) = \sum_{m,\, n=0}^{\infty} [\bar{\alpha}_{m,n} A_{m,n}(z) + \bar{\beta}_{m,n} B_{m,n}(z) +$$

$$+ \bar{c}_{m,n} \bar{A}_{m,n}(z) + \bar{d}_{m,n} \bar{B}_{m,n}(z)] \cos\frac{m\pi}{a} x \cos\frac{n\pi}{b} y,$$

здесь α — параметр регуляризации,

$\bar{\alpha}_{m,n}$, $\bar{\beta}_{m,n}$, $\bar{c}_{m,n}$, $\bar{d}_{m,n}$ — коэффициенты Фурье функции

$\Psi_{1\delta}^{\alpha}(x, y)$, $\Psi_{2\delta}^{\alpha}(x, y)$, $\Phi_{1\delta}(x, y)$, $\Phi_{2\delta}(x, y)$, а $\Psi_{1\delta}^{\alpha}(x, y)$, $\Psi_{2\delta}^{\alpha}(x, y)$ — приближенные решения системы интегральных уравнений первого рода

$$\sum_{k=1}^{2} \int_0^a \int_0^b P_{jk}(x, y, \xi, \eta)\Psi_k(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = f_{j\delta}(x, y), \qquad j = 1, 2; \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \tag{13}$$

где

$$P_{j1}(x, y, \xi, \eta) = \frac{4}{ab} \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{m,n}(c_j) \cos\frac{m\pi}{a} x \cos\frac{n\pi}{b} y \times$$

$$\times \cos\frac{m\pi}{a}\xi \cos\frac{n\pi}{b}\eta,$$

$$P_{j2}(x, y, \xi, \eta) = \frac{4}{ab} \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{m,n}(c_j) \cos\frac{m\pi}{a} x \cos\frac{n\pi}{b} y \times$$

$$\times \cos\frac{m\pi}{a}\xi \cos\frac{n\pi}{b}\eta,$$

$$f_{j\delta}(x, y) = \Phi_{2+j\delta}(x, y) - \sum_{m,n=0}^{\infty} [(\bar{c}_{m,n} \bar{A}_{m,n}(c_j) +$$

$$+ \bar{d}_{m,n} \bar{B}_{m,n}(c_j)] \cos\frac{m\pi}{a} x \cos\frac{n\pi}{b} y, \quad j = 1, 2.$$

Положим

$$f_\delta(x, y) = \begin{cases} f_{1\delta}(x, y), & 0 < x \leqslant a,\ 0 < y \leqslant b, \\ f_{2\delta}(x - a, y - b), & a < x < 2a,\ b < y < 2b; \end{cases}$$

$$\Psi(\xi, \eta) = \begin{cases} \Psi_1(\xi, \eta), & 0 \leqslant \xi \leqslant a,\ 0 \leqslant \eta \leqslant b, \\ \Psi_1(\xi, \eta - b), & 0 < \xi \leqslant a,\ b < \eta \leqslant 2b, \\ \Psi_2(\xi - a, \eta), & a < \xi \leqslant 2a,\ 0 \leqslant \eta < b, \\ \Psi_2(\xi - a, \eta - b), & a < \xi \leqslant 2a,\ b < \eta \leqslant 2b, \end{cases}$$

$$P(x, y, \xi, \eta) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} P_{11}(x, y, \xi, \eta), & 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant \xi \leqslant a, \\ & 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant \eta \leqslant b, \\ \frac{1}{2} P_{11}(x, y, \xi, \eta - b), & 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant \xi \leqslant a, \\ & 0 \leqslant y \leqslant b,\ b < \eta \leqslant 2b, \\ \frac{1}{2} P_{12}(x, y, \xi - a, \eta), & 0 \leqslant x \leqslant a,\ a < \xi \leqslant 2a, \\ & 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant \eta \leqslant b, \\ \frac{1}{2} P_{12}(x, y, \xi - a, \eta - b), & 0 \leqslant x \leqslant a,\ a < \xi \leqslant 2a, \\ & 0 \leqslant y \leqslant b,\ b < \eta \leqslant 2b, \\ \frac{1}{2} P_{21}(x - a, y - b, \xi, \eta), & a < x \leqslant 2a,\ 0 \leqslant \xi \leqslant a, \\ & b < y \leqslant 2b,\ 0 \leqslant \eta \leqslant b, \\ \frac{1}{2} P_{21}(x - a, y - b, \xi, \eta - b), & a < x \leqslant 2a,\ 0 \leqslant \xi \leqslant a, \\ & b < y \leqslant 2b,\ b < \eta \leqslant 2b, \\ \frac{1}{2} P_{22}(x - a, y - b, \xi - a, \eta), & a < x \leqslant 2a,\ a < \xi \leqslant 2a, \\ & b < y \leqslant 2b,\ 0 \leqslant \eta \leqslant b, \\ \frac{1}{2} P_{22}(x - a, y - b, \xi - a, \eta - b), & a < x \leqslant 2a,\ a < \xi \leqslant 2a, \\ & b < y \leqslant 2b,\ b < \eta \leqslant 2b, \end{cases}$$

Теперь систему (13) можно записать в виде одного уравнения

$$\int_0^{2a}\int_0^{2b} P(x, y, \xi, \eta)\Psi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = f_0(x, y),$$
$$0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b. \tag{14}$$

Приближенное решение уравнения (14) строится методом регуляризации А. Н. Тихонова [3].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахмедов З. А. Об одной условно-корректной задаче для бигармонического уравнения в прямоугольнике//Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1983. № 4. С. 3—8.
2. Янушаускас А. И. Кратные тригонометрические ряды. Новосибирск: СО Наука, 1986. 272 с.
3. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.

М. А. АТАХОДЖАЕВ, М. Х. ИРГАШЕВ

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПО ИХ ЗНАЧЕНИЯМ НА МНОЖЕСТВЕ, ЛЕЖАЩЕМ ВНУТРИ ОБЛАСТИ РЕГУЛЯРНОСТИ

1. Плоская задача.

Пусть в прямоугольнике

$$P = \{0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant t \leqslant T\}$$

определено решение $u\ (x,\ t) \in C\ (P)$ задачи

$$u_t - u_{xx} + a^2 u = 0,\ a = \text{const},\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1}$$

Рассмотрим лежащую в P кривую $x = \alpha(t)$ и предположим, что на этой кривой заданы значения решения $u(x,\ t)$ задачи (1)

$$u = (\alpha(t), t) = f(t). \tag{2}$$

Зададим вопрос как в ([1] с. 74).

Определяет ли функция $f(t)$ решение $u(x,\ t)$ задачи (1), (2) во всем прямоугольнике P? Для $a^2 = 0$ эта задача рассмотрена С. П. Шишатским ([2], с. 134—144).

Если $\alpha(t) = \text{const}$, то рассматриваемая задача, в частности, не обладает свойством единственности. Действительно, если $\alpha(t) = \frac{n}{m}\pi$, $0 < \frac{n}{m} < 1$, то функция

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{mk} \exp[-(m^2 k^2 + a^2)t] \sin mkx$$

с произвольными u_{mk} удовлетворяет задаче и для нее

$$f(t) = u\left(\frac{n}{m}\pi, t\right) = 0.$$

Однако этот случай является в некотором смысле исключительным, поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть вещественная на $[0, \infty)$ функция $\alpha(t)$ допускает аналитическое продолжение в область $|\arg z| < \pi\theta$, $0 < \theta < 1$, $z = t + iy$, непрерывна вплоть до границы этой области и удовлетворяет неравенству

$$|\alpha(z)| < Ce^{k|z|}, \quad k < 3 \sin \pi (\theta - 1/2).$$

Пусть в промежутке $[0, T]$

$$f(t) = u(\alpha(t),\ t) = 0.$$

Тогда, если $\alpha(t) \not\equiv \text{const}$, то $u(x,\ t) \equiv 0$ на P. Для доказательства теоремы необходимы две хорошо известные леммы из [1].

Лемма 1. Пусть функция $\alpha(z)$ аналитична в области $|\arg z| < \pi\theta$, $0 < \theta < 1$ непрерывна вплоть до границы и удовлетворяет неравенствам

$$|\alpha(z)| < Ce^{k|z|}, \quad |\alpha(z)| < Ce^{-3t}.$$

Тогда, если

$$k < 3 \sin \pi\left(\theta - \frac{1}{2}\right), \quad \text{то} \quad \alpha(z) = 0.$$

Лемма 2. Пусть вещественная и непрерывная на $[0, \infty)$. функция $\alpha(t)$ обладает свойством:

либо $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha(t)$ не существует,

либо $\left|\alpha(t) - \lim\limits_{t\to\infty} \alpha(t)\right| e^{3t} - \infty.$

Тогда для любого $k = 1, 2, \dots$ существует последовательность $\left\{t_n^{(k)}\right\}$, такая, что при $n \to \infty$ $t_n^{(k)} \to \infty$

$$\exp[-(2k+1)t_n^{(k)}] |\sin k\alpha(t_n^{(k)})|^{-1} \longrightarrow 0.$$

Доказательство теоремы 1. Так как $u(x,\ t)$ непрерывна на P, то при $t > 0$ имеет место равенство

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \exp[-(k^2 + a^2)t] \sin kx,$$

и последовательность $|u_k|$ ограничена. По условию теоремы при $0 < t \leqslant T$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \exp[-(k^2 + a^2)t] \sin k\alpha(t) = 0. \tag{3}$$

Так как $\alpha(z)$ аналитична при $t > 0$ и $\alpha(t)$ вещественна, то существует область Ω полуплоскости $t > 0$, содержащая вещественную полуось, и такая, что при $z \in \Omega$ $|\operatorname{Im} \alpha(z)| < \varepsilon$. В области $\Omega \cap \{z : t > \delta > 0\}$ ряд (3) имеет сходящуюся мажоранту

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \exp[k\varepsilon - (k^2 + a^2)\delta],$$

откуда следует аналитичность суммы ряда (3) в Ω. Следовательно, равенство (3), первоначально выполняющееся лишь при $t \in (0, T]$, имеет место при всех $t \in (0, +\infty)$.

Покажем, что функция $\alpha(t)$ удовлетворяет условию леммы 2. Действительно, если $|\alpha(t) - \lim \alpha(t)| e^{3t} < C$, то функция

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) - \lim \alpha(t)$$

удовлетворяет условию леммы 1 и, следовательно, $\bar{\alpha}(t) \equiv 0$, т. е.

$$\alpha(t) = \lim \alpha(t) = \text{const},$$

что противоречит условию теоремы.

Покажем теперь, что из равенства (3), выполняющегося при всех $t \in (0, +\infty)$, следует, что $u_k = 0$ при всех $k = 1, 2, \ldots$. Действительно, пусть $u_1 = \cdots = u_{k-1} = 0$.
Тогда из (3)

$$u_k \sin k\alpha(t) = -\sum_{i=k+1}^{\infty} u_i \exp[-(i^2 - k^2)t] \sin i\alpha(t),$$

откуда при $t > \delta$

$$\begin{gathered} |u_k| |\sin k\alpha(t)| \leqslant \\ \leqslant \exp[-(2k+1)t] \sum_{i=k+1}^{\infty} |u_i| \exp[-(i^2 - 2k - 1)t] \leqslant \\ \leqslant \exp[-(2k+1)t] \sum_{i=k+1}^{\infty} |u_i| \exp(-(i^2 - 2k - 1)\delta] = \\ = \exp[-(2k+1)t]\, C(k, \delta). \end{gathered} \tag{4}$$

Пусть $\left\{t_n^{(k)}\right\}$ — последовательность, построенная в лемме 2. Тогда из (4)

$$|u_k| \leqslant C(k, \delta) \exp[-(2k-1)t_n^{(k)}] |\sin k\alpha(t_n^{(k)})|^{-1}$$

при $n \to \infty$ получаем $u_k = 0$. Теорема доказана.

2. Пространственная задача.

Пусть в $n+1$-мерном параллелепипеде P

$$P = \{(x, t) : x \in R^n, \ 0 \leqslant x_i \leqslant \pi, \ 0 \leqslant t \leqslant T\}$$

определено решение $u(x, t) \in C(P)$ задачи

$$u_t + a^2 u - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0, \quad a = \text{const},$$

$$\begin{gathered} u(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n, t) = \\ = u(x_1, \ldots, x_{i-1}, \pi, x_{i+1}, \ldots, x_n, t), \quad 0 \leqslant x_i \leqslant \pi. \end{gathered}$$

Рассмотрим лежащую в P кривую Γ

$$\Gamma = \left\{(x,\ t) : x \in R^n,\ x_i = \alpha_i(t)\right\}$$

и предположим, что на этой кривой заданы значения решения $u(x,\ t)$

$$u(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t), t) = f(t).$$

Зададим вопрос: определяет ли функция $f(t)$ решение $u(x,\ t)$ задачи во всем $n+1$-мерном параллелепипеде P?

Если хотя бы одна из $\alpha_i(t) = \mathrm{const}$, то рассматриваемая задача, в частности, не обладает вообще свойством единственности.

Действительно, пусть $\alpha_1(t) = \frac{n}{m}\pi,\ 0 < \frac{n}{m} < 1$. Тогда функция

$$u(x,t) = \sum_{\|k\|=n}^{\infty} \left\{ u_{k'} \exp\left[-(m^2 k_1^2 + a^2)t\right] \sin(mk_1x_1) \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{i=2}^{n} \exp\left[-(k_i^2 + a^2)t\right] \sin(k_ix_i) \right\},$$

где $\|k\| = |k_1| + |k_2| + \cdots + |k_n|,\ k \in Z^n,\ k' = (k_1m,\ k_2,\ k_3, \ldots, k_n)$ с произвольными u_k, удовлетворяет задаче и для нее

$$f(t) = u\left(\frac{n}{m}\pi, \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t), t\right) = 0.$$

Но этот случай является в некотором смысле исключительным. Именно справедлива

Теорема 2. Пусть вещественные на $[0,\ +\infty)$ функции $\alpha_i(t)$ допускают аналитическое продолжение в области $|\arg z_i| < \pi\theta_i,\ 0 < \theta_i \leqslant 1,\ z_i = t + iy_i$ непрерывные вплоть до границ этих областей и удовлетворяют неравенству (iy — мнимое число)

$$|\alpha_i(z_i)| < C_i \exp k_i |z_i|, \quad k_i < \sin \pi(\theta_i - 1/2).$$

Пусть в промежутке $[0,\ T]$ $f(t) \equiv 0$.
Тогда, если $\alpha_i(t) \not\equiv \mathrm{const}$, то $u(x,\ t) \equiv 0$ на P.

Доказательство. Будем считать, что каждая функция $\alpha_i(t)$ удовлетворяет условию лемм 1 и 2.

Так как $u(x,\ t)$ непрерывна на P, то при $t>0$ имеет место равенство

$$u(x,t) = \sum_{\|k\|=n}^{\infty} \left\{ u_k \prod_{i=1}^{n} \exp\left[-(k_i^2 + a^2)t\right] \sin k_ix_i \right.$$

и последовательность $|u_k|$ ограничена.

По условию теоремы

$$\sum_{\|k\|=n}^{\infty}\left\{u_k\prod_{i=1}^{n}\exp[-(k_i^2+a^2)t]\sin k_i\alpha_i(t)\right\}=0. \qquad (5)$$

Так как $\alpha_i(z_i)$ аналитична при $t>0$ и $\alpha_i(t)$ вещественна, то существует область Ω (n-мерная) полупространства $t>0$, содержащего вещественную полуось, и такого, что при $z\in\Omega\,|\,\mathrm{Im}\alpha_i(z_i)|<\varepsilon_i$, $i=\overline{1,n}$.

В области $\Omega\cap\{z:z_i=t+iy_i,\ t>\delta>0\}$ ряд (5) имеет сходящуюся мажоранту

$$\sum_{\|k\|=n}^{\infty}|u_k|\prod_{i=1}^{n}\exp(k_i\varepsilon_i-(k_i^2+a^2)\delta,$$

откуда следует аналитичность суммы ряда (5) в Ω, следовательно, равенство (5), выполняющееся лишь при $t\in[0,T]$, существует при всех $t\in[0,+\infty]$. Покажем, что функции $\alpha_i(t)$ удовлетворяют условию леммы 2. Действительно, если

$|\alpha_i(t)-\lim\alpha_i(t)|e^{3t}<C_i$, то функция

$$\bar{\alpha}_i(t)=\alpha_i(t)-\lim\alpha_i(t)$$

удовлетворяет условиям леммы 1, и следовательно, $\alpha_i(t)\equiv 0$, т. е. $\alpha_i(t)=\lim\alpha_i(t)=\mathrm{const}$,

что противоречит условию теоремы.

Покажем, что из равенства (5), выполняющегося при всех $t\in[0,+\infty)$, следует $u_k=0$ при всех $k\in Z_+^n$.

Действительно, пусть $u_k=0$ при $k_i=1,2,\dots,k_{i-1}$. Тогда из (5)

$$u_k\prod_{i=1}^{n}\sin(k_i\alpha_i(t))=-\sum_{\|j\|=N}^{\infty}\left\{u_j\prod_{i=1}^{n}\exp[-(j_i^2-k_i^2)t]\times\right.$$

$$\left.\times\sin[j_i\alpha_i(t)]\right\}\ (\text{где } N=\|k\|+n \text{ и } \{j_i\geqslant k_i+1\}), \qquad (6)$$

отсюда при $t>\delta$

$$|u_k|\left|\prod_{i=1}^{n}\sin[k_i\alpha_i(t)]\right|\leqslant\prod_{i=1}^{n}\exp[-(2k_i+1)t]\sum_{\|j\|=N}^{\infty}|u_j|\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\exp[-(j_i^2-2k_i-1)t]\leqslant\prod_{i=1}^{n}\exp[-(2k_i+1)t]\sum_{\|j\|=N}^{\infty}|u_j|\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\exp[-(j_i^2-2k_i-1)\delta]\leqslant\prod_{i=1}^{n}\exp[-(2k_i+1)t]C_i(k_i,\delta).$$

Пусть $\left\{t_n^{(k_i)}\right\}$ — последовательность, построенная в лемме 2, тогда из (6)

$$|u_k|\leqslant\prod_{i=1}^{n}\left\{C_i(k_i,\delta)\exp[-(2k_i+1)t_n^{(k_i)}]\,|\sin k_i\alpha_i(t_n^{(k_i)})|^{-1}\right\}$$

при $n\to\infty$ получаем $u_k=0$. Теорема доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 288 с.
2. Шишатский С. П. О нулях решения смешанной задачи для параболического уравнения//Некорректные математические задачи и проблемы геофизики. Новосибирск, 1979. С. 134—144.

М. МИРСАБУРОВ, А. С. БЕРДЫШЕВ

ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ, ЛЕЖАЩИХ В РАЗЛИЧНЫХ ПОЛУПЛОСКОСТЯХ, ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ВНУТРИ ОБЛАСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть Ω — конечная односвязная область комплексной плоскости $z=x+iy$, ограниченной характеристиками

$$\left.\begin{matrix}AC_1\\BC_1\end{matrix}\right|\, x\mp\frac{2}{m_1+2}\,y^{\frac{m_1+2}{2}}=\mp 1,$$

$$\left.\begin{matrix}AC_2\\BC_2\end{matrix}\right|\, x\mp\frac{2}{m_2+2}(-y)^{\frac{m_2+2}{2}}=\mp 1$$

Уравнения

$$-|y|^m u_{xx}+u_{yy}+\frac{\alpha}{|y|^{1-\frac{m}{2}}}u_x+\frac{\beta}{y}u_y=0, \qquad (1)$$

где $m=m_1$, $\alpha=\alpha_{01}$, $\beta=\beta_{01}$ при $y>0$ и $m=m_2$, $\alpha=\alpha_{02}$, $\beta=\beta_{02}$ при $y<0$, m_i, α_{0i}, β_{0i} $(i=1,2)$ — некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям

$$m_i>-2, \quad -\frac{m_i}{2}\leqslant\beta_{0i}<2+\frac{m_i}{2}, \quad |\alpha_{0i}|<1+\frac{m_i}{2} \quad i=1,2.$$

Краевые задачи для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области, с нелокальными краевыми условиями на характеристиках, лежащих в одних и тех же полуплоскостях, рассмотрены в работах [1, 2].

В данной статье исследуются краевые задачи с нелокальными краевыми условиями на характеристиках AC_i и BC_i $(i=1, 2)$, где значение искомой функции $u(x, y)$ поточечно связывается на характеристиках, лежащих в различных полуплоскостях и примыкает к работе [4].

Конструктивные и дифференциальные свойства решения уравнения (1) существенно зависят от коэффициентов α_{0i}, β_{0i} при младших членах уравнения (1). На плоскостях параметров $\alpha_{0i}O\beta_{0i}$ $(i=1, 2)$ рассматриваются квадраты $A_iF_iB_iE_i$, ограниченные прямыми

$$A_iF_i: \ \beta_{0i}-\alpha_{0i}=2+\frac{m_i}{2}, \quad F_iB_i: \ \beta_{0i}+\alpha_{0i}=2+\frac{m_i}{2},$$

$$B_iE_i: \beta_{0i}-\alpha_{0i}=-\frac{m_i}{2}, \quad A_iE_i: \ \beta_{0i}+\alpha_{0i}=-\frac{m_i}{2}$$

и в зависимости от местонахождения точки $P_i(\alpha_{0i}, \beta_{0i})$ в этом квадрате формулируются и исследуются краевые задачи для уравнения (1).

1. Пусть $P_i(\alpha_{0i}, \beta_{0i})\in\Delta A_iB_iE_i\cup A_iE_i\cup B_iE_i\cup\{E_i\}$.

Задача 1. Найти решение

$$u(x, y)=\begin{cases} u_1(x, y), & (x, y)\in\Omega_1=\Omega\cap\{y>0\} \\ u_2(x, y), & (x, y)\in\Omega_2=\Omega\cap\{y<0\} \end{cases}$$

уравнения (1) из класса $u(x, y)\in C(\Omega)\cap C^2(\Omega_1\cup\Omega_2)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\rho_1(x)(1+x)^{\alpha_1}\mathcal{D}^{1-\beta_1}_{-1x}\,u_1[\theta_{01}(x)]+\mu_1(x)(1+x)^{\alpha_2}\times$$

$$\times\mathcal{D}^{1-\beta_2}_{-1x}\,u_2[\theta_{02}(x)]=\delta_1(x), \quad -1<x<1, \tag{2}$$

$$\rho_2(x)(1-x)^{\beta_1}\mathscr{D}_{x1}^{1-\alpha_1}u_1[\theta_{11}(x)]+\mu_2(x)(1-x)^{\beta_1}\times$$

$$\times\mathscr{D}_{x1}^{1-\alpha_1}u_2[\theta_{12}(x)]=\delta_2(x),\quad -1<x<1, \tag{3}$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y\to+0} y^{\beta_{01}}u_{1y}(x,y)=\alpha(x)\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_{02}}u_{2y}(x,y)+\rho(x),\ -1<x<1, \tag{4}$$

где $\mathscr{D}^l_{-1x}$ и $\mathscr{D}^l_{x1}$ — операторы дробного в смысле Римана — Лиувилля, интегро-дифференцирования порядка l [2], $\theta_{0i}(x)(\theta_{1i}(x))$— аффиксы точки пересечения характеристики AC_i (BC_i) с характеристикой выходящей из точки $M(x, 0)\in AB$

$$\left.\begin{matrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{matrix}\right\}=\frac{m_i+2(\beta_{0i}\pm\alpha_{0i})}{2(m_i+2)},\quad i=1,2;$$

$$\rho_i(x),\ \mu_i(x),\ \delta_i(x)\ (i=1,2),\ \alpha(x),\ \rho(x)$$

— заданные функции, причем

$$\rho_i^2(x)+\mu_i^2(x)\neq 0,$$

$$\rho_i(x),\ \mu_i(x),\delta_i(x),\ \rho(x)\in C[-1,1]\cap C^2(-1,1),$$

$$\alpha(x)\in C^1[-1,1]\cap C^3(-1,1).$$

Теорема 1. В области Ω не может существовать более одного решения задачи 1, если выполняются неравенства

$$a_i'(x)\geqslant 0,\ b_i'(x)\geqslant 0,\ i=1,2,\ \alpha(x)>0\ -1<x<1, \tag{5}$$

$$a_1(1)\leqslant 0,\ \ b_1(1)\leqslant 0,\ \ a_2(-1)\geqslant 0,\ \ b_2(-1)\geqslant 0, \tag{6}$$

где

$$a_i(x)=-\gamma_{11}\Gamma[\alpha_1+(\beta_1-\alpha_1)(i-1)]2^{\alpha_1+\beta_1-1}\frac{\rho_i(x)(\alpha(x))^{2-i}}{\omega_1(x)};$$

$$b_i(x)=-\gamma_{12}\Gamma[\alpha_2+(\beta_2-\alpha_2)(i-1)]\,2^{\alpha_2+\beta_2-1}\frac{\mu_i(x)(\alpha(x))^{2-i}}{\omega_i(x)};$$

$$\omega_i(x)=\gamma_{21}\Gamma[1-\beta_i+(\beta_i-\alpha_i)(i-1)]\left[\frac{m_i+2}{2}\right]^{1-\alpha_i-\beta_i}\times$$

$$\times \rho_i(x)(\alpha(x))^{2-i} + \gamma_{22}\Gamma[1-\beta_2+(\beta_2-\alpha_2)(i-1)]\times$$

$$\times\left[\frac{m_2+2}{2}\right]^{1-\alpha_2-\beta_2}\mu_i(x)(\alpha(x))^{i-1}\neq 0,\quad -1\leqslant x\leqslant 1 \tag{7}$$

$$\gamma_{1i} = \frac{\Gamma(\alpha_i+\beta_i)}{\Gamma(\alpha_i)\,\Gamma(\beta_i)}\,2^{1-\alpha_i-\beta_i},$$

$$\gamma_{2i} = (-1)^{i+1}\,\frac{\Gamma(2-\alpha_i-\beta_i)}{(1-\beta_{0i})\Gamma(1-\alpha_i)\Gamma(1-\beta_i)}\,2^{\alpha_i+\beta_i-1}.$$

Доказательство. Пусть

$$P_i(\alpha_{0i},\beta_{0i})\in\Delta A_iB_iE_i$$

и

$$\tau(x)=u(x,0),\ \lim_{|y|\to 0}\ |y|^{\beta_{0i}}u_{iy}(x,y)=\nu_i(x),\ i=1,2,\ -1<x<1.$$

Выписывая решение видоизменений задачи Коши в областях Ω_i $(i=1,\ 2)$ [2] и удовлетворяя краевым условиям (2), (3), получаем соотношения между $\tau(x)$ и $\nu_i(x)$, перенесенные на AB из Ω_1 и Ω_2 соответственно:

$$\nu_1(x)=a_1(x)\,\mathscr{D}^{1-\alpha_1-\beta_1}_{-1x}\tau(x)+b_1(x)\,\mathscr{D}^{1-\alpha_2-\beta_2}_{-1x}\tau(x)+f_1(x),\ -1<x<1, \tag{8}$$

$$\alpha(x)\nu_2(x)=a_2(x)\,\mathscr{D}^{1-\alpha_1-\beta_1}_{x1}\tau(x)+b_2(x)\,\mathscr{D}^{1-\alpha_2-\beta_2}_{x1}\tau(x)+f_2(x),\quad -1<x<1, \tag{9}$$

где

$$f_i(x)=\frac{1}{\omega_i(x)}[\delta_i(x)(\alpha(x))^{2-i}-\gamma_{2(3-i)}\Gamma[1-\beta_2+(\beta_2-\alpha_2)(i-1)]\times$$

$$\times\left[\frac{m_{3-i}+2}{2}\right]^{1-\alpha_{3-i}-\beta_{3-i}}\rho(x)(\mu_1(x))^{2-i}(\rho_2(x))^{i-1},\quad i=1,2. \tag{10}$$

Далее при выполнении условий (5)—(7) теоремы 1 покажем, что

$$I_1=\int_{-1}^{1}\tau(x)\,\nu_1(x)\,dx$$

не может быть положительным.

Действительно, при $\delta_i(x)=\rho(x)=0$ I_1 нетрудно преобразовать к виду [2]:

$$I_1=-\frac{\sin(\alpha_1+\beta_1)\dfrac{\pi}{2}}{\pi}\int_0^\infty t^{\alpha_1+\beta_1-1}\,dt\left\{a_1(1)\left[\left(\int_{-1}^{1}\tau_1(\xi)\cos\xi t\,d\xi\right)^2+\left(\int_{-1}^{1}\tau_1(\xi)\sin\xi t\,d\xi\right)^2\right]-\int_{-1}^{1}a_1'(x)\left[\left(\int_{-1}^{x}\tau_1(\xi)\cos\xi t\,d\xi\right)^2+\left(\int_{-1}^{x}\tau_1(\xi)\sin\xi t\,d\xi\right)^2\right]dx\right\}+$$

$$+\frac{\sin(\alpha_2+\beta_2)\dfrac{\pi}{2}}{\pi}\int_0^\infty t^{\alpha_2+\beta_2-1}\,dt\left\{b_1(1)\left[\left(\int_{-1}^{1}\tau_2(\xi)\cos\xi t\,d\xi\right)^2+\left(\int_{-1}^{1}\tau_2(\xi)\sin\xi t\,d\xi\right)^2\right]-\int_{-1}^{1}b_1'(x)\left[\left(\int_{-1}^{x}\tau_2(\xi)\cos\xi t\,d\xi\right)^2+\left(\int_{-1}^{x}\tau_2(\xi)\sin\xi t\,d\xi\right)^2\right]dx\right\}; \tag{11}$$

здесь

$$\tau_i(x)=\mathscr{D}^{1-\alpha_i-\beta_i}_{-1x}\tau(x),\ i=1,\ 2.$$

Учитывая (5)—(7), имеет $I_1\leqslant 0$.

Аналогично получим

$$I_2=\int_{-1}^{1}\tau(x)\,\alpha(x)\,\nu_2(x)\,dx\geqslant 0.$$

Отсюда, согласно условию сопряжения (4), заключаем, что

$$I_1=I_2=0.$$

Таким образом, левая часть (11) равна нулю. Поскольку слагаемые справа неположительны, то они также равны нулю. В частности,

$$\int_{-1}^{x}\tau_1(\xi)\cos\xi t\,d\xi=0,\quad \int_{-1}^{x}\tau_1(\xi)\sin\xi t\,d\xi=0.$$

Дифференцируя эти тождества по x, имеем

$$\tau_1(x)\cos xt=0,\quad \tau_1(x)\sin xt=0$$

или

$$\tau_1^2(x)(\sin^2 xt + \cos^2 xt) = 0.$$

Отсюда легко заключить, что

$$\tau(x) = \mathscr{D}_{-1x}^{\alpha_1+\beta_1-1}\tau_1(x) = 0,$$

и, следовательно, $\nu_i(x) = 0$ и $u_i(x, y) = 0$ как решение видоизмененной задачи Коши с нулевыми заданными.

В случае, когда $P_i(\alpha_{0i}, \beta_0) \in A_iE_i \cup B_iE_i \cup \{E_i\}$, теорема 1 с использованием результатов работы [2] доказывается приведенным выше способом.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть выполнено одно из следующих условий:

1) $\beta_2 + \alpha_2 > \beta_1 + \alpha_1$; функция $\rho_i(x)$ представима в виде

$$\rho_i(x) = (1+x)^{\varepsilon_1(i-1)}(1-x)^{\varepsilon_2(2-i)}\overset{*}{\rho}_i(x),\ \varepsilon_i > 0,\ i = 1, 2; \qquad (12)$$

2) $\beta_2 + \alpha_2 < \beta_1 + \alpha_1$; функция $\mu_i(x)$ представима в виде

$$\mu_i(x) = (1+x)^{\varepsilon_3(i-1)}(1-x)^{\varepsilon_4(2-i)}\overset{*}{\mu}_i(x),\ \varepsilon_3 > 0,\ \varepsilon_4 > 0,\ i = 1, 2; \qquad (13)$$

3) $\beta_2 + \alpha_2 = \beta_1 + \alpha_1$; функции $\rho_i(x)$ и $\mu_i(x)$ представимы в виде (12) и (13).

Тогда существует решение задачи 1.

Доказательство. Пусть соблюдено условие 1) теоремы 2.

С учетом (4) из (8) и (9), исключая $\nu_i(x)$, получаем

$$a_1(x)\mathscr{D}_{-1x}^{1-\alpha_1-\beta_1}\tau(x) + b_1(x)\mathscr{D}_{-1x}^{1-\alpha_2-\beta_2}\tau(x) =$$

$$= a_2(x)\mathscr{D}_{x1}^{1-\alpha_1-\beta_1}\tau(x) + b_2(x)\mathscr{D}_{x1}^{1-\alpha_2-\beta_2}\tau(x) + f_3(x), \qquad (14)$$

где

$$f_3(x) = f_2(x) - f_1(x) + \rho(x).$$

Применяя оператор $\mathscr{D}_{-1x}^{\alpha_1+\beta_1-1}$ к уравнению (14), имеем

$$\mathscr{D}_{-1x}^{\alpha_1+\beta_1-1}a_1(x)\mathscr{D}_{-1x}^{1-\alpha_1-\beta_1}\tau(x) + \mathscr{D}_{-1x}^{\alpha_1+\beta_1-1}b_1(x)\mathscr{D}_{-1x}^{1-\alpha_2-\beta_2}\tau(x) =$$

$$= \mathscr{D}_{-1x}^{\alpha_1+\beta_1-1} a_2(x)\, \mathscr{D}_{x1}^{1-\alpha_1-\beta_1} \tau(x) + \mathscr{D}_{-1x}^{\alpha_1+\beta_1-1} b_2(x) \times$$

$$\times \mathscr{D}_{x1}^{1-\alpha_2-\beta_2} \tau(x) + F(x), \qquad (15)$$

где

$$F(x) = \mathscr{D}_{-1x}^{\alpha_1+\beta_1-1} f_2(x).$$

Нетрудно проверить справедливость следующих тождеств:

$$\mathscr{D}_{-1x}^{\alpha_1+\beta_1-1} a_1(x)\, \mathscr{D}_{-1x}^{-\alpha_1-\beta_1+1} \tau(x) = a_1(x)\tau(x) + \int_{-1}^{1} A_0(x, z)\tau(z)\, dz, \qquad (16)$$

$$\mathscr{D}_{-1x}^{\alpha_1+\beta_1-1} b_1(x)\, \mathscr{D}_{-1x}^{1-\alpha_1-\beta_1} \tau(x) = \int_{-1}^{1} \frac{B_0(x, z)\tau(z)\, dz}{|x-z|^{1-(\alpha_1+\beta_1-\alpha_1-\beta_1)}}, \qquad (17)$$

$$\mathscr{D}_{-1x}^{\alpha_1+\beta_1-1} a_2(x)\, \mathscr{D}_{x1}^{1-\alpha_1-\beta_1} \tau(x) = a_2(x) \cos(\alpha_1 + \beta_1)\pi\tau(x) -$$

$$- \frac{\sin(\alpha_1 + \beta_1)\pi}{\pi} \left[\int_{-1}^{x} \frac{\tau(z)}{z-x} a_2(z) \left(\frac{z+1}{x+1} \right)^{1+\alpha_1+\beta_1} dz + \right.$$

$$\left. + \int_{x}^{1} \frac{\tau(z)}{z-x} a_2(z) \left(\frac{x+1}{z+1} \right)^{1-\alpha_1-\beta_1} dz \right] + \int_{-1}^{1} A(x, z, \theta, \chi)\tau(z) dz, \qquad (18)$$

$$\mathscr{D}_{-1x}^{\alpha_1+\beta_1-1} b_2(x)\, \mathscr{D}_{x1}^{1-\alpha_2-\beta_2} \tau(x) = \int_{-1}^{1} \frac{B(x, z, \theta)\tau(z)\, dz}{|x-z|^{1-(\alpha_2+\beta_2-\alpha_1-\beta_1)}}, \qquad (19)$$

где

$$A_0(x, z) = \begin{cases} A_{01}(x, z), & \text{при } -1 < z < x, \\ A_{02}(x, z) = 0, & \text{при } x < z < 1, \end{cases}$$

$$A_{01}(x, z) = \frac{\sin(\alpha_1 + \beta_1)\pi}{\pi} \int_{z}^{x} \left(\frac{x-t}{t-z} \right)^{1-\alpha_1-\beta_1} \frac{a_1(x)}{z-x}\, dt,$$

$$B_0(x, z) = \begin{cases} B_{01}(x, z) & \text{при } -1 < z < x, \\ B_{02}(x, z) = 0 & \text{при } x < z < 1, \end{cases}$$

$$B_{01}(x, z) = \frac{(x-z)^{\alpha_1+\beta_1-\alpha_2-\beta_2}}{\Gamma(\alpha_2+\beta_2)\Gamma(1-\alpha_1-\beta_1)} \times$$

$$\times \int_z^x \frac{(\alpha_2+\beta_2-\alpha_1-\beta_1)b_1(t) + b_1'(t)(t-x)}{(x-t)^{\alpha_1+\beta_1}(t-z)^{1-\alpha_2-\beta_2}}\, dt,$$

$$A(x, z, \theta, \chi) = \begin{cases} A_1(x, z, \theta, \chi) & \text{при } -1 < z < x, \\ A_2(x, z, \theta, 1-\chi) & \text{при } x < z < 1, \end{cases}$$

$$\theta = \begin{cases} \theta_1 = x \\ \theta_2 = z, \end{cases} \quad \chi = \alpha_1 + \beta_1,$$

$$A_i(x, z, \theta, \chi) = -\frac{\sin(\alpha_1+\beta_1)\pi}{\pi} \Bigg\{ -\frac{d}{dx} \times$$

$$\times \int_{-1}^{\theta_{3-i}} \frac{a_2(z) - a_2(t)}{(x-t)^{\alpha_1+\beta_1}(z-t)^{1-\alpha_1-\beta_1}}\, dt +$$

$$+ (-1)^i \chi a_2(z) \left(\frac{z+1}{x+1}\right)^{\alpha_1+\beta_1} \frac{1}{\theta_i+1} \Bigg\{ \psi(1) - \psi(\chi) - \ln\frac{|x-z|}{\theta_i+1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\chi)_k}{k!} \left[\psi(k+1) - \psi(k+\chi) - \ln\frac{|x-z|}{\theta_i+1} \right] \left(\frac{|x-z|}{\theta_i+1}\right)^k \Bigg\} +$$

$$+ (-1)^i a_2(z) \left(\frac{z+1}{x+1}\right)^{\alpha_1+\beta_1-(-1)^i} \left[\frac{1}{\theta_i+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\chi)_k}{k!} \times\right.$$

$$\left. \times \left(1 - \psi(k+1) + k\psi(k-\chi) + k\ln\frac{x-z}{\theta_i+1}\right) \left(\frac{|x-z|}{\theta_i+1}\right)^{k-1} \right] -$$

$$- \int_{-1}^{\theta_{3-i}} \frac{a_2'(t)\, dt}{(x-t)^{\alpha_1+\beta_1}(z-t)^{1-\alpha_1-\beta_1}} - \frac{a_2(-1)}{(1+x)^{\alpha_1+\beta_1}(1+z)^{1-\alpha_1-\beta_1}} \Bigg\},$$

$\psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции,

$$B(x,\ z,\ \theta)=\begin{cases}B_1(x,\ z,\ \theta), & \text{при } -1<z<x,\\ B_2(x,\ z,\ \theta), & \text{при } x<z<1,\end{cases}$$

$$B_i(x,z,\theta_i)=-\frac{|x-z|^{1-(\alpha_2+\beta_2-\alpha_1-\beta_1)}}{\Gamma(\alpha_2+\beta_2)\Gamma(1-\alpha_1-\beta_1)}\Big\{-\frac{d}{dx}\times$$

$$\times\int\limits_{-1}^{\theta_{3-i}}\frac{b_2(z)-b_2(t)}{(x-t)^{\alpha_1+\beta_1}(z-t)^{1-\alpha_2-\beta_2}}\,dt+$$

$$+\frac{(-1)^i b_2(z)}{|x-z|^{1-(\alpha_2+\beta_2-\alpha_1-\beta_1)}}\frac{\alpha_i+\beta_i}{\alpha_2+\beta_2}\left(\frac{1+z}{1+x}\right)^{\alpha_{3-i}+\beta_{3-i}}\times$$

$$\times F\Big[\alpha_2+\beta_2-\alpha_1-\beta_1,\quad(-1)^{i-1}(\alpha_{3-i}+\beta_{3-i}),$$

$$1-(-1)^i(\alpha_{3-i}+\beta_{3-i}),\quad\left(\frac{1+x}{1+z}\right)^{(-1)^i}\Big]-$$

$$-\int\limits_{-1}^{\theta_{3-i}}\frac{b_2(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha_1+\beta_1}(z-t)^{1-\alpha_2-\beta_2}}-\frac{b_2(-1)}{(1+x)^{\alpha_1+\beta_1}(1+z)^{1-\alpha_2-\beta_2}}\Big\},$$

$F(a,\ b,\ c,\ z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Подставляя (16)—(19) в уравнение (15), получаем следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$[a_1(x)-a_2(x)\cos(\alpha_1+\beta_1)\pi]\tau_0(x)+\frac{a_2(x)\sin(\alpha_1+\beta_1)\pi}{\pi}\times$$

$$\times\int\limits_{-1}^{1}\frac{\tau_0(z)\,dz}{z-x}+\int\limits_{-1}^{1}K(x,z)\tau_0(z)dz=F_1(x);\tag{20}$$

здесь

$$\tau_0(x)=(1+x)^{\alpha_1+\beta_1-1}\tau(x),\quad F_1(x)=(1+x)^{\alpha_1+\beta_1-1}F(x),$$

$$K(x,z)=K_1(x,z)+K_2(x,z),$$

$$\frac{\pi}{\sin(\alpha_1+\beta_1)\pi}K_1(x,\ z)=\begin{cases}\dfrac{a_2(z)\left(\dfrac{1+z}{1+x}\right)^2-a_2(x)}{x-z}, & -1<z<x,\\[2ex] \dfrac{a_2(z)-a_2(x)}{z-x}, & x<z<1,\end{cases}$$

$$K_2(x, z) = \left(\frac{1+z}{1+x}\right)^{\alpha_1+\beta_1-1}\Bigg[A_0(x, z) - A(x, z, \theta, \chi) +$$

$$+ \frac{B_0(x, z) - B(x, z, \theta)}{|z-x|^{1-(\alpha_2+\beta_2-\alpha_1-\beta_1)}}\Bigg].$$

Из (16)—(19) заключаем, что ядро $K(x, z)$ дважды непрерывно-дифференцируемо в квадрате $-1<x,\ z<1$ при $x\neq z$ и допускает оценку

$$|K(x, z)| = 0(1)|z-x|^{\alpha_2+\beta_2-\alpha_1-\beta_1-1}.$$

С учетом свойств функций $\rho_i(x)$, $\mu_i(x)$, $\delta_i(x)$ $i=1, 2$, $\alpha(x)$, $\rho(x)$ и вида $f_i(x)$ $(i=1, 2, 3)$ заключаем, что $F_1(x) \in C(-1, 1] \cap \cap C^2(-1, 1)$, причем $F_1(x)$ при $x=-1$ может обращаться в бесконечность порядка не выше $1-\alpha_1-\beta_1$, а при $x=1$ ограничена.

Уравнение (20) в силу условия

$$[a_1(x) - a_2(x)\cos(\alpha_1+\beta_1)\pi]^2 + \frac{[a_2(x)\sin(\alpha_1+\beta_1)\pi]^2}{\pi^2} \neq 0,$$

есть сингулярное интегральное уравнение нормального типа. Его индекс в силу (12) в классе решений, обращающихся в бесконечность при $x=-1$ и ограниченных при $x=1$, равен нулю. В соответствии с этим решение (20) может быть построено согласно общей теории.

Регуляризируя уравнение (20) методом Карлемана — Векуа, получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Отсюда и из единственности искомого решения задачи 1 следует существование решения задачи 1 при $\beta_2+\alpha_2 > \beta_1+\alpha_1$.

В случае $\beta_2+\alpha_2 \leqslant \beta_1+\alpha_1$ теорема 2 доказывается аналогично предыдущему случаю.

Теорема 2 доказана.

Пусть

$$P_i(\alpha_{0i}, \beta_{0i}) \in \Delta A_i B_i F_i \cup A_i F_i \cup B_i F_i \cup \{F_i\}.$$

Задача 2. Найти решение уравнения (1) из класса

$$C(\bar{\Omega}\backslash\overline{AB}) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2),$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\rho_1(x)\,\mathscr{D}^{1-\bar{\beta}_1}_{-1x}(1+x)^{1-\bar{\alpha}_1-\bar{\beta}_1} u_1[\theta_{01}(x)] +$$

$$+\mu_1(x)\,\mathscr{D}^{1-\overline{\beta}_2}_{-1x}(1+x)^{1-\overline{\alpha}_2-\overline{\beta}_2}u_2[\theta_{02}(x)]=\delta_1(x),\quad -1<x<1,$$

$$\rho_2(x)\,\mathscr{D}^{1-\overline{\alpha}_1}_{x1}(1-x)^{1-\overline{\alpha}_1-\overline{\beta}_1}u_1[\theta_{11}(x)]+$$

$$+\mu_2(x)\,\mathscr{D}^{1-\overline{\alpha}_2}_{x1}(1-x)^{1-\overline{\alpha}_2-\overline{\beta}_2}u_2[\theta_{12}(x)]=\delta_2(x),\quad -1<x<1$$

и условиям сопряжения

$$\lim_{y\to+0} y^{\beta_{01}-1}u(x,y)=\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_{02}-1}u(x,y),\quad -1\leqslant x\leqslant 1,$$

$$\overline{\nu}_2(x)=\alpha(x)\,\overline{\nu}_1(x)+\rho(x),\quad -1<x<1,$$

где

$$\overline{\nu}_i(x)=\lim_{|y|\to 0}|y|^{2-\beta_{0i}}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{u_i(x,y)-A_i[\tau(z)]}{|y|^{1-\beta_{0i}}}\right]$$

$$A_i[\tau(z)]=\gamma_i|y|^{1-\beta_{0i}}\int_{-1}^{1}\tau\left[x+\frac{2t}{m_i+2}|y|^{\frac{m_i+2}{2}}\right]\times$$

$$\times(1+t)^{\overline{\beta}_i-1}(1-t)^{\overline{\alpha}_i-1}dt,$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{\alpha}_i\\ \overline{\beta}_i\end{array}\right\}=\frac{m_i+2(2-\beta_{0i}\pm\alpha_{0i})}{2(m_i+2)},\quad \gamma_i=\frac{\Gamma(\overline{\alpha}_i+\overline{\beta}_i)\,2^{1-\overline{\alpha}_i-\overline{\beta}_i}}{\Gamma(\overline{\alpha}_i)\,\Gamma(\overline{\beta}_i)},$$

$\rho_i(x)$, $\mu_i(x)$, $\delta_i(x)$, $\alpha(x)$, $\rho(x)$ — заданные функции. Пусть $P_i(\alpha_{0i},\beta_{0i})\in A_iB_i$, т. е. $\alpha_i+\beta_i=1$, $i=1, 2$.

Задача 3. Найти решение уравнения (1) из класса $C(\overline{\Omega}\setminus\overline{AB})\cap C^2(\Omega_1\cup\Omega_2)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\rho_1(x)\,\mathscr{D}^{\alpha_1}_{-1x}\{u[\theta_{01}(x)]-A_1^-[\tau(\theta_{01})]\}+$$

$$+\mu_1(x)\,\mathscr{D}^{\alpha_2}_{-1x}\{u_2[\theta_{02}(x)]-A_2^-[\tau(\theta_{02})]\}=\delta_1(x),\quad -1<x<1,$$

$$\rho_2(x)\,\mathscr{D}^{1-\alpha_1}_{x1}\{u_1[(\theta_{11}(x)]-A_1^+[\tau(\theta_{11})]\}+$$

$$+\mu_2(x)\,\mathscr{D}^{1-\alpha_1}_{x1}\{u_2[\theta_{12}(x)]-A_2^{+}[\tau(\theta_{12})]\}=\delta_2(x),\quad -1<x<1$$

и условиям сопряжения:

$$\lim_{y\to-0}\frac{u(x,y)}{\ln(-y)^{\frac{m_2+2}{2}}}=\lim_{y\to+0}\frac{u(x,y)}{\ln y^{\frac{m_1+2}{2}}}=\tau(x),\quad -1\leqslant x\leqslant 1,$$

$$\lim_{y\to-0}(-y)\ln^2(-y)^{\frac{m_2+2}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{u(x,y)-A_2[\tau(z)]}{\ln(-y)^{\frac{m_2+2}{2}}}\right]=$$

$$=\alpha(x)\lim_{y\to+0}y\ln^2 y^{\frac{m_1+2}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{u(x,y)-A_1[\tau(z)]}{\ln y^{\frac{m_1+2}{2}}}\right]+\rho(x),$$

где $\quad -1<x<1,$

$$A_i^{\mp}[\tau(z)]=\frac{\sin\alpha_i\pi}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\tau\left[x+\frac{2t}{m_i+2}|y|^{\frac{m_i+2}{2}}\right](1+t)^{-\alpha_i}(1-t)^{\alpha_i-1}\times$$

$$\times\ln\frac{1\mp t}{2}\,dt,$$

$$A_i[\tau(z)]=\frac{\sin\alpha_i\pi}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\tau\left[x+\frac{2t}{m_i+2}|y|^{\frac{m_i+2}{2}}\right](1+t)^{-\alpha_i}(1-t)^{\alpha_i-1}\times$$

$$\times\ln\left[\frac{1-t^2}{m_i+2}|y|^{\frac{m_i+2}{2}}\right]dt,\ i=1,2,$$

$\rho_i(x)$, $\mu_i(x)$, $\delta_i(x)$, $\alpha(x)$, $\rho(x)$ — заданные функции.

Задачи 2 и 3 с использованием результатов работ [2, 3] исследуются аналогично задаче 1.

Замечание. С использованием конструктивных свойств решения уравнения (1) вблизи линии вырождения, можно рассматривать различные варианты задач 1, 2, 3, в которых точки $P_i(\alpha_{0i},\beta_{0i})$ расположены произвольно в рассматриваемых квадратах.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кумыкова С. К. Краевая задача со смещением для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения//Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16. № 1. С. 93—104.

2. Салахитдинов М. С., Мирсабуров М. О некоторых краевых задачах для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области// Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17. № 1. С. 129—136.
3. Салахитдинов М. С., Мирсабуров М. О некоторых краевых задачах со смещением для уравнения гиперболического типа вырождающегося на границе//Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1980. № 1. С. 16—21.
4. Мирсабуров М., Бердышев А. С. Задачи с нелокальными краевыми условиями на характеристиках, лежащих в различных полуплоскостях для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области, Докл. АН УзССР. 1988. № 5. С. 3—5.

Э. А. ШАМСИЕВ

К ПОСТРОЕНИЮ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ КРУГА

Рассмотрим в двумерной евклидовой плоскости R^2 правильный m-угольник с центром в начале координат. Тогда все ортогональные преобразования m-угольника в себя образуют группу G_m, кольцо инвариантных форм которой порождается базисными инвариантными формами степеней 2 и m [1]. Обозначим эти формы через $\Pi_2(x)$ и $\Pi_m(x)$. Ввиду ортогональности группы G_m очевидно, что $\Pi_2(x) = x_1^2 + x_2^2$.

Ниже указывается способ построения кубатурных формул различных степеней точности для круга $B_2 = \left\{x \in R^2 \middle| x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\right\}$, инвариантных относительно групп G_{4p+2} и G_{4p} [2].

1. Кубатурная формула $(4p + 4s + 1)$-й степени точности $(0 < s \leqslant p)$.

Расположим вершины правильного $(4p+2)$-угольника в точках $a^{(k)} = \left(\cos \frac{k\pi}{2p+1}, \sin \frac{k\pi}{2p+1}\right)$ и обозначим через $b^{(k)}$ проекции середин ребер $(4p+2)$-угольника на единичную окружность, т. е.

$$b^{(k)} = \left(\cos \frac{2k-1}{4p+2}\pi, \sin \frac{2k-1}{4p+2}\pi\right), \quad k = \overline{1, 4p+2}.$$

Очевидно, что $\Pi_2(a^{(k)}) = \Pi_2(b^{(k)}) = 1$. Чтобы найти $\Pi_{4p+2}(a^{(k)})$ и $\Pi_{4p+2}(b^{(k)})$, сравним вторые базисные инвариантные формы групп G_{2p+1} и G_{4p+2}. Так как вершины правильного $(2p+1)$-угольника расположены симметрично относительно оси $x_2 = 0$, то многочлен $\Pi_{2p+1}(x)$ имеет вид

$$\Pi_{2p+1}(x) = x_1^{2p+1} + \sum_{j=1}^{p} C_j x_1^{2p+1-2j} x_2^{2j},$$

где C_j константы. Учитывая, что группа G_{4p+2} получается из группы G_{2p+1} добавлением преобразования центральной симметрии относительно начала координат, находим что многочлен $\Pi^2_{2p+1}(x)$ инвариантен относительно G_{4p+2}, т. е. $\Pi_{4p+2}(x) = \Pi^2_{2p+1}(x)$. Отсюда следует, что $\Pi_{4p+2}(a^{(k)}) = 1$, $\Pi_{4p+2}(b^{(k)}) = 0$, так как инвариантный многочлен в точках одной орбиты принимает одинаковые значения, а у нас $a^{(4p+2)} = (1, 0)$, $b^{(p+1)}(0, 1)$

Выпишем все линейно независимые инвариантные многочлены группы G_{4p+2} степени не выше $4p + 4s + 1$:

$$\Pi_2, \Pi_2^2, \ldots, \Pi_2^{2p+2s}, \Pi_{4p+2}, \Pi_{4p+2}\,\Pi_2, \ldots, \Pi_{4p+2}\,\Pi_2^{2s-1}. \tag{1}$$

Перейдя в полярные координаты, вычислим значения интегралов от инвариантных многочленов (1) по единичному кругу:

$$\int_{B_2} \Pi_2^q(x)dx = \int_0^1 r^{2q+1}\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\,\frac{1}{2q+2} = \frac{\pi}{q+1},$$

$$\int_{B_2} \Pi_{4p+2}(x)\Pi_2^q(x)dx = \frac{1}{2}\int_{B_2} \Pi_2^{2p+1}(x)\Pi_2^q(x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 r^{4p+2+2q+1}\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{4p+2q+4},$$

где $q = 0, 1, 2, \ldots$. При вычислении второго интеграла мы воспользовались обстоятельством, что многочлен

$$\Pi_{4p+2}(x) + \Pi_{4p+2}(gx), \quad g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

инвариантен относительно группы G_{8p+4}, откуда следует

$$\Pi_{4p+2}(x) + \Pi_{4p+2}(gx) = \Pi_2^{2p+1}(x).$$

Кубатурную формулу $(4p+4s+1)$-й степени точности, инвариантную относительно группы G_{4p+2}, ищем в виде

$$\int_{B_2} f(x)dx \cong A_0 f(0, 0) + \sum_{i=1}^{s} A_i \sum_{k=1}^{4p+2} f(a_i a^{(k)}) + \sum_{j=1}^{p+s} B_j \sum_{k=1}^{4p+2} f(b_j b^{(k)}), \tag{2}$$

где A_0, A_i, a_i, B_j, b_j — подлежащие определению параметры. Требование, чтобы кубатурная формула (2) была точна для константы и многочленов (1), приводит к следующей системе нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} A_0 + (4p+2)\left[\sum\limits_{i=1}^{s} A_i + \sum\limits_{j=1}^{p+s} B_j\right] = \pi, \\ (4p+2)\left[\sum\limits_{i=1}^{s} a_i^{2q} A_i + \sum\limits_{j=1}^{p+s} b_j^{2q} B_j\right] = \frac{\pi}{q+1}, \quad q = \overline{1,\, 2(p+s)}, \\ (4p+2)\sum\limits_{i=1}^{s} a_i^{2q} A_i = \frac{\pi}{2q+2}, \quad q = 2p+1, \dots, 2(p+s). \end{cases}$$

Делая замену $t_i = a_i^2$, $D_i = \frac{(8p+4)}{\pi} a_i^{4p+2} A_i$, из последних $2s$ уравнений получаем систему

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{s} D_i = \frac{1}{2p+2}, \\ \sum\limits_{i=1}^{s} t_i^q D_i = \frac{1}{2p+2+q}, \quad q = \overline{1,\, 2s-1}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что t_i и D_i являются параметрами квадратурной формулы Гауссова типа для отрезка [0, 1] с весом t^{2p+1}:

$$\int\limits_0^1 t^{2p+1}\psi(t)dt \approx \sum_{i=1}^{s} D_i \psi(t_i).$$

Следовательно, $a_i = \sqrt{t_i}$, $A_i = \frac{\pi}{(8p+4)\, t_i^{2p+1}} D_i$, $i = \overline{1,\, s}$. Параметры B_j и b_j определяются из системы

$$\begin{cases} (4p+2)\sum\limits_{j=1}^{p+s} b_j^{2q} B_j = \frac{\pi}{q+1} - \frac{1}{2}\pi \sum\limits_{i=1}^{s} t_i^{q-1-2p} D_i, \quad q = \overline{1,\, 2p}, \\ (4p+2)\sum\limits_{j=1}^{p+s} b_j^{2q} B_j = \frac{\pi}{2q+2}, \quad q = 2p+1, \dots, 2(p+s), \end{cases}$$

которая легко решается методом Прони [3, с. 280]. Коэффициент A_0 получаем из равенства

$$A_0 = \pi - \frac{1}{2}\pi \sum_{i=1}^{s} t_i^{-1-2p} D_i - (4p+2)\sum_{j=1}^{p+s} B_j.$$

Замечание.

Так как

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{i=1}^{s} t_i^{q-1-2p} D_i = \int\limits_0^1 t^{2p+1}\, t^{q-1-2p}\, dt = \int\limits_0^1 t^q\, dt = \frac{1}{q+1},$$

то можно надеяться, что правые части уравнений последней системы являются положительными числами, откуда следует положительность параметров B_j и b_j. Как показывают вычисления, уже при $p=1$ все параметры кубатурной формулы вещественны и положительны. Число $N=(4p+2)(p+2s)+1$ узлов кубатурной формулы (2) на $2(p^2-s^2-p+2ps)$ единиц превышает соответствующую нижнюю границу для числа узлов. Приведем значения параметров кубатурной формулы для $p=1$:

$$A_0=\frac{251}{2304}\pi,\ A_1=\frac{125}{3072}\pi,\ B_1=\frac{110297+5713\sqrt{111}}{2045952}\pi,$$

$$B_2=\frac{110297-5713\sqrt{111}}{2045952}\pi,\ a_1=\frac{2}{\sqrt{5}},\ b_1=\sqrt{\frac{96-4\sqrt{111}}{155}},$$

$$b_2=\sqrt{\frac{96+4\sqrt{111}}{155}}.$$

Последняя формула ранее получена методом неопределенных параметров в несколько ином виде [2, с. 304].

2. Кубатурная формула $(4p+4s-1)$-й степени точности. Группа G_{4p} дает возможность построить кубатурную формулу $(4p+4s-1)$-й степени точности вида

$$\int f(x)dx\simeq\sum^{p+s}A_i\sum^{4p}f(a_ia^{(k)})+\sum^{s}B_j\sum^{4p}f(b_jb^{(k)}),\tag{3}$$

где $a^{(k)}$ — вершины правильного $4p$-угольника, $b^{(k)}$ — проекции середин ребер на единичную окружность. В отличие от кубатурной формулы (2), здесь сначала определяются параметры, соответствующие точкам $b^{(k)}$, так как $\Pi_{4p}(a^{(k)})=0$.

Число $N=4p^2+8ps$ узлов кубатурной формулы (3) на $2(p^2-s^2+2ps-p-s)$ единиц превышает соответствующую нижнюю границу для числа узлов. Приведем значения параметров формулы (3) для $p=1$ [2, с. 300]:

$$A_1=\frac{551+41\sqrt{29}}{6264}\pi,\ A_2=\frac{551-41\sqrt{29}}{6264}\pi,\ B_1=\frac{2}{27}\pi,$$

$$a_1=\sqrt{\frac{27-3\sqrt{29}}{52}},\ a_2=\sqrt{\frac{27+3\sqrt{29}}{52}},\ b_1=\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

В заключение отметим работу [4], в которой изучаются кубатурные формулы для круга, по существу инвариантные относительно группы G_m при различных значениях m. Хотя и там в качестве узлов выбирают множества вершин и проекций середин ребер m-угольника; соотношение их количеств таково, что система для определения параметров не разбивается на подсистемы, к которым можно применять метод Прони.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Coxeter H. S. M. The product of the generators of a finite group generated by reflections.— Duke//Math. I. 1951. Vol. 18. N 4. P. 765—782.
2. Мысовских И. П. Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981. 336 с.
3. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.
4. Хеккер В. О построении кубатурных формул для круга//Методы вычислений. Л., 1976. Вып. 10. С. 73—79.

Ю. П. АПАКОВ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} U_{xx} - U_y + U_{zz}, & x > 0, \\ U_{xx} - (-x)^m (U_{yy} + U_{zz}), & x < 0, \quad m > 0 \end{cases} \tag{1}$$

в бесконечной области Ω трехмерного пространства переменных x, y, z, ограниченной поверхностью $S = \bigcup\limits_{n=1}^{5} S_n$, где

$$S_1 : y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant h > 0,\ -\infty < z < +\infty,$$

$$S_2 : y - \frac{2}{m+2}(-x)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad -\infty < z < +\infty,$$

$$S_3 : y + \frac{2}{m+2}(-x)^{\frac{m+2}{2}} = 1, \quad -\infty < z < +\infty,$$

$$S_4 : y = 1,\ 0 \leqslant x \leqslant h,\ -\infty < z < +\infty,$$

$$S_5 : x = h,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ -\infty < z < +\infty.$$

Пусть

$$\Omega_1 = \Omega \cap (x > 0), \quad \Omega_2 = \Omega \cap (x < 0),$$

$$D = \Omega \cap (z = 0), \; D_k = \Omega_k \cap (z = 0), \; k = 1, 2,$$

$$J = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2, \; \overline{AB} = J \cap (z = 0), \; \sigma_n = S_n \cap (z = 0).$$

Изучим следующую задачу.

Задача А. Найти регулярное решение уравнения (1) в областях Ω_k ($k=1, 2$), обладающее следующими свойствами:

1) $U(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}_k) \cap \left[C^1(\Omega_1 \cup J) \cup C^1(\Omega_2 \cup \bar{J})\right], \quad k = 1, 2,$

2) принимает заданные значения

$$U_{|S_1} = \Phi_1(x, z), \quad 0 \leqslant x \leqslant h, \quad -\infty < z < +\infty,$$

$$U_{|S_2} = \Psi(y, z), \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}, \quad -\infty < z < +\infty, \tag{2}$$

$$U_{|S_3} = \Phi_2(y, z), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \quad -\infty < z < +\infty,$$

$$\lim_{z \to \pm\infty} U(x, y, z) = \lim_{z \to \pm\infty} U_z(x, y, z) = 0, \tag{3}$$

3) удовлетворяют условиям склеивания

$$U(-0, y, z) = \alpha U(+0, y, z),$$

$$U_x(-0, y, z) = b(y) U_x(+0, y, z) + c(y) U(+0, y, z) +$$

$$+ P(y, z), \quad (y, z) \in J, \quad \alpha > 0, \tag{4}$$

$$\lim_{z \to \pm\infty} P(y, z) = 0.$$

Следуя идее А. В. Бицадзе [1], решение поставленной задачи будем искгть в классе функций, представимых интегралом Фурье

$$U(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y, \lambda) e^{-i\lambda z} \, d\lambda. \tag{5}$$

Пользуясь известной леммой [2, 3], сводим поставленную задачу к следующей плоской задаче для уравнения:

$$0=\begin{cases} u_{xx}-u_y-\lambda^2 u, & x>0,\\ U_{xx}-(-x)^m u_{yy}+\lambda^2(-x)^m u, & x<0. \end{cases} \tag{6}$$

Задача A_λ. Найти регулярное решение уравнения (6) в областях D_k ($k=1, 2$) со следующими свойствами:

1) $U(x, y, \lambda)\in C\left(\overline{D}_k\right)\cap\left[C^1\left(D_1\cup J\right)\cup C^1\left(D_2\cup\overline{J}\right)\right]$, $k=1, 2$;

2) принимает заданные значения

$$u_{|\sigma_1}=\varphi_1(x,\lambda),\quad 0\leqslant x\leqslant h,\quad -\infty<\lambda<+\infty,$$

$$u_{|\sigma_0}=\psi(y,\lambda),\quad 0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2},\quad -\infty<\lambda<+\infty, \tag{7}$$

$$u_{|\sigma_2}=\varphi_2(y,\lambda),\quad 0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2},\quad -\infty<\lambda<+\infty;$$

3) удовлетворяет условиям склеивания

$$u(-0,y,\lambda)=\alpha u(+0,y,\lambda),$$
$$u_x(-0,y,\lambda)=b(y)u_x(+0,y,\lambda)+c(y)u(+0,y,\lambda)+p(y,\lambda), \tag{8}$$

где

$$\varphi(x,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x,z)e^{i\lambda z}\,dz,$$

$$\psi(y,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi(y,z)e^{i\lambda z}\,dz,$$

$$p(y,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}P(y,z)e^{i\lambda z}\,dz,$$

Функции $b(y)$, $c(y)$, $p(y, \lambda)$ — непрерывны, $\varphi(x, \lambda)$ — дважды непрерывно дифференцируема по x, $\psi(y, \lambda)$ — непрерывно дифференцируема по y до четвертого порядка включительно, кроме того выполняются условия

$$\psi(0,\lambda)=\alpha\varphi(0,\lambda),\quad \varphi'(0,\lambda)=0, \tag{9}$$

а также

$$b(y) > 0, \quad c(y) \leqslant 0, \quad p(y, \lambda) \leqslant 0. \tag{10}$$

Итак, доказательство существования единственного решения задачи A сводится к доказательству разрешимости задачи A при любом действительном значении параметра λ.

Отметим, что при α, $b(y) = 1$, $c(y)$, $p(y, \lambda) = 0$, поставленная задача изучена в [3].

В области D_2 для коэффициентов уравнения (6) известные условия принципа экстремума для гиперболических уравнений, указанные в работе [4], не выполняются.

Но, если ввести новую функцию

$$u(x, y, \lambda) = \exp(|\lambda| y) v(x, y, \lambda), \tag{11}$$

то уравнение (6) переходит в уравнение

$$0 = \begin{cases} L_1[v] \equiv v_{xx} - v_y - |\lambda|(1 + |\lambda|) v, \text{ в } D_1, \\ L_2[v] \equiv -(-x)^m v_{yy} + v_{xx} - 2|\lambda|(-x)^m v_y, \text{ в } D_2 \end{cases} \tag{12}$$

и уже для его коэффициентов в области D_2 выполняются указанные условия теоремы 2′ [4].

Для функции $v(x, y, \lambda)$ условия склеивания (8) имеют вид

$$v(-0, y, \lambda) = \alpha v(+0, y, \lambda),$$

$$v_x(-0, y, \lambda) = b(y) v_x(+0, y, \lambda) + c(y) v(+0, y, \lambda) + \bar{p}(y, \lambda), \tag{13}$$

$$\bar{p}(x, \lambda) = \exp(-|\lambda| y) p(y, \lambda).$$

Если положить

$$\omega(x, y, \lambda) = \begin{cases} \alpha v(x, y, \lambda) = \omega^+(x, y, \lambda), \ (x, y) \in D_1, \\ v(x, y, \lambda) = \omega^-(x, y, \lambda), \ (x, y) \in D_2, \end{cases} \tag{14}$$

то функция $\omega(x, y, \lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$0 = \begin{cases} L_1[\omega] \text{ в } D_1, \\ L_2[\omega] \text{ в } D_2, \end{cases} \tag{15}$$

и условиям склеивания

$$\omega(-0, y, \lambda) = \omega(+0, y, \lambda)$$

$$\omega_x(-0, y, \lambda) = \frac{b(y)}{\alpha} \omega_x(+0, y, \lambda) + \frac{c(y)}{\alpha} \omega(+0, y, \lambda) + \bar{p}(y, \lambda). \tag{16}$$

Принцип максимума. Пусть $\omega(x, y, \lambda)$ обладает свойствами:

1) $\omega(x, y, \lambda) \in C(\bar{D}_k)$, $(k = 1, 2)$,

2) выполняются условия склеивания (16),

3) удовлетворяет неравенствам

$$L_1[\omega] \geqslant 0 \text{ в } D_1, \quad L_2[\omega] \geqslant 0 \text{ в } D_2$$

4)

$$\omega_x[x, (1-2\beta)(-x)^{\frac{1}{1-2\beta}}, \lambda] - (-x)^{\frac{2\beta}{1-2\beta}} \omega_y[x, (1-2\beta)(-x)^{\frac{1}{1-2\beta}} \lambda] \geqslant 0, \tag{17}$$

$$-\left[\frac{1}{2(1-2\beta)}\right]^{1-2\beta} \leqslant x \leqslant 0, \quad \beta = \frac{m}{2(m+2)},$$

т. е. является не убывающей функцией от x на характеристике σ_2. Тогда максимум функции $\omega(x, y, \lambda)$ в области D достигается на $\bar{\sigma}_1 \cup \bar{\sigma}_5$.

Доказательство. В области D_2 для уравнения (15) выполняются все условия теоремы, указанной в работе [4, см. § 4, теорема 2′], поэтому функция $\omega(x, y, \lambda)$ принимает свой максимум в некоторой точке $(0, y_0) \in AB$ и в этой точке $\omega_x(-0, y_0, \lambda) > 0$.

С другой стороны, в силу результатов работы [5, 6] следует, что $\omega_x(+0, y_0, \lambda) < 0$. Из условия склеивания (16) с учетом (10) имеем $\omega_x(-0, y_0, \lambda) \leqslant 0$ это противоречит полученному выше неравенству $\omega_x(-0, y_0, \lambda) > 0$. Итак, функция $\omega(x, y, \lambda)$ своего максимума на $(AB]$ не достигает.

Из принципа максимума для гиперболических [4] и параболических [5] уравнений следует, что $\omega(x, y, \lambda)$ своего максимума в $\bar{D}$ достигает на $\bar{\sigma}_1 \cup \bar{\sigma}_5$.

В области D рассмотрим функцию

$$W(x, y, \lambda) = \pm\, \omega(x, y, \lambda) + \rho(x, y, \lambda), \tag{18}$$

где $\omega(x, y, \lambda)$ — регулярное решение уравнения (15)

$$\rho(x, y, \lambda) = M \exp[4(1 - |\lambda|)x + 2y],$$

M — неотрицательное постоянное.

Можно показать, что $L_1[W] \geqslant 0$ в области D_1 и $L_2[W] \geqslant 0$ в D_2.

Если положим

$$M = \max_{\sigma_2} |\omega_x[x, (1-2\beta)(-x)^{\frac{1}{1-2\beta}}, \lambda] - \\ - (-x)^{\frac{2\beta}{1-2\beta}} \omega_y[x, (1-2\beta)(-x)^{\frac{1}{1-2\beta}}, \lambda]|, \tag{19}$$

то функция $W(x, y, \lambda)$ удовлетворяет условию (17). Следовательно, согласно принципа максимума, функция $W(x, y, \lambda)$ достигает своего максимума на $\bar{\sigma}_1 \cup \bar{\sigma}_5$, откуда

$$W(x, y, \lambda) \leqslant \max_{\bar{\sigma}_1 \cup \bar{\sigma}_5} |W(x, y, \lambda)|. \tag{20}$$

С учетом (18), из (20) имеем

$$|\omega(x, y, \lambda)| \leqslant \max_{\bar{\sigma}_1 \cup \bar{\sigma}_5} |\omega(x, y, \lambda)| + 2M \exp[2+4(1+|\lambda|)h]. \tag{21}$$

Так как

$$\omega(x, y, \lambda) = \exp(-|\lambda| y) \begin{cases} \alpha u(x, y, \lambda) \text{ в } D_1, \\ u(x, y, \lambda) \text{ в } D_2, \end{cases} \tag{22}$$

то из (19), переходя к функции $u(x, y, \lambda)$, находим

$$M \leqslant M_1 [\max |\psi'_y(y, \lambda)| + |\lambda| \max |\psi(y, \lambda)|], \tag{23}$$

где

$$M_1 = \left[\frac{1}{2(1-2\beta)}\right]^{2\beta}.$$

Из (21) с учетом (22) и (23) получим

$$|u(x, y, \lambda)| \leqslant M_2 \{\exp(|\lambda|)[\max |\varphi_1(x, \chi)| + \max \varphi_2(y, \lambda)|] +$$

$$+ M_3 \exp(5h|\lambda|)[\max |\psi'_y(y, \lambda)| + |\lambda| \max |\psi(y, \lambda)|]\}, \tag{24}$$

где

$$M_2 = \max\left\{\alpha, \frac{1}{\alpha}\right\}, \quad M_3 = 2M_1 \exp(2+4h).$$

Из оценки (24) следует единственность решений задач A_λ и A.

Примем обозначения

$$\begin{aligned} u(+0, y, \lambda) &= \tau_1(y, \lambda), \quad u_x(+0, y, \lambda) = \nu_1(y, \lambda), \\ u(-0, y, \lambda) &= \tau_2(y, \lambda), \quad u_x(-0, y, \lambda) = \nu_2(y, \lambda). \end{aligned} \tag{25}$$

В области D_1 решение задачи

$$u_{xx} - u_y - \lambda^2 u = 0,$$

$$u_x(0, y, \lambda) = \nu_1(y, \lambda), \quad u(x, 0, \lambda) = \varphi_1(y, \lambda), \quad u(h, y, \lambda) = \varphi_2(y, \lambda)$$

выписывается в виде

$$u(x, y, \lambda) = \int_0^1 \varphi_1(\xi, \lambda) \exp(-\lambda^2 y) G(x, y; \xi, 0)\, d\xi -$$

$$-\int_0^y \exp[\lambda^2(\eta-y)]\,\nu(\eta,\lambda)G(x,y;0,\eta)\,d\eta-$$

$$-\int_0^y \exp[\lambda^2(\eta-y)]\varphi_2(\eta,\lambda)\,G_\xi(x,y;1,\eta)d\eta,$$

где

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi-4n)^2}{4(y-\eta)}\right]-\right.$$

$$-\exp\left[-\frac{(x+\xi-4n)^2}{4(y-\eta)}\right]-\exp\left[-\frac{(x-\xi-2-4n)^2}{4(y-\eta)}\right]-$$

$$\left.-\exp\left[-\frac{(x+\xi-2-4n)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\}-$$

— функция Грина [7].

Полагая $x=0$, получаем основное функциональное соотношение между функциями $\tau_1(y,\lambda)$ и $\nu_1(y,\lambda)$, принесенное из области D_1:

$$\tau_1(y,\lambda)=-\int_0^y G(0,y,0,\eta)\exp[\lambda^2(\eta-y)]\nu_1(\eta,\lambda)d\eta+A(y,\lambda); \tag{26}$$

здесь

$$G(0,y,0,\eta)=\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}+\frac{k_0(y,\eta)}{\sqrt{\pi(y-\eta)}},$$

$$A(y,\lambda)=\int_0^1 \varphi_1(\xi,\lambda)\exp(-\lambda^2 y)G(0,y,\xi,\lambda)d\xi-$$

$$-\int_0^y \exp[\lambda^2(\eta-y)]\varphi_2(\eta,\lambda)G_\xi(0,y,\xi,0)d\xi.$$

Соотношение между функциями $\tau_1(y,\lambda)$ и $\nu_2(y,\lambda)$, принесенное из области D_2, представляется в виде [8]

$$\tau_2(y,\lambda)=\gamma_1\int_0^y\frac{\nu_2(t,\lambda)\,dt}{(y-t)^{2\beta}}+\gamma_1\int_0^y K(y,t,\lambda)\nu_2(t,\lambda)\,dt+F(y,\lambda), \tag{27}$$

где

$$K(y,t,\lambda)=\int_t^y\left\{\frac{s^{2\beta}}{t^\beta(y-s)^{2\beta}}\frac{\partial}{\partial s}J_0[\lambda\sqrt{t(s-t)}]-\right.$$

$$-\left(\frac{s}{y}\right)^{\beta}\frac{1}{(s-t)^{2\beta}}\frac{\partial}{\partial s}I_0[\lambda\sqrt{y(y-s)}]-$$

$$-\left(\frac{s}{ty}\right)^{\beta}\frac{\partial}{\partial s}I_0[\lambda\sqrt{y(y-s)}]\int_t^s\frac{\xi^{\beta}}{(s-\xi)^{2\beta}}\frac{\partial}{\partial\xi}J_0[\lambda\sqrt{t(\xi-t)}]d\xi\Big\}ds;$$

$$F(y,\lambda)=\gamma_2 y^{1-\beta}\left\{\frac{d}{dy}\int_0^y\frac{s^{2\beta-1}\psi\left(\frac{s}{2}\right)ds}{(t-s)^{\beta}}-\right.$$

$$\left.-\int_0^y\frac{t}{y}\frac{\partial}{\partial t}I_0[\lambda\sqrt{y(y-t)}]\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{s^{2\beta-1}\psi\left(\frac{s}{2}\right)ds}{(t-s)^{\beta}}dt\right\};$$

$$\gamma_1=2^{2\beta-1}(1-2\beta)^{2\beta}\gamma_2;\quad\gamma_2=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)\,\Gamma(1-\beta)};$$

J_0, I_0 — функции Бесселя первого рода нулевого порядка. Исключая $\tau_1(y,\lambda)$ и $\tau_2(y,\lambda)$, $\nu_2(y,\lambda)$ из (26) и (27), с учетом условий склеивания (8) имеем

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_0^y\frac{\exp[\lambda^2(t-y)]\nu_1(t,\lambda)\,dt}{(y-t)^{1/2}}+$$

$$+\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_0^y\frac{k_0(y,t)\exp[\lambda^2(t-y)]\,\nu_1(t,\lambda)\,dt}{(y-t)^{1/2}}+$$

$$+\gamma_1\int_0^y\frac{b(t)\,\nu_1(t,\lambda)\,dt}{(y-t)^{2\beta}}+\gamma_1\int_0^y K(y,t,\lambda)b(t)\,\nu_1(t,\lambda)\,dt-$$

$$-\frac{\gamma_1}{\sqrt{\pi}}\int_0^y K_1(y,t,\lambda)\,\nu_1(t,\lambda)\,dt=F_1(y,\lambda);\qquad(27)$$

здесь

$$K_1(y,t,\lambda)=\int_t^y\left\{\frac{\exp[\lambda^2(t-\eta)]\,c(\eta)}{(y-\eta)^{2\beta}(\eta-t)^{1/2}}+\right.$$

$$+\frac{c(\eta)k_0(\eta,t)\exp[\lambda^2(t-\eta)]}{(y-\eta)^{2\beta}(\eta-t)^{1/2}}+K(y,\eta,\lambda)\frac{\exp[\lambda^2(t-\eta)]}{(\eta-t)^{1/2}}+$$

$$\left.+K(y,\eta,\lambda)\frac{k_0(\eta,t)\exp[\lambda^2(t-\eta)]}{(\eta-t)^{1/2}}\right\}d\eta,$$

$$F_1(y,\lambda)=\alpha A(y,\lambda)-F(y,\lambda)-\gamma_1\int_0^y\frac{c(t)A(t,\lambda)+p(t,\lambda)}{(y-t)^{2\beta}}dt-$$

$$-\gamma_1\int_0^y K(y,t,\lambda)[A(t,\lambda)+p(t,\lambda)]\,dt.$$

Применяя формулу обращения для интегрального уравнения Абеля, после некоторых несложных преобразований получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\nu_i(y,\lambda)-\int_0^y K_i(y,t,\lambda)\nu_i(t,\lambda)\,dt=F_i(y,\lambda),\quad i=\overline{2,4},\qquad(28)$$

где при $0<m<2$

$$K_2(y,t,\lambda)=-\frac{\gamma_1\Gamma(1-2\beta)b(t)}{\alpha\Gamma(1/2-2\beta)(y-t)^{1/2+2\beta}}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\lambda^2-k_{0y}[t+(y-t)\eta,t]+\lambda^2k_0[t+(y-t)\eta,t]}{\eta^{-1/2}(1-\eta)^{1/2}}\exp[\lambda^2\times$$

$$\times(t-y)\eta]\,d\eta-\frac{\gamma_1}{\sqrt{\pi}}\int_t^y\frac{\frac{b(t)}{\alpha}K_{\eta}(\eta,t,\lambda)-\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}K_{1\eta}(\eta,t,\lambda)}{(y-\eta)^{1/2}}d\eta,$$

$$F_2(y,\lambda)=\frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}\frac{d}{dy}\int_0^y\frac{F_1(t,\lambda)}{(y-t)^{1/2}}dt;$$

при $m=2$

$$K_3(y,t,\lambda)=\frac{\alpha}{\alpha\pi+\gamma_1\pi^{3/2}\,b(t)}\times$$

$$\times\int_0^1 \frac{\lambda^2+\lambda^2 k_0[t+(y-\eta)\eta, t] - k_{0y}[t+(y-\eta)\eta, t]}{\eta^{-1/2}(1-\eta)^{1/2}}\times$$

$$\times \exp[\lambda^2(t-y)\eta]\,d\eta - \frac{\gamma_1}{\alpha\sqrt{\pi}+\gamma_1\pi b(t)}\times$$

$$\times\int_t^y \frac{K_\eta(\eta,t,\lambda) - 1/\sqrt{\pi}\,K_{1\eta}(\eta,t,\lambda)}{(y-\eta)^{1/2}}\,d\eta,$$

$$F_2(y,\lambda) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}+\gamma_1\pi b(t)}\,\frac{d}{dy}\int_0^y \frac{F_1(t,\lambda)}{(y-t)^{1/2}}\,dt;$$

при $m>2$

$$K_4(y,t,\lambda) = \frac{\sin 2\beta\pi}{\pi b(y)}\left\{\frac{\alpha\left(2\beta-\frac{1}{2}\right)}{\gamma_1\sqrt{\pi}}(y-t)^{2\beta-3/2}\times\right.$$

$$\times\int_0^1 \frac{1+k_0[t+(y-t)\eta,t]}{\eta^{1/2}(1-\lambda)^{1-2\beta}}\exp[\lambda^2(t-y)\eta]\,d\eta -$$

$$-\frac{\alpha}{\gamma_1\sqrt{\pi}}(y-t)^{2\beta-1/2}\times$$

$$\times\int_0^1 \frac{\lambda^2+\lambda^2 k_0[t+(y-t)\eta,t]-k_{0y}[t+(y-t)\lambda,t]}{\eta^{-1/2}(1-\eta)^{1-2\beta}}\times$$

$$\left.\times\exp[\lambda^2(t-y)\eta]\,d\eta + \int_t^y \frac{b(t)K_\eta(\eta,t,\lambda)-\frac{1}{\sqrt{\pi}}K_{1\eta}(\eta,t,\lambda)}{(y-\eta)^{1-2\beta}}\,d\eta\right\},$$

$$F_4(y,\lambda)=\frac{\sin 2\beta\pi}{\gamma_1\pi b(y)}\,\frac{d}{dy}\int_0^y\frac{F_1(t,\lambda)\,dt}{(y-t)^{1-2\beta}}.$$

Ядро уравнения (28) непрерывно в $[0, 1]\times[0, 1]$ при $y\neq t$ и имеет слабую особенность при $m\neq 2$.

Правая часть $F_i(y, \lambda)\in C(\overline{AB})\cap C^2(AB)$, причем $F'_{iy}(y, \lambda)$ при $y\to 0$ может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы.

Следовательно, уравнение (28) со слабой особенностью при

$m\neq 2$, непрерывным ядром при $m=2$ и, согласно общей теории, разрешимо, а это доказывает разрешимость задачи A_λ.

После определения функции $\nu_1(y, \lambda)$, следовательно, функций $\tau_1(y, \lambda)$, $\tau_2(y, \lambda)$ и $\nu_2(y, \lambda)$ решение задачи A_λ в области D_1 находится как решение первой краевой задачи для уравнения (6), а в области D_2 решение находится в виде [9].

От функций $\varphi(x, \lambda)$ и $\psi(y, \lambda)$ потребуем выполнения следующих условий при больших значениях $|\lambda|$:

$$\varphi_1(x,\lambda) = O\left(\frac{1}{\exp(|\lambda|)\,|\lambda|^{\varkappa}}\right),\quad \varphi_2(y,\lambda) = O\left(\frac{1}{\exp(|\lambda|)\,|\lambda|^{\varkappa}}\right),$$

$$\psi'_y(y,\lambda) = O\left(\frac{1}{\exp(5h\,|\lambda|)\,|\lambda|^{\varkappa}}\right),$$

$$\psi(y,\lambda) = O\left(\frac{1}{\exp(5h\,|\lambda|)\,|\lambda|^{\varkappa+1}}\right),$$

$\varkappa>3$, тогда из (24) получим оценку

$$u(x,y,\lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|^{\varkappa}}\right),$$

которая достаточна для существования интеграла (5), дающего решения задачи A.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А. В. Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми//Сибир. мат. жур. 1962. Т. 3. № 5. С. 642—644.
2. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент: Фан, 1986. 220 с.
3. Джураев Т. Д., Апаков Ю. П. Задача Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа в трехмерном пространстве//Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1986. № 3. С. 21—27.
4. Agmon S., Nirenberg L., Protter M. H. A maximum prineipla for a class of hyperbolic equations and aplications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type//Communs Pure and Appl. Math. 1953. Vol. 1. N 4. P. 455—470.
5. Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа. Успехи мат. наук. 1962. Т. XVII. Вып. 3. (105). С. 3—146.
6. Кружков С. Н., Якубов С. О разрешимости одного класса задач с неизвестной границей для уравнения теплопроводности и поведения решений при неограниченном возрастании времени//Динамика жидкости со свободными границами. Новосибирск, 1978. Вып. 36. С. 46—70.
7. Бабич В. М., Капилевич М. Б. и др. Линейные уравнения математической физики. М.: Наука, 1964. 368 с.
8. Бакиевич Н. И. Сингулярные задачи Трикоми для уравнения $\eta^\alpha u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \mu^2\eta^\alpha u = 0$ //Изв. ВУЗов. Математика. 1964. № 2. С. 7—13.
9. Капилевич М. Б. Об одном уравнении смешанного эллиптико-гиперболического типа//Мат. сбор. 1952. Т. 30 (72). С. 11—38.

А. С. АБДУЛЛАЕВ

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СМЕШАННОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕХ ТИПОВ

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-u_y+a_1(x,\ y)\,u_x+c_1(x,\ y)\,u & \text{в } D_1\\ u_{xx}-u_{yy}+a_2(x,\ x)\,u_x+b_2(x,\ y)\,u_y+c_2(x,\ y)\,u & \text{в } D_2\\ u_{xx}+u_{yy}+a_3(x,\ y)\,u_x+b_3(x,\ y)\,u_y+c_3(x,\ y)\,u & \text{в } D_3\end{cases} \quad (1)$$

в области D, ограниченное отрезками прямых $y=0$, $x=2$, $y=1$ и $x=-1$, где $D_1=D\cap\{0<x<1\}$, $D_2=D\cap\{x<0\}$, $D_3=D\cap\{x>1\}$. Пусть $J_1=\{(x,\ y): x=0,\ 0<y<1\}$, $J_2=\{(x,\ y): x=1,\ 0<y<1\}$. Для уравнения (1) будем исследовать следующую задачу.

Задача А. Найти непрерывную в замкнутой области $\bar{D}$ функцию $u(x,\ y)$ с непрерывными внутри D призводными u_x и u_y являющуюся регулярным решением уравнения (1) в областях D_i $(i=1,2,3)$ и принимающую заданные значения:

$$u(-1,y)=f_1(y),\quad u(2,y)=f_2(y),\quad 0\leqslant y\leqslant 1,$$

$$u(x,0)=\psi_1(x),\quad u_y(x,0)=0,\quad -1\leqslant x\leqslant 0,$$

$$u(x,0)=\psi_2(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

$$u(x,0)=\psi_3(x),\quad u(x,1)=\psi_4(x),\quad 1\leqslant x\leqslant 2.$$

Здесь $f_1''(y)$, $\psi_1''(x)$, $\psi_2''(x)$, $\psi_3'''(x)$, $\psi_4'''(x)$, $f_2(y)$ — непрерывны, причем

$$f_1(0)=\psi_1(-1),\quad f_2(0)=\psi_3(2),\quad f_1'(0)=0.$$

Относительно коэффициентов уравнения (1) сделаем следующие предположения:

1) в $\bar{D}_1$ коэффициенты $a_1,\ c_1\in C^1$, кроме того

$$c_1(x,y)<0,\quad (x,y)\in D_1; \qquad (2)$$

2) коэффициенты $a_2,\ b_2\in C^2(\bar{D}_2)$, $c_2\in C^1(\bar{D}_2)$;

3) функции $a_3,\ b_3,\ c_3$ принадлежат классу $C^1(\bar{D}_3)$ и

$$c_3(x,y)<0,\quad (x,y)\in D_3. \qquad (3)$$

Примем обозначения:

$$u(0,y)=\tau_1(y),\quad u_x(0,y)=\nu_1(y),$$
$$u(1,y)=\tau_2(y),\quad u_x(1,y)=\nu_2(y).$$

Докажем единственность решения задачи А. Для этого область D_2 разбивается на четыре треугольные подобласти с помощью характеристик $x+y=0$ и $x-y=-1$. Точки пересечения этих характеристик обозначим через $C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Пусть $\Delta ACB = D_{21}$, $\Delta BCB_0 = D_{22}$, $\Delta A_0B_0C = D_{23}$, $\Delta ACA_0 = D_{24}$; здесь точки A, B, B_0, A_0 имеют соответственно координаты $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 1)$.

Для доказательства единственности решения задачи А предположим, что коэффициенты a_2, b_2 и c_2 удовлетворяют условиям Агмона, Ниренберга, Проттера в D_{22}.

В силу единственности решения задачи Коши и Дарбу для уравнения (1) решение $u(x, y)$ однородной задачи А тождественно равно нулю в подобласти $D_{21} \cup D_{24}$.

Далее единственность решения задачи А исследуется так же, как в работе [1].

Отметим, что единственность решения этой задачи при некоторых ограничениях на коэффициенты может быть доказана методом интегралов энергии.

Докажем существование решения задачи А.

Предварительно рассмотрим следующую задачу:

$$u_{xx} - u_{yy} + a_2(x, y)u_x + b_2(x, y)u_y + c_2(x, y)\,u = 0, \tag{4}$$

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad u_y(x, 0) = 0, \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \tag{5}$$

$$u(-1, y) = f_1(y), \quad u(0, y) = \tau_1(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1. \tag{6}$$

Для исследования задачи (4)—(6) область D_2 дополняем до характеристического треугольника. Далее предположим, что коэффициенты уравнения (4) принадлежат классу C^2 на характеристическом треугольнике, а функция $\psi_1(x)$ — пока неизвестна на отрезках $[-2, -1]$ и $[0, 1]$, точный вид которой будет указан ниже.

Здесь отметим, что при $a_2(x, y) = b_2(x, y) = 0$, $c_2(x, y) = c$ (x эта задача изучена в работе [2].

При сделанных предположениях относительно функций a_2, b_2, c_2 и $\psi_1(x)$, решение задачи Коши (4), (5) можно представить в виде [3]

$$u(x, y) = \frac{1}{2}[R(x, y; x+y, 0)\psi_1(x+y) + R(x, y; x-y, 0)] \times$$

$$\times \psi_1(x-y) - \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}[R_\eta(x, y; \xi, 0) + b_2(\xi, 0)R(x, y; \xi, 0)]\psi_1(\xi)\,d\xi, \tag{7}$$

где $R(x, y; \xi, \eta)$ — функция Римана.

Пользуясь условием $u(0, y)=\tau_1(y)$ из (7), получаем уравнение для определения $\psi_1(y)$ при $0\leqslant y\leqslant 1$

$$R(0, y; y, 0)\,\psi_1(y) + R(0, y; -y, 0)\,\psi_1(-y) -$$

$$-\int\limits_{-y}^{y}[R_\eta(0, y; \xi, 0) + b_2(\xi, 0)R(0, y; \xi, 0)]\,\psi_1(\xi)d\xi = 2\tau_1(y). \qquad (8)$$

Так как функция $\psi_1(y)$ для $-1\leqslant y\leqslant 0$ задана, уравнение (8) можно рассматривать как уравнение для определения функций $\psi_1(y)$ при $y>0$. Поэтому перепишем уравнение (8) в следующем виде:

$$\psi_1(y) - \int\limits_0^y p_1(y, t)\psi_1(t)\,dt = \frac{2\tau_1(y)}{R(0, y; y, 0)} -$$

$$-\frac{R(0, y; -y, 0)\,\psi_1(-y)}{R(0, y; y, 0)} + \int\limits_{-y}^{0}\frac{p_1(y, t)}{R(0, y; y, 0)}\,\psi_1(t)dt, \qquad (9)$$

где

$$p_1(y, t) = \frac{R_\eta(0, y; t, 0) + b_2(t, 0)R(0, y; t, 0)}{R(0, y; y, 0)}.$$

Решение уравнения (9) можно представить в виде

$$\psi_1(y) = \frac{2\tau_1(y)}{R(0, y; y, 0)} + \int\limits_0^y \frac{T_1(y, t)}{R(0, t; t, 0)}\,\tau_1(t)dt + g_1(y),\ \ 0\leqslant y\leqslant 1; \qquad (10)$$

здесь

$$g_1(y) = -\frac{R(0, y; -y, 0)}{R(0, y; y, 0)}\,\psi_1(-y) - \int\limits_0^y \frac{R(0, t; -t, 0)}{R(0, t; t, 0)}\,T_1(y, t)\times$$

$$\times\psi_1(-t)\,dt + \int\limits_{-y}^{0}\frac{p_1(y, t)\,\psi_1(t)}{R(0, y; y, 0)}\,dt + \int\limits_0^y T_1(y, t)\,dt\times$$

$$\times\int\limits_{-t}^{0}\frac{p_1(t, \xi)}{R(0, t; t, 0)}\,\psi_1(\xi)\,d\xi,$$

$T_1(y, t)$ — резольвента ядра $p_1(y, t)$.

Таким же образом продолжим $\psi_1(y)$ на отрезок $[-2, -1]$:

$$\psi_1(y) = g_2(y) + \int\limits_0^y T_2(y, t)g_2(t)\,dt, \quad -2\leqslant y\leqslant -1, \qquad (11)$$

где $T_2(y, t)$ — резольвента ядра

$$\frac{R_\eta(-1, -1-y; t, 0) + b_2(t, 0)R(-1, -1-y; t, 0)}{R(-1, -1-y; y, 0)},$$

$$g_2(y) = \frac{1}{R(-1, -1-y; y, 0)}\Big\{2f_1(-1-y) - R(-1, -1-y;$$

$$-2-y, 0)\,\psi_1(-2-y) + \int\limits_0^{-2-y}[R_\eta(-1, -1-y; t, 0) +$$

$$+ b_2(t, 0)\,R(-1, -1-y; t, 0)]\,\psi_1(t)\Big\}.$$

Предложенным методом работы [4] можно показать, что продолженная по формулам (10) и (11) функция $\psi_1(x)$ принадлежит классу $C^2\,[-2, 1]$, если выполнены условия $\tau_1(0)=\psi_1(0)$, $\tau_1'(0)=0$, $f_1'(0)=0$.

Тогда решение задачи Коши (4) при $u(x, y)=\tilde{\psi}_1(x)$ и $u_y(x, 0)=0$ имеет вид:

$$u(x, y) = \frac{1}{2}[R(x, y; x+y, 0)\,\tilde{\psi}_1(x+y) + R(x, y; x-y, 0)\times$$

$$\times\tilde{\psi}_1(x-y)] - \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}[R_\eta(x, y; t, 0) + b_2(t, 0)R(x, y; t, 0)]\,\tilde{\psi}_1(t)\,dt; \qquad (12)$$

здесь

$$\tilde{\psi}_1(x) = \begin{cases} g_2(x) + \int\limits_0^x T_2(x, t)\,g_2(t)\,dt, & -2\leqslant x\leqslant -1,\\ \psi_1(x), & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \dfrac{2\tau_1(x)}{R(0, x; x, 0)} + 2\int\limits_0^x \dfrac{T_1(x, t)}{R(0, t; t, 0)}\,\tau_1(t)dt + g_1(x) & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

Подставляя (12) в условие $u_x(0, y)=\nu_1(y)$, имеем:

$$\nu_1(y) = \tau_1'(y) + q(y)\,\tau_1(y) + \int\limits_0^y p_2(y, t)\tau_1(t)\,dt + g_3(y), \qquad (13)$$

где

$$q(y) = \frac{1}{R(0, y; y, 0)} [R_x(0, y; y, 0) + T_1(y, y) - R_y(0, y; y, 0) -$$

$$- R_\eta(0, y; y, 0) - b_2(y, 0)R(0, y; y, 0)],$$

$$p_3(y, t) = [R_x(0, y; y, 0)\, T_1(y, t) + R(0, y; y, 0)\, T_1(y, t) -$$

$$- R_{\eta x}(0, y; t, 0) - b_2(t, 0)R_x(0, y; t, 0)] \frac{1}{R(0, t; t, 0)} -$$

$$- \frac{R_\eta(0, y; y, 0) + b_2(y, 0)\, R(0, y; y, 0)}{R(0, y; y, 0)\, R(0, t; t, 0)} T_1(y, t) -$$

$$- \int_t^y \frac{R_{\eta x}(0, y; s, 0) + b_2(s, 0)R_x(0, y; s, 0)}{R(0, s; s, 0)} T_1(s, t)\, ds,$$

$$g_3(y) = \frac{1}{2} g_1(y)\, R_x(0, y; y, 0) + \frac{1}{2} g_1'(y)R(0, y; y, 0) +$$

$$+ \frac{1}{2} R_x(0, y; -y, 0)\, \psi_1(-y) + \frac{1}{2} R(0, y; -y, 0)\, \psi_1'(-y) -$$

$$- \frac{1}{2} g_1(y)[R_\eta(0, y; y, 0) + b_2(y, 0)R(0, y; y, 0)] +$$

$$+ \frac{1}{2} \psi_1(-y)[R_\eta(0, y; -y, 0) + b_2(-y, 0)\, R(0, y; -y, 0)] -$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^y \frac{R_{\eta x}(0, y; t, 0) + b_2(t, 0)\, R_x(0, y; t, 0)}{R(0, t; t, 0)} g_1(t)\, dt.$$

После обращения уравнения (13) относительно $\tau_1(y)$ получаем соотношение между $\tau_1(y)$ и $\nu_1(y)$, принесенное из области D_2

$$\tau_1(y) = \nu_1(y) + \int_0^y T(y, t)\nu_1(t)\, dt - g_4(t); \qquad (14)$$

здесь $T(y, t)$ — резольвента ядра

$$q(y) + \int_t^y p_3(y, \eta)\, d\eta,$$

$$g_4(y) = g_3(y) + \psi_1(0)\left[q(y) + \int_0^y p_3(y, \eta)\, d\eta\right] +$$

$$+ \int_0^y T(y, t)\left[g_3(t) + \psi_1(0)(q(t) + \int_0^1 p_3(t, \eta)\, d\eta)\right] dt.$$

Решение задачи N для уравнения (1) с краевыми условиями

$$u(x, 0) = \psi_3(x), \quad u(x, 1) = \psi_4(x), \quad 1 \leqslant x \leqslant 2,$$

$$u_x(0, y) = \nu_2(y), \quad u(2, y) = f_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$$

в области D_3 можно представить в виде [5]

$$u(x, y) = - \int_0^1 G(1; t; x, y)\nu_2(t)\, dt + \int_0^1 \bar{K}(1, t; x, y)\nu_2(t) dt + \bar{f}(x, y). \tag{15}$$

Здесь введены обозначения:

$$\bar{K}(1, t; x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{D_3} G(\xi, \eta; x, y)\Big[K_1(1, t; \xi, \eta) - K(1, t; \xi, \eta) +$$

$$+ \iint_{D_3} \bar{N}(\xi', \eta'; \xi, \eta)\, K_1(1, t, \xi', \eta')\, d\xi'\, d\eta' \Big] d\xi\, d\eta,$$

$$K_1(1, t; x, y) = - \iint_{D_3} K(\xi, \eta; x, y) K_1(1, t; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

$$\bar{N}(\xi, \eta; x, y) = N(\xi, \eta; x, y) + K(\xi, \eta; x, y) +$$

$$+ \iint_{D_3} N(\xi', \eta'; x, y) K(\xi, \eta; \xi', \eta')\, d\xi'\, d\eta',$$

$$\bar{f}(x, y) = f_0(x, y) + f(x, y),$$

$$f_0(x, y) = - \int_1^2 G_\eta(\xi, 0; x, y)\, \psi_3(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_1^2 G_\eta(\xi, 1; x, y) \psi_4(\xi) d\xi - \int_0^1 G_\xi(2, \eta; x, y) f_2(\eta)\, d\eta,$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{D_3} G(\xi, \eta; x, y)[\bar{f}_0(\xi, \eta) + K_0(\xi, \eta)]\, d\xi\, d\eta,$$

$$\bar{f}_0(x, y) = \bar{f}_{00}(x, y) + \iint_{D_3} \bar{N}(\xi, \eta; x, y)\, \bar{f}_{00}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

$$\bar{f}_{00}(x, y) = \iint_{D_3} K(\xi, \eta; x, y) K_0(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

$$K(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{2\pi}[a_3(x, y) G_x(\xi, \eta; x, y) + b_3(x, y) G_y(\xi, \eta; x, y) +$$

$$+ c_3(x, y)\, G(\xi, \eta; x, y)],$$

$$K_0(x, y) = \frac{1}{2\pi}\Big[a_3(x, y)\, \frac{\partial f_0(x, y)}{\partial x} +$$

$$+ b_3(x, y)\, \frac{\partial f_0(x, y)}{\partial y} + c_3(x, y) f_0(x, y)\Big],$$

$N(\xi, \eta; x, y)$ — резольвента интегрального уравнения с итерированным ядром:

$$K'(\xi, \eta; x, y) = \iint_{D_3} K(\xi', \eta'; x, y) K(\xi, \eta; \xi', \eta')\, d\xi'\, d\eta',$$

где $G(\xi, \eta; x, y)$ — функция Грина задачи N для уравнения Лапласа в области D_3

$$G(\xi, \eta; x, y) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \ln \frac{\sigma(\zeta + \bar{z})\sigma(\zeta - \bar{z} + 4i)\, \sigma(\bar{\zeta} + \bar{z})\sigma(\bar{\zeta} - \bar{z} + 4i)}{\sigma(\zeta - z)\, \sigma(\zeta + z + 4i)\sigma(\bar{\zeta} - z)\sigma(\bar{\zeta} + z + 4i)},$$

$$\zeta = \xi + 1 + i\eta, \quad z = x + 1 + iy,$$

$\sigma(z) = \sigma(z, 2, 4i)$ — сигма-функция Вейерштрасса.

Из (15) находим

$$\tau_2'(y) = \int_0^1 k(t, y)\nu_2(t)\, dt + \int_0^1 k_1(t, y)\nu_2(t)\, dt + \bar{f}_y(1, y); \qquad (16)$$

здесь

$$k(t, y) = -G_y(1, t; 1, y),$$

$$k_1(t, y) = \bar{k}(1, t; 1, y).$$

Соотношения на отрезках J_1 и J_2 между функциями $\tau_j(y)$ и $\nu_j(y)$ $(j=1,\ 2)$ из параболической части области имеет вид [1]

$$\nu_1(y)=\int_0^y\left[-\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}-k_0(y,\eta)\right]\tau_1'(\eta)\,d\eta+$$

$$+\int_0^y n_0(y,\eta)\tau_2'(\eta)d\eta+\int_0^y M_1(0,y,\eta)\tau_1'(\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^y M_2(0,y,\eta)\tau_2'(\eta)d\eta+\psi_1(y), \qquad (17)$$

$$\nu_2(y)=-\int_0^y n_0(y,\eta)\tau_1'(\eta)\,d\eta+$$

$$+\int_0^y M_1(1,y,\eta)\tau_1'(\eta)d\eta+\int_0^y\left[\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}+l_0(y,\eta)\right]\tau_2'(\eta)\,d\eta+$$

$$+\int_0^y M_2(1,y,\eta)\tau_2'(\eta)\,d\eta+\psi_2(y), \qquad (18)$$

где k_0, n_0, l_0, M_1, M_2, ψ_1, ψ_2 — известные функции [1].

Исключая $\tau_1(y)$, $\tau_2(y)$ из (14), (16), (17), (18), приходим к системе интегральных уравнений относительно $\nu_1(y)$ и $\nu_2(y)$

$$\nu_1(y)=\int_0^y K_{11}(y,t)\nu_1(t)dt+\int_0^1 K_{12}(y,t)\nu_2(t)\,dt+\Phi_1(y),$$

$$\nu_2(y)=\int_0^y K_{21}(y,t)\nu_2(t)dt+\int_0^1 K_{22}(y,t)\nu_1(t)dt+\Phi_2(y), \qquad (19)$$

где

$$K_{11}(y,t)=-\frac{1}{\sqrt{\pi(y-t)}}-k_0(y,t)+M_1(0,y,t)-$$

$$-\int_t^y\left[\frac{1}{\sqrt{\pi(y-t)}}+k_0(y,\eta)-M_1(0,y;\eta)\right]T(\eta,t)\,d\eta,$$

$$K_{12}(y,t)=\int_0^y [n_0(y,\eta)+M_2(0,y,\eta)]\,[k(t,\eta)+k_1(t,\eta)]\,d\eta,$$

$$\Phi_1(y)=\psi_1(y)+\int_0^y\left[\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}+k_0(y,\eta)-M_1(0,y,\eta)\right]g_1(\eta)\,d\eta+$$

$$+\int_0^y [n_0(y,\eta)+M_2(0,y,\eta)]\,\overline{f}_\eta(1,\eta)\,d\eta,$$

а K_{21}, K_{22} и Φ_2 выражаются точно такими же формулами, но здесь вместо $k_0(y,\eta)$, $M_1(0,y,\eta)$, $M_2(0,y,\eta)$, $\psi_1(y)$ участвуют $l_0(y,\eta)$, $M_1(1,y,\eta)$, $M_2(1,y,\eta)$, $\psi_2(y)$ соответственно.

Исследуем свойства функций $K_{ij}(y,\eta)$ $(i, j=1, 2)$. Так как в силу свойств функции Грина для уравнения теплопроводности $K_{11}(y,\eta)$ имеет слабую особенность, а $K_{21}(y,\eta)$ — непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 1]$. В работе [1] показано, что $K_{12}(y,t)$, $K_{22}(y,t)$ имеют особенность не выше 1/2, а функции $\Phi_1(y)$ и $\Phi_2(y)$ непрерывны при $0\leqslant y\leqslant 1$. Следовательно, система интегральных уравнений (19) является системой интегральных уравнений Фредгольма второго рода, однозначная разрешимость которой следует из единственности решения задачи А.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джураев Т. Д., Абдуллаев А. С. Об одной краевой задаче для смешанного уравнения трех типов//Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1986. № 4. С. 21—27.
2. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент: Фан, 1986. 220 с.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 734 с.
4. Левитан Б. М., Саргеян И. С. Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970. 672 с.
5. Салахитдинов М. С., Толипов А. Некоторые краевые задачи для уравнений смешанного типа с одной и двумя линиями вырождения//Краевые задачи для дифференциальных уравнений. Ташкент: Фан, 1973. С. 3—17.

А. Т. РАХМАНОВ

ГРУППОВОЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЕ В ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ

Пусть в n_i-мерном евклидовом пространстве R^{n_i} дифференциальная игра многих лиц описывается уравнением

$$\dot z_i = C_i z_i - B_i u_i + D_i v,\quad i=1, 2, \dots, m, \tag{1}$$

где $m\geqslant 1$, u_i, v — управляющие параметры преследователей и убегающего, соответственно удовлетворяющие интегральным ограничениям: $u_i\in R^{n_i}$, $v\in R^q$,

$$\int_0^\infty |u_i(\tau)|^2\,d\tau\leqslant \rho_i^2,\quad \int_0^\infty |v(\tau)|^2\,d\tau\leqslant\sigma^2, \tag{2}$$

C_i, B_i, D_i — постоянные матрицы соответствующих размерностей. В R^{n_i} выделено терминальное множество $M_i=M_i^0+M_i^1$, где M_i^0 — линейное подпространство R^{n_i}, M_i^1 — подмножество L_i — ортогонального дополнения M_i^0 в R^{n_i} (здесь и далее считаем, что $i=1, 2, \dots, m$).

Измеримые функции $u_i=u_i(\tau)$, $v=v(\tau)$, $0\leqslant\tau<\infty$, соответственно удовлетворяющие ограничениям (2), назовем допустимыми управлениями.

Будем говорить, что в игре (1) из точки $z_0=(z_{10}, \dots, z_{m0})$, $z_{i0}\overline{\in} M_i$, возможно завершение преследования за время $T=T(z_0)$, если по любому допустимому управлению $v=v(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$ можно построить такие допустимые управления $u_i=u_i(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, что хотя бы для одного значения j индекса i решение $z_j=z_j(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$ уравнения

$$\dot z_j = C_j z_j - B_j u_j(t) + D_j v(t),\quad z_j(0)=z_{j0} \tag{3}$$

попадает на M_j не позже момента T. При этом для построения $u_1(t), \dots, u_m(t)$ в каждый момент $t>0$ разрешается использовать значения $z_1(t), \dots, z_m(t)$ и $v(s)$, $0\leqslant s\leqslant t$.

Дифференциальным играм преследования с интегральными ограничениями на управления посвящено много работ [1—9]. Из них в [1—4, 7] исследованы дифференциальные игры преследования многих лиц. В настоящей работе также изучены дифференциальные игры многих лиц. Получены новые достаточные условия завершения группового преследования для линейных игр.

Отметим, что при доказательстве теоремы используются некоторые идеи из [1, 3].

Пусть π_i — операторы ортогонального проектирования из R^{n_i} на L_i, $z_{i0}\overline{\in} M_i$, $t>0$.

Предположение 1. Существуют линейные, измеримые по τ отображения $A_i(\tau): R^q \to R^{p_i}$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$, такие, что для каждого t_j, $(0 \leqslant t_j \leqslant t)$, найдутся t_{j+1}, $(t_j \leqslant t_{j+1} \leqslant t)$, векторы b^1_{j+1}, $b^2_{j+1} \in L_{j+1}$, числа d_{j+1}, $j = 0, 1, \dots, m-1$, для которых справедливы соотношения:

а) $b^1_i + b^2_i = \pi_i e^{t_i C_i} z_{i0}$, $b^1_i + G_i(t_i) \subset M^1_i$,

б) $\| A_i(\tau) \| \leqslant d_i^{-1}$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$,

в) $d_1^2 \rho_1^2 + \cdots + d_m^2 \rho_m^2 > \sigma^2$,

где

$$G_i(t_i) = \left\{ \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \Psi_i(t_i, \tau) v(\tau)\, d\tau \Big/ \|v(\cdot)\|_{L_2} \leqslant \sigma \right\},$$

$$\Psi_i(t_i, \tau) = \pi_i e^{(t_i - \tau) C_i} [D_i - B_i A_i(\tau)].$$

При выполнении условия в) предположения 1 можно найти число $\varepsilon > 0$, такое, что справедливо неравенство

$$d_1^2(\rho_1 - \varepsilon)^2 + \dots + d_{m-1}^2(\rho_{m-1} - \varepsilon)^2 + d_m^2 \rho_m^2 > \sigma^2. \qquad (*)$$

Считая ε выбранным из неравенства (*), положим

$$r_j = \varepsilon / \sqrt{t_j - t_{j-1}}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m-1,$$

$$r_m = \frac{d_m \rho_m - \sqrt{\sigma^2 - d_1^2(\rho_1 - \varepsilon)^2 - \dots - d_{m-1}^2(\rho_{m-1} - \varepsilon)^2}}{\sqrt{t_m - t_{m-1}}},$$

$$W_1(0, t_1) = \int\limits_0^{t_1} \pi_1 e^{(t_1 - \tau) C_1} B_1(r_1 S_1)\, d\tau,$$

$$W_j(t_{j-1}, t_j) = \int\limits_{j-1}^{j} \pi_j e^{(t_j - \tau) C_j} B_j(r_j S_j)\, d\tau \overset{*}{-} G^*_j(t_{j-1}),$$

где

$$G^*_j(t_{j-1}) = \left\{ \int\limits_0^{j-1} \pi_j e^{(t_j - \tau) C_j} D_j v(\tau) d\tau / \|v(\cdot)\|_{L_2} \leqslant \sigma \right\},$$

$j = 2, 3, \dots, m$, S_l — замкнутый единичный шар из R^{p_l} с центром в нуле (относительно операции $\overset{*}{-}$ и интеграла от многозначного отображения см. [10]).

Предположение 2. Область значений многозначных отображений $W_j(t_{j-1}, t_j)$, $j = 2, 3, \dots, m$ непусты.

Теорема. Пусть для точки $z_0 = (z_{10}, \dots, z_{m0})$, $z_{l0} \in \overline{M}_l$, существуют числа $\tau_l = \tau_l(z_{l0})$, $T = T(z_0)$, такие, что $0<\tau_1<\dots<\tau_m \leqslant T$ и при $t = T$, $t_l = \tau_l$ справедливы предположения 1, 2 и включения

$$b_l^2 \in W_l(\tau_{l-1}, \tau_l). \tag{4}$$

Тогда из точки z_0 возможно завершение преследования за время T.

Доказательство. Из (4) при $i=1$ имеем $b_1^2 \in W_1(0, \tau_1)$. Поэтому, существует измеримая функция $w_1(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$, такая, что

$$b_1^2 = \int\limits_0^{\tau_1} w_1(\tau)\, d\tau,$$

$$w_1(\tau) \in \pi_1 e^{(\tau_1-\tau)C_1} B_1(r_1 S_1), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1. \tag{5}$$

Рассмотрим уравнение

$$w_1(\tau) = \pi_1 e^{(\tau_1-\tau)C_1} B_1 \omega_1(\tau), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1, \tag{6}$$

относительно неизвестной вектор-функции $\omega_1(\tau) \in r_1 S_1$. Из (5), а также леммы Филиппова [11] следует существование измеримого решения уравнения (6). Обозначим его через $\omega_1^*(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$.

Пусть $v(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant T$ — произвольное допустимое управление убегающего. Введем в рассмотрение функции

$$\sigma_l(\alpha, t) = \int\limits_\alpha^t |A_l(\tau) v(\tau)|^2\, d\tau, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant t \leqslant T.$$

Параметрами $u_l \in R^{p_l}$ предлагается управлять следующим образом. В каждый момент $\tau \in [0, \tau_1]$ положим

$$u_1(\tau) = A_1(\tau) v(\tau) + \omega_1^*(\tau), \tag{7}$$

$u_j \equiv 0$, $j = 2, 3, \dots, m$, до тех пор, пока $\sigma_1(0, \tau) < (\rho_1 - \varepsilon)^2$. Тогда возможны два случая: 1) при всех $\tau \leqslant \tau_1$ $\sigma_1(0, \tau) < (\rho_1 - \varepsilon)^2$, 2) существует момент $t_1^* < \tau_1$ такой, что впервые имеет место равенство $\sigma_1(0, t_1^*) = (\rho_1 - \varepsilon)^2$. В первом случае для решения задачи Коши (3) при $i=1$, $t=\tau_1$, используя условия а), б) предположения 1, получаем

$$\pi_1 z(\tau_1) = \pi_1 e^{\tau_1 C_1} z_{10} - \int_0^{\tau_1} \pi_1 e^{(\tau_1-\tau)C_1} B_1 \omega_1^*(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int_0^{\tau_1} \Psi_1(\tau_1, \tau) v(\tau)\,d\tau = b_1^2 + \int_0^{\tau_1} \pi_1 e^{(\tau_1-\tau)C_1} B_1 \omega_1^*(\tau)\,d\tau +$$

$$+ b_1^1 + \int_0^{\tau_1} \Psi_1(\tau_1, \tau) v(\tau)\,d\tau \in b_1^1 + G_1(\tau_1) \subset M_1^1,$$

т. е. $z(\tau_1) \in M_1$. Таким образом, в этом случае игра (1) завершается в момент τ_1.

Пусть реализуется второй случай и $z_l\left(t_1^*\right) \bar{\in} M_l$ (в противном случае игра завершена в момент t_l^* и теорема доказана). На отрезке $\left[t_1^*, \tau_1\right]$ положим $u_i = 0$ и из (4) при $i=2$ имеем

$$b_2^2 \in \int_{\tau_1}^{\tau_2} \pi_2 e^{(\tau_2-\tau)C_2} B_2(r_2 S_2)\,d\tau \overset{*}{-} G_2^*(\tau_1).$$

Используя определение операции $\overset{*}{-}$ [10], из последнего получаем

$$b_2^2 + G_2^*(\tau_1) \subset \int_{\tau_1}^{\tau_2} \pi_2 e^{(\tau_2-\tau)C_2} B_2(r_2 S_2)\,d\tau, \tag{8}$$

Согласно введенной информированности, в момент τ_1 преследователю известно $v(s)$, $0 \leqslant s \leqslant \tau_1$ и в силу (8) справедливо включение

$$b_2^2 + \int_0^{\tau_1} \pi_2 e^{(\tau_2-\tau)C_2} D_2 v(\tau)\,d\tau \in \int_{\tau_1}^{\tau_2} \pi_2 e^{(\tau_2-\tau)C_2} B_2(r_2 S_2)\,d\tau. \tag{9}$$

Поэтому существует измеримая функция $w_2(\tau)$, $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$, такая, что

$$b_2^2 + \int_0^{\tau_1} \pi_2 e^{(\tau_2-\tau)C_2} D_2 v(\tau)\,d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} w_2(\tau)\,d\tau,$$

$$w_2(\tau) \in \pi_2 e^{(\tau_2-\tau)C_2} B_2(r_2 S_2). \tag{10}$$

Рассмотрим уравнение

$$w_2(\tau) = \pi_2 e^{(\tau_2-\tau)C_2} B_2 \omega_2(\tau), \quad \tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2, \tag{11}$$

относительно неизвестной вектор-функции $\omega_2(\tau) \in r_2 S_2$. Из леммы Филиппова [11] следует, что решение уравнения (11) существует и оно измеримо на $[\tau_1, \tau_2]$. Обозначим его через $\omega_2^*(\tau)$, $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$.

Далее, в каждый момент $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ положим

$$u_2(\tau) = A_2(\tau) v(\tau) + \omega_2^*(\tau),$$
$$u_j = 0, \quad j = 1, 3, 4, \dots, m, \tag{12}$$

до тех пор, пока $\sigma_2(\tau_1, \tau) < (\rho_2 - \varepsilon)^2$. И здесь возможны два случая: 1) при всех $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ $\sigma_2(\tau_1, \tau) < d_2(\rho_2 - \varepsilon)^2$, 2) существует момент $t_2^* < \tau_2$ такой, что впервые имеет место равенство $\sigma_2\left(\tau_1, t_2^*\right) = d_2\left(\rho_2 - \varepsilon\right)^2$. Так же как и выше, легко можно доказать, что в первом случае игра (1) завершится в момент τ_2. При реализации второго случая, считая $z_l\left(t_2^*\right) \bar{\in} M_l$, рассуждаем так же, как и выше, и т. д.

При таком способе управления параметрами $u_1, \dots, u_m$ игра (1) или завершится до $(m-1)$-го шага за время τ_j, $1 \leqslant j \leqslant m-1$, или она не завершится на $(m-1)$-м шаге. В первом случае теорема доказана. Второй случай возможен, если

$$\sigma_{m-1}(\tau_{m-2}, \tau) = (\rho_{m-1} - \varepsilon)^2$$

впервые при $\tau = t_{m-1}^* < \tau_{m-1}$. По построению имеем

$$\int_{t_{m-1}^*}^{\infty} |v(s)|^2 ds = \int_0^{\infty} |v(s)|^2 ds - \left[\int_0^{t_1^*} |v(s)|^2 ds - \cdots \right.$$

$$\left. - \int_{t_{m-2}^*}^{t_{m-1}^*} |v(s)|^2 ds \right] \leqslant \sigma^2 - d_1^2\left(\rho_1 - \varepsilon\right)^2 - \cdots$$

$$- d_{m-1}^2\left(\rho_{m-1} - \varepsilon\right)^2 < d_m^2 \rho_m^2.$$

Поэтому, считая $z_i\left(t_{m-1}^*\right) \bar{\in} M_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, полагаем

$$u_1(\tau) = u_2(\tau) = \dots = u_{m-1}(\tau) = 0, \quad t_{m-1}^* \leqslant \tau \leqslant \tau_m,$$

$$u_m(\tau) = \begin{cases} 0, & t^*_{m-1} \leqslant \tau \leqslant \tau_{m-1}, \\ A_m(\tau)\, v(\tau) + \omega^*_m(\tau), & \tau_{m-1} \leqslant \tau \leqslant \tau_m. \end{cases} \tag{13}$$

Здесь $\omega^*_m(\tau) \in r_m S_m$ — решение следующего уравнения:

$$w_m(\tau) = \pi_m e^{(\tau_m - \tau) C_m} B_m \omega_m(\tau), \quad \tau_{m-1} \leqslant \tau \leqslant \tau_m, \tag{14}$$

$$\begin{cases} \int\limits_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} w_m(\tau)\, d\tau = b^2_m + \int\limits_0^{\tau_{m-1}} \pi_m e^{(\tau_m - \tau) C_m} D_m v(\tau)\, d\tau, \\ w_m(\tau) \in \pi_m e^{(\tau_m - \tau) C_m} B_m (r_m S_m). \end{cases} \tag{15}$$

Существование функции $w_m(\tau)$, удовлетворяющей соотношениям (15), следует из (4) при $i=m$. Из второго включения в (15) и леммы Филиппова [11] следует существование измеримого решения $\omega^*_m(\tau)$, $\tau_{m-1} \leqslant \tau \leqslant \tau_m$ уравнения (14). Подставляя управление (13) в (3) и используя условия теоремы, получаем

$$\pi_m z_m(\tau_m) = \pi_m e^{\tau_m C_m} z_{m0} + \int\limits_0^{\tau_{m-1}} \pi_m e^{(\tau_m - \tau) C_m} D_m v(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \Psi_m(\tau_m, \tau) v(\tau)\, d\tau - \int\limits_{m-1}^{\tau_m} \pi_m e^{(\tau_m - \tau) C_m} B_m \omega^*_m(\tau)\, d\tau =$$

$$= b^1_m + \int\limits_{m-1}^{\tau_m} \Psi_m(\tau_m, \tau) v(\tau)\, d\tau + b^2_m + \int^{m-1} \pi_m e^{(\tau_m - \tau) C_m} D_m v(\tau)\, d\tau -$$

$$- \int\limits_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \pi_m e^{(\tau_m - \tau) C_m} B_m \omega^*_m(\tau)\, d\tau \in b^1_m + G_m(\tau_m) \subset M^1_m,$$

т. е. $\pi_m z_m(\tau_m) \in M^1_m$, что означает $z_m(\tau_m) \in M_m$. Допустимость управлений (7), (12), (13) следует из условия *а*), *б*) предположения 1, а также выбора чисел $r_1, r_2, \ldots, r_m$. Теорема полностью доказана.

Замечание 1. Результаты настоящей работы останутся справедливыми и в случае, когда на управления u_i, v наложены следующие ограничения:

$$\int_0^\infty |u_i(\tau)|^p d\tau \leqslant \rho_i^p, \quad \int_0^\infty |v(\tau)|^p d\tau \leqslant \sigma^p, \quad p \geqslant 2.$$

Пример. Пусть уравнение (1) имеет вид

$$\dot z_{1i} = z_{2i} + v, \quad \dot z_{2i} = -u_i, \tag{16}$$

(много «крокодилов» и один «мальчик»), где $z_{1i}, z_{2i}, u_i, v \in R^\nu$, $\nu \geqslant 1$, u_i — управление i-го преследователя, v — управление убегающего. Они удовлетворяют ограничениям (2). Терминальное множество

$$M_i = M_i^0 + M_i^1, \quad M_i^0 = \{(z_{1i}, z_{2i}) : z_{1i} = 0\},$$

$$M_i^1 = \{(z_{1i}, z_{2i}) : |z_{1i}| \leqslant l_i\}, \quad l_i > 0.$$

Вычисления показывают, что если

$$\alpha_1^2 \rho_1^2 + \alpha_2^2 \rho_2^2 + \cdots + \alpha_m^2 \rho_m^2 > \sigma^2,$$

где $\alpha_i = 3l_i^2/\sigma$, то для всех начальных положений $\left(z_{1i}^0, z_{2i}^0\right) \in M_i$ выполнены предположения 1, 2 и, согласно теореме, преследование гарантируется из всех начальных положений.

Отметим, что к игре (16) не применимы результаты работ [1—4, 7], а в случае контрольного примера условия нашей теоремы совпадают с условиями из [2].

Замечание 2. Можно доказать, что если выполнены соответствующие условия работ [1, 4], то выполняются все условия и настоящей работы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сатимов Н. Ю., Рихсиев Б. Б., Хамдамов А. А. О задаче преследования для линейных дифференциальных и дискретных игр многих лиц с интегральными ограничениями//Мат. сборник. 1982. Т. 118 (160). № 4 (8). С. 456—469.
2. Сатимов Н. Ю. Дифференциальные игры многих лиц с интегральными ограничениями на управляющие параметры//Оптимальное управление, геометрия и анализ//Тезисы докладов всесоюзной школы. Кемерово, 1986. С. 41.
3. Сатимов Н. Ю., Фазылов А. З., Хамдамов А. А. О задачах преследования и уклонения в дифференциальных и дискретных играх многих лиц с интегральными органичениями//Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20. № 8. С. 1388—1396.
4. Рихсиев Б. Б. Об одной линейной задаче преследования многих лиц с интегральными ограничениями на управления//Неклассические задачи математической физики. Ташкент: Фан, 1985. С. 184—202.
5. Никольский М. С. Прямой метод в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями//Управляемые системы. Новосибирск, ИМ ИК СО АН СССР, 1979. Вып. 2. С. 50—59.

6. Мезенцев А. В. О задаче преследования с интегральными ограничениями//Вестник МГУ. Сер. 15. Выч. матем. и киберн. 1981. № 1. С. 57—60
7. Цветкова Н. В. Линейная игра преследования с геометрическими и интегральными ограничениями//Деп. в ВИНИТИ, 1981. № 51—81. 29 с.
8. Фазылов А. З. О линейных дифференциальных играх преследования при различных ограничениях на управление игроков//Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1980. № 2. С. 50—56.
9. Рахманов А. Т. К исследованию дифференциальных игр преследования с геометрическими и интегральными ограничениями//Доклады АН УзССР. 1986. № 10. С. 3—5.
10. Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры преследования//Мат. сборник 1980. Т. 112. № 3. С. 307—330.
11. Филиппов А. Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования//Вестник МГУ. Сер. математика и механика. 1959. № 2. С. 25—32.

А. СОПУЕВ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЧАСТИ

Рассмотрим уравнения

$$u_{xx} + \frac{k}{x} u_x - u_y = 0, \quad -1 < k < 1, \tag{1}$$

$$u_{xx} - (-x)^m u_{yy} = 0, \quad m > 0. \tag{2}$$

Пусть D — область, ограниченная характеристиками

$$AC: \xi = y - \frac{2}{m+2} (-x)^{\frac{m+2}{2}} = 0,$$

$$BC: \eta = y + \frac{2}{m+2} (-x)^{\frac{m+2}{2}} = 1,$$

уравнения (2) и прямыми $y=0$, $y=1$. Обозначим через D_1 и D_2 части D, лежащие соответственно в полуплоскостях $x>0$ и $x<0$, а $\overline{J} = \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2$.

Задача 1. Требуется найти функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x, y) \in C(\overline{D})$;

2) $u(x, y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области D_1 и обобщенным решением класса R_1 уравнения (2) в области D_2;

3) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{\xi=0} = \psi(\eta), \tag{3$_1$}$$

$$u|_{y=0} = \varphi(x), \tag{3_2}$$

а также условию склеивания:

$$\lim_{x \to -0} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \lim_{x \to +0} x^k \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \quad 0 < y < 1,$$

где $\psi(\eta)$, $\varphi(x)$ заданные функции, имеющие ограниченные первые производные, удовлетворяющие условию Гельдера, причем $\psi(0) = \varphi(0) = 0$.

Задача 2. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую всем условиям задачи 1, если вместо условия (3_1) берется условие

$$u|_{\eta=\xi} = \psi(\xi). \tag{4}$$

Обобщенным решением класса R_1 [1] уравнения (2) в области D_2 называется функция $u(\xi, \eta)$, определяемая формулой

$$u(\xi, \eta) = \gamma_1 \int_\xi^\eta \frac{(\eta - \xi)^{1-2\beta} \tau(t)\, dt}{(\eta - t)^{1-\beta} (t - \xi)^{1-\beta}} - \gamma_2 \int_\xi^\eta \frac{\nu(t)\, dt}{(\eta - t)^\beta (t - \xi)^\beta}, \tag{5}$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta} \frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}, \quad \beta = \frac{m}{2(m+2)},$$

$$\tau(y) = u(0, y), \quad \nu(y) = \lim_{x \to -0} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}.$$

Пользуясь первым условием (3) из (5), имеем

$$\tau(y) = \gamma \int_0^y \frac{\nu(t)}{(y - t)^{2\beta}}\, dt + \Psi(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{6}$$

где

$$\Psi(y) = \bar{\gamma} \int_0^y \frac{t^{2\beta} \bar{\psi}(t)}{y^\beta (y - t)^\beta}\, dt,$$

$$\bar{\psi}(t) = \psi'(t) + \beta \frac{\psi(t)}{t}, \quad \gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta} \bar{\gamma}, \quad \bar{\gamma} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)}.$$

С другой стороны, решение второй краевой задачи для уравнения (1) с условиями

$$\lim_{x \to +0} x^k \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \nu(y), \quad u(x, 0) = \varphi(x)$$

имеет вид [2]:

$$u(x, y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\xi^k (x\xi)^\varkappa}{2y} I_{-\varkappa}\left(\frac{x\xi}{2y}\right) e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4y}} \varphi(\xi)\, d\xi -$$

$$- \bar{\varkappa} \int\limits_0^y \frac{1}{(y-t)^{1-\varkappa}} e^{-\frac{x^2}{4(y-t)}} \nu(t)\, dt, \tag{7}$$

где $\varkappa = \frac{1-k}{2}$, $\bar{\varkappa} = \frac{1}{2^{k}\Gamma(1-\varkappa)}$, а $I_{-\varkappa}(z)$ — функция Бесселя. Отсюда при $x = 0$ имеем

$$\tau(y) = -\bar{\varkappa} \int\limits_0^y \frac{\nu(t)}{(y-t)^{1-\varkappa}} dt + \Phi(y), \tag{8}$$

где

$$\Phi(y) = \bar{\varkappa} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\xi^k}{y^{1-\varkappa}} e^{-\frac{\xi^2}{4y}} \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Тогда в силу условия склеивания из (6) и (8) получим, что задача 1 сводится к разрешимости интегрального уравнения

$$\gamma \int\limits_0^y \frac{\nu(t)\, dt}{(y-t)^{2\beta}} + \bar{\varkappa} \int\limits_0^y \frac{\nu(t)\, dt}{(y-t)^{1-\varkappa}} = g(y), \tag{9}$$

где

$$g(y) = \Phi(y) - \Psi(y).$$

В случае $2\beta > 1-\varkappa$ или $2\beta < 1-\varkappa$ при помощи формулы обращения

$$\nu(y) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \frac{d}{dy} \int\limits_0^y \frac{f(t)}{(y-t)^{1-\alpha}} dt \tag{10}$$

интегрального уравнения Абеля

$$\int\limits_0^y \frac{\nu(t)}{(y-t)^\alpha} dt = f(y), \quad 0 < \alpha < 1,$$

уравнение (9) сводится к интегральному уравнению со слабой особенностью, которое имеет единственное решение.

В случае $2\beta = 1-\varkappa$ уравнение (9) решается по формуле (10).

Перейдем к решению задачи 2. Из формулы (5) с учетом условия (4) получаем

$$\gamma_1 \int_y^1 \frac{(1-y)^{1-2\beta}\,\tau(t)\,dt}{(1-t)^{1-\beta}(t-y)^{1-\beta}} - \gamma_2 \int_y^1 \frac{\nu(t)\,dt}{(1-t)^{\beta}(t-y)^{\beta}} = \psi(y),$$

$$0 \leqslant y \leqslant 1.$$

Отсюда, применяя формулу обращения (10), нетрудно получить соотношение

$$\tau(y) = \gamma \int_y^1 \frac{\nu(t)}{(t-y)^{2\beta}}\,dt + \Psi_1(y), \tag{11}$$

где

$$\Psi_1(y) = -\frac{\sin \pi(1-\beta)}{\gamma_1 \pi}(1-y)^{1-\beta}\frac{d}{dy}\int_y^1 \frac{\psi(s)}{(s-y)^{\beta}(1-s)^{1-2\beta}}\,ds.$$

Теперь докажем единственность решения задачи 2. Справедлива следующая лемма [3]. Пусть $-1<k<1$ и регулярное решение уравнения (1) в $G=\{(x, y): 0<x<R,\ 0<y<1\}$. Если в точке $(0, y_0)$ функция $u(x, y)$ достигает положительного максимума (отрицательного минимума), то

$$\lim_{x\to+0} x^k u_x(x, y_0) < 0 \quad \left(\lim_{x\to+0} x^k u_x(x, y_0) > 0\right).$$

Пусть $\psi(\xi)=0$. Тогда формула (11) принимает вид:

$$\tau(y) = \gamma \int_y^1 \frac{\nu(t)}{(t-y)^{2\beta}}\,dt.$$

Отсюда, применяя формулу обращения Абеля, имеем

$$\nu(y) = -\frac{\sin 2\pi\beta}{\gamma\pi}\frac{d}{dy}\int_y^1 \frac{\tau(t)}{(t-y)^{1-2\beta}}\,dt =$$

$$= \frac{\sin 2\pi\beta}{\pi\gamma}\left[(1-2\beta)\int_y^1 \frac{\tau(y)-\tau(t)}{(t-y)^{2-2\beta}}\,dt + \frac{\tau(y)}{(1-y)^{1-2\beta}}\right].$$

Теперь нетрудно доказать, что решение $u(x, y)$ в интервале J не может достигать экстремума. Предположим, что положительный максимум достигается в точке $P(0, y_0)\in J$. Полагая в предыдущей формуле $y=y_0$, получаем

$$\nu(y_0) = \frac{\sin 2\pi\beta}{\pi\gamma}\left[(1-2\beta)\int_{y_0}^1 \frac{\tau(y_0)-\tau(t)}{(t-y_0)^{2-2\beta}}\,dt + \frac{\tau(y_0)}{(1-y_0)^{1-2\beta}}\right].$$

Отсюда в силу того, что $\tau(y_0)>0$, $\tau(y_0)-\tau(t)>0$, следует $\nu(y_0)>0$. Это противоречит указанной выше лемме. Тогда из принципа максимума для параболических уравнений [4] и из единственности решений задачи Коши для уравнения (2) следует единственность решения задачи 2.

Исключая из (8) и (11) функцию $\tau(y)$, получаем интегральное уравнение

$$\bar{\varkappa}\int_0^y \frac{\nu(t)}{(y-t)^{1-\varkappa}}\,dt+\gamma\int_y^1 \frac{\nu(t)}{(t-y)^{2\beta}}\,dt=g_1(y), \tag{12}$$

где

$$g_1(y)=\Phi(y)-\Psi_1(y).$$

В случае $1-\varkappa\neq 2\beta$ при помощи обращения интегрального уравнения Абеля уравнение (12) сводится к интегральному уравнению Фредгольма со слабой особенностью, разрешимость которого следует из единственности решения задачи 2.

В случае $1-\varkappa=2\beta$ уравнение (12) становится сингулярным интегральным уравнением. Регуляризируя его методом Карлемана — Векуа [5], получаем уравнение Фредгольма второго рода, разрешимость которого также, в силу эквивалентности, следует из единственности решения задачи 2.

В заключение отметим, что обзор краевых задач для параболо-гиперболических уравнений приведен в работе [6].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985. 304 с.
2. Егоров И. Е. Об одной краевой задаче для системы сингулярных параболических уравнений//Динамика сплошной среды. Новосибирск: 1973. Вып. 14. С. 100—105.
3. Терсенов С. А. Об одной краевой задаче для системы уравнения параболического типа, вырождающейся на границе//Докл. АН СССР. 1973. Т. 213. № 3. С. 557—560.
4. Терсенов С. А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. Новосибирск, 1973. 144 с.
5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.
6. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для параболо-гиперболических уравнений. Ташкент: Фан, 1986. 220 с.

Д. ХАЛМУРАТОВ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

1. В смешанной области D рассмотрим уравнение

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)Lu=0, \tag{1}$$

где

$$D = D_1 \cup J \cup D_2, \quad D_1 = \{(x, y) : 0 < x < 1,\ 0 < y \leqslant 1\},$$

$$D_2 = \{(x, y) : -1 < x < 0,\ 0 < y \leqslant 1\},\ J = \{(x, y) : x = 0, 0 < y \leqslant 1\},$$

$$Lu = \begin{cases} L_1 u = u_{xx} - u_y & \text{в} \quad D_1, \\ L_2 u = u_{xx} - u_{yy} & \text{в} \quad D_2, \end{cases}$$

a, b, c — заданные вещественные числа $(a^2+b^2\neq 0)$. Здесь линия изменения типа J является нехарактеристической. Отметим, что в области с нехарактеристической линией измерения типа исследованы некоторые задачи: в работе [1] изучена задача Коши для уравнения (1), в [2] — задача Коши и краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа второго порядка, а в [3] — краевые задачи для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения второго порядка. Укажем также работу [4], в которой рассмотрены некоторые краевые задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения второго порядка с двумя линиями изменения типа.

В настоящей работе рассматривается следующая задача для уравнения (1):

Задача 1. Требуется определить функцию $u(x, y)$ непрерывную в замкнутой области D, удовлетворяющую уравнению (1) в области D при $x\neq 0$ и следующим краевым условиям:

1) при $0 < b/a < +\infty$ —

$$u(1, y) = \sigma_1(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{2}$$

$$u(-1, y) = \sigma_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{3}$$

$$u_x(-1, y) = \sigma_4(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{4}$$

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{5}$$

$$u(x, 0) = f_2(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \tag{6}$$

$$u_y(x, 0) = \varphi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{7}$$

$$u_y(x, 0) = \varphi_2(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \tag{8}$$

$$u_{yy}(x, 0) = \psi(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 0; \tag{9}$$

2) при $-\infty < b/a < 0$ — (2), (3), (5)—(9) и

$$u_x(1, y) = \sigma_3(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1; \tag{10}$$

3) при $a\neq 0$, $b=0$ (2)—(6), (8);

4) при $a=0$, $b\neq 0$ (2), (3), (5)—(9), а также на линии J — условиям склеивания: в случае 4) —

$$u(-0, y) = u(+0, y) = \tau(y), \tag{11}$$

$$u_x(-0, y) = u_x(+0, y) = \nu(y), \tag{12}$$

а в остальных случаях, кроме этих и

$$u_{xx}(-0, y) = u_{xx}(+0, y) = \mu(y). \tag{13}$$

Здесь σ_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$, $f_j(x)$, $\varphi_j(x)$ $(j = 1, 2)$, $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, причем они удовлетворяют некоторым условиям согласования, обеспечивающим достаточную гладкость решения задачи, а $\tau(y)$, $\nu(y)$, $\mu(y)$ — пока неизвестные дифференцируемые функции.

Замечание 1. Задачу 1 можно решить и в случае с разрывными условиями склеивания на линии J изменения типа оператора L.

2. Рассмотрим случай 1. Без ограничения общности можно полагать $a>0$, $b>0$.

а) Пусть $1<b/a<+\infty$, т. е. $0<a/b<1$. Введем обозначение

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y) & \text{в} \quad D_1 \\ u_2(x, y) & \text{в} \quad D_2. \end{cases}$$

Тогда уравнение (1) можно переписать в виде

$$u_{1xx} - u_{1y} = \omega_1(bx - ay) \exp\left(-\frac{c}{b} y\right) \quad \text{в} \quad D_1 \tag{14}$$

$$u_{2xx} - u_{2yy} = \omega_2(bx - ay) \exp\left(-\frac{c}{b} y\right) \quad \text{в} \quad D_2, \tag{15}$$

где $\omega_i(bx-ay)$ $(i=1, 2)$ — произвольные непрерывно-дифференцируемые функции.

Из (15) при $y=0$ в силу (6), (9) имеем

$$\omega_2(bx) = f_2(x) - \psi(x)$$

или

$$\omega_2(bx - ay) = f_2\left(x - \frac{a}{b} y\right) - \psi\left(x - \frac{a}{b} y\right), \quad -1 \leqslant x - \frac{a}{b} y \leqslant 0.$$

Прежде чем перейти к решению задачи 1, рассмотрим смешанную задачу

$$u_{2xx} - u_{2yy} = \Omega(bx - ay) \exp\left(-\frac{c}{b} y\right), \quad y - 2 \leqslant x \leqslant 1 + \frac{a}{b} y, \tag{16}$$

$$u_2(x,0)=F(x),\ u_{2y}(x,0)=\Phi(x),\ -2\leqslant x\leqslant +1, \tag{17}$$

$$u_2(0,y)=\tau(y),\ u_2(-1,y)=\sigma_2(y),\ 0\leqslant y\leqslant 1, \tag{18}$$

$$u_{2x}(-1,y)=\sigma_4(y),\quad 0\leqslant y\leqslant 1, \tag{19}$$

где

$$F(x)=\begin{cases} F_1(x), & \text{если} \quad -2\leqslant x<-1,\\ f_2(x), & \text{если} \quad -1\leqslant x\leqslant 0,\\ F_2(x), & \text{если} \quad 0<x<1,\end{cases}$$

$$\Phi(x)=\begin{cases} \Phi_1(x), & \text{если} \quad -2<x\leqslant -1,\\ \varphi_2(x), & \text{если} \quad -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \Phi_2(x), & \text{если} \quad 0\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}$$

$$\Omega(bx-ay)=$$

$$=\begin{cases} F_1''\left(x-\frac{a}{b}y\right)-\Psi_1\left(x-\frac{a}{b}y\right), & \text{если} \quad \frac{b-a}{b}y-2\leqslant x-\frac{a}{b}\times\\ & \times y\leqslant -1-\frac{a}{b},\\ F_1''\left(x-\frac{a}{b}y\right)-\Psi_2\left(x-\frac{a}{b}y\right), & \text{если} \quad -1-\frac{a}{b}\leqslant x-\frac{a}{b}\times\\ & \times y<-1-\frac{a}{b}y,\\ F_1''\left(x-\frac{a}{b}y\right)-\Psi_3\left(x-\frac{a}{b}y\right), & \text{если} \quad -1-\frac{a}{b}y\leqslant x-\frac{a}{b}y\leqslant -1\\ f_2''\left(x-\frac{a}{b}y\right)-\Psi\left(x-\frac{a}{b}y\right), & \text{если} \quad -1\leqslant x-\frac{a}{b}y\leqslant 0,\\ F_2''\left(x-\frac{a}{b}y\right)-\Psi_4\left(x-\frac{a}{b}y\right), & \text{если} \quad 0\leqslant x-\frac{a}{b}y<1,\end{cases}$$

а $F_j(x)$, $\Phi_j(x)$ $(j=1,\ 2)$, $\Psi_i\left(x-\frac{a}{b}y\right)$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ — пока неизвестные достаточно гладкие функции.

Решение задачи (16)—(19) будем искать в виде

$$u_2(x,y)=u_{21}(x,y)+u_{22}(x,y)+u_{23}(x,y), \tag{20}$$

где $u_{2i}(x,\ y)$ $(i=1,\ 2)$ — решения уравнения

$$u_{2xx}-u_{2yy}=0, \tag{21}$$

$u_{23}(x,\ y)$ — решение уравнения (16), удовлетворяющее соответственно условиям

$$\begin{cases} u_{21}(x,0)=F(x),\ u_{21y}(x,0)=0,\ -2\leqslant x\leqslant 1, & (22)\\ u_{21}(0,y)=0,\quad u_{21}(-1,y)=0,\quad 0\leqslant y\leqslant 1, & (23)\end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{22}(x,0)=0,\ u_{22y}(x,0)=\Phi(x),\ -2\leqslant x\leqslant 1, & (24)\\ u_{22}(0,y)=0,\ u_{22}(-1,y)=0,\ 0\leqslant y\leqslant 1, & (25)\end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{23}(x,0)=0,\ u_{23y}(x,0)=0,\ -2\leqslant x\leqslant 1, & (26)\\ u_{23}(0,y)=\tau(y),\ u_{23}(-1,y)=\sigma_2(y),\ 0\leqslant y\leqslant 1. & (27)\end{cases}$$

Решение уравнения (21), удовлетворяющее условиям (22), имеет вид (см. [1])

$$u_{21}(x,y)=\frac{F(x+y)+F(x-y)}{2}.$$

Реализуя условия (23), находим

$$F(x)=\begin{cases}-f_2(-2-x), & \text{если}\quad -2\leqslant x\leqslant -1,\\ f_2(x), & \text{если}\quad -1\leqslant x\leqslant 0,\\ -f_2(-x), & \text{если}\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

причем $f_2(-1)=f_2(0)=0$.

Аналогичным образом, записывая решение уравнения (21), удовлетворяющее условиям (24), и реализуя условия (25), имеем

$$\Phi(x)=\begin{cases}-\varphi_2(-2-x), & \text{если}\quad -2\leqslant x\leqslant -1,\\ \varphi_2(x), & \text{если}\quad -1\leqslant x\leqslant 0,\\ -\varphi_2(-x), & \text{если}\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

причем $\varphi_2(-1)=\varphi_2(0)=0$.

Теперь записываем решение уравнения (16), удовлетворяющее условиям (26) [1]

$$u_{23}(x,y)=-\frac{1}{2}\int_0^y d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\Omega(b\xi-a\eta)\exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right)d\xi. \qquad (28)$$

Подставляя (28) в первое из условий (27), приходим к уравнению

$$\int_0^y d\eta\int_{\eta-y}^{y-\eta}\Omega(b\xi-a\eta)\exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right)d\xi=-2\tau(y),\quad 0\leqslant y\leqslant 1.$$

Дифференцируя это уравнение, после некоторых выкладок получаем

$$\int_0^y \Psi_4(t)\exp\left[\frac{c(t-y)}{b+a}\right]dt=\frac{2(b+a)}{b}\tau'(y)-$$

$$-\int_0^y f_2'(-t)\exp\left[\frac{c(t-y)}{b+a}\right]dt+$$

$$+\int_{-\frac{a}{b}y}^{0} [f_2''(t)-\psi(t)] \exp\left[\frac{c(t-y)}{b+a}\right] dt +$$

$$+\frac{b+a}{b}\int_0^y \left[f_2''\left(\frac{b-a}{b}\eta - y\right) - \psi\left(\frac{b-a}{b}\eta - y\right)\right] \exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right) d\eta. \tag{29}$$

Дифференцируя полученное уравнение еще раз, находим

$$\Psi_4(y) = \frac{2(b+a)}{b}\tau''(y) + \frac{2c}{b}\tau'(y) + \delta_1(y), \tag{30}$$

где

$$\delta_1(y) = \frac{c}{b}\int_0^y \left[f_2''\left(\frac{b-a}{b}\eta - y\right) - \psi\left(\frac{b-a}{b}\eta - y\right)\right] \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right) d\eta - \frac{b+a}{b}\int_0^y \left[f_2'''\left(\frac{b-a}{b}\eta - y\right) - \right.$$

$$\left. - \psi'\left(\frac{b-a}{b}\eta - y\right)\right] \exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right) d\eta - f_2''(-y) +$$

$$+\frac{b+2a}{b}\left[f_2''\left(-\frac{a}{b}y\right) - \psi\left) - \frac{a}{b}y\right)\right] \exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right),$$

причем $f_2''(0) = 0$.

Теперь, подставляя (28) во второе из условий (27), имеем

$$\int_0^y d\eta \int_{-1-y+\eta}^{-1+y-\eta} \Omega(b\xi - a\eta) \exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right) d\xi = -2\sigma_2(y), \ 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

Меняя порядок интегрирования в левой части этого уравнения, затем дифференцируя его, после некоторых преобразований получаем

$$-\frac{a}{b-a}\int_y^{\frac{a}{b}y} \Psi_2\left(-1-\frac{a}{b}t\right) \exp\left[-\frac{c(by-at)}{b(b-a)}\right] dt +$$

$$+\frac{a}{b+a}\int_0^y \Psi_3\left(-1-\frac{a}{b}t\right) \exp\left[-\frac{c(by+at)}{b(b+a)}\right] dt =$$

$$= \delta_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{a}{b}, \tag{31}$$

$$\frac{b}{b-a}\int\limits_{\frac{a}{b}}^{y} \Psi_1(-1-t)\exp\left[\frac{c}{b-a}(t-y)\right]dt +$$

$$+\frac{a}{b+a}\int\limits_{\frac{a}{b}}^{y}\Psi_2\left(-1-\frac{a}{b}t\right)\exp\left[-\frac{c(by+at)}{b(b+a)}\right]dt =$$

$$+\delta_3(y) - \int\limits_{\frac{ay-b}{b-a}}^{-1}\Psi_2\left(\frac{(b-a)\xi - a(1+y)}{b}\right)\exp\left[-\frac{c}{b}(\xi+1+y)\right]\times$$

$$\times d\xi - \frac{a}{b+a}\int\limits_0^{\frac{a}{b}}\Psi_2\left(-1-\frac{a}{b}t\right)\exp\left[-\frac{c(by+at)}{b(b+a)}\right]dt,$$

$$\frac{a}{b}\leqslant y\leqslant 1, \tag{32}$$

где

$$\delta_2(y) = \int\limits_{-1-y}^{-1} f_2''\left(-2-\frac{(b-a)\xi - a(1+y)}{b}\right)\exp\left[-\frac{c}{b}(y+1+\xi)\right]\times$$

$$\times d\xi + \int\limits_{-1}^{-1+\frac{a}{b+a}y} f_2''\left(-2-\frac{(b+a)\xi - a(-1+y)}{b}\right)\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{c}{b}(y-1-\xi)\right]\xi - 2\sigma_2'(y) -$$

$$-\int\limits_0^{\frac{b}{b+a}y}\left[f_2''\left(\frac{b(y-1)-(b+a)\eta}{b}\right) - \psi\left(\frac{b(y-1)-(b+a)\eta}{b}\right)\right]\times$$

$$\times \exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right)d\eta,$$

$$\delta_3(y) = \int\limits_0^{\frac{by-a}{b-a}} F''\left(\frac{(b-a)\eta - b(1+y)}{b}\right)\exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right)d\eta +$$

$$+2\sigma_2'(y) + \int\limits_{-1}^{-1+\frac{a}{b+a}y} F_1''\left(\frac{(b+a)\xi - a(y-1)}{b}\right)\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{c}{b}(y-1-\xi)\right]d\xi + \int\limits_0^{\frac{b}{b+a}y}\left[f_2''\left(\frac{b(y-1)-(b+a)\eta}{b}\right) -\right.$$

$$\left.-\psi\left(\frac{(y-1)b-(b+a)\eta}{b}\right)\right]\exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right)d\eta +$$

$$+\int\limits_{\frac{ay-b}{b-a}}^{-1} F_1''\left(\frac{(b-a)\xi - a(1+y)}{b}\right)\exp\left[-\frac{c}{b}(\xi+1+y)\right]d\xi.$$

Решение задачи (16)—(18) представляется в виде

$$u_2(x,y) = \frac{F(x+y)+F(x-y)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\Phi(t)\,dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^y d\eta\int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\Omega(b\xi - a\eta)\exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right)d\xi. \tag{33}$$

Меняя порядок интегрирования в последнем интеграле (33) и дифференцируя (33) по x, затем полагая $x=-1$ и учитывая (19), имеем

$$-\frac{a}{b-a}\int\limits_y^{\frac{b}{a}y}\Psi_2\left(-1-\frac{a}{b}t\right)\exp\left[-\frac{c(by-at)}{b(b-a)}\right]dt -$$

$$-\frac{a}{b+a}\int\limits_0^y\Psi_2\left(-1-\frac{a}{b}t\right)\exp\left[-\frac{c(by+at)}{b(b+a)}\right]dt =$$

$$=\delta_4(y), \quad 0\leqslant y\leqslant\frac{a}{b}, \tag{34}$$

$$\frac{b}{b-a}\int\limits_{\frac{a}{b}}^{y}\Psi_1(-1-t)\exp\left[\frac{c(t-y)}{b-a}\right]dt -$$

$$-\frac{a}{b+a}\int_{\frac{a}{b}}^{y}\Psi_3\left(-1-\frac{a}{b}t\right)\exp\left[-\frac{c(by+at)}{b(b+a)}\right]dt=$$

$$=\frac{a}{b+a}\int_{0}^{\frac{a}{b}}\Psi_3\left(-1-\frac{a}{b}t\right)\exp\left[-\frac{c(by+at)}{b(b+a)}\right]dt-$$

$$-\int_{\frac{ay-b}{b-a}}^{-1}\Psi_2\left(\frac{(b-a)\xi-a(1+y)}{b}\right)\exp\left[-\frac{c}{b}(y+1+\xi)\right]d\xi+$$

$$+\delta_5(y),\quad \frac{a}{b}\leqslant y\leqslant 1, \qquad (35)$$

где

$$\delta_4(y)=2\sigma_4(y)-2f_2'(-1+y)-2\varphi_2(y-1)-\delta_2(y)-2\sigma_2'(y),$$

$$\delta_5(y)=2f_2'(y-1)+2\varphi_2(y-1)-2\sigma_4(y)-$$

$$-\int_{0}^{\frac{by-a}{b-a}}f_2''\left(-2-\frac{(b-a)\eta-b(1+y)}{b}\right)\exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right)d\eta-$$

$$-\int_{\frac{ay-b}{b-a}}^{-1}f_2''\left(-2-\frac{(b-a)\xi-a(1+y)}{b}\right)\exp\left[-\frac{c}{b}(y+1+\xi)\right]d\xi+$$

$$+\int_{-1}^{-1+\frac{a}{b+a}y}f_2''\left(-2-\frac{(b+a)\xi-a(y-1)}{b}\right)\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{c}{b}(y-1-\xi)\right]d\xi-\int_{0}^{\frac{b}{b+}y}f_2''\left(\frac{b(y-1)-(b+a)\eta}{b}\right)-$$

$$-\psi\left(\frac{b(y-1)-(b+a)\eta}{b}\right)\Bigg]\exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right)d\eta.$$

Из (31) и (34) следует

$$\int_0^y \Psi_2\left(-1-\frac{a}{b}t\right)\exp\left[-\frac{c(by+at)}{b(b+a)}\right]dt =$$

$$= \frac{b+a}{2a}[\delta_2(y)-\delta_4(y)], \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{a}{b},$$

$$\int_y^{-\frac{a}{b}y} \Psi_2\left(-1-\frac{a}{b}t\right)\exp\left[-\frac{c(by+at)}{b(b-a)}\right]dt =$$

$$= -\frac{b-a}{2a}[\delta_2(y)+\delta_4(y)], \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{a}{b}.$$

Дифференцируя последние уравнения, после некоторых преобразований получаем

$$\Psi_2\left(-1-\frac{a}{b}y\right) = \left\{\frac{c}{2a}[\delta_2(y)-\delta_4(y)] + \frac{b+a}{2a}[\delta_2'(y) -\right.$$

$$\left.-\delta_4'(y)]\right\}\exp\left(\frac{c}{b}y\right), \; 0 \leqslant y \leqslant \frac{a}{b}, \; -1-\frac{a^2}{b^2} \leqslant -1-\frac{a}{b}y \leqslant 1; \tag{36}$$

$$\Psi_2(-1-y) - \frac{a}{b}\Psi_2\left(-1-\frac{a}{b}y\right)\exp\left(-\frac{c}{b}y\right) =$$

$$= -\frac{c}{2b}[\delta_2(y)+\delta_4(y)] - \frac{b-a}{2b}[\delta_2'(y)+\delta_4'(y)],$$

$$0 \leqslant y \leqslant \frac{a}{b}, \quad -1-\frac{a}{b} \leqslant -1-y \leqslant -1. \tag{37}$$

Уравнение (37) является функциональным уравнением, его можно решить методом последовательных приближений:

$$\Psi_2^{(n)}(-1-y) = q^n \psi(-1)\exp\left[-\frac{c(1-q^n)y}{b(1-q)}\right] +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} q^i \delta_6(q^i y)\exp\left[-\frac{c(1-q^i)y}{b(1-q)}\right], \tag{38}$$

где

где

$$q = \frac{a}{b} < 1,$$

$$\delta_6(y) = -\frac{c}{2b}[\delta_3(y) + \delta_4(y)] - \frac{b-a}{2b}[\delta_3'(y) + \delta_4'(y)].$$

Из (38) при $n \to +\infty$ имеем

$$\Psi_2(-1-y) = \sum_{i=0}^{\infty} q^{2i}\, \delta_6(q^i y) \exp\left[-\frac{c(1-q^i)y}{b(1-q)}\right], \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{a}{b}. \tag{39}$$

Последний ряд сходится абсолютно и равномерно. В самом деле, этот ряд мажорируется числовым рядом

$$M \sum_{i=0}^{\infty} q^i,$$

где

$$M = \max_{0 \leqslant y \leqslant \frac{a}{b}} \left\{|\delta_6(y)|, \left|\delta_6(y) \exp\left(-\frac{c}{b}y\right)\right|, \left|\delta_6(y) \exp\left(-\frac{cy}{b-a}\right)\right|\right\},$$

а последний ряд сходится.

Из (32) и (35) получаем

$$\int_{\frac{a}{b}}^{y} \Psi_1(-1-t) \exp\left[\frac{c(t-y)}{b-a}\right] dt = \frac{b-a}{2b}[\delta_7(y) + \delta_8(y)],$$

$$\frac{a}{b} \leqslant y \leqslant 1, \tag{40}$$

$$\int_{\frac{a}{b}}^{y} \Psi_2\left(-1 - \frac{a}{b}t\right) \exp\left[-\frac{c(by+at)}{b(b+a)}\right] dt =$$

$$= \frac{b+a}{2a}[\delta_7(y) - \delta_8(y)], \quad \frac{a}{b} \leqslant y \leqslant 1. \tag{41}$$

Здесь

$$\delta_7(y) = \delta_2(y) - \int_{\frac{ay-b}{b-a}}^{-1} \Psi_2\left(\frac{(b-a)\xi - a(1+y)}{b}\right) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{c(\xi+1+y)}{b}\right)\Big] d\xi -$$

$$-\frac{a}{b+a}\int_0^{\frac{a}{b}} \Psi_2\left(-1-\frac{a}{b}t\right) \exp\left[-\frac{c(by+at)}{b(b+a)}\right] dt,$$

$$\delta_8(y) = \frac{a}{b+a}\int_0^{\frac{a}{b}} \Psi_2\left(-1-\frac{a}{b}t\right) \exp\left[-\frac{c(by+at)}{b(b+a)}\right] dt -$$

$$-\int_{\frac{ay-b}{b-a}}^{-1} \Psi_2\left(\frac{(b-a)\xi - a(1+y)}{b}\right) \exp\left[-\frac{c(y+1+\xi)}{b}\right] d\xi + \delta_1(y),$$

а функции $\Psi_2\left(-1-\frac{a}{b}t\right)$ при $0 \leqslant t \leqslant \frac{a}{b}$ и Ψ_2 определяются по формулам (36) и (39) соответственно.

Дифференцируя (40) и (41), находим

$$\Psi_1(-1-y) = \frac{c}{2b}[\delta_7(y) + \delta_8(y)] + \frac{b-a}{2b}[\delta_7'(y) + \delta_8'(y)],$$

$$\frac{a}{b} \leqslant y \leqslant 1, \quad -2 \leqslant -1-y \leqslant -1-\frac{a}{b},$$

$$\Psi_2\left(-1-\frac{a}{b}y\right) = \left\{\frac{c}{2a}[\delta_7(y) - \delta_8(y)] + \right.$$

$$\left. + \frac{b+a}{2a}[\delta_7'(y) - \delta_8'(y)]\right\} \exp\left(\frac{c}{b}y\right),$$

$$\frac{a}{b} \leqslant y \leqslant 1, \quad -1-\frac{a}{b} \leqslant -1-\frac{a}{b}y \leqslant -1-\frac{a^2}{b^2}.$$

Меняя порядок интегрирования в последнем интеграле (33) и дифференцируя (33) по x, затем полагая $x=0$ и учитывая (12), приходим к уравнению

$$\int_0^y \Psi_4(t) \exp\left[\frac{c(t-y)}{b+a}\right] dt = \frac{2(b+a)}{b}\nu(y) - \delta_0(y), \tag{42}$$

где

$$\delta_0(y) = \frac{2(b+a)}{b}[f_2''(-y) - \varphi_2(-y)] + \frac{b+a}{b}\int\limits_{-y}^{0}\Big[f_2''\times$$

$$\times\left(\frac{(b-a)\xi - ay}{b}\right) - \psi\left(\frac{(b-a)\xi - ay}{b}\right)\Big]\exp\left[-\frac{c}{b}(\xi + y)\right]d\xi -$$

$$-\frac{b+a}{b}\int\limits_{0}^{\frac{a}{b+a}y}\Big[f_2'\left(\frac{(b+a)\xi - ay}{b}\right) -$$

$$-\psi\left(\frac{(b+a)\xi - ay}{b}\right)\Big]\exp\left[\frac{c}{b}(\xi - y)\right]d\xi +$$

$$+\int\limits_{0}^{y} f_2''(-t)\exp\left[\frac{c(t-y)}{b+a}\right]dt.$$

Из (29) и (42) получим соотношение между $\tau(y)$ и $\nu(y)$:

$$\nu(y) - \tau'(y) = \alpha_1(y), \tag{43}$$

Здесь

$$\alpha_1(y) = f_2''(-y) - \varphi_2(-y) + \int\limits_{0}^{y}\Big[f_2''\left(\frac{(b-a)\eta - by}{b}\right) -$$

$$-\psi\left(\frac{(b-a)\eta - by}{b}\right)\Big]\exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right)d\eta.$$

Из уравнений (15) и (14) при $x=0$ имеем

$$\mu(y) = \tau''(y) + \alpha_2(y), \tag{44}$$

$$\mu(y) = \tau'(y) + \omega_{11}(-ay)\exp\left(-\frac{c}{b}y\right), \tag{45}$$

в записи

$$\alpha_2(y) = \left[f_2''\left(-\frac{a}{b}y\right) - \psi\left(-\frac{a}{b}y\right)\right]\exp\left(-\frac{c}{b}y\right),$$

$$\omega_1(bx - ay) = \begin{cases} \omega_{11}(bx - ay), & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{b}y, \\ \omega_{12}(bx - ay), & \text{если } \frac{a}{b}y \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\omega_{12}(bx - ay) = f_1''\left(x - \frac{a}{b}y\right) - \varphi_1\left(x - \frac{a}{b}y\right),$$

а $\omega_{11}(bx - ay)$ — пока неизвестная функция.

Подставляя (44) в (45), приходим к уравнению

$$\tau''(y) - \tau'(y) = \omega_{11}(-ay)\exp\left(-\frac{c}{b}y\right) - d_2(y).$$

Решая это уравнение при условиях

$$\tau'(0) = \varphi_2(0) = 0, \quad \tau(0) = f_2(0) = 0,$$

находим

$$\tau(y) = \beta_1(y) + \int\limits_{0}^{y}[\exp(y - t) - 1]\exp\left(-\frac{c}{b}t\right)\omega_{11}(-at)\,dt. \tag{46}$$

Здесь

$$\beta_1(y) = \int\limits_{0}^{y}\gamma_1(t)\exp(y - t)\,dt,$$

$$\gamma_1(t) = \int\limits_{0}^{y}\left[\psi\left(-\frac{a}{b}t\right) - f_2''\left(-\frac{a}{b}t\right)\right]\exp\left(-\frac{c}{b}t\right)dt.$$

Дифференцируя (46), имеем

$$\tau'(y) = \beta_1(y) + \gamma_1(y) + \int\limits_{0}^{y}\exp\left(y - \frac{b+c}{b}t\right)\omega_{11}(-at)\,dt. \tag{47}$$

Подставляя (47) в (43), получаем

$$\nu(y) = \beta_1(y) + \gamma_1(y) + \alpha_1(y) + \int\limits_{0}^{y}\exp\left(y - \frac{b+c}{b}t\right)\omega_{11}(-at)\,dt. \tag{48}$$

Решение уравнения (14), удовлетворяющее условиям (2), (5), (11), имеет вид

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Big[\int\limits_{0}^{y}\tau(\eta)G_2(x, y; 0, \eta)\,d\eta -$$

$$-\int\limits_{0}^{y}\sigma_1(\eta)G_2(x, y; 1, \eta)\,d\eta + \int\limits_{0}^{1}f_1(\xi)G(x, y; \xi, 0)\,d\xi -$$

$$-\int_0^y d\eta \int_0^1 \omega_1(b\xi - a\eta)\exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right) G(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\Bigg], \qquad (49)$$

где $G(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности, т. е.

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right] - \right.$$

$$\left. - \exp\left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\}.$$

Дифференцируя (49) по x и полагая $x=0$, после некоторых вычислений имеем

$$\nu(y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left\{-\int_0^y \tau'(\eta) N(0, y; 0, \eta)\, d\eta + \int_0^y \sigma_1'(\eta) N(0, y; 1, \eta)\, d\eta + \right.$$

$$+ \int_0^1 f_1'(\xi) N(0, y; \xi, 0)\, d\xi - \int_0^y \exp\left(-\frac{c}{b} t\right) N(0, y; 0, t)\, \omega_{11}(-at)\, dt -$$

$$- b\int_0^y \exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right) d\eta \int_0^{\frac{a}{b}\eta} \omega_{11}'(b\xi - a\eta) N(0, y; \xi, \eta)\, d\xi +$$

$$+ \int_0^y \left[f_1'\left(1-\frac{a}{b}\eta\right) - \varphi_1\left(1-\frac{a}{b}\eta\right)\right]\exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right) N(0, y; 1, \eta)\, d\eta -$$

$$- \int_0^y \exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right) d\eta \int_{\frac{a}{b}\eta}^1 \left[f_1''\left(\xi - \frac{a}{b}\eta\right) - \right.$$

$$\left.\left. - \varphi_1'\left(\xi - \frac{a}{b}\eta\right)\right] N(0, y; \xi, \eta)\, d\xi\right\},$$

где

$$N(0, y; \xi, \eta) = \frac{2}{\sqrt{y-\eta}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right].$$

Подставляя (47), (48) в последнее уравнение и дифференцируя полученное уравнение, после некоторых вычислений приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $z(y) = b\omega_{11}'(-ay)$:

$$z(y) - \int_0^y K_1(y, t) \exp\left(\frac{c}{b} y\right) z(t)\, dt = g_1(y) \exp\left(\frac{c}{b} y\right), \tag{50}$$

где

$$K_1(y, t) = \frac{1}{b} R_{1y}(y, t) + \frac{1}{b} \int_t^y \frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}} R_{1\eta}(\eta, t)\, d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2b\sqrt{\pi}} \int_t^y R_1(\eta, t) N_y^*(0, y; 0, \eta)\, d\eta - \frac{ac}{b^2} \int_t^y \frac{\exp\left(-\frac{c}{b} z\right)}{\sqrt{\pi(y-z)}}\, dz +$$

$$+ \frac{a}{2b\sqrt{\pi}} \int_t^y \exp\left(-\frac{c}{b} z\right) N_y^*(0, y; 0, z)\, dz +$$

$$+ \frac{a^2}{b^2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} h_1(y, t; z) \exp\left\{-\frac{z^2}{4} - \frac{c}{b}\left[t + 2(y-t) h_1(y, t; z)\right]\right\} dz +$$

$$+ \frac{ac}{b^2} \int_t^y \frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}} \exp\left[-\frac{a^2(\eta-t)^2}{4b^2(y-\eta)} - \frac{c}{b}\eta\right] d\eta -$$

$$- \frac{a}{2b\sqrt{\pi}} \int_t^y \exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right) N_y^*\left(0, y; \frac{a\eta - at}{b}, \eta\right) d\eta,$$

$$g_1(y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^l f_1'''(\xi) N(0, y; \xi, 0)\, d\xi - Q_1'(y) - \alpha_1^*(y) -$$

$$- \int_0^y \frac{Q_1(\eta)\, d\eta}{\sqrt{\pi(y-\eta)}} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y Q_1(\eta) N_y^*(0, y; 0, \eta)\, d\eta +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y \sigma_1'(\eta)N_y(0,y;1,\eta)\,d\eta-\frac{f_1''(1)}{2\sqrt{\pi}}N(0,y;1,0)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y\left[f_1''\left(1-\frac{a}{b}\eta\right)-\varphi_1\left(1-\frac{a}{b}\eta\right)\right]\exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right)\times$$

$$\times N_y(0,y;1,\eta)\,d\eta-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y\exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right)d\eta\times$$

$$\times\int_{\frac{a}{b}\eta}^{1}\left[f_1'''\left(\xi-\frac{c}{b}\eta\right)-\varphi_1'\left(\xi-\frac{a}{b}\eta\right)\right]N_y(0,y;\xi,\eta)\,d\xi,$$

$$Q_1(y)=\beta_1(y)+\gamma_1(y),\quad R_1(y,t)=a\int_t^y\exp\left(y-\frac{b+c}{b}z\right)dz,$$

$$h_1(y,t;z)=\frac{bz}{\sqrt{b^2z^2+4a^2(y-t)}+bz},$$

$$N^*(0,y;\xi,\eta)=\frac{2}{\sqrt{y-\eta}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'\exp\left[-\frac{(\xi-2\eta)^2}{4(y-\eta)}\right],$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'=\sum_{n=-\infty}^{-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}.$$

Функции $K_1(y,t)$ и $g_1(y)$ непрерывны, поэтому уравнение (50) допускает единственное решение из класса c [0, 1]. Решая его, находим функцию $z(y)$. Тогда функция $\omega_{11}(bx-ay)$ определяется по формуле

$$\omega_{11}(bx-ay)=\int_{\frac{a}{b}y}^{x}z\left(y-\frac{b}{a}t\right)dt,\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{a}{b}y.$$

Таким образом, можно найти функции $\tau(y)$, $\nu(y)$, $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$.

б) Пусть $a=b$. Тогда уравнение (15) имеет вид

$$u_{2xx}-u_{2yy}=\omega_2(x-y)\exp\left(-\frac{c}{b}y\right).$$

Как и в случае 1. а), находим функции $F(x)$ и $\Phi(x)$. Продолжим функцию $\omega_2(x-y)$ на $-2\leqslant x-y\leqslant-1$ и $0\leqslant x-y\leqslant 1$ следующим образом:

$$\Omega(x-y)=\left\{\begin{array}{ll} F_1''(x-y)-\Psi_1(x-y), & \text{если}\quad y-2\leqslant x<-1,\\ F_1''(x-y)-\Psi_2(x-y), & \text{если}\quad -1\leqslant x\leqslant y-1,\\ f_2''(x-y)-\Psi(x-y), & \text{если}\quad y-1\leqslant x\leqslant y,\\ F_2''(x-y)-\Psi_3(x-y), & \text{если}\quad y\leqslant x\leqslant y+1.\end{array}\right.$$

Как в случае 1. а), определяем функции $\Psi_i(x-y)$ $(i=1,2,3)$:

$$\Psi_1(x-y)=\Big\{f_2''(y-x-2)-\sigma_4(y-x-1)+\sigma_2'(y-x-1)-$$

$$-f_2''(y-x-2)\int_{x-y+1}^{-1}\exp\left[\frac{c}{b}(x-y-\xi)\right]d\xi\Big\}\times$$

$$\times\left[\int_0^{y-x-1}\exp\left(-\frac{c}{b}t\right)dt\right]^{-1},$$

$$0<y\leqslant 1,\quad -2\leqslant x-y<-1,$$

$$\Psi_2(x-y)=\Big\{\frac{c}{2b}\Big[\delta_{10}(y-x-1)+\delta_{11}(y-x-1)\Big]+$$

$$+\delta_{10}'(y-x-1)+\delta_{11}'(y-x-1)\Big\}\exp\left[\frac{c}{b}(y-x-1)\right],$$

$$-1\leqslant x-y\leqslant 0,$$

$$\Psi_3(x-y)=4\tau''(x-y)+\frac{2c}{b}\tau'(x-y)+\delta_{12}(x-y),\quad 0\leqslant x-y\leqslant 1,$$

где

$$\delta_{10}(y)=2\sigma_2'(y)+\int_0^{\frac{y}{2}}[f_1''(y-1-2\eta)-\psi(y-1-2\eta)]\times$$

$$\times \exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right)d\eta - f_2''(y-1)\int\limits_{-1-y}^{-1}\exp\left[-\frac{c}{b}(y+1+\xi)\right]d\xi -$$

$$-\int\limits_{-1}^{-1+\frac{y}{2}} f_2''(y-1-2\xi)\exp\left[\frac{c}{b}(\xi+1-y)\right]d\xi,$$

$$\delta_{11}(y) = 2\sigma_4(y) - 2f_2''(y-1) - 2\varphi_2(y-1) + \delta_{12}(y),$$

$$\delta_{12}(y) = f_2''(y-1)\int\limits_{-1-y}^{-1}\exp\left[-\frac{c}{b}(y+1+\xi)\right]d\xi -$$

$$-\int\limits_{-1}^{-1+\frac{y}{2}} f_2''(y-1-2\xi)\exp\left[\frac{c}{b}(\xi+1-y)\right]d\xi +$$

$$+\int\limits_{0}^{-\frac{y}{2}}[f_2''(y-1-2\eta) - \psi(y-1-2\eta)]\exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right)d\eta,$$

$$\delta_{13}(y) = \frac{c}{b}[f_2''(-y) - \psi(-y)]\int\limits_{0}^{y}\exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right)d\eta -$$

$$-2[f_2'''(-y) - \psi'(-y)]\int\limits_{0}^{y}\exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right)d\eta +$$

$$+3[f_2''(-y) - \psi(-y)]\exp\left(-\frac{c}{b}y\right) - f_2''(-y).$$

Дальнейшее вычисление проводится аналогично случаю 1, а).

в) Пусть теперь $0<\frac{b}{a}<1$, т. е. $1<\frac{a}{b}<+\infty$. Как в случае 1. а), функции $f_2(x)$, $\varphi_2(x)$ продолжим на отрезки $[-2, -1]$ и $[0, 1]$, т. е. определяем функции $F(x)$ и $\Phi(x)$, а функцию $\psi(x)$ продолжим на отрезок $[0, 1]$, т. е.

$$\Psi_4\left(x-\frac{a}{b}y\right) = \frac{2(b+a)}{b}\tau\left(x-\frac{a}{b}y\right) + \frac{2c}{b}\tau'\left(x-\frac{a}{b}y\right) +$$

$$+\delta_4\left(x-\frac{a}{b}y\right), \quad 0 \leqslant x-\frac{a}{b}y \leqslant 1.$$

Так как $0 \leqslant \frac{b}{a} < 1$, то $-1-\frac{a}{b} < -2$, поэтому аргумент $x - \frac{a}{b}y$ выходит за области определения функций $f_2(x)$ и $\psi(x)$, чтобы продолжать функцию $\psi(x)$ на отрезок $[-2, -1]$, поступаем так. Область D разделим на $(N+1)$ части так, чтобы высоты первых N областей были равны на $h_0 = \frac{b}{a}$, а последней — не больше чем h_0. Эти области обозначим через

$$D^{(n)} = D_1^{(n)} \cup J^{(n)} \cup D_2^{(n)} \quad (n = 1, 2, ..., N, N+1),$$

где

$$D_1^{(n)} = \{(x, y): 0 < x < 1, \quad y_{n-1} < y < y_n\},$$

$$D_2^{(n)} = \{(x, y): -1 < x < 0, \quad y_{n-1} < y < y_n\},$$

$$J^{(n)} = \{(x, y): x = 0, \quad y_{n-1} < y < y_n\},$$

$$y_0 = 0, \quad y_{N+1} = 1, \quad y_n = \frac{nb}{a} \quad (n = 1, 2, ..., N).$$

Тогда как и в случае 1. а), задачу 1 будем решать последовательно в областях $D^{(n)}$ $(n = 1, 2, ..., N+1)$.

Случай 2. В этом случае без ограничения общности можно полагать $a<0$, $b>0$.

а) Пусть $-\infty < \frac{b}{a} < -1$, т. е. $-1 < \frac{a}{b} < 0$. Как в случае 1, а), функции $f_2(x)$ и $\varphi_2(x)$ продолжим на отрезки $[-2, -1]$ и $[0, 1]$, т. е. определяем функции $F(x)$ и $\Phi(x)$. Чтобы продолжать $\psi(x)$ на отрезки $[-2, -1]$ и $[0, 1]$, поступаем так.

Решение уравнения (16), удовлетворяющее условиям (26), имеет вид (28), где

$$\Omega(bx - ay) =$$

$$= \begin{cases} F_2''\left(x - \frac{a}{b}y\right) - \Psi_1\left(x - \frac{a}{b}y\right), & \text{если } \frac{a}{b}(y-1) \leqslant x \leqslant 1-y, \\ F_2''\left(x - \frac{a}{b}y\right) - \Psi_2\left(x - \frac{a}{b}y\right), & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{b}(y-1), \\ F_2''\left(x - \frac{a}{b}y\right) - \Psi_3\left(x - \frac{a}{b}y\right), & \text{если } \frac{a}{b}y \leqslant x \leqslant 0, \\ f_2''\left(x - \frac{a}{b}y\right) - \Psi\left(x - \frac{a}{b}y\right), & \text{если } \frac{a}{b}y - 1 \leqslant x \leqslant \frac{a}{b}y, \\ F_1''\left(x - \frac{a}{b}y\right) - \Psi_4\left(x - \frac{a}{b}y\right), & \text{если } y - 2 \leqslant x \leqslant \frac{a}{b}y - 1. \end{cases}$$

Подставляя (28) во второе из условий (27), затем производя ряд преобразований, получаем

где

$$\Psi_4(-1-y)=\delta_{14}(y),\quad 0\leqslant y\leqslant 1,$$

$$\delta_{14}(y)=\frac{2(b-a)}{b}\sigma_2''(y)+\frac{2c}{b}\sigma_2'(y)-f_2''(y-1)+$$

$$+\frac{b-2a}{b}\left[f_2''\left(-1-\frac{a}{b}y\right)-\psi\left(-1-\frac{a}{b}y\right)\right]\exp\left(-\frac{c}{b}y\right)+$$

$$+\frac{c}{b}\int\limits_0^y\left[f_2''\left(y-1-\frac{b+a}{b}\eta\right)-\psi\left(y-1-\frac{b+a}{b}\eta\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right)d\eta+\frac{b-a}{b}\int\limits_0^y\left[f_2'''\left(y-1-\frac{b+a}{b}\eta\right)-\right.$$

$$\left.-\psi'\left(y-1-\frac{b+a}{b}\right)\right]\exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right)d\eta.$$

Теперь, подставляя (28) в первое из условий (27), после ряда преобразований имеем

$$\frac{a}{b+a}\int\limits_{-\frac{a}{b}y}^{y}\Psi_2(t)\exp\left[\frac{c(t-y)}{b+a}\right]dt-$$

$$-\frac{a}{b-a}\int\limits_0^y\Psi_3\left(-\frac{a}{b}t\right)\exp\left[-\frac{c(by-at)}{b(b-a)}\right]dt=$$

$$=2\tau'(y)+\delta_{15}(y),\quad 0\leqslant y\leqslant -\frac{a}{b},\tag{51}$$

$$-\frac{b}{b+a}\int\limits_{-\frac{a}{b}}^{y}\Psi_1(t)\exp\left[\frac{c(t-y)}{b+a}\right]dt=$$

$$\delta_{16}(y)-2\tau'(y),\quad -\frac{a}{b}\leqslant y\leqslant 1,\tag{52}$$

где

$$\delta_{15}(y)=\frac{b}{b-a}\int_0^y[f_2^*(-t)-\psi(-t)]\exp\left[\frac{c(t-y)}{b-a}\right]dt+$$

$$+\frac{a}{b-a}\int_0^y f_2^*\left(\frac{a}{b}t\right)\exp\left[\frac{c(at-by)}{b(b-a)}\right]dt=$$

$$-\int_0^y f_2^*\left(\frac{a}{b}y-\frac{b+a}{b}\xi\right)\exp\left[\frac{c}{b}\left(\xi-y\right)\right]d\xi,$$

$$\delta_{16}(y)=-\frac{a}{b-a}\int_0^{-\frac{a}{b}}\Psi_2\left(-\frac{a}{b}t\right)\exp\left[-\frac{c(by-at)}{b(b-a)}\right]dt-$$

$$-\int_0^{\frac{b}{b-a}y}\left[f_2^*\left(\frac{b-a}{b}\eta-y\right)-\psi\left(\frac{b-a}{b}\eta-y\right)\right]\exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right)d\eta-$$

$$-\int_{\frac{a}{b-a}y}^{y}F_2^*\left(\frac{b-a}{b}\xi-\frac{a}{b}y\right)\exp\left[-\frac{c}{b}\left(\xi+y\right)\right]d\xi-$$

$$-\int_0^{\frac{a}{b+a}(y-1)}\left[F_2^*\left(\frac{b+a}{b}\xi-\frac{a}{b}y\right)-\Psi_2\left(\frac{b+a}{b}\xi-\frac{a}{b}y\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left[\frac{c(\xi-y)}{b}\right]d\xi-\int_0^{\frac{by+a}{b+a}}F_2^*\left(y-\frac{b+a}{b}\eta\right)\exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right)d\eta.$$

Теперь из (33), как это сделано в случае 1, а) получим

$$\frac{a}{b+a}\int_{-\frac{a}{b}}^{y}\Psi_2(t)\exp\left[\frac{c(t-y)}{b+a}\right]dt+\frac{a}{b-a}\int_0^{y}\Psi_2\left(-\frac{a}{b}t\right)\times$$

$$\times \exp\left[-\frac{c(by-at)}{b(b-a)}\right]dt = 2\nu(y) + \delta_{17}(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant -\frac{a}{b}, \tag{53}$$

$$\frac{a}{b-a}\int\limits_{-\frac{a}{b}}^{y} \Psi_2\left(-\frac{a}{b}t\right)\exp\left[-\frac{c(by-at)}{b(b-a)}\right]dt +$$

$$+\frac{b}{b+a}\int\limits_{-\frac{a}{b}}^{y} \Psi_1(t)\exp\left[\frac{c(t-y)}{b+a}\right]dt =$$

$$= 2\nu(y) + \delta_{18}(y), \quad -\frac{a}{b} \leqslant y \leqslant 1, \tag{54}$$

где

$$\delta_{17}(y) = 2\varphi(-y) - 2f_2^{*}(-y) -$$

$$-\int\limits_{0}^{\frac{b}{b-a}y}\left[f_2^{*}\left(\frac{b-a}{b}\eta - y\right) - \psi\left(\frac{b-a}{b}\eta - y\right)\right]\exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right)d\eta +$$

$$+\int\limits_{\frac{a}{b-a}y}^{y} f_2^{*}\left(\frac{a}{b}y - \frac{b-a}{b}\xi\right)\exp\left[-\frac{c}{b}(\xi+y)\right]d\xi -$$

$$-\int\limits_{0}^{y} f_2^{*}\left(\frac{a}{b}y - \frac{b+a}{b}\xi\right)\exp\left[\frac{c}{b}(\xi-y)\right]d\xi,$$

$$\delta_{18}(y) = \delta_{17}(y) + \int\limits_{0}^{y} f_2^{*}\left(\frac{a}{b}y - \frac{b+a}{b}\xi\right)\exp\left[\frac{c}{b}(\xi-y)\right]d\xi -$$

$$-\frac{a}{b-a}\int\limits_{0}^{-\frac{a}{b}} \Psi_2\left(-\frac{a}{b}t\right)\exp\left(-\frac{c(by-at)}{b(b-a)}\right)dt -$$

$$
-\int_{0}^{\frac{a}{b+a}(y-1)}\left(f^{-}\left(\frac{a}{b}y-\frac{b+a}{b}\xi\right)\exp\left(\frac{c}{b}(\xi-y)\right)d\xi-\right.
$$

$$
-\int_{0}^{\frac{by+a}{b+a}} f_2^{-}\left(\frac{b+a}{b}\eta-y\right)\exp\left(-\frac{c}{b}\eta\right)d\eta-
$$

$$
-\frac{b}{b+a}\int_{-\frac{a}{b}y}^{-\frac{a}{b}}\Psi_2(t)\exp\left(\frac{c(t-y)}{b+a}\right)dt.
$$

Из (51) и (53) следует

$$
\Psi_2(y)+\frac{a}{b}\Psi_2\left(-\frac{a}{b}y\right)\exp\left(-\frac{c}{b}y\right)=\frac{c}{a}[\tau'(y)+\nu(y)]+
$$

$$
+\frac{b+a}{a}[\tau''(y)+\nu'(y)]+\frac{c}{a}[\delta_{15}(y)+\delta_{17}(y)]+
$$

$$
+\frac{b+a}{2a}[\delta_{15}'(y)+\delta_{17}'(y)],\quad 0\leqslant y\leqslant-\frac{a}{b},
$$

$$
\Psi_2\left(-\frac{a}{b}y\right)=\left\{\frac{c}{a}[\nu(y)-\tau'(y)]+\frac{b-a}{a}[\nu'(y)-\tau''(y)]+\right.
$$

$$
\left.+\frac{c}{2a}[\delta_{17}(y)+\delta_{15}(y)]+\frac{b-a}{2a}[\delta_{17}'(y)+\delta_{15}'(y)]\right\}\times
$$

$$
\times\exp\left(\frac{c}{b}y\right),\quad 0\leqslant y\leqslant-\frac{c}{a},\tag{55}
$$

а из (52) и (54) — следует

$$
\Psi_2\left(-\frac{a}{b}y\right)-\left\{\frac{c}{a}[\nu(y)-\tau'(y)]+\frac{b-a}{a}[\nu'(y)-\tau''(y)]+\right.
$$

$$
\left.+\frac{c}{2a}[\delta_{17}(y)-\delta_{15}(y)]+\frac{b-a}{2a}[\delta_{17}'(y)-\delta_{15}'(y)]\right\}\times
$$

$$\times \exp\left(\frac{c}{b}y\right), \quad -\frac{a}{b} \leqslant y \leqslant 1, \tag{56}$$

$$\Psi_1(y) = \frac{c}{b}[\nu(y) + \tau'(y)] + \frac{b+a}{b}[\nu'(y) + \tau''(y) + \frac{c}{2b}[\delta_{18}(y) -$$

$$-\delta_{16}(y)] + \frac{b+a}{2b}[\delta_{18}'(y) - \delta_{16}'(y)], \quad -\frac{a}{b} \leqslant y \leqslant 1.$$

Уравнения (55) и (56) можно объединить

$$\Psi_2\left(-\frac{a}{b}y\right) = \left\{\frac{c}{a}[\nu(y) - \tau'(y)] + \frac{b-a}{a}[\nu'(y) - \tau''(y)] + \right.$$

$$\left. + \delta_{19}(y)\right\}\exp\left(\frac{c}{b}y\right), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{57}$$

где

$$\delta_{19}(y) = \begin{cases} \frac{c}{2a}\left[\delta_{17}(y) - \delta_{15}(y)\right] + \frac{b-a}{2a}\left[\delta_{17}'(y) - \delta_{15}'(y)\right], \\ \qquad \text{если } 0 \leqslant y \leqslant -\frac{a}{b}, \\ \frac{c}{2a}\left[\delta_{18}(y) + \delta_{16}(y)\right] + \frac{b-a}{2a}\left[\delta_{18}'(y) - \delta_{16}'(y)\right], \\ \qquad \text{если } -\frac{a}{b} \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

Из уравнения (16) при $x=0$ с учетом (11) и (13) имеем

$$\mu(y) - \tau''(y) = \Psi_2\left(-\frac{a}{b}y\right)\exp\left(-\frac{c}{b}y\right).$$

Подставляя (57) в последнее уравнение, получаем соотношение

$$\mu(y) - \tau''(y) = \frac{c}{a}[\nu(y) - \tau'(y)] +$$

$$+ \frac{b-a}{a}[\nu'(y) - \tau''(y)] + \delta_{19}(y). \tag{58}$$

Вводя обозначение

$$au_{1x} + bu_{1y} + cu_1 = v_1(x, y) \tag{59}$$

для $V_1(x_1 y)$, получаем задачу

$$\begin{cases} L_1 v_1 = 0 \\ v_1(0, y) = \sigma(y), \; v_1(1, y) = \bar{\sigma}_1(y), \\ v_1(x, 0) = \bar{f}_1(x), \end{cases}$$

где

$$\bar{\sigma}_1(y) = a\sigma_2(y) + b\sigma_1'(y) + c\sigma_1(y),$$

$$\bar{f}_1(x) = af_1'(x) + b\varphi(x) + cf_1(x),$$

а $\sigma_1(y)$ — пока неизвестная функция. Решение этой задачи имеет вид

$$v_1(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\int_0^y \sigma(\eta) G_\xi(x, y; 0, \eta)\, d\eta - \right.$$

$$\left. - \int_0^y \bar{\sigma}_1(\eta) G_\xi(x, y; 1, \eta)\, d\eta + \int_0^1 \bar{f}_1(\xi) G(x, y; \xi, 0)\, d\xi\right], \tag{60}$$

где $G(x, y;\ \xi,\ \eta)$ — функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности (см. случай 1. а)). Тогда приходим к задаче (59), (2), (5). Ее решение запишем в виде

$$u_1(x, y) = \begin{cases} u_{11}(x, y), \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 1 + \frac{a}{b}y, \\ u_{12}(x, y), \text{ если } 1 + \frac{a}{b}y \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{61}$$

где

$$u_{11}(x, y) = \frac{1}{b}\int_0^y \exp\left[\frac{c}{b}(t - y)\right] v_1\left(\frac{bx - ay + at}{b}, t\right) dt +$$

$$+ f_1\left(x - \frac{a}{b}y\right)\exp\left(-\frac{c}{b}y\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 + \frac{a}{b}y, \tag{62}$$

$$u_{12}(x, y) = \frac{1}{b}\int_{y + \frac{b}{a}(1-x)}^{y} \exp\left[\frac{c}{b}(t - y)\right] v_1\left(x - \frac{a}{b}(y - t), t\right) dt +$$

$$+ \sigma_1\left(y + \frac{b}{a}(1 - x)\right)\exp\left[\frac{c}{a}(1 - x)\right], \quad 1 + \frac{a}{b}y \leqslant x \leqslant 1. \tag{63}$$

Полагая в (62) $x=0$, в силу (11) и (60) приходим к интегральному уравнению Вольтерра первого рода относительно $\sigma(y)$:

$$\int_0^y \exp\left[\frac{c}{b}(t-y)\right]dt\int_0^t \sigma(\eta)G_1\left(\frac{a}{b}(t-y), t; 0, \eta\right)d\eta =$$

$$= \int_0^y \exp\left[\frac{c}{b}(t-y)\right] dt \int_0^t \bar{\sigma}_1(\eta)G_1\left(\frac{a}{b}(t-y), t; 1, \eta\right)d\eta -$$

$$-\int_0^y \exp\left[\frac{c}{b}(t-y)\right]dt\int_0^1 \bar{f}_1(\xi)G\left(\frac{a}{b}(t-y), t; \xi, 0\right)d\xi +$$

$$+ 2b\sqrt{\pi}\left[\tau(y) - f_1\left(-\frac{a}{b}y\right)\exp\left(-\frac{c}{b}y\right)\right].$$

Дифференцируя это уравнение дважды, после некоторых выкладок получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\sigma'(y)$:

$$\sigma'(y) + \int_0^y K_2(y, \eta)\sigma'(\eta)\, d\eta = g_2(y) +$$

$$+ \frac{c^2}{b}\tau(y) + 2c\tau'(y) + b\tau''(y), \tag{64}$$

где

$$K_2(y, \eta) = \frac{c}{b} + \frac{a}{2b\sqrt{\pi}} N(0, y; 0, \eta) +$$

$$+ \frac{a^2}{2b^2\sqrt{\pi}}\int_\eta^y \exp\left[\frac{c}{b}(t-y)\right] G_1\left(\frac{a}{b}(t-y), t; 0, \eta\right) dt,$$

$$g_2(y) = \frac{a}{2b\sqrt{\pi}}\left[\int_0^y \bar{\sigma}_1'(\eta)N(0, y; 1, \eta)\, d\eta + \int_0^1 \bar{f}_1(\xi)N(0, y; \xi, 0)\, d\xi\right] +$$

$$+ \frac{a^2}{2b^2\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^y \bar{\sigma}_1'(\eta)d\eta\int_\eta^y \exp\left[\frac{c}{b}(t-y)\right]G_1\left(\frac{a}{b}(t-y), t; 1, \eta\right)dt +\right.$$

$$+\int_0^1 f_1''(\xi)\,d\xi\int_0^y \exp\left[\frac{c}{b}(t-y)\right]G_1\left(\frac{a}{b}(t-y),t;\xi,0\right)dt\Big\}-$$

$$-\frac{a^2}{b}f_1''\left(-\frac{a}{b}y\right)\exp\left(-\frac{c}{b}y\right)-\frac{c}{b}f_1(0),$$

а по поводу функции $N(x, y; \xi, \eta)$ (см. случай 1.а)).

Функция $K_2(y, \eta)$ имеет слабую особенность, а функция $g_2(y)$ непрерывна. Поэтому уравнение (64) имеет единственное решение в классе непрерывных функций. Решая его и вводя обозначения

$$\tau''(y)=z(y),\quad \tau'(y)=\int_0^y z(t)\,dt,$$

$$\tau(y)=\int_0^y (y-t)z(t)\,dt, \tag{65}$$

находим $\sigma'(y)$; здесь положено $\tau'(0)=\varphi_1(0)=0$, $\tau(0)=f_1(0)=0$;

$$\sigma'(y)=Q_2(y)+bz(y)+\int_0^y R_2(y,t)z(t)\,dt, \tag{66}$$

где

$$Q_2(y)=g_2(y)-\int_0^y g_2(\eta)\Gamma_2(y,\eta)\,d\eta,$$

$$R_2(y,t)=2c+\frac{c^2}{b}(y-t)-\frac{c^2}{b}\int_t^y(\eta-t)\Gamma_2(y,\eta)\,d\eta-$$

$$-2c\int_t^y\Gamma_2(y,\eta)\,d\eta-b\Gamma_2(y,t),$$

а $\Gamma_2(y, \eta)$ — резольвента ядра $K_2(y, \eta)$.

Из (66) следует

$$\sigma(y)=\int_0^y\left[Q_2(\eta)+bz(\eta)+\int_0^\eta R_2(\eta,t)z(t)\,dt\right]d\eta+f_1(0). \tag{66'}$$

Теперь, дифференцируя (62) по x и устремляя x к нулю, в силу (12) и (59) имеем

$$\nu(y) = \frac{1}{2b\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp\left[\frac{c}{b}(t-y)\right]\left[\int_0^t \bar{\sigma}_1'(\eta) N\left(\frac{a}{b}(t-y), t; 1, \eta\right) d\eta - \right.$$

$$- \int_0^t \sigma'(\eta) N\left(\frac{a}{b}(t-y), t; 0, \eta\right) d\eta +$$

$$\left. + \int_0^1 f_1'(\xi) N\left(\frac{a}{b}(t-y), t; \xi, 0\right) d\xi\right] dt + f_1\left(-\frac{a}{b}y\right)\exp\left(-\frac{c}{b}y\right). \tag{67}$$

Дифференцируя это равенство и учитывая (66), получаем

$$\nu'(y) = Q_4(y) - \int_0^y R_3(y, t) z(t)\, dt, \tag{68}$$

где

$$Q_4(y) = Q_3(y) - \frac{1}{2b\sqrt{\pi}} \int_0^y Q_2(\eta) N(0, y; 0, \eta)\, d\eta +$$

$$+ \frac{c}{2b^2\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp\left[\frac{c}{b}(t-y)\right] dt \int_0^t Q_2(\eta) N\left(\frac{a}{b}(t-y), t, 0, \eta\right) d\eta -$$

$$- \frac{a}{2b^2\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp\left[\frac{c}{b}(t-y)\right] dt \int_0^t Q_2(\eta) G_2\left(\frac{a}{b}(t-y), t; 0, \eta\right) d\eta,$$

$$Q_3(y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\int_0^y \bar{\sigma}_1'(\eta) N(0, y; 1, \eta) d\eta + \int_0^1 \bar{f}_1'(\xi) N(0, y; \xi, 0)\, d\xi\right] -$$

$$- \frac{c}{2b^2\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp\left[\frac{c}{b}(t-y)\right]\left[\int_0^t \bar{\sigma}_1'(\eta) N\left(\frac{a}{b}(t-y), t; 1, \eta\right) d\eta + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \bar{f}_1'(\xi) N\left(\frac{a}{b}(t-y), t; \xi, 0\right) d\xi\right] dt + \frac{a}{2b^2\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp\left(\frac{c}{b}(t-y)\right) \times$$

$$\times\left[\int_0^1 \bar{\sigma}_1'(\eta) G_1\left(\frac{a}{b}(t-y), t; 1, \eta\right) d\eta + \int_0^1 \bar{f}_1'(\xi) G_1\left(\frac{a}{b}(t-\right.\right.$$

$$\left.\left. - y), t, \xi, 0\right) d\xi\right] dt - \frac{1}{b}\left[a f_1''\left(-\frac{a}{b} y\right) + \right.$$

$$\left. + c f_1'\left(-\frac{a}{b} y\right)\right] \exp\left(-\frac{c}{b} y\right),$$

$$R_3(y, t) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left\{N(0, y; 0, t) + \frac{1}{b}\int_t^y R_2(\eta, t) N(0, y; 0, \eta)\, d\eta - \right.$$

$$-\frac{c}{b}\int_t^y \exp\left[\frac{c}{b}(\eta - y)\right] N\left(\frac{a}{b}(\eta - y), \eta; 0, t\right) d\eta -$$

$$-\frac{c}{b^2}\int_t^y \exp\left[\frac{c}{b}(\lambda - y)\right] d\lambda \int_t^\lambda R_2(\eta, t) N\left(\frac{a}{b}(\lambda - y), \lambda; 0, \eta\right) d\eta +$$

$$+\frac{a}{b}\int_t^y \exp\left(\frac{c}{b}(\eta - y)\right) G_1\left(\frac{a}{b}(\eta - y), \eta; 0, t\right) d\eta +$$

$$\left. + \frac{a}{b^2}\int_t^y \exp\left(\frac{c}{b}(\lambda - y)\right) d\lambda \int_t^\lambda R_2(\eta, t) G_1\left(\frac{a}{b}(\lambda - y), \lambda; 0, \eta\right) d\eta\right\}.$$

Наконец, дифференцируя (62) по x дважды и устремляя x к нулю в силу (13), (60) и (66) будем иметь

$$\mu(y) = Q_5(y) + \int_0^y R_4(y, t) z(t)\, dt, \tag{69}$$

где

$$Q_5(y) = \frac{1}{2b\sqrt{\pi}}\int_0^y \exp\left(\frac{c}{b}(t - y)\right)\left[\int_0^t Q_2(t) G_1\left(\frac{a}{b}(t - \right.\right.$$

$$\left. - y), t; 0, \eta\right) d\eta - \int \bar{\sigma}'(\eta) G_1\left(\frac{a}{b}(t - y), t; 1, \eta\right) d\eta -$$

$$-\int_0^t \bar{f}_1(\xi)\, G_1\left(\frac{a}{b}(t-y), t; \xi, 0\right) d\xi \Big] dt + f_1''\left(-\frac{a}{b} y\right) \exp\left(-\frac{c}{b} y\right),$$

$$R_1(y, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \int_t^y \exp\left(\frac{c}{b}(\eta - y)\right) G_1\left(\frac{a}{b}(\eta - y), \eta, 0, t\right) d\eta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{b} \int_t^y \exp\left(\frac{c}{b}(\lambda - y)\right) d\lambda \int_t^\lambda R_2(\eta, t) G_1\left(\frac{a}{b}(\lambda - y), \lambda; 0, \eta\right) d\eta \right\}.$$

Подставляя (67), (68) и (69) в (58), учитывая (66) и $\tau''(y) = z(y)$, приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $z(y)$:

$$z(y) - \int_0^y K_3(y, t) z(t) dt = g_3(y), \tag{70}$$

где

$$K_3(y, t) = \frac{1}{b - 2a} \left\{ \frac{c}{2\sqrt{\pi}} \int_t^y \exp\left[\frac{c}{b}(\eta - y)\right] N\left(\frac{a}{b}(\eta - \right.\right.$$

$$- y), \eta; 0, t\Big) d\eta + \frac{c}{2b\sqrt{\pi}} \int_t^y \exp\left(\frac{c}{b}(\lambda - y)\right) d\lambda \int_t^\lambda R_2(\eta, t) \times$$

$$\left. \times N\left(\frac{a}{b}(\lambda - y), \lambda; 0, \eta\right) d\eta - aR_1(y, t) - c - (b - a) R_3(y, t) \right\},$$

$$g_3(y) = \frac{1}{b - 2a} \left\{ \frac{c}{2b\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp\left(\frac{c}{b}(t - y)\right) \Big[\int_0^t \bar{\sigma}_1'(\eta) N\left(\frac{a}{b}(t - \right.\right.$$

$$- y), t; 1, \eta) \, d\eta +$$

$$+ \int_0^t Q_2(\eta) N\left(\frac{a}{b}(t - y), t; 0, \eta\right) d\eta + \int_0^t \bar{f}_1(\xi) N\left(\frac{a}{b}(t - \right.$$

$$- y), t; \xi, 0\Big) d\xi \Big] dt + c f_1'\left(-\frac{a}{b} y\right) \exp\left(-\frac{c}{b} y\right) +$$

$$+ (b-a)Q_4(y) + a\delta_{19}(y) - aQ_5(y)\Big\}.$$

Ядро $K_3(y, t)$ имеет слабую особенность, а функция $g_3(y)$ непрерывна. Поэтому $z(y)\in c\ [0, 1]$. Решая уравнение (70), находим функцию $z(y)=\tau''(y)$ и тем самым определяем функцию $\tau(y)$ по формуле (65), $\tau'(y)$ — по формуле (66), $\sigma(y)$ — по формуле (66′), $\mu(y)$ — по формуле (69), $u_1(x, y)$ — по формулам (61), (62), (63), (60), $u_2(x, y)$ — по формуле (33).

б) Пусть $b=-a$. В этом случае задача решается аналогично случаю 2.а).

в) Пусть теперь $-1<\frac{b}{a}<0$. Как в случае 1.в), область разделим на $N+1$ частей и последовательно в каждой из этих областей решаем задачу аналогично случаю 2. а).

Случай 3. В этом случае уравнение (1) можем переписать в виде

$$L_i u_i = \omega_i(y)\exp\left(-\frac{c}{a}x\right),\quad i=1, 2, \tag{71}$$

где $\omega_i(y)$ — произвольные непрерывные функции.

Как в случае 1. а), определяем функции $F(x)$ и $\Phi(x)$, а функцию $\omega_2(y)$ представим в виде

$$\omega_2(y)=\begin{cases}\omega_{21}(y), & \text{если } -2\leqslant x\leqslant -1,\ 0\leqslant y\leqslant x+2,\\ \omega_{22}(y), & \text{если } -1\leqslant x\leqslant 0,\quad 0\leqslant y\leqslant 1,\\ \omega_{23}(y), & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1,\quad\ 0\leqslant y\leqslant 1-x.\end{cases}$$

Тогда, как в случае 1. а), имеем

$$\int_0^y \omega_{21}(t)\exp\left(-\frac{c}{a}(t-y-1)\right)dt +$$

$$+\int_0^y \omega_{22}(t)\exp\left(-\frac{c}{a}(y-t-1)\right)dt = -2\sigma_2'(y), \tag{72}$$

$$\int_0^y \omega_{21}(t)\exp\left(-\frac{c}{a}(t-y-1)\right)dt -$$

$$-\int_0^y \omega_{22}(t)\exp\left(-\frac{c}{a}(y-t-1)\right)dt = 2\sigma_4(y) - 2f_2'(y-1) - 2\varphi_2(y-1). \tag{73}$$

Из (72) и (73) находим

$$\omega_{21}(y)=\Big\{\sigma_4'(y)-\sigma_2''(y)-f_2''(y-1)-\varphi_2'(y-1)-$$

$$-\frac{c}{a}[\sigma_4(y)-\sigma_2'(y)-f_2'(y-1)-\varphi_2(y-1)]\Big\}\exp\Big(-\frac{c}{a}\Big),$$

$$\omega_{22}(y)=\Big\{f_2''(y-1)+\varphi_2'(y-1)-\sigma_2''(y)-\sigma_4'(y)+$$

$$+\frac{c}{a}[f_2'(y-1)+\varphi_2'(y-1)-\sigma_2'(y)-\sigma_4(y)]\Big\}\exp\Big(-\frac{c}{a}\Big);$$

а также получим соотношения

$$\int_0^y\omega_{22}(t)\exp\Big(\frac{c}{a}(y-t)\Big)dt+\int_0^y\omega_{23}(t)\exp\Big(\frac{c}{a}(t-y)\Big)dt=-2\tau'(y),$$
(74)

$$\int_0^y\omega_{22}(t)\exp\Big(\frac{c}{a}(y-t)\Big)dt-\int_0^y\omega_{23}(t)\exp\Big(\frac{c}{a}(t-y)\Big)dt=$$

$$=2\nu(y)-2f_2'(-y)+2\varphi_2(-y). \tag{75}$$

Из (74) и (75) имеем

$$\nu(y)-\tau'(y)=\alpha_3(y), \tag{76}$$

$$\omega_{23}(y)=\frac{c}{a}[f_2'(-y)-\varphi_2(-y)]-f_2''(-y)+\varphi_2'(-y)-$$

$$-\frac{c}{a}[\tau'(y)+\nu(y)]-\tau''(y)-\nu'(y),$$

где

$$\alpha_3(y)=f_2'(-y)-\varphi_2(-y)+\int_0^y\omega_{22}(t)\exp\Big[\frac{c}{a}(y-t)\Big]dt,$$

а $\omega_{22}(y)$ — уже известная функция.

Из уравнения (71) при $x=0$ получим

$$\mu(y)-\tau''(y)=\omega_{22}(y), \tag{77}$$

$$\mu(y)-\tau'(y)=\omega_1(y); \tag{78}$$

здесь $\omega_1(y)$ — пока неизвестная функция, а $\omega_{22}(y)$ — известна. Исключая из (77) и (78) функцию $\mu(y)$, приходим к уравнению

$$\tau''(y) - \tau'(y) = \omega_1(y) - \omega_2(y).$$

Как в случае 1. а), решая это уравнение при условиях $\tau'(0) = \tau(0) = 0$, определяем

$$\tau(y) = \beta_2(y) + \int_0^y [\exp(y - t) - 1]\, \omega_1(t)\, dt, \tag{79}$$

где

$$\beta_2(y) = \int_0^y \exp(y - t)\gamma_2(t)\, dt, \quad \gamma_2(y) = -\int_0^y \omega_2(t)\, dt.$$

Дифференцируя (79), имеем

$$\tau'(y) = \beta_2(y) + \gamma_2(y) + \int_0^y \exp(y - t)\omega_1(t)\, dt. \tag{80}$$

После подстановки (80) в (76) находим

$$\nu(y) = \beta_2(y) + \gamma_2(y) + \alpha_3(y) + \int_0^y \exp(y - t)\omega_1(t)\, dt. \tag{81}$$

Теперь, записывая решение уравнения (71) ($i=1$), удовлетворяющее условиям (2), (5), (11), затем дифференцируя полученное решение по x и устремляя x к нулю, в силу (80), (81) после некоторых выкладок переходим к интегральному уравнению Вольтерра первого рода относительно $\omega_1(y)$:

$$\int_0^y \exp(y - t)\omega_1(t)dt - \frac{\exp\left(-\frac{c}{a}\right)}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \omega_1(\eta) N(0, y; 1, \eta)\, d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \omega_1(t)\, dt \int_t^y \exp(y - t) N^*(0, y; 0, \eta)\, d\eta + \int_0^y \frac{\omega_1(\eta)\, d\eta}{\sqrt{\pi(y - \eta)}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \omega_1(t)dt \int_t^y \frac{\exp(\eta - t)}{\sqrt{y - \eta}}\, d\eta + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \omega_1(\eta) N^*(0, y; 0, \eta)\, d\eta +$$

$$- \frac{c}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^y \omega_1(\eta)d\eta \int_0^1 \exp\left(-\frac{c}{a}\xi\right) N^*(0, y; \xi, \eta)\, d\xi -$$

$$-\frac{c}{a\sqrt{\pi}}\int_0^y \omega_1(\eta)\,d\eta\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y-\eta}}\exp\left[-\frac{\xi^2}{4(y-\eta)}-\frac{c}{a}\xi\right]d\xi =$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y \sigma_1'(\eta)N(0, y; 1, \eta)\,d\eta-\alpha_2(y)-\beta_2(y)-\gamma_2(y)-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^y \frac{\beta_2(\eta)+\gamma_2(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\,d\eta-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y [\beta_2(\eta)+$$

$$+\gamma_2(\eta)]N^*(0, y; 0, \eta)\,d\eta+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^1 f_1'(\xi)N^*(0, y; \xi, 0)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 f_1'(\xi)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4y}\right)d\xi.$$

Применив известную форму обращения Абеля к этому уравнению, получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\omega_1(y)$:

$$\omega_1(y)+\int_0^y K_4(y_1, t)\omega_1(t)\,dt = g_4(y), \tag{82}$$

где

$$K_4(y_1 t)=\frac{1}{\sqrt{\pi(y-t)}}+\frac{1}{2\pi}\int_t^y \frac{1}{\sqrt{y-s}}N_s^*(0, s; 0, t)\,ds+$$

$$+\int_t^y \frac{\exp(s-t)}{\sqrt{\pi(y-s)}}\,ds-\frac{\exp\left(-\frac{c}{a}\right)}{2\pi}\int_t^y \frac{N_s(0, s; 1, t)\,ds}{\sqrt{y-s}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_t^y \frac{ds}{\sqrt{y-s}}\int_t^s \exp(\eta-t)\,N_s^*(0, s; 0, \eta)\,d\eta+1+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_t^y \frac{ds}{\sqrt{y-s}}\int_t^s \frac{\exp(\eta-t)}{\sqrt{s-\eta}}\,d\eta-\frac{c}{2a\pi\sqrt{y-t}}\int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda}}\times$$

$$\times\int_0^{\frac{1}{\sqrt{(y-t)\lambda}}} \exp\left[-\frac{z^2}{4}-\frac{c}{a}\sqrt{(y-t)\lambda}\,z\right]dz+$$

$$+\frac{c}{2a\pi(y-t)}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}\exp\left[-\frac{1}{4(y-t)\lambda}-\frac{c}{a}\right]d\lambda+$$

$$+\frac{c^2}{2a^2\pi}\int_0^1 \frac{\sqrt{\lambda}\,d\lambda}{\sqrt{1-\lambda}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{(y-t)\lambda}}} z\exp\left[-\frac{z^2}{4}-\frac{c}{a}\sqrt{(y-t)\lambda}\,z\right]dz-$$

$$-\frac{c}{2a\pi}\int_0^1 \exp\left(-\frac{c}{a}\xi\right)d\xi\int_t^y \frac{1}{\sqrt{y-s}}N_s^*(0,s;\xi,t)\,ds,$$

$$g_4(y)=-\int_0^y \frac{\alpha_3'(s)+\beta_2'(s)+\gamma_2'(s)}{\sqrt{\pi(y-s)}}\,ds-\sqrt{\pi}\,[\beta_2(y)+\gamma_2(y)]+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^y \sigma_1'(\eta)\,d\eta\int_\eta^y \frac{1}{\sqrt{y-s}}N_s(0,\ s;\ 1,\ \eta)\,ds-\frac{1}{2\pi}\int_0^y [\beta_2(\eta)+$$

$$+\gamma_2(\eta)]\,d\eta\int_\eta^y \frac{1}{\sqrt{y-s}}N_s^*(0,\ s;\ 0,\ \eta)\,ds+\frac{1}{2\pi}\int_0^1 f_1'(\xi)\,d\xi\times$$

$$\times\int_0^y \frac{1}{\sqrt{g-s}}N_s^*(0,\ s;\ \xi,\ 0)\,ds-\frac{f_1'(1)}{2\pi}\int_0^y \frac{1}{\sqrt{s^3(y-s)}}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{1}{4s}\right)ds+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{y}}} \lambda\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right)d\lambda\int_0^1 \frac{f_1'(\sqrt{y}\,\lambda z)}{\sqrt{1-z^2}}\,dz+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\int_{\frac{1}{\sqrt{y}}}^{1/(\sqrt{y}z)} \lambda\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right)f_1^*(\sqrt{y},\ \lambda,\ z)\,d\lambda.$$

Отсюда видно, что функция $K_4(y, t)$ имеет слабую особенность, а функция $g_4(y)$ непрерывна. Тогда уравнение (82) допускает единственное решение из класса $C[0,1]$, причем $\omega_1(0) = f_1''(0)$. Решая уравнение (82), определяем функцию $\omega_1(y)$ и тем самым— функции $\tau(y)$, $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$.

Случай 4. В этом случае уравнение (1) можно переписать в виде

$$L_i u_i = \omega_i(x) \exp\left(-\frac{c}{b} y\right), \qquad (83)$$

где $\omega_i(x)$ — произвольные непрерывные функции.

Из уравнения (83) ($i=2$) при $y=0$ находим $\omega_2(x) = f_2''(x) - \psi(x)$.

Функции $F(x)$ и $\Phi(x)$ определяются как в случае 1. а). Для продолжения функции $\psi(x)$ на отрезки $[-2, -1]$ и $[0,1]$ положим

$$\omega_2(x) = \begin{cases} F_2''(x) - \Psi_2(x), & \text{если } y-2 \leqslant x < -1, \\ f_2''(x) - \psi(x), & \text{если } -1 \leqslant x < 0, \\ F_1''(x) - \Psi_1(x), & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1-y. \end{cases}$$

Воспользуясь условиями (3), (11) и (12), получим

$$\Psi_2(-1-y) = \frac{2c}{b}\sigma_2'(y) + 2\sigma_2''(y) - \psi(y-1), \quad 0 \leqslant y < 1,$$

$$\int_{-y}^{0} [f_2''(\xi) - \psi(\xi)] \exp\left[-\frac{c}{b}(y+\xi)\right] d\xi +$$

$$+ \int_{0}^{y} [F_1''(\xi) - \Psi_1(\xi)] \exp\left[\frac{c}{b}(\xi - y)\right] d\xi = -2\tau'(y), \qquad (84)$$

$$\Psi_1(y) = \frac{2c}{b}\tau'(y) + 2\tau''(y) - \psi(-y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

$$\int_{-y}^{0} [f_2''(\xi) - \psi(\xi)] \exp\left(-\frac{c}{b}(y+\xi)\right) d\xi - \int_{0}^{y} [F_1''(\xi) -$$

$$- \Psi_1(\xi)] \exp\left(\frac{c}{b}(\xi - y)\right) d\xi = 2\nu(y) - 2f_2'(-y) + 2\varphi_2(-y).$$

(85)

Из (84) и (85) следует

$$\nu(y) - \tau'(y) = \alpha_1(y), \tag{86}$$

где

$$\alpha_1(y) = f_2'(-y) - \varphi_2(-y) + \int_{-y}^{0} [f_2'(\xi) -$$

$$- \varphi(\xi)] \exp\left[-\frac{c}{b}(y+\xi)\right] d\xi,$$

а из (86) определяем

$$\tau(y) = \int_0^y \nu(t)\,dt - \int_0^y \alpha_1(t)\,dt. \tag{87}$$

В области D_1 введем обозначение

$$bu_{1y} + cu_1 = v(x, y), \tag{88}$$

где $V(x_1 y)$ — произвольная функция.
Тогда для $V(x, y)$ получаем задачу

$$\begin{cases} v_{xx} - y_y = 0, \\ v(0, y) = b\tau'(y) + c\tau(y), \\ v(1, y) = b\tau_1'(y) + c\sigma_1(y) \equiv \bar{\sigma}_1(y), \\ v(x, 0) = b\varphi_1(x) + cf_1(x) \equiv \bar{f}_1(x). \end{cases}$$

Решение этой задачи имеет вид

$$v(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^y [b\tau'(\eta) + c\tau(\eta)]\, G_1(x, y; 0, \eta)\,d\eta -\right.$$

$$\left.- \int_0^y \sigma_1(\eta) G_1(x, y; 1, \eta)\,d\eta + \int_0^1 \bar{f}_1(\xi) G(x, y; \xi, 0)\,d\xi\right\}.$$

Тогда решение уравнения (88), удовлетворяющее условию (3), можно записать в виде

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left\{\int^y \exp\left[\frac{c}{b}(t-y)\right]\left[\int_0^t b\tau'(\eta) +\right.\right.$$

$$+ c\tau(\eta) G_1(x, t; 0, \eta)\,d\eta - \int^t \bar{\sigma}_1(\eta) G_1(x, t; 1, \eta)\,d\eta +$$

$$+\int_0^1 \bar{f}_1(\xi)G(x,t;\xi,0)\,d\xi\Big]dt\Big\}+f_1(x)\exp\left(-\frac{c}{b}y\right).$$

Дифференцируя это решение по x и устремляя x к нулю с учетом (86), (87), после некоторых вычислений приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $\nu(y)$:

$$\nu(y)+\int_0^y K_6(y,t)\nu(t)\,dt = g_6(y), \tag{89}$$

где

$$K_6(y,t)=\frac{b}{2\sqrt{\pi}}N(0,y;0,t)-\frac{c}{2\sqrt{\pi}}\int_t^y N(0,y;0,\eta)\,d\eta-$$

$$-\frac{c}{2\sqrt{\pi}}\int_t^y \exp\left(\frac{c}{b}(z-y)\right)N(0,z;0,t)\,dz-$$

$$-\frac{c^2}{2b\sqrt{\pi}}\int_t^y d\eta\int_\eta^y \exp\left(\frac{c}{b}(z-y)\right)N(0,z;0,t)\,dz,$$

$$g_6(y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Big\{-\int_0^y\Big[b\alpha_1(\eta)+c\int_0^\eta \alpha_1(z)dz\Big]N(0,y;0,\eta)\,d\eta+$$

$$+\frac{c}{b}\int_0^y\Big[b\alpha_1(\eta)+c\int_0^\eta \alpha_1(z)\,dz\Big]d\eta\int_\eta^y \exp\left(\frac{c}{b}(t-y)\right)N(0,t;0,\eta)dt+$$

$$+\int_0^y \bar{\sigma}_1'(\eta)N(0,y;1,\eta)\,d\eta+f_1'(0)\exp\left(-\frac{c}{b}y\right)-$$

$$-\frac{c}{b}\int_0^y \bar{\sigma}_1(\eta)d\eta\int_\eta^y \exp\left(\frac{c}{b}(t-y)\right)N(0,t;1,\eta)\,dt-$$

$$-\int_0^1 \bar{f}_1(\xi)\,d\xi\int_0^y \exp\left[\frac{c}{b}(t-y)\right]N_\xi'(0,t;\xi,0)\,dt-$$

$$-2\int_0^1 \bar{f}_1(\xi)\,d\xi\int_{\frac{1}{\sqrt{y}}}^{+\infty}\exp\left[-\frac{z^2}{4}+\frac{c}{b}\left(\frac{\xi^2}{z^2}-y\right)\right]dz\Big\}.$$

Ядро $K_5(y, t)$ имеет слабую особенность, а функция $g_5(y)$ непрерывна. Решая уравнение (89), находим функцию $\nu(y) \in C\,[0, 1]$ и тем самым функции $\tau'(y)$, $\tau(y)$, $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$.

Замечание 2. Задачу 1 можно исследовать, когда операторы L_1 и L_2 имеют вид

$$L_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} + a_1(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + c_1(x, y),$$

$$L_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_2(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + b_2(x, y)\frac{\partial}{\partial y} + c_2(x, y).$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Халмуратов Д. О задаче Коши для параболо-гиперболического уравнения третьего порядка с нехарактеристической линией изменения типа// Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1987. № 2. С. 39—44.
2. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент: Фан, 1986. 220 с.
3. Сопуев А. О. О краевых задачах для вырождающегося пораболо-гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа// Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1987. № 2. С. 33—38.
4. Сопуев А. О., Джураев Дж. Т. О краевых задачах для смешанного параболо-гиперболического уравнения с двумя линиями изменения типа// Прямые и обратные краевые задачи математической физики. Ташкент: Фан, 1986. С. 63—73.
5. Мамажанов М., Халмуратов Д. О краевых задачах для параболо-гиперболических уравнений третьего порядка с нехарактеристической линией изменения типа//Прямые и обратные краевые задачи математической физики. Ташкент: Фан, 1987. С. 30—35.

В. И. МИХАЙЛОВСКИЙ, Ж. УТЕУЛИЕВ, М. ШЕРКУЗИЕВ

О ЖЕСТКОСТИ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ НЕИЗГИБАЕМОСТИ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРИ ЗАДАННОМ НАПРАВЛЕНИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТОЧЕК КРАЯ

В работе исследованы бесконечно малые изгибания односвязных плоских областей и выпуклых поверхностей, на которые наложены связи, допускающие перемещения точек края лишь в одном и том же постоянном направлении $\vec{a}$.

Доказано, что такие поверхности в указанном классе деформаций обладают жесткостью не выше второго порядка, а следовательно, аналитически неизгибаемы [1, 2].

Теорема 1. Если на односвязный кусок плоскости, который ограничен гладким контуром g, наложить связи, допускающие перемещения точек края g лишь в одном и том же постоянном направлении $\vec{a}$, то он станет аналитически неизгибаемым, точнее говоря, останется нежестким по отношению к бесконечно малым изгибаниям первого порядка, но будет жестким по отношению к бесконечно малым изгибаниям второго порядка.

Доказательство. Пусть $\vec{x}=\vec{x}(u,v)$, $(u, v)\in D$ — регулярная параметризация поверхности Ф, а $\vec{x}=\vec{x}(u(s), v(s))$, $0\leqslant s\leqslant S$ — естественная параметризация контура g.

Для того чтобы деформация второго порядка

$$\vec{x}^*(u, v, \varepsilon) = \vec{x}(u, v) + 2\varepsilon \overset{1}{\vec{z}}(u, v) + 2\varepsilon^2 \overset{2}{\vec{z}}(u, v)$$

была бесконечно малым изгибанием второго порядка поверхности Ф, на которую наложены связи, допускающие перемещения точек края g лишь в заданном постоянном направлении $\vec{a}$, необходимо и достаточно, чтобы вектор-функции $\overset{1}{\vec{z}}(u, v)$ и $\overset{2}{\vec{z}}(u, v)$ в области D являлись решением системы дифференциальных уравнений

$$(d\vec{x}, d\overset{1}{\vec{z}}) = 0, \quad (d\vec{x}, d\overset{2}{\vec{z}}) + d\overset{1}{\vec{z}}{}^2 = 0 \tag{1}$$

и вдоль контура g удовлетворяли таким краевым условиям:

$$\overset{1}{\vec{z}}_{|g} = \lambda_1(s)\,\vec{a}, \quad \overset{2}{\vec{z}}_{|g} = \lambda_2(s)\,\vec{a}, \tag{2}$$

где $\lambda_1(s)$, $\lambda_2(s)$ — произвольные дифференцируемые функции.

Уравнение плоской области Ф запишем в виде

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2, \quad (u, v)\in D, \tag{3}$$

где $\vec{x}_0=\text{const}$ — радиус-вектор произвольно фиксированной точки плоскости Ф, а $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ — единичные постоянные взаимно перпендикулярные векторы, параллельные плоскости Ф.

Из первого уравнения системы (1) с учетом равенства (3) находим изгибающее поле $\overset{1}{\vec{z}}(u, v)$ плоской области Ф, свободной от внешних связей:

$$\overset{1}{\vec{z}}(u, v) = (-cv + c_1)\vec{e}_1 + (cu + c_2)\vec{e}_2 + \varphi(u, v)[\vec{e}_1, \vec{e}_2], \tag{4}$$

где $\varphi(u, v)$ — произвольная дифференцируемая функция, а c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Тогда второе уравнение системы (1) равносильно такой системе уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \left(\overset{2}{\vec z}_u, \vec e_1\right) = -\left(\varphi_u^2 + c^2\right), \\ \left(\overset{2}{\vec z}_u, \vec e_2\right) + \left(\overset{2}{\vec z}_v, \vec e_1\right) = -2\varphi_u \varphi_v, \\ \left(\overset{2}{\vec z}_v, \vec e_2\right) = -\left(\varphi_v^2 + c^2\right). \end{cases} \tag{5}$$

Продифференцируем второе уравнение этой системы сначала по u, а затем по v и в левую часть полученного равенства вместо $\left(\overset{2}{\vec z}_{uuv}, \vec e_2\right)$ и $\left(\overset{2}{\vec z}_{vuv}, \vec e_1\right)$ подставим их выражения, найденные из третьего и первого уравнений. В результате получим

$$\varphi_{uu}\varphi_{vv} - \varphi_{uv}^2 = 0. \tag{6}$$

Очевидно, это равенство является необходимым условием совместности системы уравнений (5), а следовательно, необходимым условием продолжения бесконечно малого изгибания первого порядка $\overset{1}{\vec z}(u, v)$, имеющего вид (4), в бесконечно малое изгибание второго порядка.

Из уравнений $\overset{1}{\vec z}_u = \left[\overset{1}{\vec y}, \vec x_u\right]$, $\overset{1}{\vec z}_v = \left[\overset{1}{\vec y}, \vec x_v\right]$ [1], учитывая равенства (3) и (4), находим

$$\overset{1}{\vec y}(u, v) = \varphi_v \vec e_1 - \varphi_u \vec e_2 + c\,[\vec e_1, \vec e_2]. \tag{7}$$

Но, с другой стороны, как известно [1],

$$\overset{1}{\vec y}_u = \alpha \vec x_u - \beta \vec x_v, \quad \overset{1}{\vec y}_v = \gamma \vec x_u - \alpha \vec x_v. \tag{8}$$

Из равенств (7) и (8) с учетом (3) находим

$$\alpha(u, v) = \varphi_{uv}, \quad \beta(u, v) = \varphi_{uu}, \quad \gamma(u, v) = \varphi_{vv}. \tag{9}$$

Отсюда следует, что $\alpha(u, v) = \beta(u, v) = \gamma(u, v) \equiv 0$, а следовательно, $\overset{1}{\vec y}(u, v) = \overrightarrow{\text{const}}$ тогда и только тогда, когда $\varphi(u, v)$ в области D является линейной функцией от u и v.

Очевидно, что существует нелинейная в области D функция $\varphi(u, v)$, такая, что соответствующая ей вектор-функция (4) будет удовлетворять первому краевому условию (2). Это означает, что в рассматриваемом классе деформаций односвязный кусок плоскости допускает нетривиальные бесконечно малые изгибания первого порядка. Докажем, что эти изгибания не могут быть продолжены в нетривиальные бесконечно малые изгибания второго порядка.

Пусть $\overset{1}{\vec{z}}(u, v)$ и $\overset{2}{\vec{z}}(u, v)$ — векторные поля, определяющие бесконечно малые изгибания второго порядка плоской области Ф, на которую наложены связи (2). Продифференцируем равенства (2) вдоль линии g и умножим скалярно на вектор $d\vec{x}_{|g}$. Получим

$$\left(d\vec{x},\ d\overset{1}{\vec{z}}\right)_{|g} = d\lambda_1\left(\vec{a},\ d\vec{x}\right)_{|g},\quad \left(d\vec{x},\ d\overset{2}{\vec{z}}\right)_{|g} = d\lambda_2\left(\vec{a},\ d\vec{x}\right)_{|g}. \tag{10}$$

Из равенств (1), (2) и (10) находим $\overset{1}{\vec{z}}_{|g} = \lambda_0\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{const}}$, а следовательно, $\varphi(u, v)_{|g} = c_0 = \mathrm{const}$. Но тогда из уравнения (6) заключаем, что $\varphi(u, v) = c_0$ во всех точках D. Таким образом, из системы уравнений (1) с учетом краевых условий (2) следует, что поле $\overset{1}{\vec{z}}(u, v)$ — тривиально. Это означает, что в рассматриваемом классе деформаций односвязный кусок плоскости обладает жесткостью второго порядка, а следовательно,— аналитически неизгибаем.

Теорема 2. Пусть Ф — произвольная односвязная регулярная выпуклая поверхность, которая ограничена регулярным замкнутым контуром Г, не содержащим отрезков, все точки которых являются точками уплощения поверхности Ф. Если на такую поверхность наложить связи, допускающие перемещения точек края Г лишь в одном и том же постоянном направлении $\vec{a}$, то поверхность Ф станет аналитически неизгибаемой.

Доказательство. Как отмечалось выше, доказательство теоремы сводится к исследованию краевой задачи (1), (2). Запишем первое краевое условие (2) в таком виде:

$$\left[\overset{1}{\vec{z}}(u(s),\ v(s)),\ \vec{a}\right] = \vec{0}.$$

Если продифференцировать это равенство вдоль контура Г и учесть, что вдоль Г $\dfrac{d\overset{1}{\vec{z}}}{ds} = \left[\overset{1}{\vec{y}},\ \vec{\tau}\right]$, где $\vec{\tau}(s)$ — единичный вектор, касательный к кривой Г, то получим

$$\left(\vec{a},\ \vec{\tau}\right)\overset{1}{\vec{y}} - \left(\vec{a},\ \overset{1}{\vec{y}}\right)\vec{\tau} = \vec{0}. \tag{11}$$

В зависимости от формы контура Г рассмотрим два возможных случая:

1) кривая Г не содержит в себе плоских отрезков, лежащих в плоскостях, перпендикулярных вектору $\vec{a}$;

2) кривая Г содержит в себе отрезки, которые лежат в плоскостях, перпендикулярных вектору $\vec{a}$.

1. В первом случае $(\vec{a}, \vec{\tau}(s))$ не обращается тождественно в нуль ни на каком отрезке изменения s. Поэтому из уравнения (11) следует, что

$$\overset{1}{\vec{y}}_{|\Gamma} = \mu(s)\,\vec{\tau}(s). \tag{12}$$

Продифференцируем это равенство вдоль кривой Г. Имеем

$$d\overset{1}{\vec{y}}_{|\Gamma} = d\mu\vec{\tau} + k\mu\vec{\nu}, \tag{13}$$

где $k(s)$ и $\vec{\nu}(s)$ — соответственно кривизна и единичный вектор главной нормали кривой Г.

Если контур Г не содержит в себе отрезков, являющихся асимптотическими линиями поверхности Ф, то $\mu(s)=0$. Тогда из равенств (12) и (13) заключаем, что вдоль контура Г выполняется равенство

$$(\vec{x}, \overset{1}{\vec{y}}, d\overset{1}{\vec{y}})_{|\Gamma} = 0. \tag{14}$$

Докажем, что это равенство будет выполняться и в том случае, когда контур Г содержит в себе отрезки, являющиеся асимптотическими линиями поверхности Ф. Введем на поверхности Ф в окрестности кривой Г локальные координаты u, v так, чтобы кривая Г имела уравнение $v=\mathrm{const}$. Тогда вдоль тех отрезков Γ_1 контура Г, которые являются асимптотическими линиями поверхности Ф, из первого уравнения системы [1]

$$\left.\begin{aligned} &L\gamma - 2M\alpha + N\beta = 0,\\ &\alpha_v - \gamma_u = \Gamma^1_{11}\gamma - 2\Gamma^2_{12}\alpha + \Gamma^2_{22}\beta,\\ &\alpha_u - \beta_v = \Gamma^2_{11}\gamma - 2\Gamma^2_{12}\alpha + \Gamma^2_{22}\beta \end{aligned}\right|$$

находим $\beta(u, v)_{|\Gamma_1}=0$, вследствие чего из первого уравнения системы (8) получаем

$$d\overset{1}{\vec{y}}_{|\Gamma_1} = \tilde{\alpha}\,\vec{\tau}(s)\,ds. \tag{16}$$

Теперь из равенств (12) и (16) опять приходим к равенству (14). Из тождества Бляшке [1]

$$2\iint\limits_{\Phi} (\beta\gamma - \alpha^2)\left(\vec{x}, \vec{x}_u, \vec{x}_v\right) du\,dv = \oint\limits_{\Gamma} \left(\vec{x}, \overset{1}{\vec{y}}, d\overset{1}{\vec{y}}\right),$$

учитывая равенство (14), имеем

$$\iint\limits_{\Phi} (\beta\gamma - \alpha^2)(\vec{x}, \vec{x}_u, \vec{x}_v)\, du\, dv = 0. \tag{17}$$

Предположим, что поверхность Ф не содержит в себе плоских областей. Поскольку Ф — выпуклая поверхность, то за счет выбора начала координат и параметризации поверхности можно добиться того, чтобы во всех точках поверхности выполнялись неравенства [3]

$$(\vec{x}, \vec{x}_u, \vec{x}_v) > 0; \quad \beta\gamma - \alpha^2 \leqslant 0. \tag{18}$$

Тогда из равенства (17) следует, что во всех точках поверхности Ф

$$\beta\gamma - \alpha^2 = 0. \tag{19}$$

Отсюда, как известно [1], следует, что на тех областях поверхности Ф, где гауссова кривизна положительна

$$\alpha(u, v) = \beta(u, v) = \gamma(u, v) = 0, \tag{20}$$

а это означает, что на них $\overset{1}{\vec{y}}(u, v) = \overrightarrow{\text{const}}$.

Пусть $\tilde{\Phi}$ — одна из областей поверхности Ф, где гауссова кривизна равна нулю, и при этом $\tilde{\Phi}$ не является плоской областью. Так как поверхность Ф регулярна, то область $\tilde{\Phi}$ правильно покрыта отрезками прямолинейных образующих, концы которых либо принадлежат контуру Г, либо контурам, которые ограничивают области положительной гауссовой кривизны. Но тогда, повторив соответствующие рассуждения работ [1, 3, 4], приходим к заключению, что и на $\tilde{\Phi}$ выполняются равенства (20).

Таким образом, если регулярная поверхность Ф не содержит в себе плоских областей, то в рассматриваемом случае она обладает жесткостью первого порядка.

Предположим теперь, что поверхность Ф содержит в себе плоские области. Тогда такая поверхность в целом допускает нетривиальные бесконечно малые изгибания первого порядка. Докажем, что эти изгибания не могут быть продолжены в нетривиальные бесконечно малые изгибания второго порядка. Как и выше, за счет выбора начала координат и параметризации поверхности можно добиться того, чтобы во всех точках поверхности выполнялось первое неравенство (18), а в точках поверхности, не принадлежащих ее плоским областям,— второе неравенство (18).

Поскольку при бесконечно малых изгибаниях второго порядка на плоских областях выполняется равенство (19), то и в этом случае подынтегральная функция в равенстве (17) во всех точках поверхности принимает неположительные значения. Так как по условию теоремы контур Г не содержит в себе отрезков, состоящих из точек уплощения, то контуры, ограничивающие плоские области поверхности Ф, не имеют общих отрезков с контуром Г. Следовательно, они принадлежат контурам, ограничивающим области, на которых, как было показано выше, выполняются равенства (20).

Пусть П — одна из плоских областей поверхности Ф, а Γ_2 — замкнутый контур, который ее ограничивает. Тогда вдоль контура Γ_2 $\alpha_{|\Gamma_2} = \beta_{|\Gamma_2} = \gamma_{|\Gamma_2} = 0$, а следовательно, согласно равенствам (9), $\varphi_{uv|\Gamma_2} = \varphi_{uu|\Gamma_2} = \varphi_{vv|\Gamma_2} = 0$. Отсюда нетрудно доказать, что вдоль контура Γ_2 $\varphi(u, v)$ является линейной функцией переменных u и v. Но каждое дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (6), являющееся линейной функцией переменных u и v вдоль границы Γ_2, представляет собой линейную функцию и внутри области П. Тогда из равенств (9) следует, что $\alpha(u, v) = \beta(u, v) = \gamma(u, v) \equiv 0$ во всех точках области П. Это означает, что П обладает жесткостью второго порядка.

Таким образом, если поверхность Ф содержит в себе плоские области, то в рассматриваемом случае она в целом обладает жесткостью второго порядка.

2. Пусть кривая Г содержит в себе отрезки, лежащие в плоскостях, перпендикулярных вектору $\vec{a}$. Пусть $\tilde{\Gamma}$ — объединение всех таких отрезков. Так как $\left(\vec{a}, \vec{\tau}\right)_{|\tilde{\Gamma}_1} = 0$, то из равенства (11) находим, что $\left(\vec{a}, \overset{1}{\vec{y}}\right)_{|\tilde{\Gamma}} = 0$, $\left(\vec{a}, d\overset{1}{\vec{y}}\right)_{|\tilde{\Gamma}} = 0$. Из этих равенств следует, что вдоль отрезков $\tilde{\Gamma}$

$$\text{либо } \left[\overset{1}{\vec{y}}, d\overset{1}{\vec{y}}\right] = \vec{0}, \text{ либо } \left[\overset{1}{\vec{y}}, d\overset{1}{\vec{y}}\right] = \rho(s)\vec{a}, \tag{21}$$

где $\rho(s)$ — произвольная дифференцируемая функция.

Если вдоль всех отрезков из множества $\tilde{\Gamma}$ выполняется первое равенство (21), то вдоль них будет выполняться также и равенство $\left(\vec{x}, \overset{1}{\vec{y}}, d\overset{1}{\vec{y}}\right)_{|\tilde{\Gamma}} = 0$. Но тогда вдоль всего контура Г $\left(\vec{x}, \overset{1}{\vec{y}}, d\overset{1}{\vec{y}}\right) = 0$. Повторив рассуждения п. 1, приходим к заключению, что поверхность Ф в рассматриваемом классе деформаций также обладает жесткостью не выше второго порядка.

Предположим теперь, что вдоль некоторых или всех учаастков из $\tilde{\Gamma}$ выполняется второе равенство (21). При этом возможны два случая:

а) все отрезки из $\tilde{\Gamma}$ лежат в одной плоскости P;

б) некоторые отрезки из $\tilde{\Gamma}$ лежат в различных плоскостях.

Рассмотрим случай а). Возьмем за начало координат точку 0, лежащую в плоскости P и расположенную внутри выпуклой оболочки Ф, определяемой поверхностью Ф. Тогда вдоль участков $\tilde{\Gamma}$ $(\vec{a}, \vec{x})=0$, а следовательно, в силу второго равенства (21)

$$\oint\limits_{\Gamma}\left(\vec{x}, \overset{1}{\vec{y}}, d\overset{1}{\vec{y}}\right)=\int\limits_{\tilde{\Gamma}}\left(\vec{x}, \overset{1}{\vec{y}}, d\overset{1}{\vec{y}}\right)+\int\limits_{\Gamma\setminus\tilde{\Gamma}}\left(\vec{x}, \overset{1}{\vec{y}}, d\overset{1}{\vec{y}}\right)=0.$$

Теперь, как и в п. 1, заключаем, что поверхность Ф в рассматриваемом классе деформаций обладает жесткостью не выше второго порядка.

Перейдем к исследованию случая б). Так как вдоль отрезков $\tilde{\Gamma}$ $(\vec{a}, d\vec{x})=0$, то из второго уравнения (10) и второго уравнения (1) находим $d\overset{1}{\vec{z}}\big|_{\tilde{\Gamma}}=0$. Тогда из уравнения $\dfrac{d\overset{1}{\vec{z}}}{ds}=\left[\overset{1}{\vec{y}}, \vec{\tau}\right]$ следует, что $\overset{1}{\vec{y}}\big|_{\tilde{\Gamma}}=\tilde{\mu}(s)\,\vec{\tau}(s)$. Поскольку вдоль отрезков, не принадлежащих $\tilde{\Gamma}$, выполняется равенство (12), то вдоль всего контура Γ $\overset{1}{\vec{y}}=\mu(s)\,\vec{\tau}(s)$. Далее, повторяя рассуждения п. 1, заключаем, что поверхность Ф в данном случае обладает жесткостью второго порядка, и, следовательно, аналитически неизгибаема. Теорема доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ефимов Н. В. Качественные вопросы теории деформаций поверхностей// УМН. 1948 Т. 3. Вып. 2 (24). С. 47—158.
2. Ефимов Н. В. Некоторые предложения о жесткости и неизгибаемости. УМН. 1952. Т. VIII. Вып. 5 (51). С. 215—224.
3. Михайловський В. І., Михайловська Н. О. Нескінченно малі згинання розгортних поверхонь при заданному напрямку переміщення точок кривої//Вісник Київського університету. Сер. Математика і механіка. 1975. № 17. С. 74—85.
4. Михайловський В. І., Шеркузіэв М. Про жорсткість поверхонь невід'эмної кривизни при заданому напрямі переміщення точок краю// Вісник Київського університету. Сер. Математика і механіка. 1979. № 21. С. 88—92.

Т. ТУРДИЕВ, К. КАРАШЕВА

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЦИКЛИЧЕСКИМ ОТКЛОНЕНИЕМ

В работе [1] отыскивается частное решение функционального уравнения с циклическим отклонением в случае, когда определитель системы, состоящей из исходного уравнения и уравнений, полученных при замене в данном уравнении x на $\sigma(x)$, не равен нулю. В настоящей работе строится общее решение дифференциального уравнения с циклическим отклонением в случае, когда определитель тождественно равен нулю.

Рассмотрим линейное функциональное уравнение первого порядка

$$a(x)y(\sigma(x)) = b(x)y(x) + c(x), \tag{1}$$

где $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $\sigma(x)$ — определенные на некотором множестве $E \subset R^1$ функции, причем $\sigma(x)$ — периодическая по индексу периода $m=2$ функция, т. е. $\sigma_2(x)=\sigma(\sigma(x)) = x$.

Заменяя в уравнении (1) x на $\sigma(x)$, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -b(x)y(x) + a(x)y(\sigma(x)) = c(x), \\ a(\sigma(x))y(x) - b(\sigma(x))y(\sigma(x)) = c(\sigma(x)). \end{cases} \tag{2}$$

Обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} -b(x) & a(x) \\ a(\sigma(x)) & -b(\sigma(x)) \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} c(x) & a(x) \\ c(\sigma(x)) & -b(\sigma(x)) \end{vmatrix}.$$

Как известно, при $\Delta \neq 0$ система (2) и, следовательно, уравнение (1) имеет единственное решение.

Рассмотрим случай, когда $\Delta \equiv 0$ и $\Delta_1 \equiv 0$ на E. Тогда

$$\frac{a(x)}{b(\sigma(x))} = \frac{b(x)}{a(\sigma(x))} = -\frac{c(x)}{c(\sigma(x))}. \tag{3}$$

Общее решение уравнения (1) будем искать в виде

$$y(x) = u(x)\omega(x) + v(x), \tag{4}$$

где $\omega(x)$ — любое решение уравнения $\omega(\sigma(x)) = \omega(x)$, $u(x)$ — частное решение следующего однородного уравнения, соответствующего уравнению (1):

$$a(x)y(\sigma(x)) = b(x)y(x), \tag{5}$$

$v(x)$ — частное решение уравнения (1).

Из дальнейшего будет видно, что нахождение частного решения уравнения (5) сводится к нахождению некоторого частного решения следующего уравнения:

$$y(\sigma(x)) - y(x) = d(x), \tag{6}$$

где $\sigma(\sigma(x)) = x$.

Для того чтобы найти частное решение уравнения (6), составим систему уравнений

$$\begin{cases} y(\sigma(x)) - y(x) = d(x), \\ -y(\sigma(x)) + y(x) = d(\sigma(x)). \end{cases} \tag{7}$$

Определитель этой системы $\Delta \equiv 0$ на E.

Пусть ранг основной матрицы системы (7) равен единице. Тогда $\Delta_1 = \begin{vmatrix} d(x) & -1 \\ d(\sigma(x)) & 1 \end{vmatrix} \equiv 0$ на E. Отсюда имеем

$$d(x) = -d(\sigma(x)). \tag{8}$$

Частное решение $\tilde{v}(x)$ уравнения (6) будем искать в виде $\tilde{v}(x) = Ad(x)$, где $A = \text{const}$. Подставляя $\tilde{v}(x)$ в уравнение (6) и используя условие (8), получаем $A = -\frac{1}{2}$.

Следовательно,

$$\tilde{v}(x) = -\frac{1}{2} d(x). \tag{9}$$

Вернемся к уравнению (5). Логарифмируя обе части уравнения (5), сводим его к следующему уравнению вида (6):

$$\ln |y(\sigma(x))| - \ln |y(x)| = \ln \left| \frac{b(x)}{a(x)} \right|. \tag{10}$$

Аналогично тому как найдено (9) получим частное решение уравнения (10) в виде

$$\ln |u(x)| = \ln \sqrt{\left| \frac{a(x)}{b(x)} \right|}.$$

Отсюда имеем, что частным решением уравнения (5) является функция

$$u(x) = \sqrt{\left| \frac{a(x)}{b(x)} \right|}.$$

Частное решение $v(x)$ уравнения (1) будем искать в виде $v(x) = A(x)c(x)$.

Подставляя $v(x)$ в уравнение (1) и используя условие (3), получаем

$$A(\sigma(x))b(\sigma(x)) + A(x)b(x) = -1.$$

Отсюда имеем, что

$$A(x) = -\frac{1}{2b(x)}$$

и, следовательно, $v(x) = -\frac{c(x)}{2b(x)}$.

Таким образом, общим решением уравнения (1) будет функция

$$y(x) = \sqrt{\left|\frac{a(x)}{b(x)}\right|}\,\omega(x) - \frac{c(x)}{2b(x)}. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь линейное функциональное уравнение второго порядка

$$a_0(x)\,y(\sigma_2(x)) + a_1(x)\,y(\sigma(x)) + a_2(x)\,y(x) = c(x), \tag{12}$$

где $\sigma_3(x) = \sigma(\sigma(\sigma(x))) = x$. Здесь $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, $c(x)$, $\sigma(x)$ — определенные на $E \subset R^1$ функции.

Выполняя дважды подстановку $x \to \sigma(x)$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a_2(x)\,y(x) + a_1(x)\,y(\sigma(x)) + a_0(x)\,(y)\,(\sigma_2(x)) = c(x), \\ a_0(\sigma(x))\,y(x) + a_2(\sigma(x))\,y(\sigma(x)) + a_1(\sigma(x))\,y(\sigma_2(x)) = c(\sigma(x)), \\ a_1(\sigma_2(x))\,y(x) + a_0(\sigma_2(x))\,y(\sigma(x)) + a_2(\sigma_2(x))\,y(\sigma_2(x)) = c(\sigma_2(x)). \end{cases} \tag{13}$$

Пусть определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_2(x) & a_1(x) & a_0(x) \\ a_0(\sigma(x)) & a_2(\sigma(x)) & a_1(\sigma(x)) \\ a_1(\sigma_2(x)) & a_0(\sigma_2(x)) & a_2(\sigma_2(x)) \end{vmatrix} \equiv 0$$

на E. Тогда нетрудно проверить, что общим решением уравнения (12) является функция

$$y(x) = u_1(x)\,\omega_1(x) + u_2(x)\omega_2(x) + v(x), \tag{14}$$

где $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ — любые решения уравнения $\omega(\sigma(x)) = \omega(x)$. Здесь $u_1(x)$, $u_2(x)$ — фундаментальная система решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (12), т. е. однородной системы, соответствующей системе (13), $v(x)$ — некоторое частное решение уравнения (12).

Если ранг основной матрицы системы (13) равен единице, то, как и в случае уравнения (1), можно показать, что функция

$$v(x) = \frac{c(x)}{3a_2(x)} \tag{15}$$

является частным решением уравнения (12).

П р и м е р:

1) $x^2 y\left(\frac{1}{x}\right) - y(x) = x^2 - 1.$

Здесь $\sigma(x) = \frac{1}{x}$ — периодическая по индексу периода 2 функция. Система (2) имеет вид

$$\begin{cases} -y(x) + x^2 y\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 - 1, \\ \frac{1}{x^2} y(x) - y\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} - 1, \end{cases}$$

для которой $\Delta = 0$, $\Delta_1 = 0$. Тогда по формуле (11) получим общее решение данного уравнения

$$y(x) = x\omega(x) + \frac{1 - x^2}{2};$$

2) $y(x) + (x-1)y\left(\frac{1}{1-x}\right) - xy\left(\frac{x-1}{x}\right) = e^x + (x-1)\, e^{\frac{1}{1-x}} - xe^{\frac{x-1}{x}},$

где $\sigma(x) = \frac{1}{1-x}$ — периодическая по индексу периода 3 функция. Проверкой убеждаемся, что функции $u_1(x) = 1$, $u_2(x) = x$ удовлетворяют однородному уравнению, соответствующему данному уравнению. Так как ранг матрицы системы (13), составленной для данного уравнения, равен единице, то в силу (15) имеем

$$v(x) = \frac{1}{3}\left(e^x + (x-1)\, e^{\frac{1}{1-x}} - xe^{\frac{x-1}{x}}\right).$$

Поэтому, согласно формуле (14), получим общее решение данного уравнения в виде:

$$y(x) = \omega_1(x) + x\omega_2(x) + \frac{1}{3}\left(e^x + (x-1)e^{\frac{1}{1-x}} - xe^{\frac{x-1}{x}}\right).$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бродский Я. С., Слипенко А. К. Функциональные уравнения. Киев: Вища школа, 1983.

СОДЕРЖАНИЕ

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + a^2 u = 0, \quad a = \text{const},$$

$$u(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n, t) =$$

$$= u(x_1, \dots, x_{i-1}, \pi, x_{i+1}, \dots, x_n, t) = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

гольнике и $n+1$-мерном параллелепипеде.

иогр. 2.

.956 6

сабуров М., Бердышев А. С. **Задачи с нелокальными краевыми условиями на характеристиках, лежащих в различных полуплоско... я вырождающегося внутри области гиперболического уравнения ...рными коэффициентами**//Дифференциальные уравнения математи... изики и их приложения. Ташкент: Фан, 1989. С. 89—101.

матривается уравнение

$$-|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha}{|y|^{1-\frac{m}{2}}} u_x + \frac{\beta}{y} u_y = 0,$$

m_1, $\alpha = \alpha_{01}$; $\beta = \beta_{01}$ при $y > 0$ и $m = m_2$, $\alpha = \alpha_{02}$, $\beta = \beta_{02}$ при $y < 0$; β_{0i}, $i = 1, 2$ некоторые кусочно-постоянные числа в характеристи... етырехугольнике, содержащем интервал $-1 < x < 1$ прямой $y = 0$. ависимости от значений коэффициентов α_{0i}, β_{0i} ставятся и иссле... адачи с нелокальными краевыми условиями, где значение искомой $u(x, y)$ с помощью оператора дробного интегро-дифференцирова... чечно связывается на характеристиках, лежащих в различных полу... ях.

иогр. 4.

.644

мсиев Э. А. **К построению кубатурных формул для круга**//Диф... льные уравнения математической физики и их приложения. Таш... н, 1989. С. 101—105.

лагается способ построения инвариантных кубатурных формул раз... степеней точности, при котором система нелинейных алгебраических ий для определения параметров формулы распадается на подсисте... решения которых можно применять метод Прони.

иогр. 4.

7.956 6

аков Ю. П. **Об одной задаче для параболо-гиперболического урав... трехмерном пространстве**//Дифференциальные уравнения математи... физики и их приложения. Ташкент: Фан, 1989. С. 105—115.

уравнения

$$0 = \begin{cases} U_{xx} - U_y + U_{zz}, & x > 0, \\ U_{xx} - (-x)^m (U_{yy} + U_{zz}), & x < 0, \ m > 0 \end{cases}$$

в области $\Omega \subset R^3$, ограниченной поверхностью

$$S_1: \ y = 0, \quad 0 < x < h > 0, \qquad -\infty < z < +\infty,$$

$$S_2: \ y - \frac{2}{m+2} (-x)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad -\infty < z < +\infty,$$

$$S_3: \ y + \frac{2}{m+2} (-x)^{\frac{m+2}{2}} = 1, \quad -\infty < z < +\infty,$$

$$S_4: \ y = 1, \quad 0 < x \leqslant h, \qquad -\infty < z < +\infty,$$

$$S_5: \ x = h, \quad 0 < y < 1, \qquad -\infty < z < +\infty,$$

доказана однозначная разрешимость задачи Трикоми с разрывными условиями склеивания.

Библиогр. 9.

УДК 517.956.6

Абдуллаев А. С. **Об однозначной разрешимости краевой задачи для смешанного уравнения трех типов**//Дифференциальные уравнения математической физики и их приложения. Ташкент: Фан, 1989. С. 116—124.

В области D, ограниченной отрезками прямых $y=0$, $x=2$, $y=1$ и $x=-1$, рассматривается уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y + a_1(x, y) u_x + c_1(x, y) u & \text{в } D_1 \\ u_{xx} - u_{yy} + a_2(x, y) u_x + b_2(x, y) u_y + c_2(x, y) u & \text{в } D_2 \\ u_{xx} + u_{yy} + a_3(x, y) u_x + b_3(x, y) u_y + c_3(x, y) u & \text{в } D_3, \end{cases}$$

где

$$D_1 = D \cap \{0 < x < 1\}, \quad D_2 = D \cap \{x < 0\}, \quad D_3 = D \cap \{x > 0\}.$$

Доказывается однозначная разрешимость поставленной задачи.

Библиогр. 5.

УДК 62—50

Рахманов А. Т. **Групповое преследование в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями на управления**//Дифференциальные уравнения математической физики и их приложения. Ташкент: Фан, 1989. С. 124—132.

В работе получены достаточные условия завершения группового преследования в линейных дифференциальных играх. Эти достаточные условия охватывают новые классы дифференциальных игр, не укладывавшихся в рамки ранее известных работ.

Библиогр. 11.

УДК 517.956.6

Сопуев А. **Краевые задачи для параболо-гиперболического уравнения с сингулярными коэффициентами в параболической части**//Дифференциальные уравнения математической физики и их приложения. Ташкент: Фан, 1989. С. 132—136.

Доказаны существование и единственность решения уравнения

$$0=\begin{cases} u_{xx}+\dfrac{k}{x}u_y-u_x, & -1<k<1,\quad x>0,\\ u_{xx}-(-x)^m u_{yy}, & m>0,\quad x<0\end{cases} \tag{1}$$

в области, ограниченной характеристиками уравнения (1) при $x<0$

$$\xi=y-\frac{2}{m+2}(-x)^{\frac{m+2}{2}}=0,\quad \eta=y+\frac{2}{m+2}(-x)^{\frac{m+2}{2}}=1$$

и полупрямыми $y=0$, $y=1$, удовлетворяющего краевым условиям

$$u|_{\xi=0}=\psi(\eta),\quad u|_{y=0}=\varphi(x)$$

или

$$u|_{\eta=1}=\psi(\xi),\quad u|_{y=0}=\varphi(x).$$

Библиогр. 6.

УДК 517.956.6

Халмуратов Д. **Краевые задачи для уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа в прямоугольной области**//Дифференциальные уравнения математической физики и их приложения. Ташкент: Фан, 1989. С. 136—175.

В работе рассматривается уравнение

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+C\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1-\operatorname{sgn}x}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1+\operatorname{sgn}x}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \tag{1}$$

в прямоугольнике $D=\{(x,y);\ -1\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y<1\}$ с линией изменения типа $x=0$, где a, b, c — заданные вещественные числа $(a^2+b^2\neq 0)$.

Для уравнения (1) ставится ряд новых краевых задач и доказывается их однозначная разрешимость.

Библиогр. 5.

УДК 513

Михайловский В. И., Утеулиев Ж., Шеркузиев М. **О жесткости и аналитической неизгибаемости выпуклых поверхностей при заданном направлении перемещения точек края**//Дифференциальные уравнения математической физики и их приложения. Ташкент: Фан, 1989. С. 175—182.

Исследованы бесконечно малые изгибания односвязных плоских областей и выпуклых поверхностей, на которые наложены связи, допускающие перемещения точек края лишь в одном и том же постоянном направлении $\vec{a}$. Доказано, что такие поверхности в указанном классе деформаций обладают жесткостью не выше второго порядка, следовательно, аналитически неизгибаемы.

Библиогр. 4.

УДК 517.949.2

Турдиев Т., Карашева К. **Линейные дифференциальные уравнения с циклическими отклонениями**//Дифференциальные уравнения математической физики и их приложения. Ташкент: Фан, 1989. С. 183—186.

В работе строится общее решение дифференциального уравнения с циклическим отклонением в случае, когда определитель системы, состоящей из исходного уравнения и уравнений, полученных при замене в данном уравнении x на $\sigma(x)$, тождественно равен нулю.

Библиогр. 1.