Ю. С. БОГДАНОВ,
Ю. Б. СЫРОИД

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования БССР в качестве учебного пособия для студентов факультетов прикладной математики и механико-математических факультетов вузов

МИНСК
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
1983

ББК 22.161.6я73
Б73
УДК 517.9(075.8)

Рецензенты: кафедра высшей математики Московского физико-технического института; *М. М. Хапаев*, доктор физико-математических наук, профессор факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Богданов Ю. С., Сыроид Ю. Б.

Б73 Дифференциальные уравнения: [Учеб. пособие для фак. прикл. математики и мех.-мат. фак. вузов].— Мн.: Выш. школа, 1983.—239 с., ил.

В пер.: 70 к.

Пособие содержит основной учебный материал по курсу дифференциальных уравнений. Излагаются линейные (дифференциальные) уравнения с постоянными коэффициентами, линейные векторные уравнения со стационарным оператором, элементарные уравнения, общая теория и исследование обыкновенных уравнений и систем в нормальной форме, голоморфные уравнения, уравнения в частных производных 1-го порядка.

Пособие предназначено для студентов факультетов прикладной математики и механико-математических факультетов, а также для студентов и преподавателей других факультетов с расширенной программой по математике.

Б $\frac{1702050000—072}{[illegible]03(05)—83}$ 30—83 ББК 22.161.6я73

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

$\|a, b\|$	— промежуток с концами a и b
$[a, b]$	— замкнутый промежуток
$]a, b[$	— открытый промежуток
x, y, z,...	— числа или логические переменные
$x, y, z, \ldots$	— скалярные или векторные функции
$X, Y, Z, \ldots$	— матричные функции
k	— индекс со значениями $0, 1, \ldots, n-1$
j, l	— индексы со значениями $1, 2, \ldots, m$
$\|\| \cdot \|\|$	— октоэдрическая норма
$\| \cdot \|$	— евклидова норма
к-функция	— комплекснозначная функция
Re, Im	— действительная и мнимая составляющие
d	— дифференциал, оператор дифференцирования
D	— оператор дифференцирования по t
L	— линейный дифференциальный оператор
$C^m(E)$	— множество функций $x : E \to R$, имеющих непрерывные производные порядка m
$\Rightarrow$	— необходимость
$\Leftarrow$	— достаточность
$\Leftrightarrow$	— необходимость и достаточность, равносильность
Условие	— необходимое условие
Признак	— достаточное условие
Критерий	— необходимое и достаточное условие
$:=$	— оператор замены («придать значение»)
$::=$	— оператор определения («равно по определению»)
$\diamond$	— доказательство
$\blacksquare$	— конец доказательства
$=[\cdot]=$	— перерыв в выкладках
Уравнение	— дифференциальное уравнение
Система	— система дифференциальных уравнений
D-n	— дифференциальное уравнение n-го порядка
П-n	— простейшее уравнение порядка n
Л-n	— линейное уравнение порядка n
СтЛ-n	— линейное уравнение со стационарным оператором порядка n
ЛВ-m	— линейное векторное уравнение порядка m
ЛС-1	— линейная система уравнений 1-го порядка
СтЛВ	— линейные векторные уравнения со стационарным оператором
СтЛС	— линейная система со стационарным оператором
ЛМ	— линейное матричное уравнение
Ч-1	— уравнение в частных производных 1-го порядка
ОР	— общее решение
ОРП	— общее решение полное
ОИ	— общий интеграл
ПР	— полное решение
ТОР	— теорема об однозначной разрешимости
УПД	— уравнение в полных дифференциалах

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учение о дифференциальных уравнениях является частью математического анализа, имеющей большое теоретическое и прикладное значение. Теория дифференциальных уравнений в настоящее время выделилась в самостоятельную научную и учебную дисциплину. По традиции в учебный курс «Дифференциальные уравнения» включают разделы, посвященные обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям в частных производных 1-го порядка. В учебном плане факультета прикладной математики Белгосуниверситета курс дифференциальных уравнений отнесен ко второму и третьему семестрам. В конце второго семестра предусмотрен зачет по практическим занятиям этого семестра. После третьего семестра студенты сдают экзамен по всему материалу. В течение учебного года они выполняют две контрольные работы и индивидуальное задание.

Настоящее пособие написано на основании курса дифференциальных уравнений, разработанного на кафедре высшей математики факультета прикладной математики Белорусского государственного университета им. В. И. Ленина в соответствии с программой курса, утвержденной Минвузом СССР 5 сентября 1979 г.

Авторы выражают глубокую признательность профессорам Л. Д. Кудрявцеву, М. М. Хапаеву и М. В. Федорюку за ценные замечания, способствовавшие улучшению рукописи.

С особой благодарностью мы отмечаем, что идейное содержание курса определено акад. АН БССР Н. П. Еругиным.

Все замечания и пожелания, направленные на улучшение пособия, просим присылать по адресу: 220048, Минск, проспект Машерова, 11, издательство «Вышэйшая школа».

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ РЕШЕНИЯ

Уравнение для отыскания функции относят к *дифференциальным*, если в нем участвуют производные или дифференциалы искомой функции. Говоря об уравнениях, в дальнейшем подразумеваем именно дифференциальные уравнения. *Порядком* уравнения называют порядок старшей из производных или старшего из дифференциалов искомой функции, входящих в уравнение. Если в уравнении встречаются производные или дифференциалы сколь угодно высокого порядка, то порядок уравнения считают бесконечным. Если искомая функция зависит от одного единственного аргумента, то уравнение называют *обыкновенным*. Основное внимание в настоящем курсе уделено обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Рассматриваемые далее промежутки $I = |a, b|$ всегда имеют ненулевую длину, т. е. $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Производная от функции $x : I \to R$ берется вдоль I, в частности при $a \in I$ в качестве $\frac{dx}{dt}(a)$ выступает правосторонняя производная $\frac{dx}{dt_+}(a)$ и $\frac{dx}{dt}(b) = \frac{dx}{dt_-}(b)$ при $b \in I$ (аналогично для производных высших порядков). Функцию $x : I \to R$ отождествляем с ее графиком в R^2.

Решением уравнения называем функцию $x : I \to R$, заданную на промежутке I и обращающую на I данное уравнение в тождество (предполагается, что x имеет на I производные всех порядков до порядка уравнения включительно и что функции, задающие уравнение, имеют смысл вдоль x и ее производных). Каждое сужение x_1 решения x на промежуток $I_1 \subset I$ также является решением данного уравнения. Если решение x не служит сужением ни одного решения данного уравнения, отличного от самого этого решения, т. е. если для любого решения $\tilde{x}$ данного уравнения из $x \subset \tilde{x}$ следует $x = \tilde{x}$, то решение x называют *продолженным* или *непродолжаемым*.

В первой части настоящего курса рассматриваются уравнения, решения которых могут быть фактически построены с помощью элементарных аналитических операций, причем из самого способа построения будет следовать, что каждое решение является сужением некоторого продолженного решения данного уравнения. Во второй части курса при определенных условиях будет доказана общая теорема о существовании продолженного решения, включающего любое наперед заданное решение уравнения. В дальнейшем, когда речь идет о единственности решений, обладающих теми или иными свойствами, или о построении всех решений уравнения, подразумеваются именно продолженные решения.

Каждое уравнение описывает закон, которому подчиняется целая совокупность различных процессов, и имеет соответственно множество существенно различных решений. Для выделения отдельных решений, отвечающих конкретным процессам, необходимо задание дополнительных условий, которым должна удовлетворять искомая функция. Если дополнительные условия относятся к одному и тому же значению аргумента искомой функции, то их называют *начальными*. Условия, относящиеся к различным значениям аргумента, называют *граничными*. Начальные и граничные условия в совокупности называют *краевыми*. Уравнение вместе с краевыми условиями определяет *краевую задачу* (*начальную задачу*, *граничную задачу*).

Если начальные условия для уравнения порядка n состоят в задании значений решения и значений его производных до порядка $n-1$ включительно, то их называют *условиями Коши*. Начальную задачу с условиями Коши называют *задачей Коши*.

Построение решений назовем *разрешением* данного уравнения.

1.2. ПРОСТЕЙШЕЕ УРАВНЕНИЕ 1-ГО ПОРЯДКА

Простейшее уравнение 1-го порядка (П-1) имеет вид

$$\mathrm{D}x = f,\ t \in I, f: I \to R, \tag{1.1}$$

где D — *оператор дифференцирования* по t. Функцию f называют *неоднородностью* уравнения (1.1). Решением (1.1) является каждая первообразная функции f на промежутке I. Других решений уравнение (1.1) не имеет.

Теорему об однозначной разрешимости задачи Коши дальше кратко обозначаем ТОР. Рассматривая уравнения и их решения, указание $t \in I$ (при $I = R$) будем опускать.

ТОР для П-1. *Пусть f непрерывна на I. Тогда при любых $s \in I$ и $\xi \in R$ задача Коши*

$$\mathrm{D}x = f,\ t \in I;\ x|_{t=s} = \xi \tag{1.2}$$

имеет единственное решение

$$x = \xi + \int_s^t f(\tau)\,d\tau. \tag{1.3}$$

◇ Из курса математического анализа известно, что все первообразные непрерывной функции f на I доставляет формула

$$x = \int_s^t f(\tau)\,d\tau + C \tag{1.4}$$

с произвольной постоянной C. Для выделения решения задачи (1.2) в выражении (1.4) положим $t = s$. Тогда получим $C = \xi$, что и приводит к формуле (1.3). ■

Совокупность решений уравнения, заданную формулой, содержащей произвольные постоянные, называют *общим решением.* Каждое решение, получающееся из общего решения при конкретных значениях произвольных постоянных, называют *частным решением*. Общее решение, содержащее все решения данного уравнения, назовем *полным решением.* Формула (1.4) доставляет полное решение (1.1), формула (1.3) — частное решение.

1.3. ПРОСТЕЙШЕЕ УРАВНЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

Неотрицательные целые степени оператора D определяются по индукции $D^0 x :: = x$, $D^n x :: = D(D^{n-1}x)$. Оператор D^m, как известно из курса математического анализа, является линейным и $D^m D^n = D^{n+m} = D^n D^m$.

Рассмотрим простейшее уравнение порядка n (П-n) с неоднородностью f

$$D^n x = f,\ t \in I \tag{1.5}$$

и соответствующее однородное уравнение

$$D^n x = 0. \tag{1.6}$$

Решениями (1.6) являются всевозможные многочлены φ степени не выше $n - 1$. Каждый такой многочлен однозначно определяется значениями ξ_k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, своих производных $D^k\varphi$ в точке $s \in R$ и представим по формуле Тейлора порядка $n - 1$ без остаточного члена. Таким образом,

$$\begin{cases} D^n x = 0 \\ D^k x\,|_{t=s} = \xi_k \end{cases} \Leftrightarrow x = \sum_k \xi_k\,\varphi_k(t-s), \tag{1.7}$$

где

$$0 \leqslant k \leqslant n-1;\ \varphi_k(t) :: = \frac{t^k}{k!},\ \sum_k :: = \sum_{k=0}^{n-1}.$$

Лемма. *При любом натуральном n справедлива формула* $\tau_0 :: = t$)

$$\int_s^t d\tau_1 \int_s^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_s^{\tau_{n-1}} f(\tau_n)\,d\tau_n = \int_s^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\,d\tau. \tag{1.8}$$

◊ При $n = 1$ соотношение (1.8) тривиально. Допустим, что (1.8) выполняется при некотором n, $n \geqslant 1$. При этом предположении

$$\int_s^t d\tau_1 \int_s^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_s^{\tau_n} f(\tau_{n+1})\, d\tau_{n+1} = \int_s^t d\tau_1 \int_s^{\tau_1} \frac{(\tau_1 - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\, d\tau.$$

Изменим в правой части порядок интегрирования

$$\int_s^t d\tau_1 \ldots \int_s^{\tau_n} f(\tau_{n+1})\, d\tau_{n+1} = \int_s^t f(\tau)\, d\tau \int_\tau^t \frac{(\tau_1 - \tau)^{n-1}}{(n-1)!}\, d\tau_1 = \int_s^t \frac{(t-\tau)^n}{n!} f(\tau) d\tau.$$

Таким образом, соотношение (1.8) оказывается справедливым и при $n := n + 1$. По индукции (1.8) правильно при всех n. ■

ТОР для П-п. *Пусть f непрерывна на I. Тогда любая задача Коши*

$$\mathrm{D}^n x = f,\ t \in I;\ \mathrm{D}^k x\,|_{t=s} = \xi_k \tag{1.9}$$

имеет единственное решение

$$x = \sum_k \xi_k\, \varphi_k(t-s) + \int_s^t \varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau. \tag{1.10}$$

◊ Вспомогательная нулевая задача Коши

$$\mathrm{D}^n x = f,\ t \in I;\ \mathrm{D}^k x\,|_{t=s} = 0$$

имеет единственное решение

$$x = x^*(t) = \int_s^t d\tau_1 \int_s^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_s^{\tau_{n-1}} f(\tau_n)\, d\tau_n.$$

На основании (1.8)

$$x^*(t) = \int_s^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\, d\tau.$$

Введем в (1.9) новую искомую функцию φ с помощью равносильной замены $x := \varphi + x^*$. Тогда

$$\mathrm{D}^n \varphi = \mathrm{D}^n x - \mathrm{D}^n x^* = f - f = 0;$$

$$\mathrm{D}^k \varphi\,\big|_{t=s} = \mathrm{D}^k x\,\big|_{t=s} - \mathrm{D}^k x^*(s) = \xi_k - 0 = \xi_k.$$

Выразим φ через ξ_k и φ_k по формуле (1.7). После возвращения к исходной искомой функции x получим соотношение (1.10). ■

Если в выражении (1.10) заменить величины ξ_k на произвольные постоянные C_k, то получим полное решение уравнения (1.5):

$$x = \sum_k C_k\, \varphi_k(t-s) + \int_s^t \varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau. \tag{1.11}$$

Функцию φ_{n-1} называют *функцией Коши* оператора D^n.

1.4. ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ П-2

На отрезке $I = [a, b]$ рассмотрим граничную задачу

$$\mathrm{D}^2\mathrm{x} = f,\ t \in I;\ \mathrm{x}|_{t=a} = A,\ \mathrm{x}|_{t=b} = B, \tag{1.12}$$

считая f непрерывной на I. Полное решение уравнения $\mathrm{D}^2\mathrm{x} = f$ на основании (1.11) имеет вид

$$\mathrm{x} = C_0 + C_1(t-a) + \int_a^t (t-\tau) f(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Учитывая граничные условия, получаем

$$C_0 = A,\ C_0 + C_1(b-a) + \int_a^b (b-\tau) f(\tau)\, \mathrm{d}\tau = B.$$

Следовательно, любая граничная задача (1.12) однозначно разрешима и ее решение имеет вид

$$\mathrm{x} = A + \frac{t-a}{b-a}\left(B - A - \int_a^b (b-\tau) f(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right) + \int_a^t (t-\tau) f(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Определим *функцию Грина* G оператора D^2 на I, положив

$$G(t, \tau) :: = \frac{\tau - b}{b-a}(t-a) + (t-\tau)\, 1\,(t-\tau),$$

где $1(t)$ — функция единичного скачка. Тогда решение граничной задачи (1.12) можно представить в виде суммы:

$$\mathrm{x} = A + \frac{B-A}{b-a}(t-a) + \int_a^b G(t, \tau) f(\tau)\, \mathrm{d}\tau,$$

где последнее слагаемое является решением вспомогательной задачи с нулевыми граничными условиями для данного уравнения, а сумма первых двух слагаемых — решением задачи с данными граничными условиями для соответствующего однородного уравнения.

Основные упражнения*

1.1. Построить полные решения уравнений:

а) $\mathrm{Dx} = \sin$; б) $\mathrm{Dx} = \mathrm{tg}$, $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; в) $\mathrm{Dx} = \cos^2 t$; г) $\mathrm{Dx} = (1-t^2)^{-3/2}$, $I =]-1;\ 1[$.

1.2. Решить начальные задачи и обосновать выбор I:

а) $\mathrm{Dx} = \cos$, $\mathrm{x}|_{t=0} = 10$; б) $\mathrm{Dx} = \mathrm{ctg}$, $\mathrm{x}\big|_{t=\frac{\pi}{2}} = -1$, $I =]0;\ \pi[$; в) $\mathrm{Dx} =$

---

* При решении задач и примеров в тех случаях, когда уравнения заданы в нестандартном виде, целесообразна предварительная стандартизация записи, т. е. приведение уравнений к виду $\mathrm{D}^n\mathrm{x} = f$.

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $x|_{t=0} = 93$, $I =]-1;\ 1[$; г) $Dx = \dfrac{t}{\sqrt{4t^2-1}}$, $x|_{t=-1} = 7$, $I = \left]-\infty;\ -\dfrac{1}{2}\right[$.

1.3. Решить задачи 64*; 66 [1].

1.4. Построить полные решения задач 632; 633; 635; 636 [1].

1.5. С помощью функции Коши решить начальные задачи 642 [1].

1.6. Построить решение начальной задачи 645 [1].

1.7. Решить граничную задачу 643 [1].

Дополнительные упражнения

1.8. Рассмотреть задачи 1, 2, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18 [2].

1.9. Описать взаимное расположение на плоскости $R^2 = Otx$ графиков:

а) всех решений П-1; б) решений П-2, проходящих через данную точку $(s,\ \xi)$; в) решений П-2, имеющих при $t = s$ горизонтальную касательную.

1.10. Указать класс преобразований $x = \omega(t,\ \tilde{x})$, переводящих простейшее уравнение для x в уравнение того же типа для $\tilde{x}$.

1.11. При каких непрерывных функциях f переодических граничная задача

$$D^2x = f,\ x|_{t=a} = x|_{t=b},\ Dx|_{t=a} = Dx|_{t=b}$$

имеет на R периодическое решение?

1.12. Неоднородность f непрерывна на R. При каких f простейшее уравнение имеет ограниченные решения? При каких n и f все решения простейшего уравнения ограничены?

1.13. Описать зависимость от параметра λ графиков решений начальной задачи

$$Dx = \lambda f,\ x|_{t=s} = \xi,\ f(s) \neq 0.$$

1.14. Построить теорию простейшего уравнения с кусочно-непрерывной неоднородностью, привлекая в качестве решений кусочно n-дифференцируемые функции, т. е. функции непрерывно дифференцируемые $n-1$ раз на I и обладающие непрерывной ограниченной производной порядка n на любом компактном подмножестве $I_1 \subset I$ везде, кроме конечного числа точек.

1.15. Решить начальную задачу

$$Dx = 1(t),\ x|_{t=-1} = 2.$$

1.16. Решить сингулярную начальную задачу

$$D^2x = 1(t)\cdot\sin(t),\quad x|_{-\infty} :: = \lim_{s\to-\infty} x|_{t=s} = 1,\ Dx|_{-\infty} = 0.$$

1.17. Кусочно дифференцируемую функцию x_ε назовем *ε-решением* начальной задачи

$$Dx = f,\ x|_{t=s} = \xi$$

с непрерывной неоднородностью f, если

$$x_\varepsilon(s) = \xi,\ |Dx_\varepsilon(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon$$

во всех точках, где x_ε дифференцируема. Показать, что при $(\varepsilon_m) \to 0$ последовательность ε_m-решений данной начальной задачи равномерно сходится к истинному решению на любом компактном подмножестве I.

* Здесь и далее указывается номер задачи.

1.18. Определим решение сингулярной начальной задачи для обобщенного уравнения

$$\mathrm{D}^n x = \delta, \ \mathrm{D}^k x\,|_{-\infty} = 0,$$

где δ — функция Дирака, по формуле

$$x = x^{\delta}(t) :: = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)\,!}\,\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Это решение называют *функцией влияния* или *весовой функцией* для оператора D^n. Построить график функции влияния. Установить зависимость между функцией влияния и функцией Коши для D^n.

2. ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ С КВАЗИПОЛИНОМОМ

2.1. КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Комплекснозначной функцией (к-функцией) называют функцию действительного аргумента, принимающую комплексные значения. Рассмотрим к-функции, определенные на промежутках $I \subset R$. Действительную и мнимую составляющие к-величины выделяют с помощью символов Re и Im. Равенство двух к-величин равносильно одновременному выполнению двух равенств соответственно между действительными и между мнимыми составляющими этих величин, т. е.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re} z_1 = \mathrm{Re} z_2 \\ \mathrm{Im} z_1 = \mathrm{Im} z_2 \end{cases}$$

или при $z_k = x_k + iy_k$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Производные, первообразная и интеграл от к-функции определяются покомпонентно ($z = x + iy$, $h = f + ig$), т. е.

$$\mathrm{D}z = \mathrm{D}x + i\mathrm{D}y; \ \mathrm{D}^n z = \mathrm{D}^n x + i\mathrm{D}^n y;$$

$$\int\limits_{s}^{t} h\mathrm{d}\tau = \int\limits_{s}^{t} f\mathrm{d}\tau + i\int\limits_{s}^{t} g\mathrm{d}\tau.$$

Комплекснозначным решением П-n назовем n раз дифференцируемую к-функцию, обращающую данное уравнение в тождество. Построение к-решений простейшего уравнения с к-неоднородностью

$$\mathrm{D}^n z = h, \ t \in I \tag{2.1}$$

равносильно построению действительных решений системы двух уравнений

$$\mathrm{D}^n z = h \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{D}^n x = f, \\ \mathrm{D}^n y = g. \end{cases} \tag{2.2}$$

При разрешении уравнения (2.1) полезны соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{D}^n \mathrm{x} = \mathrm{Re}h &\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{D}^n \mathrm{z} = h, \\ \mathrm{x} = \mathrm{Re}\mathrm{z}; \end{cases} \\ \mathrm{D}^n \mathrm{y} = \mathrm{Im}h &\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{D}^n \mathrm{z} = h, \\ \mathrm{y} = \mathrm{Im}\mathrm{z}. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Наряду с к-решениями определяют и полное к-решение.

Начальная задача с к-неоднородностью

$$\mathrm{D}^n \mathrm{z} = h,\ t \in I;\ \mathrm{D}^k \mathrm{z}\,|_{t=s} = \zeta_k = \xi_k + i\eta_k \tag{2.4}$$

равносильна системе двух начальных действительных задач (см. (2.2))

$$\mathrm{D}^n \mathrm{z} = h,\ \mathrm{D}^k \mathrm{z}\,|_{t=s} = \zeta_k \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{D}^n \mathrm{x} = f,\ \mathrm{D}^k \mathrm{x}\,|_{t=s} = \xi_k, \\ \mathrm{D}^n \mathrm{y} = g,\ \mathrm{D}^k \mathrm{y}\,|_{t=s} = \eta_k. \end{cases} \tag{2.5}$$

На основании формулы (1.10) и соотношения (2.5) начальная задача (2.4) однозначно разрешима:

$$\mathrm{z} = \sum_k \zeta_k\, \varphi_k\,(t - s) + \int_s^t \varphi_{n-1}\,(t - \tau)\, h(\tau)\, \mathrm{d}\tau. \tag{2.6}$$

Из формулы (2.6) следует, что единственным к-решением задачи Коши с действительными начальными условиями для уравнения с действительной неоднородностью является действительное решение соответствующей действительной начальной задачи.

2.2. КВАЗИПОЛИНОМЫ

Производные и интеграл от полинома P степени $n - 1$ с комплексными коэффициентами $p_k = \overset{*}{p}_k + i\overset{**}{p}_k$ вычисляются по обычным правилам:

$$\mathrm{D}^{\varkappa} P(t) = \sum_{\varkappa \leqslant k \leqslant n-1} \frac{k!}{(k - \varkappa)!}\, p_k t^{k-\varkappa},\quad 0 \leqslant \varkappa \leqslant n - 1;$$

$$\mathrm{D}^r P = 0,\quad r \geqslant n;$$

$$\int_0^t P\mathrm{d}\tau = \sum_k \frac{1}{k + 1}\, p_k t^{k+1} = t \sum_k \frac{1}{k + 1}\, p_k t^k;$$

$$\int_s^t P\mathrm{d}\tau = \sum_k \frac{1}{k + 1}\, p_k t^{k+1} - \sum_k \frac{1}{k + 1}\, p_k s^{k+1}.$$

К-экспонента $\exp(\gamma t) = e^{\gamma t}$, т. е. показательная к-функция с натуральным основанием e и показателем γt, $\gamma = \alpha + i\beta$, вычисляется по правилу

$$e^{\gamma t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)$$

и удовлетворяет соотношениям:

$$e^{(\gamma_1+\gamma_2)t} = e^{\gamma_1 t} e^{\gamma_2 t};$$

$$\mathrm{D}^m e^{\gamma t} = \gamma^m e^{\gamma t}, \quad m \in N_0;$$

$$\int_s^t e^{\gamma\tau}\, \mathrm{d}\tau = \begin{cases} \frac{1}{\gamma}\left(e^{\gamma t} - e^{\gamma s}\right), & \gamma \neq 0, \\ t - s, & \gamma = 0. \end{cases}$$

К-функции вида

$$\sum_l P_l e^{\gamma_l t}, \quad 1 \leqslant l \leqslant m,$$

где P_l — многочлены от t с комплексными коэффициентами, называют *квазиполиномами* или *квазимногочленами*. Подобные члены у квазиполиномов всегда считаем приведенными, в частности $(1 \leqslant j \leqslant m)$

$$l \neq j \Rightarrow \gamma_l \neq \gamma_j.$$

Если не предполагать, что коэффициенты старших членов полиномов P_l отличны от 0, то квазиполином можно пополнять слагаемыми вида $P(t) \exp(\gamma t)$, $P = 0$. Используя такую расширенную запись квазиполинома, любым двум квазиполиномам можно придать внешне одинаковую форму.

Критерий совпадения квазиполиномов. *Для совпадения значений двух квазиполиномов при всех t необходимо и достаточно совпадение всех соответствующих коэффициентов этих квазиполиномов, т. е. если*

$$A :: = \left(\sum_{k,\,l} p_{kl} t^k e^{\gamma_k t} = \sum_{k,l} \tilde{p}_{kl} t^k e^{\gamma_k t}, \quad \forall t\right);$$

$$B :: = \left(p_{kl} = \tilde{p}_{kl}, \ \forall k, \ \forall l\right),$$

то

$$A \Leftrightarrow B. \tag{2.7}$$

$\Diamond$ $\Rightarrow$, т. е. необходимость B для A. От противного: существуют квазиполиномы h и $\tilde{h}$ с коэффициентами p_{kl} и $\tilde{p}_{kl}$, для которых выполнено A, но не выполнено B. Умножив $h - \tilde{h}$ на подходящую экспоненту, получим квазиполином h^* с нулевыми значениями, которому вместе с тем можно придать вид

$$h^*(t) = \left(p_1 e^{i\beta_1 t} + \ldots + p_r e^{i\beta_r t}\right) t^{m_1} + h_1(t), \ p_1 \neq 0, \ |\beta_1| > \ldots > |\beta_r|,$$

где h_1 состоит из слагаемых вида $p \cdot t^k e^{\gamma t}$, $\alpha = \mathrm{Re}\gamma \leqslant 0$, причем $k < m_1$ при $\alpha = 0$. Если $\beta_1 = 0$, то $r = 1$, и при $t \to \infty$

$$t^{-m_1} h^*(t) \to p_1 \neq 0. \tag{?!}$$

Если же $\beta_1 \neq 0$, то при достаточно больших натуральных ν

$$\left|\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^{\nu} p_2 e^{i(\beta_2-\beta_1)t} + \ldots + \left(\frac{\beta_r}{\beta_1}\right)^{\nu} p_r e^{i(\beta_r-\beta_1)t}\right| \leqslant \frac{|p_1|}{3}.$$

Фиксируем одно из таких значений ν и высчитаем производную $D^{\nu} h^*$:

$$D^{\nu} h^*(t) = (i)^{\nu}\left(p_1 \beta_1^{\nu} e^{i\beta_1 t} + \ldots + p_r \beta_r^{\nu} e^{i\beta_r t}\right) t^{m_1} + h_2(t),$$

где h_2 имеет ту же структуру, что и h_1, и поэтому $|h_2(t)| \leqslant \frac{|p_1|}{3}$ для достаточно больших t. Производная $D^{\nu} h^*$ вместе с h^* принимает только нулевые значения, а с другой стороны, для достаточно больших значений t

$$\left|\frac{1}{\beta_1^{\nu}} t^{-m_1} e^{-i\beta_1 t} D^{\nu} h^*(t)\right| \geqslant |p_1| - \frac{|p_1|}{3} - \frac{|p_1|}{3} > 0. \qquad (?!)$$

Во всех случаях отрицание $A \Rightarrow B$ привело к противоречию. Следовательно, $A \Rightarrow B$.

$\Leftarrow$, т. е. достаточность B для A, очевидна.

Совокупность всех квазиполиномов образует кольцо относительно операций сложения и умножения. Операции дифференцирования и интегрирования квазиполиномов снова приводят к квазиполиномам. Каждый квазиполином разлагается в степенной ряд с бесконечным радиусом сходимости. Замечательным свойством квазиполиномов является способность моделировать как процессы степенного или показательного роста, так и колебательные процессы.

2.3. ПРОСТЕЙШЕЕ УРАВНЕНИЕ 1-ГО ПОРЯДКА С КВАЗИПОЛИНОМОМ

Рассмотрим квазиполином h, записанный в виде

$$h(t) = P_0(t) + \sum_j P_j(t) e^{\gamma_j t}, \quad P_0(t) = \sum_{k=0}^{n_0-1} p_{k0} t^k, \quad P_j(t) = \sum_{k=0}^{n_j-1} p_{kj} t^k.$$

Предположим, что $p_{n_j-1,\,j} \neq 0$ (строгая запись квазиполинома). Тогда степень P_j равна $n_j - 1$. Кроме того, считаем, что либо $P_0 = 0$, либо $p_{n_0-1,\,0} \neq 0$ (в первом случае степень P_0 равна $-\infty$, во втором — $(n_0 - 1)$). Простейшее уравнение с квазиполиномиальной неоднородностью назовем *П-п с квазиполиномом*.

Теорема 1. *Полное k-решение уравнения П-1 с квазиполиномом*

$$Dz = h \qquad (2.8)$$

можно представить в виде квазиполинома

$$z = tQ_0(t) + \sum_j Q_j(t) e^{\gamma_j t} + C, \qquad (2.9)$$

причем степени соответствующих многочленов Q_l и P_l совпадают, а C означает произвольную комплексную постоянную.

◇ Одной из первообразных для h является

$$z^*(t) :: = \int_0^t h\mathrm{d}\tau = \int_0^t P_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \sum_j \int_0^t P_j(\tau)\, e^{\gamma_j\tau}\,\mathrm{d}\tau.$$

Первый интеграл в последней сумме вычисляем непосредственно (если $P_0 = 0$, то и $Q_0 = 0$). Остальные интегралы берем по частям (символ [...] означает перерыв в выкладках, используемый для вспомогательных построений в квадратных скобках):

$$\int_0^t P_j(\tau)\, e^{\gamma_j\tau}\,\mathrm{d}\tau = \begin{bmatrix} u = P_j(\tau), & \mathrm{d}u = \mathrm{d}P_j(\tau) \\ \mathrm{d}v = e^{\gamma_j\tau}, & v = \dfrac{1}{\gamma_j}\, e^{\gamma_j\tau} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\gamma_j}\left(\sum_{k=0}^{n_j-1} p_{kj} t^k e^{\gamma_j t} - p_{0j} - \int_0^t \sum_{k=1}^{n_j-1} k p_{kj} \tau^{k-1} e^{\gamma_j\tau}\, d\tau\right) =$$

$$= \ldots = \sum_{k=0}^{n_j-1} q_{kj} t^k e^{\gamma_j t} + c_j = Q_j(t)\, e^{\gamma_j t} + c_j,$$

где

$$q_{n_j-1,j} = \frac{1}{\gamma_j} p_{n_j-1,j} \neq 0, \quad c_j = \mathrm{const}.$$

Следовательно,

$$z^* = tQ_0(t) + \sum_j Q_j(t)\, e^{\gamma_j t} + c^*,$$

где c^* — некоторая к-постоянная. На основании (2.6) функция z^* является единственным решением (2.8) с нулевым начальным значением. Коэффициенты полиномов Q_l и постоянная c^* определяются через коэффициенты P_l однозначно (см. (2.7)). Наоборот, дифференцируя z^*, убеждаемся в том, что коэффициенты P_l однозначно выражаются через коэффициенты Q_l (см. (2.7)). Добавим к z^* произвольную к-постоянную, включим в нее постоянную c^* и получим полное k-решение уравнения (2.8) в виде (2.9). ■

Знание структуры решения уравнения (2.8) позволяет применить *метод неопределенных коэффициентов* для разрешения П-1 с квазиполиномом. С этой целью искомое решение выпишем в виде квазиполинома (2.9) с неопределенными коэффициентами q_{kl}. Подставляем полученный квазиполином в (2.8) и приравниваем соответствующие коэффициенты в обеих частях построенного соотношения. Получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно q_{kl}. Из теоремы 1 следует, что система однозначно разрешима. Добавим к построенному решению произвольную k-постоянную C и получим полное k-решение уравнения (2.8).

2.4. ПРОСТЕЙШЕЕ УРАВНЕНИЕ 1-ГО ПОРЯДКА С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ КВАЗИПОЛИНОМОМ

Используя при необходимости расширенную запись квазиполинома h, перенумеруем γ так, чтобы (считаем $m = d + 2r + 2$)

$$\alpha_0 = \beta_0 = 0, \quad \beta_u = 0, \quad 1 \leqslant u \leqslant d-1;$$

$$\alpha_{d+2v} = \alpha_{d+2v+1}, \; \beta_{d+2v} = -\beta_{d+2v+1} \neq 0, \; 0 \leqslant v \leqslant r,$$

т. е.

$$\gamma_0 = 0; \; \gamma_u \in R, \; 1 \leqslant u \leqslant d-1; \; \gamma_{d+2v} = \overline{\gamma_{d+2v+1}}, \; 0 \leqslant v \leqslant r.$$

В квазиполиноме h можно выделить действительную и мнимую части:

$$h = \sum_l \left(P_l' + iP_l''\right) e^{(\alpha_l + i\beta_l)t} = \sum_{u=0}^{d-1} \left(P_u' + iP_u''\right) e^{\alpha_u t} +$$

$$+ \sum_{v=0}^{r} \Big(\left(P_{d+2v}' + iP_{d+2v}''\right) e^{\alpha_{d+2v} t} \left(\cos \beta_{d+2v} t + i \sin \beta_{d+2v} t\right) +$$

$$+ \left(P_{d+2v+1}' + iP_{d+2v+1}''\right) e^{\alpha_{d+2v+1} t} \left(\cos \beta_{d+2v+1} t + i \sin \beta_{d+2v+1} t\right)\Big) =$$

$$= \sum_{u=0}^{d-1} P_u' e^{\alpha_u t} + \sum_{v=0}^{r} \Big(\left(P_{d+2v}' + P_{d+2v+1}'\right) \cos \beta_{2v+d} t +$$

$$+ \left(-P_{d+2v}'' + P_{d+2v+1}''\right) \sin \beta_{d+2v} t \Big) e^{\alpha_{d+2v} t} + i \left(\sum_{u=0}^{d-1} P_u'' e^{\alpha_u t} + \right.$$

$$+ \sum_{v=0}^{r} \Big(\left(P_{d+2v}' - P_{d+2v+1}'\right) \sin \beta_{d+2v} t + \big(P_{d+2v}'' +$$

$$\left. + P_{d+2v+1}''\big) \cos \beta_{d+2v} t \right) e^{\alpha_{d+2v} t}.$$

Если

$$P_u'' = 0, \; 0 \leqslant u \leqslant d-1; \; P_{d+2v}' = P_{d+2v+1}', \quad P_{d+2v}'' = -P_{d+2v+1}'', \quad 0 \leqslant v \leqslant r, \tag{2.10}$$

то квазиполином h является действительным и его можно представить в виде

$$h(t) = \sum_{u=0}^{d-1} \widetilde{P}_u e^{a_u t} + \sum_{v=0}^{r} \left(\widetilde{P}'_{d+v} \cos b_{d+v} t + \widetilde{P}''_{d+v} \sin b_{d+v}\right) e^{a_{d+v} t}, \tag{2.11}$$

где $\widetilde{P}$ и P, b и β, a и α связаны друг с другом очевидным образом. Наоборот, при действительном h на основании (2.7) выполняются соотношения (2.10) и поэтому верно (2.11).

П-1 с действительным квазиполиномом представимо в виде

$$\mathrm{D}x = P_0(t) + \sum_{u=1}^{d-1} P_u(t)\, e^{a_u t} + \sum_{v=0}^{r} \left(P_{d+v}'(t) \cos b_{d+v} t + \right.$$

$$\left. + P_{d+v}''(t) \sin b_{d+v} t\right) e^{a_{d+v} t} \tag{2.12}$$

или

$$\mathrm{D}x = \mathrm{Re}\left(\widehat{P}_0(t) + \sum_j \widehat{P}_j(t)\, e^{\gamma_j t}\right),$$

и поэтому (см. (2.3))

$$x = \mathrm{Re}\left(t\widehat{Q}_0 + \sum_j \widehat{Q}_j(t)\, e^{\gamma_j t} + C\right).$$

Выделяя обычным образом действительную часть, получаем

$$x = tQ_0(t) + \sum_{u=1}^{d-1} Q_u(t)\, e^{a_u t} + \sum_{v=0}^{r} \left(Q'_{d+v}(t) \cos b_{d+v} t + \right.$$

$$\left. + Q''_{d+v}(t) \sin b_{d+v} t\right) e^{a_{d+v} t} + C. \tag{2.13}$$

Для разрешения уравнения (2.12) можно использовать метод неопределенных коэффициентов, применяя структурную формулу (2.13).

2.5. ПРОСТЕЙШЕЕ УРАВНЕНИЕ С КВАЗИПОЛИНОМОМ

Теорема 2. *Полное к-решение уравнения с квазиполиномом*

$$\mathrm{D}^n z = P_0(t) + \sum_j P_j(t)\, e^{\gamma_j t} \tag{2.14}$$

можно представить в виде квазиполинома

$$z = t^n Q_0(t) + \sum_j Q_j(t)\, e^{\gamma_j t} + \Phi(t), \tag{2.15}$$

где Φ — полином степени $n-1$ с произвольными к-коэффициентами; степени многочленов Q_l и P_l совпадают; коэффициенты Q_l и P_l взаимно однозначно выражаются друг через друга:

◇ При $n = 1$ формула (2.15) следует из теоремы 1. Допустим теперь, что (2.15) выполняется при некотором $n \geqslant 1$, т. е.

$$\mathrm{D}^n w = P_0 + \sum_j P_j e^{\gamma_j t} \Rightarrow w = t^n Q_0 + \sum_j \tilde{Q}_j e^{\gamma_j t} + \Phi(t). \tag{2.16}$$

При $n := n + 1$ уравнение (2.14) можно заменить системой уравнений

$$\mathrm{D}^{n+1} z = P_0 + \sum_j P_j e^{\gamma_j t} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{D}^n w = P_0 + \sum_j P_j e^{\gamma_j t}, \\ \mathrm{D}z = w. \end{cases} \tag{2.17}$$

Для разрешения системы (2.17) последовательно используем формулы (2.16) и (2.9). В результате получаем соотношение (2.15) при $n + 1$. По индукции теорема доказана при всех n. ■

Аналогично доказывается, что действительное уравнение

$$\mathrm{D}^n x = P_0 + \sum_{u=1}^{d-1} P_u\, e^{a_u t} + \sum_{v=0}^{r} \left(P'_{d+v} \cos b_{d+v} t + P''_{d+v} \sin b_{d+v} t\right) e^{a_{d+v} t}$$

имеет полное решение вида

$$\mathrm{x} = t^n Q_0 + \sum_{u=1}^{d-1} Q_u e^{a_u t} + \sum_{v=0}^{r} \left(Q'_{d+v} \cos b_{d+v} t + Q''_{d+v} \sin b_{d+v} t \right) e^{a_{d+v} t} + \Phi,$$

где Φ — полином степени $n-1$ с произвольными коэффициентами; степени полиномов Q'_l и Q''_l не превосходят наибольшей из степеней P'_l и P''_l; коэффициенты Q'_l, Q''_l взаимно однозначно выражаются через коэффициенты P'_l и P''_l.

Основные упражнения

2.1. Построить полные к-решения уравнений:

а) $\mathrm{Dz} = \sqrt{t-1}$; б) $\mathrm{Dz} = \dfrac{e^{it}}{1-e^{it}}$, $I =]\,0;\ 2\pi\,[$;

в) $\mathrm{D}^2\mathrm{z} = \sqrt{t-1}$; г) $\mathrm{Dz} = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $I =]\,1;\ \infty\,[$.

2.2. Используя переход к комплексной форме (см. (2.3)), построить полные к-решения уравнений:

а) $\mathrm{D}^2\mathrm{z} = \cos^2 t$; б) $\mathrm{D}^2\mathrm{z} = \sin \dfrac{t}{2}$.

2.3. Применить метод неопределенных коэффициентов для разрешения уравнений:

а) $\mathrm{Dz} = te^{\gamma t}$; б) $\mathrm{Dz} = ate^t + be^{\gamma t} - 2$, $\gamma \neq 1$.

2.4. С помощью метода неопределенных коэффициентов разрешить действительные уравнения:

а) $\mathrm{Dx} = e^t \cos^2 t - 1$; б) $\mathrm{D}^2\mathrm{x} = 1 + e^{-2t}$; в) $\mathrm{D}^n\mathrm{x} = t^2 e^{\alpha t}$; г) $\mathrm{D}^n\mathrm{x} = a + te^{2t}$; д) $\mathrm{D}^3\mathrm{x} = t + \sin t$; е) $\mathrm{D}^5\mathrm{x} = t - \sin t$.

2.5. Решить краевые задачи:

а) $\mathrm{D}^2\mathrm{x} = t \sin t$; $\mathrm{x}|_{t=0} = \mathrm{Dx}|_{t=0} = 0$ б) $\mathrm{D}^2\mathrm{x} = te^t$, $\mathrm{x}|_{t=1} = \mathrm{Dx}|_{t=1} = 0$;
в) $\mathrm{D}^2\mathrm{x} = \sin t$; $\mathrm{x}|_{t=0} = 0$; $\mathrm{x}|_{t=\pi} = a$; г) $\mathrm{D}^2\mathrm{x} = \sin \beta t$, $\mathrm{x}|_{t=0} = 0$, $\mathrm{x}|_{t=\pi} = 0$
и построить графики решений.

Дополнительные упражнения

2.6. а) Доказать, что

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
\gamma_0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \gamma_m & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\gamma_0^{n-1} & (n-1)\gamma_0^{n-2} & \cdots & (n-1)! & \cdots & \gamma_m^{n-1} & \cdots & (n-1)! \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\gamma_0^{mn} & mn\gamma_0^{mn-1} & \cdots & \frac{(mn)!}{(mn-n+1)!}\gamma_0^{mn-n+1} & \cdots & \gamma_m^{mn} & \cdots & \frac{(mn)!}{(mn-n+1)!}\gamma_m^{mn-n+1} \\
\gamma_0^{mn+1} & (mn+1)\gamma_0^{mn} & \cdots & \frac{(mn+1)!}{(mn-n+2)!}\gamma_0^{mn-n+2} & \cdots & \gamma_m^{mn+1} & \cdots & \frac{(mn+1)!}{(mn-n+2)!}\gamma_m^{mn-n+2} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\gamma_0^{mn+n-1} & (mn+n-1)\gamma_0^{mn+n-2} & \cdots & \frac{(mn+n-1)!}{(mn)!}\gamma_0^{mn} & \cdots & \gamma_m^{mn+n-1} & \cdots & \frac{(mn+n-1)!}{(mn)!}\gamma_m^{mn}
\end{vmatrix} =$$

$$= (0! \cdot 1! \cdot \ldots \cdot (n-1)!)^{m+1} \Big(\prod_{0 \leqslant l' < l \leqslant m} (\gamma_l - \gamma_{l'})\Big)^{n^2};$$

б) передоказать критерий (2.7) на основании результата упражнения «а».

2.7. Указать условия, при которых уравнение с квазиполиномом имеет решения: а) стремящиеся к 0 при $t \to \infty$; б) ограниченные на $[0, +\infty[$; в) ограниченные на R.

2.8. Решить сингулярную начальную задачу

$$\mathrm{D}^2\mathrm{x} = e^{-t}, \ \mathrm{x}\,|_{+\infty} = 2, \ \mathrm{Dx}\,|_{+\infty} = 0.$$

2.9. Решить сингулярную граничную задачу

$$\mathrm{D}^2\mathrm{x} = e^{t}, \ \mathrm{x}\,|_{-\infty} = 2, \ \mathrm{x}\,|_{+\infty} = \infty.$$

2.10. Построить простейшее уравнение наименьшего порядка, имеющее решение $\mathrm{x} = Ct^2 + e^{2t} + \sin t$ с произвольной постоянной C.

2.11. Квазиполином x удовлетворяет уравнению $\mathrm{D}^2\mathrm{x} = a + bt^2 + Ae^{2t}$. При каких значениях m и m' для определения a, b, A достаточно задания значений:

а) $\mathrm{D}^l x(0)$, $0 \leqslant l \leqslant m$; б) $x(l')$, $0 \leqslant l' \leqslant m'$?

2.12. Используя метод неопределенных коэффициентов, построить решение начальной задачи

$$\mathrm{D}^2\mathrm{x} = \sin t + t^2, \ \mathrm{x}\,|_{t=0} = 0, \ \mathrm{Dx}\,|_{t=0} = 1$$

в виде степенного ряда

$$\mathrm{x} = \sum_{k \geqslant 0} A_k t^k.$$

I. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

3. ОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

3.1. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Линейное уравнение порядка n (Л-n) *в основной форме* имеет вид

$$\mathrm{D}^n \mathrm{x} + a_{n-1}\mathrm{D}^{n-1}\mathrm{x} + \ldots + a_0 \mathrm{x} = f, \ t \in I. \tag{3.1}$$

Коэффициенты a_k и *неоднородность* f считаем непрерывными на I. Определим на множестве функций x с непрерывной производной порядка n на I дифференциальный оператор

$$\mathrm{L}_n :: = \mathrm{D}^n + a_{n-1}\mathrm{D}^{n-1} + \ldots + a_1\mathrm{D} + a_0$$

по правилу

$$\mathrm{L}_n x = \mathrm{D}^n x + a_{n-1}\mathrm{D}^{n-1}x + \ldots + a_0 x, \ t \in I.$$

Оператор L_n является линейным.

Линейное уравнение (3.1) *в операторной форме* имеет вид

$$\mathrm{L}_n \mathrm{x} = f, \ t \in I.$$

Уравнение с нулевой неоднородностью называют *однородным*. Каждое однородное уравнение имеет очевидное решение — нулевое.

Наряду с действительным оператором используют и к-оператор

$$\mathrm{L}_n = \mathrm{D}^n + \sum_k c_k \mathrm{D}^k, \ c_k = a_k + ib_k, \ t \in I,$$

применяемый к к-функциям z. Решениями уравнения с k-коэффициентами

$$\mathrm{L}_n \mathrm{z} = h, \ h = f + ig, \ t \in I \tag{3.2}$$

являются k-функции $z = x + iy$. Если коэффициенты действительны, то уравнение (3.2) равносильно системе двух действительных уравнений. Оператор с постоянными коэффициентами называют *стационарным*.

3.2. УРАВНЕНИЕ Л-1 СО СТАЦИОНАРНЫМ ОПЕРАТОРОМ (СтЛ-1)

Рассмотрим уравнение Л-1 с постоянным коэффициентом $c_1 = -\nu = -\alpha - i\beta$ и непрерывной неоднородностью h (СтЛ-1):

$$\mathrm{Lz} = h, \ \mathrm{L} :: = \mathrm{D} - \nu, \ t \in I. \tag{3.3}$$

Из соотношения

$$\mathrm{D}(\mathrm{z}e^{-\nu t}) = e^{-\nu t}(\mathrm{D}\mathrm{z} - \nu \mathrm{z}) = e^{-\nu t}\mathrm{L}\mathrm{z}$$

следует, что

$$\mathrm{L}\mathrm{z} = e^{\nu t}\mathrm{D}(\mathrm{z}e^{-\nu t}). \tag{3.4}$$

ТОР для СтЛ-1. *Начальная задача*

$$\mathrm{L}\mathrm{z} = h, \quad \mathrm{z}|_{t=s} = \zeta \tag{3.5}$$

при любой комплексной постоянной ζ однозначно разрешима на I:

$$\mathrm{z} = \zeta e^{\nu(t-s)} + \int_s^t h(\tau)\, e^{\nu(t-\tau)} \mathrm{d}\tau. \tag{3.6}$$

◇ Задача (3.5) на основании тождества (3.4) равносильна задаче

$$e^{\nu t}\,\mathrm{D}\left(\mathrm{z}e^{-\nu t}\right) = h(t), \quad \mathrm{z}|_{t=s} = \zeta$$

или после замены $\mathrm{w} = \mathrm{z}e^{-\nu t}$ и очевидных преобразований

$$\mathrm{D}\mathrm{w} = e^{-\nu t}h(t), \quad \mathrm{w}|_{t=s} = \zeta e^{-\nu s}.$$

На основании формулы (2.6), выведенной для уравнения П-1,

$$\mathrm{w} = \zeta e^{-\nu s} + \int_s^t e^{-\nu\tau}h(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

После обратной замены $\mathrm{z} = \mathrm{w}e^{\nu t}$ получаем (3.6). ■

Если ζ считать произвольной постоянной, то (3.6) доставит полное k-решение уравнения (3.3). Формула (3.6) показывает, что при действительных ν, h и ζ начальная задача (3.5) имеет действительное решение.

Теорема 1. *Полное k-решение уравнения*

$$\mathrm{L}\mathrm{z} = P_0(t)\, e^{\nu t} + \sum_j P_j(t)\, e^{\gamma_j t} \tag{3.7}$$

представимо в виде (C — произвольная постоянная)

$$\mathrm{z} = (C + tQ_0(t))\, e^{\nu t} + \sum_j Q_j(t)\, e^{\gamma_j t}, \tag{3.8}$$

причем степени соответствующих P_l и Q_l совпадают, а коэффициенты взаимно однозначно выражаются друг через друга.

◇ После замены $\mathrm{w} = \mathrm{z}e^{-\nu t}$ уравнение (3.7) приводится к виду

$$\mathrm{D}\mathrm{w} = P_0 + \sum_j P_j e^{(\gamma_j - \nu)t}.$$

На основании (2.9) полное решение преобразованного уравнения доставляет формула

$$\mathrm{w} = C + tQ_0 + \sum_j Q_j e^{(\gamma_j - \nu)t}.$$

После обратной замены получим (3.8). ■

3.3. НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СО СТАЦИОНАРНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Корни *характеристического уравнения* относительно ν

$$\nu^n + a_{n-1}\nu^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

называют *характеристическими числами стационарного оператора* L_n.

Обозначим попарно различные корни ν_j, кратность корня обозначим n_j. Как известно из алгебры, $\sum\limits_j n_j = n$ и

$$\nu^n + a_{n-1}\nu^{n-1} + \ldots + a_0 = (\nu - \nu_1)^{n_1} \ldots (\nu - \nu_m)^{n_m}, \quad \forall \nu.$$

Действия над операторами производятся, как обычные действия над многочленами от D. Следовательно, оператор L_n можно факторизовать, т. е. разложить на множители:

$$L_n = (D - \nu_1)^{n_1} \ldots (D - \nu_m)^{n_m},$$

причем все множители перестановочны друг с другом, в частности для любой перестановки $j_1, \ldots, j_m$ чисел $1, 2, \ldots, m$

$$L_n = (D - \nu_{j_1})^{n_{j_1}} \ldots (D - \nu_{j_m})^{n_{j_m}}.$$

ТОР для однородного СтЛ. *При любых* $s \in R$, $\zeta \in K$ *начальная задача*

$$L_n z = 0, \quad D^k z|_{t=s} = \zeta_k \tag{3.9}$$

однозначно разрешима в виде квазиполинома

$$z = \sum_j Q_j e^{\nu_j t}, \tag{3.10}$$

причем степень полинома Q_j *не превосходит* $n_j - 1$.

◇ При $n = 1$ утверждение теоремы и формула (3.10) следуют из ТОР для СтЛ-1 и формулы (3.6) при $h = 0$. Допустим теперь, что теорема верна для некоторого $n \geqslant 1$. Рассмотрим оператор

$$L_{n+1} = (D - \nu_1)^{n_1} \ldots (D - \nu_m)^{n_m}, \quad \sum_j n_j = n + 1.$$

Поставим начальную задачу

$$L_{n+1} z = 0, \quad D^i z|_{t=s} = \zeta_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Введем вспомогательную искомую функцию $w = (D - \nu_m) z$. Задача для z переходит в задачу для w:

$$L_n w = 0, \quad L_n :: = (D - \nu_1)^{n_1} \ldots (D - \nu_{m-1})^{n_{m-1}} (D - \nu_m)^{n_m - 1},$$

$$D^k w|_{t=s} = D^{k+1} z|_{t=s} - \nu_m D^k z|_{t=s} = \zeta_{k+1} - \nu_m \zeta_k.$$

По сделанному допущению последняя задача однозначно разрешима

$$w = \sum_{\alpha=1}^{m-1} P_\alpha e^{\alpha t} + \widetilde{P}_m \cdot e^{\nu_m t},$$

причем степень P_α не превосходит $n_\alpha - 1$; при $n_m > 1$ степень $\widetilde{P}_m$ не превосходит $n_m - 2$; при $n_m = 1$ многочлен $\widetilde{P}_m$ является нулевым. Для определения z служит начальная задача

$$(\mathrm{D} - \nu_m)\, z = \sum_{\alpha=1}^{m-1} P_\alpha e^{\nu_\alpha t} + \widetilde{P}_m e^{\nu_m t},$$

$$z|_{t=s} = \zeta_0.$$

На основании ТОР для СтЛ-1 последняя задача однозначно разрешима, причем в силу (3.8) и (3.7) решение имеет вид

$$z = z(t) :: = (q + \widetilde{Q}_m \cdot t)\, e^{\nu_m t} + \sum_{\alpha=1}^{m-1} Q_\alpha e^{\nu_\alpha t},$$

где q — постоянная; степень $Q_m :: = q + \widetilde{Q}_m t$ не превосходит $n_m - 1$; степень Q_α не превосходит $n_\alpha - 1$. Функция z удовлетворяет начальным условиям, так как последовательно получаем

$$\mathrm{D}^0 z(s) = z(s) = \zeta_0;$$

$$\mathrm{D}^i z(s) = \mathrm{D}^{i-1} w(s) + \nu_m \mathrm{D}^{i-1} z(s) = \zeta_i - \nu_m \zeta_{i-1} + \nu_m \zeta_{i-1} = \zeta_i,$$

$$1 \leqslant i \leqslant n,$$

является единственным решением задачи (3.9) и имеет вид (3.10). На основании принципа математической индукции теорема верна для всех n. ■

Следствие. Единственным решением нулевой начальной задачи для однородного СтЛ является нулевое решение.

ТОР для действительного однородного СтЛ. *Если коэффициенты действительны, то при любых действительных s, ξ_k начальная задача*

$$\mathrm{L}_n x = 0, \quad \mathrm{D}^k x\, |_{t=s} = \xi_k \tag{3.11}$$

однозначно разрешима по формуле

$$x = x(t) :: = \sum_{u=0}^{d-1} Q_u e^{\lambda_u t} + \sum_{v=0}^{r} \left(Q_v' \cos \mu_v t + Q_v'' \sin \mu_v t\right) e^{\lambda_v t}, \tag{3.12}$$

где степень Q_α не превосходит $n_\alpha - 1$.

◇ Существование единственного k-решения z в виде квазиполинома у задачи (3.11) вытекает из ТОР для однородного СтЛ. Коэффициенты L_n действительны, поэтому

$$\mathrm{L}_n z = \mathrm{L}_n x + i \mathrm{L}_n y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{L}_n x = 0, \\ \mathrm{L}_n y = 0. \end{cases}$$

Начальные значения для y при $t = s$ являются нулевыми, так как

$$\mathrm{D}^k z\, |_{t=s} = \xi_k + i \cdot 0 = \mathrm{D}^k x\, |_{t=s} + i \mathrm{D}^k y\, |_{t=s}.$$

На основании следствия из ТОР для однородного СтЛ квазиполином $y = y(t)$ является нулевым. Действительный квазиполином $x = x(t)$ можно представить в виде (3.12) (см. гл. 2). ■

3.4. ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОГО РЕШЕНИЯ

Рассмотрим квазиполином

$$z(t) = \sum_j Q_j e^{\nu_j t}$$

с произвольными k-коэффициентами c_{ij}, причем степень Q_j в общем случае, т. е. при отличном от 0 старшем коэффициенте Q_j, равна $n_j - 1$. Общее число коэффициентов c_{ij} равно n. Выражения $\mathrm{D}^k z(s)$ представляют собой линейные формы от c_{ij}. На основании ТОР для однородного СтЛ система линейных алгебраических уравнений относительно c_{ij}

$$\mathrm{D}^k z(s) = \zeta_k$$

при любых правых частях однозначно разрешима. Следовательно, c_{ij} однозначно выражаются через ζ_k. Таким образом, соотношение $\mathrm{z} = z(t)$ доставляет полное решение уравнения (3.9).

Рассуждая по той же схеме для уравнения (3.11), придем к его полному решению в виде квазиполинома с произвольными коэффициентами:

$$x(t) = \sum_{u=0}^{d-1} Q_u e^{\lambda_u t} + \sum_{v=0}^{r} \left(Q_v' \cos \mu_v t + Q_v'' \sin \mu_v t\right) e^{\lambda_v t}.$$

3.5. БАЗИС ОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СО СТАЦИОНАРНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Рассмотрим n решений ψ_k уравнения

$$\mathrm{L}_n \mathrm{x} = 0. \tag{3.13}$$

С помощью этих решений можно построить общее решение уравнения (3.13):

$$x :: = \sum_k C_k \psi_k.$$

Если это общее решение является полным, то систему решений ψ_k называют *базисом* данного уравнения. Базис нормирован при $t = s$, если

$$\mathrm{D}^k x(s) = C_k.$$

Теорема 2. *Решения φ_k уравнения (3.13) с начальными значениями*

$$\mathrm{D}^{\varkappa} \varphi_k(0) = \delta_{k\varkappa} = \begin{cases} 0, & k \neq \varkappa; \\ 1, & k = \varkappa \end{cases} \tag{3.14}$$

образуют базис (3.13), нормированный при $t = 0$.

◇ Общее решение $x = \sum_k C_k \varphi_k$ на основании условий (3.14) обладает тем свойством, что

$$\mathrm{D}^{\varkappa} x(0) = \sum_k C_k \mathrm{D}^{\varkappa} \varphi_k(0) = C_k.$$

С помощью x можно, таким образом, решить любую начальную задачу для (3.13), и поэтому x является полным решением, φ_k образуют базис и выполнено условие нормированности при $t = 0$. ■

Отметим, что для построения φ_k обычно отправляются от общего решения в форме (3.10) или (3.12). Значения коэффициентов для базисных квазиполиномов φ_k определяют из начальных условий (3.14).

Сдвигом функции $x(t)$ называют функцию $x(t-s)$.

Лемма. *Сдвиг решения однородного СтЛ при любом s снова является решением того же уравнения.*

◇ Допустим, что x обращает уравнение (3.13) в тождество. Тогда, в частности,

$$\frac{d^n x(t-s)}{d(t-s)^n} + \sum_k \frac{d^k x(t-s)}{d(t-s)^k} \cdot a_k = 0, \ \forall t \in R.$$

Из соотношений

$$\frac{d}{d(t-s)} = \frac{d}{dt} : \frac{d(t-s)}{dt} = D, \ \frac{d^k}{d(t-s)^k} = D^k$$

следует

$$D^n x(t-s) + \sum_k a_k D^k x(t-s) = 0, \ \forall t. \ ■$$

Начальные значения решения $x(t)$ и его сдвига $y(t) :: = x(t-s)$ связаны соотношением $D^k y(s) = D^k x(0)$.

Теорема 3. *Решение начальной задачи (3.11) можно построить по формуле*

$$\mathrm{x} = x(t) :: = \sum_k \xi_k \varphi_k (t-s). \tag{3.15}$$

◇ На основании леммы и линейности оператора L_n функция x является решением уравнения (3.13). Кроме того,

$$D^\varkappa x(s) = \sum_k \xi_k D^\varkappa \varphi_k(0) = \sum_k \xi_k \delta_{k\varkappa} = \xi_\varkappa,$$

т. е. начальные условия (3.11) удовлетворяются. ■

3.6. ВРОНСКИАН

Рассмотрим n-дифференцируемые функции ψ_k на I. Определитель

$$w :: = \begin{vmatrix} D^0\psi_0 & \dots & D^0\psi_{n-1} \\ . & \dots & . \\ . & \dots & . \\ . & \dots & . \\ D^{n-1}\psi_0 & \dots & D^{n-1}\psi_{n-1} \end{vmatrix}$$

называют *вронскианом* (по имени польского математика Ю. Вроньского) этой системы функций. Вычислим Dw, взяв производные от определителя w по строкам и отбросив определители с равными строками

$$Dw = \begin{vmatrix} D^0\psi_0 & \dots & D^0\psi_{n-1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ D^{n-2}\psi_0 & \dots & D^{n-2}\psi_{n-1} \\ D^n\psi_0 & \dots & D^n\psi_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Лемма. *Если ψ_k являются решениями (3.13), то*

$$w(t) = w(0)\, e^{-a_{n-1}t}. \tag{3.16}$$

◇ Функции ψ_k обращают (3.13) в тождество, поэтому

$$D^n\psi_k = -a_{n-1}D^{n-1}\psi_k - \dots - a_1 D\psi_k - a_0 \psi_k, \quad \forall t.$$

Следовательно (см. формулу для Dw), $Dw = -a_{n-1}w$, $\forall t$, что на основании (3.6) и приводит к формуле (3.16). ■

Формулу (3.16) называют *формулой Лиувилля*. Из этой формулы следует, что вронскиан либо не обращается в 0 ни в одной точке, либо тождественно равен 0.

Теорема 4. *Решения ψ_k образуют базис (3.13) в том и только том случае, если*

$$w(t) \neq 0, \ \forall t. \tag{3.17}$$

◇ Построим общее решение уравнения (3.13) $x = \sum\limits_k C_k\psi_k$. Для произвольных начальных значений ξ_k составим систему алгебраических уравнений относительно C_k:

$$D^k x(0) = \xi_k. \tag{3.18}$$

Определителем системы (3.18) является $w(0)$. Если $w(0) \neq 0$, то система (3.18) однозначно разрешима при любых ξ_k, и поэтому ψ_k образуют базис. Наоборот если функции ψ_k образуют базис, то система (3.18) должна быть разрешимой при всех ξ_k, и поэтому $w(0) \neq 0$, но тогда (см. (3.16)) верно и (3.17). ■

Основные упражнения

3.1. Построить общие решения уравнений 721; 722; 723; 724; 726; 729; 745; 746; 747; 749 [1].

3.2. Построить базис уравнений и решить начальные задачи 803; 804; 805; 806; 810; 811 [1].

3.3. Построить общее решение и разрешить граничные задачи 813; 814; 815; 817 [1].

3.4. Придать общему решению СтЛ-2 при $\nu_{1,2} = \lambda \pm i\mu$ вид

$$x = Ce^{\lambda t}\cos(\mu t + C').$$

Дополнительные упражнения

3.5. Решить задачи 825; 826 (в издании [1] опечатка, надо ненулевые решения); 827; 828; 829; 830; 831; 832 [1].

3.6. Построить СтЛ с базисами:

а) $\varphi_0 = \cos$, $\varphi_1 = \sin$; б) $\varphi_0 = \mathrm{ch}$, $\varphi_1 = \mathrm{sh}$.

3.7. Построить СтЛ наименьшего порядка с решениями

$$x_1 = \sin,\ x_2 = \cos,\ x_3 = \exp.$$

3.8. Рассмотреть задачи 138, 139, 147, 148, 154, 156 [2].

3.9. Не используя общее решение, найти все действительные решения уравнения $\mathrm{D}^2 z + (1+i)\mathrm{D}z + iz = 0$.

3.10. Найти семь первых членов разложения в степенной ряд $\sum\limits_{m\geqslant 0} A_m t^m$ решения начальной задачи

$$\mathrm{D}^5 x + 7\mathrm{D}^3 x + 2\mathrm{D}^2 x - \mathrm{D}x - 2x = 0;$$

$$x|_{t=0} = 0,\ \mathrm{D}x|_{t=0} = 1,\ \mathrm{D}^2 x|_{t=0} = -1,\ \mathrm{D}^3 x|_{t=0} = 0,\ \mathrm{D}^4 x|_{t=0} = 5.$$

3.11. Указать преобразования $x = \omega(\tilde{x}, \tilde{t})$, $t = \rho(\tilde{t})$, переводящие Л-n в линейное уравнение для $\tilde{x}$ с аргументом $\tilde{t}$.

3.12. Указать все преобразования $x = a(t)\tilde{x} + b$, $t = \rho(\tilde{t})$, коэффициенты которых имеют непрерывные производные порядка n, переводящие однородные СтЛ с $a_0 \neq 0$ в уравнения того же типа.

3.13. Значения параметра ω называют *собственными числами* нулевой граничной задачи для однородного СтЛ, если при указанных значениях параметра граничная задача имеет ненулевые решения.
Найти собственные числа задач:

а) $\mathrm{D}^2 x + \omega^2 x = 0$; $x|_{t=0} = x|_{t=l} = 0$;

б) $\mathrm{D}^4 x + 5\omega^2 \mathrm{D}^2 x + 4\omega^2 x = 0$, $x|_{t=0} = x|_{t=\pi} = \mathrm{D}x|_{t=0} = \mathrm{D}x|_{t=\pi} = 0$.

3.14. Показать, что функции

$$t^r e^{\nu_j t},\ 0 \leqslant r \leqslant n_j - 1,\ 1 \leqslant j \leqslant m$$

образуют базис некоторого уравнения (3.13).

3.15. *Весовой функцией* оператора L_n называют $\varphi_{n-1}(t)\cdot 1(t)$. Исследовать зависимость от параметра α весовой функции оператора $\mathrm{D}^2 + \alpha$.

4. ФАЗОВАЯ ПЛОСКОСТЬ ОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ 2-ГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

4.1. ФАЗОВЫЕ ГРАФИКИ

Рассмотрим уравнение

$$\mathrm{L}_2 x = 0,\ \mathrm{L}_2 = \mathrm{D}^2 + a_1\mathrm{D} + a_0 \doteq (\mathrm{D} - \nu_1)(\mathrm{D} - \nu_m). \tag{4.1}$$

Полное решение уравнения (4.1) представляет собой квазиполином с произвольными коэффициентами, а именно:

$$\text{а) } m = 2,\ \nu_j = \lambda_j \in R,\ \lambda_1 < \lambda_2,\ x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}; \tag{4.2}$$

б) $m=1,\ \nu_1=\lambda,\ \mathrm{x}=(C_0+C_1t)e^{\lambda t};$ (4.3)

в) $m=2,\ \nu_{1,2}=\lambda\pm i\mu,\ \mu\neq 0,\ \mathrm{x}=Ce^{\lambda t}\cos(\mu t+C').$ (4.4)

Решение, сохраняющее постоянное значение при всех t, называют *стационарным*. Очевидным стационарным решением (4.1) является нулевое решение.

Евклидову плоскость $R^2=O\mathrm{xy}$ называют *фазовой* для уравнения (4.1), если решения $\mathrm{x}=x(t)$ этого уравнения изображаются на ней в виде *фазовых графиков*

$$\mathrm{x}=x(t),\ \mathrm{y}=y(t)::=\mathrm{D}x(t),\ t\in R.$$

Фазовый график стационарного решения $\mathrm{x}=x(t)=\xi$ состоит из одной единственной точки — *точки покоя* $(\xi,\ 0)$. Графики нестационарных решений представляют собой параметрически заданные линии.

Сдвиг $\tilde{x}$, $\tilde{x}(t)=x(t-s)$, решения x снова является решением (4.1) (см. лемму в гл. 3). Фазовые графики x и $\tilde{x}$ состоят из одних и тех же точек, т. е. совпадают.

Теорема 1. *Два фазовых графика (4.1) либо не имеют общих точек, либо совпадают.*

◇ Допустим, что фазовые графики решений x и x^* имеют общую точку $(\xi,\ \eta)$, т. е. существуют s и s^* такие, что $x(s)=x^*(s^*)=\xi,\ y(s)=y^*(s^*)=\eta$. Фазовые графики решения x и его сдвига $\tilde{x}$, $\tilde{x}(t)=x(t+s-s^*)$ совпадают. Решения $\tilde{x}$ и x^* при $t=s^*$ имеют одинаковые начальные значения, так как

$$\tilde{x}(s^*)=x(s)=\xi=x^*(s^*),\ \mathrm{D}\tilde{x}(s^*)=\mathrm{D}x(s)=\eta=\mathrm{D}x^*(s^*),$$

и поэтому тождественны (см. ТОР в гл. 3). Следовательно, фазовые графики x, $\tilde{x}$ и x^* совпадают, т. е. наличие общей точки у двух фазовых графиков ведет к совпадению этих графиков. ■

4.2. НАПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПО ФАЗОВОМУ ГРАФИКУ

Рассмотрим *невырожденное уравнение*, т. е. будем считать

$$a_0=\nu_1\nu_m\neq 0 \tag{4.5}$$

(*вырожденному уравнению* посвящен последний пункт главы). Вдоль стационарного решения $x(t)=\xi$ выполняется

$$\mathrm{D}^2x(t)=\mathrm{D}x(t)=0,\ \forall t\Rightarrow a_0\xi=0,$$

поэтому (см. (4.5)) $\xi=0$, т. е. единственной точкой покоя невырожденного уравнения является начало координат $O=(0,\ 0)$. Говоря о графиках (4.1), дальше имеем в виду фазовые графики ненулевых решений (4.1).

Из соотношения $y(t)=\mathrm{D}x(t)$ следует, что в верхней полуплоскости ($y>0$) составляющая $x(t)$ вдоль фазового графика возрастает, в нижней — убывает. Движение по графику (при возрастающих t) в верхней полуплоскости происходит слева направо, в нижней, наоборот, справа налево (рис. 1). Касательная к графику в точке $(x(t),\ y(t))$ имеет угловой коэффициент

$$\frac{dy(t)}{dx(t)} = \frac{Dy(t)}{Dx(t)} = \frac{D^2x(t)}{Dx(t)} = \frac{-a_1Dx(t) - a_0x(t)}{Dx(t)} = \frac{-a_1y(t) - a_0x(t)}{y(t)}.$$

Каждый график пересекает ось $y = 0$ с вертикальной касаельной.

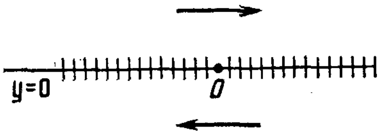

Рис. 1

Вдоль фазового графика решения x выполняется

$$Dy(t) = -a_1y(t) - a_0x(t),$$

поэтому в полуплоскости $-a_1y - a_0x < 0$ составляющая $y(t)$ убывает, а в полуплоскости $-a_1y - a_0x > 0$ — возрастает. Движение по графикам в первой полуплоскости идет вниз, во второй — вверх. Если произвести замену $t := -t$, то уравнение (4.1) перейдет в уравнение

$$D^2x - a_1\,Dx + a_0x = 0.$$

При указанной замене все фазовые графики отражаются от оси $y = 0$, движение по графикам меняется на противоположное, но взаимное расположение графиков не меняется. Поэтому дальше считаем

$$a_1 \geqslant 0. \tag{4.6}$$

Если $a_1 > 0$, то $y_1 > y_2$ равносильно $-a_1y_1 - a_0x < -a_1y_2 - a_0x$, поэтому движение по графику над прямой $-a_1y - a_0x = 0$ направлено вниз, а под прямой — вверх (рис. 2).

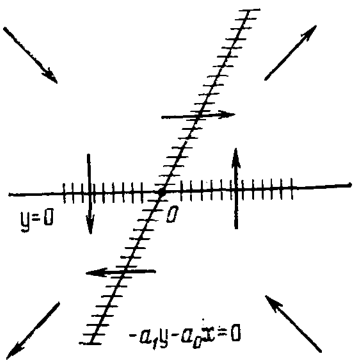

Рис. 2

4.3. О-ГРАФИКИ

Фазовый график решения x назовем O^+*-графиком*, если

$$(x(t),\ y(t)) \to O \quad \text{при } t \to +\infty;$$

O^+-график является kO^+*-графиком* («входит в O с направлением k»), если

$$y(t)/x(t) \to k \in [-\infty,\ +\infty] = R_\infty \text{ при } t \to +\infty.$$

Аналогично определяются O^--графики, kO^--графики; O^+- и O^--графики в совокупности называем *О-графиками* (аналогично *kO-графики*). Отметим, что сдвиг аргумента не влияет на тип фазового графика.

Теорема 2. *Если уравнение (4.1) имеет kO-график, то k — характеристическое число оператора* L_2.

◇ Проведем доказательство для kO^+-графика. На основании правила Лопиталя вдоль kO^+-графика решения x

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{Dy(t)}{Dx(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-a_1y(t)-a_0x(t)}{y(t)}=-a_1-a_0\lim_{t\to+\infty}\frac{x(t)}{y(t)},$$

и поэтому

$$k=-a_1-a_0\frac{1}{k}. \qquad (4.7)$$

Из (4.7) следует, что $k \neq \infty$, а из (4.7) и (4.5) следует, что $k \neq 0$. Поэтому 4.7) равносильно $k^2 + a_1k + a_0 = 0$, т. е. $k \in \{\nu_1,\ \nu_m\}$. ■

Следствие. kO-графики могут существовать только для уравнений с действительными характеристическими числами.

4.4. СЕДЛО

Рассмотрим случай, когда оператор L_2 имеет два действительных характеристических числа разных знаков. На основании (4.2)

$$x = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t},\ \lambda_1 < 0 < \lambda_2.$$

На фазовом графике выполняется

$$x = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t},\ y = \lambda_1C_1e^{\lambda_1 t} + \lambda_2C_2e^{\lambda_2 t}. \qquad (4.8)$$

Если

$$\left.\begin{array}{l} \text{а) } C_1 > 0,\ C_2 = 0;\ \text{б) } C_1 < 0,\ C_2 = 0;\ \text{в) } C_1 = 0,\ C_2 > 0; \\ \text{г) } C_1 = 0,\ C_2 < 0, \end{array}\right\} \qquad (4.9)$$

то график совпадает соответственно с лучом

а) $y = \lambda_1x$, $x > 0$; б) $y = \lambda_1x$, $x < 0$; в) $y = \lambda_2x$, $x > 0$; г) $y=\lambda_2x$, $x < 0$ и является λ_1O^+-графиком в случаях «а — б» и λ_2O^--графиком в случаях «в — г». Если $C_1C_2 \neq 0$, то график лежит между двумя лучами, уходит на бесконечность при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$, имея асимптотой в первом случае $\lambda_1 O^+$-луч, во втором — $\lambda_2 O^-$-луч.

Точка покоя с указанным расположением окрестных графиков называется *седлом* (рис. 3). Отметим, что направление движения по графикам можно определить с помощью общей схемы (см. рис. 2).

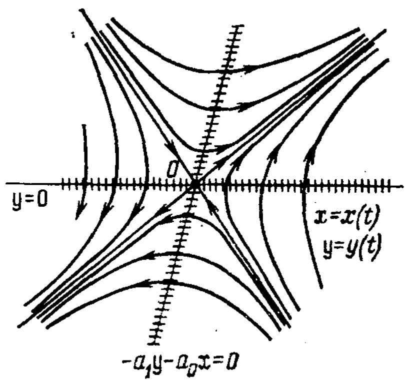

Рис. 3

4.5. УЗЛЫ

Допустим теперь, что характеристические числа L_2 действительны и одного знака, т. е. отрицательны (см. (4.6)). Начнем со случая, когда характеристические числа различны. На основании (4.2)

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \ \lambda_1 < \lambda_2 < 0.$$

Фазовые графики являются O^+-графиками. В случаях (4.9) графики оказываются лучами, расположенными во втором и четвертом квадрантах. Если $C_1 C_2 \neq 0$, то

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t}}{C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}} \to \lambda_2 \text{ при } t \to +\infty$$

и график оказывается $\lambda_2 O^+$-графиком, входящим в O между двумя указанными выше лучами в соответствии с общей схемой (см. рис. 2). Точка покоя с таким расположением окрестных графиков называется *узлом* (точнее — *бикритическим узлом*, т. е. узлом с двумя направлениями входа фазовых графиков в точку покоя). При $t \to -\infty$ каждый график имеет асимптотой тот из лучей $y = \lambda_1 x$, $x > 0$ или $y = \lambda_1 x$, $x < 0$, который отвечает общей схеме, приведенной на рис. 2 (рис. 4).

Обратимся теперь к случаю (4.3). Фазовые графики имеют вид

$$x = (C_0 + C_1 t)\, e^{\lambda t}, \quad y = ((\lambda C_0 + C_1) + \lambda C_1 t)\, e^{\lambda t}, \quad \lambda < 0,$$

и поэтому являются O^+-графиками. Для любого графика

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{(\lambda C_0 + C_1) + t\lambda C_1}{C_0 + C_1 t} \to \lambda \text{ при } t \to \infty,$$

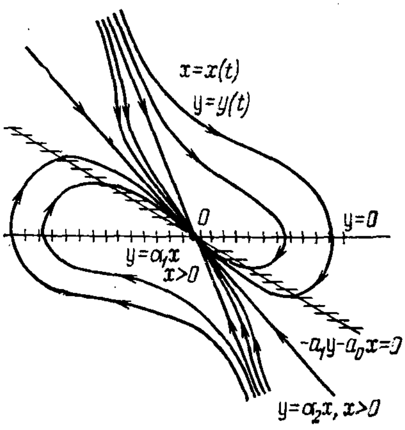

Рис. 4

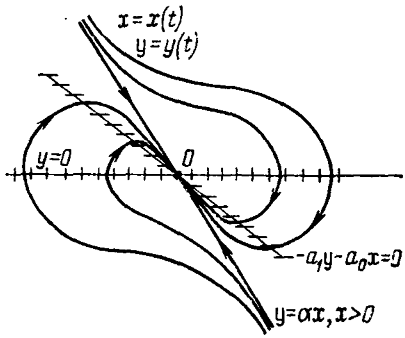

Рис.

и поэтому все они являются λO^+-графиками. Точку покоя с таким расположением графиков называют *монокритическим узлом*, т. е. узлом с одним единственным направлением входа графиков. При $t \to -\infty$ асимптотой для графика служит луч $y = \lambda x$, $x > 0$ или луч $y = \lambda x$, $x < 0$ (рис. 5).

4.6. ФОКУС И ЦЕНТР

Рассмотрим случай, когда оператор L_2 имеет комплексные корни $\lambda \pm i\mu$, $\mu \neq 0$, причем $\lambda \neq 0$ и поэтому (см. (4.6)) $\lambda < 0$. Фазовые графики (4.1) имеют вид (см. (4.4))

$$\left.\begin{array}{l} x = Ce^{\lambda t}\cos(\mu t + C_1), \\ y = Ce^{\lambda t}(\lambda\cos(\mu t + C_1) - \mu\sin(\mu t + C_1)) = C'e^{\lambda t}\sin(\mu t + C''). \end{array}\right\} \quad (4.10)$$

Каждый график является O^+-графиком. Составляющие $x(t)$ и $y(t)$ бесконечно много раз меняют знак при $t \to \pm\infty$, поэтому (см. рис. 2) график представляет собой спираль, совершающую бесконечно много оборотов вокруг O. При таком расположении окрестных траекторий точку покоя O называют *фокусом* (рис. 6).

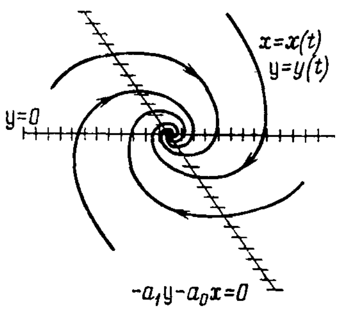

Рис. 6

Обратимся к случаю $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$. На основании (4.10)

$$x = C\cos(\mu t + C_1), \quad y = -C\mu\sin(\mu t + C_1).$$

Каждый график является эллипсом

$$\mu^2 x^2 + y^2 = \mu^2 C^2$$

в каноническом положении с центром в O. Точку покоя с указанным расположением окрестных графиков называют *центром* (рис. 7).

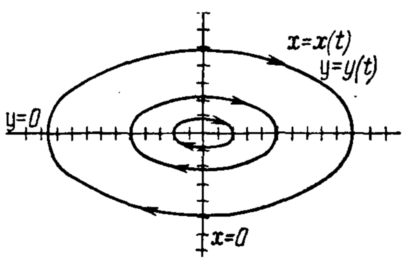

Рис. 7

4.7. КЛАССИФИКАЦИЯ ТОЧЕК ПОКОЯ

Теорема о точках покоя. *Тип точки покоя O невырожденного однородного СтЛ-2 определяется видом характеристических чисел оператора L_2, а именно:*

$$\begin{array}{lll}
\nu_1,\ \nu_2 \in R & \nu_1\nu_2 < 0 & \Leftrightarrow \text{седло}, \\
\quad » & \nu_1\nu_2 > 0,\ \nu_1 \neq \nu_2 & \Leftrightarrow \text{узел бикритический}, \\
\quad » & \quad » \qquad \nu_1 = \nu_2 & \Leftrightarrow \text{узел монокритический}, \\
\nu_{1,2} = \lambda \pm i\mu,\ \mu \neq 0 & \qquad\quad \lambda \neq 0 & \Leftrightarrow \text{фокус}, \\
\quad » & \qquad\quad \lambda = 0 & \Leftrightarrow \text{центр}.
\end{array}$$

◇ В случае (4.6) теорема доказана выше. Если же $a_1 < 0$, то преобразуем (4.1), положив $t := -t$. При таком преобразовании происходит отражение графиков от оси $y = 0$ и замена направления движения по графикам (O^+-графики, в частности, переходят в O^--графики и наоборот), что не влияет на взаимное расположение графиков, а следовательно, не влияет и на тип точки покоя. ■

4.8. ПРЯМАЯ ПОКОЯ

Рассмотрим вырожденный случай, т. е. предположим в отличие от (4.5), что

$$a_0 = \nu_1\nu_m = \lambda_1\lambda_m = 0.$$

Уравнение (4.1) в этом случае принимает вид

$$D^2x + a_1Dx = 0. \tag{4.11}$$

При любом $\xi \in R$ функция $x = x(t) = \xi$, $\forall t$, является стационарным решением (4.11). Вся ось $y = 0$ состоит из точек покоя, т. е. является *прямой покоя*. Если $m = 2$, $\lambda_1 < \lambda_2 = 0$, то фазовые графики

$$x = C_0 + C_1e^{\lambda_1 t},\ y = \lambda_1C_1e^{\lambda_1 t}$$

лежат на лучах $y = \lambda_1(x - C_0)$, $x > 0$ или $x < 0$, и направлены к оси $y = 0$ (рис. 8). Если же $m = 1$, то $a_1 = a_0 = 0$ и уравнение (4.1) вырождается в простейшее уравнение П-2 с фазовыми графиками $x = C_0 + C_1t$, $y = C_1$, лежащими на горизонтальных прямых и направленными в соответствии с общей схемой, представленной на рис. 1 (рис. 9).

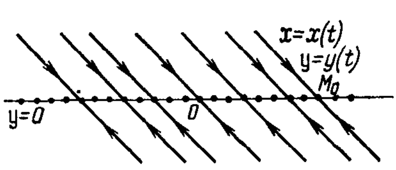

Рис. 8

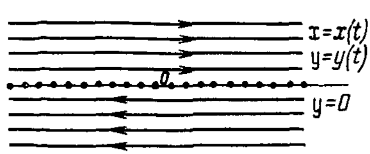

Рис. 9

Основные упражнения

4.1. Переформулировать теорему о точках покоя, заменив условия на характеристические числа ν_j условиями на коэффициенты a_k и дискриминант $\Delta :: = a_1^2 - 4a_0$.

4.2. Начертить схему расположения фазовых графиков однородных СтЛ-2 с операторами:

а) D^2+5D+6; б) D^2-5D+6; в) D^2+D-6; г) $D^2-\frac{1}{2}D-\frac{3}{4}$; д) D^2+D+1; е) D^2+D+7; ж) D^2-2D+1; з) D^2+4D+4; и) D^2+1; к) $D^2+\omega^2$, $\omega\neq 0$.

4.3. Определить зависимость от параметра α расположения графиков однородных СтЛ-2 с операторами:

а) $D^2+(1-\alpha)D-\alpha$; б) $D^2-2\alpha D+(1+\alpha^2)$; в) $D^2+\alpha D$.

4.4. Исследовать расположение графиков, проходящих при $t=0$ через точки (0; 1), (1; 1) и (1; 0), уравнений с операторами:

а) $D^2+(5+\alpha)D+6+3\alpha$; б) $D^2+\alpha D-1$; в) $D^2+\alpha D+1$; г) $D^2+\alpha$.

Дополнительные упражнения

4.5. Наряду с оператором $L_2 :: = D^2+a_1D+a_0$ рассмотрим возмущенный оператор $D^2+(a_1+b_1)D+(a_0+b_0)$. Точка покоя O уравнения $L_2x=0$ называется *структурно устойчивой*, если ее тип сохраняется при переходе к уравнениям с возмущенными операторами при достаточно малых $|b_1|$ и $|b_0|$. Показать следующее: а) седла, бикритические узлы и фокусы структурно устойчивы; б) монокритические узлы и центры не являются структурно устойчивыми, т. е. структурно неустойчивы; в) точки покоя вырожденного уравнения структурно неустойчивы.

4.6. Допустим, что коэффициенты оператора L_2 зависят от параметра $\alpha\in R$. Значение параметра называют *бифуркационным*, если сколь угодно малым возмущением параметра можно изменить тип точки покоя O уравнения $L_2x=0$. Какие значения параметра α являются бифуркационными для операторов:

а) $D^2+\alpha D+1$; б) $D^2+D+\alpha$; в) $D^2+2\alpha D+\alpha^3$?

4.7. Используя фазовую методику, исследовать зависимость от начальных условий и от параметров решений задач 143; 145; 156; 157 [2].

4.8. Пространство $R^3=Oxyz$ называют *фазовым* для уравнения $L_3x=0$ со стационарным оператором L_3, если решение x изображается в R^3 фазовым графиком $x=x(t)$; $y=y(t) :: = Dx(t)$; $z=z(t) :: = D^2x(t)$. Начертить схемы расположения графиков уравнения $L_3x=0$ в случаях: а) $\nu_1=0$, $\nu_{2,3}=\pm i$; б) $\nu_1=-1$, $\nu_{2,3}=\pm i$; в) $\nu_1=-3$, $\nu_2=-2$, $\nu_3=-1$.

4.9. Выяснить геометрический смысл формулы Лиувилля для СтЛ-2 в случае $a_1=0$.

5. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

5.1. РАЗЛОЖЕНИЕ ОПЕРАТОРА

Рассмотрим стационарный оператор L_n. Выпишем характеристические числа L_n так, чтобы каждое ν_j повторялось n_j раз (n_j — кратность ν_j, см. гл. 3). Обозначим выписанные величины δ_i, $1\leqslant i\leqslant n$. Таким образом,

$$\delta_i=\nu_1,\ 1\leqslant i\leqslant n_1;$$
$$\delta_i=\nu_j,\ n_1+\ldots+n_{j-1}<i\leqslant n_1+\ldots+n_{j-1}+n_j,\ 1<j\leqslant m.$$

Факторизованный оператор можно представить в виде

$$\mathrm{L}_n = (\mathrm{D} - \delta_1) \ldots (\mathrm{D} - \delta_n),$$

а также ($i_1, \ldots, i_n$ — произвольная перестановка чисел $1, \ldots, n$)

$$\mathrm{L}_n = (\mathrm{D} - \delta_{i_1}) \ldots (\mathrm{D} - \delta_{i_n}).$$

Лемма. *Если* $\Delta\delta_i = \delta_i - \delta_{i-1}$, *то*

$$\mathrm{L}_n x(t) = e^{\delta_1 t}\mathrm{D}(e^{\Delta\delta_2 t} \ldots \mathrm{D}(e^{\Delta\delta_n t}\mathrm{D}(e^{-\delta_n t}x(t))) \ldots). \tag{5.1}$$

◇ При $n = 1$ формула (5.1) доказана раньше (см. (3.4)). Допустим, что (5.1) верно при некотором $n \geqslant 1$. Тогда (см. (5.1) и (3.4)) $(\mathrm{D} - \delta_1)(\mathrm{D} - \delta_2) \ldots (\mathrm{D} - \delta_{n+1})x(t) = (\mathrm{D} - \delta_1)((\mathrm{D} - \delta_2) \ldots (\mathrm{D} - \delta_{n+1})x(t)) = (\mathrm{D} - \delta_1)(e^{\delta_2 t} \times \mathrm{D}(e^{\Delta\delta_3 t} \ldots \mathrm{D}(e^{\Delta\delta_{n+1} t}\mathrm{D}(e^{-\delta_{n+1} t}x(t))) \ldots)) = e^{\delta_1 t}\mathrm{D}(e^{-\delta_1 t} \cdot e^{\delta_2 t}\mathrm{D}(e^{\Delta\delta_3 t} \ldots \mathrm{D}(e^{\Delta\delta_{n+1} t}\mathrm{D}(e^{-\delta_{n+1} t}x(t))) \ldots))$, что равносильно (5.1), если положить $n := n + 1$. По индукции формула (5.1) справедлива при всех n. ■

5.2. НУЛЕВАЯ НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим нулевую начальную задачу для СтЛ-n:

$$\mathrm{L}_n\mathrm{x} = f,\ t \in I,\ \mathrm{D}^k x\,|_{t=s} = 0,\ 0 \leqslant k \leqslant n - 1. \tag{5.2}$$

Лемма. *Если* x^* — *решение задачи* (5.2), *то* ($\delta_{n+1} = 0$)

$$e^{\Delta\delta_{k+2} t}\mathrm{D}(e^{\Delta\delta_{k+3} t} \ldots \mathrm{D}(e^{\Delta\delta_n t}\mathrm{D}(e^{-\delta_n t}x^*(t))) \ldots)\,|_{t=s} = 0. \tag{5.3}$$

◇ Композиция производных в (5.3) после раскрытия скобок приводит к выражению

$$e^{-\delta_{k+2} t}L_{n-k-1}x^*(t),\ 0 \leqslant n - k - 1 \leqslant n - 1.$$

На основании начальных условий для x^* (см. (5.2))

$$L_{n-k-1}x^*(s) = 0,$$

что и приводит к (5.3). ■

Теорема 1. *Если f непрерывна на I, то нулевая начальная задача (5.2) имеет на I единственное решение:*

$$\mathrm{x} = x^*(t) :: = \int_s^t F(t - \tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{5.4}$$

где

$$F(t) :: = \int_0^t \mathrm{d}\tau_{n-1} \int_0^{\tau_{n-1}} \ldots \mathrm{d}\tau_2 \int_0^{\tau_2} e^{\delta_n t - \Delta\delta_n \tau_{n-1} - \ldots - \Delta\delta_2 \tau_1}\,\mathrm{d}\tau_1.$$

◇ Заменим L_n в задаче (5.2) по формуле (5.1). Интегрируем полученное выражение n раз, предварительно перенося на каждом шаге экспоненту вправо и учитывая лемму (5.3). Тогда

$$x^*(t) = \int\limits_s^t d\sigma_{n-1} \int\limits_s^{\sigma_{n-1}} d\sigma_{n-2} \cdots \int\limits_s^{\sigma_1} e^{\delta_n(t-\sigma_{n-1})+\delta_{n-1}\Delta\sigma_{n-1}+\ \dots\ +\delta_2\Delta\sigma_2+\delta_1(\sigma_1-\tau)} \times$$
$$\times f(\tau)\, d\tau.$$

Изменим порядок интегрирования:

$$x^*(t) = \int\limits_s^t d\tau \int\limits_\tau^t d\sigma_{n-1} \int\limits_\tau^{\sigma_{n-1}} d\sigma_{n-2} \cdots \int\limits_\tau^{\sigma_2} e^{\delta_n(t-\sigma_{n-1})+\delta_{n-1}\Delta\sigma_{n-1}+\dots+\delta_2\Delta\sigma_2+\delta_1(\sigma_1-\tau)} \times$$
$$\times f(\tau)\, d\sigma_1.$$

Введем новые переменные интегрирования $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$ вместо $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$:

$$\tau_1 = \sigma_1 - \tau,\ \tau_2 = \sigma_2 - \tau,\ \dots,\ \tau_{n-1} = \sigma_{n-1} - \tau$$

и придем к формуле (5.4). ■

5.3. ФУНКЦИЯ КОШИ

Функцию F, участвующую в формуле (5.4), называют *функцией Коши* оператора L_n. Интегральное представление функции Коши показывает, что F не зависит от неоднородности f. Установим связь между F и базисным решением φ_{n-1} (см. (3.14)) соответствующего однородного уравнения

$$L_n\varphi = 0. \tag{5.5}$$

Представим L_n в виде

$$L_n = (D - \delta_n)(D - \delta_1)\ \dots\ (D - \delta_{n-1}).$$

Введем вспомогательный оператор

$$L_{n-1} :: = (D - \delta_1)\ \dots\ (D - \delta_{n-1}) = D^{n-1} + b_{n-2}D^{n-2} +\ \dots\ + b_0.$$

Лемма.

$$L_{n-1}\varphi_{n-1}(t) = e^{\delta_n t}. \tag{5.6}$$

◇ На основании леммы (5.1)

$$L_n x(t) = e^{\delta_n t} D(e^{-\delta_n t} L_{n-1} x(t)).$$

Функция φ_{n-1} является решением уравнения (5.5). Поэтому

$$D(e^{-\delta_n t} L_{n-1}\varphi_{n-1}(t)) = 0,\ \forall t. \tag{5.7}$$

Кроме того, из начальных условий для φ_{n-1}

$$D^{n-1}\varphi_{n-1}(0) = 1;\ D^k\varphi_{n-1}(0) = 0,\ k < n-1 \tag{5.8}$$

и представления L_{n-1} в виде суммы получим

$$L_{n-1}\varphi_{n-1}(0) = 1. \tag{5.9}$$

Интегрируем тождество (5.7) при $t := \tau$ от 0 до t и учитываем (5.9):

$$e^{-\delta_n t} L_{n-1}\varphi_{n-1}(t) - 1 = 0,$$

что равносильно (5.6). ■

Теорема 2. *Функция Коши F совпадает с базисным решением φ_{n-1}*

$$F(t) = \varphi_{n-1}(t), \ \forall t. \tag{5.10}$$

◇ Функция φ_{n-1} является решением нулевой начальной задачи при $s = 0$ уравнения $(n-1)$-го порядка (см. (5.6) и (5.8))

$$\mathrm{L}_{n-1}\mathrm{x} = e^{\delta_n t}. \tag{5.11}$$

Применим (5.4) при $n := n-1$ к уравнению (5.11):

$$\varphi_{n-1}(t) = \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_0^{t-\tau} \mathrm{d}\tau_{n-2} \int_0^{\tau_{n-2}} \dots \int_0^{\tau_2} e^{\delta_{n-1}(t-\tau) - \Delta\delta_{n-1}\tau_{n-2} - \dots - \Delta\delta_2\tau_1} e^{\delta_n \tau}\, \mathrm{d}\tau_1.$$

Положим $\tau_{n-1} = t - \tau$. Тогда

$$\varphi_{n-1}(t) = \int_0^t \mathrm{d}\tau_{n-1} \int_0^{\tau_{n-1}} \mathrm{d}\tau_{n-2} \dots \int_0^{\tau_2} e^{\delta_{n-1}\tau_{n-1} - \Delta\delta_{n-1}\tau_{n-2} - \dots - \Delta\delta_2\tau_1 + \delta_n(t-\tau_{n-1})}\, \mathrm{d}\tau_1 =$$
$$= \int_0^t \mathrm{d}\tau_{n-1} \int_0^{\tau_{n-1}} \mathrm{d}\tau_{n-2} \dots \int_0^{\tau_2} e^{\delta_n t - \Delta\delta_n\tau_{n-1} - \dots - \Delta\delta_2\tau_1}\, \mathrm{d}\tau_1 = F(t). \ ■$$

5.4. РАЗРЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ТОР для СтЛ. *Пусть f непрерывна на I. Тогда при любых $s \in I$ и $\xi_k \in R$ начальная задача*

$$\mathrm{L}_n\mathrm{x} = f, \ t \in I; \ \mathrm{D}^k\mathrm{x}\,|_{t=s} = \xi_k \tag{5.12}$$

однозначно разрешима на I:

$$\mathrm{x} = x(t) :: = \sum_k \xi_k \varphi_k(t-s) + \int_s^t \varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau)\, \mathrm{d}\tau. \tag{5.13}$$

◇ Подстановка $\mathrm{x} = \varphi + x^*$, где (см. (5.4) и (5.10))

$$x^*(t) = \int_s^t \varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau)\, \mathrm{d}\tau,$$

преобразует задачу (5.12) в равносильную задачу для уравнения (5.5) с условиями

$$\mathrm{D}^k\varphi\,|_{t=s} = \xi_k,$$

так как

$$\mathrm{L}_n\varphi = \mathrm{L}_n\mathrm{x} - \mathrm{L}_n x^* = f - f = 0,$$

$$\mathrm{D}^k\varphi\,\Big|_{t=s} = \mathrm{D}^k\mathrm{x}\,\Big|_{t=s} - \mathrm{D}^k x^*(s) = \xi_k - 0 = \xi_k.$$

Решая последнюю задачу на основании теоремы 3 из гл. 3, получаем

$$\varphi = \varphi(t) :: = \sum_k \xi_k \varphi_k(t-s).$$

Возвратившись к искомой функции x, придем к (5.13). ■

Формула (5.13) составляет *правило Коши* разрешения СтЛ.

Лемма. *Если ψ_k образуют базис (5.5) и f непрерывна на I, то система линейных функциональных уравнений относительно v_k*

$$\begin{cases} \sum_k \mathrm{D}^r \psi_k v_k = 0, \ 0 \leqslant r < n-1 \\ \sum_k \mathrm{D}^{n-1} \psi_k v_k = f \end{cases} \tag{5.14}$$

имеет на I единственное непрерывное решение $v_1(t), \ldots, v_n(t)$.

◇ Определитель системы (5.14) является вронскианом базиса ψ_k, поэтому (см. теорему 4 в гл. 3) он не обращается в 0. Система (5.14) однозначно разрешима по правилу Крамера. Коэффициенты $\mathrm{D}^{\varkappa}\psi_k$ и неоднородность f непрерывны на I, поэтому непрерывны и v_k. ■

Правило Лагранжа. *Если ψ_k образуют базис (5.5) и u_k являются первообразными функций v_k, определенных из (5.14), то функция*

$$\tilde{x} :: = \sum_k u_k \psi_k, \ t \in I,$$

представляет собой решение неоднородного уравнения (5.12).

◇ Последовательно вычисляем производные от $\tilde{x}$, учитывая, что $\mathrm{D}u_k = v_k$, и используя (5.14):

$$\tilde{x} = \sum_k \psi_k u_k;$$

$$\mathrm{D}^{r+1}\tilde{x} = \sum_k \mathrm{D}^{r+1}\psi_k u_k + \sum_k \mathrm{D}^r \psi_k v_k = \sum_k \mathrm{D}^{r+1}\psi_k u_k;$$

$$\mathrm{D}^n \tilde{x} = \sum_k \mathrm{D}^n \psi_k u_k + \sum_k \mathrm{D}^{n-1}\psi_k v_k = \sum_k \mathrm{D}^n \psi_k u_k + f$$

в силу

$$\mathrm{L}_n \psi_k = 0$$

получаем

$$\mathrm{L}_n \tilde{x} = \mathrm{D}^n \tilde{x} + a_{n-1}\mathrm{D}^{n-1}\tilde{x} + \ldots + a_0 \tilde{x} = \sum_k \mathrm{L}_n(\psi_k)\, u_k + f = f. \ ■$$

Заметим, что при произвольных постоянных C_k формула

$$\mathrm{x} = \sum_k (u_k(t) + C_k)\, \psi_k(t)$$

доставляет полное решение уравнения (5.12).

5.6. УРАВНЕНИЕ СтЛ С КВАЗИПОЛИНОМОМ

Если функции $\tilde{x}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$, являются решениями уравнений $\mathrm{L}_n\mathrm{x} = h_i$, то функция $\tilde{x} = \tilde{x}_1 + \ldots + \tilde{x}_r$ очевидно разрешает уравнение $\mathrm{L}_n\mathrm{x} = h_1 + \ldots + h_r$. Поэтому построение частного решения уравнения СтЛ с квазиполиномом сводится к разрешению уравнений вида

$$\mathrm{L}_n\mathrm{z} = P(t)\, e^{\gamma t}. \qquad (5.15)$$

Правило Эйлера. *Уравнение (5.15) имеет решение вида*

$$\mathrm{z} = \tilde{z}(t) :: = t^{n^*}Q(t)\, e^{\gamma t}, \qquad (5.16)$$

где степень Q равна степени P, n^* — кратность того из характеристических чисел ν_j, которое совпадает с γ ($n^* = 0$ при отсутствии указанных характеристических чисел). Решение $\tilde{z}$ можно построить методом неопределенных коэффициентов.

◇ Для $n = 1$ формула (5.16) доказана раньше (см. (3.7), (3.8)). Допустим, что (5.16) справедливо при некотором $n \geqslant 1$, и рассмотрим уравнение

$$\mathrm{L}_{n+1}\mathrm{z} = P(t)\, e^{\gamma t}.$$

Не нарушая общности, считаем, что $\gamma \neq \nu_j$ для $j < m$. Введем вспомогательную искомую функцию (ср. ТОР для однородного СтЛ из гл. 3)

$$\mathrm{w} = (\mathrm{D} - \nu_m)\, \mathrm{z}$$

и придем к уравнению

$$\mathrm{L}_n\mathrm{w} = P(t)\, e^{\gamma t}.$$

По индукционному предположению это уравнение имеет частное решение

$$\mathrm{w} = \tilde{\mathrm{w}}(t) = t^{n'}Q'(t)\, e^{\gamma t},$$

где степень Q' равна степени P, $n' = n_m - 1$, если $\gamma = \nu_m$, и $n' = 0$, если $\gamma \neq \nu_m$. К уравнению

$$\mathrm{L}_1\mathrm{z} = (\mathrm{D} - \nu_m)\, \mathrm{z} = t^{n'}Q'(t)\, e^{\gamma t}$$

применяем формулу (3.8) при $\gamma = \nu_m$ и $\gamma \neq \nu_m$ и приходим к решению (5.16). Коэффициенты многочлена Q из (5.16) однозначно выражаются через коэффициенты P, поэтому для построения $\tilde{z}$ можно применить метод неопределенных коэффициентов. ■

В случае уравнения СтЛ с действительными квазиполиномами проводим обычную процедуру преобразования квазиполинома к стандартной действительной форме. Выделяем действительную составляющую частного решения, полученного по общей схеме, и убеждаемся в том, что уравнение

$$\mathrm{L}_n\mathrm{x} = (P'(t)\cos\beta t + P''(t)\sin\beta t)\, e^{\alpha t}$$

имеет частное решение вида ($\gamma = \alpha + i\beta$)

$$x = t^{n^*}(Q'(t)\cos\beta t + Q''(t)\sin\beta t)\,e^{\alpha t},$$

где степени Q' и Q'' не превосходят наибольшей из степеней P' и P''. Указанное частное решение можно построить методом неопределенных коэффициентов.

Основные упражнения

5.1. Решить нулевую начальную задачу для уравнения $D^2x - 2Dx + x = f$ в случаях, когда неоднородность f имеет вид: а) t; б) $\sqrt{t}$; в) $\frac{1}{t}$; г) t^α.

5.2. Применить правило Коши для решения уравнения $D^2x + x = f$ в случаях, когда неоднородность f равна: а) $\sin 2t$; б) $\sin t$; в) $\sin\omega t$; г) $|\sin t|$; д) e^t; е) $e^t\cos t$.

5.3. Применить правило Лагранжа для решения уравнений 795—800 [1].

5.4. Применить правило Эйлера для решения уравнений 766; 768; 772—776; 778 [1].

Дополнительные упражнения

5.5. Решить задачи 818; 821; 823; 838; 844 [1], а также задачи 601; 602—604; 629 [3].

5.6. Рассмотреть задачи 151; 153; 159; 160; 161 [2].

5.7. Доказать правило Эйлера, используя формулу (5.4).

5.8. По аналогии с упр. 1.14 построить теорию уравнений СтЛ с кусочно непрерывными неоднородностями.

5.9. Построить решения нулевой начальной задачи для уравнения $D^2x + \omega^2x = f$ в случаях, когда неоднородность f равна: а) $1(t)$; б) $1(t) - 1(t-1)$; в) $1(t)\sin t$; г) $1(\sin t)$.

5.10. По схеме упр. 1.17 установить связь между точными решениями и ε-решениями уравнений СтЛ с непрерывной неоднородностью.

5.11. Решение x^δ нулевой сингулярной начальной задачи (ср. с упр. 1.18) для $L_n x = f$ определяют по формуле

$$x = x^\delta(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi_{n-1}(t-\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau.$$

Установите связь между x^δ и функцией влияния $\varphi_{n-1}(t)\,1(t)$ оператора L_n.

5.12. Пусть $\varepsilon > 0$ и

$$\delta_\varepsilon(t) ::= \begin{cases} 0, & |t| > \varepsilon \\ \dfrac{1}{2\varepsilon}, & |t| \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Найти предел при $\varepsilon \to 0$ решения задачи

$$D^2x + \omega^2x = \delta_\varepsilon(t),$$

$$x\,|_{t=-\infty} = Dx\,|_{t=-\infty} = 0.$$

6. ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

6.1. ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КАНОНИЧЕСКОГО ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим уравнение СтЛ с непрерывной неоднородностью

$$\mathrm{L}_n\mathrm{x} = f,\ t \in I, \tag{6.1}$$

и соответствующее однородное уравнение

$$\mathrm{L}_n\varphi = 0 \tag{6.2}$$

с базисом φ_k, нормированным при $t = 0$ (см. (3.14)). Фиксируем $s \in I$. Решение (6.1) с начальными значениями

$$\mathrm{D}^k\mathrm{x}\,|_{t=s} = \xi_k \tag{6.3}$$

обозначим $x(t, \xi)$. На основании (5.13)

$$x(t, \xi) = \sum_k \xi_k\varphi_k(t - s) + x^*(t), \tag{6.4}$$

где

$$x^*(t) = \int_s^t \varphi_{n-1}(t - \tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Если ξ_k в (6.4) заменить произвольными постоянными C_k, то получим каноническое общее (полное) решение $x(t, C)$ уравнения (6.1)

Изучение всего явления, описываемого уравнением (6.1), распадающегося на отдельные процессы с начальными значениями (6.3), приводит к исследованию $x(t, \xi)$ как функции всех своих $(n + 1)$ аргументов. В соответствии с этим символ D в настоящей главе означает (частную) производную по t, а символ L_n — обычную комбинацию производных D.

Обозначим $\mathrm{C}^m(E)$ множество функций $x : E \to R$, имеющих на E непрерывные производные порядка m вдоль E. В частности, $C^0(E)$ означает множество непрерывных функций на E. Положим, кроме того, $J :: = I \times R^n$.

Теорема 1. *Если* $\mathrm{x} = x(t, \xi)$ — *решение уравнения* (6.1), *то*

$$f \in \mathrm{C}^m(I) \Rightarrow x \in \mathrm{C}^{n+m}(J).$$

◇ Функция $x(t, \xi)$ представляет собой линейную форму относительно ξ_i с квазиполиномиальными коэффициентами $\varphi_k(t)$ и свободным членом x^* (см. (6.4)). Производные $\partial^m x/\partial\xi_k^m$ при любом m заведомо существуют и непрерывны. Существование производных $\mathrm{D}^m x$ связано с аналитическими свойствами функции x^*. Из определения x^* следует, что

$$\mathrm{D}^n x^*(t) = f(t) - \sum_k a_k \mathrm{D}^k x^*(t),\ \forall t \in I.$$

Если f имеет производную порядка m, то, последовательно дифференцируя предыдущее тождество, получаем

$$D^{n+m}x^*(t) = D^m f(t) - \sum_k a_k D^{m+k}x^*(t), \ \forall t \in I.$$

При непрерывной $D^m f$ производная $D^{n+m}x^*$ также непрерывна. Таким образом, $x(t, \xi)$ имеет по любому аргументу непрерывные производные порядка $n+m$. ∎

Доказанная теорема, в частности, позволяет для приближенного вычисления $x(t, \xi)$ в окрестности данной точки (s, ξ) использовать приближенные значения ξ.

6.2. СВОЙСТВА КАНОНИЧЕСКОГО ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ НА ОТРЕЗКЕ

Наряду с начальным значением $\xi \in R^n$ рассмотрим возмущенное начальное значение $\xi + \Delta\xi$, т. е. точку $(\xi_0 + \Delta\xi_0, \ldots, \xi_{n-1} + \Delta\xi_{n-1})$, считая, как обычно,

$$|\Delta\xi| = \left(\sum_k (\Delta\xi_k)^2\right)^{1/2}.$$

Отклонением (друг от друга) *решений* $x(t, \xi)$ и $x(t, \xi + \Delta\xi)$ назовем величину

$$\rho(t, \Delta\xi) :: = \sum_k |D^k x(t, \xi + \Delta\xi) - D^k x(t, \xi)|. \tag{6.5}$$

На основании представления (6.4) величина отклонения решений уравнения СтЛ зависит не от расположения начального значения ξ, а от $\Delta\xi$, поэтому обозначение (6.5) корректно. Отметим, что отклонение не зависит и от неоднородности f. При изучении отклонения решений вместо уравнения (6.1) можно рассматривать соответствующее однородное уравнение (6.2).

Решение $x(t, \xi)$ уравнения (6.1) называют *непрерывно зависящим от начальных значений* ξ на промежутке $I_1 \subset I$, если для канонического общего решения (6.1) выполняется условие

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall \Delta\xi \in R^n, \ \forall t \in I_1,$$
$$|\Delta\xi| \leqslant \delta \Rightarrow \rho(t, \Delta\xi) \leqslant \varepsilon. \tag{6.6}$$

Указанная непрерывная зависимость решений (6.1) означает, что при достаточно малых возмущениях начальных значений отклонение решений на всем промежутке I_1 можно сделать сколь угодно малым (рис. 10). Если решение $x(t, \xi)$ непрерывно зависит от начальных условий на любом компактном промежутке $I_1 \subset I$, то его называют *интегрально непрерывным на* I.

Теорема 2. *Пусть неоднородность f непрерывна на промежутке I. Тогда решения $x(t, \xi)$ уравнения (6.1) интегрально непрерывны на I.*

◇ На основании теоремы об ограниченности непрерывной функции на компакте квазиполиномы $\varphi_k(t-s)$ и $D^{\varkappa}\varphi_k(t-s)$ ограничены на любом компактном промежутке I_1 из I, т. е. существует $M = M(I_1)$ такое, что

$$|\varphi_k(t-s)| \leqslant M, \quad |D^{\varkappa}\varphi_k(t-s)| \leqslant M, \quad \forall t \in I_1.$$

Из представления (6.4) и определения (6.5) следует, что

$$\rho(t, \Delta\xi) = \sum_k \left| D^k \left[\sum_{\varkappa} \Delta\xi_{\varkappa} \varphi_{\varkappa}(t-s) \right] \right| \leqslant \max_{\varkappa} |\Delta\xi_{\varkappa}| n^2 M \leqslant n^2 M |\Delta\xi|.$$

Если в качестве δ взять ε/n^2M, то получим

$$|\Delta\xi| \leqslant \delta \Rightarrow \rho(t, \Delta\xi) \leqslant \varepsilon, \quad \forall t \in I_1,$$

что в силу произвольности промежутка I_1 и означает интегральную непрерывность. ■

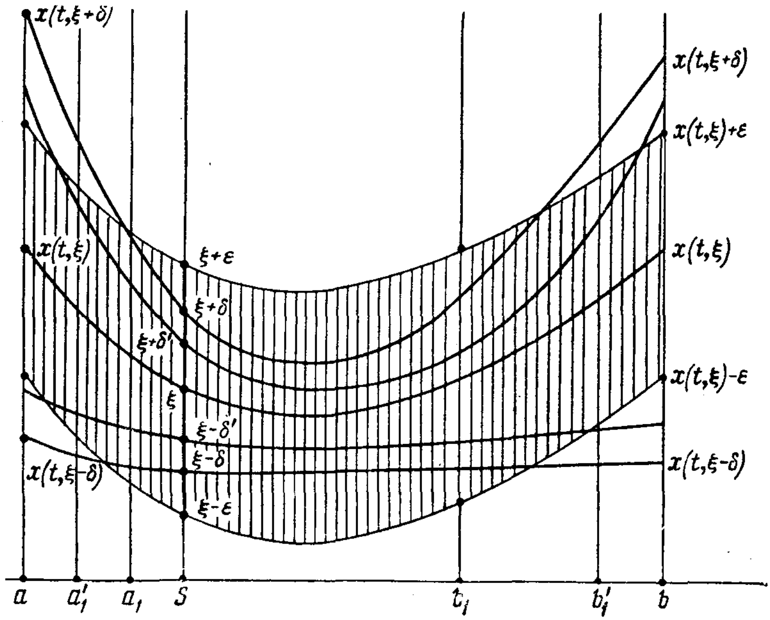

Рис. 10

Если промежуток I компактен, то $x(t, \xi)$ непрерывно зависит от начальных значений ξ на всем I. В общем случае, однако, из интегральной непрерывности $x(t, \xi)$ на I не следует непрерывная зависимость от ξ на I.

Пример 6.1. Отклонение ρ для уравнения $D^2x - x = 0$ при $s = 0$:

$$\rho(t, \Delta\xi) = \frac{1}{2}(|\Delta\xi_0 + \Delta\xi_1| e^t + |\Delta\xi_0 - \Delta\xi_1| e^{-t}).$$

Если $\Delta\xi_0 + \Delta\xi_1 \neq 0$, то $\rho \to +\infty$ при $t \to +\infty$, как бы ни был мал $|\Delta\xi|$. Поэтому непрерывная зависимость от ξ на полупрямой $t \geqslant 0$ в данном случае не имеет места.

Далее считаем, что $I = [\alpha, +\infty[$. Если решение (6.1) непрерывно зависит от начальных значений ξ на всей полупрямой $[s, +\infty[$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall \Delta\xi \in R^n,\ \forall t \geqslant s,$$
$$|\Delta\xi| \leqslant \delta \Rightarrow \rho(t, \Delta\xi) \leqslant \varepsilon,$$

то его называют *устойчивым по Ляпунову* или (кратко) *устойчивым* (рис. 11). Устойчивость одного из решений (6.1) обеспечивает устойчивость и всех остальных решений этого уравнения. В подобных случаях говорят, что устойчиво само рассматриваемое уравнение.

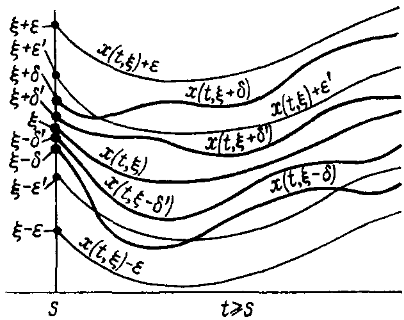

Рис. 11

Многочлен $\nu^n + a_{n-1}\nu^{n-1} + \ldots + a_0$ с корнями ν_j называют *ляпуновским*, если действительные части всех ν_j неположительны и все корни с нулевыми действительными частями являются простыми.

Критерий устойчивости для СтЛ. *Уравнение (6.1) устойчиво в том и только в том случае, когда характеристический полином оператора* L_n *является ляпуновским.*

◇ Отклонение ρ представляет собой линейную форму от $\Delta\xi_k$ с квазиполиномиальными коэффициентами вида $\sum_j P_{kj}(t)\, e^{\nu_j t}$. Если характеристический полином оператора L_n ляпуновский, то каждая составляющая любого коэффициента ограничена при $t \geqslant s$, и поэтому $\rho \to 0$ равномерно относительно $t \in [s, +\infty[$ при $\Delta\xi \to 0$, что и обеспечивает устойчивость решения уравнения с любыми начальными значениями ξ, т. е. устойчивость уравнения (6.1). Если же характеристический полином не ляпуновский, то уравнение (6.2) имеет либо решение $x = \delta e^{\overline{\lambda} t} \cos \overline{\mu} t$, $\overline{\lambda} > 0$, либо решение $x = \delta t \cos \overline{\mu} t$. Модули указанных решений неограниченно растут при $t \to +\infty$, как бы мало $\delta > 0$ не было, что исключает устойчивость нулевого решения уравнения (6.2), а следовательно, устойчивость и уравнения (6.1). ■

Условие устойчивости. *Для устойчивости уравнения (6.1) необходимо, чтобы все коэффициенты оператора* L_n *были неотрицательными.*

◇ Если уравнение (6.1) устойчиво, то на основании критерия устойчивости все корни характеристического полинома оператора L_n имеют неположительные действительные части и поэтому характеристический полином можно представить в виде произведения действительных множителей вида $\nu+\lambda_j$ или ν^2+ $+2\lambda_j\nu+\lambda_j^2+\mu_j^2$ с неотрицательными λ_j. Следовательно, все коэффициенты характеристического полинома, совпадающие с соответствующими коэффициентами оператора L_n, неотрицательны. ■

Теория устойчивости дифференциальных уравнений является одним из фундаментальных разделов прикладной математики. Основоположниками этой теории являются Ляпунов и Пуанкаре. Создателями современной теории устойчивости являются чл.-корр. АН СССР Н. Г. Четаев (1902—1959), акад. АН БССР Н. П. Еругин (р. 1907), акад. АН БССР Е. А. Барбашин (1918—1969), акад. АН СССР Н. Н. Красовский (р. 1924).

6.4. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Если решение $x(t, \xi)$ устойчиво и если, кроме того, при всех достаточно малых $\Delta\xi$ выполняется

$$\rho(t, \Delta\xi) \to 0 \text{ при } t \to +\infty,$$

то это решение называют *асимптотически устойчивым* (рис. 12). Для уравнений СтЛ асимптотическая устойчивость одного из решений обеспечивает асимптотическую устойчивость всех остальных решений данного уравнения, т. е. асимптотическую устойчивость самого уравнения.

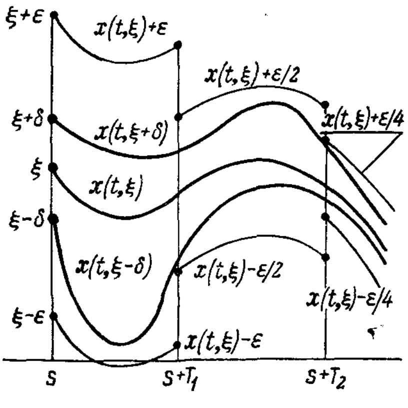

Рис. 12

Понятие асимптотической устойчивости введено также Ляпуновым. Если устойчивость означает, что достаточно малые возмущения $\Delta\xi$ начальных значений ξ вызывают отклонение решений, лежащее в заданных сколь угодно тесных границах, то асимптотическая устойчивость, кроме того, обеспечивает погашение отклонения при $t\to+\infty$.

Многочлен называют *гурвицевым* (по имени швейцарского математика А. Гурвица), если действительные части всех корней этого многочлена отрицательны.

Критерий асимптотической устойчивости для СтЛ. *Для асимптотической устойчивости уравнения СтЛ (6.1) необходимо и достаточно, чтобы характеристический полином оператора L_n был гурвицевым.*

$\Diamond \Rightarrow$ Если от противного допустить, что L_n имеет характеристическое число $\overline{\nu} = \overline{\lambda} + i\overline{\mu}$, $\overline{\lambda} \geqslant 0$, то при любом $\delta \neq 0$ решение $x = \delta e^{\overline{\lambda} t} \cos \overline{\mu}\, t$ данного уравнения не стремится к 0 при $t \to +\infty$, и поэтому нулевое решение уравнения (6.2) не может быть асимптотически устойчивым. Следовательно, уравнение (6.2), а вместе с тем и уравнение (6.1) не являются асимптотически устойчивыми, что противоречит предпосылке теоремы.

$\Leftarrow$ Каждый гурвицев многочлен является ляпуновским, поэтому устойчивость уравнения (6.1) в рассматриваемом случае обеспечена. Отклонение $\rho(t, \Delta\xi)$ составлено из квазиполиномов, каждый из которых имеет множителями выражения вида $e^{\lambda_j t}$, $\lambda_j < 0$, поэтому $\rho \to 0$ при $t \to +\infty$, что и обеспечивает асимптотическую устойчивость. ■

Гурвицианом для полинома $\nu^n + a_{n-1}\nu^{n-1} + \ldots + a_0$ называют определитель порядка n

$$\begin{vmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n-2n-1} & a_{n-2n} & a_{n-2n+1} & a_{n-2n+2} & \ldots & a_0 \end{vmatrix},$$

причем при $i < 0$ считают $a_i = 0$.

Критерий Гурвица. *Многочлен является гурвицевым в том и только в том случае, если положительны все главные миноры гурвициана этого многочлена.*

Доказательство критерия Гурвица см., например, в книге Б. П. Демидовича «Лекции по математической теории устойчивости» (гл. 2, § 9).

Если $I =]-\infty, s]$, то по изложенной схеме можно построить теорию устойчивости в отрицательном направлении. Впрочем, случай устойчивости в отрицательном направлении заменой $t := -t$ в (6.1) сводится к основному случаю.

6.5. ДВУСТОРОННЯЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Допустим теперь, что $I = R$. Решение $x = x(t, \xi)$ уравнения (6.1) называют *двусторонне устойчивым*, если оно непрерывно зависит от начальных значений ξ на всем R, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall t \in R,\ \forall \Delta\xi \in R^n,$$
$$|\Delta\xi| \leqslant \delta \Rightarrow \rho(t) \leqslant \varepsilon.$$

Критерий двусторонней устойчивости СтЛ. *Для двусторонней устойчивости уравнения (6.1) необходимо и достаточно, чтобы все характеристические числа оператора L_n были однократными и имели нулевые действительные части.*

◇ $\Rightarrow$ При нарушении условия критерия уравнение (6.1) имеет либо решение вида $x = \delta e^{\lambda t}\cos\mu t$, $\lambda \neq 0$, либо решение вида $x = \delta \cdot t\cos\mu t$. Такие решения не ограничены на R, поэтому уравнение не может быть двусторонне устойчивым.

$\Leftarrow$ Если условие критерия выполнено, то решение уравнения (6.2) имеет вид

$$x = \sum_{l=1}^{r} (A_l \cos\mu_l t + B_l \sin\mu_l t) + A_{r+1}$$

(последнее слагаемое при четном n отсутствует). Отклонение ρ стремится к 0 равномерно относительно $t \in R$ при $\Delta\xi \to 0$, поэтому нулевое решение (6.2), а следовательно, и уравнение (6.2), и уравнение (6.1) двусторонне устойчивы. ■

Сумму периодических функций (с различными периодами) называют *квазипериодической функцией*. Из критерия двусторонней устойчивости следует, что уравнение СтЛ двусторонне устойчиво в том и только в том случае, если все его решения являются квазипериодическими функциями.

Основные упражнения

6.1. Решить задачи 825—830 [1].

6.2. Решить задачи 619—629 [3].

6.3. С помощью критерия Гурвица решить задачи 949—951 [3].

6.4. Вывести коэффициентный критерий двусторонней устойчивости для уравнения $L_4 x = 0$.

Дополнительные упражнения

6.5. Доказать, что производная Dx решения x однородного уравнения СтЛ снова является решением данного уравнения. Оценить Dx через начальные значения ξ_k решения x, функции базиса φ_k и через коэффициенты оператора L_n.

6.6. *Модулем устойчивости* нулевого решения однородного уравнения СтЛ с решением $x(t, \xi)$ называют величину

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{t \geqslant s,\ |\Delta\xi| = \delta} \frac{|x(t, \Delta\xi)|}{|\Delta\xi|}.$$

Вычислить модуль устойчивости для устойчивого уравнения $L_2 x = 0$.

6.7. *Областью асимптотической устойчивости* G уравнения $L_n x = 0$ называют совокупность точек $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in R^n$ таких, что данное уравнение является асимптотически устойчивым. Точка $\tilde{a}$ границы G называется *безопасной*, если уравнение $\tilde{L}_n x = 0$ устойчиво. Выделить в R^3 область G для уравнения $L_3 x = 0$ и найти все безопасные точки границы G.

6.8. Рассмотреть доказательство критерия Гурвица в книге Б. П. Демидовича «Лекции по математической теории устойчивости».

6.9. Используя критерий Гурвица, доказать критерий асимптотичеоксй устойчивости Льенара—Шипара для уравнения $L_n x = 0$:

$$a_k > 0,\ \forall k$$

$$\Delta_{n-1} > 0,\ \Delta_{n-3} > 0,\ \Delta_{n-5} > 0,\ \ldots,$$

где Δ_m — главный минор порядка m гурвициана L_n. Выделить на плоскости $R^2 = \{(\alpha, \beta)\}$ область асимптотической устойчивости уравнения

$$D^4x + 4D^3x + \alpha D^2x + 24Dx + \beta x = 0.$$

6.10. Решить задачи 942, 951 [3].

6.11. Решение $x = x(t)$ уравнения (6.1) называют *устойчивым по Лагранжу*, если

$$\sup_{t \geqslant s} |x(t)| < +\infty.$$

Показать, что устойчивость по Лагранжу всех решений однородного уравнения СтЛ равносильна устойчивости данного уравнения в смысле Ляпунова. Исследовать связь между устойчивостью по Лагранжу и устойчивостью по Ляпунову в случае неоднородного уравнения СтЛ.

6.12. Некоторое свойство уравнения (6.1) называют *грубым*, если оно сохраняется при всех достаточно малых возмущениях коэффициентов оператора L_n. Показать, что асимптотическая устойчивость является грубым свойством уравнения (6.1). Исследовать на грубость остальные типы устойчивости уравнения СтЛ.

II. ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ СО СТАЦИОНАРНЫМ ОПЕРАТОРОМ

7. РАЗРЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ВЕКТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СТАЦИОНАРНЫМ ОПЕРАТОРОМ

7.1. ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В следующих трех главах рассматриваются векторные функции $x: I \to R^n$ и матричные функции $X: I \to R^{n\times n}$. Векторы записываются в виде одностолбцовых матриц.

Равенство двух векторных функций равносильно системе n равенств между скалярными функциями, равенство двух матричных функций равносильно системе n^2 равенств между скалярными функциями:

$$x = y \Leftrightarrow x_k = y_k \qquad (1 \leqslant k \leqslant n);$$
$$X = Y \Leftrightarrow X_{kj} = Y_{kj} \qquad (1 \leqslant k,\ j \leqslant n).$$

Производные и интеграл от векторных и матричных функций определяются покомпонентно

$$\mathrm{D}^m x = \left(\mathrm{D}^m x_k\right) = \left(\mathrm{D}^m x_1,\ \ldots,\ \mathrm{D}^m x_n\right)^{\mathrm{T}};\ \int_s^t x(\tau)\mathrm{d}\tau = \left(\int_s^t x_k(\tau)\mathrm{d}\tau\right);$$

$$\mathrm{D}^m \dot{X} = \left(\mathrm{D}^m X_{kj}\right);\ \int_s^t X(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \left(\int_s^t X_{kj}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right).$$

Отметим, что для постоянных вектора a и матрицы A выполняется

$$\mathrm{D}^m(XA) = \left(\mathrm{D}^m X\right) A;\ \mathrm{D}^m(Xa) = \left(\mathrm{D}^m X\right) a;$$

$$\int_s^t X(\tau)\, a\mathrm{d}\tau = \int_s^t X(\tau)\,\mathrm{d}\tau a;\ \int_s^t X(\tau)\, A\mathrm{d}\tau = \int_s^t X(\tau)\,\mathrm{d}\tau A.$$

Кроме того, здесь рассматриваются векторные и матричные комплекснозначные функции (k-функции)

$$z: I \to K^n,\ z = x + iy,$$
$$Z: I \to K^{n\times n},\ Z = X + iY.$$

Линейное векторное уравнение порядка m (ЛВ-m) и размерности n *в основной форме* имеет вид

$$\mathrm{D}^m \mathrm{x} + A_{m-1}\mathrm{D}^{m-1}\mathrm{x} + \ldots + A_0 \mathrm{x} = f,\ t \in I. \qquad (7.1)$$

Коэффициенты A_l и *неоднородность* f представляют собой матричные и векторную функции, непрерывные на I. *Решением* уравнения (7.1) назовем m раз дифференцируемую векторную функцию $\mathrm{x} = x(t) \in R^n$, $t \in I$, обращающую (7.1) в тождество. Уравнение (7.1), т. е. ЛВ-m, можно записать в *операторной форме*

$$\mathrm{L}_m \mathrm{x} = f, \ t \in I,$$

считая

$$\mathrm{L}_m :: = \mathrm{D}^m + A_{m-1}\mathrm{D}^{m-1} + \ldots + A_0.$$

Уравнение (7.1) порядка m размерности n можно заменить уравнением ЛВ-1 размерности mn. Действительно, при $n = 1$ уравнение

$$\mathrm{D}^m \mathrm{x} + a_{m-1}\mathrm{D}^{m-1}\mathrm{x} + \ldots + a_0 \mathrm{x} = f, \ t \in I,$$

заменой $\mathrm{x} = \mathrm{x}_1$, $\mathrm{Dx} = \mathrm{x}_2$, ..., $\mathrm{D}^{m-1}\mathrm{x} = \mathrm{x}_m$ переводится в линейную систему уравнений (ЛС-1)

$$\begin{cases} \mathrm{Dx}_1 = \mathrm{x}_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{Dx}_{m-1} = \mathrm{x}_m, \\ \mathrm{Dx}_m + a_{m-1}\mathrm{x}_m + \ldots + a_0 \mathrm{x}_1 = f. \end{cases}$$

Если положить $\mathrm{y} :: = (\mathrm{x}_1, \ \ldots, \ \mathrm{x}_m)^{\mathrm{T}}$, то эта система равносильна уравнению (ЛВ-1)

$$\mathrm{Dy} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{m-1} \end{bmatrix} \mathrm{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ f \end{bmatrix}.$$

Аналогично при $n > 1$ уравнение (7.1) равносильно уравнению ЛВ-1

$$\mathrm{Dy} - \begin{bmatrix} O^{n\times n} & E^{n\times n} & O^{n\times n} & \ldots & O^{n\times n} \\ O^{n\times n} & O^{n\times n} & E^{n\times n} & \ldots & O^{n\times n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ O^{n\times n} & O^{n\times n} & O^{n\times n} & \ldots & E^{n\times n} \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & \ldots & -A_{m-1} \end{bmatrix} \mathrm{y} = \begin{bmatrix} O^n \\ O^n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ O^n \\ f \end{bmatrix},$$

где $O^{n\times n}$, $E^{n\times n}$ — соответственно нулевая и единичная $n \times n$-матрицы; O^n — нулевой n-вектор, $t \in I$. При изучении общих вопросов теории ЛВ ограничиваются рассмотрением ЛВ-1, переводя последние в нормальную форму

$$\mathrm{Dx} = A\mathrm{x} + f, \ A = (a_{kj}), \ f = (f_k), \ \ \mathrm{x} \in R^n, \ t \in I. \tag{7.2}$$

Уравнение (7.2) равносильно системе уравнений ЛС-1 в нормальной форме

$$\mathrm{D}\mathrm{x}_k = \sum_j a_{kj}\mathrm{x}_j + f_k,\ t \in I. \tag{7.3}$$

Наряду с действительным уравнением (7.2) целесообразно рассмотреть и комплекснозначное линейное векторное уравнение

$$\mathrm{D}\mathrm{z} = C\mathrm{z} + h,\ C = A + iB,\ h = f + ig,\ \mathrm{z} = \mathrm{x} + i\mathrm{y},\ t \in I, \tag{7.4}$$

решениями которого являются дифференцируемые векторные к-функции $\mathrm{z} = z(t) = x(t) + iy(t)$, обращающие на I уравнение (7.4) в тождество. Разрешение уравнения (7.4) равносильно разрешению действительного уравнения ЛВ-1 удвоенной размерности

$$\mathrm{D}\mathrm{z} = C\mathrm{z} + h \Leftrightarrow \mathrm{D}\begin{pmatrix}\mathrm{x}\\ \mathrm{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A & -B\\ B & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{x}\\ \mathrm{y}\end{pmatrix}.$$

Уравнения (7.2) и (7.4) назовем *уравнениями ЛВ со стационарным оператором* (кратко СтЛВ), если коэффициенты соответствующих операторов, т. е. матрицы A и C, постоянны. Уравнениям СтЛВ отвечают *линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами* СтЛС. В главах 7—9 рассматриваются лишь ЛВ или ЛС со стационарными операторами.

7.2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СтЛВ

Уравнение (7.4) называют *диагональным*, если матрица C имеет диагональный вид. Диагональное уравнение (7.4) равносильно линейной системе с постоянными коэффициентами вида

$$\mathrm{D}\mathrm{z}_k = c_{kk}\mathrm{z}_k + f_k,\ t \in I.$$

Каждое из уравнений, составляющих эту систему, независимо от остальных и решается самостоятельно по формуле (3.6).

Уравнение (7.4) называют *треугольным*, точнее *нижним треугольным*, если матрица C нижняя треугольная, т. е. все элементы C, расположенные над главной диагональю, равны 0. Треугольное уравнение равносильно системе СтЛС вида

$$\mathrm{D}\mathrm{z}_k = c_{k1}\mathrm{z}_1 + \ldots + c_{kk}\mathrm{z}_k + h_k,\ t \in I. \tag{7.5}$$

ТОР для треугольного СтЛВ. *Начальная задача для треугольного уравнения СтЛВ*

$$\mathrm{D}\mathrm{z} = C\mathrm{z} + h,\ t \in I;\ \mathrm{z}\,|_{t=s} = \zeta \tag{7.6}$$

при любых $s \in I$, $\zeta \in K^n$ однозначно разрешима на I. Построение решения сводится к последовательному разрешению уравнений СтЛ-1.

◇ Первая составляющая $z_1 = z_1(t)$ к-решения задачи (7.6) однозначно определяется из условий

$$\mathrm{D}z_1 = c_{11}z_1 + h_1,\ t \in I;\ z_1|_{t=s} = \zeta_1$$

о формуле (3.6)

$$z_1 = z_1(t) :: = \zeta_1 e^{c_{11}(t-s)} + \int_s^t h_1(\tau)\, e^{c_{11}(t-\tau)} d\tau.$$

Подставляя найденное значение z_1 во второе уравнение соответствующей системы (7.5) и учитывая начальные условия для z_2, получаем начальную задачу

$$Dz_2 = c_{22}z_2 + \left(h_2 + c_{21}\left(\zeta_1 e^{c_{11}(t-s)} + \int_s^t h_1(\tau)\, e^{c_{11}(t-\tau)}\, d\tau\right)\right),\ t \in I;\ z_2|_{t=s} = \zeta_2.$$

Определим $z_2 = z_2(t)$ и подставим эту функцию в третье уравнение системы (7.5). Получим уравнение СтЛ-1 для нахождения z_3. Продолжаем описанный процесс и последовательно строим все составляющие $z_k(t)$ решения $z = (z_1(t), \ldots, z_n(t))^{\mathrm{T}}$ задачи (7.6), причем каждая составляющая определяется однозначно. ■

Если в задаче (7.6) величины ζ_k считать произвольными комплексными постоянными, то построенное решение доставит комплекснозначное полное решение треугольного уравнения СтЛВ (7.4). Отметим, что полученное полное решение представляет собой линейную функцию от произвольных постоянных.

7.3. РАЗРЕШЕНИЕ СтЛВ

ТОР для СтЛВ. *Пусть векторная функция f непрерывна на I. Тогда начальная задача*

$$Dx = Ax + f,\ t \in I;\ x|_{t=s} = \xi \tag{7.7}$$

при любых $s \in I$ и $\xi \in R^n$ однозначно разрешима на I.

◇ Обозначим J нормальную жорданову форму матрицы A, $A = SJS^{-1}$. Произведем в задаче (7.7) равносильную замену искомой векторной функции $w = S^{-1}x$. Получим задачу

$$Dw = Jw + S^{-1}f,\ t \in I;\ w|_{t=s} = S^{-1}\xi. \tag{7.8}$$

На основании ТОР для треугольного СтЛВ задача (7.8) однозначно разрешима и $w = w(t)$, $t \in I$. Обратное преобразование $x = Sw$ переводит k-решение задачи (7.8) в k-решение $x(t) + iy(t)$ задачи (7.7). Все заданные величины в задаче (7.7) действительны, поэтому функция y оказывается решением нулевой начальной задачи для однородного СтЛВ и, следовательно, $y(t) = 0$, $\forall t \in I$, т. е. построенное k-решение задачи (7.7) является действительным. ■

Если в качестве ξ использовать произвольный постоянный вектор C размерности n, то построенное выше решение задачи (7.7) доставит общее (полное) решение рассматриваемого уравнения СтЛВ.

7.4. СВЕДЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ К СОВОКУПНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ УРАВНЕНИЙ

В начале настоящей главы отмечалось теоретическое значение сведения векторного уравнения любого порядка к системе скалярных уравнений первого порядка. Практическое значение имеет обратная процедура — сведение системы к совокупности независимых скалярных уравнений. Опишем эту процедуру.

Допустим, что неоднородности f_k системы (7.3) имеют непрерывные производные достаточно высокого порядка (заведомо достаточно существования непрерывных производных $D^{n-1}f_k$). Если система (7.3) диагональная, то она распадается на совокупность n независимых СтЛ-1, т. е. имеет требуемый вид. Если же система (7.3) недиагональная, то, не нарушая общности, считаем $a_{1n} \neq 0$. Первое уравнение системы (7.3) заменим соотношением

$$x_n = \frac{1}{a_{1n}} (Dx_1 - a_{11}x_1 - \ldots - a_{1n-1}x_{n-1} - f_1). \tag{7.9}$$

Полученное значение x_n подставим в остальные уравнения системы (7.3). Приводим образовавшуюся систему СтЛС к нормальной форме, т. е. выражаем D^2x_1, Dx_2, ..., Dx_{n-1} через Dx_1, x_1, x_2, ..., x_{n-1}. Если новая система состоит из независимых СтЛ, то сведение завершено. В противном случае выражаем, скажем, искомую функцию x_{n-1} через D^2x_1, Dx_1, x_1, x_2, ..., x_{n-2} и повторяем уже описанные подстановки. В результате система (7.3) оказывается замененной совокупностью r независимых СтЛ суммарного порядка n относительно искомых функций x_1, x_2, ..., x_r и совокупностью соотношений вида (7.9). Интегрируя независимые СтЛ, находим выражения для x_1, x_2, ..., x_r, содержащие в общей сложности n произвольных постоянных. Затем из соотношений вида (7.9) непосредственно определяем остальные $n - r$ искомых функций, причем в этом случае новых произвольных постоянных уже не появляется.

7.5. ОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Наряду с уравнением (7.2) рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$Dx = A(t)\,x, \quad t \in I. \tag{7.10}$$

Все решения (7.2) можно получить, если ко всем решениям (7.10) прибавить некоторое частное решение (7.2). Совокупность решений x_{*k}, т. е. решений x_{1k}, ..., x_{nk} при $k = 1, \ldots, n$, уравнения (7.10) назовем *базисом*, если линейная комбинация x_{*k} с произвольными постоянными коэффициентами образует полное решение (7.10).

Уравнение (7.10) тесно связано с однородным матричным линейным уравнением (ЛМ)

$$DX = A(t)\,X, \quad t \in I, \tag{7.11}$$

решениями которого называют квадратные матричные функции $X = X(t)$, $t \in I$, размерности n, обращающие (7.11) в тождество на I. Функция X является решением (7.11) в том и только том случае, если любой столбец x_{*k} этой матричной функции является решением векторного уравнения (7.10). Если X — решение (7.11), то при любом $\xi \in R^n$ векторная функция $X\xi$, $t \in I$, оказывается решением (7.10).

Решение X уравнения (7.11) назовем *базисным*, если его определитель $\det X(t)$ отличен от 0 на I. Если X — базисное решение (7.11), то матричная функция $X(t)X^{-1}(s)\Xi$ является решением начальной задачи

$$\mathrm{D}\mathrm{X} = A(t)\mathrm{X},\ t\in I;\ \mathrm{X}\,|_{t=s} = \Xi,$$

а векторная функция $X(t)X^{-1}(s)\xi$ — решением начальной задачи

$$\mathrm{D}\mathrm{x} = A(t)\mathrm{x},\ t\in I;\ \mathrm{x}\,|_{t=s} = \xi.$$

Если продифференцировать $\det X(t)$ по строкам, а затем преобразовать полученное выражение по схеме, использованной при доказательстве леммы (3.16), то придем к *матричному аналогу формулы Лиувилля*

$$\det X(t) = \det X(s)\, e^{\int_s^t \mathrm{tr}\, A(\tau)\, d\tau}. \tag{7.12}$$

Из формулы (7.12) следует, что решение X оказывается базисным уже в том случае, когда его определитель отличен от 0 хотя бы при одном значении t из I.

Любая начальная задача для однородного ЛМ со стационарным оператором, т. е. с постоянной матрицей A:

$$\mathrm{D}\mathrm{X} = A\mathrm{X},\ t\in R;\ \mathrm{X}\,|_{t=s} = \Xi \tag{7.13}$$

однозначно разрешима на I основании ТОР для СтЛВ. Если матрица Ξ неособенная, то решение X задачи (7.13) является базисным. Формула Лиувилля для СтЛМ имеет вид

$$\det X(t) = \det X(s)\, e^{(t-s)\,\mathrm{tr}\, A}.$$

7.6. ПРАВИЛО ЭЙЛЕРА РАЗРЕШЕНИЯ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ СтЛС

Разрешение однородных систем СтЛС сводится к построению решений однородных уравнений СтЛ. Среди решений системы СтЛС имеются решения вида $\mathrm{x} = be^{\nu t}$, где b — постоянный вектор. Эти решения можно найти по *правилу Эйлера*. Для этого подставляем указанное выражение для x с неопределенными составляющими вектора b и неопределенным показателем ν в исходное уравнение $\mathrm{D}\mathrm{x} = A\mathrm{x}$. После преобразований получим

$$(A - \nu E)\, b = 0,$$

что возможно при $b \neq 0$ тогда и только тогда, когда ν является характеристическим числом матрицы A, а b — собственным вектором A, отвечающим этому характеристическому числу. Если все элементарные делители матрицы A простые, то получим систему линейно независимых собственных векторов b_k. Матрица X, составленная из векторов $b_k e^{\nu_k t}$, является базисным решением матричного уравнения $\mathrm{D}X = AX$, так как $\det X(0) \neq 0$. Следовательно, $\mathrm{x} = X(t)\,\xi$ с произвольным постоянным вектором ξ образует полное решение уравнения $\mathrm{D}x = Ax$. Если же характеристическому числу ν матрицы A отвечает элементарный делитель кратности $m > 1$, то, кроме решения вида $x = be^{\nu t}$, в базис уравнения $\mathrm{D}x = Ax$ следует включить решения вида $x = b_l t^l e^{\nu t}$, $1 \leqslant l < m$.

Основные упражнения

7.1. Построить базисы простейших векторных уравнений: а) $\mathrm{D}x = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$; б) $\mathrm{D}^2 z = \begin{pmatrix} t \\ e^{it} \end{pmatrix}$.

7.2. Построить общие решения специальных векторных уравнений: а) $\mathrm{D}z = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} z$; б) $\mathrm{D}^2 z = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix} z$.

7.3. С помощью сведения системы к независимым уравнениям решить задачи 1117—1119, 1121—1128 [1].

7.4. Решить по правилу Эйлера задачи 1133—1142, 1149, 1150 [1].

Дополнительные упражнения

7.5. Решить начальную задачу для простейшего векторного уравнения

$$\mathrm{D}x = \begin{pmatrix} \sqrt{1-t} \\ |\operatorname{tg} t| \end{pmatrix}, \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2};\ 1\right]; \quad x\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7.6. Решить задачи 1129—1132, 1144, 1145, 1220—1227 [1], а также задачи 820—825, 851—866 [2].

7.7. Показать, что если $x = x(t)$ — решение уравнения $\mathrm{D}x = Ax$, то: а) $y(t) :: = \mathrm{D}^m x(t)$ также является решением того же уравнения; б) $y = \mathrm{D}^l x(t)$ является решением уравнения СтЛВ: $\mathrm{D}^l y = A^l y$.

7.8. Пусть векторная функция f имеет непрерывные производные порядка n. Обозначим через M_k матрицу, составленную из строк с номером k матриц A, A^2, ..., A^n. Показать, что при

$$\max_k \operatorname{rank} M_k = \operatorname{rank} M_{k_0} = n$$

решение уравнения $\mathrm{D}x = Ax + f$ сводится к разрешению уравнения относительно x_{k_0} и к выражению остальных составляющих решения через x_{k_0}.

7.9. Показать, что если $X = X(t)$ — базисное решение матричного уравнения $\mathrm{D}X = AX$, то $X(t)X^{-1}(s) = X(t-s)$.

7.10. Показать, что произведение решения уравнения СтЛМ $\mathrm{D}X = AX$ на решение сопряженного уравнения СтЛМ $\mathrm{D}Y = -YA$ является постоянной матрицей.

8. ЭКСПОНЕНТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ВЕКТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СТАЦИОНАРНЫМ ОПЕРАТОРОМ

8.1. ЭКСПОНЕНТА МАТРИЦЫ

В качестве норм вектора $x \in R^n$ и матрицы $A \in R^{n \times n}$ используем октоэдрические нормы

$$\|x\| :: = \sum_k |x_k|, \quad \|A\| :: = \max_k \sum_i |a_{ik}|.$$

Норма вектора подчинена норме матрицы, т. е.

$$\| A \| = \max_{\| x \| = 1} \| Ax \|$$

(см., например, книгу В. И. Крылова, В. В. Бобкова, П. И. Монастырного «Вычислительные методы высшей математики» (Мн., Выш. школа, 1972, т. 1, с. 105—112)).

Лемма.

$$\| A^m \| \leqslant \| A \|^m, \; m \geqslant 0. \tag{8.1}$$

◇ При $m = 0$ соотношение (8.1) тривиально. Если (8.1) справедливо при некотором $m \geqslant 0$, то при $\| x \| = 1$ на основании свойства подчиненности

$$\| A^{m+1} x \| = \| A (A^m x) \| \leqslant \| A \| \cdot \| A^m x \| \leqslant \| A \| \cdot \| A^m \| \leqslant \| A \|^{m+1},$$

и поэтому $\| A^{m+1} \| \leqslant \| A \|^{m+1}$, что доказывает по индукции (8.1) для всех m. ■

Матричный ряд $\sum A_m$ сходится к матрице S, если

$$\lim_{N \to \infty} \left\| \sum_{m=0}^{N} A_m - S \right\| = 0.$$

Из неравенств

$$\left| \left(\sum_{m=0}^{N} A_m - S \right)_{ik} \right| = \left| \sum_{m=0}^{N} A_{mik} - S_{ik} \right| \leqslant \left\| \sum_{m=0}^{N} A_m - S \right\|$$

следует, что если матричный ряд сходится, то одновременно сходятся все последовательности, составленные из соответствующих элементов частных сумм $\sum_{m=0}^{N} A_m$. Справедливо и обратное.

Для сходимости ряда $\sum A_m$ необходимо и достаточно выполнение условия Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall p \quad \forall \mu$$

$$\mu \geqslant N_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left\| \sum_{m=\mu}^{\mu+p} A_m \right\| \leqslant \varepsilon,$$

поэтому из сходимости числовой мажоранты $\sum a_m$, $\| A_m \| \leqslant a_m$, вытекает сходимость матричного ряда $\sum A_m$.

Матричный ряд

$$\sum_{m \geqslant 0} \frac{1}{m!} A^m$$

имеет сходящуюся числовую мажоранту (см. (8.1))

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \| A \|^m = e^{\| A \|}$$

и поэтому сходится при всех $A \in R^{n \times n}$. Сумму этого матричного ряда называют *экспонентой матрицы* A и обозначают e^A или $\exp A$. По той же формуле определяют экспоненту комплексной матрицы A. Абсолютная сходимость рядов для экспонент позволяет почленно перемножать такие ряды, с учетом, однако, порядка сомножителей в матричных произведениях. Если матрицы A и B перестановочны, то для вычисления $(A+B)^m$ можно использовать формулу Ньютона степени бинома

$$(A+B)^m = \sum_{\mu=0}^{m} C_m^{\mu} A^{m-\mu} B^{\mu}.$$

Следовательно,

$$AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B e^A.$$

Лемма.

$$\mathrm{D}e^{At} = Ae^{At}, \quad t \in R. \tag{8.2}$$

◊ Функциональный степенной матричный ряд $\sum \frac{1}{m!} A^m t^m$, а также ряд, полученный из указанного функционального ряда почленным дифференцированием по t, локально равномерно сходится на R, поэтому допустимо почленное дифференцирование

$$\mathrm{D}e^{At} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{D}\left(\frac{1}{m!} A^m t^m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} A^m \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} = Ae^{At},$$

что и доказывает формулу (8.2). ■

8.2. РАЗРЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОГО СтЛВ

Теорема 1. *Начальная задача*

$$\mathrm{D}x = Ax, \quad t \in R; \quad x|_{t=s} = \xi \tag{8.3}$$

однозначно разрешима на R:

$$x = x(t) :: = e^{A(t-s)}\xi. \tag{8.4}$$

◊ Из формулы (8.2) следует, что при любом фиксированном s из R

$$\mathrm{D}e^{A(t-s)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(t-s)} e^{A(t-s)} \cdot \frac{\mathrm{d}(t-s)}{\mathrm{d}t} = A \cdot e^{A(t-s)},$$

поэтому $X = X(t) :: = e^{A(t-s)}$ является решением уравнения $\mathrm{D}X = AX$. Решение X базисное, так как $\det X(s) = \det E = 1$. Таким образом, векторная функция (8.4) разрешает СтЛВ $\mathrm{D}x = Ax$ и, кроме того, при $t = s$ удовлетворяет начальным условиям (8.3), так как

$$x_{t=s} = x(s) = e^{A(t-s)}\big|_{t=s}\xi = E\xi = \xi.$$

На основании ТОР для СтЛВ других решений задача (8.3) не имеет. ■

Базисное решение $X = X(t)$ уравнения ЛМ $DX = A(t)X$, нормированное при $t = s$, т. е. $X(s) = E$, называют *матрицантом* данного уравнения (или матрицантом $A(t)$). Матрицант обозначают $\overset{t}{\underset{s}{\Omega}} A(\tau)\,d\tau$. Из доказательства теоремы 1 следует выражение матрицанта постоянной матрицы A через экспоненту

$$\overset{t}{\underset{s}{\Omega}} A d\tau = e^{A(t-s)}.$$

Если вектор ξ в формуле (8.4) заменить произвольным постоянным вектором C, то полученное соотношение задаст общее решение уравнения $Dx = Ax$. Столбцы матрицанта образуют базис уравнения, нормированный при $t = s$.

8.3. РАЗРЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ СтЛВ ПО ПРАВИЛУ КОШИ

Неоднородное уравнение СтЛВ

$$Dx = Ax + f$$

можно записать в операторной форме:

$$Lx = f, \quad L :: = D - A.$$

Лемма.

$$Lx = e^{At} D\left(e^{-At} x\right). \tag{8.5}$$

Доказательство проводится по схеме доказательства леммы (3.4).

Теорема 2. *Пусть f непрерывна на I. Тогда начальная задача*

$$Lx = f, \quad t \in I; \quad x\,|_{t=s} = \xi \tag{8.6}$$

однозначно разрешима на I

$$x = x(t) :: = e^{A(t-s)}\xi + \int_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau. \tag{8.7}$$

◇ Задача (8.6) на основании леммы (8.5) равносильна задаче

$$D\left(e^{-At}x\right) = e^{-At} f(t), \quad x\,\big|_{t=s} = \xi$$

для простейшего уравнения ЛВ, и поэтому

$$e^{-At}x = e^{-As}\xi + \int_s^t e^{-A\tau} f(\tau)\,d\tau,$$

откуда и следует (8.7). ■

Выражение $\exp A(t - \tau)$ называют *матричной функцией Коши* или *матрицей Коши* оператора L. Матрица Коши совпадает с матрицантом $\overset{t}{\underset{\tau}{\Omega}} A d\tau_1$. Формула (8.7) выражает *правило Коши* разрешения задачи (8.6).

8.4. РАЗРЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ СтЛВ ПО ПРАВИЛУ ЛАГРАНЖА

Частное решение неоднородного уравнения СтЛВ

$$\mathrm{L}\mathrm{x} = f, \ t \in I \tag{8.8}$$

можно построить по *правилу Лагранжа*, используя метод вариации произвольных постоянных. В этом случае решение (8.8) разыскивается в виде

$$\mathrm{x} = x^*(t) = e^{A(t-s)}\mathrm{u},$$

где u — вспомогательная неизвестная векторная функция. После подстановки x^* и очевидных преобразований получаем простейшее векторное уравнение для u, из которого и определяем какое-нибудь частное значение u. Общее решение уравнения (8.8) имеет вид

$$\mathrm{x} = e^{A(t-s)}(\mathrm{u}(t) + C),$$

где C — произвольный постоянный вектор (см. гл. 5).

8.5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭКСПОНЕНТЫ

Непосредственное вычисление экспоненты матрицы на основе ее определения в виде матричного ряда оказывается возможным лишь в некоторых частных случаях. Важнейшим из них является случай, когда матрица имеет нормальную жорданову форму. При вычислении экспоненты в общем случае используют возможность приведения матрицы к нормальной жордановой форме.

Пусть $J_d(\nu)$ — элементарная жорданова клетка размерности d

$$J_d(\nu) ::= \begin{bmatrix} \nu & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \nu & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \nu \end{bmatrix}.$$

Расширим определение биномиального коэффициента $\binom{m}{k}$:

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}, \quad k \leqslant m, \ k \geqslant 0, \ m \geqslant 0,$$

положив $\binom{m}{k} = 0$ для $k > m$. Тогда при всех неотрицательных целых k, m выполняется формула (известная в анализе для $k \leqslant m$)

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{m+1}{k}. \tag{8.9}$$

Лемма.

$$J_d^m(\nu)=\begin{bmatrix}\nu^m & 0 & \dots & 0\\ \binom{m}{1}\nu^{m-1} & \nu^m & \dots & 0\\ \binom{m}{2}\nu^{m-2} & \binom{m}{1}\nu^{m-1} & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ \binom{m}{d-1}\nu^{m-d+1} & \binom{m}{d-2}\nu^{m-d+2} & \dots & \nu^m\end{bmatrix}. \qquad (8.10)$$

Доказательство проводится по индукции с использованием (8.9).

Теорема 3. *Пусть* $A=SJS^{-1}$, *где*

$$J=(J_{d_1}(\nu_1),\ \dots,\ J_{d_r}(\nu_r)).$$

Тогда

$$e^{At}=S\left(e^{Jd_1(\nu_1)t},\ \dots,\ e^{Jd_r(\nu_r)t}\right)S^{-1}, \qquad (8.11)$$

где

$$e^{J_d(\nu)t}=e^{\nu t}\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ t & 1 & \dots & 0\\ \frac{t^2}{2!} & t & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} & \frac{t^{d-2}}{(d-2)!} & \dots & 1\end{bmatrix}.$$

$\Diamond$ $e^{At}=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}(SJS^{-1})^m=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}SJ^mS^{-1}=Se^{Jt}S^{-1}$, $J^m=\left(J_{d_1}^m(\nu_1),\dots,\right.$

$\left.J_{d_r}^m(\nu_r)\right)$, $e^{Jt}=\left(e^{Jd_1(\nu_1)t},\ \dots,\ e^{J_{d_r}(\nu_r)t}\right)$, $e^{Jd(t)}=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}J_d^m(\nu)=$

$$=\begin{bmatrix}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\nu^m & 0 & \dots & 0\\ \sum\limits_{m=1}^{\infty}\binom{m}{1}\frac{t^m}{m!}\nu^{m-1} & \sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\nu^m & \dots & 0\\ \sum\limits_{m=2}^{\infty}\binom{m}{2}\frac{t^m}{m!}\nu^{m-2} & \sum\limits_{m=1}^{\infty}\binom{m}{1}\frac{t^m}{m!}\nu^{m-1} & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ \sum\limits_{m=d-1}^{\infty}\binom{m}{d-1}\frac{t^m}{m!}\nu^{m-d+1} & \sum\limits_{m=d-2}^{\infty}\binom{m}{d-2}\frac{t^m}{m!}\nu^{m-d+2} & \dots & \sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\nu^m\end{bmatrix}=$$

$$
= \begin{bmatrix}
\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(t\nu)^m}{m!} & 0 & \dots & 0 \\
\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(t\nu)^m}{m!} \frac{t}{1!} & \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(t\nu)^m}{m!} & \dots & 0 \\
\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(t\nu)^m}{m!} \frac{t^2}{2!} & \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(t\nu)^m}{m!} \frac{t}{1!} & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(t\nu)^m}{m!} \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} & \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(t\nu)^m}{m!} \frac{t^{d-2}}{(d-2)!} & \dots & \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(t\nu)^m}{m!}
\end{bmatrix} =
$$

$$
= e^{\nu t} \begin{bmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 \\
\frac{t}{1!} & 1 & \dots & 0 \\
\frac{t^2}{2!} & \frac{t}{1!} & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{t^{d-1}}{(d-1)!} & \frac{t^{d-2}}{(d-2)!} & \dots & 1
\end{bmatrix}. \blacksquare
$$

В частности, при попарно различных характеристических числах матрицы A справедливо соотношение

$$
e^{At} = S \begin{bmatrix}
e^{\nu_1 t} & 0 & \dots & 0 \\
0 & e^{\nu_2 t} & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & e^{\nu_n t}
\end{bmatrix} S^{-1}.
$$

8.6. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ СтЛВ

Если воспользоваться определением экспоненты, то из формулы (8.4) получим степенное представление решения задачи (8.3):

$$
\mathrm{x} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(t-s)^m}{m!} A^m \right) \xi.
$$

Частная сумма экспонентного ряда приводит к приближенному решению задачи (8.3):

$$x \approx x_\mu(t) :: = \left(\sum_{m=0}^{\mu} \frac{(t-s)^m}{m!} A^m \right) \xi.$$

Отметим, что при построении приближенного решения над элементами матрицы коэффициентов производятся лишь действия сложения и умножения.

Оценим погрешность приближенного решения $x_\mu(t)$ задачи (8.3) на промежутке $I = [s - \alpha,\ s + \alpha]$:

$$\| x_\mu(t) - e^{A(t-s)}\xi \| = \left\| \sum_{m=\mu+1}^{\infty} \frac{(t-s)^m}{m!} A^m \xi \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \| \xi \| \frac{\alpha^{\mu+1}}{(\mu+1)!} \| A \|^{\mu+1} e^{\| A \| \cdot \alpha}.$$

Следовательно, на I приближенное решение стремится к точному решению при $\mu \to \infty$ со скоростью $M \frac{(\alpha \| A \|)^{\mu+1}}{(\mu+1)!}$, где M—постоянное.

Основные упражнения

8.1. Используя экспонентное представление решения уравнения СтЛВ, найти общие решения однородных уравнений:

а) $Dx = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$; б) $Dx = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x$;

в) $Dx = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x$; г) $Dx = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x$;

д) $Dx = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$; е) $Dx = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} x$

и решить начальные задачи

ж) $Dx = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$; $x|_{t=2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$;

з) $Dx = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -6 \\ -2 & 7 & 6 \\ 2 & -5 & -4 \end{pmatrix} x$; $x|_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

и) $Dx = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 6 & -5 \end{pmatrix} x$; $x|_{t=-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

8.2. Решить по правилу Коши задачи

$$Dx = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + f(t),\quad x|_{t=0} = \xi$$

в случаях:

а) $f(t) = (1(t),\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$; $\qquad \xi = (0,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$;

б) $f(t) = (0,\ e^{-3t},\ 1)^{\mathrm{T}}$; $\qquad \xi = (1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$;

в) $f(t) = (e^t,\ 0,\ e^t)^{\mathrm{T}}$; $\qquad \xi = (0,\ 2,\ 0)^{\mathrm{T}}$.

8.3. Используя правило Коши, построить общие решения уравнения

$$\mathrm{D}\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{x} + f(t)$$

в случаях:

а) $f(t) = (0,\ e^t,\ 0)^{\mathrm{T}}$; $\qquad$ б) $f(t) = (\cos t,\ \sin t,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

8.4. С помощью метода Лагранжа найти общие решения уравнений:

а) $\mathrm{D}\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \mathrm{x} + \begin{pmatrix} (1-2t^2)\, e^{2t} \\ (1-2t^2)\, e^t \end{pmatrix}$;

б) $\mathrm{D}\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{x} + \begin{pmatrix} te^t \\ t^2e^t \\ t^3e^t \end{pmatrix}$;

в) $\mathrm{D}\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{x} + \begin{pmatrix} e^{2t} \cos t \\ e^{2t} \sin t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$;

г) $\mathrm{D}\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \mathrm{x} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{5t} \\ 1 \end{pmatrix}$;

д) $\mathrm{D}\mathrm{x} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$.

8.5. Найти приближенное решение вида

$$\mathrm{x} = x(t) + o\left((t-1)^3\right)$$

начальной задачи

$$\mathrm{D}\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{x}; \quad \mathrm{x}|_{t=1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Дополнительные упражнения

8.6. Построить уравнения СтЛВ по условиям 1207—1212 [1].

8.7. Построить общие решения уравнений СтЛВ 1220—1240 [1].

8.8. Не вычисляя $\exp A$, найти $\det \Omega_s^t A \mathrm{d}\tau$ для уравнений:

а) $\mathrm{D}\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -7 \\ 123 & -5 & -11 \\ 13 & 7 & 19 \end{pmatrix} \mathrm{x},\ s = -1$;

б) $\mathrm{D}\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 1 & 130 \\ 87 & -1 \end{pmatrix} \mathrm{x},\ s = s_0$.

8.9. Доказать, что выполнение соотношения при всех $t \in R$

$$e^{(A+B)\,t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$$

равносильно перестановочности матриц A и B.

8.10. Показать, что

$$e^{(A+\varepsilon B)\,t} = e^{At} + \varepsilon \int_0^t e^{A(t-\tau)} B e^{A\tau}\, \mathrm{d}\tau + o(\varepsilon^2),\quad t \in [a,\ b].$$

8.11. Доказать, что начальная задача для СтЛМ

$$\mathrm{DX} = A\mathrm{X} + \mathrm{X}B, \ \mathrm{X}|_{t=s} = \Xi$$

однозначно разрешима в виде

$$\mathrm{X} = e^{A(t-s)}\Xi e^{B(t-s)}.$$

8.12. Найти приближенное решение $\widetilde{X}$ начальной задачи

$$\mathrm{DX} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \mathrm{X}, \ \mathrm{X}|_{t=1} = E$$

такое, что $\mathrm{X} = \widetilde{X}(t) \pm 0{,}01$, $|t| \leqslant 0{,}25$.

8.13. Обозначим $\Delta(\nu)$ характеристический многочлен матрицы A:

$$\Delta(\nu) :: = \det(A - \nu E).$$

Доказать формулу Кэли — Гамильтона

$$\Delta(A) = O_n^n$$

и с ее помощью установить, что

$$e^{At} = \sum_{m=0}^{n} p_m(t) A^m,$$

где $p_m(t)$ — скалярные квазиполиномы.

8.14. Уточняя предыдущий результат, показать, что для матрицы A с минимальным многочленом

$$q(\nu) = \prod_{k=1}^{r} (\nu - \nu_k)^{d_k}$$

выполняется

$$e^{At} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=0}^{d_k-1} B_{kl} \frac{t^l}{l!} e^{\nu_k t},$$

где B_{kl} — постоянные матрицы. Использовать это представление для разрешения однородных уравнений СтЛВ методом неопределенных коэффициентов (матричный аналог правила Эйлера).

8.15. Распространить правило Эйлера на уравнение СтЛВ с квазиполиномиальными неоднородностями.

8.16. Пусть характеристические числа ν_k матрицы A попарно различны. Доказать, что в этом случае справедлива формула Сильвестра

$$e^A = \sum_{k=1}^{n} \frac{(A - \nu_1 E) \ldots (A - \nu_{k-1}E)(A - \nu_{k+1}E) \ldots (A - \nu_n E)}{(\nu_k - \nu_1) \ldots (\nu_k - \nu_{k-1})(\nu_k - \nu_{k+1}) \ldots (\nu_k - \nu_n)} e^{\nu_k}.$$

8.17. Распространить правило Эйлера на уравнения СтЛВ в основной форме

$$\mathrm{D}^m \mathrm{x} + A_{m-1}\mathrm{D}^{m-1}\mathrm{x} + \ldots + A_0\mathrm{x} = f, \ \mathrm{x} \in R^n \ t \in I$$

с квазиполиномиальной неоднородностью f.

8.18. Решить задачи 813—845 [3].

9. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

9.1. ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЯ СтЛВ

Рассмотрим векторную функцию $\psi : I \to R^n$ и скалярную функцию $g : I \to R$. Построим линейную форму относительно x:

$$\mathrm{l}\mathrm{x} :: = \psi^{\mathrm{T}} \mathrm{x} + g = \sum_k \psi_k \mathrm{x}_k + g, \ t \in I, \ \mathrm{x} \in R^n .$$

Допустим, что форма $\mathrm{l}\mathrm{x}$ невырожденная, т.е. ψ отлично от тождественного нулевого вектора на I. Форму $\mathrm{l}\mathrm{x}$ назовем *предынтегралом* (или *первым интегралом*) уравнения СтЛВ

$$\mathrm{D}\mathrm{x} = A\mathrm{x} + f, \ t \in I, \tag{9.1}$$

если она сохраняет постоянное значение вдоль любого решения $\mathrm{x} = x(t)$:

$$\mathrm{D}x(t) = Ax(t) + f(t), \ \forall t \in I \Leftrightarrow \mathrm{l}x(t) = \mathrm{const}, \ \forall t \in I.$$

Если ψ — постоянная (ненулевая) векторная функция, то предынтеграл $\mathrm{l}\mathrm{x}$ назовем *стационарным*.

Допустим, что $\mathrm{l}\mathrm{x}$ — предынтеграл уравнения (9.1). Возьмем решение $\mathrm{x} = x(t)$, $x(s) = \xi$. График этого решения в $R^{n+1} = \{(t, \mathrm{x})\}$ при всех $t \in I$ обязан лежать на поверхности П (рис.13):

$$\psi^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{x} + g(t) = \psi^{\mathrm{T}}(s)\xi + g(s).$$

Если $\mathrm{l}\mathrm{x}$ — стационарный интеграл однородного уравнения (9.1), то поверхность П представляет собой гиперплоскость в R^{n+1}, параллельную оси $t = 0$ (рис. 14).

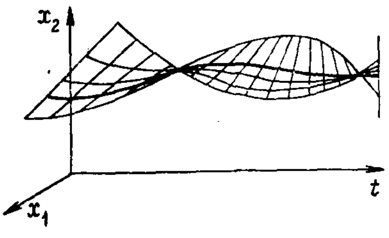

Рис. 13

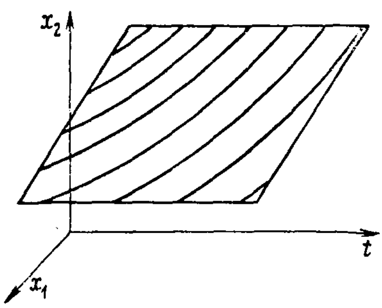

Рис. 14

Совокупность предынтегралов

$$\mathrm{l}_i \mathrm{x} = \psi_i^{\mathrm{T}}\mathrm{x} + g_i = \sum_k \psi_{ik}\mathrm{x}_k + g_i, \ t \in I, \ 1 \leqslant i \leqslant n$$

назовем *интегралом уравнения* (9.1), если при некоторых постоянных ξ_i система соотношений

$$l_i\, x = \xi_i \tag{9.2}$$

определяет решение $x = x(t)$, $t \in I$, данного уравнения. В тех случаях, когда система (9.2) определяет решение уравнения (9.1) при любых постоянных $\xi_i = C_i$ из некоторого множества $(C_1, \dots, C_n) \in \Gamma \subset R^n$, совокупность предынтегралов $l_i\, x$ назовем *общим интегралом* данного уравнения. Общий интеграл, доставляющий все решения уравнения (9.1), назовем *полным*.

Пусть ψ — матрица со столбцами ψ_i, g — вектор (одностолбцовая матрица) с составляющими g_i. Система (9.2) равносильна векторному соотношению

$$\psi^{\mathrm{T}}\, x + g = \xi,\ t \in I,\ \xi \in R^n. \tag{9.3}$$

Соотношение (9.3) разрешимо на I при любых $\xi \in R^n$ лишь в случае

$$\det \psi\,(t)) \neq 0,\ \ \forall t \in I. \tag{9.4}$$

С другой стороны, если матрица $\psi(t)$ невырожденная при всех $t \in I$, то уравнение (9.3) разрешимо и притом однозначно на I:

$$x = x(t) :: = (\psi^{\mathrm{T}}\,(t))^{-1}\xi - (\psi^{\mathrm{T}}\,(t))^{-1}\, g(t). \tag{9.5}$$

Если s — фиксированная точка I, то при выполнении (9.4) соотношение (9.3) равносильно соотношению

$$(\psi^{\mathrm{T}}\,(s))^{-1}\,(\psi^{\mathrm{T}}\, x + g - g(s)) = (\psi^{\mathrm{T}}\,(s))^{-1}\,(\xi - g(s)),$$

что позволяет дальше, не нарушая общности, рассматривать лишь общие (полные) интегралы, нормированные при $t = s$, т.е. считать

$$\psi(s) = E,\ g\,(s) = 0.$$

Таким образом, совокупность предынтегралов $l_i\, x$ является нормированным общим интегралом уравнения (9.1) в том и только том случае, когда

$$\det \psi\,(t) \neq 0,\ \forall t \in I;\ \psi(s) = E,\ g(s) = 0.$$

9.2. СОПРЯЖЕННЫЕ МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ СтЛ

Наряду с уравнением (9.1) рассмотрим соответствующее однородное уравнение СтЛМ

$$\mathrm{D}\Phi = \mathrm{A}\Phi$$

и *сопряженное матричное уравнение*

$$\mathrm{D}\psi = -\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\,\psi. \tag{9.6}$$

Теорема. *Совокупность линейных форм $l_i\, x$ образует полный интеграл уравнения (9.1), нормированный при $t = s$, в том* *и только в том случае, когда матрица ψ, образованная из строк ψ_i, является базисным решением уравнения (9.6) и*

$$g(t) = -\int\limits_s^t e^{A(s-\tau)} f(\tau)\,d\tau.$$

$\Diamond \Rightarrow$ Если формы $l_i x$ образуют полный интеграл, то формула (9.5) при произвольном ξ доставляет полное решение уравнения (9.1) и поэтому на основании (8.7)

$$(\psi^T(t))^{-1}\xi - (\psi^T(t))^{-1} g(t) = e^{A(t-s)}\xi + \int\limits_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)d\tau.$$

Последнее соотношение выполняется тождественно по ξ и t. Поэтому

$$(\psi^T(t))^{-1} = e^{A(t-s)},\ (\psi^T(t))^{-1} g(t) = -\int\limits_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)d\tau$$

или

$$\psi(t) = e^{-A^T(t-s)} \Leftrightarrow D\psi = -A^T\psi,\ \psi(s) = E,$$

$$g(t) = -\psi^T(t)\int\limits_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)d\tau = -e^{-A(t-s)}\int\limits_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)d\tau =$$

$$= -\int\limits_s^t e^{A(s-\tau)} f(\tau)d\tau.$$

$\Leftarrow$ Если ψ — базисное решение (9.6) и $\psi(s) = E$, то

$$\psi(t) = e^{-A^T(t-s)},\ \psi^T(t) = e^{-A(t-s)},$$

$$D\psi^T(t) = -e^{-A(t-s)} A = -\psi^T(t)A.$$

Для любого решения $x = x(t)$, $x(s) = \xi$, уравнения (9.1) выполняется

$$D\left(\varphi^T(t)x(t) - \int\limits_s^t e^{A(s-\tau)} f(\tau)d\tau\right) = -\psi^T(t)Ax(t) + \psi^T(t)(Ax(t) +$$

$$+ f(t)) - e^{A(s-t)} f(t) = \psi^T(t)f(t) - e^{A(s-t)} f(t) = 0, \qquad \forall t \in I,$$

т.е. форма $l_i x = \psi_i x + g_i$ является предынтегралом (9.1), а совокупность форм $l_i x$ на основании (9.4) дает полный интеграл уравнения (9.1), нормированный при $t = s$. ■

9.3. ПРАВИЛО ДАЛАМБЕРА РАЗРЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СтЛВ

Разрешение уравнения равносильно построению полного интеграла этого уравнения. Один из способов построения полного интеграла указывает *правило Даламбера.*

Для простоты изложения предположим, что матрица A^T имеет n попарно различных действительных характеристических чисел λ_i. Для каждого характеристического числа λ_i определим собственный вектор α_i:

$$\alpha_i^T A = \lambda_i \alpha_i^T. \qquad (9.7)$$

Следствием векторного уравнения (9.1) является скалярное уравнение

$$D\left(\alpha_i^{\mathrm{T}}x\right) = \alpha_i^{\mathrm{T}} Ax + \alpha_i^{\mathrm{T}} f,$$

равносильное на основании (9.7) уравнению

$$D\left(\alpha_i^{\mathrm{T}}x\right) = \lambda_i \left(\alpha_i^{\mathrm{T}} x\right) + \alpha_i^{\mathrm{T}} f.$$

Из этого уравнения находим (см. (3.6))

$$\alpha_i^{\mathrm{T}} x = e^{\lambda_i (t-s)} \alpha_i^{\mathrm{T}} \xi + \int_s^t e^{\lambda_i (t-\tau)} \alpha_i^{\mathrm{T}} f(\tau)d\tau$$

или

$$e^{-\lambda_i (t-s)} \alpha_i^{\mathrm{T}} x - \int_s^t e^{\lambda_i (s-\tau)} \alpha_i^{\mathrm{T}} f(\tau)d\tau = \text{const},$$

т.е. форма $l_i x$, определяемая левой частью последнего соотношения, является предынтегралом уравнения (9.1).

Собственные вектора α_i линейно независимы, поэтому матрица ψ, составленная из столбцов вида $e^{-\lambda_i (t-s)}\alpha_i^{\mathrm{T}}$, невырожденная. Следовательно, предынтегралы $l_i x$ составляют полный интеграл (9.1).

9.4. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ СтЛВ

Рассмотрим уравнение (9.1) на промежутке $I = [s, b]$. Допустим по-прежнему, что f непрерывна на I. Обозначим $x(t, \xi)$ решение уравнения (9.1) с начальным условием

$$x|_{t=s} = \xi.$$

Зависимость решения $x(t, \xi)$ векторного уравнения (9.1) от начального значения ξ изучается по той же схеме, как и зависимость решения скалярного уравнения (см. гл. 6).

Отклонение решения, вызванное возмущением $\Delta\xi$ начального значения ξ, определяется по формуле

$$\rho(t, \Delta\xi) = \| x(t, \xi + \Delta\xi) - x(t, \xi) \|.$$

На основании (8.7)

$$\rho(t, \Delta\xi) = \| e^{A(t-s)}\Delta\xi \|.$$

Решение $x(t, \xi)$ интегрально непрерывно на I. Если $b = +\infty$, то вводятся понятия *устойчивости* и *асимптотической устойчивости*. Для асимптотической устойчивости (9.1) необходимо и достаточно, чтобы действительные части всех характеристических чисел матрицы A были отрицательными, т.е. необходимо и достаточно, чтобы характеристический многочлен матрицы A был гурвицевым.

Неоднородность f не влияет на характер устойчивости уравнения (9.1). Дальше при исследовании на устойчивость уравнение (9.1) заменяем на соответствующее однородное уравнение

$$\mathrm{D}x = Ax. \tag{9.8}$$

9.5. ФОРМА ЛЯПУНОВА

Положительно определенную квадратичную форму $v(x) = x^{\mathrm{T}} Qx$ с симметрической матрицей Q назовем *формой Ляпунова* для однородного уравнения (9.8), если квадратичная форма

$$\dot{v}(x) = x^{\mathrm{T}} (A^{\mathrm{T}} Q + QA) x$$

отрицательно определена. Произвольная положительно определенная квадратичная форма $v(x)$ позволяет задать норму вектора

$$|x|_Q :: = \sqrt{v(x)}.$$

В частности, при $Q = E$ получаем евклидову норму $|x| :: = |x|_E$. Норму $|x|_Q$ будем использовать наряду с октоэдрической нормой $\| x \|$. Из определения норм $\| x \|$ и $|x|_Q$ следует, что

$$0 < \min_{\| x \| = 1} |x|_Q \leqslant \max_{\| x \| = 1} |x|_Q < +\infty,$$

$$0 < \min_{|x|_Q = 1} \| x \| \leqslant \max_{|x|_Q = 1} \| x \| < +\infty,$$

и поэтому существуют постоянные $\alpha = \alpha(Q) > 0$ и $\beta = \beta(Q) > 0$, для которых при $x \neq 0$:

$$0 < \alpha |x|_Q \leqslant \| x \| \leqslant \beta |x|_Q, \quad 0 < \frac{1}{\beta} \| x \| \leqslant |x|_Q \leqslant \frac{1}{\alpha} \| x \|.$$

В определении устойчивости и асимптотической устойчивости отклонение решений уравнения (9.1), а следовательно, и соответствующего однородного уравнения (9.8), вычисленное на основании нормы $\| x \|$, может быть заменено отклонением, построенным по любой из норм $|x|_Q$.

Критерий асимптотической устойчивости. *Для асимптотической устойчивости решений (9.8) необходимо и достаточно существование формы Ляпунова* $v(x)$, *где*

$$v(x) = x^{\mathrm{T}} Qx, \quad Q :: = \int_0^{+\infty} e^{A^{\mathrm{T}} t} e^{At} \, \mathrm{d}t.$$

◇ ⇒ Если решения (9.8) асимптотически устойчивы, то λ (наибольшая из действительных частей характеристических чисел A) отрицательна. Интеграл, определяющий Q, заведомо сходится. Матрица Q симметрическая, так как

$$Q^{\mathrm{T}} = \int_0^{+\infty} \left(e^{A^{\mathrm{T}} t} e^{At}\right)^{\mathrm{T}} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{A^{\mathrm{T}} t} e^{At} \, \mathrm{d}t = Q.$$

Квадратичная форма v положительно определенная, так как матрица e^{At} невырожденная, и поэтому при $x \neq 0$

$$x^{T} Qx = \int_{0}^{+\infty} x^{T} e^{A^{T} t} e^{At} x dt = \int_{0}^{+\infty} (e^{At} x)^{T} (e^{At} x) dt = \int_{0}^{+\infty} | e^{At} x|^{2} dt > 0.$$

Квадратичная форма $\dot{v}(x)$ (производная от $v(x)$ в силу (9.8))

$$\dot{v}(x) = x^{T} \int_{0}^{+\infty} (A^{T} e^{A^{T} t} e^{At} + e^{A^{T} t} e^{At} A) dt \cdot x = x^{T} \int_{0}^{+\infty} D(e^{A^{T} t} e^{At}) dt \cdot x =$$

$$= x^{T} \left[e^{A^{T} t} e^{At} \right]_{t=0}^{t=+\infty} x = -x^{T} x$$

является отрицательно определенной. Следовательно, v — форма Ляпунова.

$\Leftarrow$ Если v — форма Ляпунова, то для любого решения $x = x(t)$ уравнения (9.8) выполняется

$$Dv(x(t)) = D(x^{T}(t) Qx(t)) = x^{T}(t) A^{T} Qx(t) + x^{T}(t) QAx(t) = \dot{v}(x(t)) =$$

$$= -x^{T}(t)\, x(t) = -|x(t)|^{2}.$$

Положительная функция $v(x(t))$ строго убывает вдоль любого ненулевого решения $x(t)$, поэтому имеет предел $v(x(+\infty))$. Следовательно,

$$\int_{0}^{t} Dv(x(\tau)) d\tau = v(x(t)) - v(x(0)) \leqslant - \min_{\sigma > 0} |x(\sigma)|^{2} t,$$

и поэтому

$$-v(x(0)) \leqslant - \min_{\sigma > 0} |x(\sigma)|^{2} t, \quad t \geqslant 0,$$

что возможно лишь при $\min_{\sigma > 0} |x(\sigma)|^{2} = 0$, т.е. $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. ■

9.6. ФАЗОВАЯ ПЛОСКОСТЬ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ СтЛВ-2

На фазовой плоскости Qx_1x_2 решения уравнения

$$Dx = Ax, \quad x \in R^{2} \tag{9.9}$$

изображаются *фазовыми графиками* или *траекториями* $x = x(t)$. В частном случае

$$Dx = Bx, \quad B = \begin{pmatrix} 0, 1 \\ -\delta, \sigma \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} Dx_1 = x_2, \\ Dx_2 = -\delta x_1 + \sigma x_2 \end{cases} \tag{9.10}$$

траектории системы (9.10) в силу соотношения $x_2 = Dx_1$ совпадают с фазовыми графиками уравнения $D^{2}x_1 - \sigma Dx_1 + \delta x_1 = 0$ (см. гл. 4).

Лемма. *Если матрица A отлична от скалярной, т.е. $A \neq \lambda E$, то она подобна матрице*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\det A & \operatorname{tr} A \end{pmatrix}.$$

◇ Матрицы A и B имеют одинаковые следы и определители, а поэтому одинаковые характеристические многочлены и одинаковые спектры $\{\nu_1, \nu_m\}$. При $\nu_1 \neq \nu_2$ совпадение спектров обеспечивает подобие A и B. Если же $\nu_1 = \nu_m$, то матрица B подобна матрице $J_2(\nu_1)$. Если $A \neq \lambda E$, то A также подобна $J_2(\nu_1)$, а значит, подобна и B. ■

На основании леммы и указанной выше связи между системой (9.10) и уравнением СтЛВ-2 расположение траекторий уравнения (9.9) с точностью до аффинного преобразования описано в гл.4.

Общее решение уравнения

$$\mathrm{D}x = \lambda x, \ \lambda \neq 0, \ x \in R^2, \tag{9.11}$$

имеет вид

$$x_1 = C_1 e^{\lambda t}, \ x_2 = C_2 e^{\lambda t}.$$

Траектории системы (9.11) являются либо точкой покоя при $C_1 = C_2 = 0$, либо лучом, примыкающим к точке покоя. Такое расположение траекторий называют *дикритическим узлом* (рис. 15). При $\lambda = 0$ каждая точка фазовой плоскости является точкой покоя для уравнения (9.11).

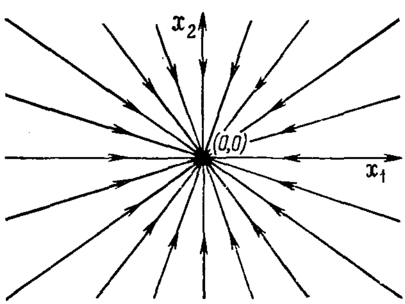

Рис. 15

Основные упражнения

9.1. Используя правило Даламбера, найти общие решения уравнений:

а) $\mathrm{D}x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x$; б) $\mathrm{D}x = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} x$; в) $\mathrm{D}x = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix}$;

г) $\mathrm{D}z = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} e^{it} + e^{-it} \\ e^{it} - e^{-it} \end{pmatrix}$.

9.2. Построить полные интегралы уравнений:

а) $\mathrm{D}x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x$; б) $\mathrm{D}x = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x$; в) $\mathrm{D}z \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{it}$;

$$\text{г) } Dz = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} z.$$

9.3. Исследовать на устойчивость уравнения:

$$\text{а) } Dx = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } Dx = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -12 & 5 & 12 \\ 10 & -3 & -9 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

9.4. Построить общие решения и схемы расположения траекторий уравнений:

$$\text{а) } Dx = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x; \quad \text{б) } Dx = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} x, \ a \in R; \quad \text{в) } Dx = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} x;$$

$$\text{г) } Dx = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x.$$

9.5. Указать с точностью до аффинного преобразования фазовой плоскости схемы расположения траекторий уравнения:

$$\text{а) } Dx = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} x; \quad \text{б) } Dx = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x; \quad \text{в) } Dx = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} x;$$

$$\text{г) } Dx = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x; \quad \text{д) } Dx = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} x.$$

Дополнительные упражнения

9.6. Решить задачи 1262—1282 [1].

9.7. Разобрать задачи 176, 180, 188—190, 192, 194 [2].

9.8. Решение $x(t, \xi)$ однородного уравнения (9.1) называют *частично устойчивым относительно множества* $M \subset R^n$, если
$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \ \forall t \geqslant 0, \ \forall \Delta\xi, \ \xi + \Delta\xi \in M \ \wedge \ \| \Delta\xi \| \leqslant \delta \Rightarrow \rho(t, \Delta\xi) \leqslant \varepsilon$.
Если, кроме того, $\xi + \Delta\xi \in M \Rightarrow \rho(t, \Delta\xi) \to 0$ при $t \to +\infty$, то $x(t, \xi)$ асимптотически частично устойчиво относительно M. Показать, что если решение частично (асимптотически) устойчиво относительно M, то оно частично (асимптотически) устойчиво относительно линейной оболочки $L(M)$ множества M, т. е. относительно множества, составленного из всевозможных линейных комбинаций элементов M с постоянными коэффициентами.

9.9. Указать множества $M_1, M_2 \in R^4$ такие, что решения уравнения

$$Dx = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} x$$

частично устойчивы относительно M_1 и асимптотически устойчивы относительно M_2.

9.10. Описать зависимость от α, $|\alpha| \leqslant 1$, наибольшего множества $M \subset R^2$, относительно которого частично устойчивы решения уравнения

$$Dx = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} x.$$

9.11. Квазиполином вида

$$f(t)=\sum c_l\, e^{i\mu_l t}\quad,\qquad c_l\in R^n\,,$$

называют *квазипериодической векторной функцией с частотным базисом* $\{\mu_l\}_l$. Доказать, что если частотный базис f не содержит характеристических чисел матрицы A, то уравнение (9.1) имеет и притом единственное квазипериодическое решение.

9.12. При каких $c\in R^3$ уравнение

$$\mathrm{Dx}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\mathrm{x}+c\sin t$$

имеет периодическое решение?

9.13. Доказать, что для любой матрицы A, каждому собственному значению которой отвечает лишь один элементарный делитель, существует подобная матрица вида

$$\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdots&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdots&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdots&\cdot\\0&0&0&\cdots&1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\end{bmatrix}.$$

Использовать полученный результат для установления связи между семействами траекторий однородных СтЛВ и семействами фазовых графиков однородных уравнений СтЛ.

9.14. Установить все возможные типы точек покоя уравнения

$$\mathrm{Dx}=(E+A)\mathrm{x},\ \ \mathrm{x}\in R^3$$

в случае, когда $\|A\|\leqslant 0{,}01$.

III. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

10. УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА В НОРМАЛЬНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

10.1. РЕШЕНИЯ И ПУТИ

Решением (в явном виде) уравнения в нормальной дифференциальной форме

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \quad (x, y) \in E \subset R^2, \tag{10.1}$$

называют функцию $y = y(x)$, определенную на промежутке I оси Ox и обращающую уравнение (10.1) в тождество. Аналогично определяют решение $x = x(y)$. Более общим является понятие решения в параметрическом виде.

Функции x и y, заданные на интервале I и обладающие непрерывными производными, которые не обращаются в 0 одновременно, определяют в R^2 *путь* K, т.е. множество помеченных точек $M_t = (x(t), y(t))$. Помеченные точки M_t и M_τ при $t \neq \tau$ считаем различными, даже если они имеют геометрическим образом одну и ту же точку $M = (x, y) = (x(t), y(t)) \in R^2$. Если

$$P(x(t), y(t))\,dx(t) + Q(x(t), y(t))\,dy(t) = 0, \quad \forall t \in I, \tag{10.2}$$

то K — *путь уравнения* (10.1), а пара функций x и y — *решение* (10.1) *в параметрическом виде.*

Пример 10.1. Функции $x = \cos 2t \cdot \cos t$, $y = \cos 2t \cdot \sin t$, $t \in R$, составляют решение в параметрическом виде уравнения

$$x(x^2 - 5y^2)\,dx + y(5x^2 - y^2)\,dy = 0, \tag{10.3}$$

как показывает непосредственная подстановка. Отметим, что соответствующий путь при $t = \pi/4$ или при $t = 3\pi/4$ проходит через (0, 0), но в первом случае *наклон* (угловой коэффициент) касательной к пути равен +1, а во втором случае равен —1 (рис. 16).

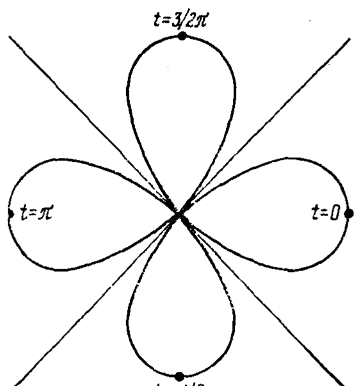

Рис. 16

10.2. ПОЛЕ НАКЛОНОВ

Точка $M = (x, y) \in E$ *особая* для (10.1), если $P(M) = Q(M) = 0$, и *неособая* в противном случае. Определим на E *поле наклонов* (10.1), положив в неособой точке $M = (x,y)$:

$$\varkappa(M) = \begin{cases} -P(M)/Q(M), & Q(M) \neq 0, \\ \infty, & Q(M) = 0. \end{cases}$$

Считаем, что $\varkappa(M_0)$ в особой точке M_0 совпадает с $'R_\infty$. Путь K — *характеристика* поля $\varkappa$, если в каждой точке $M_t \in K$ касательная к K имеет наклон, предписанный полем $\varkappa$. Из тождества

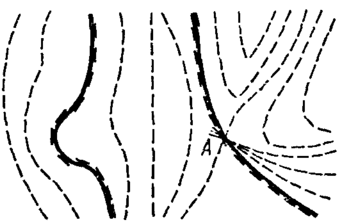

Рис. 17

(10.2) и определения $\varkappa$ следует, что K является путем (10.1) в том и только в том случае, если K — характеристика $\varkappa$. Геометрический смысл этого утверждения пояснен на рис. 17, где штрихи изображают поле наклонов, а сплошные линии — отдельные пути соответствующего уравнения.

10.3. РЕШЕНИЯ В НЕЯВНОЙ ФОРМЕ И ЛИНИИ УРАВНЕНИЯ

Множество $K \subset R^2$ назовем *линией*, если оно является геометрическим образом некоторого пути K. Например, лемниската

$$(x^2 + y^2)^3 - (x^2 - y^2)^2 = 0 \qquad (10.4)$$

является линией, так как представима путем из примера 1 (см. рис. 16).

Линия K — *интегральная кривая* или *линия уравнения* (10.1), если ее можно представить путем уравнения (10.1). Например, лемниската (10.4) — линия уравнения (10.3). Допустим, что на $E_1 \subset E$ определена функция ω. Если соотношение

$$\omega(x, y) = 0 \qquad (10.5)$$

определяет линию или объединение линий уравнения (10.1), то его называют *решением в неявном виде уравнения (10.1)*. Например, соотношение (10.4) является решением в неявном виде уравнения (10.3).

Теорема 1. *Пусть ω непрерывно дифференцируема в области* E_1 и ω'_x с ω'_y *одновременно обращаются в* 0 *только в особых точках* (10.1). *Тогда линия* K, *определяемая соотношением (10.5), является линией уравнения (10.1) в том и только том случае, если*

$$\begin{vmatrix} P(x, y) & Q(x, y) \\ \omega'_x(x, y) & \omega'_y(x, y) \end{vmatrix} = 0, \ \forall(x, y) \subset K. \qquad (10.6)$$

◇ Если K — линия (10.1), представимая путем K, то наряду с (10.2)

$$\omega(x(t), y(t)) = 0, \ \forall t \in I, \Rightarrow \omega'_x(x(t), y(t))\, dx(t) + \omega'_y(x(t), y(t))\, dy(t) = = 0, \forall t. \qquad (10.7)$$

В силу $|dx(t)| + |dy(t)| \neq 0$ из (10.2) и (10.7) следует (10.6). С другой стороны, в неособой точке M, представленной M_t,

$$|\omega'_x(x(t), y(t))| + |\omega'_y(x(t), y(t))| \neq 0,$$

поэтому (см. (10.6)) $P(x, y) = \lambda(x, y)\, \omega'_x(x, y)$, $Q(x, y) = \lambda(x, y)\, \omega'_y(x, y)$ и (10.2) выполняется. Выполнение (10.2) в особых точках очевидно. ■

Начальной задачей со значениями (ξ,η) для уравнения (10.1) называем задачу построения линии (10.1), проходящей через точку $(\xi,\eta) \subset R^2$.

10.4. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ И ОБЩИЙ ИНТЕГРАЛ

Численный параметр, принимающий произвольные значения из множества $\Gamma \subset R$, обозначим C. Соотношения

1) $y = Y(x, C)$; 2) $x = X(t, C)$, $y = Y(t, C)$; 3) $\Phi(x, y, C) = 0$

назовем соответственно *общим решением (ОР), ОР в параметрическом и ОР в неявном виде*, если при любых $C \in \Gamma$ они доставляют решения (10.1) соответствующего вида. ОР при конкретных $C = C_0$ дает *частные решения*. Совокупность всех решений (10.1) некоторого вида дает *полное решение* (ПР).

Функция $\Omega(x, y)$, $(x, y) \in E_1 \subset E$ — *интеграл уравнения* (10.1) на E_1, если она сохраняет постоянное значение вдоль любой линии (10.1) из E_1. Если при любом $C \in \Gamma$ соотношение $\Omega(x, y) = C$ дает решение (10.1) в неявном виде, то оно — *общий интеграл* (ОИ). При $C = C_0$ общий интеграл приводит к *частному интегралу* $\Omega(x, y) = C_0$, $C_0 \in \Gamma$.

Если график решения $y = y(x)$ уравнения (10.1) не проходит через точку, где Q равно 0, то y является решением и уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}.$$

10.5. ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА ЛИНИЙ

В пространстве $Oxyz$ рассмотрим область G, проекция которой на Oz содержит промежуток Г. Допустим, что $\Phi(x, y, z)$ непрерывно дифференцируема по (x, y) при каждом $C \in \Gamma$ и что соотношение

$$\Phi(x, y, C) = 0, \ \forall C \in \Gamma \tag{10.8}$$

определяет на Oxy одну или несколько линий К, совокупность которых обозначим K_C. Множество всех К, входящих в K_C при всех $C \in \Gamma$, обозначим K_Γ. Поточечное объединение К из K_Γ обозначим E. Совокупность линий К из K_Γ назовем *семейством линий на E*.

Возьмем любое представление K линии $K \in K_\Gamma$. Дифференцируя тождество $\Phi(x(t), y(t), C) = 0$, $\forall t \in I$, по t, получим тождество

$$\Phi'_x(x(t), y(t), C)\, dx(t) + \Phi'_y(x(t), y(t), C)\, dy(t) = 0, \ \forall t \in I.$$

Два последних тождества выполняются поточечно, поэтому их можно заменить системой

$$\left.\begin{array}{l} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_x(x, y, C)\, dx + \Phi'_y(x, y, C)\, dy = 0, \\ \qquad (x, y) \in K. \end{array}\right\}$$

Допустим, что здесь можно исключить C (выразив, например, C из первого уравнения через x и y и подставив это выражение во второе уравнение). Тогда придем к соотношению (10.1), т.е. к уравнению первого порядка в нормальной дифференциальной форме. Полученное уравнение (10.1) задает K_Γ. В отличие от задания (10.8), где при каждом C охвачены лишь линии из K_C, задание (10.1) описывает сразу все K_Γ.

Пример 10.2. Для семейства кубических парабол $(x - C)^3 - y = 0$ на Oxy по указанной схеме получим

$$\begin{cases} (x - C)^3 - y = 0, \\ 3(x - C)^2\, dx - dy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - C = y^{\frac{1}{3}}, \\ 3y^{\frac{2}{3}}\, dx - dy = 0. \end{cases}$$

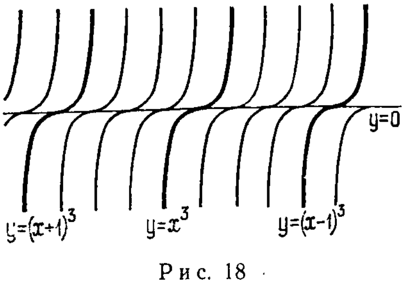

Рис. 18

Отметим, однако, что соотношение (10.8), задавая общее решение (10.1) в неявной форме, может иметь и дополнительные решения, не являющиеся частными для данного общего решения. Например, уравнение в примере 10.2, кроме кубических парабол, имеет линией и прямую $y = 0$ (рис. 18). В связи с этим возникает необходимость детального изучения структуры полного решения уравнения (10.1).

10.6. КЛАССИФИКАЦИЯ ФАЗОВЫХ ТОЧЕК

Множество E называют *фазовым множеством* уравнения (10.1), а его точки — *фазовыми точками* (10.1). Фазовые точки разделяются на особые и неособые непосредственно по виду коэффициентов P и Q. Более глубокая классификация фазовых точек основана на свойствах решений (10.1).

Если через $M = (x, y)$ проходит хотя бы одна линия (10.1), то M — есть *точка существования*, в противном случае — *точка несуществования*. Разрешение начальной задачи со значениями (x, y) равносильно тому, что M — точка существования (10.1). Дальше в этом пункте речь идет только о точках существования (10.1).

M — *точка единственности (глобальной единственности)* для (10.1), если существует линия K этого уравнения, проходящая через M и такая, что все остальные линии уравнения, проходящие через M, являются подмножествами K. В противном случае M — *точка неединственности* (*глобальной неединственности*).

M — *точка локальной единственности*, если существуют окрестность $u \subset E$ точки M и линия K' уравнения (10.1) такие, что любая линия K^*, $M \in K^* \subset u$ этого уравнения является подмножеством K'. В противном случае M — *точка локальной неединственности*. Если M — точка локальной единственности, то начальная задача со значениями (x, y) для (10.1) локально однозначно разрешима. *Теоремами об однозначной разрешимости* (ТОР) называем теоремы о локальной однозначной разрешимости задачи Коши.

M — *точка ветвления*, если существуют две линии (10.1), проходящие через M с общей касательной, отличные друг от друга в любой окрестности точки. Каждая точка ветвления является точкой локальной неединственности и тем более точкой глобальной неединственности.

10.7. УРАВНЕНИЕ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Уравнение (10.1), заданное в односвязной области E, называют *уравнением в полных дифференциалах* (УПД), если на E существует дифференцируемая функция $\Omega(x, y)$ такая, что

$$d\Omega(x, y) = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy, \quad \forall (x, y) \in E. \qquad (10.9)$$

УПД (10.1) равносильно уравнению $d\Omega(x, y) = 0$.

Теорема 2. *Полным решением УПД (1) является общий интеграл*

$$\Omega(x, y) = C, \qquad (10.10)$$

где C принимает значения, при которых (10.10) определяет линии в E. Решение начальной задачи со значениями (ξ, η) имеет вид

$$\Omega(x, y) = \Omega(\xi, \eta).$$

◇ Если K — путь в E, то

$$d\Omega(x(t),\ y(t)) = 0,\ \forall t \in I \Leftrightarrow \Omega(x(t),\ y(t)) = C_0,\ \forall t \in I,$$

поэтому K будет линией УПД (10.1) в том и только том случае, если K удовлетворяет соотношению (10.10) при некотором $C = C_0$, причем $(\xi, \eta) \in K \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Omega(\xi, \eta) = C_0$. ■

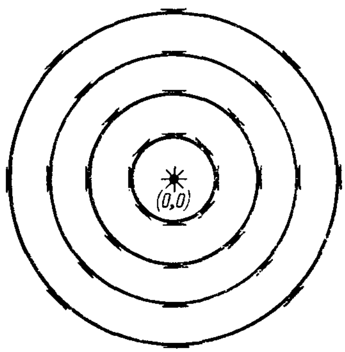

Рис. 19

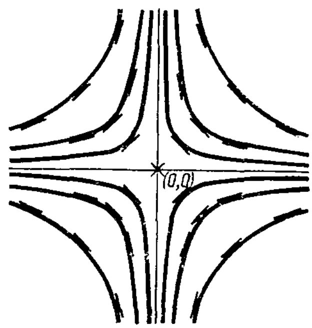

Рис. 20

Пример 10.3. ПР уравнения $xdx + ydy = 0$ дает ОИ $x^2 + y^2 = C$. Особая точка $(0, 0)$ — точка несуществования. Во всех неособых точках — существование и единственность. На рис. 19 изображены линии уравнения (концентрические окружности) и поле наклонов.

Пример 10.4. ПР уравнения $ydx + xdy = 0$ дает ОИ $xy = C$. В особой точке $(0, 0)$ неединственность, но не ветвление (рис. 20).

Пример 10.5. ПР уравнения $2xydx + (x^2 - 2y)\,dy = 0$ дает ОИ $y(x^2 - y) = C$. В особой точке $(0,0)$ ветвление, так как через нее проходят две линии уравнения (прямая $y = 0$ и парабола $y = x^2$ (рис. 21)).

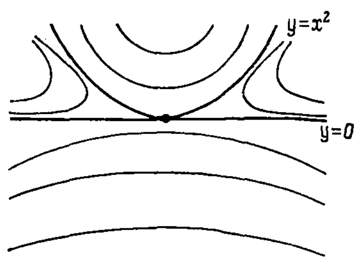

Рис. 21

ТОР для УПД. *Если (ξ, η) — неособая фазовая точка УПД (10.1), то начальная задача со значениями (ξ, η) локально однозначно разрешима.*

◇ На основании теоремы 2 однозначная разрешимость начальной задачи равносильна единственности дифференцируемой функции, определяемой соотношением $\Omega(x,y) = \Omega(\xi, \eta)$. Точка (ξ, η) неособая, поэтому

$$|\Omega_x'(\xi, \eta)| + |\Omega_y'(\xi, \eta)| = |P(\xi, \eta)| + |Q(\xi, \eta)| \neq 0$$

и по теореме о неявной функции существует либо линия $y = y(x)$, $x \in I_x$, либо линия $x = x(y)$, $y \in I_y$, вдоль которых $\Omega(x,y) = \Omega(\xi, \eta)$, причем графики всех остальных дифференцируемых функций, удовлетворяющих этому соотношению в некоторой окрестности (ξ, η), лежат на указанных линиях. ■

10.8. РАЗРЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Теорема 3. *Если P и Q непрерывно дифференцируемы в односвязной области E, то (10.1) является УПД тогда и только тогда, когда*

$$P_y'(x, y) = Q_x'(x, y), \ \forall (x, y) \in E. \tag{10.11}$$

При выполнении (10.11) общий интеграл (10.1) имеет вид

$$\Omega(x,y) :: = \int_{(\xi,\eta)}^{(x,y)} P(\tau, \sigma)\, d\tau + Q(\tau, \sigma)\, d\sigma = C, \tag{10.12}$$

где криволинейный интеграл взят по любому пути из E, соединяющему фиксированную точку (ξ, η) и точку (x, y), а C принимает значения, при которых соотношение (10.12) определяет линии в E.

◇ Выполнение (10.11) по теореме о криволинейном интеграле второго рода необходимо и достаточно для того, чтобы интеграл из (10.12) определялся однозначно и чтобы функция $\Omega(x,y)$ была первообразной для дифференциального выражения $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$, т.е. удовлетворяла тождеству (10.9), а значит (см. теорему 2), давала ОИ УПД (10.1). ■

Следствие ТОР и теоремы 3. Если на односвязной области E нет особых точек (10.1) и выполнено (10.11), то ПР (10.1) имеет вид (10.12).

Пример 10.6. Для уравнения $(2xy - \cos x)\,dx + (x^2 + 1)\,dy = 0$ условие (10.11) выполнено, так как $P_y' = Q_x' = 2x$. Поэтому ПР можно представить в виде ОИ (10.12) Покажем и другое правило построения интеграла Ω. Из тождества $\Omega_x' = P(x, y) = 2xy - \cos x$, $\forall (x, y) \in R^2$, следует, что $\Omega(x,y) = x^2y - \sin x + \gamma(y)$, где γ — дифференцируемая функция, определяемая с точностью до постоянного слагаемого. Далее

$$\Omega_y' = x^2 + \gamma'(y) = Q(x,y) = x^2 + 1 \Rightarrow \gamma'(y) = 1 \Rightarrow \gamma(y) = y$$

и ОИ имеет вид $x^2y - \sin x + y = C$. Коэффициент Q везде отличен от 0, поэтому ОИ дает ПР.

10.9. НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Рассмотрим уравнение (10.1) при выполнении (10.11) на односвязной области E. Поставим начальную задачу со значениями $(\xi, \eta) \in E$.

Положим $x = \xi$, $y = \eta$ в (10.12) и получим $C = 0$. Следовательно, решение (в неявном виде) начальной задачи определяется формулой

$$\int_{(\xi,\eta)}^{(x,y)} P(\tau, \sigma)\, d\tau + Q(\tau, \sigma)\, d\sigma = 0.$$

Если E вместе с (ξ,η) и (x, y) содержит отрезки $(\xi \leqslant r \leqslant x, y)$ и $(x, \eta \leqslant \sigma \leqslant y)$, то решение начальной задачи можно представить в виде

$$\int_{\xi}^{x} P(\tau, \eta) d\tau + \int_{\eta}^{y} Q(x, \sigma)\, d\sigma = 0.$$

Пример 10.7. Начальная задача со значениями (0;1) для уравнения

$$2xy^3\, dx + (5y^4 + 3x^2y^2 + 1) dy = 0$$

имеет решение

$$\int_0^x 2\tau d\tau + \int_1^y (5\sigma^4 + 3x^2\sigma^2 + 1) d\sigma = 0 \Rightarrow y^5 + x^2y^3 + y - 2 = 0.$$

10.10. УРАВНЕНИЕ С РАЗДЕЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

В уравнении (10.1) переменные разделены, если оно имеет вид

$$P(x)\, dx + Q(y)\, dy = 0, \; E = I_x \times I_y,$$

где P и Q непрерывны соответственно на I_x и I_y. Условие (10.11) для уравнения с разделенными переменными выполнено, так как

$$P'_y(x, y) = Q'_x(x,y) = 0, \; \forall (x,y) \in E,$$

ПР дает соотношение $((\xi,\eta) \in E)$

$$\int_{\xi}^{x} P(\tau)\, d\tau + \int_{\eta}^{y} Q(\sigma)\, d\sigma = C.$$

Пример 10.8. ПР уравнения $2xdx + 3y^2dy = 0$ дает ОИ $x^2 + y^3 = C$.

Основные упражнения

10.1. Составить дифференциальные уравнения семейств кривых в задачах 62—64, 126, 162,163 [1].

10.2. Решить уравнения в полных дифференциалах в задачах 339—345, 350—352 [1].

10.3. Решить уравнения 138—140 [1] и произвести классификацию фазовых точек.

Дополнительные упражнения

10.4. *Линейным элементом* пути K, отвечающим значению параметра t, называют тройку

$$\lambda(t) ::= (x(t),\ y(t),\ \varkappa(t)) \in R^2 \times R_\infty.$$

Построить пример линии К с представлениями K и K^* такими, что множества $\{\lambda(t)\}_{t\in I}$ и $\{\lambda^*(t)\}_{t\in I^*}$ не совпадают.

10.5. Построить уравнение первого порядка в нормальной дифференциальной форме (с разрывными коэффициентами), обладающее линией К, одно из представлений которой (K) обращает, а другое (K^*) не обращает данное уравнение в тождество.

10.6. Показать, что уравнение $2xydx - (x^2 - y^2)\,dy = 0$ имеет общее решение $x^2 + (y - C)^2 = C^2$ и что у этого уравнения нет продолженных линий, т.е. каждая линия уравнения может быть существенно продолжена.

10.7. Составить дифференциальные уравнения семейств линий 22—34 [3].

10.8. Решить уравнения 350—353 [1].

10.9. Построить ОР и определить фазовые множества уравнений 192—194 [3].

10.10. Решить начальные задачи 346—349 [1].

10.11. Решить и исследовать задачи 177—180 [1].

10.12. Общий интеграл Ω уравнения (10.1) называют *алгебраическим*, если Ω является полиномом от x и y. Найти алгебраический общий интеграл уравнений 181 [1].

10.13. Рассмотреть задачи 23, 24, 25, 31, 38 [2].

10.14. Классифицировать фазовые точки уравнений:

а) $(x^2 - 1)\,dx + y^2dy = 0$; б) $\sin xdx + ydy = 0$.

10.15. Классифицировать фазовые точки уравнений:

а) $x^{2/3}\,dx + \sin ydy = 0$; б) $\cos^{1/2} x \sin xdx + \cos ydy = 0$.

11. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

11.1. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Интегрированием в теории уравнений называют построение интегралов, т. е. разрешение уравнений, придавая этому термину более широкий смысл, чем в дифференциальном и интегральном исчислении. Отыскание первообразной в теории уравнений называют *квадратурой*.

Уравнение интегрируемо в конечном виде, если ПР можно получить с помощью конечного числа элементарных операций над функциями, задающими уравнение (например, СтЛ с квазиполиномиальной неоднородностью). *Уравнение интегрируемо в квадратурах*, если ПР строится конечным числом элементарных операций и квадратур (например, СтЛ, УПД). Уравнение элементарно, если ПР можно получить, используя конечное число элементарных операций, квадратур, дифференцирований и разрешения аналитических соотношений. Среди элементарных уравнений выделяют некоторые стандартные уравнения с известными ПР. При исследовании конкретного уравнения пытаются прежде всего привести его к некоторому стандартному уравнению. Если это возможно, то искомое ПР строят на основе известного ПР стандартного уравнения.

11.2. ФОРМАЛЬНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ

Преобразование уравнения связано с появлением посторонних решений и с потерей истинных решений. Детальный анализ использованного преобразования позволяет в принципе установить нарушения в ПР. Такой анализ, однако, может оказаться громоздким. Кроме того, в некоторых случаях удается определить ОР, и тогда встает задача непосредственного пополнения найденного соотношения потерянными решениями и устранения посторонних решений.

Разрешение уравнения распадается на два этапа: построение ОР и корректировка ОР. Стремясь упростить первый, наиболее трудный, этап, прибегают к формальному интегрированию. Оно состоит в выполнении операций без учета областей, где эти операции фактически определены. После того как с помощью формального интегрирования построено выражение, которое при соответствующих условиях может оказаться ОР, на втором этапе с помощью приемов, указанных в гл. 12, проводят анализ построенного выражения. Дальше в этом разделе ограничиваемся, как правило, формальным интегрированием уравнений. Отметим, что при соответствующем расширении понятия функции формальное ОР позволяет получить существенную информацию о решениях уравнения вне области существования (в обычном смысле) выражения, составляющего формальное ОР.

11.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ

Основным преобразованием уравнения

$$P(\mathrm{x},\ \mathrm{y})\,\mathrm{dx}+Q(\mathrm{x},\ \mathrm{y})\,\mathrm{dy}=0,\quad (\mathrm{x},\ \mathrm{y})\in E, \tag{11.1}$$

сохраняющим нормальную дифференциальную форму, является умножение на $\mu(\mathrm{x},\ \mathrm{y})$, $(\mathrm{x},\ \mathrm{y})\in E$, т. е. привидение (11.1) к виду

$$\mu(\mathrm{x},\ \mathrm{y})\,P(\mathrm{x},\ \mathrm{y})\,\mathrm{dx}+\mu(\mathrm{x},\ \mathrm{y})\,Q(\mathrm{x},\ \mathrm{y})\,\mathrm{dy}=0,\quad (\mathrm{x},\ \mathrm{y})\in E. \tag{11.2}$$

Если μ непрерывно на E, то каждый интеграл (11.1) будет интегралом и (11.2). Если, кроме того, μ не обращается в 0 на E, то ПР (11.1) и ПР (11.2) совпадают. Если $\mu(\mathrm{x},\ \mathrm{y})=0$ для $(\mathrm{x},\ \mathrm{y})\in \mathrm{L}$, то (11.2) сравнительно с (11.1) может иметь дополнительные линии K, лежащие в L, а также составные линии (см. гл. 13).

Пример 11.1. ПР уравнения $\mathrm{xydx}+\mathrm{y}^2\mathrm{dy}=0$, кроме окружностей (см. пример 10.3), имеет интегральную прямую $\mathrm{y}=0$, включающую, в частности, точку (0, 0).

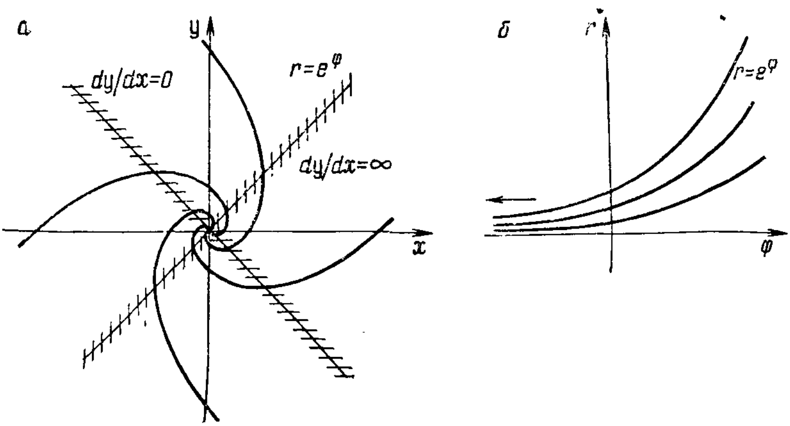

Рис. 22

Допустим, что μ обращается в ∞ или не определено на $B \subset E$. Тогда при переходе от (11.1) к (11.2) могут быть потеряны линии (11.1), как это происходит с интегральной прямой $y = 0$ при переходе от $xydx + y^2dy = 0$ к $xdx + ydy = 0$ (см. пример 11.1).

11.4. УРАВНЕНИЕ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Уравнение с разделяющимися переменными имеет вид

$$P_1(x)\, P_2(y)\, dx + Q_1(x)\, Q_2(y)\, dy = 0. \tag{11.3}$$

Если умножить (11.3) на

$$\mu(x, y) = (P_2(y)\, Q_1(x))^{-1}, \tag{11.4}$$

то придем к уравнению с разделенными переменными

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\, dx + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\, dy = 0,$$

общий интеграл которого по § 10.10 имеет вид

$$\int\limits_{\xi}^{x} \frac{P_1(\tau)}{Q_1(\tau)}\, d\tau + \int\limits_{\eta}^{y} \frac{Q_2(\sigma)}{P_2(\sigma)}\, d\sigma = C.$$

Найденный интеграл является формальным, так как не была обеспечена выполнимость использованных операций, и поэтому осталась невыясненной взаимосвязь ПР (11.3) и ПР преобразованного уравнения с разделенными переменными.

Пример 11.2. Уравнение $2ydx - \dfrac{dy}{x} = 0$ после разделения переменных переходит в уравнение $2x dx - \frac{dy}{y} = 0$ с общим интегралом $x^2 - \ln|y| = C$, причем теряется решение $y = 0$.

11.5. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

Функция $\mu(x, y)$, заданная на открытом множестве $E_1 \subset E$ и отличная от тождественного нуля, называется *интегрирующим множителем* для (11.1), если уравнение (11.2) оказывается УПД на E_1. Например, функция (11.4) — интегрирующий множитель для уравнения с разделяющимися переменными (11.3). Далее считаем, что коэффициенты P и Q уравнения (11.1) непрерывно дифференцируемы на области E.

Теорема 1. *Функция $\mu(x, y)$, непрерывно дифференцируемая и отличная от 0 на односвязной области $E_1 \subset E$, будет интегрирующим множителем (11.1) в том и только том случае, если*

$$\frac{\partial \ln|\mu|}{\partial y} P - \frac{\partial \ln|\mu|}{\partial x} Q = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \forall (x, y) \in E_1. \tag{11.5}$$

◇ Функция μ — интегрирующий множитель тогда и только тогда, когда на E_1 выполнено условие Эйлера (см. теорему 3 из гл. 10) для (11.2)

$$(\mu P)'_y = (\mu Q)'_x \Leftrightarrow P\mu'_y - Q\mu'_x = \mu(Q'_x - P'_y),$$

что равносильно (11.5), так как $\mu \neq 0$ на E_1. ■

Теорема 1 позволяет выделить случаи, когда (11.1) имеет интегрирующий множитель заданной структуры. Например, при $Q \neq 0$ уравнение (11.1) имеет интегрирующий множитель вида $\mu = \mu(x)$ в том и только том случае, если функция $(Q'_x - P'_y)/Q$ не зависит от y.

Теорема 2. *Пусть μ и λ — интегрирующие множители уравнения (11.1) на области E_1 и $(\xi, \eta) \in E_1$ — неособая точка (11.2). Тогда существует окрестность U точки (ξ, η), на которой*

$$\lambda(x, y) = \varphi(\Omega(x, y))\,\mu(x, y), \tag{11.6}$$

где φ непрерывно дифференцируема в окрестности значения $\Omega_0 = \Omega(\xi, \eta)$.

◇ Из тождеств $\mu P dx + \mu Q dy = d\Omega$, $\lambda P dx + \lambda Q dy = d\Pi$ на E_1 следует тождество для якобиана

$$\frac{D(\Omega, \Pi)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \Omega'_x & \Omega'_y \\ \Pi'_x & \Pi'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu P & \mu Q \\ \lambda P & \lambda Q \end{vmatrix} = 0, \ \forall (x, y) \in E_1.$$

Кроме того, $|\Omega'_x| + |\Omega'_y| = |\mu P| + |\mu Q| \neq 0$ при $(x, y) = (\xi, \eta)$, поэтому на основании теоремы о зависимости функций из курса математического анализа существуют окрестность U точки (ξ, η) и непрерывно дифференцируемая функция Φ такие, что

$$\Pi(x, y) = \Phi(\Omega(x, y)), \ (x, y) \in U,$$

и для всех (x, y) из U выполняется

$$d\Pi = \Phi'(\Omega)\,d\Omega = \Phi'(\Omega)(\mu P dx + \mu Q dy) = (\Phi'\mu) P dx + (\Phi'\mu) Q dy = \lambda P dx + \lambda Q dy.$$

Если положить $\varphi(\Omega) = \Phi'(\Omega)$, то получим (11.6). ■

Следствие. Пусть μ и λ — интегрирующие множители уравнения (11.1) на области E, причем μ не обращается в 0. Если отношение λ/μ отлично от постоянной в любой окрестности неособой точки $(\xi, \eta) \in E$, то $\lambda/\mu = C$ — общий интеграл (11.1) на некоторой окрестности E_1 точки (ξ, η).

Действительно, из соотношения (11.6) следует, что

$$\lambda(x, y)/\mu(x, y) = \varphi(\Omega(x, y)), \ (x, y) \in E_1.$$

Функция $\Omega(x, y)$, а следовательно, и сложная функция $\varphi(\Omega(x, y))$ постоянны вдоль решений уравнения (11.1), т. е. $\lambda/\mu = \varphi(\Omega(x, y))$ — интеграл уравнения (11.1) на E.

11.6. ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ 1-ГО ПОРЯДКА

Линейное уравнение 1-го порядка относительно y в дифференциальной форме имеет вид (ср. (3.3))

$$(p(x)y + q(x))\,dx + r(x)\,dy = 0, \ x \in I. \tag{11.7}$$

Коэффициенты p и q считаем непрерывными, а r — непрерывно дифференцируемым на промежутке I, причем r отличен от 0 везде, кроме точек совокупности $\{x_k\}$, $x_k < x_{k+1}$. Интегрирующий множитель μ для (11.7) ищем в виде $\mu = \mu(x)$. Тогда на основании тождества (11.5)

$$x_k < x < x_{k+1}, \ \frac{d \ln \mu(x)}{dx} r(x) = r'(x) - p(x).$$

Отсюда определяем одно из возможных значений для μ:

$$\mu(x) = \frac{1}{r(x)} e^{\int_a^x \frac{p(t)}{r(t)} dt}, \ x_k < a < x_{k+1}, \ x_k < x < x_{k+1},$$

и поэтому

$$ye^{\int_a^x \frac{p(t)}{r(t)} dt} + \int_a^x \frac{q(t)}{r(t)} e^{\int_a^t \frac{p(\sigma)}{r(\sigma)} d\sigma} dt = C. \tag{11.8}$$

Возможность сопряжения найденных линий уравнения (11.1) через интегральные прямые $x = \xi$, $r(\xi) = 0$ зависит от сходимости и значений интегралов из формулы (11.8) при $x \to \xi - 0$ и $x \to \xi + 0$.

11.7. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ

Важным классом преобразований уравнения (11.1), сохраняющим нормальную дифференциальную форму, является замена переменных

$$x = x(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad y = y(x, y), \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{E}, \tag{11.9}$$

причем функции x и y непрерывно дифференцируемы на области $\tilde{E}$.

Биекция области $\tilde{E}$ на множество E называется *диффеоморфизмом*, если

$$\frac{D(x, y)}{D(\tilde{x}, \tilde{y})} \neq 0, \quad \forall (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{E}.$$

Если отображение (11.9) — диффеоморфизм, то: 1) E — область; 2) существует обратное отображение, являющееся диффеоморфизмом E на $\tilde{E}$; 3) линии в $\tilde{E}$ переходят в линии в E, и наоборот; 4) угол между пересекающимися или касающимися линиями сохраняется.

При диффеоморфизме (11.9) каждая линия уравнения

$$\tilde{P}(\tilde{x}, \tilde{y})\, d\tilde{x} + \tilde{Q}(\tilde{x}, \tilde{y})\, d\tilde{y} = 0, \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{E} \tag{11.10}$$

переходит в линию уравнения (11.1), и наоборот, т. е. ПР (11.1) = ПР (11.10), и поэтому оба уравнения равносильны.

Допустим теперь, что образом $\tilde{E}$ при отображении (11.9) является не все множество E, но лишь его часть E^*, причем диффеоморфизм имеет место только между областями $\tilde{E}_1 \subset \tilde{E}$ и $E_1 \subset E^* \subset E$. Тогда для построения ПР (11.1) на основе ПР (11.10) следует: 1) перевести линии (11.10), попадающие в $\tilde{E}_1$ с помощью отображения, обратного для (11.9), в линии (11.1), расположенные в E_1; 2) выделить в $\tilde{E} \setminus \tilde{E}_1$ те линии, которые являются прообразами линий уравнения (11.1), и построить соответствующие линии уравнения (11.1); 3) найти линии уравнения (11.1), расположенные в $E \setminus E_1$; 4) отправляясь от найденных линий уравнения (11.1), построить всевозможные гладкие сопряжения этих линий.

Отметим, что во многих случаях множества $\tilde{E} \setminus \tilde{E}_1$ и $E \setminus E_1$ представляют собой линии или совокупности линий с известным или легко конструируемым аналитическим заданием, что существенно упрощает проведение второй и третьей операций.

11.8. ПОЛЯРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Соответствие $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ между плоскостью Oxy и полярной полуплоскостью $O\varphi r$, $r > 0$ не является диффеоморфизмом, так как нарушена однозначность обратного преобразования, но обладает свойствами локального диффеоморфизма в том смысле, что при любом $r > 0$ у точки (φ, r) есть окрестность, на которой полярное соответствие — диффеоморфизм. Линия $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $t \in I$, на полуплоскости $O\varphi r$ переходит в линию $x = x(t) :: = r(t)\cos\varphi(t)$, $y = y(t) :: = r(t)\sin\varphi(t)$, $t \in I$ на Oxy. Наоборот, линия на Oxy, не проходящая через O, переходит в линию на $O\varphi r$. Линии на $O\varphi r$, касающиеся друг друга, переходят в касающиеся линии. Справедливо и обратное при $r > 0$. Таким образом, линии уравнения в полярных координатах переходят в линии исходного уравнения (11.1).

Пример 11.3. Уравнение

$$(x + y)\, dx + (y - x)\, dy = 0 \tag{11.11}$$

в полярных координатах имеет вид

$$r(-r d\varphi + dr) = 0. \qquad (11.12)$$

Уравнение (11.12) имеет решение $r = 0$, прообразом которого служит начало координат на Oxy. Все решения исходного уравнения (11.11) в полярных координатах получаются из решений уравнения $-r d\varphi + dr = 0$ и имеют вид $\ln r = \varphi + C_1 = \varphi + \ln C$ или $r = Ce^{\varphi}$. Линии уравнения (11.11) изображены на рис. 22,*а*, уравнения (11.12) — на рис. 22,*б*.

11.9. УРАВНЕНИЯ, ПРЕОБРАЗУЕМЫЕ К Л-1

Уравнение (11.1) называют *однородным*, если оба его коэффициента являются однородными функциями одной и той же степени $\varkappa$, т. е.

$$P(zx,\ zy) = z^{\varkappa} P(x,\ y),\ Q(zx,\ zy) = z^{\varkappa} Q(x,\ y),\ \forall (x,\ y),\ (zx,\ zy) \in E.$$

Подстановка $y = ux$, $dy = x du + u dx$ переводит однородное уравнение (11.1) в уравнение

$$(P(1,\ u) + u \cdot Q(1,\ u))\, dx + x Q(1,\ u)\, du = 0,$$

линейное относительно x. ОР однородного уравнения получается с помощью формулы (11.8) при $x := u$, $y := x$ с учетом преобразования $y = ux$.

Уравнение первого порядка

$$(p(x)\, y + q(x)\, y^m)\, dx + r(x)\, dy = 0$$

называют *уравнением Бернулли*. При $m = 1$ это уравнение является линейным (однородным) относительно y. Если $m \neq 1$, то это уравнение с помощью подстановки $u = y^{1-m}$ переходит в Л-1 относительно u, что позволяет построить его ОР с помощью квадратур.

Основные упражнения

11.1. Найти ОР уравнений 138, 139, 144—147 [1].
11.2. Решить начальные задачи 148—151 [1].
11.3. Составить схемы расположения линий уравнений 153—156 [1].
11.4. Найти ОИ уравнений 354—362 [1].
11.5. Найти ПР уравнений 246—248 [1].
11.6. Решить начальные задачи 254—256 [1].
11.7. Построить ОР уравнений 182—187 [1].
11.8. Решить начальные задачи 195—198 [1].
11.9. Решить задачи 290—293 [1].

Дополнительные упражнения

11.10. Решить задачи 177—179 [1].
11.11. Построить ОИ уравнений 366—370 [1].
11.12. Исследовать задачи 264—267, 283, 284 [1].
11.13. Решить задачи 224—227 [1].
11.14. Уравнение (11.1) называют *обобщенно-однородным*, если существует постоянное k такое, что выражение $P(x,\ y)\, u + Q(x,\ y)\, v$ является однородной функцией от x, y, u, v *при условии*, что размерности x, y, u, v равны соответственно 1, k, 0, $k - 1$. Показать, что обобщенно-однородное уравнение подстановкой $y = zx^k$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными x и z.
11.15. Построить ОР уравнений 235—238 [1].
11.16. Решить задачи 298—301 [1].

11.17. Уравнение

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy + R(x, y)(x\,dy - y\,dx) = 0$$

называют *уравнением Дарбу*, если P и Q — однородные функции степени l, а R — однородная функция степени m ($m \neq l - 1$). Показать, что подстановка $y = zx$ переводит уравнение Дарбу в уравнение Бернулли относительно z с аргументом x.

11.18. Найти ОР уравнений 303—306 [1].

11.19. Исследовать задачи 69, 70 [3].

11.20. Решить задачи 182—185 [3].

11.21. Решить задачу 134 [3 .

12. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА В НОРМАЛЬНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

12.1. ПОБОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Допустим, что в результате формальных действий над уравнением

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \quad (x, y) \in E \tag{12.1}$$

получено соотношение

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{12.2}$$

которое предположительно описывает ОР (12.1). Корректировка этого соотношения состоит в исключении *побочных решений*, т. е. решений (12.2), не являющихся решениями (12.1), и в восстановлении потерянных решений с тем, чтобы на E или на некотором подмножестве E получить ПР уравнения (12.1). Первая операция описывается в настоящем параграфе. Вторая состоит из нескольких этапов, которым посвящены последующие параграфы.

Пусть E_Φ — проекция множества задания $G \subset Oxyz$ функции $\Phi(x, y, z)$ на плоскость Oxy, K_Φ — множество линий, определяемых соотношением (12.2) при всевозможных допустимых значениях параметра C. Линии (12.2), расположенные хотя бы частично вне множества $E_1 = E_\Phi \cap E$, отвечают побочным решениям

Пример 12.1. Соотношение $x^2 + y^2 = C > 0$ задает не только полуокружности $x^2 + y^2 = C > 0$, $y > 0$, являющиеся истинными решениями уравнения $(x/\sqrt{y})\,dx + \sqrt{y}\,dy = 0$, но и побочные решения — полные окружности $x^2 + y^2 = C > 0$.

Побочные решения, отвечающие линиям, расположенным в E_1, исключаются на основании теоремы 1 из гл. 10. Действительно, если предположить, что Φ непрерывно дифференцируема по (x, y), то (см. (10.6)) решение (12.2) при $C = C_0$ является решением (10.1), если одновременно

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C_0) = 0 \\ \begin{vmatrix} P(x, y), & Q(x, y) \\ \Phi'_x(x, y, C_0), & \Phi'_y(x, y, C_0) \end{vmatrix} = 0. \end{cases} \tag{12.3}$$

Линии, которые удовлетворяют первому из соотношений (12.3), но не удовлетворяют второму, — побочные решения.

Пример 12.2. Допустим, что при формальном интегрировании уравнения $dx + dy/(2y) = 0$, $y > 0$, проведены операции

$$\int dx + \int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = C \Rightarrow x + \sqrt{y} = C \Rightarrow y = (C - x)^2.$$

Для исследования соотношения $y = (C - x)^2$ составляем систему (12.3)

$$y - (C - x)^2 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \\ 2(C - x) & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{C - x}{\sqrt{y}} = 0,$$

из которой получаем, что $\sqrt{y} = x - C$ — побочное решение.

12.2. ДООПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ

Допустим, что в результате формального преобразования соотношения (12.2) получено соотношение

$$\Phi_1(x, y, \gamma) = 0, \tag{12.4}$$

где γ — новая произвольная постоянная. Может случиться, что при формальном интегрировании уравнения (12.1), приведшем к (12.2), были допущены погрешности, компенсированные погрешностями перехода от (12.2) к (12.4). В этом случае соотношение (12.4) определяет решения уравнения (12.1), не содержащиеся в (12.2), что позволяет восстановить потерянные решения.

Пример 12.3. Уравнение $y dx - x dy = 0$ имеет ОР в неявном виде $y - Cx = 0$. Положим $C = 1/\gamma$. После формальных преобразований получим ОР $x - \gamma y = 0$, которое сравнительно с исходным ОР содержит дополнительное решение $x = 0$ данного уравнения, получаемое при $\gamma = 0$. В описанной ситуации говорят, что ОР $y - Cx = 0$ доставляет решение $x = 0$ при $C = \infty$.

12.3. ОСОБЫЕ РЕШЕНИЯ

Скажем, что соотношение (12.2) определяет ОР (12.1) на E_1, если линии, заданные (12.2), являются линиями уравнения (12.1), причем через каждую точку E_1 проходит хотя бы одна такая линия.

Лемма. *Если соотношение (12.2) определяет ОР (12.1) на E_1 и путь K, расположенный в E_1, в каждой своей неособой точке касается линии из ОР, проходящей через указанную точку M, то K — путь уравнения (12.1).*

◇ По условию касательная к K в каждой точке M одновременно с линией из ОР, проходящей через M, имеет наклон, предписанный полем наклонов $\varkappa$ уравнения (12.1). Путь K оказывается, таким образом, характеристикой поля $\varkappa$ и является поэтому путем уравнения (12.1) (см. гл. 10). ■

Линия $K^* \subset E_1$ называется *огибающей семейства линий* из ОР (12.2) на E_1, если существует представление K^* этой линии такое, что K^* в каждой неособой точке M касается линии из ОР, проходящей через M, но не совпадает ни с одной линией из ОР на промежутке (ненулевой длины) изменения t. На основании леммы огибающая семейства линий уравнения (12.1) сама является линией этого уравнения.

Решение в неявном виде $\omega(x, y) = 0$ уравнения (12.1) назовем *особым* для ОР (12.2), если линия K^*, изображающая это решение, является огибающей семейства линий (12.2).

Теорема. *Пусть функция* $\Phi(x, y, z)$ *непрерывно дифференцируема по* (x, y, z) *и пусть соотношение* $\Phi(x, y, z) = 0$ *определяет на* E_1 *непрерывно дифференцируемую функцию* $z = z(x, y)$ *с промежутком значений* Γ. *Если общее решение в неявной форме* $\Phi(x, y, C) = 0$ *каждому* $C \in \Gamma$ *сопоставляет одну единственную линию уравнения (12.1), то все особые решения для ОР (12.2) содержатся среди линий, определяемых системой соотношений*

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x, y, C) &= 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) &= 0. \end{aligned}\right\}$$

◇ Допустим, что огибающая K^* общего решения (12.2) представлена на E_1 путем $K^*: x = x^*(t)$, $y = y^*(t)$, $t \in I$. У функции $\rho(t) :: = z(x^*(t), y^*(t))$ нет участков постоянства, так как иначе огибающая K^* имела бы дугу, совпадающую с дугой одной из линий ОР (12.2). На любом интервале из I найдутся точки τ, для которых $\rho'(\tau) \neq 0$, $d\rho(t) \neq 0$ при $dt \neq 0$. Обозначим $C_0 :: = \rho(\tau)$, $x_0 = x^*(\tau)$, $y_0 = y^*(\tau)$. Из определения z следует, что $\Phi(x, y, z(x, y)) = 0$, $\forall (x, y) \in E_1$ и тем более $\Phi(x^*(t), y^*(t), \rho(t)) = 0$, $\forall t \in I$, в частности, $\Phi(x_0, y_0, C_0) = 0$ при $t = \tau$. Дифференцируем последнее тождество и полагаем $t = \tau$. Тогда получаем вдоль линии K^*

$$\Phi'_x(x_0, y_0, C_0)\, dx^* + \Phi'_y(x_0, y_0, C_0)\, dy^* + \Phi'_C(x_0, y_0, C_0)\, d\rho = 0.$$

Вдоль линии K уравнения (12.1), определяемой из ОР (12.2) при $C = C_0$, выполняется

$$\Phi'_x(x, y, C_0)\, dx + \Phi'_y(x, y, C_0)\, dy = 0$$

и, в частности,

$$\Phi'_x(x_0, y_0, C_0)\, dx + \Phi'_y(x_0, y_0, C_0)\, dy = 0.$$

Касательные к K^* и к K в точке (x_0, y_0) совпадают, поэтому $dy^*/dx^* = dy/dx$ и, следовательно,

$$\Phi'_x(x_0, y_0, C_0)\, dx^* + \Phi'_y(x_0, y_0, C_0)\, dy^* = 0.$$

Таким образом, наряду с $\Phi = 0$ вдоль особого решения выполняется $\Phi'_C = 0$. ■

Пример 12.4. Соотношение $\Phi(x, y, C) = y - (x - C)^3 = 0$ дает ОР в неявной форме уравнения $y^{2/3}dx - \frac{1}{3}\,dy = 0$ (см. пример 10.2). На основании теоремы особым решением может быть только линия, вдоль которой одновременно

$$\left.\begin{aligned} y-(x-C)^3=0,\\ 3(x-C)^2=0,\end{aligned}\right\}$$

т. е. прямая $y = 0$. Как видно из рис. 18, ось абсцисс действительно состоит из точек ветвления и является особым решением.

12.4. СОСТАВНЫЕ РЕШЕНИЯ

Допустим, что соотношение (12.2) определяет ОР в неявной форме уравнения (12.1), а соотношение

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{12.5}$$

дает особое решение. Пусть L_0 — совокупность линий, определяемых (12.2) и (12.5). Каждая линия из L_0 — характеристика поля наклонов $\varkappa$ уравнения (12.1). Если две различные линии из L_0 имеют общую касательную в общей точке M, то из частей этих линий можно составить новую линию, которая будет характеристикой поля $\varkappa$, т. е. линией уравнения (12.1). Соответствующее решение назовем *составным*. Пополнив L_0 всевозможными составными решениями, получим семейство решений L_1, на основе которого снова можно строить составные решения. Продолжая описанный процесс, получаем совокупность расширяющихся семейств решений, объединение которых приводит к ПР (12.1).

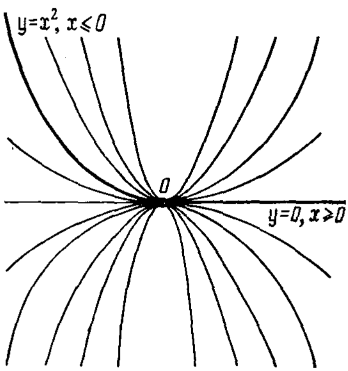

Рис. 23

Пример 12.5. Помимо парабол $y = Cx^2$, уравнение $2ydx - xdy = 0$ имеет в качестве своих линий и всевозможные составные линии $y = Cx^2$ при $x \leqslant 0$ и $y = C_1x^2$ при $x \geqslant 0$ (рис. 23; $C = 1$, $C_1 = 0$).

Пример 12.6. Уравнение из примера 12.4, кроме линий из ОР и особого решения, имеет составные решения, в частности,

$$y = \begin{cases} (x+1)^3, & x < -1;\\ 0\quad, & -1 \leqslant x \leqslant 1;\\ (x-1)^3, & x > 1 \end{cases}$$

(см. пример 10.2 и рис. 18):

12.5. УРАВНЕНИЕ РИККАТИ

Уравнение в нормальной дифференциальной форме

$$(p(\mathrm{x})\,\mathrm{y}^2 + q(\mathrm{x})\,\mathrm{y} + r(\mathrm{x}))\,\mathrm{dx} + s(\mathrm{x})\,\mathrm{dy} = 0$$

или соответствующее (вообще говоря, неравносильное!) уравнение в производных ($\mathrm{x} := t$, $\mathrm{y} := \mathrm{x}$)

$$\mathrm{Dx} = P(t)\,\mathrm{x}^2 + Q(t)\,\mathrm{x} + R(t),\ t \in I, \tag{12.6}$$

где $P(t) = p(t)/s(t)$, $Q(t) = q(t)/s(t)$ и $R(t) = r(t)/s(t)$, называют *уравнением Риккати*. Это уравнение является неэлементарным даже в тех случаях, когда $P = 1$, $Q = 0$, а R — многочлен общего вида. Последний факт, установленный впервые Ж. Лиувиллем в 1841 г., показывает, что уже сравнительно простые по форме нелинейные дифференциальные уравнения задают сложные системы функций с разнообразной аналитической структурой.

Теорема 1. *Если известно одно решение уравнения Риккати (12.6), то полное семейство решений этого уравнения можно построить с помощью квадратур.*

◇ Допустим, что $\mathrm{x} = x_0(t)$ есть решение уравнения (12.6), т. е.

$$\mathrm{D}x_0(t) = P(t)\,x_0^2(t) + Q(t)\,x_0(t) + R(t),\ \ \forall t \in I_0.$$

Произведем в (12.6) замену $\mathrm{x} = \mathrm{u} + x_0(t)$. Тогда получим для новой искомой функции u уравнение, которое на основании указанного выше тождества для x_0 имеет вид

$$\mathrm{Du} = P(t)\,\mathrm{u}^2 + (2P(t)\,x_0(t) + Q(t))\,\mathrm{u},$$

т. е. является уравнением Бернулли и поэтому интегрируется в квадратурах.

Пример 12.7. Уравнение Риккати

$$\mathrm{Dx} = A\mathrm{x}^2 + B\mathrm{x}/t + C/t^2$$

с постоянными коэффициентами A, B, C имеет частное решение $\mathrm{x} = \gamma/t$, где $A\gamma^2 + (B + 1)\,\gamma + C = 0$. Поэтому подстановка $\mathrm{x} = \mathrm{u} + \gamma/t$ приводит это уравнение к уравнению Бернулли с $m = 2$

$$\mathrm{Du} = A\mathrm{u}^2 + (2A\gamma/t + B/t)\,\mathrm{u},$$

преобразуемому в свою очередь заменой $\mathrm{u} = 1/v$ в линейное уравнение.

Для подбора частного решения уравнения Риккати (12.6) в некоторых случаях полезно преобразование этого уравнения к так называемому каноническому виду.

Теорема 2. *Уравнение Риккати (12.6) с помощью линейных (формальных) преобразований можно привести к виду*

$$\mathrm{Dx} = \pm\,\mathrm{x}^2 + \mathrm{R}_1(t).$$

◇ Произведем в (12.6) замену $\mathrm{x} = \alpha(t)\,\mathrm{u}$ с вспомогательной функцией α и получим (аргумент t для краткости опускаем)

$$\mathrm{Du} = P\alpha\mathrm{u}^2 + \left(Q - \frac{\mathrm{D}\alpha}{\alpha}\right)\mathrm{u} + \frac{R}{\alpha}.$$

Если положить $\alpha = \pm 1/P$, то получим

$$\mathrm{D}u = \pm u^2 + \left(Q + \frac{\mathrm{D}P}{P}\right) u \pm RP.$$

Последующая подстановка $u = v + \beta$ с вспомогательной функцией β приводит к

$$\mathrm{D}v = \pm v^2 + \left(\pm 2\beta + Q + \frac{\mathrm{D}P}{P}\right) v \pm \beta^2 + \left(Q + \frac{\mathrm{D}P}{P}\right) \beta \pm RP - \mathrm{D}\beta.$$

Положим

$$\beta = \mp \frac{1}{2} \left(Q + \frac{\mathrm{D}P}{P}\right)$$

и получим уравнение в каноническом виде

$$\mathrm{D}v = \pm v^2 + R_1,$$

где

$$R_1 = \pm \left(\frac{1}{4} \left(Q + \frac{\mathrm{D}P}{P}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\mathrm{D}Q + \frac{\mathrm{D}^2 P}{P} - \frac{(\mathrm{D}P)^2}{P^2}\right)\right) \pm RP.$$

Пример 12.8. Подстановка $x = u/\gamma$, где $\gamma^2 = \pm A$, преобразует уравнение Риккати $\mathrm{D}x = Ax^2 + Bt^m$ к каноническому виду

$$\mathrm{D}u = \pm u^2 + B_1 t^m.$$

Этот пример, в частности, выявляет значение знаков + («плюс») или — («минус») перед x^2 в канонической форме уравнения Риккати.

Основные упражнения

12.1. Построить общие и особые решения уравнений 9, 10, 15, 16, 23, 24 [1].

12.2. Найти особые и составные решения уравнений 303, 306 [1].

12.3. Построить полные семейства решений в задачах 69, 70, 76, 91 [1].

12.4. Построить ПР уравнений 303, 306 [1].

12.5. Разрешить уравнения Риккати 307, 318, 329 [1].

Дополнительные упражнения

12.6. Решить задачу 134 [3].

12.7. Доказать, что если уравнение Риккати с непрерывными коэффициентами имеет непрерывно дифференцируемое решение, то у этого уравнения есть ОР вида

$$x = \frac{\alpha(t) + C\beta(t)}{\gamma(t) + C\delta(t)},$$

где C — произвольная постоянная (такое ОР называют *дробно-линейной функцией* от произвольной постоянной).

12.8. В предположении о локальной однозначной разрешимости уравнения Риккати с непрерывными коэффициентами доказать теоремы из задач 324—338 [1].

13. УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА В ОБЩЕЙ ФОРМЕ

13.1. УРАВНЕНИЕ 1-ГО ПОРЯДКА В ОБЩЕЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Уравнение 1-го порядка в общей дифференциальной форме (Д-1) имеет вид

$$H(\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{dx},\ \mathrm{dy})=0, \tag{13.1}$$

где функция $H(\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{u},\ \mathrm{v})$ определена на множестве $A\subset R^4=Oxyuv$. На уравнение (13.1) распространим терминологию, введенную в главе 10 для уравнения в нормальной форме. В частности, путь K назовем *путем уравнения* (13.1), если

$$H(x(t),\ y(t),\ \mathrm{d}x(t),\ \mathrm{d}y(t))=0,\ \forall t\in I, \tag{13.2}$$

а линию K назовем *линией (13.1)*, если существует представление K в виде пути K уравнения (13.1). Дифференциалы $\mathrm{d}x(t)$ и $\mathrm{d}y(t)$ определены с точностью до произвольного общего ненулевого множителя $\mathrm{d}t$, поэтому функция H в силу (13.2) должна обладать свойством

$$\begin{aligned}&\forall(\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{u},\ \mathrm{v})\in A,\ \forall\lambda\neq0,\ H(\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{u},\ \mathrm{v})=0\Rightarrow\\&\Rightarrow(\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \lambda\mathrm{u},\ \lambda\mathrm{v})\in A,\ H(\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \lambda\mathrm{u},\ \lambda\mathrm{v})=0.\end{aligned} \tag{13.3}$$

Условие (13.3) дальше считаем выполненным. На основании (13.3) при $H(\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ 0,\ \mathrm{v})=0$, $\mathrm{v}\neq0$ естественно доопределить функцию H, положив $H(\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{u},\ \infty)=0$ при любом $\mathrm{u}\in R$, $\mathrm{u}\neq0$.

Точка $M=(\mathrm{x},\ \mathrm{y})$ фазовая для уравнения (13.1), если существуют u и v такие, что $\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2\neq0$, $(\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{u},\ \mathrm{v})\in A$, $H(\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{u},\ \mathrm{v})=0$. Совокупность E всех фазовых точек составляет фазовое множество данного уравнения.

13.2. ПОЛЕ НАКЛОНОВ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

Величину $k=\mathrm{v}/\mathrm{u}$, причем $k=\infty$ при $\mathrm{v}\neq0$, $\mathrm{u}=0$, назовем *наклоном,* порожденным уравнением (13.1), в фазовой точке M, если

$$H(\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ 1,\ k)=0.$$

Множество всех наклонов k уравнения (13.1) в M обозначим $\varkappa(M)$. На фазовом множестве E определено *поле наклонов* $\varkappa$. Линия K — *характеристика* поля $\varkappa$, если существует представление K путем K такое, что наклон k в любой точке M_t содержится в $\varkappa(M)$. Линия K — характеристика $\varkappa$ в том и только том случае, если она — линия уравнения (13.1), породившего $\varkappa$. Если характеристики $\overset{\frown}{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}$ и $\overset{\frown}{\mathrm{M}\mathrm{M}_1}$ поля $\varkappa$ образуют линию $\overset{\frown}{\mathrm{M}_0\mathrm{M}\mathrm{M}_1}=\mathrm{K}$, то K — также характеристика поля $\varkappa$, а следовательно, и линия уравнения (13.1).

Пример 13.1. На рис. 24 $\varkappa(M)$ состоит из величин k и k^*; линии $\overset{\frown}{M_0M}$ и $\overset{\frown}{MM_1}$ или $\overset{\frown}{M_0M}$ и $\overset{\frown}{MM_1'}$ составляют линии $\overset{\frown}{M_0MM_1}$ и $\overset{\frown}{M_0MM_1'}$; линии M_0M и MM_1^* не составляют линию.

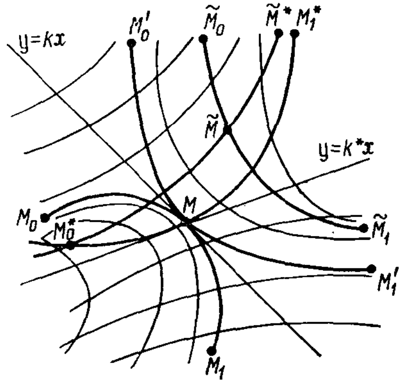

Рис. 24

13.3. КЛАССИФИКАЦИЯ ФАЗОВЫХ ТОЧЕК

Точка $M \in E$ *особая* для (13.1), если $\varkappa(M) = R_\infty$, и *неособая* в противном случае. Если через неособую точку M при любом $k \in \varkappa(M)$ проходит линия (13.1) с наклоном k, то M — *точка существования*, в противном случае M — *точка несуществования*. Точка M — *точка единственности*, если для любого $k \in \varkappa(M)$ существует линия K данного уравнения, проходящая через M и включающая как подмножества все остальные линии (13.1), которые имеют наклон k в M. Если линии K не существует, то M — *точка неединственности*. Аналогично определяют *точки локальной единственности и локальной неединственности*. Если существуют две линии (13.1), проходящие через M с общим наклоном k и отличные друг от друга в любой окрестности M, то M — *точка ветвления* вдоль направления k.

Пример 13.2. В точке M на рис. 24 происходит ветвление в направлении k и нарушена единственность. В точке $\widetilde{M}$ единственность не нарушена, так как $\overset{\frown}{M_0^*\widetilde{M}\widetilde{M}^*}$ и $\overset{\frown}{\widetilde{M}_0\widetilde{M}\widetilde{M}_1}$ имеют в $\widetilde{M}$ разные наклоны.

Если L — семейство линий K уравнения (13.1), то огибающая L этого семейства и все линии, составленные из дуг K и из дуг L, будут линиями (13.1). Огибающая состоит из точек ветвления и соответствует *особому решению* уравнения.

13.4. УРАВНЕНИЕ 1-ГО ПОРЯДКА, АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

Уравнение (13.1) называют *алгебраическим уравнением* степени $m \geqslant 1$ *относительно дифференциалов*, если H является однородным многочленом степени m относительно dx и dy, т. е. имеет вид

$$\sum_{l=0}^{m} P_l^* (\mathrm{x}, \mathrm{y})\, \mathrm{dx}^l \mathrm{dy}^{m-l} = 0, \tag{13.4}$$

где все коэффициенты P_l^* определены на множестве $E \subset R^2$. Ограничимся случаем, когда для любой точки $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in E$ выполняется

$$\sum_{l=0}^{m} P_l^* (\mathrm{x}, \mathrm{y})\, \mathrm{u}^l \mathrm{v}^{m-l} = \prod_{l=1}^{m} (P_l (\mathrm{x}, \mathrm{y})\, \mathrm{u} + Q_l (\mathrm{x}, \mathrm{y})\, \mathrm{v}), \ \forall \mathrm{u}, \mathrm{v},$$

где P_l и Q_l действительны на E, причем для любых номеров l и j $(l \neq j)$ найдется точка $(\overline{x}, \overline{y}) \in E$ такая, что

$$P_l^2 (\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{y}}) + Q_l^2 (\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{y}}) \neq 0, \ P_j^2 (\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{y}}) + Q_j^2 (\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{y}}) \neq 0,$$

$$P_l (\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{y}}) : Q_l (\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{y}}) \neq P_j (\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{y}}) : Q_j (\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{y}}).$$

Точка $M_0 = (\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ особая для (13.4), если в ней все коэффициенты обращаются в 0. Точка M_0 особая в том и только том случае, если в ней для некоторого l обращаются в 0 оба коэффициента P_l и Q_l. Если $M = (\mathrm{x}, \mathrm{y})$ — неособая точка уравнения (13.4), то в этой точке определено не более m наклонов $k = k_1, \ldots, k_r$ уравнения (13.4), определяемых из соотношения

$$\sum_{l=0}^{m} P_l^* (\mathrm{x}, \mathrm{y})\, k^l = 0.$$

Наклон, отвечающий кратному корню последнего соотношения, назовем *кратным*.

Наряду с уравнением (13.4) степени m рассмотрим m отдельных уравнений в нормальной дифференциальной форме ($l = 1, 2, \ldots, m$)

$$P_l (\mathrm{x}, \mathrm{y})\, \mathrm{dx} + Q_l (\mathrm{x}, \mathrm{y})\, \mathrm{dy} = 0, \ (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in E. \tag{13.5}$$

Каждая линия любого из уравнений (13.5) будет линией и уравнения (13.1). Допустим, что найдены ОРП каждого из уравнений (13.5) в виде $\Phi_l (\mathrm{x}, \mathrm{y}, C) = 0$, где C — произвольный числовой параметр, принимающий значения из промежутка Δ. Тогда ОР (13.4) будет соотношение

$$\Phi_1 (\mathrm{x}, \mathrm{y}, C) \cdot \Phi_2 (\mathrm{x}, \mathrm{y}, C) \cdot \ldots \cdot \Phi_m (\mathrm{x}, \mathrm{y}, C) = 0. \tag{13.6}$$

При отсутствии особых точек и кратных наклонов у (13.4) линии различных уравнений (13.5) не могут касаться друг друга и не могут составлять линии (13.4). Поэтому в указанном случае соотношение (13.6) дает ОРП (13.4). В общем случае ОР (13.4), заданное соотношением (13.6), следует пополнить составными линиями.

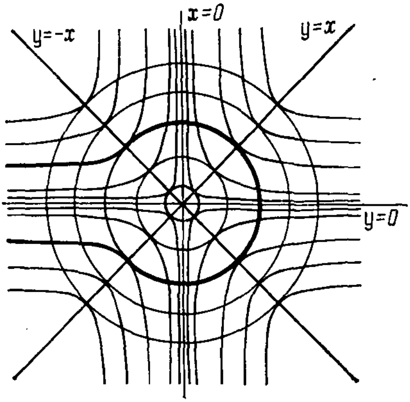

Рис. 25

Пример 13.3. Уравнение $xydx^2 + (x^2 + y^2)\,dxdy + xydy^2 = 0$, распадающееся на уравнения $xdx + ydy = 0$ с ОР $x^2 + y^2 - C^2 = 0$ и $ydx + xdy = 0$ с ОР $xy - C = 0$, имеет ОР $(x^2 + y^2 - C^2)(xy - C) = 0$. На рис. 25, представляющем наложение рис. 19 и рис. 20, кратные точки поля наклонов лежат на прямых $y = \pm x$, заполненных точками ветвления. Составная линия уравнения, выделенная на рис. 25, не может быть получена как частное решение построенного ОР.

13.5. УРАВНЕНИЕ В ПРОИЗВОДНЫХ В ОБЩЕЙ ФОРМЕ

Обозначим B множество троек (x, y, k) таких, что $(x, y) \in E$ и $k \in \varkappa(x, y)$, где E — фазовое множество уравнения (13.1), а $\varkappa(x, y)$ — совокупность наклонов (13.1) в (x, y). Тогда B — подмножество $R^2 \times R_\infty$. Отправляясь от H, определим функцию F, положив

$$F(x, y, k) = H(x, y, 1, k), \quad (x, y, k) \in B.$$

Если K — путь уравнения (13.1), то на основании условия (13.3) и доопределения H из тождества (13.2) при $\lambda = 1/dx(t)$ следует, что

$$H(x(t), y(t), dx(t), dy(t)) = 0, \ \forall t \in I \Leftrightarrow F\left(x(t), y(t), \frac{dy(t)}{dx(t)}\right) =' 0,$$
$$\forall t \in I,$$

т. е. $x = x(t)$, $y = y(t)$ является решением в параметрическом виде уравнения в производных,

$$F(x, y, y') = 0, \tag{13.7}$$

где штрих означает производную по x. Справедливо и обратное: любое решение в параметрическом виде уравнения (13.7) является решением уравнения (13.1). Для краткости вместо (13.1) дальше рассматриваем (13.7).

Пример 13.4. Рассмотрим уравнение $F(y')=0$ в предположении, что функция $F(k)$ имеет лишь изолированные нули $k=\overline{k}\in R_\infty$. При $\overline{k}\neq\infty$ функция $y=\overline{k}x+C$ или $\frac{y-C}{x}=\overline{k}$ дает ОР данного уравнения. Если $k=\infty$, то уравнение имеет ОИ $x=C$. Соотношение $F\left(\frac{y-C}{x}\right)=0$, дополненное при необходимости соотношением $x=C$, дает полный ОИ.

13.6. ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим уравнение (13.7) в предположении, что функция $F(x, y, k)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки $N_0=(x_0, y_0, \overline{k})$. Если $F(N_0)=0$, а $F'_k(N_0)\neq 0$, то на основании теоремы о неявной функции соотношение $F(x, y, k)=0$ однозначно разрешимо в окрестности N_0 и дает $k=f(x, y)$, $(x, y)\in U$. Допустим, что $M_0=(x_0, y_0)$ — точка локальной единственности для уравнения $y'=f(x, y)$. Тогда в M_0 нет ветвления вдоль направления $\overline{k}$ решений (13.7). Следовательно, все точки ветвления (13.7) в указанном случае располагаются во множестве Г, определяемом соотношениями

$$F(x, y, k)=0,\quad F'_k(x, y, k)=0. \tag{13.8}$$

Если исключение k из (13.8) приводит к соотношению $\varphi(x, y)=0$, определяющему линию (13.7), то именно вдоль этой линии возможно ветвление решений, и поэтому интеграл $\varphi=0$ может оказаться особым решением.

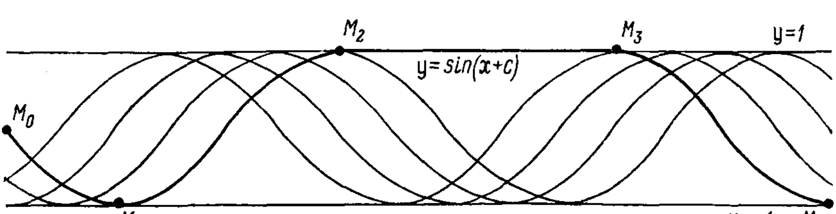

Рис. 26

Пример 13.5. Уравнение $y'^2+y^2-1=0$ распадается на два уравнения $y'=\pm\sqrt{1-y^2}$ и имеет ОИ вида $y=\sin(x+C)$, а также решения $y=\pm 1$. Из соотношений $k^2+y^2-1=0$ и $2k=0$ следует, что вдоль прямых $y=\pm 1$ возможно ветвление, что и подтверждает рис. 26. Прямые $y=\pm 1$ оказываются особыми решениями. Линия $\overset{\frown}{M_0M_1M_2M_3M_4}$ является составной линией данного уравнения.

13.7. ИЗОКЛИНЫ

Возьмем $k \in R_\infty$. Множество $I(k)$ точек $(x, y) \in E$, для которых $k \in \varkappa(x, y)$, называют *изоклиной (линией равных наклонов)* уравнения (13.7). Изоклину $I(k)$ задает соотношение $F(x, y, k) = 0$. Точка существования $\overline{M}$ лежит на изоклине $I(k)$ в том и только том случае, если через $\overline{M}$ проходит линия (13.7), касающаяся в $\overline{M}$ прямой $y - \overline{y} = k(x - \overline{x})$. Прямая $y = kx + b$ является линией (13.7) тогда и только тогда, когда она входит в изоклину $I(k)$.

Уравнением Клеро называют ОД-1

$$y = y'x + f(y'), \tag{13.9}$$

где f непрерывно дифференцируема на промежутке $|\alpha, \beta| \subset R_\infty$. Изоклиной $I(k)$ $(k \neq \infty)$ является прямая $y = kx + f(k)$ уравнения (13.9), т. е. ОР (13.9) служит $y = Cx + f(C)$, $C \in |\alpha, \beta|$. В соответствии с общим правилом ОР следует пополнить огибающей

$$y = Cx + f(C), \; 0 = x + f'(C), \; C \in |\alpha, \beta|$$

и всевозможными составными решениями.

Пример 13.6. ОР уравнения $y = y'x - \frac{1}{2}y'^2$ образует семейство прямых $y = Cx - C^2$. Огибающей служит парабола

$$\begin{cases} y = Cx - \frac{1}{2}C^2 \\ 0 = x - C \end{cases} \Rightarrow y = x^2 - \frac{1}{2}x^2 = \frac{x^2}{2}. \blacksquare$$

Кроме этого, есть составные линии, одна из которых выделена на рис. 27.

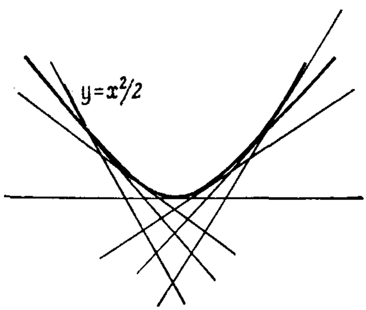

Рис. 27

Уравнение Клеро появляется при аналитическом построении линий, заданных свойствами их касательных. Искомые линии оказываются особыми линиями полученных уравнений Клеро.

13.8. ПОСТРОЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Один из методов построения решений уравнения (13.7) состоит во введении трех вспомогательных непрерывно дифференцируемых функций φ, ψ, ω, подобранных так, что

$$d\psi(t) = \omega(t)\,d\varphi(t), \; F(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) = 0, \; \forall t \in I.$$

Вначале выбирается одна из функций φ, ψ или ω, причем нередко в качестве φ или ψ используют t. Затем определяют две другие функции. Наличие ОД-1 среди определяющих соотношений позволяет получить семейство решений, зависящее от произвольной постоянной, а затем — особые и составные решения. Описанный прием был использован при решении уравнения Клеро, где было положено $t = k$, $\omega(t) = t = k$, $y' = k$. Аналогичный прием удобен в случаях

$$x = f(y') \; [x = f(k),\ dy = k dx,\ y = \int f'(k) k dk]$$

и

$$y = g(x') \quad \left[y = g(k),\ dy = k dx,\ x = \int \frac{g'(k)}{k} dk\right],$$

а также при решении *уравнения Лагранжа*

$$y = f(y')\, x + g(y').$$

13.9. ПОСТРОЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Рассмотрим *задачу об ортогональных траекториях*. Пусть на плоской области E задано семейство линий L. Требуется построить семейство Q *ортогональных траекторий* (*нормальных трансверсалей*), т. е. семейство линий, которые пересекают ортогонально (нормально) линии из L.

Допустим, что семейство L можно задать с помощью соотношения $\Phi(x, y, C) = 0$, $(x, y) \in E$, $C \in |\alpha, \beta|$, где Φ непрерывно дифференцируемо и

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0 \\ \Phi'_x(x, y, C) + \Phi'_y(x, y, C)\, y' = 0 \end{cases} \Rightarrow F(x, y, y') = 0.$$

В точке (x, y) линия $y = y(x)$ из L имеет наклон $k = y'(x)$, поэтому наклоном ортогональной траектории $y = \overline{y}(x)$ в (x, y) будет $\overline{k} = \overline{y}'(x) = -1/k$, где $F(x, y, k) = 0$. Следовательно, уравнение ортогональных траекторий имеет вид $F(x, y, -1/y') = 0$.

Пример 13.7. Уравнением семейства гипербол $xy = C$ с асимптотами $x = 0$ и $y = 0$ служит $ydx + xdy = 0$, а уравнение ортогональных траекторий имеет вид $-ydy + xdx = 0$ или $x^2 - y^2 = C$. Ортогональные траектории — гиперболы с асимптотами $y = \pm x$ (рис. 28).

Основные упражнения

13.1. Построить схемы полей наклонов, найти ОР и выделить указанные частные решения уравнений первого порядка, алгебраических относительно производных, в задачах 522—527 [1].

13.2. Разрешить неполные уравнения, т. е. уравнения вида $F(y') = 0$, $F(x, y') = 0$, $F(y, y') = 0$, в задачах 543—550, 554, 555 [1].

13.3. Построить все решения уравнений Клеро в задачах 563—566 [1].

13.4. Построить ОР уравнений Лагранжа в задачах 559—562 [1].

13.5. Построить ОР в параметрическом виде уравнений 572, 573 [1].

13.6. Найти особые решения уравнений и произвести классификацию фазовых точек в задачах 616—620 [1].

13.7. Построить ортогональные траектории в задачах 576, 577 [1].

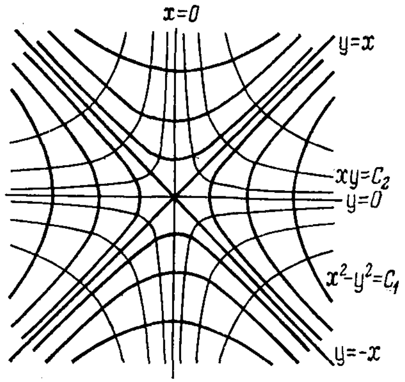

Рис. 28

Дополнительные упражнения

13.8. Построить кривые в задачах 539, 540 [1].

13.9. Исследовать задачи 568—570 [1], 299, 300 [3], 108, 109 [2].

13.10. Доказать, что если функция $f : | \alpha, \beta | \to R$ имеет на промежутке $| \alpha, \beta | \subset R$ монотонную производную, то в каждом составном решении имеется и притом единственная дуга особого решения

$$\left. \begin{array}{l} y = Cx + f(C), \\ 0 = x + f'(C). \end{array} \right\}$$

13.11. Вывести уравнение семейства ортогональных траекторий для семейства линий, заданного в полярных координатах $\Phi(\varphi, r, C) = 0$, и решить задачи 580, 581 [1].

13.12. Линии из семейства Q называют *изогональными (образующими одинаковый угол) траекториями* семейства L, если линии из Q заполняют то же множество E, что и L, и если угол между линией из Q и линией L в каждой точке их пересечения имеет постоянное значение α. В предположениях, что L задано уравнениями $F(x, y, y') = 0$ или $G\left(\varphi, r, \dfrac{dr}{d\varphi}\right) = 0$, вывести уравнение семейства изогональных траекторий и решить задачи 578, 579 [1].

14. ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА УРАВНЕНИЯ

14.1. ПЕРВЫЙ ИНТЕГРАЛ УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА

Уравнение n-го порядка в производных в общей форме имеет вид

$$F(x, y, y', \ldots, y^n) = 0, \qquad (14.1)$$

где $F(x, y_0, y_1, \ldots, y_n)$ определена на области $A \subset R^{n+2}$. *Решением* (14.1) называем функцию $y = y(x)$, дифференцируемую n раз на промежутке $I \subset R$ и обращающую уравнение (14.1) в тождество

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0, \ \forall x \in I. \tag{14.2}$$

В некоторых случаях удобно рассматривать в дифференциалах уравнение, соответствующее (14.1). Решение уравнения в дифференциалах является *решением в параметрическом виде* уравнения (14.1). Выделим случаи, когда (14.1) может быть *редуцировано*, т. е. сведено к уравнению меньшего порядка. Редуцированные уравнения содержат произвольные постоянные.

Функция $\Omega(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ — *первый интеграл* уравнения (14.1), если она сохраняет постоянное значение вдоль решений (14.1).

Теорема. *Пусть $\Omega(x, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ непрерывно дифференцируема на проекции B множества A на подпространство $R^{n+1} = Oxy_0 \ldots y_{n-1}$. Если*

$$\Omega'_x + \Omega'_{y_0} y_1 + \ldots + \Omega'_{y_{n-1}} y_n = F(x, y_0, y_1, \ldots, y_n),$$
$$\forall (x, y_0, y_1, \ldots, y_n) \in A, \tag{14.3}$$

то уравнение (14.1) равносильно ОД-(n — 1)

$$\Omega(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = C, \tag{14.4}$$

где C — произвольная постоянная (из множества значений функции Ω).

◇ Допустим, что $y = y(x)$ $(x \in I)$ — решение (14.1). Тогда (см. (14.2) и (14.3))

$$\frac{d}{dx}\Omega(x, y, \ldots, y^{(n-1)}) = \Omega'_x + \Omega'_{y_0} y + \ldots + \Omega'_{y_{n-1}} y^{(n)} =$$
$$= F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \ \forall x \in I,$$

т. е. $y = y(x)$ удовлетворяет (14.4) при некоторой постоянной C. С другой стороны, если $y = y(x)$ удовлетворяет (14.4), то на основании (14.3) и (14.4)

$$0 = \frac{d}{dx}\Omega(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = \Omega'_x + \ldots + \Omega'_{y_{n-1}} y^{(n)} =$$
$$= F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}),$$

т. е. $y = y(x)$ — решение (14.1). ■

Наряду с функцией Ω первым интегралом уравнения (14.1) называют и само соотношение (14.4), которое представляет собой редукцию уравнения (14.1).

Пример 14.1. Из тождества

$$y_2 \left(\ln|y_2| \left(1 + y_1^2\right)^{-3/2}\right)'_{y_1} + y_3 \left(\ln|y_2| \left(1 + y_1^2\right)^{-3/2}\right)'_{y_2} = y_3 y_2^{-1} -$$
$$- 3y_1 y_2 \left(1 + y_1^2\right)^{-1}$$

следует, что уравнение

$$y'''(y'')^{-1} - 3y'y''(1 + y'^2)^{-1} = 0 \qquad (14.5)$$

имеет первый интеграл

$$y''(1 + y'^2)^{-3/2} = C_1. \qquad (14.6)$$

Из тождества

$$-C_1 + y_2\left(y_1\left(1 + y_1^2\right)^{-1/2} - C_1 x\right)'_{y_1} = y_2\left(1 + y_1^2\right)^{-3/2} - C_1$$

находим первый интеграл уравнения (14.6)

$$y'(1 + y'^2)^{-1/2} - C_1 x = C_2.$$

Интегрируя последнее уравнение с помощью параметризации

$$y' = \operatorname{tg} t,\ C_1 x + C_2 = \sin t,\ dy = \operatorname{tg} t dx = \operatorname{tg} t \frac{\cos t dt}{C_1} = \frac{\sin t}{C_1} dt,$$

$$y = -\frac{\cos t}{C_1} + C_2,$$

получаем ОР уравнения (14.5) в виде

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,\ R = 1/|C_1|,\ a = -C_2/C_1,\ b = C_3.$$

Это ОР следует пополнить (при $x = b \pm R$ и $R = \infty$) всевозможными прямыми. Полное ОР (14.5) состоит из всех окружностей и всех прямых на плоскости $R^2 = Oxy$ (составные решения здесь отсутствуют, так как невозможно дважды гладкое сопряжение различных окружностей или окружности с прямой).

14.2. НЕПОЛНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение (14.1) называют *неполным*, если функция F не зависит от аргумента x или от искомой функции y и ее начальных производных.

1. Уравнение без явного вхождения аргумента

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (14.7)$$

Переведем это уравнение, составленное для искомой функции $y = y(x)$, в уравнение для обратной функции $x = x(y)$:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1} = Q_1\left(\frac{dx}{dy}\right),$$

$$y'' = -\frac{d^2x}{dy^2}\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-2} = Q_2\left(\frac{dx}{dy}, \frac{d^2x}{dy^2}\right),$$

. . . .

$$y^{(n)} = Q_n\left(\frac{dx}{dy}, \frac{d^2x}{dy^2}, \ldots, \frac{d^nx}{dy^n}\right).$$

Введем вспомогательный аргумент y и вспомогательную искомую функцию u:

$$u = \frac{dx}{dy},\quad \frac{d^k x}{dy^k} = \frac{d^{k-1}u}{dy^{k-1}}.$$

Подставим

$$y^{(k)} = Q_k\left(u,\ \frac{du}{dy},\ \ldots,\ \frac{d^{k-1}u}{dy^{k-1}}\right),\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

в исходное уравнение (14.7) и получим ОД-($n-1$) для u:

$$F\left(y,\ Q_1(u),\ Q_2\left(u,\ \frac{du}{dy}\right),\ \ldots,\ Q_n\left(u,\ \frac{du}{dy},\ \ldots,\ \frac{d^{n-1}u}{dy^{n-1}}\right)\right) = 0.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим

$$u = g(y,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{n-1}).$$

Следовательно, x выражается через неопределенный интеграл:

$$x = \int g(y,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{n-1})\, dy.$$

Отметим, что x зависит от n произвольных постоянных.

Пример 14.2. Угол отклонения $\varphi(t)$ математического маятника длины l амплитудой α удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

и начальному условию

$$\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{\varphi=\alpha} = 0.$$

Кроме того, считаем $\varphi(0) = 0$. Применяя описанный прием понижения порядка, придем к уравнению

$$\frac{dt}{d\varphi} = \left(\frac{l}{2g}\right)^{1/2} \frac{1}{\cos\varphi - \cos\alpha}.$$

Интегрируем последнее уравнение, считая в соответствии с $\varphi(0) = 0$, что $t(0) = 0$:

$$t = \left(\frac{l}{2g}\right)^{1/2} \int\limits_0^{\varphi} \frac{du}{\cos u - \cos\alpha}.$$

Сведем полученное выражение для t к эллиптическому интегралу первого рода, положив $\sin\frac{\alpha}{2} = k$, $\sin\frac{u}{2} = k\sin\sigma$.

Тогда

$$\cos u - \cos\alpha = -2\left(\sin^2\frac{u}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$du = \frac{2k\cos\sigma d\sigma}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\sigma}}.$$

При $v = \arcsin\left(\sin\frac{\varphi}{2} : \sin\frac{\alpha}{2}\right)$ получаем

$$t = \left(\frac{l}{g}\right)^{1/2} \int\limits_0^v \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \sigma}} = \left(\frac{l}{g}\right)^{1/2} F(k, v).$$

Эллиптический интеграл первого рода $F(k, v)$ протабулирован, например, в справочнике Е. Янке, Ф. Эмде и Ф. Леш «Специальные функции» (М.: Наука, 1964).

2. Уравнение без явного вхождения искомой функции

$$F(x, y^{(m)}, y^{(m+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (14.8)$$

Введем вспомогательную функцию $z = y^{(m)}$. Тогда уравнение (14.8) перейдет в Д-$(n - m)$:

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-m)}) = 0.$$

Если найдено общее решение последнего уравнения $z = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-m})$, то общее решение (14.8) находится из П-m (см. гл. 1):

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-m}).$$

14.3. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА

Однородные уравнения порядка n имеют вид

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (14.9)$$

где функция F обладает свойством

$$F(\lambda x, \lambda y_0, \lambda^0 y_1, \ldots, \lambda^{-n+1} y_n) = \lambda^\mu F(x, y_0, y_1, \ldots, y_n).$$

Введем новые переменные $t = \ln x$ и $z = y/x$. Тогда

$$y' = Dy/x = Dz + z,$$
$$y'' = (D^2 z + Dz) e^{-t},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n)} = Q_n(z, Dz, \ldots, D^n z) e^{(-n+1)t},$$

поэтому уравнение (14.9) равносильно уравнению без явного вхождения аргумента

$$F(1, z, Dz + z, \ldots, Q_n(z, Dz, \ldots, D^n z)) = 0,$$

что позволяет понизить порядок уравнения на единицу.

Уравнение

$$P(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (14.10)$$

где P — многочлен, причем для некоторых постоянных k и r все слагаемые в выражении

$$P\left(x^r, x^k, x^{k-r}, \ldots, x^{k-nr}\right)$$

имеют одну и ту же степень, называют *обобщенно-однородным*.

При $r=0$ подстановка $z=y'/y$ приводит (14.10) к уравнению относительно z порядка ниже, чем n. После нахождения

$$z=\varphi(x,\ C_1,\ \ldots,\ C_{n-1})$$

получаем однородное Л-1 для определения y

$$y'-\varphi(x,\ C_1,\ \ldots,\ C_{n-1})\,y=0.$$

Если $r\neq 0$, то можно считать $r=1$. Преобразование переменных

$$y=|x|^k z,\ t=\ln|x|$$

приводит к уравнению, не содержащему t и допускающему, следовательно, понижение порядка.

Уравнение (14.1) называют *однородным относительно искомой функции* и ее производных, если функция F обладает свойством

$$F\left(x,\ \lambda y_0,\ \lambda y_1,\ \ldots,\ \lambda y_n\right)=\lambda^{\mu}F(x,\ y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_n).$$

Предположим, что последнее условие выполнено, и произведем подстановку $y'=yz$. Тогда

$$\begin{aligned}
y''&=y'z+yz'=y(z^2+z')=Q_2(z,\ z')\,y;\\
y'''&=y(z^3+3zz'+z'')=Q_3(z,\ z',\ z'')\,y;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y^{(n)}&=Q_n(z,\ z',\ z'',\ \ldots,\ z^{(n-1)})\,y.
\end{aligned}$$

После подстановки получаем

$$y^{\mu}F(x,\ 1,\ z,\ Q_2(z,\ z'),\ Q_3(z,\ z',\ z''),\ \ldots,\ Q_n(z,\ z',\ \ldots,\ z^{(n-1)}))=0$$

или (сокращение на y^{μ} допустимо, так как решение $y=0$ не будет потеряно)

$$G(x,\ z,\ z',\ \ldots,\ z^{(n-1)})=0.$$

Найдем ОР этого уравнения: $z=\varphi(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{n-1})$. Тогда

$$\frac{y'}{y}=\varphi(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{n-1}),$$

и поэтому

$$y=e^{\int\varphi(x,\ C_1,\ \ldots,\ C_{n-1})\,dx}.$$

14.4. СПРАВОЧНИК КАМКЕ

Известные элементарные дифференциальные уравнения и системы уравнений собраны в книге Э. Камке «Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям» (М.: Наука, 1966). Принципы классификации, на основе которой уравнения упорядочены в справочнике, описаны в «Предварительных замечаниях», помещенных в начале третьей части справочника. При упорядочивании уравнений сначала учитывается порядок уравнения, затем — характер вхождения старшей производной в уравнение, дальше — вид коэффициентов при членах, содержащих старшую производную и т. д. При этом предполагается, что уравнение приведено к некоторому стандартному виду. Такое расположение уравнений позволяет по внешнему виду некоторого уравнения установить, содержится оно в справочнике или нет.

Элементарные уравнения 1-го порядка собраны в главе 1 справочника (здесь и дальше имеются в виду главы третьей части справочника). Элементарные и специальные линейные уравнения собраны в главах 2—5 (уравнение называют *специальным*, если для его решения используют специальные функции, т. е. особенно важные неэлементарные функции, подробно изученные и протабулированные). Нелинейным уравнениям второго и более высоких порядков посвящены главы 6, 7. В двух последних главах приводятся линейные и нелинейные системы уравнений.

Следует иметь в виду, что терминология справочника в отдельных случаях отступает от терминологии других изданий, в частности уравнение с первым интегралом в справочнике Камке названо уравнением в полных дифференциалах (второго или более высокого порядка).

Пример 14.3. Уравнения 1-го порядка в полных дифференциалах помещены в справочнике под номерами 1.227, 1.245, 1.248, 1.251, 1.263, 1.270, 1.271, 1.273, 1.274, 1.285, 1.288, 1.290 и т. д. Примеры интегрирующих множителей имеются под номерами 1.122, 1.138, 1.154, 1.171, 1.199, 1.239, 1.243, 1.244, 1.246, 1.252, 1.255, 1.260, 1.275 и т. д.

Первые две части справочника посвящены теории уравнений.

Основные упражнения

14.1. Выписать из главы 1 (третья часть) названного справочника Камке по пять примеров:

а) элементарных уравнений Риккати; б) уравнений, алгебраических относительно производных вместе с ОР этих уравнений.

14.2. Выделить из глав 6 и 7 названного справочника Камке по три уравнения с первыми интегралами (уравнений в полных дифференциалах по терминологии справочника).

14.3. Указать пять обобщенно-однородных уравнений из главы 6 справочника.

14.4. Решить задачи 638—641, 647, 648, 658—661, 669, 670, 673, 674, 676—681 [1].

Дополнительные упражнения

14.5. Поставить конкретные (численные) начальные задачи для уравнений, указанных в упражнениях 14.1—14.3, и выделить соответствующие частные решения.

14.6. Решить задачи 682, 683, 687, 642, 662—666, 671, 672, 675 [1].

14.7. Разобрать задачу о погоне ([1], раздел III, § 4.4).

IV. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОБЩЕГО ВИДА

15. РАЗРЕШИМОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

15.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

При построении математических моделей используют метод пространства состояний. Применение этого метода основано на подборе числовых характеристик (параметров состояния), описывающих в совокупности однозначным образом состояние исследуемой системы. Характеристики системы являются функциями времени. Модель выражает соотношение между величинами параметров и скоростью их изменения. Она оказывается, естественно, системой дифференциальных уравнений относительно параметров состояния. Если скорости изменения параметров выражаются через сами параметры и время, то модель имеет нормальную форму. Модель стационарна или автономна, если в ее описании время в явном виде не участвует.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (далее просто система) имеет *нормальную форму*, если старшая производная каждой искомой функции входит лишь в одно уравнение системы и это уравнение разрешено относительно указанной старшей производной.

Пример 15.1. Система

$$D^3x = f(t,\ x,\ Dx,\ D^2x,\ y),\ Dy = g(t,\ x,\ Dx,\ D^2x,\ y)$$

имеет нормальную форму.

С помощью введения вспомогательных неизвестных систему произвольного порядка в нормальной форме можно привести к равносильной системе 1-го порядка в нормальной форме.

Пример 15.2. После введения новых искомых функций

$$x_1 = x,\ x_2 = Dx,\ x_3 = D^2x,\ x_4 = y$$

система примера 15.1 переходит в равносильную систему 1-го порядка

$$Dx_1 = x_2,\ Dx_2 = x_3,\ Dx_3 = f(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4),\ Dx_4 = g(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4).$$

Система 1-го порядка в нормальной форме в общем случае имеет вид

$$Dx_i = f_i(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n),\ 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{15.1}$$

Система (15.1) будет основным объектом исследования в настоящем разделе.

Преобразование системы произвольного порядка к системе 1-го порядка имеет принципиальное значение, так как общая теория уравнений и систем произвольного порядка содержится, по сути дела, в общей теории систем 1-го порядка. Практическое же значение преобразования к системам 1-го порядка с помощью введения дополнительных неизвестных сравнительно невелико, так как оно связано с увеличением размерности системы, влекущим за собой усложнение пространства, в котором располагаются решения системы.

Важный класс составляют *стационарные* (или *автономные*) *системы*, в которых явно отсутствует независимая переменная t, в частности стационарные системы 1-го порядка в нормальной форме

$$\mathrm{D}\mathrm{x}_i = f_i(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n), \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Любую систему (15.1) с помощью повышения размерности на единицу можно заменить равносильной стационарной системой 1-го порядка в нормальной форме. С этой целью следует ввести: дополнительную искомую функцию x_{n+1}, заменив ею переменную t в правых частях (15.1), новый аргумент τ, заменив им переменную t в операторе D и положив $f_{n+1}(\mathrm{x}_{n+1}, \mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n) = 1$. В результате получим равносильную систему

$$\mathrm{D}_\tau \mathrm{x}_j = f_j(\mathrm{x}_{n+1}, \mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n), \quad 1 \leqslant j \leqslant n+1.$$

Переход от системы (15.1) к соответствующей стационарной системе является естественным в случаях, когда переменные t и x_i в рассматриваемой задаче имеют одинаковую природу. В остальных случаях этот переход носит формальный характер. Например, переход от линейной системы к соответствующей стационарной системе существенно усложняет аналитический тип системы.

15.2. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Если положить

$$\mathrm{x} :: = (\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)^\mathrm{T}, \ (t, \mathrm{x}) :: = (t, \mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)^\mathrm{T}, \ f :: = (f_1, \ldots, f_n)^\mathrm{T},$$

то систему (15.1) можно заменить равносильным векторным уравнением

$$\mathrm{D}\mathrm{x} = f(t, \mathrm{x}), \ (t, \mathrm{x}) \in G \subset R^{n+1}. \tag{15.2}$$

Дальше векторную функцию f считаем непрерывной на области G.

Решением уравнения (15.2) назовем дифференцируемую векторную функцию $x : I \to R^n$, где I — промежуток из R, такую, что подстановка $\mathrm{x} := x$ обращает (15.2) в тождество на I:

$$Dx(t) = f(t, x(t)), \ \forall t \in I. \tag{15.3}$$

Если, кроме того, $x(s) = \xi$, то функция x разрешает задачу Коши

$$\mathrm{D}\mathrm{x} = f(t, \mathrm{x}), \ (t, \mathrm{x}) \in G; \ \mathrm{x}|_{t=s} = \xi, \ s \in I. \tag{15.4}$$

Интегральный критерий. *Для того чтобы непрерывная функция $x : I \to R^n$ была решением задачи Коши (15.4), необходи-*

мо и достаточно выполнение векторного интегрального тождества

$$x(t) = \xi + \int_s^t f(\tau,\ x(\tau))\, d\tau,\ \forall t \in I. \tag{15.5}$$

◊ $\Rightarrow$ Если x — решение задачи Коши (15.4), то выполняется тождество (15.3), интегрируя которое при $t := \tau$ от $\tau = s$ до $\tau = t$, получаем

$$x(t) - x(s) = \int_s^t f(\tau,\ x(\tau))\, d\tau,\ \forall t \in I,$$

что в силу $x(s) = \xi$ равносильно (15.5).

$\Leftarrow$ При непрерывной x композиция $f(\tau,\ x(\tau))$ также непрерывна по τ, поэтому интеграл, а с ним правая и левая части (15.5) дифференцируемы по t. Дифференцируя (15.5), приходим к (15.3), т. е. x — решение (15.2). Кроме того, из (15.5) следует, что $x(s) = \xi + 0 = \xi$. Таким образом, x разрешает задачу (15.4). ■

В качестве нормы вектора x для наглядности используем *евклидову* или *сферическую* норму

$$|\mathrm{x}| ::= \Big(\sum_k \mathrm{x}_k^2\Big)^{1/2}.$$

Напомним, что для $|\mathrm{x}|$, в частности, справедливо ($a \in R$)

$$|\mathrm{x} + \mathrm{y}| \leqslant |\mathrm{x}| + |\mathrm{y}|,\ |a\mathrm{x}| = |a| \cdot |\mathrm{x}|,\ \big||\mathrm{x}| - |\mathrm{y}|\big| \leqslant |\mathrm{x} - \mathrm{y}|,$$

$$\Big|\int_\alpha^\beta x(\tau)\, d\tau\Big| \leqslant \Big|\int_\alpha^\beta |x(\tau)|\, d\tau\Big|.$$

Решение проблем общей теории дифференциальных уравнений (однозначная разрешимость начальной задачи, непрерывная зависимость решений от начальных значений и от параметров и т. д.) не зависит от выбора нормы в пространстве R^n, так как в конечномерном векторном пространстве все нормы эквивалентны. В качестве нормы вектора вместо $|\mathrm{x}|$ можно использовать любую из норм $|\mathrm{x}|_Q$ (см. гл. 9) или октоэдрическую норму $\|\mathrm{x}\|$ (см. гл. 8) и т. д.

15.3. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ

Пусть функция f определена на области $G \subset R^{n+1}$. При достаточно малом $\rho > 0$ замкнутый цилиндр

$$V : |t - s| \leqslant \rho,\ |\mathrm{x} - \xi| \leqslant \rho$$

расположен в G. Если функция f непрерывна на G, то она ограничена на компакте V, т. е. существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$|f(t,\ \mathrm{x})| \leqslant M,\ \forall (t,\ \mathrm{x}) \in V.$$

Положим

$$\delta ::= \min\{\rho,\ \rho/M\},\ \delta > 0.$$

Теорема Пеано. *Пусть функция f непрерывна на области G и точка (s, ξ) лежит в G. Тогда задача Коши (15.4) имеет решение, определенное на отрезке $[s-\delta,\ s+\delta]$.*

◇ Докажем существование решения на $[s,\ s+\delta]$ (для отрезка $[s-\delta,\ s]$ доказательство аналогично). Обозначим

$$A ::= \{s + k\delta 2^{-m} \mid m \in N;\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2^m\}.$$

Для каждого натурального m положим

$$t_k ::= s + k\delta 2^{-m},\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2^m,$$

и построим функцию $x^m : [s,\ s+\delta] \to R^n$ следующим образом:

$$x^m(t) = \xi + f(s,\xi)(t-s),\ \forall t \in [s,\ t_1] \text{ (в частности } x^m(s) = \xi),$$

$$x^m(t) = \xi + \sum_{j=0}^{k-1} f(t_j,\ x^m(t_j))(t_{j+1} - t_j) + f(t_k,\ x^m(t_k))(t - t_k),$$

$$\forall t \in [t_k,\ t_{k+1}],\ k = 1,\ \ldots,\ 2^m - 1$$

или

$$\left.\begin{aligned} x^m(t) &= \xi + \int_s^t f(s,\ x^m(s))\,d\tau,\ \forall t \in [s,\ t_1], \\ x^m(t) &= \xi + \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t_j,\ x^m(t_j))\,d\tau + \int_{t_k}^{t} f(t_k,\ x^m(t_k))\,d\tau,\ \forall t \in [t_k,\ t_{k+1}]. \end{aligned}\right\} \tag{15.6}$$

Если ввести вспомогательную кусочно-постоянную функцию $\gamma_m : [s,\ s+\delta] \to R$ такую, что

$$\gamma_m(t) = t_k,\ \forall t \in [t_k,\ t_{k+1}[,\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2^m - 1,$$

$$\gamma_m(s+\delta) = t_{2^m - 1},$$

то, используя свойство аддитивности интеграла, представление (15.6) можно записать в виде

$$x^m(t) = \xi + \int_s^t f(\gamma_m(\tau),\ x^m(\gamma_m(\tau)))\,d\tau,\ \forall t \in [s,\ s+\delta]. \tag{15.7}$$

Из формулы (15.7) следует, что:

1) функции x^m ограничены одной и той же константой, так как

$$|x^m(t) - \xi| \leqslant M \cdot \delta,\ \forall t \in [s,\ s+\delta],\ \forall m;$$

2) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0,\ \forall t'',\ t' \in [s,\ s+\delta],\ |t'' - t'| \leqslant \delta_\varepsilon \Rightarrow |x^m(t'') - x^m(t')| \leqslant \varepsilon,\ \forall m$, так как

$$|x^m(t'') - x^m(t')| \leqslant M \cdot |t'' - t'|.$$

Докажем, что из функциональной последовательности (x^m) можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на $[s,\ s+\delta]$. Перенумеруем каким-нибудь образом элементы счетного множества A:

$$A = (\tau_1,\ \tau_2,\ \ldots).$$

Последовательность $(x^m(\tau_1))$ ограничена, поэтому по принципу выбора из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $(x^{m_1(k)}(\tau_1))$. Аналогично из ограниченной последовательности $(x^{m_1(k)}(\tau_2))$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $(x^{m_2(k)}(\tau_2))$ и т. д. Подпоследовательность $\left(x^{m_k(k)}\right)$ сходится в точках множества A. Для произвольного $\varepsilon > 0$ на основании условия 2 строим число $\delta_\varepsilon > 0$. На каждом интервале I_{δ_ε} длины δ_ε и

$$I_{\delta_\varepsilon} \cap [s, s+\delta] \neq \varnothing$$

найдется точка $\tau \in A$. Последовательность $\left(x^{m_k}(\tau)\right)$ сходится, и поэтому по критерию Коши

$$\exists \lambda_\varepsilon, \ \forall k_1, k_2 \geqslant \lambda_\varepsilon \Rightarrow \left| x^{m_{k_1}}(\tau) - x^{m_{k_2}}(\tau) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Из неравенства

$$\left| x^{m_{k_1}}(t) - x^{m_{k_2}}(t) \right| \leqslant \left| x^{m_{k_1}}(t) - x^{m_{k_1}}(\tau) \right| + \left| x^{m_{k_1}}(\tau) - x^{m_{k_2}}(\tau) \right| + \\ + \left| x^{m_{k_2}}(\tau) - x^{m_{k_2}}(t) \right|$$

следует, что

$$\forall k_1, k_2 \geqslant \lambda_\varepsilon \Rightarrow \left| x^{m_{k_1}}(t) - x^{m_{k_2}}(t) \right| \leqslant 3\varepsilon, \ \forall t \in I_{\delta_\varepsilon} \cap [s, s+\delta].$$

Следовательно, на основании критерия Коши равномерной сходимости последовательность $\left(x^{m_k}\right)$ сходится равномерно на любом непустом множестве $I_{\delta_\varepsilon} \cap [s, s+\delta]$, т. е. сходится локально равномерно на отрезке $[s, s+\delta]$. Множество $[s, s+\delta]$ компактное, поэтому последовательность $\left(x^{m_k}\right)$ сходится равномерно на всем отрезке $[s, s+\delta]$. Предельная функция x непрерывна по теореме Стокса — Зейделя.

Покажем, что функция x удовлетворяет интегральному тождеству (15.5). На основании

$$\forall \varepsilon > 0, \ \forall m \geqslant \nu_\varepsilon :: = \log_2 \frac{\delta}{\varepsilon} \Rightarrow |\gamma_m(t) - t| \leqslant \varepsilon, \ \forall t \in [s, s+\delta]$$

последовательность $(\gamma_m(t))$ при $m \to \infty$ на отрезке $[s, s+\delta]$ равномерно сходится к t. Функция f равномерно непрерывна на компакте V по теореме Кантора, поэтому $\left(f\left(\gamma_{m_k}(t), x^{m_k}\left(\gamma_{m_k}(t)\right)\right)\right)$ равномерно сходится к $f(t, x(t))$ на $[s, s+\delta]$ при $k \to \infty$. Полагая $m = m_k$ в равенстве (15.7) и переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$x(t) = \xi + \int_s^t f(\tau, x(\tau))\, d\tau, \ \forall t \in [s, s+\delta],$$

т. е. x удовлетворяет интегральному тождеству (15.5). Для завершения доказательства достаточно сослаться на интегральный критерий. ■

Графики функций x^m, а также и сами эти функции, называют *ломаными Эйлера.*

Функциональную последовательность со свойствами 1 и 2, указанными в доказательстве теоремы Пеано, называют соответственно *равномерно ограни-*

ченной и *равностепенно непрерывной*. В процессе доказательства теоремы было по существу установлено следующее утверждение, известное как *теорема Арцела: из всякой последовательности, равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной на ограниченном промежутке, можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность*.

Следствие (теорема существования Пеано для уравнения n-го порядка в нормальной форме). *Пусть функция f непрерывна на области $G \subset R^{n+1}$ и точка $(s, \xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ входит в G. Тогда задача Коши*

$$D^n x = f(t, x, Dx, \ldots, D^{n-1}x), \quad D^k x\,|_{t=s} = \xi_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

имеет решение, определенное на отрезке $[s-\delta, s+\delta]$, $\delta > 0$.

Для доказательства следствия достаточно перейти от уравнения к равносильной системе первого порядка и воспользоваться доказанной выше теоремой Пеано для системы.

Основные упражнения

15.1. Привести системы к нормальной форме в задачах 1085—1090 [1]. Заменить построенные системы равносильными системами первого порядка. Записать системы первого порядка в виде векторных уравнений.

15.2. С помощью вспомогательных уравнений найти общие решения систем 1061—1064 [1].

15.3. Проинтегрировать уравнение

$$Dx = \begin{cases} |t|^{\alpha} \cdot |x|^{\beta}, & t \neq 0 \wedge x \neq 0, \\ 0, & t = 0 \vee x = 0 \end{cases}$$

и вывести условия на α и β, при выполнении которых задача Коши для данного уравнения с начальным условием $x\,|_{t=0} = 0$:

а) разрешима; б) однозначно разрешима.

15.4. Оценить длину δ интервала существования решения задачи Коши

$$D\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{10} - x_2^2 \\ -\dfrac{x_2}{10} \end{pmatrix}, \quad |x| \leqslant 2; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Построить ломаные Эйлера с шагом $h = 0{,}1$ на $[-\delta, \delta]$.

15.5. На отрезке $[0; 1]$ построить ломаные Эйлера для задачи Коши

$$Dx = tx, \quad x\,|_{t=0} = 1$$

с шагом $h = 0{,}2$. Оценить отклонение $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\tilde{x}(t) - x(t)|$ ломаной Эйлера $\tilde{x}$ от истинного решения x данной задачи Коши.

Дополнительные упражнения

15.6. Двумерная система

$$\begin{cases} Dx = u(x, y) \\ Dy = v(x, y) \end{cases}, \quad (x, y) \in G \subset R^2$$

называется *системой Еругина*, если пара функций u и v удовлетворяет условиям Даламбера — Эйлера (или условиям Коши — Римана), т. е. тождественно на G выполняются соотношения:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Такие системы с помощью замены $z=x+iy$, $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ приводятся к элементарному уравнению с комплекснозначными решениями

$$Dz=f(z),$$

интегрируя которое и отделяя действительную и мнимую части, получаем общее решение исходной системы. Решить задачи 1091, 1092 [1].

15.7. Построить функцию $f(t, x)$, определенную на R^2, непрерывную по (t, x) при $(t, x)\neq(0, 0)$ и такую, что $f(t, 0)$ непрерывна по t при $t=0$ и $f(0, x)$ непрерывна по x при $x=0$, так, чтобы начальная задача

$$Dx=f(t, x),\quad x|_{t=0}=0$$

не имела решения.

15.8. Построить ломаные Эйлера для задачи Коши

$$Dx=1+x^2;\quad x|_{t=0}=0$$

на отрезке $[0; 2]$ в случаях: а) $h=1$, б) $h=0{,}5$, в) $h=0{,}1$. Истолковать поведение ломаных на правом конце отрезка $[0; 2]$, рассмотрев общее решение уравнения. Оценить длину δ промежутка, на котором заведомо существует решение данной задачи Коши.

15.9. Пусть f непрерывна и ограничена на вертикальной полосе

$$G=\{(t, x)\mid \alpha<t<\beta\}.$$

Доказать, что любая задача Коши $(\alpha<s<\beta,\ \xi\in R)$

$$Dx=f(t, x),\quad x|_{t=s}=\xi$$

имеет на $]\alpha, \beta[$ нижнее решение $\underline{x}$ и верхнее решение $\overline{x}$ такие, что для любого решения x данной задачи выполняется неравенство $\underline{x}(t)\leqslant x(t)\leqslant\overline{x}(t)$, $\forall t\in$ $\in]\alpha, \beta[$.

15.10. На примере задачи

$$D\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1^{2/3}\\ x_1+x_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}_{t=0}=\begin{pmatrix} 0\\ 1\end{pmatrix}$$

показать, что не всякое решение задачи Коши может быть получено в виде предела последовательности ломаных Эйлера.

15.11. Доказать, что если задача Коши

$$Dx=f(t, x),\quad x|_{t=s}=\xi$$

с непрерывной правой частью f однозначно разрешима, то последовательность ломаных Эйлера сходится.

16. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

16.1. УСЛОВИЕ ЛИПШИЦА

В предыдущей главе была доказана теорема Пеано существования решения задачи Коши для векторного уравнения в нормальной форме с непрерывной правой частью. Однако для единственности решения недостаточно одной лишь непрерывности. Например, начальная задача

$$\mathrm{D}\mathrm{x} = 3\mathrm{x}^{2/3}, \quad \mathrm{x}|_{t=\mathrm{s}} = 0$$

имеет бесконечно много решений. Действительно, наряду с решением $x = 0$ существует еще однопараметрическое семейство решений

$$x(t) = \begin{cases} (t-c)^3, & t \leqslant c, \\ 0, & t > c, \end{cases}$$

где $c \leqslant s$. Можно указать и другие решения. Эта ситуация является типичной для уравнений с ветвлением решений, т. е. с неединственностью.

Появление уравнений с ветвлением решений при описании *детерминированных процессов* (процессов, будущее и прошлое которых однозначно определяется начальным состоянием) свидетельствует о том, что уравнение неполно описывает соответствующую физическую (или иную) задачу.

Для обеспечения единственности решений правая часть уравнения, кроме непрерывности, должна обладать дополнительными свойствами, например удовлетворять *условию Липшица* по x на G, т. е.

$$|f(t, \mathrm{x}) - f(t, \mathrm{y})| \leqslant L|\mathrm{x} - \mathrm{y}|, \ \forall (t, \mathrm{x}), (t, \mathrm{y}) \in G,$$

где L — некоторая постоянная (*постоянная Липшица*).

Напоминание. *Для линейного оператора* $A: R^n \to R^m$

$$|A| :: = \sup_{h \neq 0} \frac{|Ah|}{|h|}, \ h \in R^n.$$

В том случае, если в пространстве R^m выбран некоторый базис, задание линейного оператора A равносильно заданию m линейных функционалов $A_k: R^n \to R$, т. е. $A = (A_1, \ldots, A_m)$. Для любого $h \in R^n$

$$|Ah| = \left(\sum_{k=1}^{m} (A_k h)^2 \right)^{1/2} \geqslant |A_k h|$$

и, следовательно,

$$|A_k| \leqslant |A|, \ \forall k = 1, 2, \ldots, m.$$

Для функции $f: G \to R^n$ частная производная $f'_{\mathrm{x}}(t, \mathrm{x})$ представляет собой линейный оператор из R^n в R^n. Впрочем, производную $f'_{\mathrm{x}}(t, \mathrm{x})$ часто отождествляют с матрицей Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mathrm{x}_1}(t, \mathrm{x}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial \mathrm{x}_n}(t, \mathrm{x}) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial \mathrm{x}_1}(t, \mathrm{x}) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial \mathrm{x}_n}(t, \mathrm{x}) \end{pmatrix}.$$

Лемма об условии Липшица. *Если на выпуклом по* x *множестве $V \subset R^{n+1}$ существует ограниченная частная производная от f по* x, *т. е.*

$$|f'_x(t, x)| \leqslant K, \ \forall (t, x) \in V,$$

в частности, если f'_x непрерывна на выпуклом компактном множестве V, то f удовлетворяет условию Липшица по x *на V.*

◇ Пусть $f_k : V \to R$ — координатные функции для f. Тогда

$$f'_x = (f'_{1x}, \ldots, f'_{nx})^{\mathrm{T}} \text{ и } |f'_{kx}(t, x)| \leqslant K, \ \forall (t, x) \in V, \ \forall k = 1, 2, \ldots, n.$$

Так как

$$|f(t, x) - f(t, y)| = \left(\sum_{k=1}^{n} (f_k(t, x) - f_k(t, y))^2\right)^{1/2},$$

то, используя формулу конечных приращений для функций f_k, получаем

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} K^2 |x - y|^2\right)^{1/2} = K\sqrt{n} \cdot |x - y|, \ \forall (t, x), (t, y) \in V.$$

Таким образом, функция f удовлетворяет условию Липшица по x на V с постоянной Липшица $L :: = K\sqrt{n}$. ■

Отметим, однако, что функция f может удовлетворять условию Липшица по x и в тех случаях, когда производная по x от f и не существует. Примером служит функция $f(t, x) :: = |x| + t$, которая удовлетворяет условию Липшица по x, но не имеет производной по x ни в одной точке прямой $x = 0$.

16.2. ЛЕММА ГРОНВОЛА

В теории дифференциальных уравнений часто возникают задачи, приводящие к дифференциальным или интегральным неравенствам. Рассмотрим один из простейших результатов, относящийся к интегральным неравенствам.

Лемма Гронвола. *Если неотрицательная непрерывная функция $u : |a, b| \to R$ удовлетворяет интегральному неравенству*

$$u(t) \leqslant \alpha + \left|\int_s^t \beta u(\tau)\, d\tau\right|, \ \forall t \in |a, b|, \ s \in |a, b|,$$

то

$$u(t) \leqslant \alpha e^{|\beta(t-s)|}, \ \forall t \in |a, b|.$$

◇ Если $t \geqslant s$, то

$$u(t) \leqslant \alpha + \int_s^t |\beta| . u(\tau)\, d\tau.$$

Введем вспомогательную дифференцируемую функцию $v : [s, b| \to R$:

$$v(t) :: = \alpha + \int_s^t |\beta|\, u(\tau)\, d\tau.$$

Тогда $\mathrm{D}v = |\beta| u$, откуда $\mathrm{D}v \leqslant |\beta| v$ или $\mathrm{D}\left(e^{-|\beta|t} v(t)\right) \leqslant 0$. Последнее неравенство означает, что функция $e^{-|\beta|t} v(t)$ убывает на промежутке $[s, b|$, и поэтому

$$e^{-|\beta|t} v(t) \leqslant e^{-|\beta|s} v(s), \ \forall t \in [s, b|$$

или

$$v(t) \leqslant \alpha e^{|\beta|(t-s)}.$$

Так как $u(t) \leqslant v(t)$, то

$$u(t) \leqslant \alpha e^{|\beta|(t-s)}, \forall t \in [s, b|.$$

Аналогично рассматривается случай $t \leqslant s$. ■

16.3. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ

Теорема Пикара — Линделефа. *Пусть функция f непрерывна на области $G \subset R^{n+1}$ и удовлетворяет условию Липшица по x в некоторой окрестности $U \subset G$ точки (s, ξ). Тогда задача Коши*

$$\mathrm{Dx} = f(t, \mathrm{x}), \ \mathrm{x}|_{t=s} = \xi$$

локально однозначно разрешима, решение x определено, по крайней мере, на отрезке $[s-h, s+h]$, $h = \delta$ и может быть построено по методу последовательных приближений:

$$x^0(t) ::= \xi, \ x^m(t) ::= \xi + \int_s^t f(\tau, x^{m-1}(\tau))\, \mathrm{d}\tau,$$

$$x(t) ::= \lim_{m\to\infty} x^m(t) = \xi + \sum_{m=1}^{\infty} (x^m(t) - x^{m-1}(t)).$$

◇ Обозначим через V замкнутый цилиндр $|t-s| \leqslant \rho$, $|\mathrm{x}-\xi| \leqslant \rho$, $\rho > 0$, расположенный в окрестности U. Пусть $|f(t, \mathrm{x})| \leqslant M$, $\forall (t, \mathrm{x}) \in V$, $M > 0$. Если положить $h ::= \min\{\rho, \rho/M\}$, то все последовательные приближения x^m могут быть построены на отрезке $[s-h, s+h]$, так как $|x^0(t) - \xi| = 0 < \rho$ и, следовательно,

$$|x^m(t) - \xi| = \left|\int_s^t f(\tau, x^{m-1}(\tau))\, \mathrm{d}\tau\right| \leqslant M|t-s| \leqslant \rho, \ \forall t \in [s-h, s+h].$$

Покажем по индукции, что для любого натурального m

$$|x^m(t) - x^{m-1}(t)| \leqslant ML^{m-1}\frac{|t-s|^m}{m!}, \ \forall t \in [s-h, s+h],$$

где L — постоянная Липшица функции f на окрестности U;

$$m = 1, \ |x^1(t) - x^0(t)| = \left|\int_s^t f(\tau, \xi)\, \mathrm{d}\tau\right| \leqslant M|t-s|,$$

$$m > 1, \ |x^m(t) - x^{m-1}(t)| = \left|\int_s^t (f(\tau, x^{m-1}(\tau)) - f(\tau, x^{m-2}(\tau)))\, \mathrm{d}\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_s^t L \mid x^{m-1}(\tau) - x^{m-2}(\tau) \mid d\tau \right| \leqslant \left| ML^{m-1} \int_s^t \frac{|\tau - s|^{m-1}}{(m-1)!} d\tau \right| =$$

$$= ML^{m-1} \frac{|t-s|^m}{m!}.$$

Функциональный ряд

$$\xi + \sum_{k=1}^{\infty} (x^k(t) - x^{k-1}(t))$$

с частными суммами $\xi + \sum_{k=1}^{m} (x^k(t) - x^{k-1}(t)) = x^m(t)$ на отрезке $[s-h, s+h]$ имеет сходящуюся числовую мажоранту

$$|\xi| + \sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1} \frac{h^k}{k!}$$

и по признаку Вейерштрасса сходится равномерно на $[s-h, s+h]$. Сумма x по теореме Стокса — Зейделя непрерывна на отрезке $[s-h, s+h]$. С помощью предельного перехода в соотношении

$$x^m(t) = \xi + \int_s^t f(\tau, x^{m-1}(\tau)) d\tau$$

убеждаемся в том, что x удовлетворяет интегральному тождеству

$$x(t) = \xi + \int_s^t f(\tau, x(\tau)) d\tau, \ \forall t \in [s-h, s+h],$$

и на основании интегрального критерия является решением исходной задачи Коши.

Если допустить, что задача Коши имеет еще одно решение $\widetilde{x}$, определенное на отрезке $[s-\widetilde{h}, s+\widetilde{h}]$, $\widetilde{h} > 0$, то на основании условия Липшица

$$|x(t) - \widetilde{x}(t)| \leqslant \left| \int_s^t L \cdot |x(\tau) - \widetilde{x}(\tau)| d\tau \right|, \ \forall t, \ |t-s| \leqslant \min\{h, \widetilde{h}\},$$

и по лемме Гронвола $|x(t) - \widetilde{x}(t)| = 0$. Таким образом,

$$x(t) = \widetilde{x}(t), \ \forall t, \ |t-s| \leqslant \min\{h, \widetilde{h}\},$$

т. е. решение задачи Коши локально единственно. ■

Отметим, что если в теореме Пикара — Линделефа функция f удовлетворяет условию Липшица на G (глобальному условию Липшица), то задача Коши глобально однозначно разрешима.

Следствие (теорема Пикара — Линделефа для линейного векторного уравнения). *Если матричная функция A и векторная функция f непрерывны на промежутке $I \subset R$, то при любых (s, ξ), $s \in I$, $\xi \in R^n$, задача Коши*

$$\mathrm{D}\mathrm{x} = A(t)\,\mathrm{x} + f(t)$$
$$\mathrm{x}|_{t=s} = \xi$$

однозначно разрешима.

16.4. ТЕОРЕМА ОСГУДА ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

Лемма об односторонних производных. Если векторная функция $\varphi:[a, b]\to R^n$ дифференцируема, то функция $|\varphi|:[a, b]\to R$ имеет правую производную $D_+|\varphi(t)|$ при $a\leqslant t<b$, левую производную $D_-|\varphi(t)|$ при $a<t\leqslant b$, причем $|D_\pm|\varphi(t)||\leqslant$ $\leqslant|D\varphi(t)|$.

◇ Если $\varphi(t)\neq 0$, то, используя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$|D_\pm|\varphi(t)||=\left|D_\pm\left(\sum_k \varphi_k^2(t)\right)^{1/2}\right|=\frac{\left|\sum\limits_k \varphi_k(t)\,D\varphi_k(t)\right|}{|\varphi(t)|}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\left(\sum\limits_k \varphi_k^2(t)\right)^{1/2}\left(\sum\limits_k (D\varphi_k(t))^2\right)^{1/2}}{|\varphi(t)|}=|D\varphi(t)|.$$

Если же $\varphi(t)=0$, то

$$|D_\pm|\varphi(t)||=\left|\lim_{h\to\pm 0}\frac{|\varphi(t+h)|}{h}\right|=\lim_{h\to 0}\left|\frac{D\varphi(t)\,h+o(h)}{h}\right|=|D\varphi(t)|. \blacksquare$$

Теорема Осгуда. *Пусть функция f непрерывна на области $G\subset R^{n+1}$ и удовлетворяет неравенству*

$$|f(t, x)-f(t, y)|\leqslant\Phi(|x-y|),\ \forall(t, x),\ (t, y)\in G,$$

где функция Φ непрерывна, $\Phi(u)>0$ при $u>0$ и $\int\limits_{+0}\frac{du}{\Phi(u)}=$ $=+\infty$. *Тогда для любой точки $(s, \xi)\in G$ задача Коши*

$$Dx=f(t, x),\ x|_{t=s}=\xi$$

однозначно разрешима.

◇ Доказательство проведем от противного, предположив существование двух решений x и $\tilde{x}$ рассматриваемой задачи Коши, причем при $t_1>s$ $x(t_1)\neq$ $\neq\tilde{x}(t_1)$ (случай $t_1<s$ сводится к указанному заменой t на $-t$).

На основании леммы об односторонних производных

$$\left|D_\pm\left|x(t)-\tilde{x}(t)\right|\right|\leqslant\left|D(x(t)-\tilde{x}(t))\right|=\left|f(t, x(t))-f(t, \tilde{x}(t))\right|\leqslant$$

$$\leqslant\Phi(|x(t)-\tilde{x}(t)|).$$

Полагая $\rho(t)::=|x(t)-\tilde{x}(t)|$, получаем

$$|D_\pm\rho(t)|\leqslant\Phi(\rho(t)),$$

и так как $\rho(t_1)>0$, то

$$|D_\pm\rho(t_1)|<2\Phi(\rho(t_1)).$$

Рассмотрим вспомогательную задачу Коши

$$Du=2\Phi(u),\ u|_{t=t_1}=\rho(t_1)>0.$$

Непосредственное интегрирование уравнения показывает, что свойства функции Φ гарантируют существование такого решения u, что $u(t) > 0$, $\forall t \leqslant t_1$.

Так как

$$D_{-}\rho(t_1) < 2\Phi(\rho(t_1)) = Du(t_1),$$

то найдутся $\varepsilon > 0$ такие, что для $t_1 - \varepsilon < t < t_1$, $\rho(t) > u(t) > 0$. Положим $\varepsilon_* :: = \sup\{\varepsilon\}$ и $t_* :: = t_1 - \varepsilon_*$. Тогда $\rho(t) > u(t)$, $t_* < t < t_1$. Если $t_* \leqslant s$, то $\rho(s) \geqslant u(s) > 0$, что противоречит условию $\rho(s) = |x(s) - \tilde{x}(s)| = 0$.

Если же $t_* > s$, то из равенства $\rho(t_*) = u(t_*)$ и неравенства $D_{+}\rho(t_*) \leqslant \leqslant Du(t_*)$ следует, что найдется такое t_2, $t_* < t_2 < t_1$, при котором

$$\rho(t_2) \leqslant u(t_2) \text{ (?!)}.$$

Таким образом, предположение о существовании двух решений приводит к противоречию, т. е. исходная задача Коши однозначно разрешима. ■

16.5. ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ

Методы построения приближенных решений уравнений условно разделяются на два класса. К первому классу относятся методы построения *аналитических приближенных решений*, т. е. функций, близких к истинному решению на всем промежутке существования решения или на части такого промежутка. К первому классу принадлежат метод последовательных приближений для уравнений, удовлетворяющих условиям теоремы Пикара — Линделефа, и метод неопределенных коэффициентов или метод коэффициентов разложения Тейлора для голоморфных уравнений (см. гл. 26—28).

Во второй класс входят методы построения *численных приближенных решений*, т. е. таблиц приближенных значений искомого решения при отдельных значениях аргумента. Численным методом является метод ломаных Эйлера (см. гл. 15). Этот метод, в частности, часто используется при определении отправных значений решения, для которых добиваются повышенной точности за счет выбора мелкого шага разбиения промежутка изменения аргумента.

Опишем схемы еще двух методов Рунге и Штермера численного интегрирования задачи Коши $\mathrm{Dx} = f(t, \mathrm{x})$, $\mathrm{x}|_{t=t_0} = \mathrm{x}^0$. В качестве шага выберем $h > 0$ и положим $t_j = t_0 + jh$. Допустим, что найдены приближенные значения решения x в точках t_j:

$$\mathrm{y}^j \approx x(t_j),\ 0 \leqslant j \leqslant r.$$

Для применения метода Рунге вычисляем вспомогательные векторы:

$$m_1 :: = f(t_r, \mathrm{y}^r);$$

$$m_2 :: = f\left(t_r + \frac{h}{2}, \mathrm{y}^r + \frac{h}{2} m_1\right);$$

$$m_3 :: = f\left(t_r + \frac{h}{2}, \mathrm{y}^r + \frac{h}{2} m_2\right);$$

$$m_4 :: = f\left(t_r + \frac{h}{2}, \mathrm{y}^r + h m_3\right).$$

Следующее y^{r+1} определяют по основной формуле метода Рунге

$$\mathrm{y}^{r+1} :: = \mathrm{y}^r + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4).$$

Для применения метода Штермера, отправляясь от значений

$$\mathrm{z}^j \approx x(t_j),\ 0 \leqslant j \leqslant r,\ r \geqslant 3,$$

строят вспомогательные векторы:

$$q^r ::= f(t_r, z^r);$$
$$\Delta q^{r-1} ::= q^r - q^{r-1};$$
$$\Delta^2 q^{r-2} ::= \Delta q^{r-1} - \Delta q^{r-2};$$
$$\Delta^3 q^{r-3} ::= \Delta^2 q^{r-2} - \Delta^2 q^{r-3}.$$

Основная формула метода Штермера

$$z^{r+1} ::= z^r + q^r + \frac{1}{2}\Delta q^{r-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q^{r-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q^{r-3}.$$

Существуют формулы оценки погрешностей, т. е. величин

$$\max_j |x(t_j) - y^j|, \ \max_j |x(t_j) - z^j|,$$

как двух описанных, так и других методов численного интегрирования уравнений (см., например, книги: А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. Дифференциальные уравнения (М.: Наука, 1980); Н. С. Бахвалов. Численные методы (М., 1975, т. 1); В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. Вычислительные методы высшей математики (Мн., 1975, т. 2)). Однако практическое значение оценок погрешности, выведенных для уравнений общего вида, невелико, ибо эти оценки часто дают резко завышенное значение для погрешности. Обычно проводят несколько вычислений с шагами h, $h/2$, т$h/4$, ..., останавливаясь, когда результаты вычислений при равных значениях аргумента неразличимы в пределах заданной точности. Плавное изменение найденных значений для приближенного решения и для вспомогательных величин а кже придает правдоподобие предположению о малом отклонении приближенного решения от истинного.

Основные упражнения

16.1. Используя теорему Пикара — Линделефа, доказать однозначную разрешимость задач Коши 421—425 [1]; 221, 222 (а, б) [3]. Оценить длину промежутка существования решения и построить несколько последовательных приближений к искомому решению.

16.2. Методом последовательных приближений найти решения задач Коши 426, 427; 1101, 1102 [1].

16.3. Сформулировать и доказать теорему Пикара — Линделефа для уравнений n-го порядка в нормальной форме. Решить задачи 1107—1110 [1]; 222 (в, г) [3].

16.4. Выделить область однозначной разрешимости уравнений в задаче 225 [3].

16.5. Доказать, что если функция Φ имеет в нуле конечную правую производную и $\Phi(0) = 0$, $\Phi(u) > 0$ при $u > 0$, то

$$\int_{+0} \frac{du}{\Phi(u)} = +\infty.$$

16.6. Построить вычислительную блок-схему для методов Эйлера и Рунге.

16.7. Написать программу на языке типа Фортран для нахождения приближенного решения задачи Коши

$$D\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \cdot x_1 \\ tx_1 + x_2^2 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

методом Эйлера.

Дополнительные упражнения

16.8. Говорят, что функция f удовлетворяет *локальному условию Липшица* по x на множестве G, если для любой точки $(t, \mathrm{x}) \in G$ найдется окрестность $U \subset G$, на которой f удовлетворяет условию Липшица по x. Доказать, что если $f: G \to R^n$ непрерывна и удовлетворяет на G локальному условию Липшица по x, то всякая задача Коши

$$\mathrm{Dx} = f(t, \mathrm{x}), \ \mathrm{x}|_{t=s} = \xi$$

глобально однозначно разрешима.

16.9. Пусть функция f непрерывна на области G и

$$(f(t, \mathrm{x}) - f(t, \mathrm{y}), \mathrm{x} - \mathrm{y}) \leqslant 0, \ \forall (t, \mathrm{x}), (t, \mathrm{y}) \in G,$$

где $(.,.)$ — скалярное произведение. Доказать, что задача Коши

$$\mathrm{Dx} = f(t, \mathrm{x}), \ \mathrm{x}|_{t=s} = \xi$$

имеет единственное решение при $t \geqslant s$. В частности, если непрерывная действительная функция f при фиксированном t убывает по x, то задача Коши имеет единственное решение при $t \geqslant s$.

16.10. Построить задачу Коши с неединственностью, поведение приближенного решения которой на правом конце существенно зависит от выбора шага — малое изменение шага влечет большое изменение решения.

16.11. Доказать теорему Пикара — Линделефа, используя принцип сжатых отображений (см., например, книгу А. Н. Тихонова, А. Б. Васильевой, А. Г. Свешникова «Дифференциальные уравнения» (М.: Наука, 1980, гл. 2, § 7)).

17. СРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЙ И ПРОДОЛЖИМОСТЬ

17.1. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПРОДОЛЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ

На множестве $E \subset R^{n+1}$ рассмотрим уравнение

$$\mathrm{Dx} = f(t, \mathrm{x}), \ (t, \mathrm{x}) \in E \qquad (17.1)$$

с решениями $\mathrm{x} = x(t)$, $t \in I$. Исследуем проблему существования продолженных решений уравнения (17.1) (см. гл. 1).

Лемма. *Если (x^k), $k \geqslant 0$ — последовательность решений (17.1), продолжающих друг друга, т. е. $x^k \subset x^{k+1}$, $k \geqslant 0$, то функция $x = \bigcup x^k$ является решением (17.1), продолжающим любое x^k.*

◇ Пусть I_k — промежуток определения x^k. Тогда из включения $x^k \subset x^{k+1}$ непосредственно следует, что $I_k \subset I_{k+1}$ и что x определено на $I = \bigcup I_k$. Для произвольного отрезка J из I найдется $I_m \supset J$. Сужение x^* функции x на J является сужением x^m на J и поэтому x^* — решение (17.1). Промежуток J произвольный из I, поэтому x — гладкая функция, разрешающая (17.1). ■

Теорема. *Каждое решение уравнения (17.1) является сужением хотя бы одного продолженного решения этого уравнения.*

◇ Будем исследовать продолжимость вправо решения $x = x^0(t)$, $t \in I_0 = [s, b_0|$, где I_0 — либо отрезок $[s, b_0]$, либо полуотрезок $[s, b_0[$. Допустим, что x^0 продолжимо вправо (в противном случае утверждение теоремы тривиально). Если найдется последовательность $(\bar{x}^k)$ решений (17.1) таких, что $\bar{x}^k \subset \bar{x}^{k+1}$ и $\bar{I}_k = [s, b_0 + k[$, то $\bar{x} = \bigcup \bar{x}^k$ разрешает на основании леммы уравнение (17.1) и заведомо продолжено вправо, так как определено для всех $t \geqslant s$. Если же последовательности $(\bar{x}^k)$ не существует, то найдется целое $k_0 \geqslant 0$ такое, что у решения x^0 есть продолжение x^1 на $I_1 = [s, b_0 + k_0]$, но нет продолжения на $[s, b_0 + k_0 + 1]$. Если x^1 — продолженное вправо решение, то теорема доказана. В противном случае найдется целое k_1, $0 \leqslant k_1 \leqslant 9$, такое, что у x^1 есть продолжение x^2 на $I_2 = \left[s, b_0 + k_0 + \frac{k_1}{10}\right]$, но нет продолжения на $\left[s, b_0 + k_0 + \frac{k_1 + 1}{10}\right]$. Если x^2 продолжено вправо, то доказательство завершено. В противном случае продолжаем построение и в результате либо получаем на некотором шаге m продолженное вправо решение x^m, $x^m \supset x^0$, либо приходим к последовательности (x^m), $x^m \subset x^{m+1}$, $I_m = \left[s, b_0 + k_0 + \frac{k_1}{10} + \ldots + \frac{k_m}{10^m}\right]$. На основании леммы $x = \bigcup x^m$ является решением, заведомо определенным на $[s, \beta[$, где $\beta :: = b_0 + k_0 + \frac{k_1}{10} + \ldots + \frac{k_m}{10^m} + \ldots$. Возьмем произвольное $\gamma > \beta$. Тогда найдется номер l такой, что

$$\gamma \geqslant b_0 + k_0 + \frac{k_1}{10} + \ldots + \frac{k_l + 2}{10^l},$$

и поэтому решение x^l (а вместе с тем и решения x^m, $m > l$) и решение x нельзя продолжить на $\left[s, \gamma - \frac{1}{10^l}\right]$, и поэтому нельзя продолжить на $[s, \gamma[$. Следовательно, продолжение вправо решения x возможно лишь на отрезок $[s, \beta]$. Если указанное распространение x на $[s, \beta]$ существует, то оно и будет искомым продолженным вправо решением. В противном случае ту же роль играет само x.

Аналогично производится продолжение влево решений уравнения (17.1). ■

Пусть B — совокупность правых концов промежутков, на которые можно продолжить решение x^0, и положим $\omega = \sup B$. Следующий пример показывает, что уравнение (17.1) может и не обладать решением, продолжающим x^0 на все $[s, \omega[$. Действительно, если рассмотреть дифференциальное уравнение $Dx = 3x^{2/3}$ в области

$$E = \{(t, x) \mid t \in R, \ t^3 < x < t^3 + 2\},$$

то начальная задача $x|_{t=-1} = 0$ имеет решения, продолжимые вправо сколь угодно далеко, но не имеет решения, беспредельно продолжимого вправо.

17.2. КРИТЕРИЙ ПРОДОЛЖИМОСТИ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим уравнение (17.1) в предположении, что E является областью $G \subset R^{n+1}$.

Критерий продолжимости решения. *Если функция f*

непрерывна на G, то для продолжимости решения $x:]\alpha, \beta[\to R^n$ уравнения (17.1) вправо от β (влево от α) необходимо и достаточно, чтобы существовал левый предел $x(\beta - 0) = \lim\limits_{t \to \beta - 0} x(t)$ и $(\beta, x(\beta - 0)) \in G$ (существовал правый предел $x(\alpha + 0) = \lim\limits_{t \to \alpha + 0} x(t)$ и $(\alpha, x(\alpha + 0)) \in G$).

$\diamondsuit$ $\Rightarrow$ Если решение x продолжимо вправо от β, то существует решение $\widetilde{x}:]\alpha, \beta_1] \to R^n$, $\beta_1 > \beta$, такое, что

$$x(t) = \widetilde{x}(t), \ \forall t \in]\alpha, \beta[.$$

Функция $\widehat{x}$ непрерывна в точке β, поэтому

$$x(\beta - 0) = \widetilde{x}(\beta) \text{ и } (\beta, x(\beta - 0)) = (\beta, \widehat{x}(\beta)) \in G.$$

$\Leftarrow$ Построим функцию $x^1:]\alpha, \beta] \to R^n$ по правилу

$$x^1(t) = \begin{cases} x(t), & t \in]\alpha, \beta[, \\ x(\beta - 0), & t = \beta. \end{cases}$$

Так как x является решением уравнения (17.1), то

$$x(t) = \xi + \int_s^t f(\tau, x(\tau))\, d\tau, \ \forall t \in]\alpha, \beta[,$$

где $s \in]\alpha, \beta[$, $\xi = x(s)$ или

$$x^1(t) = \xi + \int_s^t f(\tau, x^1(\tau))\, d\tau, \ \forall t \in]\alpha, \beta[. \tag{17.2}$$

Подынтегральная функция $f(\tau, x^1(\tau))$ непрерывна на промежутке $]\alpha, \beta]$, поэтому, переходя в (17.2) к пределу при $t \to \beta - 0$, получаем

$$x^1(\beta) = \xi + \int_s^\beta f(\tau, x^1(\tau))\, d\tau.$$

Таким образом, равенство (17.2) справедливо и в точке β, т. е. функция x^1 является решением уравнения (17.1) и, очевидно, есть продолжение x на промежуток $]\alpha, \beta]$.

Приняв точку $(\beta, x^1(\beta)) \in G$ за начальную, обозначим x^2 решение уравнения (17.1), определенное на некотором отрезке $[\beta, \beta_1]$, $\beta_1 > \beta$, и удовлетворяющее условию Коши $x^2(\beta) = x^1(\beta)$. Такое решение существует по теореме Пеано. Тогда составная функция

$$\widehat{x}(t) :: = \begin{cases} x^1(t), & t \in]\alpha, \beta], \\ x^2(t), & t \in [\beta, \beta_1] \end{cases}$$

является решением уравнения (17.1), т. е. удовлетворяет интегральному тождеству

$$\widetilde{x}(t) = \xi + \int_s^t f(\tau, \widetilde{x}(\tau))\, d\tau.$$

Действительно, на промежутке $]\alpha, \beta]$ это очевидно. Для $t \in [\beta, \beta_1]$ имеем:

$$\widehat{x}(t) = x^2(t) = x^1(\beta) + \int_\beta^t f(\tau, x^2(\tau))\, d\tau = \xi + \int_s^\beta f(\tau, \widetilde{x}(\tau))\, d\tau +$$

$$+\int_{\beta}^{t} f(\tau, \tilde{x}(\tau))\,d\tau = \xi + \int_{s}^{t} f(\tau, \tilde{x}(\tau))\,d\tau.$$

Следовательно, решение $\tilde{x}$ является продолжением решения x вправо от β.

Для продолжимости влево от α теорема доказывается аналогично. ■

Доказанный критерий продолжимости решения можно сформулировать и так: если функция f непрерывна на области G, то для продолжимости решения $x:]\alpha, \beta[\to R^n$ вправо от β (влево от α) необходимо и достаточно, чтобы точка $(t, x(t))$ при $t \to \beta - 0$ $(t \to \alpha + 0)$ стремилась к некоторой точке области G. Такая форма критерия позволяет охарактеризовать и непродолжимые решения. Например, непродолжимое вправо решение $x:]\alpha, \beta[\to R^n$ уравнения (17.1) характеризуется тем, что точка $(t, x(t))$ не стремится ни к одной точке области G при $t \to \beta - 0$. Уточним поведение непродолжимых решений, для чего предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть функция f непрерывна на области G, $x:]\alpha, \beta[\to R^n$, $\beta < +\infty$, является решением уравнения (17.1) и существует последовательность $(t_n) \to \beta$, $\alpha < t_n < \beta$, такая, что последовательность $(x(t_n))$ сходится к x_0, $(\beta, \mathrm{x}_0) \in G$. Тогда* $\lim\limits_{\to \beta - 0} x(t) = \mathrm{x}_0$.

◇ Доказательство проведем от противного. Пусть $x(t) \not\to \mathrm{x}_0$ при $t \to \beta - 0$, т. е.

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists t_\delta,\ 0 < \beta - t_\delta \leqslant \delta \Rightarrow |x(t_\delta) - \mathrm{x}_0| > \varepsilon_0, \tag{17.3}$$

причем ε_0 выберем столь малым, чтобы замкнутый цилиндр $V: 0 \leqslant \beta - t \leqslant \varepsilon_0$, $|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0| \leqslant \varepsilon_0$ целиком лежал в области G. Функция f непрерывна на V, поэтому существует $M > 1$ такое, что

$$|f(t, \mathrm{x})| \leqslant M,\ \forall (t, \mathrm{x}) \in V.$$

Положим $\delta :: = \dfrac{\varepsilon_0}{2M}$. Так как $\lim\limits_{n \to \infty} x(t_n) = \mathrm{x}_0$, то существует такое t_n, $t_\delta < t_n < \beta$, что

$$|x(t_n) - \mathrm{x}_0| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{17.4}$$

Из неравенств (17.3) и (17.4) на основании теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции следует, что существует t_*, $t_\delta < t_* < t_n$ такое, что

$$|x(t_*) - \mathrm{x}_0| = \varepsilon_0 \text{ и } |x(t) - \mathrm{x}_0| \leqslant \varepsilon_0,\ \forall t \in [t_*, t_n].$$

Последнее неравенство означает, что график решения x при $t \in [t_*, t_n]$ лежит в цилиндре V. Тогда

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \leqslant |x(t_n) - x(t_*)| = \left| \int_{t_*}^{t_n} f(\tau, x(\tau))\,d\tau \right| \leqslant M(t_n - t_*),$$

откуда

$$t_n - t_* \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2M}.$$

С другой стороны,

$$t_n - t_* < \beta - t_\delta \leqslant \delta = \frac{\varepsilon_0}{2M}. \ (?!)$$

Полученное противоречие доказывает лемму. ■

Будем говорить, что *решение* $x:]\alpha, \beta[\to R^n$ *уравнения (17.1) стремится к границе* ∂G области G при $t \to \beta - 0$, если для любого наперед заданного компактного подмножества $G_0 \subset G$ существует β_0, $\alpha < \beta_0 < \beta$, такое, что при всех $t \in]\beta_0, \beta[$ точка $(t, x(t))$ не принадлежит G_0.

Аналогичным образом определяют стремление решения $x:]\alpha, \beta[\to R^n$ к границе ∂G при $t \to \alpha + 0$.

Критерий непродолжимости решения. *Если функция f непрерывна на области G, то решение $x:]\alpha, \beta[\to R^n$ уравнения* (17.1) *непродолжимо вправо (влево) тогда и только тогда, когда оно стремится к границе ∂G при $t \to \beta - 0$ $(t \to \alpha + 0)$.*

Доказательство следует из критерия продолжимости решения и предыдущей леммы.

В частности, если область G ограниченная, то график непродолжимого решения целиком не лежит ни в одном замкнутом подмножестве из G.

17.3. МЕТОД СРАВНЕНИЯ

Теорема сравнения Чаплыгина. *Пусть действительные функции f_1 и f_2 определены в области $G \subset R^2$ и удовлетворяют неравенству*

$$f_1(t, x) < f_2(t, x), \ \forall (t, x) \in G.$$

Если функции $x_1: [s, \beta] \to R$, $x_2: [s, \beta] \to R$ являются решениями соответственно уравнений

$$Dx = f_1(t, x), \quad Dx = f_2(t, x)$$

и удовлетворяют условию $x_1(s) = x_2(s)$, то

$$x_1(t) < x_2(t), \ \forall t \in]s, \beta].$$

◇ Так как $x_1(s) = x_2(s)$, то

$$Dx_1(s) = f_1(s, x_1(s)) < f_2(s, x_2(s)) = Dx_2(s),$$

и поэтому существует $\delta > 0$ такое, что

$$x_1(t) < x_2(t), \ \forall t \in]s, s + \delta].$$

Если бы неравенство $x_1(t) < x_2(t)$ выполнялось не для всех $t \in]s, \beta]$, то нашлась бы точка t_*, $s < t_* \leqslant \beta$, такая, что

$$x_1(t_*) = x_2(t_*), \ x_1(t) < x_2(t), \ \forall t \in]s, t_*[.$$

Тогда

$$f_1(t_*, x_1(t_*)) = Dx_1(t_*) = D_- x_1(t_*) \geqslant D_- x_2(t_*) = Dx_2(t_*) = f_2(t_*, x_2(t_*)),$$

что противоречит условию теоремы. Следовательно, $x_1(t) < x_2(t), \forall t \in]s, \beta]$. ■

Теорема Чаплыгина может быть использована для определения промежутков существования решений некоторых скалярных дифференциальных уравнений. Чтобы рассмотреть этот вопрос сразу для векторных уравнений, докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть функция Φ непрерывна на области $E \subset R^2$ и функция $u: [s, \beta] \to R$ является решением задачи Коши*

$$\mathrm{D}u = \Phi(t, u), \; u|_{t=s} = u_0.$$

Пусть функция $v: [s, \beta] \to R$ непрерывна, $v(s) \leqslant u_0$, $(t, v(t)) \in E$ при всех $t \in [s, \beta]$. Если функция v имеет правую производную $\mathrm{D}_+ v$ на промежутке $[s, \beta[$ и удовлетворяет на нем дифференциальному неравенству

$$\mathrm{D}_+ v(t) < \Phi(t, v(t)), \tag{17.5}$$

то $v(t) \leqslant u(t)$, $\forall t \in [s, \beta]$.

◊ Предположим противное. Пусть существует t_1, $s < t_1 \leqslant \beta$, такое, что $v(t_1) > u(t_1)$. Так как функции v и u непрерывные, то найдется t_2, $s \leqslant t_2 < t_1$, такое, что

$$v(t_2) = u(t_2), \; v(t) > u(t), \; \forall t \in]t_2, t_1],$$

и поэтому

$$\mathrm{D}_+ v(t_2) \geqslant \mathrm{D}u(t_2) = \Phi(t_2, u(t_2)) = \Phi(t_2, v(t_2)). \quad (?!)$$

Полученное противоречие с неравенством (17.5) доказывает лемму. ■

Отметим, что если в условиях леммы отрезок $[s, \beta]$ заменить на отрезок $[\alpha, s]$, вместо правой производной $\mathrm{D}_+ v$ потребовать существование левой производной $\mathrm{D}_- v$ и неравенство (17.5) заменить на неравенство $\mathrm{D}_- v(t) > \Phi(t, v(t))$, то $v(t) \leqslant u(t)$, $\forall t \in [\alpha, s]$.

Теорема о промежутке существования непродолжимого решения. *Пусть функция f непрерывна в полосе $G = |\alpha, \beta| \times R^n$ и удовлетворяет неравенству*

$$|f(t, x)| < \Phi(|x|), \; \forall (t, x) \in G,$$

где действительная функция Φ непрерывна, $\Phi(u) > 0$, если $u > 0$ и

$$\int^{+\infty} \frac{du}{\Phi(u)} = \infty.$$

Тогда всякое непродолжимое решение задачи Коши

$$\mathrm{D}x = f(t, x), \; x|_{t=s} = \xi \tag{17.6}$$

определено на промежутке $|\alpha, \beta|$.

◊ Пусть функция $x: |\delta_1, \delta_2| \to R^n$, $\delta_1 \geqslant \alpha, \delta_2 \leqslant \beta$, является непродолжимым решением задачи Коши (17.6). Из леммы об односторонних производных (см. гл. 16) следует, что

$$|\mathrm{D}_\pm |x(t)|| \leqslant |\mathrm{D}x(t)| = |f(t, x(t))| < \Phi(|x(t)|), \; \forall t \in |\delta_1, \delta_2|. \tag{17.7}$$

Докажем, что $\delta_2 = \beta$.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\mathrm{Du} = \Phi(\mathrm{u}),\ \mathrm{u}|_{t=s} = \mathrm{u}_0,\ \mathrm{u}_0 > |\xi|,$$

непродолжимое вправо решение которой обозначим $u: [s, \gamma| \to R$. Так как $\Phi(\mathrm{u}) > 0$, $\mathrm{u}_0 > 0$, то $\mathrm{u}(t) > 0$, и поэтому

$$t - s = \int_s^t \frac{\mathrm{D}u(\tau)\,d\tau}{\Phi(u(\tau))},\ \forall t \in [s, \gamma|.$$

На основании формулы замены переменных в определенном интеграле ($\mathrm{D}u(\tau) > 0$!) получаем

$$t - s = \int_{\mathrm{u}_0}^{u(t)} \frac{\mathrm{du}}{\Phi(\mathrm{u})}. \tag{17.8}$$

Если $\gamma < +\infty$, то из критерия непродолжимости решения следует, что $u(t) \to +\infty$ при $t \to \gamma - 0$. Переходя к пределу в равенстве (17.8) при $t \to \gamma - 0$, получаем

$$\gamma - s = \int_{\mathrm{u}_0}^{+\infty} \frac{\mathrm{du}}{\Phi(\mathrm{u})} = \infty.\ (?!)$$

Следовательно, $\gamma = +\infty$, т. е. решение u определено на промежутке $[s, +\infty[$.

Из неравенства (17.7) на основании предыдущей леммы заключаем, что $|x(t)| \leqslant u(t)$ при всех $t \in [s, \delta_2|$. Если бы $\delta_2 < \beta$, то $|x(t)| \not\to \infty$ при $t \to \delta_2 - 0$, что противоречит критерию непродолжимости решения. Таким образом, $\delta_2 = \beta$.

Используя замечание к предыдущей лемме, аналогично доказывается, что $\delta_1 = \alpha$. ■

В частности, если функция f непрерывна в полупространстве $t \geqslant s$ пространства R^{n+1} и удовлетворяет неравенству

$$|f(t, \mathrm{x})| \leqslant M|\mathrm{x}|,\ \forall t \geqslant s,\ \forall \mathrm{x} \in R^n,$$

то всякое решение уравнения (17.1) продолжимо на бесконечный промежуток $[s, +\infty[$.

17.4. ПРОДОЛЖИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим линейное векторное уравнение

$$\mathrm{Dx} = A(t)\mathrm{x} + f(t),\ t \in I = |\alpha, \beta|,\ \mathrm{x} \in R^n$$

с непрерывными на I матричной функцией A и векторной функцией f.

Для произвольного отрезка $[a, b] \subset I$ существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$|A(t)\mathrm{x} + f(t)| \leqslant M(|\mathrm{x}| + 1),\ \forall t \in [a, b],\ \forall \mathrm{x} \in R^n.$$

Из теоремы о промежутке существования непродолжимого решения следует, что всякое решение линейного уравнения, определенное при $t = s$, $s \in [a, b]$, продолжимо на отрезок $[a, b]$. На основании произвола в выборе отрезка $[a, b] \subset I$ заключаем, что всякое решение линейного уравнения продолжимо на промежуток I задания уравнения.

Следует отметить, что продолжимость всех решений линейного уравнения с непрерывными коэффициентами на промежуток задания уравнения является характерным свойством линейных уравнений. Нетрудно привести пример нелинейного уравнения, у которого непродолжимые решения имеют разные множества задания.

Основные упражнения

17.1. В задачах 237 (а, б) [3] найти те значения a, при которых каждое решение продолжимо на R.

17.2. Решить задачу 238 [3].

17.3. Доказать, что если функция $v : [a, b] \to R$ непрерывна и на $]a, b[$ обладает правой производной D_+, причем $\mathrm{D}_+ v(t) \leqslant 0$, $\forall t \in]a, b[$, то $v(t) \leqslant v(a)$.

Дополнительные упражнения

17.4. Решить задачу 237 (г) [3].

17.5. Пусть функция $\Phi : [s, s+a] \times R \to R$ непрерывна, не убывает относительно второго аргумента и $\bar{\mathrm{u}}$ — верхнее решение задачи Коши

$$\mathrm{Du} = \Phi(t, \mathrm{u}), \ \mathrm{u}|_{t=s} = \mathrm{u}_0,$$

определенное на $[s, s+a]$. Если на этом отрезке функция v удовлетворяет неравенству

$$v(t) \leqslant v_0 + \int_s^t \Phi(\tau, v(\tau))\, d\tau, \ v_0 \leqslant \mathrm{u}_0,$$

то $v(t) \leqslant \bar{\mathrm{u}}(t)$, $\forall t \in [s, s+a]$.

17.6. Доказать, что если функция $f : R^{n+1} \to R^n$ непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$(\mathrm{x}, f(t, \mathrm{x})) \leqslant \varphi(t) |\mathrm{x}|^2, \ \forall t, \ \forall \mathrm{x}, \ |\mathrm{x}| > a,$$

где φ — непрерывная функция, то решение всякой задачи Коши

$$\mathrm{Dx} = f(t, \mathrm{x}), \ \mathrm{x}|_{t=s} = \xi$$

бесконечно продолжимо вправо.

18. ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ОТ ПАРАМЕТРОВ И НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ

18.1. ИНТЕГРАЛЬНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ РЕШЕНИЙ ПО ПАРАМЕТРАМ

Для моделирования устройств, сама схема которых может быть непрерывно преобразована за счет изменения характеристик системы, используются *параметрические* векторные уравнения, т. е. уравнения, в которые входят некоторые параметры.

Рассмотрим векторное уравнение

$$\mathrm{D}\mathrm{x} = f(t, \mathrm{x}, \lambda), \tag{18.1}$$

где функция $f : G \times \Lambda \to R^n$, $G \subset R^{n+1}$, $\Lambda \subset R^m$, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по x с постоянной L на множестве $G \times \Lambda$, т. е.

$$\forall (t, \mathrm{x}, \lambda), (t, \mathrm{y}, \lambda) \in G \times \Lambda \Rightarrow |f(t, \mathrm{x}, \lambda) - f(t, \mathrm{y}, \lambda)| \leqslant L\,|\mathrm{x} - \mathrm{y}|.$$

Лемма. *Пусть функция $x :]\alpha, \beta[\to R^n$, $x(s) = \xi$, является решением уравнения (18.1) при $\lambda = \lambda_0$. Тогда для любого отрезка $[a, b] \subset]\alpha, \beta[$ существует $d > 0$ такое, что при каждом $\lambda \in \Lambda$, $|\lambda - \lambda_0| \leqslant d$ уравнение (18.1) имеет решение $\tilde{x}$, $\tilde{x}(s) = \xi$, определенное, по крайней мере, на отрезке $[a, b]$.*

◊ Не нарушая общности считаем, что $s \in [a, b]$. Пусть $\rho > 0$ столь мало, что компактное множество

$$V ::= \{(t, \mathrm{x}) \mid t \in [a, b],\ |\mathrm{x} - x(t)| \leqslant \rho\}$$

лежит целиком в G.

Решения x и $\tilde{x}$ удовлетворяют интегральным соотношениям

$$x(t) = \xi + \int_s^t f(\tau, x(\tau), \lambda_0)\, d\tau,$$

$$\tilde{x}(t) = \xi + \int_s^t f(\tau, \tilde{x}(\tau), \lambda)\, d\tau,$$

и поэтому

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| \leqslant \left| \int_s^t |f(\tau, \tilde{x}(\tau), \lambda) - f(\tau, x(\tau), \lambda_0)|\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_s^t |f(\tau, \tilde{x}(\tau), \lambda) - f(\tau, x(\tau), \lambda)|\, d\tau \right| +$$

$$+ \left| \int_s^t |f(\tau, x(\tau), \lambda) - f(\tau, x(\tau), \lambda_0)|\, d\tau \right| \tag{18.2}$$

для тех $t \in [a, b]$, при которых решение $\tilde{x}$ определено. Функция f равномерно непрерывна на любом компактном подмножестве из $G \times \Lambda$ (теорема Кантора), следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{d} > 0,\ \forall \lambda \in \Lambda,\ |\lambda - \lambda_0| \leqslant \mathrm{d},\ \forall \tau \in [a, b] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(\tau, x(\tau), \lambda) - f(\tau, x(\tau), \lambda_0)| \leqslant \varepsilon. \tag{18.3}$$

Используя условие Липшица для оценки первого интеграла в (18.2) и неравенство (18.3) для оценки второго интеграла, получаем

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| \leqslant \left| \int_s^t L\,|\tilde{x}(\tau) - x(\tau)|\, d\tau \right| + \varepsilon(b - a).$$

По лемме Гронвола

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| \leqslant \varepsilon(b - a)\, e^{L(b-a)}.$$

Положим

$$\varepsilon :: = \frac{\rho}{(b-a)\, e^{L(b-a)}}.$$

Тогда $|\tilde{x}(t) - x(t)| \leqslant \rho$ для любых $\lambda \in \Lambda$, $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \mathrm{d}$, и таких $t \in [a, b]$, при которых решение $\tilde{x}$ существует. Отсюда на основании критерия непродолжимости решения следует, что решение $\tilde{x}$ определено, по крайней мере, на отрезке $[a, b]$. ■

При фиксированном $\lambda \in \Lambda$ непродолжимое решение задачи Коши

$$\mathrm{D}\mathrm{x} = f(t, \mathrm{x}, \lambda), \ \mathrm{x}|_{t=s} = \xi \tag{18.4}$$

обозначим $\mathrm{x} = x(t; \lambda)$. Отметим, что это обозначение корректно, т. е. имеет определенный смысл лишь тогда, когда решение задачи Коши существует и единственно (свойства функции f гарантируют существование такого решения). Если λ изменять на множестве Λ, то получаем функцию $\mathrm{x} = x(t, \lambda)$ переменных t и λ, которая задает семейство всех непродолжимых решений задачи Коши (18.4). Решение $\mathrm{x} = x(t; \lambda_0)$ *интегрально непрерывно по параметру*, если функция $\mathrm{x} = x(t, \lambda)$ непрерывна по λ при $\lambda = \lambda_0$ равномерно относительно t на любом отрезке $[a, b] \subset\ ]\alpha, \beta[$, т. е.

$$x(t, \lambda) \rightrightarrows x(t, \lambda_0) \text{ на } [a, b] \text{ при } \lambda \to \lambda_0$$

или

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall [a, b] \subset\ ]\alpha, \beta[,\ \exists \delta > 0,\ \forall \lambda \in \Lambda,$$

$$|\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta \Rightarrow |x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0)| \leqslant \varepsilon,\ \forall t \in [a, b].$$

Теорема об интегральной непрерывности по параметру. *Если функция $f: G \times \Lambda \to R^n$ непрерывна и удовлетворяет на $G \times \Lambda$ условию Липшица по* x*, то при каждом $\lambda \in \Lambda$ решение задачи Коши (18.4) интегрально непрерывно по параметру.*

◇ Пусть при $\lambda = \lambda_0$ решение $\mathrm{x} = x(t; \lambda_0)$ определено на интервале $]\alpha, \beta[$ и отрезок $[a, b] \subset\ ]\alpha, \beta[$, $s \in [a, b]$. Из доказательства леммы следует, что для любых $\lambda \in \Lambda$, $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \mathrm{d}$, выполняется

$$|x(t; \lambda) - x(t; \lambda_0)| \leqslant \rho,\ \forall t \in [a, b].$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $0 < \rho \leqslant \varepsilon$. Тогда

$$\forall \lambda,\ |\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta :: = \mathrm{d} \Rightarrow |x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0)| \leqslant \varepsilon,\ \forall t \in [a, b],$$

т. е. решение $\mathrm{x} = x(t, \lambda_0)$ интегрально непрерывно по параметру. Так как λ_0 выбрано произвольно из Λ, то при каждом $\lambda \in \Lambda$ решение задачи Коши (18.4) обладает свойством интегральной непрерывности по параметру. ■

18.2. ИНТЕГРАЛЬНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ РЕШЕНИЙ ПО НАЧАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Как уже отмечалось, дифференциальные уравнения являются основным типом математических моделей различных устройств, способных работать в разных режимах, определяемых начальными условиями. Характерной особенностью устройств, моделируемых с помощью дифференциальных уравнений, является малое влияние (на конечном промежутке изменения аргумента уравнения) небольшой расстройки системы (изменения начальных данных) на протекание всего процесса.

Исследуем вопрос о свойствах уравнений, обеспечивающих малое изменение решений на конечном промежутке изменения аргумента при малых отклонениях начальных данных.

Пусть задано векторное уравнение

$$\mathrm{Dx} = f(t, \mathrm{x}) \tag{18.5}$$

с непрерывной правой частью $f: G \to R^n$, удовлетворяющей на G условию Липшица по x. Непродолжимое решение $x:]\alpha, \beta[\to R^n$ уравнения (18.5), удовлетворяющее начальному условию $x(s) = \xi$, обозначим $\mathrm{x} = x(t; s, \xi)$. Если изменять начальные данные (s, ξ) на множестве G, то получаем функцию $\mathrm{x} = x(t, s, \xi)$, которая задает семейство всех решений уравнения (18.5). Введем в уравнении (18.5) новые переменные τ и y по формулам

$$\tau = t - s; \; \mathrm{y} = \mathrm{x} - \xi.$$

Тогда уравнение (18.5) преобразуется в уравнение

$$\mathrm{D}_\tau \mathrm{y} = g(\tau, \mathrm{y}, s, \xi), \tag{18.6}$$

где $\mathrm{D}_\tau :: = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$, $g(\tau, \mathrm{y}, s, \xi) :: = f(\tau + s, \mathrm{y} + \xi)$. При этом семейству решений $\mathrm{x} = x(t, s, \xi)$ уравнения (18.5) соответствует семейство $\mathrm{y} = y(\tau, s, \xi) :: = x(\tau + s, s, \xi) - \xi$ решений уравнения (18.6), причем $y(0, s, \xi) = 0$, $\forall (s, \xi) \in G$.

Отметим, что начальные данные (s, ξ) для уравнения (18.5) в уравнении (18.6) выступают как параметры. Таким образом, вопрос о зависимости решений уравнения (18.5) от начальных данных сведен к исследованию зависимости решений задачи Коши

$$\mathrm{D}_\tau \mathrm{y} = g(\tau, \mathrm{y}, s, \xi), \; \mathrm{y}|_{\tau=0} = 0, \tag{18.7}$$

от параметров s и ξ.

Лемма. *Пусть решение* $\mathrm{x} = x(t; s, \xi)$ *уравнения (18.5) определено на* $]\alpha, \beta[$. *Тогда для любого отрезка* $[a, b] \subset]\alpha, \beta[$ *существует* $\mathrm{d} > 0$ *такое, что при любых* Δs, $\Delta\xi$, $(s + \Delta\xi, \xi + \Delta\xi) \in G$, $|\Delta s| \leqslant d$, $|\Delta\xi| \leqslant d$, *решение* $\mathrm{x} = x(t; s + \Delta s, \xi + \Delta\xi)$ *определено, по крайней мере, на отрезке* $[a, b]$.

◇ Решению $\mathrm{x} = x(t; s, \xi)$ соответствует решение $\mathrm{y} = y(\tau; s, \xi) = x(\tau + s; s, \xi) - \xi$ задачи Коши (18.7). Так как функция g непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по y, то на основании леммы из предыдущего пункта существует $d > 0$ такое, что при любых Δs, $\Delta\xi$, $(s+\Delta s,\ \xi+\Delta\xi) \in G$, $|\Delta s| \leqslant d$, $|\Delta\xi| \leqslant d$, решение $y = y(\tau;\ s+\Delta s,\ \xi+\Delta\xi)$ определено на $[a-s,\ b-s]$, откуда следует, что решение $x = x(t;\ s+\Delta s,\ \xi+\Delta\xi)$ определено, по крайней мере, на $[a,\ b]$. ■

Будем говорить, что решение $x = x(t;\ s_0,\ \xi_0)$, определенное на интервале $]\alpha,\ \beta[$, *интегрально непрерывно по начальным данным*, если

$$x(t,\ s,\ \xi) \rightrightarrows x(t,\ s_0,\ \xi_0) \text{ на } [a,\ b] \subset]\alpha,\ \beta[\text{ при } (s,\ \xi) \to (s_0,\ \xi_0),$$

т. е.

$$\forall\varepsilon > 0,\ \forall [a,\ b] \subset]\alpha,\ \beta[,\ \exists\delta > 0,\ \forall (s,\ \xi) \in G,$$
$$|s - s_0| \leqslant \delta,\ |\xi - \xi_0| \leqslant \delta \Rightarrow |x(t,\ s,\ \xi) - x(t,\ s_0,\ \xi_0)| \leqslant \varepsilon,$$
$$\forall t \in [a,\ b].$$

Теорема об интегральной непрерывности по начальным данным. *Если функция $f: G \to R^n$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по x на G, то все решения уравнения (18.5) обладают свойством интегральной непрерывности по начальным данным.*

Доказательство следует из теоремы об интегральной непрерывности решений по параметру.

Решение $x = x(t;\ s_0,\ \xi_0)$, определенное на интервале $]\alpha,\ \beta[$, *непрерывно зависит от начальных данных* на промежутке $I \subset]\alpha,\ \beta[$, если $x(t,\ s,\ \xi) \rightrightarrows x(t,\ s_0,\ \xi_0)$ на I при $(s,\ \xi) \to (s_0,\ \xi_0)$. В частности, если $\beta = +\infty$, то решение x, непрерывно зависящее от начальных данных на промежутке $I = [s,\ +\infty[$, называют *устойчивым по Ляпунову*. Отметим, что если определение интегральной непрерывности является по существу локальным, то определение непрерывной зависимости — глобальное.

18.3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПО ПАРАМЕТРУ И НАЧАЛЬНЫМ ДАННЫМ

На основании теоремы об интегральной непрерывности по параметру функция $x = x(t,\ \lambda)$, которая задает семейство всех решений задачи Коши (18.4), непрерывна по λ равномерно относительно $t \in [a,\ b]$ на множестве $a \leqslant t \leqslant b$, $|\lambda - \lambda_0| \leqslant d$. В настоящем параграфе рассмотрим вопрос о дифференцируемости этой функции по параметру λ.

Лемма. *Если функция $f: G \times \Lambda \to R^n$ непрерывна и обладает непрерывными частными производными*

$$f'_x ::= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \text{ и } f'_\lambda ::= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_m} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial \lambda_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial \lambda_m} \end{bmatrix},$$

то функция $x = x(t, \lambda)$ *удовлетворяет условию Липшица по* λ *на множестве* $a \leqslant t \leqslant b$, $|\lambda - \lambda_0| \leqslant d$.

◇ Пусть $\rho > 0$ столь мало, что выпуклое множество

$$V :: = \{(t, x, \lambda) \mid t \in [a, b], |x - \xi| \leqslant \rho, |\lambda - \lambda_0| \leqslant d\}$$

лежит в $G \times \Lambda$. По лемме об условии Липшица (гл. 16) функция f удовлетворяет условию Липшица по (x, λ) на множестве V, т. е.

$$\forall (t, \tilde{x}, \tilde{\lambda}), (t, x, \lambda) \in V \Rightarrow |f(t, \tilde{x}, \tilde{\lambda}) - f(t, x, \lambda)| \leqslant L \cdot (|\tilde{x} - x| + |\tilde{\lambda} - \lambda|).$$

Для любых $(t, \tilde{\lambda})$, (t, λ), $t \in [a, b]$, $|\tilde{\lambda} - \lambda_0| \leqslant d$, $|\lambda - \lambda_0| \leqslant d$

$$|x(t, \tilde{\lambda}) - x(t, \lambda)| \leqslant L \cdot (b - a)|\tilde{\lambda} - \lambda| + \left|\int_s^t L \cdot |x(\tau, \tilde{\lambda}) - x(\tau, \lambda)| \, d\tau\right|,$$

откуда по лемме Гронвола

$$|x(t, \tilde{\lambda}) - x(t, \lambda)| \leqslant L(b - a) e^{L(b-a)} |\tilde{\lambda} - \lambda| = L_1 |\tilde{\lambda} - \lambda|. \blacksquare$$

Теорема о дифференцируемости по параметру. *Если* f, f'_x *и* f'_λ *непрерывны на* $G \times \Lambda$, *то функция* $x = x(t, \lambda)$ *дифференцируема по* λ, *причем производная*

$$x'_\lambda(t, \lambda_0) :: = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1(t, \lambda)}{\partial \lambda_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1(t, \lambda)}{\partial \lambda_m} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \dfrac{\partial x_n(t, \lambda)}{\partial \lambda_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n(t, \lambda)}{\partial \lambda_m} \end{bmatrix}\right|_{\lambda = \lambda_0}, \quad t \in [a, b],$$

является решением $Y = Y(t)$ *неоднородного линейного матричного уравнения* (ЛМ)

$$DY = A(t) Y + B(t)$$

с начальным условием $Y|_{t=s} = O^{n \times m}$, где $A(t) :: = f'_x(t, x(t, \lambda_0), \lambda_0)$, $B(t) :: = f'_\lambda(t, x(t, \lambda_0), \lambda_0)$.

◇ Матричные функции A и B непрерывны на $[a, b]$, поэтому существование решения $Y = Y(t)$, $Y(s) = O^{n \times m}$ не вызывает сомнений.

Обозначим

$$\Delta x(t, \Delta\lambda) :: = x(t, \lambda_0 + \Delta\lambda) - x(t, \lambda_0),$$

$$\gamma(t, \Delta\lambda) :: = \Delta x(t, \Delta\lambda) - Y(t)\Delta\lambda, \ t \in [a, b], \ |\Delta\lambda| \leqslant d.$$

Функция γ удовлетворяет соотношению

$$\gamma(t, \Delta\lambda) = \int_s^t (f(\tau, x(\tau, \lambda_0 + \Delta\lambda), \lambda_0 + \Delta\lambda) - f(\tau, x(\tau, \lambda_0), \lambda_0) - A(\tau) Y(\tau) \Delta\lambda - B(\tau)\Delta\lambda) \, d\tau.$$

Из непрерывности частных производных f'_x, f'_λ следует дифференцируемость f по (x, λ). Тогда

$$f(\tau, x(\tau, \lambda_0+\Delta\lambda), \lambda_0+\Delta\lambda) - f(\tau, x(\tau, \lambda_0), \lambda_0) =$$
$$= f'_x(\tau, x(\tau, \lambda_0), \lambda_0)\,\Delta x(\tau, \Delta\lambda) + f'_\lambda(\tau, x(\tau, \lambda_0), \lambda_0)\,\Delta\lambda +$$
$$+ \alpha\left(\tau, \sqrt{|\Delta x(\tau, \Delta\lambda)|^2 + |\Delta\lambda|^2}\right)\sqrt{|\Delta x(\tau, \Delta\lambda)|^2 + |\Delta\lambda|^2},$$

где $\alpha\left(\tau, \sqrt{|\Delta x(\tau, \Delta\lambda)|^2 + |\Delta\lambda|^2}\right) = o(1)$ при $\Delta\lambda \to 0$ равномерно по $\tau \in [a, b]$. Кроме того, по предыдущей лемме

$$\sqrt{|\Delta x(\tau, \Delta\tau)|^2 + |\Delta\lambda|^2} \leqslant \sqrt{L_1^2+1}\,|\Delta\lambda|, \ \forall\tau\in[a, b],$$

поэтому

$$|\gamma(t, \Delta\lambda)| \leqslant \left|\int_s^t |A(\tau)|\,|\gamma(\tau, \Delta\lambda)|\,d\tau\right| + o(|\Delta\lambda|),$$

и по лемме Гронвола $|\gamma(t, \Delta\lambda)| = o(|\Delta\lambda|)$ при $\Delta\lambda \to 0$ равномерно по $t \in [a, b]$. Таким образом,

$$x(t, \lambda_0+\Delta\lambda) = x(t, \lambda_0) + Y(t)\,\Delta\lambda + o(|\Delta\lambda|).$$

Последнее равенство означает, что функция $x = x(t, \lambda)$ дифференцируема по λ в точке $\lambda = \lambda_0$, причем $x'_\lambda(t, \lambda_0) = Y(t)$. ■

Теорема о дифференцируемости по начальным значениям. *Если f и f'_x непрерывны в области G, то функция $x = x(t, s, \xi)$, которая задает семейство всех решений уравнения (18.5), дифференцируема по ξ, причем производная x_ξ является решением $Y = Y(t)$ однородного линейного матричного уравнения*

$$DY = A(t)\,Y \tag{18.8}$$

с начальным условием $Y|_{t=s} = E^{n\times n}$, где $A(t) :: = f'_x(t, x(t, s, \xi))$.

18.4. ЛИНЕЙНОЕ ВЕКТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ В ВАРИАЦИЯХ

В качестве одного из приложений теоремы о дифференцируемости решения по начальным данным рассмотрим задачу построения приближенных решений, близких по начальным значениям к известному (точному) решению.

Рассмотрим уравнение (18.5) при предположениях предыдущего параграфа относительно f, в частности считаем, что f'_x существует и непрерывна. Считаем, что решение $x = x(t; s, \xi)$ известно. Из существования производной x'_ξ следует, что

$$x(t; s, \xi+\Delta\xi) = x(t; s, \xi) + x'_\xi(t; s, \xi)\,\Delta\xi + o(|\Delta\xi|).$$

Значит, с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $|\Delta\xi|$,

$$x(t; s, \xi+\Delta\xi) \approx x(t; s, \xi) + x'_\xi(t; s, \xi)\,\Delta\xi.$$

Для построения x'_ξ необходимо решить линейное матричное уравнение (18.8), что является принципиально более легкой задачей, чем интегрирование нелинейного векторного уравнения (18.5).

Приращения независимых переменных, в рассматриваемом случае приращение $\Delta\xi$, называют также *вариациями* этих переменных. Линейную часть приращения функции, вызванного вариацией части переменных, также называют *вариацией функции*. Вариации обозначают символом δ. Таким образом,

$$\delta\xi :: = \Delta\xi, \quad \delta x :: = x'_\xi \delta\xi,$$

и приближенная формула для решения принимает вид

$$x(t;\ s,\ \xi + \delta\xi) \approx x(t;\ s,\ \xi) + \delta x.$$

Умножая обе части матричного уравнения (18.8) на $\delta\xi$, получаем линейное векторное уравнение в вариациях

$$\mathrm{D}\delta x = f'_{\mathrm{x}}\delta x$$

для уравнения (18.5) вдоль решения $\mathrm{x} = x(t;\ s,\ \xi)$.

Основные упражнения

18.1. Решить задачу 1056 [3].

18.2. Показать, что всякое решение уравнения

$$\mathrm{Dx} - \lambda\mathrm{x} = 0, \quad \lambda > 0,$$

интегрально непрерывно по начальным данным, однако не обладает свойством непрерывной зависимости на промежутке $I_+ = [0,\ +\infty[$. Будут ли решения непрерывно зависеть от начальных данных на промежутке $I_- =]-\infty,\ 0]$?

18.3. Найти производные по параметрам или по начальным данным от решений в задачах 1064—1073 [3].

Дополнительные упражнения

18.4. Доказать, что если функция $f : G \to R^n$ непрерывно дифференцируема, то для решения $\mathrm{x} = x(t,\ s,\ \xi)$ уравнения (18.5) выполняется

$$\det\frac{\partial x}{\partial\xi} = e^{\int\limits_s^t \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial \mathrm{x}_k}(\tau,\ x(\tau,\ s,\ \xi))\,d\tau}.$$

18.5. Показать, что если $f : G \to R^n$ непрерывно дифференцируема p раз, то всякое решение $\mathrm{x} = x(t)$ уравнения (18.5) непрерывно дифференцируемо $p+1$ раз.

18.6. Доказать следующую теорему, обобщающую теорему об интегральной непрерывности по начальным данным: если функция f непрерывна и ограничена на области $G \subset R^{n+1}$ и всякая задача Коши $\mathrm{Dx} = f(t,\ \mathrm{x}),\ \mathrm{x}|_{t=s} = \xi$, $(s,\ \xi) \in G$, однозначно разрешима, то решение x интегрально непрерывно по начальным данным $(s,\ \xi)$ и возмущениям правой части f (см., например, книгу И. Г. Петровского «Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений»).

19. ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

19.1. ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ КОМБИНАЦИИ

Рассмотрим векторное уравнение

$$\mathrm{D}\mathrm{x} = f(t, \mathrm{x}), \quad f: G \to R^n, \quad G \subset R^{n+1} \tag{19.1}$$

в предположении, что через каждую точку $(s, \xi) \in G$ проходит график по крайней мере одного решения уравнения. Обозначим $\Phi: G \to R$ дифференцируемую функцию, отличную от постоянной на любой непустой подобласти из G.

Функцию Φ называют *первым интегралом* уравнения (19.1), если она сохраняет постоянное значение вдоль решений уравнения (19.1). Другими словами, график каждого решения уравнения (19.1) лежит на одной из поверхностей уровня функции

$$\Phi(t, \mathrm{x}) = C.$$

График решения, проходящего через (s, ξ), лежит на поверхности

$$\Phi(t, \mathrm{x}) = \Phi(s, \xi).$$

Учение о дифференциальных уравнениях складывалось (и складывается) в различных областях точных, естественных и других наук. Видимо, этим можно объяснить противоречивость терминологии в различных разделах теории дифференциальных уравнений. Примером служит использование термина «интеграл», который применяют в различных смыслах. Интегралом называют решение дифференциального уравнения в дифференциальной форме (см. гл. 9) или вообще решение дифференциального уравнения. Интегралом вместе с тем называют общий интеграл, а также первый интеграл, хотя в последних двух случаях речь идет уже не об одном решении, а о бесконечных совокупностях отдельных решений. Наконец, интегралом называют само соотношение $\Phi = C$.

Теорема о первом интеграле. *Функция Φ является первым интегралом уравнения (19.1) в том и только том случае, если выполняется тождество*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{x}_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{x}_n} f_n = 0, \quad \forall (t, \mathrm{x}) \in G.$$

◇ Доказательство следует из того, что для любого решения x уравнения (19.1) выполняется

$$\mathrm{D}\Phi(t, x(t)) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{x}_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{x}_n} f_n. \ ■$$

Пример 19.1. Если $n = 2m$ и функция $\Phi = \Phi(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_{2m})$ не зависит от t, то стационарную систему

$$\mathrm{D}\mathrm{x}_j = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{x}_{j+m}}, \quad \mathrm{D}\mathrm{x}_{j+m} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{x}_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

называют *гамильтоновой*. Функция Φ, т. е. так называемый *гамильтониан*, является первым интегралом гамильтоновой системы, так как

$$\sum_{i=1}^{2m} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{x}_i} f_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{x}_j} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{x}_{j+m}} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{x}_{j+m}} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{x}_j}.$$

Теорема об интегрируемой комбинации. *Пусть выражение*

$$\varphi_1(\mathrm{x})\,d\mathrm{x}_1 + \ldots + \varphi_n(\mathrm{x})\,d\mathrm{x}_n$$

является дифференциалом некоторой функции $\Phi = \Phi(\mathrm{x})$ *и пусть*

$$\varphi_1 f_1 + \ldots + \varphi_n f_n = 0, \ \forall (t, \mathrm{x}) \in G$$

(такие выражения называют интегрируемыми комбинациями для уравнения (19.1)). Тогда Φ *— первый интеграл уравнения (19.1).*

◇ Так как $d\Phi = \varphi_1\,d\mathrm{x}_1 + \ldots + \varphi_n\,d\mathrm{x}_n$, то $\dfrac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{x}_k} = \varphi_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому

$$\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{x}_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{x}_n} f_n = \varphi_1 f_1 + \ldots + \varphi_n f_n = 0, \ \forall (t, \mathrm{x}) \in G,$$

и на основании теоремы о первом интеграле Φ — первый интеграл. ■

19.2. СИСТЕМЫ В СИММЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Для разыскания интегрируемых комбинаций дифференциальное уравнение удобно записать в симметрической форме. Представим стационарное векторное уравнение

$$D\mathrm{x} = f(\mathrm{x}) \tag{19.2}$$

в виде системы

$$d\mathrm{x}_1 : f_1 = d\mathrm{x}_2 : f_2 = \ldots = d\mathrm{x}_n : f_n = dt.$$

Систему

$$\frac{d\mathrm{x}_1}{f_1(\mathrm{x})} = \ldots = \frac{d\mathrm{x}_n}{f_n(\mathrm{x})} \tag{19.3}$$

называют системой в *симметрической форме*. Отметим, что система (19.3) описывает геометрические свойства решений векторного уравнения (19.2). Уравнение $d\mathrm{x}_k : f_k = dt$ выявляет характер параметризации интегральных кривых. Для представления нестационарного векторного уравнения (19.1) в симметрической форме необходимо сначала перейти к стационарному уравнению (см. гл. 15).

Системы в симметрической форме играют в теории векторных уравнений роль, аналогичную той, которую играют уравнения в нормальной дифференциальной форме в теории уравнений. Например, точка ξ фазового пространства R^n векторного уравнения (19.2) является особой для системы (19.3), если $f_1(\xi) = \ldots = f_n(\xi) = 0$. Особая точка ξ системы (19.3) служит фазовой траекторией стационарного решения $x = \xi$ уравнения (19.2).

Для нахождения интегрируемых комбинаций системы в симметрической форме (19.3) используют основные свойства производных пропорций:

$$\frac{d\mathrm{x}_1}{f_1} = \ldots = \frac{d\mathrm{x}_n}{f_n} = \frac{\varphi_1 d\mathrm{x}_1 + \ldots + \varphi_n d\mathrm{x}_n}{\varphi_1 f_1 + \ldots + \varphi_n f_n}.$$

Пример 19.2. В теории движения твердого тела существенную роль играет система (A, B, C — положительные постоянные)

$$\frac{A\mathrm{dx}}{(B-C)\,\mathrm{yz}}=\frac{B\mathrm{dy}}{(C-A)\,\mathrm{zx}}=\frac{C\mathrm{dz}}{(A-B)\,\mathrm{xy}}.$$

Ее интегрируемые комбинации

$$2A\mathrm{xdx}+2B\mathrm{ydy}+2C\mathrm{zdz};$$

$$2A^2\mathrm{xdx}+2B^2\mathrm{ydy}+2C^2\mathrm{zdz}.$$

Система имеет два важных первых интеграла:

$$A\mathrm{x}^2+B\mathrm{y}^2+C\mathrm{z}^2;\quad A^2\mathrm{x}^2+B^2\mathrm{y}^2+C^2\mathrm{z}^2.$$

19.3. РЕДУКЦИЯ УРАВНЕНИЯ

Знание первого интеграла Φ векторного уравнения (19.1) позволяет редуцировать уравнение, т. е. свести задачу интегрирования этого уравнения к интегрированию уравнения меньшей размерности, ибо из соотношения $\Phi=C$ одну из компонент искомой функции можно выразить через остальные. Для этого достаточно, чтобы непрерывно дифференцируемый первый интеграл Φ обладал ненулевой производной $\partial\Phi/\partial\mathrm{x}$. Считаем для определенности $\partial\Phi/\partial\mathrm{x}_1|_{(s,\,\xi)}\neq 0$. На основании теоремы об однозначной разрешимости функциональное уравнение относительно x_1

$$\Phi(t,\ \mathrm{x}_1,\ \ldots,\ \mathrm{x}_n)=\Phi(s,\ \xi)$$

имеет единственное решение $\mathrm{x}_1=\varphi(t,\ \mathrm{x}_2,\ \ldots,\ \mathrm{x}_n)$, определенное и дифференцируемое в окрестности точки $(s,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)$. Компоненты $\mathrm{x}_2,\ \ldots,\ \mathrm{x}_n$ удовлетворяют уравнению

$$\mathrm{D}\begin{bmatrix}\mathrm{x}_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \mathrm{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_2(t,\ \varphi(t,\ \mathrm{x}_2,\ \ldots,\ \mathrm{x}_n),\ \mathrm{x}_2,\ \ldots,\ \mathrm{x}_n),\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ f_n(t,\ \varphi(t,\ \mathrm{x}_2,\ \ldots,\ \mathrm{x}_n),\ \mathrm{x}_2,\ \ldots,\ \mathrm{x}_n)\end{bmatrix},\qquad(19.4)$$

размерность которого равна $(n-1)$. Если $(x_2,\ \ldots,\ x_n)$ — решение уравнения (19.4), причем $(x_2(s),\ \ldots,\ x_n(s))=(\xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)$, то функция $x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, где $x_1(t)=\varphi(t,\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t))$, является решением уравнения (19.1). Действительно, дифференцируя тождество

$$\Phi(t,\ x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t))\equiv\Phi(s,\ \xi)$$

по t, получаем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{x}_1}\mathrm{D}x_1+\frac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{x}_2}f_2+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{x}_n}f_n=0,$$

откуда по теореме о первом интеграле $\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{x}_1}\neq 0!\right)$

$$\mathrm{D}x_1(t)\equiv f_1(t,\ x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t)).$$

Аналогично, если $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$, $m \leqslant n$ — непрерывно дифференцируемые первые интегралы (19.1), причем

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(s,\, \xi)} = m,$$

то интегрирование уравнения (19.1) сводится к интегрированию уравнения размерности $n - m$. В частности, при $m = n$ интегрирование уравнения (19.1) сводится к решению алгебраической системы

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) &= C_1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ &\cdot\ \cdot \\ \Phi_n(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) &= C_n \end{aligned}\right\}$$

относительно $x_1, \ldots, x_n$.

Пример 19.3. Уравнение (19.1) с совпадающими компонентами правой части

$$f_1 = \ldots = f_n = g$$

имеет $n - 1$ интегрируемую комбинацию $dx_2 - dx_1, \ldots, dx_n - dx_1$ и, следовательно, обладает $n - 1$ первым интегралом

$$\Phi_1 = x_2 - x_1,\ \Phi_2 = x_3 - x_1,\ \ldots,\ \Phi_{n-1} = x_n - x_1.$$

Интегрирование исходного уравнения сводится к интегрированию скалярного уравнения

$$Dx_1 = g(t,\ x_1,\ x_1 + C_2,\ \ldots,\ x_1 + C_n).$$

Отметим, что векторные уравнения такого типа (т. е. с совпадающими компонентами правой части) используются в качестве мажорант при исследовании голоморфных уравнений.

19.4. ОБЩИЙ ВИД ПЕРВОГО ИНТЕГРАЛА

Если Φ — первый интеграл уравнения (19.1) и h — дифференцируемая функция без участков постоянства, то композиция

$$\psi(t,\ x) = h(\Phi(t,\ x))$$

также сохраняет постоянное значение вдоль решений уравнения и поэтому является первым интегралом уравнения. Аналогично можно строить интегралы $H(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$, отправляясь от совокупности первых интегралов $\Phi_0, \ldots, \Phi_m$.

Теорема об общем виде первого интеграла. *Пусть векторная функция* $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, *компонентами которой являются первые интегралы уравнения (19.1), непрерывно дифференцируема в окрестности точки* $(s,\ \xi) \in G$ *и*

$$\det \frac{\partial \Phi}{\partial x}\bigg|_{(s,\, \xi)} \neq 0.$$

Тогда для любого непрерывно дифференцируемого первого интеграла ψ существует непрерывно дифференцируемая функция H такая, что

$$\psi(t, \mathrm{x}) = H(\Phi(t, \mathrm{x}))$$

при всех (t, x), достаточно близких к (s, ξ).

◇ При фиксированном t функция Φ имеет обратную функцию F. Положим

$$H(\mathrm{y}, t) = \psi(t, F(t, \mathrm{y})),$$

откуда

$$\psi(t, \mathrm{x}) = H(\Phi(t, \mathrm{x}), t)$$

при всех (t, x), достаточно близких к (s, ξ).

Остается доказать, что H не зависит от t, т. е. $\partial H/\partial t = 0$. Продифференцируем тождество

$$\Phi(t, F(t, \mathrm{y})) \equiv \mathrm{y}$$

по t. Получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{x}} \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

По теореме о первом интеграле

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{d\mathrm{x}} f = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{x}}\left(\frac{\partial F}{\partial t} - f\right) = 0.$$

Так как матрица $\partial\Phi/\partial\mathrm{x}$ невырожденная, то $\partial F/\partial t = f$. Тогда

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{x}} \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{x}} f = 0,$$

так как ψ — первый интеграл уравнения. ■

19.5. БАЗИС ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Совокупность независимых первых интегралов $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ называют *базисом первых интегралов* уравнения (19.1), если всякий первый интеграл ψ можно представить в виде

$$\psi = H(\Phi_1, \ldots, \Phi_n).$$

Теорема об общем виде первого интеграла дает достаточные условия того, что совокупность первых интегралов $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ образует базис семейства непрерывно дифференцируемых первых интегралов в окрестности точки (s, ξ).

Базис первых интегралов $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ при условии, что $\det \partial\Phi/\partial\mathrm{x}(s, \xi) \neq 0$, позволяет построить решение x, проходящее через точку (s, ξ), и тем более определить значения $\mathrm{D}x(s)$. Таким образом, знание базиса первых интегралов позволяет однозначно восстановить уравнение (19.1) (вообще говоря локально).

Приведем достаточные условия, гарантирующие существование базиса первых интегралов.

Лемма. *Если всякая задача Коши для уравнения (19.1) однозначно разрешима, то для любых* $(s, \xi) \in G$ и τ *из промежутка* I *задания решения* $x = x(t; s, \xi)$ *выполняется:*

$$x(s; \tau, x(\tau; s, \xi)) = \xi.$$

◊ Пусть $\tilde{x}$ и $\tilde{\tilde{x}}$ — решения уравнения (19.1):

$$\tilde{x}(t) :: = x(t; s, \xi);$$

$$\tilde{\tilde{x}}(t) :: = x(t; \tau, x(\tau; s, \xi)).$$

Так как $\tilde{x}(\tau) = \tilde{\tilde{x}}(\tau)$, то в силу однозначной разрешимости $\tilde{x}(t) = \tilde{\tilde{x}}(t)$, $\forall t \in I$. В частности, при $t = s$

$$x(s; \tau, x(\tau; s, \xi)) = \xi. \ \blacksquare$$

Критерий существования первых интегралов. *Для того чтобы уравнение (19.1) имело* n *первых интегралов* $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, *непрерывно дифференцируемых в окрестности точки* $(s, \xi) \in G$ *и удовлетворяющих условию*

$$\det \frac{\partial \Phi}{\partial x} \neq 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы любая задача Коши $x|_{t=\tau} = y$ *для уравнения (19.1) при* (τ, y), *достаточно близких к* (s, ξ), *имела единственное решение, непрерывно дифференцируемое по начальным данным.*

◊ $\Rightarrow$ Если точка (τ, y) достаточно близка к (s, ξ), то функциональное уравнение относительно x

$$\Phi(t, x) = \Phi(\tau, y)$$

однозначно разрешимо, причем его решение $x = x(t, \tau, y)$ непрерывно дифференцируемо, $x(\tau, \tau, y) = y$ и при фиксированном (τ, y) является решением x уравнения (19.1).

Если бы уравнение (19.1) имело еще решение $\tilde{x}$, $\tilde{x}(\tau) = y$, то

$$\Phi(t, \tilde{x}(t)) \equiv \Phi(\tau, y)$$

и, следовательно, $\tilde{x} = x$ в окрестности точки τ.

$\Leftarrow$ Пусть $x = x(t; s, \xi)$ — решение уравнения (19.1). Построим векторную функцию $\Phi(t, x) = x(s, t, x)$. Функция Φ непрерывно дифференцируема в окрестности точки (s, ξ), и так как

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(s, \xi) = E,$$

то $\det \partial\Phi/\partial x \neq 0$ в окрестности точки (s, ξ).

Покажем, что Φ принимает постоянное значение вдоль решений. На основании леммы

$$\Phi(t, x(t; s, y)) = x(s; t, x(t; s, y)) = y.$$

Таким образом, компоненты $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ векторной функции Φ являются первыми интегралами уравнения (19.1) в окрестности точки (s, ξ). $\blacksquare$

19.6. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

Рассмотрим на области $D \subset R^{n+m+1}$ совокупность n действительных функций $\psi_k(t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ C_1,\ \ldots,\ C_m)$. Эта совокупность определяет на G общее решение уравнения (19.1), если при каждом допустимом наборе постоянных $C_1, \ldots, C_m$ система уравнений относительно x_k

$$\psi_k(t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ C_1,\ \ldots,\ C_m) = 0 \tag{19.5}$$

определяет одно или несколько решений $x = (x_1, \ldots, x_n)$ уравнения (19.1). В некоторых случаях системы уравнений (19.5) при всевозможных C_k доставляют все решения уравнения (19.1). В общем случае, однако, системы (19.5) дают лишь часть семейства решений (19.1). Если с помощью решений систем (19.5) можно решить любую начальную задачу на G, то, пополнив множество решений систем (19.5) особыми и составными решениями, получим все решения уравнения (19.1).

Способы построения особых решений, т. е. огибающих семейства пространственных линий, описаны в монографии В. А. Залгаллера «Теория огибающих» (М., 1975).

Основные упражнения

19.1. В задачах 1161—1163 [3] проверить, являются ли заданные функции первыми интегралами указанных в задачах уравнений.

19.2. Решить задачу 1164 [3].

19.3. Найти независимые первые интегралы в задачах 1079—1084 [1].

19.4. Проинтегрировать уравнения в задачах 1061—1078 [1].

19.5. Решить задачи 1093—1095, 1111—1116 [1].

Дополнительные упражнения

19.6. Первый интеграл Φ уравнения (19.1) называют *стационарным*, если он явно не зависит от аргумента t. Доказать, что для автономного уравнения

$$Dx = f(x),\quad f: G \to R^n,\quad G \subset R^n,$$

непрерывно дифференцируемой правой частью f в окрестности каждой точки $\in G$, $f(a) \neq 0$, существует $n - 1$ независимый стационарный первый интеграл.

V. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕКТОРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

20. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

20.1. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этом параграфе изложим основные элементарные факты, относящиеся к линейным векторным уравнениям

$$\mathrm{D}\mathrm{x} = A(t)\,\mathrm{x} + f(t) \tag{20.1}$$

с непрерывной матричной функцией A и векторной функцией f, заданными на промежутке I. Как было показано в гл. 16, всякая задача Коши для уравнения (20.1) однозначно разрешима, причем решения определены на всем промежутке I задания уравнения (гл. 17). Все решения уравнения (20.1) можно получить, если ко всем решениям соответствующего однородного уравнения

$$\mathrm{D}\mathrm{x} = A(t)\,\mathrm{x} \tag{20.2}$$

прибавить некоторое фиксированное частное решение уравнения (20.1). Для нахождения частного решения уравнения (20.1) можно воспользоваться правилами Коши или Лагранжа. Например, если X — базисное решение однородного линейного матричного уравнения

$$\mathrm{D}\mathrm{X} = A(t)\,\mathrm{X}, \tag{20.3}$$

то, согласно правилу Лагранжа, частное решение уравнения (20.1) ищем в виде

$$\mathrm{x} = x_*(t) :: = X(t)\,u(t),$$

где u — вспомогательная неизвестная векторная функция. После подстановки x_* в (20.1) и очевидных преобразований определяем какое-нибудь частное значение u (ср. с гл. 8). В частности, в качестве u можно взять

$$u(t) :: = \int_s^t X^{-1}(\tau)\,f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Тогда

$$x_*(t) = \int_s^t X(t)\,X^{-1}(\tau)\,f(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{20.4}$$

Формула (20.4) выражает правило Коши нахождения частного решения x_*. Матричную функцию

$$K(t,\ \tau) :: = X(t)\,X^{-1}(\tau)$$

называют *функцией (матрицей) Коши* уравнения (20.2) (или (20.1)). При фиксированном $\tau \in I$ функция Коши является базисным решением матричного уравнения (20.3), нормированным при $t = \tau$, и, следовательно, не зависит от исходного базисного решения X.

ОРП (20.1) имеет вид

$$\mathrm{x} = K(t, s)c + \int_s^t K(t, \tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

где c — произвольный постоянный вектор-столбец (ср. (8.8)).

20.2. МАТРИЦАНТ УРАВНЕНИЯ

Для построения решения x уравнения (20.2), удовлетворяющего начальному условию $\mathrm{x}|_{t=s} = \xi$, применим метод последовательных приближений:

$$x^0(t) :: = \xi,$$

$$x^k(t) :: = \xi + \int_s^t A(\tau) x^{k-1}(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\ k = 1, 2, \ldots .$$

Если функцию x^k записать в виде

$$x^k(t) = \Bigg(E + \int_s^t A(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \ldots + \int_s^t A(\tau)\,\mathrm{d}\tau \int_s^\tau A(\tau_1)\,\mathrm{d}\tau_1 \ldots \int_s^{\tau_{k-2}} A(\tau_{k-1})\,\mathrm{d}\tau_{k-1}\Bigg)\xi,$$

то

$$x(t) = \lim_{k\to\infty} x^k(t) = \left(\underset{s}{\overset{t}{\Omega}} A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\xi,$$

где

$$\underset{s}{\overset{t}{\Omega}} A(\tau)\,\mathrm{d}\tau :: = E + \int_s^t A(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \ldots + \int_s^t A(\tau)\,\mathrm{d}\tau \int_s^\tau A(\tau_1)\,\mathrm{d}\tau_1 \ldots \int_s^{\tau_{k-2}} A(\tau_{k-1})\,\mathrm{d}\tau_{k-1} + \ldots .$$

Ряд в правой части называют *рядом Пеано.* Матричная функция $\underset{s}{\overset{t}{\Omega}} A(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ является матрицантом уравнения (20.2), так как она представляет собой базисное решение уравнения (20.3), нормированное при $t = s$.

Очевидно, для любых $t, \tau \in I$

$$K(t, \tau) = \underset{\tau}{\overset{t}{\Omega}} A(\tau_1)\,\mathrm{d}\tau_1.$$

Кроме того, для любых t, t_1, $s \in I$ выполняется

$$\overset{t}{\underset{t_1}{\Omega}} A(\tau)\,d\tau \overset{t_1}{\underset{s}{\Omega}} A(\tau)\,d\tau = \overset{t}{\underset{s}{\Omega}} A(\tau)\,d\tau. \tag{20.5}$$

Действительно, обе матричные функции (при фиксированных s и t_1) являются решениями уравнения (20.3) и совпадают при $t = t_1$. Поэтому в силу однозначной разрешимости соотношение (20.5) выполняется тождественно. Свойство матрицанта, выраженное формулой (20.5), называют *мультипликативностью.*

20.3. СИСТЕМЫ ЛАППО-ДАНИЛЕВСКОГО

Линейные векторные уравнения с переменными коэффициентами, вообще говоря, не интегрируются в квадратурах. Некоторые классы элементарных систем были указаны ранее — это диагональные и треугольные линейные системы или стационарные линейные системы. Рассмотрим еще один класс линейных систем, интегрируемых в квадратурах, открытый И. А. Лаппо-Данилевским.

Непрерывную матрицу $A(t)$, $t \in I$, назовем *перестановочной со своим интегралом* на промежутке I, если существует такое $s \in I$, что

$$A(t)\int_s^t A(\tau)\,d\tau = \int_s^t A(\tau)\,d\tau\, A(t), \ \forall t \in I.$$

Теорема Лаппо-Данилевского. *Если матрица коэффициентов однородной системы (20.2) перестановочна со своим интегралом на промежутке I, то семейство всех решений системы (20.2) доставляет формула*

$$x = \left(\exp \int_s^t A(\tau)\,d\tau\right) c. \tag{20.6}$$

◇ По определению экспоненты матрицы

$$\exp\int_s^t A(\tau)\,d\tau = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\left(\int_s^t A(\tau)\,d\tau\right)^m.$$

Ряд для экспоненты и ряд из производных сходятся локально равномерно на I. Поэтому допустимо почленное дифференцирование

$$D\left(\exp\int_s^t A(\tau)\,d\tau\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} D\left(\int_s^t A(\tau)\,d\tau\right)^m,$$

$$\text{но } D\left(\int_s^t A(\tau)\,d\tau\right)^m = A(t)\left(\int_s^t A(\tau)\,d\tau\right)^{m-1} + \ldots +$$

$$+\left(\int_s^t A(\tau)\,d\tau\right)^i A(t)\left(\int_s^t A(\tau)\,d\tau\right)^{m-i-1} + \ldots + \left(\int_s^t A(\tau)\,d\tau\right)^{m-1} A(t),$$

и если учесть перестановочность матрицы A и ее интеграла, то получим

$$\mathrm{D}\left(\int_s^t A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^m = mA(t)\left(\int_s^t A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{m-1}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{D}\left(\exp\int_s^t A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) = A(t)\exp\int_s^t A(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

и поэтому выражение (20.6) доставляет общее решение рассматриваемой системы. Решений, не охваченных формулой (20.6), у данной системы нет. Действительно, проведем в системе (20.2) равносильную замену переменных:

$$\mathrm{y} = \exp\left(-\int_s^t A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{x}.$$

Тогда на основании определения решения и свойств A

$$\mathrm{Dy} = -A(t)\exp\left(-\int_s^t A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{x} + A(t)\exp\left(-\int_s^t A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{x},$$

т. е. $\mathrm{Dy} = 0$, $\forall t \in I$, и поэтому $y = c$, что завершает доказательство теоремы. ■

Отметим, что на основании формулы (20.6) все решения неоднородной системы (20.1) в случае, когда матрица A перестановочна со своим интегралом, доставляет формула

$$\mathrm{x} = \left(\exp\int_s^t A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{c} + \int_s^t\left(\exp\int_\tau^t A(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Элементарные линейные системы указаны в книге Э. Камке «Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям» (М.: Наука, 1966, номера 8.19—8.57).

20.4. ПРИВОДИМЫЕ ПО ЛЯПУНОВУ СИСТЕМЫ

Непрерывно дифференцируемую функциональную матрицу L, определенную на промежутке $[s, +\infty[$, назовем *матрицей Ляпунова*, если: 1) матрицы L и $\mathrm{D}L$ ограничены на $[s, +\infty[$; 2) $|\det L(t)| \geqslant m > 0$, $\forall t \geqslant s$.

Отметим, что матрица L^{-1}, обратная неособенной непрерывно дифференцируемой матрице L, также является непрерывно дифференцируемой. Дифференцируя тождество

$$L(t)\,L^{-1}(t) = E,$$

получаем

$$\mathrm{D}L^{-1}(t) = -L^{-1}(t)\,\mathrm{D}L(t)\,L^{-1}(t).$$

Из определения матрицы Ляпунова и способа построения обратной матрицы следует, что матрица, обратная матрице Ляпунова, также является матрицей Ляпунова.

Линейное преобразование

$$y = L(t)\,x$$

с матрицей Ляпунова L называют *преобразованием Ляпунова*. Говорят, что линейное однородное уравнение (20.2), заданное на промежутке $I = [s, +\infty[$, *приводимо по Ляпунову* (в дальнейшем кратко — приводимо), если существует преобразование Ляпунова, приводящее уравнение к стационарному

$$Dy = By,$$

где B — постоянная матрица.

Критерий приводимости Еругина. *Линейное однородное уравнение (20.2) приводимо тогда и только тогда, когда некоторое базисное решение X соответствующего матричного уравнения (20.3) представимо в виде*

$$X(t) = L(t)\,e^{Bt},$$

где L — матрица Ляпунова, B — постоянная матрица.

◇ ⇒ Так как уравнение (20.2) приводимо, то существует преобразование Ляпунова $y = L_1(t)\,x$, приводящее (20.2) к стационарному уравнению $Dy = By$. Базисное решение Y соответствующего матричного уравнения имеет вид $Y(t) = e^{Bt}$. Поэтому существует базисное решение X матричного уравнения (20.3), представимое в виде

$$X(t) = L_1^{-1}(t)\,e^{Bt} = L(t)\,e^{Bt},$$

где $L :: = L_1^{-1}$ — матрица Ляпунова.

⇐ Из соотношения $X(t) = L(t)\,e^{Bt}$ находим $L(t) = X(t)\,e^{-Bt}$. Если в уравнении (20.2) сделать преобразование Ляпунова

$$y = L^{-1}(t)\,x = e^{Bt}X^{-1}(t)\,x, \tag{20.7}$$

то получаем

$$Dy = Be^{Bt}X^{-1}\cdot x - e^{Bt}X^{-1}DX\cdot X^{-1}\cdot x + e^{Bt}X^{-1}Ax =$$

$$= Be^{Bt}X^{-1}Xe^{-Bt}y - e^{Bt}X^{-1}AXX^{-1}x + e^{Bt}X^{-1}Ax = By.$$

Таким образом, преобразование Ляпунова (20.7) приводит уравнение (20.2) к стационарному уравнению $Dy = By$ и, следовательно, приводимо. ■

Систематическое изложение приводимых уравнений можно найти в работе Н. П. Еругина «Приводимые системы» (Труды Математического института АН СССР, 1946, т. 13).

20.5. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим линейное периодическое уравнение

$$Dx = A(t)\,x \tag{20.8}$$

с непрерывной ω-периодической матрицей A, т. е.

$$A(t+\omega) = A(t),\ \forall t.$$

Лемма о сдвиге. *Если* $x = x(t)$ *является решением уравнения (20.8), то и* $x = y(t) :: = x(t + \omega)$ *также будет решением того же уравнения.*

◊ По предположению

$$Dx(t) = A(t)\,x(t),\ \forall t.$$

Заменим t на $t + \omega$ и воспользуемся ω-периодичностью A:

$$Dx(t + \omega) = A(t)\,x(t + \omega),\ \forall t,$$

т. е. $Dy(t) = A(t)\,y(t),\ \forall t.$ ■

В частности, сдвиг на период базисного решения соответствующего матричного уравнения снова будет базисным решением того же уравнения.

20.6. МАТРИЦА МОНОДРОМИИ

Пусть X является базисным решением матричного уравнения

$$DX = A(t)\,X,\quad A(t + \omega) = A(t),$$

нормированным при $t = 0$, т. е. $X(0) = E$. Тогда для базисного решения $Y(t) :: = X(t + \omega)$ существует постоянная неособенная матрица C такая, что

$$Y(t) = X(t) \cdot C,$$

откуда $C = X(\omega)$, $\det X(\omega) \neq 0$. Матрицу $X(\omega)$ называют *матрицей монодромии* уравнения (20.8), а ее характеристические числа — *мультипликаторами.*

Лемма о степени матрицы. *Если характеристические числа матрицы* C *по модулю меньше единицы, то* $C^m \to 0$ *при* $m \to \infty$.

◊ Обозначим ν_k характеристические числа матрицы C и приведем C к нормальной жордановой форме J:

$$C = SJS^{-1} = S\,\mathrm{diag}\left(J_{d_1}(\nu_1),\ \ldots,\ J_{d_r}(\nu_r)\right) S^{-1},$$

$$C^m = SJ^mS^{-1} = S\,\mathrm{diag}\left(J^m_{d_1}(\nu_1),\ \ldots,\ I^m_{d_r}(\nu_r)\right) S^{-1}.$$

Так как $|\nu_k| < 1$, то из формулы (8.10) следует, что

$$J^m_{d_k}(\nu_k) \to 0 \text{ при } m \to \infty$$

и, следовательно, $C^m \to 0$. ■

Теорема о периодическом линейном уравнении. *Если все мультипликаторы уравнения (20.8) по модулю меньше единицы, то каждое решение этого уравнения стремится к нулю при* $t \to +\infty$.

◇ Очевидно, достаточно доказать, что базисное решение X стремится к нулю. На основании леммы о сдвиге

$$X(t+m\omega) = X(t)\,X^m(\omega),\ 0 \leqslant t \leqslant \omega,\ \forall m.$$

Матрица $X(t)$ ограничена на $[0,\ \omega]$, а матрица $X^m(\omega) \to 0$ при $m \to \infty$ (см. лемму о степени матрицы). Поэтому $X(t+m\omega) \to 0$, $\forall t \in [0,\ \omega]$ при $m \to \infty$. Следовательно, $X(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. ■

Отметим, что условия теоремы являются также и необходимыми для стремления всех решений уравнения (20.8) к нулю при $t \to +\infty$, так как если $X^m(\omega) \to 0$ при $m \to \infty$, то из формулы (8.10) следует, что $|\nu_k| < 1$.

Теорема. *Для того чтобы уравнение (20.8) имело ненулевое решение x, удовлетворяющее условию*

$$x(t+\omega) = \nu x(t),\ \forall t, \tag{20.9}$$

необходимо и достаточно, чтобы число ν было мультипликатором уравнения (20.8).

◇ $\Rightarrow$ Полагая в условии (20.9) $t = 0$, получаем

$$x(\omega) = \nu x(0).$$

С другой стороны, $x(\omega) = X(\omega)\cdot x(0)$, поэтому $(X(\omega) - \nu E)\,x(0) = 0$.

Так как $x(0) \neq 0$, то $\det(X(\omega) - \nu E) = 0$, т. е. ν является мультипликатором уравнения (20.8).

$\Leftarrow$ Обозначим через ξ собственный вектор матрицы монодромии $X(\omega)$, отвечающий мультипликатору ν, т. е. $X(\omega)\,\xi = \nu\xi$, и построим решение $\mathrm{x} = x(t) :: = X(t)\,\xi$. Тогда

$$x(t+\omega) = X(t+\omega)\,\xi = X(t)\,X(\omega)\,\xi = \nu x(t),\ \forall t. \ ■$$

В частности, уравнение (20.8) имеет ω-периодическое решение тогда и только тогда, когда один из мультипликаторов равен единице.

20.7. ПРИВОДИМОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ ВЕКТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Лемма. *Для всякой неособенной матрицы X существует такая матрица Y, что $e^{\mathrm{Y}} = \mathrm{X}$.*

◇ Рассмотрим сначала случай $\mathrm{X} = J_d(\nu)$, т. е. X является клеткой Жордана порядка d с характеристическим числом ν. Так как $\det \mathrm{X} \neq 0$, то $\nu \neq 0$, и поэтому матрицу X можно представить в виде

$$\mathrm{X} = \nu E + I_1 = \nu\left(E + \frac{I_1}{\nu}\right),\quad \text{где}\quad I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$Y ::= \ln\nu \cdot E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{I_1}{\nu}\right)^k, \tag{20.10}$$

где $\ln\nu = \ln|\nu| + i\arg\nu$.

Так как $I_1^k = 0$, $\forall k \geqslant d$, то ряд в (20.10) сходится.

$$e^{Y} = \exp\left(\ln\nu \cdot E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{I_1}{\nu}\right)^k\right) =$$

$$= \nu \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{I_1}{\nu}\right)^k\right)^m.$$

Из известных теорем о произведении и композиции степенных рядов и тождества

$$1 + x = e^{\ln(1+x)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\right)^m, \quad |x| < 1,$$

следует, что ряд справа можно преобразовать в степенной ряд, причем коэффициенты при x^m, $m \geqslant 2$, равны 0, а коэффициент при x равен 1. Так как степени матрицы I_1 коммутируют между собой, то те же преобразования дают

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{I_1}{\nu}\right)^k\right)^m = E + \frac{I_1}{\nu}.$$

Следовательно,

$$e^{Y} = \nu\left(E + \frac{I_1}{\nu}\right) = X.$$

Пусть теперь X — произвольная неособенная матрица. Приведем ее к нормальной жордановой форме:

$$X = S \operatorname{diag}\left(J_{d_1}(\nu_1), \ \ldots, \ J_{d_r}(\nu_r)\right) S^{-1},$$

где $J_{d_k}(\nu_k)$ — клетки Жордана, причем $\det J_{d_k}(\nu_k) \neq 0$, $\forall k$. По доказанному существуют Y_k такие, что

$$e^{Y_k} = J_{d_k}(\nu_k), \ \forall k.$$

Обозначим

$$Y ::= S \operatorname{diag}(Y_1, \ \ldots, \ Y_r) S^{-1}.$$

Тогда

$$e^{Y} = S \operatorname{diag}\left(e^{Y_1}, \ \ldots, \ e^{Y_r}\right) S^{-1} = S \operatorname{diag}\left(J_{d_1}(\nu_1), \ \ldots, \ J_{d_r}(\nu_r)\right) S^{-1} = X. \ \blacksquare$$

Теорема Флоке — Ляпунова. *Периодическое линейное векторное уравнение (20.8) приводимо по Ляпунову.*

◇ Так как матрица монодромии $X(\omega)$ неособенная, то по предыдущей лемме существует матрица Λ такая, что

$$e^{\Lambda\omega} = X(\omega).$$

Базисное решение X, $X(0) = E$, представим в виде

$$X(t) = \Phi(t)\, e^{\Lambda t},$$

где $\Phi(t) :: = X(t)\, e^{-\Lambda t}$.

Неособенная матричная функция Φ непрерывно дифференцируема и ω-периодическая, так как

$$\Phi(t+\omega) = X(t+\omega)\, e^{-\Lambda(t+\omega)} = X(t)\, X(\omega)\, e^{-\Lambda\omega} e^{-\Lambda t} =$$
$$= X(t)\, e^{-\Lambda t} = \Phi(t), \ \forall t.$$

Из периодичности и неособенности матрицы Φ следует, что она является матрицей Ляпунова. Для завершения доказательства остается сослаться на критерий приводимости. ■

Основные упражнения

20.1. Записать линейные системы в виде векторных уравнений в задачах 786—795, 800—803, 1220—1225 [1]. Построить матрицу Коши для каждого уравнения.

20.2. Привести пример матриц A и B, для которых выполняется а) $e^{A+B} = e^A e^B$; б) $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

20.3. Показать, что матрица

$$A(t) = \begin{pmatrix} p(t) & q(t) \\ q(t) & p(t) \end{pmatrix}$$

перестановочна со своим интегралом.

20.4. Пусть X — базисное решение матричного уравнения

$$\mathrm{D}X = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} X,$$

нормированное при $t = 0$. Найти $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $X(\pi)$, $X(2\pi)$.

20.5. Линейное уравнение $\mathrm{D}x = A(t)\,x$ с матрицей коэффициентов вида

$$A(t) = S \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(t) \end{pmatrix} S^{-1},$$

где S — неособенная постоянная матрица, называют *алгебраически приводимым*. Доказать, что алгебраически приводимое уравнение является уравнением Лаппо-Данилевского и найти его матрицу Коши.

20.6. Доказать формулу Лиувилля

$$\det X(t) = \det X(s) \exp\left(\int\limits_s^t \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau\right),$$

где $\operatorname{tr} A = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kk}$, X — решение матричного уравнения $\mathrm{D}X = A(t)\,X$.

Дополнительные упражнения

20.7. Привести пример матриц A и B, для которых $AB \neq BA$, однако

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

20.8. Для алгебраически приводимого ω-периодического линейного уравнения сформулировать критерий существования ω-периодического решения.

20.9. При каких значениях параметра α уравнение

$$\mathrm{D}x = \begin{pmatrix} \sin t & \alpha \\ \alpha & \sin t \end{pmatrix} x$$

имеет 2π-периодическое решение?

20.10. Пусть ν_k — мультипликаторы уравнения $\mathrm{D}x = A(t)\,x$. Показать, что мультипликаторы сопряженного уравнения

$$\mathrm{D}y = -A^{\mathrm{T}}(t)\,y$$

равны ν_k^{-1}.

20.11. Матрицу Y, удовлетворяющую условию

$$e^{Y} = X,$$

называют логарифмом X и обозначают $\ln X$. Найти

$$\mathrm{Ln}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

21. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ВЕКТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

21.1. УСТОЙЧИВОСТЬ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ *

Рассмотрим векторное дифференциальное уравнение

$$\mathrm{D}x = f(t, x) \tag{21.1}$$

с непрерывной правой частью f, определенной в полупространстве $t \geqslant s$ пространства R^{n+1} и удовлетворяющей условиям, обеспечивающим однозначную разрешимость любой задачи Коши $x|_{t=s} = \xi$, $\xi \in R^n$ (например, удовлетворяющей условиям теоремы Пикара — Линделефа). Кроме того, предположим, что все решения уравнения (21.1) бесконечно продолжимы вправо (условия, гарантирующие такую продолжимость, сформулированы в гл. 16).

Решение $x(t) = x(t;\ s,\ \xi)$ уравнения (21.1) *устойчиво по Ляпунову в положительном направлении* (кратко — *устойчиво*), если оно непрерывно по ξ на бесконечном промежутке $I_+ = [s, +\infty[$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall t \geqslant s,\ \forall \Delta\xi,$$
$$|\Delta\xi| \leqslant \delta \Rightarrow |x(t;\ s,\ \xi + \Delta\xi) - x(t)| \leqslant \varepsilon.$$

* Понятие устойчивости решений дифференциальных уравнений было введено и обсуждено применительно к стационарным линейным векторным уравнениям в гл. 9.

Если, сверх того, для достаточно малых $\Delta\xi$ $|x(t;\ s,\ \xi+\Delta\xi)-x(t)|\to 0$ при $t\to+\infty$, т. е. $\exists\Delta>0,\ \forall\Delta\xi,\ |\Delta\xi|\leqslant\Delta\Rightarrow|x(t;\ s,\ \xi+\Delta\xi)-x(t)|\to 0$ при $t\to+\infty$, то решение x называют *асимптотически устойчивым*.

С очевидными изменениями вводится понятие устойчивости решения в отрицательном направлении.

21.2. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ВЕКТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть задано линейное уравнение

$$\mathrm{D}x = A(t)\,x + f(t) \tag{21.2}$$

с непрерывными на промежутке $I_+ = [s,\ +\infty[$ матричной A и векторной f функциями. Все решения этого уравнения продолжимы на промежуток I_+. Обозначим

$$\rho(t,\ \Delta\xi) :: = |x(t;\ s,\ \xi+\Delta\xi) - x(t;\ s,\ \xi)|.$$

Так как

$$x(t;\ s,\ \xi) = \underset{s}{\overset{t}{\Omega}} A(\tau)\,d\tau\cdot\xi + x_*(t),$$

$$x(t;\ s,\ \xi+\Delta\xi) = \underset{s}{\overset{t}{\Omega}} A(\tau)\,d\tau\cdot(\xi+\Delta\xi) + x_*(t),$$

где $\underset{s}{\overset{t}{\Omega}} A(\tau)\,d\tau$ — матрицант уравнения (21.2), x_* — решение нулевой задачи Коши, $x_*(s) = 0$, то

$$\rho(t,\ \Delta\xi) = \left|\underset{s}{\overset{t}{\Omega}} A(\tau)\,d\tau\cdot\Delta\xi\right|.$$

Из последней формулы следует, что функция ρ не зависит ни от неоднородности f, ни от начального условия ξ, а поэтому устойчивость (асимптотическая устойчивость) произвольного решения уравнения (21.2) равносильна устойчивости (асимптотической устойчивости) нулевого решения $x = 0$ соответствующего однородного уравнения

$$\mathrm{D}x = A(t)\,x. \tag{21.3}$$

Таким образом, решения линейного уравнения либо все одновременно устойчивы, либо неустойчивы. Линейное уравнение называют *устойчивым (неустойчивым)*, если все его решения устойчивы (неустойчивы).

Отметим, что подобная терминология не применима к нелинейным уравнениям. Например, система

$$\mathrm{D}x = -y + x(x^2+y^2-1),\quad \mathrm{D}y = x + y(x^2+y^2-1)$$

имеет два очевидных решения — стационарное ($x = 0$, $y = 0$) и периодическое ($x = \cos t$, $y = \sin t$). Система обладает интегрируемой комбинацией

$$\mathrm{xDx} + \mathrm{yDy} = \frac{1}{2} \mathrm{D} (\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2) = (\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2)(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 - 1),$$

исследование которой показывает, что стационарное решение асимптотически устойчиво, а периодическое решение устойчивостью не обладает.

Критерий устойчивости. *Линейное однородное уравнение (21.3) (а следовательно, и уравнение (21.2)) устойчиво тогда и только тогда, когда его матрицант* $\underset{s}{\overset{t}{\Omega}} A(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ *ограничен на промежутке* I_+.

◇ $\Rightarrow$ Так как нулевое решение $x = 0$ устойчиво, то

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall \Delta\xi,$$
$$|\Delta\xi| \leqslant \delta \Rightarrow |x(t;\ s,\ \Delta\xi)| \leqslant \varepsilon,\ \forall t \geqslant s,$$

поэтому

$$\Big|\underset{s}{\overset{t}{\Omega}} A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big| = \sup_{|h|=1}\Big|\underset{s}{\overset{t}{\Omega}} A(\tau)\,\mathrm{d}\tau h\Big| = \sup_{|h|=1}\Big|\underset{s}{\overset{t}{\Omega}} A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\delta h\Big|\frac{1}{\delta} =$$
$$= \sup_{|\Delta\xi|=\delta} |x(t;\ s,\ \Delta\xi)| \cdot \frac{1}{\delta} \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta} = M,\ \forall t \geqslant s,$$

т. е. матрицант уравнения ограничен на I_+.

$\Leftarrow$ Если матрицант ограничен, т. е.

$$\Big|\underset{s}{\overset{t}{\Omega}} A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big| \leqslant M,\ \forall t \geqslant s,\ M > 0,$$

то

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta :: = \frac{\varepsilon}{M},\ \forall t \geqslant s,\ \forall \Delta\xi,$$
$$|\Delta\xi| \leqslant \delta \Rightarrow |x(t;\ s,\ \Delta\xi)| \doteq \Big|\underset{s}{\overset{t}{\Omega}} A(\tau)\,\mathrm{d}\tau \cdot \Delta\xi\Big| \leqslant M\delta = \varepsilon. \ \blacksquare$$

Так как столбцы матрицанта образуют базис множества решений уравнения (21.3), то ограниченность матрицанта равносильна ограниченности всех решений данного однородного уравнения. Поэтому критерий устойчивости можно переформулировать следующим образом: уравнение (21.3) устойчиво тогда и только тогда, когда все его решения ограничены на промежутке I_+.

Критерий асимптотической устойчивости. *Уравнение (21.3) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда матрицант* $\underset{s}{\overset{t}{\Omega}} A(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ *стремится к нулю при* $t \to +\infty$ *или, что то же самое, когда все решения стремятся к нулю.*

◇ ⇒ Нулевое решение асимптотически устойчиво, поэтому

$$\exists \Delta > 0,\ \forall \Delta\xi,\ |\Delta\xi| \leqslant \Delta \Rightarrow x(t;\ s,\ \Delta\xi) \to 0 \text{ при } t \to +\infty. \tag{21.4}$$

Если бы, например, p-й столбец матрицанта не стремился к нулю, то для $\Delta\xi ::= (0,\ \ldots,\ 0,\ \Delta\xi_p,\ 0,\ \ldots,\ 0)^{\mathrm{T}}$, $|\Delta\xi_p| = \Delta$, решение

$$x(t;\ s,\ \Delta\xi) = \underset{s}{\overset{t}{\Omega}} A(\tau)\, d\tau \Delta\xi \not\to 0 \text{ при } t \to +\infty,$$

что противоречит условию (21.4). Следовательно, матрицант $\underset{s}{\overset{t}{\Omega}} A(\tau)\, d\tau$ стремится к нулю при $t \to +\infty$.

Достаточность очевидна. ■

Отметим, что для нелинейного уравнения одного стремления к нулю, вообще говоря, недостаточно для асимптотической устойчивости нулевого решения.

Следствие. Линейное уравнение (21.3) с периодической матрицей A *асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все мультипликаторы по модулю меньше единицы.*

Доказательство следует из предыдущего критерия и теоремы о периодическом линейном уравнении (гл. 20).

21.3. УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИВОДИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ВЕКТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Характеристическим показателем Ляпунова (показателем Ляпунова) ненулевого решения x уравнения (21.3) называют

$$\omega(x) ::= \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln |x(t)|.$$

Лемма. *Преобразование Ляпунова* $\mathrm{y} = L(t)\,\mathrm{x}$ *уравнения (21.3) не меняет показателей Ляпунова соответствующих решений.*

◇ Из ограниченности матрицы Ляпунова L следует, что

$$\omega(y) = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln |y(t)| \leqslant \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln |L(t)| + \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln |x(t)| = \omega(x).$$

Аналогично из ограниченности матрицы L^{-1} получаем

$$\omega(x) \leqslant \omega(y).$$

Следовательно, $\omega(x) = \omega(y)$. ■

Из доказанной леммы непосредственно следует, что если уравнение (21.3) приводимо, т. е. существует преобразование Ляпунова, приводящее (21.3) к стационарному уравнению

$$\mathrm{Dy} = B\mathrm{y}, \tag{21.5}$$

то показатели Ляпунова решений уравнения (21.3) совпадают с показателями Ляпунова решений уравнения (21.5).

Пусть $\nu_k = \alpha_k + i\beta_k$ — характеристические числа матрицы B.

Лемма об оценке показателей Ляпунова. *Показатели Ляпунова решений приводимого уравнения не превосходят* $\max\limits_k \operatorname{Re} \nu_k$.

◇ Очевидно, достаточно доказать, что показатели Ляпунова решений уравнения (21.5) не превосходят $\max\limits_k \operatorname{Re} \nu_k$. Обозначим

$$\alpha :: = \max_k \operatorname{Re} \nu_k.$$

Всякое ненулевое решение y можно представить в виде

$$y(t) = \sum_{k=1}^{r} P_k(t)\, e^{\nu_k t},$$

где P_k — полиномиальные векторные функции, причем по крайней мере одна из них ненулевая. Тогда

$$y(t) = \sum_{k=1}^{r} P_k(t)\, e^{\alpha_k t} e^{i\beta_k t} = e^{\alpha t} \sum_{k=1}^{r} P_k(t)\, e^{(\alpha_k - \alpha)t} e^{i\beta_k t},$$

$$|y(t)| \leqslant e^{\alpha t} \sum_{k=1}^{r} |P_k(t)|\, e^{(\alpha_k - \alpha)t} \leqslant e^{\alpha t} \sum_{k=1}^{r} |P_k(t)|.$$

Поэтому

$$\omega(y) \leqslant \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \left(\alpha t + \ln \sum_{k=1}^{r} |P_k(t)| \right) = \alpha. \blacksquare$$

Критерий асимптотической устойчивости приводимого уравнения. *Приводимое линейное векторное уравнение асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда показатели Ляпунова его решений отрицательные.*

◇ $\Rightarrow$ Если уравнение (21.3) приводимо и асимптотически устойчиво, то все его решения стремятся к нулю при $t \to +\infty$. Тогда и все решения уравнения (21.5) стремятся к нулю, и поэтому на основании критерия асимптотической устойчивости стационарного уравнения (см. гл. 9) матрица B устойчивая, т. е. $\alpha < 0$. Из леммы об оценке показателей Ляпунова следует, что показатели Ляпунова решений уравнения (21.3) отрицательные.

$\Leftarrow$ Пусть x — произвольное ненулевое решение, $\omega(x) = \lambda$. По условию $\lambda < 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ столь мало, что $\lambda + \varepsilon < 0$. Из определения показателя Ляпунова вытекает существование столь большого T, что

$$|x(t)| \leqslant e^{(\lambda+\varepsilon)t}, \ \forall t \geqslant T,$$

т. е.

$$x(t) \to 0 \text{ при } t \to +\infty.$$

Таким образом, все решения уравнения (21.3) стремятся к нулю при $t \to +\infty$, что и доказывает асимптотическую устойчивость. $\blacksquare$

21.4. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ФУНКЦИОНАЛЬНО КОММУТАТИВНОЙ МАТРИЦЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Матричную функцию A, определенную на промежутке $[s, +\infty[$, называют *функционально коммутативной*, если для любых t, $\sigma \geqslant s$

$$A(t)\,A(\sigma) = A(\sigma)\,A(t).$$

Всякая непрерывная функционально коммутативная матрица A перестановочна со своим интегралом, так как

$$A(t)\int_s^t A(\tau)\,d\tau = \int_s^t A(t)A(\tau)\,d\tau = \int_s^t A(\tau)\,A(t)\,d\tau = \int_s^t A(\tau)\,d\tau\,A(t),$$

и поэтому линейное уравнение (21.3) с функционально коммутативной матрицей является уравнением Лаппо-Данилевского.

Теорема. *Линейное векторное уравнение с функционально коммутативной матрицей коэффициентов A асимптотически устойчиво, если существует предел*

$$A_0 :: = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_s^t A(\tau)\,d\tau$$

и предельная матрица A_0 является устойчивой.

◇ Докажем прежде всего, что матрица A_0 перестановочна с $\int_s^t A(\tau)\,d\tau$. Действительно,

$$\frac{1}{\sigma}\int_s^\sigma A(\tau_1)\,d\tau_1 \int_s^t A(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\sigma}\int_s^\sigma d\tau_1 \int_s^t A(\tau_1)\,A(\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sigma}\int_s^t d\tau \int_s^\sigma A(\tau)\,A(\tau_1)\,d\tau_1 = \int_s^t A(\tau)\,d\tau\,\frac{1}{\sigma}\int_s^\sigma A(\tau_1)\,d\tau_1.$$

Переходя к пределу при $\sigma \to +\infty$ в последнем равенстве, получаем

$$A_0\int_s^t A(\tau)\,d\tau = \int_s^t A(\tau)\,d\tau\,A_0.$$

Из определения матрицы A_0 следует, что существует такая матрица $B(t)$, что

$$\frac{1}{t}\int_s^t A(\tau)\,d\tau = A_0 + B(t),$$

причем $B(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Кроме того

$$A_0 B(t) = A_0\left(\frac{1}{t}\int_s^t A(\tau)\,d\tau - A_0\right) = \left(\frac{1}{t}\int_s^t A(\tau)\,d\tau - A_0\right)A_0 = B(t)\,A_0.$$

Так как уравнение (21.3) с функционально коммутативной матрицей является уравнением Лаппо-Данилевского, то

$$\Omega_s^t A(\tau)\,d\tau = e^{\int_s^t A(\tau)d\tau} = e^{tB(t)+tA_0},$$

и, учитывая перестановочность матриц A_0 и $B(t)$, имеем

$$\Omega_s^t A(\tau)\,d\tau = e^{tB(t)}e^{tA_0}.$$

Обозначим

$$\alpha :: = \max_k \operatorname{Re} \nu_k,$$

где ν_k — характеристические числа матрицы A_0. Из устойчивости матрицы A_0 следует, что $\alpha < 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$ столь мало, что $\alpha + 2\varepsilon < 0$. Выберем T столь большим, чтобы

$$|B(t)| \leqslant \varepsilon, \ \forall t \geqslant T.$$

Произвольное ненулевое решение x уравнения (21.3) представим в виде

$$x(t) = \Omega_s^t A(\tau)\,d\tau x(s) = e^{tB(t)}e^{tA_0}x(s) = e^{tB(t)}y(t),$$

где $y(t) :: = e^{tA_0}x(s)$. Функция y является решением стационарного уравнения

$$\mathrm{D}y = A_0 y,$$

поэтому на основании леммы об оценке показателей Ляпунова

$$\omega(y) \leqslant \alpha.$$

Тогда существует T_1 такое, что

$$|y(t)| \leqslant e^{(\alpha+\varepsilon)t}, \ \forall t \geqslant T_1.$$

Следовательно,

$$|x(t)| \leqslant |e^{tB(t)}|\,|y(t)| \leqslant e^{t|B(t)|}\,|y(t)| \leqslant e^{(\alpha+2\varepsilon)t}, \ \forall t \geqslant \max\{T, T_1\},$$

откуда $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Таким образом, все решения уравнения (21.3) стремятся к нулю при $\to +\infty$, что равносильно асимптотической устойчивости уравнения. ■

Основные упражнения

21.1. В задачах 890—892 [3] выяснить, является ли устойчивым (асимптотически устойчивым) нулевое решение системы, общее решение которой известно.

21.2. Используя критерий Гурвица, найти значения параметров α и β, при которых линейное уравнение асимптотически устойчиво:

а) $\mathrm{D}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; б) $\mathrm{D}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

21.3. Исследовать устойчивость линейных уравнений: а) $\mathrm{D}x = t^{-3/2}x$; б) $\mathrm{D}x = t^2x$; в) $\mathrm{D}x = \sin t \cdot x$; г) $\mathrm{D}x = t \cdot \sin t \cdot x$.

Указать необходимое и достаточное условие устойчивости уравнения $\mathrm{D}x = a(t)\,x$ с непрерывным коэффициентом $a : [s, +\infty[\to R$.

21.4. Доказать, что линейное уравнение $\mathrm{D}x = A(t)\,x$ неустойчиво, если $\lim\limits_{t\to+\infty} \operatorname{tr} A(t) = a > 0$.

21.5. Исследовать на асимптотическую устойчивость периодические линейные уравнения в задачах 959, 960 [3].

21.6. Показать, что нулевое решение уравнения

$$D\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+\dfrac{\ln t}{t}, & 1+e^{-t}\\ 1+e^{-t}, & -2+\dfrac{\ln t}{t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

асимптотически устойчиво.

Дополнительные упражнения

21.7. Доказать, что для асимптотической устойчивости нулевого решения скалярного уравнения

$$Dx=f(t,\ x),\ f(t,\ 0)=0$$

достаточно стремления всех решений к нулю при $t\to+\infty$.

21.8. На примере векторного уравнения

$$D\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=f(t,\ x_1,\ x_2),$$

где $f(t,\ x_1,\ x_2)=\begin{pmatrix}\dfrac{x_1}{t}-t^2x_1x_2^2\\ -\dfrac{x_2}{t}\end{pmatrix}$ при $x_2\neq 0$ и $f(t,\ x_1,\ 0)=\begin{pmatrix}-x_1\\0\end{pmatrix}$,

показать, что стремление всех решений к нулю при $t\to+\infty$ не обеспечивает устойчивости нулевого решения.

21.9. Доказать, что показатели Ляпунова решений линейного уравнения

$$Dx=Ax,$$

где A — постоянная матрица с различными действительными характеристическими числами ν_k, совпадают с ν_k.

21.10. Доказать, что дробно-линейное преобразование

$$w=\frac{z+1}{z-1},\ w,\ z\in K$$

переводит единичный круг $|z|<1$ в левую полуплоскость $\operatorname{Re} w<0$.

21.11. При каких условиях корни многочлена $z^2+a_1z+a_0$ с действительными коэффициентами лежат внутри единичного круга $|z|<1$?

22. МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

22.1. УСТОЙЧИВОСТЬ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ

Рассмотрим векторное уравнение

$$Dx=f(t,\ x) \tag{22.1}$$

с непрерывной правой частью f, определенной в полупространстве $t\geqslant s$, удовлетворяющей условиям, обеспечивающим однозначную разрешимость любой задачи Коши $x|_{t=s}=\xi,\ \xi\in R^n$ и бесконечную продолжимость вправо всех решений. Для исследования устойчивости некоторого решения x в уравнении (22.1) произведем замену

$$\mathrm{y} = \mathrm{x} - x(t).$$

Тогда придем к уравнению

$$\mathrm{D}\mathrm{y} = g(t, \mathrm{y}),$$

где $g(t, \mathrm{y}) :: = f(t, \mathrm{y} + x(t)) - f(t, x(t)), \ g(t, 0) = 0, \ \forall t \geqslant s$, в котором решению x исходного уравнения соответствует нулевое решение $y = 0$. Исследование устойчивости произвольного решения уравнения (22.1) сводится к исследованию устойчивости нулевого решения преобразованного уравнения.

В дальнейшем при исследовании вопросов устойчивости предполагаем, что уравнение (22.1) обладает нулевым решением, т. е.

$$f(t, 0) = 0, \ \forall t \geqslant s,$$

и ограничимся изучением устойчивости нулевого решения.

22.2. ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА И УСТОЙЧИВОСТЬ

При изучении устойчивости решений нелинейных векторных уравнений основное внимание будем уделять одному из эффективных методов выявления устойчивости — *методу функций Ляпунова.*

Пусть $v: R^n \to R$, $w: R^n \to R$ — непрерывно дифференцируемые скалярные функции, положительные при $\mathrm{x} \neq 0$ и нулевые при $\mathrm{x} = 0$, а символ r — положительная постоянная.

Теорема Ляпунова об устойчивости. *Если существует функция v, для которой*

$$\operatorname{grad} v \cdot f = \frac{\partial v}{\partial \mathrm{x}_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial v}{\partial \mathrm{x}_n} f_n \leqslant 0, \ \forall t \geqslant s, \ \forall \mathrm{x}, \ |\mathrm{x}| \leqslant r$$

(такие v называют функциями Ляпунова), то нулевое решение уравнения (22.1) *устойчиво.*

◇ Если x — решение уравнения (22.1), то

$$\mathrm{D} v(x(t)) = \operatorname{grad} v(x(t)) \cdot f(t, x(t)),$$

поэтому из условия теоремы следует, что функции $v(x(t))$ на участках $x(t)$, попадающих в шар $|\mathrm{x}| \leqslant r$, убывает.

Возьмем $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < r$. Функция v непрерывна и положительна на сфере $|\mathrm{x}| = \varepsilon$, поэтому имеет на этой сфере положительный минимум m. Функция v непрерывна и при $\mathrm{x} = 0$, причем $v(0) = 0$. Следовательно, существует $\delta > 0$, $0 < \delta < \varepsilon$, такое, что

$$\forall \mathrm{x}, \ |\mathrm{x}| \leqslant \delta \Rightarrow v(\mathrm{x}) < m.$$

Пусть $|\xi| \leqslant \delta$. Тогда решение $x(t) = x(t; s, \xi)$ начинается внутри сферы $|\mathrm{x}| = \varepsilon$ и тем более внутри сферы $|\mathrm{x}| = r$. Если бы нашлось $T > s$ такое, что

$$|x(t)| < \varepsilon, \ s \leqslant t < T \text{ и } |x(T)| = \varepsilon,$$

то в силу убывания функции $v(x(t))$ на промежутке $[s, T]$ имели бы

$$m \leqslant v(x(T)) \leqslant v(x(s)) = v(\xi) < m \ (?!).$$

Полученное противоречие доказывает, что

$$|x(t)| < \varepsilon, \ \forall t \geqslant s,$$

и, значит, нулевое решение устойчиво. ■

Следствие. Если уравнение (22.1) имеет стационарный первый интеграл v, положительный в проколотой окрестности точки $\mathrm{x}=0$ и $v(0)=0$, то нулевое решение уравнения (22.1) устойчиво.

Доказательство следует из теоремы о первом интеграле (гл. 19) и теоремы Ляпунова об устойчивости.

Пример 22.1. Если векторное уравнение Гамильтона

$$\mathrm{D}\mathrm{x}_j = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{x}_{j+m}}, \ \mathrm{D}\mathrm{x}_{j+m} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{x}_j}, \ j = 1, 2, \ldots, m,$$

обладает нулевым решением $\mathrm{x}=0$ и гамильтониан Φ положителен при $\mathrm{x} \neq 0$, $\Phi(0)=0$, то решение $\mathrm{x}=0$ устойчиво, так как Φ является стационарным первым интегралом.

22.3. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. *Если существуют функции v и w такие, что*

$$\operatorname{grad} v \cdot f \leqslant -w, \ \forall t \geqslant s, \ \forall \mathrm{x}, \ |\mathrm{x}| \leqslant r,$$

то нулевое решение уравнения (22.1) асимптотически устойчиво.

◇ Из теоремы Ляпунова об устойчивости следует, что нулевое решение устойчиво. Функция $v(x(t))$ убывает вдоль решения $x(t) = x(t; s, \xi)$, $|\xi| \leqslant \delta$, поэтому

$$v(x(t)) \to \alpha \text{ при } t \to +\infty, \ 0 \leqslant \alpha < m.$$

Пусть F — подмножество шара $|\mathrm{x}| \leqslant \varepsilon$, на котором $v(\mathrm{x}) \geqslant \alpha$. Так как функция v непрерывна, то F — замкнутое подмножество. Из условия теоремы следует, что

$$\mathrm{D}v(x(t)) \leqslant -w(x(t)) \leqslant -\inf_{t \geqslant s} w(x(t)) \leqslant -\min_{\mathrm{x} \in F} w(\mathrm{x}),$$

так как $x(t) \in F$, $\forall t \geqslant s$.

Если предположить, что $\alpha > 0$, то множество F не содержит точки $\mathrm{x}=0$. Функция w положительна и непрерывна на компакте F. Поэтому

$$\mathrm{D}v(x(t)) \leqslant \beta = \mathrm{const} < 0, \ \forall t \geqslant s,$$

и, следовательно,

$$v(x(t)) \to -\infty \ (?!).$$

Таким образом, обязательно $\alpha = 0$, т. е. $v(x(t)) \to 0$ при $t \to +\infty$, откуда следует ($|\mathrm{x}| \leqslant \varepsilon$!), что $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. ■

Пример 22.2. Нулевое решение ($x=0$, $y=0$) системы

$$\mathrm{D}\mathrm{x} = -\frac{2\mathrm{x}}{(1+\mathrm{x})^2} + 2\mathrm{y},$$

$$\mathrm{D}y = -\frac{2y}{(1+x)^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

асимптотически устойчиво, так как функции $v(x, y) :: = \frac{x^2}{1+x^2} + y^2$ и $w(x, y) :: = \frac{4}{(1+x)^2}\left(\frac{x^2}{(1+x^2)^2} + y^2\right)$ удовлетворяют условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

22.4. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

В следующей теореме функция v не обязательно положительная при $x \neq 0$, однако в любой окрестности нуля существует $\xi \neq 0$ такое, что $v(\xi) > 0$ (предположения о w остаются в силе).

Теорема Ляпунова о неустойчивости. *Если существуют функции v и w такие, что*

$$\operatorname{grad} v \cdot f \geqslant w, \ \forall t \geqslant s, \ \forall x, \ |x| \leqslant r,$$

то нулевое решение уравнения (22.1) неустойчиво.

◊ Из условия теоремы следует, что для любого решения x функция $v(x(t))$ возрастает на участках $x(t)$, лежащих в шаре $|x| \leqslant r$.

Функция v непрерывна при $x = 0$ и $v(0) = 0$, поэтому она локально ограничена при $x = 0$, т. е. существуют положительные постоянные M и ε_0, $\varepsilon_0 \leqslant r$, такие, что

$$|v(x)| \leqslant M, \ \forall x, \ |x| \leqslant \varepsilon_0.$$

Пусть $\delta > 0$, $0 < \delta < \varepsilon_0$, произвольно мало. Возьмем $\xi \neq 0$, $|\xi| \leqslant \delta$, такое, что $v(\xi) > 0$, и построим решение $x(t) = x(t; s, \xi)$. Покажем, что существует $T > s$, при котором

$$|x(T)| > \varepsilon_0.$$

Если бы $|x(t)| \leqslant \varepsilon_0$ при всех $t \geqslant s$, то в силу возрастания функции $v(x(t))$

$$v(x(t)) > v(x(s)) = v(\xi) > 0, \ \forall t \geqslant s,$$

и поэтому существовало бы такое $\beta > 0$, $0 < \beta < \varepsilon_0$, что

$$|x(t)| \geqslant \beta, \ \forall t \geqslant s.$$

Тогда

$$\mathrm{D}v(x(t)) \geqslant w(x(t)) \geqslant \min_{\beta \leqslant |x| \leqslant \varepsilon_0} w(x) = \gamma > 0,$$

откуда следовала бы неограниченность v в шаре $|x| \leqslant \varepsilon_0$ (?!).

Таким образом,

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \ \forall \delta > 0, \ \exists \xi \neq 0, \ |\xi| \leqslant \delta, \ \exists T > s, \ |x(T)| > \varepsilon_0,$$

что означает неустойчивость нулевого решения. ■

22.5. УСТОЙЧИВОСТЬ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Уравнение (22.1) вида

$$\mathrm{D}x = Ax + g(t, x) \tag{22.2}$$

называют *квазилинейным (уравнением с ведущей линейной частью)*, если равномерно по $t \geqslant s$

$$g(t, x) = o(|x|) \text{ при } x \to 0.$$

Стационарное линейное уравнение

$$Dx = Ax \qquad (22.3)$$

называют *линеаризацией* уравнения (22.2) вдоль нулевого решения.

Пример 22.3. Уравнение (22.2) заведомо является квазилинейным, если

$$g(t, x) = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n \geqslant 2}' h_{i_1 i_2 \ldots i_n}(t, x)\, x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n},$$

где все векторные функции $h_{i_1 \ldots i_n}$ ограничены для $|x| \leqslant r$ и $t \geqslant s$.

Лемма. *Если действительные части всех характеристических чисел матрицы A отрицательны, то существуют положительно определенные матрицы (т. е. симметрические матрицы с положительными характеристическими числами) B и C такие, что*

$$A^{\mathrm{T}}B + BA = -C \qquad (22.4)$$

(линейное алгебраическое уравнение в матрицах (22.4) называют *уравнением Ляпунова).*

Доказательство этой леммы см., например, в книге Ф. Р. Гантмахера «Теория матриц» (М., 1954, гл. XV, § 5).

Теорема об устойчивости. *Если линеаризация (22.3) асимптотически устойчива, то асимптотически устойчиво и нулевое решение квазилинейного уравнения (22.2).*

◇ Линейное стационарное уравнение (22.3) асимптотически устойчиво, следовательно (см. критерий асимптотической устойчивости, гл. 9), матрица A устойчива, т. е. действительные части всех характеристических чисел матрицы A отрицательные. На основании леммы существуют положительно определенные квадратичные формы

$$v(x) ::= x^{\mathrm{T}}Bx, \quad w(x) ::= \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}}Cx,$$

связанные соотношением (22.4). Функция v является функцией Ляпунова для нулевого решения уравнения (22.2), так как $\operatorname{grad} v\,(Ax + g) = 2x^{\mathrm{T}}BAx + 2x^{\mathrm{T}}Bg = x^{\mathrm{T}}BAx + (Ax)^{\mathrm{T}}(x^{\mathrm{T}}B)^{\mathrm{T}} + 2x^{\mathrm{T}}Bg = x^{\mathrm{T}}(BA + A^{\mathrm{T}}B)\,x + 2x^{\mathrm{T}}Bg = -w - \left(\frac{1}{2}\frac{x^{\mathrm{T}}}{|x|}C\frac{x}{|x|} + \rho(t, x)\right)|x|^2 \leqslant -w - (\gamma + \rho(t, x))\,|x|^2$, где γ — положительная постоянная, а $\rho(t, x) \to 0$ при $x \to 0$ равномерно по $t \geqslant s$. Следовательно, существует $r > 0$ такое, что

$$\operatorname{grad} v\,(Ax + g(t, x)) \leqslant -w(x), \quad \forall t \geqslant s, \ \forall x, \ |x| \leqslant r.$$

На основании теоремы Ляпунова нулевое решение уравнения (22.2) асимптотически устойчиво. ■

22.6. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Если из асимптотической устойчивости нулевого решения линейного уравнения в вариациях следует асимптотическая устойчивость порождающего решения x исходного уравнения, то говорят, что решение x *устойчиво по первому приближению*.

Как уже показано, нулевое решение квазилинейного уравнения устойчиво по первому приближению

Следствие. Если функция f непрерывно дифференцируема в окрестности точки $\mathrm{x} = 0$ и все характеристические числа матрицы Якоби $f'(0)$ имеют отрицательные действительные части, то нулевое решение стационарного векторного уравнения

$$\mathrm{Dx} = f(\mathrm{x}),\ f(0) = 0 \tag{22.5}$$

асимптотически устойчиво.

◇ Так как функция f дифференцируема при $\mathrm{x} = 0$, то $f(\mathrm{x}) = f'(0)\mathrm{x} + o(|\mathrm{x}|)$ при $\mathrm{x} \to 0$, т. е. уравнение (22.5) является квазилинейным. Остается сослаться на предыдущую теорему об устойчивости. ■

Пример 22.4. Нулевое решение системы

$$\mathrm{Dx}_1 = \mathrm{x}_2,$$
$$\mathrm{Dx}_2 = -b \sin \mathrm{x}_1 - a\mathrm{x}_2,\ a > 0,\ b > 0$$

асимптотически устойчиво, так как матрица Якоби правой части в нуле

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

является устойчивой.

Теорема о неустойчивости. *Если хотя бы одно характеристическое число матрицы A обладает положительной действительной частью, то нулевое решение квазилинейного уравнения (22.2) неустойчиво.*

Доказательство теоремы см., например, в книге Б. П. Демидовича «Лекции по математической теории устойчивости» (М.: Наука, 1967, гл. IV, § 10).

В частности, нулевое решение уравнения (22.5) неустойчиво, если матрица Якоби $f'(0)$ имеет по крайней мере одно характеристическое число с положительной действительной частью.

22.7. УРАВНЕНИЕ С ПРИВОДИМЫМ ПЕРВЫМ ПРИБЛИЖЕНИЕМ

В заключение рассмотрим уравнение (22.1) вида

$$\mathrm{Dx} = A(t)\mathrm{x} + g(t, \mathrm{x}) \tag{22.6}$$

с приводимой по Ляпунову линейной частью

$$\mathrm{Dx} = A(t)\mathrm{x} \tag{22.7}$$

и функцией g, удовлетворяющей, как и прежде, условию малости $g(t, \mathrm{x}) = o(|\mathrm{x}|)$ при $\mathrm{x} \to 0$ равномерно по $t \geqslant s$.

Теорема. Если показатели Ляпунова всех решений линеаризации (22.7) отрицательные, то нулевое решение уравнения (22.6) асимптотически устойчиво.

◇ Линейное уравнение (22.7) приводимо, поэтому существует преобразование Ляпунова

$$y = L(t)\,x, \tag{22.8}$$

приводящее (22.7) к стационарному векторному уравнению

$$Dy = By \tag{22.9}$$

с постоянной матрицей $B :: = DLL^{-1} + LAL^{-1}$.

Применяя преобразование (22.8) к уравнению (22.6), получаем

$$Dy = By + \tilde{g}(t,\ y), \tag{22.10}$$

где $\tilde{g}(t,\ y) :: = L(t)\,g(t,\ L^{-1}(t)\,y) = o(|y|)$ при $y \to 0$ равномерно по $t \geqslant s$.

На основании критерия асимптотической устойчивости приводимого уравнения (см. гл. 21) уравнение (22.7), а следовательно, и уравнение (22.9) асимптотически устойчивы. Поэтому матрица B устойчива, т. е. действительные части всех характеристических чисел матрицы B отрицательные. Из теоремы об устойчивости для квазилинейного уравнения следует, что нулевое решение $y = 0$ уравнения (22.10) асимптотически устойчиво. Тогда, согласно (22.8), асимптотически устойчиво и нулевое решение $x = 0$ уравнения (22.6) ■

Аналогично, используя теорему о неустойчивости для квазилинейного уравнения, можно показать, что если уравнение (22.7) имеет решение с положительным показателем Ляпунова, то нулевое решение уравнения (22.6) неустойчиво.

Следствие. Нулевое решение уравнения (22.6) с периодической матрицей $A(t)$ асимптотически устойчиво (неустойчиво), если показатели Ляпунова всех решений уравнения (22.7) отрицательные (среди них есть положительный показатель Ляпунова).

Доказательство следует из предыдущей теоремы и теоремы Флоке—Ляпунова (см. гл. 20).

Отметим, что в общем случае непрерывной матрицы $A(t)$ асимптотическая устойчивость линеаризированного уравнения (22.7) не гарантирует не только асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (22.6), но и даже его устойчивости (см. упр. 22.6).

Основные упражнения

22.1. В задачах 1458—1461 [1], 899—906 [3] исследовать устойчивость нулевого решения квазилинейного уравнения.

22.2. При каких значениях параметров a и b асимптотически устойчиво нулевое решение в задачах 907—910 [3].

22.3. Построив функцию Ляпунова, исследовать устойчивость нулевого решения в задачах 923, 924 [3].

Дополнительные упражнения

22.4. Доказать, что нулевое решение уравнения

$$\mathrm{D}x = Ax + g(t, x)$$

устойчиво, если устойчиво линейное уравнение $\mathrm{D}x = Ax$ и

$$|g(t, x)| \leqslant \varphi(t)|x|, \quad \int^{+\infty} \varphi(t)\,dt < +\infty.$$

22.5. Сравнить взаимное расположение решений уравнений:

$$\mathrm{D}x = -\frac{x}{t}, \quad t \geqslant 1; \tag{22.11}$$

$$\mathrm{D}y = \begin{cases} -\dfrac{y}{t} - \dfrac{y}{\ln|y|}, & y \neq 0, \ t \geqslant 1, \\ 0 & y = 0, \ t \geqslant 1, \end{cases} \tag{22.12}$$

найти множество D возрастания решений уравнения (22.12), выяснить взаимное расположение решений уравнения (22.11) и границы D. Доказать, что существуют решения (22.12), не стремящиеся к 0 при $t \to +\infty$ и вместе с тем имеющие сколь угодно малые начальные значения.

22.6. Показать, что нулевое решение системы

$$\begin{cases} \mathrm{D}x_1 = \begin{cases} -\dfrac{x_1}{t} - \dfrac{x_1}{\ln|x_1|} + |f_1(t, x_1, \ldots, x_n)|, & x_1 \neq 0, \\ |f_1(t, x_1, \ldots, x_n)|, & x_1 = 0; \end{cases} \\ \mathrm{D}x_2 = a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n + f_2(t, x_1, \ldots, x_n); \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{D}x_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t, x_1, \ldots, x_n), \end{cases}$$

где матрица $(a_{kj})_{k,\,j=2}^{n}$ гурвицева и $f = (f_1, \ldots, f_n)^{\mathrm{T}} = o(|x|)$, не является асимптотически устойчивым при $t \to +\infty$, хотя система первого приближения и является асимптотически устойчивой.

23. КОЛЕБЛЕМОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ 2-ГО ПОРЯДКА

23.1. КОЛЕБЛЮЩИЕСЯ И НЕКОЛЕБЛЮЩИЕСЯ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим линейное скалярное уравнение второго порядка

$$\mathrm{D}^2x + p(t)\,\mathrm{D}x + q(t)\,x = 0, \quad t \in I = |a, b| \tag{23.1}$$

с непрерывными коэффициентами p и q.

По теореме об однозначной разрешимости (см. гл. 16) всякая задача Коши для уравнения (23.1) имеет единственное решение, определенное на промежутке I. В частности, если решение обращается в нуль вместе со своей производной в некоторой точке промежутка I, то это решение нулевое *(в дальнейшем в этой главе под решением будем понимать лишь ненулевое решение)*. Поэтому если решение x обращается в нуль в точке $t_0 \in I$, то $\mathrm{D}x(t_0) \neq 0$ и, следовательно, для внутренней точки t_0 решение x меняет знак при переходе через t_0, а график решения пересекает ось t.

Лемма о нулях решений. *Никакое решение уравнения (23.1) не может иметь бесконечного числа нулей на любом отрезке $[\alpha, \beta] \in I$, другими словами, нули всякого решения изолированные.*

◇ Если решение x имеет бесконечное число нулей на отрезке $[\alpha, \beta]$, то в точке t_*, которая является предельной для множества нулей, имеем

$$x(t_*) = \mathrm{D}x(t_*) = 0$$

и, следовательно, решение x нулевое (?!). Получили противоречие, так как нулевое решение исключено из рассмотрения. ■

Лемма о линейной зависимости. *Если два решения уравнения (23.1), либо их первые производные обращаются в нуль в некоторой точке промежутка I, то эти решения линейно зависимые, т. е. отличаются друг от друга на постоянный множитель.*

◇ Вронскиан W решений x_1 и x_2 равен $x_1\mathrm{D}x_2 - x_2\mathrm{D}x_1$. По условию в некоторой точке $t_0 \in I$ $W(t_0) = 0$. Из формулы Лиувилля следует, что

$$W(t) = 0, \ \forall t \in I,$$

т. е. решения x_1 и x_2 линейно зависимые. ■

Решение уравнения (23.1) называют *неколеблющимся на промежутке* $I_1 \subset I$, если оно имеет на I_1 не более одного нуля. В противном случае решение называют *колеблющимся на* I_1.

Пример 23.1. Решения уравнения

$$\mathrm{D}^2 x - \omega^2 x = 0, \ \omega > 0$$

являются неколеблющимися на $I =]-\infty, +\infty[$, так как всякое решение x представимо в виде

$$x(t) = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}.$$

Пример 23.2. Общее решение уравнения

$$\mathrm{D}^2 x + \omega^2 x = 0, \ \omega > 0$$

представимо в виде

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

и поэтому расстояние между последовательными нулями всякого решения равно π/ω. На любом промежутке длины меньше π/ω все решения являются неколеблющимися, а на промежутке длины больше π/ω уравнение имеет колеблющиеся решения.

Признак неколеблемости решений. *Всякое решение уравнения (23.1) является неколеблющимся на промежутке $I_1 \subset I$, если на этом промежутке $q(t) \leqslant 0$.*

◇ Пусть x — произвольное решение уравнения (23.1). Рассмотрим функцию

$$h(t) ::= e^{\int_s^t p(\tau)d\tau} x(t)\,\mathrm{D}x(t),$$

$$Dh(t) = e^{\int\limits_s^t p(\tau)d\tau} (p(t)x(t)Dx(t) + (Dx(t))^2 + x(t)D^2x(t)) =$$

$$= e^{\int\limits_s^t p(\tau)d\tau} ((Dx(t))^2 - q(t)x^2(t)).$$

Из условия теоремы следует, что $Dh(t) \geqslant 0$ при всех $t \in I_1$ и, следовательно, функция h возрастает (вообще говоря, нестрого) на I_1.

Если бы нашлись две точки t_1, $t_2 \in I_1$, $t_1 < t_2$ такие, что

$$x(t_1) = x(t_2) = 0,$$

то $h(t) = 0$ при всех $t \in [t_1, t_2]$, откуда следовало бы, что

$$x(t)Dx(t) = 0, \ \forall t \in [t_1, t_2].$$

На основании леммы о нулях решение x может иметь только изолированные нули на отрезке $[t_1, t_2]$. Поэтому

$$Dx(t) = 0, \ \forall t \in [t_1, t_2] \Rightarrow x(t) = 0, \ \forall t \in [t_1, t_2],$$

т. е. решение x нулевое (?!). Полученное противоречие доказывает, что решение x имеет не более одного нуля на I_1, т. е. является неколеблющимся на I_1. ■

Пример 23.3. Решения уравнения Эйлера

$$t^2D^2x + ta_1Dx + a_0x = 0, \ t > 0$$

являются неколеблющимися, если $a_0 \leqslant 0$.

23.2. ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

При исследовании колеблемости решений уравнения (23.1) часто бывает полезным привести его к более простому виду. Сделаем в уравнении замену переменных

$$x = u(t)y,$$

где u — дважды дифференцируемая функция. Получим

$$D^2u(t)y + 2Du(t)Dy + u(t)D^2y + p(t)(Du(t)y + u(t)Dy) + q(t)u(t)y = 0,$$

$$u(t)D^2y + (2Du(t) + p(t)u(t))Dy + (D^2u(t) + p(t)Du(t) + q(t)u(t))y = 0.$$

Выберем функцию u такой, чтобы

$$2Du(t) + p(t)u(t) = 0.$$

Если предположить коэффициент p непрерывно дифференцируемым, то в качестве u можно взять положительную функцию

$$u(t) = e^{-\frac{1}{2}\int\limits_s^t p(\tau)d\tau}.$$

Тогда

$$D^2u(t) + p(t)Du(t) + q(t)u(t) = u(t)\left(\frac{p^2(t)}{4} - \frac{Dp(t)}{2} - \right.$$

$$-\frac{p^2(t)}{2}+q(t)\Big)=u(t)\left(-\frac{p^2(t)}{4}-\frac{\mathrm{D}p(t)}{2}+q(t)\right).$$

Так как $u(t)\neq 0$, то окончательно получаем уравнение

$$\mathrm{D}^2\mathrm{y}+Q(t)\,\mathrm{y}=0, \tag{23.2}$$

где

$$Q(t)::=-\frac{p^2(t)}{4}-\frac{\mathrm{D}p(t)}{2}+q(t).$$

Таким образом, если функция p непрерывно дифференцируема, а q непрерывна, то равносильная замена

$$\mathrm{x}=e^{-\frac{1}{2}\int\limits_s^t p(\tau)d\tau}\,\mathrm{y} \tag{23.3}$$

преобразует уравнение (23.1) к уравнению (23.2) с непрерывным коэффициентом Q. Уравнение (23.2) назовем *канонической формой* уравнения (23.1). Отметим, что преобразование (23.3) сохраняет нули соответствующих решений уравнений (23.1) и (23.2), поэтому в дальнейшем достаточно ограничиться рассмотрением канонической формы.

Пример 23.4. *Уравнение Бесселя*

$$t^2\mathrm{D}^2\mathrm{x}+t\mathrm{D}\mathrm{x}+(t^2-\nu^2)\,\mathrm{x}=0,\ t>0$$

заменой $\mathrm{x}=t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{y}$ сводится к канонической форме

$$\mathrm{D}^2\mathrm{y}+\left(1-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{t^2}\right)\mathrm{y}=0.$$

23.3. ТЕОРЕМА СРАВНЕНИЯ ШТУРМА

Пусть заданы два уравнения в канонической форме:

$$\mathrm{D}^2\mathrm{x}+Q(t)\,\mathrm{x}=0, \tag{23.4}$$

$$\mathrm{D}^2\mathrm{y}+Q_1(t)\,\mathrm{y}=0 \tag{23.5}$$

с непрерывными на промежутке I коэффициентами Q и Q_1.

Теорема сравнения Штурма. *Если t_1 и t_2, $t_1<t_2$ — нули некоторого решения x уравнения (22.4) и*

$$Q(t)\leqslant Q_1(t),\ \forall t\in[t_1,\ t_2], \tag{23.6}$$

то всякое решение y уравнения (23.5) на отрезке $[t_1,\ t_2]$ имеет по крайней мере один нуль. Более того, если t_1 и t_2 не являются одновременно нулями решения y, то y имеет нуль на интервале $]t_1,\ t_2[$.

◇ Пусть y — произвольное решение уравнения (23.5). Подставим решения x и y в соответствующие уравнения, полученные тождества умножим соответственно на y и x и вычтем из первого тождества второе. Получим

$$D^2x(t)\,y(t) - D^2y(t)\,x(t) + (Q(t) - Q_1(t))\,x(t)\,y(t) = 0$$

или

$$D(Dx(t)\,y(t) - Dy(t)\,x(t)) = (Q_1(t) - Q(t))\,x(t)\,y(t).$$

Интегрируя последнее тождество от t_1 до t_2 и используя условие

$$x(t_1) = x(t_2) = 0,$$

получаем

$$Dx(t_2)\,y(t_2) - Dx(t_1)\,y(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} (Q_1(t) - Q(t))\,x(t)\,y(t)\,dt. \qquad (23.7)$$

Не нарушая общности считаем, что t_1 и t_2 — последовательные нули решения x. Тогда x на интервале $]t_1, t_2[$ принимает значения одного знака. Пусть для определенности $x(t) > 0$ при $t \in]t_1, t_2[$. Так как $Dx(t_1) \neq 0$ и $Dx(t_2) \neq 0$, то $Dx(t_1) > 0$, $Dx(t_2) < 0$.

Предположение о том, что решение y не обращается в нуль на интервале $]t_1, t_2[$, а также на одном из его концов приводит к противоречию с равенством (23.7). Действительно, если y положительно (отрицательно) на полуинтервале, то в левой части равенства (23.7) получаем отрицательное (положительное) число, а в правой части — неотрицательное (неположительное) число (?!). Таким образом, всякое решение уравнения (23.5) имеет по крайней мере один нуль на отрезке $[t_1, t_2]$, причем если решение не обращается одновременно в нуль на концах отрезка, то оно имеет нуль на интервале $]t_1, t_2[$. ■

Отметим, что если неравенство (23.6) хотя бы в одной точке является строгим, то всякое решение уравнения (23.5) имеет нуль на интервале $]t_1, t_2[$ (следует из равенства (23.7) и свойства строгой монотонности интеграла).

Следствие 1. Всякое решение уравнения (23.4) является неколеблющимся на промежутке I, если $Q(t) \leqslant 0$ на I.

◇ Если бы нашлось решение x, обращающееся в нуль по крайней мере в двух точках, то по теореме сравнения Штурма всякое решение уравнения

$$D^2y = 0 \quad (Q_1 = 0!)$$

должно обратиться в нуль на I, что, очевидно, неверно, так как существует решение ($y = 1$), не имеющее нулей на I. ■

Отметим, что следствие 1 является частным случаем признака неколеблемости решений.

Следствие 2. Нули линейно-независимых решений уравнения (23.4) взаимно разделяют друг друга, т. е. строго между двумя последовательными нулями одного решения лежит ровно один нуль другого решения.

◇ Пусть x_1 и x_2 — линейно-независимые решения уравнения (23.4). По лемме о линейной зависимости они не могут иметь общих нулей. Из теоремы сравнения Штурма следует, что строго между двумя последовательными нулями t_1, t_2 решения x_1 лежит по крайней мере один нуль решения x_2. Если бы на интервале $]t_1, t_2[$ нашелся еще один нуль решения x_2, то, поменяв в предыдущем рассуждении местами решения x_1 и x_2, получаем, что нули t_1 и t_2 решения x_1 не являются последовательными (?!). ■

23.4. СЛУЧАЙ БЕСКОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА НУЛЕЙ

Теорема. *Если промежуток I бесконечный и*

$$Q(t) \geqslant m > 0, \ \forall t \in I, \tag{23.8}$$

то все решения уравнения (23.4) имеют бесконечное число нулей.

Для доказательства достаточно сравнить уравнение (23.4) с уравнением

$$\mathrm{D}^2 \mathrm{x} + m\mathrm{x} = 0$$

и воспользоваться результатом примера 23.2.

Пример 23.5. Рассмотрим уравнение Бесселя в канонической форме

$$\mathrm{D}^2\mathrm{x} + \left(1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2}\right)\mathrm{x} = 0, \ t > 0.$$

При $0 \leqslant \nu \leqslant \frac{1}{2}$ выполняется неравенство

$$1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2} \geqslant 1, \ t > 0,$$

и поэтому все решения уравнения Бесселя имеют бесконечное число нулей, причем при $0 \leqslant \nu < \frac{1}{2}$ расстояние между последовательными нулями меньше π.

При $\nu > \frac{1}{2}$ все решения также имеют бесконечное число нулей, расстояние между последовательными нулями больше π.

Так как

$$1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2} \to 1 \text{ при } t \to +\infty,$$

то расстояние между последовательными нулями стремится к π.

Условие (23.8), обеспечивающее существование бесконечного числа нулей у решений уравнения (23.4), можно несколько ослабить.

Теорема. *Если промежуток $I = [a, +\infty[$ и*

$$Q(t) \geqslant 0, \quad \int^{+\infty} Q(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \infty,$$

то все решения уравнения (23.4) имеют бесконечное число нулей.

◇ Предположим, что существует решение x, не имеющее бесконечного числа нулей. Тогда найдется t_0 такое, что при $t \geqslant t_0$ функция x принимает значения одного знака. Для определенности считаем

$$x(t) > 0, \ \forall t \geqslant t_0.$$

Так как

$$D^2x(t) = -Q(t)\,x(t), \ \forall t \geqslant t_0, \tag{23.9}$$

то $D^2x(t) \leqslant 0$ и, следовательно, производная Dx убывает на промежутке $[t_0, +\infty[$. Имеются две возможности.

1. $Dx(t) \geqslant 0$, $\forall t \geqslant t_0$. Тогда функция x возрастает, поэтому

$$x(t) \geqslant x(t_0), \ \forall t \geqslant t_0.$$

Интегрируя тождество (23.9) от t_0 до t, получаем

$$Dx(t) - Dx(t_0) = -\int_{t_0}^{t} Q(\tau)\,x(\tau)\,d\tau \leqslant -x(t_0)\int_{t_0}^{t} Q(\tau)\,d\tau, \ \forall t \geqslant t_0,$$

$$Dx(t_0) \geqslant x(t_0)\int_{t_0}^{t} Q(\tau)\,d\tau \to +\infty \text{ при } t \to +\infty \ (?!).$$

2. $Dx(t) < 0$, $\forall t \geqslant T$, $T > t_0$. Так как Dx убывает, то

$$Dx(t) \leqslant Dx(T), \ \forall t \geqslant T,$$

откуда

$$x(t) - x(T) \leqslant Dx(T)(t - T), \ \forall t \geqslant T,$$

$$-x(T) \leqslant Dx(T)(t - T) \to -\infty \text{ при } t \to +\infty \ (?!).$$

Полученные противоречия показывают, что все решения уравнения (23.4) имеют бесконечное число нулей. ■

Пример 23.6. Все решения уравнения

$$D^2x + \frac{\omega^2}{t^{\alpha}}\,x = 0, \ t > 0, \ \omega \neq 0,$$

при $\alpha \leqslant 1$ имеют бесконечное число нулей, так как

$$\frac{\omega^2}{t^{\alpha}} > 0 \text{ при } t > 0 \text{ и } \int^{+\infty} \frac{\omega^2}{t^{\alpha}}\,dt = +\infty.$$

Основные упражнения

23.1. Привести уравнение к каноническому виду в задачах 1049, 1050 [1], 706—710 [3]. Исследовать колеблемость решений указанных уравнений.

23.2. При каких условиях на коэффициенты a_1 и a_0 граничная задача

$$D^2x + a_1Dx + a_0x = 0, \ x\big|_{t=t_1} = x\big|_{t=t_2} = 0$$

имеет ненулевое решение.

23.3. Пусть непрерывная функция Q удовлетворяет неравенству $0 < m^2 \leqslant Q(t) \leqslant M^2$ и δ — расстояние между последовательными нулями некоторого решения уравнения $D^2x + Q(t)\,x = 0$. Доказать, что

$$\frac{\pi}{M} \leqslant \delta \leqslant \frac{\pi}{m}.$$

Используя полученную оценку для δ, решить задачи 727—730 [3].

23.4. Показать, что всякое решение уравнения

$$(1+t^2)\,\mathrm{D}^2\mathrm{x} + t^{3/2}\cos^2 t \cdot \mathrm{x} = 0$$

имеет бесконечное число нулей.

23.5. Найти решения граничных задач 751—755 [3].

Дополнительные упражнения

23.6. Доказать *теорему Кнезера*. Если

$$0 < Q(t) \leqslant \frac{1}{4t^2},\ \forall t \geqslant a > 0,$$

то никакое решение уравнения (23.4) не может иметь бесконечного числа нулей. Если же

$$Q(t) > \frac{1+\alpha}{4t^2},\ \alpha > 0,$$

то все решения уравнения (23.4) имеют бесконечное число нулей.

23.7. *Собственным значением* граничной задачи

$$\mathrm{D}^2\mathrm{x} + (Q(t) + \lambda)\,\mathrm{x} = 0,$$
$$\alpha\mathrm{Dx}\,|_{t=t_1} + \beta\mathrm{x}\,|_{t=t_1} = 0,\ \gamma\mathrm{Dx}\,|_{t=t_2} + \delta\mathrm{x}\,|_{t=t_2} = 0$$

называют такое число λ, при котором задача имеет ненулевое решение x. Решение x называют *собственной функцией*.

Найти собственные значения и собственные функции в граничных задачах 782 — 784 [3].

24. АВТОНОМНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

24.1. ТРАЕКТОРИИ АВТОНОМНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим автономное векторное уравнение

$$\mathrm{Dx} = f(\mathrm{x}) \tag{24.1}$$

с правой частью $f: G \to R^n$, удовлетворяющей локальному условию Липшица по x на области $G \subset R^n$ и, следовательно, непрерывной. Всякая задача Коши для уравнения (24.1) однозначно разрешима, и решения интегрально непрерывны по начальным данным. Предположим, что все решения уравнения (24.1) бесконечно продолжимы в обе стороны. В дальнейшем будем рассматривать лишь продолженные решения.

Важное свойство уравнения (24.1) заключается в том, что сдвиг всякого решения x на произвольную постоянную c, т.е. функция $\mathrm{x} = x(t+c)$, также является решением данного уравнения (см. гл.4). Решение x, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = \xi$, обозначаем $\mathrm{x} = x(t;\xi)$.

Лемма о групповом свойстве.

$$x(t_1; x(t_2;\xi)) = x(t_1+t_2;\xi),\ \forall t_1, t_2,\ \forall \xi \in G.$$

◇ Функции

$$x^1(t) ::= x(t; x(t_2; \xi)) \text{ и } x^2(t) ::= x(t+t_2; \xi)$$

являются решениями уравнения (24.1), причем $x^1(0) = x^2(0)$. На основании однозначной разрешимости задачи Коши следует, что

$$x^1(t) = x^2(t), \ \forall t.$$

В частности,

$$x^1(t_1) = x^2(t_1), \text{ т.е. } x(t_1; x(t_2; \xi)) = x(t_1+t_2; \xi). \ ■$$

Пространство R^n называют *фазовым пространством* уравнения (24.1), если решения x этого уравнения изображаются на нем в виде линий

$$\mathrm{x} = x(t), \ t \in R. \tag{24.2}$$

Направленную линию l, допускающую параметрическое задание в виде (24.2), называют *траекторией (фазовым графиком) уравнения* (24.1) или *траекторией решения* x. *Положительной полутраекторией решения* x называют направленную линию

$$l^+ ::= \{x(t) \mid t \geqslant 0\}.$$

Теорема о траекториях. *Две траектории уравнения (24.1) либо не имеют общих точек, либо совпадают.*

Доказательство проводится по схеме, рассмотренной в гл. 4.

Теорема о решениях. *Каждое решение x уравнения (24.1) удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $x(t_1) \neq x(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$ *(непериодическое решение);*

2) $\exists T > 0$ *такое, что* $x(t+T) = x(t)$, $\forall t$ *и* $x(t_1) \neq x(t_2)$ *при* $0 < |t_1 - t_2| < T$ *(периодическое решение)*

3) $x(t) = \text{const}$, $\forall t$ *(стационарное решение).*

◇ Если решение x не удовлетворяет условию 1, то существуют t_1, t_2, $t_1 \neq t_2$ такие, что $x(t_1) = x(t_2)$. Обозначим $\tau ::= t_1 - t_2$. Тогда

$$x(t+\tau) = x(t), \ \forall t. \tag{24.3}$$

Пусть Т — множество всех τ, для которых выполнено (24.3). Множество Т образует группу относительно операции сложения. Кроме того, Т является замкнутым множеством, т.е. из $(\tau_n) \to \tau$, $\tau_n \in \mathrm{T}$ следует, что и $\tau \in \mathrm{T}$. Действительно, переходя к пределу в равенстве

$$x(t+\tau_n) = x(t), \ \forall t,$$

получаем $x(t+\tau) = x(t)$, $\forall t$, т.е. $\tau \in \mathrm{T}$.

Если в множестве Т существует наименьшее положительное число T, то

$$x(t+T) = x(t), \ \forall t \text{ и } x(t_1) \neq x(t_2), \ 0 < |t_1 - t_2| < T,$$

т.е. решение удовлетворяет второму условию.

В противном случае найдется последовательность $(\tau_n) \to +0$, $\tau_n \in \mathrm{T}$. Тогда для любого t $x(t) = x\left(t - \left[\frac{t}{\tau_n}\right]\tau_n\right) \to x(0)$ ($[\alpha]$ — целая часть числа α) и, следовательно, решение x постоянное. ■

Траектории, отвечающие указанным в теореме видам решений, называют соответственно *незамкнутой, замкнутой* или *циклом, точкой покоя*. Точка $x \in G$ является точкой покоя тогда и только тогда, когда $f(x) = 0$.

24.2. ПРЕДЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ

Точка $p \in R^n$ называется *ω-предельной точкой* решения x, если существует последовательность $(t_n) \to +\infty$ такая, что

$$x(t_n) \to p.$$

Множество всех ω-предельных точек решения x называют *Ω-предельным множеством* и обозначают Ω_x. В частности, для постоянного решения $x = \xi$ $\Omega_x = \xi$; для периодического решения x множество Ω_x совпадает с траекторией решения x.

Пусть M и N — непустые множества пространства R^n. *Расстоянием* между множествами M и N называют

$$d(M, N) :: = \inf_{\substack{x \in M \\ y \in N}} |x - y|.$$

Если M и N являются компактными множествами и $M \cap N = \varnothing$, то $d(M, N) > 0$ (следует из непрерывности нормы и теоремы Вейерштрасса об экстремальных значениях).

Замкнутое множество $F \subset R^n$ называют *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых, замкнутых, непересекающихся множеств.

Теорема 1. *Если положительная полутраектория решения x лежит в компактном множестве $G_0 \subset G$, то предельное множество Ω_x является непустым, замкнутым и связным.*

◇ Непустое. Пусть $(t_n) \to +\infty$. Тогда последовательность $(x(t_n))$ ограниченная и из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$x\left(t_{n_k}\right) \to p \text{ при } t_{n_k} \to +\infty,$$

поэтому $p \in \Omega_x$, т.е. множество Ω_x непустое. Множество Ω_x ограниченное, так как $\Omega_x \subset G_0$.

Замкнутое. Пусть $(p^n) \to p$, $p^n \in \Omega_x$. Для каждого n существует $t_n > n$ такое, что

$$|x(t_n) - p^n| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Тогда

$$|x(t_n) - p| \leqslant |x(t_n) - p^n| + |p^n - p| \leqslant \frac{1}{n} + |p^n - p|$$

и

$$\lim_{n\to\infty}|x(t_n)-p|=0,$$

откуда следует, что $p\in\Omega_x$, так как $(t_n)\to+\infty$.

Связное. Предположим противное, пусть замкнутое множество Ω_x можно представить в виде объединения непустых замкнутых непересекающихся подмножеств M и N, т.е. $\Omega_x = M\cup N$. Из ограниченности Ω_x следует, что $d(M, N)=\delta>0$.

Рассмотрим функцию

$$\rho(t)::=d(x(t), M).$$

Так как множества M и N состоит из ω-предельных точек решения x, то

$$\exists\left(t_n'\right)\to+\infty,\quad \rho\left(t_n'\right)<\frac{\delta}{2};$$

$$\exists\left(t_n''\right)\to+\infty,\ \rho\left(t_n''\right)>\frac{\delta}{2},\qquad t_n'<t_n''.$$

Функция ρ непрерывна, поэтому для каждого n существует t_n, $t_n'<t_n<$ $<t_n''$, такое, что

$$\rho\left(t_n\right)=\frac{\delta}{2}.$$

Последовательность $(x(t_n))$ ограниченная и из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, предел которой $p\in\Omega_x$.

С другой стороны, $p\notin M$, так как $d(p, M)=\dfrac{\delta}{2}$; $p\notin N$, так как $d(p, N)\geqslant d(M, N)-d(p, M)=\dfrac{\delta}{2}$, т.е. $p\notin M\cup N=\Omega_x$ (?!). Полученное противоречие доказывает связность множества Ω_x. ■

Теорема 2. *Множество Ω_x состоит из целых траекторий, т.е. если $p\in\Omega_x$, то и вся траектория l_p, проходящая через точку p, содержится в Ω_x.*

◇ Пусть $x(t)=x(t;\xi)$. Так как $p\in\Omega_x$, то существует $(t_n)\to+\infty$ такая, что

$$x_n::=x(t_n;\xi)\to p.$$

По лемме о групповом свойстве

$$x(t+t_n;\xi)=x(t; x(t_n;\xi))=x(t; x_n),\ \forall t,$$

откуда, используя свойство интегральной непрерывности решений, получаем

$$x(t+t_n;\xi)\to x(t;p),\ \forall t,$$

т.е. $x(t;p)\in\Omega_x$, $\forall t$, или $l_p\in\Omega_x$. ■

Дальнейшее изучение предельного множества Ω_x проведем для уравнения (24.1) в случае $n=2$ с использованием теоремы Жордана.

24.3. ТЕОРЕМА ПУАНКАРЕ — БЕНДИКСОНА

Предполагаем, что правая часть $f: G \to R^2$ уравнения (24.1) задана в области $G \subset R^2$.

Плоскую линию J называют *жордановой*, если

$$J = \{\varphi(t) \mid \alpha \leqslant t \leqslant \beta\},$$

где функция $\varphi: [\alpha, \beta] \to R^2$ непрерывна, $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ и $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$, $\alpha \leqslant \leqslant t_1 < t_2 < \beta$.

Теорема Жордана. *Если J — плоская жорданова линия, то ее дополнение в плоскости состоит из объединения двух непересекающихся открытых множеств E_1 и E_2, причем $\partial E_1 = \partial E_2 = J$.*

Одно из множеств E_i ограничено и называется *внутренностью линии J*, другое — *внешностью линии J*.

Теорема Пуанкаре—Бендиксона. *Если положительная полутраектория l^+ решения x содержится в компактном подмножестве области G и Ω_x не содержат точек покоя, то множество Ω_x является циклом.*

Для доказательства теоремы Пуанкаре—Бендиксона предварительно докажем четыре вспомогательные леммы.

24.4. ТРАНСВЕРСАЛИ УРАВНЕНИЯ

Прямолинейный отрезок L в G называют *трансверсалью* уравнения (24.1), если он не содержит точек покоя уравнения и при всех $x \in L$ вектор $f(x)$ не параллелен отрезку L. Ясно, что траектории уравнения (24.1) пересекают трансверсаль в одном и том же направлении.

Лемма 1. *Пусть p — внутренняя точка трансверсали L и I — окрестность на трансверсали точки p. Тогда найдутся окрестность U точки p и число $\varepsilon > 0$ такие, что для каждой траектории, попадающей при $t = s$ в окрестность U, существует единственное t, $|t - s| \leqslant \varepsilon$, при котором траектория пересекает трансверсаль в пределах I.*

◇ Пусть точки трансверсали L удовлетворяют уравнению

$$a \cdot (x - p) = a_1 (x_1 - p_1) + a_2 (x_2 - p_2) = 0,$$

где $a = (a_1, a_2)$ — нормаль к трансверсали.

Рассмотрим функцию

$$g(t, \xi) :: = a \cdot (x_1 (t - s; \xi) - p).$$

Функция g непрерывна вместе с частной производной $\partial g / \partial t$, причем

$$g(s, p) = 0, \frac{\partial g}{\partial t}(s, p) = a \cdot f(p) \neq 0.$$

По теореме об однозначной разрешимости функционального уравнения из математического анализа уравнение

$$g(t, \xi) = 0$$

относительно t однозначно разрешимо в окрестности точки (s, p), т.е. существуют окрестность U точки p, число $\varepsilon > 0$ и единственная (непрерывная) функция $t: U \to [\mathrm{s}-\varepsilon, \mathrm{s}+\varepsilon]$ такие, что

$$g(t(\xi), \xi) = a \cdot (x(t(\xi) - \mathrm{s}; \xi) - p) = 0, \ \forall \xi \in U.$$

В силу непрерывности функции $\mathrm{x} = x(t(\xi) - \mathrm{s}; \xi)$ окрестность можно выбрать столь малой, чтобы

$$x(t(\xi) - \mathrm{s}; \xi) \in I, \ \forall \xi \in U,$$

так как $x(t(p) - \mathrm{s}; p) = p$. Таким образом, траектория, проходящая при $t = \mathrm{s}$ через точку $\xi \in U$, пересекает трансверсаль L в пределах I при $t = t(\xi)$, $|t(\xi) - \mathrm{s}| \leqslant \varepsilon$. ■

Лемма 2. *Всякая конечная дуга траектории пересекает трансверсаль не более чем в конечном числе точек, причем порядок следования по дуге точек пересечения совпадает с их порядком на трансверсали.*

◇ Пусть l — траектория решения x, A — конечная дуга траектории, т.е.

$$A ::= \{x(t) | -\infty < T_1 \leqslant t \leqslant T_2 < +\infty\},$$

и L — трансверсаль, пересекающая A. Если дуга A пересекает трансверсаль в бесконечном числе различных точек $\mathrm{x}^n = x(t_n)$, $T_1 \leqslant t_n \leqslant T_2$, то в силу ограниченности последовательности (t_n) из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\left(t_{n_k}\right)$, предел которой $t_* \in [T_1, T_2]$. Тогда

$$\lim x\left(t_{n_k}\right) = x(t_*), \ x(t_*) \in L.$$

Так как

$$\frac{x\left(t_{n_k}\right) - x(t_*)}{t_{n_k} - t_*} \to \mathrm{D}x(t_*) = f(x(t_*)) \text{ при } t_{n_k} \to t_*,$$

то в точке $\mathrm{x}^* = x(t_*)$ трансверсали L вектор $f(\mathrm{x}^*)$ параллелен L (?!). Таким образом, дуга A пересекает L в конечном числе точек.

Пусть $\mathrm{x}^1 = x(t_1)$ и $\mathrm{x}^2 = x(t_2)$, $T_1 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T_2$ — две последовательные точки пересечения, $\mathrm{x}^1 \neq \mathrm{x}^2$. Дуга траектории A с концами в точках x^1 и x^2 образует вместе с отрезком $[\mathrm{x}^2, \mathrm{x}^1]$ жорданову линию J, разделяющую плоскость на две части — внутреннюю и внешнюю (теорема Жордана). При $t > t_2$ дуга A не может перейти из одной части плоскости в другую, так как для этого ей необходимо пересечь либо саму себя (?!), либо отрезок $[\mathrm{x}^2, \mathrm{x}^1]$ в обратном направлении (?!). Для определенности считаем, что при $t > t_2$ точки дуги A лежат во внешней части линии J. Если x^2 является внутренней точкой L, то она разбивает отрезок L на два полуотрезка. Тот полуотрезок трансверсали, который не содержит x^1, лежит во внешней части линии J. Поэтому если x^3 — следующая за x^2 точка пересечения, то на трансверсали x^2 расположена между x^1 и x^3. Если же x^2 совпадает с одним из концов L, то ни одна точка трансверсали не может лежать во внешней части, и поэтому при $t > t_2$ дуга A не пересекается с L. ■

Лемма 3. *Предельное множество Ω_x содержит не более одной точки трансверсали L.*

◊ Пусть $p \in \Omega_x \cap L$. На основании леммы 1 существует окрестность U точки p такая, что всякая траектория, проходящая через U, пересекает L как угодно близко к p. Точка p является ω-предельной точкой решения x. Поэтому положительная полутраектория l^+ решения x бесконечное число раз попадает в окрестность U. По лемме 2 последовательные точки пересечения l^+ с L образуют на L монотонную последовательность, сходящуюся к p. Следовательно, множество $\Omega_x \cap L$ не может содержать точек, отличных от p. ■

Лемма 4. *Если множество Ω_x содержит замкнутую траекторию l, то оно совпадает с ней.*

◊ Предположим, что множество $M ::= \Omega_x \setminus l \neq \varnothing$. В силу связности Ω_x (теорема 1) множество M не является замкнутым, и поэтому существует точка $p \in l$, которая является предельной для множества M. Через точку p проведем трансверсаль L. Как угодно близко к p найдется точка $q \in M$, причем траектория l_q пересечет L в некоторой точке p^1 (лемма 1) и $l_q \in \Omega_x \setminus l$ (теорема 2), откуда следует, что $p \neq p^1$. Таким образом, множество Ω_x содержит две точки p и p^1 трансверсали L (?!). Полученное противоречие с леммой 3 доказывает, что $M = \varnothing$, т.е. $\Omega_x = l$. ■

Теперь приведем доказательство теоремы Пуанкаре—Бендиксона.

◊ Пусть $q \in \Omega_x$. Тогда $l_q \subset \Omega_x$, причем $\Omega_{x(t;\, q)} \neq \varnothing$ и $\Omega_{x(t;\, q)} \subset \Omega_x$. Через произвольную точку $p \in \Omega_{x(t;\, q)}$ проведем трансверсаль L. По лемме 1 траектория l_q пересекает трансверсаль L бесконечное число раз, однако все точки пересечения совпадают с p (лемма 3). На основании теоремы о решениях траектория l_q является циклом, и поэтому $\Omega_x = l_q$ (лемма 4), т.е. Ω_x является циклом. ■

24.5. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ

Цикл, являющийся предельным множеством для некоторой отличной от него траектории, называют *предельным*.

Как уже отмечалось (см. гл. 9), расположение фазовых графиков или траекторий решений линейных уравнений (9.10) на плоскости R^2 вполне определяется типом точки покоя. Значительно сложнее дело обстоит с нелинейными уравнениями (24.1) даже при $n = 2$. Прежде всего усложняются возможные типы точек покоя. Помимо основных типов (узел, седло, фокус, центр), появляются так называемые сложные точки покоя, которые можно рассматривать как результат слияния точек покоя основных типов. Главная же особенность нелинейных систем в том, что, помимо точек покоя, структура семейства траекторий системы определяется расположением и характером некоторых специальных траекторий, среди которых основную роль играют различные циклы, составленные из траекторий, и прежде всего — предельные циклы. Если интерпретировать уравнение (24.1) как поле скоростей переноса массы по плоскости R^2, то (при равномерном начальном распределении массы по плоскости) с течением времени t масса сосредоточивается около устойчивых точек покоя и устойчивых предельных циклов.

В настоящее время в основе многих естественных и технических теорий (прежде всего — в основе радиофизики и электроники) лежит математическая теория колебаний, которая базируется на математических моделях колебательных контуров, представляющих собой уравнения вида (24.1) в случае свободных колебаний или неавтономные уравнения, содержащие периодические по t слагаемые, в случае вынужденных колебаний. Устойчивый свободный колебательный режим с заданной частотой и амплитудой колебания осуществим только в нелинейной системе с предельным циклом.

Теоретическое и прикладное значение предельных циклов придает особую важность проблеме локализации и характеристике этих траекторий. При решении соответствующих задач, однако, приходится преодолевать принципиальные трудности, связанные с отсутствием общих аналитических методов построения предельных циклов (напомним, что определение всех точек покоя уравнения (24.1) сводится к разрешению соотношений $f(x) = 0$, $x \in G$).

24.6. ПРИНЦИП КОЛЬЦА

Одним из специальных приемов обнаружения предельного цикла является *принцип кольца*, предложенный Пуанкаре. Если удается построить кольцо K, ограниченное двумя гладкими кривыми L_i $(i = 1, 2)$, такое, что на K нет точек покоя и все траектории пересекают L_i, входя в K, то внутри K есть по крайней мере один предельный цикл (рис. 29). Этот принцип является непосредственным следствием теоремы Пуанкаре—Бендиксона.

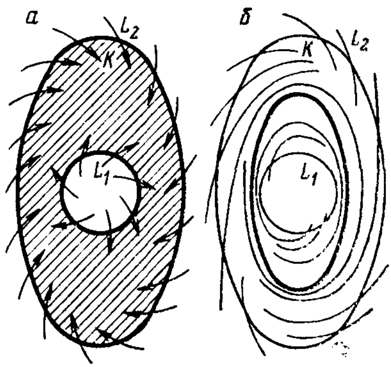

Рис. 29

Пример 24.1. Для системы

$$Dx_1 = x_2 - x_1\ (x_1^2 + x_2^2 - 1), \quad Dx_2 = -x_1 - x_2\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right)$$

выполняется $D\left(x_1^2 + x_2^2\right) = 2x_1\, Dx_1 + 2x_2\, Dx_2 = -2\left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right)$. Поэтому окружность $x_1^2 + x_2^2 = 1$ является циклом данной системы. Кроме того, точка (0,0) служит единственной точкой покоя системы. Выражение $D\left(x_1^2 + x_2^2\right) = -2\left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right)$ положительно на окружности L_1; $x_1^2 + x_2^2 = r$, $0 < r < 1$, и отрицательно на L_2: $x_1^2 + x_2^2 = r$, $1 < r$. Следовательно, траектории входят в круговое кольцо, ограниченное L_1 и L_2. По принципу кольца система имеет предельный цикл — окружность $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Этот предельный цикл устойчив (рис. 30).

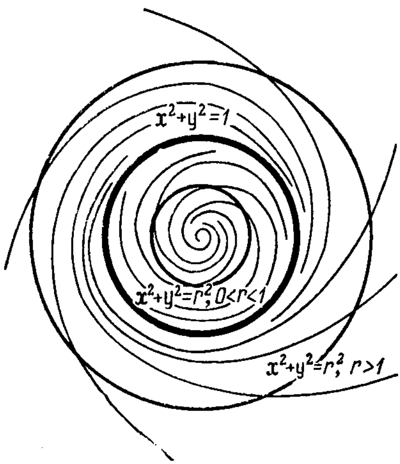

Рис. 30

При переходе к уравнениям в R^n, $n > 2$, роль предельных циклов начинают играть предельные торы и более сложные геометрические поверхности. Задача исследования предельных торов аналитическими средствами существенно усложняется. В частности, в n-мерном пространстве «принцип кольца» в общем случае неприменим. Аналитический аппарат можно эффективно использовать лишь в отдельных случаях.

Пример 24.2. В трехмерном пространстве $R^3 = Ox_1 x_2 x_3$ введем криволинейные (тороидальные) координаты по формулам

$$x_1 = (2 + r\cos\psi)\cos\varphi, \quad x_2 = (2 + r\cos\psi)\sin\varphi, \quad x_3 = r\sin\psi$$

и рассмотрим систему

$$Dr = r\,(1 - r), \quad D\varphi = \alpha, \quad D\psi = \beta.$$

У этой системы есть интегральная поверхность — тор T: $r = 1$, заполненный траекториями $r = 1$, $\varphi = \alpha t + \alpha\varphi_0$, $\psi = \beta t + \psi_0$, а также точка покоя $r = 0$ (других точек покоя нет). Если α и β рационально соизмеримы, то тор T покрыт замкнутыми заузленными траекториями. При несоизмеримых α и β траектории на T разомкнуты, причем замыкание каждой траектории совпадает со всем T. Предельные множества нестационарных траекторий, расположенных вне T, лежат на торе T, так как вдоль любой траектории $\mathrm{D}r > 0$ при $r < 1$ и $\mathrm{D}r < 0$ при $r > 1$.

Основные упражнения

24.1. В задачах 1040—1044 [3] построить траектории для уравнений на плоскости.

24.2. Используя «принцип кольца», показать, что уравнение в задаче 1055 [3] имеет периодическое решение.

24.3. Доказать, что для того чтобы $\Omega_x = \{\mathrm{x}_0\}$, необходимо и достаточно, чтобы $x(t) \to \mathrm{x}_0$ при $t \to +\infty$.

Дополнительные упражнения

24.4. Нарисовать на фазовой плоскости траектории для уравнений в задачах 1002—1010 [3].

24.5. Решить задачи 1021—1025 [3].

24.6. Для системы в полярных координатах

$$\mathrm{D}\mathrm{r} = \mathrm{r}\,(2-\mathrm{r}),\quad \mathrm{D}\varphi = \varphi$$

построить траектории на фазовой плоскости $R^2 = O\mathrm{x}_1\,\mathrm{x}_2$.

24.7. Доказать, что асимптотически устойчивая точка покоя обладает окрестностью, не содержащей целиком ни одной траектории, отличной от самой точки покоя.

VI. ГОЛОМОРФНЫЕ УРАВНЕНИЯ

25. ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА

25.1. ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА К СТАЦИОНАРНОМУ УРАВНЕНИЮ

Уравнением Эйлера называют линейное уравнение

$$(t-\alpha)^n \mathrm{D}^n \mathrm{x} + a_{n-1}(t-\alpha)^{n-1}\mathrm{D}^{n-1}\mathrm{x} + \ldots + a_0 \mathrm{x} = f(t), \quad t \in I, \tag{25.1}$$

где a_k, α — постоянные. После перехода к основной форме линейных уравнений получаем

$$\mathrm{D}^n \mathrm{x} + \frac{a_{n-1}}{t-\alpha}\mathrm{D}^{n-1}\mathrm{x} + \ldots + \frac{a_0}{(t-\alpha)^n}\mathrm{x} = \frac{f(t)}{(t-\alpha)^n}, \quad t \in I. \tag{25.2}$$

Точка $t=\alpha$ является особой для уравнения Эйлера.

Уравнение (25.2) в соответствии с принятыми ранее ограничениями на вид изучаемых линейных уравнений следует рассматривать на промежутке I задания функции f, причем предполагается, что $\alpha \notin I$. Для определенности считаем, что в качестве I взят один из лучей $I_+ ::= \{t \mid t > \alpha\}$ или $I_- ::= \{t \mid t < \alpha\}$ и что f непрерывна на I.

Произведем замену аргумента t на τ в уравнении (25.2) по формуле

$$\tau = \ln|t-\alpha|, \tag{25.3}$$

считая либо $t \in I_+$, либо $t \in I_-$ (кратко $t \in I_\pm$). Луч $I_\pm$ при замене (25.3) переходит в прямую $I_\tau ::=]-\infty, +\infty[$.

Обратная замена

$$t = \alpha \pm e^\tau \tag{25.4}$$

переводит I_τ в I_+ или I_- в зависимости от того, какой из знаков «$+$» или «$-$» используется в формуле (25.4).

Оператор дифференцирования по τ обозначим D_τ. Используя теорему о дифференцировании композиции, устанавливаем связь между D_τ и обычным оператором дифференцирования по t:

$$\mathrm{D}_\tau = \mathrm{D}\cdot \mathrm{D}_\tau t = \pm e^\tau \mathrm{D} = (t-\alpha)\mathrm{D}, \quad t \in I_\pm,$$

$$\mathrm{D} = \frac{1}{t-\alpha}\mathrm{D}_\tau, \quad t \in I_\pm. \tag{25.5}$$

Лемма о связи.

$$(t-\alpha)^k \mathrm{D}^k = \mathrm{D}_\tau^k + A_{k,\,k-1}\mathrm{D}_\tau^{k-1} + \ldots + A_{k,\,0}\mathrm{D}_\tau^0,$$
$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{25.6}$$

где $A_{k,\,j}$ — постоянные.

◇ Прибегаем к индукции по k. При $k=0$ соотношение (25.6) выполняется, так как D^0 и D_τ^0 являются тождественными операторами. Допустим, что для некоторого неотрицательного целого m выполняется тождество

$$(t-\alpha)^m D^m x = D_\tau^m x + A_{m,\,m-1} D_\tau^{m-1} x + \ldots + A_{m,\,0} x. \tag{25.7}$$

Продифференцируем тождество (25.7) по t, учитывая соотношение (25.5):

$$m\,(t-\alpha)^{m-1} D^m x + (t-\alpha)^m D^{m+1} x = \frac{1}{t-\alpha}\left(D_\tau^{m+1} x + A_{m,\,m-1} D_\tau^m x + \right.$$
$$\left. + \ldots + A_{m,\,0} D_\tau x\right).$$

После очевидных преобразований, используя исходное тождество (25.7) и переобозначив постоянные коэффициенты, получаем соотношение (25.6) при $k = m+1$. По индукции лемма доказана. ■

Теорема о приведении уравнения Эйлера. *Замена (25.3) переводит уравнение Эйлера (25.1) на $I_\pm$ в равносильное стационарное линейное уравнение*

$$D_\tau^n x + b_{n-1} D_\tau^{n-1} x + \ldots + b_0 x = g(\tau), \quad \tau \in I_\tau, \tag{25.8}$$

где $g(\tau) :: = f(\alpha \pm e^\tau)$.

Доказательство следует из леммы о связи.

Линейное уравнение называют *приводимым в смысле Эйлера*, если существует замена аргумента, переводящая данное уравнение в равносильное стационарное линейное уравнение. Теорема о приведении уравнения Эйлера показывает, что уравнение (25.1) является приводимым в смысле Эйлера на промежутке $I_\pm$. Описание всех линейных уравнений, приводимых в смысле Эйлера, дано в работе Н. П. Еругина «Приводимые системы».

25.2. ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА

Рассмотрим однородное уравнение Эйлера

$$(t-\alpha)^n D^n x + a_{n-1}(t-\alpha)^{n-1} D^{n-1} x + \ldots + a_0 x = 0, \quad t \in I_\pm. \tag{25.9}$$

Замена (25.3) преобразует уравнение (25.9) к виду

$$D_\tau^n x + b_{n-1} D_\tau^{n-1} x + \ldots + b_0 x = 0. \tag{25.10}$$

Характеристическое уравнение для стационарного уравнения (25.10) имеет вид

$$\nu^n + b_{n-1}\nu^{n-1} + \ldots + b_0 = 0 \tag{25.11}$$

и может быть получено подстановкой $x = e^{\nu\tau}$ в уравнение (25.10) с последующим сокращением полученного выражения на общий множитель $e^{\nu\tau} \neq 0$. Описанная процедура равносильна подстановке $x = |t-\alpha|^\nu$ в уравнение (25.9) с последующим сокращением на общий множитель $|t-\alpha|^\nu \neq 0$, $\forall t \in I_\pm$, что приводит к уравнению

$$\nu(\nu-1)\ldots(\nu-n+1) + a_{n-1}\nu(\nu-1)\ldots(\nu-n+2) +$$
$$+ \ldots + a_0 = 0. \tag{25.12}$$

Алгебраические уравнения (25.11) и (25.12) относительно ν, таким образом, равносильны. Уравнение (25.12) называют *определяющим для уравнения Эйлера* (25.9). Используя определяющее уравнение (25.12), нетрудно получить стационарное уравнение (25.10), к которому приводится уравнение Эйлера (25.9).

Перенумеруем корни уравнения (25.11) так, чтобы сначала располагались r пар комплексно-сопряженных комплексных корней

$$\nu_{2l-1} = \lambda_l + i\mu_l,\ \nu_{2l} = \lambda_l - i\mu_l,\ l = 1,\ 2,\ \ldots,\ r,$$

а затем — действительные корни $\nu_j = \lambda_j$, $j = 2r + 1, \ldots, m$.

Полное решение стационарного уравнения (25.10) представимо в виде

$$\mathrm{x} = \sum_{l=1}^{r} (Q_l(\tau)\cos\mu_l\tau + R_l(\tau)\sin\mu_l\tau)\,e^{\lambda_l\tau} + \sum_{j=2r+1}^{m} P_j(\tau)\,e^{\lambda_j\tau}, \quad (25.13)$$

где кратность корня ν_k равна d_k, а P_k, Q_k, R_k — многочлены степени $d_k - 1$ с произвольными коэффициентами. Замена аргумента (25.3) переводит общее решение уравнения (25.10) в общее решение уравнения (25.9). Таким образом, общее решение полное однородного уравнения Эйлера можно представить в виде

$$\mathrm{x} = \sum_{l=1}^{r} (Q_l(\ln|t-\alpha|)\cos\mu_l\ln|t-\alpha| + R_l(\ln|t-\alpha|)\sin\mu_l\ln|t-$$
$$-\alpha|)|t-\alpha|^{\lambda_l} + \sum_{j=2r+1}^{m} P_j(\ln|t-\alpha|)\,|t-\alpha|^{\lambda_j},\ t \in I_{\pm}. \quad (25.14)$$

25.3. НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Теорема о начальной задаче для уравнения Эйлера. *При любых постоянных ξ_k и любом значении s из промежутка I начальная задача*

$$\mathrm{D}^k\mathrm{x}\,|_{t=s} = \xi_k,\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1, \quad (25.15)$$

для уравнения (25.1) имеет и притом единственное решение, определенное на всем I и представимое в виде

$$\mathrm{x} = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k\varphi_k(\ln|t-\alpha|) + \mathrm{x}^*(t), \quad (25.16)$$

где φ_k — решения (25.10), нормированные при $\sigma :: = \ln|s-\alpha|$,

$$\mathrm{D}_\tau^k\varphi_j\,|_{\tau=\sigma} = \delta_{kj},\ k,\ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$$

и

$$x^*(t) = \int_s^t \varphi_{n-1}\left(\ln\frac{|t-\alpha|}{|\rho-\alpha|}\right)\frac{f(\rho)}{\rho-\alpha}\,\mathrm{d}\rho. \quad (25.17)$$

Постоянные $\tilde{\xi}_k$ взаимно-однозначно выражаются через постоянные ξ_j.

◇ Замена аргумента (25.3) переводит уравнение (25.1) в равносильное стационарное уравнение (25.8). На основании леммы о связи

$$(s-\alpha)^k \xi_k = \mathrm{D}_\tau^k \mathrm{x}\,|_{\tau=\sigma} + A_{k,\,k-1}\mathrm{D}_\tau^{k-1}\mathrm{x}\,|_{\tau=\sigma} + \ldots + A_{k,\,0}\mathrm{x}|_{\tau=\sigma}. \qquad (25.18)$$

Все начальные значения x, рассматриваемого как функция τ при $\tau=\sigma$, начиная с $\mathrm{x}\,|_{\tau=\sigma} = \xi_0$, последовательно определяются из (25.18):

$$\mathrm{D}_\tau^k \mathrm{x}\,|_{\tau=\sigma} = \tilde{\xi}_k,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1, \qquad (25.19)$$

причем

$$\xi_k = 0,\ \forall k \Leftrightarrow \tilde{\xi}_k = 0,\ \forall k.$$

Из формулы (25.13) следует, что решение начальной задачи (25.19) для стационарного уравнения (25.8) представимо в виде

$$\mathrm{x} = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\xi}_k \varphi_k(\tau) + \int_\sigma^\tau \varphi_{n-1}(\tau - \mathrm{u})\, g(\mathrm{u})\, \mathrm{du}. \qquad (25.20)$$

После замены аргументов $\tau = \ln|t-\alpha|$ и $\mathrm{u} = \ln|\rho - \alpha|$ из формулы (25.20) следует представление (25.16). ■

25.4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА СТЕПЕННЫМ РЯДОМ

Рассмотрим однородное уравнение Эйлера для определенности по полупрямой I_-

$$(t-\alpha)^n \mathrm{D}^n \mathrm{x} + a_{n-1}(t-\alpha)^{n-1}\mathrm{D}^{n-1}\mathrm{x} + \ldots + a_0 \mathrm{x} = 0,\ t < \alpha. \quad (25.21)$$

Возьмем $s < \alpha$ и обозначим $R ::= \alpha - s$, $I_0 ::=]s-R,\ s+R[$, $I_0 \subset I_-$. Пусть

$$\mathrm{u} ::= \frac{s-t}{\alpha - s},$$

тогда

$$t \in I_0 \Leftrightarrow |\mathrm{u}| < 1.$$

Используя разложения $\ln(1+\mathrm{u})$ и $(1+\mathrm{u})^\mu$ в степенные ряды, получаем

$$\ln|t-\alpha| = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (t-s)^k,\ t \in I_0, \qquad (25.22)$$

$$|t-\alpha|^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} B_k (t-s)^k,\ t \in I_0. \qquad (25.23)$$

Теорема о разложении для однородного уравнения Эйлера. *Решение начальной задачи (25.15) для уравнения (25.21)* *на промежутке I_0 можно представить рядом по степеням $t-s$ вида*

$$x=\xi_0+\frac{t-s}{1!}\xi_1+\ldots+\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\xi_{n-1}+\sum_{k=n}^{\infty}D_k(t-s)^k,\ t\in I_0. \quad (25.24)$$

◇ Общее решение однородного уравнения Эйлера представимо по формуле (25.14). На основании разложений (25.22) — (25.23) и известных свойств степенных рядов, допускающих образование линейных комбинаций степенных рядов и перемножение степенных рядов внутри интервала сходимости, функции $Q_l(\ln|t-\alpha|)$, $R_l(\ln|t-\alpha|)$, $P_j(\ln|t-\alpha|)$ разлагаются в ряды по степеням $t-s$ на интервале I_0. Функции синус и косинус разлагаются для всех значений аргумента в степенные ряды. На основании теоремы о подстановке степенного ряда в степенной ряд из курса математического анализа функции $\cos\mu_l\ln|t-\alpha|$ и $\sin\mu_l\ln|t-\alpha|$, а следовательно, и вся правая часть выражения (25.14) разлагаются на I_0 в ряды по степеням $t-s$. Таким образом, любое решение уравнения (25.21) на I_0 представимо степенным рядом

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}D_k(t-s)^k,\quad t\in I_0.$$

Из начальных условий (25.15) получаем

$$k!\,D_k=\xi_k,\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$$

что приводит к формуле (25.24).

25.5. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА МЕТОДОМ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Данное в теореме о разложении для однородного уравнения Эйлера представление решения в виде степенного ряда (25.24) позволяет строить решение с помощью метода неопределенных коэффициентов. Схему построения изложим для случая $n=2$.

Рассмотрим однородное уравнение Эйлера (25.21) для $n=2$. Кроме того, для краткости считаем $\alpha=0$.

Итак, возьмем уравнение

$$t^2D^2x+a_1tDx+a_0x=0,\ t<0. \quad (25.25)$$

Ставится задача построения решения уравнения (25.25) с начальными значениями

$$x|_{t=s}=\xi_0,\quad Dx|_{t=s}=\xi_1$$

на промежутке $I_0=]s-R,\ s+R[$, $R=-s$. По теореме о разложении искомое решение представимо степенным рядом

$$x=\xi_0+\xi_1(t-s)+\sum_{k=2}^{\infty}D_k(t-s)^k. \quad (25.26)$$

Определяем производные решения, используя допустимость почленного дифференцирования степенного ряда внутри интервала сходимости:

$$Dx=\xi_1+\sum_{k=2}^{\infty}kD_k(t-s)^{k-1}, \quad (25.27)$$

$$\mathrm{D}^2 \mathrm{x} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) D_k (t-s)^{k-2}. \tag{25.28}$$

Разлагая коэффициенты уравнения (25.25) по степеням $t-s$ и подставляя в полученное уравнение выражения (25.26)—(25.28), получаем тождество

$$(s^2 + 2s(t-s) + (t-s)^2) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) D_k (t-s)^{k-2} + a_1 (s + (t-$$

$$-s)) (\xi_1 + \sum_{k=2}^{\infty} k D_k (t-s)^{k-1}) + a_0 (\xi_0 + \xi_1 (t-s) + \sum_{k=2}^{\infty} D_k (t-s)^k) = 0,$$

$$\forall t \in I_0$$

или

$$(s^2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot D_2 + a_1 \cdot s \cdot \xi_1 + a_0 \cdot \xi_0) + (s^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot D_3 + 2s \cdot 2 \cdot 1 \times$$

$$\times D_2 + a_1 \xi_1 + a_1 \cdot s \cdot 2D_2 + a_0 \xi_1)(t-s) + \sum_{k=2}^{\infty} (s^2 (k+2)(k+$$

$$+1) D_{k+2} + 2 \cdot s (k+1) k D_{k+1} + k(k-1) D_k + a_1 s (k+1) D_{k+1} +$$

$$+ a_1 k D_k + a_0 D_k)(t-s)^k = 0, \ \forall t \in I_0.$$

Перегруппировка слагаемых привела к степенному ряду, сумма которого на I_0 тождественно равна нулю. По известному свойству степенных рядов необходимо обращение в нуль каждого из коэффициентов рассматриваемого ряда

$$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot 1 \cdot D_2 s^2 + a_1 \xi_1 s + a_0 \xi_0 = 0 \\ 3 \cdot 2 \cdot D_3 s^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot D_2 s + a_1 \xi_1 + 2a_1 D_2 s + a_0 \xi_1 = 0 \\ (k+2)(k+1) D_{k+2} \cdot s^2 + (2(k+1) k \cdot s + (k+1) a_1 \times \\ \times s) D_{k+1} + (k(k-1) + k a_1 + a_0) D_k = 0, \ k = 2, 3, \ldots \end{array}\right\} \tag{25.29}$$

Получили систему алгебраических уравнений (25.29) для определения искомых коэффициентов разложения (25.26)

$$D_2, D_3, \ldots, D_{k+2}, \ldots \tag{25.30}$$

Эта система является треугольной, т. е. уравнение с номером N содержит D_{N+1} с отличным от нуля коэффициентом и величины (25.30) с меньшими индексами. Следовательно, величины (25.30) последовательно однозначно определяются из системы уравнений (25.29) и оказываются линейными комбинациями начальных значений

$$D_k = A_k \xi_0 + B_k \xi_1, \ k = 2, 3, \ldots$$

Величины A_k и B_k являются коэффициентами базисных решений уравнения (25.25):

$$\mathrm{x}|_{t=s} = 1, \ \mathrm{Dx}|_{t=s} = 0 \Rightarrow \mathrm{x} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \mathrm{A}_k (t-s)^k,$$

$$\mathrm{x}|_{t=s} = 0, \ \mathrm{Dx}|_{t=s} = 1 \Rightarrow \mathrm{x} = (t-s) + \sum_{k=2}^{\infty} B_k (t-s)^k.$$

25.6. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА В ВИДЕ СТЕПЕННОГО РЯДА

Рассмотрим для определенности неоднородное уравнение Эйлера на полупрямой I_-

$$(t-\alpha)^n D^n x + a_{n-1}(t-\alpha)^{n-1} D^{n-1} x + \ldots + a_0 x = f(t),\ t \in I_-, \tag{25.31}$$

с неоднородностью f, представимой на интервале I_0 степенным рядом

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k (t-s)^k,\ t \in I_0. \tag{25.32}$$

Поставим для уравнения (25.31) начальную задачу

$$D^k x|_{t=s} = \xi_k,\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1. \tag{25.33}$$

Теорема о разложении для неоднородного уравнения Эйлера. *Пусть неоднородность f уравнения (25.31) разлагается на интервале I_0 в степенной ряд (25.32). Тогда решение уравнения (25.31) с любыми наперед заданными начальными условиями (25.33) можно представить в виде степенного ряда*

$$x = \xi_0 + \frac{t-s}{1!}\xi_1 + \ldots + \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\xi_{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} H_k (t-s)^k,\ t \in I_0. \tag{25.34}$$

Доказательство теоремы можно провести по той же схеме, что и доказательство теоремы о разложении для однородного уравнения Эйлера, и следует оно из формулы (25.16), тождества

$$\frac{1}{\rho-\alpha} = \frac{1}{s-\alpha}\,\frac{1}{1-\dfrac{\rho-s}{\alpha-s}} = \frac{1}{s-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha-s)^k}(\rho-s)^k,\ \forall\rho \in I_0$$

и возможности почленно интегрировать степенной ряд.

Отметим, что частные суммы рядов (25.24) и (25.34) доставляют приближенные аналитические решения соответственно для однородного и неоднородного уравнений Эйлера.

Основные упражнения

25.1. С помощью определяющего уравнения решить линейные уравнения Эйлера в задачах 845 — 860 [1].

25.2. Используя разложение решения в степенной ряд, решить начальные задачи:

а) $D^2x + x = 0,\ x|_{t=0} = 1,\ Dx|_{t=0} = 0$;

б) $D^2x + x = 0,\ x|_{t=0} = 0,\ Dx|_{t=0} = 1$;

в) $D^2x = \int\limits_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\, d\tau,\ x|_{t=0} = Dx|_{t=0} = 0;$

г) $D^2x - x = e^{-t},\ x|_{t=0} = Dx|_{t=0} = 1.$

25.3. При каких значениях параметров α и β линейное уравнение Эйлера

$$t^2D^2x + t\alpha Dx + \beta x = 0$$

асимптотически устойчиво при $t \to +\infty$ $(t \to -\infty)$?

Дополнительные упражнения

25.4. Среди уравнений вида

$$D^2x + p(t)\,Dx + q(t)\,x = 0$$

выделить уравнения, приводимые в смысле Эйлера. Решить задачи 863—870 [1].

26. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ГОЛОМОРФНЫМИ КОФФИЦИЕНТАМИ

26.1. ЛИНЕЙНЫЕ ГОЛОМОРФНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Обозначим через I_0 интервал $]s-R,\ s+R\,[$ или $]\,-\infty,\ +\infty[$ (в последнем случае считаем $R=+\infty$). Функция f называется *голоморфной* на промежутке I_0, если она задана на I_0 и представима в виде сходящегося степенного ряда

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t-s)^k,\quad \forall t \in I_0.$$

Отметим как следствие известных свойств степенных рядов, что линейная комбинация с постоянными коэффициентами голоморфных (на I_0) функций, а также произведения двух голоморфных функций снова оказываются голоморфными функциями. В гл. 25 было показано, что решения однородного линейного уравнения Эйлера голоморфны на любом промежутке $I_0 \subset I_{\pm}$. Если, кроме того, неоднородность f уравнения Эйлера также голоморфна на I_0, то и решения неоднородного уравнения голоморфны на I_0.

Рассмотрим линейное уравнение в нормальной форме

$$D^n x = a_{n-1}(t)\, D^{n-1}x + \ldots + a_0(t)\, x + f(t),\quad t \in I_0 \tag{26.1}$$

в предположении, что коэффициенты a_k и неоднородность f являются голоморфными функциями на I_0:

$$a_k(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{kj}(t-s)^j,\quad k=0,1,\ \ldots,\ n-1,\quad t \in I_0, \tag{26.2}$$

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j\,(t-s)^j. \tag{26.3}$$

Такие уравнения будем называть *линейными уравнениями с голоморфными коэффициентами.*

26.2. ФОРМАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Выражение $x(t) ::= \sum_{k=0}^{\infty} A_k (t-s)^k$, т. е. ряд по степеням $t-s$, о сходимости которого не делается никаких предварительных предположений, т. е. допускается как сходимость, так и расходимость этого ряда, называют *формальным степенным рядом*. Над формальными степенными рядами производят действия, обычные для сходящихся степенных рядов, например:

$$\sum A_k (t-s)^k + \sum B_k (t-s)^k = \sum (A_k + B_k)(t-s)^k,$$

$$\sum A_k (t-s)^k \sum B_k (t-s)^k = \sum \left(\sum_{i+j=k} A_i B_j\right)(t-s)^k,$$

$$\mathrm{D}^j \sum A_k (t-s)^k = \sum_{k \geqslant j} k(k-1) \ldots (k-j+1) A_k (t-s)^{k-j}.$$

26.3. ФОРМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Формальный степенной ряд называют *формальным решением* линейного уравнения с голоморфными коэффициентами (26.1), если при подстановке $x(t)$ в уравнение (26.1), коэффициенты которого представлены в виде (26.2) — (26.3), после выполнения действий, указанных в уравнении, и приведения подобных членов получаем в левой и правой частях (26.1) формальные степенные ряды с совпадающими соответственными коэффициентами.

Теорема о формальном решении. Пусть $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ — *произвольные числа. Тогда можно и притом единственным образом подобрать коэффициенты* $A_n, A_{n+1}, \ldots$ *так, что выражение*

$$x(t) = \sum A_k (t-s)^k$$

будем формальным решением уравнения (26.1).

◇ Пусть для краткости $n=2$. Уравнение (26.1) при $n=2$ с учетом разложений (26.2) — (26.3) имеет вид

$$\mathrm{D}^2 x = \sum_{k=0}^{\infty} a_{1k} (t-s)^k \mathrm{D}x + \sum_{k=0}^{\infty} a_{0k} (t-s)^k x + \sum_{k=0}^{\infty} f_k (t-s)^k. \tag{26.4}$$

После подстановки

$$x := \sum A_k (t-s)^k, \ \mathrm{D}x := \sum_{k \geqslant 1} k A_k (t-s)^{k-1},$$

$$\mathrm{D}^2 x := \sum_{k \geqslant 2} k(k-1) A_k (t-s)^{k-2}$$

в левой части (26.4) получаем формальный ряд

$$\sum (k+2)(k+1) A_{k+2} (t-s)^k, \tag{26.5}$$

а в правой после перемножения формальных рядов и приведения подобных — формальный ряд

$$\sum \left(\sum_{i+j=k} ((j+1) a_{1i} A_{j+1} + a_{0i} A_j) + f_k\right)(t-s)^k. \tag{26.6}$$

Выражение $x(t)$ является формальным решением (26.4), если формальные степенные ряды (26.5) и (26.6) имеют совпадающие соответственные коэффициенты, т. е.

$$(k+2)(k+1)A_{k+2} = \sum_{i+j=k}((j+1)a_{1i}A_{j+1} + a_{0i}A_j) + f_k,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

или более подробно

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot 1\cdot A_2 = a_{10}A_1 + a_{00}A_0 + f_0, \\ 3\cdot 2\cdot A_3 = 2\cdot a_{10}A_2 + a_{00}A_1 + a_{11}A_1 + a_{01}A_0 + f_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (k+2)(k+1)A_{k+2} = (k+1)a_{10}A_{k+1} + a_{00}A_k + \ldots + a_{0k}A_0 + f_k. \end{array}\right\} \qquad (26.7)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Задавая произвольным образом и фиксируя коэффициенты A_0, A_1, из бесконечной алгебраической линейной системы (26.7) последовательно определяем единственным образом остальные коэффициенты A_2, A_3, A_4, ..., которые можно представить в виде $A_k = \alpha_k A_0 + \beta_k A_1 + \gamma_k$, где коэффициенты α_k, β_k и γ_k не зависят ни от A_0, ни от A_1. ■

26.4. МАЖОРАНТА

Линейное уравнение с голоморфными коэффициентами в нормальной форме

$$D^n x = b_{n-1}(t)D^{n-1}x + \ldots + b_0(t)x + g(t),\ t\in I_0, \qquad (26.8)$$

$$b_k(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{kj}(t-s)^j,\ k = 0,1,\ \ldots,\ n-1,\ g(t) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(t-s)^j,$$

называют *мажорантой* для уравнения (26.1), если

$$|a_{kj}| \leqslant b_{kj},\ |f_j| \leqslant g_j,\ k = 0,1,\ \ldots,\ n-1,\ j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Теорема о сходимости формального решения. *Если любая начальная задача при $t = s$ для мажоранты (26.8) имеет решение, голоморфное на I_0, то каждое формальное решение исходного уравнения (26.1) сходится на I_0.*

◇ Пусть $n = 2$. Возьмем произвольные числа A_0 и A_1. Положим

$$B_0 ::= |A_0|,\ B_1 ::= |A_1|.$$

Построим решение y уравнения (26.8) с начальными значениями $y(s) = B_0$, $Dy(s) = B_1$. Решение y по условию голоморфно на I_0 и поэтому разлагается в степенной ряд

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t-s)^k,\ t\in I_0.$$

Разложение для y единственное. Это разложение является и формальным решением уравнения (26.8). Следовательно, коэффициенты B_k обязаны удовлетворять алгебраической системе

$$(k+2)(k+1)B_{k+2} = \sum_{i+j=k}((j+1)b_{1i}B_{j+1} + b_{0i}B_j) + g_k,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Покажем, что

$$|A_k| \leqslant B_k,\ \forall k. \qquad (26.9)$$

Неравенства (26.9) выполняются при $k = 0,1$. Допустим, что неравенства (26.9) выполняются при $k \leqslant m + 1$. Тогда

$$(m+2)(m+1)\,|A_{m+2}| \leqslant \sum_{i+j=m} ((j+1)\,|a_{1i}A_{j+1}| + |a_{0i}A_j|) + |f_m|$$

или

$$(m+2)(m+1)\,|A_{m+2}| \leqslant \sum_{i+j=m} ((j+1)\,b_{1i}\,|A_{j+1}| + b_{0i}\,|A_j|) + g_m.$$

В правой части последнего неравенства индекс у коэффициентов A_k не превосходит $m+1$, поэтому, воспользовавшись индуктивным предположением, получаем

$$(m+2)(m+1)\,|A_{m+2}| \leqslant \sum_{i+j=m} ((j+1)\,b_{1i}B_{j+1} + b_{0i}B_j) + g_m$$

или

$$(m+2)(m+1)\,|A_{m+2}| \leqslant (m+2)(m+1)\,B_{m+2}, \quad |A_{m+2}| \leqslant B_{m+2}.$$

Таким образом, неравенства (26.9) доказаны по индукции для любого индекса k.

Из сходимости степенного ряда для решения y на I_0 следует, как известно, абсолютная сходимость этого ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k\,|t-s|^k < +\infty, \quad t \in I_0. \tag{26.10}$$

На основании неравенств (26.9) ряд (26.10) является мажорантой для формального решения x уравнения (26.1). Сходимость мажоранты обеспечивает сходимость указанного формального решения. ■

26.5. СУЩЕСТВОВАНИЕ ГОЛОМОРФНЫХ РЕШЕНИЙ

Лемма. *Если радиус сходимости степенного ряда*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

не меньше R, то для любого r, $0 < r < R$, существует постоянная M_r такая, что

$$|a_k| \leqslant \frac{M_r}{r^k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

◇ Степенной ряд абсолютно сходится в каждой точке интервала сходимости, в частности при $t = r$. Поэтому

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\,r^k < +\infty.$$

Положим $M_r :: = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\,r^k$. Очевидно, $|a_k|\,r^k \leqslant M_r$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, откуда и следует требуемое неравенство. ■

Теорема о существовании голоморфного решения. *Линейное уравнение (26.1) с коэффициентами, голоморфными на* *интервале I_0, имеет единственное решение с любыми наперед заданными начальными значениями, голоморфное на I_0.*

◇ Возьмем $n=2$. Для произвольных постоянных ξ_0, ξ_1 поставим начальные условия

$$\mathrm{x}\,|_{t=s}=\xi_0,\quad \mathrm{Dx}\,|_{t=s}=\xi_1.$$

На основании теоремы о формальном решении построим формальное решение

$$x(t)::=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(t-s)^k$$

уравнения (26.1), отправляясь от значений $A_0::=\xi_0$ и $A_1::=\xi_1$.

Для доказательства сходимости формального решения построим мажоранту — подходящее уравнение Эйлера. Возьмем произвольное r, $0<r<R$. На основании леммы существует постоянная M такая, что для любого индекса k

$$|a_{1k}|\leqslant\frac{M}{r^k},\quad |a_{0k}|\leqslant\frac{M}{r^k},\quad |f_k|\leqslant\frac{M}{r^k}$$

и тем более

$$|a_{1k}|\leqslant\frac{M}{r^k},\quad |a_{0k}|\leqslant(k+1)\frac{M}{r^k},\quad |f_k|\leqslant(k+1)\frac{M}{r^k}. \tag{26.11}$$

Уравнение

$$\mathrm{D}^2\mathrm{x}=M\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t-s}{r}\right)^k\mathrm{Dx}+Mr\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{r}\left(\frac{t-s}{r}\right)^k\mathrm{x}+Mr\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{r}\times$$
$$\times\left(\frac{t-s}{r}\right)^k \tag{26.12}$$

на основании неравенств (26.11) является мажорантным уравнением для исходного уравнения (26.1). Просуммируем коэффициенты уравнения (26.12). По формуле суммирования геометрического ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t-s}{r}\right)^k=-\frac{r}{t-\beta},\quad \beta::=s+r,\quad \forall t\in\,]2s-\beta,\ \beta[. \tag{26.13}$$

После дифференцирования тождества (26.13) по t внутри интервала сходимости степенного ряда (26.13) получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{r}\left(\frac{t-s}{r}\right)^k=\frac{r}{(t-\beta)^2}.$$

Уравнение (26.12) принимает вид

$$\mathrm{D}^2\mathrm{x}=-\frac{Mr}{t-\beta}\mathrm{Dx}+\frac{Mr^2}{(t-\beta)^2}\mathrm{x}+\frac{Mr^2}{(t-\beta)^2},\quad t\in\,]2s-\beta,\ \beta[$$

или

$$(t-\beta)^2\,\mathrm{D}^2\mathrm{x}+Mr\,(t-\beta)\,\mathrm{Dx}-Mr^2\mathrm{x}=Mr^2,\quad t\in\,]2s-\beta,\ \beta[. \tag{26.14}$$

Уравнение (26.14) и является мажорантным уравнением Эйлера, которое следовало построить. По теореме о разложении для неоднородного уравнения Эйлера при любых начальных значениях для $t=s$ уравнение (26.14) имеет и притом единственное решение, голоморфное на $]2s-\beta,\ \beta[$. По теореме о сходимости формального решения существование голоморфного решения у мажорантного уравнения обеспечивает сходимость формального решения

$$x = \xi_0 + \xi_1 (t - s) + \sum_{k=2}^{\infty} A_k (t - s)^k.$$

Построенная функция оказывается, таким образом, голоморфным решением уравнения (26.1) с начальными условиями $x(s) = \xi_0$, $Dx(s) = \xi_1$ на интервале $]2s - \beta, \beta[=]s - r, s + r[$.

Значения коэффициентов A_2, A_3, ... формального решения не зависят от величины r. Следовательно, построенное голоморфное решение сходится на всем интервале $I_0 =]s - R, s + R[$. ■

26.6. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

Общее решение уравнения (26.1) с голоморфными коэффициентами на I_0 доставляет формула

$$x = C_0 + C_1 \frac{t - s}{1!} + \ldots + C_{n-1} \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{k=n}^{\infty} A_k (t - s)^k,$$

где C_0, ..., C_{n-1} — произвольные числовые параметры, через которые однозначно определяются коэффициенты A_k.

Знание структуры общего решения линейного уравнения с голоморфными коэффициентами позволяет строить решения этих уравнений по методу неопределенных коэффициентов.

26.7. УРАВНЕНИЕ ЭЙРИ

В ряде разделов математической физики используется *уравнение Эйри*

$$D^2x - tx = 0.$$

Коэффициентами уравнения являются многочлены, т. е. функции, заведомо голоморфные на всей прямой.

Поставим для уравнения Эйри начальную задачу

$$x|_{t=0} = 0, \; Dx|_{t=0} = 1.$$

Следуя общей методике, решение указанной начальной задачи ищем в виде

$$x = t + \sum_{k=2}^{\infty} A_k t^k$$

с неопределенными коэффициентами A_k. Последовательно получаем

$$D^2x - tx = 1 \cdot 2 \cdot A_2 + 2 \cdot 3 \cdot A_3 t + (3 \cdot 4 \cdot A_4 - 1) t^2 + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} ((k+2)(k+3) A_{k+3} - A_k) t^{k+1} = 0, \forall t,$$

$$A_2 = A_3 = 0, \; A_4 = \frac{1}{3 \cdot 4},$$

$$A_{3m-1} = A_{3m} = 0, \ m = 1, 2, \ldots,$$

$$A_{3m+1} = \frac{A_{3m-2}}{3m(3m+1)} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 3m(3m+1)}, \ m = 1, 2, \ldots$$

Значит,

$$\mathrm{x} = t + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 3m(3m+1)} t^{3m+1}.$$

В соответствии с доказанной выше теоремой о существовании голоморфного решения полученный ряд сходится при всех t и разрешает исходную начальную задачу.

Основные упражнения

26.1. Найти общее решение в виде рядов по степеням $t-s$ для уравнений: а) $\mathrm{D}^2\mathrm{x} + \mathrm{x} = 0$; б) $\mathrm{D}^2\mathrm{x} + t\mathrm{x} = t$; в) $\mathrm{D}^2\mathrm{x} - \mathrm{x} = t$; г) $\mathrm{D}^2\mathrm{x} - t\mathrm{x} = 1$.

26.2. Построить общее решение в задачах 926—929 [1].

26.3. Найти линейно независимые решения в виде степенных рядов в задачах 1106—1109 [3].

26.4. Найти разложение решения x начальной задачи

$$\mathrm{Dx} - 2t\mathrm{x} = 1, \ \mathrm{x}\,|_{t=0} = 0$$

по степеням t и показать, что

$$x(t) = e^{t^2} \int_0^t e^{-\tau^2} d\tau.$$

26.5. Показать, что функция $x(t) = (\arcsin t)^2$ является решением начальной задачи

$$(1 - t^2)\,\mathrm{D}^2\mathrm{x} - t\mathrm{Dx} = 2, \ \mathrm{x}\,|_{t=0} = \mathrm{Dx}\,|_{t=0} = 0,$$

и найти разложение этой функции в степенной ряд.

26.6. Решить задачи 702, 703 [3].

Дополнительные упражнения

26.7. Решить задачи 1058—1060 [1].

26.8. Найти частные решения специального вида в задачах 1051—1054 [1], 681—701 [3].

26.9. Исследовать уравнения 717—725 [3].

26.10. Найти периодические решения в виде тригонометрических рядов в задачах 1121—1125 [3].

27. УРАВНЕНИЕ БЕССЕЛЯ

27.1. ОБОБЩЕННЫЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Обобщенным степенным рядом около $t = 0$ называют ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+\mu}, \tag{27.1}$$

где μ — фиксированное число; причем считаем, что либо $a_0 \neq 0$, либо $a_k = 0$ для всех k.

Допустим, что степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ имеет радиус сходимости $R > 0$. Тогда ряд (27.1) сходится и имеет действительную сумму для $0 < t < R$ (если $\mu \geqslant 0$, то сходимость есть и при $t = 0$), причем для указанных значений t выполняется

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+\mu} = t^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k.$$

Последнее соотношение показывает, что обобщенный степенной ряд для $0 < t < R$ обладает многими свойствами обычных степенных рядов. Укажем некоторые из них.

1. Суммы обобщенных степенных рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+\mu}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{k+\lambda}$$

совпадают между собой для $0 < t < R$ тогда и только тогда, когда $\mu = \lambda$ и $a_k = b_k$, $\forall k$.

2. Если $0 < s - r < s < s + r < R$, то на отрезке $[s - r,\ s + r]$ ряд (27.1) представим обычным степенным рядом, как это следует из разложения функции

$$t^{\mu} = (s + (t - s))^{\mu} = s^{\mu} \left(1 + \frac{t - s}{s}\right)^{\mu}$$

в биномиальный ряд.

3. На любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset]\,0, R[$ обобщенный степенной ряд сходится абсолютно и равномерно.

4. Два ряда вида (27.1) можно перемножить обычным способом на интервале, на котором оба они сходятся. Произведением оказывается обобщенный степенной ряд.

5. Сумма ряда (27.1) имеет на интервале $]0, R[$ производные всех порядков, которые можно вычислять с помощью почленного дифференцирования.

Наряду с обобщенными степенными рядами рассматриваются и формальные обобщенные степенные ряды вида (27.1), для которых не ставится вопрос о сходимости, и различные действия определяют, минуя понятие суммы ряда. Например:

1) два формальных ряда вида (27.1) считаются равными, если совпадают соответствующие коэффициенты и степени этих рядов;

2) произведение рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+\mu}$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k t^{k+\lambda}$ определяется как ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{i+j=k} a_i b_j\right) t^{k+\mu+\lambda}$;

3) производная ряда (27.1) определяется при $\mu \neq 0$ как ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k + \mu)\, a_k t^{k+\mu-1},$$

если же $\mu = 0$, $a_1 = a_2 = \ldots = a_{N-1} = 0$, $a_N \neq 0$, то производной называется формальный степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k + N)\, a_{k+N} t^{k+N-1}$$

и, наконец, в случае $\mu = 0$, $a_k = 0$, $\forall k$ производная определяется как ряд с нулевыми коэффициентами.

Если формальный обобщенный степенной ряд сходится, т. е. является обобщенным степенным рядом (или даже обычным степенным рядом), то все определенные выше действия соответствуют обычным действиям над суммой ряда.

Для линейных уравнений, коэффициентами которых являются обобщенные степенные ряды, естественно ставить вопрос о построении формальных решений в виде формальных обобщенных степенных рядов. Для построения таких решений ряд вида (27.1) с неопределенным параметром μ и неопределенными коэффициентами a_k подставляют в уравнение и затем определяют (если это возможно) величины μ и a_k из бесконечной системы алгебраических уравнений.

27.2. УРАВНЕНИЕ БЕССЕЛЯ

Во многих разделах физики и техники важную роль играет линейное уравнение

$$t^2\mathrm{D}^2\mathrm{x} + t\mathrm{D}\mathrm{x} + (t^2 - \nu^2)\,\mathrm{x} = 0, \tag{27.2}$$

которое называют *уравнением Бесселя индекса* ν.

Подобно уравнению Эйлера (см. гл. 25) уравнение Бесселя, записанное в стандартной форме,

$$\mathrm{D}^2\mathrm{x} + \frac{1}{t}\mathrm{D}\mathrm{x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right)\mathrm{x} = 0 \tag{27.3}$$

также обладает коэффициентами, голоморфными на любом отрезке, не содержащем точки $t = 0$. По теореме о существовании голоморфного решения на любом отрезке $[s - r, s + r]$, $s > r > 0$, уравнение (27.3), а следовательно и уравнение (27.2), имеет голоморфное решение с любыми наперед заданными начальными условиями при $t = s$. Указанное решение представимо рядом по целым неотрицательным степеням разности $t - s$. Однако в приложениях часто исследуются решения уравнения (27.2), начальные значения для которых заданы именно при $s = 0$. В связи с этим особое значение приобретают представления решения уравнения Бесселя рядами по степеням аргумента t. Как показывает теория уравнения Эйлера, искать такие решения следует в виде обобщенных степенных рядов (27.1).

27.3. ФОРМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ

Построим прежде всего ненулевое формальное решение уравнения Бесселя (27.2) в виде формального обобщенного степенного ряда (27.1) методом неопределенных коэффициентов. После вычисления производных от ряда (27.1), подстановки их в уравнение (27.2) и преобразований получаем соотношение

$$(\mu^2 - \nu^2) a_0 t^{\mu} + ((\mu + 1)^2 - \nu^2) a_1 t^{\mu+1} + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} (((\mu + k)^2 - \nu^2) a_k + a_{k-2}) t^{k+\mu} = 0,$$

которое равносильно бесконечной алгебраической системе

$$\left.\begin{aligned} &(\mu^2 - \nu^2) a_0 = 0, \\ &((\mu + 1)^2 - \nu^2) a_1 = 0, \\ &((\mu + k)^2 - \nu^2) a_k + a_{k-2} = 0, \ k = 2, \ 3, \ \ldots \end{aligned}\right\} \tag{27.4}$$

Первое уравнение системы (27.4) показывает, что $\mu^2 = \nu^2 (a_0 \neq 0!)$. Для определенности примем $\mu = \nu \geqslant 0$. Тогда получаем, что a_0 произвольно и

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2k(2\nu + 2k)} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k! (\nu + 1)(\nu + 2) \ldots (\nu + k)},$$

$$a_{2k-1} = 0, \ k = 1, \ 2, \ \ldots$$

Следовательно, искомое формальное решение имеет вид

$$\mathrm{x} = x(t) :: = \sum_{k=0}^{\infty} a_0 \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (\nu + 1) \ldots (\nu + k)} t^{2k+\nu} \tag{27.5}$$

(коэффициент при $k = 0$ равен a_0). На основании признака Даламбера сходимости положительных рядов ряд для $x(t)$ сходится абсолютно при всех $t \geqslant 0$. Формальное решение $\mathrm{x} = x(t)$ оказалось сходящимся и поэтому является решением уравнения (27.2), вообще говоря, при $t > 0$ (сужение промежутка изменения аргумента t происходит за счет того, что функция x должна быть дважды дифференцируемой).

27.4. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Несобственный интеграл

$$\Gamma(\nu) :: = \int_0^{+\infty} \tau^{\nu-1} e^{-\tau} d\tau,$$

сходящийся при всех $\nu > 0$, называют *гамма-функцией*. Гамма-функция удовлетворяет соотношению $\Gamma(\nu + 1) = \nu \Gamma(\nu)$, и поэтому

$$(\nu + 1)(\nu + 2) \ldots (\nu + k) \Gamma(\nu + 1) = \Gamma(\nu + k + 1).$$

Если положить

$$a_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)},$$

то функция x из (27.5) обратится в *функцию Бесселя первого рода порядка* ν

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\nu}. \qquad (27.6)$$

При нахождении второго решения уравнения (27.2), линейно независимого от решения J_ν, различают два случая.

Случай 1. ν *не является целым числом*. Так как уравнение (27.2) не меняется при замене ν на $-\nu$, то наряду с решением J_ν уравнение Бесселя имеет также решение

$$x = J_{-\nu}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-\nu+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k-\nu}, \qquad (27.7)$$

где для определения функции Γ от отрицательных значений аргумента используется соотношение

$$\Gamma(\nu) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\nu}.$$

Решение $J_{-\nu}$ определено при всех $t > 0$ и линейно независимо от J_ν, так как разложения J_ν и $J_{-\nu}$ в ряды (27.6) и (27.7) начинаются с различных степеней t. С помощью линейных комбинаций вида

$$C_1 J_\nu + C_2 J_{-\nu}$$

можно решить любую начальную задачу при $t = s > 0$. Отметим, что $J_{-\nu}(t) \to \infty$ при $t \to 0$, и поэтому решения, ограниченные около $t = 0$, имеют вид $C_1 J_\nu$.

Случай 2. $\nu = n$ — *целое число*. Исследование системы (27.4) при $\mu = -n$ показывает, что не существует других решений, линейно независимых от J_n и представимых в виде обобщенного степенного ряда. Для определения второго решения можно воспользоваться, например, формулой Лиувилля. Пусть y — линейно независимое от J_n решение и W — их вронскиан:

$$W :: = \mathrm{D}y J_n - y \mathrm{D} J_n = J_n^2 \mathrm{D}\left(\frac{y}{J_n}\right).$$

На основании формулы Лиувилля

$$\mathrm{D}\left(\frac{y}{J_n}\right) = \frac{C}{tJ_n^2},$$

где C — постоянная, отличная от 0, откуда

$$y(t) = CJ_n(t) \int \frac{\mathrm{d}t}{tJ_n^2(t)}.$$

Выявим аналитическую структуру решения y, для чего преобразуем подынтегральную функцию $\frac{1}{tJ_n^2}$. Используя разложение (27.6) при $\nu = n$, теоремы о произведении и делении степенных рядов, получаем

$$\frac{1}{tJ_n^2} = t^{-2n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k} t^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k} t^{2k-2n-1}$$

и, следовательно,

$$\int \frac{dt}{tJ_n^2(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k} \int t^{2k-2n-1} dt = \alpha_{2n} \ln t + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k} t^{2k-2n}.$$

Таким образом, решение y представимо в виде

$$y(t) = C\alpha_{2n} J_n(t) \ln t + J_n(t) \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k} t^{2k-2n}$$

или

$$y(t) = bJ_n(t) \ln t + \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k} t^{2k-n}, \tag{27.8}$$

где b — произвольный ненулевой множитель. Решение y при вполне определенном выборе множителя b называют *функцией Бесселя второго рода порядка* n и обозначают K_n. Построим, например, функцию Бесселя K_0. На основании представления (27.8) K_0 запишем в виде

$$K_0(t) = J_0(t) \ln t + \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k} t^{2k} \tag{27.9}$$

с неопределенными коэффициентами b_{2k}, $b := 1$. Из (27.6) следует

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{((2k)!!)^2} t^{2k}.$$

Подставив (27.9) в уравнение Бесселя

$$t^2 D^2 x + tDx + t^2 x = 0$$

после несложных преобразований получаем

$$b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left((2k)^2 b_{2k} + b_{2k-2} + 2 \cdot 2k \frac{(-1)^k}{((2k)!!)^2} \right) t^{2k} = 0,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} & b_0 = 0, \\ & (2k)^2 b_{2k} + b_{2k-2} + 4k \frac{(-1)^k}{((2k)!!)^2} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{27.10}$$

Алгебраическая система (27.10) имеет единственное решение

$$b_0 = 0,$$
$$b_{2k} = -\frac{1}{k}\frac{(-1)^k}{((2k)!!)^2} - \frac{b_{2k-2}}{(2k)^2} = \frac{(-1)^{k-1}}{((2k)!!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}\right),$$
$$k = 1,\ 2,\ \ldots,$$

и поэтому

$$K_0(t) = J_0(t)\ln t + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{((2k)\,!!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}\right)t^{2k}.$$

27.5. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ

Общее решение уравнения Бесселя (27.2) при ν, не равном целому числу, представимо в виде

$$\mathrm{x} = C_1J_\nu + C_2J_{-\nu},$$

а при ν, равном целому числу ($\nu = n$),

$$\mathrm{x} = C_1J_n + C_2K_n,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Пример 27.1. Общее решение уравнения Бесселя

$$t^2\mathrm{D}^2\mathrm{x} + t\mathrm{D}\mathrm{x} + \left(t^2 - \frac{9}{4}\right)\mathrm{x} = 0$$

имеет вид

$$\mathrm{x} = C_1J_{3/2} + C_2J_{-3/2}.$$

Пример 27.2. Уравнение $t^2\mathrm{D}^2\mathrm{x} + t\mathrm{D}\mathrm{x} + (a^2t^2 - \nu^2)\,\mathrm{x} = 0$, $a \neq 0$, с помощью замены $\tau = at$ приводится к уравнению Бесселя

$$\tau^2\mathrm{D}^2_\tau\mathrm{x} + \tau\mathrm{D}_\tau\mathrm{x} + (\tau^2 - \nu^2)\,\mathrm{x} = 0,$$

и, следовательно, $\mathrm{x} = C_1J_\nu(at) + C_2J_{-\nu}(at)$, если ν — не целое число, $\mathrm{x} = C_1J_n(at) + C_2K_n(at)$, если $\nu = n$ — целое число.

Функции Бесселя подробно изучены (см., например, монографию Е. Янке, Ф. Эмде и Ф. Лёша «Специальные функции» (М.: Наука, 1964)). Для них составлены подробные таблицы значений, построены графики, и поэтому с ними можно также свободно обращаться, как и, например, с тригонометрическими функциями.

Основные упражнения

27.1. Найти общее решение в задачах 930—934 [1].

27.2. Построить два линейно независимых решения уравнений в задачах 935—942 [1].

27.3. Решить задачу 943 [1].

27.4. Для уравнения

$$t^2 D^2 x + tDx + (t^2 - 4)\,x = 0$$

указать все решения, ограниченные около $t = 0$.

27.5. Доказать, что

$$J_{1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin t}{\sqrt{t}},\quad J_{-1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos t}{\sqrt{t}}.$$

Найти решение начальной задачи

$$t^2 D^2 x + tDx + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right) x = 0,$$

$$x\,\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1,\quad Dx\,\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = 0$$

и исследовать его поведение при $t \to 0$.

Дополнительные упражнения

27.6. Доказать, что

$$J_{3/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left(\frac{\sin t}{t} - \cos t\right);$$

$$J_{-3/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left(-\sin t - \frac{\cos t}{t}\right).$$

27.7. Доказать, что

$$DJ_\nu(t) = -J_{\nu+1}(t) + \frac{\nu J_\nu(t)}{t},$$

в частности $DJ_0 = -J_1$. Показать, что $I_{\frac{2n+1}{2}}$ является элементарной функцией.

27.8. Построить общее решение уравнения $t^2 D^2 x + aDx + tx = 0$.

27.9. Решить задачу 952 [1].

28. ГОЛОМОРФНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

28.1. ГОЛОМОРФНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим векторное уравнение

$$Dx = f(t,\ x),$$

заданное на области $G \subset R^{n+1}$ и пусть функция f голоморфна по t и x в окрестности точки $(s,\ \xi) \in G$, т. е. существуют числа $\rho > 0$ и $R > 0$ такие, что для любых t и x, $|t - s| < \rho$, $|x - \xi| :: = \max\limits_k |x_k - \xi_k| < R$, функция f разлагается в векторный степенной ряд

$$f(t,\ x) = \sum_{k,\ j_1,\ \dots,\ j_n = 0}^{\infty} \alpha_{kj_1 \dots j_n} (t - s)^k (x_1 - \xi_1)^{j_1} \dots (x_n - \xi_n)^{j_n},$$

$$\alpha_{kj_1 \dots j_n} \in R^n.$$

Отметим, что для голоморфности векторной функции необходимо и достаточно, чтобы были голоморфны все ее координатные функции.

Обозначим

$$j ::= (j_1, \ldots, j_n), \; x^j ::= x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n}.$$

Тогда

$$\sum_{k, j_1, \ldots, j_n=0}^{\infty} \alpha_{kj_1 \ldots j_n} (t-s)^k (x_1-\xi_1)^{j_1} \ldots (x_n-\xi_n)^{j_n} =$$

$$= \sum_{k, j} \alpha_{kj} (t-s)^k (x-\xi)^j.$$

Произведя в уравнении замену $t := t + s$, $x := x + \xi$, что равносильно $s := 0$, $\xi := 0$, получим более компактную запись

$$Dx = f(t, x), \; f(t, x) = \sum_{k, j} \alpha_{kj} t^k x^j, \; (t, x) \in \Pi : |t| < \rho, \; |x| < R. \quad (28.1)$$

Так как голоморфная на Π функция является непрерывно дифференцируемой, то из теоремы Пикара — Линделефа (см. гл. 16) следует, что уравнение (29.1) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию

$$x|_{t=0} = 0. \quad (28.2)$$

Далее будет показано, что решение начальной задачи (28.1), (28.2) голоморфно в окрестности точки $t = 0$.

28.2. ФОРМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ГОЛОМОРФНОГО УРАВНЕНИЯ

Формальное решение голоморфного уравнения (28.1) определяется, как и в гл. 26, и представляет собой формальный векторный степенной ряд

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k, \; A_k \in R^n. \quad (28.3)$$

На множестве голоморфных около точки $(0, 0) \in \Pi$ функций g определим линейный оператор W:

$$W ::= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f, \; Wg = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} f,$$

в частности, $Wx = f$.

По индукции строим k-ю степень ($k > 1$) оператора W:

$$W^k ::= W\left(W^{k-1}\right), \; W^0 g ::= g.$$

Отметим, что если x — решение уравнения (28.1), то

$$Dg(t, x(t)) = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} Dx(t) = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} f = Wg(t, x(t)),$$

и поэтому W называют *оператором дифференцирования в силу уравнения (28.1).*

Теорема о формальном решении. *Начальная задача (28.1)—(28.2) имеет и притом единственное формальное решение*

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k t^k,$$

причем

$$A_k = \frac{1}{k!} W^{k-1} f\Big(0,\ 0\Big),\ k = 1,\ 2,\ \ldots$$

◇ Решение x ищем в виде формального степенного ряда (28.3). Из начального условия (28.1) следует, что $A_0 = 0$. После подстановки

$$\mathrm{x} := x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k t^k$$

в уравнение (28.1) в левой части получаем формальный степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) A_{k+1} t^k, \tag{28.4}$$

а в правой части — выражение

$$f(t,\ x(t)) = \sum_{k,\ j} \alpha_{kj} t^k \left(\sum_{l=1}^{\infty} A_l t^l \right)^j,$$

которое после выполнения указанных в нем действий представимо в виде формального степенного ряда

$$f(t,\ x(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k t^k. \tag{28.5}$$

Нахождение коэффициентов B_k непосредственно через коэффициенты α_{ij} и A_l приводит к громоздким выкладкам, поэтому поступим следующим образом. Полагая $t = 0$ в соотношении (28.5), находим

$$B_0 = f(0,\ 0).$$

Продифференцируем соотношение (28.5) по t, считая $x(t)$ решением уравнения (28.1):

$$\mathrm{D} f(t,\ x(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} k B_k t^{k-1}$$

или

$$W f(t,\ x(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} k B_k t^{k-1}. \tag{28.6}$$

При $t = 0$ имеем

$$B_1 = W f(0,\ 0).$$

Если продифференцировать (28.6) по t, то получаем

$$W^2 f(t,\ x(t)) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) B_k t^{k-2}.$$

откуда

$$B_2 = \frac{1}{2!} W^2 f(0,\ 0)$$

и вообще

$$B_k = \frac{1}{k!} W^k f(0,\ 0),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Приравнивая соответственные коэффициенты формальных степенных рядов 28.4) и (28.5), получаем

$$(k+1)\ A_{k+1} = \frac{1}{k!}\ W^k f(0,\ 0)$$

или, полагая $k := k - 1$,

$$A_k = \frac{1}{k!} W^{k-1} f(0,\ 0),\ k = 1,\ 2,\ \ldots \blacksquare$$

Степенной ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{W^k \mathrm{x}(0,\ 0)}{k!} t^k$$

называют *рядом Ли*. Из соотношения $f = W\mathrm{x}$ следует, что формальное решение x представимо рядом Ли.

Отметим, что при вычислении $W^{k-1}f(0,\ 0)$ приходится выполнять лишь действия дифференцирования степенного ряда, сложения и умножения, поэтому компоненты коэффициентов A_k являются полиномами от компонент коэффициентов α_{ij} с положительными коэффициентами. Например,

$$A_1 = f(0,\ 0) = \alpha_{00\ldots0},$$

$$A_2 = \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} (\alpha_{100\ldots0})_1 \\ \vdots \\ (\alpha_{100\ldots0})_n \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} (\alpha_{010\ldots0})_1 & \cdots & (\alpha_{000\ldots1})_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ (\alpha_{010\ldots0})_n & \cdots & (\alpha_{000\ldots1})_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (\alpha_{000\ldots0})_1 \\ \vdots \\ (\alpha_{000\ldots0})_n \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} (\alpha_{100\ldots0})_1 + (\alpha_{010\ldots0})_1(\alpha_{000\ldots0})_1 + \ldots + (\alpha_{000\ldots1})_1(\alpha_{000\ldots0})_n \\ \vdots \\ \vdots \\ (\alpha_{100\ldots0})_n + (\alpha_{010\ldots0})_n(\alpha_{000\ldots0})_1 + \ldots + (\alpha_{000\ldots1})_n(\alpha_{000\ldots0})_n \end{bmatrix}$$

(здесь $(\alpha)_i$ — i-я компонента коэффициента $\alpha \in R^n$).

28.3. МАЖОРАНТНОЕ УРАВНЕНИЕ

Наряду с уравнением (28.1) рассмотрим голоморфное уравнение

$$\mathrm{Dx} = g(t,\ \mathrm{x}),\ g(t,\ \mathrm{x}) = \sum_{k,\ j} \beta_{kj} t^k \mathrm{x}^j,\quad (t,\ \mathrm{x}) \in \Pi. \qquad (28.7)$$

Уравнение (28.7) называют *мажорантой* для голоморфного уравнения (28.1), если

$$|(\alpha_{kj})_i| \leqslant (\beta_{kj})_i, \ \forall k, \ j; \ \forall i = 1, \ 2, \ \ldots, \ n. \qquad (28.8)$$

Теорема о мажорантном уравнении. *Пусть*

$$\mathrm{x} = x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k t^k \text{ и } \mathrm{x} = y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k t^k$$

являются формальными решениями соответственно начальных задач (28.1), (28.2) и (28.7), (28.2). Если уравнение (28.7) — мажоранта для (28.1), то ряд для $y(t)$ — мажоранта ряда для $x(t)$, т. е.

$$|(A_k)_i| \leqslant (B_k)_i, \ \forall k \text{ и } \forall i = 1, \ 2, \ \ldots, \ n.$$

◇ Существование формальных решений следует из теоремы о формальном решении, причем

$$A_k = \frac{1}{k!} W^{k-1} f(0, \ 0), \ B_k = \frac{1}{k!} \overline{W}^{k-1} g(0, \ 0),$$

где $\overline{W} :: = \dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{x}} g$.

Формулы для вычисления соответственных компонент коэффициентов A_k и B_k однотипны. На основании замечания из предыдущего пункта и оценок (28.8) заключаем, что

$$|(A_k)_i| \leqslant (B_k)_i. \ \blacksquare$$

28.4. МОДЕЛЬНОЕ ГОЛОМОРФНОЕ УРАВНЕНИЕ

Векторное уравнение

$$\mathrm{Dx} = F(t, \ \mathrm{x}), \qquad (28.9)$$

компоненты правой части которого совпадают между собой и равны

$$\frac{M}{(1-t)(1-\mathrm{x}_1) \cdot \ \ldots \ \cdot (1-\mathrm{x}_n)}, \ t < 1, \ \mathrm{x}_i < 1, \ M > 0,$$

называют *модельным уравнением*. Уравнение (28.9) моделирует некоторые особенности, присущие нелинейным уравнениям.

Как отмечалось в примере 19.3, уравнение (28.9) имеет $n-1$ первых интегралов $\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1, \ \mathrm{x}_3 - \mathrm{x}_1, \ \ldots, \ \mathrm{x}_n - \mathrm{x}_1$ и его интегрирование сводится к интегрированию скалярного уравнения

$$\mathrm{Dx}_1 = \frac{M}{(1-t)(1-\mathrm{x}_1)(1-\mathrm{x}_1 - C_2) \cdot \ \ldots \ \cdot (1-\mathrm{x}_1 - C_n)}.$$

Для решения x, удовлетворяющего начальному условию $x(0) = 0$,

$$x_1(t) = x_2(t) = \ \ldots \ = x_n(t),$$

и, следовательно, компоненты x_i являются решениями начальной задачи

$$\mathrm{Du} = \frac{M}{(1-t)(1-\mathrm{u})^n}, \quad \mathrm{u}\,|_{t=0} = 0.$$

Переменные в последнем уравнении разделяются, что позволяет в окрестности точки $t=0$ построить решение

$$u(t) = 1 - \sqrt[n+1]{1+(n+1)M\ln(1-t)}\,. \tag{28.10}$$

Это решение определено для $t<1$ и $1+(n+1)M\ln(1-t)>0$, т. е. для

$$t < 1-\alpha, \quad \alpha :: = e^{-\frac{1}{(n+1)M}}.$$

Уравнение (28.9) в окрестности точки (0, 0) является голоморфным, так как компоненты правой части F этого уравнения при $|t|<1$ и $|\mathrm{x}|<1$ разлагаются в степенной ряд

$$\frac{M}{(1-t)(1-\mathrm{x}_1)\ \ldots\ (1-\mathrm{x}_n)} = M\sum_j t^k\mathrm{x}^j = M\sum_{k,\,j_1,\,\ldots,\,j_n=0}^{\infty} t^k\mathrm{x}_1^{j_1}\cdot\ \ldots\ \cdot\mathrm{x}_n^{j_n}.$$

Решение x также голоморфно около $t=0$. Действительно, из формулы (28.10) на основании теоремы о подстановке степенного ряда в степенной ряд следует, что x_i разлагаются в степенной ряд на некотором интервале $]-r,\ r[$. Значит,

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k t^k, \quad |t|<r.$$

Нетрудно показать, что $r = 1 - e^{-\frac{1}{(n+1)M}}$.

Таким образом, решение начальной задачи (28.2) для модельного уравнения (28.9) является голоморфной функцией около точки $t=0$.

28.5. РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГОЛОМОРФНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим голоморфное на $\Pi: |t|<\rho,\ |\mathrm{x}|<R$ уравнение (28.1). Не нарушая общности, можно считать $\rho>1$, $R>1$ (в противном случае, например при $\rho<1$, заменим $t := \frac{\rho}{2}t$ и получим уравнение того же типа, но с увеличенным промежутком изменения t).

Обобщенная лемма Абеля. *Если векторный степенной ряд*

$$\sum_{k,\,j} \alpha_{kj} t^k \mathrm{x}^j$$

сходится при $t=\tau\neq 0$ и $\mathrm{x}_i=\xi_i\neq 0$, то он сходится нормально (т. е. сходится ряд из норм членов ряда) и при всех $|t|<|\tau|$ и $|\mathrm{x}_i|<|\xi_i|$.

◇ Из сходимости ряда при $t=\tau$ и $\mathrm{x}=\xi$ следует, что

$$|\alpha_{kj}\tau^k\xi^j| \leqslant M, \ \forall k, j.$$

Так как

$$|\alpha_{kj}t^k\mathrm{x}^j| = |\alpha_{kj}\tau^k\xi^j| \cdot \left|\frac{t}{\tau}\right|^k \cdot \left|\frac{\mathrm{x}_1}{\xi_1}\right|^{j_1} \cdot \ldots \cdot \left|\frac{\mathrm{x}_n}{\xi_n}\right|^{j_n} \leqslant M \left|\frac{t}{\tau}\right|^k \cdot \left|\frac{\mathrm{x}_1}{\xi_1}\right|^{j_1} \times \ldots \times \left|\frac{\mathrm{x}_n}{\xi_n}\right|^{j_n}$$

и ряд

$$\sum_{k, j_1, \ldots, j_n=0}^{\infty} M \left|\frac{t}{\tau}\right|^k \cdot \left|\frac{\mathrm{x}_1}{\xi_1}\right|^{j_1} \cdot \ldots \cdot \left|\frac{\mathrm{x}_n}{\xi_n}\right|^{j_n}$$

сходится при $\left|\frac{t}{\tau}\right| < 1$, $\left|\frac{\mathrm{x}_1}{\xi_1}\right| < 1$, ..., $\left|\frac{\mathrm{x}_n}{\xi_n}\right| < 1$, то исходный ряд сходится нормально при $|t| < |\tau|$, $|\mathrm{x}_i| < |\xi_i|$. ■

Следствие. Если для уравнения (28.1) $\rho > 1$ и $R > 1$, то

$$|\alpha_{kj}| \leqslant M = \mathrm{const}.$$

Теорема Коши о голоморфном уравнении. *Начальная задача* $\mathrm{x}|_{t=s} = \xi$ для голоморфного в окрестности точки (s, ξ) уравнения

$$\mathrm{Dx} = f(t, \mathrm{x})$$

имеет решение, голоморфное на некотором интервале $|t-s| < r$, $r > 0$.

◇ Доказательство проведем для случая $s=0$, $\xi=0$, $\rho > 1$, $R > 1$. По теореме о формальном решении начальная задача (28.1) — (28.2) обладает формальным решением x. На основании следствия обобщенной леммы Абеля ряд

$$\sum_{k, j} Mt^k\mathrm{x}^j$$

при $|t| < 1$, $|\mathrm{x}| < 1$ является мажорантой ряда для f, и поэтому уравнение (28.9) служит мажорантой для уравнения (28.1). На основании свойств модельного уравнения (28.9) существует решение y, $y(0)=0$, голоморфные для $|t| < r_1 < 1$. В силу теоремы о мажорантном уравнении ряд для решения y является мажорантой ряда для формального решения x, и поэтому x — голоморфное решение начальной задачи (28.1)—(28.2) на некотором интервале $|t| < r$, $r \geqslant r_1$. ■

Основные упражнения

28.1. Решить начальные задачи 1091—1095 [3].

28.2. Сформулировать теорему о существовании голоморфного решения начальной задачи

$$\mathrm{D}^n\mathrm{x} = f(t, \mathrm{x}, \mathrm{Dx}, \ldots, \mathrm{D}^{n-1}\mathrm{x}), \ \mathrm{D}^k\mathrm{x}|_{t=s} = \xi_k, \ k=0, 1, \ldots, n-1.$$

Решить задачи 1096, 1097 [3].

28.3. Найти в виде степенного ряда решения начальной задачи:

а) $D\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1x_2\\x_1^2+x_2^2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\Big|_{t=0}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$;

б) $D\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1^2\\tx_1-x_2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\Big|_{t=1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

28.4. Решить задачи 1103—1106 [1].

Дополнительные упражнения

28.5. Решить задачи 1098, 1099 [3].

28.6. Исследовать уравнения в задачах 1492—1495 [1].

VII. УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ 1-ГО ПОРЯДКА

29. ЛИНЕЙНЫЕ И КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ 1-ГО ПОРЯДКА

29.1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ 1-ГО ПОРЯДКА

В математике и ее приложениях наряду с обыкновенными дифференциальными уравнениями ведущую роль играют уравнения в частных производных. В математической физике, например, уравнения в частных производных 2-го порядка служат основным средством математического моделирования естественных процессов. Уравнения 1-го порядка наряду с традиционными приложениями в геометрии приобрели в последнее время важное значение в газовой динамике и других областях прикладной математики. Вместе с тем уравнения 1-го порядка являются вспомогательным аппаратом при исследовании уравнений 2-го порядка.

Теория уравнений 1-го порядка тесно связана с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений. Последние главы всех рекомендуемых учебников по теории обыкновенных дифференциальных уравнений содержат основные сведения по теории уравнений 1-го порядка.

Уравнение в частных производных 1-го порядка (Ч-1) для одной неизвестной функции u имеет вид

$$F\left(x,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x}\right)=0,\ x=(x_1,\ \ldots,\ x_n),\ \frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial u}{\partial x_n}\right).$$

Решением, а также интегралом или интегральной поверхностью уравнения в частных производных 1-го порядка называют дифференцируемую функцию $u: E\to R$, $E\subset R^n$, обращающую данное уравнение в тождество на области E.

Примеры (в частности, уравнение $\partial u/\partial x_1=0$, решениями которого являются всевозможные функции $u=\varphi(x_2,\ \ldots,\ x_n)$ наводят на мысль, что при задании начального значения для решения Ч-1 должна фигурировать произвольная функция. Такое предположение подтверждается фундаментальной теоремой Ковалевской.

Теорема Ковалевской. *Пусть функции $\varphi(x_2,\ \ldots,\ x_n)$ и $f(x,\ u,\ p_2,\ \ldots,\ p_n)$ голоморфны соответственно в окрестностях точек $(\xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)$ и $(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \eta,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_n)$, причем*

$$\eta=\varphi(\xi_2,\ \ldots,\ \xi_n),$$
$$\rho_i=\varphi'_{x_i}(\xi_2,\ \ldots,\ \xi_n),\ i=2,\ \ldots,\ n.$$

Тогда уравнение 1-го порядка, разрешенное относительно $\partial u/\partial x_1$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = f\left(x,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_2},\ \ldots,\ \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

имеет и притом единственное решение $u = u(x)$, $x \in E$, *голоморфное в окрестности* $(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)$ *с начальным значением*

$$u(\xi_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = \varphi(x_2,\ \ldots,\ x_n).$$

В настоящее время известны различные теоремы об однозначной разрешимости краевых задач для Ч-1, в том числе для неголоморфных уравнений. Формулировку этих теорем, как и доказательство теоремы Ковалевской, опускаем. В этом разделе ограничимся формальным интегрированием Ч-1. Строгая теория уравнений в частных производных 1-го порядка может быть построена по той же схеме и с помощью тех же средств, которые были использованы в разделах 4—6 для построения теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

29.2. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ 1-ГО ПОРЯДКА

Ч-1 называют *квазилинейным*, если его можно представить в виде

$$f(x,\ u)\frac{\partial u}{\partial x} = g(x,\ u). \tag{29.1}$$

Квазилинейные уравнения называют также *неоднородными линейными уравнениями* (см., например, книгу Н. М. Матвеева «Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений»).

Ч-1 называют *линейным*, если оно линейно относительно u и $\partial u/\partial x$, т. е.

$$f(x)\frac{\partial u}{\partial x} + g(x)u = h(x),$$

и, наконец, *однородным линейным*, если $h = 0$, $g = 0$, т. е.

$$f(x)\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{29.2}$$

Во всех остальных случаях уравнение Ч-1 называют *нелинейным*. Основными объектами последующих формальных построений будут квазилинейные Ч-1 и их частный случай — однородные линейные Ч-1.

29.3. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ Ч-1

Из теоремы о первом интеграле векторного уравнения

$$Dx = f(x),\ x \in R^n \tag{29.3}$$

(см. гл. 20) следует, что функция $u = \Phi(x)$ является решением однородного линейного Ч-1 (29.2) в том и только том случае, если она — первый интеграл (29.3). Допустим, что функции $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ являются стационарными (т. е. независящими от t) первыми интегралами (29.3). Тогда каждая из функций $u = H(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$ также служит первым интегралом для (29.3), и поэтому является решением уравнения (29.2).

Выражение для решения уравнения в частных производных, содержащее произвольную функцию, называют *общим решением* данного уравнения. Знание совокупности первых интегралов уравнения (29.3) позволяет построить общее решение уравнения в частных производных (29.2).

Пример 29.1. Уравнению $2xy\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} + z^2y\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$ соответствует система (в симметрическом виде) $\dfrac{dx}{2xy} = \dfrac{dy}{x} = \dfrac{dz}{z^2y}$ с первыми интегралами $x - y$ и $\ln x + 2/z$. Следовательно, выражение $u = H(x - y^2, \ln x + 2/z)$ с произвольной функцией H является общим решением данного Ч-1.

29.4. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Начальное условие для решения $u = u(x)$ уравнения (29.2) имеет вид

$$u|_{x_1=\xi} = \varphi(x_2, \ldots, x_n).$$

Допустим, что $\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1}$ — стационарные первые интегралы (29.3), составляющие базис системы в симметрической форме. Образуем общее решение $u = H(\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1})$. Функция H должна удовлетворять условию

$$H(\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1})|_{x_1=\xi} = \varphi(x_2, \ldots, x_n).$$

Из системы соотношений

$$\Phi_1(\xi, x_2, \ldots, x_n) = C_1, \ldots, \Phi_{n-1}(\xi, x_2, \ldots, x_n) = C_{n-1}$$

выразим $x_2, x_3, \ldots, x_n$ через $\xi, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$.

$$x_i = x_i(\xi, C_1, \ldots, C_{n-1}), \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

Построим функцию

$$h(C_1, \ldots, C_{n-1}) = \varphi(x_2(\xi, C_1, \ldots, C_{n-1}), \ldots, x_n(\xi, C_1, \ldots, C_{n-1})).$$

Тогда функция

$$u = u(x) = h(\Phi_1(x), \ldots, \Phi_{n-1}(x))$$

будет решением (29.2), удовлетворяющим начальному условию, так как

$$u|_{x_1=\xi} = h(\Phi_1(\xi, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \Phi_{n-1}(\xi, x_2, \ldots, x_n)) = h(C_1, \ldots, C_{n-1}) = \varphi(x_2, \ldots, x_n).$$

Пример 29.2. Решение уравнения из примера 29.1 с начальным условием $u|_{x=1} = y^2 + 1/z$ в соответствии с указанным правилом имеет вид

$$\begin{cases}\Phi_1 = x - y^2\\ \Phi_2 = \ln x + 2/z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1 - y^2 = C_1\\ 2/z = C_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y = \sqrt{1 - C_1},\\ z = 2/C_2,\end{cases}$$

$$h = (\sqrt{1 - C_1})^2 + (2/C_2)^{-1} = 1 - C_1 + C_2/2,$$

$$u = 1 - (x - y^2) + (1/2)\ln x + 1/z = 1 - x + (1/2)\ln x + y^2 + 1/z.$$

29.5. ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим линейное однородное Ч-1 при $n = 2$

$$f(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial x} + g(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{29.4}$$

и соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$Dx = f(x,\ y),\ Dy = g(x,\ y). \tag{29.5}$$

Допустим, что $\Phi(x,\ y)$ — первый интеграл (29.5). Кривую K: $\Phi(x,\ y) = C$, $u = \gamma$, где C и γ — постоянные, в пространстве O_{xyu} называют *характеристикой* уравнения (29.4). Решение $u = h(\Phi(x,\ y))$ уравнения (28.4) задает интегральную поверхность $П$ уравнения (28.4).

Через точку $(\xi,\ \eta,\ h(\Phi(\xi,\ \eta)))$ проходит характеристика K при $C = \Phi(\xi,\ \eta)$ и $\gamma = h(\Phi(\xi,\ \eta))$, лежащая на $П$. Проекция K на плоскость Oxy является линией уровня решения u. Вся интегральная поверхность состоит из характеристик. Наоборот, любая поверхность, составленная из характеристик уравнения, будет интегральной для этого уравнения. Для построения интегральной поверхности, проходящей через пространственную кривую $Л$, не касающейся ни одной характеристики (29.4), следует провести через все точки $Л$ характеристики (29.4).

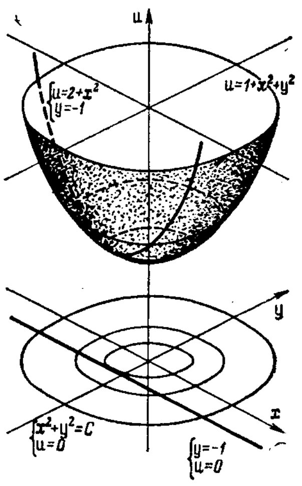

Рис. 31

Пример 29.3. Характеристиками уравнения $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ служат кривые $x^2 + y^2 = C$, $u = \gamma$. Если через каждую точку кривой $y = -1$, $u = 2 + x^2$ провести характеристику $u = \gamma$, $x^2 + y^2 = \gamma - 1$, то возникнет эллиптический параболоид вращения $u = 1 + x^2 + y^2$, который будет интегральной поверхностью данного уравнения (рис. 31).

Аналогичную роль играют характеристики, т. е. фазовые графики соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений (29.3), и при построении решений однородного линейного уравнения (29.2) в случае произвольного n.

29.6. СВЕДЕНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ К ОДНОРОДНОМУ ЛИНЕЙНОМУ

Теорема 1. *Построение решений квазилинейного уравнения (29.1) может быть сведено к интегрированию вспомогательного однородного линейного уравнения большей размерности.*

◊ Наряду с (29.1) рассмотрим вспомогательное однородное линейное уравнение

$$F(y)\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{29.6}$$

где $y = (x_1, \ldots, x_n, u)$, $F = (f_1, \ldots, f_n, g)$. Если $v = \psi(y)$ — решение (29.6), то функция $u = \Phi(x)$, определяемая из соотношения $\psi(x, u) = 0$, будет решением (29.1), так как

$$f_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \ldots + f_n\frac{\partial\psi}{\partial x_n} + g\frac{\partial\psi}{\partial u} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial\Phi}{\partial x_k} = \left(-\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\Big/\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)_{u=\Phi(x)},$$

и поэтому

$$f_1\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \ldots + f_n\frac{\partial\Phi}{\partial x_n} - g = 0. \blacksquare$$

Отметим, что при составлении вспомогательного уравнения (29.6) функцию g из правой части исходного уравнения (29.1) переносят в левую часть без изменения знака.

Пример 29.4. Для квазилинейного Ч-1 $(y + u)^2 u'_x - x(y + 2u)u'_y = xu$ соответствующие однородное линейное уравнение и характеристическая система имеют вид

$$(y+u)^2\frac{\partial w}{\partial x} - x(y+2u)\frac{\partial w}{\partial y} + xu\frac{\partial w}{\partial u} = 0, \quad \frac{dx}{(y+u)^2} = \frac{\partial y}{-x(y+2u)} = \frac{du}{xu}.$$

Интегрируемые комбинации $(y + u)\,du + (dy + du)\,u$ и $x dx + y dy - u du$ характеристической системы приводят к базису первых интегралов для этой системы $\psi_1 = (y + u)u$ и $\psi_2 = x^2 + y^2 - u^2$. Общий вид первого интеграла доставляет формула $\psi = H((y+u)u,\ x^2+y^2-u^2)$, где H — произвольная функция. Решения $u = u(x,\ y)$ можно получить из соотношения $H((y+u)u,\ x^2+y^2-u^2) = 0$.

29.7. НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Теорема 2. *Пусть* $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ — *базис интегралов характеристического векторного уравнения*

$$Dy = F(y) \tag{29.7}$$

для квазилинейного уравнения (29.1). Тогда решением $u = u(x)$ *уравнения (29.1) с начальным значением*

$$u|_{x_1=\xi} = \varphi(x_{\hat{1}}) := \varphi(x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n)$$

является функция, определяемая соотношением

$$U(\psi(x,\ u)) - \varphi(X_j(\psi(x,\ u))) = 0, \tag{29.8}$$

где функции $u = U(\gamma)$ и $x_j = X_j(\gamma)$, $\gamma \in R^n$, *находятся из векторного соотношения*

$$\psi(\xi,\ x_j,\ u) = \gamma. \tag{29.9}$$

◇ Аргумент $(x,\ u)$ входит в левую часть (29.8) только посредством интегралов ψ_k уравнения (29.7), поэтому функция $u = u(x)$, определяемая из (29.8), будет решением (29.1). Это решение обращает функциональное уравнение (29.8) в тождество, справедливое, в частности, при $x = \xi_1$:

$$U(\psi(\xi,\ x_j,\ u(\xi,\ x_j))) - \varphi(X_j(\psi(\xi,\ x_j,\ u(\xi,\ x_j)))) = 0$$

или на основании (29.9)

$$U(\gamma) - \varphi(X_j(\gamma)) = 0,$$

т. е. $u = (\xi,\ x_j) = \varphi(x_j)$. ■

Пример 29.5. Для уравнения примера 29.4 поставим начальное условие $u|_{y=0} = x^2$. Интегралами характеристической системы служат $(y+u)u$ и $x^2+y^2-u^2$, поэтому система (29.9) имеет вид $u^2 = \gamma_1$, $x^2-u^2 = \gamma_2$, откуда $u = \sqrt{\gamma_1}$, $x = \sqrt{\gamma_2+\gamma_1}$, что позволяет построить функциональное уравнение (29.8) в виде

$$\sqrt{(y+u)u} - ((y+u)u + x^2 + y^2 - u^2) = 0.$$

Следовательно, искомое решение $u = u(x,\ y)$ можно определить из квадратного соотношения

$$u^2 + uy = (uy + x^2 + y^2)^2.$$

Основные упражнения

29.1. Построить общее решение однородного линейного Ч-1 в задачах 1291, 1293, 1296 [1].

29.2. Решить начальные задачи 1290, 1292, 1294, 1295 [1].

29.3. Построить общее решение линейного или квазилинейного Ч-1 в задачах 1299, 1302, 1307 [1].

29.4. Решить начальные задачи 1300, 1304, 1306 [1].

Дополнительные упражнения

29.5. Построить общее решение в задачах 1298, 1307 [1].

29.6. Решить задачи 1211—1216 [3].

29.7. Пусть коэффициенты f и g из уравнения 29.4 непрерывно дифференцируемы и не обращаются одновременно в 0 в области $E \subset R^2$. Пусть пространственная линия $Л$ имеет своей проекцией на плоскость Oxy линию Г (как всегда, гладкую!), расположенную в E, не имеющую самопересечений и не касающуюся ни одной из характеристик K уравнения (29.4). Доказать, что если функция h задана и непрерывно дифференцируема в окрестности Г, то начальная задача с условием

$$u|_{(x,\ y)\in \Gamma} = h(x,\ y)$$

для уравнения (29.4) однозначно разрешима в некоторой окрестности линии $Л$ (теорема об однозначной разрешимости начальной задачи). При решении начальной задачи выяснить природу осложнений, возникающих при касании Г с характеристиками K. Перенести теорему об однозначной разрешимости начальной задачи на однородные линейные уравнения произвольной размерности и на квазилинейные уравнения.

29.8. Определить область G существования решения квазилинейного Ч-1

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

с начальным условием

$$u|_{x=0} = \sqrt{1-y}.$$

Исследовать поведение решения при приближении к границе G (см. книгу А. Н. Тихонова, А. Б. Васильевой, А. Г. Свешникова «Дифференциальные уравнения» (М.: Наука, 1980, с. 226—228)).

30. УРАВНЕНИЯ ПФАФФА

30.1. ДВУМЕРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЯ ПФАФФА

С уравнениями в частных производных 1-го порядка тесно связаны *уравнения Пфаффа*, которые при $n = 3$ имеют вид

$$P(x,\ y,\ z)\,dx + Q(x,\ y,\ z)\,dy + R(x,\ y,\ z)\,dz = 0. \qquad (30.1)$$

Уравнения (30.1) являются естественным обобщением обыкновенных уравнений в нормальной дифференциальной форме (см. гл. 10). Коэффициенты P, Q и R считаем заданными и достаточно гладкими в области $E \subset R^3$.

Интегралом уравнения (30.1) называют зависимость между x, y и z такую, что дифференциалы dx, dy и dz, вычисленные с учетом этой зависимости, обращают (30.1) в тождество на E. Указанная зависимость может иметь вид $u(x,\ y,\ z) = 0$ и тогда называется *двумерным интегралом или интегральной поверхностью* уравнения (30.1).

Для уравнения (30.1) можно ввести и понятие решения — *двумерное решение* $z = z(x,\ y)$, а для сохранения равноправия между аргументами — решение в параметрическом виде $x = x(t,\ s)$, $y = y(t,\ s)$, $z = z(t,\ s)$.

Задание уравнения Пфаффа (30.1) равносильно заданию векторного поля (i, j, k — координатные орты в $Qxyz$, $M = (x,\ y,\ z)$)

$$F(M) = P(M)i + Q(M)j + R(M)k.$$

Уравнение (30.1) в векторных обозначениях принимает вид ($r = xi + yj + zk$)

$$F \cdot dr = 0. \qquad (30.2$$

Если Π — интегральная поверхность (30.2), то $dr(M)$ параллелен нормали к Π в точке M и поэтому характеристики векторного поля F ортогонально пересекают поверхность Π, т. е. поверхность Π — нормальная трансверсаль поля F. Верно и обратное: каждая нормальная трансверсаль поля F является интегральной поверхностью уравнения (30.2).

Существует широкий круг прикладных задач, приводящих к уравнению Пфаффа, причем искомыми являются двумерные интегралы. Типичный пример: дано силовое поле $F(M)$, требуется найти потенциальную функцию $u = u(M)$.

30.2. ПОСТРОЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ УРАВНЕНИЯ ПФАФФА

Теорема 1. *Уравнение Пфаффа (30.1) обладает двумерными интегралами в области E только в случае, если выполнено условие интегрируемости*

$$R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)+P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)=0, \qquad (30.3)$$
$$\forall (x,\ y,\ z) \in E.$$

◇ Если $u(x,\ y,\ z) = 0$ определяет двумерный интеграл уравнения (30.1), то во всех точках соответственной интегральной поверхности векторы

$$\frac{\partial u}{\partial x}i+\frac{\partial u}{\partial y}j+\frac{\partial u}{\partial z}k \text{ и } Pi+Qj+Rk$$

параллельны. Следовательно, существует скалярная функция $\mu(M)$, для которой

$$P(M)=\mu(M)\frac{\partial u}{\partial x},\ Q(M)=\mu(M)\frac{\partial u}{\partial y},\ R(M)=\mu(M)\frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (30.4)$$

После дифференцирования двух первых соотношений получим

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{P}{\mu}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x};$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{Q}{\mu}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},$$

и поэтому на основании совпадения смешанных производных для $u(x,\ y,\ z)$

$$R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}PR-\frac{\partial \mu}{\partial x}QR\right).$$

Аналогично с помощью остальных пар соотношений из (30.4) находим:

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial z}QP-\frac{\partial \mu}{\partial y}RP\right);$$

$$Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}RQ-\frac{\partial \mu}{\partial z}PQ\right).$$

Складывая три последних тождества, приходим к условию интегрируемости (30.3). ■

Если $F=Pi+Qj+Rk$, то *ротором* F называют векторную функцию

$$\operatorname{rot} F=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)i+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)j+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)k.$$

Условие интегрируемости (30.3) равносильно тому, что

$$F\cdot\operatorname{rot} F=0,\ \forall\,(x,\ y,\ z)\in E.$$

Если

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0, \tag{30.5}$$

то условие интегрируемости заведомо выполнено и двумерным интегралом уравнения Пфаффа (30.1) служит криволинейный интеграл

$$u(x,\ y,\ z)=\int\limits_{(\xi,\eta,\varsigma)}^{(x,y,z)}P(\tau,\sigma,\rho)d\tau+Q(\tau,\sigma,\rho)d\sigma+R(\tau,\sigma,\rho)d\rho,$$

не зависящий в силу (30.5) от пути интегрирования в пространстве.

Пример 30.1. Для уравнения

$$(6x+yz)\,dx+(xz-2y)\,dy+(2z+xy)\,dz=0$$

условие (30.5) выполнено ($\operatorname{rot} F=0$), поэтому двумерными интегралами этого уравнения служат поверхности $u\,(x,\ y,\ z)$, где $u\,(x,\ y,\ z)=\int\limits_{(0,\,0,\,0)}^{(x,\,y,\,z)}(6\tau+\sigma)\,\rho\tau+$ $+d\tau+(\tau\rho-2\sigma)\,d\sigma+(2\rho+\tau\sigma)\,d\rho=3x^2-y^2+z^2+xyz.$

В общем случае из выполнения условия интегрируемости следует, что для дифференциальной формы $Pdx+Qdy+Rdz$ существует интегрирующий множитель $\mu=\mu(M)$. Выражение $\mu Pdx+$ $+\mu Qdy+\mu Rdz$ оказывается полным дифференциалом, а криволинейный интеграл

$$u(x,\ y,\ z)=\int\limits_{(\xi,\eta,\varsigma)}^{(x,y,z)}\mu(\tau,\ \sigma,\ \rho)\ P(\tau,\ \sigma,\ \rho)d\tau+\mu(\tau,\ \sigma,\ \rho)\ Q(\tau,\ \sigma,\ \rho)d\sigma+$$
$$+\mu(\tau,\ \sigma,\ \rho)\ R(\tau,\ \sigma,\ \rho)d\rho$$

дает двумерный интеграл уравнения (30.1).

30.3. ОДНОМЕРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЯ ПФАФФА

Интеграл уравнения Пфаффа может представлять собой более ограничительную зависимость между x, y, z, чем зависимость, выраженную двумерным интегралом, а именно: может иметь вид системы соотношений

$$u(x, y, z) = 0, \quad v(x, y, z) = 0$$

(или $x = x(t)$, $y = y(t)$, и $z = z(t)$). В таком случае говорят об *одномерном интеграле,* или *интегральной линии* уравнения (30.1).

Соотношение (30.2) показывает, что линия *Л* интегральная для (30.1), в том и только том случае, если *Л* — нормальная трансверсаль характеристик поля *F*.

30.4. ПОСТРОЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ УРАВНЕНИЯ ПФАФФА

Если выполнены условия интегрируемости (30.3) и *П* — интегральная поверхность (30.1), то любая линия *Л* на *П* будет интегральной для (30.1), так как *Л* (вместе с *П*) — нормальная трансверсаль характеристик поля *F*. Таким образом, если $u(x, y, z) = 0$ — двумерный интеграл уравнения (30.1), то при любой функции $v(x, y, z)$ (лишь бы система соотношений $u = 0$, $v = 0$ определяла линию в R^3) указанная система соотношений дает одномерный интеграл (30.1). Дальше выполнение условия (30.3) не предполагается.

Возьмем произвольную поверхность $П^*$ с уравнением $z = \omega(x, y)$. Вдоль интегральных кривых уравнения (30.1), расположенных на поверхности $П^*$, одновременно выполняется

$$P dx + Q dy + R dz = 0; \quad dz = \frac{\partial\omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\omega}{\partial y}dy; \quad z = \omega(x, y),$$

поэтому

$$\left(\left(P + R\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)dx + \left(Q + R\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)dy\right)\Big|_{z=\omega(x,y)} = 0. \tag{30.6}$$

Уравнение (30.6) представляет собой Д = 1 в нормальной дифференциальной форме (см. гл. 10). Если $\varphi(x, y) = 0$ — один из интегралов уравнения (30.6), то линия, определяемая соотношениями

$$\varphi(x, y) = 0, \quad z = \omega(x, y),$$

является интегральной для уравнения (30.1).

Пример 30.2. Для уравнения $z dx + (x - y) dy + zy dz = 0$ при $\omega(x, y) \equiv 0$ соответствующее уравнение (30.6) имеет вид $(x - y) dy = 0$, откуда $y = x$, а также $y = C$. Следовательно, интегральными кривыми рассматриваемого уравнения Пфаффа служат прямые $y = x$, $z = 0$ и прямые $y = C$, $z = 0$.

При выполнении условия (30.3) проведенное построение может быть использовано для разрешения начальной задачи для (30.1), т. е. для построения интегральной поверхности (30.1), проходящей через заданную точку (ξ, η, ς). В качестве Π выбираем, например, плоскость $z = \zeta$. Тогда уравнение (30.6) принимает вид

$$P(x, y, \zeta)dx + Q(x, y, \zeta)dy = 0.$$

Обозначим через $y = y(x)$ решение этого уравнения с начальным условием $y(\xi) = \eta$. Построим интегральные кривые K уравнения (30.1), расположенные в плоскости $x = \tau$ и проходящие через точку (τ, $y(\tau)$, ζ). Совокупность этих кривых составляет двумерное многообразие Π, являющееся интегральной поверхностью для уравнения (30.1) (рис. 32).

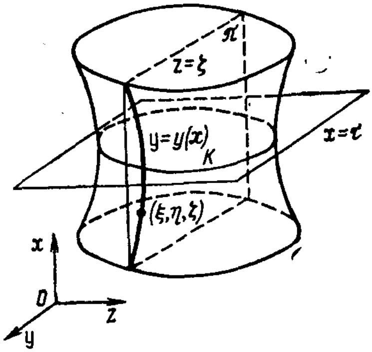

Рис. 32

Пример 30.3. Для уравнения $yzdx + xzdy + 2xydz = 0$ условие интегрируемости выполнено. Построим интегральную поверхность, проходящую через точку (1; 1; 1). Уравнение (30.6) принимает вид $ydx + xdy = 0$, и поэтому $xy = C = 1$, $y = 1/x$. В плоскости $x = \tau$ выполняется

$$\tau zdy + 2y\tau dz = 0 \Rightarrow yz^2 = C = 1/\tau.$$

Таким образом, $x = \tau$ и $yz^2 = 1/\tau$, поэтому искомый двумерный интеграл имеет вид $xyz^2 = 1$.

30.5. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ 1-ГО ПОРЯДКА

Нелинейные Ч-1 при $n = 2$ (только этим случаем и ограничимся) имеют вид

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \qquad (30.7)$$

Уравнение (30.7) каждой точке $M = (x, y, u) \in G \subset R^3$ сопоставляет плоскости (X, Y, U — координаты произвольной точки плоскости)

$$U - u = p(X - x) + q(Y - y), \qquad (30.8)$$

где

$$F(x,\ y,\ u,\ p,\ q) = 0. \tag{30.9}$$

При фиксированной точке M плоскости (30.8) образуют однопараметрическое семейство, так как коэффициенты p и q связаны соотношением (30.9). Огибающей этого семейства служит направляющий конус $T(M)$ (для квазилинейного Ч-1 этот конус вырождается в прямую).

Поверхность Π

$$u = u(x,\ y)$$

интегральная для (30.7) в том и только том случае, если в каждой точке $M \in \Pi$ касательная плоскость к Π касается вместе с тем и конуса $T(M)$ (рис. 33). Если поверхность C является оги-

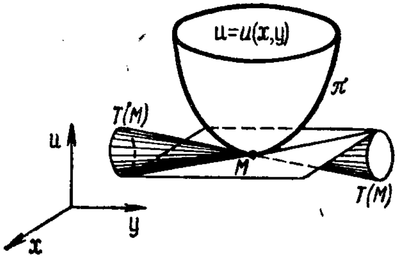

Рис. 33

бающей для семейства интегральных поверхностей уравнения (30.7), то она и сама является интегральной поверхностью (30.7), так как в каждой точке $M \in C$ касательная плоскость к C касается и конуса $T(M)$.

Допустим, что имеется семейство решений (30.7)

$$\Phi(x,\ y,\ u,\ \alpha,\ \beta) = 0,$$

зависящих от скалярных параметров α и β. Возьмем произвольную (гладкую!) функцию $\beta = \omega(\alpha)$. Огибающая семейства решений

$$\Phi(x,\ y,\ u,\ \alpha,\ \omega(\alpha)) = 0$$

определяется из системы соотношений

$$\Phi = 0 \text{ и } \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\,\omega'(\alpha) = 0.$$

Определяя из этих соотношений $\alpha = \alpha(x,\ y)$, получаем общее решение (30.7)

$$\Phi(x,\ y,\ \alpha(x,\ y),\ \omega(\alpha(x,\ y))) = 0,$$

т. е. решение, зависящее от произвольной функции. Кроме того, уравнение (30.7) может иметь и особое решение, которое получается исключением α и β из соотношений:

$$\Phi = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = 0.$$

Пример 30.4. Уравнение

$$u^2 \left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) = R^2$$

имеет семейство решений — сфер $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + u^2 = R^2$ радиуса R с центрами в точках плоскости $u = 0$. Выделим сферы с центрами на линии $y = \omega(x)$; $u = 0$. Огибающая выделенных сфер будет интегральной поверхностью данного уравнения. При всевозможных функциях $\omega(\alpha)$ получаем общее решение. Особыми решениями будут плоскости $u = \pm R$.

30.6. МЕТОД ЛАГРАНЖА

Для построения двупараметрического семейства решений (или полного интеграла) уравнения (30.7) используют метод Лагранжа. В основе этого метода лежит составление вспомогательной функции $v(x, y, u, p, q)$.

Теорема 2. *Пусть функция $v(x, y, u, p, q)$ — двумерный интеграл однородного линейного Ч-1 ($n = 5$)*

$$F'_p \frac{\partial v}{\partial x} + F'_q \frac{\partial v}{dy} + \left(pF'_p + qF'_q\right)\frac{\partial v}{\partial u} - \left(F'_x + pF'_u\right)\frac{\partial v}{\partial p} - \left(F'_y + qF'_u\right)\frac{\partial v}{\partial q} = 0. \tag{30.10}$$

Пусть функции $p = P(x, y, u, \alpha)$ и $q = Q(x, y, u, \alpha)$ — решения системы функциональных уравнений

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, u, p, q) &= 0 \\ v(x, y, u, p, q) &= \alpha. \end{aligned}\right\} \tag{30.11}$$

Тогда двумерный интеграл $\Phi(x, y, u, \alpha, \beta)$ уравнения Пфаффа

$$P(x, y, u, \alpha)dx + Q(x, y, u, \alpha)dy - du = 0 \tag{30.12}$$

будет полным интегралом уравнения (30.7).

◇ На основании правила дифференцирования сложной функции из соотношений (30.11) следует, что

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{D(F, v)}{D(p, x)}h; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{D(F, v)}{D(y, q)}h;$$
$$\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{D(F, v)}{D(u, q)}h; \quad \frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{D(F, v)}{D(p, u)}h,$$

где $h = (D(F, v)/D(p, q))^{-1}$. Подставляя эти выражения в условие интегрируемости уравнения Пфаффа (30.12)

$$P\frac{\partial Q}{\partial u}-Q\frac{\partial P}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0,$$

убеждаемся в том, что это условие выполняется тождественно, так как функция v — решение уравнения (30.10). Двумерный интеграл $\Phi=0$ уравнения (30.12) содержит дополнительную произвольную постоянную β. Функция $u=u(x, y, \alpha, \beta)$, определяемая из соотношения $\Phi=0$, обращает в тождество уравнение (30.12). Следовательно,

$$p=\frac{\partial u}{\partial x}=P(x, y, u, \alpha), \quad q=\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x, y, u, \alpha),$$

и поэтому

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\equiv 0,$$

т. е. $u=u(x, y, \alpha, \beta)$ — решение, а $\Phi(x, y, u, \alpha, \beta)$ — полный интеграл уравнения (30.7). ■

Пример 30.5. Для уравнения $u=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$ выражение $F'_x+pF'_u$ тождественно равно 0, поэтому соответствующее уравнение (30.10) имеет интеграл $p=\alpha$. Функции P и Q определяем из соотношений:

$$P=\alpha, \quad Q=\frac{u-\alpha x}{y+\alpha}.$$

Интегрируя соответствующее уравнение (30.12), находим, что в данном случае $u=\alpha x+\beta y+\alpha\beta$.

Основные упражнения

30.1. Решить уравнения Пфаффа в задачах 1312—1314, 1334 [1].

30.2. С помощью метода Лагранжа найти полные интегралы нелинейных Ч-1 в задачах 1315—1317, 1335 [1].

Дополнительные упражнения

30.3. Система двух Ч-1 имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f(x, y, u),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=g(x, y, u).$$

Пусть f и g непрерывно дифференцируемы в окрестности точки (ξ, η, ζ). Доказать, что для существования у данной системы около (ξ, η, ζ) семейства решений, зависящих от произвольной постоянной, необходимо и достаточно выполнение условия полной интегрируемости системы

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}g=\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial u}f$$

в некоторой окрестности (ξ, η, ζ). При выполнении условия полной интегрируемости построить решение системы по схеме, использованной в гл. 10 для УПД.

30.4. Решить системы 1308—1311 [1].

30.5. Установить связь между системами Ч-1 и уравнениями Пфаффа.

30.6. Показать, что выполнение условия интегрируемости уравнения Пфаффа при $n = 3$ равносильно полной интегрируемости соответствующей системы Ч-1.

30.7. *Характеристиками* нелинейного Ч-1

$$F\left(x,\ y,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

с функцией $F(x,\ y,\ p,\ q)$, дважды непрерывно дифференцируемой в окрестности точки $(\xi,\ \eta,\ \pi,\ \varkappa)$, причем $\left(F_p'\right)^2 + \left(F_q'\right)^2 \neq 0$, называют фазовые графики системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial p}, & \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial q}, \\ \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial x}, & \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial y}. \end{cases}$$

Показать, что если $u = u(x,\ y)$ — решение данного Ч-1, то вдоль характеристик выполняется

$$\frac{du}{dt} = p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}.$$

Использовать полученный результат для построения решений Ч-1 (см. книгу М. В. Федорюка «Обыкновенные дифференциальные уравнения» (М.: Наука, 1980, с. 267 — 272)).

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Задачники

1. *Матвеев Н. М.* Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — 5-е изд. — Мн.: Выш. школа, 1977. — 414 с.
2. *Пономарев К. К.* Составление дифференциальных уравнений. — Мн.: Выш. школа, 1973. — 560 с.
3. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — 5-е изд. — М.: Наука, 1979. — 128 с.

Учебники

Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. — 4-е изд. — Мн.: Выш. школа, 1974. — 766 с.

Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — 4-е изд.— М.: Наука, 1974. — 332 с.

Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. — 7-е изд. — М.: Физматгиз, 1958. — 468 с.

Эльсгольц Л. С. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — 3-е изд. — М.: Наука, 1969. — 424 с.

Справочники

Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— 5-е изд. — М.: Наука, 1966. — 576 с.

Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. — М.: Наука, 1966. — 260 с.

Дополнительные пособия

Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 224 с.

Богданов Ю. С. Лекции по дифференциальным уравнениям. — Мн.: Выш. школа, 1977. — 240 с.

Гюнтер Н. М. Интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных. — М. — Л.: ОНТИ — ГТТИ, 1934. — 300 с.

Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. — 3-е изд. — Мн.: Наука и техника., 1979 — 743 с.

Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин, И. З. Штокало, П. С. Бондаренко и др. — Киев: Вища школа, 1974. — 472 с.

Курант Р. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964. — 830 с.

Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — 6-е изд. — М.: Наука, 1970. — 280 с.

Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике. — М.: Наука, 1978. — 687 с.

Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: ИЛ. — 1953. — Т. 1 — 347 с.; 1954. — Т. 2. — 415 с.

Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980. — 231 с.

Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980—350 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

V. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕКТОРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

VI. ГОЛОМОРФНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Юрий Станиславович Богданов,
Юрий Борисович Сыроид

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редактор *Н. М. Латышева*
Обложка *В. А. Ягдарова*
Худож. редактор *Ю. С. Сергачев*
Техн. редактор *Г. М. Романчук*
Корректор *В. В. Неверко*

ИБ № 1231

Сдано в набор 25.09.82. Подписано в печать 4.05.83. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага типогр. № 2. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 15. Усл. кр.-отт. 15,375. Уч.-изд. л. 15,58. Тираж 7500 экз. Тип. зак. 3054.
Цена 70 к.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220048, Минск, проспект Машерова, 11.

Минский ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат МППО им. Я. Коласа. 220005, Минск, Красная, 23.