

Л. С. АТАНАСЯН
Г. Б. ГУРЕВИЧ

ГЕОМЕТРИЯ

ЧАСТЬ 2

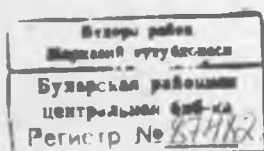
Л. С. АТАНАСЯН, Г. Б. ГУРЕВИЧ

ГЕОМЕТРИЯ

Часть II

Допущено Министерством просвещения СССР
в качестве учебного пособия
для студентов
физико-математических факультетов
пединститутов

МОСКВА, «ПРОСВЕЩЕНИЕ», 1976



А92 Атанасян Л. С. и Гуревич Г. Б.
Геометрия. Ч. II. Учеб. пособие для студентов
физ.-мат. фак. пед. ин-тов. М., «Просвещение». 1976.
447 с. с ил.

Книга является второй, заключительной частью учебного пособия проф. Л. С. Атанасяна по геометрии для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов. В четырех разделах пособия излагаются также вопросы программы, как проективная геометрии, теории построения на плоскости и методы изображений, основания геометрии, элементы дифференциальной геометрии и топологии.

60602—744
А 103 (03) —76 79—78

513

© Издательство «Просвещение», 1976 г.

Глава I

ПОНЯТИЕ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА*

§ 1. Проективное пространство

Проективная геометрия возникла в первой половине XIX века. Ее возникновение связано с именем известного французского математика Понселе (1788—1867). Серьезный вклад в эту ветвь математики внесли также Шаль (1793—1880) и Штейнер (1796—1863).

Проективная геометрия своим происхождением обязана потребностям графики и архитектуры. По существу, следующая практическая задача, которой впервые занимался еще Леонардо да Винчи (1452—1519), явилась источником возникновения этой ветви математики: изобразить на плоскости, данный трехмерный объект так, чтобы различные части изображения в совокупности представились нам в таком виде, как и соответствующие им части объекта. В начале своего возникновения проективная геометрия имела довольно ограниченную область приложений, связанную, главным образом, с теорией проектирования фигур в евклидовом пространстве. Однако по мере накопления фактов эта ветвь геометрии постепенно освобождалась от метрических понятий и превратилась в самостоятельную дисциплину, изучающую свойства взаимного расположения геометрических фигур. При этом существенную роль сыграли работы Штаудта (1798—1867). В конце XIX века исследования по основаниям геометрии объединились с исследованиями по проективной геометрии, и в рамках последней возникла глубокая теория, включающая в единую схему геометрии Евклида, Лобачевского и Римана.

1. **Предмет проективной геометрии.** Известно, что каждая геометрическая дисциплина может быть определена как наука, изучающая свойства фигур, которые остаются неизменными при всех преобразованиях некоторой группы (см. I, § 31, п. 4)¹.

Проективная геометрия легко укладывается в эту общую «групповую» схему. Более того, как было отмечено выше, она позволяет различные «элементарные» геометрии включить в единую стройную систему. Однако для этого оказывается необходимым построить новое, так называемое проективное пространство, отличное от евклидова пространства, и определить в этом пространстве проективные преобразова-

¹ Здесь и в дальнейшем для сокращения записей ссылки на соответствующие параграфы книги [6] будут отмечены цифрой I.

ния. Для построения проективного пространства мы будем пользоваться аксиоматическим методом, при этом аксиоматика, избранная нами, носит алгебраический характер и основана на понятии векторных пространств. Это позволит широко использовать векторный аппарат и значительно упростить изложение.

2. Аксиомы проективного пространства. Пусть V_4 — четырехмерное линейное векторное пространство¹. Введем понятие трехмерного проективного пространства P_3 , связанного с пространством V_4 . Основными объектами пространства P_3 считаются точки (обозначение $A, B, \dots$). Мы считаем, что между точками пространства P_3 и ненулевыми векторами пространства V_4 существует определенное соотношение, которое выражается словом *инцидентность* и обозначается значком $\propto$. Так, например, предложение «вектор a инцидентен точке A » (или, что то же самое, «точка A инцидентна вектору a ») записывается так: $a \propto A$ ($A \propto a$). Сформулируем аксиомы, определяющие свойства вновь введенных понятий.

P1. Каков бы ни был ненулевой вектор a пространства V_4 , существует по крайней мере одна точка A такая, что $a \propto A$.

P2. Какова бы ни была точка A , существует по крайней мере один ненулевой вектор $a \in V_4$, удовлетворяющий условию $a \propto A$.

P3. Пусть $a \propto A$ и $b \propto B$. Если векторы a и b не коллинеарны, то точки A и B не совпадают.

P4. Пусть $a \propto A$ и $b \propto B$. Если точки A и B не совпадают, то векторы a и b не коллинеарны.

Совокупность всех точек, которые вместе с векторами четырехмерного пространства V_4 удовлетворяют аксиомам P1 — P4, называется *трехмерным проективным пространством*, связанным с векторным пространством V_4 , или просто *проективным пространством* P_3 .

Обращаем внимание читателя на следующее существенное отличие определения аффинного пространства, данного в книге [6] (см. I, § 66, п. 1), от сформулированного выше определения проективного пространства. При определении аффинного пространства к числу основных объектов пространства мы отнесли и векторы и точки. Здесь же векторы играют вспомогательную роль, они не фигурируют как объекты проективного пространства. В проективной геометрии геометрический смысл будут иметь только те предложения, в формулировку которых не входит понятие вектора².

Рассмотрим несколько предложений, которые непосредственно следуют из только что сформулированных аксиом.

1°. Если $a \propto A$, $b \propto B$ и векторы a и b коллинеарны, то точки A и B совпадают.

¹ Основы теории линейных векторных пространств изложены в I, § 65. V_4 — четырехмерное линейное векторное пространство, т. е. пространство R_n (см. I, § 65, с. 418) при $n = 4$.

² Отсюда, конечно, не следует, что при доказательстве этих предложений мы не можем пользоваться векторами. Важно, чтобы окончательная формулировка предложения была дана без понятия вектора.

Это предложение непосредственно следует из аксиомы P4.

2°. Если a — ненулевой вектор, то существует одна и только одна точка A такая, что $a \propto A$.

Существование точки A следует из аксиомы P1, а единственность — из предыдущего свойства.

3°. Множество всех векторов, инцидентных одной и той же точке A , образует множество всех ненулевых векторов некоторого одномерного векторного подпространства.

В самом деле, пусть A — произвольная точка. Согласно аксиоме P2 существует ненулевой вектор a , удовлетворяющий условию $a \propto A$. Пусть $\mathfrak{M}_1$ — одномерное векторное подпространство, натянутое на вектор a , а b — произвольный ненулевой вектор этого подпространства. Тогда a и b коллинеарны, поэтому согласно аксиоме P1 и свойству 1° $b \propto A$. Обратно, пусть c — некоторый вектор, инцидентный точке A . Так как $a \propto A$, $c \propto A$, то из аксиомы P3 следует, что векторы a и c коллинеарны, поэтому $c \in \mathfrak{M}_1$. ■

Если $\mathfrak{M}_1$ — одномерное подпространство, которому принадлежат все векторы, инцидентные точке A , то будем говорить, что точка A связана с подпространством $\mathfrak{M}_1$.

4°. Если $\mathfrak{M}_1$ — произвольное одномерное подпространство пространства V_4 , то существует такая точка, которая связана с подпространством $\mathfrak{M}_1$.

Это свойство следует из аксиомы P1 и предыдущего свойства.

Мы приходим к выводу, что каждая точка проективного пространства связана с некоторым одномерным подпространством пространства V_4 , причем разные точки связаны с разными подпространствами. Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между точками проективного пространства и одномерными векторными подпространствами пространства V_4 .

В дальнейшем изложении подпространства, с которыми связаны точки $A, B, C, \dots$ будем обозначать через $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots$

Из свойств 3° и 4° получаем:

5°. В проективном пространстве существует бесконечное множество точек.

3. Линейная зависимость точек. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_k$ — система точек пространства P_3 , а $a_1, a_2, \dots, a_k$ — некоторые векторы, инцидентные соответственно точкам $A_1, A_2, \dots, A_k$. Будем говорить, что система точек $A_1, A_2, \dots, A_k$ линейно зависима (независима), если линейно зависима (независима) система векторов $a_1, a_2, \dots, a_k$. Предлагаем читателю показать, что это определение не зависит от выбора векторов, инцидентных точкам $A_1, A_2, \dots, A_k$.

Легко видеть, что из свойств линейной зависимости векторов пространства V_4 непосредственно следует, что если система точек линейно независима, то эти точки различны¹, и любая часть этой системы линейно независима.

¹ Здесь и в дальнейшем будем говорить, что точки $A_1, A_2, \dots, A_k$ различны, если любые две точки этой системы не совпадают.

Совокупность четырех линейно независимых точек проективного пространства P_3 называется с и м п л е к с о м. Легко показать, что в проективном пространстве P_3 всегда существует хотя бы один симплекс и что любая система, состоящая более чем из четырех точек, линейно зависима. Далее, если система $A_1, A_2, \dots, A_k$ линейно независима и $k < 4$, то ее всегда можно дополнить до симплекса.

§ 2. Прямая и плоскость; свойства принадлежности

1. Прямая проективного пространства. Пусть $\mathfrak{M}_2$ — некоторое двумерное подпространство векторного пространства V_4 . Множество всех точек пространства P_3 , каждая из которых инцидентна по крайней мере одному ненулевому вектору подпространства $\mathfrak{M}_2$, называется п р я м о й, связанной с подпространством $\mathfrak{M}_2$. Точки этого множества называются точками прямой. Символическую запись $A \in l$ будем выражать следующими предложениями: «точка A принадлежит прямой l », «точка A лежит на прямой l », «прямая l проходит через точку A ». В дальнейшем изложении подпространства, с которыми связаны прямые $l, m, n, \dots$, обозначаются через $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}, \dots$. Точки, лежащие на одной прямой, называются к о л л и н е а р н ы м и.

Теорема [2.1]. Пусть A и l — произвольные точка и прямая, связанные соответственно с подпространствами $\bar{A}$ и $\bar{l}$. Для того чтобы $A \in l$, необходимо и достаточно, чтобы $\bar{A} \subset \bar{l}$.

Доказательство. Пусть $A \in l$, тогда по определению $\exists a (a \in \bar{A}, a \in \bar{l})$. Из условия $a \in \bar{l}$ следует, что $\lambda a \in \bar{l}$, где λ — любое число. Но подпространство, определяемое вектором a , есть $\bar{A}$, поэтому $\bar{A} \subset \bar{l}$. Обратно, пусть A связана с подпространством $\bar{A}$ и $\bar{A} \subset \bar{l}$. Докажем, что $A \in l$. Если a — некоторый ненулевой вектор подпространства $\bar{A}$, то $a \in \bar{l}$ и в силу свойства 1.2.3 имеем: $a \in l$. Отсюда по определению следует, что $A \in l$.

2. Плоскость проективного пространства. Понятие плоскости проективного пространства вводится по аналогии с понятием прямой.

Пусть $\mathfrak{M}_3$ — некоторое трехмерное подпространство пространства V_4 . Множество Π всех точек пространства P_3 , каждая из которых инцидентна по крайней мере одному ненулевому вектору подпространства $\mathfrak{M}_3$, называется п л о с к о с т ь ю, связанной с подпространством $\mathfrak{M}_3$. Точки этого множества называются т о ч к а м и п л о с к о с т и. Так же как и в случае прямой, подпространство $\mathfrak{M}_3$ в дальнейшем обозначается через $\bar{\Pi}$.

Если каждая точка прямой l принадлежит плоскости Π , то будем говорить, что прямая l лежит в плоскости Π , или плоскость Π проходит через прямую l . Символически это соотношение будем обозначать так: $l \subset \Pi$.

¹ Запись 1.2.3 обозначает, что ссылка сделана на свойство 3°, п. 2, § 1. В дальнейшем для ссылок на те или иные предложения, отмеченные в тексте через 1°, 2° и т. д., будем применять аналогичную запись.

Имеет место следующая важная теорема, доказательство которой совершенно аналогично доказательству теоремы [2.1].

Теорема [2.2]. Пусть A, l и Π — произвольные точка, прямая и плоскость, связанные соответственно с $\bar{A}, \bar{l}$ и $\bar{\Pi}$.

а) Для того чтобы $A \in \Pi$, необходимо и достаточно, чтобы $\bar{A} \subset \bar{\Pi}$.

б) Для того чтобы $l \subset \Pi$, необходимо и достаточно, чтобы $\bar{l} \subset \bar{\Pi}$. Мы показали, что существует взаимно однозначное соответствие между точками, прямыми и плоскостями проективного пространства P_3 и одномерными, двумерными и трехмерными подпространствами векторного пространства V_4 .

Теоремы [2.1] и [2.2] показывают, что при этом соответствии сохраняется соотношение принадлежности, т. е. если, например, точке A соответствует $\bar{A}$, прямой l соответствует $\bar{l}$ и $A \in l$, то $\bar{A} \in \bar{l}$. В этом случае говорят, что соответствие является изоморфизмом.

3. Прямые и плоскости, как одномерные и двумерные проективные пространства. Если в определении проективного пространства, данного в п. 2, § 1, изменить размерность векторного пространства, с которым связано проективное пространство, оставив без изменения все аксиомы $P1 - P4$, то мы придем к понятию проективного пространства различных размерностей. В частности, совокупность всех точек, которые вместе с векторами трехмерного пространства V_3 удовлетворяют аксиомам $P1 - P4$, называется двумерным проективным пространством P_2 , связанным с векторным пространством V_3 . Аналогично вводится понятие одномерного проективного пространства.

Имеет место следующая важная теорема:

Теорема [2.3]. Произвольная плоскость Π пространства P_3 является двумерным проективным пространством, связанным с $\bar{\Pi}$, если $\bar{\Pi}$ рассматривать как самостоятельное трехмерное векторное пространство, точки плоскости Π — как точки этого пространства, а соотношение инцидентности точки и вектора сохранить без изменения.

Доказательство этой теоремы весьма просто: оно сводится к проверке выполнения аксиом $P1 - P4$ для множества точек плоскости Π и векторов подпространства $\bar{\Pi}$. Выполнение аксиом $P3$ и $P4$ очевидно; утверждение аксиомы $P2$ следует из определения плоскости, а $P1$ проверяется непосредственно.

Теорема [2.3] в нашем курсе играет особо важную роль, так как этот курс, по существу, посвящен геометрии двумерного проективного пространства. Из вышесказанного следует, что двумерное проективное пространство может рассматриваться, с одной стороны, как плоскость трехмерного проективного пространства, а с другой стороны — как самостоятельное двумерное пространство.

4. Свойства принадлежности прямых и плоскостей. Рассмотрим основные свойства принадлежности точек, прямых и плоскостей проективного пространства.

1°. Каковы бы ни были две различные точки A и B , существует одна и только одна прямая l , проходящая через эти точки.

Согласно аксиоме P2, $\exists a (a \in A)$ и $\exists b (b \in B)$. Так как точки A и B не совпадают, то согласно аксиоме P4 a и b не коллинеарны. Рассмотрим подпространство $\{a, b\}$ и прямую l , связанную с этим подпространством. По определению прямой имеем: $A \in l, B \in l$.

Теперь покажем, что l — единственная прямая, проходящая через A и B . Пусть m — произвольная прямая, проходящая через A и B . Тогда из теоремы [2.1] следует, что $a \in m, b \in m$, поэтому m совпадает с $\{a, b\}$. Отсюда следует, что l и m совпадают.

В дальнейшем прямую, соединяющую различные точки A и B , будем обозначать через AB .

2°. На прямой существует бесконечное множество точек. Если система точек $A_1, A_2, \dots, A_k$ принадлежит прямой и $k > 2$, то она линейно зависима.

Пусть l — данная прямая, e_1, e_2 — базис подпространства $\bar{l}$. Бесконечная система векторов подпространства $\bar{l}$:

$$e_1 + e_2, e_1 + 2e_2, \dots, e_1 + pe_2, \dots \quad (1)$$

обладает тем свойством, что любые два вектора этой системы линейно независимы. Рассмотрим точки $A_1, A_2, \dots, A_k$, соответственно инцидентные векторам системы (1). Очевидно, они лежат на прямой l . Согласно аксиоме P3 точки этой системы попарно не совпадают.

Вторая часть утверждения следует из того, что в подпространстве $\bar{l}$ любая система, состоящая более чем из двух векторов, линейно зависима. Отсюда непосредственно следует:

3°. Три линейно независимые точки не лежат на одной прямой.

Далее сформулируем ряд дальнейших свойств, доказательства которых предоставляем читателю.

4°. Каковы бы ни были три линейно независимые точки A, B, C , существует одна и только одна плоскость, проходящая через них. □

5°. Если различные точки A и B лежат в плоскости Π , то прямая l , определяемая этими точками, лежит в плоскости Π . □

6°. Через две различные пересекающиеся прямые проходит одна и только одна плоскость. □

7°. Каждой плоскости принадлежит по крайней мере одна система, состоящая из трех линейно независимых точек. □

8°. На каждой плоскости существует бесконечное множество точек. Если система точек $A_1, A_2, \dots, A_k$ принадлежит плоскости и $k > 3$, то она линейно зависима. □

Теперь докажем следующее основное свойство.

9°. Любые две различные прямые, расположенные в одной и той же плоскости, пересекаются, т. е. имеют единственную общую точку.

Пусть l_1 и l_2 — данные прямые. По условию имеем: $l_1 \subset \Pi, l_2 \subset \Pi$. Из теоремы [2.2] следует, что $\bar{l}_1 \subset \bar{\Pi}, \bar{l}_2 \subset \bar{\Pi}$.

Так как $\bar{l}_1$ и $\bar{l}_2$ — различные двумерные подпространства, а $\bar{\Pi}$ — трехмерное подпространство, то из предыдущих соотношений следует, что $\bar{\Pi}$ есть сумма подпространств $\bar{l}_1$ и $\bar{l}_2$. Из теоремы I [65.6] о размер-

ностях суммы и пересечения двух векторных подпространств мы приходим к выводу, что $\bar{l}_1 \cap \bar{l}_2$ есть одномерное подпространство $\mathfrak{M}_1$. Пусть A — точка, связанная с этим подпространством. Так как $\mathfrak{M}_1 \subset \bar{l}_1$ и $\mathfrak{M}_1 \subset \bar{l}_2$, то по теореме [2.1] имеем: $A \in l_1$ и $A \in l_2$. Таким образом, прямые l_1 и l_2 имеют общую точку. Из свойства 1° следует, что эта точка единственная. ■

10°. Две различные плоскости имеют общие точки, причем множество всех общих точек этих плоскостей образует прямую. □

Доказательство существования прямой, принадлежащей данным плоскостям, проводится в точной аналогии с предыдущим, а доказательство второй части предложения можно провести от противного, используя свойство 4°.

В заключение сформулируем еще три предложения, доказательства которых предлагаем провести читателю самостоятельно.

11°. Плоскость и не лежащая в ней прямая всегда имеют одну и только одну общую точку. □

12°. Три различные плоскости имеют по крайней мере одну общую точку. Множество общих точек этих плоскостей есть либо прямая, либо одна-единственная точка. □

13°. Если три прямые a, b и c попарно пересекаются и не лежат в одной плоскости, то они пересекаются в одной точке. □

Из свойств 8°—11° следует весьма важный вывод: в проективном пространстве нет понятия параллельности двух прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей. В этом проявляется одно из существенных отличий проективного пространства от евклидова.

5. Пересечение и соединение линейных геометрических образов. В дальнейшем изложении в ряде случаев прямые и плоскости наряду с точками рассматриваются как основные геометрические образы. Эта точка зрения вполне согласуется с теоретико-множественной концепцией, принятой нами при изложении проективной геометрии, так как прямые и плоскости как множества точек могут быть рассмотрены и как самостоятельные объекты¹.

Легко видеть, что каковы бы ни были два основных образа Ω_1 и Ω_2 (точка, прямая или плоскость), пересечение $\Omega_1 \cap \Omega_2$ является основным образом, если $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. Будем говорить, что Ω_1 и Ω_2 пересекаются, если $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ и $\Omega_1 \not\subset \Omega_2$ и $\Omega_2 \not\subset \Omega_1$. Далее, введем следующий термин. Соединением основных образов Ω_1 и Ω_2 будем называть основной образ Ω , удовлетворяющий условиям: а) $\Omega_1 \subset \Omega$ и $\Omega_2 \subset \Omega$; б) $\Omega \subset \Omega'$, где Ω' — любой основной образ, содержащий Ω_1 и Ω_2 (обозначение: $\Omega_1 \cup \Omega_2$). Например, если $A \neq B$, то AB есть прямая AB , а если $A \in l$, то Al — плоскость, содержащая A и l .

¹ Здесь мы встречаемся с недостатком установившейся терминологии. Этим соглашением, строго говоря, вводится другое понимание терминов «прямая» и «плоскость». Для обозначения прямых и плоскостей в исходном понимании, т. е. как множества точек, мы будем соответствующие символы заключать в круглые скобки: (l) , (m) и т. д., а в новом понимании символы $l, m, p, \dots$ будем употреблять без скобок.

6. Геометрические фигуры. Геометрической фигурой пространства P_3 назовем любое непустое множество, элементами которого являются точки, прямые или плоскости. При этом мы никаких ограничений на множество не накладываем, оно может быть конечным или бесконечным, а также целиком состоять из одних точек, или из точек и прямых.

Рассмотрим примеры фигур, которые часто встречаются в проективной геометрии.

1°. Связка прямых. Связкой прямых с центром в некоторой фиксированной точке O называется множество всех прямых пространства, проходящих через эту точку (обозначение: $\{O\}_1$).

2°. Связка плоскостей. Связкой плоскостей с центром в некоторой фиксированной точке O называется совокупность всех плоскостей пространства, проходящих через эту точку (обозначение: $\{O\}_2$).

3°. Связка прямых и плоскостей. Связкой прямых и плоскостей с центром в некоторой точке O называется множество всех прямых и плоскостей пространства, проходящих через эту точку (обозначение: $\{O\}_{1,2}$).

4°. Плоское поле точек и прямых. Так называется множество всех точек и прямых, принадлежащих данной плоскости Π (обозначение: Π).

5°. Пучок плоскостей. Пусть l — данная прямая. Пучком плоскостей с осью l называется множество всех плоскостей пространства, проходящих через эту прямую¹ (обозначение: $\{l\}_2$).

6°. Пучок прямых. Пучком прямых с центром в точке O и плоскостью Π , где $O \in \Pi$, называется множество всех прямых, принадлежащих плоскости Π и проходящих через точку O (обозначение: $\{O\}_1$ или $\{O\}_\Pi$, если известна плоскость пучка).

7°. Трехвершинник. Фигура, образованная неколлинеарными точками A, B, C и прямыми AB, BC и CA , называется трехвершинником. Точки A, B и C называются вершинами, а прямые AB, BC и CA — сторонами этого трехвершинника.

§ 3. Принцип двойственности

В настоящем параграфе дано обоснование двух фундаментальных принципов проективной геометрии — принципа двойственности в проективном пространстве и принципа двойственности на проективной плоскости.

1. Двойственные предложения в проективном пространстве. Анализ предложений, сформулированных в п. 4, § 2, показывает, что эти предложения обладают следующей замечательной особенностью: если в каждом из этих предложений слова «точка», «прямая», «плоскость» заменить соответственно словами «плоскость», «прямая», «точка», а

¹ В проективном пространстве отпадает необходимость рассматривать собственные и несобственные пучки и связки (см. I, § 48), так как здесь нет понятия параллельности прямых, прямой и плоскости и двух плоскостей.

отношения принадлежности между ними сохранить без изменения¹, то получим снова истинное предложение. Впредь такие два предложения будем называть двойственными. Для того чтобы разъяснить эту мысль, выпишем некоторые из предложений, сформулированных в п. 4, § 2, на левой стороне страницы; справа, рядом с каждым из этих предложений, запишем предложение, двойственное данному. В скобках укажем номер, с которым совпадает двойственное предложение.

1°. Каковы бы ни были две различные точки A_1 и A_2 , существует одна и только одна прямая l , принадлежащая этим точкам.

4°. Каковы бы ни были три точки A_1, A_2, A_3 , не принадлежащие одной прямой, существует одна и только одна плоскость, принадлежащая этим точкам.

5°. Если различные точки A_1 и A_2 принадлежат плоскости Π , то прямая l , определяемая этими точками, принадлежит плоскости Π .

1. Каковы бы ни были две различные плоскости Π_1 и Π_2 , существует одна и только одна прямая l , принадлежащая этим плоскостям. (Свойство 10°.)

4. Каковы бы ни были три плоскости Π_1, Π_2 и Π_3 , не принадлежащие одной прямой, существует одна и только одна точка, принадлежащая этим плоскостям. (Легко вытекает из свойства 12°.)

5. Если различные плоскости Π_1 и Π_2 принадлежат точке A , то прямая l , определяемая этими плоскостями, принадлежит точке A (вторая часть свойства 10°).

Сформулированное выше положение, которое мы только что проиллюстрировали примерами, является проявлением весьма глубокого свойства проективного пространства, которое называется принципом двойственности в пространстве. Для обоснования этого принципа нам необходимо предварительно рассмотреть специальный класс преобразований точек и плоскостей проективного пространства, называемых корреляциями.

2. Понятие корреляции в пространстве. Корреляцией в пространстве P_3 называется всякое взаимно однозначное отображение κ , которое переводит точки в плоскости, а плоскости в точки и сохраняет принадлежность соответствующих элементов. Сохранение принадлежности означает, что если $\Pi'_1 = \kappa(A_1)$, $A'_2 = \kappa(\Pi_2)$, то $A'_2 \in \Pi'_1$ тогда и только тогда, когда $A_1 \in \Pi_2$.

Важно подчеркнуть, что рассматриваемое отображение является взаимно однозначным, т. е. каждая плоскость является образом одной и только одной точки и каждая точка является образом одной и только одной плоскости. Рассмотрим два свойства корреляций. Условимся

¹ При этом в ряде случаев возможно придется изменить словесную формулировку, выражающую то или иное отношение принадлежности. Например, предложение «Точка лежит на плоскости» следует сначала сформулировать так: «Точка принадлежит плоскости».

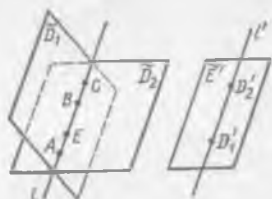


Рис. 1.

при изучении свойств корреляций плоскости обозначать следующим образом: $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots$, причем образ и прообраз будем обозначать одной буквой, например $\bar{A}' = \kappa(A), \bar{B}' = \kappa(\bar{B})$.

1°. При корреляции множество всех точек прямой l переходит в пучок плоскостей.

Пусть κ — данная корреляция. Сначала покажем, что если $A \in l, B \in l$

и $C \in l$, то плоскости $\bar{A}' = \kappa(A), \bar{B}' = \kappa(B), \bar{C}' = \kappa(C)$ проходят через некоторую прямую. Возьмем две произвольные различные плоскости $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_2$, проходящие через прямую l , и рассмотрим их образы D_1' и D_2' . Пусть $l' = D_1' \cap D_2'$. Покажем, что плоскости $\bar{A}', \bar{B}'$ и $\bar{C}'$ содержат l' (рис. 1; плоскости $\bar{A}', \bar{B}'$ и $\bar{C}'$ на этом рисунке не обозначены). Так как $A \in \bar{D}_1, B \in \bar{D}_1$ и $C \in \bar{D}_1$, то по определению корреляции имеем: $D_1' \in \bar{A}', D_1' \in \bar{B}', D_1' \in \bar{C}'$. Аналогично можно показать, что плоскости $\bar{A}', \bar{B}', \bar{C}'$ содержат точку D_2' . Согласно 2.4.5 они содержат прямую l' .

Из приведенных выше рассуждений следует, что каждая точка прямой l переходит в плоскость, проходящую через l' . Остается показать, что прообраз E любой плоскости E' , проходящей через l' , лежит на прямой l (рис. 1). Так как $D_1' \in E'$ и $D_2' \in E'$, то $E \in \bar{D}_1$ и $E \in \bar{D}_2$, т. е. $E \in l$. ■

2°. Если при корреляции κ множество всех точек прямой (l) переходит в пучок $\{l'\}$ с осью l' , то пучок $\{l\}$ с осью l переходит в множество всех точек прямой (l') .

В самом деле, пусть $\bar{A}$ — произвольная плоскость пучка $\{l\}$, а A' — образ этой плоскости. Так как все точки прямой (l) лежат в плоскости $\bar{A}$, то A' должна принадлежать образам всех точек прямой (l) . Но эти образы образуют пучок $\{l'\}$, поэтому $A' \in l'$.

Далее, пусть E' — произвольная точка прямой l' , а $\bar{E}$ — прообраз этой точки. Так как все плоскости пучка $\{l'\}$ проходят через E' , то $\bar{E}$ должна содержать прообразы всех плоскостей пучка $\{l'\}$, т. е. точки прямой l . Таким образом, $l \subset \bar{E}$. ■

Доказанные два свойства показывают, что каждая корреляция индуцирует в пространстве некоторое взаимно однозначное соответствие прямых, а именно, каждой прямой можно поставить в соответствие ось пучка, в который переходят точки прямой.

Из предыдущего изложения еще не следует, что в проективном пространстве существует корреляция. Имеет место предложение.

Лемма [3.1]. В проективном пространстве существует кор-

реляция, при которой образ каждой точки не проходит через эту точку и образ каждой плоскости не содержится в этой плоскости. □

Доказательство леммы предоставляем читателю. Оно, по существу, сводится к построению хотя бы одного примера корреляции, удовлетворяющей условиям леммы. Для этого можно воспользоваться отображением в V_4 , при котором одномерному векторному подпространству $\{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \lambda a_4\}$ (при любом λ) соответствует трехмерное векторное подпространство, координаты любого вектора $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ которого удовлетворяют условию: $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$.

3. Двойственные фигуры в пространстве. Фигуру F^* будем называть двойственной фигуре F в пространстве P_3 , если существует такое взаимно однозначное соответствие $f: F \rightarrow F^*$, которое каждой точке, прямой и плоскости фигуры F относит соответственно плоскость, прямую и точку фигуры F^* так, что сохраняется принадлежность соответствующих элементов. Это означает, что если $\Omega_1' = f(\Omega_1)$ и $\Omega_2' = f(\Omega_2)$, то $\Omega_1 \subset \Omega_2$ тогда и только тогда, когда $\Omega_1' \subset \Omega_2'$.

Из этого определения сразу следует, что если F^* двойственна фигуре F , то F двойственна фигуре F^* . Таким образом, понятие двойственности является взаимным, т. е. мы можем говорить, что фигуры F и F^* взаимно двойственны друг другу¹.

В качестве примеров можно рассмотреть следующие пары двойственных фигур F и F^* .

- а) $F = (l), F^* = (l)$;
- б) $F = \{O\}_3, F^* = \{\Pi\}$;
- в) $F = \{O\}, F^* = \{\Pi\}$;

г) F и F^* — два пучка прямых;

д) F — множество, состоящее из плоскости и точки, не лежащей в ней, а F^* — множество, состоящее из точки и плоскости, не проходящей через нее.

Последние два примера показывают, что пучок прямых, а также точка и не принадлежащая ей плоскость являются фигурами, которые сами себе двойственны.

4. Обоснование принципа двойственности в проективном пространстве. Теперь мы можем сформулировать и легко обосновать принцип двойственности в пространстве.

Теорема [3.2]. Всякое предложение проективной геометрии о принадлежности точек, прямых и плоскостей пространства P_3 остается справедливым, если в нем слова «точка», «прямая», «плоскость» заменить соответственно словами «плоскость», «прямая», «точка», а отношение принадлежности между ними сохранить без изменения.

Доказательство. Пусть F — некоторая фигура, состоящая из точек, прямых и плоскостей. Предположим, что имеет место истинное утверждение $\mathcal{A}$ об отношениях принадлежности точек,

¹ Другими словами, понятие двойственности обладает свойством симметричности. Однако оно, вообще говоря, не обладает свойствами рефлексивности и транзитивности.

прямых и плоскостей фигуры F . Рассмотрим корреляцию κ пространства P_3 (лемма [3.1]). Она переводит фигуру F в новую фигуру F^* , состоящую из образов элементов фигуры F , т. е. из плоскостей, прямых и точек. Очевидно, фигуры F^* и F двойственны друг другу. Легко видеть, что наличие корреляции κ дает возможность получить без доказательства новое истинное утверждение $\mathcal{H}^*$ об отношениях принадлежности элементов фигуры F^* . Предложение $\mathcal{H}^*$ будет отличаться от исходного предложения $\mathcal{H}$ тем, что в нем слова «точка», «прямая» и «плоскость» будут заменены соответственно словами «плоскость», «прямая», «точка», а слова, выражающие отношения принадлежности, будут сохранены без изменения. Поясним это утверждение на примере.

Пусть, например, $\mathcal{H}$ есть предложение «Если A и B — различные точки, то существует одна и только одна прямая, принадлежащая этим точкам». Мы имеем некоторое утверждение, сформулированное для элементов фигуры F , состоящей из двух различных точек. В силу существования корреляции κ мы можем сформулировать и принять без доказательства утверждение $\mathcal{H}^*$ для элементов фигуры F^* , состоящей из двух различных плоскостей: «Каковы бы ни были две различные плоскости, существует одна и только одна прямая, принадлежащая им». В самом деле, если предположить, что $\mathcal{H}^*$ не имеет места, т. е. для каких-либо двух различных плоскостей Π_1 и Π_2 нет прямой, принадлежащей им, то тогда, очевидно, через прообразы этих плоскостей не проходит ни одна прямая, т. е. не справедливо предложение $\mathcal{H}$. ■

5. Применение принципа двойственности. Только что доказанный принцип двойственности является весьма важным положением проективной геометрии. Этот принцип не имеет места в обычной геометрии, в чем можно легко убедиться, если возвратиться к примеру, рассмотренному в конце предыдущего пункта. В самом деле, предложение $\mathcal{H}$: «Если A и B — различные точки, то существует одна и только одна прямая, принадлежащая этим точкам» — имеет место в обычном пространстве, в то время как двойственное предложение $\mathcal{H}^*$ не имеет места, так как, например, параллельные плоскости не пересекаются.

Значение принципа двойственности заключается в том, что, доказав одно из двойственных предложений, мы можем принять без доказательства второе предложение. Проиллюстрируем эту идею на примере. Рассмотрим предложение 11^* , двойственное свойству 11 (см. § 2, п. 4).

11°. Для любой плоскости и не принадлежащей ей прямой существует одна и только одна точка, принадлежащая им обоим.

11°. Для любой точки и не принадлежащей ей прямой существует одна и только одна плоскость, содержащая их.

Мы получили новое предложение («Прямая и не принадлежащая ей точка определяют одну и только одну плоскость»), которое может быть принято без доказательства, так как согласно принципу двойственности оно является истинным утверждением.

В заключение заметим, что пересечению $\Omega_1 \cap \Omega_2$ — двух линейных геометрических образов Ω_1 и Ω_2 — по принципу двойственности

соответствует соединение двойственных образов Ω_1^*/Ω_2^* , и наоборот. Точнее, пусть F и F^* — двойственные фигуры; Ω_1 и Ω_2 — два каких-либо линейных геометрических образа фигуры F , а Ω_1^* и Ω_2^* — соответствующие двойственные образы фигуры F^* . Если $\Omega_1 \cap \Omega_2 \subset F$, то образом, двойственным $\Omega_1 \cap \Omega_2$, будет Ω_1^*/Ω_2^* и $\Omega_1^*/\Omega_2^* \subset F^*$. Далее, если $\Omega_1/\Omega_2 \subset F$, то образом, двойственным Ω_1/Ω_2 , будет $\Omega_1^* \cap \Omega_2^*$ и $\Omega_1^* \cap \Omega_2^* \subset F^*$. Поэтому мы можем говорить, что операции $\cap$ и $/$ — двойственны друг другу.

6. Принцип двойственности на плоскости. В проективной геометрии существует еще один принцип двойственности, который называется принципом двойственности на плоскости, так как он применим к плоским фигурам. Этот второй принцип является естественным следствием принципа двойственности в пространстве, в чем мы убедимся ниже, при его обосновании. Предварительно введем понятие двойственных фигур на плоскости.

Геометрическая фигура F называется плоской, если она состоит из точек и прямых, принадлежащих одной плоскости. Плоскую фигуру F^* будем называть двойственной плоской фигурой F на плоскости, если существует такое взаимно однозначное соответствие $f: F \rightarrow F^*$, при котором точки и прямые фигуры F переходят соответственно в прямые и точки фигуры F^* так, что сохраняется принадлежность соответствующих элементов.

Из этого определения следует, что понятие двойственности фигур на плоскости является взаимным. Двойственными фигурами являются, например, фигуры $F = (l)$ и $F^* = (O)_l$.

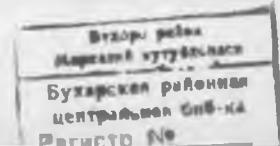
Принцип двойственности на плоскости заключается в следующем.

Теорема [3.3]. *Всякое предложение проективной геометрии о принадлежности точек и прямых проективной плоскости¹ остается в силе, если в нем слова «точка», «прямая» заменить соответственно словами «прямая» и «точка», а соотношение принадлежности между ними сохранить без изменения.*

Доказательство. Пространство P_3 будем рассматривать как плоскость в пространстве P_3 . Пусть κ — корреляция, удовлетворяющая условию леммы [3.1]. Допустим, что при этой корреляции $P_3 = \kappa(O)$. Отсюда и из свойств корреляции вытекает, что при κ прямые и плоскости множества $\{(O)\}$ переходят соответственно в прямые и точки множества $\{(P_3)\}$ (см. 2.6.4 и 2.6.3). Более того, это соответствие является взаимно однозначным и сохраняет принадлежность элементов.

Так как $P_3 = \kappa(O)$, то согласно лемме [3.1] $O \notin P_3$, поэтому можно рассматривать так называемое перспективное отображение $f: \{(P_3)\} \rightarrow \{(O)\}$, при котором каждой точке M плоскости P_3 соответствует прямая OM множества $\{(O)\}$, а каждой прямой m этой же

¹ В соответствии с теоремой [2.3] плоскость P_3 можно рассматривать как самостоятельное двумерное проективное пространство.



плоскости — плоскость mJO . Очевидно, отображение f является взаимно однозначным.

Теперь рассмотрим соответствие $\kappa_0 = \kappa f$. В силу определения f и только что сформулированного свойства κ можно утверждать, что при соответствии κ_0 точки и прямые множества $\{(P_2)\}$ переходят соответственно в прямые и точки того же множества $\{(P_2)\}$, т. е. $\kappa_0: \{(P_2)\} \rightarrow \{(P_2)\}$. Имеют место следующие свойства, которые непосредственно вытекают из соответствующих свойств преобразований κ и f . При преобразовании κ_0 :

1°. Точки плоскости P_2 переходят в прямые той же плоскости, и это соответствие является взаимно однозначным.

2°. Прямые плоскости P_2 переходят в точки той же плоскости, причем соответствие взаимно однозначное.

3°. Если $a' = \kappa_0(A)$, $B' = \kappa_0(b)$, то $B' \in a'$ тогда и только тогда, когда $A \in b$.

Теперь нам остается почти дословно с незначительными изменениями повторить доказательство теоремы [3.2]. Пусть F — некоторая плоская фигура, состоящая из точек и прямых плоскости P_2 , а $\mathfrak{A}$ — истинное утверждение об отношениях принадлежности точек и прямых фигуры F . Пусть $F^* = \kappa_0(F)$. Легко видеть, что F^* является фигурой, двойственной фигуре F на плоскости P_2 . Наличие преобразования κ_0 дает возможность получить без доказательства новое истинное утверждение $\mathfrak{A}^*$ об отношениях принадлежности элементов фигуры F^* . Предложение $\mathfrak{A}^*$ будет отличаться от исходного предложения $\mathfrak{A}$ тем, что в нем слова «точка» и «прямая» будут заменены соответственно словами «прямая» и «точка», а слова, выражающие отношения принадлежности, будут сохранены без изменения.

Пусть, например, $\mathfrak{A}$ — предложение 1°, п. 4, § 2. Выпишем его слева, а справа запишем предложение $\mathfrak{A}^*$.

1°. Каковы бы ни были две различные точки A и B , существует одна и только одна прямая l , принадлежащая этим точкам.

В данном случае F состоит из двух различных точек, а F^* — из двух различных прямых. При этом предполагается, что $F \subset P_2$ и $F^* \subset P_2$. Так как по предположению $\mathfrak{A}$ является истинным утверждением, то $\mathfrak{A}^*$ также является истинным утверждением, в силу наличия преобразования κ_0 . ■

§ 4. Модели проективной плоскости и проективного пространства

В настоящем параграфе дано понятие об интерпретации изложенной выше аксиоматики проективного пространства. Общие вопросы аксиоматики подробно рассмотрены ниже, в главе XIII. Там же, в частности, доказана непротиворечивость аксиоматики проективного пространства.

1. Понятие об интерпретации системы аксиом. При аксиоматическом построении геометрии предполагается, что даны некоторые объекты (основные объекты), между которыми существуют определенные отношения (основные отношения). Основные объекты и отношения, т. е. основные понятия геометрии, должны удовлетворять определенным требованиям, которые называются аксиомами. Подчеркнем, что конкретная природа основных понятий безразлична, нам важно лишь, чтобы они удовлетворяли всем аксиомам данной системы.

Реализацией (или интерпретацией) системы аксиом называется совокупность определенных объектов с определенными отношениями между ними, для которых выполнены все аксиомы данной системы. Таким образом, интерпретация есть конкретная «модель» той логической схемы, которая определена аксиомами. В последующих пунктах рассмотрены некоторые примеры интерпретаций аксиоматики проективной плоскости и проективного пространства. При этом мы предполагаем, что обычные трехмерные и четырехмерные геометрические пространства TV_3 и TV_4 известны, поэтому при построении той или иной модели будем использовать объекты этих пространств¹.

2. Интерпретация аксиоматики проективной плоскости в связке прямых пространства TV_3 . За основное векторное пространство V_3 , на котором базируется построение пространства P_2 (см. § 2, п. 2), примем обычное векторное пространство V_3 точечно-векторного пространства TV_3 . Таким образом, числа, векторы и основные отношения между ними понимаются так же, как и в пространстве V_3 . Зафиксируем в пространстве TV_3 некоторую точку O и рассмотрим связку прямых $[O]$. Каждую прямую связки назовем p -точкой пространства P_2 . Будем говорить, что ненулевой вектор a инцидентен p -точке A , если a как вектор пространства V_3 принадлежит прямой OA (см. рис. 2). Легко убедиться в том, что все аксиомы пространства P_2 будут выполнены. Для этого, очевидно, достаточно ограничиться проверкой аксиом $P1 - P4$. Проверку этих аксиом мы опускаем, так как они проводятся тривиально.

Легко видеть, что в нашей модели проективная прямая интерпретируется как пучок прямых $[O]$ в некоторой плоскости пространства TV_3 , проходящей через O . Интересно отметить, что свойства 2.4.1 и 2.4.9 в данной интерпретации вытекают из хорошо известных теорем элементарной геометрии.

3. Модель проективного пространства в связке прямых пространства TV_4 . Теперь построим модель пространства P_3 . За основное век-

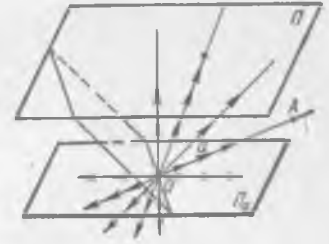


Рис. 2.

¹ Пространства TV_3 и TV_4 совпадают с $\bar{R}_3$ (см. 1, § 66) при $n = 3$ и $n = 4$

торное пространство V_4 , на котором базируется построение аксиоматики P_3 , примем векторное пространство V_4 точечно-векторного пространства TV_4 . Зафиксируем некоторую точку O и рассмотрим связку прямых $[O]_4$ с центром в точке O . Каждую прямую этой связки назовем *точкой пространства P_3* . Понятие инцидентности интерпретируется так же, как в п. 2, т. е. если A — прямая связки и если $a \neq 0$, то будем считать, что $a \times A$ тогда и только тогда, когда $a \in A$. Легко видеть, что при этом будут выполнены все аксиомы пространства P_3 .

По аналогии с интерпретацией плоскости P_2 прямые и плоскости пространства P_3 в этой модели интерпретируются как двумерные и трехмерные плоскости пространства TV_4 , проходящие через точку O . Проективная точка принадлежит проективной прямой (плоскости) тогда и только тогда, когда соответствующая прямая связки $[O]_4$ лежит на двумерной (трехмерной) плоскости, проходящей через точку O .

4. Понятие расширенного аффинного пространства. Для дальнейшего изложения нам необходимо ввести понятие расширенного аффинного пространства. Обычные точки, прямые и плоскости пространства TV_3 будем называть соответственно собственными точками, собственными прямыми и собственными плоскостями. Понятие принадлежности собственных элементов будем понимать в обычном смысле.

Теперь введем следующие соглашения:

а) Несобственной точкой назовем любое одномерное векторное подпространство, а несобственной прямой — любое двумерное векторное подпространство пространства TV_3 . Трехмерное векторное пространство назовем несобственной плоскостью.

Несобственные элементы — точки, прямые и плоскость — в дальнейшем обозначаются соответственно через $A_\infty, B_\infty, \dots, a_\infty, b_\infty, \dots, \Pi_\infty$.

б) Будем говорить, что несобственный элемент Ω_∞ (точка или прямая) принадлежит несобственному элементу Ω_∞^* (прямая или плоскость), если $\Omega_\infty \subset \Omega_\infty^*$. В противном случае будем говорить, что Ω_∞ не принадлежит Ω_∞^* .

в) Будем говорить, что несобственная точка A_∞ принадлежит собственной прямой a (или собственной плоскости Π), если A_∞ является подпространством прямой a (принадлежит плоскости Π).

г) Будем говорить, что несобственная прямая a_∞ принадлежит собственной плоскости Π , если a_∞ является подпространством этой плоскости.

Пространство TV_3 , модифицированное указанным выше образом, называется расширенным аффинным пространством и обозначается через TV_3^* . Собственные прямые и собственные плоскости этого пространства, дополненные несобственными элементами, называются соответственно расширенными прямыми и плоскостями¹.

¹ Мы, по существу, оставили пространство TV_3 без изменения, но ввели своеобразную терминологию: вместо слов «подпространство прямой» или «подпространство

Учитывая свойства пространства TV_3 , из перечисленных выше соглашений немедленно получаем следующие предложения:

1°. Каждая собственная прямая имеет одну и только одну несобственную точку. Две параллельные прямые имеют одну и ту же несобственную точку, а непараллельные прямые имеют различные несобственные точки.

2°. Каждая собственная плоскость имеет одну и только одну несобственную прямую. Две параллельные собственные плоскости имеют одну и ту же несобственную прямую, а непараллельные плоскости имеют различные несобственные прямые.

3°. Пространство TV_3^* имеет единственную несобственную плоскость, которой принадлежат все несобственные точки и прямые этого пространства.

В соответствии с терминологией, принятой в геометрии, будем говорить, что параллельные прямые пересекаются в несобственной точке.

4°. Если A_∞ — произвольная несобственная точка, то существует множество собственных прямых, содержащих эту точку. Это множество образует связку параллельных прямых.

5°. Каждая собственная плоскость имеет бесчисленное множество несобственных точек и одну несобственную прямую, которой принадлежат все несобственные точки этой плоскости.

По аналогии с 1° будем говорить, что параллельные плоскости пересекаются по несобственной прямой.

6°. Если a_∞ — произвольная несобственная прямая, то существует множество собственных плоскостей, содержащих эту прямую. Это множество образует пучок параллельных плоскостей.

7°. Пусть a и Π — данные собственные прямая и плоскость. Несобственная точка прямой a принадлежит плоскости Π тогда и только тогда, когда $a \subset \Pi$ или $a \parallel \Pi$.

Мы не будем обосновывать эти свойства, так как все они являются, по существу, прямыми следствиями соглашений а) — г). Соглашения а) — г) и предложения 1° — 7° позволяют сформулировать следующее важное утверждение: если под терминами «точка», «прямая» и «плоскость» понимать как собственные, так и несобственные элементы пространства TV_3^* , то все предложения 1° — 13°, сформулированные в п. 4, § 2, будут справедливы в этом пространстве.

5. Расширенное аффинное пространство как модель трехмерного проективного пространства. Теперь легко построить модель проективного трехмерного пространства P_3 на базе обычного четырехмерного пространства TV_4 . Возьмем в этом пространстве расширенную трехмерную плоскость Π_3^* и некоторую обычную точку O пространства, $O \notin \Pi_3^*$. Точками пространства P_3 , или p -точками, будем считать как собственные, так и несобственные точки расширенной трехмерной

плоскости» будем говорить «несобственная точка прямой» или «несобственная прямая плоскости». Как мы увидим дальше, эти соглашения оказываются весьма целесообразными.

плоскости Π_3^∞ . За векторное пространство V_4 , с которым связано пространство P_3 , примем множество всех векторов пространства TV_4 . Будем считать, что ненулевой вектор a инцидентен п-точке M , если этот вектор принадлежит прямой OM . Легко убедиться в том, что при этих соглашениях все аксиомы $P1 - P4$ будут выполнены. Проверим, например, выполнение аксиомы $P1$. Пусть a — произвольный ненулевой вектор пространства V_4 . Если $a \notin \Pi_3^\infty$, то прямая (O, a) пересекает плоскость Π_3 в собственной точке M , которая и будет инцидентна вектору a . Если $a \in \Pi_3^\infty$, то несобственная точка $\{a\}$, по нашему соглашению, инцидентна вектору a , так как $a \in \{a\}$. Так же просто проверяются остальные аксиомы.

Совершенно ясно, что каждую расширенную двумерную плоскость трехмерной плоскости Π_3^∞ можно рассматривать как модель проективной плоскости пространства P_3 . Моделью проективной плоскости будет также несобственная двумерная плоскость трехмерной плоскости Π_3^∞ .

В точной аналогии с предыдущим можно построить модель двумерного проективного пространства P_2 ; только в этом случае вместо пространства TV_4 следует взять трехмерное точечно-векторное пространство TV_3 , и в этом пространстве рассмотреть расширенную плоскость Π_2^∞ . Точками пространства P_2 следует считать как собственные, так и несобственные точки плоскости Π_2^∞ , а за векторное пространство V_3 , с которым связано пространство P_2 , следует принять множество всех векторов пространства TV_3 . Соотношение инцидентности вектора и точки вводится в точном соответствии с предыдущим.

Построенная нами интерпретация удобна тем, что она позволяет в какой-то степени наглядно представить себе геометрические факты проективного пространства. То обстоятельство, что векторы, инцидентные точкам, непосредственно не интерпретируются на расширенной плоскости, является в какой-то мере преимуществом этой модели, так как векторы, как мы отмечали выше, играют вспомогательную роль.

6. Расширенное евклидово пространство. Изложенная в настоящем параграфе теория полностью сохраняется, если в п. 4 исходное точечно-векторное аффинное пространство TV_3 заменить точечно-векторным евклидовым пространством TE_3 . В этом случае мы приходим к понятию расширенного евклидова пространства. Это пространство обозначается через TE_3^∞ или просто через E_3^∞ . Собственные прямые и собственные плоскости этого пространства, дополненные несобственными элементами, называются расширенными евклидовыми прямыми и плоскостями. Расширенные евклидовы плоскости в дальнейшем обозначаются через E_2^∞ . Пространство E_3^∞ отличается от пространства TV_3^∞ тем, что в E_3^∞ для собственных элементов справедливы также метрические свойства.

Глава II

ПРОЕКТИВНЫЕ КООРДИНАТЫ НА ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

§ 5. Координаты точек на прямой и плоскости

Предыдущий материал был посвящен обоснованию понятия трехмерного проективного пространства. Теперь мы приступаем к систематическому изложению основных фактов этой геометрии. Для того чтобы упростить изложение, в дальнейшем ограничимся изучением свойств двумерного проективного пространства, т. е. свойств проективной плоскости. При этом проективную плоскость можно рассматривать либо как самостоятельное двумерное проективное пространство P_2 (см. § 2, п. 3), либо как двумерную плоскость трехмерного проективного пространства P_3 . В дальнейшем всюду, где нет специальных оговорок, будем придерживаться первой точки зрения.

Настоящий параграф посвящен одному из основных понятий проективной геометрии — координат точек на прямой и на плоскости.

1. Система координат на проективной прямой. Пусть l — проективная прямая. Системой координат прямой l называется совокупность трех различных точек этой прямой O_1, O_2, E , взятых в определенном порядке. Точки O_1 и O_2 называются базисными, а E — единичной точкой системы координат. Будем говорить, что векторы a_1, a_2, e образуют репер, инцидентный системе координат O_1O_2E , если $a_1 \times O_1, a_2 \times O_2, e \times E$ и если, кроме того, выполнено условие (см. рис. 3, а):

$$e = a_1 + a_2. \quad (1)$$

Соотношение инцидентности репера a_1, a_2, e и системы координат O_1O_2E в дальнейшем символически обозначается так: $a_1, a_2, e \times O_1O_2E$. Покажем, что для любой системы координат O_1O_2E существует хотя бы один инцидентный ей репер. В самом деле, согласно аксиоме $P2$, существуют векторы b_1, b_2, e такие, что $b_1 \times O_1, b_2 \times O_2, e \times E$. По определению имеем: $b_1 \in \bar{l}, b_2 \in \bar{l}, e \in \bar{l}$. Так как $\bar{l}$ — двумерное векторное подпространство и b_1 и b_2 — линейно независимы (аксиома $P4$), то они образуют базис подпространства $\bar{l}$. Поэтому e можно разложить по этому базису: $e = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$. Положив $a_1 = \alpha_1 b_1, a_2 = \alpha_2 b_2$, получаем: $e = a_1 + a_2$. Так как $\alpha_1 \neq 0$ и $\alpha_2 \neq 0$, то $a_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$. С другой стороны, $b_1 \times O_1, b_2 \times O_2$, поэтому $a_1 \times O_1$ и $a_2 \times O_2$. Очевидно, $a_1, a_2, e \times O_1O_2E$.

Имеют место следующие предложения:

1°. Если $a_1, a_2, e \times O_1O_2E$, то $(\lambda a_1), (\lambda a_2), (\lambda e) \times O_1O_2E$, где λ — произвольное число, отличное от нуля.

2°. Если $a_1, a_2, e \times O_1O_2E$ и $a_1, a_2, e' \times O_1O_2E$, то существует отличное от нуля число λ , такое, что $a_1 = \lambda a_1, a_2 = \lambda a_2, e' = \lambda e$.

Первое из сформулированных свойств очевидно, так как из условия (1) следует, что $\lambda e = \lambda a_1 + \lambda a_2$. С другой стороны, из соотношений $a_1 \times O_1, a_2 \times O_2, e \times E$ следует, что $\lambda a_1 \times O_1, \lambda a_2 \times O_2, \lambda e \times E$.

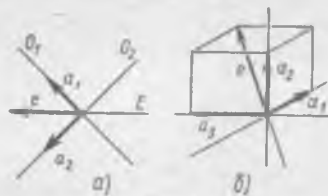


Рис. 3.

Докажем предложение 2°. Из условия $a_1, a_2, e \in O_1O_2E$ следует, что $a_1 \times O_1, a_2 \times O_2, e \times E$ и $e = a_1 + a_2$. Далее, из условия $a_1, a_2, e' \in O_1O_2E$ следует, что $a_1 \times O_1, a_2 \times O_2, e' \times E$ и $e' = a_1 + a_2$. Таким образом, $a_1 \in \bar{O}_1, a_1 \in \bar{O}_1$, поэтому $a_1' = \lambda_1 a_1$. Точно так же получаем $a_2 = \lambda_2 a_2$ и $e' = \lambda_3 e$. Остается показать, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

Так как $e' = a_1' + a_2'$, то $\lambda_3 e = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$ или $e = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} a_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} a_2$. Сравнивая эти соотношения с соотношением (1), мы приходим к выводу, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. ■

Из доказанных свойств вытекает, что какова бы ни была система координат, всегда существует репер, инцидентный ей, и этот репер определяется с точностью до числового множителя.

2. Координаты точек проективной прямой. Пусть O_1O_2E — система координат прямой l , а X — произвольная точка этой прямой. Пусть, далее x — вектор, инцидентный точке X , а a_1, a_2, e — репер, инцидентный системе координат O_1O_2E . Примем векторы a_1, a_2 за базис подпространства l и разложим вектор x по этому базису:

$$x = x_1 a_1 + x_2 a_2. \quad (2)$$

Числа x_1, x_2 называются проективными координатами точки X в системе O_1O_2E . Каждая точка прямой l имеет две проективные координаты, одновременно не равные нулю. Последнее утверждение следует из того обстоятельства, что $x \neq 0$. В дальнейшем для сокращения записи в выражении «проективные координаты» слово «проективные» часто будем опускать. Заметим, что координаты точки зависят от выбора вектора x , инцидентного точке X , и репера a_1, a_2, e , инцидентного данной системе. Выясним характер этой зависимости. Пусть a_1, a_2, e' — другой репер, инцидентный системе O_1O_2E , а x' — другой вектор, инцидентный точке X . Разложим x' по базису a_1, a_2 :

$$x' = x'_1 a_1 + x'_2 a_2. \quad (3)$$

Согласно свойству 5.1.2 имеем: $a_1 = \lambda a_1, a_2 = \lambda a_2$. С другой стороны, $x = \lambda_0 x'$. Подставив эти значения в (2), получаем:

$$x = \alpha x_1 a_1 + \alpha x_2 a_2, \quad (4)$$

где $\alpha = \frac{\lambda}{\lambda_0} \neq 0$. Сравнивая соотношения (3) и (4), получаем: $x'_1 = \alpha x_1$ и $x'_2 = \alpha x_2$. Таким образом, при изменении векторов, инцидентных точке X и системе O_1O_2E , координаты точки X умножаются на одно и то же число, отличное от нуля. Итак, заданием системы координат

координаты произвольной точки прямой определяются с точностью до числового множителя¹. Поэтому координаты точки X , определяемые указанным выше способом, называются однородными и обозначаются так: $X(x_1 : x_2)$.

Точки O_1, O_2 и E в системе O_1O_2E имеют координаты $O_1(1 : 0)$, $O_2(0 : 1)$, $E(1 : 1)$. В самом деле, пусть $a_1, a_2, e \in O_1O_2E$. Так как $e = a_1 + a_2$, $a_1 = 1 \cdot a_1 + 0 a_2$, $a_2 = 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2$, то согласно определению отсюда следует искомый результат.

3. Координаты точек проективной плоскости. Пусть Π — проективная плоскость. Системой координат плоскости Π называется совокупность четырех точек общего положения, взятых в определенном порядке $O_1O_2O_3E$ ². Точки O_1, O_2, O_3 называются базисными, а E — единичной точкой системы координат. Будем говорить, что векторы a_1, a_2, a_3, e образуют репер, инцидентный системе координат $O_1O_2O_3E$, если $a_1 \times O_1, a_2 \times O_2, a_3 \times O_3, e \times E$ и

$$e = a_1 + a_2 + a_3. \quad (5)$$

Соотношение инцидентности репера a_1, a_2, a_3, e и системы координат $O_1O_2O_3E$ будем обозначать так: $a_1, a_2, a_3, e \in O_1O_2O_3E$ (см. рис. 3, б).

Точно так же, как и в случае прямой, можно показать, что для любой системы координат существует инцидентный ей репер и что имеют место предложения, аналогичные свойствам 5.1.1 и 5.1.2. Предлагаем читателю самостоятельно сформулировать их и доказать.

Пусть $O_1O_2O_3E$ — система координат плоскости Π , а X — произвольная точка этой плоскости. Пусть далее, x — вектор, инцидентный точке X , а a_1, a_2, a_3, e — репер, инцидентный системе координат $O_1O_2O_3E$. Примем векторы a_1, a_2, a_3 за базис подпространства Π и разложим вектор x по этому базису:

$$x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3. \quad (6)$$

Числа x_1, x_2, x_3 называются проективными координатами или просто координатами точки X в системе $O_1O_2O_3E$. Очевидно, каждая точка плоскости Π имеет три координаты, одновременно не равные нулю. Однако, так же как и в случае прямой, координаты точки зависят от выбора вектора x , инцидентного точке X , и от выбора репера a_1, a_2, a_3, e , инцидентного данной системе координат. Не повторяя рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены выше, в п. 2, сформулируем вывод в виде следующей теоремы.

Теорема [5.1]. Если на проективной плоскости выбрана система координат $O_1O_2O_3E$, то

1°. Каждая точка проективной плоскости имеет свои координаты, которые не равны нулю одновременно.

¹ Заметим, что при обосновании предложения, выделенного в тексте, мы существенно воспользовались тем, что, кроме точек O_1, O_2 , на прямой l зафиксирована еще одна точка E .

² Четыре точки плоскости называются точками общего положения, если никакие три из них не лежат на одной прямой.

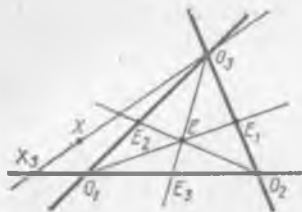


Рис. 4.

2°. Каждая тройка чисел, не равных одновременно нулю, является проективными координатами некоторой точки плоскости. Числа $(0, 0, 0)$ не определяют ни одной точки на плоскости.

3°. Если $(x_1 : x_2 : x_3)$ — координаты точки X , то числа rx_1, rx_2, rx_3 , где r — любое число, отличное от нуля, являются координатами той же точки X .

4°. Если $x_1 : x_2 : x_3$ и $x'_1 : x'_2 : x'_3$ являются координатами одной и той же точки, то существует число $r \neq 0$ такое, что $x'_i = rx_i$, $x'_3 = rx_3$, $x'_2 = rx_2$. □

Из утверждений 3° и 4° этой теоремы немедленно следует

С л е д с т в и е. Для того чтобы точки $A(a_1 : a_2 : a_3)$ и $B(b_1 : b_2 : b_3)$ были различными, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ был равен двум.

4. Базисные прямые координатной системы. Прямые O_1O_2, O_2O_3 и O_3O_1 , соединяющие попарно базисные точки, называются базисными прямыми системы координат $O_1O_2O_3E$ (рис. 4). Так как точка E не лежит на базисных прямых, то прямые O_1O_2 и O_2O_3 пересекаются в точке E_3 , отличной от O_1 и O_2 (см. рис. 4). Поэтому тройка точек $O_1O_2E_3$ на базисной прямой O_1O_2 образует систему координат. Будем говорить, что эта система координат индуцирована исходной системой координат на базисной прямой O_1O_2 . По аналогии можно показать, что исходная система координат индуцирует на каждой базисной прямой систему координат. Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Пусть $O_1O_2O_3E$ — система координат плоскости, а $O_1O_2E_3$ — индуцированная система координат на базисной прямой O_1O_2 . Пусть, далее, X — точка плоскости, отличная от O_3 , а X_3 — проекция этой точки из центра O_3 на прямую O_1O_2 (рис. 4). Зная координаты $x_1 : x_2 : x_3$ точки X в системе $O_1O_2O_3E$, определить координаты $y_1 : y_2$ точки X_3 в индуцированной системе $O_1O_2E_3$.

Р е ш е н и е. Согласно определению координат, существуют векторы x, a_1, a_2, a_3, e такие, что $x = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3, e = a_1 + a_2 + a_3$.

Пусть $e_3 = a_1 + a_2$ и E_3 — точка, инцидентная вектору e_3 . Из условий $e_3 = a_1 + a_2$ и $e_3 = e - a_3$ следует, что $E_3 \in O_1O_2$ и $E_3 \in O_2E$, поэтому $E_3 = O_1O_2 \cap O_2E = E_3$. Таким образом, в силу соотношения $e_3 = a_1 + a_2$ имеем: $a_1, a_2, e_3 \in O_1O_2E_3$.

Теперь определим вектор, инцидентный точке X_3 . Пусть $y = x_1a_1 + x_2a_2$ и Y — точка, инцидентная этому вектору. Из условий $y = x_1a_1 + x_2a_2$ и $y = x - x_3a_3$ следует, что $Y \in O_1O_2$ и $Y \in O_3X$, поэтому $Y = O_1O_2 \cap O_3X = X_3$. Поставленная задача по существу

решена, так как из условий $yx_3, e_3 = a_1 + a_2, y = x_1a_1 + x_2a_2$ следует, что X_3 имеет координаты $x_1 : x_2$. Мы пришли к следующему интересному выводу.

* Теорема [5.2]. Пусть $O_1O_2O_3E$ — система координат плоскости, а $O_1O_2E_3$ — система координат, индуцированная исходной системой на базисной прямой O_1O_2 . Пусть далее X — любая точка плоскости, не совпадающая с точкой O_3 , а X_3 — ее проекция из центра O_3 на базисную прямую O_1O_2 (рис. 4).

Если точка X в системе $O_1O_2O_3E$ имеет координаты $(x_1 : x_2 : x_3)$, то точка X_3 , как точка прямой O_1O_2 в системе $O_1O_2E_3$, имеет координаты $(x_1 : x_2)$. ■

С л е д с т в и е. Пусть $O_1O_2O_3E$ — система координат плоскости, а $O_1O_2E_3$ — система координат, индуцированная исходной системой на базисной прямой O_1O_2 . Если произвольная точка X прямой O_1O_2 , как точка плоскости, в системе $O_1O_2O_3E$ имеет координаты $(x_1 : x_2 : 0)$, то та же точка, как точка прямой O_1O_2 , в системе $O_1O_2E_3$ имеет координаты $(x_1 : x_2)$.

Аналогичные результаты можно получить для проекций X_1, X_2 на базисные прямые O_2O_3 и O_3O_1 .

5. Условие коллинеарности трех точек. Следующая теорема устанавливает критерий коллинеарности трех точек, заданных координатами: Теорема [5.3]. Три точки $X(x_1 : x_2 : x_3), Y(y_1 : y_2 : y_3), Z(z_1 : z_2 : z_3)$, заданные координатами в системе координат $O_1O_2O_3E$, коллинеарны тогда и только тогда, когда определитель третьего порядка, составленный из координат данных точек, равен нулю.

Предлагаем читателю самостоятельно доказать эту теорему, вводя в рассмотрение репер $a_1, a_2, a_3, e \in O_1O_2O_3E$ и воспользовавшись определением координат точек, определением прямой (см. § 2, п. 1) и следствием теоремы I [4.4].

С л е д с т в и е. Три точки, заданные координатами на плоскости, не коллинеарны тогда и только тогда, когда определитель третьего порядка, составленный из координат этих точек, не равен нулю.

§ 6. Преобразование координат точек плоскости. Комплексная проективная плоскость

Задача преобразования координат точек проективной плоскости, которой посвящен этот параграф, совершенно аналогична той, которую мы решали в I, § 11, для координат точек обычной плоскости.

1. Формулы преобразования координат на плоскости.

Задача 1. Пусть $O_1O_2O_3E$ и $O'_1O'_2O'_3E'$ — две системы координат плоскости P_2 , а X — произвольная точка, имеющая в системе $O_1O_2O_3E$ координаты $x_1 : x_2 : x_3$, а в системе $O'_1O'_2O'_3E'$ — $x'_1 : x'_2 : x'_3$. Установить связь между координатами x_1, x_2, x_3 и x'_1, x'_2, x'_3 , если точки O_1, O_2, O_3, E' заданы своими координатами в системе $O_1O_2O_3E$:

$$O_1(a_{11} : a_{21} : a_{31}), O_2(a_{12} : a_{22} : a_{32}), O_3(a_{13} : a_{23} : a_{33}), E'(a_{10} : a_{20} : a_{30}).$$

Решение. Для удобства дальнейшего изложения систему $O_1O_2O_3E$ назовем старой, а систему $O_1O_2O_3E'$ — новой. Далее, матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{30} \end{pmatrix} \quad (1)$$

назовем матрицей перехода от старой системы к новой или матрицей преобразования координат. Для решения поставленной задачи воспользуемся формулами преобразования координат векторов пространства V_3 , с которым связана проективная плоскость P_2 . Так как точка E' имеет координаты a_{10}, a_{20}, a_{30} , то, согласно определению координат точек (см. п. 3, § 5), в V_3 существуют векторы e^*, a_1, a_2, a_3, e , которые удовлетворяют условиям:

$$e^* \propto E', \quad a_1, a_2, a_3, e \propto O_1O_2O_3E$$

и

$$e^* = a_{10}a_1 + a_{20}a_2 + a_{30}a_3.$$

Возьмем репер a'_1, a'_2, a'_3, e' так, чтобы $a_1, a_2, a_3, e', \propto O_1O_2O_3E'$ и $e' = e^*$. Очевидно, такой репер всегда существует. В самом деле, пусть b_1, b_2, b_3, e_0 — произвольный репер, инцидентный $O_1O_2O_3E'$. Тогда $e_0 \propto E'$, поэтому e^* и e_0 коллинеарны. Это означает, что $\exists \lambda (\lambda \neq 0, e^* = \lambda e_0)$. Репер $(\lambda b_1), (\lambda b_2), (\lambda b_3), (\lambda e_0)$ удовлетворяет указанному выше условию. По определению имеем:

$$e^* = a'_1 + a'_2 + a'_3. \quad (2)$$

Запишем формулы преобразования координат векторов пространства V_3 при переходе от базиса a_1, a_2, a_3 к базису a'_1, a'_2, a'_3 . Пусть y — произвольный вектор пространства V_3 и (y_1, y_2, y_3) и (y'_1, y'_2, y'_3) — координаты этого вектора соответственно в базисах a_1, a_2, a_3 и a'_1, a'_2, a'_3 . Из формул (4), I, § 60, получаем:

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}y'_1 + c_{12}y'_2 + c_{13}y'_3, \\ y_2 &= c_{21}y'_1 + c_{22}y'_2 + c_{23}y'_3, \\ y_3 &= c_{31}y'_1 + c_{32}y'_2 + c_{33}y'_3, \end{aligned} \quad (3)$$

где коэффициенты c_{ij} являются координатами векторов a'_1, a'_2, a'_3 в базисе a_1, a_2, a_3 , точнее ¹:

$$a'_1 [c_{11}, c_{21}, c_{31}], \quad a'_2 [c_{12}, c_{22}, c_{32}], \quad a'_3 [c_{13}, c_{23}, c_{33}].$$

¹ См. I, § 60, п. 2. Так как в обычном трехмерном пространстве координаты точки равны координатам радиус-вектора точки, то формулы (4), I, § 60, при $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ являются формулами преобразования координат векторов пространства V_3 .

Так как $a'_1 \propto O'_1$, а $a_1, a_2, a_3, e \propto O_1O_2O_3E$, то по определению c_{11}, c_{21}, c_{31} являются координатами точки O'_1 . Согласно теореме [5.1], ⁴ существует число $k_1 \neq 0$ такое, что

$$c_{11} = k_1 a_{11}, \quad c_{21} = k_1 a_{21}, \quad c_{31} = k_1 a_{31}. \quad (4_1)$$

Аналогично получаем:

$$c_{12} = k_2 a_{12}, \quad c_{22} = k_2 a_{22}, \quad c_{32} = k_2 a_{32}, \quad (4_2)$$

$$c_{13} = k_3 a_{13}, \quad c_{23} = k_3 a_{23}, \quad c_{33} = k_3 a_{33}. \quad (4_3)$$

Мы видим, что в коэффициенты соотношений (3) входят неизвестные величины k_1, k_2, k_3 . Однако легко показать, что эти величины однозначно определяются через координаты данных точек O'_1, O'_2, O'_3, E' . В самом деле, из формул (1) и (2) следует, что вектор e^* в базисе a_1, a_2, a_3 имеет координаты a_{10}, a_{20}, a_{30} , а в базисе a'_1, a'_2, a'_3 — координаты $(1, 1, 1)$; поэтому из соотношений (3) с учетом (4₁), (4₂) и (4₃) будем иметь:

$$\begin{aligned} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 &= a_{10}, \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + a_{23}k_3 &= a_{20}, \\ a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + a_{33}k_3 &= a_{30}. \end{aligned} \quad (5)$$

Получили систему линейных уравнений для определения k_1, k_2, k_3 . Из следствия теоремы [5.3] следует, что определитель этой системы отличен от нуля, поэтому k_1, k_2 и k_3 однозначно определяются через данные числа $a_{10}, a_{20}, a_{30}, a_{11}, a_{21}, a_{31}, \dots, a_{33}$.

Пользуясь формулами (3), легко решить поставленную задачу, т. е. установить связь между координатами $x_1 : x_2 : x_3$ и $x'_1 : x'_2 : x'_3$ произвольной точки X , заданной в двух системах: $O_1O_2O_3E$ и $O'_1O'_2O'_3E'$. Пусть $y \propto X$. Предположим, что в базисах a_1, a_2, a_3 и a'_1, a'_2, a'_3 этот вектор имеет соответственно координаты (y_1, y_2, y_3) и (y'_1, y'_2, y'_3) . Так как $a_1, a_2, a_3, e \propto O_1O_2O_3E$, то y_1, y_2, y_3 являются координатами точки X в старой системе координат; поэтому

$$y_1 = \rho' x_1, \quad y_2 = \rho' x_2, \quad y_3 = \rho' x_3. \quad (6)$$

Аналогично в силу $a'_1, a'_2, a'_3, e' \propto O'_1O'_2O'_3E'$ числа y'_1, y'_2, y'_3 являются координатами точки X в новой системе координат, поэтому $y'_1 = \rho'' x'_1, y'_2 = \rho'' x'_2, y'_3 = \rho'' x'_3$. Подставив эти значения, значения (6), а также выражения коэффициентов c_{ij} из (4₁), (4₂) и (4₃) в соотношения (3) и полагая $\rho = \frac{\rho'}{\rho''}$, окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= k_1 a_{11} x'_1 + k_2 a_{12} x'_2 + k_3 a_{13} x'_3, \\ \rho x_2 &= k_1 a_{21} x'_1 + k_2 a_{22} x'_2 + k_3 a_{23} x'_3, \\ \rho x_3 &= k_1 a_{31} x'_1 + k_2 a_{32} x'_2 + k_3 a_{33} x'_3. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь k_1, k_2 и k_3 определяются однозначно из соотношений (5).

Полученные формулы называются формулами преобразования координат точек на проективной плоскости.

Так как $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$, $k_3 \neq 0$, то определитель системы (7) отличен от нуля, поэтому координаты точки X в новой системе можно выразить через ее координаты в старой системе:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho x_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho x_3 &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3. \end{aligned} \quad (8)$$

4. Примеры; формулы преобразования координат точек прямой. Предлагаем читателю, используя соотношение (7), самостоятельно решить следующие три задачи:

Задача 2. Точка E' в системе $O_1O_2O_3E$ имеет координаты $(a_{10} : a_{20} : a_{30})$. Показать, что формулы преобразования координат точек при переходе от системы $O_1O_2O_3E$ к системе $O_1O_2O_3E'$ имеют вид:

$$\rho x_1 = a_{10}x'_1, \quad \rho x_2 = a_{20}x'_2, \quad \rho x_3 = a_{30}x'_3. \quad (9)$$

Задача 3. Точки O_1, O_2 и E' в системе $O_1O_2O_3E$ имеют координаты $O_1(a_{11} : a_{21} : 0)$, $O_2(a_{12} : a_{22} : 0)$, $E'(a_{10} : a_{20} : a_{30})$. Показать, что формулы преобразования координат при переходе от системы $O_1O_2O_3E$ к системе $O_1O_2O_3E'$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= k_1 a_{11}x'_1 + k_2 a_{12}x'_2, \\ \rho x_2 &= k_1 a_{21}x'_1 + k_2 a_{22}x'_2, \\ \rho x_3 &= a_{30}x'_3, \end{aligned} \quad (10)$$

где k_1 и k_2 определяются из соотношений:

$$\begin{aligned} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 &= a_{10}, \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 &= a_{20}. \end{aligned} \quad (11)$$

Задача 4. Пусть O_1O_3E — старая, а O_1O_2E' — новая системы координат на проективной прямой l . Показать, что если точки O_1, O_2 и E' в системе $O_1O_2O_3E$ имеют координаты $O_1(a_{11} : a_{21})$, $O_2(a_{12} : a_{22})$, $E'(a_{10} : a_{20})$, то координаты произвольной точки X прямой l в старой и новой системах координат связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= k_1 a_{11}x'_1 + k_2 a_{12}x'_2, \\ \rho x_2 &= k_1 a_{21}x'_1 + k_2 a_{22}x'_2, \end{aligned} \quad (12)$$

где k_1 и k_2 определяются из соотношений (11).

Для решения этой задачи предлагаем на плоскости выбрать две системы координат: $O_1O_2O_3E_0$ и $O_1O_2O_3E'_0$ так, как указано на рисунке 5, и воспользоваться задачей 3.

Формулы (12) называются формулами преобразования координат точек на проективной прямой.

3. Комплексная проективная плоскость. Для удобства дальнейшего изложения введем следующее соглашение. Пусть x_1, x_2, x_3 — три фиксированных действительных (комплексных) числа, причем $(x_1, x_2, x_3) \neq 0$. Через (x_1, x_2, x_3) (соответственно $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$) обозначим множество всех упорядоченных троек чисел вида $\rho x_1, \rho x_2, \rho x_3$, где ρ — любое действительное (комплексное) число, отличное от нуля.

Если на проективной плоскости дана система координат, то, как следует из теоремы [5.1], тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и множествами $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$.

Теперь мы расширим понятие точки следующим образом: при выбранной системе координат точкой назовем любое множество, где x, y, z — комплексные числа, не равные одновременно нулю. Точки $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ и $\langle y_1, y_2, y_3 \rangle$ совпадают тогда и только тогда, когда $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle = \langle y_1, y_2, y_3 \rangle$, и различны тогда и только тогда, когда $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle \cap \langle y_1, y_2, y_3 \rangle = \emptyset$.

Если $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ — точка, то каждый элемент этого множества назовем координатами точки. Таким образом, точка имеет бесчисленное множество координат, для которых выполняются все четыре условия теоремы [5.1] в предположении, что рассматриваются комплексные числа. Точку будем называть действительной или комплексной, если она имеет хотя бы одну тройку действительных координат, в противном случае точка называется комплексной или невещественной. Легко видеть, что действительная точка имеет бесчисленное множество действительных координат. Она может иметь также комплексные координаты. С другой стороны, комплексная точка не имеет ни одной тройки действительных координат. Например, точки $\langle (2, 4, 1) \rangle$ и $\langle (i, 0, 0) \rangle$, где $i = \sqrt{-1}$, являются действительными, а точка $\langle (i, 1, 1) \rangle$ — невещественной.

Совокупность всех действительных и комплексных точек плоскости называется комплексной проективной плоскостью. Действительная проективная плоскость (т.е. плоскость в старом смысле этого слова) содержится в комплексной плоскости.

Понятие комплексной плоскости введено нами в предположении, что на плоскости зафиксирована некоторая система координат $O_1O_2O_3E$. Сейчас мы покажем, что при определении этого понятия выбор исходной системы координат не является существенным. Предварительно введем некоторое дополнительное соглашение. Пусть $O_1O_2O_3E$ — исходная система координат, а $O_1O_2O_3E'$ — новая система координат, причем действительные точки O_1, O_2, O_3, E' заданы своими координатами

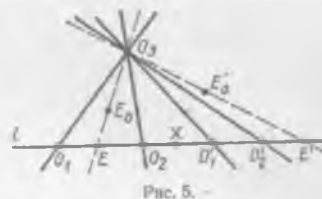


Рис. 5.

в системе $O_1O_2O_3E : O'_1(a_{11}, a_{21}, a_{31}), O'_2(a_{12}, a_{22}, a_{32}), O'_3(a_{13}, a_{23}, a_{33}), E'(a_{10}, a_{20}, a_{30})$, где все числа a_{ij} — действительны. Запишем формулы преобразования координат в виде (8). Как следует из предыдущего пункта, коэффициенты $c_{11}, c_{22}, c_{33}, \dots$ — действительные числа, однозначно определяемые через координаты точек O_1, O_2, O_3, E .

Пусть M_0 — произвольная точка (действительная или комплексная), имеющая в системе $O_1O_2O_3E$ координаты x_1, x_2, x_3 .

Числа x_1, x_2, x_3 , определяемые из соотношений (8), при произвольном действительном или комплексном p' по определению называются координатами точки M_0 в системе $O'_1O'_2O'_3E'$.

Таким образом, если система $O_1O_2O_3E'$ принята в качестве исходной, то точка M_0 есть множество $\langle(x_1, x_2, x_3)\rangle$. Из соотношений (8), принимая во внимание, что коэффициенты при x_1, x_2, x_3 — действительные числа, следует, что понятия действительных и комплексных точек не зависят от выбора системы координат.

4. Комплексно сопряженные точки. Введем следующие соглашения: будем говорить, что множество $\langle(x_1, x_2, x_3)\rangle$ комплексно сопряжено с $\langle(y_1, y_2, y_3)\rangle$, если из условия $(z_1, z_2, z_3) \in \langle(x_1, x_2, x_3)\rangle$ следует, что $(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3) \in \langle(y_1, y_2, y_3)\rangle$, где z_1, z_2, z_3 — любой элемент множества $\langle(x_1, x_2, x_3)\rangle$, а $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$ — числа, комплексно сопряженные соответственно числам z_1, z_2, z_3 . Легко показать, что если множество $\langle(x_1, x_2, x_3)\rangle$ комплексно сопряжено с $\langle(y_1, y_2, y_3)\rangle$, то, в свою очередь, множество $\langle(y_1, y_2, y_3)\rangle$ комплексно сопряжено с $\langle(x_1, x_2, x_3)\rangle$; поэтому, если условие, сформулированное выше, выполнено, то будем говорить, что множества $\langle(x_1, x_2, x_3)\rangle$ и $\langle(y_1, y_2, y_3)\rangle$ комплексно сопряжены.

Предлагаем учащемуся доказать следующее предложение: множества $\langle(x_1, x_2, x_3)\rangle$ и $\langle(y_1, y_2, y_3)\rangle$ комплексно сопряжены, если $\exists (z_1, z_2, z_3) [(z_1, z_2, z_3) \in \langle(x_1, x_2, x_3)\rangle \text{ и } (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3) \in \langle(y_1, y_2, y_3)\rangle]$.

Теперь легко ввести понятие комплексно сопряженных точек на комплексной проективной плоскости. Пусть $O_1O_2O_3E$ — произвольная система координат. Две точки X и Y называются комплексно сопряженными, если соответствующие множества $\langle(x_1, x_2, x_3)\rangle$ и $\langle(y_1, y_2, y_3)\rangle$ комплексно сопряжены. Например, $M_1(1 : 1 - i : 2 - 3i)$ и $M_2(1 : 1 + i : 2 + 3i)$ комплексно сопряжены. Из этого определения следует, что точка M_1 , комплексно сопряженная с M_2 , совпадает с ней тогда и только тогда, когда M_1 — действительная точка. Можно показать, что понятие комплексно сопряженных точек не зависит от выбора исходной системы координат.

§ 7. Уравнение прямой; координаты прямой

1. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Понятие уравнения множества точек в проективной геометрии вводится точно так же, как и в евклидовой геометрии. Уравнением множества

точек (Ω) называется такое аналитическое условие, которому удовлетворяют координаты точек множества (Ω) и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих этому множеству.

Задача 1. Написать уравнение прямой (l) , проходящей через две различные точки $A(a_1 : a_2 : a_3)$ и $B(b_1 : b_2 : b_3)$, заданные координатами в системе $O_1O_2O_3E$.

Решение. Если $M(x_1 : x_2 : x_3)$ — произвольная точка прямой AB , то согласно теореме [5.3] точка M принадлежит этой прямой тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Это и есть уравнение прямой, проходящей через точки A и B . ■

Запишем уравнения базисных прямых O_1O_2, O_2O_3 и O_3O_1 . Так как $O_1(1 : 0 : 0)$, $O_2(0 : 1 : 0)$ и $O_3(0 : 0 : 1)$, то, пользуясь соотношением (1), после элементарных преобразований получаем:

$$(O_1O_2) : x_3 = 0; (O_2O_3) : x_1 = 0; (O_3O_1) : x_2 = 0.$$

2. Параметрические уравнения прямой. Рассмотрим параметрическое задание прямой, проходящей через две различные точки $A(a_1 : a_2 : a_3)$ и $B(b_1 : b_2 : b_3)$, т. е. выразим координаты произвольной точки прямой AB через координаты точек A и B и произвольный параметр.

Пусть $M(x_1 : x_2 : x_3)$ произвольная точка прямой AB . Согласно задаче 1 ее координаты удовлетворяют уравнению (1). Так как согласно следствию теоремы [5.1] матрица $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ имеет ранг два, то первая строка определителя левой части соотношения (1) линейно выражается через остальные строки. Это означает, что существуют такие λ и μ , для которых

$$x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1, \quad x_2 = \lambda a_2 + \mu b_2, \quad x_3 = \lambda a_3 + \mu b_3. \quad (2)$$

Так как $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$, то $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

Таким образом, координаты любой точки прямой AB выражаются через координаты точек A и B при помощи соотношения (2).

Легко доказать обратное утверждение: если λ и μ какие угодно действительные числа, удовлетворяющие условию $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, то числа x_1, x_2, x_3 , полученные из соотношений (2), определяют на плоскости точку, лежащую на прямой AB .

Соотношения (2) называются параметрическими уравнениями прямой AB .

3. Прямая как линия первого порядка. Выше было показано, что прямая, проходящая через точки $A(a_1 : a_2 : a_3)$ и $B(b_1 : b_2 : b_3)$, имеет уравнение (1). Разложив определитель левой части этого уравнения по элементам первой строки, получаем:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \quad (3)$$

$$u_1 = \begin{vmatrix} a_2 a_3 \\ b_2 b_3 \end{vmatrix}, \quad u_2 = \begin{vmatrix} a_3 a_1 \\ b_3 b_1 \end{vmatrix}, \quad u_3 = \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

В силу следствия теоремы [5.1] хотя бы один из коэффициентов u_1, u_2, u_3 отличен от нуля. Таким образом, мы приходим к выводу, что всякая прямая на проективной плоскости определяется однородным линейным уравнением, не все коэффициенты которого равны нулю. Предлагаем читателю доказать обратное предложение.

Теорема [7.1]. Множество точек (Ω) проективной плоскости, координаты которых в некоторой выбранной системе координат удовлетворяют уравнению (3), где $(u_1, u_2, u_3) \neq (0, 0, 0)$, есть прямая. $\square$

Соотношение (3) называется общим уравнением прямой.

4. Взаимное расположение двух прямых. Известно, что в проективной плоскости две различные прямые всегда пересекаются. Выясним аналитическое условие пересечения двух прямых, если они заданы уравнениями. Предварительно докажем следующую теорему.

Теорема [7.2]. Для того чтобы прямые, заданные уравнениями

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0, \quad (5)$$

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0, \quad (6)$$

совпадали, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \quad (7)$$

был равен единице.

Доказательство. Пусть l_1 и l_2 — прямые, заданные соответственно уравнениями (5) и (6), а r — ранг матрицы (7). Предположим, что $l_1 = l_2$. Рассмотрим точки $A(u_2 : -u_1 : 0)$, $B(u_3 : 0 : -u_1)$ и $C(0 : u_3 : -u_2)$. Эти точки принадлежат прямой l_1 , так как их координаты удовлетворяют уравнению (5). Согласно предположению координаты этих же точек должны удовлетворять уравнению (6), поэтому

$$v_1 u_2 - v_2 u_1 = 0, \quad v_1 u_3 - v_3 u_1 = 0 \quad \text{и} \quad v_2 u_3 - v_3 u_2 = 0.$$

Это означает, что $r = 1$.

Обратно, пусть $r = 1$, т. е. $\exists t : v_1 = tu_1, v_2 = tu_2, v_3 = tu_3$. В этом случае уравнение (6) принимает вид: $tu_1 x_1 + tu_2 x_2 + tu_3 x_3 = 0$. Мы видим, что каждая точка прямой l_1 принадлежит прямой l_2 , т. е. прямые l_1 и l_2 совпадают. $\blacksquare$

Следствие. Для того чтобы две прямые, заданные уравнениями (5) и (6), пересекались, необходимо и достаточно, чтобы $r = 2$, где r — ранг матрицы (7).

5. Координаты прямой. Пусть прямая l задана общим уравнением (3). Коэффициенты u_1, u_2, u_3 этого уравнения называются координатами прямой l (обозначение: $l(u_1 : u_2 : u_3)$). Так как уравнение $tu_1 x_1 + tu_2 x_2 + tu_3 x_3 = 0$ при любом $t \neq 0$ определяет ту же прямую l , то в данной системе координат координаты прямой определяют

ся с точностью до числового множителя. Из теоремы [7.1] следует, что любая тройка чисел, не равных одновременно нулю, является координатами некоторой прямой плоскости. Далее, из теоремы [7.2] и ее следствия получаем следующие предложения.

1°. Для того чтобы прямые $l_1(u_1 : u_2 : u_3)$ и $l_2(v_1 : v_2 : v_3)$ совпадали, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы (7) был равен единице.

2°. Для того чтобы прямые $l_1(u_1 : u_2 : u_3)$ и $l_2(v_1 : v_2 : v_3)$ пересекались, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы (7) был равен двум.

3°. Точка $(x_1 : x_2 : x_3)$ принадлежит прямой $l(u_1 : u_2 : u_3)$ тогда и только тогда, когда $x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0$.

Мы видим, что понятия координат точек и прямых обладают совершенно аналогичными свойствами. Это обстоятельство не является случайным. В нем находит свое проявление принцип двойственности на плоскости, рассмотренный в § 3.

6. Условие принадлежности трех прямых одному пучку.

Задача 2. В системе координат $O_1 O_2 O_3 E$ даны три прямые своими координатами $u(u_1 : u_2 : u_3)$, $v(v_1 : v_2 : v_3)$, $w(w_1 : w_2 : w_3)$. Найти необходимое и достаточное условия того, чтобы эти прямые принадлежали одному пучку, т. е. имели хотя бы одну общую точку.

Решение. Данные прямые имеют уравнения:

$$\begin{aligned} u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 &= 0, \\ v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 &= 0, \\ w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Эти прямые принадлежат одному пучку тогда и только тогда, когда система (8) имеет хотя бы одно ненулевое решение, поэтому согласно известной теореме алгебры получаем теорему, двойственную [5.3].

Теорема [7.3]. Три прямые, заданные координатами на плоскости, принадлежат одному пучку тогда и только тогда, когда определитель третьего порядка, составленный из координат этих прямых, равен нулю.

7. Уравнение пучка. Уравнением пучка прямых $[M_0]$ называется аналитическое условие, которому удовлетворяют координаты всех прямых этого пучка и не удовлетворяют координаты прямых, не принадлежащих пучку $[M_0]$. Рассмотрим задачу, двойственную задаче 1.

Задача 3. Записать уравнение пучка, определяемого двумя различными прямыми $m(m_1 : m_2 : m_3)$ и $n(n_1 : n_2 : n_3)$, заданными координатами в системе $O_1 O_2 O_3 E$.

Решение этой задачи по существу ничем не отличается от решения задачи 1. При этом вместо теоремы [5.3] следует воспользоваться двойственной ей теоремой [7.3]. Уравнение пучка имеет вид:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

По аналогии с п. 2 можно получить параметрические уравнения пучка, т. е. выразить координаты любой прямой пучка через произвольные параметры:

$$u_1 = \lambda m_1 + \mu l_1, \quad u_2 = \lambda m_2 + \mu l_2, \quad u_3 = \lambda m_3 + \mu l_3. \quad (10)$$

Если центр пучка $[M_0]$ задан координатами $M_0 (a_1 : a_2 : a_3)$, то легко видеть, что пучок будет задан уравнением:

$$u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3 = 0. \quad (11)$$

В заключение докажем теорему, двойственную теореме [7.1].

Теорема [7.4]. Множество всех прямых $[\Omega]$, координаты которых удовлетворяют линейному однородному уравнению (11), где $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$, есть пучок с центром в точке $(a_1 : a_2 : a_3)$.

Доказательство. Так как $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$, то на плоскости существует точка A с координатами $(a_1 : a_2 : a_3)$. Если теперь записать уравнение пучка $[A]$, то легко видеть, что полученное уравнение в точности совпадает с уравнением (11). Отсюда следует, что множества прямых $[A]$ и $[\Omega]$ совпадают, т. е. $[\Omega]$ — пучок прямых. ■

§ 8. Сложное отношение точек и прямых

Настоящий параграф посвящен одному из фундаментальных понятий проективной геометрии — понятию сложного отношения четырех точек прямой и четырех прямых пучка. Это понятие в проективной геометрии играет роль, аналогичную роли длины отрезка в евклидовой геометрии.

1. Определение сложного отношения точек; неоднородные координаты точек прямой.

Пусть l — проективная прямая, а A, B, C и D — точки этой прямой. Мы предполагаем, что A, B и C — попарно различны, а D не совпадает с A . Примем точки A, B и C за систему координат на прямой (l) и рассмотрим координаты $x_1 : x_2$ точки D в этой системе (см. п. 2, § 5). Так как $A \neq D$, то $x_2 \neq 0$. Число $\frac{x_1}{x_2}$ называется *сложным отношением*¹ точек A, B, C и D и обозначается через $(ABCD)$. Таким образом, по определению

$$(ABCD) = \frac{x_1}{x_2}. \quad (1)$$

Важно подчеркнуть, что в этом определении порядок, в котором берутся данные точки, существен. Из содержания п. 2, § 5, следует:

1°. Каковы бы ни были точки A, B, C и D , удовлетворяющие условиям: $A \neq B, A \neq C, A \neq D, B \neq C$, всегда существует и однозначно определяется сложное отношение $(ABCD)$.

¹ В учебной литературе сложное отношение иногда называется двойным или ангармоническим отношением.

2°. Если A, B и C — различные точки, а ξ — произвольное фиксированное действительное число, то всегда существует и единственным образом определяется точка X , удовлетворяющая условию:

$$(ABCX) = \xi. \quad (2)$$

Отсюда непосредственно следует:

3°. Если $(ABCD) = (ABCD')$, то точки D и D' совпадают.

Свойство 2° позволяет ввести следующее определение:

Если $O_1 O_2 E$ — система координат на прямой, то число ξ , удовлетворяющее условию $(O_1 O_2 ED) = \xi$, называется *проективной* или *неоднородной* координатой точки D в данной системе.

Из соотношений (1) и (2) заключаем, что любая точка прямой (l) , за исключением точки O_1 в системе $O_1 O_2 E$, имеет неоднородную проективную координату ξ , которая связана с однородными координатами $(x_1 : x_2)$ той же точки соотношением:

$$\frac{x_1}{x_2} = \xi. \quad (3)$$

Очевидно, точки O_2 и E имеют соответственно неоднородные координаты 0 и 1.

2. Выражение сложного отношения через однородные координаты точек. Прежде чем перейти к изучению свойств сложного отношения, докажем следующую лемму.

Лемма [8.1]. Если на прямой (l) в системе координат $O_1 O_2 E$ даны четыре точки однородными координатами: $A (a_1 : a_2), B (b_1 : b_2), P (p_1 : p_2), Q (q_1 : q_2)$, то

$$(ABPQ) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & p_1 \\ a_2 & p_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q_1 & b_2 \\ q_2 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & q_1 \\ a_2 & q_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 & b_1 \\ p_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \quad (4)$$

Предполагается, что $A \neq B, A \neq P, A \neq Q, B \neq P$.

Доказательство. Из определения (1) сложного отношения следует, что задача сводится к определению координат точки Q в системе ABP . Воспользуемся формулами преобразования координат точек (12), § 6, при переходе от системы $O_1 O_2 E$ к системе ABP . Если $(q'_1 : q'_2)$ — координаты точки Q в системе ABP , то согласно этим формулам имеем:

$$\begin{aligned} p q_1 &= k_1 a_1 q'_1 + k_1 b_1 q'_2, \\ p q_2 &= k_1 a_2 q'_1 + k_1 b_2 q'_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где k_1 и k_2 определяются из соотношений (11), § 6, которые в данном случае имеют вид:

$$\begin{aligned} a_1 k_1 + b_1 k_2 &= p_1, \\ a_2 k_1 + b_2 k_2 &= p_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$. По условию $A \neq B$, поэтому $\Delta \neq 0$. Из соотношений (5) по формулам Крамера получаем:

$$q_1^* = \frac{\begin{vmatrix} \rho q_1 & k_2 b_1 \\ \rho q_2 & k_2 b_2 \end{vmatrix}}{k_1 k_2 \Delta}, \quad q_2^* = \frac{\begin{vmatrix} k_1 a_1 & \rho q_1 \\ k_1 a_2 & \rho q_2 \end{vmatrix}}{k_1 k_2 \Delta}.$$

Согласно формуле (1) будем иметь:

$$(ABPQ) = \frac{q_1}{q_2} = \frac{k_2}{k_1} \frac{\begin{vmatrix} q_1 & b_1 \\ q_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & q_1 \\ a_2 & q_2 \end{vmatrix}}.$$

С другой стороны, из соотношений (6) имеем:

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} p_1 & b_1 \\ p_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad k_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & p_1 \\ a_2 & p_2 \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

Подставив эти соотношения в предыдущую формулу, получаем искомым результат. ■

Легко убедиться в том, что формулы (4) находятся в согласии с формулой (1). В самом деле, если $A = O_1$, $B = O_2$, $P = E$, то $A(1:0)$, $B(0:1)$, $P(1:1)$, поэтому из (4) получаем $(ABPQ) = \frac{q_1}{q_2}$, т. е. приходим к формуле (1).

Пример. В системе $O_1 O_2 E$ даны две точки координатами $P(p_1: p_2)$, $Q(q_1: q_2)$. Вычислить сложное отношение $O_1 O_2 PQ$ в предположении, что $O_1 \neq P$, $O_2 \neq P$, $O_1 \neq Q$.

Решение. Воспользуемся формулой (4). В данном случае $O_1(1:0)$, $O_2(0:1)$; поэтому согласно этой формуле получаем:

$$(O_1 O_2 PQ) = \frac{p_1 q_2}{p_2 q_1}. \quad (7)$$

3. Выражение сложного отношения четырех точек через неоднородные координаты. Пользуясь соотношением (4), легко получить формулы для вычисления сложного отношения точек, заданных неоднородными координатами в системе $O_1 O_2 E$. Пусть в этой системе даны точки $A(a)$, $B(b)$, $P(p)$ и $Q(q)$, ни одна из которых не совпадает с точкой O_1 . Тогда имеют место следующие формулы:

$$(ABPQ) = \frac{(a-p)(q-b)}{(a-q)(p-b)}; \quad (8)$$

$$(O_1 BPQ) = \frac{q-b}{p-b}; \quad (9)$$

$$(O_1 O_2 PQ) = \frac{q}{p}. \quad (10)$$

Эти соотношения легко получаются из формулы (4). Например, для получения формулы (8) достаточно раскрыть все определители и числитель и знаменатель разделить на $a_2 b_2 p_2 q_2$.

4. Основные свойства сложного отношения. Используем полученные формулы для изучения свойств сложного отношения. Из формулы (1) непосредственно следует:

$$1^\circ. (ABCC) = 1, (ABCB) = 0.$$

Если A, B, C и D попарно различные точки, то, вводя на прямой систему координат и воспользовавшись соотношением (4), легко убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$2^\circ. (ABCD) = \frac{1}{(ABDC)}.$$

$$3^\circ. (ABCD) = (CDAB).$$

Из 2° и 3° легко получить следующие равенства:

$$4^\circ. (ABCD) = (CDAB) = (BADC) = (DCBA).$$

Несколько сложнее доказать следующее свойство:

$$5^\circ. (ABCD) + (ACBD) = 1.$$

Систему координат $O_1 O_2 E$ возьмем так, чтобы $A = O_1$. Пусть в этой системе остальные точки имеют координаты $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$. Из формулы (9) имеем:

$$(ABCD) = \frac{d-b}{c-b}, \quad (ACBD) = \frac{d-c}{b-c}.$$

Сложив эти соотношения, получаем искомым результат.

В заключение отметим, что если C, D и E — различные точки прямой AB , ни одна из которых не совпадает с точками A и B , то

$$6^\circ. (ABCD)(ABDE)(ABEC) = 1.$$

Для проверки этого соотношения достаточно выбрать систему координат $O_1 O_2 E$ так, чтобы $O_1 = A$, $O_2 = B$, и воспользоваться соотношением (7).

5. Сложные отношения всех перестановок четырех точек прямой.

Задача 1. Дано сложное отношение четырех различных точек: $(A_1 A_2 A_3 A_4)$. Вычислить $(A_1 A_i A_j A_k)$, где i, j, k представляет собой некоторую перестановку чисел 1, 2, 3, 4.

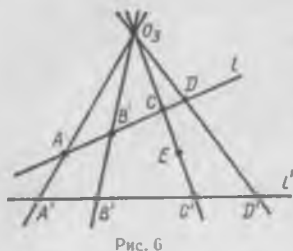
Решение. Так как из четырех чисел можно образовать $4! = 24$ перестановки, то для данных точек можно получить 24 сложных отношений. Воспользовавшись свойствами 2° и 5° , п. 4, получаем:

$$(A_1 A_2 A_3 A_4) = \xi, \quad (A_1 A_2 A_4 A_3) = \frac{1}{\xi}, \quad (A_1 A_3 A_2 A_4) = \frac{1}{1-\xi},$$

$$(A_1 A_4 A_2 A_3) = \frac{\xi}{\xi-1}, \quad (A_1 A_3 A_4 A_2) = 1 - \frac{\xi}{\xi-1}, \quad (A_1 A_2 A_4 A_3) = \frac{\xi-1}{\xi}.$$

Учитывая свойство 4° , легко прийти к выводу, что все остальные перестановки данных точек приводят нас к сложному отношению, равному одному из указанных выше шести чисел; поэтому приходим к выводу.

Теорема [8.2]. Пусть на прямой даны четыре попарно различные точки. Если ξ — сложное отношение этих точек, заданных



каком-то определенном порядке, то сложное отношение тех же точек, заданных в любом другом порядке, равно одному из чисел:

$$\bar{\epsilon}, \frac{1}{\bar{\epsilon}}, 1 - \bar{\epsilon}, \frac{1}{1 - \bar{\epsilon}}, \frac{\bar{\epsilon} - 1}{\bar{\epsilon}}, \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon} - 1}.$$

6. Сложное отношение четырех прямых пучка. Согласно принципу двойственности пучок прямых $[L]$ является фигурой, двойственной прямой (l) (см. п. 6, § 3). Фигура F , образованная прямой l с четырьмя на ней точками A, B, C, D , двойственной фигуре F^* , состоящей из точки L и четырех прямых a, b, c и d , проходящих через нее. Естественно ожидать, что существует понятие, связанное с прямыми a, b, c и d , двойственное сложному отношению $(ABCD)$, т. е. играющее ту же роль в пучке прямых, какую выполняет сложное отношение для точек, лежащих на одной прямой. Ниже будет показано, что такое понятие действительно существует. Для этого предварительно следует доказать следующую важную теорему.

Теорема [8.3]. На различных прямых l и l' даны по четыре попарно различные точки: A, B, C, D на прямой l и A', B', C' и D' на прямой l' . Если прямые AA', BB', CC' и DD' принадлежат одному пучку, то $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

Доказательство. Пусть O_3 — центр пучка, которому принадлежат прямые AA', BB', CC' и DD' (рис. 6). Так как $l \neq l'$, то $O_3 \notin l$ и $O_3 \notin l'$. Возьмем на прямой O_3C точку E , отличную от O_3, C и C' . Легко видеть, что A, B, O_3, E являются точками общего положения. Тем же свойством обладают точки A', B', O_3, E . Рассмотрим две системы координат на плоскости ABO_3E и $A'B'O_3E$. Пусть в системе ABO_3E точки A' и B' имеют координаты $A'(a_1 : a_2 : a_3)$ и $B'(b_1 : b_2 : b_3)$. Так как $A' \in O_3A$, $B' \in O_3B$, то $a_3 = 0$ и $b_3 = 0$. Воспользовавшись соотношениями (7) и (5), § 6, легко получить следующие формулы преобразования координат точек при переходе от системы ABO_3E к системе $A'B'O_3E$:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= x'_1, \quad \rho x_2 = x'_2, \\ \rho x_3 &= \frac{a_2}{a_1} x'_1 + \frac{b_2}{b_1} x'_2 + \left(1 - \frac{a_2}{a_1} - \frac{b_2}{b_1}\right) x'_3. \end{aligned} \quad (11)$$

Пусть точка D в системе ABO_3E имеет координаты $D(d_1 : d_2 : 0)$, а в системе $A'B'O_3E$ — координаты $D(d'_1 : d'_2 : d'_3)$. Так как ABC — система координат, индуцированная исходной системой ABO_3E на прямой l , то согласно следствию теоремы [5.2] точка D , как точка прямой l , в системе ABC имеет координаты $D(d_1 : d_2)$. По формуле (1) получаем $(ABCD) = \frac{d_1}{d_2}$. С другой стороны, точка D' является проекцией точки D из центра O_3 на прямую l' ; поэтому согласно теореме [5.2]

эта точка, как точка прямой l' , в системе $A'B'C'$ имеет координаты $D'(d'_1 : d'_2)$. По формуле (1) получаем: $(A'B'C'D') = \frac{d'_1}{d'_2}$. Из первых двух формул (11) следует, что $\rho d_1 = d'_1$, $\rho d_2 = d'_2$; поэтому

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{d'_1}{d'_2} \Rightarrow (ABCD) = (A'B'C'D'). \blacksquare$$

Теперь легко ввести понятие сложного отношения четырех прямых пучка. Пусть a, b, c, d — четыре различные прямые пучка $[L]$. Рассмотрим произвольную прямую l , не проходящую через L . Если $A = l \cap a$, $B = l \cap b$, $C = l \cap c$ и $D = l \cap d$, то $(ABCD)$ называется сложным отношением прямых a, b, c и d и обозначается так: $(abcd)$. Из теоремы [8.3] следует, что $(abcd)$ не зависит от выбора прямой l . Совершенно очевидно, что предложения 1°, 2° и 3° п. 1 сохраняются, если в них слово «точка» заменить словом «прямая». Точно так же, свойства 1° — 6° п. 4 полностью сохраняются, если в них точки A, B, C, D и E заменить прямыми a, b, c, d, e . В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Задача 2. В системе координат $O_1O_2O_3E$ даны четыре различные прямые a, b, c, d своими координатами, принадлежащие пучку $[O_3]$. Вычислить $(abcd)$, если $a(a_1 : a_2 : 0)$, $b(b_1 : b_2 : 0)$, $c(c_1 : c_2 : 0)$, $d(d_1 : d_2 : 0)$.

Решение. Для решения задачи сначала вычислим координаты точек A, B, C, D , в которых данные прямые пересекают прямую O_1O_2 . Данные прямые имеют уравнения:

$$(a) \ a_1x_1 + a_2x_2 = 0; \quad (b) \ b_1x_1 + b_2x_2 = 0; \quad (c) \ c_1x_1 + c_2x_2 = 0; \\ (d) \ d_1x_1 + d_2x_2 = 0.$$

Отсюда получаем: $A(-a_2 : a_1 : 0)$, $B(-b_2 : b_1 : 0)$, $C(-c_2 : c_1 : 0)$, $D(-d_2 : d_1 : 0)$.

Учитывая теорему [5.2] и используя формулу (4), можно вычислить сложное отношение точек A, B, C, D . Принимая во внимание, что $(abcd) = (ABCD)$, после элементарных преобразований получаем:

$$(abcd) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad (12)$$

7. Сложное отношение четырех точек на расширенной прямой. Выясним, как интерпретируется понятие сложного отношения четырех точек на расширенной прямой (см. п. 4, § 4). Для этого воспользуемся схемой, построенной нами в п. 5, § 4. Пусть Π_2^∞ — расширенная плоскость пространства TV_3 , а l^∞ — расширенная прямая этой плоскости (см. рис. 7). Возьмем точку O пространства TV_3 , не лежащую в плоскости Π_2^∞ . Ненулевой вектор a пространства TV_3 будет инцидентен

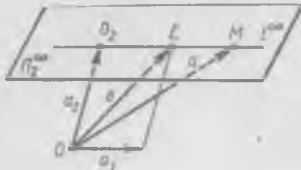


Рис. 7.

ленной точкой L_∞ . Теперь возьмем репер a_1, a_2, e , инцидентный системе координат O_1O_2E так, чтобы $a_2 = \overrightarrow{O_1O_2}$, $e = \overrightarrow{O_2E}$ (рис. 7). При этом из условия $e = a_1 + a_2$ однозначно определяется вектор a_1 , $a_1 \times L_\infty$.

Если M — произвольная собственная точка прямой l^∞ , то $\overrightarrow{OM} \times M$, поэтому координаты вектора $x = \overrightarrow{OM}$ в базисе a_1, a_2 являются однородными координатами точки M . Так как $\overrightarrow{OM} = x_1 a_1 + a_2$, то число x_1 будет неоднородной проективной координатой точки M в системе O_1O_2E . Выясним геометрический смысл этого числа в пространстве TV_3 . Так как $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_2} + \overrightarrow{O_2M} = x_1 a_1 + a_2$, то $\overrightarrow{O_2M} = x_1 a_1$; поэтому

$x_1 = \frac{\overrightarrow{O_2M}}{a_1} = \frac{\overrightarrow{O_2M}}{\overrightarrow{O_2E}}$. Мы пришли к интересному выводу: если система координат O_1O_2E на прямой l выбрана так, что $O_1 = L_\infty$, то неоднородная проективная координата собственной точки M в этой системе есть аффинная координата этой же точки в системе $O_2, \overrightarrow{O_2E}$, если рассматривать ее как точку аффинной прямой l пространства TV_3 .

Таким образом, для того, чтобы найти сложное отношение четырех собственных точек A, B, C и D расширенной прямой l^∞ , необходимо взять на этой прямой систему координат O_2P , вычислить аффинные координаты точек A, B, C, D в этой системе и воспользоваться формулой (8).

Для выяснения геометрического смысла сложного отношения четырех точек, из которых одна несобственная, воспользуемся предыдущим выводом, а именно: в системе $L_\infty O_2E$ точка M имеет неоднородную проективную координату $x_1 = \frac{\overrightarrow{O_2M}}{\overrightarrow{O_2E}}$; поэтому согласно (2) $(L_\infty O_2EM) =$

$= x_1 = \frac{\overrightarrow{O_2M}}{\overrightarrow{O_2E}} = -(MEO_2)$; здесь (MEO_2) — простое отношение трех точек. В этом соотношении O_2, E и M — три различные точки прямой, поэтому их можно обозначать через A, B, C . Из предыдущего соотношения, учитывая 4° и 5° п. 4, окончательно получаем:

$$(ABCL_\infty) = -(ABC). \quad (13)$$

Теперь выясним геометрический смысл сложного отношения для общего случая, т. е. когда все четыре точки являются собственными.

точке $M \in l^\infty$ тогда и только тогда, когда $a \in OM$. Очевидно, бесконечно удаленной точке L_∞ прямой l^∞ будут инцидентны те и только те ненулевые векторы пространства TV_3 , которые принадлежат обычной прямой l .

Возьмем на прямой l^∞ проективную систему координат O_1O_2E так, чтобы O_1 совпала с бесконечно удаленной точкой L_∞ .

Из свойства 8.4.6, учитывая 8.4.2, имеем:

$$\frac{(ABCD)(ABDE)}{(ABCE)} = 1.$$

Если предположить, что A, B, C, D — собственные точки, то, учитывая (13), после элементарных преобразований приходим к формуле

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}. \quad (14)$$

8. Сложное отношение прямых на расширенной евклидовой плоскости. В заключение приведем без доказательства формулу, раскрывающую геометрический смысл сложного отношения четырех различных прямых a, b, c и d пучка с центром в собственной точке:

$$(abcd) = \frac{\sin(a, c) \sin(d, b)}{\sin(a, d) \sin(c, b)}. \quad (15)$$

При решении задач для практического применения этой формулы необходимо ввести ориентацию на плоскости, взять на каждой из этих прямых единичный вектор в произвольном направлении и считать, что $(a, c) = \widehat{a, c}$, $(d, b) = \widehat{d, b}$, $(a, d) = \widehat{a, d}$, $(c, b) = \widehat{c, b}$.

§ 9. Отрезки на проективной прямой; порядок точек

1. Разделенность двух пар точек прямой. Пусть A, B, C и D — различные точки одной прямой. Будем говорить, что пара AB разделяет пару CD , если $(ABCD) < 0$ (обозначение: $AB \div CD$). В противном случае говорят, что пара AB не разделяет пару CD (обозначение: $AB \nmid CD$). Из свойства 8.4.3 следует, что свойство разделенности является взаимным, т. е. если $AB \div CD$, то $CD \div AB$; поэтому предложения «пара AB разделяет пару CD », «пара CD разделяет пару AB », «пары AB и CD разделяют друг друга» являются эквивалентными. Далее, так как

$$(ABCD) = \frac{1}{(ABDC)} \text{ и } (ABCD) = \frac{1}{(BACD)},$$

то из соотношения $AB \div CD$ следует, что $BA \div CD$; $AB \div DC$; $BA \div DC$. Таким образом, свойство разделенности не зависит от того, в каком порядке рассматриваются точки каждой пары.

Рассмотрим некоторые свойства этого понятия.

1°. Если A, B и C — три различные точки прямой, то существует бесконечное множество точек M таких, что $AB \div CM$, и бесконечное множество точек N таких, что $AB \nmid CN$. Это свойство непосредственно следует из 8.1.2.

2°. Из любых четырех попарно различных точек прямой единственным образом могут быть составлены две разделенные пары.

В самом деле, если A, B, C и D — данные точки, то из них можно составить три существенно различные пары: AB и CD ; AC и BD ; AD и BC . Все остальные пары, составленные из данных точек, отличаются от

этих пар либо порядком пар, либо порядком точек в каждой паре. Если $(ABCD) = \sigma$, то в силу того, что A, B, C и D — попарно различные точки, имеем: $\sigma \neq 0$; $\sigma \neq 1$.

Из свойств 8.4.2 — 8.4.5 следует, что

$$(ABCD) = \sigma; (ACBD) = 1 - \sigma; (ADBC) = \frac{\sigma - 1}{\sigma}. \quad (1)$$

Рассмотрим три возможных случая: а) $\sigma < 0$; б) $0 < \sigma < 1$; в) $\sigma > 1$. Из соотношений (1) легко определить знаки сложных отношений для $(ABCD)$, $(ACBD)$ и $(ADBC)$ в каждом из перечисленных выше случаев:

- а) $(ABCD) < 0$; $(ACBD) > 0$; $(ADBC) > 0$;
- б) $(ABCD) > 0$; $(ACBD) > 0$; $(ADBC) < 0$;
- в) $(ABCD) > 0$; $(ACBD) < 0$; $(ADBC) > 0$.

Из этих неравенств следует утверждение 2°.

3°. Пусть A, B, C, D и E — различные точки прямой. Если $AB \div CD$ и $AB \div CE$, то $AB \div DE$.

4°. Пусть A, B, C, D и E — различные точки прямой. Если $AB \div CD$, $AB \div CE$, то $AB \div DE$. Эти свойства непосредственно следуют из 8.4.6.

2. Отрезки проективной прямой. Соотношение разделенности пар точек позволяет ввести понятие отрезков на проективной прямой. Предварительно докажем следующую теорему.

Теорема [9.1]. Если на прямой (1) даны две различные точки A и B , то множество всех остальных точек этой прямой разбивается на два класса (множества) так, что

- а) если точки M и N принадлежат различным классам, то $AB \div MN$;
- б) если различные точки M и N принадлежат одному и тому же классу, то $AB \equiv MN$.

Заданием прямой (1) и точек A и B на ней разбиение на классы, удовлетворяющее вышеуказанным условиям, определяется однозначно.

Доказательство. Обозначим через Ω множество всех точек прямой (1), отличных от A и B . Введем на прямой (1) систему координат ABE , где A и B — данные точки, а E — произвольная точка множества Ω . Очевидно, каждая точка множества Ω будет иметь неоднородную проективную координату, причем различные точки будут иметь различные координаты. Обратно, любое действительное число, отличное от нуля, является координатой некоторой точки множества. Заметим, что число 0 является координатой точки B , которая не принадлежит множеству Ω .

Обозначим через Ω_1 и Ω_2 множество всех точек прямой (1), имеющих соответственно положительные и отрицательные координаты. Очевидно, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ и $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Легко показать, что множества Ω_1 и Ω_2 удовлетворяют условиям теоремы. В самом деле, пусть M и N — произвольные точки множества Ω_1 , имеющие в системе ABE проективные неоднородные координаты $M(\alpha)$; $N(\beta)$. Согласно (10), § 8, имеем: $(ABMN) = \frac{\beta}{\alpha}$.

а) Если $M \in \Omega_1$; $N \in \Omega_1$; то $\alpha > 0$; $\beta > 0$ и $\frac{\beta}{\alpha} > 0 \Rightarrow AB \equiv MN$. Очевидно, мы приходим к тому же выводу, если предположим, что $M \in \Omega_2$; $N \in \Omega_2$.

б) Если $M \in \Omega_1$; $N \in \Omega_2$, то $\alpha > 0$; $\beta < 0$, поэтому $\frac{\beta}{\alpha} < 0 \Rightarrow AB \div MN$. В случае $M \in \Omega_2$, $N \in \Omega_1$ мы приходим к тому же выводу.

Остается показать, что заданием точек A и B разбиение, удовлетворяющее условиям теоремы, определяется однозначно. Пусть Ω_1, Ω_2 — разбиение множества Ω на два класса, удовлетворяющее условиям теоремы, выполненное каким-либо другим способом. Не нарушая общности, предположим, что $E \in \Omega_1$. Так как $E(1)$, то $E \in \Omega_1$. Докажем, что $\Omega_2 = \Omega_2'$. Пусть $M \in \Omega_2$. Это означает, что $EM \div AB$. Так как $M \in \Omega$, то M — точка одного из множества Ω_1 и Ω_2 . Очевидно, $M \in \Omega_2$, так как в противном случае $EM \equiv AB$. Таким образом, $\Omega_2 \subset \Omega_2'$. Точно так же можно показать, что $\Omega_2' \subset \Omega_2$. Таким образом, $\Omega_2 = \Omega_2' \Rightarrow \Omega_1 = \Omega_1'$. ■

Доказанная теорема позволяет ввести следующее определение: каждый из классов точек Ω_1 и Ω_2 , определяемый различными точками A и B прямой (1), вместе с точками A и B называется **проективным отрезком** или **просто отрезком** с концами A и B . Таким образом, две точки прямой определяют не один отрезок, как в обычной геометрии, а два отрезка с общими концами — один, содержащий все точки множества Ω_1 и точки A и B , и другой, содержащий все точки множества Ω_2 и точки A и B . Эти два отрезка называются **дополнительными** друг к другу. Точки множеств Ω_1 и Ω_2 называются **внутренними** точками соответствующих отрезков. Множество Ω_1 (или Ω_2) иногда называется **открытым отрезком**, определяемым точками A и B .

Для задания отрезка необходимо иметь его концы и еще одну внутреннюю точку отрезка или точку, не принадлежащую отрезку. В дальнейшем отрезок с концами A и B , не содержащий точку H , будем обозначать через AB/H . В тех случаях, когда из контекста ясно, о каком из двух отрезков, определяемых точками A и B , идет речь, отрезок будем обозначать через $AB/1$, а дополнительный отрезок — через $AB/2$.

Из хода доказательства предыдущей теоремы можно сделать следующие выводы.

Следствие 1. Если AB/E — данный отрезок, то множество внутренних точек этого отрезка в системе ABE совпадает с множеством тех точек прямой AB , которые имеют отрицательные проективные неоднородные координаты, а множество внутренних точек дополнительного отрезка — с множеством точек, имеющих положительные координаты.

Из этого следствия, в частности, следует, что каждый проективный отрезок имеет бесчисленное множество точек.

Следствие 2. Отрезок AB/E есть множество, содержащее точки A и B , а также все точки X , удовлетворяющие условию $EX \div AB$.

3. Порядок точек на проективной прямой. Как известно, множество называется упорядоченным, если для его элементов определено понятие «предшествовать», причем из любых двух различных элементов один предшествует другому. При этом должны быть выполнены следующие условия.

а) Если элемент x предшествует элементу y , то элемент y не предшествует элементу x .

б) Если x предшествует y , а y предшествует z , то x предшествует z .

Если элемент x предшествует элементу y , то говорят также, что элемент y следует за элементом x .

Легко показать, что множество точек проективного отрезка можно упорядочить. Пусть AB/H — направленный отрезок, т. е. отрезок, концы которого заданы в определенном порядке. Установим порядок точек на отрезке AB/H следующим образом: если P и Q — различные внутренние точки отрезка, то будем говорить, что P предшествует Q , если $AQ \div PB$. Кроме того, будем считать, что точка A предшествует всем другим точкам отрезка, а точка B следует за всеми другими точками.

Можно показать, что установленный таким образом порядок удовлетворяет условиям а) и б), сформулированным выше.

Если на отрезке AB/H установлен порядок точек вышеуказанным способом, то мы будем говорить, что порядок установлен от точки A к точке B . В этом случае будем также говорить, что дан упорядоченный отрезок AB/H (A — первая точка, B — вторая).

Можно показать, что если на прямой зафиксировать некоторую точку M_0 , то множество Ω всех точек прямой, за исключением точки M_0 , можно упорядочить. Изложение этого вопроса мы опускаем.

4. Проективная прямая как замкнутая линия. Для того чтобы лучше представить себе понятие порядка точек на проективной прямой, желательно найти в привычном нам евклидовом пространстве такую фигуру, которая бы обладала теми же свойствами порядка, что и проективная прямая. На первый взгляд кажется естественным в качестве такой фигуры взять прямую евклидовой плоскости и сравнить свойства порядка этой прямой с соответствующими свойствами проективной прямой. Однако первые же попытки показывают, что свойства порядка на этих двух прямых существенно отличаются друг от друга.

Отметим хотя бы то обстоятельство, что если, например, на проективной прямой даны три различные точки A , B и C , то порядок на прямой всегда можно определить так, чтобы A предшествовала B , а B предшествовала C . Аналогичное свойство для точек евклидовой прямой при естественном упорядочении не существует.

Свойства порядка точек проективной прямой во многом совпадают со свойствами порядка точек окружности или любой другой замкнутой

линии. В самом деле, проективные отрезки прямой аналогичны дугам окружности, определяемым двумя ее концами. Эта аналогия становится совершенно очевидной, если ввести следующее соглашение.

Пусть $AB/1$ — одна дуга, а $AB/2$ — вторая; будем говорить, что пара PQ разделяет пару AB , если P и Q принадлежат разным дугам, и пара PQ не разделяет пару AB , если они принадлежат одной и той же дуге. При этом будут выполняться все свойства разделимости, отмеченные в п. 1 настоящего параграфа. Будет выполнена также теорема [9.1] и все последующие выводы о порядке точек.

Из изложенных выше соображений мы приходим к выводу, что проективная прямая обладает свойствами замкнутой линии. Это утверждение будет более убедительным, если мы проведем следующие, не очень строгие, но в достаточной степени наглядные рассуждения. В § 4, п. 2 было показано, что пучок прямых $[O]_2$ аффинной плоскости является моделью проективной прямой. Роль п-точек играют прямые этого пучка. Возьмем некоторую переменную п-точку M (т. е. прямую пучка $[O]_2$) и, отправляясь от фиксированной точки M_0 , будем непрерывно перемещать точку M в одном из направлений порядка, установленных на п-прямой выбором точки M_0 в качестве начальной (т. е. переменную пучка $[O]_2$ будем вращать вокруг точки O в одном из направлений, отправляясь от фиксированной прямой). Тогда легко видеть, что переменная точка M снова вернется в исходное положение M_0 (так как переменная прямая пучка $[O]_2$ снова возвращается в положение, совпадающее с фиксированной прямой).

§ 10. Гармонические четверки точек и прямых. Полный четырехвершинник

1. Гармонические четверки точек. Пусть на прямой l даны четыре различные точки M_1, M_2, M_3 и M_4 . Если $\xi = (M_1, M_2, M_3, M_4)$, то согласно теореме [8.2] сложное отношение этих точек, заданных в любом другом порядке, равно одному из чисел:

$$\xi, \frac{1}{\xi}, 1 - \xi, \frac{1}{1 - \xi}, \frac{\xi - 1}{\xi}, \frac{\xi}{\xi - 1}. \quad (1)$$

Возникает вопрос, существует ли такое расположение точек M_1, M_2, M_3 и M_4 , при котором хотя бы два числа из совокупности (1) равны друг другу. Если, например, $\xi = \frac{1}{\xi}$, то $\xi^2 = 1$. Так как $M_3 \neq M_4$, то отсюда получаем: $\xi = -1$. В этом случае легко подсчитать, что все числа совокупности (1) имеют значения $-1, 2$ или $\frac{1}{2}$. Мы приходим к тому же результату, если предположим, что любые два других числа из совокупности (1) равны друг другу. Эти рассуждения приводят нас к следующему интересному выводу.

Пусть числа (1) являются сложными отношениями четырех различных точек M_1, M_2, M_3, M_4 прямой l , взятых в любом порядке. Тогда, в зависимости от расположения данных точек на прямой l , возможны

два существенно различных случая: а) числа (1) попарно различны и в этом случае ни одно из них не равно -1 , 2 или $1/2$; б) числа (1) имеют значения: -1 , $-1/2$, $1/2$, 2 , $1/2$.

Последний случай для нас представляет особый интерес, поэтому настоящий параграф посвящен изучению свойств четверок точек, обладающих этим свойством. Будем говорить, что четыре различные точки M_1, M_2, M_3, M_4 прямой l образуют гармоническую четверку, если $(M_1M_2M_3M_4)$ равно одному из чисел -1 , 2 или $1/2$. Очевидно, точки всегда можно обозначить буквами A, B, C и D , так чтобы $(ABCD) = -1$. В этом случае говорят, что пара AB гармонически разделяет пару CD или пара AB гармонически сопряжена с парой CD (обозначение: $AB \perp CD$).

Отметим, что если $AB \perp CD$, то $AB \div CD$. Этим и объясняется термин «пара AB гармонически разделяет пару CD ».

2. Свойства гармонических четверок точек. Из соотношений, рассмотренных в п. 4, § 8, следует, что если $(ABCD) = -1$, то $(ABCD) = (ABDC) = (BACD) = (BADC) = (CDBA) = (DCAB) = (DCBA) = -1$. Из этих соотношений непосредственно следует, что если $AB \perp CD$, то $AB \perp DC, BA \perp CD, BA \perp DC, CD \perp BA, DC \perp AB, DC \perp BA$.

Мы приходим к выводу, что свойство гармонической сопряженности пар точек является взаимным и не зависит от того, в каком порядке рассматриваются точки каждой пары.

Предлагаем читателю, пользуясь соотношениями 8.4.6, 8.4.2 и определением неоднородных координат, решить две задачи, в которых даны критерии гармонической сопряженности пар точек.

Задача 1. Пусть A, B, C, D, E — различные точки. Доказать, что $AB \perp CD$ тогда и только тогда, когда

$$(ABEC) + (ABED) = 0. \quad (2)$$

Задача 2. На прямой дана система координат ABE и в этой системе две точки неоднородными координатами $C(c), D(d)$. Доказать, что $AB \perp CD$ тогда и только тогда, когда

$$c + d = 0. \quad (3)$$

Пользуясь этими задачами, докажем следующее предложение.

Задача 3. Пусть A_1, A_2, B_1 и B_2 — произвольные точки прямой, удовлетворяющие условию $A_1A_2 \perp B_1B_2$. Доказать, что существуют точки C и D , которые гармонически разделяют как пару A_1A_2 , так и пару B_1B_2 .

Решение. Пусть в системе координат A_1A_2E , где E — точка прямой, отличная от A_1 и A_2 , точки B_1, B_2, C, D имеют соответственно координаты $B_1(\beta_1), B_2(\beta_2), C(x), D(y)$. Так как $A_1A_2 \perp B_1B_2$, то согласно задаче 2 имеем: $x + y = 0$. С другой стороны, $B_1B_2 \perp CD$, поэтому $(B_1B_2CD) = -1$. По формуле (8), § 8, получаем:

$$\frac{(x - \beta_1)(\beta_2 - y)}{(x - \beta_2)(\beta_1 - y)} = -1$$

или, учитывая, что $y = -x$, после элементарных преобразований приходим к соотношению: $x^2 = \beta_1\beta_2$. Так как $(A_1A_2B_1B_2) > 0$, то согласно формуле (10), § 8, имеем: $\frac{\beta_1}{\beta_2} > 0$ или $\beta_1\beta_2 > 0$. Таким образом,

$$x = \sqrt{\beta_1\beta_2} \text{ и } y = -\sqrt{\beta_1\beta_2}. \blacksquare$$

Вводя неоднородные координаты точек и используя задачу 2 и формулу (8), § 8, предлагаем читателю решить следующую задачу.

Задача 4. На прямой l даны различные точки A_0, B_0 . Кроме того, на той же прямой даны две четверки различных точек A, B, C, D и A', B', C', D' . Показать, что если $AA' \perp A_0B_0, BB' \perp A_0B_0, CC' \perp A_0B_0$ и $DD' \perp A_0B_0$, то $(ABCD) = (A'B'C'D')$. $\square$

Пользуясь принципом двойственности, отсюда получаем:

Задача 5 (двойственная задаче 4). В пучке $[L]$ даны две различные прямые a_0, b_0 . Кроме того, даны две четверки различных прямых a, b, c, d и a', b', c', d' этого же пучка. Если данные прямые удовлетворяют условиям $aa' \perp a_0b_0, bb' \perp a_0b_0, cc' \perp a_0b_0, dd' \perp a_0b_0$, то $(abcd) = (a'b'c'd')$.

3. Гармонические четверки прямых. Все факты, изложенные в предыдущих пунктах, могут быть перенесены по принципу двойственности на прямые, принадлежащие одному пучку. Будем говорить, что четыре различные прямые m_1, m_2, m_3 и m_4 пучка $[O]$ образуют гармоническую четверку, если $(m_1m_2m_3m_4)$ равно одному из чисел $-1, 2$ или $1/2$. Очевидно, прямые всегда можно обозначить буквами a, b, c и d так, чтобы $(abcd) = -1$. В этом случае говорят, что пара ab гармонически разделяет пару cd или пара ab гармонически сопряжена с парой cd (обозначение: $ab \perp cd$). Легко показать, что свойство гармонической сопряженности пар прямых является взаимным и не зависит от того, в каком порядке рассматриваются прямые каждой пары.

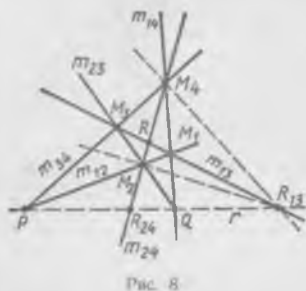
Из определения сложного отношения (см. п. 6, § 8) непосредственно следует:

1°. Если прямые a, b, c и d одного пучка образуют гармоническую четверку, то любая прямая, не проходящая через центр этого пучка, пересекает эти прямые соответственно в точках A, B, C и D , образующих гармоническую четверку. Обратно, если точки A, B, C, D прямой l образуют гармоническую четверку точек и $O \notin l$, то прямые OA, OB, OC и OD также образуют гармоническую четверку прямых.

Как следствие теоремы [8.3] получаем:

2°. На различных прямых l и l' даны по четыре различные точки: A, B, C, D на прямой l и A', B', C' и D' на прямой l' так, что прямые AA', BB', CC' и DD' принадлежат одному пучку (рис. 6). Если точки A, B, C, D образуют гармоническую четверку, то точки A', B', C' и D' также образуют гармоническую четверку.

4. Полный четырехвершинник. Пусть M_1, M_2, M_3 и M_4 — четыре точки общего положения. Фигура, образованная этими точками и шестью прямыми $m_{12} = M_1M_2, m_{13} = M_1M_3, m_{14} = M_1M_4, m_{23} =$



$= M_1 M_3$, $m_{24} = M_2 M_4$, $m_{34} = M_3 M_4$, попарно соединяющими эти точки, называется полным четырехвершинником. Точки M_1, M_2, M_3, M_4 называются вершинами, а прямые $m_{12}, m_{13}, m_{14}, m_{23}, m_{24}, m_{34}$ — сторонами полного четырехвершинника (рис. 8). Из определения следует, что никакие две стороны полного четырехвершинника не совпадают. Через каждую вершину проходят три стороны и каждая сторона содержит две вершины. Две стороны называются смежными, если они имеют общую вершину, и противоположными, если не имеют общей вершины. На рисунке 8 смежными будут, например, m_{12} и m_{14} или m_{12} и m_{13} , а противоположными будут m_{12} и m_{34} или m_{23} и m_{14} . Легко видеть, что для каждой стороны четырехвершинника существует одна и только одна противоположная сторона. Таким образом, шесть сторон четырехвершинника разбиваются на три пары, каждая из которых состоит из противоположных сторон. На рисунке 8 противоположными будут следующие пары: m_{12} и m_{34} ; m_{23} и m_{14} ; m_{13} и m_{24} .

Точка пересечения противоположных сторон полного четырехвершинника называется его диагональной точкой. Полный четырехвершинник имеет три диагональные точки, которые на рисунке 8 обозначены через P, Q и R . Докажем следующую теорему.

Теорема [10.1]. *Диагональные точки полного четырехвершинника не коллинеарны.*

Доказательство. Пусть $M_1 M_2 M_3 M_4$ — данный полный четырехвершинник, а $P = m_{12} \cap m_{34}$, $Q = m_{23} \cap m_{14}$ и $R = m_{13} \cap m_{24}$ — диагональные точки (см. рис. 8). Вычислим координаты диагональных точек в системе $M_1 M_2 M_3 M_4$. Легко видеть, что в выбранной системе имеем:

$$M_1 (1:0:0), M_2 (0:1:0), M_3 (0:0:1), M_4 (1:1:1),$$

поэтому согласно задаче 1, § 7, стороны имеют уравнения:

$$(m_{12}) \quad x_3 = 0; (m_{13}) \quad x_2 = 0; (m_{14}) \quad x_2 = x_3;$$

$$(m_{23}) \quad x_1 = 0; (m_{24}) \quad x_1 = x_3; (m_{34}) \quad x_1 = x_2.$$

Пользуясь этими уравнениями, определяем координаты диагональных точек $P (1:1:0)$; $Q (1:0:1)$; $R (0:1:1)$. Из следствия теоремы [5.3] следует, что эти точки не коллинеарны. ■

Из хода доказательства этой теоремы вытекают следующие выводы.

Следствие 1°. *Диагональные точки полного четырехвершинника не совпадают ни с одной из его вершин.*

Это утверждение легко проверить непосредственно, если воспользоваться следствием теоремы [5.1].

Следствие 2°. *Ни одна из вершин полного четырехвершинника не лежит на прямой, соединяющей две диагональные точки.*

В самом деле, если, например, $M_1 \in PQ$, то так как M_1, P и Q попарно различные точки (следствие 1°), то прямые $M_1 P, M_1 Q$ и PQ совпадают. Отсюда следует, что $M_2 \in PQ, M_3 \in PQ$. Мы пришли к выводу, что точки M_1, M_2 и M_3 коллинеарны. Это противоречит определению полного четырехвершинника.

5. Гармонические свойства полного четырехвершинника. С любым полным четырехвершинником связаны гармонические четверки точек и прямых. Для того чтобы это показать, сделаем ряд предварительных замечаний. Пусть $M_1 M_2 M_3 M_4$ — полный четырехвершинник, стороны и диагональные точки которого обозначены так, как в п. 4 (см. рис. 8). Возьмем две любые диагональные точки и рассмотрим прямую, проходящую через них. Пусть, например, P и Q — точки, которые мы выбрали, а r — прямая, соединяющая эти точки. Согласно теореме [10.1] $R \notin r$, поэтому стороны m_{24} и m_{13} , проходящие через R , пересекают r в двух различных точках, которые мы обозначим через R_{24} и R_{13} (см. рис. 8). Эти точки не совпадают с диагональными точками P и Q , так как если, например, $R_{24} = P$, то вершины M_2 и M_4 будут лежать на прямой PR , что противоречит следствию 2° теоремы [10.1]. Итак, P, Q, R_{13} и R_{24} — четыре попарно различные точки. Из следствий 1° и 2° теоремы [10.1] следует, что M_1, M_3, R и R_{13} также попарно различные точки. Теперь мы можем сформулировать и доказать следующую важную теорему.

Теорема [10.2]. *Любые две диагональные точки полного четырехвершинника гармонически разделяют пару точек, которые определяются пересечением прямой, соединяющей данные диагональные точки с двумя сторонами, проходящими через третью диагональную точку.*

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся обозначениями, которые были введены в п. 4 (см. рис. 8). Пусть $M_1 M_2 M_3 M_4$ — данный четырехвершинник, а P и Q — выбранные диагональные точки. Пусть, далее, R_{13} и R_{24} — точки пересечения прямой $r = PQ$ со сторонами m_{13} и m_{24} , проходящими через третью диагональную точку R . Выше было показано, что P, Q, R_{13}, R_{24} попарно различные точки. Мы должны показать, что $PQ \perp R_{24} R_{13}$. Для этого рассмотрим другую четверку точек M_1, M_3, R, R_{13} . Эти точки, как мы знаем, различны. Прямые $PM_3, R_{24} R, QM_1$ и $R_{13} M_4$ в силу принятых обозначений принадлежат пучку $[M_4]$, поэтому согласно теореме [8.3] имеем:

$$(PQR_{24}R_{13}) = (M_4 M_1 R R_{13}). \quad (4)$$

С другой стороны, прямые $PM_1, R_{24} R, QM_3$ и $R_{13} M_2$ принадлежат пучку $[M_2]$. В силу той же теоремы получаем:

$$(QPR_{24}R_{13}) = (M_2 M_1 R R_{13}). \quad (5)$$

Из этих соотношений следует, что $(PQR_{24}R_{13}) = (QPR_{24}R_{13})$, или согласно 8.4.2 имеем $(PQR_{24}R_{13})^2 = 1$. Так как P, Q, R_{13}, R_{24} попарно различны, то $(PQR_{24}R_{13}) = -1$. ■

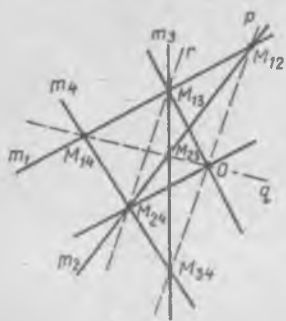


Рис. 9.

Из формулы (4) следует, что $(M_2 M_1 R R_{12}) = -1$. Таким образом, мы пришли к другому предложению.

Следствие. Две вершины, лежащие на любой стороне t полного четырехвершинника, гармонически разделяют пару точек, состоящую из диагональной точки, расположенной на этой стороне, и точки пересечения стороны t с прямой, проходящей через две другие диагональные точки.

6. Полный четырехсторонник. Фигура, двойственная полному четырехвершиннику, называется полным четырехсторонником. Другими словами, полный четырехсторонник есть

фигура, образованная четырьмя прямыми общего положения l_1, l_2, l_3 и l_4 и шестью точками $M_{12} = l_1 \cap l_2, M_{13} = l_1 \cap l_3, M_{14} = l_1 \cap l_4, M_{23} = l_2 \cap l_3, M_{24} = l_2 \cap l_4, M_{34} = l_3 \cap l_4$. Прямые m_1, m_2, m_3 и m_4 называются сторонами, а их попарные точки пересечения — вершинами (рис. 9). Пользуясь принципом двойственности, можно ввести понятия смежных и противоположных вершин, а также понятие диагонали как прямой, соединяющей противоположные вершины. Имеет место следующая теорема, двойственная теореме [10.2].

Теорема [10.3]. Любые две диагонали полного четырехсторонника гармонически разделяют пару прямых, проходящих через точку пересечения этих диагоналей и две вершины, лежащие на третьей диагонали.

§ 11. Теоремы Дезарга и Паппа. Конструктивные задачи на проективной плоскости

Метод координат может быть с успехом использован для решения задач и доказательства теорем проективной геометрии. В качестве примеров докажем некоторые классические теоремы проективной геометрии на плоскости.

1. Теорема Дезарга. Пусть ABC и $A'B'C'$ — два трехвершинника проективной плоскости, вершины каждого из которых заданы в определенном порядке, а именно в том, в котором они записаны. Точка O называется центром перспективы этих трехвершинников, если каждая из следующих троек точек $O, A, A'; O, B, B'; O, C, C'$ коллинеарна. Прямая l называется осью перспективы, если каждая из следующих троек прямых $l, BC, B'C'; l, CA, C'A'; l, AB, A'B'$ принадлежит одному пучку (рис. 10). Мы не исключаем случаи совпадения отдельных вершин или сторон данных трехвершинников.

¹ Прямые m_1, m_2, m_3 и m_4 называются прямыми общего положения и я, если никакие три из них не принадлежат одному пучку.

Имеет место следующая важная теорема.

Теорема [11.1] (прямая и обратная теоремы Дезарга). Если два трехвершинника имеют центр перспективы, то они имеют и ось перспективы. Обратно, если два трехвершинника имеют ось перспективы, то они имеют центр перспективы.

Доказательство. Легко заметить, что обратная теорема является утверждением, двойственным прямой теореме по принципу двойственности на плоскости, поэтому мы ограничимся доказательством только прямой теоремы.

Пусть ABC и $A'B'C'$ — данные трехвершинники, а O — их центр перспективы (см. рис. 10). Сначала рассмотрим общий случай, когда O не лежит на сторонах трехвершинника ABC и стороны каждой из пар AB и $A'B', AC$ и $A'C', BC$ и $B'C'$ различны (рис. 10). В этом случае точки A, B, C, O можно принять за проективную систему координат. В этой системе точки A, B, C и O имеют координаты $A(1:0:0), B(0:1:0), C(0:0:1), O(1:1:1)$, поэтому прямые OA, OB, OC будут иметь уравнения:

$$(OA) \quad x_2 = x_3; (OB) \quad x_1 = x_3; (OC) \quad x_1 = x_2. \quad (1)$$

Пусть в этой системе координат вершины трехвершинника $A'B'C'$ имеют координаты $A'(a_1:a_2:a_3), B'(b_1:b_2:b_3), C'(c_1:c_2:c_3)$. В силу того что эти точки удовлетворяют условиям $A' \in (OA), B' \in (OB), C' \in (OC)$, из (1) получаем: $a_2 = a_3, b_1 = b_3, c_1 = c_3$; поэтому координаты вершин трехвершинника $A'B'C'$ можно обозначить так: $A'(a':a':a'), B'(b':b':b'), C'(c':c':c')$.

Пользуясь формулой (1), § 7, запишем уравнения сторон трехвершинника $A'B'C'$.

$$(A'B') \quad (ab - ab')x_1 + (ab - a'b)x_2 + (a'b' - ab)x_3 = 0,$$

$$(B'C') \quad (b'c' - bc)x_1 + (bc - bc')x_2 + (bc - b'c)x_3 = 0,$$

$$(C'A') \quad (ac - ac')x_1 + (a'c' - ac)x_2 + ac - a'c)x_3 = 0.$$

С другой стороны, для сторон трехвершинника ABC имеем:

$$(AB) \quad x_3 = 0, (BC) \quad x_1 = 0, (CA) \quad x_2 = 0.$$

Из этих уравнений легко получаем координаты точек $R = A'B' \cap AB, P = B'C' \cap BC, Q = C'A' \cap CA$.

$$P(0:bc:cb':bc' - bc), Q(ac - a'c:0:ac' - ac),$$

$$R(ab - a'b:ab' - ab:0).$$

Пользуясь теоремой [5.3], непосредственным подсчетом убеждаемся в том, что точки P, Q и R коллинеарны.

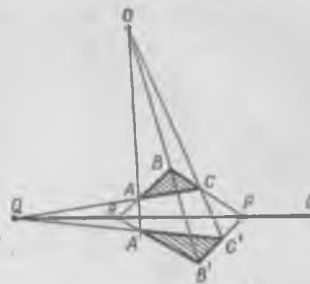


Рис. 10

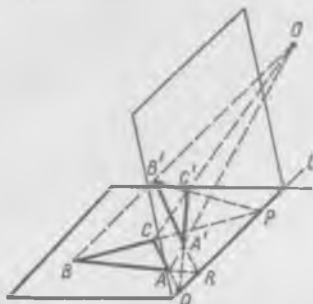


Рис. 11.

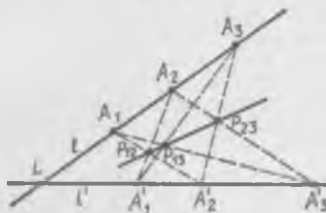


Рис. 12

Теперь рассмотрим возможные частные случаи.

а) По крайней мере одна из пар соответствующих сторон трехвершинников совпадает. Пусть, например, AB и $A'B'$ совпадают. В этом случае, очевидно, прямая PQ будет осью перспективы.

б) Точка O совпадает с одной из вершин трехвершинника ABC . Пусть, например, $O = A$. В этом случае осью перспективы будет прямая $B'C'$.

в) Точка O лежит на какой-либо стороне трехвершинника ABC , но не совпадает ни с одной из ее вершин. Пусть, например, $O \in AB$. В этом случае, очевидно, $A' \in AB$ и $B' \in AB$, поэтому этот случай сводится к случаю а). ■

Заметим, что определения центра и оси перспективы, данные выше, применимы также и в том случае, когда плоскости трехвершинников ABC и $A'B'C'$ не совпадают¹ (см. рис. 11; здесь O — центр перспективы, а l — ось перспективы).

Более того, прямая и обратная теоремы Декарта, сформулированные выше, имеют место и в общем случае (доказательство см. в [20], § 6, или [22], § 85).

2. Теорема Паппа.

Теорема [11.2] (теорема Паппа). Если даны две различные прямые l и l' и на каждой из них по три различные точки: A_1, A_2, A_3 — на прямой l и A'_1, A'_2, A'_3 — на прямой l' , то точки $P_{12} = A_1A'_2 \cap A_2A'_1$, $P_{13} = A_1A'_3 \cap A_3A'_1$, $P_{23} = A_2A'_3 \cap A_3A'_2$ коллинеарны (рис. 12).

Доказательство. Если хотя бы две из точек P_{12}, P_{13}, P_{23} совпадают, то утверждение теоремы тривиально; поэтому для нас представляет интерес только тот случай, когда P_{12}, P_{13}, P_{23} попарно различные точки. Прежде всего покажем, что в данном случае ни одна из точек $A_1, A_2, A_3, A'_1, A'_2, A'_3$ не может совпасть с точкой $L = l \cap l'$. В самом деле, если, например, $A_1 = L$, то $P_{12} \in l'$. С другой стороны, $P_{12} \in A_1A'_2$; так как прямые l' и $A_1A'_2$ имеют единственную

общую точку A'_1 , то $P_{12} = A'_1$. Точно так же можно показать, что $P_{13} = A'_1$, т. е. $P_{12} = P_{13}$, что противоречит нашему допущению.

Теперь легко показать, что A'_1, A'_2, A'_3, A_2 — точки общего положения. В самом деле, из предыдущих рассуждений следует, что точки A'_1, A'_2, A'_3 не коллинеарны и A_2 не лежит на прямой $A'_1A'_3$. Но $A'_1 \neq A'_2$, поэтому A_2 не лежит также на прямых $A'_1A'_2$ и $A'_1A'_3$, так как в противном случае одна из точек A'_2, A'_3 будет совпадать с точкой L . Мы показали, что A'_1, A'_2, A'_3, A_2 являются точками общего положения. Приняв эти точки за систему координат, будем иметь $A'_1(1:0:0)$, $A'_2(0:1:0)$, $A'_3(0:0:1)$, $A_2(1:1:1)$, $A_1(a_1:a_2:a_3)$, $A_3(b_1:b_2:b_3)$; прямые l и l' имеют уравнения

$$(l) \ x_1 = 0, \quad (l') \ x_2 = x_3.$$

В силу $A_1 \in l$ имеем $a_1 = 0$. С другой стороны, $A_1 \neq A'_2, A_1 \neq A'_3$, поэтому $a_2 \neq 0, a_3 \neq 0$. Если положить $a = \frac{a_3}{a_2}$, то числа $(0, 1, a)$ являются координатами точки A_1 . По аналогии с этим координаты точки A_3 можно представить в виде $(b:1:1)$.

Пользуясь формулой (1), § 7, запишем уравнения прямых $A_1A'_2$ и $A_1A'_3$:

$$(A_1A'_2): (1-a)x_1 + ax_2 - x_3 = 0; \quad (A_1A'_3): x_3 = 0.$$

Отсюда определяем координаты их точки пересечения $P_{12}(a, a-1, 0)$. Точно так же определяем координаты точек P_{23}, P_{13} :

$$(A_1A'_3): (1-a)x_1 + abx_2 - bx_3 = 0; \quad (A'_1A_3): x_2 = 0, \quad P_{13}(b:0:1-a).$$

$$(A_2A'_3): x_1 - bx_3 = 0; \quad (A'_2A_3): x_1 = x_3; \quad P_{23}(b:b:1).$$

Согласно теореме [5.3] точки P_{12}, P_{13}, P_{23} коллинеарны, так как определитель третьего порядка, составленный из координат этих точек, равен нулю. ■

Доказанные две теоремы имеют широкое применение в проективной геометрии, особенно при решении задач на построение, о которых идет речь ниже.

3. Конструктивные задачи на проективной плоскости. На проективной плоскости, так же как и на евклидовой, можно решать задачи на построение. Однако теория геометрических построений, известная нам из курса средней школы, не может быть автоматически перенесена на проективную плоскость. Но тем не менее, вводя ряд соглашений, мы можем наметить формально логическую схему, позволяющую корректно формулировать и решать задачи на построение на проективной плоскости¹.

Мы вводим в рассмотрение два основных понятия — понятие построенной точки или прямой, и операцию

¹ В этом случае при определении оси перспективы слово «пучок» следует заменить словом «связка».

¹ С полным изложением теории геометрических построений читатель познакомится ниже, гл. VI и VII.

построения точки или прямой. Эти понятия удовлетворяют определенным требованиям, которые называются *постулатами* построения. Первые два предложения, которые сформулированы ниже, постулируют существование построенных точек и прямых.

КП1. На проективной плоскости существует хотя бы одна четверка построенных точек общего положения¹.

КП2. Точки и прямые, заданные условиями задачи на построение, считаются построенными. Множество заданных точек и прямых всегда конечно.

Остальные постулаты характеризуют операцию построения точек прямой, т. е. построения, которые мы считаем допустимыми.

КП3. Построение точки пересечения двух различных построенных прямых.

КП4. Построение прямой, проходящей через две различные построенные точки.

Каждое построение, которое выполняется при помощи этих постулатов, называется *шагом* построения.

Если воспользоваться обычной терминологией, которой мы пользуемся при решении задач на построение на евклидовой плоскости, то сформулированные аксиомы равносильны тому, что на проективной плоскости построения выполняются при помощи линейки, т. е. инструмента, позволяющего строить прямые, проходящие через две данные точки.

Важно подчеркнуть, что при решении задач на построение прямые рассматриваются как основные геометрические образы (см. п. 5, § 2), поэтому если прямая построена, то отсюда вовсе не следует, что точки этой прямой являются построенными точками. Конечно, отдельные точки прямой могут быть построены, но это должно быть определено либо условиями задачи, либо очередным шагом построения.

4. Схема построения; обозначения. Под построением фигуры F мы понимаем процесс перехода от множества Ω_0 данных точек и прямых к множеству построенных точек и прямых Ω , содержащему F .

Наши построения на проективной плоскости будут сопровождаться схематическими чертежами, которые преследуют единственную цель — дать схему, наглядно изображающую ход построения. Для того чтобы эту цель осуществить более эффективно, мы будем пользоваться следующей системой обозначений. Точки и прямые, как это обычно принято, будем обозначать соответственно прописными и строчными буквами латинского алфавита. Однако в отличие от существующей практики, когда выбор букв и индексов осуществляется более или менее произвольно, мы предлагаем следующую «жесткую» систему обозначений для точек и прямых.

а) Данные и искомые точки и прямые обозначаются буквами без индексов, при этом данные точки и прямые обозначаются зачальными

¹ Эта аксиома позволяет строить вспомогательные (т. е. «произвольные») точки и прямые.

буквами латинского алфавита ($A, B, C, \dots; a, b, c, \dots$), а искомые точки и прямые последними ($X, Y, x, y, \dots$).

б) Вспомогательные точки и прямые, которые появляются в процессе построения, обозначаются промежуточными буквами алфавита и снабжаются индексами. Индексы выбираются в точном соответствии с номером шага построения в словесном описании построения.

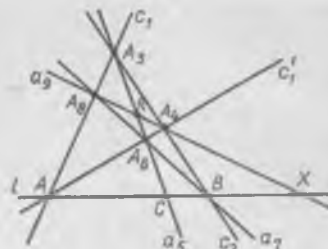


Рис. 13

5. Построение четвертого гармонического элемента. Пусть A, B и C — три различные точки некоторой прямой, заданные в определенном порядке. Из 8.1.2 следует, что $3T: AB \stackrel{h}{=} CT$. Условимся точку T называть *четвертой гармонической* к трем точкам A, B и C .

Одной из важных задач на построение проективной геометрии является следующая задача.

Построение [11.1]. На прямой l дана упорядоченная тройка различных точек A, B и C . Построить четвертую гармоническую точку X к трем данным точкам.

Для выполнения построения воспользуемся теоремой [10.2]. Если мы построим полный четырехвершинник, для которого A и B являются диагональными точками, а C — точкой пересечения прямой l со стороной, проходящей через третью диагональную точку R , то другая сторона, проходящая через точку R , пересекает прямую l в искомой точке X .

Из этого анализа вытекает построение (рис. 13); строим последовательно следующие точки и прямые:

$$\begin{aligned} c_1 \text{ и } c'_1: c_1 \in [A], c'_1 \in [A], c_1 \neq l, c'_1 \neq l; & \quad A_6: A_6 = a_6 \cap c'_1; \\ c_2: c_2 \in [B], c_2 \neq l; & \quad a_7: a_7 = BJA_6; \\ A_2: A_2 = c_1 \cap c_2; & \quad A_8: A_8 = a_7 \cap c'_1; \\ A_4: A_4 = c'_1 \cap c_2; & \quad a_9: a_9 = A_4JA_6; \\ a_5: a_5 = CJA_2; & \quad X: X = l \cap a_9. \end{aligned}$$

Точка X является искомой.

6. Построение точек с целочисленными неоднородными координатами. Существует способ, позволяющий строить на прямой точку с любой целочисленной неоднородной координатой, если на прямой выбрана некоторая система координат. Рассмотрим следующее построение.

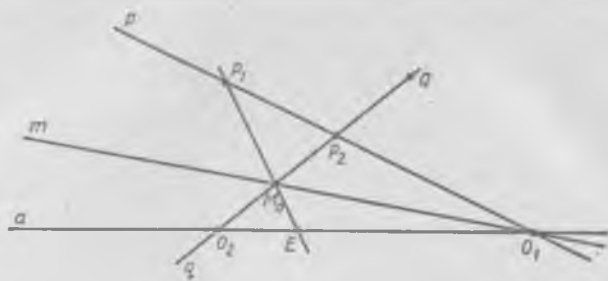


Рис. 14

Построение [11.2]. На прямой a даны три различные точки O_1, O_2, E . Построить точку X , которая в системе O_1O_2E имеет неоднородную координату ξ , где ξ — любое целое число.

Согласно постулату КП2 прямая a и точки O_1, O_2, E являются построенными объектами. Пользуясь аксиомой КП1, возьмем построенные точки P_1 и Q так, чтобы точки O_1, O_2, P_1, Q были точками общего положения (рис. 14). Теперь, воспользовавшись аксиомой КП4, построим прямые $p = P_1O_1, q = O_2Q$. Далее построим точки $P_2 = p \cap q, M_0 = P_1E \cap q$ и прямую $m = M_0O_1$. Таким образом, мы получили фигуру, изображенную на рисунке 14.

Пользуясь этой фигурой, легко указать простой способ, позволяющий строить точку с любой целочисленной неоднородной координатой. Точка E имеет координату 1. Для построения точки $A_2(2)$ следует последовательно построить следующие объекты: прямую P_2E , точку $M_1 = P_2E \cap m$, прямую P_1M_1 и, наконец, точку $A_2 = P_1M_1 \cap a$.



Рис. 15

Заменив в предыдущем построении точку E точкой A_1 , можно построить точку $A_3(3)$, далее $A_4(4)$ и т. д. (рис. 15).

Для того чтобы обосновать указанный выше способ построения, достаточно показать, что если точка X , построенная указанным выше способом, имеет координату x , то следующая точка Y будет иметь координату $y = x + 1$ (см. рис. 15). Для этого спроектируем точки O_1, M_0, M_1, M на прямую a сначала из центра P_1 , потом из центра P_2 . Согласно теореме [8.3] будем иметь: $(O_1M_0M_1M) = (O_1EA_2Y)$, $(O_1M_0M_1M) = (O_1O_2EX)$, поэтому $(O_1EA_2Y) = (O_1O_2EX)$. По формуле (9), § 8, получаем: $(O_1EA_2Y) = \frac{y-1}{2-1} = y-1$. С другой стороны, $(O_1O_2EX) = x$. Итак, $y-1 = x$, откуда $y = 1 + x$.

Построение точки $A_{-1}(-1)$ выполняется аналогично: строим прямую P_1O_1 , далее точку $M_{-1} = P_1O_2 \cap m$, прямую P_2M_{-1} и точку $A_{-1} = P_2M_{-1} \cap a$. Заменив в этом построении точку O_2 точкой A_{-1} , можно построить точку $A_{-2}(-2)$, далее $A_{-3}(-3)$ и т. д.

ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В первой книге настоящего курса (см. I, § 23, п. 1) было дано определение геометрического отображения как определенного вида функции $y = f(x)$, где x и y являются геометрическими образами. В проективной геометрии особую роль играют такие отображения, для которых x и y являются точками или прямыми проективного пространства.

Настоящая глава посвящена изучению некоторых специальных отображений такого рода, называемых проективными

§ 12. Проективные отображения множества точек прямых и множества прямых пучков

1. **Проективное отображение множества точек прямых.** Пусть (l) и (l') — две прямые проективной плоскости. Взаимно однозначное отображение $\pi: (l) \rightarrow (l')$ называется *проективным*, если любые четыре попарно различные точки M_1, M_2, M_3 и M_4 прямой (l) переходят в точки $M'_1 = \pi(M_1), M'_2 = \pi(M_2), M'_3 = \pi(M_3), M'_4 = \pi(M_4)$ прямой (l') так, что $(M_1M_2M_3M_4) = (M'_1M'_2M'_3M'_4)$. Другими словами, отображение $\pi: (l) \rightarrow (l')$ является проективным, если оно сохраняет сложное отношение четырех точек. Заметим, что в силу взаимной однозначности проективного отображения образы любых двух различных точек различны, поэтому в этом определении сложное отношение $(M_1M_2M_3M_4)$ всегда существует. В дальнейшем проективные отображения будем обозначать через π_1, π_2 и т. д.

Если $(l) = (l')$, то проективное отображение $\pi: (l) \rightarrow (l')$ каждой точке прямой (l) ставит в соответствие точку той же прямой, при этом соответствие будет взаимно однозначным. В этом случае отображения будем называть *проективными преобразованиями* проективной прямой. В этом параграфе мы рассмотрим свойства проективных отображений в общем виде, не отличая преобразования от отображений, а в следующем параграфе перейдем к изучению специальных вопросов, связанных с проективными преобразованиями прямой.

Рассмотрим примеры проективных отображений и преобразований. **Пример 1.** Пусть $(l) \neq (l')$ и O — точка плоскости, не лежащая на данных прямых. Каждой точке M прямой (l) поставим в соответствие точку $M' = OM \cap (l')$ (рис. 16). Так как на проективной плоскости любые две различные прямые пересекаются в одной точке, то это отображение является взаимно однозначным. Из теоремы [8.3] следует, что оно является проективным. Построенное нами отображение называется *перспективным отображением* прямой (l) на прямую (l') . Точка O называется *центром* отображения. Это отображение в дальнейшем будем обозначать через $\sigma: (l) \rightarrow (l')$.

Теперь построим примеры проективных преобразований.

Пример 2. Пусть (l) и (l_0) — две различные прямые, а O_1 и

O_2 — различные точки, не лежащие на этих прямых. Возьмем перспективные отображения $\sigma_1: (l) \xrightarrow{O_1} (l_0)$ и $\sigma_2: (l_0) \xrightarrow{O_2} (l)$, рассмотрим произведение $\pi = \sigma_2 \sigma_1$. Согласно предыдущему примеру π есть проективное отображение. Так как области определения и значений функции π совпадают, то π является проективным преобразованием.

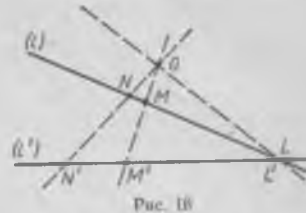


Рис. 16

Пример 3. Каждой точке M прямой l поставим в соответствие ту же точку M . Очевидно, это преобразование является проективным. Оно называется *тождественным преобразованием* прямой.

Из определения проективного отображения следует:

1°. Пусть M_1, M_2, M_3 и M'_4 — образы различных точек M_1, M_2, M_3 и M_4 данного проективного отображения. Если $M_1M_2 \div M_3M_4$, то $M'_1M'_2 \div M'_3M'_4$, если же $M_1M_2 \equiv M_3M_4$, то $M'_1M'_2 \equiv M'_3M'_4$.

Отсюда и из следствия 2° теоремы [9.1] получаем:

2°. При проективном отображении проективный отрезок переходит в проективный отрезок, концы которого являются образами концов исходного отрезка.

3°. При проективном отображении пара гармонически сопряженных точек переходит в пару гармонически сопряженных точек.

2. **Основная теорема.** Докажем следующую основную теорему. **Теорема [12.1].** Пусть на различных или совпадающих прямых заданы по три попарно различные точки: A, B, C — на прямой (l) и A', B', C' — на прямой (l') . Тогда существует одно и только одно проективное отображение $\pi: (l) \rightarrow (l')$, при котором точки A, B, C переходят соответственно в точки A', B', C' .

Доказательство. Для доказательства существования проективного отображения, удовлетворяющего условиям теоремы, достаточно рассмотреть следующий конкретный пример. Построим отображение $\pi: (l) \rightarrow (l')$ следующим образом. Точке A поставим в соответствие точку A' , а любой точке $X \in l$ — точку $X' \in l'$, имеющую в проективной системе $A'B'C'$ неоднородную координату x , равную неоднородной координате точки X в системе ABC . Пользуясь формулой (8), § 8, легко доказать, что при этом отображении сохранится сложное отношение соответствующих точек, и что точки B и C переходят соответственно в точки B' и C' .

Теперь покажем, что π — единственное отображение, удовлетворяющее условиям теоремы. Пусть M_0 — произвольная точка прямой (l) , отличная от A, B и C , а $M'_0 = \pi(M_0)$. Так как $(ABCM_0) = (A'B'C'M'_0)$, то из 8.1.3 следует, что при любом проективном отображении π' , удовлетворяющем условиям теоремы, точка M_0 перейдет в точку M'_0 . Отсюда следует, что $\pi' = \pi$. ■

3. **Признак перспективного отображения.** Доказанная теорема, как мы увидим ниже, широко используется при изучении проективных отображений. В качестве первого приложения докажем следующую теорему, позволяющую из множества проективных отображений выделить перспективные. Прежде всего заметим, что перспективное отображение может быть определено также следующим образом: проективное отображение двух различных прямых называется перспективным, если прямые, соединяющие соответственные точки, образуют пучок. Это определение, очевидно, эквивалентно определению, данному в примере 1.

Теорема [12.2]. Пусть (l) и (l') — различные прямые, а $\pi: (l) \rightarrow (l')$ — данное проективное отображение. Для того чтобы π было перспективным отображением, необходимо и достаточно, чтобы образ точки $L = l \cap l'$ совпал с самой точкой.

Доказательство. Необходимость условия непосредственно вытекает из определения перспективного соответствия (см. рис. 16), поэтому докажем только достаточность условия. Пусть $L = \pi(L)$, возьмем на прямой (l) две произвольные точки A и B , отличные от L , и рассмотрим их образы $A' = \pi(A)$, $B' = \pi(B)$ на прямой (l') . Очевидно, прямые AA' и BB' не совпадают, поэтому они пересекаются в некоторой точке O . Точка O не может лежать на прямых (l) и (l') . В самом деле, если, например, $O \in (l)$, то OB и (l) совпадают, поэтому $L \in OB \Rightarrow L = OB \cap (l') \Rightarrow L = B'$. Это противоречит тому, что π — взаимно однозначное отображение. Рассмотрим перспективное соответствие $\sigma: (l) \xrightarrow{O} (l')$. Оно переводит точки L, A, B соответственно в точки L, A', B' . Согласно теореме [12.1] отображения σ и π совпадают. ■

4. **Проективное отображение как произведение перспективных отображений.** Рассмотрим два предложения, которые, как мы увидим ниже, используются для построения образов точек при проективном отображении.

1°. Если $\pi: (l) \rightarrow (l')$ — произвольное проективное отображение прямой (l) на другую прямую (l') , отличное от перспективного, то оно всегда может быть представлено как произведение двух перспективных отображений.

Для доказательства этого предложения возьмем три попарно различные точки A, B, C прямой (l) и рассмотрим их образы A', B', C' на прямой (l') . Согласно предыдущей теореме имеем: $A \neq A', B \neq B'$ и $C \neq C'$. Рассмотрим прямые AA', BB' и CC' . Так как $(l) \neq (l')$, то эти прямые попарно различны и хотя бы одна из них не совпадает ни с одной из прямых (l) и (l') . Пусть AA' — прямая, удовлетворяющая этому условию. Возьмем на этой прямой точки O_1 и O_2 так, чтобы они не совпадали с точками A и A' (рис. 17). Пусть $B_0 = O_1B \cap O_2B'$, $C_0 = O_1C \cap O_2C'$ и $l_0 = B_0C_0$. Рассмотрим два перспективных отображения: $\sigma_1: (l) \xrightarrow{O_1} (l_0)$ и $\sigma_2: (l_0) \xrightarrow{O_2} (l')$. Отображение $\pi' = \sigma_2 \sigma_1$ переводит точки A, B и C соответственно в точки A', B' и C' ; поэтому согласно теореме [12.1] имеем: $\pi' = \pi$. ■

Предлагаем читателю, пользуясь доказанным предложением, самостоятельно доказать следующее предложение:

2°. Если $\pi: (l) \rightarrow (l')$ — произвольное проективное преобразование прямой (l) , то оно всегда может быть представлено как произведение не более чем трех перспективных отображений. □

5. **Проективное отображение множества прямых пучков.** Пользуясь принципом двойственности, введем понятие проективного отображения пучков прямых. Пусть $[O]$ и $[O']$ — два пучка на проективной плоскости.

Взаимно однозначное отображение $\pi: [O] \rightarrow [O']$ называется проективным¹, если любые четыре прямые $m_1 = \pi(m'_1), m_2 = \pi(m'_2), m_3 = \pi(m'_3)$ и $m_4 = \pi(m'_4)$ так, что $(m_1, m_2, m_3, m_4) = (m'_1, m'_2, m'_3, m'_4)$. Если пучки $[O]$ и $[O']$ совпадают, то в этом случае проективное отображение пучков называется проективным преобразованием.

В силу принципа двойственности все результаты, изложенные в этом параграфе, могут быть перенесены на пучки прямых. В частности, основная теорема для пучков прямых формулируется так:

Теорема [12.3]. Если даны два различных или совпадающих пучка $[O]$ и $[O']$ и в каждом из них заданы три попарно различные прямые: a, b, c — в пучке $[O]$ и a', b', c' — в пучке $[O']$, то существует одно и только одно проективное отображение $\pi: [O] \rightarrow [O']$, при котором прямые a, b и c переходят соответственно в прямые a', b', c' .

Пусть $[O]$ и $[O']$ — различные пучки, а l — прямая, не проходящая через точки O и O' . Каждой прямой a пучка $[O]$ поставим в соответствие прямую $a' = AJO'$ пучка $[O']$, где $A_a = a \cap l$. Построенное отображение в соответствии с принципом двойственности называется перспективным отображением пучка $[O]$ на пучок $[O']$, а прямая l называется осью отображения. Предложение, двойственное теореме [12.2], формулируется так:

Теорема [12.4]. Пусть $[O]$ и $[O']$ — два различных пучка, а $\pi: [O] \rightarrow [O']$ — данное проективное отображение. Для того чтобы π было перспективным отображением, необходимо и достаточно, чтобы образ прямой OJO' совпадал с самой прямой.

6. **Ось гомологии.** В заключение параграфа рассмотрим еще одно свойство проективных отображений прямых, которое, как мы увидим

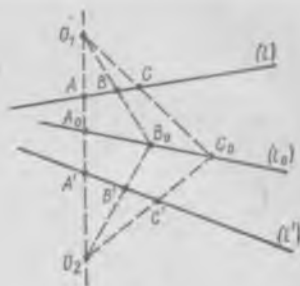


Рис. 17.

¹ Для того, чтобы отличить проективные отображения прямых от отображений точек, отображения прямых будем обозначать так: $\bar{\pi}, \bar{\sigma}$ и т. д.

ниже, дает возможность строить образы точек при данном отображении. Докажем следующую теорему.

Теорема [12.5]. Пусть $\pi: (l) \rightarrow (l')$ — проективное отображение прямой (l) на другую прямую (l') . Множество всех точек пересечения прямых AB' и $A'B$, где A и B — произвольные различные точки прямой (l) , а A' и B' — их образы, образует прямую, называемую осью гомологии данного отображения.

Доказательство. Пусть $L = (l) \cap (l')$, L' — точка прямой (l') , соответствующая точке L , если ее отнести к прямой (l) , а L_0 — точка прямой (l) , которой соответствует точка L , отнесенная к прямой (l') (рис. 18). Пусть S — произвольная точка прямой (l) , отличная от L_0 и L , а S' — ее образ. Очевидно, $S \neq L$ и $S' \neq L'$. Рассмотрим пучки $[S']$ и $[S]$ и установим между их прямыми соответствие π' следующим образом. Каждой прямой $a \in [S']$ поставим в соответствие ту прямую a' пучка $[S]$, которая проходит через образ M' точки $M = a \cap (l)$. Мы утверждаем, что соответствие π' является перспективным отображением. В самом деле, пусть a_1, a_2, a_3 и a_4 — попарно различные прямые пучка $[S']$, а a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 — их образы в пучке $[S]$ (эти прямые на рисунке 18 не изображены). Пусть, далее, $M_1 = a_1 \cap (l)$, $M_2 = a_2 \cap (l)$, $M_3 = a_3 \cap (l)$, $M_4 = a_4 \cap (l)$, а M'_1, M'_2, M'_3 и M'_4 — образы этих точек при отображении π' . Очевидно, имеют место соотношения $(a_1 a_2 a_3 a_4) = (M_1 M_2 M_3 M_4) = (M'_1 M'_2 M'_3 M'_4) = (a'_1 a'_2 a'_3 a'_4)$. Отсюда следует, что π' является проективным отображением. Так как прямая $S'S$ переходит в SS' , то согласно теореме [12.4] отображение π' является перспективным. Обозначим через l_0 ось отображения π' и покажем, что она является осью гомологии отображения π . Для этого мы должны показать, что каковы бы ни были различные точки $A \in (l)$ и $B \in (l)$, точка $M_0 = AB' \cap A'B$ лежит на прямой l_0 . Здесь $A' = \pi(A)$, $B' = \pi(B)$. Если одна из точек A или B совпадает с точкой S , то наше утверждение тривиально, поэтому представляет интерес только тот случай, когда $A \neq S$ и $B \neq S$. В этом случае согласно теореме Паппа [11.2] точки $A_0 = SA' \cap S'A$, $B_0 = SB' \cap S'B$, $M_0 = AB' \cap A'B$ коллинеарны. Но $A_0 \in l_0$, $B_0 \in l_0 \Rightarrow M_0 \in l_0$. ■

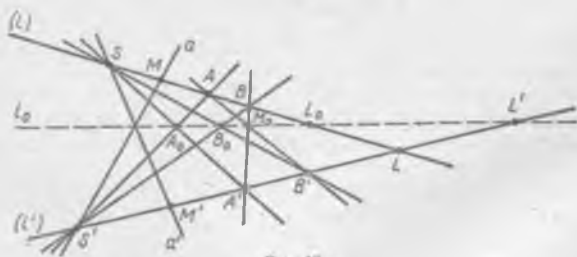


Рис. 18.

Легко видеть, что ось гомологии l_0 проходит через точки L_0 и L' (см. рис. 18). Если π — перспективное соответствие, то согласно теореме [12.2] $L = L_0 = L'$, поэтому ось гомологии проходит через точку пересечения прямых (l) и (l') .

Доказанная теорема позволяет указать очень простой способ построения образов точек при данном проективном отображении.

Построение [12.1]. Проективное отображение $\pi: (l) \rightarrow (l')$ на различных прямых (l) и (l') определено тремя парами соответственных точек: $A' = \pi(A)$, $B' = \pi(B)$, $C' = \pi(C)$. Построить образ точки $X \in (l)$ (рис. 19).

Сначала строим ось гомологии (l_0) данного отображения π . Для этого достаточно построить прямые AB' , BA' , AC' , CA' и через точки $AB' \cap BA'$, $AC' \cap CA'$ провести прямую l_0 . Имея прямую l_0 , легко построить образ X' произвольной точки X прямой (l) : строим последовательно $m_1 = A'JX$, $m_2 = m_1 \cap l_0$, $m_3 = AJm_2$, $X' = m_3 \cap (l')$.

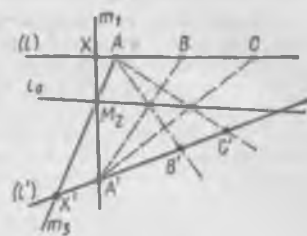


Рис. 19.

§ 13. Проективные преобразования точек прямых; инволюции

В предыдущем параграфе мы изучили основные свойства проективных отображений $\pi: (l) \rightarrow (l')$ в предположении, что (l) и (l') — произвольные прямые. Если $(l) \rightarrow (l')$, то, как было отмечено выше, проективное отображение называется проективным преобразованием. Так как проективное преобразование есть частный случай общего проективного отображения, то все выводы предыдущего параграфа, вообще говоря, справедливы для проективного преобразования прямых. Однако в силу совпадения прямых (l) и (l') при изучении проективных преобразований возникает ряд специфических задач, которые мы и рассмотрим в настоящем параграфе.

1. Неподвижные точки проективных преобразований. Пусть $\pi: (l) \rightarrow (l)$ — данное проективное преобразование. Точка M прямой (l) называется неподвижной точкой преобразования, если ее образ совпадает с ней¹. Исследуем вопрос о существовании и количестве неподвижных точек данного проективного преобразования. Заметим, что основная теорема [12.1], доказанная в предыдущем параграфе, имеет место также и для проективных преобразований, поэтому, каковы бы ни были две тройки попарно различных точек прямой (l) A, B, C и A', B', C' , всегда существует одно и только одно проективное преобразование, которое точки A, B, C переводит соответственно в точки A', B', C' . Отсюда, в частности, следует, что существуют

¹ Ср.: I, § 26 п. 2.

проективные преобразования, имеющие неподвижные точки. В самом деле, пусть A, B, C, B', C' — пять попарно различных точек прямой; тогда проективное преобразование π , которое точки A, B, C переводит соответственно в точки A, B', C' , имеет по крайней мере одну неподвижную точку (точку A); проективное преобразование π_1 , которое точки A, B, C переводит соответственно в точки A, B, C' , имеет по крайней мере две неподвижные точки (точки A и B); проективное преобразование π_0 , переводящее точки A, B, C соответственно в точки A, B, C , имеет по крайней мере три неподвижные точки (точки A, B и C).

Покажем, что из основной теоремы вытекает следующее важное свойство.

Теорема [13.1]. Если проективное преобразование π имеет три различные неподвижные точки, то оно является тождественным преобразованием.

Доказательство. Пусть точки A, B и C являются неподвижными. Рассмотрим тождественное преобразование прямой (l) $\pi_0: (l) \rightarrow (l)$. Так как при преобразованиях π и π_0 каждая из точек A, B и C переходит в себя, то согласно основной теореме [12.1] преобразования π и π_0 совпадают, т. е. π является тождественным преобразованием. ■

Из доказанной теоремы немедленно следует, что нетождественное проективное преобразование не может иметь более чем две неподвижные точки. При этом могут представиться три возможности: проективное преобразование не имеет ни одной неподвижной точки, в этом случае оно называется эллиптическим; проективное преобразование имеет одну неподвижную точку, в этом случае оно называется параболическим; наконец, проективное преобразование имеет две неподвижные точки, в этом случае оно называется гиперболическим.

Пример 2, § 12, показывает, что существуют параболические и гиперболические преобразования. В самом деле, пусть в обозначениях этого примера имеем: $O_0 = O_1 O_2 \cap (l)$, а $M_0 = (l) \cap (l_0)$. Предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что если точки O_0 и M_0 совпадают, то преобразование π является параболическим, если же O_0 и M_0 различны, то π является гиперболическим проективным преобразованием. Существование эллиптического проективного преобразования будет установлено ниже.

2. Инволюции. Рассмотрим заслуживающий особого внимания специальный вид проективных преобразований прямой, играющих существенную роль в дальнейшем изложении. Инволюцией называется всякое нетождественное проективное преобразование прямой, удовлетворяющее следующему условию: если произвольная точка M переходит в точку M' , то при том же преобразовании точки M' переходит в точку M . Другими словами, нетождественное преобразование π называется инволюцией, если оно совпадает с обратным преобразованием.

Имеет место следующая важная теорема, которая, по существу, является критерием для определения инволюций.

Теорема [13.2]. Пусть $\pi: (l) \rightarrow (l)$ — данное проективное преобразование. Если существует хотя бы одна точка $M_0 \in (l)$, образ которой $M'_0 = \pi(M_0)$ не совпадает с ней и удовлетворяет условию $M_0 = \pi(M'_0)$, то π является инволюцией.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что если N — произвольная точка прямой (l) , а N' — ее образ, то $N = \pi(N')$. Это утверждение является очевидным, если $N = M_0$ или $N = N'$, поэтому предположим, что $N \neq M_0$ и $N \neq N'$. Обозначим через N^* образ точки N' при преобразовании π . Из определения проективного преобразования следует, что $(M_0 M'_0 N N') = (M_0 M'_0 N^* N)$. Согласно свойству (8.4.4) имеем $(M_0 M'_0 N N') = (M_0 M'_0 N' N)$, поэтому $(M_0 M'_0 N' N) = (M_0 M'_0 N^* N)$. Отсюда, принимая во внимание свойство (8.1.3), приходим к выводу, что точки N и N^* совпадают, т. е. $N = \pi(N')$. ■

Из определения инволюции следует, что каждая инволюция разбивает все точки прямой l на пары точек, соответствующих друг другу при данной инволюции. Очевидно, при этом могут существовать и неподвижные точки. Пара несовпадающих точек прямой A и A' называется сопряженной парой инволюции, если A и A' соответствуют друг другу при данной инволюции.

3. Основные свойства инволюции. Рассмотрим некоторые свойства инволюции.

1°. Если A, A', B, B' — четыре различные произвольные точки прямой, то существует одна и только одна инволюция, для которой A, A' и B, B' являются сопряженными парами точек.

Для доказательства этого свойства рассмотрим две тройки точек A, A', B и A', A, B' . Согласно теореме [12.1] существует проективное преобразование π , при котором A, A', B переходят соответственно в точки A', A, B' . Согласно теореме [13.2] преобразование π является инволюцией. Так как $B' = \pi(B)$, то B, B' являются сопряженной парой. Единственность инволюции π немедленно следует из теоремы [12.1]. В самом деле, любая инволюция, для которой A, A' и B, B' являются сопряженными парами, представляет собой проективное преобразование, переводящее точки A, A', B соответственно в точки A', A, B' , поэтому совпадает с преобразованием π . ■

Точно так же может быть доказано следующее свойство:

2°. Если A, A', B — различные точки прямой, то существует одна и только одна инволюция, для которой A, A' являются сопряженной парой, а точка B — неподвижной точкой. □

3°. Инволюция либо не имеет ни одной неподвижной точки, либо имеет две различные неподвижные точки, т. е. является либо эллиптической, либо гиперболическим проективным преобразованием.

В первом случае она называется эллиптической инволюцией, а во втором — гиперболической.

Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что если инволюция имеет одну неподвижную точку A , то она имеет и другую неподвижную точку B , не совпадающую с точкой A .

Пусть $\pi: (l) \rightarrow (l)$ — данная инволюция, M и M' — сопряженная пара точек этой инволюции, а A — неподвижная точка. Очевидно, точки M , M' и A — попарно различны. Согласно свойству 8.1.2 всегда существует единственная точка B , удовлетворяющая условию $MM' \perp AB$. Покажем, что точка B является неподвижной. Для этого обозначим через B' образ точки B и заметим, что в силу определения проективного соответствия $(MM'AB) = (M'MAB')$. Но так как $MM' \perp AB$, то $(MM'AB) = (M'MAB)$, поэтому $(M'MAB) = (M'MAB')$. Из свойства 8.1.3 следует, что B' совпадает с точкой B . ■

Из доказанного свойства следует:

4°. Если A и B — различные неподвижные точки данной инволюции, а M и M' — любая пара сопряженных точек этой инволюции, то $MM' \perp AB$.

Докажем теперь предложение, в некотором смысле обратное этому предложению.

5°. Каковы бы ни были две различные точки A и B прямой (l) , существует одна и только одна гиперболическая инволюция, для которой A и B являются неподвижными.

Возьмем произвольную точку C , отличную от A и B , и рассмотрим точку C' , удовлетворяющую условию: $AB \perp CC'$. Согласно теореме [12.1] существует проективное преобразование $\pi: (l) \rightarrow (l)$, удовлетворяющее условиям: $A = \pi(A)$, $B = \pi(B)$, $C' = \pi(C)$. Если $C^* = \pi(C')$, то $(ABCC') = (ABC'C^*)$. С другой стороны, $(ABCC') = (ABC'C)$, поэтому $(ABC'C^*) = (ABC'C)$. Из свойства 8.1.3 следует, что $C^* = C$. Согласно теореме [13.2] преобразование π является инволюцией. Из свойства 4° следует, что любая инволюция с неподвижными точками A и B совпадает с π . ■

4. Преобразование отрезков при инволюции. Пусть M и M' — сопряженные точки данной инволюции π . Согласно свойству 12.1.2 проективный отрезок MM' переходит в проективный отрезок с концами M' и M . Если $MM'/1$ и $M'M/2$ — два дополнительных друг к другу отрезка с концами M и M' (см. п. 2, § 9), то возможны два случая: а) инволюция π отрезок $MM'/1$ переводит в отрезок $MM'/2$; в этом случае, очевидно, отрезок $M'M/2$ переходит в отрезок $MM'/1$; б) отрезок $MM'/1$ переходит в тот же отрезок $M'M/1$; в этом случае, очевидно, дополнительный отрезок $MM'/2$ переходит сам в себя.

Имеет место следующая интересная теорема, доказательство которой мы опускаем.

Теорема [13.3]. Пусть M и M' — сопряженная пара точек инволюции π , а $MM'/1$ и $MM'/2$ — отрезки, дополнительные друг к другу. Если π — гиперболическая инволюция, то каждый из отрезков $MM'/1$ и $MM'/2$ переходит сам в себя, а если π — эллиптическая инволюция, то отрезок $MM'/1$ переходит в $M'M/2$, а отрезок $MM'/2$ в $M'M/1$. □

Следствие. Если A , A' и B , B' — две пары сопряженных точек гиперболической инволюции, то $AA' \perp BB'$. Если же A , A' и

B , B' — две пары сопряженных точек эллиптической инволюции, то $AA' \nparallel BB'$.

Для обоснования этого предложения достаточно рассмотреть два дополнительных отрезка $AA'/1$ и $AA'/2$ и применить к ним предыдущую теорему.

Из этого следствия вытекает существование эллиптических инволюций. В самом деле, возьмем четыре произвольные точки A , B , A' , B' на прямой так, чтобы $AA' \nparallel BB'$. Согласно свойству 1° существует инволюция, для которой A , A' и B , B' являются сопряженными парами. Эта инволюция согласно следствию теоремы [13.3] является эллиптической.

5. Ортогональная инволюция в пучке прямых расширенной евклидовой плоскости. Принцип двойственности на плоскости позволяет все определения и теоремы данного параграфа почти автоматически перенести на прямые одного пучка. В частности, инволюцией прямых называется любое нетождественное проективное преобразование $\pi: [O] \rightarrow [O]$, удовлетворяющее условию: если произвольная прямая m переходит в прямую m' , то при том же преобразовании прямая m' переходит в прямую m . Сформулировав свойство, двойственное свойству 3° п. 3, мы приходим к понятиям эллиптической и гиперболической инволюций пучка прямых.

Рассмотрим пример эллиптической инволюции пучка прямых на расширенной плоскости E_2^∞ . Пусть $[O]$ — пучок прямых плоскости E_2^∞ с собственным центром. Построим отображение $\pi: [O] \rightarrow [O]$, при котором каждой прямой m пучка $[O]$ ставится в соответствие перпендикулярная ей прямая m' того же пучка. Очевидно, построенное отображение является преобразованием. Так как при этом отображении сохраняется угол между прямыми, то согласно формуле (15), § 8 сохраняется также сложное отношение соответственных четверок прямых. Мы видим, что преобразование π является проективным. Из геометрических соображений очевидно, что это преобразование является инволюцией, так как если $m' = \pi(m)$, то $m = \pi(m')$. Инволюция π не имеет неподвижных прямых (если $m \perp m'$, то $m' \neq m$), поэтому она является эллиптической инволюцией. Построенную инволюцию будем называть ортогональной инволюцией в пучке $[O]$ с собственным центром.

Легко видеть, что если прямая a не проходит через центр пучка $[O]$, то ортогональная инволюция этого пучка порождает на прямой a некоторую эллиптическую инволюцию, при которой сопряженной парой точек инволюции будут точки пересечения прямой a с двумя перпендикулярными прямыми пучка $[O]$. Очевидно, пучки с различными центрами на одной и той же собственной прямой порождают, вообще говоря, различные эллиптические инволюции. Весьма важным является то обстоятельство, что на плоскости E_2^∞ существует единственная прямая, на которой ортогональная инволюция любого пучка порождает одну и ту же инволюцию. Такой прямой будет, как нетрудно видеть,

несобственная прямая плоскости E_2^∞ . Это обстоятельство, как мы увидим в главе V, играет существенную роль в проективном истолковании евклидовой геометрии.

§ 14. Проективные преобразования плоскости

В настоящем параграфе мы будем рассматривать отображения $f: \Omega \rightarrow \Omega'$, для которых Ω и Ω' являются точками или прямыми одной и той же проективной плоскости.

1. Определение и основные свойства проективных преобразований точек плоскости. Взаимно однозначное отображение $f: \Omega \rightarrow \Omega'$ называется преобразованием точек проективной плоскости, если Ω и Ω' совпадают со множеством всех точек одной и той же проективной плоскости. Введем следующее основное определение: *проективным преобразованием точек проективной плоскости $\pi: P_2 \rightarrow P_2$ называется всякое преобразование, которое сохраняет коллинеарность точек и, кроме того, удовлетворяет следующему условию: если четыре различные точки одной прямой M_1, M_2, M_3, M_4 переходят соответственно в точки M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 , то $(M_1 M_2 M_3 M_4) = (M'_1 M'_2 M'_3 M'_4)$ ¹.*

Рассмотрим некоторые простейшие свойства проективных преобразований.

1°. При проективном преобразовании всякая прямая (l) преобразуется в прямую (l'), которая, в частности, может совпасть с прямой (l).

В самом деле, пусть (l) — данная прямая, а M_1, M_2 — две различные точки, принадлежащие ей. Рассмотрим их образы M'_1, M'_2 . Так как точки M'_1 и M'_2 различны, то они определяют некоторую прямую l' . Докажем, что (l) преобразуется в (l'). Действительно, если M — произвольная точка прямой (l), то согласно определению образ этой точки M' лежит на прямой (l'). Теперь покажем, что любая точка N' прямой (l') имеет прообраз на прямой (l). Для этой цели возьмем точку $M_3 \in (l)$, $M_3 \neq M_1$ и $M_3 \neq M_2$ и обозначим через M'_3 ее образ на прямой (l'). Очевидно, $M_3 \neq M'_1$ и $M_3 \neq M'_2$. Пусть $(M_1 M_2 M_3 N') = \xi$. Согласно 8.1.2 существует точка N , удовлетворяющая условию $(M_1 M_2 M_3 N) = \xi$. Из определения проективного преобразования, принимая во внимание 8.1.3, приходим к выводу, что точка N является прообразом точки N' . ■

2°. При проективном преобразовании три неколлинеарные точки переходят в три неколлинеарные точки.

Доказательство проведем от противного. Пусть при некотором проективном преобразовании $\pi: P_2 \rightarrow P_2$ найдутся такие три неколлинеар-

¹ Из методических соображений в определение проективного преобразования включено избыточное условие: $(M_1 M_2 M_3 M_4) = (M'_1 M'_2 M'_3 M'_4)$. Это условие может быть выведено, если проективное преобразование определить как преобразование, сохраняющее коллинеарность точек. Доказательство этого предложения является сложным и выходит за рамки настоящего курса (ср.: 1, § 24, п. 1).

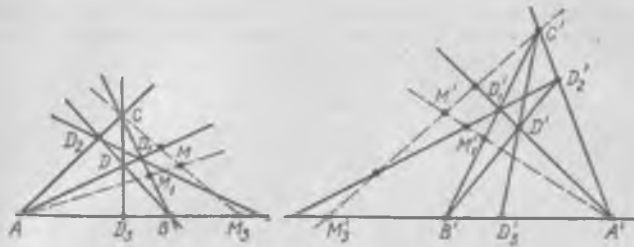


Рис. 20.

ные точки M_1, M_2 и M_3 , образы которых M'_1, M'_2, M'_3 лежат на одной прямой (l'). При этом предположении легко показать, что образы всех точек плоскости P_2 принадлежат прямой (l'). В самом деле, пусть M — произвольная точка плоскости P_2 , отличная от точек M_1, M_2 и M_3 , а $N = MM_3 \cap M_1 M_2$. Введем обозначения: $N' = \pi(N)$, $M' = \pi(M)$. Так как $N \in M_1 M_2$, то согласно предыдущему свойству $N' \in (l')$. С другой стороны, так как $M \in NM_3$, то $M' \in (l')$. Мы пришли к выводу, что отображение $\pi: P_2 \rightarrow P_2$ не является взаимно однозначным. Это противоречит определению проективного преобразования. ■

3°. При проективном преобразовании сохраняется отношение разделимости пар точек.

Пусть M_1, M_2, M_3 и M_4 — точки, удовлетворяющие условию $M_1 M_2 \div M_3 M_4$, а M'_1, M'_2, M'_3 и M'_4 — их образы. По определению разделимости пар точек имеем: $(M_1 M_2 M_3 M_4) < 0$. Из определения проективного преобразования следует, что $(M'_1 M'_2 M'_3 M'_4) < 0$, поэтому $M'_1 M'_2 \div M'_3 M'_4$. ■

Точно так же можно доказать, что

4°. Если $M_1 M_2 \div M_3 M_4$, а M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 — образы соответственных точек M_1, M_2, M_3, M_4 , то $M'_1 M'_2 \div M'_3 M'_4$. □

Из последних двух свойств немедленно следует:

5°. Если A и B — различные точки прямой (l), а A' и B' — их образы на прямой (l'), то два дополнительных друг к другу отрезка прямой (l), определяемые точками A и B , переходят в дополнительных друг к другу отрезки прямой (l'), определяемые точками A' и B' .

2. Основные теоремы. Докажем две теоремы, которые играют существенную роль в дальнейшем изложении.

Теорема [14.1]. Пусть $\pi: P_2 \rightarrow P_2$ — проективное преобразование, при котором четыре точки общего положения A, B, C и D переходят соответственно в точки A', B', C' и D' . Тогда точка M плоскости, имеющая в системе $ABCD$ координаты $x_1: x_2: x_3$, переходит в точку M' , которая в системе $A'B'C'D'$ имеет координаты $\lambda x_1: \lambda x_2: \lambda x_3$, где λ — некоторый коэффициент, отличный от нуля.

Доказательство. Для доказательства введем в рассмотрение следующие точки: $D_2 = CD \cap AB$, $D_3 = BD \cap AC$, $D_1 = AD \cap BC$, $D_3' = C'D' \cap A'B'$, $D_2' = B'D' \cap A'C'$, $D_1' = A'D' \cap B'C'$ и обозначим через $x_1 : x_2 : x_3$ координаты точки M' в системе $A'B'C'D'$ (рис. 20).

Сначала докажем теорему в предположении, что точка M лежит на одной из прямых AB , BC или CA . Пусть, например, $M \in AB$. В этом случае $x_3 = 0$ и, как следует из теоремы [5.2] и соотношения (1), § 8, $x_1 : x_2 = (ABD_2M)$. Согласно определению проективного преобразования $M' \in A'B'$, поэтому $x_3 = 0$ и согласно теореме [5.2] и соотношению (1), § 8, $x_1 : x_2 = (A'B'D_2'M')$. Так как $A' = \pi(A)$, $B' = \pi(B)$, $D_2' = \pi(D_2)$, $M' = \pi(M)$, то $(ABD_2M) = (A'B'D_2'M')$, поэтому $x_1 : x_2 = x_1 : x_2$. Отсюда следует, что $\exists \lambda : x_1 = \lambda x_1$, $x_2 = \lambda x_2$, $x_3 = \lambda x_3$, $\lambda \neq 0$.

Пусть теперь $M \notin AB$, $M \notin BC$, $M \notin CA$. Введем обозначения: $M_3 = AB \cap CM$, $M_2 = AC \cap BM$, $M_1 = BC \cap AM$; $M_3' = A'B' \cap C'M'$, $M_2' = A'C' \cap B'M'$, $M_1' = B'C' \cap A'M'$ (на рисунке 20 изображены только точки M_1, M_2 и M_3). В данном случае, как следует из теоремы [5.2] и соотношения (1), § 8, $x_1 : x_2 = (ABD_2M_3)$, $x_2 : x_3 = (BCD_1M_1)$, $x_1' : x_2' = (A'B'D_2'M_3')$, $x_2' : x_3' = (B'C'D_1'M_1')$. Легко видеть, что точки D_1, D_2, M_1, M_3 являются соответственно образами точек D_1', D_2', M_1', M_3' , поэтому согласно определению проективного преобразования имеем:

$$(ABD_2M_3) = (A'B'D_2'M_3'), (BCD_1M_1) = (B'C'D_1'M_1').$$

Отсюда следует, что $x_1 : x_2 = x_1' : x_2'$ и $x_2 : x_3 = x_2' : x_3'$, поэтому $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1'}{x_2'}$ и $\frac{x_2}{x_3} = \frac{x_2'}{x_3'}$. Таким образом,

$$\exists \lambda : x_1 = \lambda x_1', x_2 = \lambda x_2', x_3 = \lambda x_3', \lambda \neq 0. \blacksquare$$

Теперь докажем теорему, обратную предыдущей.

Теорема [14.2]. Пусть A, B, C, D и A', B', C', D' — две четверки точек общего положения. Рассмотрим отображение $f : P_2 \rightarrow P_2$, которое каждой точке $M(x_1 : x_2 : x_3)$, заданной в системе $ABCD$, ставит в соответствие точку M' , которая в системе $A'B'C'D'$ имеет координаты $\lambda x_1 : \lambda x_2 : \lambda x_3$, где λ — коэффициент, отличный от нуля. Тогда отображение $f : P_2 \rightarrow P_2$ является проективным преобразованием, которое точки A, B, C и D переводит соответственно в точки A', B', C' и D' .

Доказательство. Из определения отображения $f : P_2 \rightarrow P_2$ следует, что оно является взаимно однозначным, причем точки A, B, C, D переходят соответственно в точки A', B', C' и D' . Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что $f : P_2 \rightarrow P_2$ является проективным преобразованием.

Если точки M_1, M_2, M_3 коллинеарны, то их координаты удовлетворяют некоторому линейному уравнению $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$. Из условия теоремы следует, что координаты точек M_1', M_2', M_3' удовлетворяют тому же линейному уравнению, поэтому согласно теореме [7.1] эти точки коллинеарны.

Остается показать, что преобразование $f : P_2 \rightarrow P_2$ сохраняет сложное отношение соответственных точек. Пусть X, Y, Z, U — четыре различные точки прямой l , а X', Y', Z', U' — их образы на прямой l' . Введем обозначения для координат точек X, Y, Z, U в системе $ABCD$: $X(x_1 : x_2 : x_3)$, $Y(y_1 : y_2 : y_3)$, $Z(z_1 : z_2 : z_3)$, $U(u_1 : u_2 : u_3)$. Согласно условию теоремы точки X', Y', Z', U' в системе $A'B'C'D'$ имеют координаты: $X'(\lambda_1 x_1 : \lambda_1 x_2 : \lambda_1 x_3)$, $Y'(\lambda_2 y_1 : \lambda_2 y_2 : \lambda_2 y_3)$, $Z'(\lambda_3 z_1 : \lambda_3 z_2 : \lambda_3 z_3)$, $U'(\lambda_4 u_1 : \lambda_4 u_2 : \lambda_4 u_3)$.

Очевидно, хотя бы одна из точек A, B и C не лежит на прямой l . Пусть, например, $C \notin l$, тогда $C' \notin l'$. Обозначим проекции точек D, X, Y, Z и U из центра C на прямую AB через D_3, X_0, Y_0, Z_0 и U_0 , а проекции точек D', X', Y', Z' и U' из центра C' на прямую $A'B'$ через D_3', X_0', Y_0', Z_0' и U_0' . Согласно теореме [5.2] точки X_0, Y_0, Z_0, U_0 на прямой AB в системе ABD_3 имеют координаты $X_0(x_1 : x_2)$, $Y_0(y_1 : y_2)$, $Z_0(z_1 : z_2)$, $U_0(u_1 : u_2)$. Точно так же точки X_0', Y_0', Z_0', U_0' на прямой l' в системе $A'B'D_3'$ имеют координаты: $X_0'(\lambda_1 x_1 : \lambda_1 x_2)$, $Y_0'(\lambda_2 y_1 : \lambda_2 y_2)$, $Z_0'(\lambda_3 z_1 : \lambda_3 z_2)$, $U_0'(\lambda_4 u_1 : \lambda_4 u_2)$.

Если ввести обозначения $\xi_0 = (X_0 Y_0 Z_0 U_0)$, $\xi_0' = (X_0' Y_0' Z_0' U_0')$, $\xi = (XYZU)$, $\xi' = (X'Y'Z'U')$, то, вычислив ξ_0 и ξ_0' , пользуясь леммой [8.1], легко прийти к выводу, что $\xi_0 = \xi_0'$. С другой стороны, согласно теореме [8.3] имеем: $\xi = \xi_0$ и $\xi' = \xi_0'$, поэтому $\xi = \xi'$, т. е. $(XYZU) = (X'Y'Z'U')$. $\blacksquare$

Следствие. На проективной плоскости P_2 существует бесчисленное множество проективных преобразований точек.

3. Проективное отображение точек прямых, индуцированное данным проективным преобразованием. Пусть $\pi : P_2 \rightarrow P_2$ — данное проективное преобразование, при котором прямая l переходит в прямую l' . Из свойства 14.1.1 вытекает, что преобразование π устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками прямых l и l' . Легко видеть, что это отображение будет проективным, так как преобразование π сохраняет сложное отношение соответствующих четверок точек. Рассматриваемое отображение между точками прямых l и l' называется проективным отображением, индуцированным на прямых l и l' . Если прямая l и ее образ l' совпадают, то индуцированное отображение будет преобразованием прямой l .

4. Проективное преобразование прямых в плоскости. Пусть $[P_2]$ — множество всех прямых проективной плоскости. Проективным преобразованием прямых $\pi : [P_2] \rightarrow [P_2]$ называется всякое преобразование, которое три прямые, принадлежащие одному пучку, переводит в прямые, принадлежащие одному пучку, и, кроме

того, если четыре попарно различные прямые одного пучка a, b, c, d переходят соответственно в прямые a', b', c', d' , то $(abcd) = (a'b'c'd')$. Все предложения, сформулированные п. 1—3 настоящего параграфа, по принципу двойственности могут быть перенесены на проективные преобразования прямых. Предлагаем читателю сформулировать предложения, двойственные свойствам 1°—5° п. 1, а также теоремам [14.1] и [14.2].

Легко показать, что всякое проективное преобразование $\pi: P_2 \rightarrow P_2$ точек плоскости P_2 порождает некоторое проективное преобразование прямых множества $[P_2]$. В самом деле, пусть (l) — произвольная прямая плоскости, а (l') — ее образ. Введем в рассмотрение отображение прямых $\bar{\pi}: [P_2] \rightarrow [P_2]$, при котором прямой l ставится в соответствие прямая l'^1 . Это отображение, как нетрудно показать, является проективным преобразованием прямых множества $[P_2]$.

В дальнейшем изложении преобразование $\bar{\pi}: [P_2] \rightarrow [P_2]$ называется проективным преобразованием прямых, индуцированным точечным проективным преобразованием $\pi: P_2 \rightarrow P_2$.

§ 15. Способы задания проективных преобразований точек плоскости; гомологии

1. Геометрические способы задания проективных преобразований. Прежде всего докажем следующую основную теорему.

Теорема [15.1]. Пусть A, B, C, D и A', B', C', D' — две четверки точек общего положения. Тогда существует одно и только одно проективное преобразование, которое точки A, B, C и D переводит соответственно в точки A', B', C', D' .

Доказательство. Построим отображение, которое каждой точке M с координатами x_1, x_2, x_3 в системе $ABCD$ ставит в соответствие точку M' , имеющую те же координаты в системе $A'B'C'D'$. Это соответствие согласно теореме [14.2] является проективным. При этом, как легко видеть, точки A, B, C и D переходят соответственно в точки A', B', C' и D' .

Единственность преобразования, удовлетворяющего условиям теоремы, немедленно следует из теоремы [14.1]. ■

Предлагаем читателю, пользуясь предыдущей теоремой, доказать следующее предложение.

Теорема [15.2]. Пусть l и l' — прямые плоскости P_2 , а A, B, C и A', B', C' — две различные группы неколлинеарных точек той же плоскости, расположенные так, что $A \notin l, B \notin l, C \notin l$ и $A' \notin l', B' \notin l', C' \notin l'$. Тогда существует одно и только одно проективное

¹ Напомним, что (l) есть множество точек, а l — самостоятельный объект (см. сноску 1 на с. 11).

² Заметим, что на точки A, B, C, A', B', C' и прямые l и l' никаких других ограничений, кроме тех, которые указаны в условии теоремы, не накладывается. В частности, теорема справедлива и в случае, когда $l = l'$ (см. ниже, теорему [23.2]).

преобразование $\pi: P_2 \rightarrow P_2$, при котором точки A, B, C переходят соответственно в точки A', B', C' , а прямая l — в прямую l' . □

2. Аналитическое задание проективных преобразований. Поставим своей ближайшей целью найти аналитическое задание проективных преобразований, т. е. вывести соотношения между проективными координатами точек, соответствующих друг другу при данном проективном преобразовании. Поставленная проблема по существу сводится к следующей задаче.

Задача 1. Пусть $O_1O_2O_3E$ — система координат, а $\pi: P_2 \rightarrow P_2$ — данное проективное преобразование, которое точки O_1, O_2, O_3 и E переводит соответственно в точки $O'_1 (a_{11} : a_{21} : a_{31}), O'_2 (a_{12} : a_{22} : a_{32}), O'_3 (a_{13} : a_{23} : a_{33}), E' (a_{10} : a_{20} : a_{30})$. Установить связь между координатами произвольной точки $M (x_1 : x_2 : x_3)$ и координатами ее образа $M' (x'_1 : x'_2 : x'_3)$ при данном преобразовании.

Решение. Из теоремы [14.1] следует, что точка M' в системе $O_1O_2O_3E'$ имеет координаты $\lambda x_1 : \lambda x_2 : \lambda x_3$. Числа $x'_1 : x'_2 : x'_3$ являются координатами той же точки в системе $O_1O_2O_3E$, поэтому если в формулы (7), § 6, подставить вместо x_1, x_2, x_3 выражения $\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3$, а вместо x_1, x_2, x_3 выражения x'_1, x'_2, x'_3 и ввести обозначение $\rho' = \frac{\rho}{\lambda}$, то получаем аналитическое задание проективного преобразования π :

$$\rho' x'_1 = k_1 a_{11} x_1 + k_2 a_{12} x_2 + k_3 a_{13} x_3,$$

$$\rho' x'_2 = k_1 a_{21} x_1 + k_2 a_{22} x_2 + k_3 a_{23} x_3, \quad (1)$$

$$\rho' x'_3 = k_1 a_{31} x_1 + k_2 a_{32} x_2 + k_3 a_{33} x_3,$$

где коэффициенты k_1, k_2, k_3 определяются из соотношений (5), § 6:

$$a_{11} k_1 + a_{12} k_2 + a_{13} k_3 = a_{10},$$

$$a_{21} k_1 + a_{22} k_2 + a_{23} k_3 = a_{20}, \quad (2)$$

$$a_{31} k_1 + a_{32} k_2 + a_{33} k_3 = a_{30}.$$

Пример. В системе координат $O_1O_2O_3E$ записать аналитическое задание проективного преобразования, при котором точки O_1 и O_2 переходят соответственно в точки O_2 и O_1 , точка O_3 остается неподвижной, а точка E переходит в точку $E' (\alpha, \beta, \gamma)$, где $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \neq 0$.

Решение. В данном случае $O_1 = O_2, O_2 = O_1, O_3 = O_3$. Отсюда следует, что новые базисные точки имеют координаты: $O_1 (0 : 1 : 0), O_2 (1 : 0 : 0), O_3 (0 : 0 : 1)$, поэтому из (1) получаем:

$$\rho' x'_1 = k_2 x_2,$$

$$\rho' x'_2 = k_1 x_1,$$

$$\rho' x'_3 = k_3 x_3.$$

Из соотношений (2) определяем k_1, k_2, k_3 : $k_1 = \alpha, k_2 = \beta, k_3 = \gamma$.

Подставив эти значения в предыдущее соотношение, окончательно получаем формулы преобразований:

$$\rho'x'_1 = \alpha x_2, \quad \rho'x'_2 = \beta x_1, \quad \rho'x'_3 = \gamma x_3. \quad (3)$$

3. Линейные преобразования. Пусть дана система координат $O_1O_2O_3E$ и система однородных линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \rho'x'_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho'x'_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho'x'_3 &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3, \end{aligned} \quad (4)$$

где c_{ij} — числовые коэффициенты, из которых хотя один отличен от нуля, а ρ' — числовой коэффициент, значение которого можно принять произвольно. Рассмотрим на плоскости отображение, при котором каждой точке $M(x_1 : x_2 : x_3)$ ставится в соответствие точка $M'(x'_1 : x'_2 : x'_3)$, координаты которой определяются из соотношения (4). Построенное отображение называется **линейным отображением**, определяемым соотношениями (4). Если определитель Δ , составленный из коэффициентов при x_1, x_2, x_3 в уравнениях (4), отличен от нуля, то легко видеть, что линейное отображение будет взаимно однозначным преобразованием точек плоскости. В этом случае его будем называть **линейным невырожденным преобразованием** плоскости.

Согласно задаче 1 любое проективное преобразование может быть задано соотношениями (1), которые, очевидно, имеют вид (4). Заметим, что определитель, составленный из коэффициентов соотношений (1), отличен от нуля, так как точки O_1, O_2, O_3 не лежат на одной прямой и, кроме того, как следует из соотношений (2), $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0, k_3 \neq 0$. Таким образом, мы приходим к следующему важному выводу.

Теорема [15.3]. Любое проективное преобразование является невырожденным линейным преобразованием плоскости.

Имеет место также обратная теорема.

Теорема [15.4]. Любое невырожденное линейное преобразование является проективным преобразованием плоскости.

Доказательство. Пусть $\lambda: P_2 \rightarrow P_2$ — данное невырожденное линейное преобразование, которое в системе $O_1O_2O_3E$ задано системой (4). Легко видеть, что преобразование λ координатные точки $O_1(1:0:0), O_2(0:1:0), O_3(0:0:1), E(1:1:1)$ переводит соответственно в точки $O'_1(c_{11}:c_{21}:c_{31}), O'_2(c_{12}:c_{22}:c_{32}), O'_3(c_{13}:c_{23}:c_{33}), E'(c_{11}+c_{12}+c_{13}:c_{21}+c_{22}+c_{23}:c_{31}+c_{32}+c_{33})$. Так как λ — невырожденное преобразование ($\Delta \neq 0$), то, пользуясь следствием теоремы [5.3], непосредственно убеждаемся в том, что O'_1, O'_2, O'_3, E' являются точками общего положения. Поэтому согласно теореме [15.1] существует проективное преобразование $\pi: P_2 \rightarrow P_2$, которое точки O_1, O_2, O_3, E переводит соответственно в точки O'_1, O'_2, O'_3, E' . Если, пользуясь результатом задачи 1, записать аналитическое задание пре-

образования $\pi: P_2 \rightarrow P_2$, то, как не трудно видеть, соотношения (1) принимают вид (4). Таким образом, отображение π и λ совпадают. ■

Из доказанных двух теорем следует, что понятия проективного преобразования и невырожденного линейного преобразования совпадают.

4. Гармонически сопряженные пары точек эллиптической инволюции. Применим аналитический способ задания проективных преобразований для установления одного важного свойства эллиптических инволюций на прямой (см. § 13).

Теорема [15.5]. Пусть на прямой l дана эллиптическая инволюция. Если A и A' — произвольная сопряженная пара точек этой инволюции, то всегда существует одна и только одна сопряженная пара точек той же инволюции, которая гармонически разделяет пару AA' .

Доказательство. Введем в рассмотрение точку O_3 , не лежащую на l , и две точки E и E' так, чтобы они не лежали на сторонах трехвершинника $AA'O_3$ и, кроме того, удовлетворяли следующему условию: прямые O_3E и O_3E' пересекают прямую l в двух точках E_2 и E'_2 , которые образуют сопряженную пару данной инволюции (см. рис. 21). В системе координат $AA'O_3E$ запишем аналитическое задание преобразования $\pi: P_2 \rightarrow P_2$, при котором $A' = \pi(A), A = \pi(A'), O_3 = \pi(O_3), E' = \pi(E)$. Заметим, что согласно теореме [15.1] такое преобразование существует. Если точка E' в выбранной нами системе координат имеет координаты $(\alpha : \beta : \gamma)$, то соотношения (3) будут искомыми формулами. При построенном нами преобразовании π точка A преобразуется в A' , а A' в A , поэтому прямая l переходит сама в себя, и, кроме того, точка E_2 переходит в точку E'_2 , так как точки прямой O_3E переходят в точки прямой O_3E' . Согласно п. 3, § 14, преобразование π на прямой l индуцирует проективное преобразование, при котором точка A преобразуется в точку A' , точка A' — в точку A , а точка E_2 — в точку E'_2 . Отсюда из основной теоремы [12.1] следует, что построенное нами преобразование π на прямой l индуцирует данную эллиптическую инволюцию. Покажем, что всегда существует точка $M(x_1 : x_2 : x_3)$, которая вместе с ее образом $M'(x'_1 : x'_2 : x'_3)$ гармонически разделяет пару AA' . Так как $M \in l$ и $M' \in l$, то $x_3 = x'_3 = 0$. Тогда из формулы (7), § 8, следует, что

$$(AA'M'M) = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x'_1}{x'_2}. \quad (5)$$

Поэтому $AA' \equiv MM'$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x'_1}{x'_2} = -1 \quad \text{или} \quad x_2x'_1 + x_1x'_2 = 0.$$

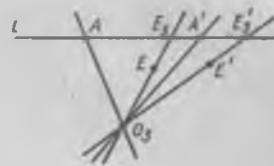


Рис. 21.

Используя формулы (3), получаем:

$$\beta x_1^2 + \alpha x_2^2 = 0. \quad (6)$$

Таким образом, $AA' \sim MM'$ тогда и только тогда, когда выполняется соотношение (6). Заметим, что числа α и β имеют разные знаки, так как согласно следствию теоремы [13.3] и формулы (5) имеем:

$$(AA'E_3E_2) = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{1} < 0.$$

Из соотношения (6) следует: $\frac{x_1}{x_2} = \pm \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}$.

Мы видим, что на прямой l имеются две и только две точки: $M_1 \left(\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} : 1 : 0 \right)$ и $M_2 \left(-\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} : 1 : 0 \right)$, удовлетворяющие соотношению (6). Каждая из этих точек вместе со своим образом образует пару точек, гармонически сопряженную с парой AA' . Умножив координаты точки M_2 на $\beta \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}$, получаем координаты той же точки в виде: $\left(\alpha : \beta \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} : 0 \right)$. Теперь, пользуясь формулами (3), легко показать, что M_2 является образом точки M_1 и, следовательно, M_1 является образом точки M_2 . ■

5. Неподвижные точки проективных преобразований. Точка M называется неподвижной точкой проективного преобразования, если ее образ совпадает с ней. Поставим следующую задачу.

Задача 1. Проективное преобразование в проективной системе $O_1O_2O_3E$ дано соотношениями (4). Найти его неподвижные точки.

Решение. Из соотношений (4) следует, что точка $M(x_1 : x_2 : x_3)$ будет неподвижной тогда и только тогда, когда существует такое число ρ' , что

$$\begin{aligned} (c_{11} - \rho')x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 &= 0, \\ c_{21}x_1 + (c_{22} - \rho')x_2 + c_{23}x_3 &= 0, \\ c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + (c_{33} - \rho')x_3 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$, то ρ' удовлетворяет уравнениям:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \rho' & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} - \rho' & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} - \rho' \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Определив из соотношений (8) действительные значения ρ' и подставив в соотношение (7), получаем систему однородных линейных уравнений для определения координат неподвижных точек.

Так как (8) является кубическим уравнением, то мы приходим к следующему интересному выводу.

1°. Любое проективное преобразование имеет по крайней мере одну неподвижную точку.

Сформулируем еще два свойства, которые непосредственно следуют из свойств проективных преобразований.

2°. Если три различные точки A, B и C прямой (l) являются неподвижными, то прямая (l) целиком состоит из неподвижных точек.

3°. Если проективное преобразование $\pi: P_2 \rightarrow P_2$ имеет четыре неподвижные точки общего положения, то оно является тождественным преобразованием.

6. Гомологии. Гомологией называется всякое нетождественное проективное преобразование точек плоскости, которое имеет прямую неподвижных точек. Эта прямая называется осью гомологии.

Для изучения свойств гомологий воспользуемся аналитическим методом. Если систему координат $O_1O_2O_3E$ выбрать так, чтобы точки O_1 и O_2 лежали на оси гомологии, а точки $O_3, \pi(O_3)$ и O_1 — на одной прямой (рис. 22), то из соотношений (1) после введения сокращенных обозначений получаем следующее аналитическое задание гомологий:

$$\rho'x'_1 = \alpha x_1 + \beta x_2, \quad \rho'x'_2 = \alpha x_2, \quad \rho'x'_3 = \gamma x_3, \quad (9)$$

где $\alpha \neq 0$ и $\gamma \neq 0$.

Соотношения (7) и (8) для определения неподвижных точек в данном случае имеют вид:

$$(\alpha - \rho')x_1 + \beta x_2 = 0, \quad (\alpha - \rho')x_2 = 0, \quad (\gamma - \rho')x_3 = 0, \quad (10)$$

$$(\alpha - \rho')^2 \cdot (\gamma - \rho') = 0. \quad (11)$$

Исследование системы (10) приводит нас к выводу, что если $\alpha \neq \gamma$, то гомология имеет, помимо точек оси гомологии, еще одну единственную неподвижную точку $L_0(\beta : 0 : \gamma - \alpha)$, а если $\alpha = \gamma$, то все неподвижные точки гомологии принадлежат оси. Таким образом, мы приходим к выводу.

1°. Любая гомология на плоскости принадлежит одному и только одному из следующих типов: гомология, имеющая единственную неподвижную точку, не лежащую на ее оси, и гомология, не имеющая неподвижных точек, не лежащих на оси.

В первом случае гомология называется гиперболической, а во втором случае — параболической.

Имеет место следующее важное свойство.

2°. При любой гомологии прямые, соединяющие соответственные точки, принадлежат одному пучку с центром в неподвижной точке.

В самом деле, пусть $M(x_1 : x_2 : x_3)$ — произвольная точка плоскости, а $M'(x'_1 : x'_2 : x'_3)$ — ее образ. Воспользовавшись соотношениями (9), мы убеждаемся в том, что точки M, M' и L_0 коллинеарны, где L_0 — точка с координатами $(\beta : 0 : \gamma - \alpha)$. Пользуясь соотношениями (10), легко показать, что L_0 является неподвижной точкой. Она называется центром гомологии. Из хода доказательства свойства 1° следует:

3°. Центром гиперболической гомологии является неподвижная точка, не лежащая на оси, а центром параболической гомологии — одна из точек оси.

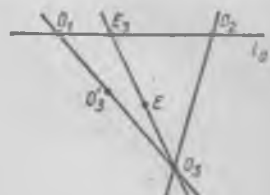


Рис. 22

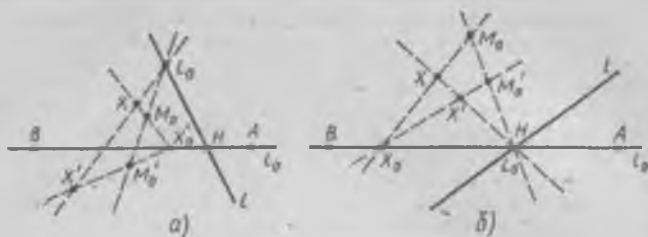


Рис. 23.

7. Задание гомологии осью, центром и парой соответственных точек. В заключение отметим, что если на проективной плоскости даны три различные коллинеарные точки L_0 , M_0 и M_0' и прямая l_0 , не проходящая через точки M_0 и M_0' , то можно показать, что существует одна и только одна гомология, для которой l_0 является осью, L_0 — центром, а M_0 и M_0' — соответственными точками (см. [8], задачу 137).

Это предложение позволяет геометрически задавать гомологию и легко строить образы точек при гомологии, заданной осью, центром и парой соответственных точек. На рисунках 23, а и 23, б показано построение образа точки X в предположении, что даны ось гомологии l_0 , центр L_0 и пара соответственных точек M_0 и M_0' . Сначала строим образ прямой XM_0 . Для этого, очевидно, достаточно соединить точки $X_0 = M_0X \cap l_0$ с точкой M_0' . Так как X , X' и L_0 коллинеарны, то $X' = X_0M_0' \cap XL_0$.

§ 16. Группа проективных преобразований; предмет проективной геометрии

В этом параграфе мы покажем, что предмет проективной геометрии может быть истолкован с групповой точки зрения. Более того, ниже, в главе V будет показано, что все известные нам «элементарные» геометрии — проективная, аффинная, евклидова и метрическая — укладываются в единую схему геометрий группы проективных преобразований и ее различных подгрупп.

1. Группа проективных преобразований плоскости. Нетрудно показать, что произведение двух проективных преобразований есть проективное преобразование. Доказательство этого предложения слово в слово совпадает с доказательством теоремы 1 [31.1], если в последнем термин «аффинное преобразование» заменить термином «проективное преобразование», а термин «простое отношение трех точек» — термином «сложное отношение четырех точек».

Важно отметить, что произведение двух проективных преобразований, вообще говоря, зависит от порядка сомножителей, т. е. $\pi_1\pi_2 \neq \pi_2\pi_1$. В соответствии с I, § 31, на проективной плоскости можно рассмотреть произведение любого конечного числа проективных преобразований. Если, например, π_1 , π_2 и π_3 — три проективных преобразова-

ния, то преобразование $\pi_3(\pi_2\pi_1)$ является проективным и, кроме того, $\pi_3(\pi_2\pi_1) = (\pi_3\pi_2)\pi_1$. Оно называется произведением преобразований π_1 , π_2 и π_3 и обозначается так: $\pi_3\pi_2\pi_1$.

Так как проективное преобразование $\pi: P_2 \rightarrow P_2$ является взаимно однозначным отображением проективной плоскости P_2 , то существует преобразование π^{-1} , обратное по отношению к π . По аналогии с доказательством теоремы 1, [31.2], пользуясь свойством 14.1.2, легко показать, что преобразование, обратное проективному преобразованию, является проективным. Отметим, наконец, что тождественное преобразование $\tau_0: P_2 \rightarrow P_2$ является проективным.

Рассмотрим множество всех проективных преобразований плоскости P_2 и обозначим его через G_2 . Элементами этого множества являются проективные преобразования. Сформулированные выше свойства, по существу, означают, что имеет место следующая важная теорема.

Теорема [16.1]. Множество G_2 всех проективных преобразований плоскости P_2 образует группу. Групповой операцией для этого множества является произведение проективных преобразований.

Легко видеть, что единицей этой группы будет тождественное преобразование.

2. Геометрия проективной группы. В соответствии с общей схемой, лежащей в основе определения геометрии, для построения конкретной геометрии необходимо иметь пространство, т. е. множество Ω произвольных элементов и некоторую группу G его преобразований. Условимся элементы множества Ω называть точками, а каждую конкретную совокупность точек — фигурой. Напомним, что наличие группы G позволяет ввести понятие эквивалентных фигур: фигуру F' называют эквивалентной фигуре F , если в G существует такое преобразование, которое фигуру F переводит в фигуру F' . При этом понятие эквивалентности удовлетворяет условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности¹.

В соответствии с этой схемой для истолкования проективной геометрии необходимо определить пространство Ω и группу преобразований G . Для того чтобы упростить изложение, мы ограничимся случаем двумерной проективной геометрии. В качестве пространства Ω возьмем множество всех точек плоскости P_2 , а в качестве G — множество всех проективных преобразований G_2 этой плоскости. Таким образом, проективная геометрия определяется как геометрия проективной группы.

3. Проективные понятия; проективная эквивалентность фигур. В проективной геометрии можно говорить только о таких понятиях, которые сохраняются при проективных преобразованиях. В частности, точка, прямая, пучок, трехвершинник, полный четырехвершинник — проективные понятия.

Сложное отношение четырех точек прямой также является проективным понятием, так как оно инвариантно относительно проективных преобразований. Отсюда следует, что разделенность пар точек, гармони-

См. I, § 31, п. 4.

ческая сопряженность, проективные отрезки являются проективными понятиями.

В следующей главе мы изучим свойства более сложных геометрических фигур проективной геометрии — линий и пучков второго порядка.

Две фигуры F и F' проективной плоскости будем называть *проективно эквивалентными*, если существует проективное преобразование, которое одну из этих фигур переводит в другую. Легко видеть, что, например, любые две прямые проективно эквивалентны. Любые два пучка прямых также проективно эквивалентны. Более того, из теоремы [15.1] следует, что любые два полных четырехвершинника также проективно эквивалентны. С другой стороны, трехвершинник и полный четырехвершинник не являются эквивалентными фигурами. Или другой пример. Пусть F_4 — фигура, состоящая из прямой a и четырех различных ее точек A_1, A_2, A_3, A_4 , а F'_4 — аналогичная фигура, состоящая из прямой b и четырех различных ее точек B_1, B_2, B_3, B_4 . Фигуры Ω_1 и Ω_2 будут эквивалентны тогда и только тогда, когда $(A_1 A_2 A_3 A_4) = (B_1 B_2 B_3 B_4)$.

В заключение отметим, что в проективной схеме могут быть истолкованы также аффинная и евклидова геометрии (см. главу V).

4. **Проективные понятия на расширенной евклидовой плоскости.** Смысл изложенных выше соображений станет особенно ясным, если сравнить понятия проективной геометрии с аналогичными понятиями аффинной и евклидовой геометрий. Для этого удобнее всего двумерную проективную геометрию интерпретировать на модели расширенной евклидовой плоскости (см. § 4, п. 6). Очевидно, далеко не всякое евклидово понятие расширенной плоскости TE_2^∞ является проективным. Например, если Ω_1 — множество внутренних точек евклидова отрезка AB , а Ω_2 — множество точек открытого луча, исходящего из некоторой евклидовой точки, то фигуры Ω_1 и Ω_2 проективно эквивалентны, поэтому с проективной точки зрения их нельзя отличить друг от друга. Понятие середины отрезка не является проективным понятием, так как при проективных преобразованиях плоскости TE_2^∞ середина данного отрезка может перейти в точку, отличную от середины его образа. Отсюда, в частности, следует, что понятие медианы треугольника не является проективным понятием, хотя треугольник при некотором уточнении этого понятия можно рассматривать как проективную фигуру.

Точно так же понятие конгруэнтности отрезков не является проективным, поэтому окружность не является проективной фигурой — ее определение основано на понятии конгруэнтности отрезков. Аналогично этому эллипс, гипербола и парабола не являются проективными понятиями.

Из приведенных выше примеров ясно, что при изучении проективной геометрии на базе расширенной евклидовой плоскости нас должны интересовать только те понятия, которые не изменяются при проективных преобразованиях, так как только они будут иметь геометрический смысл.

ЛИНИИ И ПУЧКИ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

Настоящая глава посвящена изучению свойств линий и пучков второго порядка на проективной плоскости. В § 17—20 изложена их общая теория на комплексной проективной плоскости, а в § 21 и 22 дано приложение этой теории к изучению свойств овальной линии и овального пучка и к решению конструктивных задач на действительной проективной плоскости.

§ 17. Линии второго порядка

1. **Определение линии второго порядка.** На проективной плоскости в отличие от евклидовой плоскости не всякое уравнение может быть рассмотрено как уравнение множества точек. В силу однородности проективных координат точек соотношение $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ будет уравнением множества точек только в том случае, когда функция $F(x_1, x_2, x_3)$ обладает следующим свойством: если $F(a_1, a_2, a_3) = 0$, то $F(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) = 0$ при любом λ ($\lambda \neq 0$). Легко видеть, что если $F(x_1, x_2, x_3)$ — однородная функция ¹, то указанное выше условие удовлетворяется. Уравнение прямой на проективной плоскости обладает как раз этим свойством (см. § 7, п. 3), так как оно является алгебраическим однородным уравнением первой степени. По этой причине прямую называют алгебраической линией первого порядка.

Алгебраической линией второго порядка или просто линией второго порядка называется множество всех точек проективной плоскости, координаты которых в выбранной системе координат $O_1 O_2 O_3 E$ удовлетворяют однородному уравнению второй степени, т. е. уравнению вида ²:

$$\sum a_{ij} x_i x_j = 0. \quad (1)$$

Мы ограничиваемся изучением действительных линий второго порядка, поэтому, не нарушая общности, будем предполагать, что все коэффициенты a_{ij} в уравнении (1) — действительные числа, не обращающиеся одновременно в нуль. В дальнейшем изложении будем также считать, что $a_{ij} = a_{ji}$ при $i, j = 1, 2, 3$. При этом соглашении соотношение (1) в развернутом виде запишется так:

$$a_{11}x_1x_1 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{22}x_2x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3x_3 = 0. \quad (2)$$

Примерами линий второго порядка являются множества точек, заданные уравнениями $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ и $x_1x_2 = 0$. Эти линии изображены на рисунках 24, а и 24, б.

¹ Функция $F(x_1, x_2, x_3)$ называется однородной, если для любого λ имеет место соотношение $F(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \Phi(\lambda) F(x_1, x_2, x_3)$.

² Здесь и в дальнейшем для сокращения записи двойную сумму вида $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j$ заменяем выражением $\sum a_{ij} x_i x_j$.

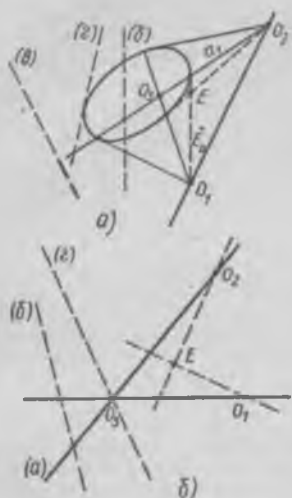


Рис. 24.

Легко видеть, что коэффициенты уравнения (2) существенно зависят от выбора систем координат. Однако, так же как и в случае линии второго порядка, на евклидовой плоскости (см. I, § 38, п. 1) можно показать, что понятие линии второго порядка не зависит от выбора системы координат.

Левая часть уравнения (1) является квадратичной формой от переменных x_1, x_2, x_3 . Ее будем называть квадратичной формой уравнения линии, а ее матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (3)$$

— матрицей уравнения линии. Легко видеть, что эта матрица существенно зависит от выбора системы координат. Одна из важных задач теории линии второго порядка заключается в отыскании такой системы координат, в которой матрица уравнения имеет в

определенном смысле наиболее простой вид. Для решения этой задачи нам необходимо сначала изучить основные свойства линий, заданных общим уравнением (2). Эти свойства позволяют в § 20 решить поставленную выше задачу.

2. Пересечение линии второго порядка с прямой. Пусть в проективной системе координат задана линия второго порядка (Г) уравнением (2) и действительная прямая¹ параметрическими уравнениями:

$$x_1 = \lambda p_1 + \mu q_1, \quad x_2 = \lambda p_2 + \mu q_2, \quad x_3 = \lambda p_3 + \mu q_3, \quad (4)$$

где $P(p_1 : p_2 : p_3)$ и $Q(q_1 : q_2 : q_3)$ — различные точки прямой. Эти точки будем называть базисными точками прямой. Определим координаты точек пересечения линии (2) и прямой (4). Для этого необходимо подставить значения x_1, x_2, x_3 из соотношений (4) в уравнение (2) и определить значения λ и μ , удовлетворяющие полученному уравнению. Выполним эти выкладки:

$$\sum a_{ij} (\lambda p_i + \mu q_i) (\lambda p_j + \mu q_j) = 0$$

или

$$\lambda^2 \sum a_{ij} p_i p_j + 2\lambda\mu \sum a_{ij} p_i q_j + \mu^2 \sum a_{ij} q_i q_j = 0. \quad (5)$$

¹ Прямая называется действительной или вещественной, если коэффициенты u_1, u_2, u_3 ее общего уравнения $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ пропорциональны действительным числам. Если прямая задана параметрическими уравнениями (4), то, не нарушая общности, можно предположить, что числа $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$ действительные.

Если ввести обозначения

$$P_{11} = \sum a_{ij} p_i p_j, \quad P_{12} = \sum a_{ij} p_i q_j, \quad P_{22} = \sum a_{ij} q_i q_j, \quad (6)$$

то предыдущее соотношение примет вид:

$$P_{11} \lambda^2 + 2P_{12} \lambda \mu + P_{22} \mu^2 = 0. \quad (7)$$

Каждой паре значений λ, μ , удовлетворяющих этому уравнению и пропорциональных действительным числам, отвечает действительная точка пересечения линии (2) с прямой (4). Каждой паре значений λ, μ , не пропорциональных действительным числам, отвечает комплексная точка. При этом точки M_1 и M_2 , отвечающие соответственно значениям (λ_1, μ_1) и (λ_2, μ_2) , будут различны тогда и только тогда, когда λ_1, μ_1 и λ_2, μ_2 не пропорциональны. Значения λ, μ , удовлетворяющие уравнению (7), существенно зависят от коэффициентов (6). Рассмотрим различные возможные случаи.

а) $P_{11} = P_{12} = P_{22} = 0$. В этом случае уравнению (7) удовлетворяют любые значения λ и μ . Геометрически это означает, что прямая (I) всеми своими точками принадлежит линии (Г) (см. рис. 24, б, прямые $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$).

б) Хотя бы один из коэффициентов P_{11}, P_{12}, P_{22} отличен от нуля. В этом случае левая часть уравнения (7) представляет собой квадратичную форму от переменных λ и μ и наша задача, по существу, сводится к определению асимптотических направлений этой формы. Эта задача нами уже решена в I, § 40, п. 3.

Введем обозначение

$$I_2 = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Перефразируя утверждение теоремы 1, [40.2], приходим к следующему выводу: прямая (I) пересекается с линией (Г) в двух точках: действительных различных, если $I_2 < 0$, комплексно сопряженных, если $I_2 > 0$, и совпадающих, если $I_2 = 0$ (прямые б), в) и г) на рис. 24, а и 24, б).

Резюмируя предыдущие выводы, мы приходим к теореме.

Теорема [17.1]. Если линия задана уравнением (2), а действительная прямая — базисными точками $P(p_1 : p_2 : p_3)$ и $Q(q_1 : q_2 : q_3)$, то возможны четыре и только четыре случая взаимного расположения прямой и линии второго порядка:

а) прямая всеми точками принадлежит линии ($P_{11} = P_{12} = P_{22} = 0$);

б) прямая имеет общими с линией две различные действительные точки ($I_2 < 0$);

в) прямая имеет общими с линией две комплексно сопряженные точки ($I_2 > 0$);

г) прямая имеет общими с линией две совпадающие точки ($I_2 = 0$). Здесь P_{11}, P_{12}, P_{22} и I_2 определяются соотношениями (6) и (8).

3. Касательная к линии второго порядка. Как известно, касательной к линии в точке M_0 называется предельное положение секущей

M_0M , когда точка M линии стремится к точке M_0 . В проективной геометрии, так же как и в теории кривых второго порядка на евклидовой плоскости, принято более широкое определение касательной: прямая (l) называется касательной к линии (Γ) , если пересечение $(l) \cap (\Gamma)$ представляет собой единственную действительную точку или совпадает с прямой (l) . Таким образом, прямая (l) будет касательной к линии (Γ) тогда и только тогда, когда имеют место случаи а) или г) теоремы [17.1]. Отсюда непосредственно следует (см. рис. 24, а, прямая г), или рис. 24, б, прямая а):

Лемма [17.2]. Если линия второго порядка (Γ) задана уравнением (2), а прямая (l) — базисными точками $P(p_1 : p_2 : p_3)$ и $Q(q_1 : q_2 : q_3)$, то (l) будет касательной к линии (Γ) тогда и только тогда, когда $I_2 = 0$, где I_2 определяется соотношением (8).

Доказательство. В самом деле, если (l) — касательная, то имеет место случай а) или г) теоремы [17.1], поэтому в любом случае $I_2 = 0$. Обратно, если $I_2 = 0$, то не могут иметь места случаи б) или г) этой теоремы, поэтому (l) — касательная к линии (Γ) . ■

Пользуясь этой леммой, легко доказать следующее предложение. **Теорема [17.3].** Какова бы ни была линия второго порядка, в каждой ее действительной точке существует по крайней мере одна касательная.

Доказательство. Пусть на линии, заданной уравнением (2), взята произвольная действительная точка $P(p_1 : p_2 : p_3)$. Тогда $P_{11} = \sum a_{ij} p_i p_j = 0$. Возьмем действительную точку $Q(q_1 : q_2 : q_3)$ так, чтобы

$$P_{12} = (\sum a_{1i} p_i) q_1 + (\sum a_{12} p_i) q_2 + (\sum a_{13} p_i) q_3 = 0.$$

Очевидно, это всегда возможно, так как последнее уравнение имеет бесчисленное множество решений. Для прямой PQ имеем $I_2 = 0$, поэтому согласно лемме [17.2] она является касательной. ■

§ 18. Сопряженные точки относительно линии второго порядка; особые точки

1. Сопряженные точки относительно линии второго порядка. Пусть линия второго порядка (Γ) в системе $O_1O_2O_3E$ дана уравнением

$$\sum a_{ij} x_i x_j = 0. \quad (1)$$

Точки $P(p_1 : p_2 : p_3)$ и $Q(q_1 : q_2 : q_3)$ называются сопряженными относительно линии L , если выполняется условие ¹

$$\sum a_{ij} p_i q_j = 0. \quad (2)$$

Из этого соотношения видно, что понятие сопряженности точек не зависит ни от нормирования координат точек P и Q , ни от нормирования коэффициентов уравнения линии. Ниже будет показано, что это

¹ Ср.: I, § 41, п. 7.

² Введенное нами понятие совпадает с понятием сопряженных направлений квадратичной формы уравнения линии (см. I, § 70, п. 3).

понятие имеет геометрический смысл и характеризует расположение двух точек относительно линии второго порядка, поэтому оно не зависит также от случайного выбора системы координат.

Из соотношения (2) непосредственно следует, что понятие сопряженности не зависит от порядка точек P и Q . В самом деле, если в соотношении (2) числа p_1, p_2, p_3 поменять местами соответственно с q_1, q_2, q_3 , то в силу симметричности коэффициентов a_{ij} ($a_{ij} = a_{ji}$) это соотношение сохраняется.

Рассмотрим некоторые свойства сопряженности точек. Из формулы (2) непосредственно следует:

1°. Точка P сопряжена самой себе относительно линии (Γ) тогда и только тогда, когда она принадлежит этой линии.

2°. Если точка P сопряжена с двумя различными точками Q и R , то она сопряжена с любой точкой прямой QR .

Пусть X — произвольная точка прямой QR . Если в выбранной системе координат рассматриваемые точки имеют координаты $P(p_1 : p_2 : p_3)$, $Q(q_1 : q_2 : q_3)$, $R(r_1 : r_2 : r_3)$, $X(x_1 : x_2 : x_3)$, то согласно (2), § 7, имеем:

$$x_j = \lambda q_j + \mu r_j,$$

где $j = 1, 2, 3$, поэтому:

$$\sum a_{ij} p_i x_j = \sum a_{ij} p_i (\lambda q_j + \mu r_j) = \lambda \sum a_{ij} p_i q_j + \mu \sum a_{ij} p_i r_j = 0. \quad (3)$$

Из этого соотношения следует, что P и X являются сопряженными точками. ■

3°. Если точка P сопряжена с тремя неколлинеарными точками Q, R и S (одна из которых в частности может совпасть с P), то она сопряжена с любой точкой плоскости P_2 .

Это свойство может быть обосновано аналогично предыдущему. Согласно 2.4.8 любая точка плоскости линейно зависит от точек Q, R и S , поэтому если X — произвольная точка плоскости, то $x_j = \lambda q_j + \mu r_j + \nu s_j$, где $j = 1, 2, 3$, а x_j, q_j, r_j, s_j — координаты соответствующих точек. Записав соотношение, аналогичное соотношению (3), получим искомый результат. ■

Как следствие свойств 3° и 1°, получаем:

4°. Если точка сопряжена относительно линии второго порядка с тремя неколлинеарными точками плоскости, то она принадлежит этой линии.

2. Геометрический смысл понятия сопряженности точек. Для выяснения геометрического смысла понятия сопряженности точек нам необходимо несколько видоизменить понятие гармонической разделенности точек, данное в п. 1, § 10. Введем следующее новое определение: будем говорить, что пары точек AB и CD гармонически разделяют друг друга (или гармонически сопряжены друг с другом), если выполняется одно из следующих условий: а) A, B, C и D — различные точки одной прямой, удовлетворяющие условию $(ABCD) = -1$; б) $A = B = C$, а $D \neq A$ (обозначение: $AB \perp CD$).

Очевидно, это определение вполне согласуется с принятым ранее; мы его просто распространим на тот случай, когда точки одной пары совпадают друг с другом.

Теперь мы можем доказать следующее предложение.

Теорема [18.1]. Даны две различные точки P и Q , из которых хотя бы одна не лежит на линии (Γ) . Для того чтобы эти точки были сопряжены относительно данной линии, необходимо и достаточно, чтобы $M_1 M_2 \perp PQ$, где M_1 и M_2 — различные или слившиеся точки пересечения прямой PQ с линией (Γ) .

Доказательство. Не нарушая общности, допустим, что $P \notin (\Gamma)$. Из теоремы [17.1] следует, что прямая PQ пересекает линию (Γ) в двух слившихся или различных (действительных или комплексно сопряженных) точках M_1 и M_2 , поэтому теорема сформулирована корректно.

Возьмем систему координат $O_1 O_2 O_3 E$ так, чтобы $O_1 = P$, $O_2 = Q$, и предположим, что в этой системе линия (Γ) задана уравнением (1). Если на прямой PQ точки P и Q приняты за базисные (см. п. 2, § 17), то выражение I_2 , определяемое соотношением (8), § 17, в выбранной системе принимает вид:

$$I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \quad (4)$$

так как $P_{11} = a_{11}$, $P_{12} = a_{12}$, а $P_{22} = a_{22}$ (см. (6), § 17). Заметим, что $P \notin (\Gamma)$, поэтому $a_{11} \neq 0$. Далее, так как $P(1:0:0)$ и $Q(0:1:0)$, то условие сопряженности точек P и Q , как следует из (2), запишется так:

$$a_{12} = 0. \quad (5)$$

Возможны два различных случая: а) $M_1 = M_2$; б) $M_1 \neq M_2$. Теорему докажем для каждого случая в отдельности.

а) $M_1 = M_2$. Из леммы [17.2] следует, что в этом случае $I_2 = 0$. Докажем необходимость условия. Так как P и Q сопряжены, то $a_{12} = 0$ (см. (5)), поэтому из (4), учитывая, что $a_{11} \neq 0$, получаем $a_{22} = 0$, т. е. $Q \in (\Gamma)$. Так как прямая PQ пересекает линию (Γ) в двух слившихся точках $M_1 = M_2$, то $Q = M_1 = M_2$. Отсюда получаем: $M_2 M_1 \perp PQ$.

Обратно, пусть $M_1 M_2 \perp PQ$. Так как $M_1 = M_2$ и $P \neq M_1$, то $Q = M_1 = M_2$, поэтому $Q \in (\Gamma)$ и, следовательно, $a_{22} = 0$. С другой стороны, согласно лемме [17.2] имеем $I_2 = 0$, но тогда из (4) следует, что $a_{12} = 0$. В силу (5) точки P и Q будут сопряженными относительно (Γ) .

б) $M_1 \neq M_2$. В этом случае, как следует из теоремы [17.1], $I_2 \neq 0$. Для доказательства теоремы предварительно найдем координаты точек M_1 и M_2 и по этим координатам вычислим сложное отношение $(PQM_1 M_2)$. Для этого совместно решим систему уравнений, состоящую из (1) и $x_3 = 0$. Эта система эквивалентна следующей:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0, \quad x_3 = 0.$$

Так как $a_{11} \neq 0$, то $x_2 \neq 0$, поэтому первое уравнение можно записать в виде:

$$a_{11}t^2 + 2a_{12}t + a_{22} = 0,$$

где $t = \frac{x_1}{x_2}$. Отсюда получаем:

$$t = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-I_2}}{a_{11}}.$$

Следовательно, точки M_1 и M_2 имеют координаты $M_1(-a_{12} + \sqrt{-I_2}; a_{11}:0)$ и $M_2(-a_{12} - \sqrt{-I_2}; a_{11}:0)$.

Из формулы (7), § 8, получаем: $(PQM_1 M_2) = \frac{-a_{12} - \sqrt{-I_2}}{-a_{12} + \sqrt{-I_2}}$.

Если P и Q сопряжены относительно линии (Γ) , то согласно (5) имеем $a_{12} = 0$, поэтому $(PQM_1 M_2) = -1$. Обратно, если $(PQM_1 M_2) = -1$, то $\frac{-a_{12} - \sqrt{-I_2}}{-a_{12} + \sqrt{-I_2}} = -1$, то отсюда получаем $a_{12} = 0$, т. е. точки P и Q сопряжены. ■

Доказанная теорема раскрывает геометрический смысл понятия сопряженности двух точек, если хотя бы одна из них не принадлежит линии. Остается рассмотреть случай, когда P и Q принадлежат линии (Γ) . В этом случае имеет место следующая теорема.

Теорема [18.2]. Пусть различные точки P и Q принадлежат линии (Γ) . Для того чтобы эти точки были сопряжены относительно этой линии, необходимо и достаточно, чтобы прямая PQ целиком принадлежала данной линии.

Доказательство. Систему координат $O_1 O_2 O_3 E$ возьмем так, чтобы $O_1 = P$, $O_2 = Q$, и предположим, что линия (Γ) в этой системе дана уравнением (1). Если на прямой PQ точки P и Q приняты за базисные, то выражения (6), § 17, принимают вид $P_{11} = a_{11}$, $P_{12} = a_{12}$, $P_{22} = a_{22}$. Так как по условию $P \in (\Gamma)$ и $Q \in (\Gamma)$, то $a_{11} = a_{22} = 0$, поэтому $P_{11} = P_{22} = 0$. Из теоремы [17.1], а) следует, что в данном случае прямая PQ принадлежит линии тогда и только тогда, когда $P_{12} = a_{12} = 0$. Из соотношения (2) следует, что это условие равносильно условию сопряженности точек P и Q . ■

Из доказанных выше теорем следует, что понятие сопряженности двух точек имеет определенный геометрический смысл, поэтому исходное определение сопряженных точек не зависит от случайного выбора системы координат.

3. Особые точки линии второго порядка. Действительная точка плоскости называется *особой* по отношению к данной линии второго порядка (Γ) , если она сопряжена с любой точкой плоскости. Точка плоскости, не являющаяся особой, называется *обыкновенной*.

Из этого определения следует, что каждая особая точка является самосопряженной, поэтому особые точки линии принадлежат самой линии.

Докажем критерий, характеризующий особые точки линии.

Теорема [18.3]. Пусть линия (Γ) дана уравнением (1). Для того чтобы точка $P(p_1 : p_2 : p_3)$ была особой точкой этой линии, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\begin{aligned} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3 &= 0, \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3 &= 0, \\ a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Доказательство. Достаточность этих условий очевидна, так как из (6) немедленно следует, что для любой точки $Q(q_1 : q_2 : q_3)$ условие сопряженности (2) будет выполнено. Докажем необходимость условий. Пусть $Q(q_1 : q_2 : q_3)$, $P(p_1 : p_2 : p_3)$ и $S(s_1 : s_2 : s_3)$ — три неколлинеарные точки. Согласно условиям теоремы точка P сопряжена с каждой из них, т. е.

$$\sum a_{ij}p_jq_i = 0, \quad \sum a_{ij}p_jr_i = 0, \quad \sum a_{ij}p_js_i = 0.$$

Если левые части уравнений (6) обозначить соответственно через ξ_1 , ξ_2 и ξ_3 , то предыдущие условия можно записать так:

$$\begin{aligned} \xi_1q_1 + \xi_2q_2 + \xi_3q_3 &= 0, \quad \xi_1r_1 + \xi_2r_2 + \xi_3r_3 = 0, \\ \xi_1s_1 + \xi_2s_2 + \xi_3s_3 &= 0. \end{aligned}$$

В силу неколлинеарности точек P , Q и S определитель, составленный из коэффициентов при ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , не равен нулю, поэтому $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$. ■

Так как коэффициенты системы уравнений (6) одновременно не обращаются в нуль, то ранг фундаментальной системы решений не больше двух, поэтому приходим к следующему выводу.

Следствие. Если линия имеет особые точки, то эти точки принадлежат одной прямой.

В качестве примеров найдем особые точки линий второго порядка: а) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ и б) $x_1x_2 = 0$, изображенных на рисунках 24, а и 24, б. Для кривой а) система (6) имеет вид: $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$. Это означает, что линия а) не имеет особых точек. Для линии б) система (6) сводится к следующей: $p_1 = 0$, $p_2 = 0$. Мы видим, что эта линия имеет только одну особую точку: $O_3(0 : 0 : 1)$.

Докажем следующее интересное предложение.

Теорема [18.4]. Если прямая (l) всеми своими точками принадлежит линии (Γ) , то линия имеет по крайней мере одну особую точку и распадается на пару прямых. В этом случае все особые точки линии принадлежат прямой (l) .

Доказательство. Систему координат $O_1O_2O_3E$ выберем так, чтобы прямая (l) совпала с координатной прямой O_1O_2 . Пусть в этой системе координат линия (Γ) имеет уравнение (1). Так как точки $O_1(1 : 0 : 0)$ и $O_2(0 : 1 : 0)$ принадлежат линии (Γ) , то $a_{11} = a_{22} = 0$. По условию теоремы прямая O_1O_2 целиком принадлежит линии (Γ) , поэтому из теоремы [18.2] следует, что точки O_1 и O_2 сопряжены относительно данной линии; в силу условия (2) сопряженности точек име-

ем $a_{12} = 0$. Мы видим, что уравнение (1) принимает вид

$$2a_{13}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3x_3 = 0$$

или

$$x_2(2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33}x_3) = 0.$$

Отсюда следует, что (Γ) распадается на пару прямых. С другой стороны, определитель системы (6) в данном случае равен нулю, поэтому согласно предыдущей теореме линия (Γ) имеет хотя бы одну особую точку.

Вторую часть теоремы докажем от противного. Пусть L_0 — особая точка линии, не принадлежащая прямой l . В этом случае каждая из точек O_1 и O_2 согласно свойству 3° п. 1 является особой. Мы пришли к противоречию со следствием предыдущей теоремы. ■

4. Ранг линии второго порядка; невырожденные линии. Из теоремы [18.3] следует, что определение особых точек линии второго порядка, заданной уравнением (1), сводится к решению системы однородных линейных уравнений (6), матрица которой совпадает с матрицей уравнения линии (см. (3), § 17). Обозначим ранг этой матрицы через r . Если $r = 3$, то система (6) не имеет ни одного решения, поэтому линия не имеет особых точек. Если $r = 2$, то все ненулевые решения системы (6) пропорциональны, поэтому линия имеет одну и только одну особую точку; если $r = 1$, для системы (6) ранг фундаментальной системы решений равен двум, поэтому существует прямая особых точек.

Так как понятие особой точки является геометрическим понятием, то оно, очевидно, не зависит от выбора системы координат. Число особых точек, как мы только что показали, зависит от ранга r матрицы (3), § 17. Отсюда мы приходим к весьма важному выводу: **ранг матрицы (3), § 17, уравнения линии не зависит от выбора системы координат.** Это позволяет ввести следующее важное определение: **ранг матрицы уравнения линии второго порядка в любой системе координат называется рангом данной линии.** Линия называется невырожденной, если ее ранг равен трем, в случае если ранг линии меньше трех, она называется вырожденной.

Теоремы [18.3] и [18.4] позволяют сделать следующий вывод.

Теорема [18.5]. Невырожденная линия второго порядка не имеет ни одной особой точки. Ни одна прямая плоскости не может всеми своими точками принадлежать невырожденной линии.

В заключение отметим, что понятие особой точки позволяет уточнить утверждение теоремы [17.3] следующим образом:

Теорема [18.6]. В каждой обыкновенной точке линии второго порядка существует одна и только одна касательная. □

§ 19. Полюсы и поляры

1. Определение полюсов и поляр. Множество всех точек плоскости, сопряженных с обыкновенной точкой P относительно линии второго порядка (Γ) , называется **поляр**ой точки P ; точка P называется **полюс**ом этого множества.

Если P — особая точка, то множество сопряженных с ней точек совпадает со всем множеством точек плоскости, поэтому понятие поляры для особых точек не вводится. Так как все особые точки принадлежат линии, то всякая точка плоскости, не принадлежащая линии, имеет поляру.

Докажем следующую теорему.

Теорема [19.1]. Если на плоскости дана линия второго порядка уравнением

$$\sum a_{ij}x_i x_j = 0, \quad (1)$$

то поляра обыкновенной точки $P(p_1 : p_2 : p_3)$ есть прямая, определяемая уравнением

$$\sum a_{ij}p_j x_i = 0. \quad (2)$$

При этом если $P \in (\Gamma)$, то поляра этой точки проходит через саму точку, если же $P \notin (\Gamma)$, то поляра не проходит через точку P .

Доказательство. Первая часть утверждения теоремы непосредственно следует из условия сопряженности (2), § 18. В самом деле, согласно этой формуле точка $M(x_1 : x_2 : x_3)$ будет сопряжена с точкой P тогда и только тогда, когда выполняется соотношение (2), поэтому (2) является уравнением поляры. Это уравнение в развернутом виде имеет вид:

$$\left(\sum a_{11}p_i\right)x_1 + \left(\sum a_{12}p_i\right)x_2 + \left(\sum a_{13}p_i\right)x_3 = 0. \quad (3)$$

Так как P не является особой точкой, то согласно теореме [18.3] хотя бы один из коэффициентов при x_1, x_2, x_3 отличен от нуля, поэтому уравнением (3) определяется прямая (теорема [7.1]).

Вторая часть теоремы почти очевидна. В самом деле, точка P принадлежит прямой (3) тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют этому уравнению, т. е. когда $\sum a_{ij}p_i p_j = 0$. ■

2. Свойства полюсов и поляр. Из теоремы [18.1] непосредственно следуют предложения, которые раскрывают геометрический смысл понятия поляры данной точки.

1°. Поляра данной точки P , не лежащей на линии (Γ) , есть множество всех точек плоскости, удовлетворяющих условию: каждая точка M этого множества гармонически сопряжена с точкой P относительно пары точек пересечения прямой PM с линией (Γ) .

2°. Поляра обыкновенной точки линии второго порядка совпадает с касательной к линии в той же точке.

Докажем следующее важное свойство, которое в дальнейшем будем называть свойством взаимности полюсов и поляр.

3°. Если поляра точки P проходит через обыкновенную точку Q , то поляра точки Q проходит через P (свойство взаимности).

В самом деле, пусть (3) — поляра точки P и точка $Q(q_1 : q_2 : q_3)$ принадлежит этой прямой. Это означает, что выполняется условие сопряженности (2), § 18, которое может быть записано так: $\sum a_{ij}q_i p_j = 0$.

Последнее равенство означает, что точка P принадлежит поляре точки Q , имеющей уравнение $\sum a_{ij}q_i x_j = 0$. ■

Предлагаем читателю по аналогии с предыдущим доказать следующие предложения.

4°. Если M_0 — особая точка линии второго порядка, то поляра любой обыкновенной точки плоскости, независимо от того, лежит ли точка на линии или не лежит, проходит через точку M_0 . □

5°. Если линия второго порядка (Γ) не имеет ни одной особой точки, то любая прямая l плоскости имеет единственный полюс L ; при этом если l — касательная к линии, то $L \in l$, если же l не является касательной, то $L \notin l$. □

6°. Если поляра p точки P , не лежащей на линии второго порядка, пересекает линию в действительной точке M , то прямая MP является касательной к линии в точке M . □

3. Понятие о полярном преобразовании. Пусть (Γ) — невырожденная линия второго порядка. Согласно теореме [19.1] каждая точка плоскости имеет определенную поляру. Из свойства 5° п. 2 вытекает, что различные точки имеют разные поляры и что любая прямая плоскости имеет один и только один полюс. Эти замечания позволяют ввести следующее соответствие на плоскости: каждой точке P поставим в соответствие ее поляру относительно линии (Γ) , а каждой прямой — ее полюс Q . Построенное нами соответствие является взаимно однозначным преобразованием множества $\{(P_p)\}$, поэтому оно называется полярным преобразованием, порождаемым данной линией. Мы видим, что каждая невырожденная линия на плоскости порождает полярное преобразование.

Полярные преобразования обладают рядом интересных свойств. В частности, если прямая a переходит в точку A , то множество (a) всех точек этой прямой переходит в пучок $[A]$. Имеет место следующая важная теорема, доказательство которой мы опускаем.

Теорема [19.2]. Если при данном полярном преобразовании различные точки M_1, M_2, M_3, M_4 прямой (a) переходят соответственно в прямые t_1, t_2, t_3, t_4 пучка $[A]$, то $(M_1 M_2 M_3 M_4) = (t_1 t_2 t_3 t_4)$. □

4. Автополярный трехвершинник. Трехвершинник ABC называется автополярным по отношению к данной линии второго порядка (Γ) , если каждая вершина этого треугольника сопряжена с любой точкой противоположной стороны. Легко показать, что, какова бы ни была линия второго порядка, существует бесчисленное множество автополярных треугольников по отношению к данной линии. В самом деле, возьмем произвольную точку A , не принадлежащую данной линии. Эта точка является обыкновенной, поэтому согласно теореме [19.1] существует поляра a этой точки. Если прямая a всеми точками принадлежит линии Γ , то возьмем любые две точки этой прямой и обозначим их через A и B . Согласно теореме [18.2] эти точки сопряжены относительно данной линии, поэтому трехвершинник ABC будет автополярным. Если не все точки прямой a принадлежат данной линии, то возьмем на прямой точку, не принадлежащую линии, обозначим ее через B и рассмотрим поляру b этой точки. Согласно свойству взаимности

$A \in b$. В этом случае в качестве третьей вершины принимаем точку $C = a \cap b$. На рисунке 24, а трехвершинник $O_1 O_2 O_3$ автополярен. Автополярные трехвершинники широко используются в теории линий второго порядка в силу следующего предложения.

Л е м м а [19.3]. Если система координат $O_1 O_2 O_3 E$ выбрана так, что трехвершинник $O_1 O_2 O_3$ является автополярным, то в этой системе уравнение линии второго порядка имеет следующий вид:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0. \quad (4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы проводится весьма просто. Пусть линия в произвольной системе координат задана уравнением (1). Воспользовавшись условием (2), § 18, запишем условие сопряженности для пар точек: O_1, O_2 ; O_2, O_3 и O_3, O_1 . Подставив координаты указанных точек в соотношение (2), § 18, получим: $a_{12} = 0, a_{13} = 0, a_{23} = 0$, поэтому уравнение линии имеет вид (4). ■

Докажем теперь следующее предложение.

Т е о р е м а [19.4]. Если линия Γ невырожденная, то на плоскости всегда существует хотя бы одна прямая, которая не имеет ни одной общей действительной точки с данной линией.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть система $O_1 O_2 O_3 E$ выбрана так, что треугольник $O_1 O_2 O_3$ является автополярным по отношению к данной линии. По отношению к этой системе линия имеет уравнение (4). Так как линия невырожденная, то $a_{11}a_{22}a_{33} \neq 0$, поэтому среди чисел a_{11}, a_{22}, a_{33} по крайней мере два числа имеют один и тот же знак. Не нарушая общности, предположим, что $a_{11} > 0$ и $a_{22} > 0$, тогда легко показать, что прямая $O_1 O_2$ не имеет с данной линией ни одной действительной точки. В самом деле, для определения точек пересечения прямой $O_1 O_2$ с данной линией следует совместно решить уравнение (4) с уравнением $x_3 = 0$. Эта система эквивалентна следующей: $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 = 0, x_3 = 0$.

Так как $a_{11} > 0$ и $a_{22} > 0$, то эта система не имеет действительных решений, поэтому данная линия и прямая $O_1 O_2$ не имеют общих действительных точек. ■

§ 20. Проективная классификация линий второго порядка. Пучки второго порядка

Теория полюсов и поляр позволяет легко решить задачу о классификации линий второго порядка на проективной плоскости. Настоящий параграф посвящен этому вопросу.

1. Приведение уравнения невырожденной линии к каноническому виду. Докажем следующую теорему.

Т е о р е м а [20.1]. Пусть (Γ) — невырожденная линия второго порядка. Если l — произвольная прямая плоскости, не имеющая с данной линией ни одной общей действительной точки, а O_1 — произвольная точка на этой прямой, то всегда существует такая система координат $O_1 O_2 O_3 E$, где $O_2 \in l$, в которой уравнение линии имеет вид:

$$x_1^2 + x_2^2 + ex_3^2 = 0 \quad (e = \pm 1), \quad (1)$$

здесь $e = \pm 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно свойству 19.2.5 прямая l имеет полюс O_2 , не принадлежащий l . Точка O_1 не является особой, поэтому она имеет поляр a_1 , которая проходит через точку O_2 и пересекает l в некоторой точке O_3 (рис. 24, а). Легко видеть, что трехвершинник $O_1 O_2 O_3$ является автополярным по отношению к кривой (Γ) . Возьмем точку E_0 на плоскости так, чтобы O_1, O_2, O_3, E_0 были точками общего положения, тогда согласно лемме [19.3] в системе $O_1 O_2 O_3 E_0$ уравнение линии будут иметь вид:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0. \quad (2)$$

Так как линия невырожденная, то, очевидно, $a_{11}a_{22}a_{33} \neq 0$. Уравнение (2) эквивалентно следующему: $x_1^2 + a'_{22}x_2^2 + a'_{33}x_3^2 = 0$, где $a'_{22} = \frac{a_{22}}{a_{11}} \neq 0, a'_{33} = \frac{a_{33}}{a_{11}} \neq 0$. Прямая l не имеет общих действительных точек с данной прямой, поэтому $a_{22} > 0$ (см. доказательство теоремы [19.4]).

Теперь покажем, что существует такая новая система координат $O_1 O_2 O_3 E$, в которой уравнение линии имеет вид (1). Заметим, что система имеет те же базисные точки, что и исходная, а единичные точки, вообще говоря, различны. Для этой цели рассмотрим точку E $\left(1 : \frac{1}{\sqrt{|a'_{22}|}} : \frac{1}{\sqrt{|a'_{33}|}}\right)$. Легко видеть, что точки O_1, O_2, O_3, E образуют систему координат, так как они являются точками общего положения. Запишем формулы преобразования при переходе от системы $O_1 O_2 O_3 E_0$ к системе $O_1 O_2 O_3 E$ (см. задачу 2, § 6):

$$\rho x_1 = x'_1, \quad \rho x_2 = \frac{1}{\sqrt{|a'_{22}|}} x'_2, \quad \rho x_3 = \frac{1}{\sqrt{|a'_{33}|}} x'_3.$$

В новой системе координат линия (Γ) имеет уравнение вида:

$$x_1'^2 + x_2'^2 + ex_3'^2 = 0. \quad \blacksquare$$

Из доказанной теоремы, принимая во внимание теорему [19.4], приходим к следующему важному выводу.

С л е д с т в и е. Какова бы ни была невырожденная линия второго порядка на проективной плоскости, всегда существует такая система координат, в которой уравнение этой линии имеет вид (1).

Уравнение (1) называется каноническим уравнением невырожденной линии, а система координат, в которой линия имеет это уравнение, — канонической системой координат. Заметим, что в выборе канонической системы координат имеется большой произвол, так как за ось $O_1 O_2$ может быть выбрана любая прямая, не имеющая с линией общих действительных точек, а за базисную точку O_1 — любая точка этой прямой.

2. Приведение уравнения вырожденной линии к каноническому виду. Задача решается совершенно аналогично предыдущей. Построим систему координат $O_1O_2O_3E$ так, чтобы вырожденная линия (Γ) в этой системе имела простейшее уравнение, аналогичное уравнению (1). В этом случае согласно теореме [18.3] линия (Γ) имеет хотя бы одну особую точку, поэтому базисную точку O_3 всегда можно совместить с одной из них. Возьмем произвольную прямую a_3 , не проходящую через эту точку. Из теоремы [18.4] мы заключаем, что на этой прямой существует хотя бы одна точка, не принадлежащая (Γ) . Примем ее за базисную точку O_1 . Ее поляра a_1 проходит через O_3 , поэтому не совпадает с прямой a_3 . Примем точку $a_1 \cap a_3$ за вторую базисную точку O_2 . Единичную точку E_0 возьмем произвольно и запишем уравнение линии в системе $O_1O_2O_3E_0$. Так как согласно способу выбора точек O_1, O_2, O_3 трехвершинник $O_1O_2O_3$ автополярен, то в выбранной нами системе линия имеет уравнение $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0$ (лемма [19.3]). В данном случае так как O_3 является особой точкой, то она принадлежит линии, поэтому $a_{33} = 0$. С другой стороны, точка O_1 не принадлежит данной линии, поэтому $a_{11} \neq 0$. Мы видим, что предыдущее уравнение эквивалентно следующему:

$$x_1^2 + a_{22}'x_2^2 = 0, \quad (3)$$

где $a_{22}' = \frac{a_{22}}{a_{11}}$. Если ранг линии равен единице, то $a_{22}' = 0$, поэтому предыдущее уравнение будет простейшим уравнением линии. Если ранг линии равен двум, то $a_{22}' \neq 0$. По аналогии со случаем невырожденной линии возьмем точку $E \left(1 : \frac{1}{\sqrt{|a_{22}'|}} : 1\right)$ и запишем уравнение линии (3) в системе $O_1O_2O_3E$. Согласно задаче 2, § 6, формулы преобразования имеют вид: $\rho x_1 = x_1', \quad \rho x_2 = \frac{1}{\sqrt{|a_{22}'|}} x_2', \quad \rho x_3 = x_3'$. В новой

системе координат линия (Γ) имеет уравнение $x_1^2 + \epsilon x_2^2 = 0$, где $\epsilon = \pm 1$. Мы пришли к следующему выводу.

Теорема [20.2]. *Какова бы ни была вырожденная линия второго порядка на плоскости, всегда существует такая система координат, в которой уравнение линии имеет вид $x_1^2 + \epsilon x_2^2 = 0$, где $\epsilon = \pm 1$, если ранг линии равен двум, и $\epsilon = 0$, если ранг равен единице.*

Уравнение $x_1^2 + \epsilon x_2^2 = 0$ называется каноническим уравнением вырожденной линии, а система координат, в которой линия имеет это уравнение, — канонической системой координат.

3. Классификация линий второго порядка. Предыдущие выводы позволяют классифицировать линии второго порядка на проективной плоскости. В соответствии со следствием теоремы [20.1] существует два различных вида невырожденных линий второго порядка, которые

имеют следующие канонические уравнения:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0. \quad (4)$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0. \quad (5)$$

Линия, определяемая уравнением (4), называется *овальной линией второго порядка*. Изучению свойств этой линии посвящен § 21.

На линии, определяемой уравнением (5), нет ни одной действительной точки, поэтому она называется *нулевой*.

Из теоремы [20.2] следует, что существуют три различных вида вырожденных линий второго порядка, которые имеют следующие канонические уравнения.

$$\text{При } r = 2 \begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 0. \end{cases} \quad (6) \quad (7)$$

$$\text{При } r = 1 \quad x_1^2 = 0. \quad (8)$$

Здесь r — ранг матрицы.

Уравнением (6) определяется пара прямых, имеющих уравнения $x_1 + x_2 = 0$ и $x_1 - x_2 = 0$. На линии (7) имеется только одна вещественная точка $(0 : 0 : 1)$; однако ее уравнение можно представить в виде $(x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) = 0$, поэтому говорят, что уравнением (7) определяется пара невещественных прямых. Отметим, наконец, что уравнением (8) определяется пара слившихся прямых: $x_1 = 0, x_1 = 0$.

Резюмируя предыдущие выводы, мы приходим к следующей основной теореме о классификации линий второго порядка на проективной плоскости.

Теорема [20.3]. *На проективной плоскости существуют пять и только пять типов линий второго порядка, перечисленных в следующей таблице:*

Название линии	Каноническое уравнение	Ранг
1. Овальная линия	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	3
2. Нулевая линия	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	3
3. Пара прямых	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	2
4. Пара невещественных прямых	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	2
5. Пара слившихся прямых	$x_1^2 = 0$	1

4. Проективные классы линий второго порядка. Классификация линий второго порядка, рассмотренная выше, называется *проективной*. Имеет место теорема, раскрывающая геометрический смысл нашей классификации¹.

¹ Ср. с теоремой I [39.4].

Теорема [20.4]. При проективном преобразовании любая линия (Γ) второго порядка переходит в линию второго порядка (Γ') , причем (Γ) и (Γ') принадлежат одному и тому же типу.

Любые две линии, принадлежащие одному и тому же типу, проективно эквивалентны, а линии, принадлежащие разным типам, проективно не эквивалентны.

Доказательство. Первая часть теоремы непосредственно следует из теоремы [14.1]. В самом деле, пусть линия (Γ) в системе $O_1O_2O_3E$ дана уравнением (1), § 19. Если (Γ') — образ этой линии при преобразовании $\pi: P_2 \rightarrow P_2$, то согласно теореме [14.1] линия (Γ') в системе $O'_1O'_2O'_3E'$ имеет уравнение $\sum \lambda^2 a_{ij} x_i x_j = 0$, или $\sum a_{ij} x_i x_j = 0$. Здесь $O'_1 = \pi(O_1)$, $O'_2 = \pi(O_2)$, $O'_3 = \pi(O_3)$, $E' = \pi(E)$. Мы видим, что (Γ') — линия второго порядка. Из этих же рассуждений следует, что (Γ) и (Γ') принадлежат одному и тому же типу, так как их уравнения (в разных системах!) совпадают.

Теперь покажем, что любые две линии, принадлежащие одному и тому же типу, проективно эквивалентны. Доказательство проведем, например, для овальной линии. Пусть (Γ_1) и (Γ_2) — две овальные линии. Это означает, что (Γ_1) в какой-то проективной системе $O_1O_2O_3E$ имеет уравнение $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, а (Γ_2) в другой системе $O'_1O'_2O'_3E'$ имеет уравнение $x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0$. Рассмотрим проективное преобразование $\pi: P_2 \rightarrow P_2$, при котором система $O_1O_2O_3E$ переходит в систему $O'_1O'_2O'_3E'$. При этом преобразовании согласно теореме [14.1] точка M , имеющая в системе $O_1O_2O_3E$ координаты $x_1 = \lambda x_1$, $x_2 = \lambda x_2$, $x_3 = \lambda x_3$. Отсюда следует, что линия (Γ_1) переходит в линию (Γ'_1) , имеющую во второй системе уравнение $(x_1' + x_2' - x_3') \frac{1}{\lambda^2} = 0$.

Очевидно, $(\Gamma'_1) = (\Gamma_2)$.

Остается показать, что две линии, принадлежащие разным типам, проективно не эквивалентны. Покажем, например, что овальная линия не эквивалентна линиям, принадлежащим четырем другим типам. Прежде всего заметим, что овальная линия не эквивалентна нулевой линии, так как первая имеет бесчисленное множество действительных точек, в то время как вторая не имеет ни одной действительной точки.

Далее, в силу инвариантности ранга линии второго порядка при проективных преобразованиях овальная линия не может быть эквивалентна линиям типа 3, 4 или 5.

Все остальные случаи могут быть рассмотрены аналогично. ■

5. Пучки второго порядка. Пучком второго порядка называется фигура, двойственная линии второго порядка по малому принципу двойственности. Другими словами, пучком второго порядка называется множество всех прямых проективной плоскости, координаты $u_1:u_2:u_3$ которых в некоторой системе $O_1O_2O_3E$ удовлетворяют уравнению

$$\sum b_{ij} u_i u_j = 0, \quad b_{ij} = b_{ji}. \quad (9)$$

Все результаты, приведенные в § 17 и в настоящем параграфе, по малому принципу двойственности могут быть перенесены на пучки второго порядка. В частности, если r — ранг квадратичной формы $\sum b_{ij} u_i u_j$, то число r называется рангом пучка, определяемого уравнением (9).

Все определения, свойства и теоремы, сформулированные выше для линий второго порядка, могут быть по принципу двойственности на плоскости перенесены на пучки второго порядка. В частности, можно показать, что ранг r матрицы квадратичной формы левой части уравнения (9) не зависит от выбора системы координат, поэтому r называется рангом самого пучка.

Теоремы, двойственные теоремам [20.3] и [20.4], формулируются так:

Теорема [20.5]. На проективной плоскости существуют пять и только пять типов пучков второго порядка, перечисленных в следующей таблице:

Название пучка	Каноническое уравнение	Ранг
1. Овальный пучок второго порядка	$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 0$	3
2. Нулевой пучок	$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$	3
3. Пара вещественных пучков первого порядка	$u_1^2 - u_2^2 = 0$	2
4. Пара мнимых пучков первого порядка	$u_1^2 + u_2^2 = 0$	2
5. Пара слившихся пучков первого порядка	$u_1^2 = 0$	1

Теорема [20.6]. При проективном преобразовании любой пучок (Γ) второго порядка переходит в пучок (Γ') второго порядка, причем (Γ) и (Γ') принадлежат одному и тому же типу.

Любые два пучка, принадлежащие одному и тому же типу, проективно эквивалентны, а пучки, принадлежащие разным типам, проективно не эквивалентны.

Названия пучков, принадлежащих типам 3, 4 и 5, обусловлены теоремой [7.4].

§ 21. Геометрические свойства овальной линии второго порядка

Настоящий параграф посвящен изучению геометрических свойств овальной линии второго порядка на действительной проективной плоскости.

1. Внутренние и внешние точки овальной линии. Овальная линия может быть определена как такая невырожденная линия второго порядка, которая содержит хотя бы одну действительную точку. Канони

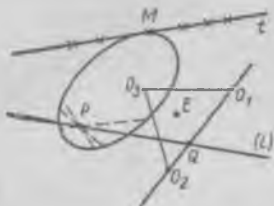


Рис. 25

ческое уравнение овальной линии имеет вид:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0. \quad (1)$$

Все рассмотренные выше свойства линий второго порядка автоматически распространяются на овальные линии. Однако согласно теореме [18.5] овальная линия не имеет особых точек, поэтому формулировки многих теорем упрощаются.

Из теорем [18.5] и [17.1] следует, что любая прямая, лежащая в плоскости овальной линии, пересекает ее не более чем в двух точках. Далее, из теоремы [18.6] и свойства 19.2.2 следует, что в каждой точке овальной линии существует одна и только одна касательная, которая совпадает с полярной этой точки. Заметим также, что в силу отсутствия особых точек каждая точка плоскости имеет полярю и каждая прямая имеет один и только один полюс.

Для дальнейшего изложения необходимо доказать две леммы. Предварительно введем следующее определение. Точка $M (y_1 : y_2 : y_3)$ называется внутренней (внешней) точкой овальной линии, заданной уравнением (1), если $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 < 0$ ($y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 > 0$). Ниже будет показано, что это определение не зависит от выбора системы координат.

Лемма [21.1]. Любая прямая, проходящая через внутреннюю точку овальной линии, пересекает ее в двух различных действительных точках.

Доказательство. Пусть овальная линия задана уравнением (1) и прямая (l) проходит через внутреннюю точку P (рис. 25). Так как (l) пересекается с прямой $x_3 = 0$, целиком состоящей из внешних точек, то на ней имеется хотя бы одна внешняя точка; обозначим ее через Q . Пусть на прямой (l) точки P и Q выбраны за базисные; в этом случае выражения (6), § 17, имеют вид:

$$P_{11} = p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 < 0, \quad P_{22} = q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 > 0.$$

Отсюда следует, что $I_2 = P_{11}P_{22} - P_{12}^2 < 0$. Но тогда в силу теоремы [17.1] б) приходим к искомому выводу. ■

Лемма [21.2]. Пусть прямая (l) пересекает овальную линию в двух различных точках M_1 и M_2 , а точки P и Q , не совпадающие с этими точками, лежат на прямой (l) и сопряжены относительно линии. Тогда одна из этих точек является внутренней, а другая — внешней.

Доказательство. Предположим, что овальная линия задана уравнением (1), а точки P и Q выбраны за базисные точки прямой (l) . В данном случае выражение I_2 (см. (8), § 17) имеет вид: $I_2 = P_{11}P_{22} = 0$, так как точки P и Q сопряжены. Согласно условию прямая (l) пересекает линию в двух различных точках, поэтому в силу теоремы [17.1] б) имеем: $I_2 < 0$. Отсюда следует, что P_{11} и P_{22} имеют

разные знаки, поэтому одна из двух точек P и Q является внутренней, а другая — внешней. ■

2. Геометрическое определение внутренних и внешних точек. Пользуясь доказанными леммами, легко установить ряд свойств внутренних и внешних точек овальной линии. Прежде всего заметим, что из леммы [21.1] непосредственно следует:

1°. Через внутреннюю точку овальной линии не проходит ни одна касательная (см. рис. 25).

Отсюда заключаем:

2°. Все точки, лежащие на касательной к овальной линии и отличные от точки касания, являются внешними (на рис. 25 точки прямой l , отличные от M).

3°. Если прямая (l) состоит из внешних точек, то ее полюс L — внутренняя точка.

Пусть R — внутренняя точка, отличная от точки L . Прямая RL пересекает линию в двух точках, а прямую (l) в некоторой точке S , которая является внешней. По определению полярной точки S и L сопряжены, тогда из леммы [21.2] вытекает, что L — внутренняя точка. ■

Сформулируем еще два предложения, обоснование которых предоставляем читателю.

4°. Полярная внешняя точка пересекает линию в двух различных действительных точках. □

5°. Через каждую внешнюю точку P овальной линии проходят две и только две касательные, для которых точками касания являются точки пересечения полярной точки P с данной линией. □

Из рассмотренных предложений вытекает следующая геометрическая характеристика внешних и внутренних точек. Точка плоскости будет внешней точкой овальной линии тогда и только тогда, когда через нее проходят две касательные к овальной линии. Точка плоскости будет внутренней тогда и только тогда, когда через нее не проходит ни одна касательная. Эти свойства могут быть приняты за определения внешних и внутренних точек овальной линии (см. рис. 25).

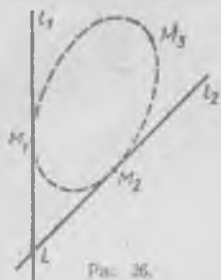
3. Задание овальной линии тремя точками и касательными в двух из них. Покажем, что любая овальная линия однозначно определяется тремя неколлинеарными точками и касательными в двух из этих точек. Предварительно рассмотрим следующую лемму.

Лемма [21.3]. Дана система координат $O_1O_2O_3E$. Если существует овальная линия (Γ) , которая проходит через точки O_1 , O_2 , O_3 и в точках O_1 и O_2 касается прямых O_1O_3 и O_2O_3 , то эта линия в данной системе определяется уравнением

$$x_1x_2 - x_3^2 = 0. \quad (2)$$

Для доказательства этой леммы достаточно записать уравнение линии в общем виде (см. (2), § 17) и, используя условия леммы, показать, что $a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_{33} = 0$, а $2a_{12} + a_{33} = 0$. ■

Теперь рассмотрим следующую важную теорему.



Теорема [21.4]. Пусть M_1, M_2 и M_3 — произвольные неколлинеарные точки, а l_1 и l_2 — прямые, удовлетворяющие условиям:

$$M_1 \in l_1, M_2 \notin l_1, M_3 \notin l_1, M_1 \notin l_2,$$

$$M_2 \in l_2, M_3 \notin l_2.$$

Тогда существует одна и только одна овальная линия, проходящая через точки M_1, M_2, M_3 и касающаяся прямых l_1 и l_2 (рис. 26).

Доказательство. Пусть $L = l_1 \cap l_2$. Из условий теоремы следует, что M_1, M_2, M_3 и L являются точками общего положения, поэтому их можно использовать для выбора системы координат. Пусть $O_1 = M_1, O_2 = M_2, O_3 = L$ и $E = M_3$. Рассмотрим в системе $O_1O_2O_3E$ линию (Γ) , заданную уравнением (2). Непосредственным подсчетом легко убедиться в том, что эта линия удовлетворяет всем условиям теоремы, т. е. является невырожденной, проходит через точку M_3 и касается прямых l_1 и l_2 соответственно в точках M_1 и M_2 .

Любая другая линия (Γ') , удовлетворяющая условиям теоремы в системе $O_1O_2O_3E$, согласно лемме [21.3] имеет уравнение (2), поэтому совпадает с линией (Γ) . ■

4. Геометрическое определение овальной линии. Докажем две теоремы, которые показывают, что овальные линии могут быть определены чисто геометрически, без помощи координат точек. Первая из них называется теоремой Штейнера.

Теорема [21.5]. Даны два различных пучка $[O_1]$ и $[O_2]$, между прямыми которых установлено проективное, но не перспективное отображение $\pi: [O_1] \rightarrow [O_2]$. Тогда множество всех точек пересечений соответственных прямых данных пучков образует овальную линию второго порядка, проходящую через точки O_1 и O_2 . При этом касательная в точке O_1 является образом прямой O_2O_1 , а в точке O_2 — образом этой прямой.

Доказательство. Пусть (Ω) — множество всех точек пересечений соответственных прямых отображения π . Идея доказательства теоремы состоит в том, чтобы, выбрав подходящую систему координат, написать уравнение множества (Ω) . Пусть $t \in [O_1]$ и $u \in [O_2]$ — две прямые, удовлетворяющие условиям: $t = \pi(O_2)$ и $O_2O_1 = \pi(u)$ (рис. 27). Из теоремы [12.4] следует, что $t \neq O_1O_2$ и $u \neq O_1O_2$. Так как $O_2 = t \cap O_1O_2, O_1 = u \cap O_1O_2$, то $O_1 \in (\Omega)$ и $O_2 \in (\Omega)$.

Прямые O_1O_2, t и u , как видим, образуют трехвершинник с вершинами O_1, O_2 и $O_3 = t \cap u$ (рис. 27). Возьмем прямую $l \in [O_1]$ так, чтобы $l \neq t$ и $l \neq O_1O_2$. Легко видеть, что точка $E = l \cap l'$, где $l' = \pi(l)$, не лежит на сторонах трехвершинника $O_1O_2O_3$, поэтому $O_1O_2O_3E$ является системой координат. Запишем уравнение множества (Ω) в этой системе. Для этого возьмем произвольную точку $X \in (\Omega)$ и обозначим ее координаты через $x_1 : x_2 : x_3$. Сначала

предположим, что $X \neq O_1$ и $X \neq O_2$. Отсюда вытекает, что $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_3 \neq 0$. Если ввести обозначения $x = O_1X, x' = O_2X, s = O_1O_2$ (см. рис. 27), то будем иметь: $t = \pi(s), s = \pi(u), l' = \pi(l), x' = \pi(x)$, поэтому

$$(sulx) = (tsl'x'). \quad (3)$$

Если ввести в рассмотрение точки $E_1 = t \cap l, X_1 = x \cap l, E_2 = u \cap l' \cap X_2 = u \cap x'$ (см. рис. 27), то по определению сложного отношения прямых пучка имеем:

$$(sulx) = (O_2O_3E_1X_1); \quad (tsl'x') = (O_3O_1E_2X_2). \quad (4)$$

Согласно теореме [5.2] точка X_1 на прямой t в системе $O_2O_3E_1$ имеет координаты $(x_2 : x_3)$, поэтому, используя формулу (1), § 8, получаем:

$$(O_2O_3E_1X_1) = \frac{x_2}{x_3}. \quad (5)$$

Точно так же точка X_2 в системе $O_3O_1E_2$ имеет координаты $(x_3 : x_1)$, поэтому

$$(O_3O_1E_2X_2) = \frac{x_3}{x_1}. \quad (6)$$

Из соотношений (3) и (4) следует, что $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_1}$ или

$$x_1x_2 - x_3x_3 = 0. \quad (7)$$

Так как координаты точек O_1 и O_2 также удовлетворяют этому уравнению, то нами показано, что координаты любой точки множества Ω удовлетворяют уравнению (7).

Теперь покажем, что если координаты точки X плоскости удовлетворяют соотношению (7), то $X \in (\Omega)$. Если X совпадает с одной из точек O_1 или O_2 , то наше утверждение тривиально, поэтому допустим, что $X \neq O_1$ и $X \neq O_2$. Пусть $x = O_1X$ и $x' = O_2X, X_1 = t \cap x$ и $X_2 = u \cap x'$. Очевидно, имеют место соотношения (5) и (6). В силу (7) получаем $(O_2O_3E_1X_1) = (O_3O_1E_2X_2) \Rightarrow (sulx) = (tsl'x') \Rightarrow X' = \pi(X) \Rightarrow X \in (\Omega)$.

Мы показали, что (7) является уравнением множества (Ω) . Этим уравнением определяется овальная линия. Записав уравнение касательных в точках O_1 и O_2 , убеждаемся в том, что удовлетворяются все условия теоремы. ■

Заметим, что если $\pi: [O_1] \rightarrow [O_2]$ является перспективным отображением, то множество (Ω) , порожаемое этим отображением, представляет собой пару различных прямых, одна из которых проходит через точки O_1 и O_2 .

Пользуясь этой теоремой, легко доказать обратную теорему. Теорема [21.6] (обратная теорема Штейнера). Дана овальная линия (Γ) и два различных пучка $[O_1]$ и $[O_2]$, центры



Рис. 27.

которых принадлежат линии (Γ) . Обращение $f: [O_1] \rightarrow [O_2]$ установлено так, что каждой прямой пучка $[O_1]$, пересекающей линию (Γ) в точке X , отличной от O_1 и O_2 , соответствует прямая O_2X пучка $[O_2]$; касательной в точке O_1 соответствует прямая O_2O_1 , а прямой O_1O_2 — касательная в точке O_2 . При этих условиях отображение f является проективным отображением, порождающим данную линию. $\square$

Непосредственными следствиями этих двух теорем являются предложения.

Следствие 1°. Каковы бы ни были пять точек общего положения, существует одна и только одна овальная линия, проходящая через эти точки.

Следствие 2°. Если на плоскости даны четыре точки общего положения и прямая, проходящая через одну из этих точек, но не проходящая через остальные точки, то существует одна и только одна овальная линия, которая проходит через данные точки и касается данной прямой.

В заключение данного параграфа сформулируем без доказательства теорему, которая устанавливает связь между овальной линией второго порядка и овальным пучком второго класса.

Теорема [25.7]. Множество всех касательных к овальной линии второго порядка образует овальный пучок второго класса. $\square$

§ 22. Теоремы Паскаля и Брианшона. Задачи на построение

Настоящий параграф посвящен задачам на построение на действительной проективной плоскости. Большинство из этих задач решается с помощью теорем Паскаля и Брианшона и их предельных случаев.

1. Теорема Паскаля. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и A_6 — шесть точек общего положения, заданные в определенном порядке. Фигура, состоящая из этих шести точек и шести прямых $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1$, называется простым шестивершинником и обозначается так: $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Точки $A_1, \dots, A_6$ называются вершинами, а прямые $A_1A_2, \dots, A_6A_1$ — сторонами. Очевидно, при циклической перестановке вершин простой шестивершинник не меняется. Так, например, шестивершинники $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ и $A_4A_5A_6A_1A_2A_3$ совпадают, так как состоят из одних и тех же вершин и сторон. Однако если совершить не циклическую перестановку вершин, то шестивершинник может измениться (см. рис. 28, а и б). Можно показать, что, имея на плоскости шесть фиксированных точек общего положения, из них можно образовать 60 различных простых шестивершинников. Все они будут иметь одни и те же вершины, но набор сторон для любых двух из них будет различным.

Шесть сторон простого шестивершинника можно сгруппировать в три пары противоположных сторон: A_1A_2 и A_4A_5 ; A_2A_3 и A_5A_6 ; A_3A_4 и A_6A_1 . На рисунке 28, а противоположные стороны обозначены одной и той же цифрой. Вершины также могут быть сгруппированы в три пары противоположных вершин.

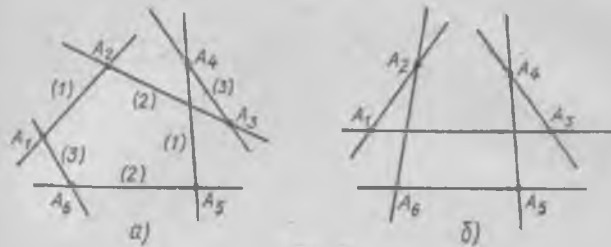


Рис. 28.

Теорема [22.1] (теорема Паскаля). Для того чтобы вершины простого шестивершинника принадлежали овальной линии второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы противоположные стороны попарно пересекались в трех точках, лежащих на одной прямой.

Доказательство. Необходимость. Пусть вершины шестивершинника S_1ABCS_2M принадлежат овальной линии (Γ) . Докажем, что точки

$$O = S_1A \cap CS_2, \quad N' = AB \cap S_2M, \quad N = BC \cap MS_1 \quad (1)$$

коллинеарны (рис. 29). Согласно теореме [21.6] проективное отображение

$$\pi: [S_1] \rightarrow [S_2], \quad (2)$$

которое прямые S_1A, S_1B, S_1C переводит соответственно в прямые S_2A, S_2B, S_2C , порождает данную линию. Пусть u_1 и u_2 — прямые BC и BA ; установим соответствие $f: (u_1) \rightarrow (u_2)$ следующим образом.

Пусть X — произвольная точка прямой u_1 , а $x = S_1X$. Рассмотрим прямую $x' = \pi(x)$ и точку $X' = x' \cap u_2$. Точке X поставим в соответствие точку X' . Легко видеть, что это отображение проективное, так как оно взаимно однозначное и, кроме того, каковы бы ни были точки X_1, X_2, X_3 и X_4 , будем иметь $(X_1X_2X_3X_4) = (x_1x_2x_3x_4) = (x'_1x'_2x'_3x'_4) = (X'_1X'_2X'_3X'_4)$. Но так как $B = f(B)$, то согласно теореме [12.2] f является перспективным отображением. Центром перспективы будет точка $O = CS_2 \cap S_1A$, так как точки, обозначенные на рисунке 29 цифрами 1 и 2, переходят соответственно в точки 1' и 2'. Так как $S_2M = \pi(S_1M)$, то $N' = f(N)$ (см. рис. 29), поэтому N, O и N' коллинеарны.

Достаточность. Пусть S_1ABCS_2M — данный шестивершин-

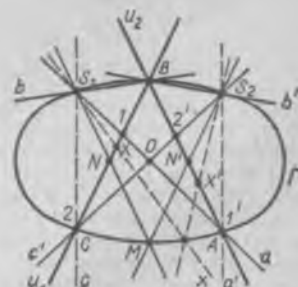


Рис. 29.



Рис. 30.

ник и точки O, N, N' (см. рис. 29) лежат на одной прямой. Рассмотрим овальную линию (Γ) , которая порождается отображением (2), переводящим прямые S_1A, S_1B, S_1C в прямые S_2A, S_2B, S_2C , и докажем, что точка M лежит на этой линии. Как было показано выше, отображение $\pi: [S_1] \rightarrow [S_2]$ индуцирует на прямых u_1 и u_2 перспективное отображение $f: (u_1) \rightarrow (u_2)$ с центром в точке O . Так как N, O и N' коллинеарны, то $N' = f(N)$. Отсюда следует, что $S_2M = \pi(S_1M)$, т. е. $M \in (\Gamma)$. ■

Прямую, на которой лежат точки пересечения противоположных сторон шестивершинника, будем называть прямой Паскаля.

2. Предельные случаи теоремы Паскаля. Доказательство предыдущей теоремы полностью сохраняет силу, если допустить, что точка M совпадает с точкой S_1 , а прямая S_1M является касательной к овальной линии в точке S_1 (см. рис. 29). В самом деле, преобразование (2), при помощи которого мы, по существу, доказали теорему Паскаля, может быть рассмотрено и в данном случае, поэтому весь ход доказательства теоремы Паскаля можно дословно повторить с той только разницей, что вместо прямой SM следует взять касательную t в точке M , а вместо S_2M — прямую S_2S_1 . В этом случае $N' = AB \cap S_2S_1$ и $N = BC \cap t$. Таким образом, мы получаем новую теорему.

Теорема [22.2]. В овальную линию вписан простой пятиугольник S_1ABCS_2 . Для того чтобы прямая t была касательной к овальной линии в точке S_1 , необходимо и достаточно, чтобы она пересекалась со стороной, противоположной вершине S_1 , в точке, лежащей на одной прямой с точками пересечения остальных пар несмежных сторон этого пятиугольника (рис. 30).

Справедливость этой теоремы можно обосновать также следующим не очень строгим, но достаточно наглядным рассуждением. Рассмотрим шестивершинник S_1ABCS_2M , вписанный в овальную линию, и предположим, что M — переменная точка этой линии (рис. 29). При стремлении точки M к точке S_1 прямая S_1M , очевидно, стремится к касательной к линии в точке S_1 . В предельном положении, когда M совпадает с S_1 , прямая S_1M совпадает с касательной в точке S_1 , а прямая S_2M — с прямой S_2S_1 . Так как точки O, N, N' (см. рис. 29) лежат на одной прямой при любом положении точки M , то в предельном положении они также будут лежать на одной прямой.

Рассуждая аналогичным образом, получаем другие предельные случаи для четырехвершинников и трехвершинников, вписанных в овальную линию. Эти случаи изображены на рисунках 31, 32 (для четырехвершинников) и на рисунке 33 (для трехвершинника). На этих рисунках для большей наглядности вершины исходного шестиугольника обозначены цифрами 1, 2, 3, 4, 5 и 6, поэтому в предельных случаях отдельные вершины совпадают.

3. Теорема Брианшона. Так называется предложение, которое по существу двойственно теореме Паскаля по принципу двойственности на плоскости. Заметим, что фигурой, двойственной овальной линии, будет овальный пучок второго порядка, а фигурой, двойственной простому шестивершиннику, — простой шестисторонник. Так называется фигура, состоящая из шести прямых общего положения $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ и шести точек $a_1 \cap a_2, a_2 \cap a_3, a_3 \cap a_4, a_4 \cap a_5, a_5 \cap a_6, a_6 \cap a_1$. Очевидно, понятия простого шестивершинника и простого шестисторонника совпадают. Поэтому предложение, двойственное теореме Паскаля, формулируется так: для того чтобы стороны простого шестивершинника принадлежали овальному пучку второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы три прямые, соединяющие попарно противоположные вершины, проходили через одну точку.

Принимая во внимание теорему о касательных к овальной линии (теорема [21.7]), мы приходим к следующему предложению, которое называется теоремой Брианшона.

Теорема [22.3]. Для того чтобы стороны простого шестисторонника были касательными к овальной линии второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы три прямые, соединяющие попарно противоположные вершины, проходили через одну точку.

По аналогии с теоремой Паскаля можно рассматривать предельные случаи теоремы Брианшона. Мы на этом вопросе не останавливаемся; предлагаем читателю самостоятельно сформулировать эти предложения.

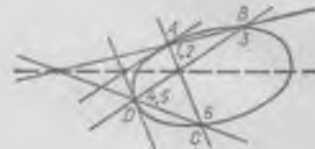


Рис. 31.

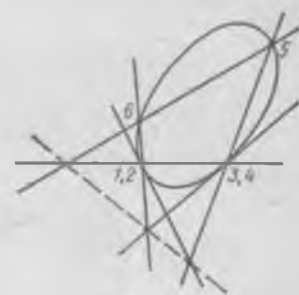


Рис. 32.

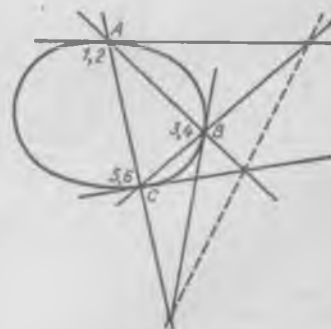


Рис. 33.

4. Задачи на построение. Теоремы Паскаля и Брианшона позволяют решать ряд задач на построение, связанных с овальными линиями. Рассмотрим некоторые из них.

Построение [22.1]. Даны пять точек общего положения и прямая, проходящая через одну из них и не проходящая через остальные точки. Построить вторую точку пересечения данной прямой с овальной линией.

Согласно следствию 1² теоремы [21.6], данными точками овальная линия определяется однозначно, поэтому задача сформулирована корректно. Важно отметить, что хотя овальная линия и существует, но в соответствии с условиями задачи построенными считаются только данные пять точек. Остальные точки не являются построенными. Обозначим данные точки через A, B, C, D, E и будем считать, что данная прямая a проходит через точку A (рис. 34, а и б). Идея решения задачи заключается в следующем. Предположим, что искомая точка X построена, и рассмотрим простой шестивершинник $ABCDEX$. Так как точки A, B, C, D, E и прямая a даны, то ими прямая Паскаля для шестивершинника $ABCDEX$ определяется однозначно (она проходит через точки 1 и 2, см. рис. 34, а). Построим прямую Паскаля, строим на ней третью точку, в которой пересекаются CB и EX , а потом точку X .

Из этого анализа вытекает построение (см. рис. 34, б). Строим последовательно:

$$\begin{aligned} a_1: a_1 &= AJB; & A_6: A_6 &= a_1 \cap a_6; \\ a_2: a_2 &= BJC; & A_7: A_7 &= A_5JA_6; \\ a_3: a_3 &= CJD; & A_8: A_8 &= a_2 \cap a_7; \\ a_4: a_4 &= DJE; & A_9: A_9 &= EJA_8; \\ A_5: A_5 &= a_4 \cap a; & X: X &= a \cap a_9. \end{aligned}$$

Заметим, что если $A \in a$, то точка X совпадает с точкой A . Геометрический смысл этого заключается в том, что данная прямая a касается овальной линии, поэтому она имеет с ней только одну точку.

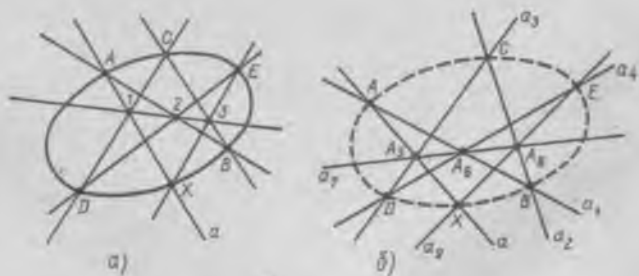


Рис. 34.

Решенная задача позволяет строить произвольное число точек овальной линии. Для этого достаточно провести прямую через точку A и, пользуясь предыдущей задачей, построить на каждой из них вторую точку пересечения с данной линией.

Построение [22.2]. Даны пять касательных общего положения a, b, c, d, e и точка A на прямой a , не лежащая на остальных прямых. Построить вторую касательную к овальной линии, проходящую через данную точку.

Применяя принцип двойственности, легко выполнить построение, двойственное предыдущему построению. Строим последовательно:

$$\begin{aligned} A_1: A_1 &= a \cap b; & a_6: a_6 &= A_1JA_6; \\ A_2: A_2 &= b \cap c; & A_7: A_7 &= a_6 \cap a_6; \\ A_3: A_3 &= c \cap d; & a_8: a_8 &= A_2JA_7; \\ A_4: A_4 &= d \cap e; & A_9: A_9 &= e \cap a_8; \\ a_5: a_5 &= A_3JA_4; & x: x &= AJA_9. \end{aligned}$$

Предлагаем читателю самостоятельно выполнить построение.

Построение [22.3]. Даны пять точек общего положения A, B, C, D и E . Построить касательную в точке A к овальной линии, проходящей через эти точки.

Построение выполняется точно так же, как и [22.1]. В данном случае вместо теоремы Паскаля мы используем теорему [22.2]. Согласно этой теореме точки 1, 2, изображенные на рисунке 35, определяют прямую Паскаля, поэтому искомая касательная x проходит через точку 3, в которой пересекается прямая Паскаля со стороной CD . Построение выполнено на рисунке 35. На этом рисунке точки и прямые обозначены в соответствии со схемой, изложенной в § 11, п. 4.

Построение [22.4]. Даны пять точек общего положения A, B, C, D, E овальной линии (Γ). Построить полярную данной точки P .

Если точка P совпадает с одной из данных точек овальной линии, то задача сводится к предыдущей, поэтому предположим, что P не совпадает ни с одной из точек A, B, C, D и E . Для решения задачи воспользуемся гармоническим свойством полюсов и поляр (см. 19.2.1). Возьмем из данных пяти точек овальной линии такие две, которые с точкой P не лежат на одной прямой. Не нарушая общности, можно предположить, что такими точками являются A и B . Допус-



Рис. 35.

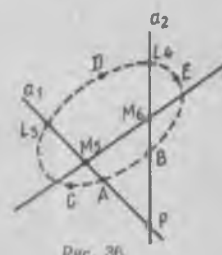


Рис. 36.

тим, что поляр x точки P построена (рис. 36). Проведем прямые PA и PB и предположим, что они пересекаются с линией (Γ) соответственно в точках L_3 и L_4 , отличных от A и B , а с полярной x — в точках M_3 и M_4 . Согласно 19.2.1 имеем $PM_3 \perp AL_3$, $PM_4 \perp AL_4$. Таким образом, задача сводится к построению точек L_3 , L_4 , M_3 и M_4 . Прямая M_3M_4 будет искомой. Заметим, что если $L_3 = A$ или $L_4 = B$, то построение становится тривиальным, так как в этом случае одна из прямых PA или PB является искомой.

Из проведенного анализа вытекает следующее построение:

$$\begin{aligned} a_1 : a_2 &= AJP, \\ a_3 : a_4 &= BJP, \\ L_3 : L_4 &= a_1 \cap (\Gamma); & \text{построение [22.1];} \\ L_4 : L_3 &= a_2 \cap (\Gamma); & \text{построение [22.1];} \\ M_3 : AL_3 &\perp PM_3; & \text{построение [11.1];} \\ M_4 : AL_4 &\perp PM_4; & \text{построение [11.1];} \\ x : x &= M_3M_4. \end{aligned}$$

Построение выполнено на рисунке 36.

Построение [22.5]. Даны пять точек общего положения A, B, C, D, E овальной линии (Γ) . Построить полюс данной прямой p . Для выполнения этого построения можно воспользоваться свойством взаимности 19.2.3.

Глава V

АФФИННАЯ И ЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИИ С ПРОЕКТИВНОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ. ПРИЛОЖЕНИЯ К ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В настоящей главе исходя из групповой точки зрения на геометрию (см. § 16) показано, что аффинная и евклидова геометрии естественным образом укладываются в единую систему геометрий различных подгрупп проективных преобразований. Изложенная здесь теория имеет принципиальное значение, так как позволяет разобраться в сходствах и различиях между проективной, аффинной и евклидовой геометриями. Кроме того, она дает возможность применить методы проективной геометрии для решения задач элементарной геометрии. Этому вопросу посвящен последний параграф настоящей главы.

§ 23. Геометрия на проективной плоскости с фиксированной прямой

1. Группа автоморфизмов. Как известно, с теоретико-групповой точки зрения для построения геометрии необходимо иметь пространство, т. е. множество Ω некоторых элементов, называемых точками, и группу G преобразований этого множества. Пусть в пространстве Ω дано некоторое подмножество U точек. Любое преобразование группы G , переводящее точки множества U в точки этого же множества, называется автоморфизмом преобразования, или автоморфизмом относительно множества U . Отметим, что автоморфизмы не оставляют, вообще говоря, точки множества U неподвижными. При данном автоморфизме каждая точка множества U переходит либо в себя, либо в другую точку того же множества.

Используя теорему I [31.6], т. е. критерий для определения подгрупп, легко доказать следующую теорему.

Теорема [23.1]. Если в пространстве Ω данной геометрии Ω группой преобразований G дано множество U точек, то совокупность всех преобразований группы G , автоморфных относительно U , является подгруппой группы G . □

2. Аффинные коллинеации. В дальнейшем изложении будем предполагать, что на проективной плоскости P_2 зафиксирована некоторая прямая p^* . В этом случае проективную плоскость будем обозначать через P_2^* и прямую p^* будем называть абсолютом этой плоскости. Две различные прямые этой плоскости называются *сходящимися*, если ни одна из них не совпадает с абсолютом, но их точка пересечения принадлежит абсолюту.

Аффинной коллинеацией плоскости P_2^* будем называть всякое проективное преобразование проективной плоскости P_2 , которое является автоморфизмом относительно точек абсолюта. Из

теоремы [23.1] следует, что совокупность всех аффинных коллинеаций плоскости P_2 образует подгруппу группы проективных преобразований.

Сформулируем теорему, которая является следствием теоремы [15.2], в предположении, что $l = l'$.

Теорема [23.2]. Пусть A, B, C и A', B', C' — две тройки неколлинеарных точек плоскости P_2 , не принадлежащих абсолюту. Тогда существует одна и только одна аффинная коллинеация, которая точки A, B, C переводит соответственно в точки A', B' и C' .

Из этой теоремы следует, что существует бесконечное множество аффинных коллинеаций.

3. Аффинная гомология. Аффинную коллинеацию будем называть аффинной гомологией, если она не является тождественной и имеет прямую неподвижных точек. Другими словами, аффинная гомология есть аффинная коллинеация, являющаяся гомологией (см. § 15, п. 6). В соответствии с этим определением аффинные коллинеации, являющиеся одновременно гиперболическими (параболическими) гомологиями, называются аффинными гиперболическими (параболическими) гомологиями.

Установим возможные типы аффинных гомологий. Для этого предварительно докажем следующее предложение.

Лемма [23.3]. Если ось данной аффинной гомологии не совпадает с абсолютом плоскости P_2 , то центр аффинной гомологии принадлежит абсолюту.

Доказательство. Пусть l и L соответственно ось и центр данной гомологии. Возьмем точку M на абсолюте p^* , не лежащую на оси гомологии, и рассмотрим образ M' этой точки. Если $M' = M$, то данная гомология является гиперболической и $L = M = M'$, поэтому $L \in p^*$. Если $M' \neq M$, то согласно определению центр гомологии L лежит на прямой MM' . Имеем $M \in p^*, M' \in p^* \Rightarrow L \in p^*$. ■

Классификацию аффинных гомологий проведем в зависимости от расположения центра L и оси l гомологии по отношению к абсолюту p^* . Возможны следующие четыре случая.

а) Аффинная гиперболическая гомология, ось которой не совпадает с абсолютом. В этом случае $L \notin l, L \in p^*$ и $l \neq p^*$ (рис. 37, а). Неподвижными точками преобразования будут все точки прямой l и точка L .

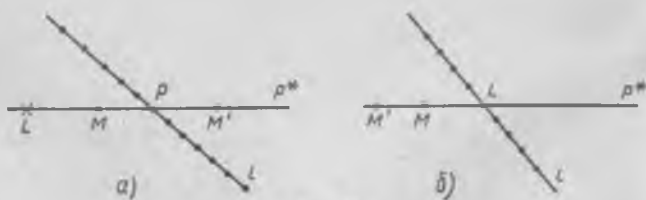


Рис. 37.



Рис. 38.

б) Аффинная параболическая гомология, ось которой не совпадает с абсолютом (рис. 37, б). В этом случае $L = l \cap p^*$ и $l \neq p^*$. Неподвижными будут только все точки прямой l и в том числе одна точка абсолюта — центр аффинной гомологии.

в) Аффинная гиперболическая гомология, ось которой совпадает с абсолютом (рис. 38, а), в этом случае $L \notin p^*, l = p^*$. Неподвижными точками будут все точки абсолюта и точка $L \notin l$.

г) Аффинная параболическая гомология, ось которой совпадает с абсолютом (рис. 38, б). Неподвижными точками будут все точки абсолюта.

4. Аффинные коллинеации переносов. Для дальнейшего изложения необходимо выделить специальный класс аффинных коллинеаций плоскости, которые будем называть аффинными коллинеациями переносов. Так называется любое проективное преобразование плоскости P_2 , множество всех неподвижных точек которого совпадает либо со множеством всех точек абсолюта, либо со множеством всех точек плоскости P_2 . Из этого определения следует, что аффинная коллинеация переносов является либо аффинной параболической гомологией, ось которой совпадает с абсолютом, либо тождественным преобразованием. Докажем теорему о задании аффинных коллинеаций переносов.

Теорема [23.4]. Если на плоскости P_2 даны две точки M и M' , не лежащие на абсолютe, то существует одна и только одна аффинная коллинеация переносов, при которой точка M переходит в точку M' .

Доказательство. Если точки M и M' совпадают, то искомым преобразованием будет тождественное и только тождественное преобразование, так как нетождественная аффинная коллинеация переносов не имеет неподвижных точек, не принадлежащих абсолюту. Если же M и M' не совпадают, то теорема является частным случаем предложения, сформулированного в п. 7, § 15, когда данная прямая l_0 совпадает с абсолютом. ■

Пользуясь этой теоремой, а также теоремой I [31.6], легко доказать следующее предложение.

Теорема [23.5]. Совокупность всех аффинных коллинеаций переносов плоскости P_2 образует группу.

§ 24. Проективное истолкование аффинной геометрии

В соответствии с групповой схемой построения геометрии в настоящем параграфе будет показано, что аффинная геометрия может быть рассмотрена как геометрия некоторой подгруппы группы проективных преобразований. Для этого построим модель двумерной аффинной геометрии на проективной плоскости. Мы увидим, что все понятия аффинной геометрии естественным образом интерпретируются на этой модели в терминах проективной геометрии.

1. Модель аффинной геометрии на проективной плоскости. Пусть P_2^* — проективная плоскость с фиксированным на ней абсолютом r^* . Введем следующую терминологию. Любую точку плоскости P_2^* , не лежащую на прямой r^* , назовем аффинной точкой, а любую прямую, отличную от прямой r^* , — аффинной прямой. Понятие принадлежности аффинных точек и прямых сохраним без изменения. Множество всех аффинных точек назовем аффинной плоскостью и обозначим через $\bar{P}_2^*$. Таким образом, аффинная плоскость $\bar{P}_2^*$ есть множество всех точек плоскости P_2^* , не принадлежащих абсолюту r^* . Абсолют плоскости P_2^* будем называть несобственной прямой, а точки абсолюта — несобственными точками по отношению к аффинной плоскости $\bar{P}_2^*$. Условимся в дальнейшем под терминами «точка» и «прямая» понимать только аффинную точку и аффинную прямую. Для аффинных точек и прямых сохраним те же обозначения, которыми мы пользовались для обозначения проективных точек и прямых, т. е. $A, B, \dots, l, m, \dots, (l), (m)$. Для того чтобы несобственные точки плоскости P_2^* отличить от аффинных (или собственных), несобственные точки будем обозначать так: $A^*, B^*, \dots$. Важно заметить, что аффинная прямая a плоскости $\bar{P}_2^*$ совпадает с проективной прямой a плоскости P_2^* , в то время как аффинная прямая l (а) плоскости $\bar{P}_2^*$ не совпадает с проективной прямой (а) плоскости P_2^* , так как если $A^* = a \cap r^*$, то A^* является точкой проективной прямой (а), но не является точкой аффинной прямой (а).

В соответствии с групповой точкой зрения для определения геометрии необходимо, кроме пространства, иметь также группу преобразований этого пространства. Для определения этой группы воспользуемся аффинными коллинеациями плоскости P_2^* .

В соответствии с введенной выше терминологией можно утверждать, что любая аффинная коллинеация π плоскости P_2^* аффинные точки переводит в аффинные точки, а несобственные точки в несобственные точки. Более того, каждая аффинная коллинеация плоскости P_2^* порождает некоторое преобразование аффинных точек плоскости $\bar{P}_2^*$, которую будем называть аффинным преобразованием этой

плоскости. Следовательно, аффинным преобразованием плоскости $\bar{P}_2^*$ мы называем любое преобразование точек этой плоскости, которое порождается некоторой аффинной коллинеацией плоскости P_2^* . Аффинные преобразования будем обозначать через $\pi, \sigma, \dots$, а соответствующие аффинные коллинеации — теми же буквами без черты сверху.

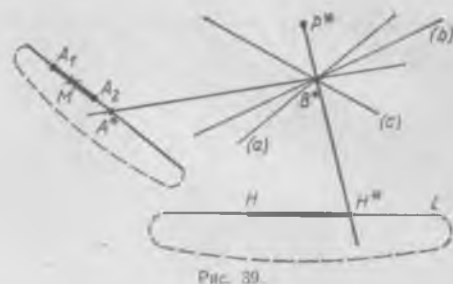


Рис. 39.

Легко видеть, что тождественное преобразование τ плоскости $\bar{P}_2^*$ порождает тождественное преобразование $\bar{\tau}$ плоскости $\bar{P}_2^*$. Далее, если π порождает $\bar{\pi}$, то π^{-1} порождает $\bar{\pi}^{-1}$. Очевидно также, что если π_1 и π_2 порождают преобразования $\bar{\pi}_1$ и $\bar{\pi}_2$, то преобразование $\pi_2 \pi_1$ порождает преобразование $\bar{\pi}_2 \bar{\pi}_1$, т. е. $\bar{\pi}_2 \bar{\pi}_1 = \overline{\pi_2 \pi_1}$. Отсюда, учитывая, что множество всех аффинных коллинеаций образует группу (см. § 23 п 2), приходим к важному выводу: множество всех аффинных преобразований плоскости $\bar{P}_2^*$ также образует группу. Геометрия этой группы и называется аффинной геометрией.

2. Параллельные прямые. Простейшие фигуры аффинной геометрии. Две сходящиеся прямые плоскости P_2^* называются параллельными прямыми аффинной плоскости. Другими словами, аффинные прямые (а) и (b) называются параллельными, если они не имеют общих точек на аффинной плоскости $\bar{P}_2^*$ (рис. 39). Очевидно, это понятие является геометрическим, так как оно инвариантно относительно всех аффинных преобразований. Легко видеть, что если прямая (а) параллельна прямой (b), а (b) параллельна прямой (c) и если (а) $\neq$ (c), то (а) параллельна (c) (см. рис. 39). Все параллельные друг другу прямые на плоскости P_2^* имеют общую несобственную точку. На рисунке 39 для прямых (а), (b) и (c) такой точкой будет B^* .

Две различные точки A_1 и A_2 проективной прямой a определяют два отрезка с концами в этих точках. Однако если эти точки аффинные, то проективные отрезки, определяемые ими, оказываются неравноправными, так как одному из них принадлежит несобственная точка A^* этой прямой, а другому не принадлежит (см. рис. 39). Проективный отрезок $A_1 A_2 / A^*$ на плоскости $\bar{P}_2^*$ называется аффинным отрезком (или просто отрезком) с концами A_1 и A_2 . На рисунке 39 этот отрезок отмечен жирной линией. Любая точка M прямой $A_1 A_2$, удовлетворяющая условию $A_1 A_2 \div MA^*$, называется точкой, лежащей между точками A_1, A_2 .

¹ Напомним, что (а) — множество всех точек, принадлежащих прямой а; ср. сноску на с. 11.

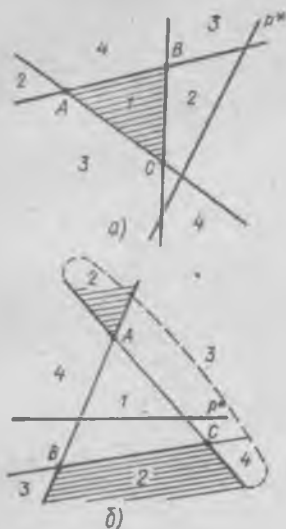


Рис. 40.

Теперь введем понятие луча. Пусть l — проективная прямая, отличная от абсолюта, а H — аффинная точка этой прямой. Возьмем несобственную точку H^* этой прямой и рассмотрим проективные отрезки $HH^*/1$ и $HH^*/2$ (рис. 39). Каждый из этих отрезков без точки H^* на плоскости P_2 называется лучом, исходящим из точки H . Из данной точки всегда исходят два луча. На рисунке 39 один из них отмечен жирной линией. Два луча, исходящих из одной точки и не принадлежащих одной прямой, называются углом.

Имея понятие отрезка, обычным образом можно определить ломаную и многоугольник. Эти понятия являются аффинными. Аналогичных понятий на проективной плоскости не существует. Например, треугольник аффинной плоскости и трехвершинник проективной плоскости — понятия, существенно различные. Отметим хотя бы то, что сторонами трехвершинника являются прямые, а сторонами треугольника — отрезки.

Более глубокое различие заключается в следующем. Стороны трехвершинника разбивают все точки проективной плоскости, не лежащие на сторонах, на четыре области, обозначенные на рисунке 40 цифрами 1, 2, 3, 4. Очевидно, ни одну из них нельзя выделить из остальных областей естественным образом, так как все они проективно эквивалентны друг другу. В силу этого для трехвершинника на проективной плоскости нельзя ввести понятия внутренней области. Однако если трехвершинник задан на плоскости P_2 с фиксированным абсолютным p^* , то одна из этих четырех областей отличается от остальных трех тем, что в ней нет ни одной точки абсолюта (на рис. 40, а — область 1, а на рис. 40, б — область 2). Эта область и называется внутренней областью треугольника ABC на плоскости P_2 . Любопытно отметить, что стороны треугольника ABC разбивают все точки аффинной плоскости, не лежащие на прямых AB , BC и AC , на 7 областей. Внутренней областью будет та, которая ограничена сторонами треугольника. На рисунках 40, а и 40, б внутренние области соответствующих треугольников заштрихованы.

На построенной нами модели определяются и другие аффинные фигуры. На рисунке 41, например, изображены два параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ и трапеция $EFGH$ с основаниями EH и FG .

3. Простое отношение трех точек. Одним из существенных понятий аффинной геометрии является простое отношение трех точек прямой, поэтому выясним, как его истолковать с точки зрения проективной геометрии. Пусть l — аффинная прямая плоскости P_2 , на которой даны три аффинные точки A , B и C . Если L^* — несобственная точка этой прямой, то число

$$\xi = -(L^*CBA) \quad (1)$$

называется простым отношением точек A , B , C и обозначается через (ABC) . Если A , B и C — попарно различные точки, то $(L^*CBA) = (ABCL^*)$, поэтому $^1 (ABC) = -(ABCL^*)$. Так как точка L^* не совпадает ни с одной из точек A , B и C , то простое отношение (ABC) определено для любых точек A , B и C , удовлетворяющих условию $B \neq C$. Далее, из свойства 8.1.2 следует, что если $B \neq C$, то для любого ξ на прямой BC существует одна и только одна точка A , удовлетворяющая условию

$$(ABC) = \xi. \quad (2)$$

При $A \neq B$ число ξ , определяемое соотношением (2), называется отношением, в котором точка C делит направленный отрезок AB . При $\xi = 1$ точка C называется серединой отрезка AB . Понятие середины отрезка с точки зрения проективной геометрии имеет простой геометрический смысл, а именно: середина C отрезка AB и несобственная точка L^* прямой AB гармонически разделяют пару точек AB . В самом деле, согласно определению имеем:

$$-(ABC) = (L^*CBA) = -1 \Rightarrow CL^* \perp AB.$$

Из соотношения (1), используя свойства сложного отношения четырех точек, можно вывести все основные свойства простого отношения трех точек. В частности, используя свойства 8.4.2 и 8.4.6, получаем:

$$(ABC) = \frac{1}{(BAC)} \text{ и } (A_1B_1C_1)(A_2A_1C_1) = -(A_2BC). \quad (3)$$

Важно отметить, что простое отношение трех точек не меняется при аффинных преобразованиях плоскости P_2 , так как оно определено через сложное отношение четырех точек, которое является инвариантом аффинных коллинеаций.

¹ Ср. с формулой (13), § 8.

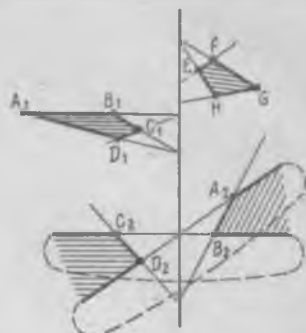


Рис. 41.



Рис. 42



Рис. 43

4. Векторы. Аффинное преобразование плоскости $\bar{P}_2^*$, которое порождается аффинной коллинеацией переносов плоскости P_2^* , называется параллельным переносом¹. Из теоремы [23.4] следует, что если на аффинной плоскости даны две точки A и A' , то существует один и только один параллельный перенос, который точку A переводит в точку A' . Из теоремы [23.5] получаем важный вывод.

Теорема [24.1]. Совокупность всех параллельных переносов аффинной плоскости образует группу.

Параллельные переносы позволяют истолковать всю векторную алгебру с проективной точки зрения. Вектором назовем пару точек A и B , взятых в определенном порядке (обозначение: $\overline{AB}$). Два вектора $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются равными, если существует такой параллельный перенос, который точки A и B переводит соответственно в точки C и D . Из определения равенства векторов вытекает, что если векторы $\overline{MN}$ и $\overline{M'N'}$ принадлежат параллельным прямым, то $\overline{MN} = \overline{M'N'}$ тогда и только тогда, когда MM' и NN' параллельны (см. рис. 42).

Понятие суммы и разности векторов вводится так же, как и в аналитической геометрии² (см. I, § 1). Введем понятие умножения вектора на число. Пусть $\overline{OA}$ — ненулевой вектор, а α — произвольное действительное число. Выше было отмечено, что всегда существует единственная точка A' , удовлетворяющая условию: $\alpha = - (A'AO)$. Вектор $\overline{OA'}$ называется произведением вектора $\overline{OA}$ на число α и обозначается через $\alpha\overline{OA}$. Итак, $\overline{OA'} = - (A'AO) \overline{OA}$. Если $\overline{OA} = 0$, то по определению $\alpha\overline{OA} = 0$.

5. Координаты точек на аффинной плоскости. Будем говорить, что проективная система координат $O_1O_2O_3E$ связана с абсолютном P^* плоскости P_2^* , если $O_1 \in P^*$ и $O_2 \in P^*$ (рис. 43). Если $E_1 = O_1E \cap O_2O_3$, а $E_2 = O_2E \cap O_1O_3$, то геометрический образ, состоящий из точки O_3 и векторов $e_1 = \overline{O_3E_1}$, $e_2 = \overline{O_3E_2}$, называется системой коор-

¹ В отличие от терминологии, введенной в I, гл. IV, здесь параллельные переносы включают в себя тождественное преобразование.

² Сложение векторов с проективной точки зрения впервые введено А. П. Котельниковым в 1899 г.

динат плоскости $\bar{P}_2^*$, порожденной проективной системой $O_1O_2O_3E$ (и обозначается: $O_3e_1e_2$).

Прямая P^* в системе $O_1O_2O_3E$ имеет уравнение $x_3 = 0$, поэтому у каждой аффинной точки $M(x_1 : x_2 : x_3)$ третья координата отлична от нуля. Числа $x = x_1 : x_2$, $y = x_2 : x_3$ называются аффинными координатами точки $M \in \bar{P}_2^*$ в системе $O_3e_1e_2$. Выясним геометрический смысл чисел x и y . Согласно следствию теоремы [5.2] и определению сложного отношения имеем: $x_2 : x_3 = (O_2O_3E_1M_1)$, $x_1 : x_3 = (O_1O_3E_2M_2)$ (относительно обозначений см. рис. 43). Таким образом,

$$x = - (M_2E_2O_3), \quad y = - (M_1E_1O_3),$$

или

$$x = \frac{\overline{O_3M_2}}{\overline{O_3E_2}}, \quad y = \frac{\overline{O_3M_1}}{\overline{O_3E_1}} \quad (4)$$

Так как $O_3M_1MM_2$ — параллелограмм, то $\overline{O_3M} = \overline{O_3M_1} + \overline{O_3M_2}$, поэтому из предыдущих соотношений окончательно получаем:

$$\overline{O_3M} = x\overline{O_3E_2} + y\overline{O_3E_1} = xe_1 + ye_2. \quad (5)$$

Формулы (4) и (5) полностью согласуются с определением координат точек на аффинной плоскости (см. I, § 9, формулы (1) и (2)). Роль начала координат играет точка O_3 , а базисных векторов — векторы $\overline{O_3E_2}$ и $\overline{O_3E_1}$.

§ 25. Проективное истолкование линий второго порядка аффинной плоскости

1. Аффинная классификация линий второго порядка с проективной точки зрения. Дана линия второго порядка (Γ) на плоскости P_2^* с абсолютном P^* . Мы предполагаем, что абсолют P^* не принадлежит линии (Γ) . Обозначим через (Γ) множество всех аффинных точек этой линии и покажем, что это множество в точности совпадает с понятием кривой второго порядка аффинной плоскости (см. I, § 38). Для этой цели введем в рассмотрение систему координат $O_1O_2O_3E$, связанную с абсолютном (п. 5, § 24, см. рис. 43). Пусть линия (Γ) в этой системе задана уравнением:

$$a_{11}x_1x_1 + a_{22}x_2x_2 + a_{33}x_3x_3 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0. \quad (1)$$

Так как абсолют P^* не принадлежит линии всеми своими точками, то коэффициенты a_{11} , a_{12} , a_{22} одновременно не равны нулю. Если $O_3e_1e_2$ — система координат плоскости $\bar{P}_2^*$, порожденная системой $O_1O_2O_3E$, то линия (Γ) в этой системе определяется уравнением:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (2)$$

так как $x = x_1 : x_3$, $y = x_2 : x_3$.

Итак, если на плоскости P_2^* дана линия второго порядка, то множество всех аффинных точек этой линии является кривой второго порядка

плоскости $\bar{P}_2$. Выше было показано, что на проективной плоскости существует пять типов линий второго порядка. На аффинной плоскости $\bar{P}_2$ дело обстоит иначе, так как приходится учитывать расположение линии относительно абсолюта. В самом деле, если, например, линия (Γ) пересекает абсolut p^* в двух действительных точках A^* и B^* , то образ этой линии при всех аффинных коллинеациях будет пересекать абсolut в двух точках, поэтому это свойство проективной линии (Γ) (т. е. пересечение с абсolutом в двух точках) будет аффинным свойством. Таким образом, линии проективной плоскости, принадлежащие к одному и тому же типу, порождают на аффинной плоскости $\bar{P}_2$ линии, которые с точки зрения аффинной геометрии могут принадлежать различным типам. Для того чтобы разобраться в этом вопросе, выясним взаимное расположение линии (1) и абсолюта p^* в зависимости от значений коэффициентов левой части уравнения этой линии. Для этого воспользуемся теоремой [17.1]. Если за базисные точки прямой p^* примем точки O_1 и O_2 , то выражения (6), § 17, принимают вид: $P_{11} = a_{11}$, $P_{12} = a_{12}$, $P_{22} = a_{22}$, поэтому I_2 , определяемое соотношением (8), § 17, имеет вид:

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Согласно теореме [17.1] возможны следующие случаи:

а) $I_2 > 0$, линия (1) не пересекает абсolut p^* в действительных точках.

б) $I_2 < 0$, линия (1) пересекает абсolut в двух действительных точках.

в) $I_2 = 0$, линия (1) касается абсолюта.

Так как в уравнениях (1) и (2) коэффициенты совпадают, то мы приходим к проективному толкованию понятий кривых эллиптического, гиперболического и параболического типов аффинной плоскости (см. I, § 40, п. 3).

а) Линия (Γ) проективной плоскости P_2^* порождает аффинную линию $(\bar{\Gamma})$ эллиптического типа тогда и только тогда, когда (Γ) не пересекает абсolut в действительных точках, а пересекает его в двух различных комплексно сопряженных точках. Из пяти типов линий, перечисленных в теореме [20.3], таковыми могут быть только пара невещественных комплексно сопряженных прямых с точкой пересечения, не лежащей на абсolute, нулевая линия и овальная линия. Соответствующими линиями $\bar{\Gamma}$ на плоскости $\bar{P}_2^*$ будут (см. рис. 44):

1) эллипс,

2) мнимый эллипс,

3) пара невещественных пересекающихся прямых.

б) Линия (Γ) порождает аффинную линию $(\bar{\Gamma})$ гиперболического типа тогда и только тогда, когда (Γ) пересекает абсolut в двух различных действительных точках. В соответствии с теоремой [20.3] такими могут быть пара прямых с точкой пересечения вне абсолюта и оваль-

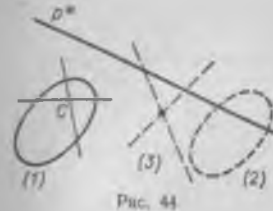


Рис. 44

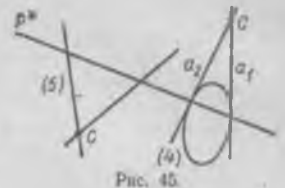


Рис. 45

ная линия. Соответствующими линиями на плоскости $\bar{P}_2^*$ будут (см. рис. 45):

4) гипербола,

5) пара пересекающихся прямых.

в) Линия (Γ) порождает аффинную линию $(\bar{\Gamma})$ параболического типа тогда и только тогда, когда (Γ) касается абсолюта. Такими линиями могут быть все линии, перечисленные в теореме [20.3], за исключением нулевой линии. Они изображены на рисунке 46. Соответствующими линиями на плоскости $\bar{P}_2^*$ будут:

6) парабола,

7) пара параллельных действительных прямых,

8) пара параллельных невещественных прямых,

9) пара слившихся прямых.

Мы получили аффинную классификацию линий второго порядка с проективной точки зрения. Выводы, полученные здесь, полностью согласуются с теоремой I [39.3].

2. Аффинные свойства линий второго порядка с проективной точки зрения. Пусть линии второго порядка (Γ) плоскости P_2^* соответствует линия $(\bar{\Gamma})$ на аффинной плоскости $\bar{P}_2^*$. Центром линии $(\bar{\Gamma})$ называется точка C аффинной плоскости, которая сопряжена с любой точкой абсолюта p^* относительно линии (Γ) . Очевидно, любая особая точка аффинной плоскости может быть центром в том и только в том случае, когда ее полярной является абсolut плоскости. Далее, если C — центр линии $(\bar{\Gamma})$, то линия симметрична относительно этой точки.

Проективное толкование центра дает возможность легко определить число центров каждой линии. Так как эллипс и гипербола не имеют особых точек и абсolut не является касательной, то согласно свойству 19.2.5 они имеют единственный центр — полюс абсолюта. На рисунках 44 и 45 центры этих линий обозначены буквой C . Согласно тому же свойству 19.2.5 парабола не имеет центра, так как полюс аб-

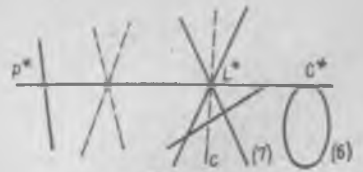


Рис. 46

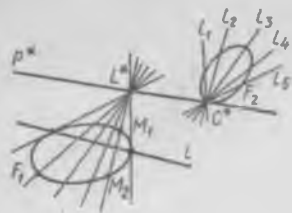


Рис. 47.

солюта является несобственной точкой (точка C^* на рис. 46).

В заключение отметим, что диаметры линии F будут те и только те прямые, которые являются полярами любой точки абсолюта, не лежащей на линии F . На рисунке 47 прямая l является диаметром эллипса F_1 , а прямые $l_1 - l_5$ — диаметрами параболы F_2 .

3. **Сопряженные направления.** Рассмотрим вспомогательную задачу, которая нам позволит дать проективное

истолкование сопряженных направлений линии второго порядка.

Пусть на проективной плоскости P_2 дана линия второго порядка (Γ) и прямая (l) , которая не является касательной к этой линии. Покажем, что линия (Γ) на прямой (l) индуцирует некоторую инволюцию. Для этой цели сделаем ряд предварительных замечаний. Прежде всего заметим, что точки прямой (l) являются обыкновенными ((l) не является касательной), поэтому каждая из них имеет определенную полярю, причем все эти поляры принадлежат пучку с центром в точке L , не лежащей на (l) . В самом деле, если (Γ) не имеет особых точек, то точкой L будет полюс прямой (l) ; если же (Γ) имеет хотя бы одну особую точку, то она, как было отмечено выше, не принадлежит прямой (l) и через нее проходит полярю любой точки прямой (l) (свойство 19.2.4).

Теперь определим на прямой (l) отображение $\pi: (l) \rightarrow (l)$ следующим образом. Каждой точке M этой прямой поставим в соответствие точку M' , сопряженную с точкой M относительно линии (Γ) . В силу того что каждая точка прямой (l) имеет единственную полярю, отличную от (l) , это соответствие будет взаимно однозначным. При этом в силу взаимности понятия сопряженности соответствие будет инволюционным, т. е. если $M' = \pi(M)$, то $M = \pi(M')$. Остается показать, что π — проективное преобразование. Для этого достаточно установить, что если $M'_1 = \pi(M_1)$, $M'_2 = \pi(M_2)$, $M'_3 = \pi(M_3)$ и $M'_4 = \pi(M_4)$, то $(M_1M_2M_3M_4) = (M'_1M'_2M'_3M'_4)$. Обозначим через m_1, m_2, m_3 и m_4 поляры точек M_1, M_2, M_3, M_4 . Из теоремы [19.2] следует¹, что $(M_1M_2M_3M_4) = (m_1m_2m_3m_4)$. Выше было показано, что $M'_1 = m_1 \cap (l)$, $M'_2 = m_2 \cap (l)$, $M'_3 = m_3 \cap (l)$, $M'_4 = m_4 \cap (l)$, поэтому $(M'_1M'_2M'_3M'_4) = (m_1m_2m_3m_4) = (M_1M_2M_3M_4)$. Таким образом, $(M_1M_2M_3M_4) = (M'_1M'_2M'_3M'_4)$.

Построенное нами проективное преобразование будем называть *инволюцией сопряженных точек, порожденной данной линией на данной прямой*. Из предыдущего изложения ясно, что инволюция, порожденная линией (Γ) на прямой (l) , будет эллиптической тогда и только

¹ Строго говоря, теорема [19.2] была сформулирована для невырожденных линий (Γ) . Однако при доказательстве этой теоремы мы не пользовались этим ограничением, поэтому ее утверждение будет справедливым и в общем случае.

тогда, когда (l) не имеет с (Γ) ни одной общей действительной точки, и будет гиперболической тогда и только тогда, когда она пересекает прямую (l) в двух действительных точках, которые являются неподвижными точками инволюции.

Теперь мы имеем возможность дать проективное истолкование сопряженных и асимптотических направлений. Пусть на плоскости $\bar{P}_2^*$ дана линия (Γ) , которая не касается абсолюта p^* . Согласно предыдущему, на прямой p^* порождается инволюция сопряженных точек. Будем говорить, что аффинные прямые l_1 и l_2 имеют с о п р я ж е н н ы е н а п р а в л е н и я, если они пересекают абсolut в сопряженных точках. В частности, два диаметра называются сопряженными, если они имеют сопряженные направления. Отметим, наконец, что а с и м п т о т а м и линии будут касательные к линии в несобственных точках (ср. I, § 40 и 41).

§ 26. Проективное истолкование евклидовой геометрии

По аналогии с § 24 построим модель двумерной евклидовой геометрии на проективной плоскости и убедимся в том, что все понятия этой геометрии естественным образом интерпретируются в терминах проективной геометрии.

1. **Модель евклидовой геометрии на проективной плоскости.** Для построения модели евклидовой геометрии мы несколько видоизменим схему, используемую в § 24 при построении аффинной геометрии. Возьмем на проективной плоскости P_2 некоторую прямую, на которой задана произвольная эллиптическая инволюция ω (см. § 13). Зафиксированную прямую вместе с заданной инволюцией назовем абсолютом и обозначим через p^ω . Инволюцию ω назовем абсолютной инволюцией. Проективную плоскость с заданным абсолютом будем обозначать через P_2^ω . Введем следующую терминологию. Любую точку плоскости P_2^ω , не лежащую на прямой p^ω , назовем евклидовой точкой, а любую прямую, отличную от прямой p^ω , — евклидовой прямой. Понятие принадлежности евклидовых точек и прямых сохраним без изменения. Множество всех евклидовых точек назовем евклидовой плоскостью и обозначим через $\bar{P}_2^\omega$. Таким образом, евклидова плоскость $\bar{P}_2^\omega$ — есть множество всех точек проективной плоскости P_2 , не принадлежащих абсолюту p^ω .

Мы видим, что построенная нами схема несущественно отличается от той, которой мы пользовались при построении аффинной геометрии на проективной плоскости. Отличие состоит в том, что в случае аффинной геометрии абсолютом являлась проективная прямая, в то время как в евклидовой геометрии абсолютом является проективная прямая с заданной на ней эллиптической инволюцией. Терминологию, введенную нами в п. I, § 24, мы полностью сохраняем и здесь.

В соответствии с групповой точкой зрения для определения евклидовой геометрии необходимо, кроме пространства $\bar{P}_2^\omega$, ввести группу

преобразований этого пространства. Рассмотрим множество G^ω проективных преобразований, каждое из которых является аффинной коллинеацией, сохраняющей абсолют r^ω . Это означает, что каждое преобразование множества G^ω точки прямой r^ω переводит в точки этой же прямой и, кроме того, если точки A и B образуют сопряженную пару инволюции ω , то их образы A' и B' также образуют сопряженную пару той же инволюции. Легко видеть, что множество преобразований G^ω образует группу (ср. с теоремой [23.1]).

Эту группу мы будем называть группой аффинных коллинеаций подобия, а каждое преобразование этой группы — аффинной коллинеацией подобия. Очевидно, группа аффинных коллинеаций подобия есть подгруппа группы аффинных коллинеаций, которая в свою очередь является подгруппой группы проективных преобразований.

Аффинные преобразования, которые порождаются на плоскости P_2^ω аффинной коллинеацией подобия, называются преобразованиями подобия плоскости P_2^ω . Множество всех преобразований подобия плоскости P_2^ω также образует группу. Геометрия этой группы и называется евклидовой геометрией.

В последующих пунктах настоящего параграфа мы рассмотрим проективное истолкование евклидовой геометрии на построенной модели, при этом, очевидно, геометрическими будут только те понятия, которые инвариантны относительно преобразований подобия.

Так как каждое преобразование подобия является аффинным преобразованием, то группа преобразований подобия является подгруппой группы аффинных преобразований. С другой стороны, множество точек аффинной плоскости P_2^ω совпадает с множеством точек евклидовой плоскости P_2^ω . Отсюда следует весьма важный вывод: все понятия аффинной геометрии являются также понятиями евклидовой геометрии. Таким образом, понятия отрезка, луча, угла, вектора, а также понятия простого отношения трех точек, в частности середины отрезка, параллельности прямых, равенства параллельных отрезков, аффинных координат точек и др., являются понятиями евклидовой геометрии. Точно так же эллипс, гипербола, парабола являются фигурами евклидовой плоскости и вся аффинная теория, изложенная в § 25, полностью применима в евклидовой геометрии. Но так как группа преобразований подобия G^ω «уже», чем группа аффинных преобразований G^* , то можно ожидать, что евклидова геометрия «богаче» аффинной геометрии, т. е. группа G^ω содержит инварианты, которые не являются инвариантами аффинной группы G^* . В настоящем параграфе мы, по существу, будем рассматривать именно эти инварианты.

2. **Перпендикулярные прямые.** В соответствии с терминологией, введенной выше, несобственной точкой плоскости P_2^ω называется любая точка этой плоскости, лежащая на абсолюте. Несобственные точки будем обозначать через $A^\omega, B^\omega, \dots$. Так как на абсолюте задана инволюция ω , то все несобственные точки естественным образом разбиваются

на пары, а именно — на сопряженные пары абсолютной инволюции (см. § 13, п. 2). Сопряженные в абсолютной инволюции пары точек будем обозначать так: A^ω, A_c^ω или B^ω, B_c^ω и т. д.

Напомним, что евклидовой прямой называется любая прямая, которая не совпадает с абсолютом r^ω . Каждая евклидова прямая a на плоскости P_2^ω имеет одну и только одну несобственную точку $A^\omega = a \cap r^\omega$. Введем следующее основное определение: две прямые a и b называются перпендикулярными, если их несобственные точки образуют сопряженную пару абсолютной инволюции (обозначение: $a \perp b$). Заметим, что при любом преобразовании подобия перпендикулярные прямые переходят в перпендикулярные прямые, поэтому понятие перпендикулярности двух прямых является понятием евклидовой геометрии. Из этого определения вытекают следующие свойства перпендикулярности прямых.

1°. Через данную точку A плоскости проходит одна и только одна прямая, перпендикулярная к данной прямой a (рис. 48).

2°. Прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных прямых, перпендикулярна также и второй прямой (рис. 48, прямые c_1, c_2 и c).

3°. Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны между собой.

Эти свойства проиллюстрированы на рисунках 48 и 49. Докажем, например, свойство 3°. Пусть $a \perp b$ и $a \perp c$ (рис. 49). Это означает, что пары несобственных точек A^ω, B^ω и A^ω, C^ω сопряжены. Так как для точки A^ω существует единственная сопряженная точка A_c^ω , то $B^\omega = A_c^\omega$ и $C^\omega = A_c^\omega$. Отсюда следует, что $b \parallel c$. ■ Аналогично доказываются остальные свойства.

3. **Понятие квадрата.** Введем следующее определение: полный четырехвершинник $ABCD$ плоскости P_2^ω будем называть полным

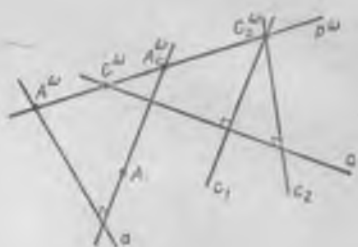


Рис. 48

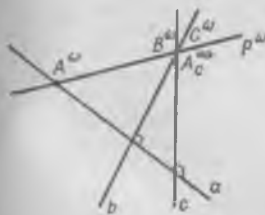


Рис. 49.

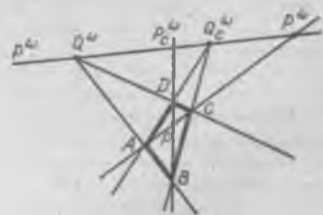


Рис. 50.

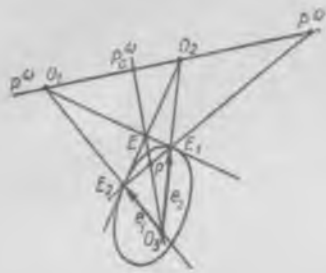


Рис. 51

к в а д р а т о м, если две его диагональные точки образуют сопряженную пару абсолютной инволюции и стороны, проходящие через третью диагональную точку, перпендикулярны (рис. 50). Первые две диагональные точки, очевидно, являются несобственными (на рисунке 50 точки Q^w и Q^s), третью диагональную точку P , в которой стороны перпендикулярны, будем называть центром квадрата. Легко показать, что в плоскости P_2^w существует бесчисленное мно-

жество полных квадратов. В самом деле, имеет место следующая теорема.

Теорема [26.1]. *Каковы бы ни были две различные точки A и P , существует один и только один полный квадрат, для которого P является центром, а A — одной из вершин.* □

Доказательство этой теоремы предлагаем провести читателю самостоятельно, воспользовавшись рисунком 50. При этом следует учесть, что P^w , P^s и Q^w , Q^s — сопряженные пары абсолютной инволюции, удовлетворяющие условию $Q^wQ^s = P^wP^s$. Для построения точек Q^w и Q^s можно воспользоваться теоремой [15.5].

Полный квадрат $ABCD$ плоскости P_2^w на евклидовой плоскости P_2^w определяет четырехугольник, который называется к в а д р а т о м. Сторонами квадрата будут те стороны полного квадрата, которые не проходят через центр. Стороны полного квадрата, проходящие через центр, называются диагоналями. На рисунке 50 сторонами будут AB , BC , CD , DA , а диагоналями — прямые AC и BD .

Пользуясь квадратом, можно ввести понятие прямоугольной декартовой системы координат. Пусть $O_3E_1EE_2$ — квадрат. Система координат $O_3e_1e_2$, где $e_1 = O_3E_2$, $e_2 = O_3E_1$ (см. п. 5, § 24) называется прямоугольной декартовой (рис. 51).

4. Окружность. Введем важное для обоснования евклидовой геометрии понятие окружности. Пусть Γ — некоторая овальная линия плоскости P_2^w , не пересекающая абсолют. В п. 3, § 25, было показано, что линия Γ порождает на абсолют p^w некоторую эллиптическую инволюцию. Эта инволюция, вообще говоря, не совпадает с абсолютной инволюцией. Овальная линия Γ называется о к р у ж н о с т ью, если инволюция, порождаемая этой линией на абсолют, совпадает с абсолютной инволюцией. Из этого определения вытекает целый ряд свойств окружности, в точности совпадающих со свойствами обычной окружности евклидовой плоскости.

Прежде всего, ясно, что окружность является частным случаем эллипса, так как она представляет собой овальную линию, не пересе-

кающую абсолют. Центр эллипса, являющегося окружностью, называется центром о к р у ж н о с т и. Отсюда следует, что центром окружности будет полюс абсолюта относительно данной окружности. Из свойства 21.2.3 следует, что центр окружности является внутренней точкой окружности, поэтому любая прямая, проходящая через центр, пересекает окружность в двух различных точках (лемма [21.1]). Из свойств центра линии второго порядка, перечисленных в п. 2, § 25, следует, что центр окружности является серединой любой хорды, проходящей через него. Радиусом о к р у ж н о с т и назовем любой отрезок, один конец которого принадлежит центру, а второй лежит на окружности.

Докажем теорему о существовании окружности.

Теорема [26.2]. *Если на евклидовой плоскости даны две произвольные точки E_2 и O_3 , то существует одна и только одна окружность с центром в точке O_3 , проходящая через E_2 .*

Доказательство. Возьмем систему координат так, чтобы $O_1O_2O_3E$ был полным квадратом (относительно обозначений см. рис. 51). Пользуясь теоремой [26.1], легко доказать, что такая система координат существует. Рассмотрим в этой системе координат овальную линию Γ , заданную уравнением: $x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0$. Легко убедиться в том, что пары точек $O_1 = (1 : 0 : 0)$, $O_2 = (0 : 1 : 0)$ и $P^s = (1 : 1 : 0)$, $P^w = (-1 : 1 : 0)$ сопряжены относительно этой линии (см. рис. 51), поэтому линия Γ индуцирует на абсолют p^w абсолютную инволюцию, т. е. является окружностью. С другой стороны, трехвершинник $O_1O_2O_3$ является автополярным относительно Γ этой линии, поэтому O_3 — центр окружности. Заметим, наконец, что точка E_2 принадлежит окружности, поэтому построенная нами окружность является искомой.

Для того чтобы доказать, что окружность Γ является единственной, заметим, что для любой окружности Γ' , удовлетворяющей условиям теоремы, трехвершинник $O_1O_2O_3$ является автополярным, поэтому согласно лемме [19.3] Γ в системе $O_1O_2O_3E$ имеет уравнение: $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3 = 0$. Используя условия сопряженности точек P^w и P^s и то обстоятельство, что $E_2 \in \Gamma'$, мы приходим к выводу, что $\Gamma' = \Gamma$. ■

5. Конгруэнтность отрезков и углов. В заключение выясним, как вводятся понятия конгруэнтных отрезков и углов с проективной точки зрения.

Два угла называются к о н г р у э н т н ы м и, если существует преобразование подобия, которое один угол переводит в другой. Так как множество всех преобразований подобия образует группу, то из приведенного выше определения следует, что понятие «конгруэнтность углов» удовлетворяет условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Понятие конгруэнтности отрезков вводится несколько сложнее. Напомним читателю, что параллельными переносами на плоскости P_2^w мы называли те преобразования, которые порождаются аффинными

коллинеациями переносов плоскости P_2^* . Так как всякая аффинная коллинеация переносов оставляет неподвижными точки абсолюта (см. п. 4, § 23), то параллельный перенос является частным случаем преобразования подобия.

Две окружности называются *конгруэнтными*, если существует такой параллельный перенос, который одну окружность переводит в другую. Из теоремы [24.1] следует, что понятие конгруэнтных окружностей удовлетворяет условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности. Более того, пользуясь теоремой [23.4], легко показать, что если дана окружность Ω и точка A , то всегда существует одна и только одна окружность с центром в точке A , конгруэнтная окружности Ω .

Два отрезка $[AB]$ и $[CD]$ называются *конгруэнтными*, если существуют такие конгруэнтные окружности, для которых эти отрезки являются радиусами (обозначение: $[AB] \cong [CD]$).

Имеют место следующие простейшие свойства конгруэнтных отрезков:

1°. $[AB] \cong [AB]$ и $[AB] \cong [BA]$.

2°. Если $[AB] \cong [CD]$, то $[CD] \cong [AB]$.

3°. Если $[AB] \cong [CD]$ и $[CD] \cong [EF]$, то $[AB] \cong [EF]$.

4°. Любые два радиуса одной и той же окружности конгруэнтны друг другу.

Мы не будем доказывать эти свойства. Отметим лишь, что они могут быть легко обоснованы исходя из свойств параллельных переносов.

§ 27. Приложение проективной геометрии к решению задач элементарной геометрии

Рассмотренные выше модели аффинной и евклидовой геометрий могут быть с успехом использованы для решения разнообразных задач элементарной геометрии методами проективной геометрии. Настоящий параграф посвящен этому вопросу.

1. *Схема решения задач элементарной геометрии методами проективной геометрии.* Для того чтобы идею дальнейших рассуждений сделать более ясной, напомним читателю понятие расширенной евклидовой плоскости, введенное в § 4. Там было отмечено, что расширенная плоскость E_2^* , т. е. евклидова плоскость, дополненная несобственными элементами, удовлетворяет всем аксиомам проективной геометрии, поэтому является моделью проективной плоскости. Теперь мы можем уточнить это утверждение.

Как известно, все прямые проективной плоскости равноправны, особых выделенных прямых на этой плоскости не существует. На расширенной же плоскости E_2^* имеется «особая» несобственная прямая, на которой определена эллиптическая инволюция, порождаемая ортогональной инволюцией любого пучка с собственным центром (см. п. 5,

§ 13). Таким образом, расширенная евклидова плоскость E_2^* , по существу, является моделью не проективной плоскости P_2 , а плоскости P_2^* ; евклидова же плоскость E_2 выполняет в ней роль плоскости $\bar{P}_2^*$.

Отсюда вытекает следующая естественная схема приложения проективной геометрии к решению задач евклидовой плоскости. Пусть сформулирована задача, в которой требуется установить истинность некоторого утверждения для фигуры F евклидовой плоскости. Из вышеизложенного ясно, что поставленную задачу можно рассматривать как задачу, сформулированную на плоскости P_2^* . Но тогда легко можно перефразировать задачу для плоскости P_2^* , т. е. сформулировать ее в терминах проективной плоскости, на которой зафиксирован абсолют r^* , и решить новую задачу, пользуясь терминами и положениями проективной геометрии. Полученный результат можно снова перефразировать в терминах плоскости $\bar{P}_2^*$, которая, по существу, является евклидовой. Тем самым мы получим решение поставленной задачи для фигуры F евклидовой плоскости.

При осуществлении этой схемы можно предложить два пути, которые по форме различны, по существу совпадают. Первый путь заключается в следующем. На проективной плоскости P_2 фиксируется абсолют r^* и данная фигура F рассматривается как фигура, состоящая из точек и прямых плоскости $\bar{P}_2^*$. Далее осуществляется схема, описанная выше. При этом подходе к решению задачи на рисунке, сопровождающем решение, абсолют r^* изображается в пределах чертежа, поэтому данная фигура F будет иметь «искаженный» вид. Второй путь заключается в следующем. Берем евклидову плоскость и дополняем несобственными элементами до расширенной плоскости E_2^* . Эта плоскость рассматривается как плоскость P_2^* , и далее осуществляется изложенная выше схема.

При первом подходе решение задачи (и также сопровождающей рисунок) будет более наглядным с точки зрения проективной геометрии, а при втором подходе — с евклидовой точки зрения. Здесь, в частности, нет надобности в «искажении» рисунка, однако так как на рисунке абсолют не изображен, то ход рассуждений делается более абстрактным.

Приведем несколько примеров решения задач «элементарной геометрии методами проективной геометрии, иллюстрирующих изложенную выше схему. В настоящем параграфе мы рассмотрим только задачи на доказательство. Применение методов проективной геометрии к решению задач на построение будет дано в § 36.

2. *Примеры задач, решаемых методами проективной геометрии.* Для того чтобы уяснить идею, изложенную выше, рассмотрим теорему, хорошо известную из курса элементарной геометрии.

Задача 1. Доказать, что диагонали параллелограмма $ABCD$ точкой их пересечения делятся пополам.

Решение. Сформулированная задача является аффинной, поэтому перефразируем ее в терминах проективной геометрии в соответ-

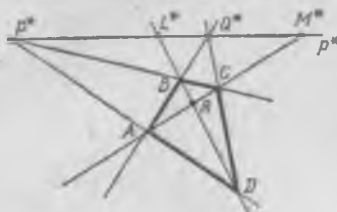


Рис. 52.

ствии с § 24. Пусть P_2^* — проективная плоскость с фиксированным абсолютом p^* . Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ как фигуру плоскости P_2^* . Учитывая интерпретацию середины отрезка в проективной геометрии (см. § 24, п. 3), данная задача имеет следующую формулировку.

Две диагональные точки P^* и Q^* полного четырехвершинника

$ABCD$ принадлежат абсолюту p^* (см. рис. 52). Доказать, что $RM^* \perp AC$ и $RL^* \perp BD$, где R — третья диагональная точка, а M^* и L^* — соответственно точки пересечения диагоналей AC и BD с абсолютом p^* . Мы получили предложение, которое непосредственно следует из гармонических свойств полного четырехвершинника (см. § 10, п. 5).

Задача 2. В плоскости треугольника ABC дана прямая l , не проходящая через его вершины, и точка O , лежащая на прямой l и не лежащая на сторонах треугольника. Прямые, симметричные прямым OA, OB, OC относительно прямой l , пересекают стороны BC, CA и AB треугольника соответственно в точках A', B', C' . Доказать, что эти точки лежат на одной прямой.

Решение. Для решения этой задачи воспользуемся свойствами проективных отображений пучков на плоскости P_2 . Предположим, что трехвершинник ABC расположен на плоскости P_2^* . Введем обозначения: $a = OA, b = OB, c = OC, a' = OA', b' = OB'$ и $c' = OC'$. Рассмотрим прямую l' , проходящую через точку O и перпендикулярную прямой l (см. рис. 53); так как прямая l' является биссектрисой

углов aa', bb', cc' , то по определению биссектрисы имеем: $ll' \perp aa', ll' \perp bb', ll' \perp cc'$. Пользуясь задачей 5, § 10, получаем: $(a'b'c'b) = (abcb') = (ADCB')$, где $D = AC \cap b$. С другой стороны $(ADCB') = (CB'AD)$, поэтому $(a'b'c'b) = (CB'AD)$, или $(a'b'c'b) = (BC, BB', BA, BD)$. Рассмотрим проективное отображение $\pi: [O] \rightarrow [B]$, при котором прямые a', b', c' переходят соответственно в прямые BC, BB' и BA . Из предыдущего соотношения следует, что $\pi(b) = BD$. Отсюда в силу теоремы [12.4] приходим к выводу, что π является перспективным отображением, поэтому точки A', B', C' коллинеарны.

Задача 3. Доказать, что отрезок любой касательной к гипер-

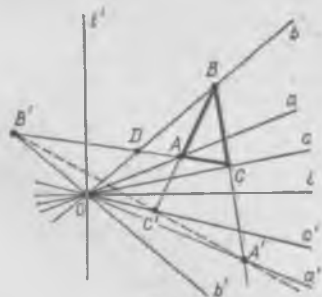


Рис. 53.

боле, заключенный между асимптотами, делится точкой касания пополам.

Решение. Перефразируем задачу в терминах проективной геометрии в соответствии с § 25. Пусть P_2^* — проективная плоскость с фиксированным абсолютом p^* . На плоскости P_2^* данная задача имеет следующую формулировку: дана линия (Γ) второго порядка (модель гиперболы), пересекающая абсолют p^* в двух различных точках: A_1^* и A_2^* (см. рис. 54).

Пусть t_1 и t_2 — касательные к данной линии соответственно в точках A_1^* и A_2^* (асимптоты гиперболы). Доказать, что касательная t к линии (Γ) в любой точке M , отличной от A_1^* и A_2^* , пересекает касательные t_1 и t_2 соответственно в точках M_1 и M_2 , удовлетворяющих условию: $M_1M_2 \perp MM^*$, где $M^* = p^* \cap t$. Мы видим, что получили задачу проективной геометрии, которая решается весьма просто. В самом деле, пусть $O = t_1 \cap t_2$, а $Q^* = p^* \cap OM$. В соответствии с 21.2.5 p^* есть полярная точка O , поэтому O и M^* сопряжены относительно линии (Γ) . С другой стороны, согласно свойству 19.2.2 M и M^* также сопряжены относительно линии (Γ) . Отсюда следует, что прямая OM является полярной точки M^* ; следовательно, $M^*Q^* \perp A_1^*A_2^*$. Проектируя точки M^*, Q^*, A_1^*, A_2^* из центра O на прямую t , приходим к выводу, что $M_1M_2 \perp MM^*$.

Задача 4. На окружности даны две фиксированные точки A и B . Доказать, что, каковы бы ни были точки X и Y этой окружности, прямая, проходящая через точки $U = AX \cap BY$ и $V = BX \cap AY$, проходит через некоторую фиксированную точку плоскости.

Решение. Обозначим через P точку пересечения касательных к окружности в точках A и B и покажем, что прямая UV при любом положении точек X и Y проходит через точку P . Для этого будем считать, что данная фигура расположена в проективной плоскости P_2^* , и применим к окружности Ω предельный случай теоремы Паскаля для шестивершинника 123456 с двойными вершинами в точках A и B (см. рис. 55). В соответствии с теоремой Паскаля точки $P = 12 \cap 45, V = 23 \cap 56, U = 34 \cap 61$ лежат на одной прямой. Задача решена, так как, в силу того что A и B — фиксированные точки, положение точки P не зависит от выбора точек X и Y .

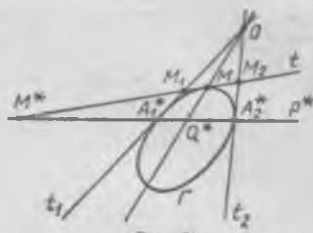


Рис. 54.

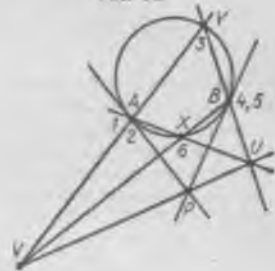


Рис. 55.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ И МЕТОДЫ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Из курса средней школы учащемуся известны различные приемы решений задач на построение, поэтому в главах VI и VII настоящего раздела основное внимание уделяется теории геометрических построений, т. е. строгому описанию понятия «построение при помощи циркуля и линейки», изложению общих методов построений и вопросу о разрешимости задач на построение. Глава VIII посвящена теории изображений.

Глава VI

МЕТОДЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ

§ 28. Задачи на построение с помощью циркуля и линейки; постулаты построений

В школьном курсе геометрии общепринятым является требование, чтобы построение выполнялось при помощи циркуля и линейки. Для изложения теории геометрических построений нам необходимо дать абстрактную математическую теорию, отражающую как постановку задачи, так и процесс построения при помощи указанных выше чертежных инструментов. Этому вопросу и посвящен данный параграф.

1. Основные объекты; геометрические фигуры. В настоящей главе всюду предполагается, что рассматриваемые геометрические образы лежат в некоторой фиксированной плоскости, которую называем основной. Основными объектами этой плоскости будем считать точки, прямые и окружности. Основными отношениями для этих объектов будем считать принадлежность точки и прямой и принадлежность точки и окружности. Важно подчеркнуть, что каждая прямая или окружность, входящая в это множество, рассматривается как единый объект — элемент пространства. Если, на-

пример, ω — окружность, то сама эта окружность, так же как и каждая ее точка, является основным объектом.

Геометрической фигурой основной плоскости будем называть любое множество основных объектов этого пространства¹. При решении задач на построение нас преимущественно будут интересовать отдельные простые фигуры — точки, прямые, окружности, отрезки, лучи, углы, многоугольники и дуги окружностей. Каждая из этих фигур определяется заданием отдельных основных объектов, связанных с ней. Например, для отрезка $\overline{AB}$ такими объектами будем считать точки A, B и прямую $l = AB$; поэтому A, B и l являются элементами, определяющими отрезок $\overline{AB}$. Конечно, в выборе элементов, определяющих данную фигуру, имеется определенный произвол. В приведенном выше примере элементами, определяющими

отрезок $\overline{AB}$, можно было бы считать только точки A и B , так как они определяют отрезок. Принимая во внимание сложившуюся практику, которой мы пользуемся при решении задач на построение, здесь и в ряде других случаев в число элементов, определяющих фигуру F , будем включать избыточные основные объекты.

2. Основные понятия и постулаты построения. Любая задача на построение формулируется так: «Дано множество Ω_0 , состоящее из основных объектов $F_1, F_2, \dots, F_k$, которые расположены определенным образом на основной плоскости. Построить основной объект F_0 , обладающий свойством A ». Таким образом, формулировка задачи содержит, с одной стороны, множество Ω_0 данных основных объектов, которое является исходным, и, с другой стороны, основной объект F_0 , который следует построить. При этом свойство A характеризует как сам объект F_0 , так и его положение по отношению к данной фигуре. Это означает, что F_0 считается вполне определенным геометрическим объектом, который существует; задача заключается лишь в том, чтобы его построить циркулем и линейкой.

При формализации теории геометрических построений на плоскости отправной идеей является введение двух основных неопределяемых понятий: понятия построенного основного объекта и операции построения основного объекта. Мы считаем, что на плоскости существуют определенные основные объекты, которые называются построенными. Понятие построенного объекта не определяется. Об этом понятии известно лишь следующее: если дан конкретный основной объект F — точка, прямая или окружность, то нам известно, является ли F построенным или непостроенным объектом. Таким образом, при решении конкретной задачи на построение аксиоматически определяется некоторое множество основных объектов и каждый элемент этого множества называется построенным. Еще раз подчеркнем, что каждая прямая или окружность, входящая в это

¹ Заметим, что здесь мы несколько отходим от общепринятой в геометрии терминологии, где основным объектом считается точка, а фигурой называется любое множество точек.

множество, рассматривается как единый объект — элемент множества. Например, если ω — построенная окружность, то отсюда не вытекает, что все точки окружности построены, более того, мы не предполагаем даже, что центр окружности ω является построенной точкой (см. ниже, построение [28.9]). Конечно, отдельные точки этой окружности как самостоятельные объекты могут быть построенными, но это должно быть определено условиями задачи или процессом построения.

Мы считаем, далее, что существует операция, которая применяется к основным объектам, не являющимся построенными, и которая переводит их в построенные объекты. При этом непостроенные точки, прямые и окружности переходят соответственно в построенные точки, прямые и окружности. Эта операция называется *построением основного объекта*. Другими словами, построение основного объекта F есть не что иное, как присоединение F к множеству построенных объектов.

Для того чтобы понять суть этой абстрактной схемы, можно предложить следующую не строгую с математической точки зрения, но довольно наглядную схему. Представим себе, что все основные объекты плоскости — точки, прямые и окружности, которые существуют согласно аксиомам геометрии, бесцветны. Будем, далее, считать, что построенные объекты окрашены в черный цвет. Тогда операцию построения основного объекта F наглядно можно представить как окрашивание этой бесцветной фигуры в черный цвет.

Основные понятия удовлетворяют определенным требованиям, которые называются постулатами построения. Ниже сформулированы семь постулатов построений. Первые два предложения постулируют существование построенных основных объектов.

K1. На основной плоскости существуют по крайней мере две построенные точки¹.

K2. Основные объекты (точки, прямые и окружности), заданные условиями задачи, считаются построенными. Множество заданных объектов всегда конечно.

Остальные пять постулатов построения характеризуют операцию построения новых объектов. Если шагом построения назвать присоединение нового основного объекта пространства к уже построенным объектам, то сформулированные ниже постулаты, по существу, определяют те шаги построения, которые допускаются при решении задач.

K3. Построение прямой, проходящей через две построенные точки.

K4. Построение окружности с центром в построенной точке и с радиусом, конгруэнтным отрезку, образованному двумя построенными точками.

K5. Построение точки пересечения двух непараллельных построенных прямых.

K6. Построение точек пересечения построенной окружности и построенной прямой, если они пересекаются.

¹ Эта аксиома является существенной, так как, например, задача «построить на плоскости какой-либо равнобедренный треугольник» не может быть решена без этой аксиомы.

K7. Построение точек пересечения двух построенных окружностей, если они пересекаются.

Термин «построение» в каждом из этих постулатов, по существу, означает, что, применив данный постулат к непостроенному основному объекту, мы превращаем его в построенный объект. Если, например, A и B — различные построенные точки, а $l = A/B$ — прямая, которая не является построенной, то после применения постулата K3 к этой прямой она становится построенной.

Мы видим, что постулаты построения являются своеобразными требованиями, которые накладываются на неопределяемые понятия «построенный основной объект» и «построение основного объекта».

Теперь мы в состоянии корректно сформулировать постановку задачи на построение и ответить на вопрос: что значит решить поставленную задачу на построение?

Дана фигура Ω_0 , состоящая из конечного множества построенных основных объектов $F_1, F_2, \dots, F_k$, и описано свойство A искомого непостроенного объекта F_0 . Требуется, пользуясь постулатами построения и добавляя к множеству Ω_0 шаг за шагом новые построенные основные объекты, получить *конечное* множество Ω основных объектов, содержащее искомым объект F_0 . Если такое множество Ω существует, то говорят, что задача разрешима циркулем и линейкой и процесс получения множества Ω называется построением объекта F_0 . При этом существенно заметить, что Ω должно быть конечным множеством.

Понятие построенного основного объекта можно распространить на произвольную геометрическую фигуру следующим образом: фигура F считается построенной, если элементы, определяющие эту фигуру, построены.

3. Простейшие следствия из постулатов построения. При решении задач на построение часто приходится «произвольно» выбирать промежуточные точки, как принадлежащие, так и не принадлежащие построенным прямым и окружностям. Мы сейчас покажем, что эти операции могут быть четко обоснованы на основании перечисленных выше аксиом. Для этого рассмотрим ряд элементарных построений.

Построение [28.1]. Построить какие-либо три неколлинеарные точки.

Согласно аксиоме K1 существуют по крайней мере две построенные точки A_0, B_0 . Пользуясь аксиомой K4, построим окружности $A_0 (A_0 B_0)$ и $B_0 (B_0 A_0)$. Далее, используя аксиому K7, строим одну из точек их пересечения X . Точки A_0, B_0, X являются искомыми (рис. 56). ■

Отсюда как следствие вытекают следующие построения.

Построение [28.2]. Дана построенная прямая l . Построить какую-либо точку Y , принадлежащую l , и другую точку X , не принадлежащую l . Построение выполнено на рисунке 56.

Построение [28.3]. На построенной прямой построить различные точки $A_1, A_2, \dots, A_k$ так, чтобы $A_1 A_2 \cong A_2 A_3 \cong \dots \cong A_{k-1} A_k \cong a$, где a — данный отрезок.

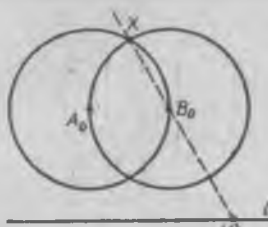


Рис. 56.

Построение [28.4]. Построить серединный перпендикуляр данного отрезка.

Построение [28.5]. Построить середину данного отрезка.

Построение [28.6]. Построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную к данной прямой.

Построение [28.7]. Построить прямую, проходящую через данную точку и параллельную данной прямой.

Предлагаем читателю, пользуясь аксиомами K1 — K7, обосновать эти предложения самостоятельно. В заключение сформулируем две элементарные задачи, связанные с построением точек окружности.

Построение [28.8]. Дана построенная окружность ω . Построить произвольную точку, принадлежащую данной окружности.

Пользуясь построением 28.5, сначала построим вспомогательный отрезок a , который меньше диаметра построенной окружности ω . Заметим, что хотя диаметр окружности ω и не является построенным отрезком, построить a всегда возможно. Далее, пользуясь предыдущими построениями, построим две вспомогательные взаимно перпендикулярные прямые l_1 и l_2 (рис. 57). Если ни одна из этих прямых не пересекает окружность ω , то на одной из них, скажем l_1 (точнее, на том луче прямой l_1 , который образует угол, содержащий ω) строим последовательность точек $M_1, M_2, \dots, M_k$ так, чтобы $\widehat{M_0 M_1} \cong \widehat{M_1 M_2} \cong \dots \cong \widehat{M_{k-1} M_k} \cong a$. Далее строим прямые $m_1, m_2, \dots, m_k$, соответственно проходящие через точки $M_1, M_2, \dots, M_k$ и ортогональные прямой l_1 (построение [28.6]). Число k возьмем настолько большим, чтобы окружность ω оказалась расположенной в полосе между параллельными прямыми l_2 и m_k . Легко видеть, что по крайней мере одна из построенных прямых $m_1, m_2, \dots, m_k$ пересекает окружность ω , поэтому, пользуясь аксиомой K6, строим точку на окружности ω .

Построение [28.9]. Построить центр данной окружности. Пользуясь предыдущим построением, строим три различные точки M_1, M_2, M_3 , принадлежащие окружности. Далее строим серединные перпендикуляры отрезков $M_1 M_2$ и $M_2 M_3$ (построение [28.4]). Точка пересечения этих перпендикуляров (аксиома K5) будет искомым центром.

В дальнейшем изложении, если нет специальных оговорок, предпо-

лагается, что центры данных окружностей являются построенными точками.

Из предыдущих построений легко прийти к следующему важному выводу: в любой окрестности зафиксированной точки можно построить точки, принадлежащие этой окрестности.

Приведенные выше элементарные построения, по существу, являются обоснованием тех простейших приемов, которыми мы пользуемся при решении почти любой задачи на построение. Заметим, что в учебной литературе обычно к числу постулатов построения относят также предложение: «Построение точки, принадлежащей или не принадлежащей данной окружности». Из вышесказанного следует, что включение этого предложения в число аксиом излишне.

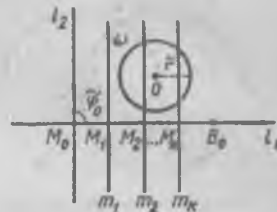


Рис. 57.

§ 29. Общая схема решения задач на построение

В дальнейшем изложении в дополнение к построениям [28.1] — [28.9] будем предполагать, что читатель умеет выполнять циркулем и линейкой элементарные построения, рассматриваемые в средней школе. К числу таких построений относятся построение треугольника по данным элементам, построение вписанной и описанной окружностей треугольника, построение прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой, и др.¹

1. Схема решения задач на построение. При решении задач на построение рекомендуется пользоваться схемой, состоящей из четырех этапов: а) анализ, б) построение, в) доказательство, г) исследование. Ниже дано краткое описание каждого из этих этапов.

а) **А н а л и з.** Анализ задачи состоит в установлении зависимостей между данной и искомой фигурами с целью найти способ решения. Предполагая, что задача решена, пытаются в искомой фигуре выделить так называемый основной элемент, построение которого приводит к построению всей искомой фигуры. Основным элементом может быть точка, прямая, отрезок или какая-либо другая фигура.

б) **П о с т р о е н и е.** На этом этапе осуществляется построение искомой фигуры заданными инструментами, т. е. реализуется тот план построения, который был намечен при анализе задачи.

в) **Д о к а з а т е л ь с т в о.** Этот этап имеет своей целью доказать, что построенная фигура действительно является искомой, т. е. что она удовлетворяет всем условиям, поставленным в задаче. В большинстве случаев доказательство усматривается из хода построения, иногда это не так.

¹ См., например, [30], «Геометрия 6», «Геометрия 7».

г) Исследование. Заметим, что существование решения, а также число решений существенно зависят от взаимного расположения элементов данной фигуры, а также от их величин. Исследование задачи на построение имеет своей целью выяснить следующие вопросы: 1) при каких ограничениях, накладываемых на данные элементы, искомую фигуру можно построить циркулем и линейкой; 2) всегда ли можно осуществить построение избранным способом; 3) сколько решений может иметь задача и как число решений зависит от конкретного выбора данных элементов.

Четкое исследование в ряде случаев представляет собой трудную задачу; более подробно этот вопрос освещен в примерах, приводимых ниже. Здесь же мы рассмотрим лишь один вопрос, а именно принцип, по которому определяется число решений.

Пусть в поставленной задаче на построение Ω_0 — множество данных объектов, а F_0 — искомая фигура, т. е. решение задачи. Фигуру F_0 будем называть свободным решением задачи, если при любом движении плоскости образ F_0 фигуры F_0 также будет решением исходной задачи (т. е. решением по отношению к данным объектам Ω_0 , а не по отношению к их образам Ω_0). В противном случае фигуру F_0 будем называть связанным решением задачи. Очевидно, F_0 будет связанным решением тогда и только тогда, когда фигура F_0 «связана» с каким-либо основным объектом из множества данных объектов Ω_0 . Например: «точка из Ω_0 принадлежит F_0 » или «окружность из Ω_0 и F_0 касаются друг друга» и т. д.

Если F_0 является свободным решением, то все конгруэнтные друг другу решения считаются как одно решение. Поэтому в данном случае число решений определяется числом неконгруэнтных друг другу фигур F_0 . Если же F_0 — связанное решение, то любые два несовпадающих решения считаются различными.

2. Выполнение построения; обозначения. При решении задач на построение существенное значение имеет графическое оформление каждого шага построения с помощью циркуля и линейки. Выполняемый при этом чертеж преследует определенную цель — дать схему, наглядно иллюстрирующую процесс построения. Для того чтобы эту цель осуществить более эффективно, будем пользоваться обозначениями, приведенными в следующей таблице.

Точки: $A, B, C, \dots, L, M, N, \dots, X, Y, Z$.

Прямые: $a, b, c, \dots, l, m, n, \dots, x, y, z$.

Окружности: $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega, \pi, \dots, \xi, \eta, \zeta$.

Отрезки: $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots, \bar{p}, \bar{q}, \dots, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$.

В отличие от существующей традиции, когда выбор букв и индексов осуществляется более или менее произвольно, мы предлагаем следующую «жесткую» схему обозначений для точек, прямых и окружностей.

¹ В ряде случаев будем употреблять также обозначения $O(\bar{a})$, $(O, \bar{a})$. См. список обозначений на с. 433.

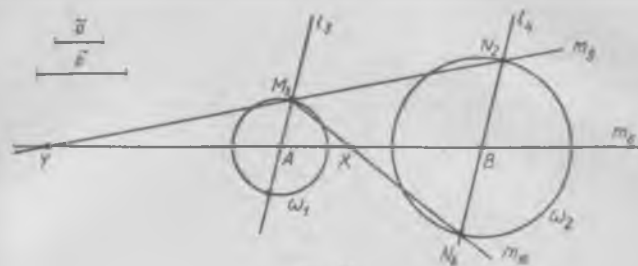


Рис. 58.

1) Данные и искомые точки, прямые и окружности обозначаются буквами без индексов; данные объекты обозначаются начальными буквами известных алфавитов $A, B, C, \dots, a, b, c, \alpha, \beta, \lambda$, а искомые — последними: $X, Y, Z, x, y, z, \dots, \xi, \eta, \zeta$.

2) Вспомогательные точки, прямые и окружности обозначаются промежуточными буквами латинского и греческого алфавитов $L, M, N, \dots, l, m, n, \dots, \omega, \pi, \dots$.

3) Все буквы, обозначающие точки, прямые и окружности и относящиеся к выполнению построения, будут снабжены индексами, при этом номер индекса выбирается в точном соответствии с номером шага построения, который соответствует номеру пункта записи в описании построения.

4) Вспомогательные точки, прямые и окружности, не относящиеся к построению (т. е. объекты, используемые для анализа, доказательства или исследования задач), обозначаются промежуточными буквами соответствующего алфавита без индексов.

Принятая нами схема обозначения удобна тем, что она позволяет «читать» рисунок, т. е. по рисунку восстанавливать цепочку построения, не прибегая к словесному описанию. В качестве примера рассмотрим следующее хорошо известное построение.

П о с т р о е н и е [29.1]. Даны точки A и B и два неконгруэнтных отрезка $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Построить точки, делящие отрезок AB внутренним и внешним образом в отношении $\bar{a} : \bar{b}$.

Пусть $\omega_1 = A(a)$, $\omega_2 = B(b)$ и $l_3 \parallel l_4$. Точки A, B, X и Y являются данными и искомыми, так как они обозначены буквами без индексов. В соответствии с пунктом 2, изложенным выше, построение промежуточных объектов выполняется в последовательности, которая легко восстанавливается по рисунку 58.

3. Примеры. Проиллюстрируем схему решения задач на построение на следующих примерах.

П о с т р о е н и е [29.2]. Даны окружность α и точка A . Построить прямые, проходящие через точку A и касающиеся данной окружности.

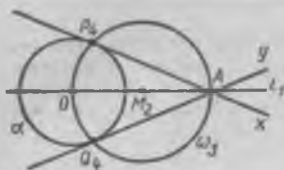


Рис. 59.

Решение. Проведем анализ задачи. Если O — центр окружности α , то задача, по существу, сводится к построению точек на окружности, из которых отрезок OA виден под прямым углом. Эти точки являются основными элементами построения. Поэтому построение может быть выполнено в следующей последовательности (см. рис. 59):

$$l_1: l_1 = AJO,$$

$M_2: M_2$ — середина отрезка OA (построение [28.5]);

$\omega_2: \omega_2 = M_2(M_2O)$ (постулат K4);

$P_4, Q_4: P_4, Q_4 = \alpha \cap \omega_2$ (аксиома K6);

$x, y: x = AJP_4, y = AJQ_4$.

Доказательство того, что построенные прямые удовлетворяют условиям задачи, непосредственно следует из хода построения. В данном случае исследование задачи проводится весьма просто. Легко видеть, что задача не имеет решения, если A является внутренней точкой окружности: задача имеет одно решение, если $A \in \alpha$, и два решения, если A — внешняя точка окружности.

Задача 1. Построить общие касательные двух данных окружностей α и β .

Решение. Анализ. Обозначим через A и B центры двух данных окружностей, а через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — их радиусы (рис. 60). При анализе задачи обычно предполагается, что данные фигуры имеют общее расположение и что искомым объектом существует. В данном случае это означает, что существует по крайней мере одна общая касательная x данных окружностей и что эта касательная не параллельна линии центров. Пусть T и T' — точки касания прямой x и окружностей, а M_1 — точка пересечения прямых x и AB . Из подобия треугольников ATM_1 и $BT'M_1$ следует, что $|AT|:|BT'| = |AM_1|:|BM_1|$, или $\bar{a}:\bar{b} = \bar{AM}_1:\bar{BM}_1$, т. е. точка M_1 делит отрезок AB в отношении

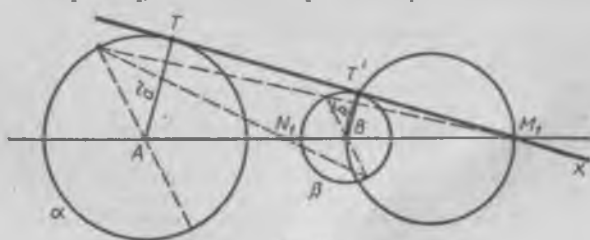


Рис. 60.

$\bar{a}:\bar{b}$ и является центром подобия данных окружностей. Таким образом, намечается следующий план построения: а) построение центра подобия данных окружностей; б) построение касательных, проходящих через эту точку к одной из данных окружностей. Эти касательные будут, очевидно, касательными и ко второй окружности.

Построение. Строим последовательно.

а) Точки M_1 и N_1 , делящие отрезок AB в отношении $\bar{a}:\bar{b}$ (построение [29.1]). На рисунке 60 построение этих точек выполнено пунктиром.

б) Прямую x , проходящую через точку M_1 (или N_1) и касающуюся окружности β (построение [29.2]). На рисунке 60 выполнено построение касательной M_1T' .

Доказательство. Заметим, что описанное построение может быть выполнено только в том случае, когда точка M_1 (или N_1), через которую проведена прямая x , является внешней к окружности β . Докажем, что прямая x касается также окружности α . Так как M_1 — центр подобия двух данных окружностей, то существует гомотетия Γ с центром в точке M_1 , при которой окружность β переходит в окружность α . Но при этом, очевидно, $x = \Gamma(x)$, так как $M_1 \in x$. С другой стороны, так как x касается окружности β , то ее образ (т. е. та же прямая x) касается окружности α .

Исследование. Интерес представляет только тот случай, когда $A \neq B$. Возможны два существенно различных случая: 1) $\bar{a} \neq \bar{b}$ (общий случай), 2) $\bar{a} \cong \bar{b}$ (частный случай). Рассмотрим каждый из них в отдельности.

1) $\bar{a} \neq \bar{b}$. Не нарушая общности, можно предположить, что $\bar{a} > \bar{b}$. Из приведенного выше анализа следует, что любая общая касательная окружностей α и β проходит через один из их центров подобия. С другой стороны, мы только что показали, что если прямая проходит через центр подобия и касается одной окружности, то она касается и другой. Таким образом, число решений определяется числом всех касательных, проходящих через центр подобия и касающихся одной из окружностей. Возможны следующие пять случаев.

а) $\bar{AB} > \bar{a} + \bar{b}$. В этом случае точки M_1 и N_1 являются внешними точками обеих окружностей, поэтому задача имеет четыре решения (см. рис. 61, а).

б) $\bar{AB} \cong \bar{a} + \bar{b}$. Задача имеет три решения (см. рис. 61, б).

в) $\bar{AB} < \bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{AB} > \bar{a} - \bar{b}$. В этом случае окружности α и β пересекаются в двух точках; задача имеет два и только два решения (рис. 61, в).

г) $\bar{AB} \cong \bar{a} - \bar{b}$. В этом случае окружности касаются друг друга внутренним образом и задача имеет единственное решение (рис. 61, г).

д) $\bar{AB} < \bar{a} - \bar{b}$. В этом случае одна окружность расположена внутри другой и задача не имеет ни одного решения (рис. 61, д).

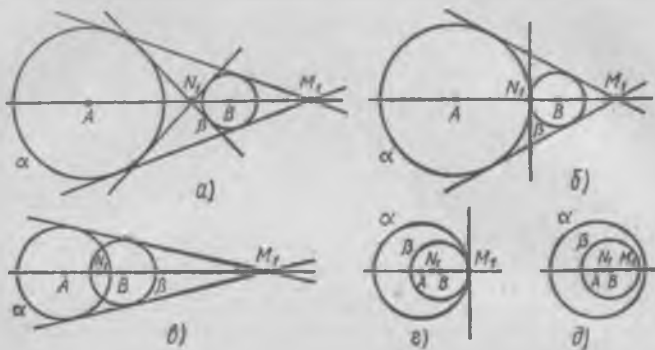


Рис. 61.

2) $\bar{a} \cong \bar{b}$. В этом случае рассмотренное выше построение не полностью применимо, так как точка M_1 не существует. Не останавливаясь на подробном исследовании, заметим, что при $\bar{a} \cong \bar{b}$ и $A \neq B$ задача всегда имеет 4, 3 или 2 решения.

§ 30. Применение конструктивных множеств к задачам на построение

В учебной литературе обычно рассматривают следующие три основных метода решения задач на построение: метод применения множеств точек, метод преобразований и алгебраический метод. Настоящий параграф посвящен первому из перечисленных выше методов. В последних параграфах рассмотрены остальные методы.

1. Обзор простейших конструктивных множеств. Из школьного курса геометрии читателю известно, что некоторые множества точек с успехом используются для решения задач на построение. Как мы увидим ниже, в силу специфики этих задач здесь используются только те множества, которые полностью задаются конечным числом основных объектов. Множество (M) условно будем называть **к о н с т р у к т и в н ы м м н о ж е с т в о м** точек, если существует такая конечная совокупность основных объектов (т. е. точек, прямых и окружностей) $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$, что каждая точка множества (M) принадлежит по крайней мере одному из этих объектов. Объекты $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ называются **э л е м е н т а м и**, определяющими множество (M). Прямая (l), окружность (ω), отрезок, луч, угол являются примерами конструктивных множеств точек. Примерами неконструктивных множеств являются эллипс, гипербола, парабола, а также все замечательные кривые, рассмотренные в I, § 14. В дальнейшем для сокращения записи термин «множество» будем понимать в указанном выше смысле.

Множество считается построенным, если элементы, определяющие это множество, построены.

Некоторые конструктивные множества точек встречаются в школьном курсе геометрии; достаточно, например, напомнить теорему о серединном перпендикуляре к отрезку, теорему о точках биссектрисы угла¹ и др. В первой части курса мы познакомились с примерами более сложных конструктивных множеств точек². Ниже перечислены другие, часто применяемые на практике множества точек.

1°. Множество всех точек, каждая из которых равноудалена от двух данных пересекающихся прямых, есть две взаимно перпендикулярные прямые, содержащие биссектрисы углов, образованных данными прямыми.

2°. Множество всех точек, каждая из которых равноудалена от двух данных параллельных прямых, есть прямая, являющаяся их осью симметрии.

3°. Множество (G) всех точек, каждая из которых делит в одном и том же отношении $p:q$ отрезки, заключенные между двумя параллельными прямыми a и b , считая от прямой a , есть прямая x , параллельная прямым a и b (построение см. на рисунке 62; здесь $L_1P_1 \parallel M_1B_2$).

4°. Даны две пересекающиеся прямые a и b и прямая l , не параллельная ни одной из них. Множество (G) всех точек, каждая из которых делит отрезок, параллельный прямой l и заключенный между прямыми a и b , в одном и том же отношении, считая от прямой a , есть прямая x , проходящая через точку $O = a \cap b$ (рис. 63).

5°. Множество (G) всех точек плоскости, из которых данная окружность видна под данным углом φ_0 , есть окружность, концентрическая с данной, радиус которой больше радиуса данной окружности (построение см. на рисунке 64).

6°. Множество (G) всех точек плоскости, из которых отрезок AB виден под данным углом φ_0 , отличным от прямого, есть две дуги с общими концами A и B , симметричные относительно прямой AB . При этом $A \notin (G)$ и $B \notin (G)$ (рис. 65). Если φ_0 — прямой угол, то эти дуги принадлежат окружности, построенной на отрезке AB как на диаметре.

7°. На данной окружности зафиксирована произвольная точка A . Множество всех точек M , каждая из которых делит хорду данной окружности с концом в точке A в отношении $p:q$, считая от точки A , есть окружность (без точки A), построенная на диаметре $\bar{AP}$, где P — точ-

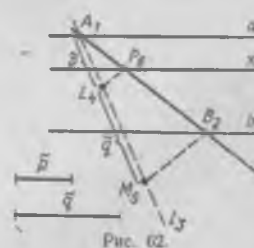


Рис. 62.

¹ См. [30], «Геометрия 6», п. 26 и 27.

² См., например, I, § 15, задачи 4, 5 и 6.



8°. Даны две точки A и B и отрезок a . Множество (G) всех точек M плоскости, удовлетворяющих условию

$$\overline{AM}^2 - \overline{BM}^2 = a^2, \quad (1)$$

2. **Радикальная ось и радикальный центр.** При решении задач на построение, связанных с окружностями, часто употребляются два замечательных множества, называемых радикальной осью и радикальным центром. Если на плоскости дана окружность $O(r)$, то легко показать, что, какова бы ни была точка M плоскости, для всех секущих, проведенных через точку M и пересекающих окружность в двух различных или слившихся точках A и B , число $\delta(M) = MA \cdot MB$ постоянно и равно $|OM|^2 - r^2$. Это число называется степенью точки M относительно окружности $O(r)$. Итак,


$$\delta(M) = |OM|^2 - r^2. \quad (2)$$

1°. Для внутренних точек окружности $\delta(M) < 0$, для точек окружности $\delta(M) = 0$ и для внешних точек окружности $\delta(M) > 0$.



¹ Две окружности называются **ортогональными**, если касательные к ним в точке их касания взаимно перпендикулярны.

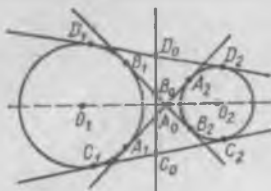


Рис. 68.

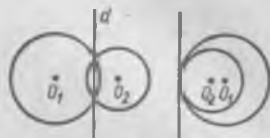


Рис. 69.

Решение. Из свойств 3° и 4° следует, что если две окружности пересекаются в двух различных точках, то радикальной осью будет прямая, соединяющая эти точки; если же они касаются друг друга, то их радикальной осью будет их общая касательная (рис. 69). Поэтому представляет интерес только тот случай, когда данные окружности не пересекаются. В этом случае для решения задачи достаточно пересечь данные окружности третьей вспомогательной окружностью ω_1 (рис. 70). Очевидно, радикальным центром окружностей α , β и ω_1 будет точка M_1 пересечения радикальных осей d_1 и d_2 (рис. 70), а искомой радикальной осью окружностей α и β — прямая x , проходящая через точку M_1 перпендикулярно к линии центров данных окружностей. На рисунке 70 выполнено построение радикальной оси непересекающихся окружностей α и β .

3. Сущность метода применения конструктивных множеств. Рассматриваемый метод является одним из основных. Сущность его заключается в следующем. Задачу сводят к построению некоторой точки (основного элемента построения), удовлетворяющей двум независимым друг от друга условиям μ_1 и μ_2 . Отбрасывая условие μ_2 , разыскивают множество всех точек (M_1), удовлетворяющих условию μ_1 ; отбрасывая затем другое условие μ_1 , разыскивают множество всех точек (M_2), удовлетворяющих условию μ_2 . Любая точка множества (M_1) $\cap$ (M_2), очевидно, будет искомой. Искусство решения задачи состоит именно в том, чтобы в результате удачного осуществления указанной выше схемы получить конструктивные множества (M_1) и (M_2), так как только в этом случае могут быть построены элементы, определяющие (M_1) и (M_2). Рассмотрим примеры.

Задача 2. Даны две неконцентрические окружности α и β , угол φ_0 и отрезок a . Построить точку, из которой окружность α видна под углом φ_0 и для которой отрезок касательной, заключенный между этой точкой и точкой касания с окружностью β , конгруэнтен данному отрезку a .

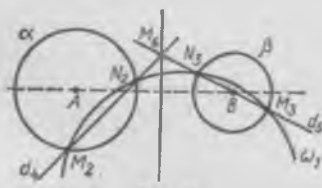


Рис. 70.

Решение. Обозначим через A и B , r_1 и r_0 соответственно центры и радиусы данных окружностей α и β . Искомую точку X естественно считать основной точкой построения. На точку X накладываются два условия: (а) из точки X окружность α видна под углом φ_0 (условие μ_1) и (б) отрезок касательной, заключенный между точкой X и точкой касания с окружностью β , конгруэнтен данно-

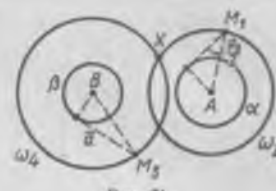


Рис. 71.

му отрезку $\bar{a}$ (условие μ_2). Отбрасывая второе условие μ_2 , рассмотрим множество (G_1) точек плоскости, из которых окружность A (r_1) видна под углом φ_0 . Это множество согласно 30.1.5 является окружностью, концентрической с окружностью α . Отбрасывая, далее, условие μ_1 , мы приходим к множеству (G_2) точек, для каждой из которых отрезок касательной, заключенный между точкой X и точкой касания с окружностью β , конгруэнтен данному отрезку $\bar{a}$. Это множество представляет собой окружность, концентрическую окружности β . Очевидно, искомая точка X является точкой пересечения рассматриваемых множеств.

Построение. Решение задачи, по существу, сводится к построению множеств (G_1) и (G_2), указанных выше. Для построения этих множеств достаточно построить по одной точке, принадлежащей им. На рисунке 71 построение этих точек выполнено пунктиром.

$$M_1 : M_1 \in (G_1) \text{ (см. 30.1.5, рис. 64); } \omega_1 : \omega_1 = B(B\bar{M}_1) = (G_2);$$

$$\omega_2 : \omega_2 = A(A\bar{M}_2) = (G_1);$$

$$M_2 : M_2 \in (G_2);$$

$$X : X = \omega_1 \cap \omega_2.$$

Доказательство непосредственно следует из способа построения, поэтому сразу перейдем к исследованию задачи.

Исследование. Из приведенного выше анализа следует, что задача имеет решение тогда и только тогда, когда окружности ω_1 и ω_2 имеют общие точки, и задача будет иметь столько решений, сколько общих точек имеют эти окружности. Исследуем этот вопрос более подробно. Обозначим через R_1 и R_2 радиусы окружностей ω_1 и ω_2 , а через $\bar{p}$ — отрезок $\bar{AB}$. Легко видеть, что отрезки R_1 и R_2 однозначно определяются через $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{a}$ и угол φ_0 . Используя известную теорему о пересечении двух окружностей, приходим к следующему результату:

а) если $\bar{p} < R_1 + R_2$ и $\bar{p} > |R_1 - R_2|$, то задача имеет два решения;

б) если $\bar{p} \cong R_1 + R_2$ или $\bar{p} \cong |R_1 - R_2|$, то задача имеет одно решение;

в) если, наконец, $\bar{p} > R_1 + R_2$ или $\bar{p} < |R_1 - R_2|$, то задача не имеет решения.



Рис. 72.

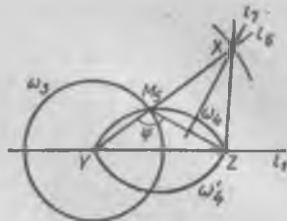


Рис. 73.

Рисунок 71 соответствует случаю а).

Задача 3. Даны угол φ_0 , два отрезка $\bar{a}$ и $\bar{b}$, удовлетворяющие условию $\bar{a} < \bar{b}$. Построить $\triangle XYZ$ так, чтобы $\angle X \cong \angle \varphi_0$, $\bar{YZ} \cong \bar{b}$ и $\bar{XY} - \bar{XZ} \cong \bar{a}$.

Анализ. Допустим, что искомым треугольником XYZ построен (см. рис. 72). Из условия задачи следует, что любые две точки YZ , удовлетворяющие условию $\bar{YZ} = \bar{b}$, могут быть приняты за вершины Y и Z искомого треугольника, поэтому задача сводится к построению вершины X . Примем эту вершину за основную точку построения. Из условия задачи вытекает, что X удовлетворяет следующим двум условиям:

а) из точки X отрезок $\bar{YZ}$ виден под углом φ_0 (условие μ_1); б) $\bar{XY} - \bar{XZ} \cong \bar{a}$ (условие μ_2). Если отбросить второе условие, то множество точек, удовлетворяющих первому условию, есть дуги двух окружностей,

опирающихся на отрезок $\bar{YZ}$ и вмещающих угол φ_0 . Эти дуги легко строятся циркулем и линейкой (см. множество 30.1.6). Если отбросить первое условие, то множество точек, удовлетворяющих условию μ_2 , есть ветвь гиперболы. Это множество не является множеством конструктивной геометрии, так как оно не может быть построено циркулем и линейкой. Мы приходим к выводу, что основная точка построения выбрана нами неудачно. Так как в условии задачи дана разность отрезков $\bar{XY} - \bar{XZ}$, то представляется естественным ввести в рассмотрение точку M , лежащую на отрезке $\bar{XY}$ и удовлетворяющую условию $\bar{XM} \cong \bar{XZ}$; тогда, очевидно, $\bar{YM} = \bar{a}$. Так как $\triangle MXZ$ равнобедренный, то $\angle X M Z \cong \frac{2d - \varphi_0}{2} \cong d - \frac{\varphi_0}{2}$, а $\angle Y M Z \cong 2d -$

$-\left(d - \frac{\varphi_0}{2}\right) \cong d + \frac{\varphi_0}{2}$. Отсюда вытекает, что из точки M отрезок $\bar{YZ}$ виден под углом $d + \frac{\varphi_0}{2}$. С другой стороны, $\bar{YM} \cong \bar{a}$. Таким образом, точка M может быть определена как точка пересечения двух множеств: (G_1) — окружность $(Y, \bar{a})$ и (G_2) — множество всех точек

плоскости, из которых отрезок $\bar{YZ}$ виден под углом $d + \frac{\varphi_0}{2}$. Построив точку $M = (G_1) \cap (G_2)$, легко построить искомую вершину X .

Построение. Строим последовательно (см. рис. 73):

$l_1: l_1$ — произвольная прямая;

$Y, Z: Y \in l_1, Z \in l_1, \bar{YZ} \cong \bar{b}$;

$\omega_1: \omega_1 = Y(\bar{a})$;

$\omega_2, \omega_3: \omega_2$ и ω_3 — элементы, определяющие множество (G_2) (см. 30.1.6);

$M_1: M_1 = \omega_2 \cap \omega_3$;

$l_2: l_2 = Y J M_1$;

$l_3: l_3$ — серединный перпендикуляр отрезка $\bar{M_1Z}$;

$X: X = l_2 \cap l_3$.

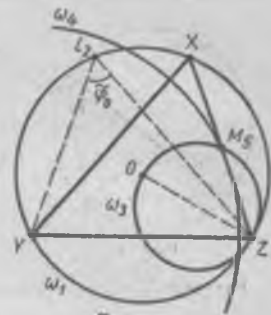


Рис. 74.

Доказательство. Прежде всего заметим, что так как $\angle \varphi = \angle Y M_1 Z = d + \frac{\varphi_0}{2}$ тупой, то смежный с ним $\angle X M_1 Z = d - \frac{\varphi_0}{2}$ будет острым, поэтому прямые l_1 и l_2 пересекутся в точке X , расположенной с точкой Y по разные стороны от прямой M_1Z . Из построения следует, что треугольник M_1XZ — равнобедренный. Найдем угол X этого треугольника:

$$\angle X = 2d - 2(\angle X M_1 Z) = 2d - 2\left(d - \frac{\varphi_0}{2}\right) = \varphi_0.$$

Таким образом треугольник XYZ — искомым.

Исследование. Как было только что показано, задача имеет решение при любых начальных данных $\bar{a}, \bar{b}, \varphi_0$, удовлетворяющих условию $\bar{a} < \bar{b}$. В данном случае решение задачи является свободным, поэтому число решений определяется числом неконгруэнтных друг другу треугольников, удовлетворяющих условиям задачи. Легко видеть, что начальными данными $\bar{a}, \bar{b}$ и φ_0 искомым треугольником определяется с точностью до конгруэнтности, поэтому задача имеет единственное решение.

Задача 4. Построить треугольник XYZ по радиусу описанной окружности $\bar{R} \cong \bar{a}$, углу $X \cong \varphi_0$ и медиане $\bar{m}_y \cong \bar{b}$.

Решение. Допустим, что задача решена и ω_1 — окружность, описанная около искомого треугольника XYZ (рис. 74). Легко видеть

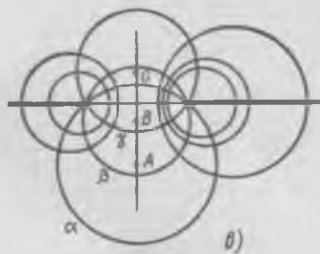
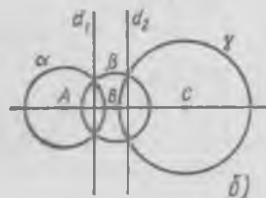
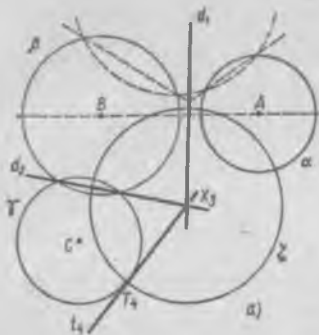


Рис. 75.

что по данному углу φ_0 с точностью до конгруэнтности определяется основание $\widehat{YZ}$ искомого треугольника. Поэтому решение задачи сводится к построению вершины X в предположении, что основание $\widehat{YZ}$ построено. Пусть M_5 — середина стороны XZ (см. рис. 74). Так как медиана искомого треугольника задана, то в качестве основной точки построения целесообразно выбрать точку M_5 . Эта точка принадлежит двум множествам — (G_1) : окружность $(Y, \frac{1}{2}b)$, (G_2) : множество середин хорд окружности ω_1 с общим концом Z (см. 30.1.7). На рисунке 74 множества (G_1) и (G_2) являются соответственно окружностями (ω_3) и (ω_4) . Таким образом, $M_5 = (G_1) \cap (G_2)$. Построение искомого треугольника XYZ выполнено на рисунке 74. На этом рисунке точки Y и Z выбраны произвольно.

В зависимости от величины угла φ_0 и отрезков a, b задача может иметь два решения, одно решение и может не иметь ни одного решения. На рисунке 74 рассмотрен случай, соответствующий двум решениям.

Задача 5. Построить окружность ω , ортогональную трем данным окружностям α, β и γ .

Решение. Из теоремы [30.1] непосредственно следует, что точка X_3 (см. рис. 75, а) является центром искомой окружности тогда и только тогда, когда она совпадает с радикальным центром трех данных окружностей и расположена вне этих окружностей. Поэтому решение задачи, по существу, сводится к построению радикального центра окружностей α, β и γ . Построение выполнено на рисунке

75, а. На этом рисунке d_1 и d_2 — радикальные оси соответствующих окружностей α, β и β, γ , а t_1 — касательная к окружности γ .

Не проводя подробного исследования задачи, отметим следующие возможные случаи:

а) центры A, B, C трех данных окружностей не коллинеарны, и радикальный центр является внешней точкой для этих окружностей. Задача имеет одно и только одно решение (рис. 75, а); б) центры трех данных окружностей не коллинеарны, и радикальный центр не является их внешней точкой. В этом случае задача не имеет ни одного решения; в) центры трех данных окружностей коллинеарны, в этом случае задача может не иметь ни одного решения (рис. 75, б) и иметь бесчисленное множество решений (рис. 75, в)¹.

Отметим, наконец, что решение этой задачи является, по существу, решением следующей задачи.

Задача 6. Даны три окружности α, β и γ . Построить точку X так, чтобы отрезки касательных, проведенных из этой точки к данным окружностям, заключенные между точкой X и точками касания, были конгруэнтны.

§ 31. Применение геометрических преобразований к решению задач на построение

1. Метод геометрических преобразований. При решении многих задач на построение с успехом применяются геометрические преобразования точек плоскости. При этом наиболее часто употребляются преобразования подобия, особенно гомотетия, различные виды движений: симметрия относительно прямой и точки, вращение, параллельный перенос, а также инверсия. Обычно в учебной литературе принято говорить о различных «методах» решения задач на построение в зависимости от того, какого вида преобразование применяется при построении — о методе симметрии, если применяется симметрия относительно прямой, о методе параллельного переноса, если применяется параллельный перенос, о методах вращения, подобия, гомотетии, инверсии и т. д.

В настоящем пособии мы не будем придерживаться этой терминологии, так как нам представляется более целесообразным в основу методики решений задач на построение с помощью геометрических преобразований полагать не вид преобразований, а способы их использования. В соответствии с этим ниже рассмотрены два принципиально различных способа применения геометрических преобразований к решению задач на построение и даны конкретные примеры, иллюстрирующие каждый из этих способов.

К сожалению, невозможно сформулировать критерии, позволяющие по данной задаче определить, каким именно способом следует ее решать. Однако по мере накопления опыта в большинстве случаев

¹ Заметим, что в этом случае прямая центров, если ее трактовать как предельный случай окружности, является также решением задачи.

по условиям задачи удастся выбрать правильный путь ее решения. При этом следует отметить, что в ряде случаев одну и ту же задачу можно решать различными путями.

2. Первый способ применения геометрических преобразований к решению задач на построение. Задачу сводят к построению некоторой фигуры F^* (основного элемента построения), отличной от точки. Чаще всего основным элементом служит искомая фигура или какая-либо ее часть. Возьмем некоторую группу преобразований $\{\pi\}$ так, чтобы при всех преобразованиях этой группы некоторые (но не все!) свойства, которым удовлетворяет фигура F^* , оставались инвариантными. Пусть $\{F\}$ — множество образов фигуры F^* при всех преобразованиях данной группы. Очевидно, $F^* \in \{F\}$. Так как при преобразованиях группы $\{\pi\}$ фигура F^* «теряет» ряд свойств, то оказывается возможным построить какую-либо фигуру F' из $\{F\}$. Установив далее преобразование π , которое фигуру F' переводит в F^* , можно построить образ фигуры F' , т. е. искомую фигуру F^* .

При этом методе построения в качестве группы преобразований $\{\pi\}$ чаще всего используется группа подобия или какая-либо подгруппа этой группы, например множество всех гомотетий с центром в некоторой фиксированной точке вместе с тождественным преобразованием. В дальнейшем этот способ мы будем условно обозначать через I, 1.

Модификацией этого способа является следующий способ I, 2: по аналогии с предыдущим задачу сводят к построению некоторой фигуры F^* , отличной от точки. Далее определяют те условия, которые накладываются на фигуру F^* . Отбрасывая одно из этих условий, определяют множество фигур $\{F\}$, удовлетворяющих остальным условиям. Это множество, очевидно, содержит фигуру F^* .

Следующим шагом является определение множества всех преобразований плоскости $\{\pi\}$, которые каждую фигуру множества $\{F\}$ переводят в любую другую фигуру этого же множества. Это множество в большинстве случаев образует подгруппу группы движений или подобных преобразований. Построив некоторую, вообще говоря, произвольную фигуру F' из множества $\{F\}$ и определив преобразование π из $\{\pi\}$, которое F' переводит в F^* , строят образ фигуры F' при преобразовании π и тем самым определяют искомую фигуру F^* . При этом способе построения для определения множества $\{F\}$ нередко приходится пользоваться тем или иным конструктивным множеством точек.

Рассмотрим примеры решения задач на построение с применением этого способа.

Задача 1. Построить треугольник, зная два его угла и какой-либо его линейный элемент, т. е. зная один из следующих отрезков: сторону, биссектрису, высоту, радиус описанной окружности, сумму его высот, сумму высоты и медианы, исходящей из одной вершины, периметр и т. д.

Решение. Пусть, например, даны отрезок $\bar{a}$ и углы $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ и требуется построить треугольник XYZ , зная два угла ($\angle Y \cong \bar{\varphi}$,

$\angle Z \cong \bar{\psi}$) и сумму высот, опущенных из этих вершин, т. е. $\bar{a} = \bar{h}_y + \bar{h}_z$.

Проведем анализ задачи. Задачу будем решать методом I, 1. За основной элемент F^* примем искомый треугольник XYZ , а за группу преобразований $\{\pi\}$ примем множество всех подобных преобразований основной плоскости. Очевидно, множество $\{F\}$ всех образов фигуры F^* в данном случае состоит из тех и только тех треугольников, каждый из которых имеет два угла, соответственно кон-

груэнтных $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$. Построив по данным двум углам какой-либо треугольник F' из множества $\{F\}$, легко построить искомый треугольник XYZ . Для этого, например, можно построить образ F' при гомотетии с

коэффициентом $k = \frac{\bar{a}'}{a'}$, где $\bar{a}'$ — сумма соответствующих высот треугольника F' .

Построение выполнено на рисунке 76. На этом рисунке $\triangle A_1B_1C_1$ подобен искомому, B_1H_1 и C_1H_1 — его высоты h_1 и h_2 , а отрезки B_1M_1 и C_1M_1 равны соответственно отрезкам a и $a' = h_1 + h_2$. Предлагаем читателю, пользуясь этим рисунком, самостоятельно записать все шаги построения, принимая во внимание, что на этом рисунке обозначения промежуточных точек и прямых снабжены индексами, в точности соответствующими номеру шага построения.

При решении задач данным методом практически не требуется специального доказательства, так как оно непосредственно следует из способа построения. Предлагаем читателю самостоятельно провести исследование задачи и показать, что задача всегда имеет одно решение, если сумма двух данных углов меньше $2d$.

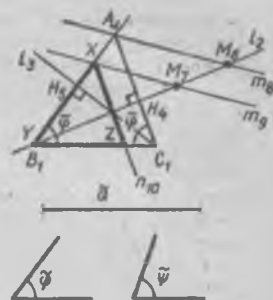


Рис. 76.

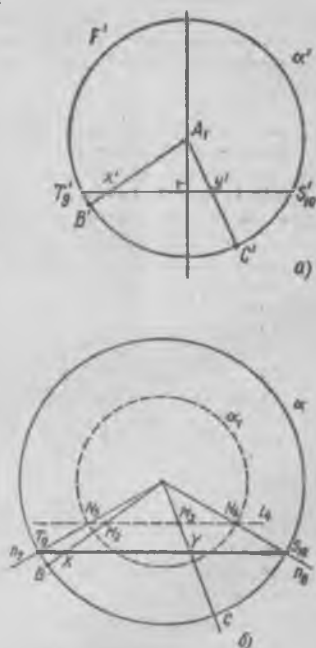


Рис. 77.

Рассмотрим еще одну задачу, решаемую этим способом.

Задача 2. Дана окружность α с центром в точке A и две не диаметрально противоположные точки B и C на ней. На радиусах AB и AC построить соответственно точки X и Y так, чтобы хорда, проходящая через эти точки, делилась ими на отрезки, пропорциональные числам 1, 4, 3.

Решение. Допустим, что задача решена и F^* — фигура, состоящая из данных объектов и искомой хорды T_9S_{10} с точками X и Y на ней (рис. 77, б). Пусть $\{\pi\}$ — группа преобразований подобия, а $\{F\}$ — множество образов фигуры F^* при всех преобразованиях группы $\{\pi\}$. Очевидно, каждая фигура множества $\{F\}$, отличная от F^* , подобна ей, но отличается от нее размерами и расположением на плоскости. Построив одну из фигур F' множества $\{F\}$, легко восстановить фигуру F^* и тем самым построить искомые точки X, Y .

В множестве $\{F\}$ всегда существует фигура F' , хорда T_9S_{10} которой равна наперед заданному отрезку. Поэтому построение фигуры F' (см. рис. 77, а) можно начать с построения хорды T_9S_{10} с точками X' и Y' на ней так, чтобы $|T_9X'| : |X'Y'| : |Y'S_{10}| = 1 : 4 : 3$. Далее, легко построить центр A' окружности α' , образа окружности α , принимая во внимание то обстоятельство, что из точки A' отрезок $X'Y'$ виден под углом $\varphi_0 \cong \angle BAC$ и $T_9A' \cong S_{10}A'$ (метод применения множеств точек).

Построив фигуру F' , легко построить фигуру F^* , точнее, хорду T_9S_{10} и точки X и Y , так как остальные части этой фигуры являются данными элементами. Построение фигуры F' (см. рис. 77, а) мы опускаем. На рисунке 77, б выполнено построение фигуры F^* . Строим последовательно $\alpha_1 = A(A'B)$; $M_2 : AM_2 \cong A'X'$; $M_3 : AM_3 \cong A'Y'$ и т. д. Построение остальных элементов показано на рисунке 77, б.

Доказательство непосредственно усматривается из приведенного выше построения. Не останавливаясь подробно на исследовании задачи, заметим, что задача всегда разрешима, так как фигуру F' всегда можно построить. Задача имеет два решения. Второе решение можно получить, если взять прямую, симметричную прямой T_9S_{10} относительно биссектрисы угла BAC .

Теперь рассмотрим задачу, решаемую способом 1.2.

Задача 3. Даны две пересекающиеся прямые a и b и точка A , не лежащая на этих прямых. Построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся данных прямых.

Решение. Допустим, что искомая окружность ξ построена (рис. 78, а). На окружность ξ накладываются следующие условия: а) $A \in \xi$; б) ξ касается лучей прямых a и b . Отбросив условие а), мы получаем бесконечное множество $\{F\}$ окружностей, касающихся лучей на a и b . Легко видеть, что любую окружность этого множества можно перевести в любую другую окружность этого же множества при помощи гомотетии с центром в точке пересечения O данных прямых.

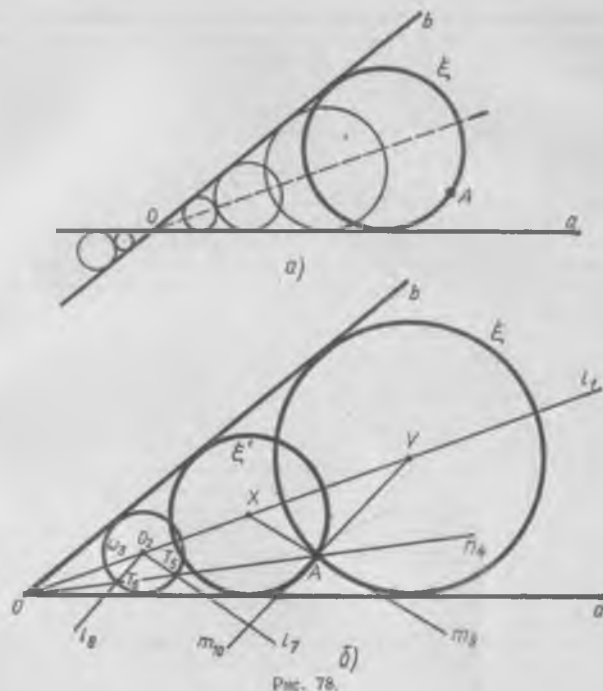


Рис. 78.

Отсюда вытекает следующий способ построения: строим произвольную окружность, касающуюся двух данных прямых, а далее, пользуясь гомотетией с центром в точке O , строим образ этой окружности так, чтобы он проходил через точку A .

На рисунке 78, б выполнено построение искомой окружности ξ . На этом рисунке l_1 — биссектриса угла, образованного прямыми a и b , ω_3 — вспомогательная окружность, прямые m_2 и m_3 соответственно параллельны прямым l_2 и l_3 и, наконец, окружности $X(XA)$ и $Y(YA)$ — искомые окружности ξ и ξ' . Заметим, что существуют две гомотетии, переводящие окружность ω_3 в искомую. На рисунке 78, б окружности, построенные с помощью этих гомотетий, обозначены через ξ и ξ' . Таким образом, данная задача всегда имеет два решения.

3. Второй способ применения геометрических преобразований к решению задач на построение. Другой путь применения преобразований к задачам на построение, принципиально отличный от преды-

дущего, заключается в следующем (способ II, 1). Предположим, что задача решена и F_0 — фигура, образованная из данных и искомым объектам. Подвергнем фигуру F_0 некоторому конкретному преобразованию (основное преобразование) с целью получить более простую фигуру F_0 , чем искомая фигура F_0 . Этим путем иногда удается исходную задачу свести к другой, которая либо уже решена, либо решается проще, чем исходная задача.

При этом методе решения задач пользуются преобразованиями, отличными от преобразований подобия. Характерным является, например, применение инверсии, особенно при решении таких задач, где требуется построить окружность, удовлетворяющую определенным условиям. Инверсия позволяет окружности преобразовывать в прямую, в частности, искомую окружность преобразовывать в прямую, т. е. задачу свести к построению прямой (см. § 32).

Иногда применение аффинного преобразования к данной конфигурации позволяет упростить всю конфигурацию и наметить путь решения задачи циркулем и линейкой. В частности, аффинные преобразования позволяют некоторые неконструктивные множества преобразовать в конструктивные (см. ниже, задачу 4).

Наконец, рассмотрим еще один путь применения преобразований к решению задач на построение, несущественно отличающийся от предыдущего (способ II, 2). Предположим, что задача решена и F_0 — фигура, состоящая из данных и искомым объектам. К части фигуры F_0 применяется то или иное конкретное преобразование. В ряде случаев этот прием дает возможность построить вспомогательную фигуру (в частности, точку), состоящую из элементов исходной фигуры и преобразованной части, которая позволяет найти нить решения задачи.

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих этот способ. Рассмотрим прежде всего пример применения аффинных преобразований к решению задач на построение (способ II, 1).

Задача 4. Построить точки пересечения эллипса, заданного вершинами A, B, C, D , с данной прямой a (рис. 79).

Решение. Допустим, что задача решена и точки пересечения X и Y прямой a с эллипсом построены. Так как эллипс не является конструктивным множеством точек (см. § 30, п. 1), то идея решения задачи заключается в том, чтобы, применяя аффинное преобразование, данную фигуру преобразовать в фигуру, которая может быть построена циркулем и линейкой. Для этого воспользуемся теоремой I, [34.4]. Пусть $O = AB \cap CD$, а C_1 — точка на луче (OC) , удовлетворяющая условию $\widehat{OC_1} \cong \widehat{OA}$ (см. рис. 79). Согласно теореме I, [34.4] преобразование сжатия π к прямой AB , при котором точка C переходит в точку C_1 , переводит данный эллипс в окружность, для которой отрезок AB является диаметром¹.

¹ Заметим, что эллипс задан четырьмя вершинами A, B, C, D , его точки не предполагаются построенными.

Отсюда вытекает следующий план решения задачи: пусть F_0 — фигура, изображенная на рисунке 79.

Построим образ a_2 прямой a при сжатии к прямой AB , переводящем точку C в точку C_1 . При этом сжатии данный эллипс, очевидно, переходит в окружность $\omega_2 = O(\widehat{OA})$. Если M_4 и M_5 — точки пересечения прямой a_2 и окружности ω_2 , то, очевидно, эти точки являются образами искомым точек пересечения прямой a и эллипса при преобразовании π . Таким образом, искомыми точками X и Y будут прообразы точек M_4 и M_5 . Построение точек X и Y выполнено на рисунке 79.

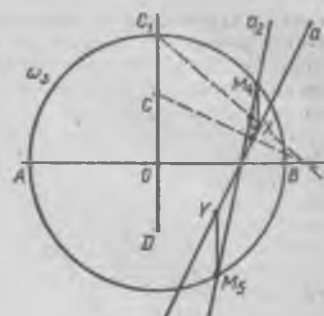


Рис. 79.

Задача, очевидно, может иметь одно, два и ни одного решения в зависимости от того, как расположены прямая a и точки A, B, C, D .

Рассмотрим, наконец, пример, иллюстрирующий метод II.2.

Задача 5. Дана точка A и две прямые a и b , не проходящие через эту точку. Построить равносторонний треугольник, одна из вершин которого совпадает с точкой A , а две другие лежат на прямых a и b .

Решение. Допустим, что задача решена и AXY — искомым треугольник (рис. 80). В соответствии со схемой, изложенной выше, часть конфигурации F_0 рисунка 80 подвергнем некоторому преобразованию с таким расчетом, чтобы получить вспомогательную фигуру или точку, построение которой может быть легко выполнено при помощи данных объектов. Так как $\angle XAY = 60^\circ$ и $AX \cong AY$, то, рассматривая вращение π с центром в точке A на угол $\angle \varphi = 60^\circ$, мы замечаем, что образ точки X совпадает с точкой Y . С другой стороны, так как $X \in a$, то образ точки X принадлежит образу прямой a . Отсюда следует, что точка Y будет точкой пересечения прямой b и образа прямой a . Этот простой анализ показывает, что для построения точки Y достаточно рассмотреть вращение с центром в точке A на $\angle \varphi = 60^\circ$ и построить образ прямой a при этом вращении. После того как построим

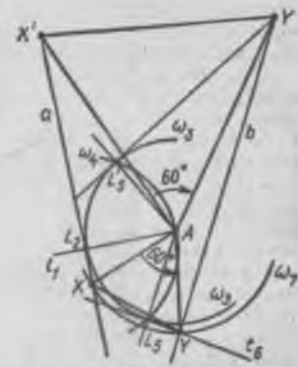


Рис. 80

роена вершина Y , построение вершины X не представляет никакого труда. Ниже записано построение искомого треугольника AXY , выполненное на рисунке 80. На этом же рисунке построен $\triangle X'A'Y'$, также удовлетворяющий условиям задачи.

$$l_1 : A \in l_1, l_1 \perp a;$$

$$L_2 : L_2 = l_1 \cap a;$$

$$\omega_3 : \omega_3 = A(\widetilde{AL}_2);$$

$$\omega_4 : \omega_4 = L_2(\widetilde{L_2A});$$

$$L_5 : L_5 = \omega_3 \cap \omega_4;$$

$$l_6 : l_6 \ni L_5, l_6 \perp AL_5 (l_6 \text{ — образ прямой } a \text{ при преобразовании } \pi);$$

$$Y = l_6 \cap b;$$

$$\omega_7 : \omega_7 = A(\widetilde{AY});$$

$$X : X = \omega_7 \cap a.$$

Доказательство. Так как точки X и Y принадлежат окружности ω_7 , то $\widehat{AX} \cong \widehat{AY}$. С другой стороны, $\angle XAY = 60^\circ$ в силу того, что точка X является прообразом точки Y при вращении π . Последнее утверждение вытекает из того обстоятельства, что $X \in \omega_7$ и X принадлежит прообразу a прямой l_6 . Таким образом, $\triangle XAY$ равнобедренный.

И с с л е д о в а н и е. Задача будет иметь решение тогда и только тогда, когда образ прямой a при любом вращении с центром в точке O на $\angle \varphi = 60^\circ$ пересекается с прямой b . Очевидно, существуют два таких вращения — одно вращение по часовой стрелке, а другое — против. Обозначим через a' и a'' образы прямой a при этих вращениях. Возможны следующие случаи.

а) $\angle(a, b) \neq 60^\circ$ (или 120°). В этом случае прямые a' и a'' пересекают прямую b , поэтому задача имеет два решения. Рисунок 80 соответствует этому случаю. На этом рисунке вторым решением является $\triangle AX'Y'$.

б) $\angle(a, b) = 60^\circ$ (или 120°). В этом случае одна из прямых a' или a'' пересекает прямую b , а вторая либо параллельна ей, либо совпадает с ней. В первом случае задача имеет одно решение, а во втором случае — бесчисленное множество решений. Легко видеть, что второй случай возможен тогда и только тогда, когда точка A лежит на биссектрисе вертикальных углов, образованных данными прямыми и равных 120° .

В заключение рассмотрим еще одну задачу, которая решается точно так, как и предыдущая задача.

З а д а ч а 6. Даны две окружности α и β и прямая a . Построить треугольник XYZ , подобный данному равнобедренному треуголь-

нику ABC (где $|AC| = |BC|$) так, чтобы $X \in \alpha$, $Y \in \beta$, а высота, проходящая через вершину Z , лежала на прямой a .

Р е ш е н и е. Предположим, что задача решена и F_0 — фигура, образованная из данных и искомым элементом (рис. 81). Рассмотрим осевую симметрию π относительно прямой a (см. I, § 25, п. 2) и подвергнем часть фигуры F_0 , а именно, X и α , этому преобразованию. Пусть $M_3 = \pi(X)$, $\alpha_2 = \pi(\alpha)$. Мы замечаем, что $M_3 = Y$ и, с другой стороны, $Y = \beta \cap \alpha_2$, поэтому легко построить точку Y , а следовательно, и весь треугольник XYZ . Построение выполнено на рисунке 81. На этом рисунке a — серединный перпендикуляр отрезка $\widetilde{O_1O_2}$; окружности α и α_2 имеют равные радиусы и $l_4 \perp a$.

Существование и число решений зависит от взаимного расположения окружностей β и α . Задача может не иметь ни одного решения, если $\beta \cap \alpha_2 = \emptyset$; два решения, если β и α_2 касаются друг друга; четыре решения, если β и α_2 пересекаются в двух точках; бесчисленное множество решений, если $\beta = \alpha_2$. В случае, изображенном на рисунке 81, задача имеет четыре решения: XYZ — одно из этих решений. Второе решение получаем из $\triangle XYZ$ отражением от прямой l_4 . Остальные два решения можно получить, если вместо точки Y воспользоваться точкой T .

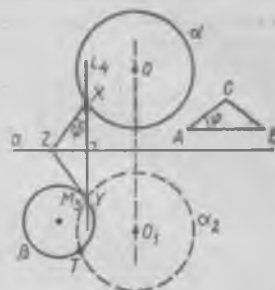


Рис. 81.

§ 32. Инверсия; применение инверсии к решению задач на построение

1. Инверсия; построение образов точек. Пусть $O(r)$ — окружность, а Ω — множество всех точек плоскости за исключением точки O . Каждой точке A множества Ω поставим в соответствие точку A' так, чтобы точки A и A' лежали на одном луче, исходящем из точки O , и, кроме того,

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2 \quad (1)$$

(см. рис. 82). Этими условиями определяется преобразование, которое называется инверсией с центром в точке O и степенью r^2 . В [1, п. 2, § 32] были рассмотрены основные свойства инверсии. Так как ими ниже мы неоднократно будем пользоваться, то рекомендуем читателю, прежде чем приступить к изучению настоящего параграфа, повторить и этот материал.

Прежде всего рассмотрим задачи на построение образов основных объектов при инверсии, заданной окружностью ω с центром O и радиусом r .

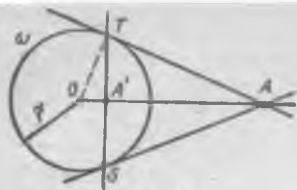


Рис. 82

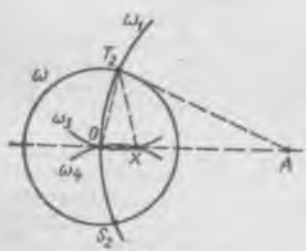


Рис. 83

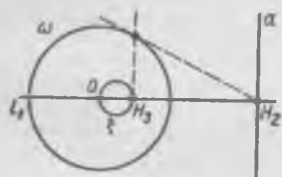


Рис. 84

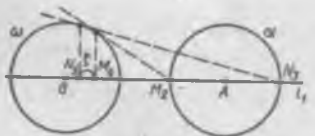


Рис. 85

Задача 1. Построить образ точки A при данной инверсии.

Решение. Очевидно, задача представляет интерес только в том случае, когда A не лежит на окружности инверсии.

Пусть A — внешняя точка окружности инверсии ω . Соединим точку A с центром инверсии и проведем через нее две касательные AT и AS к окружности инверсии (см. рис. 82). Легко показать, что точка $A' = TS \cap OA$ является искомой. В самом деле, из подобия треугольников OTA' и OAT следует: $OA' : OT = OT : OA$, или $\overline{OA'} \cdot \overline{OA} = \overline{OT}^2 = r^2$.

Отсюда вытекает способ построения образа точки A при помощи циркуля и линейки. Если точка A лежит внутри окружности инверсии, то, пользуясь свойством взаимности, построение образа точки A проводится в обратном порядке.

Существует другой, изящный способ построения образов точек при инверсии, выполняемый одним циркулем. На рисунке 83 выполнено построение образа внешней X точки A . Здесь $\omega_1 = A(\overline{AO})$, $\omega_2 = T_2(\overline{T_2O})$ и $\omega_3 = S_2(\overline{S_2O})$, $X, O = \omega_2 \cap \omega_3$.

2. Построение образов прямых и окружностей при инверсии.

Задача 2. Построить образ прямой a при данной инверсии.

Решение. Задача представляет интерес только в том случае, когда прямая a не проходит через центр инверсии O . В этом случае образом прямой a будет окружность, проходящая через центр инверсии. Пусть l_1 — перпендикуляр, опущенный из точки O на прямую a , а $H_2 = a \cap l_1$ (рис. 84). Если H_2 — образ точки H_1 при данной инверсии, то от-

резок $\overline{OH_2}$ будет диаметром искомой окружности. Таким образом, задача сводится к построению окружности на отрезке $\overline{OH_2}$ как на диаметре.

Задача 3. Построить образ окружности α , проходящей через центр инверсии.

Решение. В силу свойства взаимности построение образа окружности α проводится в порядке, обратном тому, который указан при решении задачи 2.

Заметим, что если данная окружность пересекает окружность инверсии в двух точках, то ее образом будет прямая, соединяющая эти две точки, поэтому в этом случае задача решается тривиально.

Задача 4. Построить образ окружности α , не проходящей через центр инверсии.

Решение. Пусть A — центр данной окружности (см. рис. 85). Образом окружности α является окружность ξ , центр которой лежит на прямой OA . Подчеркнем, что центры окружностей α и ξ не соответствуют друг другу при инверсии. На рисунке 85 через M_1 и N_2 обозначены точки пересечения прямой OA с окружностью α , а через M_2 и N_1 соответственно их образы при инверсии. Очевидно, задача сводится к построению окружности ξ на отрезке M_1N_2 как на диаметре. Предлагаем читателю самостоятельно выполнить это построение, воспользовавшись рисунком 85.

3. Метод инверсии при решении задач на построение. Так называется способ II.1, когда в качестве основного преобразования используется преобразование инверсии (см. § 31, п. 3). При применении этого метода исходную задачу сводят к задаче, которая либо уже решена, либо решается проще, чем исходная. Проиллюстрируем этот метод на примере так называемой задачи Аполлония и ее предельных случаев. Для того чтобы сформулировать эту задачу в общем виде, введем следующее соглашение. Пусть Ω и Ω' — два основных объекта (точка, прямая или окружность), не являющиеся одновременно двумя точками или двумя прямыми. Будем говорить, что объекты Ω и Ω' касаются друг друга, если они имеют одну и только одну общую точку. Если ни один из объектов Ω и Ω' не является точкой, то это понятие, как легко видеть, совпадает с обычным понятием касания двух окружностей или окружности и прямой. Если же один из этих объектов, скажем Ω , является точкой, то касание объектов Ω и Ω' , по существу, означает, что $\Omega \in \Omega'$. Теперь мы можем сформулировать следующую общую задачу: *даны три различных объекта Ω_1, Ω_2 и Ω_3 . Построить окружность ξ , касающуюся Ω_1, Ω_2 и Ω_3 .* В зависимости от характера данных объектов возможны десять различных случаев, поэтому сформулированная выше общая задача содержит 10 различных конкретных задач. Две из этих задач нам уже известны: построение окружности, описанной около данного треугольника, и задача 3, § 31 (построение окружности, проходящей через данную точку и касающейся двух данных прямых). В случае, когда все три данных объекта являются

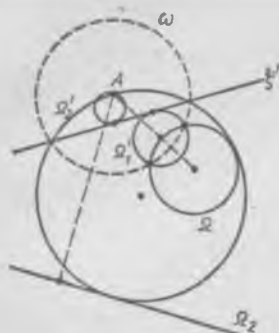


Рис. 86

окружностями, сформулированная выше задача называется задачей Аполлония, остальные случаи называются предельными случаями задачи Аполлония.

Пользуясь методом инверсии, можно указать единый прием, с помощью которого решаются шесть из девяти предельных случаев задачи Аполлония, а именно те случаи, когда по крайней мере один из данных объектов, скажем Ω_3 , является точкой.

Задача 5. Дана точка A и два основных объекта Ω_1 и Ω_2 . Построить окружность, проходящую через A и касающуюся объектов Ω_1 и Ω_2 в предположении, что $A \notin \Omega_1$ и $A \notin \Omega_2$.

Решение. Задачу будем решать методом инверсии в предположении, что Ω_1 — окружность, а Ω_2 — прямая (рис. 86). Пусть F_0 — фигура, состоящая из данных и искомых объектов, т. е. из окружностей Ω_1 и ξ , точки A и прямой Ω_2 . Рассмотрим инверсию с центром в точке A и окружностью ω . Так как $A \notin \Omega_1$ и $A \notin \Omega_2$, то, как легко видеть, образом фигуры F_0 будет фигура F_0' , состоящая из двух окружностей Ω_1' и Ω_2' и прямой ξ' . Здесь Ω_1' и Ω_2' соответственно образы окружностей Ω_1 и прямой Ω_2 , а ξ' — прямая, в которую переходит окружность ξ ($A \in \xi$, поэтому образом окружности ξ будет прямая).

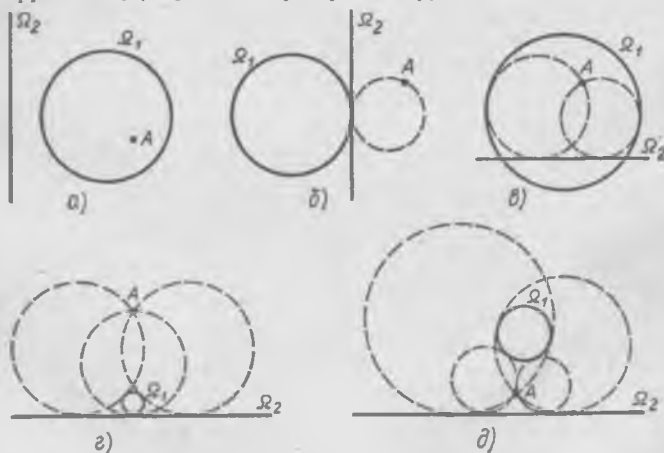


Рис. 87.

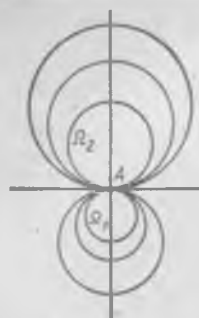


Рис. 88.

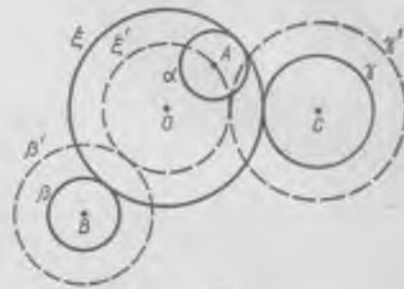


Рис. 89.

Заметим, что точка A как центр инверсии не имеет образа. Так как при инверсии два объекта, касающиеся друг друга, переходят в касающиеся объекты, то прямая ξ' касается окружностей Ω_1' и Ω_2' (рис. 86). Если мы построим прямую ξ' , то, пользуясь той же инверсией, построим образ этой прямой и получим искомую окружность ξ . Таким образом, исходная задача сводится к следующей, которая нами, по существу, уже решена. Даны две окружности Ω_1 и Ω_2 ; построить прямую, которая одновременно касается этих окружностей (см. § 29, задача 1).

Приведенный выше анализ подсказывает способ построения, который осуществлен на рисунке 86. Предлагаем читателю самостоятельно выполнить построение, сопровождая чертеж записью каждого шага построения.

При исследовании этой задачи можно воспользоваться следующими соображениями. Если существует окружность ξ , касающаяся объектов Ω_1 и Ω_2 и проходящая через точку A , то существует прямая

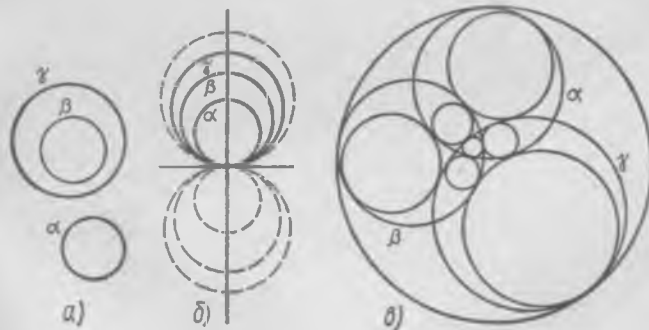


Рис. 90.

ξ' , касающаяся окружностей Ω_1' и Ω_2 , и наоборот. Более того, число различных окружностей ξ , удовлетворяющих условию задачи, в точности равно числу различных прямых, касающихся одновременно окружностей Ω_1' и Ω_2 . Из этих соображений следует, что исследование данной задачи сводится к исследованию задачи 1, § 29, которое нами уже проведено. Мы видим, что могут иметь место пять различных случаев, изображенных на рисунке 87, а—д. В случае а) задача не имеет ни одного решения, а в случаях б)—д) соответственно одно, два, три и четыре решения.

На этих рисунках искомые окружности изображены пунктиром. Выше мы оставили в стороне случаи, когда точка A принадлежит объектам Ω_1 и Ω_2 . Здесь возможны два существенно различных случая: а) $A \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ и б) $A \in \Omega_1$ и $A \notin \Omega_2$ или $A \notin \Omega_1$ и $A \in \Omega_2$. В случае а) если Ω_1 и Ω_2 пересекаются в двух точках, то задача не имеет ни одного решения, если же они касаются друг друга, то задача имеет бесчисленное множество решений (см. рис. 88).

Идея решения задачи в случае б) по существу ничем не отличается от решения задачи в общем случае, поэтому мы его опускаем.

4. **Задача Аполлония.** Выше, в п. 3, была сформулирована задача Аполлония в общем виде и рассмотрено решение шести предельных случаев этой задачи. Способ 11,2 в сочетании со способом 11,1 может быть применен для решения остальных четырех задач. Рамки настоящего пособия не позволяют дать полное решение этих задач, поэтому ограничимся схемой решения задачи для общего случая.

З а д а ч а 6. Даны три окружности α , β и γ . Построить окружность ξ , касающуюся данных трех окружностей.

Р е ш е н и е. Пусть ξ — искомая окружность с центром в точке O . Рассмотрим гомотегию с центром в точке O , которая окружность ξ переводит в окружность, проходящую через центр A окружности α . На рисунке 89 эта окружность обозначена через ξ' и изображена пунктиром. Окружность ξ' , очевидно, не касается окружностей β и γ , однако легко построить вспомогательные окружности β' и γ' , концентрические окружностям β и γ так, чтобы последние касались ξ' . Таким образом, поставленную задачу мы свели к задаче 5.

В зависимости от взаимного расположения данных окружностей задача может не иметь ни одного решения (рис. 90, а), иметь бесчисленное множество решений (рис. 90, б) или может иметь от одного до восьми решений. На рисунке 90, в изображен случай восьми решений.

ТЕОРИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ

§ 33. Построение отрезков, заданных простейшими формулами

1. **Функции от отрезков.** В теории геометрических построений особую роль играют такие функции, у которых аргументы и значения являются отрезками:

$$\bar{y} = F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n). \quad (1)$$

При этом предполагается, что если $\bar{x}_1' \cong \bar{x}_1$, $\bar{x}_2' \cong \bar{x}_2$, ..., то $F(\bar{x}_1', \bar{x}_2', \dots, \bar{x}_n') \cong F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$. Функции, обладающие этим свойством, будем называть *отрезочными*. При изучении отрезочных функций мы будем отождествлять все конгруэнтные друг другу отрезки и обозначать их одной буквой. При этом, очевидно, отпадает надобность в использовании знака конгруэнтности $\cong$. Соотношение $\bar{a} = \bar{b}$ будет означать, что мы рассматриваем один и тот же отрезок в указанном выше обобщенном смысле слова.

Если выбрана единица измерения отрезков $\bar{e}$, то отрезочной функции (1) будет соответствовать скалярная функция

$$y = F(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2)$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n, y$ — длины соответственно отрезков $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{y}$ при выбранной единице измерения. Функция (2), очевидно, однозначно определяет отрезочную функцию (1). Если вместо $\bar{e}$ в качестве единицы измерения взять другой отрезок $\bar{e}'$, длина которого при единице измерения $\bar{e}$ равна $\frac{1}{t}$, то функции (1), вообще говоря, будет соответствовать другая функция (2). В самом деле, в этом случае $x_1' = tx_1$, $x_2' = tx_2$, ..., $x_n' = tx_n$, где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — длины отрезков $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ при новом выборе единицы измерения. Из соотношения (1) имеем:

$$y' = tF\left(\frac{1}{t}x_1, \frac{1}{t}x_2, \dots, \frac{1}{t}x_n\right). \quad (3)$$

Для нас представляет особый интерес тот случай, когда при любом выборе единицы измерения функции (1) будет соответствовать одна и та же функция (2), так как в этом случае имеет место обратное утверждение: функция (2) независимо от выбора единицы измерения однозначно определяет отрезочную функцию (1). Такие скалярные функции условно будем называть *конструктивными функциями* или,

коротко, k -функциями. Точнее, функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенная в некоторой области положительных значений своих аргументов и принимающая в этой области положительные значения, называется k -функцией, если соотношение (2), где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — длины данных отрезков $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$, принадлежащие области определения функции, определяет, независимо от единицы измерения, длину одного и того же отрезка. Имеет место следующая теорема, доказательство которой предоставляем читателю.

Теорема [33.1]. Пусть функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена в некоторой области положительных значений своих аргументов и в этой области принимает положительные значения. Для того чтобы $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ была k -функцией, необходимо и достаточно, чтобы она была однородной функцией первой степени, т. е. при любом t выполнялось условие: $F(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = tF(x_1, x_2, \dots, x_n)$. $\square$

Пользуясь предыдущей теоремой, легко показать, что если $F(y_1, y_2, \dots, y_n)$ — однородная функция 1 и если длины отрезков $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ при некотором выборе единицы измерения удовлетворяют условию

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (4)$$

то длины тех же отрезков удовлетворяют аналогичному условию при любом другом выборе единицы измерения. В этом случае соотношение (4) будем называть k -уравнением и вместо этого соотношения будем пользоваться также записью:

$$F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = 0. \quad (5)$$

2. Построение отрезков, заданных простейшими функциями. Одной из важнейших задач является построение циркулем и линейкой отрезков, заданных теми или иными простейшими функциями. Прежде всего напомним читателю, что из курса средней школы нам известны построения следующих простых выражений.

Построение [33.1]: $\bar{x} = \bar{a} \pm \bar{b} \pm \bar{c} \pm \dots \pm \bar{f}$.

Построение [33.2]: $\bar{x} = \frac{\bar{a}\bar{b}}{\bar{c}}$.

Построение [33.3]: $\bar{x} = \sqrt{\bar{a}\bar{b}}$.

Построение [33.4]: $\bar{x} = \sqrt{\bar{a}^2 + \bar{b}^2}$.

Построение [33.5]: $\bar{x} = \sqrt{\bar{a}^2 - \bar{b}^2}$, где $\bar{a} > \bar{b}$.

Здесь $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ — данные отрезки. Заметим, что все эти выражения удовлетворяют условиям теоремы [33.1], так как их правые части являются однородными функциями первой степени.

¹ См. сноску ¹ на странице 83.

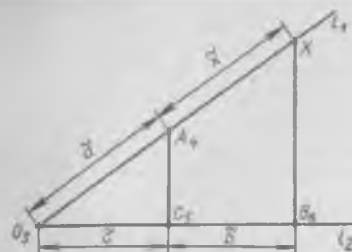


Рис. 91.

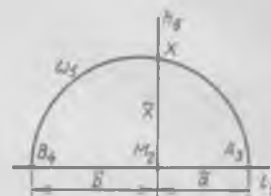


Рис. 92.

Построения [33.1], [33.4] и [33.5] очевидны, а построения [33.2] и [33.3] выполнены на рисунках 91 и 92.

Приведенные выше построения позволяют строить отрезки, заданные более сложными функциями, допускающими построения.

Пример 1. Построить отрезок, заданный функцией

$$\bar{x} = \frac{\bar{a}^2 + \bar{b}^2}{\bar{c}^2 + \sqrt{\bar{c}\bar{d}}}. \quad (6)$$

Решение. Сначала, пользуясь построениями [33.3] и [33.4], строим отрезок $\bar{z} = \sqrt{\bar{c}^2 + \sqrt{\bar{c}\bar{d}}} = \sqrt{\bar{c}^2 + \bar{y}^2}$, где $\bar{y} = \sqrt{\bar{c}\bar{d}}$. Таким образом, соотношение (6) сводится к следующему выражению:

$$\bar{x} = \frac{\bar{u}\bar{a}}{\bar{z}} + \frac{\bar{v}\bar{b}}{\bar{z}},$$

где $\bar{u} = \frac{\bar{a}^2}{\bar{z}}$, $\bar{v} = \frac{\bar{b}^2}{\bar{z}}$. Отрезки $\bar{u}$ и $\bar{v}$ легко построить на основе по-

строения [33.2]. Имея эти отрезки, строим отрезок $\bar{x}$ на основе построений [33.2] и [33.1].

3. Произведение отрезка на действительное число. Рассмотрим скалярную функцию $y = kx$, $x > 0$, где k — положительное число. Согласно теореме [33.1] эта функция является функцией, допускающей построение, поэтому ей соответствует отрезочная функция $\bar{y} = k\bar{x}$. Отрезок $\bar{y}$ называется произведением числа k на отрезок $\bar{x}$. Одной из принципиальных проблем настоящей теории является построение отрезка $\bar{y}$. Этот вопрос будет рассмотрен в следующем параграфе. Здесь же отметим, что для некоторых значений k построение отрезка $\bar{y}$ по данному отрезку легко выполнимо.

Построение [33.6]: $\bar{x} = \frac{p}{q}\bar{a}$, где p и q — натуральные числа.

Построение [33.7]: $\bar{x} = \sqrt{n}\bar{a}$, где n — натуральное число.

Построение [33.8]: $\bar{x} = \sqrt{\frac{p}{q}} \bar{a}$, где p и q — натуральные числа.

Для выполнения построения [33.6] представим $\bar{x}$ в виде $\bar{x} = \frac{(pa)}{q}$, и задача сведется к построению отрезка pa (построение [33.1]) и делению этого отрезка на q конгруэнтных частей. Построения [33.7] и [33.8] можно осуществить при помощи построения [33.3], если $\bar{x}$ представить соответственно в виде $\sqrt{(pa) \bar{a}}$ или $\sqrt{(p \bar{a}) \frac{a}{q}}$.

4. Построение отрезков, заданных неоднородными функциями. При изучении некоторых вопросов мы приходим к соотношениям, в которых длина искомого отрезка выражается через длины $x_1, x_2, \dots, x_n$ данных отрезков при помощи неоднородных функций. Такой функции, как следует из теоремы [33.1], не соответствует никакая отрезочная функция, так как при разных единицах измерения одним и тем же отрезкам согласно (3) будут соответствовать разные отрезки¹. Несмотря на это, можно поставить следующую задачу на построение:

Дана единица измерения $\bar{e}$ и функция (2), которая определена в некоторой области положительных значений своих аргументов и принимает в этой области положительные значения. При выбранной единице $\bar{e}$ построить отрезок, длина y которого равна $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$, где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — длины данных отрезков. В следующем параграфе будет показано, что эта задача разрешима циркулем и линейкой далеко не для всякой функции F . Однако для функций, которые выражаются в квадратных радикалах, построение всегда выполнимо. Рассмотрим пример, поясняющий идею построения.

Пример 2. Дана единица измерения $\bar{e}$. Построить отрезок y , длина y которого выражается через длины a_1, a_2, a_3, a_4 данных отрезков так:

$$y = a_1 a_2 a_3 + 2a_4. \quad (7)$$

Решение. Пусть $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ — данные отрезки, а $\bar{y}$ — искомый отрезок. Напомним читателю, что по условиям задачи дан еще один отрезок $\bar{e}$ — единица измерения. Идея решения задачи заключается в следующем: из данных отрезков составляется вспомогательное отрезочное выражение

$$\bar{p} = \Phi(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \bar{e}) \quad (8)$$

с таким расчетом, чтобы: а) соответствующая скалярная функция $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ удовлетворяла условиям теоремы [33.1];

¹ Напомним читателю, что при решении подобных задач конгруэнтные отрезки отождествляются.

б) при $x_1 = a_1, x_2 = a_2, x_3 = a_3, x_4 = a_4, x_5 = 1$ выражение $\Phi(a_1, a_2, a_3, a_4, 1)$ совпало с выражением (7).

Из условия б) следует, что длина отрезка $\bar{p}$ при выбранной единице $\bar{e}$ равна длине y искомого отрезка y , поэтому $\bar{p} = \bar{y}$. Таким образом, задача сводится к построению отрезка $\bar{p}$, заданного формулой (8), т. е. к построениям, описанным в предыдущих пунктах.

Для составления отрезочного соотношения (8) достаточно взять правую часть соотношения (7), длины отрезков формально заменить самими отрезками и, пользуясь отрезком $\bar{e}$, «скорректировать» каждый член этого выражения так, чтобы получить однородное выражение первой степени. В данном конкретном случае можно поступить так:

$$\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 + 2\bar{a}_4 \Rightarrow \frac{\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3}{\bar{e} \bar{e}} + 2\bar{a}_4.$$

Таким образом, для данной задачи выражение (8) имеет вид:

$$\bar{p} = \frac{\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3}{\bar{e} \bar{e}} + 2\bar{a}_4. \text{ Это выражение легко строится при помощи по-}$$

строений [33.2] и [33.1], если заметить, что $\bar{p} = \frac{\bar{a}_3}{\bar{e}} + 2\bar{a}_4$, где $\bar{q} =$

$$\frac{\bar{a}_1 \bar{a}_2}{\bar{e}}.$$

Пример 3. Дана единица измерения $\bar{e}$. Построить отрезок, длина которого выражается через длины отрезков $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \bar{a}_5$ формулой: $y = \sqrt{\bar{a}_1 \bar{a}_2} + \sqrt{\bar{a}_3 \bar{a}_4 \bar{a}_5}$.

Решение. В данном случае вспомогательное «отрезочное» соотношение (8) имеет вид: $\bar{p} = \sqrt{\bar{a}_1 \bar{a}_2} + \sqrt{\frac{\bar{a}_3 \bar{a}_4 \bar{a}_5}{\bar{e}}}$. Предлагаем читателю самостоятельно построить это выражение, пользуясь построениями [33.2], [33.3] и [33.1].

5. Системы координат; простейшие задачи в координатах на прямой. При алгебраическом анализе задачи иногда бывает полезно воспользоваться понятием координат точек. При этом возникает потребность строить циркулем и линейкой точки, координаты которых выражаются через координаты построенных точек с помощью известных функций. Для решения подобного рода задач оказывается удобным пользоваться такими системами координат, которые геометрически связаны с данными точками.

Пусть OE_1E_2 — прямоугольная декартова система координат¹, а Ω — некоторая совокупность построенных точек. Систему координат

¹ Здесь OE_1E_2 — система координат O_{IJ} , где точки E_1 и E_2 определены из соотношений: $\overline{OE_1} = i, \overline{OE_2} = j$.

OE_1E_2 будем называть присоединенной к совокупности Ω , если точки O, E_1, E_2 и прямые OE_1 и OE_2 можно построить исходя из совокупности Ω . Легко видеть, что если $O, E_1 \in \Omega$, то система OE_1E_2 будет присоединенной к данной совокупности точек, так как остальные элементы данной системы легко строятся циркулем и линейкой. Из аксиомы К1 следует, что если сформулирована некоторая задача на построение, то на основной плоскости существует хотя бы одна система координат, присоединенная к заданной совокупности точек.

При построении точек по их координатам мы будем пользоваться системами координат, присоединенными к данной совокупности точек. При этом важную роль будет играть следующая лемма.

Лемма [33.2]. На прямой даны две построенные точки O и E . Если в системе $O, \overline{OE}$ даны построенные точки $M(x)$ и $N(y)$ своими координатами, где $N \neq O$, то, пользуясь циркулем и линейкой, можно построить точки с координатами

$$X_1(x+y), X_2(x-y), X_3(xy), X_4\left(\frac{x}{y}\right).$$

Доказательство. Если $M = O$, то $x = 0$ и задача решается тривиально, так как $X_1 = N, X_2 = N',$ где N' — точка, симметричная N относительно $O, X_3 = X_4 = O$. Поэтому рассмотрим случай, когда $M \neq O$. Пусть $\overline{OM} = \bar{m}, \overline{ON} = \bar{n}$ и $\overline{OE} = \bar{e}$. Возможны четыре подслучая:

- 1) $x > 0, y > 0$; 2) $x > 0, y < 0$; 3) $x < 0, y > 0$;
- 4) $x < 0, y < 0$.

Рассмотрим каждый случай в отдельности.

1) $x > 0$ и $y > 0$. Пользуясь приемом, изложенным в предыдущем пункте, строим отрезки $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ и $\bar{s}$, длины которых соответственно равны $p = x + y, q = (x - y)$ (при $x \neq y$), $r = xy, s = \frac{x}{y}$. При этом

за единичный отрезок принимаем отрезок $\overline{OE'} = \bar{e}$. Далее строим точки

$$X_1: \overline{OX}_1 = \bar{p}, X_1 \in [OE];$$

$$X_2: \overline{OX}_2 = \bar{q}, X_2 \in [OE], \text{ если } \bar{m} > \bar{n}, \text{ и } X_2 \in [OE'], \text{ если } \bar{n} > \bar{m}.$$

Здесь E' — точка с координатой -1 . При $\bar{n} = \bar{m}$ $X_2 = O$;

$$X_3: \overline{OX}_3 = \bar{r}, X_3 \in [OE];$$

$$X_4: \overline{OX}_4 = \bar{s}, X_4 \in [OE].$$

2) $x > 0, y < 0$. Построим точку N' , симметричную N относительно O , тогда координата N' равна z , где $z = -y$. Пользуясь предыдущим, исходя из точек $M(x)$ и $N'(z)$, построим точки $Y_1(x+z), Y_2(x-z), Y_3(xz), Y_4\left(\frac{x}{z}\right)$.

Таким образом, мы построили точки $Y_1(x-y), Y_2(x+y), Y_3(-xy), Y_4\left(-\frac{x}{y}\right)$. Искомые точками будут: $X_1 = Y_1, X_2 = Y_1, X_3 = Y_3, X_4 = Y_3$, где Y_3 и Y_4 — точки, симметричные Y_1 и Y_2 относительно начала координат.

По аналогии с этим предлагаем читателю, базируясь на построении для случая 1), рассмотреть остальные два случая.

§ 34. Алгебраический метод решения задач на построение

1. Отрезочные квадратные уравнения. Если $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — однородная функция от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, определенная в области положительных значений своих аргументов, а $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ — длины данных отрезков $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{n-1}$, то отрезок x , длина которого определяется уравнением

$$F(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x) = 0, \quad (1)$$

согласно п. 1, § 33, не зависит от выбора единицы измерения, поэтому соотношению (1) соответствует отрезочное уравнение

$$F(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{n-1}, \bar{x}) = 0. \quad (2)$$

Если левая часть уравнения (1) является однородным многочленом второй степени, то соответствующее отрезочное уравнение (2) называется квадратным отрезочным уравнением. Решение задач на построение чаще всего приводит к квадратным отрезочным уравнениям, поэтому ниже рассмотрим вопрос о построении корней этих уравнений.

2. Исследование и построение корней квадратного уравнения. Любое квадратное отрезочное уравнение приводится к виду:

$$\bar{x}^2 + e_1 \bar{a} \bar{x} + e_2 \bar{b}^2 = 0, \quad (3)$$

где e_1 и e_2 могут принимать значения 0, 1 и -1 . Очевидно, интерес представляет только тот случай, когда $e_2 \neq 0$. Если $e_1 = 0$, то уравнение принимает вид: $\bar{x}^2 + e_2 \bar{b}^2 = 0$. Это уравнение не имеет решения, если $e_2 = 1$, и имеет одно решение ($\bar{x} = \bar{b}$), если $e_2 = -1$. Рассмотрим все возможные случаи при $e_1 \neq 0$ и $e_2 \neq 0$. В зависимости от различных комбинаций значений e_1 и e_2 получаем четыре различных вида отрезочных уравнений, рассмотренных ниже.

1°. $e_1 = 1, e_2 = 1$. Легко видеть, что в этом случае уравнение (3) не имеет решения.

2°. $e_1 = -1, e_2 = 1$. Уравнение (3) принимает вид:

$$\bar{x}^2 - a \bar{x} + b^2 = 0. \quad (4)$$

Скалярное уравнение, соответствующее данному уравнению, имеет вид $x^2 - ax + b^2 = 0$, где a и b — длины отрезков $\bar{a}$ и $\bar{b}$, поэтому

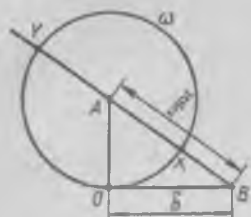


Рис. 93.

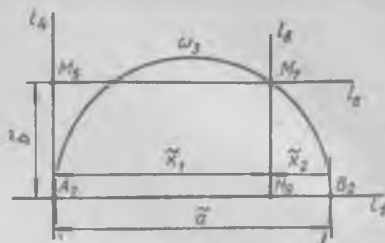


Рис. 94.

$a > 0$ и $b > 0$. Это уравнение имеет следующие корни:

$$x_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}, \quad x_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}.$$

Каждому положительному корню соответствует решение уравнения (4). Возможны следующие случаи:

а) $\bar{a} > 2\bar{b}$. Так как в этом случае $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, то уравнение (4) имеет два решения.

б) $\bar{a} = 2\bar{b}$. В этом случае $x_1 = x_2 > 0$, поэтому уравнение (4) имеет один корень $\frac{a}{2}$.

в) $\bar{a} < 2\bar{b}$. В этом случае x_1 и x_2 являются комплексными числами, поэтому уравнение (4) не имеет ни одного решения.

Существуют различные способы построения корней уравнения (4) в случае а). Рассмотрим два из них.

Первый способ. Построим прямоугольный треугольник OAB с катетом $OB = \bar{b}$ и гипотенузой $AB = \frac{\bar{a}}{2}$ (рис. 93). Построим, далее, окружность $\omega = A(\bar{AO})$. Обозначим через X и Y точки пересечения окружности $A(\bar{AO})$ с прямой AB . Так как $A\bar{X}B$, то, как легко видеть, $B\bar{Y} = \bar{BA} + A\bar{Y} = \frac{\bar{a}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\bar{a}}{2}\right)^2 - \bar{b}^2} = \bar{x}_1$, а $B\bar{X} = \bar{AB} - A\bar{X} = \frac{\bar{a}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\bar{a}}{2}\right)^2 - \bar{b}^2} = \bar{x}_2$.

Второй способ. Построение осуществлено на рисунке 94. Используя теорему Виета, легко показать, что отрезки A_2H_2 и H_2B_2 будут соответствовать корням $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ уравнения (4). В самом деле, $A_2H_2 + H_2B_2 = \bar{a}$, а $A_2H_2 \cdot H_2B_2 = \bar{b}^2$. На рисунке 94 хорошо интерпретируются случаи а), б) и в), рассмотренные выше. В самом деле,

если $\bar{a} > 2\bar{b}$, т. е. $\bar{b} < \frac{\bar{a}}{2}$, то прямая l_3 пересекает окружность ω_3 , поэтому $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ и уравнение (4) имеет два различных корня; если, $\bar{a} = 2\bar{b}$, то l_3 касается окружности ω_3 и $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, если же $\bar{a} < 2\bar{b}$, то l_3 не пересекает ω_3 и уравнение (4) не имеет корней.

3°. $e_1 = 1$, $e_2 = -1$. Уравнение (4) принимает вид:

$$\bar{x}^3 + a\bar{x} - b^3 = 0. \quad (5)$$

Соответствующее скалярное уравнение в данном случае запишется так: $x^2 + ax - b^3 = 0$ (где $a > 0$ и $b > 0$). Это уравнение имеет два корня:

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^3}, \quad x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^3},$$

из которых $x_1 > 0$ и $x_2 < 0$, поэтому уравнение (5) имеет одно решение, соответствующее корню x_1 . Для построения этого корня рассмотрим тот же рисунок 93, где положим: $\bar{OA} = \frac{\bar{a}}{2}$, $\bar{OB} = \bar{b}$. Тогда $B\bar{X} =$

$$= \bar{AB} - \bar{AO} = -\frac{\bar{a}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\bar{a}}{2}\right)^2 + \bar{b}^3} = \bar{x}_1.$$

4°. $e_1 = -1$, $e_2 = -1$. Уравнение (3) принимает вид:

$$\bar{x}^3 - a\bar{x} - \bar{b}^3 = 0, \quad (6)$$

а соответствующее скалярное уравнение $x^2 - ax - b^3 = 0$, где $a > 0$ и $b > 0$, будет иметь корни:

$$x_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^3} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^3}. \quad (7)$$

Очевидно, $x_1 > 0$ и $x_2 < 0$, поэтому уравнение (6) имеет один корень $\bar{x}_1$. Построение отрезка $\bar{x}_1$ осуществляется по тому же плану, что и построение корня уравнения (5) (см. рис. 93). Однако в данном случае искомый отрезок $\bar{x}_1 = B\bar{Y}$, так как

$$B\bar{Y} = A\bar{Y} + \bar{AB} = \frac{\bar{a}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\bar{a}}{2}\right)^2 + \bar{b}^3}.$$

3. Алгебраический метод решения задач на построение. Сущность метода заключается в следующем: решение задачи сводят к построению некоторого отрезка $\bar{x}$, который, пользуясь условиями задачи, предварительно выражают через известные отрезки при помощи отрезочного соотношения. Рассмотрим пример.

З а д а ч а 1. Дан отрезок $\bar{a}$, окружность ω и точка A на этой окружности. Вписать в данную окружность прямоугольник $AXYZ$ так, чтобы его периметр был равен $2\bar{a}$.

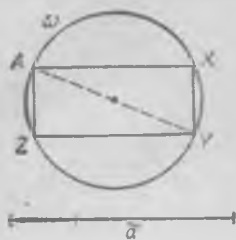


Рис. 95.

Решение. Очевидно, точки A и Y являются диаметрально противоположными точками данной окружности (рис. 95). Искомый отрезком x будем считать сторону AX . Предположим, что выбрана некоторая единица измерения длин отрезков. Обозначим через x длину искомого отрезка, через a — длину данного отрезка, а через d — диаметр данной окружности ω . При принятых обозначениях, пользуясь теоремой Пифагора для $\triangle AXY$, получаем: $x^2 + (a - x)^2 = d^2$, или

$$x^2 - ax + \frac{a^2 - d^2}{2} = 0. \quad (8)$$

Из геометрических соображений следует, что $a > d$, поэтому отрезочное уравнение, соответствующее уравнению (8), запишется так:

$$\bar{x}^2 - \bar{a}\bar{x} + \bar{p}^2 = 0, \quad (9)$$

где $\bar{p}$ — отрезок, удовлетворяющий условию: $\bar{p}^2 = \frac{a^2 - d^2}{2}$. Легко видеть, что корни $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ уравнения (9) являются сторонами искомого четырехугольника, так как по теореме Виета $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \bar{a}$.

Исследование задачи сводится к исследованию уравнения (9). В силу 2°, п. 2, возможны следующие три случая.

а) $\bar{a} > 2\bar{p}$. Это неравенство эквивалентно следующему: $\sqrt{2d} > \bar{a}$. В этом случае имеются два различных корня, которые определяют стороны искомого прямоугольника (не квадрата!).

б) $\bar{a} = 2\bar{p}$, или $\bar{a} = \sqrt{2d}$.

В этом случае уравнение (9) имеет один корень, точнее, два равных корня, которые определяют сторону квадрата, вписанного в окружность.

в) $\bar{a} < 2\bar{p}$, или $\bar{a} > \sqrt{2d}$.

В этом случае уравнение (9) не имеет корней, поэтому задача не имеет решения.

В случаях а) и б) после построения корней уравнения (9) построение искомого прямоугольника выполняется тривиально. Заметим, что в случае а) задача имеет два решения, а в случае б) — одно. Для получения второго решения на рисунке 95 достаточно построить фигуру, симметричную прямоугольнику $AXYZ$ относительно прямой AY .

Интересно отметить, что если несколько видоизменить условия предыдущей задачи, а именно потребовать, чтобы данный отрезок был бы не суммой двух смежных сторон, а их разностью, то, решая эту задачу тем же методом, мы приходим к тому же уравнению (8). Однако



Рис. 96.

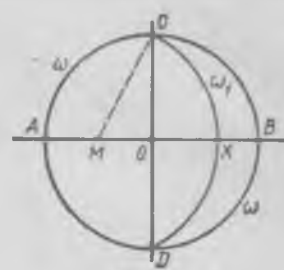


Рис. 97.

в этом случае $\bar{a} < \bar{d}$, поэтому отрезочное уравнение, соответствующее этому уравнению, будет иметь вид (6), отличный от уравнения (9).

4. Построение некоторых правильных многоугольников. Из школьного курса геометрии известны способы построения правильных трех-, четырех- и шестиугольников. Исходя из этих многоугольников, путем деления пополам соответствующих дуг окружности, описанной около многоугольника, можно построить правильные многоугольники с числом вершин 8, 16, 32, ... и 12, 24, 48, ... Рассмотрим способ построения правильного десятиугольника.

З а д а ч а 2. Построить сторону правильного десятиугольника, вписанного в данную окружность радиуса r .

Решение. Допустим, что $\bar{x} = \bar{AB}$ — сторона правильного десятиугольника, вписанного в окружность $O(r)$ (см. рис. 96). Очевидно, $\angle AOB = 36^\circ$ и $\triangle OAB$ — равнобедренный, поэтому $\angle OAB = \angle OBA = 72^\circ$. Отсюда следует, что если BM — биссектриса $\angle OBA$, то $\triangle ABM \sim \triangle AOB$, поэтому $|AB| : |AM| = |BO| : |AB|$, откуда $\frac{x}{r-x} = \frac{r}{x}$, или $x^2 + xr - r^2 = 0$. Этому соотношению соответствует отрезочное уравнение

$$\bar{x}^2 + \bar{r}\bar{x} - \bar{r}^2 = 0. \quad (10)$$

Согласно 3° п. 2 это уравнение имеет один корень, построение которого указано там же.

В заключение укажем простой и оригинальный способ, позволяющий одновременно построить стороны десяти- и пятиугольников, вписанных в данную окружность ω . Пусть $\bar{AB}$ и $\bar{CD}$ — взаимно перпендикулярные диаметры окружности ω , M — середина отрезка $\bar{AO}$ (см. рис. 97), а окружность $\omega_1 = M(\bar{MC})$ пересекает диаметр $\bar{AB}$ в точке X . Легко видеть, что

$$\bar{OX} \cong \bar{MX} - \bar{MO} \cong \bar{MC} - \frac{\bar{r}}{2} \cong -\frac{\bar{r}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\bar{r}}{2}\right)^2 + \bar{r}^2},$$

поэтому отрезок $O\bar{X}$ является решением уравнения (10), т. е. стороной правильного десятиугольника, вписанного в окружность ω .

Предлагаем читателю самостоятельно доказать, что $\bar{X}\bar{C}$ — сторона правильного пятиугольника, вписанного в окружность.

§ 35. Разрешимость задач на построение циркулем и линейкой

1. Постановка проблемы. Выше было отмечено, что одной из важных проблем в данной теории является установление критерия, позволяющего ответить на вопрос: можно ли циркулем и линейкой построить тот или иной геометрический объект, исходя из данных объектов. При этом существенно отметить, что задача о разрешимости ставится только в том случае, когда фигура F_0 , которую следует построить, существует как некоторый геометрический объект. Если, например, поставлена задача: «Даны отрезки $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, удовлетворяющие условию $\bar{a} + \bar{b} < \bar{c}$. Построить треугольник XYZ так, чтобы $\bar{X}\bar{Y} = \bar{a}$, $\bar{Y}\bar{Z} = \bar{b}$, $\bar{Z}\bar{X} = \bar{c}$ », то легко видеть, что эта задача вообще неразрешима, так как такого треугольника не существует. Рассмотрим другой пример: «Даны пересекающиеся прямые a и b , произвольная точка P и отрезок $\bar{r}$. Построить прямую, проходящую через точку P так, чтобы прямые a и b отсекали на ней отрезок, конгруэнтный отрезку $\bar{r}$ ». Используя несложные геометрические соображения, легко прийти к выводу, что прямая, удовлетворяющая условиям задачи, существует, однако можно показать, что, несмотря на кажущуюся простоту, эта задача не разрешима циркулем и линейкой¹.

Метод, которым мы будем пользоваться при решении указанной выше проблемы, заключается в том, что задача построения геометрического объекта переводится на язык алгебры, и проблема разрешимости задачи формулируется в алгебраических терминах. Это позволяет, пользуясь несложными понятиями теории числовых полей, решить соответствующую алгебраическую задачу, которая по существу приводит к решению указанной выше проблемы конструктивной геометрии.

2. Вспомогательные предложения из курса алгебры. Для изложения теории разрешимости конструктивных задач на построение нам необходимы некоторые сведения из курса алгебры. Мы предполагаем, что читателю известны основные положения теории числовых полей: определения числового поля, подполя, конечного расширения поля, степени конечного расширения и простейшие предложения, связанные с этими понятиями. Мы предполагаем также известными основы теории многочленов от одной переменной. Все эти сведения можно найти в учебниках или руководствах по алгебре². Для полноты

изложения приведем ряд определений и теорем, на которых основана теория разрешимости конструктивных задач, изложенная ниже.

Обозначим через C , R и Q соответственно поля комплексных, действительных и рациональных чисел. Под полем мы будем понимать любое числовое поле, т. е. поле комплексных чисел C , а также любое его подполе, в частности R и Q .

Пусть L — произвольное поле, а z_0 — фиксированное число $z_0 \in C \setminus L$. Наименьшее подполе поля C , содержащее L и z_0 , называется простым расширением поля L и обозначается символом $L[z_0]$. Если $z_0 \in L$ и z_0 не является полным квадратом в поле L , т. е. если $\sqrt{z_0} \in C \setminus L$, то поле $L[\sqrt{z_0}]$ называется квадратичным расширением поля L . Имеет место предложение.

1°. Квадратичное расширение $L[\sqrt{z_0}]$ поля L представляет собой множество всех чисел вида $a + b\sqrt{z_0}$, где a и b — произвольные числа поля L .

Поле L^* называется допустимым расширением поля L , если оно получается из L в результате конечной цепочки квадратичных расширений, т. е. если существуют такие квадратичные расширения $L_1, L_2, \dots, L_n$, что

$$L = L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n = L^*, \quad (1)$$

где $L_{k+1} = L_k[\sqrt{z_k}]$, $z_k \in L_k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Пусть L — произвольное подполе поля действительных чисел R , а $z_0 \in L$ — действительное положительное число, не являющееся полным квадратом в поле L . В этом случае $L[\sqrt{z_0}]$ будем называть квадратичным расширением поля L в области действительных чисел. В соответствии с этим допустимым расширением поля L в области действительных чисел будем называть такое допустимое расширение, которое осуществляется при помощи только квадратичных расширений в области действительных чисел. Легко видеть, что любое допустимое расширение в области действительных чисел есть подполе поля действительных чисел.

Для квадратичных расширений в области действительных чисел имеет место свойство, аналогичное свойству 1°.

2°. Квадратичное расширение $L[\sqrt{z_0}]$ поля $L \subset R$ в области действительных чисел представляет собой множество всех действительных чисел вида $a + b\sqrt{z_0}$, где a и b — два произвольных числа поля L .

Сформулируем две теоремы, которые, как мы увидим ниже, существенно используются при решении проблемы разрешимости циркулем и линейкой конструктивных задач на построение.

Теорема [35.1]. Если $F(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ — неприводимый многочлен третьей степени, коэффициенты p , q и r которого принадлежат полю L , то ни один из его корней не принадлежит допустимому расширению поля L .

¹ См. [1], § 37.

² См., например, [62], т. II, статья «Кольцо многочленов и поле рациональных функций».

Теорема [35.2]. Если уравнение $x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_{n-1}x + p_n = 0$ имеет только целые коэффициенты, то каждый рациональный корень этого уравнения является целым числом, на которое свободный член уравнения делится без остатка.

3. Числовое поле, соответствующее данной системе точек. Пусть в системе координат $A_0A_1E_2$, присоединенной к конечной совокупности точек Ω , точки этой совокупности имеют координаты $A_0(0, 0)$, $A_1(1, 0)$, $A_2(\alpha_2, \beta_2)$, ..., $A_k(\alpha_k, \beta_k)$, где $k \geq 2$. Тогда наименьшее подполе поля R действительных чисел, содержащее числа $0, 1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_k, \beta_k$, будем называть полем, соответствующим совокупности Ω в системе $A_0A_1E_2$, и обозначать через L_Ω . Имеет место предложение.

Лемма [35.3]. Пусть $A_0A_1E_2$ — система координат, присоединенная к совокупности построенных точек $A_0, A_1, \dots, A_k$, где $k \geq 2$. Если L_Ω — поле, соответствующее этой совокупности в данной системе координат, то любая точка $M(x, y)$ с координатами, принадлежащими этому полю, может быть построена циркулем и линейкой.

Доказательство. На оси A_0A_1 в системе A_0, A_1 построим точки $P_2(\alpha_2), Q_2(\beta_2), P_3(\alpha_3), Q_3(\beta_3), \dots, P_k(\alpha_k), Q_k(\beta_k)$. Они могут быть легко построены циркулем и линейкой, так как точки $A_0, A_1, \dots, A_k$ являются построенными. Так как $x \in L_\Omega$, то, пользуясь леммой [33.2], легко может быть построена точка $X(x)$. Аналогично на оси A_0E_2 в системе A_0, A_0E_2 строим точку $Y(y)$, а далее — исковую точку $M(x, y)$. ■

Лемма [35.4]. Дана совокупность точек Ω и присоединенная к ней система координат OE_1E_2 . Если L_Ω — поле, соответствующее данной совокупности точек, а $L_\Omega[V\sqrt{a_0}]$ — квадратичное расширение поля L_Ω в области действительных чисел, то любая точка $M(x, y)$ с координатами из поля $L_\Omega[V\sqrt{a_0}]$ может быть построена с помощью циркуля и линейки.

Доказательство. Если $x \in L_\Omega$ и $y \in L_\Omega$, то эта лемма сводится к предыдущей, поэтому представляет интерес только тот случай, когда $x, y \notin L_\Omega$. Если мы покажем, что на осях координат OE_1 и OE_2 можно построить соответственно точки X и Y с координатами x и y , то по аналогии с доказательством предыдущей леммы легко построить точку M . Согласно свойству 2° п. 2 число x может быть представлено в виде $x = a + b\sqrt{a_0}$, где $a, b \in L_\Omega$. Так как $x \notin L_\Omega$, то $b \neq 0$. Согласно предыдущей лемме на оси OE_1 построим точки $A(a), B(b)$ и $A_0(a_0)$. Далее построим точку C_0 с координатой $\sqrt{a_0}$. Эту точку можно получить при помощи построения [33.3]. На рисунке 98 выполнено построение. Здесь $\widehat{OM}_1 = \widehat{OE_1}$, ω_1 — окружность, построенная на отрезке A_0M_1 как на диаметре, а $\omega_2 = O(\widehat{OM}_2)$. Имея точки $A(a), B(b), C_0(\sqrt{a_0})$, пользуясь леммой [33.2], легко построить точку $X(x)$. Точка $Y(y)$ строится аналогично. ■

В заключение рассмотрим еще одну лемму, необходимую для дальнейшего изложения.

Лемма [35.5]. Пусть в системе координат OE_1E_2 , присоединенной к данной совокупности точек Ω , даны уравнения прямой AB и окружности $\omega = C(\widehat{CD})$, где $A, B, C, D \in \Omega$. Тогда все коэффициенты этих уравнений принадлежат полю L_Ω , присоединенному к совокупности Ω .

Доказательство. Пусть в данной системе координат известны координаты точек: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ и $D(x_4, y_4)$. По определению координаты всех этих точек принадлежат полю L_Ω . Составим уравнение прямой AB и окружности ω .

$$(AB) \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\omega) \quad (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2.$$

Если мы распишем определитель первого соотношения и раскроем скобки, входящие во второе соотношение, то после приведения подобных членов получим выражения коэффициентов при переменных x, y и их квадратах, откуда непосредственно будет следовать утверждение леммы. ■

4. Основная теорема. Прежде чем сформулировать и доказать основную теорему, которая отвечает на вопрос о разрешимости той или иной конкретной задачи на построение, сделаем ряд предварительных замечаний с целью уточнить постановку изучаемого вопроса.

В § 28, п. 2 было показано, что при решении задачи на построение предполагается, что дано множество Ω_0 , состоящее из основных объектов $F_1, F_2, \dots, F_n$, и требуется, пользуясь постулатами построения, добавляя к множеству Ω_0 шаг за шагом новые построенные основные объекты, получить конечное множество Ω основных объектов, содержащее искомую фигуру F_0 . Так как каждый основной объект может быть задан конечным множеством точек (например, прямая задается двумя точками, а окружность — точкой и центром или тремя ее точками), то каждую конструктивную задачу на построение в конечном итоге можно сформулировать так: дано конечное множество построенных точек Ω_0 , удовлетворяющих аксиомам $K1$ и $K2$, и, кроме того, дана вполне определенная непостроенная точка X , которая определяется условиями задачи. Требуется, пользуясь постулатами $K3-K7$, добавляя к совокупности Ω_0 шаг за шагом по одной точке, через конечное число шагов получить новое множество $\Omega^* \supset \Omega_0$, содержащее X . Для сокращения записи это предложение кратко будем выражать следующими словами: «Решить задачу (Ω_0, X) ». Введем следующее определение: задача (Ω_0, X) называется разрешимой с помощью циркуля и линейки, если, пользуясь аксиомами $K3-K7$, можно получить конечное множество совокупностей построенных

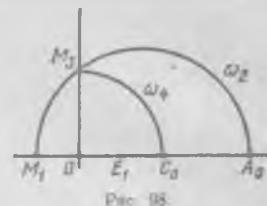


Рис. 98.

точек $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n = \Omega^*$, удовлетворяющих условиям:

- 1) $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots \subset \Omega_{n-1} \subset \Omega_n = \Omega^*$,
- 2) $\Omega_{i+1} \setminus \Omega_i$ есть точка, $i = 0, 1, \dots, n-1$
- 3) $X \in \Omega^*$.

Теперь мы в состоянии корректно сформулировать основную проблему теории построений с помощью циркуля и линейки: сформулирована задача $\{\Omega_0, X\}$; найти критерий, позволяющий установить разрешимость этой задачи с помощью циркуля и линейки.

Теорема [35.6]. Дана конечная совокупность точек Ω_0 и присоединенная к ней система координат OE_1E_2 . Обозначим через L_0 поле, соответствующее совокупности Ω_0 в системе OE_1E_2 .

Для того чтобы точку $M^*(x, y)$ можно было построить циркулем и линейкой, исходя из совокупности Ω_0 , необходимо и достаточно, чтобы координаты точки M^* принадлежали полю L_0 или некоторому допустимому расширению этого поля в области действительных чисел.

Доказательство необходимости условия. Рассмотрим какое-либо произвольное, но совершенно конкретное построение точки $M^*(x, y)$. Пусть $A_0, B_0, \dots, D_0$ — данная совокупность точек Ω_0 , а $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ — вспомогательные точки построения. Обозначим через Ω_k совокупность всех построенных точек, которые получаются после k -го шага построения, т. е. $\Omega_k = \{A_0, B_0, \dots, D_0, M_1, M_2, \dots, M_k\}$. Таким образом, в процессе построения точки M^* мы получаем совокупности точек

$$\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n = \Omega^*, \quad (2)$$

удовлетворяющие условиям:

- 1) $\Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots \subset \Omega_n = \Omega^*$;
- 2) $M_i \in \Omega_i \setminus \Omega_{i-1} \quad (i = 1, \dots, n-1)$,

где M_i — точка, построенная на основании аксиом КЗ—К7.

- 3) $M^* \in \Omega^*$, где M^* — точка, которую мы строим.

Важно подчеркнуть, что так как задача построения точки M^* согласно предположению разрешима, то существует конечное множество совокупностей (2), удовлетворяющих условиям, указанным выше. Обозначим через $L_1, L_2, \dots, L_n = L^*$ числовые поля, соответствующие этим совокупностям. Из соотношений (3) следует, что

$$L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_n = L^*. \quad (4)$$

В процессе построения на i -м шаге переход от совокупности Ω_{i-1} к совокупности Ω_i (здесь $i = 1, \dots, n$) состоит в добавлении точки M_i на основе аксиом К5, К6 и К7. Пусть точка M_i имеет координаты (x_i, y_i) . Если точка M_i появилась на основании аксиомы К5, то ее координаты определяются в результате решения двух линейных уравнений построенных прямых l и l' . Эти прямые проходят через пары точек совокупности Ω_{i-1} , поэтому согласно лемме [35.5] их коэффициенты принадлежат полю L_{i-1} . В силу теоремы Крамера при реше-

нии системы линейных уравнений получим числа, принадлежащие тому же полю L_{i-1} . В этом случае $L_i = L_{i-1}$. Если точка M_i добавилась на основе аксиом К6 или К7, то ее координаты определяются из решения одной из следующих систем:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ x^2 + y^2 + c_1x + d_1y + e_1 = 0 \end{cases} \quad (a)$$

или

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + c_2x + d_2y + e_2 = 0, \\ x^2 + y^2 + c_3x + d_3y + e_3 = 0. \end{cases} \quad (б)$$

Система (б) эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + c_2x + d_2y + e_2 = 0, \\ (c_3 - c_2)x + (d_3 - d_2)y + (e_3 - e_2) = 0. \end{cases} \quad (в)$$

Мы видим, что координаты точки M_i определяются из решения системы (а). Решение этой системы по существу сводится к решению одного квадратного уравнения с коэффициентами из поля L_{i-1} . Так как координаты точки M_i — действительные числа, то нас интересуют только действительные корни этого уравнения. Поле L_i получается из поля L_{i-1} присоединением к последнему координат точки M_i , т. е. присоединением к полю L_{i-1} корней квадратного уравнения с коэффициентами из того же поля. Если корни квадратного уравнения принадлежат полю L_{i-1} , то $L_i = L_{i-1}$, если же не принадлежат этому полю, то $L_i = L_{i-1}[\sqrt{a_0}]$, где a_0 — положительное число, принадлежащее полю L_{i-1} , которое не является полным квадратом. Итак, в соотношении (4) каждое следующее поле либо совпадает с предыдущим, либо является его квадратичным расширением в области действительных чисел.

Доказательство достаточности условия. Если координаты точки M принадлежат полю L_0 , то утверждение непосредственно следует из леммы [35.3]. Пусть координаты точки M^* принадлежат некоторому допустимому расширению L^* поля L_0 в области действительных чисел. Это означает, что существуют такие квадратичные расширения в области действительных чисел, что

$$L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n = L^*,$$

где $L_{i+1} = L_i[\sqrt{z_i}]$, $z_i > 0$ и $z_i \in L_i$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$).

Согласно лемме [35.4] любая точка плоскости с координатами из поля L_1 может быть построена циркулем и линейкой. Поэтому, в частности, точка $M_1(\sqrt{z_0}, 0)$ может быть построена циркулем и линейкой. Теперь легко видеть, что поле L_1 может быть рассмотрено как числовое поле, соответствующее системе точек $A_0, A_1, \dots, A_k, M_1$. Применяя к этому полю и последующим полям лемму [35.4] и рассуждая аналогичным образом, через n шагов мы покажем, что точку M^* можно построить циркулем и линейкой. ■

Следствие. Дана конечная совокупность Ω_0 отрезков, из которых по крайней мере один задан своими концами. Обозначим через L_0 наименьшее поле, содержащее длины всех заданных отрезков, если за единицу измерения принят один из них.

Для того чтобы отрезок x можно было построить циркулем и линейкой исходя из совокупности Ω_0 , необходимо и достаточно, чтобы его длина принадлежала полю L_0 или некоторому допустимому расширению этого поля в области действительных чисел.

Доказательство. Пусть $\overline{OA_1} = \overline{a_1}, \overline{OA_2} = \overline{a_2}, \dots, \overline{OA_k} = \overline{a_k}$ — данные отрезки. Не нарушая общности, можно предположить, что отрезок $\overline{a_1}$, концы которого заданы, принят за единицу измерения (в противном случае, пользуясь данными точками O и A_1 , следует построить концы того отрезка, который принят за единицу измерения). На луче OA_1 построим точки $A_2, A_3, \dots, A_k$, так, чтобы $\overline{OA_2} = \overline{a_2}, \overline{OA_3} = \overline{a_3}, \dots, \overline{OA_k} = \overline{a_k}$. В системе координат $O, \overline{OA_1}$ построенные точки будут иметь координаты $A_1(1, 0), A_2(a_2, 0), \dots, A_k(a_k, 0)$, где $1, a_2, \dots, a_k$ — длины данных отрезков. Рассмотрим точку $X(x, 0)$, где x — длина отрезка x при том же выборе единицы измерения. Согласно доказанной теореме точку X можно построить тогда и только тогда, когда ее координата x (т. е. длина отрезка x) удовлетворяет условиям рассматриваемого следствия. Заметим, что построение точки X эквивалентно построению отрезка x , так как другой конец отрезка — точка O является построенной точкой. ■

§ 36. Примеры классических задач на построение, не разрешимых циркулем и линейкой

В заключение рассмотрим несколько примеров доказательства неразрешимости задач на построение циркулем и линейкой. Примеры, выбранные нами, принадлежат к числу классических задач, которые пользовались исключительной известностью с древних времен и тысячелетиями привлекали к себе внимание математиков.

1. Задача о трисекции угла. Дан угол φ_0 . Циркулем и линейкой построить угол $\frac{1}{3}\varphi_0$.

Мы можем считать, что угол φ_0 задан тремя построенными точками: вершиной O и двумя точками E_1 и B , лежащими на различных сторонах, причем $\overline{OE_1} \cong \overline{OB}$ (рис. 99). Для доказательства неразрешимости задачи применим теорему [35.6]. Для этого присоединим к данной совокупности точек систему координат OE_1E_2 , как показано на рисунке 99. Тогда данные точки будут иметь координаты $O(0, 0), E_1(1, 0), B(\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$. Здесь φ_0 — число, а именно величина данного угла φ_0 . Построение искомого угла φ_0 сведется к построению точ-

ки M^* , изображенной на рисунке 99.

Здесь $\angle M^*OE_1 = \frac{1}{3}\varphi_0$ и $|OM^*| = 1$.

Если точка M^* имеет координаты (x, y) , то $x = \cos \frac{\varphi_0}{3}, y = \sin \frac{\varphi_0}{3}$. Поле L_0 ,

фигурирующее в теореме [35.6], есть минимальное поле, содержащее числа $0, 1, \cos \varphi_0, \sin \varphi_0$, т. е. поле $Q[\cos \varphi_0, \sin \varphi_0]$, где Q — поле рациональных чисел. Из тригонометрии известно, что $\cos \varphi_0 =$

$= 4 \cos^3 \frac{\varphi_0}{3} - 3 \cos \frac{\varphi_0}{3}$, поэтому $4x^3 -$

$- 3x - \cos \varphi_0 = 0$. Таким образом, число x является корнем предыдущего уравнения и задача сводится к тому, чтобы выяснить, имеет ли многочлен

$$4x^3 - 3x - \cos \varphi_0 \quad (1)$$

корни, принадлежащие некоторому допустимому расширению поля $Q[\cos \varphi_0, \sin \varphi_0]$ в области действительных чисел. При некоторых значениях φ_0 это условие удовлетворяется. Так, например, при $\varphi_0 = 90^\circ$ многочлен (1) принимает вид $4x^3 - 3x = (4x^2 - 3)x$; корнями уравнения будут числа $0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$. Геометрически этот случай

соответствует построению угла $\frac{\pi}{6}$, что, очевидно, всегда возможно выполнить циркулем и линейкой.

В общем случае многочлен (1) над полем $Q[\cos \varphi_0, \sin \varphi_0]$ неприводим, поэтому согласно теореме [35.1] его корни не принадлежат допустимому расширению этого поля. Это имеет место, например, при $\varphi_0 =$

$= \frac{\pi}{3}$. В этом случае многочлен (1) имеет вид $4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$, корни которого определяются из условия $8x^3 - 6x - 1 = 0$. Основное поле

имеет вид $Q[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ или $Q[\sqrt{3}]$. Положив $2x = y$, предыдущее уравнение запишется в виде $y^3 - 3y - 1 = 0$. Согласно теореме [35.2] это уравнение не имеет рациональных корней, поэтому многочлен

$$y^3 - 3y - 1 \quad (2)$$

неприводим над полем Q . Из теоремы [35.1] следует, что его корни не принадлежат полю $Q[\sqrt{3}]$, т. е. многочлен неприводим над этим полем. Из этой же теоремы следует, что его корни не принадлежат никакому допустимому расширению поля $Q[\sqrt{3}]$. На основании теоремы [35.6] приходим к выводу, что точка M^* не может быть построена циркулем и линейкой. Но это означает, что в данном случае трисекция угла невозможна, так как в противном случае можно было бы построить точку M^* . Итак, задача деления угла на три равные части в общем случае не разрешима циркулем и линейкой¹.

¹ Точнее, существуют углы, для которых эта задача неразрешима.

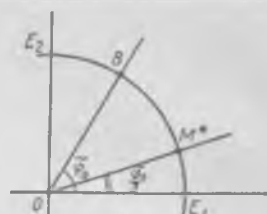


Рис. 99.

2. **Задача об удвоении куба.** Дано ребро куба. Построить ребро другого куба, объем которого вдвое больше объема данного куба.

В данном случае применим следствие из теоремы [35.6]. Сторону данного куба примем за единицу измерения и обозначим через x длину стороны искомого куба. Из условий задачи следует, что $x^3 = 2$ и $x^3 - 2 = 0$. В данном случае основное поле является полем рациональных чисел Q , так как дан только один отрезок длины 1. Из теоремы [35.1] следует, что его корни не принадлежат никакому расширению поля Q , поэтому согласно следствию теоремы [35.6] задача об удвоении куба не разрешима циркулем и линейкой.

3. **Задача о спрямлении окружности.** Окружность задана центром и одной точкой. Построить отрезок, длина которого равна длине данной окружности.

Если радиус окружности принять за единицу измерения, то задача сводится к построению отрезка длины 2π . Для решения задачи применим следствие теоремы [35.6]. Основное поле L_0 совпадает с полем рациональных чисел Q , поэтому задача будет разрешима циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда 2π или π принадлежит допустимому расширению Q . В алгебре доказывается, что если число x принадлежит допустимому расширению поля Q , то оно является корнем какого-либо многочлена с коэффициентами из поля Q . Так как π — число трансцендентное, то оно не является корнем никакого многочлена из поля Q , поэтому поставленная задача не разрешима циркулем и линейкой.

4. **Задача о квадратуре круга.** Круг задан центром и точкой. Построить квадрат, равновеликий кругу.

Если r — радиус данной окружности, то задача сводится к построению отрезка длины x , удовлетворяющей условию $x^2 = \pi r^2$. Если радиус окружности принять за единицу измерения, то задача сводится к построению отрезка длины $\sqrt{\pi}$. Очевидно, если бы мы смогли построить отрезок длины π , то мы построили бы и отрезок длины $\sqrt{\pi}$, и наоборот. Таким образом, задача сводится к предыдущей, поэтому она также не разрешима циркулем и линейкой.

Имеется целый ряд других классических задач, не разрешимых циркулем и линейкой. К их числу относятся, например, построение отдельных правильных многоугольников, в частности семиугольника, девятиугольника и т. д.

Читателя, интересующегося этим вопросом, мы отсылаем к замечательной книге Адлера «Теория геометрических построений» [1].

§ 37. О решении задач на построение различными средствами

1. **Различные средства построения.** До сих пор мы занимались теорией геометрических построений, выполняемых исключительно циркулем и линейкой. В настоящем параграфе рассмотрены вопросы о решении задач, выполняемых при ином наборе инструментов. Здесь могут представиться различные комбинации из следующих инстру-

ментов: циркуля, линейки, угольника, транспортира, циркуля с данным раствором, линейки с параллельными краями и т. д. В теории геометрических построений наиболее распространенными являются построения, выполняемые следующими средствами: а) одной линейкой, б) одним циркулем, в) линейкой с параллельными краями, г) линейкой и угольником, д) линейкой в предположении, что на плоскости даны какие-либо построенные объекты — окружность, ее центр и т. д.

В ряде случаев рассматриваются также задачи на построение, которые выполняются при помощи циркуля и линейки на ограниченной части плоскости (построения с «недоступными точками»). Этот случай особенно часто встречается в чертежной практике, так как любой чертеж выполняется на листе, который ограничен размерами.

Основные принципы обоснования теории геометрических построений, изложенные в § 28, полностью сохраняются при каждом из отмеченных выше случаев. Отличие между различными случаями заключается в определении основных объектов построения, а также в числе и содержании предложений, принятых за постулаты. Рамки настоящей книги не позволяют с достаточной полнотой рассмотреть все случаи, перечисленные выше, поэтому мы ограничиваемся кратким обзором теории. Читателя, интересующегося подробным изложением этих вопросов, отсылаем к книгам [2], [62] т. IV; [4] и др.

2. **Построение одной линейкой.** Следует отметить, что круг разрешимых задач, выполняемых одной линейкой на евклидовой плоскости, ограничен. Легко показать, что далеко не каждая задача, разрешимая циркулем и линейкой, может быть решена одной линейкой. Поэтому обычно при решении задач одной линейкой в число данных объектов включают какие-либо вспомогательные фигуры, скажем параллельные прямые, перпендикулярные прямые, квадрат, окружность с построенным центром и т. д., которые используются при построениях. Тем самым множество задач, разрешимых одной линейкой, значительно расширяется. Более того, имеет место следующая интересная теорема: любая задача на построение, разрешимая циркулем и линейкой, может быть решена одной линейкой, если на плоскости дана построенная окружность с построенным центром (теорема Штейнера, см. ниже теорему [37. 1]).

Для решения задач на построение одной линейкой удобнее всего применять методы проективной геометрии (см. § 27). Но для этого необходимо уточнить постановку задачи, т. е. определить основные объекты и сформулировать соответствующие постулаты. Основными объектами, как легко понять, следует считать точки и прямые, а постулатами построения — предложения $K1$, $K2$, $K3$ и $K5$. Заметим, что в данном случае постулат $K1$ необходимо «усилить» следующим образом: «На основной плоскости существуют по крайней мере четыре построенные точки общего положения, которые не образуют параллелограмма»¹. Таким образом, окружность из числа основных объектов исключается. Несмотря на это, она может фигурировать при

См. § 11, аксиома $KП1$.

формулировке задач; при этом элементами, определяющими ее, можно считать центр и одну из ее точек. Если условиями задачи дана окружность как вспомогательная фигура, то список постулатов следует дополнить постулатом К6. В этом случае, в силу отсутствия постулата К4 постулат К6 может быть применен только к данной в условиях задачи окружности.

Сравнивая постулаты К1, К2, К3, К5 с соответствующими постулатами построений на проективной плоскости (§ 11), мы замечаем, что они формально совпадают. Однако в проективной геометрии основной плоскостью является проективная плоскость, а здесь — евклидова. Несмотря на это, формальное совпадение постулатов дает основание полагать, что если бы нам удалось по аналогии с § 27 задачу на построение одной линейкой истолковать с проективной точки зрения, то решение задачи можно было бы свести к решению соответствующей задачи на построение на проективной плоскости и для ее решения использовать теоремы проективной геометрии.

Эту идею легко осуществить, если воспользоваться схемой, изложенной в § 27, п. 1. Предположим, что сформулирована задача (Ω_0, F_0) на построение в евклидовой плоскости. Не нарушая общности, можно считать, что искомой фигурой F_0 является точка. Рассмотрим P_2 как модель евклидовой плоскости, заданной в проективной плоскости P_2 . Для того чтобы сформулировать задачу (Ω_0, F_0) в терминах проективной геометрии, следует прежде всего истолковать Ω_0 с проективной точки зрения, а также записать условия, накладываемые на F_0 в терминах проективной геометрии. Далее, фигуру Ω_0 следует считать построенной в плоскости P_2^0 . Таким образом, возникает задача на построение в проективной плоскости P_2^0 . Решив эту задачу средствами проективной геометрии, мы, по существу, получаем решение исходной задачи. При описании построения, очевидно, следует каждый шаг построения формулировать в терминах евклидовой геометрии.

При осуществлении этой схемы необходимо иметь в виду одно весьма важное обстоятельство. При решении соответствующей задачи на проективной плоскости мы можем пользоваться абсолютом p^∞ , рассматривая его как множество точек прямой с заданной на ней инволюцией. Однако при выполнении построения точки абсолюта должны быть исключены из рассмотрения, т. е. эти точки следует считать недоступными. Это ограничение существенно, так как в противном случае соответствующий шаг построения невозможно истолковать с точки зрения евклидовой геометрии¹. Еще одно замечание: если в систему постулатов построения евклидовой геометрии включить постулат К6, то необходимо в проективную систему постулатов построений включить постулат, позволяющий строить точки пересечения овалной линии (модель окружности) с любой построенной прямой.

¹ Этим, в частности, объясняется то обстоятельство, что аксиома К1 заменена требованием существования четырех точек общего положения, которые не образуют параллелограмма (см. с. 185).

3. Примеры построений, выполняемых одной линейкой. Проиллюстрируем изложенную выше схему на примерах.

Построение [37.1]. На прямой дан отрезок AB и его середина C . Построить прямую, проходящую через точку D и параллельную прямой AB .

Сформулируем соответствующую задачу на проективной плоскости P_2^0 . Даны две точки A и B , не лежащие на прямой p^∞ , и точка C , удовлетворяющая условию (см. § 24, п. 3) $CM^* \perp AB$, где $M^* = AB \cap p^\infty$. Построить прямую $x = DJM^*$ (см. § 24, п. 2). Для построения прямой x воспользуемся свойствами полного четырехвершинника $DM_2M_8M_1$ так, чтобы точки A и B были диагональными, а точка C лежала на стороне, проходящей через третью диагональную точку. Построение прямой x показано на рисунке 100. На этом рисунке M_3 — произвольная точка прямой l_2 , отличная от D , а $x = DJM_8$.

Пользуясь той же схемой, можно выполнить следующее построение.

Построение [37.2]. Даны две параллельные прямые и две точки A и B на одной из них. Построить середину отрезка AB .

Построение [37.3]. На плоскости дана окружность ω_0 с построенным центром O_0 . Пользуясь одной линейкой, через данную точку A провести прямую, перпендикулярную данной прямой a .

Решение. Для того чтобы сформулировать соответствующую задачу на плоскости P_2^0 , проведем анализ задачи. Пусть ω_0 — овальная

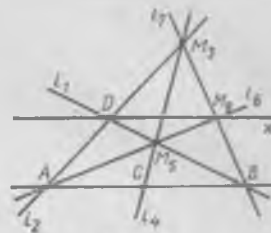
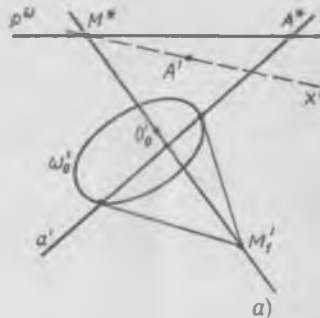


Рис. 100



a)

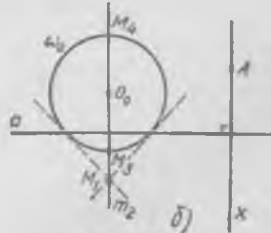


Рис. 101

линия, которая является моделью данной окружности ω_0 . O_0 и A' — модели точек O_0 и A , а p^ω — несобственная прямая плоскости P_1^ω (рис. 101, а). Пусть, далее, m_2 — модель вспомогательной прямой m_2 , проходящей через O_0 и перпендикулярной прямой a . Если A^* и M^* — несобственные точки прямых a' и m_2 , то в силу условия перпендикулярности m_2 и a точки M^* и A^* сопряжены относительно овальной линии ω_0 . Далее, точки O_0 и A^* также сопряжены, так как p^ω — поляр точки O_0 . Отсюда следует, что m_2 — поляр точки A^* . Так как $A^* \in a'$, то по свойству взаимности $m_2 \ni M_1$, где M_1 — полюс прямой a' . Таким образом, $m_2 = M_1 J O_0$. Заметим, что точку M_1 легко построить (см. § 22, построение [22.5]), поэтому вспомогательную прямую m_2 можно построить на проективной плоскости P_1^ω .

Построив прямую m_2 на евклидовой плоскости, легко построить искомую прямую x , так как можно воспользоваться точками M_2 и M_4 , в которых m_2 пересекает окружность ω_0 (построение [37.1]).

На рисунке 101, б выполнено построение прямой x . Здесь M_1 — полюс прямой a и $x \perp m_2$. Построение точки M_1 и прямой x на этом рисунке опущено.

Пользуясь этим построением, легко решить следующую задачу.

Построение [37.4]. На плоскости дана окружность ω_0 с построенным центром O_0 . Через данную точку A провести прямую x , параллельную прямой a .

Пользуясь построением [37.3], сначала строим вспомогательную прямую m : $m \ni A$, $m \perp a$ и далее строим искомую прямую.

4. Теорема Штейнера. Пользуясь предыдущими построениями, легко доказать теорему Штейнера.

Теорема [37.1]. Любая задача на построение, выполняемая циркулем и линейкой, может быть выполнена одной линейкой, если на плоскости дана построенная окружность ω_0 с построенным центром O_0 .

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что построения КЗ — К7 могут быть выполнены одной линейкой, если на плоскости дана окружность ω_0 с построенным центром O_0 . Постулаты КЗ и К5, включенные в число постулатов построений, выполняемых одной линейкой, и постулат К4 теряют смысл, так как окружность не является основным объектом построения¹.

Построение К6. Покажем, что одной линейкой можно построить точки пересечения построенной прямой a и окружности $\alpha = A(\overline{AB})$, где A и B — построенные точки. Сначала рассмотрим случай, когда $A \notin a$ и $AB \not\perp a$. Пользуясь построением [37.3], построим $h: A \in h$, $h \perp a$ и обозначим через M точку $a \cap h$ (рис. 102). Далее, пользуясь построением [37.4], строим треугольник $O_0 B' M'$, стороны которого соответственно

параллельны сторонам треугольника ABM и, кроме того, $B' \in \omega_0$. Построим прямую a' : $a' \ni M'$, $a' \perp h'$ и обозначим через X' и Y' точки пересечения прямой a' с окружностью ω_0 . Важно заметить, что так как окружность ω_0 по условию теоремы является построенной, то точки X' и Y' можно построить. Теперь если провести через точку A две прямые, параллельные соответственно прямым $O_0 X'$ и $O_0 Y'$, то получим искомые точки X и Y . Доказательство этого предложения мы опускаем, так как оно непосредственно следует из подобия полученных на рисунке 102 фигур.

Построение значительно упрощается, когда $A \in a$. В этом случае нет надобности в построении промежуточных прямых h , h' и точек M , M' . В случае, когда $AB \perp a$, проведенное выше построение непригодно. В этом случае следует провести вспомогательную прямую b , $b \not\perp a$ и сначала построить одну из ее точек пересечения с окружностью α . После того как эта точка построена, задача сводится к рассматриваемому выше случаю.

Построение К7. Даны окружности $\alpha_1 = A_1(A_1 \overline{B_1})$ и $\alpha_2 = A_2(A_2 \overline{B_2})$ точками A_1, B_1, A_2, B_2 (рис. 103). Покажем, что, пользуясь одной линейкой, при наличии ω_0 и O_0 можно построить точки пересечения окружностей α_1 и α_2 . Задача будет решена, если мы сумеем построить радикальную ось d этих окружностей. В самом деле, если $X, Y = \alpha_1 \cap \alpha_2$, то, очевидно, $X \in d$ и $Y \in d$, поэтому построение сведется к построению точек пересечений прямой d и окружности α , т. е. к построению К6.

Для построения прямой d сначала строим прямые h_1 и h_2 , проходящие соответственно через A_1 и A_2 и перпендикулярные прямой $A_1 A_2$ (построение [37.3]). Далее строим по одной точке пересечения прямых h_1 и h_2 с окружностями α_1 и α_2 . Эти точки на рисунке 103 обозначены через M_3 и M_4 (постулат К6). Через точки M_3 и M_4 проведем прямые, параллельные прямой $A_1 A_2$ (построение [37.4]). Эти прямые пересекают прямые h_1 и h_2 в точках N_5 и N_6 . Построим далее середину P_7 отрезка $N_5 N_6$ (построения [37.4] и [37.2]). Построим, наконец, прямую $l_8 \ni P_7$, $l_8 \perp N_5 N_6$. Прямая l_8 пересекает $A_1 A_2$ в точке X . Предлагаем читателю показать, что точка X лежит на ра-

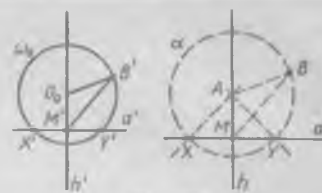


Рис. 102

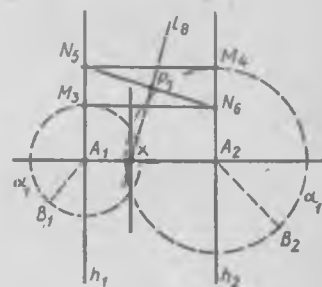


Рис. 103

¹ Практически это построение заменяется построением одной линейкой конечного числа точек, принадлежащих данной окружности. Последнее может быть выполнено при помощи постулата К6.

дикальной оси данных окружностей. Построив прямую, проходящую через X и перпендикулярную A_1A_2 , получим радикальную ось d . ■

5. Построения, выполняемые одним циркулем. Известно, что многие задачи на построение выполняются при помощи одного циркуля, без применения линейки. Например, для решения задачи «Построить точку, симметричную точке X относительно данной прямой a » линейка, по существу, не требуется. Можно указать целый ряд других задач, где построения при помощи одного циркуля выполняются также просто, а иногда даже проще, чем циркулем и линейкой. Укажем, например, построение образов точки при центральной симметрии, построение вершин правильных трех- и шестиугольников, вписанных в окружность.

При некотором уточнении постановки вопроса мы приходим к результату, который на первый взгляд является неожиданным: *любая задача на построение, выполняемая циркулем и линейкой, может быть выполнена одним циркулем* (теорема Мора-Маскерони). Таким образом, с теоретической точки зрения линейка является «лишним» инструментом построения. Однако практически наличие линейки в большинстве случаев значительно облегчает решение задачи, так как сокращает число шагов построения. Доказательство сформулированного выше предложения читатель может найти в учебной литературе по геометрическим построениям на плоскости (см., например, [1] или [4]).

§ 38. Основные положения теории изображений

Задача изображения тел на плоскости имеет весьма важное практическое значение; ею должны владеть художник, архитектор, инженер и т. д. Учитель математики также сталкивается с этой задачей при преподавании стереометрии в IX и X классах средней школы. Цель настоящей главы — познакомить читателя с основами теории изображений, решающей указанную задачу.

1. Проектирование на плоскость. В основе всех методов теории изображений лежит построение, именуемое *проектированием*.

Оно состоит в следующем: пусть требуется точку $\bar{A}$ пространства изобразить на плоскости π (рис. 104); глаз наблюдателя будем считать при этом расположенным в точке S . Ввиду прямолинейности лучей света, для того чтобы изображение A точки $\bar{A}$ производило бы на глаз S то же впечатление, что и сама точка $\bar{A}$, надо поместить A на луче зрения $S\bar{A}$, т. е. A — точка пересечения прямой $S\bar{A}$ с плоскостью π . Точка A называется *проекцией точки $\bar{A}$ на плоскость π из точки S* , точка S — *центром проекций*, плоскость π — *плоскостью изображений*. Если требуется изобразить на плоскости π тело $\bar{F}$, то мы строим на π проекции всех точек тела $\bar{F}$; их множество и даст фигуру F , изображающую тело $\bar{F}$ и называемую его *проекцией*. Прямые, идущие от центра проекций S к изображаемым точкам, именуются *проектующими* и *прямыми*. Очевидно, что центр проекций надо брать вне плоскости изображений.

При изложении теории изображений в § 44 мы будем считать, что пространство расширено добавлением несобственных элементов (см. § 4). При этом мы примем, что плоскость изображений всегда собственная, все точки изображаемого тела F собственные, центр же проекций S может быть как собственным, так и несобственным. Если точка S собственная, проектирование называется *центральным*, если же она несобственная — *параллельным*. Все соображения, изложенные выше, остаются, очевидно, справедливыми в том случае, когда точка S несобственная. При параллельном проектировании все проектирующие прямые параллельны друг другу. В школьной практике применяется только параллельное проектирование, поскольку полученные таким путем изображения достаточно наглядны и легко могут быть построены.

2. Свойства проектирования.

1°. *Проекция точки $\bar{A}$, отличной от центра проекций S , есть точка A .*

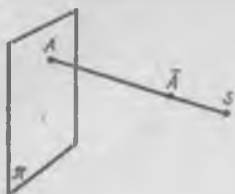


Рис. 104.

Утверждение 1° следует из того, что A есть пересечение прямой SA с плоскостью изображений π . Если прямая SA параллельна плоскости π , то точка A будет несобственной.

Если точка A совпадает с центром проекций S , то проектирующая прямая, а следовательно, и проекция становятся неопределенными.

2°. Проекция прямой g , не проходящей через центр проекций S , есть прямая g ; если же g и S инцидентны, то проекция вырождается в точку.

Проекция прямой g есть геометрическое место проекций точек, инцидентных g . Второе утверждение предложения 2° непосредственно следует из определения проекции точки (п. 1). Первое его утверждение вытекает из нижеследующих рассуждений. Проведем через S и g плоскость α (рис. 105). Плоскость α пересечет плоскость π по прямой g , на которой расположатся проекции всех точек, инцидентных прямой g . Таким образом, прямая g и есть проекция прямой g на плоскость π из точки S . Предложение 2° полностью доказано.

Если плоскость изображений π и проектирующая плоскость α параллельны друг другу, то прямая g будет несобственной.

При изучении параллельного проектирования мы будем стоять на точке зрения аффинной (или евклидовой) геометрии. Поэтому во всем дальнейшем тексте главы VIII (§ 38—43) все упоминаемые точки, прямые и плоскости при отсутствии особых оговорок будут считаться собственными.

3. Некоторые свойства аффинных отображений. Метод аксонометрии (см. § 39) базируется на теореме [38. 1] Польке — Шварца; для ее доказательства выведем сначала три леммы о свойствах аффинных отображений.

3°. Две четверки точек плоскости A, B, C, D и A', B', C', D' общего положения (рис. 106) аффинно эквивалентны (I, § 31, п. 4) тогда и только тогда, когда

$$(ACK) = (A'C'K'), \quad (BDK) = (B'D'K'), \quad (1)$$

где ¹

$$K = AC \cap BD, \quad K' = A'C' \cap B'D'. \quad (2)$$

Доказательство. Если существует аффинное преобразование S плоскости, при котором

$$A' = S(A), \quad B' = S(B), \quad C' = S(C), \quad D' = S(D), \quad (3)$$

то по (2) имеем $K' = S(K)$; поэтому необходимость условий (1) следует из определения аффинного отображения (см. I, § 24, п. 1).

¹ Обозначения точек можно, конечно, всегда выбрать так, чтобы прямые AC и BD и прямые $A'C'$, $B'D'$ пересекались.

Обратно, пусть условия (1) выполнены. По теореме I [25.6] существует аффинное преобразование S , которое переводит точку A в A' , точку B в B' и точку C в C' . В силу первого из равенств (1) $K' = S(K)$, вследствие чего по второму из тех же равенств $D' = S(D)$; достаточность условий (1) также установлена. ■

В [I] (главы IV и V) мы подробно изучили свойства аффинных преобразований плоскости, а также преобразований подобия и движений. Эти преобразования являются частными случаями взаимно однозначных точечных отображений $\Phi: \Omega \rightarrow \Omega'$, когда область определения Ω и область значений Ω' совпадают (см. I, § 23). Если в определении аффинного преобразования $\Phi: \Omega \rightarrow \Omega'$ отказаться от требования, чтобы Ω и Ω' совпадали с множеством точек одной плоскости, и предположить, что Ω и Ω' суть множества точек двух различных плоскостей α и α' , то мы приходим к понятию аффинного отображения плоскости α на плоскость α' . Свойства 1°—8° в [I, § 24] аффинных преобразований $\Phi: \alpha \rightarrow \alpha$ и теорема I [25.4], [25.6] автоматически переносятся на аффинные отображения $\Phi: \alpha \rightarrow \alpha'$, если только в них заменить слово «преобразование» словом «отображение». При соответствующем изменении понятия аффинной эквивалентности останется верной и только что доказанная лемма 3°.

4°. Если S — данное аффинное отображение плоскости α на плоскость α_0 , то всегда найдется такая плоскость α' , что

$$S = HP, \quad (4)$$

где $P: \alpha \rightarrow \alpha'$ — преобразование подобия, а $H: \alpha' \rightarrow \alpha_0$ — ортогональное проектирование.

Доказательство. Возьмем на плоскости α_0 произвольную окружность Ω_0 и рассмотрим ее образ Ω при отображении $S^{-1}: \alpha_0 \rightarrow \alpha$; согласно теореме I [39.4] кривая Ω есть эллипс. Пусть O — центр этого эллипса, $|OA|$ и $|OB|$ — его большая и малая полуоси, так что $OA \perp OB$ и $|OB| < |OA|$ (см. рис. 107). Если

$$O_0 = S(O), \quad A_0 = S(A), \quad B_0 = S(B), \quad (5)$$

то O_0A_0 и O_0B_0 — взаимно перпендикулярные диаметры окружности Ω_0 , вследствие инвариантности сопряженных диаметров эллипса при аффинном отображении (см. также I, с. 266). На луче OB возьмем точку B_1 так, чтобы $|OB_1| = |O_0B_0| = |O_0A_0|$, и рассмотрим го-



Рис. 105.

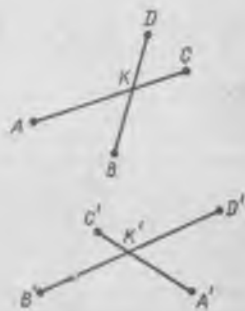


Рис. 106.

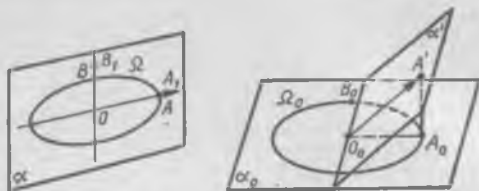


Рис. 107.

мотетию $F: \alpha \rightarrow \alpha$ с центром в точке O , при которой точка B преобразуется в B_1 . Пусть $A_1 = F(A)$; поскольку $|OB| < |OA|$, то $|OB_1| < |OA_1|$, так что $|O_0A_0| < |OA_1|$. В плоскости, проходящей через точку O_0 и перпендикулярной к прямой O_0B_0 , построим точку A' так, чтобы $|O_0A'| = |OA_1|$ и $\Delta O_0A_0A'$ был прямоугольным с прямым углом при вершине A_0 . Обозначим далее через α' плоскость, проходящую через точки O_0, B_0, A' . Так как системы аффинных координат $O, \overline{OA}, \overline{OB}$ и $O_0, \overline{O_0A'}, \overline{O_0B_0}$ подобны, то по теореме I [25.4] существует отображение подобия $P: \alpha \rightarrow \alpha'$, при котором

$$O_0 = P(O), \quad A' = P(A), \quad B_0 = P(B). \quad (6)$$

Поскольку $A'A_0 \perp \alpha_0$, то при ортогональном проектировании $H: \alpha' \rightarrow \alpha_0$ будем иметь:

$$O_0 = H(O_0), \quad A_0 = H(A'), \quad B_0 = H(B_0),$$

так что преобразование H переводит систему координат $O_0, \overline{O_0A'}, \overline{O_0B_0}$ в систему $O_0, \overline{O_0A_0}, \overline{O_0B_0}$. Вследствие этого по (6) после преобразования HP репер $O, \overline{OA}, \overline{OB}$ перейдет в $O_0, \overline{O_0A_0}, \overline{O_0B_0}$. Сопоставляя последнее утверждение с (5) и припоминая теорему I [25.4], убеждаемся в справедливости соотношения (4). ■

5°. Пусть даны призма π и плоский четырехугольник $ABDC$, аффинно эквивалентный ортогональному сечению $A_0B_0D_0C_0$ призмы π (рис. 108; на рисунке четырехугольник $ABDC$ не изображен). При таком условии всегда существует плоскость, пересекающая призму π по четырехугольнику, который подобен четырехугольнику $ABDC$.

Доказательство. Обозначим через S то аффинное отображение $\alpha \rightarrow \alpha_0$, для которого

$$S(A) = A_0, \quad S(B) = B_0, \quad S(C) = C_0, \quad S(D) = D_0.$$

Здесь α и α_0 — соответственно плоскости четырехугольников $ABDC$ и $A_0B_0D_0C_0$. Согласно лемме 4° существует такая плоскость α' , что $S = HP$, где $H: \alpha' \rightarrow \alpha_0$ есть ортогональное проектирование, а $P: \alpha \rightarrow \alpha'$ — преобразование подобия. Легко видеть, что α' и есть искомая плоскость. В самом деле, отображение P переведет плоскость α в плоскость α' , а точки A, B, C, D в некоторые точки A', B', C', D' , лежащие на ребрах призмы (поскольку $A'A_0 \perp \alpha_0$ и т. д.). Так как

P есть преобразование подобия, то четырехугольники $ABDC$ и $A'B'D'C'$ подобны друг другу. ■

Отметим, что в лемме 5° не требуется, чтобы четырехугольник $ABDC$ был выпуклым; необходимо только, чтобы точки A, B, C, D были общего положения и лежали в одной плоскости.

Теорема [38.1] (теорема Польке—Шварца). Любые четыре точки общего положения A, B, C, D плоскости α могут рассматриваться как параллельные проекции вершин тетраэдра, подобного данному тетраэдру $ABCD$ (рис. 109).

Доказательство. На ребрах BC и AD тетраэдра $ABCD$ возьмем такие точки L и M , чтобы

$$(\overline{BCL}) = (\overline{BCK}), \quad (\overline{ADM}) = (\overline{ADK}) \quad (7)$$

($K = AD \cap BC$, ср. сноску на с. 192), через вершины A, B, C, D тетраэдра проведем прямые, параллельные прямой LM , и рассмотрим ортогональное сечение $A_0B_0C_0D_0$ полученной таким образом призмы π . Очевидно, что

$$(B_0C_0K_0) = (\overline{BCL}), \quad (A_0D_0K_0) = (\overline{ADM}), \quad (8)$$

где $K_0 = A_0D_0 \cap B_0C_0$. Из (7) и (8) вытекает, что

$$(\overline{BCK}) = (B_0C_0K_0), \quad (\overline{ADK}) = (A_0D_0K_0),$$

вследствие чего по лемме 3° четырехугольники $ABDC$ и $A_0B_0D_0C_0$ аффинно эквивалентны; в силу леммы 5° существует плоскость α' , пересекающая призму π по четырехугольнику $A'B'D'C'$, подобному $ABDC$.

Точки A', B', C', D' являются параллельными проекциями вершин A, B, C, D тетраэдра $ABCD$. Преобразование подобия всего пространства, которое переводит $A'B'D'C'$ в $ABDC$, превратит тетраэдр $ABCD$ в ему подобный тетраэдр, для которого точки A, B, C, D будут служить параллельными проекциями вершин; теорема [38.1] доказана. ■

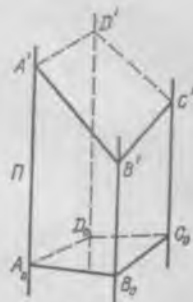


Рис. 108.

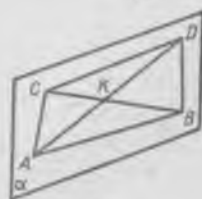
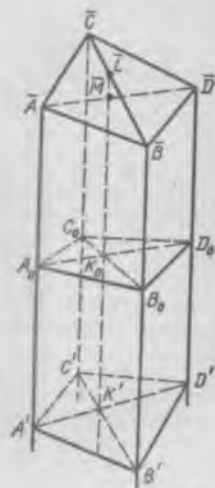


Рис. 109.

§ 39. Аксонометрия

1. Основные положения аксонометрии. Введем прямоугольные декартовы координаты, приняв точку O за начало координат, а три равные по длине взаимно перпендикулярные векторы i, j, k — за координатные (рис. 110); положение любой точки M в пространстве определится тогда заданием ее координат x, y, z , где

$$\overrightarrow{OA} = xi, \quad \overrightarrow{AM_1} = yj, \quad \overrightarrow{M_1M} = zk. \quad (1)$$

При параллельном проектировании всего пространства на плоскость изображений σ точка O перейдет в точку O , векторы i, j, k — в три попарно неколлинеарных вектора e_1, e_2, e_3 , которые мы изображим приложенными в точке O , причем предполагается, что направления проектирования не параллельно плоскости $E_1E_2E_3$ и ни одной из координатных плоскостей; тогда их концы не лежат на одной прямой (рис. 111). Будем обозначать в дальнейшем полученный таким путем образ точки той же буквой, что и саму точку, но без черточки наверху. Так как при параллельном проектировании отношение коллинеарных векторов остается неизменным, то из (1) следует:

$$\overrightarrow{OA} = xe_1, \quad \overrightarrow{AM} = ye_2, \quad \overrightarrow{M_1M} = ze_3; \quad (2)$$

основываясь на равенствах (2), мы можем построить векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{M_1M}$, а следовательно, и изображение M любой точки $M(x, y, z)$ пространства, если только известны векторы e_1, e_2, e_3 и точка O .

В этом и заключается основная идея аксонометрии, откуда и происходит ее название: аксонометрия означает по-гречески измерение по осям. Точка O и векторы e_1, e_2, e_3 составляют аксонометрическую систему координат; модули e_x, e_y, e_z векторов e_1, e_2, e_3 называются коэффициентами искажения:

$$e_x = |e_1|, \quad e_y = |e_2|, \quad e_z = |e_3| \quad (3)$$

(так как они показывают, как искажается длина каждого из векторов i, j, k , которая принимается равной единице).

Точку O называют началом аксонометрической системы координат, оси OX, OY, OZ — аксонометрическими ося-

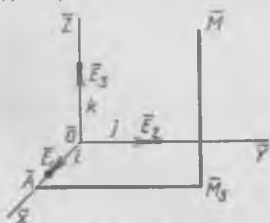


Рис. 110.

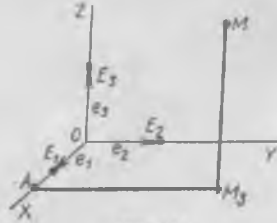


Рис. 111.

ми. Полученное указанным выше приемом изображение тела именуется его аксонометрической проекцией.

Однако здесь возникает важный вопрос: в какой мере произволен выбор точки O и векторов e_1, e_2, e_3 ; на него ответ и дает теорема [38.1]. Точки O, E_1, E_2, E_3 (рис. 111) — общего положения (в силу указанных выше ограничений в выборе направления проектирования); поэтому согласно этой теореме их всегда можно считать параллельными проекциями вершин прямоугольного тетраэдра $\overline{OE_1E_2E_3}$ с равными ребрами $\overline{OE_1}, \overline{OE_2}, \overline{OE_3}$ (при преобразовании подобия все указанные особенности тетраэдра сохраняются, меняется лишь единица масштаба)¹. Мы приходим к следующему важному выводу.

Теорема [39.1] (основная теорема аксонометрии и т. д.). Начало O и векторы e_1, e_2, e_3 аксонометрической системы координат могут быть выбраны в плоскости изображений произвольно, лишь бы только векторы e_1, e_2, e_3 были попарно неколлинеарны².

На практике принято различать следующие виды аксонометрических проекций.

а) *Изометрические проекции*: $e_x = e_y = e_z$. Если, кроме того, $\angle YOZ = 90^\circ$, $\angle XOY = \angle XOZ = 135^\circ$, то проекция носит название *кавалерной*.

б) *Диметрические проекции*: $e_x \neq e_y = e_z$. В том частном случае, когда $e_y = e_z$, $e_x = \frac{1}{2}e_z$, $\angle YOZ = 90^\circ$, $\angle XOY = \angle XOZ = 135^\circ$, мы имеем так называемую *кабинетную* проекцию, весьма употребительную при преподавании стереометрии в школе.

в) *Триметрические проекции*: все три коэффициента искажения e_x, e_y, e_z различны между собой.

2. *Задание точки, прямой и плоскости*. Выше (п. 1) мы убедились, что, задав аксонометрическую систему координат, мы можем построить изображение M любой точки M пространства. Обратное, конечно, несправедливо: изображение M не определяет прообраза M , так как точки пространства, лежащие на одной проектирующей прямой, имеют все одно и то же изображение.

Положение точки M определится заданием двух точек плоскости изображений σ . Точка M_1 (рис. 111) есть изображение ортогональной проекции M_1 точки M на плоскость XOY (рис. 110); в силу (2) по точке $M(x, y, z)$ может быть построена и точка M_1 . Обратное, если мы зададим в плоскости σ , кроме точки M , и точку M_1 , то точка M уже будет определена однозначно: по вектору $\overrightarrow{M_1M}$ ввиду (2) найдется число z ; разложив вектор $\overrightarrow{OM_1}$ по направлениям осей OX и OY , мы разыщем

¹ Польке рассматривал только этот частный случай теоремы [38.1] и дал для него весьма сложное доказательство; Шварцу принадлежит как более общая формулировка теоремы, так и более простой способ ее вывода.

² В случае, когда точки E_1, E_2, E_3 коллинеарны, теорема Польке — Шварца остается, как легко видеть, справедливой.

оба вектора $\overline{OA}$ и $\overline{AM}_2$, а вместе с ними согласно (2) и остальные две координаты x, y точки M .

Точка M , построенная описанным выше способом, носит название аксонометрической проекции точки M пространства, точка M_2 — ее вторичной аксонометрической проекции (в дальнейшем для краткости прилагательное «аксонометрическая» мы будем по большей части опускать). Итак,

1°. Точка M пространства однозначно определяется заданием ее аксонометрической проекции M и ее вторичной аксонометрической проекцией M_2 .

В таком случае пишут: $\overline{M}(M, M_2)$; следует иметь при этом в виду, что отрезок MM_2 должен быть параллелен аксонометрической оси OZ .

Очевидно, что вместо точки M_2 с таким же успехом можно взять точку M_1 (или точку M_3), изображающую ортогональную проекцию M_1 (или M_3) точки M на плоскости $\overline{YOZ}$ (или $\overline{XOZ}$). Для определенности мы будем придерживаться введенного выше соглашения.

Прямая a пространства задается в аксонометрии также своей проекцией a и вторичной проекцией a_2 (т. е. аксонометрической проекцией ортогональной проекции a_2 прямой a на плоскость $\overline{XOY}$), что записывается так: $\overline{a}(a, a_2)$. Если точка (M, M_2) принадлежит прямой $\overline{a}(a, a_2)$, то M лежит на a , а M_2 — на a_2 .

Положение плоскости α в пространстве проще всего определить, указав два из трех ее следов на $\overline{XOY}$, $\overline{XOZ}$ и $\overline{YOZ}$; так (не совсем точно) называют проекции прямых, по которым плоскость α пересекает соответственно координатные плоскости $\overline{XOY}$, $\overline{XOZ}$ и $\overline{YOZ}$.

Каждой точке M плоскости изображений σ , рассматривая M как проекцию точки $\overline{M}$ плоскости α , отнесем вторичную проекцию M_2 той же точки $\overline{M}$; тем самым мы получим преобразование S_α плоскости σ . Если точка M лежит на следе l_z плоскости α на $\overline{XOY}$, то $M = M_2$, так что все точки прямой l_z будут двойными для преобразования S_α ; все прямые, соединяющие M и $M_2 = S_\alpha(M)$, будут параллельны аксонометрической оси OZ . Мы видим (I, § 26, п. 5), что S_α есть перспективно-аффинное преобразование плоскости σ . Итак,

2°. Всякая плоскость α пространства задает перспективно-аффинное преобразование S_α плоскости изображений σ , при котором $M_2 = S_\alpha(M)$ для точек $\overline{M}(M, M_2) \in \alpha$, и обратно, S_α задает α .

Предложение 2° теряет силу в следующих особых случаях: а) если α совпадает с плоскостью $\overline{XOY}$; б) если плоскость α параллельна оси OZ или проходит через нее; в) если плоскость α параллельна направлению проектирования. Очевидно, что в случае в) проекция плоскости α есть прямая, и преобразование S_α не существует. Читатель без труда уяснит себе, что произойдет с S_α в случаях а) и б).

§ 40. Аффинные и метрические задачи аксонометрии.

1. Аффинные задачи аксонометрии. Рассмотрим несколько примеров на решение такого рода задач; во всех этих примерах предполагается, что аксонометрические оси OX, OY, OZ даны на чертеже.

Пример 1. Плоскость α задана своим следом AB на $\overline{XOY}$ и принадлежащей ей точкой (M, M_2) . Построить (на плоскости изображений σ) остальные два следа плоскости α (рис. 112).

Для указанной цели достаточно найти точку C , являющуюся проекцией точки C , в которой ось OZ пересекает плоскость α (предполагается, что на рисунке даны аксонометрические оси OX, OY, OZ). Рассмотрим перспективно-аффинное преобразование S_α плоскости σ , которое определяется плоскостью α (см. 2°). Так как вторичная проекция точки C совпадает с точкой O , то мы приходим к такой задаче: даны ось AB перспективно-аффинного преобразования S_α и пара соответствующих точек M и $M_2 = S_\alpha(M)$; построить точку C , для которой известен ее образ $O = S_\alpha(C)$. Решение ее аналогично данному в I, § 26, задача 2 ($Q = OM_2 \cap AB, C = QM \cap OZ$).

Пример 2. Плоскость α проходит через прямую $a(a, a_2)$ и через точку $P(P, P_2)$, не лежащую на прямой a . Построить следы l_x, l_y, l_z плоскости α на $\overline{YOZ}$, на $\overline{XOZ}$ и на $\overline{XOY}$ (рис. 113).

Точка $R = a \cap a_2$ — двойная для преобразования S_α ; поэтому след l_z плоскости α на $\overline{XOY}$ проходит через точку R . Далее берем на прямой a точку M ; ее образ



Рис. 112.

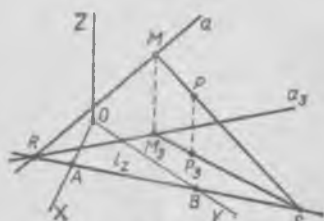


Рис. 113.

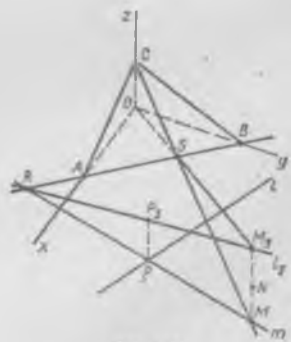


Рис. 114.

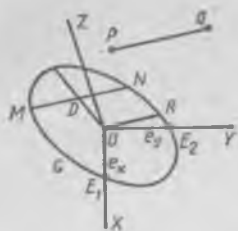


Рис. 115.

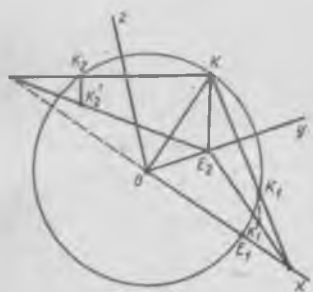


Рис. 116.

ось преобразования S_α ; m есть прямая RM . Построив точку $P = l \cap m$, легко получим и $P_3 \in l_3$, так как $PP_3 \parallel OZ$. Задача решена.

В аффинных задачах коэффициенты искажения e_x, e_y, e_z [как имеющие метрический характер; см. (3)] не играют никакой роли; необходимо лишь, чтобы на рисунке были даны аксонометрические оси.

При особых расположениях плоскости α (см. с. 198) построения, данные в примерах 1—3, несколько видоизменяются. Читателю надлежит самому разобраться, в чем состоят эти изменения.

2. Метрические задачи аксонометрии. Здесь уже коэффициенты искажения e_x, e_y, e_z , конечно, весьма существенны. Рассмотрим несколько такого рода задач; при их решении следует все время иметь в виду, что при параллельном проектировании аффинные свойства фигур остаются неизменными.

Пример 4. Дана аксонометрическая проекция PQ отрезка $\overline{PQ}$, лежащего в плоскости XOY ($P_3 = P, Q_3 = Q$). Найти длину отрезка $\overline{PQ}$ в натуре (рис. 115).

Строим прежде всего масштабный эллипс G (рис. 116) плоскости XOY , т. е. проекцию окружности S , лежащей в плоскости XOY и имеющей центр в точке O и радиус, равный единице длины (т. е. дли-

$M_3 = S_\alpha(M)$ определится условиями: $M_3 \in a_3$; $MM_3 \parallel OZ$. Точка $S = MP \cap M_3P_3$ также инцидентна следу l_3 , так что прямая RS есть искомым след l_3 . Дальнейшее построение проводится так же, как в примере 1.

Пример 3. Плоскость α задана своими следами AB, AC и BC на XOY, XOZ и YOZ (рис. 114). Построить точку $\bar{P}(P, P_3)$, в которой данная прямая $\bar{l}(l, l_3)$ пересекает плоскость α .

Искомая точка $\bar{P}(P, P_3)$ принадлежит как плоскости α , так и прямой $\bar{l}$; поэтому задача сводится к построению пары точек P, P_3 , где $P_3 = S_\alpha(P), P \in l, P_3 \in l_3$. Из последнего соотношения следует, что точка $P = S_\alpha^{-1}(P_3)$ лежит на прямой $m = S_\alpha^{-1}(l_3)$. Прямую m находим так: берем произвольную точку $M_3 \in l_3$ и строим $M = S_\alpha^{-1}(M_3)$ ($S = OM_3 \cap AB, M_3N \parallel OZ, M = CS \cap M_3N$). Кроме того, точка $R = l_3 \cap AB$ лежит на прямой m , поскольку AB есть

не каждого из координатных векторов i, j, k пространства). Так как OX, OY — два взаимно перпендикулярных диаметра окружности S , то их проекции OX, OY будут сопряженными диаметрами эллипса G ; если $OE_1 = e_x, OE_2 = e_y$, то точки E_1 и E_2 принадлежат G . Мы сможем построить эллипс G по точкам нижеследующим образом: строим отрезок $[OK]$, перпендикулярный к отрезку $[OE_1]$ и ему равный. После этого нанесем на чертеж окружность с центром в точке O и радиусом, равным OE_1 , и отметим на ней любое число точек $K, K_1, K_2, K_3, \dots$. Если мы подвергнем плоскость XOY перспективно-аффинному преобразованию $\bar{A}$, ось которого есть прямая OE_1 и которое переводит точку K в точку E_2 (см. I, § 26, п. 5, задача 2), то образы указанных точек $K_1 = \bar{A}(K_1), K_2 = \bar{A}(K_2), \dots$ расположатся все на эллипсе G . Таким образом, мы сможем построить сколько угодно точек масштабного эллипса G .

Далее проводим через точку O прямую, параллельную PQ ; если R — одна из точек пересечения этой прямой с эллипсом G , то OR есть проекция отрезка e , параллельного PQ и имеющего длину, равную 1. Таким образом,

$$\frac{PQ}{PQ} = \frac{e}{OR} \quad (4)$$

и отрезок $\overline{PQ}$ может быть найден конструктивно как четвертый пропорциональный к отрезкам PQ, e, OR .

Масштабные эллипсы находят себе применение и при решении других метрических задач аксонометрии.

Задача примера 4 допускает еще и другое решение: проведем через точку P прямую, параллельную аксонометрической оси OX , а через точку Q — прямую, параллельную оси OY (рис. 117); если T — точка пересечения этих прямых, то PT и TQ будут изображениями отрезков $\overline{PT}, \overline{TQ}$ соответственно равных ортогональным проекциям отрезка $\overline{PQ}$ на оси OX и OY . Отрезки $\overline{PT}$ и $\overline{TQ}$ могут быть построены на



Рис. 117.

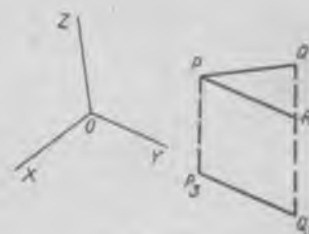


Рис. 118.

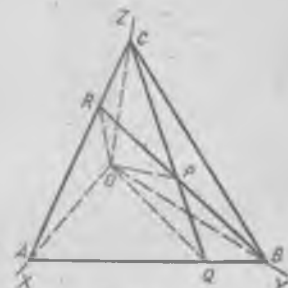


Рис. 119.

основе соотношений

$$\frac{PT}{PT} = \frac{e}{e_x}, \quad \frac{TQ}{TQ} = \frac{e}{e_y},$$

[ср. (4)], после чего PQ легко находится конструктивно как гипотенуза прямоугольного треугольника PTQ , катеты которого известны.

Пример 5. Из точки O опустить перпендикуляр на прямую PQ , лежащую в плоскости XOY .

Пусть MN — хорда окружности S (пример 4), не проходящая через ее центр O и параллельная прямой PQ , а D — середина этой хорды; тогда прямая OD будет перпендикулярна к прямой MN , а следовательно, и прямой PQ . Отсюда вытекает такое решение рассматриваемой задачи: пусть PQ — аксонометрическая проекция прямой PQ (рис. 115); в масштабном эллипсе G проводим не инцидентную точку O хорду $MN \parallel PQ$; прямая, соединяющая середину D этой хорды с точкой O , и будет проекцией искомого перпендикуляра.

Пример 6. Найти длину (в натуре)¹ отрезка PQ (PQ, P_2Q_2) (рис. 118).

Из точки P проводим прямую, параллельную отрезку P_2Q_2 , до ее пересечения с Q_2Q в точке R ; отрезок QR есть изображение ортогональной проекции QR отрезка PQ на прямую Q_2Q . Как в примере 5, строим отрезок, равный по длине $P_2Q_2 = PR$, затем находим (конструктивно) отрезок RQ , исходя из пропорции

$$\frac{RQ}{RQ} = \frac{e}{e_z}$$

[ср. (4)], после чего отрезок PQ может быть построен как гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами PR и RQ .

Пример 7. Из данной точки опустить перпендикуляр на плоскость α , заданную ее следами AB, AC, BC соответственно на XOY, XOZ, YOZ (рис. 119).

Так как все перпендикуляры к плоскости параллельны между собой (в натуре и изображении), то достаточно рассмотреть тот случай, когда данная точка совпадает с точкой O . Сначала строим проекцию OQ перпендикуляра OD , опущенного из точки O на прямую AB (пример 5); плоскость OQC перпендикулярна к прямой AB , а следовательно, и плоскости ABC , и содержит поэтому искомым перпендикуляр OP . Построив аналогичным образом проекцию OR прямой $OR \perp AC$ (для чего придется воспользоваться масштабным эллипсом плоскости XOZ), мы получим вторую плоскость OBQ , содержащую OP . Таким образом, если $P = CQ \cap BR$, то OP и есть проекция перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость ABC .

¹ То есть в натуре.

3. Ортогональные аксонометрические проекции. Если направление проектирования перпендикулярно к плоскости изображений, то аксонометрическая проекция называется *ортогональной*.

В некоторых случаях желательно иметь чертеж, выполненный в ортогональной аксонометрической проекции; особенно это относится к изображениям фигур, содержащих шар. Чтобы получить параллельную проекцию шара, мы должны описать около него цилиндр, образующие которого параллельны направлению проектирования; проекция шара есть сечение этого круглого цилиндра плоскостью изображений. Если проекция неортогональная, то проекция шара окажется эллипсом, что является нежелательным (так как глаз воспринимает шар всегда в виде круга); чтобы изображение шара было кругом, необходимо, таким образом, взять проекцию ортогональной.

За недостатком места теорию ортогональных аксонометрических проекций мы не излагаем. Читатель найдет ее в подробном изложении в книге [20], с. 252—257.

§ 41. Полные и неполные изображения

1. Заданные элементы изображения. Следуя правилам аксонометрии, надо прежде всего выбрать аксонометрические оси и задать коэффициенты искажения; дальнейшее построение изображения этим уже вполне определится. В случае, когда чертеж не слишком сложный, часто бывает целесообразнее поступать иначе: не фиксируя заранее выбор аксонометрических осей и коэффициентов искажения, мы производим построение с таким расчетом, чтобы чертеж представлял собой некоторую параллельную проекцию изображаемого тела. При этом следует руководствоваться рядом правил, которым удобная форма была придана Н. Ф. Четверухиным [50]; такой метод изображения тел является особенно ценным в школьной практике. Ниже мы рассмотрим его достаточно детально.

Остановимся сначала на случае *аффинных* задач, т. е. таких, в которых на готовом (хотя бы частично) чертеже требуется произвести построения, носящие аффинный характер (например, изобразить сечение тела данной плоскостью).

Пусть на чертеже (рис. 120) изображены две пересекающиеся плоскости α, β пространства и требуется построить проекции A, B, C, D четырех точек A, B, C, D , из которых первые две лежат на прямой $s = \alpha \cap \beta$, а остальные две — соответственно в плоскостях α и β . Тогда, в силу теоремы [38.11] Польке — Шварца точки A, B, C, D могут быть нанесены на чертеж совершенно произвольно с тем лишь ограничением, чтобы точки A и B лежали на изображении s прямой s (следует иметь в виду, что чертеж

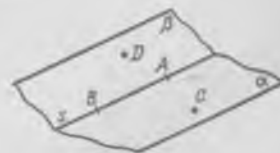


Рис. 120

делается всегда с точностью до подобия). Если в дальнейшем мы будем воспроизводить на чертеже аффинные свойства фигур, расположенных в плоскости α или в плоскости β , правильным образом, то в силу [38.1] чертеж представит собой их некоторую параллельную проекцию; сказанное сохранит силу и для фигур любой третьей плоскости γ , если только зафиксировано ее положение относительно плоскостей α, β (например, если на чертеж нанесены изображения прямых $\gamma \cap \alpha$ и $\gamma \cap \beta$).

Заметим, что при этом не следует изображать плоскость параллелограммом, представляющим проекцию лежащего в ней прямоугольника, так как тем самым мы вносим метрические соотношения, и сделанное выше заключение может оказаться неверным.

Исходя из этих соображений, вводя, следуя Н. Ф. Четверухину, понятие заданных элементов изображений¹ (элементами изображения мы называем точки, прямые и плоскости). Две какие-либо плоскости α, β , изображенные на чертеже, принимаем за основные; прямую $\alpha \cap \beta$ обозначим через s .

Плоскость задана, если она совпадает с одной из основных плоскостей или если на чертеже изображены или могут быть построены ее следы на плоскостях α и β , т. е. аксонометрические проекции прямых, по которым она пересекается с α и β .

Прямая, изображенная на чертеже, задана, если она лежит в одной из основных плоскостей или если на чертеже имеются или могут быть изображены ее следы на основных плоскостях, т. е. проекции точек пересечения прямой с этими плоскостями.

Точка, изображенная на чертеже, задана, если она лежит в заданной плоскости или на заданной прямой.

В дальнейшем (в п. 1 и 2) для упрощения записей мы будем обозначать (как это, по существу, и делают обычно) изображения точек пространства теми же буквами, что и сами точки; так же мы будем поступать для прямых и плоскостей. Из контекста будет ясно, какие операции на чертеже соответствуют упоминаемым операциям над фигурами пространства.

Перейдем к доказательству некоторых свойств заданных элементов.

1°. Прямая, проходящая через две заданные точки M и N , сама является заданной.

Сначала рассмотрим тот случай, когда одна из точек M, N лежит в основной плоскости α или β . Пусть (рис. 121) точка N принадлежит плоскости β , а точка M инцидентна прямой h , заданной своими следами A и B . Через прямые MN и AB проведем плоскость; ее следами будут прямые AX и BX , где $X = BN \cap s$. Точка $K = MN \cap AX$ лежит в плоскости α и является следом прямой MN в этой плос-

кости. Прямая MN заданная, так как построены оба ее следа: K (в α) и N (в β).

Если при том же условии для N точка M лежит в плоскости γ , заданной своими следами $a = \alpha \cap \gamma$ и $b = \beta \cap \gamma$, то, проведя через точку M произвольную прямую h , пересекающую a и b в точках A и B , придем к рассмотренной выше возможности.

Обратимся теперь к тому случаю, когда ни одна из точек M, N не лежит в основной плоскости. Пусть точки M, N лежат соответственно на прямых g, h , из которых первая задана следами A, B , а вторая — следами C, D (рис. 122). Если $X = s \cap DB$, то следами для плоскости DAB служат прямые AX и DX , а точка $K = DM \cap AX$ есть след прямой DM на плоскости α . Далее, мы можем построить следы KC и DY плоскости CDM , где $Y = KC \cap s$. Так как прямая MN расположена в плоскости CDM , то ее следами будут $P = MN \cap KY$ и $Q = MN \cap DY$.

2°. Плоскость ω , проходящая через заданную точку M и заданную прямую l , не инцидентную точке M , является заданной.

Пусть прямая l задана своими следами A, B , а точка M лежит на прямой, следы которой суть C, D (рис. 123). Прямая BM заданная (см. 1°); ее след на плоскости α есть $N = BM \cap XC$, где $X = BD \cap s$. Точки N, A, B лежат в плоскости ω ; поэтому ее следами являются прямые NY и BY , где $Y = NA \cap \beta$.

3°. Плоскость, проходящая через три заданные неколлинеарные точки A, B, C , — заданная.

Прямая AB является заданной по 1°; следовательно, в силу 2° будет заданной и плоскость ABC .



Рис. 121

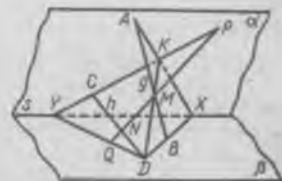


Рис. 122

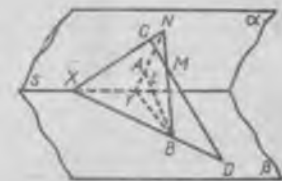


Рис. 123

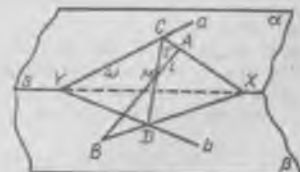


Рис. 124

¹ Н. Ф. Четверухин применяет термины «вполне заданные элементы» и «определенные элементы».

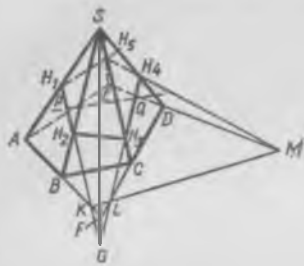


Рис. 125.

4°. Если плоскость ω и не лежащая в ней прямая l являются заданными, то задана и их точка пересечения $M = \omega \cap l$.

Пусть следы прямой l суть точки A, B , а следы плоскости ω — прямые a, b (рис. 124). Через точки A, B и через произвольную точку C прямой a проводим плоскость τ ; ее следами будут прямые AX и BX , где $X = AC \cap s$. Если $D = BX \cap b$, то $CD = \omega \cap \tau$; точка $M = AB \cap CD = l \cap \omega$ является заданной, как принадлежащая заданной прямой CD .

5°. Прямая $\omega \cap \tau$, по которой пересекаются две заданные плоскости ω и τ , также является заданной.

Если плоскости ω и τ заданы соответственно следами a, b и AX, BX (рис. 124), то точки $C = a \cap AX$ и $D = b \cap BX$ будут следами прямой $\omega \cap \tau$, вследствие чего эта прямая заданная.

Все доказанные утверждения можно объединить.

6°. Точки, прямые и плоскости, определяемые заданными элементами, сами являются заданными.

Согласно 4° и 5°, зная следы прямой l или плоскости ω на основных плоскостях α, β , мы можем на чертеже построить для l и ω их следы на любой третьей плоскости. Отсюда заключаем, что

7°. Любые две заданные плоскости могут быть приняты за основные.

2. Полные и неполные изображения. Изображение называется полным, если все его элементы (точки, прямые и плоскости) являются заданными. Это понятие мы поясним на двух нижеследующих примерах, в которых решаются аффинные задачи на готовых полных изображениях.

Пример 1. Изобразить сечение пирамиды $SABCDE$ плоскостью ω , проходящей через точку H_1 ребра SA и через прямую PQ , где точки P и Q лежат соответственно в плоскостях SAB и SCD (рис. 125).

Примем за основные плоскость основания $ABCD$ пирамиды, которую обозначим через α , и плоскость $\beta = SAB$; тогда точки S, A, B, C, D, E, P, H_1 окажутся заданными, как лежащие в основных плоскостях. Плоскость SCD задана, так как она проходит через три заданные неколлинеарные точки S, C, D (см. 3°); следовательно, будет

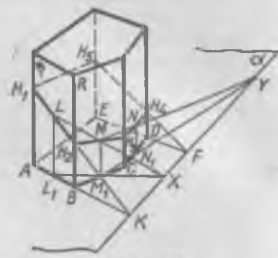


Рис. 126.

заданной и точка Q , как лежащая в заданной плоскости, а вместе с ней и прямая PQ (в силу предложения 1°). Таким образом, все элементы чертежа являются заданными, изображение полное, вследствие чего задача разрешима.

Сначала находим прямые, по которым плоскость ω пересекает грани SAB и SCD ; для этого строим точку $F = AB \cap CD$, прямую $SF = SAB \cap SCD$ и точку $G = H_1P \cap SF$; искомые прямые будут $PG = \omega \cap SAB$ и $QG = \omega \cap SCD$. Ими определяются точки $H_2 = PG \cap SB$, $H_3 = QG \cap SC$, $H_4 = QG \cap SD$, лежащие в плоскости ω , определен и след KL плоскости ω на основной плоскости α , где $K = PG \cap AB$, $L = QG \cap CD$. Остается нанести на чертеж точку $H_5 = \omega \cap SE$; если $M = DE \cap KL$, то $H_5 = H_4M \cap SE$. Искомое сечение есть пятиугольник $H_1H_2H_3H_4H_5$.

Пример 2. Построить сечение пятиугольной призмы с основанием $ABCDE$ плоскостью τ , проходящей через данные точки L, M, N , которые лежат соответственно в трех соседних боковых гранях призмы (рис. 126).

Изображение полное: примем плоскость оснований α и плоскость $\beta = ALB$ за основные; грань BMC задана следами BC и BR на основных плоскостях; грань CND проходит через заданную прямую CD и несобственную точку прямой BR и является заданной ввиду предложения 2°, и т. д.

Через точки L, M, N проводим прямые, параллельные ребру BR призмы, которые пересекут плоскость α соответственно в точках L_1, M_1, N_1 ; точки $X = LM \cap L_1M_1$ и $Y = MN \cap M_1N_1$ лежат в обеих плоскостях τ и α , так что прямая XY есть след плоскости τ на основной плоскости α . Соединяя прямой

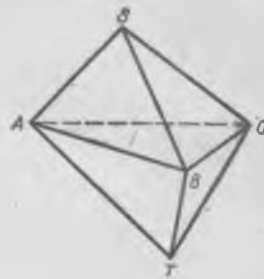


Рис. 127.

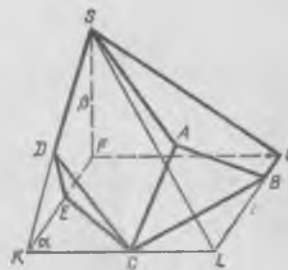


Рис. 128.

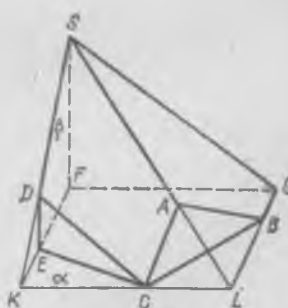


Рис. 129.

точки L и $K = AB \cap XY$, получаем след H_1H_2 плоскости τ на основной плоскости β , после чего, используя данные на чертеже точки M и N , последовательно строим прямые H_2H_3 и H_3H_4 , по которым τ пересекает грани MBC и NCD . Затем, отметив точку $F = DE \cap XY$, наносим на чертеж следы $H_4H_5 (= H_4F)$ и H_5H_6 плоскости τ на остальных двух гранях. Искомое сечение $H_1H_2H_3H_4H_5$ построено.

Ниже даны еще два примера, в первом из которых изображение неполное, а во втором ошибочное¹.

Пример 3. Показать, что изображение многогранника $SABCT$ на рисунке 127 неполное.

Покажем, что это изображение не определяет еще многогранника. По теореме [38.1] точки S, A, B, C можно принять (с точностью до подобия) за проекции вершин любого тетраэдра при подходящем выборе прямой l , задающей направление параллельного проектирования. Если точку T пространства, для которой проекцией служит точка T , мы сдвинем по прямой, параллельной l , то изображение многогранника останется тем же, сам же многогранник существенно изменится.

Пример 4. Показать, что многогранник $SABCDEFG$ изображен на рисунке 128 неправильно.

Чтобы это установить, рассуждаем так: плоскости $\alpha = BCE$ и $\beta = SFE$ примем за основные. Плоскость CDE задана своими следами: CE, ED на основных плоскостях α и β ; то же справедливо и для прямой CD (ее следы — точки C и D). Поэтому грань $SACD$, как проходящая через не инцидентные друг другу заданную точку S и заданную прямую CD , также является заданной (см. 2°); ее следы на основных плоскостях α и β суть KC и SD , где $K = SD \cap EF$.

По той же причине задана и плоскость SBG : она проходит через точку S и прямую BG , которые являются обе заданными. Ввиду предложения 5° прямая SA , по которой пересекаются плоскости $SACD$ и SBG , также заданная и может быть построена на чертеже; для этого следует соединить прямой точки S и $L = KC \cap BG$. На рисунке 128 прямая SA не совпадает с SL , в чем и состоит неправильность чертежа: фигура, на нем изображенная, ни при каком параллельном проектировании не может оказаться проекцией многогранника.

Правильное изображение многогранника $SABCDEFG$ дано на рисунке 129.

§ 42. Метрическая определенность изображений

1. Метрические задачи; случай плоской фигуры. Переходя к рассмотрению метрических задач, остановимся сначала на случае, когда изображаемая фигура расположена вся в одной плоскости ω . Здесь следует все время учитывать, насколько нанесенное уже на чертеж изображение части фигуры определяет собой метрику плоскости изображений σ , т. е. ту искаженную евклидову геометрию плоскости

(§ 26), в которую превращается при параллельном проектировании евклидова геометрия плоскости ω . В рассматриваемом случае, так как мы применяем параллельное проектирование, бесконечно удаленная прямая g искаженной евклидовой геометрии в плоскости изображений σ всегда совпадает с несобственной прямой этой плоскости, в которую проектируется несобственная прямая плоскости ω .

Метрика плоскости σ определяется, таким образом, заданием на ее несобственной прямой эллиптической инволюции u_σ , играющей роль абсолютной. Последнее равносильно заданию инволюции сопряженных диаметров (§ 25, п. 3) эллипса G плоскости σ , являющегося проекцией окружности S , расположенной в плоскости ω ; так как любой эллипс может рассматриваться как параллельная проекция окружности ([1, §34.4]), то

1°. В качестве абсолютной инволюции u_σ на несобственной прямой плоскости изображений σ может быть выбрана произвольная эллиптическая инволюция.

Нетрудно видеть, что u_σ определяется заданием двух действительных чисел или, как обычно говорят, двух параметров. В самом деле, не вводя метрических соотношений, мы можем отнести плоскость σ к аффинной системе координат; чтобы задать инволюцию u_σ , приняв за абсолютную, мы должны указать однородные аффинные координаты $(1, a, 0)$ и $(1, b, 0)$ точек $A_\infty^* = u_\sigma(A_\infty)$ и $B_\infty^* = u_\sigma(B_\infty)$, где A_∞, B_∞ суть соответственно несобственные точки осей OX и OY , поскольку двумя парами сопряженных точек A_∞, A_∞^* и B_∞, B_∞^* инволюция u_σ определяется однозначно (§ 13, п. 3, 1°).

В аксонометрии (§ 39) метрика плоскости XOY определена, если даны аксонометрические оси OX, OY и коэффициенты искажения e_x, e_y . Так как начало координат O и ось $O\bar{X}$ в плоскости XOY , а следовательно, точка O и аксонометрическая ось OX могут быть выбраны произвольно, а чертеж делается с точностью до гомотетии, то существенную роль здесь играют величина угла между аксонометрическими осями и отношение $e_x : e_y$, коэффициентов искажения — снова два параметра.

Один из этих двух параметров определится, если в сделанной части чертежа имеет место одно из нижеследующих соотношений (здесь, а также и во всем п. 4 нам будет удобнее отличать в обозначениях точку пространства $\bar{A}$ от ее изображения A и т. п.).

а) Даны изображения на плоскости σ двух перпендикулярных в натуре (т. е. на плоскости ω) прямых; тем самым задается одна пара A, A' точек абсолютной инволюции u_σ на несобственной прямой плоскости изображений σ . В самом деле, не нарушая общности, мы можем принять, что A есть несобственная точка оси OX , а A' — ее образ в инволюции u_σ , так что определится число a среди координат $(1, a, 0)$ точки A' .

б) Дано отношение в натуре двух непараллельных отрезков. Так как равенство параллельных отрезков есть аффинное их свойство, то мы можем считать, что оба отрезка исходят из одной точки P (рис. 130).

¹ Примеры п. 2 и многие из примеров § 40 и 41 заимствованы из [50] и [53].

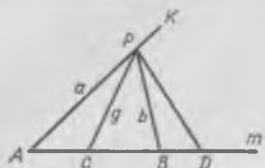


Рис. 130

Пусть PA и PB суть изображения отрезков $\bar{PA}$, $\bar{PB}$, отношение которых $\bar{PA} : \bar{PB} = \lambda$ дано. Если C, D — точки, которые делят отрезок AB в отношении λ внутренним и внешним образом: $AC : BC = -\lambda$, $AD : BD = \lambda$, то и $\bar{AC} : \bar{BC} = -\lambda$, $\bar{AD} : \bar{BD} = \lambda$; прямые $\bar{PC}$ и $\bar{PD}$ являются биссектрисами смежных углов $\bar{APB}$ и $\bar{BPC}$, так что

$\bar{PC} \perp \bar{PD}$. Мы пришли к случаю а).

в) Дана истинная величина φ изображенного на чертеже угла, поскольку тогда определится отношение катетов в прямоугольном треугольнике с углом φ (см. б).

г) Дано изображение g биссектрисы угла между прямыми $\bar{a}$, $\bar{b}$, пересекающимися в точке $\bar{P} = \bar{a} \cap \bar{b}$ (на чертеже имеются, кроме того, проекции a, b прямых $\bar{a}, \bar{b}$). Проводим на чертеже прямую m , не проходящую через точку $\bar{P} = \bar{a} \cap \bar{b}$ (рис. 130), и пусть $m \cap \bar{a} = A$, $m \cap \bar{b} = B$, $m \cap g = C$. Тогда $AC : CB = \bar{AC} : \bar{CB} = \bar{PA} : \bar{PB}$; случай г) сведен к б).

Отметим, что в силу б) справедливо такое утверждение:

2°. Метрика плоскости изображений σ определена, если заданы отношения в натуре длин сторон изображенного на σ треугольнике.

2. Изображение правильных многоугольников и замечательных точек треугольника. Чтобы показать, как применяются соображения п. 1, рассмотрим указанные в заглавии п. 2 задачи, часто встречающиеся на практике. При этом, конечно, предполагается, что предварительно на чертеж ничего не нанесено.

а) Правильный треугольник можно изобразить в виде произвольного треугольника; любой параллелограмм может быть принят за изображение квадрата (теорема [38.1], леммы 3° и 5°, § 38).

б) Чтобы изобразить правильный шестиугольник $\bar{ABCDEF}$, поступаем так (рис. 131, а) треугольник $\bar{ACE}$ строим произвольно; точка пересечения O его медиан есть проекция такой же точки для треугольника $\bar{ACE}$, т. е. центра $\bar{O}$ шестиугольника $\bar{ABCDEF}$ (так как середина отрезка, а следовательно, и медиана треугольника — понятия аффинные). Дальнейшее построение просто:

$$AB \parallel DE \parallel CO; BC \parallel EF \parallel AO; CD \parallel AF \parallel EO.$$

в) Построение изображения правильного пятиугольника $\bar{ABCDE}$ может быть проведено следующим образом. Диагональ $\bar{AD}$ параллельна стороне $\bar{BC}$, так как накрест лежащие углы $\bar{BCA}$ и $\bar{CAD}$ равны, как опирающиеся на равные хорды описанной около многоугольника $\bar{ABCDE}$ окружности S по той же причине $\bar{CE} \parallel \bar{AB}$. Следовательно, $\bar{ABCF}$, где $F = \bar{AD} \cap \bar{CE}$, есть параллелограмм; за его изобра-

жение $\bar{ABCF}$ принимаем произвольный параллелограмм (ср. а); рис. 131, б), что задает (см. п. 1, случаи б) и в)) метрику плоскости изображений. Отношение хорд $\bar{AD}$ и $\bar{BC}$ окружности S равно отношению синусов, опирающихся на них вписанных углов $\bar{ACD}$ и $\bar{BAC}$, так что

$$\frac{\bar{AD}}{\bar{AF}} = \frac{\bar{AD}}{\bar{BC}} = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = 2 \cos 36^\circ \approx 1,62.$$

Отношение отрезков, лежащих на одной прямой, инвариантно по отношению к аффинным преобразованиям (1, § 24, п. 1), поэтому и

$$\frac{\bar{AD}}{\bar{AF}} = 1,62,$$

что позволит построить точку D . Далее проводим из точки D прямую, параллельную $\bar{AC}$, до ее пересечения с $\bar{CF}$ в точке E и соединяем прямыми C с D и A , D с E . Многоугольник $\bar{ABCDE}$ есть искомое изображение правильного пятиугольника $\bar{ABCDE}$.

Правильный восьмиугольник читатель легко построит самостоятельно.

Обратимся к замечательным точкам треугольника. При построении изображений этих точек для треугольника $\bar{ABC}$ каждый раз предполагается, что отношения его сторон не заданы, так что треугольник $\bar{ABC}$ остается произвольным.

г) Точка пересечения медиан (центр тяжести) треугольника $\bar{ABC}$ изобразится центром тяжести треугольника $\bar{ABC}$, являющегося проекцией $\bar{ABC}$ на плоскость σ (ср. п. 1, б).

д) Ортоцентр (точка пересечения высот) $\bar{H}$ треугольника $\bar{ABC}$ определяет две пары перпендикулярных прямых: $\bar{BC}$, $\bar{AH}$ и $\bar{AC}$, $\bar{BH}$ (см. п. 1, а); мы оставляем в стороне тот тривиальный случай, когда высота $\bar{AH}$ совпадает с $\bar{AC}$; тогда $\bar{BH}$ сольется с $\bar{BC}$, а точка $\bar{H}$ с $\bar{C}$.

Изображения D_∞ , F_∞ и E_∞ , G_∞ несобственных точек прямых $\bar{BC}$, $\bar{AH}$ и $\bar{AC}$, $\bar{BH}$ составят две пары точек абсолютной инволюции u_σ плоскости изображений σ ; они могут быть выбраны произвольно (п. 1, 1°) лишь бы только имело место соотношение

$$D_\infty F_\infty \div E_\infty G_\infty \quad (1)$$

(следствие теоремы [13.3]; абсолютная инволюция должна быть эллиптической). Треугольник $\bar{ABC}$ у нас остается произвольным; следовательно, в качестве изображений A, B, C, H вершин треугольника $\bar{ABC}$ и его ортоцентра $\bar{H}$ можно взять любые четыре точки плоскости σ с тем лишь ограничением, что должно быть выполнено условие (1).

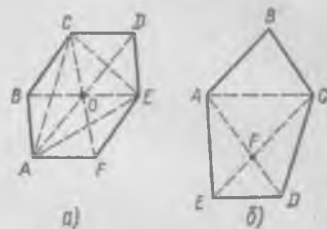


Рис. 131.

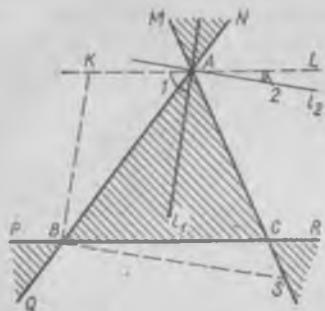


Рис. 132.

Проведем через точку A прямую $KL \parallel BC$ (рис. 132), и пусть m — прямая, проходящая через точку A и параллельная изображению BH высоты BH (на чертеж прямые m и BH не нанесены). Если прямая AH проходит внутри угла BAC (занимая, например, положение l_1), то в силу (1) $AL, l_1 \div AC$, т. так что прямая m проходит внутри угла $\angle 1$. Ей параллельная прямая BH окажется внутри угла KBC ($BH \parallel l_1$) и пересечет $l_1 = AH$ в точке H , лежащей либо внутри треугольника ABC , либо внутри угла MAN или же совпадающей с точкой A . Если изображение AH высоты AH есть прямая l_2 , расположенная внутри угла LAC , то $AL, l_2 \div AC$, m и прямая m — внутри угла $\angle 2$; BH пойдет внутри угла SBC ($BS \parallel l_2$) и пересечет l_2 в точке, внутренней для угла RCS . Если же l_2 — внутри угла LAN , то аналогичным образом убеждаемся, что точка H окажется тогда внутри угла PBQ . Наконец, если AH совпадает с AB , то H сливается с B . Итак,

3°. За изображение ортоцентра (точки пересечения высот) произвольного треугольника ABC можно принять любую точку, лежащую внутри области, заштрихованной на рисунке 132 (т. е. внутри треугольника ABC или внутри одного из углов MAN, PBQ, RCS), или же одну из точек A, B, C .

После этого чертеж становится метрически определенным (т. е. метрика плоскости изображения σ оказывается заданной), так как определяется абсолютная инволюция U_σ плоскости σ .

е) Случай центра O описанной около треугольника ABC окружности сводится к предыдущему, так как O есть ортоцентр треугольника DEF , где D, E, F — середины сторон треугольника ABC .

ж) Вместе с центром Q вписанной в треугольник ABC окружности определяются биссектрисы AQ, BQ, CQ внутренних углов этого треугольника; каждая из них делит противоположную сторону треугольника пропорционально двум остальным его сторонам; тем самым становятся известными отношения сторон a, b, c треугольника ABC . Как в случае д), убеждаемся, что образами A, B, C, Q точек A, B, C, Q могут служить любые четыре точки плоскости σ , если только обеспечена справедливость соотношений:

$$b + c > a; a + c > b; a + b > c. \quad (2)$$

Чтобы установить условия, при которых имеют место неравенства (2), рассуждаем так: пусть AD и BE — изображения биссектрис

углов при вершинах A и B (рис. 133). Так как $BD : DC = c : b$, то $BD = \frac{ac}{b+c}$; применяя тоже известное предложение о свойстве биссектрисы к треугольнику ABD , получаем:

$$|AQ| : |QD| = |AQ| : |QD| = |AB| : |BD| = \\ = c : \frac{ac}{b+c},$$

так что

$$AQ : QD = \frac{b+c}{a}.$$

Таким образом, первое из неравенств (2) справедливо тогда и только тогда, когда $AQ : QD > 1$, т. е. когда точки Q и A расположены на разные стороны от средней линии NP треугольника ABC . Аналогичные рассуждения можно провести и для остальных двух биссектрис; мы приходим к такому выводу:

4°. В качестве изображения Q центра вписанной в произвольный треугольник ABC окружности может быть взята любая точка, расположенная внутри треугольника MNP , образованного средними линиями треугольника ABC (рис. 133).

3. Метрические задачи; случай пространственной фигуры. Метрика в пространстве определяется пятью параметрами; за таковые можно, например, принять отношения одного ребра AB тетраэдра $SABC$ к пяти остальным его ребрам (см. рис. 134, на котором в согласии с теоремой [38.1] Польке — Шварца вершины этого тетраэдра изображены четырьмя произвольными точками S, A, B, C общего положения плоскости изображений). В самом деле, указанные пять отношений задают согласно предложению п. 1, 2° метрику для изображений фигур, расположенных в гранях SAB, SAC и SBC ; произвольная плоскость пересечет эти грани по треугольнику KLM , у которого отношения сторон также будут известны (отношение $KL : LM$ равно частному от деления отношений $KL : SL$ и $LM : SL$ и т. п.), вследствие чего определится метрика и для изображений фигур этой плоскости.

Рассмотрим только что сказанное с точки зрения аксонометрии, как мы это сделали выше (п. 1) для случая плоскости. Метрика изображений фигур плоскости ABC , в которой мы расположим оси OX, OY , задается двумя параметрами (п. 1). Далее мы должны дать отношение

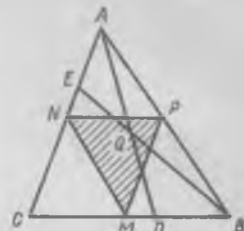


Рис. 133.

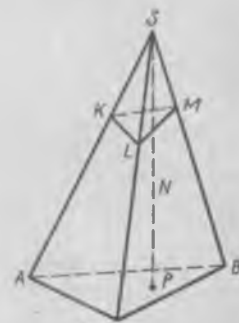


Рис. 134.

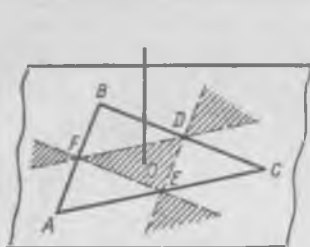


Рис. 135.

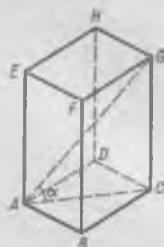


Рис. 136.

$e_z : e_x$ третьего и первого коэффициентов искажения и величину угла ZOX (третий и четвертый параметры). Изображение SP высоты SP тетраэдра $SABC$ (точка P — в плоскости ABC) совпадает с прямой SN , параллельной аксонометрической оси OZ (рис. 134). Положение точки S в пространстве (а вместе с ним и отношение всех ребер тетраэдра $SABC$, следовательно, и метрика пространства), определится, если мы зададим на прямой SN вторичную проекцию P точки S ; для этого нам понадобится последний, пятый параметр: отношение $SP : AB$.

Применение изложенного в п. 1—3 на практике поясним на нескольких примерах, в которых мы снова, как и в § 4, будем обозначать одинаково как точку пространства, так и ее изображение. Некоторые из них взяты из [45]; в таких примерах воспроизводится полная формулировка задачи, однако требуется выполнить только соответствующий чертеж.

Пример 1. Определить множество всех точек пространства, равноудаленных от трех данных точек A, B, C , не лежащих на одной прямой ([45], § 1, № 10).

Треугольник ABC изображаем произвольно (рис. 135). Решив задачу, мы установим, что искомое геометрическое место есть перпендикуляр, восстановленный к плоскости ABC из центра O описанной около треугольника ABC окружности. Точку O можем взять где угодно в заштрихованной на чертеже области (п. 2, е); D, E, F — середины сторон треугольника ABC ; сам перпендикуляр проводим через его основание O произвольно (см. выше, п. 3).

Пример 2. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда имеют длину 4 и 3 см; высота параллелепипеда равна 5 см. Найти его диагональ и угол, образованный ею с плоскостью основания ([45], § 2, № 1).

По теореме [38.1] Польке — Шварца вершины A, B, C, E параллелепипеда могут быть изображены любыми четырьмя несвязанными точками (рис. 136), после чего метрика пространства оказывается заданной (так как в тетраэдре $EABC$ известны согласно условиям

задачи отношения длин всех ребер). В остальном чертеж вполне определяется тем, что изображения всех граней параллелепипеда должны представлять собой параллелограммы.

Пример 3. Изобразив куб, построить его сечение плоскостью ω , которая перпендикулярна к его диагонали и проходит через данную на ней точку M .

Куб изображается с тем же произволом, что и в предыдущем примере, после чего, как там показано, метрика пространства становится определенной; поэтому при дальнейшем построении чертежа мы должны базироваться на аффинных свойствах изображаемой фигуры.

Пусть данная точка M лежит на диагонали EC (рис. 137). Так как $ED \perp AH$, $EB \perp AF$, то по теореме о трех перпендикулярах $EC \perp AH$ и $EC \perp AF$; поэтому плоскость $\alpha = AFH$ перпендикулярна к прямой EC и параллельна, следовательно, плоскости ω . Плоскости α и $\beta = ACGE$ пересекаются по прямой AK , где $K = EG \cap FH$. Прямая $\omega \cap \beta$ параллельна прямой AK и содержит точку M (так как M лежит в плоскости β); точка L , в которой прямая $\omega \cap \beta$ пересекает плоскость верхней грани $EFGH$, лежит на ее диагонали EG . Мы получим, таким образом, точку L , если проведем через точку M прямую, параллельную AK , до ее пересечения в L с EG ; так как $\omega \parallel \alpha$, то плоскости ω и $EFGH$ пересекаются по прямой P_1P_2 , проходящей через точку L и параллельной HF , что и позволяет нам построить одну сторону P_1P_2 искомого сечения. Далее проводим $P_2P_3 \parallel AF$, $P_3P_4 \parallel HA$, $P_4P_5 \parallel HF$, $P_5P_6 \parallel AF$ и соединяем прямой точки P_6 и P_1 ; сечение $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ куба плоскостью ω построено.

Пример 4. Изобразить круговой конус, вписанный в правильную треугольную пирамиду $SABC$ (рис. 138).

Окружность основания конуса изображаем произвольным эллипсом G ; треугольник ABC образуется тремя любыми касательными к G . Если D, E, F — середины стороны треугольника ABC , то центр T основания конуса может быть изображен любой точкой, лежащей

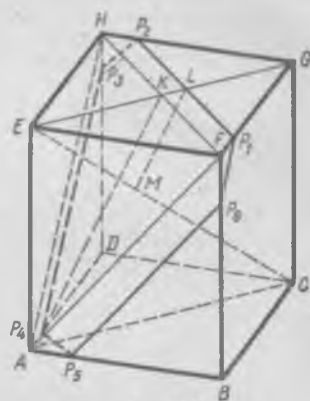


Рис. 137.

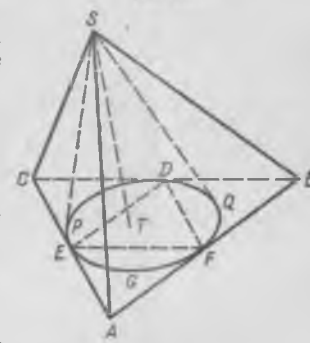


Рис. 138.

внутри треугольника DEF (п. 2, 4°). Произвольный отрезок TS , исходящий из точки T , изобразит высоту конуса.

Остается построить отрезки SP и SQ , ограничивающие с боков изображение конуса. С этой целью рассуждаем так: проведем в пространстве все прямые, которые касаются конуса и параллельны прямой l , задающей направление проектирования; они заполнят две плоскости, касательные к конусу (проходящие через его вершину S) и параллельные прямой l . Так как эти плоскости касаются также и окружности основания конуса, то они пересекут плоскость изображений σ по касательным к эллипсу G , проведенным из точки S , на которых и расположатся искомые отрезки SP и SQ .

Выясним, определяет ли построенный нами чертеж метрику пространства; для этого подсчитаем затраченные параметры, руководствуясь соображениями из аксонометрии. Примем, что оси OX , OY лежат в плоскости основания конуса; эллипс G , являющийся проекцией окружности основания конуса, задает для плоскости XOY абсолютную инволюцию u_σ ; следовательно, начертив эллипс G , мы затратили два параметра (см. п. 1). Выбрав точку T в качестве вторичной проекции точки S и направление $TS \parallel OZ$, мы используем еще два параметра (см. начало п. 3). Один параметр остался у нас в запасе, а именно отношение $e_2 : e_1$, так как мы оставили неопределенной длину высоты конуса.

Как видно из рассмотренных в п. 3 примеров, надлежит руководствоваться таким правилом:

5°. Как только метрика пространства (или плоскости) оказалась заданной, в дальнейшем построении чертежа следует воспроизводить лишь аффинные свойства изображаемой фигуры.

Правило 5° показывает, что умение различать аффинные свойства геометрических образов от неаффинных имеет важное практическое значение.

Более подробные сведения по теории полных и неполных изображений читатель найдет в книге Четверухина [50].

§ 43. Метод Монжа

1. Основные положения. В методе Монжа¹ изображаемая фигура проектируется ортогонально на две взаимно перпендикулярные плоскости σ_1 и σ_2 (рис. 139). Плоскость σ_1 обычно представляют себе расположенной горизонтально; ее именуют горизонтальной плоскостью проекций. Плоскость σ_2 называется фронтальной плоскостью проекций, прямая x , по которой пересекаются плоскости σ_1 и σ_2 , носит название оси проекций. После построения обеих проекций плоскость σ_1 вращаем вокруг прямой x в направлении, показанном на рисунке 139 стрелкой, до совмещения с плоскостью σ_2 , так что на чертеже обе

проекции мы имеем в одной плоскости. Построенный таким образом чертеж именуется э п ю р о м.

В теории метода Монжа даются способы для построения эпюра по данному телу, и обратно, для восстановления изображаемого тела по эпюру. Достоинство метода Монжа в том, что он дает возможность с помощью простых построений найти по эпюру точно все размеры изображаемой фигуры, в силу чего этот метод широко применяется в инженерной практике. Недостатком метода Монжа является отсутствие наглядности изображений.

2. Изображение точки. Пусть в пространстве дана точка A ; опускаем из нее перпендикуляры на обе плоскости проекций (рис. 139). Основания A_1 и A_2 этих перпендикуляров и будут ортогональными проекциями точки A на плоскости σ_1 и σ_2 ; точка A_1 называется горизонтальной проекцией точки A , а точка A_2 — ее фронтальной проекцией. Плоскость A_1AA_2 , содержащая оба перпендикуляра AA_1 и AA_2 , именуется проектирующей плоскостью. Она в силу известной теоремы стереометрии будет перпендикулярна к плоскости σ_1 и к плоскости σ_2 , а следовательно, и к оси проекций $x = \sigma_1 \cap \sigma_2$. Обозначив через A_0 точку пересечения проектирующей плоскости A_1AA_2 с осью проекций x , будем, таким образом, иметь:

$$A_1A_0 \perp x; \quad A_2A_0 \perp x. \quad (1)$$

После поворота вокруг оси x мы получим на эпюре изображение, показанное на рисунке 140: обе проекции A_1 и A_2 расположатся на одном и том же перпендикуляре к оси проекций x . Горизонтальная и фронтальная плоскости проекций разбивают все пространство на четыре четверти (квадранта); эти четверти нумеруются так, как показано на рисунке 141. Если точка A лежит в I четверти, то ее горизонталь-

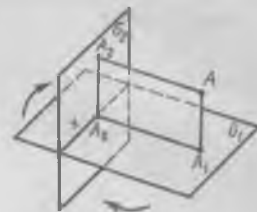


Рис. 139.

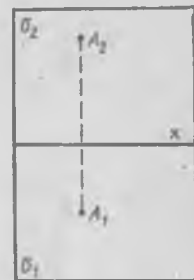


Рис. 140.

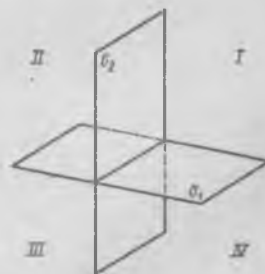


Рис. 141.

¹ М о н ж Гаспар (1746—1818) — выдающийся французский математик, видный деятель французской буржуазной революции.

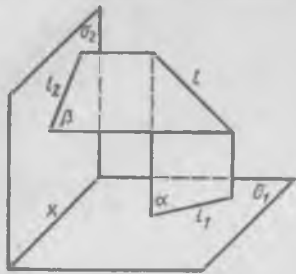


Рис. 142.

ная проекция A_1 будет расположена под осью проекций, а фронтальная A_2 — над осью проекций (см. рис. 140). Если точка A находится во II или в IV четверти, то обе точки A_1 и A_2 окажутся соответственно над осью проекций или под ней. Наконец, для точки A , расположенной в III четверти, горизонтальная проекция A_1 будет над осью проекций, а фронтальная A_2 — под ней.

Обратно, пусть на эюре даны обе проекции A_1 и A_2 . Тогда, приведя плоскости σ_1 и σ_2 в их первоначальное положение (см. рис. 139), восстановим в проектирующей плоскости перпендикуляры к A_0A_1 из точки A_1 и к A_0A_2 из точки A_2 . Так как первый из этих перпендикуляров параллелен прямой A_0A_2 , а второй — прямой A_0A_1 , то они пересекутся; их точка пересечения и будет та точка A пространства, для которой A_1 и A_2 суть соответственно горизонтальная и фронтальная проекции. Итак,

1°. Точка пространства A однозначно определяет обе свои проекции A_1 и A_2 . Обратно, две точки эюра A_1 и A_2 , расположенные на одном и том же перпендикуляре к оси проекций и принятые соответственно за горизонтальную и фронтальную проекции, определяют одну и только одну точку A пространства.

Ввиду 1° принято обозначение: $A (A_1, A_2)$.

3. Изображение прямой и плоскости. В силу предложения § 38,2° (с. 192), если прямая l не перпендикулярна плоскости σ_1 , то горизонтальные проекции точек, лежащих на прямой l , расположатся все на одной прямой l_1 ; прямая l_1 есть горизонтальная проекция прямой l . Аналогичным путем приведем к понятию фронтальной проекции l_2 прямой l .

Нетрудно показать, что

2°. Любые две прямые l_1 и l_2 на эюре могут быть приняты за горизонтальную и фронтальную проекции некоторой прямой l пространства, если только ни одна из прямых l_1 и l_2 не перпендикулярна к оси проекций x .

В самом деле, приведя плоскости σ_1 и σ_2 в их первоначальное положение (как на рисунке 139), построим плоскость α , перпендикулярную к плоскости σ_1 и проходящую через прямую l_1 (рис. 142), и плоскость β , перпендикулярную к σ_2 и проходящую через l_2 . Плоскости α и β могут оказаться параллельными тогда и только тогда, когда обе они перпендикулярны и к σ_1 , и к σ_2 , т. е. к оси проекций x . Поскольку этот случай исключен (см. условия 2°), то плоскости α и β пересекутся по прямой l , для которой l_1 и l_2 будут соответственно горизонтальной и фронтальной проекциями.

Прямую l можно также задать ее следами, т. е. точками $L = l \cap \sigma_1$ (горизонтальный след) и $M = l \cap \sigma_2$ (фронтальный след, рис. 143). Между проекциями l_1 и l_2 прямой и ее следами L и M существует простая связь, которую читатели легко установят самостоятельно.

Плоскость α будет задана, если на эюре мы укажем ее горизонтальный след $h_1 = \alpha \cap \sigma_1$ и вертикальный $h_2 = \alpha \cap \sigma_2$ (рис. 144). При этом прямые h_1 и h_2 должны пересекаться в точке P , лежащей на оси проекций ($P = \alpha \cap x$).

Ввиду отсутствия наглядности метод Монжа в школьной практике не получает применения; поэтому входить в детали теории нам нет надобности. Читателю, желающему подробнее ознакомиться с методом Монжа, рекомендуем книги [19] и [51].

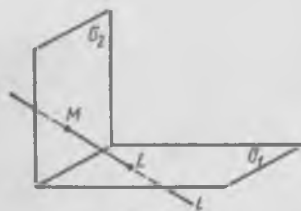


Рис. 143.

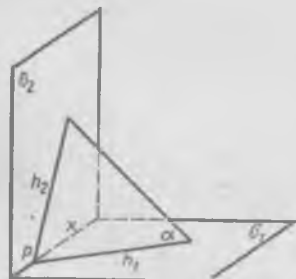


Рис. 144.

В этом разделе курса читатель познакомится с вопросами аксиоматики геометрии как в их современном состоянии, так и в историческом освещении. Здесь прежде всего дано обоснование трехмерной евклидовой геометрии по Вейлю. В главе X читатель найдет изложение аксиоматики Гильберта в обзорном порядке. На базе этой аксиоматики в главе XII построена теория измерения отрезков, площадей и объемов. Специальная глава посвящена основным фактам геометрии Лобачевского.

При изложении материала настоящего раздела предполагается, что читатель знаком с общими принципами аксиоматического построения той или иной математической дисциплины, в частности с такими фундаментальными понятиями, как неопределяемые объекты и отношения, аксиомы, определения, теоремы и т. д. Далее мы предполагаем, что читатель знаком с аксиоматическим построением теории действительных чисел и векторных пространств. Более того, в первой части настоящего курса были изучены основы теории n -мерных аффинных и евклидовых пространств на базе аксиом Вейля. В связи с этим здесь дан только краткий обзор основных принципов аксиоматического построения геометрии; основное внимание уделено изложению фактического материала, а также рассмотрению основных требований, предъявляемых к сформулированным системам аксиом.

Глава IX

ОБОСНОВАНИЕ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ ПО ВЕЙЛЮ

В настоящей главе дано обоснование евклидовой геометрии на базе аксиом Вейля. Эта аксиоматика существенно отличается от той, с которой мы знакомимся в школьном курсе геометрии, хотя обе эти системы по существу приводят к одной и той же геометрии. Более подробное изложение геометрии по Вейлю читатель найдет в книге

Дьедонне [21]. Следует, однако, отметить, в этой книге основные понятия несколько отличаются от тех, которые приняты нами.

§ 44. Точечно-векторная аксиоматика трехмерного евклидова пространства

1. Основные понятия аксиоматики Вейля. В системе аксиом Вейля основными объектами считаются векторы и точки, а основные отношения таковы:

а) Сумма двух векторов. Если даны векторы a и b , то однозначно определяется вектор, который называется их суммой и обозначается так: $a + b$.

б) Произведение вектора на число. Если даны вектор a и произвольное действительное число α , то однозначно определяется вектор, который называется произведением числа α на вектор a и обозначается через αa или $a\alpha$.

в) Скалярное произведение, установленное ненулевым вектором. Если зафиксировать некоторый произвольно выбранный ненулевой вектор u , то для любых векторов a и b однозначно определяется число, которое называется их скалярным произведением, установленным вектором u (обозначается через ab/u). Вектор u будем называть вектором измерения.

г) Принадлежность упорядоченной пары точек и вектора. Если даны две произвольные точки A и B (различные или совпадающие), то всегда однозначно определяется вектор, принадлежащий этой паре точек, который обозначается через $\overrightarrow{AB}$.

Существенно подчеркнуть, что для нас конкретная природа основных понятий совершенно безразлична; важно лишь, чтобы основные понятия удовлетворяли аксиомам, перечисленным ниже.

2. Система аксиом Вейля. Перечисленные выше основные понятия вместе с действительными числами удовлетворяют сформулированным ниже аксиомам¹. В этих аксиомах приняты следующие обозначения: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — действительные числа; a, b, c, u, v — векторы; A, B, C — точки. Соотношение $x = y$ означает, что через x и y обозначен один и тот же объект.

1°. Аксиомы линейного векторного пространства.

V1. $\forall a, \forall b: a + b = b + a$;

V2. $\forall a, \forall b, \forall c: (a + b) + c = a + (b + c)$;

V3. Существует такой вектор 0 (нуль-вектор), что для любого a имеем: $0 + a = 0$;

¹ Эти аксиомы могут быть получены из аксиом, приведенных в I, § 65 и 66, если положить $n = 3$. Список логических символов и обозначений, использованный здесь, помещен на страницах 431—433.

$$V4. \forall \alpha : 1 \cdot \alpha = \alpha;$$

$$V5. \forall \alpha, \forall \beta, \forall a : \alpha (\beta a) = (\alpha \beta) a;$$

$$V6. \forall \alpha, \forall a, \forall b : \alpha (a + b) = \alpha a + \alpha b;$$

$$V7. \forall \alpha, \forall \beta : (\alpha + \beta) a = \alpha a + \beta a.$$

2°. Аксиомы размерности.

D1. Существует хотя бы одна тройка векторов a_0, b_0, c_0 такая, что из соотношения $\alpha a_0 + \beta b_0 + \gamma c_0 = 0$ следует

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

D2. Для любых четырех векторов a, b, c и d существуют числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ такие, что $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq (0, 0, 0, 0)$ и $\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0$.

3°. Аксиомы скалярного произведения.

E1. Если u — некоторый произвольно выбранный ненулевой вектор, то $\forall a, \forall b : ab/u = ba/u$.

E2. Если u — некоторый произвольно выбранный ненулевой вектор, то $\forall a, \forall b, \forall c : (a + b) c/u = ac/u + bc/u$.

E3. Если u — некоторый произвольно выбранный ненулевой вектор, то $\forall a, \forall b, \forall \alpha : (\alpha a) b/u = \alpha(ab/u)$.

E4. Если u и a — произвольно выбранные ненулевые векторы, то $aa/u > 0$.

E5. Если u и v — произвольно выбранные ненулевые векторы, то для любого вектора a имеем: $aa/u = (vv/u)(aa/v)$.

4°. Аксиомы принадлежности.

T1. Существует по крайней мере одна точка.

T2. Для произвольной точки A_0 и произвольного вектора b существует одна и только одна точка B такая, что $\overrightarrow{A_0 B} = b$.

T3. $\forall A, \forall B, \forall C : \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ¹.

Мы видим, что аксиомы Вейля разбиты на четыре группы. Сочетая те или иные группы аксиом, мы получаем аксиоматики различных пространств. Для дальнейшего изложения нам необходимо определить следующие пространства:

а) **Линейное векторное пространство V .** Основными объектами являются векторы, основными соотношениями — сумма векторов и умножение вектора на числа, а аксиомами — предложения V1—V7 (система аксиом V).

б) **Линейное векторное трехмерное пространство V_3 .** Основные объекты те же, что и для пространства V , а аксиомами являются предложения V1—V7, D1, D2 (система аксиом V_3).

в) **Трехмерное векторное евклидово пространство E_3 .** Основными объектами являются векторы, а основными соотношениями — сумма векторов, умножение вектора на число и скалярное произведение двух векторов. Аксиомами этого пространства являются предложения V1—V7, D1, D2, E1—E5 (система аксиом E_3).

г) **Точечно-векторное трехмерное аффинное пространство TV_3 .** Основными понятиями являются векторы, точки и все соотношения, перечисленные в п. 1. Аксиомами этого пространства являются предложения V1—V7, D1, D2, T1—T3 (система аксиом TV_3).

д) **Точечно-векторное трехмерное евклидово пространство TE_3 .** Основными понятиями геометрии являются все понятия, перечисленные в п. 1, а аксиомами — все предложения V1—V7, D1, D2, E1—E5, T1—T3 (система аксиом TE_3).

Изменив требования о числе векторов, входящих в аксиомы D1 и D2, мы получаем аксиомы для соответствующих многомерных пространств.

3. Понятие о математической структуре; изоморфизм. Всякое пространство в геометрии, рассматриваемое как множество элементов, характеризуется той или иной структурой. Поясним эту мысль на примере пространства TE_3 , так как в дальнейшем изложении мы будем изучать главным образом это пространство. В терминах теории множеств и логики пространство TE_3 можно определить следующим образом. Пусть $R(\alpha, \beta, \gamma \dots)$ множество действительных чисел. Даны два множества объектов $\Omega_V(a, b \dots)$ и $\Omega_T(A, B, \dots)$, элементы которых называются соответственно векторами и точками (основные объекты). Предположим, далее, что заданы следующие отображения (основные отношения)¹:

$$a) f^+ : \Omega_V \times \Omega_V \rightarrow \Omega_V;$$

$$b) f^- : \Omega_V \times \Omega_V \times \Omega_V \rightarrow R;$$

$$c) f^m : R \times \Omega_V \rightarrow \Omega_V;$$

$$г) f^t : \Omega_T \times \Omega_T \rightarrow \Omega_V.$$

Множество $\Omega_V \cup \Omega_T$ называется пространством TE_3 , если данные отображения удовлетворяют перечисленным выше аксиомам. При этом для удобства изложения мы пользуемся следующими обозначениями для данных отображений:

$$\forall a, \forall b (a, b \in \Omega_V) : f^+(a, b) = a + b, \quad f^-(a, b, u) = ab/u,$$

$$\forall a, \forall \lambda (\lambda \in R, a \in \Omega_V) : f^m(\lambda, a) = \lambda a;$$

$$\forall A, \forall B (A, B \in \Omega_T) : f^t(A, B) = \overrightarrow{AB}.$$

¹ В аксиомах T2 и T3 точки A, B и C не обязательно различны.

¹ См. указатель символов и обозначений на с. 431—433.

Сформулированные выше аксиомы удобны тем, что они разбиты на группы, которые позволяют выделить различные специфические свойства пространства, исходя из соответствующих свойств вышеуказанных отображений. В математике принято говорить, что эти аксиомы позволяют выделить различные структуры пространства TE_3 . Например, аксиомы $V1 - V4$, в которых сформулированы основные свойства отображения f^+ , определяют групповую структуру пространства, поэтому эти аксиомы называются аксиомами групповой структуры, а множество Ω_v — базой этой структуры. Аксиомы $V1 - V7, D1, D2, T1 - T3$, в которых сформулированы основные свойства отображений f^+, f^m и f' , определяют аффинную структуру пространства, поэтому они называются аксиомами аффинной структуры, а множества R, Ω_v и Ω_T — базой этой структуры. Эти аксиомы, в частности, позволяют выделить среди различных подмножеств точек прямые и плоскости; точно также аксиомы $E1 - E5$ определяют метрическую структуру пространства: в пространстве определен закон, согласно которому всяким двум точкам ставится в соответствие число, называемое расстоянием между точками.

Понятие структуры тесно связано с понятием изоморфизма, известным читателю из курса алгебры и теории чисел, а также из первой части нашего курса. В терминах понятия структуры пространства изоморфизм определяется как такое взаимно однозначное соответствие основных объектов двух пространств, при котором, образно выражаясь, сохраняется структура пространства. В частности, изоморфизм евклидовых точечно-векторных пространств определяется так. Пусть TE_3 — пространство, в котором даны функции f^+, f', f^m, f' , удовлетворяющие аксиомам, перечисленным выше, а $\bar{TE}_3$ — другое пространство, в котором даны функции $\bar{f}^+, \bar{f}', \bar{f}^m, \bar{f}'$, удовлетворяющие тем же аксиомам. Пространства $\bar{TE}_3$ и TE_3 называются изоморфными, если существует такое взаимно однозначное соответствие $x' = g(x)$ и $X' = g(X)$ между векторами и точками этих пространств, что при любом выборе векторов p, q, u , точек P, Q и числа α имеем:

$$r = f^+(p, q), s = f^m(\alpha, p), \lambda = f'(p, q, u), t = f'(P, Q) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r' = \bar{f}^+(p', q'), s' = \bar{f}^m(\alpha, p'), \lambda = \bar{f}'(p', q', u'), t' = \bar{f}'(P', Q').$$

Здесь p', q', u', r', s', t' — образы, соответственно, векторов p, q, u, r, s, t , а P' и Q' — образы точек P и Q . Ниже, в главе XIII, будет показано, что любые два пространства TE_3 изоморфны друг другу.

4. О непротиворечивости системы аксиом. Как уже упоминалось выше, при логическом обосновании геометрии мы обладаем известной свободой в выборе основных понятий и аксиом. Поэтому естественно возникает вопрос: всякую ли систему предложений можно при-

нять в качестве аксиом? Ниже, в главе XIII мы подробно изучим этот вопрос и покажем, что система геометрических аксиом не может быть произвольной, а должна удовлетворять определенным требованиям.

Наиболее существенным из них является требование непротиворечивости, которое является безусловным не только для геометрической системы аксиом, но и для системы аксиом любой другой математической дисциплины. Смысл этого требования состоит в следующем: система аксиом называется непротиворечивой, если любые два логических следствия из этой системы не противоречат друг другу. Другими словами, пользуясь непротиворечивой системой аксиом, нельзя прийти к двум предложениям, логически исключаящим друг друга. Вполне понятно значение этого требования: если система аксиом противоречива, то нет смысла изучать ее, так как она не может иметь практического применения.

Естественно возникает вопрос: как доказать непротиворечивость данной системы аксиом? Для того чтобы ответить на этот вопрос, напомним читателю понятие интерпретации системы аксиом, введенное нами в § 4. Интерпретацией (или реализацией) данной системы аксиом называется совокупность конкретных объектов с определенными отношениями между ними, для которых выполнены все аксиомы данной системы. Другими словами, при построении интерпретации основным объектам и отношениям между ними придается определенный конкретный смысл. Вопрос о непротиворечивости системы аксиом решается подбором интерпретации. В самом деле, если рассматриваемые аксиомы могут быть реализованы каким-либо способом на модели и если мы уверены в том, что система тех понятий, которые были использованы при построении этой модели, непротиворечива, то из данных аксиом нельзя правильными рассуждениями вывести двух предложений, логически исключаящих друг друга, т. е. из которых одно является отрицанием другого.

Для доказательства непротиворечивости той или иной геометрической системы аксиом обычно строят так называемую аналитическую интерпретацию. При этом предполагается, что на базе аксиом арифметики построена теория действительных чисел и действий над ними. Опираясь на это, дается конкретное истолкование основным объектам и соотношениям между ними. Таким образом, вопрос о непротиворечивости данной геометрической системы аксиом сводится к вопросу о непротиворечивости арифметики.

5. Непротиворечивость системы аксиом трехмерного евклидова пространства. Пользуясь этой схемой, докажем следующую фундаментальную теорему.

Теорема [44.1]. Трехмерное евклидово точечно-векторное пространство, построенное на системе аксиом TE_3 , непротиворечиво, если непротиворечива арифметика действительных чисел.

Доказательство. Согласно предыдущему доказательство теоремы сводится к построению аналитической интерпретации системы аксиом $V1 - V7, D1, D2, E1 - E5, T1 - T3$. Введем следующие

соглашения, позволяющие интерпретировать основные понятия аксиоматики Вейля при помощи действительных чисел.

1°. Вектором назовем любую матрицу-столбец вида $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$,

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — произвольные действительные числа. При этом два вектора совпадают тогда и только тогда, когда соответствующие элементы двух матриц равны. Совпадение векторов обозначается знаком равенства.

2°. Суммой векторов $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ назовем вектор $\begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \alpha_3 + \beta_3 \end{pmatrix}$.

3°. Произведением числа λ на вектор $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ называется вектор $\begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \lambda\alpha_2 \\ \lambda\alpha_3 \end{pmatrix}$.

4°. Скалярным произведением векторов $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$, установленным ненулевым вектором $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, называется число $\frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.

5°. Точкой назовем любую матрицу-строку вида $(\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3)$, где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — произвольные действительные числа. При этом точки $(\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3)$ и $(\eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3)$ совпадают тогда и только тогда, когда $\xi_1 = \eta_1, \xi_2 = \eta_2, \xi_3 = \eta_3$.

6°. Будем говорить, что упорядоченная пара точек $(\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3)$, $(\eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3)$ и вектор $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ принадлежат друг другу, если $\eta_1 - \xi_1 = \alpha_1, \eta_2 - \xi_2 = \alpha_2, \eta_3 - \xi_3 = \alpha_3$.

Легко видеть, что при этих соглашениях все аксиомы Вейля трехмерного евклидова пространства выполняются. Проверка аксиом $V1 - V7, D1, D2, E1 - E5$ почти тривиальна, если заметить, что

роль вектора 0 (аксиома V_3) играет матрица-столбец $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, а в качестве векторов a_0, b_0, c_0 (аксиома $D1$) могут быть приняты, например,

матрицы-столбцы $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Заметим далее, что выполнение ак-

сиомы $T1$ непосредственно следует из существования действительных чисел. Остается проверить аксиомы $T2$ и $T3$.

А к с и о м а $T2$. Пусть $A_0 = (a_1 \ a_2 \ a_3)$ — произвольная точка, а $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ — произвольный вектор. Мы должны доказать предложе-

ние: существует одна и только одна точка $B = (\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3)$ такая, что $\overline{A_0B} = b$. В соответствии с соглашением 6° последнее соотношение равносильно условиям: $\xi_1 - a_1 = b_1, \xi_2 - a_2 = b_2, \xi_3 - a_3 = b_3$. Отсюда с очевидностью следует, что существует одна и только одна тройка чисел ξ_1, ξ_2, ξ_3 , удовлетворяющая этим числовым равенствам.

А к с и о м а $T3$. Пусть $A = (a_1 \ a_2 \ a_3), B = (b_1 \ b_2 \ b_3)$ и $C = (c_1 \ c_2 \ c_3)$ — произвольные точки. Используя соглашение 6°, найдем векторы $\overline{AB}, \overline{BC}$ и $\overline{AC}$. Далее, принимая во внимание соглашение 2°, простым подсчетом убеждаемся в том, что $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$. ■

§ 45. Простейшие следствия из аксиом точечно-векторного трехмерного аффинного пространства

Из аксиом, перечисленных выше, вытекает ряд следствий, многие из которых известны читателю из курса алгебры. Перечень следствий, необходимых для дальнейшего изложения, читатель найдет в [I, § 65], поэтому мы предполагаем, что читателю известны эти следствия, в частности понятия нулевого вектора, разности векторов, суммы нескольких векторов, а также такие фундаментальные понятия, как линейная комбинация векторов, линейная зависимость и независимость системы векторов и их свойства (см. [I, § 65, п. 2]). Кроме того, предполагаем также известным понятие координат вектора и теорему о координатах линейной комбинации векторов (см. [I, теорему 4.2] или [65.3]).

Однако, принимая во внимание то обстоятельство, что наша ближайшая цель состоит в логическом обосновании геометрии на базе векторной алгебры, мы сформулируем ряд предложений векторной алгебры, которые играют существенную роль в дальнейшем изложении, и в ряде случаев напомним читателю, как их обосновать.

1. Обзор важнейших следствий из системы аксиом V_3 . В дальнейшем изложении применяются следующие обозначения. Запись $p = l(a, b, c)$ означает, что вектор p является линейной комбинацией векторов $a, b, c, \dots$. Запись $L(a_1, a_2, \dots, a_k) = 0$ означает, что система $a_1, a_2, \dots, a_k$ линейно зависима, а $L(a_1, a_2, \dots, a_k) \neq 0$, что она линейно независима. Напомним, что базисом пространства называется система линейно независимых векторов, через которые выражается любой вектор пространства (обозначение: e_1, e_2, e_3).

Сформулируем ряд предложений векторной алгебры, на которых базируется логическое обоснование геометрии. Доказательство этих предложений читатель найдет в любом курсе векторной алгебры.

1°. В пространстве V_3 всегда существует хотя бы один базис, состоящий из трех векторов. Любая система, состоящая из трех линейно независимых векторов, образует базис пространства V_3 .

2°. Любая система, состоящая более чем из трех векторов, линейно зависима.

3°. Если $L(a_0, b_0, c_0) \neq 0$, то при любых α, β и γ имеем:

$$L(a_0, \alpha a_0 + b_0, \beta a_0 + \gamma b_0 + c_0) \neq 0.$$

4°. Если $a \neq 0$, то существуют такие векторы b и c , что тройка a, b, c есть базис.

5°. Если $L(a, b) \neq 0$, то всегда существует такой вектор c , что a, b, c образует базис.

6°. Если $p \neq 0$ и $a_1 = l(p), a_2 = l(p), \dots, a_k = l(p)$, где $k > 1$, то $L(a_1, a_2, \dots, a_k) = 0$.

Имеет место следующая теорема (теорема о замене, см. I [65.1]). Теорема [45.1]. Если $L(a', b') \neq 0, a' = l(a, b), b' = l(a, b)$, то $L(a, b) \neq 0$ и $a = l(a', b'), b = l(a', b')$.

Следствие. Если $a' = l(a, b), b' = l(a, b), c' = l(a, b)$, то $L(a', b', c') = 0$.

2. Одномерные и двумерные векторные подпространства.

Определение 1. Пусть a — ненулевой вектор. Множество всех векторов вида ξa , где ξ — любое действительное число, называется одномерным векторным подпространством пространства V_3 , натянутым на вектора a , и обозначается так: $\{a\}$.

Вектор a называется образующим вектором подпространства. Одномерные подпространства будем обозначать также через $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_1$. Из этого определения непосредственно следует:

1°. Если $a \in \mathfrak{M}_1$, то $\forall \alpha : \alpha a \in \mathfrak{M}_1$.

2°. Если $a \in \mathfrak{M}_1$ и $b \in \mathfrak{M}_1$, то $\forall \alpha, \forall \beta : \alpha a + \beta b \in \mathfrak{M}_1$.

Из 45.1.6 вытекает также следующий вывод:

3°. Если $a_1 \in \mathfrak{M}_1, a_2 \in \mathfrak{M}_1, \dots, a_k \in \mathfrak{M}_1$, где $k > 1$, то $L(a_1, a_2, \dots, a_k) = 0$.

Пользуясь этими свойствами, легко доказать предложение, которое неоднократно будет использовано в дальнейшем.

Теорема [45.2]. Если $a' \neq 0$ и $a' \in \{a\}$, то подпространства $\{a\}$ и $\{a'\}$ совпадают. □

Конечная или бесконечная система векторов, принадлежащих одномерному подпространству, называется системой коллинеарных векторов. В частности, два вектора называются коллинеарными, если они принадлежат некоторому одномерному подпространству. Из свойства 3° следует, что любая система коллинеарных векторов, состоящая более чем из одного вектора, линейно зависима.

Аналогично определяется двумерное векторное подпространство. Определение 2. Пусть $L(a, b) \neq 0$. Множество всех векторов вида $\alpha a + \beta b$, где α и β — любые действительные числа, называется двумерным векторным подпространством, натянутым на векторы a, b , и обозначается через $\{a, b\}$.

Векторы a, b будем называть образующими подпространства. Двумерные подпространства будем обозначать также через $\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_2$ и т. д. Из определения двумерного подпространства непосредственно следует:

4°. Если $a \in \mathfrak{M}_2$, то $\forall \alpha : \alpha a \in \mathfrak{M}_2$.

5°. Если $a \in \mathfrak{M}_2, b \in \mathfrak{M}_2$, то $\forall \alpha, \forall \beta : \alpha a + \beta b \in \mathfrak{M}_2$.

Из следствия теоремы [45.1] получаем:

6°. Если $a_1 \in \mathfrak{M}_2, a_2 \in \mathfrak{M}_2, \dots, a_k \in \mathfrak{M}_2$, где $k > 2$, то $L(a_1, a_2, \dots, a_k) = 0$.

Рассмотрим еще одно важное свойство двумерных подпространств.

7°. Каковы бы ни были двумерные подпространства $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{M}_2$, их пересечение $\mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{M}_2$ всегда содержит ненулевой вектор.

В самом деле, пусть $\mathfrak{M}_2 = \{a, b\}$ и $\mathfrak{M}_2 = \{a', b'\}$. Согласно аксиоме D2 существуют числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ такие, что $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq (0, 0, 0, 0)$ и $\alpha a + \beta b + \gamma a' + \delta b' = 0$. Пусть, например, $\alpha \neq 0$. Рассмотрим векторы $p = \alpha a + \beta b$ и $q = -\gamma a' - \delta b'$. Очевидно, $p \in \mathfrak{M}_2$, а $q \in \mathfrak{M}_2$. Так как $L(a, b) \neq 0$, то в силу соотношения $\alpha \neq 0$ имеем $p \neq 0$. С другой стороны, $\alpha a + \beta b + \gamma a' + \delta b' = 0 \Rightarrow p = q$.

Теорема [45.3]. Если $L(a', b') \neq 0$ и $a' \in \{a, b\}, b' \in \{a, b\}$, то подпространства $\{a, b\}$ и $\{a', b'\}$ совпадают.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}_2 = \{a, b\}$ и $\mathfrak{M}_2 = \{a', b'\}$. Возьмем произвольный вектор x подпространства $\mathfrak{M}_2$: $x = x_1 a' + x_2 b'$. Так как $a' \in \mathfrak{M}_2, b' \in \mathfrak{M}_2$, то согласно свойству 5° имеем: $x \in \mathfrak{M}_2$. Таким образом, $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_2$. Обратно, возьмем произвольный вектор y подпространства $\mathfrak{M}_2$ и докажем, что $y \in \mathfrak{M}_2$. В силу соотношений $a' \in \{a, b\}, b' \in \{a, b\}$ имеем: $a' = l(a, b), b' = l(a, b)$. Из теоремы [45.1] следует, что $a = l(a', b'), b = l(a', b')$. Так как $y \in \mathfrak{M}_2$, то $y = y_1 a + y_2 b$. Подставив сюда значения a и b через a' и b' , приходим к выводу, что $y = l(a', b')$, т. е. $y \in \mathfrak{M}_2$. ■

3. Следствия из аксиом TV_3 . В заключение этого параграфа рассмотрим некоторые выводы, которые непосредственно вытекают из аксиом $T1 \rightarrow T3$.

1°. Если $A = B$, то $\overline{AB} = 0$, если же $A \neq B$, то $\overline{AB} \neq 0$.

Рассмотрим точки A, A, B и применим к ним аксиому $T3$:

$$\overline{AA} + \overline{AB} = \overline{AB}. \text{ Если } \overline{AB} = a, \text{ то } \overline{AA} + a = a \Rightarrow \overline{AA} = 0.$$

Доказательство второй части утверждения проведем от противного. Пусть $A \neq B$ и $\overline{AB} = 0$. Так как $\overline{AA} = 0$, то из аксиомы $T3$ приходим к выводу, что $A = B$, что противоречит нашему допущению. ■

2°. Если $B \neq C$, то $\overline{AB} \neq \overline{AC}$.

Доказательство проведем рассуждением от противного. Пусть $B \neq C$, а $\overline{AB} = \overline{AC} = a$. Из аксиомы $T3$ следует: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, или $a + \overline{BC} = a$, откуда $\overline{BC} = 0$, что противоречит свойству 1°. ■

3°. В пространстве TV_3 существует бесконечное множество точек.

В самом деле, в силу аксиомы $T1$ существует точка, которую обозначим через O . Если a — произвольный вектор, то согласно аксиоме $T2$ существует точка A такая, что $\overrightarrow{OA} = a$. Будем говорить, что точка A соответствует вектору a . Из свойства 2° следует, что различным векторам соответствуют различные точки. В векторном пространстве V_3 , как мы знаем, существует бесконечное множество векторов, поэтому в пространстве TV_3 существует бесконечное множество точек. ■

4° . Если точки A, B, C и D удовлетворяют условию $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$.

Это свойство называется свойством параллелограмма. Для доказательства рассмотрим тройки точек A, B, C и B, C, D . Применим к ним аксиому треугольника $T3$: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$.

Так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то левые части этих соотношений равны. Отсюда следует, что $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. ■

5° . Для любых двух точек A и B имеет место равенство $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

В самом деле, применив аксиому треугольника $T3$ к точкам A, B, A , получаем: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$. Так как согласно свойству 1° $\overrightarrow{AA} = 0$, то $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$. ■

Предлагаем читателю самостоятельно доказать еще одно свойство, которое является обобщением аксиомы $T3$.

6° . Каковы бы ни были точки $A_1, A_2, \dots, A_k$, имеет место соотношение $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{k-1}A_k} = \overrightarrow{A_1A_k}$. □

§ 46. Прямая и плоскость трехмерного аффинного пространства

1. Понятие прямой.

Определение 1. Пусть A — произвольная точка, а $\mathfrak{M}_1$ — одномерное векторное подпространство. Множество всех точек M , удовлетворяющих условию $\overrightarrow{AM} \in \mathfrak{M}_1$, а также всех векторов подпространства $\mathfrak{M}_1$, называется прямой и обозначается так: $\{A, \mathfrak{M}_1\}$.

Подпространство $\mathfrak{M}_1$ называется подпространством прямой, а A — ее начальной точкой. Векторы подпространства $\mathfrak{M}_1$ называются векторами прямой¹. Прямые в дальнейшем будем обозначать строчными буквами латинского алфавита: $a, b, \dots, l, m$.

Из определения 1 следует, что начальная точка принадлежит прямой, так как $\overrightarrow{AA} = 0 \in \mathfrak{M}_1$. Так как любое одномерное подпространство содержит бесконечное множество попарно различных векторов, то по аналогии с 45.3.3 можно доказать предложение:

¹ Понятие прямой, как видно из определения 1, не совпадает с обычным понятием, которое встречается в школьном курсе геометрии. По нашему определению прямая и плоскость содержат как точки, так и векторы (ср. I, § 16, п. 1).

1° . Каждая прямая имеет бесконечное множество точек. □

Рассмотрим следующие два вспомогательных предложения.

2° . Если $M \in \{A, \mathfrak{M}_1\}$ и $N \in \{A, \mathfrak{M}_1\}$, то $\overrightarrow{MN} \in \mathfrak{M}_1$ и $\overrightarrow{NM} \in \mathfrak{M}_1$.

Из определения 1 следует, что $\overrightarrow{AM} \in \mathfrak{M}_1$, $\overrightarrow{AN} \in \mathfrak{M}_1$. Согласно 45.3.3 имеем: $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{MA} = (-1)\overrightarrow{MA}$. Таким образом, по 45.2.1 получаем: $\overrightarrow{MA} \in \mathfrak{M}_1$. Учитывая, что $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$, по 45.2.2 имеем: $\overrightarrow{MN} \in \mathfrak{M}_1$. Отсюда сразу следует второе соотношение. ■

3° . Если $B \in \{A, \mathfrak{M}_1\}$, то $\{B, \mathfrak{M}_1\} = \{A, \mathfrak{M}_1\}$.

Пусть $\{A, \mathfrak{M}_1\} = a$, $\{B, \mathfrak{M}_1\} = b$. Очевидно, множества векторов этих прямых совпадают, поэтому для доказательства этого свойства достаточно показать, что они имеют одно и то же множество точек.

Пусть $M \in a$. Так как $B \in a$, то из свойства 2° следует, что $\overrightarrow{BM} \in \mathfrak{M}_1$. Но это означает, что $M \in b$. Обратно, пусть $N \in b$, тогда $\overrightarrow{BN} \in \mathfrak{M}_1$. С другой стороны, $\overrightarrow{AB} \in \mathfrak{M}_1$, поэтому согласно 45.2.2 имеем: $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \in \mathfrak{M}_1$. Другими словами, $N \in a$. ■

Теорема [46.1]. Каковы бы ни были точка A и ненулевой вектор p , существует одна и только одна прямая, содержащая A и p .

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}_1 = \{p\}$. Очевидно, прямая $\{A, \mathfrak{M}_1\}$ содержит точку A и вектор p . Докажем, что она является единственной прямой, содержащей A и p . Пусть $\{B, \mathfrak{N}_1\}$ — какая-либо прямая, содержащая A и p . Так как $p \in \mathfrak{N}_1$, то согласно [45.2] имеем: $\mathfrak{N}_1 = \{p\}$. Таким образом, $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{N}_1$. Далее, $A \in \{B, \mathfrak{N}_1\}$, поэтому из свойства 3° следует, что $\{B, \mathfrak{N}_1\} = \{A, \mathfrak{M}_1\}$. ■

В дальнейшем прямую, содержащую точку A и ненулевой вектор p , будем обозначать через $\{A, p\}$.

Теорема [46.2]. Каковы бы ни были две различные точки A и B , существует одна и только одна прямая, проходящая через эти точки.

Доказательство. Легко видеть, что прямая $a = \{A, \overrightarrow{AB}\}$ проходит через точки A и B . Пусть b — какая-либо прямая, проходящая через эти точки: $A \in b$, $B \in b$. Из свойства 2° следует, что $\overrightarrow{AB} \in b$. Таким образом, b содержит точку A и вектор $\overrightarrow{AB}$, поэтому согласно теореме [46.1] прямые a и b совпадают. ■

Прямая, определяемая точками A и B , обозначается через AB . Следствие. Две различные прямые имеют не более одной общей точки.

В случае, когда две прямые a и b имеют только одну общую точку, они называются пересекающимися.

2° Понятие плоскости. По аналогии с определением прямой введем следующее определение.

Определение 2. Пусть A — произвольная точка, а $\mathfrak{M}_2$ — двумерное векторное подпространство. Множество всех точек M , удовлетворяющих условию $\overrightarrow{AM} \in \mathfrak{M}_2$, а также всех векторов подпространства $\mathfrak{M}_2$, называется плоскостью и обозначается $\{A, \mathfrak{M}_2\}$.

¹ Здесь и в дальнейшем запись $\{A, \mathfrak{M}_1\} = \{B, \mathfrak{M}_1\}$ означает, что соответствующие прямые совпадают, т. е. содержат одно и то же множество точек и векторов.

Подпространство $\mathfrak{M}_2$ называется подпространством плоскости, A — ее начальной точкой. Так же как и в случае прямой, легко доказать, что эта точка принадлежит плоскости. Векторы пространства $\mathfrak{M}_2$ называются векторами плоскости¹. Плоскости в дальнейшем будем обозначать также через Π , Π_1 , Π_2 , ..., при этом принадлежность точки или вектора плоскости Π будем обозначать символом: $A \in \Pi$ или $p \in \Pi$.

Рассмотрим простейшие свойства плоскости. Введем следующее определение: три точки A , B и C называются неколлинеарными, если не существует прямой, содержащей эти точки; в противном случае точки A , B , C называются коллинеарными.

1°. Каждая плоскость содержит бесконечное множество точек, среди которых имеется хотя бы одна тройка неколлинеарных точек.

Первую часть утверждения можно доказать точно так же, как и предложение 45.3.3, поэтому докажем только вторую часть. Пусть $\{A, \mathfrak{M}_2\}$ — данная плоскость, а p и q — образующие подпространства $\mathfrak{M}_2$. Согласно аксиоме T2 существуют точки P и Q , удовлетворяющие условиям: $\overline{AP} = p$, $\overline{AQ} = q$. Так как $p, q \in \mathfrak{M}_2$, то в силу определения 2 имеем: $P, Q \in \{A, \mathfrak{M}_2\}$. Покажем, что точки A , P и Q не коллинеарны, т. е. не существует прямой, содержащей эти три точки. Пусть, напротив, прямая $\{M_0, \mathfrak{N}_1\}$ содержит эти точки, т. е. $A \in \{M_0, \mathfrak{N}_1\}$, $P \in \{M_0, \mathfrak{N}_1\}$ и $Q \in \{M_0, \mathfrak{N}_1\}$. Из свойства 2° п. 1 следует, что $\overline{AP} \in \mathfrak{N}_1$ и $\overline{AQ} \in \mathfrak{N}_1$, т. е. $p, q \in \mathfrak{N}_1$. Из 45.2.3 следует, что $L(p, q) = 0$. Мы пришли в противоречие с условием выбора векторов p и q . ■

Сформулируем еще два свойства, доказательство которых мы опускаем, так как они, по существу, совпадают с доказательством свойств 2° и 3° п. 1.

2°. Если $M \in \{A, \mathfrak{M}_2\}$ и $N \in \{A, \mathfrak{M}_2\}$, то $\overline{MN} \in \mathfrak{M}_2$. □

3°. Если $B \in \{A, \mathfrak{M}_2\}$, то $\{B, \mathfrak{M}_2\} = \{A, \mathfrak{M}_2\}$. □

Справедливы теоремы.

Теорема [46.3]. Каковы бы ни были точка A и неколлинеарные векторы p и q , существует одна и только одна плоскость, содержащая точку A и векторы p и q . □
(Обозначение: $\{A, p, q\}$.)

Теорема [46.4]. Каковы бы ни были три неколлинеарные точки A , B и C , существует одна и только одна плоскость, проходящая через эти точки. □

Эти теоремы доказываются аналогично теоремам [46.1] и [46.2].

3. **Существование прямых и плоскостей.** Из предыдущего изложения, строго говоря, еще не следует, что в пространстве TV_3 существуют прямые и плоскости. Однако, пользуясь аксиомами D1 и T1, легко доказать их существование. В самом деле, из аксиомы D1 следует, что существует хотя бы одна тройка линейно независимых век-

торов a_0, b_0 и c_0 . Отсюда следует, что $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ и $c_0 \neq 0$ и что $L(a_0, b_0) \neq 0$. Теперь мы можем утверждать, что существуют подпространства $\{a_0\}$ и $\{a_0, b_0\}$. Пользуясь аксиомой T1, приходим к предложениям.

1°. В пространстве TV_3 существует хотя бы одна прямая.

2°. В пространстве TV_3 существует хотя бы одна плоскость.

Далее, воспользовавшись последним предложением и свойством 1° п. 2, приходим к выводу:

3°. В пространстве TV_3 существует хотя бы одна тройка неколлинеарных точек.

Пользуясь, наконец, аксиомой D1 легко показать:

4°. В пространстве TV_3 существуют по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

4. **Принадлежность прямой плоскости.** Будем говорить, что прямая a лежит в плоскости Π , если все точки и векторы прямой a принадлежат плоскости Π (обозначение: $a \in \Pi$).

Рассмотрим следующие простые свойства этого понятия.

1°. Если $A \in \Pi$, $p \in \Pi$, где $p \neq 0$, то прямая $a = \{A, p\}$ принадлежит плоскости Π .

Пусть $\mathfrak{N}_1 = \{p\}$, а $\mathfrak{M}_2$ — подпространство плоскости Π . Так как $p \in \Pi$, то $p \in \mathfrak{M}_2$, поэтому согласно 45.2.4 получаем: $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{M}_2$. Таким образом, все векторы прямой a принадлежат плоскости Π . Остается показать, что все точки прямой a лежат в плоскости Π . Пусть M — произвольная точка прямой a . Имеем:

$$M \in a \Rightarrow \overline{AM} \in \mathfrak{N}_1 \Rightarrow \overline{AM} \in \mathfrak{M}_2 \Rightarrow M \in \Pi. \blacksquare$$

2°. Если $A \neq B$, $A \in \Pi$ и $B \in \Pi$, то прямая AB принадлежит плоскости Π .

Это свойство непосредственно следует из предыдущего.

Пользуясь этим свойством и теоремой [46.4], легко доказать предложения, хорошо известные из курса элементарной геометрии: а) если a и b пересекаются, то существует одна и только одна плоскость, содержащая прямые a и b ; б) если $A \notin a$, то существует одна и только одна плоскость, проходящая через точку A и содержащая прямую a .

5. **Теорема о пересечении.** Введем следующее соглашение: прямые и плоскости будем называть пространственными образами и обозначать через $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$. Пространственные образы π_1 и π_2 называются пересекающимися, если $\pi_1 \not\subset \pi_2$, $\pi_2 \not\subset \pi_1$ и $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$. Докажем следующую основную теорему.

Теорема [46.5] (теорема о пересечении). Пусть π_1 и π_2 — два пространственных образа. Если существуют точки A и B , принадлежащие соответственно π_1 и π_2 и удовлетворяющие условию: вектор $\overline{AB}$ линейно выражается через векторы данных образов, то образы π_1 и π_2 имеют хотя бы одну общую точку.

Доказательство. По условию теоремы $\overline{AB} = l_1(a, a_2, \dots, a_r) + l_2(a_{r+1}, \dots, a_k)$, где $a_1, \dots, a_r \in \pi_1$ и $a_{r+1}, \dots, a_k \in \pi_2$. Введем

¹ См. сноску на с. 230.

обозначения: $a = l_1(a_1, \dots, a_l)$, $b = l_2(a_{l+1}, \dots, a_k)$. Тогда предыдущее соотношение принимает вид:

$$\overline{AB} = a + b. \quad (1)$$

Из 45.2.5 следует, что $a \in \pi_1$, $b \in \pi_2$. Возможны три случая:

а) $b = 0$. Из (1) следует, что $\overline{AB} = a$, т. е. $B \in \pi_1 \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$.

б) $a = 0$. Из (1) следует, что $\overline{AB} = b \Rightarrow \overline{AB} \in \pi_2 \Rightarrow \overline{BA} \in \pi_2 \Rightarrow A \in \pi_2 \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$.

в) $a \neq 0$, $b \neq 0$. Согласно аксиоме T2 имеем: $\exists P: \overline{AP} = a$, $\exists Q: \overline{BQ} = -b$. Отсюда следует, что $\overline{AB} = \overline{AP} - \overline{BQ} = \overline{AP} + \overline{QB}$. С другой стороны, согласно аксиоме T3 имеем: $\overline{AB} = \overline{AQ} + \overline{QB}$, т. е. $\overline{AP} = \overline{AQ} \Rightarrow P = Q$. Так как $P \in \pi_1$, $Q \in \pi_2$, то $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$. ■

Следствие. Пусть π_1 и π_2 — два пространственных образа. Если существует такой базис e_1, e_2, e_3 , что все векторы этого базиса принадлежат данным образам, то эти образы имеют хотя бы одну общую точку.

6. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Введем следующие три аналогичные друг другу определения.

Определение 3. Две прямые a и b называются параллельными, если их подпространства совпадают (обозначение: $a \parallel b$).

Определение 4. Две плоскости Π и Π' называются параллельными, если их подпространства совпадают (обозначение: $\Pi \parallel \Pi'$).

Определение 5. Прямая a называется параллельной плоскости Π , если подпространство прямой принадлежит подпространству плоскости (обозначение: $a \parallel \Pi$).

Отметим, что эти определения (и определения в действующих школьных учебниках), как нетрудно заметить, отличаются от традиционных определений параллельности прямых и плоскостей, так как здесь в отличие от традиционного определения параллельности совпадающие прямые или совпадающие плоскости параллельны.

Из определений 3 и 4 следует, что понятие параллельности двух прямых (или двух плоскостей) удовлетворяет условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности. Докажем далее предложение, которое принято в качестве классической аксиомы о параллельных прямых.

Теорема [46.6]. Через точку A , не принадлежащую прямой a , проходит одна и только одна прямая, параллельная прямой a . Эта прямая лежит в плоскости, определяемой прямой a и точкой A .

Доказательство. Пользуясь теоремой [46.1], рассмотрим прямую $b = \{A, p\}$, где p — ненулевой вектор прямой a . Очевидно, $b \parallel a$. Любая другая прямая b' , проходящая через A и параллельная прямой a , будет содержать вектор p , поэтому согласно [46.1] имеем: $b = b'$.

Остается доказать, что прямая b лежит в плоскости Π , определяемой прямой a и точкой A . Так как $p \in \Pi$ и $A \in \Pi$, то согласно свойству 1° п. 4 $b \in \Pi$. ■

Докажем два предложения, хорошо известные читателю из курса средней школы.

Теорема [46.7]. Если прямые a и b лежат в плоскости Π и не параллельны, то они пересекаются.

Доказательство. Пусть p и q — ненулевые векторы данных прямых. Очевидно, $p \in \Pi$, $q \in \Pi$, поэтому $\{p, q\}$ является подпространством плоскости Π . Возьмем произвольные точки A и B , принадлежащие соответственно прямым a и b . Из свойства 2° п. 2 следует, что вектор $\overline{AB}$ принадлежит $\{p, q\}$, поэтому согласно теореме о пересечении прямые a и b имеют общую точку. ■

Лемма [46.8]. Если две различные плоскости Π_1 и Π_2 имеют общую точку A , то они пересекаются по прямой.

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что $\Pi_1 = \{A, \mathfrak{M}_1\}$ и $\Pi_2 = \{A, \mathfrak{M}_2\}$. Согласно 45.2.7 $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$ содержит хотя бы один ненулевой вектор p . Очевидно, $p \in \Pi_1$ и $p \in \Pi_2$. Рассмотрим прямую $l = \{A, p\}$. Согласно 46.4.1 имеем: $l \subset \Pi_1$ и $l \subset \Pi_2$. Все общие точки плоскостей Π_1 и Π_2 принадлежат l , так как в противном случае согласно теореме [46.4] $\Pi_1 = \Pi_2$. ■

Эти предложения позволяют легко обосновать все основные предложения о взаимном расположении прямых и плоскостей, известные читателю из школьного курса геометрии. Не останавливаясь подробно на этом вопросе, рассмотрим лишь два предложения.

1°. Если прямая a не параллельна плоскости Π , то она имеет с ней одну и только одну общую точку.

В самом деле, пусть a вектор прямой, а p и q неколлинеарные векторы плоскости. Так как $a \not\parallel \Pi$, то $a \notin \{p, q\}$, поэтому a, p, q линейно независимые векторы. Согласно следствию теоремы [46.5] прямая a и плоскость Π имеют хотя бы одну общую точку. Они не могут иметь более одной общей точки, так как в противном случае согласно свойству 2° п. 4 прямая a будет принадлежать плоскости Π . ■

2°. Если плоскости Π_1 и Π_2 не параллельны, то они имеют одну и только одну общую прямую.

Учитывая лемму [46.8], нам достаточно показать, что плоскости Π_1 и Π_2 имеют хотя бы одну общую точку. Пусть p_1 и q_1 — образующие векторы подпространства плоскости Π_1 , а p_2 — ненулевой вектор плоскости Π_2 , не принадлежащий плоскости Π_1 . Очевидно, векторы p_1, q_1, p_2 линейно независимы. Согласно следствию теоремы [46.5] плоскости Π_1 и Π_2 пересекаются, т. е. имеют хотя бы одну общую точку. ■

§ 47. Направленная прямая; луч и отрезок

Настоящий и следующие два параграфа посвящены обоснованию ряда фундаментальных понятий геометрии пространства TV_3 . Предварительно определяется векторная область и на ее основе вводятся



Рис. 145.



Рис. 146.

понятия: «направление на прямой», «лежать между», «луч», «отрезок», «угол», «полуплоскость» и т. д.

1. Векторная область. Выше было показано, что определения прямой и плоскости базируются на понятиях одномерного и двумерного векторных подпространств. Для определения других геометрических образов нам необходимо ввести в рассмотрение еще одно множество векторов.

О п р е д е л е н и е 1. Непустое множество векторов $\bar{\Omega}$ называется векторной областью, если выполнены следующие условия: а) $0 \notin \bar{\Omega}$; б) если $a \in \bar{\Omega}$, то для любого положительного числа ξ имеем: $\xi a \in \bar{\Omega}$; в) если $a \in \bar{\Omega}$ и $b \in \bar{\Omega}$, то $a + b \in \bar{\Omega}$.

Рассмотрим примеры векторных областей.

П р и м е р 1. Пусть $p \neq 0$. Рассмотрим множество¹ (p) всех векторов αp , где α — любое положительное число² (рис. 145).

Легко видеть, что (p) — векторная область. В самом деле, это множество непустое, так как $p = 1 \cdot p$ принадлежит (p) . Далее, $0 \notin (p)$, так как из условия $\alpha p = 0$ следует, что либо $p = 0$, либо $\alpha = 0$. Теперь проверим условие б). Пусть $a \in (p)$. Это означает, что существует такое $\alpha > 0$, что $a = \alpha p$. Если ξ — произвольное положительное число, то $\xi a = \xi(\alpha p) = (\xi\alpha)p$. Так как $\xi\alpha > 0$, то $\xi a \in (p)$. Проверим, наконец, условие в). Пусть $a \in (p)$ и $b \in (p)$. Это означает, что существуют положительные числа α_1 и α_2 такие, что $a = \alpha_1 p$, $b = \alpha_2 p$. Отсюда следует, что $a + b = (\alpha_1 + \alpha_2)p$. Число $\alpha_1 + \alpha_2$ положительное, поэтому $a + b \in (p)$.

Рассмотрим еще несколько примеров векторных областей.

П р и м е р 2. Пусть $p \neq 0$ и $(p)'$ — множество всех векторов αp , где α — любое отрицательное число (рис. 146).

Легко видеть, что $(p)' = (-p)$, поэтому $(p)'$ является векторной областью.

П р и м е р 3. Пусть $L(p, q) \neq 0$; множество (p, q) состоит из всех векторов вида $\alpha_1 p + \alpha_2 q$, где α_1 и α_2 — любые положительные числа.

Заметим, что (p, q) не содержит векторов p и q и коллинеарных им векторов. Если векторы p, q и все векторы множества (p, q) отложить от одной точки (рис. 147), то множество (p, q) состоит из всех векторов, концы которых принадлежат внутренней области угла, образованного векторами p и q .

П р и м е р 4. Пусть $L(p, q) \neq 0$. Множество $[p, q]$ состоит из всех векторов вида $\alpha_1 p + \alpha_2 q$, где α_1 и α_2 — любые неотрицатель-

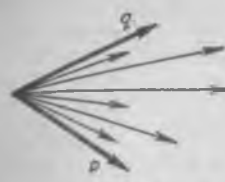


Рис. 147.

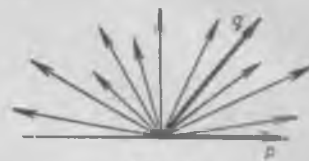


Рис. 148.

ные числа, не равные одновременно нулю. Заметим, что области (p, q) , $[p, q]$ отличаются друг от друга. В самом деле, $p \notin (p, q)$ и $q \notin (p, q)$, в то время как $p \in [p, q]$ и $q \in [p, q]$.

Предлагаем читателю по аналогии с примером 1 показать, что множества (p, q) и $[p, q]$ являются векторными областями.

П р и м е р 5. Пусть $L(p, q) \neq 0$. Множество $\{p, q\}$ состоит из всех векторов вида $\alpha_1 p + \alpha_2 q$, где α_1 — любое действительное число, а α_2 — любое положительное число³ (рис. 148).

Докажем, что $\{p, q\}$ — векторная область. Это множество непусто, так как вектор $0p + 1q = q$ принадлежит $\{p, q\}$. Далее, нулевой вектор не принадлежит этому множеству, так как из условия $0 = \alpha_1 p + \alpha_2 q$ в силу $L(p, q) \neq 0$ получаем $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Теперь проверим условия б) и в) определения 1. Пусть $a \in \{p, q\}$. Это означает, что $a = \alpha_1 p + \alpha_2 q$, где $\alpha_2 > 0$. Если $\xi > 0$, то $\xi a = \xi\alpha_1 p + \xi\alpha_2 q$ и $\xi\alpha_2 > 0$. Таким образом, $\xi a \in \{p, q\}$. Далее, пусть $a, b \in \{p, q\}$. Это означает, что $a = \alpha_1 p + \alpha_2 q$ и $b = \beta_1 p + \beta_2 q$, где $\alpha_2 > 0$ и $\beta_2 > 0$. Отсюда следует, что $a + b = (\alpha_1 + \beta_1)p + (\alpha_2 + \beta_2)q$. Так как $\alpha_2 + \beta_2 > 0$, то $a + b \in \{p, q\}$. ■

Из определения 1 следует, что любая область содержит бесконечное множество векторов. Максимальное число линейно независимых векторов, принадлежащих данной области, называется размерностью данной области. Легко видеть, что (p) и $(p)'$ являются примерами одномерных областей, а (p, q) , $[p, q]$ и $\{p, q\}$ — примерами двумерных областей. По аналогии с примерами двумерных областей, рассмотренных выше, можно построить примеры трехмерных областей. Сравнивая определение 1 с определениями 1 и 2, § 45, мы замечаем, что векторная область отличается от одномерных и двумерных подпространств: область «уже» векторного подпространства той же размерности.

Нашей ближайшей задачей является установление связи между векторными областями и векторными подпространствами той же размерности.

2. Области, определяемые одномерным подпространством. Рассмотрим следующее вспомогательное предложение.

Л е м м а [47.11]. Если векторы a и b принадлежат области $\bar{\Omega}$ и $a = \alpha b$, то α — положительное число.

¹ Обращаем внимание читателя на то, что множества (p, q) и $\{p, q\}$ существенно отличаются друг от друга (см. определение 2, § 45).

¹ Обращаем внимание читателя на то обстоятельство, что множества (p) и $[p]$ существенно отличаются друг от друга (см. определение 1, § 45).

² На рисунке 145, иллюстрирующем данный пример, все векторы множества (p) приложены к той же точке, что и вектор p . Рисунки 146 и 147 выполнены аналогично.

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Пусть $a = \alpha b$ и $\alpha \leq 0$. Так как $a \neq 0$, то $\alpha \neq 0$, и поэтому из нашего допущения следует, что $\alpha < 0$. По условию леммы $b \in \bar{\Omega}$, поэтому $-\alpha b \in \bar{\Omega}$. С другой стороны, так как $a \in \bar{\Omega}$, то $\alpha b \in \bar{\Omega}$, следовательно, по определению 1 имеем: $\alpha b + (-\alpha b) = 0 \in \bar{\Omega}$. Мы пришли в противоречие с определением 1. ■

Из этой леммы непосредственно следует.

Следствие. Если вектор b принадлежит области $\bar{\Omega}$, то вектор αb , где $\alpha < 0$, не принадлежит этой области. В частности, если $b \in \bar{\Omega}$, то $-b \notin \bar{\Omega}$.

Теперь докажем следующую важную теорему.

Теорема [47.2]. Любое одномерное подпространство $\mathfrak{M}_1$ содержит две и только две области $\bar{\Omega}_1$ и $\bar{\Omega}_2$. Эти области обладают следующими свойствами: а) $\bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2 = \emptyset$; б) $\mathfrak{M}_1 \setminus 0 = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}_1 = \{p\}$. Рассмотрим области (p) и $(p)'$ (примеры 1 и 2). Очевидно, $(p) \subset \mathfrak{M}_1$ и $(p)' \subset \mathfrak{M}_1$. Легко видеть, что $(p) \cap (p)' = \emptyset$, так как если, например, $a \in (p) \cap (p)'$, то $a = \alpha_0 p$, где $\alpha_0 > 0$, и $a = \beta_0 p$, где $\beta_0 < 0$, поэтому $(\alpha_0 - \beta_0)p = 0$. Это соотношение противоречит условиям: $\alpha_0 - \beta_0 > 0$ и $p \neq 0$.

Заметим, наконец, что согласно определению областей (p) и $(p)'$ имеем: $\mathfrak{M}_1 \setminus 0 = (p) \cup (p)'$.

Остается показать, что если какая-либо область $\bar{\Omega}$ содержится в $\mathfrak{M}_1$, то она совпадает с (p) или $(p)'$. По определению область $\bar{\Omega}$ содержит хотя бы один ненулевой вектор a . Из $a \in \bar{\Omega}$ следует, что $a \in \mathfrak{M}_1$, поэтому a принадлежит одной из областей (p) или $(p)'$. Пусть, например, $a \in (p)$. В этом случае покажем, что $\bar{\Omega} = (p)$. Для этого необходимо показать, что любой вектор множества (p) принадлежит множеству $\bar{\Omega}$ и наоборот. Допустим, что $b \in (p)$; это означает, что $\exists! \beta_0$ ($\beta_0 > 0$; $b = \beta_0 p$). С другой стороны, $a \in (p) \Rightarrow \exists! \alpha_0$ ($\alpha_0 > 0$ и $a = \alpha_0 p$). Из этих соотношений следует, что $b = \beta_0 p = \frac{\beta_0}{\alpha_0} a$.

Из леммы [47.1] мы приходим к выводу: $\frac{\beta_0}{\alpha_0} > 0$. Так как $a \in \bar{\Omega}$, то по определению области имеем: $b \in \bar{\Omega}$.

Обратно, пусть $c \in \bar{\Omega}$. Из соотношений $c \in \bar{\Omega}$, $a \in \bar{\Omega}$ следует, что $c \in \mathfrak{M}_1$ и $a \in \mathfrak{M}_1$, поэтому $c = \gamma a$. Согласно лемме [47.1] имеем: $\gamma > 0$, поэтому в силу соотношения $a \in (p)$ получаем: $c \in (p)$. ■

3. Направленная прямая. Доказанная выше теорема позволяет ввести следующее определение.

Определение 2. Две области, принадлежащие одномерному подпространству, называются направлениями этого подпространства. Если векторы a и b принадлежат одному и тому же направлению, то они называются сонаправленными (обозначение: $a \uparrow b$), если a и b принадлежат разным направлениям — противоположно направленными (обозначение: $a \downarrow b$).

Из предыдущего определения немедленно вытекают следующие утверждения.

1°. Если $a \uparrow b$, то $-a \downarrow b$. Обратно, если $a \downarrow b$, то $-a \uparrow b$.
2°. Если $a \uparrow b$ и $b \uparrow c$, то $a \uparrow c$ (или: если $a \uparrow b$, $a \downarrow c$, то $b \downarrow c$).

3°. Если $a \uparrow b$, $a \downarrow c$, то $a \uparrow (b + c)$.

4°. Если $a \uparrow b$, $b \downarrow c$, то $a \downarrow c$.

5°. Если $a \uparrow b$, $b \downarrow c$, то $a \downarrow c$.

Эти предложения не требуют доказательства, так как они непосредственно следуют из определения областей и предыдущей теоремы.

Определение 3. Направления, определяемые подпространством прямой a , называются направлениями этой прямой¹.

Таким образом, направлениями прямой являются векторные области, принадлежащие прямой. Каждая прямая имеет два и только два направления. Для того чтобы зафиксировать одно из них, достаточно задать вектор, принадлежащий этому направлению. Прямая называется направленной, если зафиксировано одно из ее направлений. Направленную прямую будем обозначать через $(a, \bar{\Omega})$.

Теперь легко показать, что в множестве точек направленной прямой естественным образом устанавливается некоторый порядок точек. В самом деле, пусть A и B — произвольные различные точки направленной прямой $(a, \bar{\Omega})$. Будем говорить, что точка A предшествует точке B , если $\overline{AB} \in \bar{\Omega}$ (обозначение: $A < B$). Пользуясь этим определением, легко показать, что имеют место следующие известные свойства упорядоченных множеств: а) $A < B \Rightarrow B \nless A$; б) $A < B$, $B < C \Rightarrow A < C$.

4. Луч. Введем следующее определение.

Определение 4. Пусть M_0 — произвольная точка прямой a , а $\bar{\Omega}$ — одно из ее направлений. Множество точек M прямой, удовлетворяющих условию $\overline{M_0 M} \in \bar{\Omega}$, а также всех векторов, принадлежащих $\bar{\Omega}$, называется открытым лучом с началом в точке M_0 . Объединение открытого луча с его началом — точкой M_0 — называется лучом с началом M_0 .

Из этого определения немедленно вытекает следующий вывод. Любая точка M_0 прямой a определяет два и только два открытых луча этой прямой, исходящих из точки M_0 . Эти лучи не имеют ни одного общего вектора и ни одной общей точки. Любой ненулевой вектор прямой принадлежит одному и только одному открытому лучу; любая точка прямой, отличная от точки M_0 , также принадлежит одному и только одному открытому лучу. Каждый из этих лучей называется дополнительным по отношению к другому.

¹ В элементарной геометрии понятие направления прямой вводится, по существу, интуитивно. Здесь мы получаем возможность придать этому понятию математически определенный и четкий смысл.

Доказательство этого предложения мы опускаем, так как оно с очевидностью вытекает из теоремы [47.2] и определения луча.

Мы видим, что луч однозначно определяется началом M_0 и направлением $\bar{\Omega}$ прямой. Но направление $\bar{\Omega}$ полностью определяется заданием ненулевого вектора p , поэтому луч может быть определен также началом M_0 и вектором p , принадлежащим лучу. Отметим, наконец, что луч может быть определен также началом M_0 и еще одной точкой A , так как тем самым определяется вектор $\overrightarrow{M_0A}$ луча. Таким образом, мы приходим к следующим трем способам задания луча с началом в точке M_0 : а) $M_0, \bar{\Omega}$; б) M_0, p ; в) M_0, A . В соответствии с этим в зависимости от способа задания принимаем следующие обозначения для лучей: $[M_0, \bar{\Omega}]$, $[M_0, p]$, $[M_0, A]$. Соответствующие открытые лучи в первых двух случаях будем обозначать через $(M_0, \bar{\Omega})$, (M_0, p) . В тех случаях, когда из контекста ясно, о каких лучах идет речь, их будем обозначать буквами h, k, l .

5. Понятие «лежать между». Введем следующее определение.

Определение 5. Будем говорить: точка B лежит между точками A и C , если $\overline{AB} \parallel \overline{BC}$ (обозначение: $\overline{ABC}$): точка B не лежит между различными точками A и C , если $\overline{AB} \nparallel \overline{BC}$ (обозначение: $\overline{BAC}$ или $\overline{ACB}$).

Рассмотрим следующие основные свойства понятия «лежать между», первые три из которых, как будет показано ниже, совпадают с соответствующими аксиомами Гильберта (см. § 55).

1°. Если $\overline{ABC}$ или $\overline{BAC}$, то A, B и C — попарно различные точки одной и той же прямой.

Соотношение $\overline{ABC}$ означает, что $\overline{AB} \parallel \overline{BC}$, поэтому, согласно определению 2 $\overline{AB} \neq 0$ и $\overline{BC} \neq 0$. Далее, так как $\overline{AB} \parallel \overline{AB}$, то из свойства 3° п. 3 следует, что $\overline{AB} \parallel \overline{AB} + \overline{BC}$ или $\overline{AB} \parallel \overline{AC}$. Таким образом, $\overline{AC} \neq 0$. Мы пришли к выводу, что A, B и C попарно не совпадают. Из соотношения $\overline{AB} \parallel \overline{AC}$ следует, что $\overline{AB} = \alpha \overline{AC}$, поэтому $B \in [A, \overline{AC}]$.

Второй случай рассматривается аналогично. ■

2°. Если $\overline{ABC}$, то $\overline{CBA}$. Если $\overline{BAC}$, то $\overline{BCA}$.

В самом деле, из соотношения $\overline{ABC}$ следует, что $\overline{AB} \parallel \overline{BC}$, поэтому, воспользовавшись дважды свойством 1° п. 3, получаем: $\overline{AB} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \overline{BA} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \overline{BA} \parallel \overline{CB}$ или $\overline{CB} \parallel \overline{BA}$. Это означает, что $\overline{CBA}$. Аналогично можно доказать второе соотношение. ■

3°. Если $\overline{ABC}$, то $\overline{AB} \parallel \overline{BC}$ и $\overline{ABC}$.

По условию $\overline{AB} \parallel \overline{BC}$. С другой стороны, $\overline{AB} \parallel \overline{AB}$, поэтому

из свойства 3° п. 3 следует, что $\overline{AB} \parallel \overline{AB} + \overline{BC}$ или $\overline{AB} \parallel \overline{AC}$. Из 1° п. 3 получаем: $\overline{BA} \parallel \overline{AC}$, т. е. $\overline{ABC}$.

Совершенно аналогично можно доказать второе соотношение. ■

4°. Среди трех различных точек A, B и C прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

Рассмотрим векторы $\overline{AB}, \overline{BC}$ и $\overline{CA}$. Так как любая прямая имеет два и только два направления, то среди этих векторов какие-либо два сонаправлены. Если, например, $\overline{AB} \parallel \overline{BC}$, то $\overline{ABC}$. Из предыдущего свойства следует вторая часть утверждения. В остальных двух случаях приходим к аналогичным выводам. ■

5°. (Свойство о вложении отрезков.) Если $\overline{ACB}$ и $\overline{APC}$, то $\overline{APB}$.

Из данных условий следует, что

$$\overline{AC} \parallel \overline{CB}, \quad (1)$$

$$\overline{AP} \parallel \overline{PC}. \quad (2)$$

Но $\overline{AP} \parallel \overline{AP}$, поэтому из 47.3.3 следует, что $\overline{AP} \parallel \overline{AP} + \overline{PC} = \overline{AC}$. Из этого соотношения и соотношения (1) получаем:

$\overline{AP} \parallel \overline{CB}$. Отсюда из соотношения (2) будем иметь:

$$\overline{AP} \parallel \overline{PC} + \overline{CB} \text{ или } \overline{AP} \parallel \overline{PB} \Rightarrow \overline{APB}. \quad \blacksquare$$

Доказанные здесь свойства логически безупречно обосновывают свойства отношения «лежать между». Докажем теорему, которая устанавливает связь между понятиями «лежать между» и «луч».

Теорема [47.3]. Каждая точка O прямой a разделяет множество всех остальных точек этой прямой на два непустых множества, удовлетворяющих следующим условиям.

а) Каждая точка прямой a , отличная от O , принадлежит одному и только одному множеству.

б) Если различные точки A и B принадлежат одному и тому же множеству, то $\overline{OAB}$, если же они принадлежат различным множествам, то $\overline{AOB}$.

Заданием прямой a и точки O на ней множества точек, удовлетворяющих условиям а) и б), определяются однозначно.

Доказательство. Пусть $\bar{\Omega}_1$ и $\bar{\Omega}_2$ — направления прямой a , а $(O, \bar{\Omega}_1)$ и $(O, \bar{\Omega}_2)$ — открытые лучи с началом O и определяемые этими направлениями. Покажем, что множества точек этих лучей удовлетворяют всем условиям теоремы. В самом деле, они однозначно определяются заданием точки O и сами определяют два множества точек прямой a , удовлетворяющих условию а) теоремы. При этом выполнено также условие б). В самом деле, если A и B принадлежат одному и тому же лучу, то векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ принадлежат одной и той же области, поэтому согласно определению 2 имеем: $\overline{OA} \parallel \overline{OB}$

или $\overline{AO} \nparallel \overline{OB}$. Из определения 5 следует: $\overline{OAB}$. Далее, если A и B принадлежат различным лучам, то согласно определению 2 имеем: $\overline{OA} \nparallel \overline{OB} \Rightarrow \overline{AO} \nparallel \overline{OB} \Rightarrow \overline{AOB}$.

Вторую часть теоремы докажем следующим образом. Пусть (ω_1) и (ω_2) — разбиение, удовлетворяющее условиям теоремы и выполненное каким-либо другим способом. Обозначим через E_0 какую-либо точку луча $(O, \overline{\Omega})$. Так как $E_0 \in (\omega_1) \cup (\omega_2)$, то, не нарушая общности, можно предположить, что $E_0 \in (\omega_1)$. Докажем, что при этом предположении $(O, \Omega_1) \subset (\omega_1)$. В самом деле, если $M \in (O, \Omega_1)$ и $M \neq E_0$, то $\overline{OME}_0$. Отсюда следует, что $M \in (\omega_1)$, так как в противном случае $M \in (\omega_2)$, и поэтому $\overline{ME}_0$. Точно так же можно показать, что $(\omega_1) \subset (O, \Omega_1)$, поэтому $(\omega_1) = (O, \Omega_1)$. ■

6. Отрезок.

Определение 6. Множество, состоящее из двух различных точек A и B и всех точек, лежащих между ними, называется отрезком и обозначается через $[AB]$ или $[BA]$. Точки A и B называются концами отрезка, а любая точка, лежащая между ними — внутренней точкой отрезка.

Предоставляем читателю доказать следующую теорему, которая дает представление о мощности множества точек отрезка.

Теорема [47.4]. Отрезок AB совпадает с множеством всех точек M , удовлетворяющих условию: $\overline{AM} = \alpha \overline{AB}$, где α принимает любое значение в пределах $0 \leq \alpha \leq 1$. □

Отсюда непосредственно получаем.

1°. Каждый отрезок содержит бесконечное множество точек.

2°. Если A и B — различные точки прямой a , то на этой прямой существует бесконечное множество точек, не принадлежащих отрезку AB .

§ 48. Полуплоскость; понятие полупространства

1. Области, определяемые одномерным подпространством, вложенным в двумерное подпространство. Понятие полуплоскости вводится по аналогии с понятием луча. Оно основано на следующей теореме, аналогичной теореме [47.2].

Теорема [48.1]. Пусть $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ — произвольные одномерные и двумерные подпространства, удовлетворяющие условию $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}_2$, а $\overline{\Omega} = \mathfrak{N}_2 \setminus \mathfrak{N}_1$. Тогда все векторы множества $\overline{\Omega}$ единственным образом разделяются на две векторные области так, что эти области не имеют ни одного общего вектора и каждый вектор $\overline{\Omega}$ принадлежит одной из этих областей.

Доказательство. Возьмем базис p, q подпространства $\mathfrak{N}_2$ так, чтобы $p \in \mathfrak{N}_1$, и введем в рассмотрение две области $\{p, q\}$ и $\{p, (-q)\}$ (пример 5, § 47). Докажем, что эти области удовлетворяют условиям теоремы. Прежде всего покажем, что любой вектор множест-

ва $\overline{\Omega}$ принадлежит одной из областей $\{p, q\}$ и $\{p, (-q)\}$. Пусть $x \in \overline{\Omega}$. Это означает, что $x = \xi p + \eta q$, причем $\eta \neq 0$, так как в противном случае $x \in \mathfrak{N}_1 \Rightarrow x \notin \overline{\Omega}$. Если $\eta > 0$, то $x \in \{p, q\}$, а если $\eta < 0$, то $x \in \{p, (-q)\}$. Легко видеть, что $\{p, q\} \cap \{p, (-q)\} = \emptyset$. В самом деле, если допустить, что существует вектор a , принадлежащий $\{p, q\} \cap \{p, (-q)\}$, то по определению этих областей имеем: $a = \alpha_1 p + \beta_1 q$, где $\beta_1 > 0$ и $a = \alpha_2 p + \beta_2 q$, где $\beta_2 < 0$. Отсюда получаем: $(\alpha_1 - \alpha_2)p + (\beta_1 - \beta_2)q = 0$. Так как $\beta_1 - \beta_2 > 0$, то $L(p, q) = 0$. Мы пришли к противоречию.

Остается показать, что не существует других областей, удовлетворяющих условиям теоремы. Пусть $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$ — какая-либо другая пара областей, удовлетворяющих условиям теоремы. Так как $q \notin \mathfrak{N}_1$, то q принадлежит одной из областей: $\overline{\Omega}_1$ или $\overline{\Omega}_2$. Не нарушая общности, допустим, что $q \in \overline{\Omega}_1$. Теперь легко показать, что $\{p, q\} = \overline{\Omega}_1$. Доказательство проведем от противного; пусть существует вектор r , удовлетворяющий условиям: $r \in \{p, q\}$ и $r \notin \overline{\Omega}_1$ (ход рассуждений по существу не изменится, если допустить, что $r \notin \{p, q\}$ и $r \in \overline{\Omega}_1$). Из последнего соотношения следует, что $r \in \overline{\Omega}_2$, поэтому согласно следствию леммы [47.1] имеем: $-r \notin \overline{\Omega}_2$ и $-r \in \overline{\Omega}_1$. Но $\{p, q\}$ и $\overline{\Omega}_1$ являются областями, поэтому согласно определению 1, § 47, при любых положительных α и β имеем:

$$\alpha q + \beta r \in \{p, q\} \text{ и } \alpha q - \beta r \in \overline{\Omega}_1. \quad (1)$$

Векторы p, q и r компланарны, поэтому $\xi p + \eta q + \zeta r = 0$. В этом соотношении в силу условий $L(p, q) \neq 0$, $L(p, r) \neq 0$ коэффициенты η и ζ отличны от нуля. Из предыдущего соотношения получаем: $-\eta \xi p = \eta^2 q + \eta \zeta r$. Отсюда, принимая во внимание соотношения (1), мы приходим к выводу, что вектор $-\eta \xi p$, который принадлежит $\mathfrak{N}_1$, принадлежит также одной из областей: $\{p, q\}$ или $\overline{\Omega}_1$. Этот вывод противоречит определению областей $\{p, q\}$ и $\overline{\Omega}_1$, так как ни один вектор подпространства $\mathfrak{N}_1$ не может принадлежать этим областям. ■

2. Полуплоскость. Пусть Π — плоскость, a — прямая этой плоскости, а $\mathfrak{N}_2$ и $\mathfrak{N}_1$ — подпространства плоскости Π и прямой a . Так как $a \subset \Pi$, то $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}_2$, поэтому все ненулевые векторы плоскости Π , отличные от векторов прямой a , единственным образом разделяются на две области $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$, удовлетворяющие условиям теоремы [48.1]. Эти области будем называть областями плоскости Π , определяемыми прямой a . Докажем следующее вспомогательное предложение.

Лемма [48.2]. Пусть $a \subset \Pi$, а $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$ — области плоскости Π , определяемые прямой a . Если A — произвольная точка прямой a , и M — точка плоскости Π , не лежащая на этой прямой, то вектор $\overline{AM}$ всегда принадлежит одной из областей: $\overline{\Omega}_1$ или $\overline{\Omega}_2$. При этом, если A и B — произвольные различные точки прямой a , то векторы $\overline{AM}$ и $\overline{BM}$ принадлежат одной и той же области.

Доказательство. Так как $a \subset \Pi$ и $A \in a$, то $A \in \Pi$. Из 46.2.2 следует, что $AM \in \mathfrak{R}_2$. Так как $M \notin a$, то $AM \notin \mathfrak{R}_1$, следовательно, $AM \in \mathfrak{R}_2 \setminus \mathfrak{R}_1$ (здесь $\mathfrak{R}_2$ и $\mathfrak{R}_1$ — подпространства плоскости Π и прямой a). Мы пришли к выводу, что AM принадлежит одной из областей: Ω_1 или Ω_2 . Вторую часть леммы докажем от противного. Пусть найдутся такие точки $A \in a$, $B \in a$ и $M \notin a$, что векторы AM и BM принадлежат различным областям. Отсюда, принимая во внимание следствие леммы [47.1], мы приходим к выводу, что AM и MB принадлежат одной и той же области, скажем Ω_1 . Но в этом случае $AM + MB \in \Omega_1$, т. е. $AB \in \Omega_1$. Мы пришли к противоречию: $AB \in \mathfrak{R}_1$, поэтому $AB \notin \Omega_1$. ■

Введем следующее определение.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть a — произвольная прямая плоскости Π , а Ω — одна из ее областей, определяемых прямой a . Множество всех точек M плоскости, удовлетворяющих условию $\overline{M_0M} \in \Omega$, где M_0 — произвольная точка прямой, а также всех векторов, принадлежащих Ω , называется открытой полуплоскостью с границей a . Объединение открытой полуплоскости и ее границы называется полуплоскостью с границей a^1 .

В силу леммы [48.2] при любом выборе точки $M_0 \in a$ определяется одна и та же полуплоскость, поэтому полуплоскость плоскости Π характеризуется прямой a и областью Ω . Далее, из теоремы [48.1] следует, что любая прямая a плоскости Π определяет две и только две открытые полуплоскости (ω_1) и (ω_2) с границей a . Эти полуплоскости не имеют ни одного общего вектора и ни одной общей точки. Любой ненулевой вектор плоскости Π , не принадлежащий прямой a , принадлежит одной и только одной из полуплоскостей: (ω_1) или (ω_2) . Любая точка плоскости Π , отличная от точек прямой a , также принадлежит одной и только одной из указанных полуплоскостей.

3. Понятие разделенности двух точек данной прямой. Введем следующее определение.

О п р е д е л е н и е 2. На плоскости Π дана прямая a . Если точки A и B принадлежат различным открытым полуплоскостям с границей a , то говорят, что точки A и B разделены прямой a (обозначение: $A, B \div a$). Если же они принадлежат одной и той же открытой полуплоскости с границей a , то говорят, что они не разделены прямой a (обозначение: $A, B \nmid a$).

Легко доказать следующее предложение.

Т е о р е м а [48.3]. Пусть $A \in \Pi$, $B \in \Pi$ и $a \subset \Pi$. Для того чтобы $A, B \div a$, необходимо и достаточно, чтобы отрезок AB имел с прямой a одну и только одну общую внутреннюю точку.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Ω_1 и Ω_2 области плоскости, определяемые прямой a , а через p — ненулевой вектор прямой

a . Сначала предположим, что $A, B \nmid a$, и докажем, что отрезок AB имеет с прямой a одну и только одну общую внутреннюю точку. Если M_0 — произвольная точка прямой, то из условия $A, B \nmid a$ следует, что векторы $\overline{M_0A}$ и $\overline{M_0B}$ принадлежат различным областям плоскости Π . Пусть, например, $\overline{M_0A} \in \Omega_1$. Тогда из следствия леммы [47.1] следует, что $\overline{AM_0} \in \Omega_2$. С другой стороны, $\overline{AB} = \overline{AM_0} + \overline{M_0B}$. Мы видим, что $\overline{AB} \in \Omega_2$, поэтому $L(\overline{AB}, p) \neq 0$. Из теоремы [46.7] заключаем, что прямые AB и a пересекаются в одной и только одной точке P . Векторы $\overline{PA}$ и $\overline{PB}$ коллинеарны, поэтому $\overline{PA} = \alpha \overline{PB}$. Согласно лемме [48.2] имеем: $\overline{PA} \in \Omega_1$, $\overline{PB} \in \Omega_2$, поэтому $\alpha < 0$. Отсюда следует, что $\overline{PA} \uparrow \overline{PB} \Rightarrow \overline{AP} \downarrow \overline{PB} \Rightarrow APB$.

Обратно, пусть точка P прямой a является внутренней точкой отрезка AB , т. е. APB . Это означает, что $\overline{AP} \downarrow \overline{PB}$ или $\overline{AP} = \alpha \overline{PB}$, где $\alpha > 0$. Но отсюда вытекает, что векторы $\overline{AP}$ и $\overline{PB}$ принадлежат одной и той же области, поэтому согласно следствию леммы [47.1] векторы $\overline{PA}$ и $\overline{PB}$ принадлежат различным областям, т. е. $A, B \div a$. ■

С л е д с т в и е. Пусть $A \in \Pi$, $B \in \Pi$ и $a \subset \Pi$. Для того чтобы $A, B \nmid a$, необходимо и достаточно, чтобы отрезок AB не имел ни одной общей точки с прямой a .

Пользуясь теоремой [48.3] и ее следствием, легко доказать теорему, частным случаем которой является предложение, известное под названием аксиомы Паша (см. § 55).

Т е о р е м а [48.4]. Пусть A, B и C — три различные точки, а a — прямая, не проходящая ни через одну из данных точек и лежащая с ними в одной плоскости Π . Если прямая a пересекает отрезок AB , то она пересекает один и не пересекает другой из отрезков BC и AC .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (ω_1) и (ω_2) — различные открытые полуплоскости плоскости Π с границей a . Так как $A \notin a$, $B \notin a$, $C \notin a$, то эти точки принадлежат открытым полуплоскостям (ω_1) и (ω_2) . Но $A, B \div a$, поэтому из [48.3] следует, что точки A и B принадлежат различным полуплоскостям. Пусть, например, $A \in (\omega_1)$, а $B \in (\omega_2)$. Если $C \in (\omega_1)$, то из теоремы [48.3] и ее следствия вытекает, что $A, C \nmid a$ и $B, C \div a$, если же $C \in (\omega_2)$, то $A, C \div a$ и $B, C \nmid a$. ■

Рассмотрим еще одно предложение, аналогичное теореме [47.3].

Т е о р е м а [48.5]. Каждая прямая a , расположенная в плоскости Π , разделяет множество всех точек этой плоскости, не лежащих на a , на два непустых множества, удовлетворяющих следующим условиям:

а) каждая точка плоскости Π , не лежащая на прямой a , принадлежит одному и только одному множеству;

б) если A и B принадлежат одному и тому же множеству, то $A, B \nmid a$, если же они принадлежат разным множествам, то $A, B \div a$. □

¹ В учебной литературе вместо термина «полуплоскость с границей a » употребляется также термин «полуплоскость, определяемая прямой a ».

Заданием плоскости Π и прямой a , расположенной в ней, множества точек, удовлетворяющие условиям а) и б), определяются однозначно. $\square$

Идея доказательства этой теоремы та же, что и теоремы [47.3]. Отличие заключается в том, что вместо открытых лучей, исходящих из заданной точки, здесь рассматриваются открытые полуплоскости с границей a . При этом теорема [48.3] и ее следствие позволяют непосредственно обосновать часть б) данной теоремы.

Предлагаем читателю, пользуясь этими указаниями, самостоятельно доказать теорему.

4. Понятие полупространства. По аналогии с изложенным выше может быть введено понятие полупространства. Для этого необходимо предварительно доказать теорему, аналогичную теореме [48.1], о том, что любое двумерное подпространство $\mathbb{M}$, разделяет все векторы трехмерного пространства, не принадлежащие $\mathbb{M}$, на две векторные области. Эти области не имеют ни одного общего вектора, и каждый вектор, не принадлежащий $\mathbb{M}$, принадлежит одной и только одной из этих областей. Доказав эту теорему, по аналогии с определением 1 легко дать определение полупространства, если в пространстве зафиксирована некоторая плоскость. Подробное изложение этого вопроса выходит за рамки настоящего курса.

§ 49. Угол, многоугольники; понятие двугранного угла

1. Понятие угла. Нам предстоит ввести еще одно фундаментальное понятие геометрии — понятие угла. Пусть $[O, p)$ и $[O, q)$ — два луча, исходящие из одной точки и не принадлежащие одной прямой. Тогда $L(p, q) \neq \emptyset$, поэтому можно ввести в рассмотрение области (p, q) и $[p, q]$, рассмотренные в примерах 3 и 4, § 47. Нетрудно заметить, что если $p' \in [O, p)$ и $q' \in [O, q)$, то $p' \parallel p$ и $q' \parallel q$, поэтому $[p', q'] = [p, q]$ и $(p', q') = (p, q)$. Таким образом, области (p, q) и $[p, q]$ однозначно определяются заданием лучей $[O, p)$ и $[O, q)$.

Определение 1. Пусть $[O, p)$ и $[O, q)$ — два луча, исходящие из одной точки и не принадлежащие одной прямой. Множество, состоящее из точки O , всех точек M , удовлетворяющих условию $\overline{OM} \in [p, q]$, а также всех векторов области $[p, q]$, называется углом. Точка O называется вершиной, а лучи $[O, p)$ и $[O, q)$ — сторонами угла. Область $[p, q]$ называется областью угла, а (p, q) — внутренней областью угла.

Угол со сторонами $[O, p)$ и $[O, q)$ будем обозначать через $\angle Opq$. Если стороны угла заданы лучами $[OA)$ и $[OB)$ (соответственно h, k), то угол обозначается через $\angle AOB$ или $\angle BOA$ (соответственно $\angle(h, k)$ или $\angle(k, h)$).

Если $\angle Opq$ — данный угол, то точка M , удовлетворяющая условию $\overline{OM} \in (p, q)$, называется внутренней точкой угла. Любая точка плоскости $\{O, p, q\}$, не принадлежащая данному углу, называется внешней точкой угла. Рассмотрим некоторые простейшие свойства, связанные с этим понятием.

1°. Если точки A и B принадлежат различным сторонам угла Opq и не совпадают с точкой O , то отрезок AB принадлежит данному углу.

Докажем, что произвольная точка M отрезка AB принадлежит углу Opq . Из теоремы [47.4] следует, что $\overline{AM} = \alpha \overline{AB}$, где $0 \leq \alpha \leq 1$. Далее имеем: $\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OA} + \alpha \overline{AB} = \overline{OA} + \alpha (\overline{OB} - \overline{OA}) = \overline{OA} (1 - \alpha) + \alpha \overline{OB}$.

Так как $\overline{OA} \in [p, q]$ и $\overline{OB} \in [p, q]$, то по определению области имеем: $\overline{OM} \in [p, q]$ или $M \in \angle Opq$. $\blacksquare$

2°. Если M — внутренняя точка угла Opq , то открытый луч (OM) целиком состоит из внутренних точек угла.

Пусть N — произвольная точка луча (OM) . Согласно определению открытого луча, $\overline{ON} = \alpha \overline{OM}$, где $\alpha > 0$. Так как M — внутренняя точка угла Opq , то $\overline{OM} \in (p, q)$. Но (p, q) — область, поэтому $\overline{ON} \in (p, q)$, т. е. N — внутренняя точка угла Opq . $\blacksquare$

Как следствие этого свойства, получаем:

3°. Если M — внешняя точка угла Opq , то открытый луч (OM) целиком состоит из внешних точек. Эти свойства позволяют ввести следующее определение.

Определение 2. Всякий луч, исходящий из вершины угла и целиком состоящий из внутренних (внешних) точек, называется внутренним (внешним) лучом угла.

4°. Если открытый луч (O, m) является внутренним лучом угла Opq , то дополнительный открытый луч (O, m') является внешним лучом угла.

В заключение докажем следующую важную теорему.

Теорема [49.1]. Пусть даны $\angle Opq$ и две точки A и B , лежащие на различных сторонах этого угла и отличные от вершины. Тогда всякий внутренний луч пересекает отрезок AB .

Доказательство. Так как точки A и B лежат на сторонах угла Opq , то $\overline{a} = \overline{OA} \in (O, p)$ и $\overline{b} = \overline{OB} \in (O, q)$, поэтому угол Oab совпадает с данным углом Opq . Пусть (O, m) — данный открытый луч, Π — плоскость угла, а $m = (O, m)$ — прямая, определяемая данным лучом. Луч (O, m) состоит из внутренних точек, поэтому $m \in (a, b)$ и $\exists \alpha, \exists \beta : m = \alpha a + \beta b$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Отсюда следует, что векторы a и b принадлежат различным областям плоскости Π , определяемым прямой m , так как в противном случае вектор m будет принадлежать той же области, которой принадлежат a и b . Таким образом, $A, B \div m$, поэтому согласно теореме [48.3] отрезок AB имеет общую внутреннюю точку P с прямой m . Из свойств 1° и 4° следует, что $P \in (O, m)$. $\blacksquare$

2. Обобщение понятия угла. При изучении определенных вопросов геометрии, особенно при изучении тригонометрии, угол определяется несколько иначе, т. е. определение 1 заменяется несколько более общим определением. Пусть (O, p) и (O, q) — два различных открытых луча, исходящих из точки O , а Ω — множество всех векторов

плоскости угла, не принадлежащих данным лучам. Легко видеть, что заданием лучей (O, p) и (O, q) множество Ω разбивается на два непустых подмножества: Ω_1 и Ω_2 , удовлетворяющих условиям: $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ и $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$. В самом деле:

а) Если $L(p, q) \neq \emptyset$, то $\Omega_1 = (p, q)$, а Ω_2 — множество векторов из Ω , не принадлежащих (p, q) .

б) Если $L(p, q) = \emptyset$, то Ω_1 и Ω_2 являются векторами открытых полуплоскостей, определяемых прямой $[O, p]$.

Пусть Ω_0 — объединение одного из множеств: Ω_1 или Ω_2 с векторами лучей $[O, p]$ и $[O, q]$. Если в приведенном выше определении 1 снять ограничения о том, что $[O, p]$ и $[O, q]$ не принадлежат одной прямой, и заменить область $[p, q]$ множеством векторов Ω_0 , то получим новое определение угла в широком смысле этого слова. В этом случае для задания угла, кроме лучей $[O, p]$ и $[O, q]$, следует еще указать область Ω_1 или Ω_2 , поэтому обозначения $\angle Opq$ или $\angle AOB$ не характеризуют полностью угол в новом понимании.

В частности, пользуясь этим определением, можно определить развернутый угол, который был исключен из рассмотрения определением 1. Пусть $[O, p]$ и $[O, q]$ — два различных луча, принадлежащих одной и той же прямой a плоскости Π , а Ω_0 — объединение множеств векторов лучей $[O, p]$ и $[O, q]$ с множеством векторов одной из областей плоскости Π , определяемых прямой a . Множество, состоящее из точки O , всех точек M , удовлетворяющих условию $\overrightarrow{OM} \in \Omega_0$, а также всех векторов множества Ω_0 , называется **развернутым углом**. Для задания развернутого угла необходимо зафиксировать плоскость Π , прямую a , точку O на ней и одну из полуплоскостей с границей a .

3. Многоугольник. Теперь мы в состоянии дать определение многоугольника и тем самым завершить обзор основных геометрических фигур, изучаемых в планиметрии.

Определение 3. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ такие точки, что $A_i \neq A_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Ломаной, соединяющей точки A_1 и A_{n+1} называется объединение отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_{n+1}$. Точки A_1 и A_{n+1} называются **концами** ломаной, точки $A_2, A_3, \dots, A_n$ — ее **вершинами**, а отрезки $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_{n+1}$ — **звеньями** или **сторонами** ломаной (обозначение $A_1A_2 \dots A_{n+1}$).

Ломаная $A_1A_2 \dots A_{n+1}$, соединяющая точки A_1 и A_{n+1} , называется **плоской**, если все ее вершины и концы лежат в одной плоскости. Ломаная $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ называется **замкнутой**, если ее концы совпадают, т. е. $A_1 = A_{n+1}$. Если $A_1A_2 \dots A_nA_1$ — замкнутая ломаная, то точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются **вершинами**, а отрезки $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ — ее **сторонами**.

Для определения многоугольников нас будет интересовать частный случай замкнутой ломаной — простая замкнутая ломаная. **Плоская замкнутая ломаная $A_1A_2, \dots, A_nA_1$ при $n \geq 3$ называется**

простой замкнутой ломаной, если все вершины различны, ни одна вершина не является внутренней точкой стороны и никакая пара сторон не имеет общей внутренней точки. В этом случае ломаную будем обозначать так: $A_1 \dots A_n$.

Важнейшее свойство простой замкнутой ломаной выражается теоремой Жордана, согласно которой всякая простая замкнутая ломаная линия L плоскости Π разбивает все точки этой плоскости, не принадлежащие L , на две области — **внутреннюю** и **внешнюю**, обладающие определенными свойствами, которые сформулированы в I, § 55, с. 352. Эта теорема, доказательство которой мы не приводим ввиду его сложности, позволяет дать следующее определение.

Определение 4. Объединение замкнутой ломаной $A_1A_2 \dots A_n$ и ее внутренней области называется **многоугольником** и обозначается через $A_1A_2 \dots A_n$.

Многоугольники, как известно, классифицируются по числу вершин или, что то же самое, по числу сторон. Простейшими многоугольниками являются треугольники, четырехугольники и т. д.

На этом мы заканчиваем краткий обзор свойств многоугольников и отсылаем читателя к первой части настоящего пособия, где в главе IX (§ 55, 56) можно найти изложение дальнейших фактов, связанных с теорией многоугольников.

4. Понятие двугранного угла. По аналогии с изложенной выше схемой могут быть определены основные геометрические образы трехмерного пространства, в частности двугранные и многогранные углы, многогранные поверхности и многогранники. Рамки настоящей книги не позволяют изложить этот вопрос с достаточной полнотой; отметим лишь, что для введения этих понятий следует прежде всего определить соответствующие трехмерные векторные области, аналогичные областям $[p, q]$ и (p, q) . В частности, для определения двугранного угла вводится в рассмотрение область $\{p, q, r\}$, состоящая из всех векторов вида $x = \xi p + \alpha q + \beta r$, где $L(p, q, r) \neq \emptyset$ и ξ — любое действительное число, а α и β — любые неотрицательные числа, не равные одновременно нулю.

Если в пространстве даны полуплоскости с общей границей, не принадлежащие одной плоскости и определяемые областями $\{p, q\}$ и $\{p, r\}$, то естественным образом вводится область $\{p, q, r\}$ и, пользуясь ею, по аналогии с определением 1 определяется двугранный угол.

§ 50. Трехмерное евклидово пространство; ортогональность прямых и плоскостей

1. Скалярное произведение векторов. Рассмотрим некоторые выводы, непосредственно вытекающие из аксиом E1 — E5. Прежде всего заметим, что распределительный закон, сформулированный в аксиоме E2, можно распространить на любое конечное число слагаемых. Другими словами, имеет место свойство.

1°. Если u — некоторый произвольный ненулевой вектор, выбранный в качестве вектора измерения, то $\forall a_i, \forall b$, где $i = 1, 2, \dots, k$,

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k) b/u = a_1 b/u + a_2 b/u + \dots + a_k b/u.$$

Кроме того, пользуясь аксиомой E1, аналогичное свойство можно сформулировать также для «второго сомножителя», т. е.

$$a(b_1 + b_2 + \dots + b_k)/u = ab_1/u + ab_2/u + \dots + ab_k/u,$$

где $a, b_1, \dots, b_k$ — произвольные векторы.

Скалярное произведение ab/u двух векторов a и b , введенное нами в § 44, существенно зависит от выбора вектора измерения, о чем свидетельствует следующее предложение.

2°. Если a и v — произвольные ненулевые векторы, выбранные в качестве векторов измерения, то для любых двух векторов a и b имеет место соотношение:

$$ab/u = (vv/u)(ab/v). \quad (1)$$

Пусть a и b — два произвольных вектора. Применим аксиому E5 к векторам $a + b, u$ и v :

$$(a + b)(a + b)/u = (vv/u)[(a + b)(a + b)/v].$$

Отсюда, воспользовавшись свойством 1°, получаем:

$$\begin{aligned} aa/u + ab/u + ba/u + bb/u &= \\ = (vv/u)(aa/v + ab/v + ba/v + bb/v). \end{aligned}$$

Принимая во внимание аксиомы E5 и E1, получаем соотношение (1). Заметим, что в соотношении (1) в силу аксиомы E4 имеем: $vv/u \neq 0$, поэтому мы приходим к предложению.

3°. Если векторы a и b таковы, что при некотором выборе вектора измерения v имеем: $ab/v \neq 0$ ($ab/v = 0$), то при любом другом выборе вектора измерения u имеем: $ab/u \neq 0$ ($ab/u = 0$).

Определение 1. Два вектора a и b называются ортогональными, если при любом выборе вектора измерения u имеем: $ab/u = 0$ (обозначение: $a \perp b$).

Замечание. При изучении свойств евклидовых пространств TE_n и TE_n в большинстве случаев будем предполагать, что скалярное произведение установлено наперед заданным фиксированным ненулевым вектором измерения u_0 . В этих случаях в обозначении скалярного произведения векторов a и b будем опускать букву u_0 , т. е. вместо символа ab/u_0 будем употреблять символ ab .

В частности, условие ортогональности двух векторов a и b в соответствии со свойством 3° будем записывать так: $ab = 0$.

2. Ортогональная система векторов. Введем следующее определение.

Определение 2. Система векторов $a_1, a_2, \dots, a_k$ называется ортогональной, если все векторы этой системы ненулевые и попарно ортогональны.

Следующие свойства ортогональной системы векторов хорошо известны из курса алгебры.

1°. Нуль-вектор ортогонален любому вектору пространства.

2°. Любая ортогональная система векторов линейно независима и состоит не более чем из трех векторов.

3°. Если $p \neq 0$ и $p \in \mathbb{M}_2$, то всегда существует такой вектор $q \in \mathbb{M}_2$, что p, q образуют ортогональную систему образующих подпространства $\mathbb{M}_2$, т. е. $\mathbb{M}_2 = \{p, q\}$, $q \neq 0$, $p \perp q$.

4°. Если $\mathbb{M}_2$ — произвольное двумерное подпространство, а a — ненулевой вектор, принадлежащий ему, то всегда существуют такие векторы b и c , что $b \in \mathbb{M}_2$ и a, b, c образуют ортогональную систему векторов.

5°. В пространстве E_3 всегда существует хотя бы один ортогональный базис.

3. Ортогональные подпространства. Напомним следующее определение, известное из курса алгебры.

Определение 3. Говорят, что вектор p ортогонален подпространству $\mathbb{M}_k$, если этот вектор ортогонален любому вектору подпространства $\mathbb{M}_k$ (обозначение: $p \perp \mathbb{M}_k$). Множество всех векторов, ортогональных подпространству $\mathbb{M}_k$, называется ортогональным дополнением (здесь $k = 1, 2$).

Следующие две теоремы, известные из курса алгебры, характеризуют основные свойства этого понятия.

Теорема [50.1]. Ортогональное дополнение подпространства $\mathbb{M}_k$, где $k = 1, 2$, есть подпространство размерности $3 - k$. □

Теорема [50.2]. Если подпространство $\mathbb{M}_{3-k}$ есть ортогональное дополнение подпространства $\mathbb{M}_k$, то $\mathbb{M}_k$ есть ортогональное дополнение подпространства $\mathbb{M}_{3-k}$ (здесь $k = 1, 2$). □

Теперь введем важное определение, которое несколько отличается от соответствующего определения курса алгебры.

Определение 4. Два подпространства $\mathbb{M}_k$ и $\mathbb{M}_l$ (здесь $k, l = 1, 2$) называются ортогональными, если каждое из подпространств $\mathbb{M}_k$ и $\mathbb{M}_l$ содержит ненулевой вектор, ортогональный другому подпространству. Подпространства $\mathbb{M}_k$ и $\mathbb{M}_l$ называются полностью ортогональными, если каждый вектор любого из этих подпространств ортогонален другому подпространству.

Из этого определения вытекает ряд важных следствий.

1°. Если $\mathbb{M}_k$ и $\mathbb{M}_l$ — ортогональные подпространства и $k + l \leq 3$, то они полностью ортогональны.

Так как $k + l \leq 3$ и $k > 0, l > 0$, то одно из чисел k и l равно единице. Пусть, например, $k = 1$. В пространстве $\mathbb{M}_1$ существует вектор $p \neq 0$, ортогональный $\mathbb{M}_l$. Согласно теореме [45.2] $\mathbb{M}_1 = \{p\}$, поэтому подпространства $\mathbb{M}_1$ и $\mathbb{M}_l$ полностью ортогональны.

2°. Если $\mathbb{M}_k \perp \mathbb{M}_l$, то $\mathbb{M}_k \neq \mathbb{M}_l$ и, кроме того, $\mathbb{M}_k \not\subset \mathbb{M}_l$ и $\mathbb{M}_l \not\subset \mathbb{M}_k$.

Свойство вытекает из утверждения 1°: если $p \neq 0$ и $p \perp \mathbb{M}_l$, то $p \notin \mathbb{M}_l$.

3°. Если $\mathbb{M}_k$ и $\mathbb{M}_l$ полностью ортогональны, то $\mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_l = 0$.

В самом деле, пусть $p \in \mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_l$. Так как $p \in \mathbb{M}_k$ и $p \in \mathbb{M}_l$, то согласно определению 4 имеем:

$$p \perp p \Rightarrow pp = 0 \Rightarrow p = 0.$$

Следующее свойство показывает, что если $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ просто ортогональны, то свойство 3° может не иметь места.

4°. Если одно из двумерных подпространств $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ содержит ненулевой вектор, ортогональный другому, то $\mathfrak{M}_1 \perp \mathfrak{M}_2$.

Пусть, например, $p \neq 0$, $p \perp \mathfrak{M}_2$ и $p \in \mathfrak{M}_1$. Нам необходимо показать, что существует ненулевой вектор q , принадлежащий $\mathfrak{M}_1$ и ортогональный $\mathfrak{M}_2$. Согласно 45.2.7 $\exists a (a \neq 0, a \in \mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{M}_1)$. Так как $a \in \mathfrak{M}_2$, то $p \perp a$. Пользуясь свойством 50.2.3, возьмем вектор q так, чтобы $q \neq 0$, $q \in \mathfrak{M}_2$, $q \perp a$. Таким образом, $q \in \mathfrak{M}_1$, $p \perp \mathfrak{M}_2 \Rightarrow p \perp q$. Но так как $q \perp p$, $q \perp a$ и $\mathfrak{M}_2 = \{p, a\}$, то $q \perp \mathfrak{M}_2$. ■

4. Ортогональность прямых и плоскостей. Рассмотренные выше свойства пространства E_3 позволяют легко обосновать все основные свойства ортогональности прямых и плоскостей точечно-векторного евклидова пространства TE_3 .

Определение 5. Два пространственных образа (см. § 46, п. 5) π и π' называются ортогональными, если их подпространства ортогональны.

Для логического обоснования понятия ортогональности двух пространственных образов необходимо доказать следующее предложение, которое с точки зрения наших наглядных представлений является вполне очевидным.

Лемма [50.3]. Если пространственные образы π и π' ортогональны, то они не параллельны.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ — подпространства этих образов. Из свойства 2° п. 3 настоящего параграфа следует, что $\mathfrak{M} \not\subset \mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}' \not\subset \mathfrak{M}$, поэтому согласно определениям 3, 4, 5 § 46 пространственные образы π и π' не параллельны. ■

Теперь рассмотрим некоторые свойства ортогональности прямых и плоскостей.

1°. Если прямая a ортогональна плоскости Π , то a и Π пересекаются в одной и только одной точке.

Действительно, из предыдущей леммы следует, что $a \not\parallel \Pi$, поэтому прямая a пересекает плоскость Π .

2°. Если плоскости Π и Π' ортогональны, то они пересекаются по прямой.

В самом деле, по предыдущей лемме $\Pi \not\parallel \Pi'$. Пользуясь теоремой [46.5], легко показать, что $\exists A : A \in \Pi \cap \Pi'$. Из леммы [46.8] следует искомый результат.

Предлагаем читателю, пользуясь этой схемой, самостоятельно доказать дальнейшие предложения стереометрии, известные из школьного курса геометрии, и в частности следующие теоремы:

3°. Через любую точку пространства проходит одна и только одна прямая, ортогональная данной плоскости¹. □

4°. Если прямая a ортогональна двум непараллельным прямым b_1 и b_2 , лежащим в плоскости Π , то прямая a ортогональна плоскости Π .

5°. Через любую точку пространства проходит одна и только одна плоскость, ортогональная данной прямой. □

6°. Если прямая a ортогональна плоскости Π_1 и параллельна плоскости Π_2 , то плоскости Π_1 и Π_2 ортогональны. □

Мы видим, что изложение основных фактов стереометрии на основе точечно-векторной аксиоматики существенно отличается от традиционного способа изложения. Здесь удастся на основе сравнительно небольшого числа аксиом дать строгое обоснование основных фактов стереометрии, избегая ссылок на наглядность и очевидность, которые так характерны для данного раздела школьного курса геометрии.

5. Ортогональность прямых и лучей на плоскости. Рассмотрим некоторые факты планиметрии, связанные с понятием ортогональности. Данное выше общее определение ортогональности пространственных образов можно распространить также на объекты планиметрии. В соответствии с определением 5 две прямые a и b , лежащие в плоскости Π , называются ортогональными, если их подпространства ортогональны. Отсюда следует, что каждый вектор одной прямой ортогонален каждому вектору второй прямой и обратно.

Согласно лемме [50.3] две ортогональные прямые не могут быть параллельны, поэтому в силу теоремы [46.7] любые две ортогональные прямые, лежащие в одной плоскости, пересекаются.

Докажем следующую теорему.

Теорема [50.4]. Каковы бы ни были точка A и прямая a , лежащие в плоскости Π , в этой плоскости существует одна и только одна прямая, проходящая через точку A и ортогональная прямой a .

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}_a$ — подпространство плоскости Π , а p — ненулевой вектор прямой a . Согласно свойству 50.2.3, $\exists q : q \in \mathfrak{M}_a, q \perp p$. Очевидно, прямая $\{A, q\}$ удовлетворяет условиям теоремы (рис. 149). Если $\{A, q'\}$ — другая прямая, удовлетворяющая условиям теоремы, то $q' \perp p$, поэтому $q'p = 0$. Разложив вектор q' по p и q , будем иметь: $q' = \alpha p + \beta q$. Отсюда получаем: $q'p = (\alpha p + \beta q)p = 0$, или $\alpha = 0$, т. е. $q' = \beta q$. Таким образом, $\{A, q'\} = \{A, q\}$. ■

Аналогично можно ввести понятие ортогональности двух лучей или луча и прямой.

Определение 6. Пусть h и l — два луча, а a — прямая, лежащие в плоскости Π . Лучи h и l называются ортогональными, если каждый вектор луча h ортогонален любому вектору луча l . Аналогично, луч h называется ортогональным прямой a , если каждый вектор луча h ортогонален любому вектору прямой a .

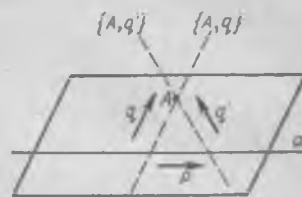


Рис. 149

¹ Здесь не исключается случай, когда точка принадлежит плоскости.

Определение 7. Пусть h — луч, исходящий из точки O , а ω — некоторая открытая полуплоскость, определяемая прямой, содержащей луч h . Тройку O, h, ω назовем репером (обозначается через $[O, h, \omega]$).

Будем говорить, что луч k с началом O принадлежит реперу $[O, h, \omega]$, если k исходит из точки O и принадлежит полуплоскости ω (обозначение: $k \subset [O, h, \omega]$). Имеет место предложение: для того чтобы луч OA принадлежал реперу $[O, h, \omega]$, необходимо и достаточно, чтобы некоторая точка этого луча принадлежала открытой полуплоскости ω .

Предлагаем читателю, пользуясь теоремой [50.4], доказать следующее важное предложение.

Теорема [50.5]. Если $[O, h, \omega]$ — данный репер, то всегда существует один и только один луч, принадлежащий этому реперу и ортогональный границе полуплоскости ω . $\square$

§ 51. Расстояние между двумя точками и конгруэнтность отрезков. Координаты точек на прямой

1. Модуль вектора. Аксиома $E4$ позволяет ввести следующее определение.

Определение 1. Пусть зафиксирован некоторый произвольный ненулевой вектор u в качестве вектора измерения. Модулем вектора a , установленным вектором u , называется число $\sqrt{aa/u}$ (обозначается через $|a|_u$).

В этом определении вектор измерения u играет существенную роль. В самом деле, из аксиомы $E5$ непосредственно следует, что если u и v — произвольные ненулевые векторы измерения, то

$$|a|_u = |v|_u |a|_v. \quad (1)$$

Из аксиомы $E4$ следует, что модуль любого вектора при произвольном выборе вектора измерения u есть действительное число, причем если $a \neq 0$, то $|a|_u \neq 0$. Рассмотрим основные свойства этого понятия.

1. Если $a = 0$, то при любом выборе вектора u имеем: $|a|_u = 0$. Обратно, если при некотором выборе вектора измерения u имеем: $|a|_u = 0$, то $a = 0$.

Это свойство непосредственно следует из 50.2.1, так как если $a = 0$, то $aa/u = 00/u = 0$, поэтому $|a|_u = \sqrt{aa/u} = 0$. Обратно, если $|a|_u = 0$, то $aa/u = 0$, поэтому согласно аксиоме $E4$ имеем: $a = 0$. $\blacksquare$

Определение 2. Вектор a называется **единичным** при данном выборе вектора измерения u , если $|a|_u = 1$.

Из соотношения (1) следует, что свойство вектора быть единичным существенно зависит от выбора вектора измерения.

Если в соотношении (1) положить $u = v$ и $a \neq 0$, то получаем:

$$|a|_u = |u|_u |a|_u \Rightarrow |a|_u = 1.$$

Таким образом, вектор измерения является единичным вектором. Далее, если $|v|_u = 1$, то из соотношения (1) получаем: $|a|_u = |a|_v$. Итак, при переходе от вектора измерения u к другому единичному вектору измерения v модуль вектора не меняется.

2°. Если $a = \alpha b$, то при любом выборе вектора измерения имеем: $|a|_u = |\alpha| |b|_u$.

В самом деле, $|a|_u = \sqrt{aa/u} = \sqrt{(\alpha b)(\alpha b)/u} = \sqrt{\alpha^2 (bb/u)} = |\alpha| \sqrt{bb/u} = |\alpha| |b|_u$. $\blacksquare$

З а м е ч а н и е. Так же как и в случае скалярного произведения (см. замечание в п. 1, § 50), в дальнейшем в большинстве случаев мы будем предполагать, что понятие модуля установлено некоторым фиксированным вектором измерения, который остается одним и тем же при изучении различных вопросов теории. В этом случае модуль вектора обозначается просто через $|a| = \sqrt{aa}$.

3°. Если $a \neq 0$, то $\frac{a}{|a|}$ — единичный вектор. В самом деле, пусть $p = \frac{a}{|a|}$. Из предыдущего свойства следует, что $|p| = \frac{1}{|a|} |a| = 1$. $\blacksquare$

4°. Если $a \parallel e$, где e единичный вектор, то $a = |a|e$. Из соотношения $a \parallel e$ следует, что $a = \alpha e$ и $\alpha > 0$. Согласно свойству 2°, $|a| = \alpha |e| = \alpha$. Таким образом, $a = \alpha e = |a|e$. $\blacksquare$

5°. Для любых двух векторов a и b имеет место неравенство:

$$-|a||b| < ab < |a||b|. \quad (2)$$

Если $a = 0$ или $b = 0$, то это соотношение непосредственно следует из 50.2.1 и свойства 1° настоящего параграфа. В случае $a \neq 0$ и $b \neq 0$ соотношение (2) следует из теоремы 1 [69.1]. Отметим, что доказательство этой теоремы, по существу, проведено на основе аксиом $E1 - E4$, поэтому здесь мы можем воспользоваться этим доказательством. $\blacksquare$

Теорема [51.1]. Пусть $a \neq 0, b \neq 0$. Для того чтобы $a \parallel b$, необходимо и достаточно, чтобы $ab = |a||b|$.

Доказательство. Сначала докажем необходимость условия. Из соотношения $a \parallel b$ следует, что $a = \alpha b$, где $\alpha > 0$. Из свойства 2° получаем: $|a| = \alpha |b|$, поэтому

$$ab = \alpha b b = \alpha |b|^2 = |a||b|.$$

Теперь докажем достаточность условия. Данное соотношение эквивалентно следующему: $(ab)^2 = (aa)(bb)$. Разделив это соотношение на bb и положив $\lambda = \frac{ab}{bb}$, получаем: $\lambda(ab) = (aa)$. Таким образом,

$$(\lambda b - a)a = 0.$$

С другой стороны, $\lambda(bb) - (ab) = 0$. Отсюда получаем:

$$(\lambda b - a)b = 0. \quad (3)$$

Умножая соотношение (3) на λ и вычитая из этого соотношения предыдущее, получаем:

$$(\lambda b - a)(\lambda b - a) = 0. \quad (4)$$

Из (4) и аксиомы E4 следует, что $a = \lambda b$. Подставив значения a в исходное соотношение, приходим к искомому результату. В самом деле, $ab = |a||b| \Rightarrow \lambda bb = |a||b| \Rightarrow \lambda = \frac{|a||b|}{bb} \Rightarrow \lambda > 0 \Rightarrow a \uparrow\uparrow b$. ■

Как непосредственное следствие этой теоремы получаем:

С л е д с т в и е. Пусть $a \neq 0$, $b \neq 0$. Для того чтобы $a \uparrow\uparrow b$, необходимо и достаточно, чтобы $ab = -|a||b|$.

В самом деле, для того чтобы $a \uparrow\uparrow b$, необходимо и достаточно, чтобы $a \uparrow\uparrow -b$. Воспользовавшись доказанной теоремой, получаем искомое соотношение.

6°. Пусть $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Для того чтобы $a \uparrow\uparrow b$, необходимо и достаточно, чтобы

$$|a + b| = |a| + |b|. \quad (5)$$

Воспользуемся тождеством

$$(a + b)(a + b) = aa + 2ab + bb. \quad (6)$$

Если $a \uparrow\uparrow b$, то из предыдущей теоремы следует, что $ab = |a||b|$, поэтому соотношение (6) принимает вид:

$$(a + b)(a + b) = (aa) + 2|a||b| + (bb) \quad (7)$$

или

$$|a + b|^2 = (|a| + |b|)^2. \quad (8)$$

Это соотношение эквивалентно соотношению (5).

Обратно, из соотношения (5) следует (8), а из соотношения (8) следует (7). Далее, из соотношений (7) и (6) получаем: $ab = |a||b|$. Из предыдущей теоремы следует, что $a \uparrow\uparrow b$. ■

Теперь докажем следующее важное предложение.

Т е о р е м а [51.2]. Каковы бы ни были векторы a и b , имеет место соотношение: $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы воспользуемся тождеством (6). Из соотношения (2) следует, что $ab \leq |a||b|$, поэтому из соотношения (6) получаем: $(a + b)(a + b) \leq aa + 2|a||b| + bb$, или $|a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2$. Полученное выражение, очевидно, равносильно искомому соотношению. ■

Воспользовавшись свойством 6°, как следствие этой теоремы получаем:

С л е д с т в и е. Если $L(a, b) \neq 0$, то $|a + b| < |a| + |b|$.

2. Расстояние между двумя точками. Предварительно заметим, что в пространстве TE_3 для установления скалярного произведения нет необходимости фиксировать вектор измерения — можно ограничиться выбором некоторого отрезка E_1E_2 , который будем называть

единицей длины или единицей измерения. В самом деле, если отрезок E_1E_2 зафиксирован, то за вектор измерения может быть выбран вектор $\overrightarrow{E_1E_2}$ или $\overrightarrow{E_2E_1}$. Из формулы (1), § 50, следует, что скалярные произведения, установленные векторами $\overrightarrow{E_1E_2}$ и $\overrightarrow{E_2E_1}$, совпадают, так как $ab \cdot \overrightarrow{E_1E_2} = (\overrightarrow{E_2E_1} \cdot \overrightarrow{E_2E_1} / \overrightarrow{E_1E_2}) \times (ab / \overrightarrow{E_2E_1})$. Но $(\overrightarrow{E_2E_1} \cdot \overrightarrow{E_2E_1} / \overrightarrow{E_1E_2}) = (\overrightarrow{E_1E_2} \cdot \overrightarrow{E_1E_2} / \overrightarrow{E_1E_2}) = 1$; поэтому $ab / \overrightarrow{E_1E_2} = ab \overrightarrow{E_2E_1}$.

Понятие модуля вектора позволяет ввести следующее определение.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть в пространстве TE_3 зафиксирована единица длины E_1E_2 . Расстоянием между точками A и B называется модуль вектора $\overrightarrow{AB}$, установленный вектором $u = \overrightarrow{E_1E_2}$, т. е. число $|AB|_u$ (обозначается через $|AB|_{E_1E_2}$ или $|AB|_{E_1E_2}$).

В дальнейшем изложении мы будем предполагать, что единица длины зафиксирована, поэтому расстояние между точками A и B будем обозначать через $|AB|$.

Из определения 3 следует, что $|AB| = |BA|$. В самом деле,

$$\begin{aligned} |AB| &= |\overrightarrow{AB}|, \quad |BA| = |\overrightarrow{BA}| = |(-1)\overrightarrow{AB}| = \\ &= |-1| |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AB}| = |AB|. \end{aligned}$$

Далее, если $A \neq B$, то в силу свойства 1° $|AB| > 0$, если же $A = B$, то $|AB| = 0$.

Для любых трех точек A , B и C имеют место соотношения.

$$1^\circ. |AC| \leq |AB| + |BC|.$$

$$2^\circ. |AC| \geq |AB| - |BC|.$$

Докажем первое из этих соотношений. Так как $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, то из теоремы [51.2] следует, что $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| \leq |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$ или $|\overrightarrow{AC}| \leq |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$, что равносильно соотношению 1°. Соотношение 2° легко получить, если записать соотношение 1° дважды для точек B , C , A и B , A , C .

Пользуясь следствием теоремы [51.2], получаем следующее важное свойство расстояний.

3°. Если три точки A , B , C не лежат на одной прямой, то

$$|AC| < |AB| + |BC|.$$

Предлагаем читателю, воспользовавшись определением 5 (§ 47) и свойством 51.1.6, самостоятельно доказать следующую теорему.

Т е о р е м а [51.3]. Пусть A , M и B — три различные точки.

Для того чтобы $\overrightarrow{AMB}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$|AM| + |MB| = |AB|. \quad (10)$$

3. Конгруэнтность отрезков.

О п р е д е л е н и е 4. Длиной отрезка $[AB]$ при выбранной единице длины E_1E_2 называется расстояние между точками A и B , определенное той же единицей длины, т. е. число $|AB|_{E_1E_2}$.

Согласно определению 6 (§ 47) концы отрезка — различные точки, поэтому длина любого отрезка есть положительное число.

Длина отрезка, как видно из формулы (1), существенно зависит от выбора единицы длины. В самом деле, пусть $[AB]$ — произвольный отрезок, $[E_1E_2]$ — старая единица длины, а $[F_1F_2]$ — новая. Если положить $\overline{AB} = a$, $\overline{E_1E_2} = v$, $\overline{F_1F_2} = u$, то из формулы (1) будет следовать, что

$$|AB|_{F_1F_2} = |E_1E_2|_{F_1F_2} |AB|_{E_1E_2}. \quad (11)$$

Отсюда мы приходим к следующему важному выводу: при переходе от одной единицы длины к другой, длины всех отрезков умножаются на одно и то же число, равное длине старой единицы длины, измеренной при помощи новой единицы.

Из формулы (11) можно прийти к следующему важному выводу: если длины отрезков AB и CD , измеренные при некоторой единице длины E_1E_2 , равны, то длины тех же отрезков при любой другой единице длины F_1F_2 также равны. В самом деле, пусть $|AB|_{E_1E_2} = |CD|_{E_1E_2}$. Из (1) следует, что $|AB|_{F_1F_2} = |E_1E_2|_{F_1F_2} |AB|_{E_1E_2}$, $|CD|_{F_1F_2} = |E_1E_2|_{F_1F_2} |CD|_{E_1E_2}$, поэтому $|AB|_{F_1F_2} = |CD|_{F_1F_2}$.

Это свойство позволяет ввести следующее определение:

О п р е д е л е н и е 5. Два отрезка AB и CD называются конгруэнтными, если при любом выборе единицы измерения длины их равны (обозначение: $[AB] \cong [CD]$).

В дальнейшем изложении в соответствии с соглашением, введенным выше, мы будем предполагать, что единица длины зафиксирована, а длину отрезка AB будем обозначать через $|AB|$.

Рассмотрим ряд простых свойств, связанных с понятием конгруэнтности отрезков. Для того чтобы сформулировать эти свойства, условимся в дальнейшем луч с началом в точке O обозначать через $[O, e)$, где e — единичный вектор луча в выбранной единице измерения.

Из определения 5 непосредственно следует:

1°. Отношение конгруэнтности отрезков удовлетворяет условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности.

2°. Пусть $[O, e)$ — открытый луч, а A и B — две точки этого луча. Если $[OA] \cong [OB]$, то $A = B$.

В самом деле, так как $\overline{OA} \in (O, e)$, $\overline{OB} \in (O, e)$, то $\overline{OA} \parallel \overline{OB}$, поэтому $\overline{OA} = \lambda \overline{OB}$, где $\lambda > 0$. Согласно 51.1.2 имеем: $|OA| = \lambda |OB|$. По условию $|OA| = |OB| \neq 0$, поэтому $\lambda = 1$. Таким образом, $\overline{OA} = \overline{OB}$, и в силу аксиомы T2 получаем $A = B$. ■

3°. Пусть $[O, e)$ — некоторый луч, а $[AB]$ — произвольный отрезок. Тогда $\exists! C : (C \in [O, e), [OC] \cong [AB])$.

Это свойство устанавливает возможность отложить на данном луче от начала луча отрезок, конгруэнтный данному отрезку.

Возьмем вектор $p = |AB|e$ и рассмотрим точку C , удовлетворяющую условию $\overline{OC} = p$. Так как $\overline{OC} \parallel e$, то $C \in [O, e)$. Далее, из свойства 51.1.2 следует, что $|\overline{OC}| = |AB||e| = |AB|$. Единственность точки C , удовлетворяющей этому условию, непосредственно следует из предыдущего свойства. ■

4°. Пусть $[O, e)$ — некоторый луч, а ξ — произвольное положительное действительное число. Тогда на луче $[O, e)$ существует одна и только одна точка C такая, что отрезок $[OC]$ имеет длину, равную числу ξ .

В самом деле, согласно аксиоме T2 на луче $[O, e)$ существует такая точка C , что $\overline{OC} = \xi e$. Из свойства 51.1.2 следует, что $|OC| = \xi$. Единственность точки C непосредственно вытекает из свойства 2°.

4. Середина отрезка.

О п р е д е л е н и е 6. Серединой отрезка AB называется точка M прямой AB , удовлетворяющая условию: $[AM] \cong [MB]$.

Теорема [51.4]. Каждый отрезок имеет одну и только одну середину, которая является его внутренней точкой.

Предлагаем читателю эту теорему доказать самостоятельно. При этом следует учесть, что если $[AB]$ — данный отрезок, то точка M , удовлетворяющая условию $[AM] = \frac{1}{2}|AB|$ (аксиома T2), является искомой серединой.

5. Сумма отрезков. Введем следующее определение.

О п р е д е л е н и е 7. Суммой двух отрезков AB и CD называется такой отрезок PQ , длина которого равна сумме длин отрезков AB и CD (обозначение: $[PQ] \cong [AB] + [CD]$). Пользуясь формулой (1), нетрудно показать, что это определение не зависит от выбора единицы длины.

Легко показать, что каковы бы ни были отрезки AB и CD , всегда существует их сумма $[PQ]$. Имеют место следующие два свойства.

1°. Если $[AB] \cong [A'B']$, $[CD] \cong [C'D']$, то $[AB] + [CD] \cong [A'B'] + [C'D']$.

2°. Если AMB , то $[AM] + [MB] \cong [AB]$.

Первое свойство непосредственно следует из определения суммы отрезков, а второе свойство — из теоремы [51.3].

О п р е д е л е н и е 7 можно обобщить на случай суммы любого числа отрезков. Далее, введем следующее определение: произведением натурального числа n на отрезок AB называется отрезок $n[AB] = [AB] + [AB] + \dots + [AB]$ (n раз).

Определение 4 длины отрезка позволяет ввести понятия «больше» и «меньше» для отрезков.

О п р е д е л е н и е 8. Будем говорить, что отрезок AB меньше отрезка CD или отрезок CD больше отрезка AB , если длина отрезка AB меньше длины отрезка CD (обозначение: $[AB] < [CD]$).

Введенное отношение транзитивно, т. е. если $[AB] < [CD]$ и $[CD] < [EF]$, то $[AB] < [EF]$.

6. Система координат на прямой. Пусть a — произвольная прямая, на которой дана точка O и принадлежащий ей единичный вектор g . Геометрический образ Og , состоящий из точки O и вектора g , будем называть декартовой системой координат на прямой.

Если M — произвольная точка прямой a , то по определению прямой имеем:

$$\overline{OM} = xg, \quad (12)$$

где x — некоторое действительное число, которое будем называть декартовой координатой точки M в системе Og (обозначение: $M(x)$). Таким образом, каждая точка прямой в выбранной системе координат имеет координату. Если $A(x)$, $B(y)$ — две точки, то $\overline{OA} = xg$, $\overline{OB} = yg$. Так как $\overline{BA} = \overline{OA} - \overline{OB}$, то

$$\overline{BA} = (x - y)g. \quad (13)$$

Из соотношений (12), учитывая аксиому T2, заключаем, что каково бы ни было действительное число x , на прямой a всегда существует такая точка, что ее координата равна x .

Мы видим, что если на прямой выбрана декартова система координат, то устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством (a) всех точек прямой a и действительными числами R . Это соответствие будем обозначать через $G: (a) \rightarrow R$. Легко показать, что соответствие G обладает свойствами, сформулированными в следующей теореме.

Теорема [51.5]. Заданная на прямой a декартова система координат позволяет установить взаимно однозначное соответствие $G: (a) \rightarrow R$ между точками прямой a и действительными числами так, что геометрический порядок следования точек прямой a отражается в арифметическом порядке по принципу $>$, $<$, а конгруэнтность отрезков — равенством соответствующих числовых отрезков. $\square$

7. Предложения Архимеда, Дедекинда и Кантора. Сформулированная выше теорема дает основание множество R назвать числовой осью и все теоремы, относящиеся к свойствам порядка чисел и равенства числовых отрезков, почти автоматически распространить на множества точек прямой. В частности, аксиома Архимеда, принцип Дедекинда и предложение Кантора о вложенных отрезках, которые имеют место в R , автоматически переносятся на множество точек прямой. Отметим, однако, что в геометрии соответствующим предложениям удобнее придать несколько иные формулировки, чем те, которые получают непосредственно, если к соответствующим предложениям, сформулированным для чисел, применить предыдущую теорему. Например, известное предложение Архимеда в геометрии формулируется так.

Теорема [51.6]. Каковы бы ни были два отрезка $[E_1E_2]$ и $[AB]$, всегда существует такое натуральное число n , что отрезок $[PQ] \cong n[E_1E_2]$ больше отрезка $[AB]$.

Доказательство. Пусть $\xi = |E_1E_2|$ и $\alpha = |AB|$. Так как $\xi > 0$ и $\alpha > 0$, то всегда существует такое натуральное число n , что $n\xi > \alpha$. Мы утверждаем, что отрезок $[PQ] = n[E_1E_2]$ больше отрезка AB . В самом деле, $|PQ| = \xi + \dots + \xi = n\xi$. Но $n\xi > \alpha$, поэтому $|PQ| > |AB|$. $\blacksquare$

С другой формулировкой предложения Архимеда читатель познакомится в следующей главе (см. § 57, аксиома IV, 1).

§ 52. Конгруэнтность углов.

В настоящем параграфе мы широко будем пользоваться понятием базиса e_1, e_2 подпространства $\mathcal{M}_2$ и координатами вектора в базисе, называя координатами вектора α коэффициенты α и β в разложении:

$$\alpha = \alpha e_1 + \beta e_2. \quad (1)$$

При выбранной единице длины базис e_1, e_2 называется прямоугольным декартовым, если $|e_1| = |e_2| = 1$ и $e_1 e_2 = 0$.

Здесь всюду предполагается, что если угол обозначен через $\angle(O, e_1 e_2)$, то векторы e_1 и e_2 единичные.

1. Репер плоскости и его базис. Если (Q, h, ω) — данный репер (см. определение 7, § 50), то точку O , луч h , прямую, содержащую h и открытую полуплоскость ω будем называть соответственно вершиной, лучом, прямой и полуплоскостью репера. Напомним также, что лучи, исходящие из точки O и целиком состоящие из точек и векторов репера, называются лучами, принадлежащими реперу.

Если (O, h, ω) — данный репер, то согласно теореме [50.5] существует один и только один луч k , который принадлежит данному реперу и ортогонален данному лучу h . Если g_1 и g_2 — единичные векторы соответственно лучей h и k , то легко видеть, что g_1, g_2 образуют базис плоскости репера. Этот базис будем называть базисом репера. Докажем предложение.

Лемма [52.1]. Пусть (O, h, ω) — данный репер, а g_1, g_2 — базис этого репера. Тогда если $a_0(\alpha_0 \cdot \beta_0)$ — единичный вектор, принадлежащий плоскости репера, то

$$\alpha_0 = a_0 g_1, \quad \beta_0 = \varepsilon \sqrt{1 - (a_0 g_1)^2}, \quad (2)$$

где $\varepsilon = 1$, если $a_0 \in \omega$, и $\varepsilon = -1$, если $a_0 \in \omega'$. Здесь ω' — дополнительная полуплоскость данного репера.

Доказательство. По определению базиса имеем: $a_0 = \alpha_0 g_1 + \beta_0 g_2$. Отсюда получаем:

$$a_0 a_0 = (\alpha_0 g_1 + \beta_0 g_2)(\alpha_0 g_1 + \beta_0 g_2) = \alpha_0^2 + \beta_0^2 = 1.$$

Таким образом, получаем:

$$\beta_0^2 = 1 - \alpha_0^2 \Rightarrow \beta_0 = \varepsilon \sqrt{1 - \alpha_0^2},$$

где $\varepsilon = \pm 1$. Для уточнения знака в запишем разложение вектора a_0 в виде:

$$\alpha_0 g_1 = a_0 - \beta_0 g_2 \quad (3)$$

и рассмотрим различные возможные случаи расположения вектора a_0 по отношению к полуплоскостям ω и ω' .

а) $a_0 \in a$, где a — прямая репера. Векторы a_0 и g_1 коллинеарны, поэтому из (3) следует, что $\beta_0 = 0$ и ε может быть любым.

б) $a_0 \in \omega$. Покажем, что $\beta_0 > 0$. В самом деле, если допустить, что $\beta_0 < 0$, то из (3) приходим к выводу, что $\alpha_0 g_1 \in \omega$, что противоречит условию выбора вектора g_1 . Таким образом, $\varepsilon = +1$.

в) $a_0 \in \omega'$. В этом случае по аналогии с предыдущим можно показать, что $\beta_0 < 0$, поэтому $\varepsilon = -1$. ■

2. Понятие индекса угла.

Определение 1. Индексом угла A_1OA_2 назовем число

$$I(A_1OA_2) = \frac{a_1 a_2 / u}{V(a_1 a_2 / u)(a_2 a_2 / u)},$$

где a_1, a_2 — произвольные ненулевые векторы, принадлежащие сторонам угла. Здесь $u = E_1 E_2$, где $[E_1 E_2]$ — выбранная единица длины.

Для того чтобы убедиться в корректности этого определения, необходимо показать, что понятие индекса не зависит ни от выбора единицы длины $E_1 E_2$, ни от выбора векторов a_1, a_2 , принадлежащих сторонам угла. Пусть b_1, b_2 — другие ненулевые векторы, принадлежащие сторонам угла, а $[F_1 F_2]$ — новая единица длины. Очевидно, $b_1 = \lambda_1 a_1$, $b_2 = \lambda_2 a_2$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Полагая $F_1 F_2 = v$ и принимая во внимание формулу (1), § 50, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 a_2 / u}{V(a_1 a_2 / u)(a_2 a_2 / u)} &= \frac{(a_1 a_2 / v)(vv / u)}{V(a_1 a_2 / v)(a_2 a_2 / v)(vv / u)^2} = \frac{a_1 a_2 / v}{V(a_1 a_2 / v)(a_2 a_2 / v)} = \\ &= \frac{(\lambda_1 b_1)(\lambda_2 b_2) / v}{V(\lambda_1 b_1)(\lambda_2 b_2) / v V(\lambda_2 b_2)(\lambda_2 b_2) / v} = \frac{b_1 b_2 / v}{V(b_1 b_2 / v)(b_2 b_2 / v)}. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

В дальнейшем изложении будем предполагать, что единица длины зафиксирована и что в качестве векторов a_1, a_2 , принадлежащих сторонам угла, приняты единичные векторы. Тогда согласно определению 1 имеем: $I(A_1OA_2) = a_1 a_2$.

Так как $L(a_1, a_2) \neq 0$, то из 51.1.5 и теоремы [51.1] непосредственно следует, что индекс любого угла удовлетворяет следующим неравенствам: $-1 < I(A_1OA_2) < 1$. Докажем следующую важную теорему.

Теорема [52.2]. Если $[O, h, \omega]$ — произвольный репер, а μ — число, удовлетворяющее условию $-1 < \mu < 1$, то существует один и только один луч, удовлетворяющий тому условию, что индекс угла (h, k) равен μ .

Доказательство. Пусть g_1, g_2 — базис данного репера, а

$$p = \mu g_1 + \sqrt{1 - \mu^2} g_2. \quad (4)$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что луч $k = (O, p)$ удовлетворяет всем условиям теоремы. В самом деле, из соотношения (4) следует, что $pp = \mu^2 + 1 - \mu^2 = 1$, поэтому p — единичный вектор. Из того же соотношения вытекает, что $pg_1 = \mu$, поэтому $I(OPg_1) = \mu$. Так как в (4) $\sqrt{1 - \mu^2} > 0$, то согласно лемме [52.1] $p \in \omega$, поэтому $k \in \omega$.

Теперь покажем, что k — единственный луч, удовлетворяющий условиям теоремы. Пусть (O, r) — какой-либо другой луч, удовлетворяющий условиям теоремы. Воспользовавшись леммой [52.1], получаем: $r = (rg_1)g_1 + \sqrt{1 - (rg_1)^2}g_2$. Так как $g_1 r = \mu$, то это соотношение совпадает с соотношением (4), поэтому $p = r$. ■

Лемма [52.3]. Для любого угла AOB имеет место соотношение:

$$I(AOB) = \frac{|OA|^2 + |OB|^2 - |AB|^2}{2|OA||OB|}.$$

Доказательство. Рассмотрим тождество $\overline{ABAB} = (\overline{OB} - \overline{OA})(\overline{OB} - \overline{OA})$. Раскрыв правую часть этого тождества и принимая во внимание, что $\mu(AOB) = \frac{\partial A}{|\partial A|} \cdot \frac{\partial B}{|\partial B|}$, получаем искомым результат. ■

3. Конгруэнтность углов.

Определение 2. Углы $B_1O_1A_1$ и $B_2O_2A_2$ называются конгруэнтными, если $I(B_1O_1A_1) = I(B_2O_2A_2)$ (обозначение: $\angle B_1O_1A_1 \cong \angle B_2O_2A_2$).

Из этого определения непосредственно следует ряд выводов.

1°. Отношение конгруэнтности углов удовлетворяет условиям рефлексивности, транзитивности и симметричности.

Из теоремы [52.2] непосредственно следует:

2°. Пусть даны угол (h, k) в плоскости Π и репер $[O', h', \omega']$, где ω' , в частности, может принадлежать плоскости Π . Тогда существует один и только один луч k , принадлежащий реперу $[O', h', \omega']$ и обладающий свойством: $\angle(h, k) \cong \angle(h', k')$.

Докажем еще одно свойство конгруэнтности углов, которое, как мы увидим ниже, совпадает с одной из аксиом Гильберта.

3°. Пусть A, B и C — три точки, не лежащие на одной прямой, а A', B', C' также три точки, не лежащие на одной прямой; если при этом $|AB| \cong |A'B'|$, $|AC| \cong |A'C'|$ и $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, то $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.

Доказательство. В самом деле, из леммы [52.3] следует, что

$$I(BAC) = \frac{|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2}{2|AB||AC|},$$

$$I(B'A'C') = \frac{|A'B'|^2 + |A'C'|^2 - |B'C'|^2}{2|A'B'||A'C'|}.$$

Так как $I(ABC) = I(B'A'C')$, $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$, то из этих соотношений следует, что $|BC| = |B'C'|$. Если теперь, пользуясь леммой [52.3], выразить $I(ABC)$ и $I(A'B'C')$ через $|AB|$, $|BC|$, $|AC|$, $|A'B'|$, $|B'C'|$, $|A'C'|$, то в силу предыдущих соотношений получаем искомый результат. ■

Ограниченность объема настоящего пособия не позволяет со всей полнотой изложить дальнейшие выводы из аксиом Вейля, поэтому в заключение наметим лишь схему, позволяющую ввести понятия «больше» и «меньше» для углов, а также понятие суммы углов.

4. Сравнение углов. Корректное определение понятий «больше» и «меньше» для углов основывается на следующих двух предложениях.

1°. Если два различных луча k_1 и k_2 принадлежат реперу $[O, h, \omega]$, то один и только один из них является внутренним лучом угла, образованного лучом h и другим лучом. □

2°. Если луч l_0 является внутренним лучом угла (h_1, h_2) и $l_{01} = I(l_0, h_1)$, $l_{02} = I(l_0, h_2)$, то $l_{01} > l_{11}$ и $l_{02} > l_{12}$. □

Эти предложения могут быть строго доказаны на основании изложенной выше теории. Последнее предположение показывает, что целесообразно ввести следующие определения.

О п р е д е л е н и е 3. Будем говорить, что угол (h_1, k_1) меньше угла (h_2, k_2) , если $I(h_1, k_1) > I(h_1, k_2)$ (обозначение: $\angle(h_1, k_1) < \angle(h_2, k_2)$).

О п р е д е л е н и е 4. Угол называется п р я м ы м, если индекс этого угла равен нулю; всякий угол, меньший прямого, называется о с т р ы м, а угол, больший прямого, называется т у п ы м.

Свойства 1° и 2°, сформулированные выше, а также определения 3 и 4, позволяют легко обосновать все основные свойства понятий «больше» и «меньше» и показать, что они вполне согласуются с нашими наглядными представлениями о сравнении углов.

5. Сумма двух углов.

О п р е д е л е н и е 5. Пусть (h_1, k_1) и (h_2, k_2) — два угла. Если существует $\angle(h, k)$, который содержит такой внутренний луч l_0 , что $\angle(h_1, k_1) \cong \angle(h, l_0)$ и $\angle(h_2, k_2) \cong \angle(l_0, k)$, то будем говорить, что $\angle(h, k)$ является с у м м о й у г л о в (h_1, k_1) и (h_2, k_2) и обозначается так: $\angle(h, k) = \angle(h_1, k_1) + \angle(h_2, k_2)$.

Для того чтобы это определение было корректным, необходимо доказать следующее предложение об аддитивности углов: пусть l_0 — внутренний луч угла (h, k) , а l_0' — внутренний луч угла (h', k') . Если $\angle(h, l_0) \cong \angle(h', l_0')$ и $\angle(l_0, k) \cong \angle(l_0', k')$, то $\angle(h, k) \cong \angle(h', k')$.

Пользуясь определением 5, докажем важную теорему о внешнем угле треугольника на евклидовой плоскости.

Т е о р е м а [52.4]. Внешний угол любого треугольника равен сумме внутренних углов, не смежных с ним.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ABC — данный треугольник, а $\angle CAB'$ — внешний угол при вершине A (рис. 150). Докажем, что $\angle CBA + \angle BCA = \angle CAB'$. Для этой цели обозначим через a , c и b единичные векторы соответственно лучей BC , BA и AC и рассмот-

рим луч AA' , сонаправленный с лучом BC (см. рис. 150). Таким образом, $\angle CBA \cong \angle Baa$, $\angle BCA \cong \angle CAa$, $\angle CAA' \cong \angle Aaa$, $\angle A'AB' \cong \angle Aac$. Отсюда следует, что $I(CBA) = ac$, $I(BCA) = ab$, $I(CAA') = ab$, $I(A'AB') = ac$, поэтому

$$\begin{aligned} \angle CBA &\cong \angle A'AB' \text{ и} \\ \angle BCA &\cong \angle CAA'. \end{aligned} \quad (5)$$

С другой стороны, так как $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, то $|\overrightarrow{BC}|a = c|BA| + b|AC|$. Отсюда $a = \frac{|BA|}{|BC|}c + \frac{|AC|}{|BC|}b$. Мы видим, что

луч AA' является внутренним лучом угла CAB' , так как $a \in (b, c)$. Из (5) следует утверждение теоремы. ■

6. Конгруэнтность произвольных фигур. Как известно, в геометрии фигурой называется любое множество точек. В точечно-векторном пространстве целесообразно исходить из более широкого определения фигуры, как множества, состоящего из точек и векторов. При этом следует потребовать, чтобы подмножество точек было непустым, а подмножество векторов может быть произвольным. Примерами фигур в этом смысле слова являются прямая, луч, полуплоскость, угол, отрезок и т. д.

Для обоснования конгруэнтности фигур необходимо определить движения и изучить их основные свойства. Но это нами уже сделано в главах IV и V первой части настоящего курса. Существенно заметить, что теория, изложенная в настоящей главе, дает возможность с достаточной строгостью обосновать все, что изложено в [1], § 21—31, в частности определение движения, его свойства, данные в [1], § 29. Из общего определения эквивалентности двух фигур относительно данной группы преобразований, приведенного в [1], § 31, п. 4, естественно возникает следующее определение конгруэнтности фигур: фигуру F' будем называть конгруэнтной фигуре F , если существует такое движение, которое фигуру F переводит в фигуру F' . При этом, в силу того что множество всех движений образует группу, приходим к выводу, что понятие конгруэнтности фигур удовлетворяет условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Изложенная выше теория позволяет с достаточной строгостью изучить все основные вопросы геометрии пространства TE_3 . В частности, пользуясь материалом, изложенным в этой главе, можно ввести понятие координат точек на плоскости и в пространстве, вывести уравнение основных геометрических образов — прямых на плоскости, а также прямых и плоскостей в пространстве и на этой основе изучить дальнейшие факты геометрии, изложенные в главах II—XI первой части настоящего учебного пособия.

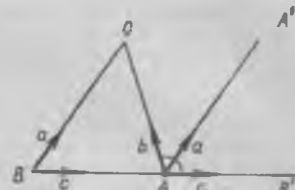


Рис. 150.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР ОБОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

§ 53. Геометрия до Евклида. «Начала» Евклида и история пятого постулата

1. Геометрия на Древнем Востоке. Первые сведения по геометрии были добыты высокими цивилизациями Древнего Востока — в Египте, Вавилоне, Китае, Индии в связи с развитием земледелия. Наибольшие успехи в этом направлении были достигнуты в Древнем Египте, об этом говорят различные древнегреческие математики и историки. До нашего времени дошло несколько египетских папирусов, в которых имеются геометрические сведения. Два наиболее важных из них — папирус Райнда, хранящийся в Британском музее в Лондоне, и Московский папирус, расшифрованный знаменитым русским египтологом В. В. Струве. Оба эти папируса относятся к эпохе Среднего царства (XX—XIX века до н. э.), однако, как указано в самом их тексте, изложенные в них сведения были известны в Египте значительно ранее. Согласно указанным папирусам египтянам были известны правила нахождения площадей многоугольников и круга, объемов ряда многогранников; для числа π принималось достаточно точное значение $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3,16...$ Для объема усечен-

ной пирамиды с квадратным основанием правило, данное в Московском папирусе, полностью совпадает с современной формулой; позднее им была известна и так называемая «теорема Пифагора». Одно место Московского папируса В. В. Струве истолковал как вполне точное правило для разыскания площади сферы; по мнению других египтологов, здесь указано, как находить боковую поверхность цилиндра. Такого рода крупные достижения не могли быть получены чисто эмпирическим путем. Поэтому несомненно, что древнеегипетским жрецам и писцам, в руках которых находились научные исследования, были известны некоторые теоретические положения геометрии, в том числе и доказательства многих предложений; последнее подтверждается следующим высказыванием великого древнегреческого философа-материалиста Демокрита (460—370 до н. э.): «В построении линий с доказательствами я никем не был превзойден, даже египетскими гарпенодаптами» (гарпенодапты, натягиватели веревок — так называли в Древнем Египте землемеров). Однако до идеи построения системы геометрии египтяне не поднялись. Примерно на том же уровне находились геометрические сведения и в Древнем Вавилоне.

2. Геометрия в Древней Греции. Геометрия в Древней Греции начала развиваться в VII—VI веках до н. э. несомненно под сильным влиянием египтян. Первый крупный греческий ученый в области геометрии — представитель так называемой Милетской школы, знаменитый философ Фалес (начало VI века до н. э., Милет—греческий город на западном берегу Малой Азии). Согласно дошедшим до нас

преданиям, Фалесу принадлежат доказательства некоторых простейших предположений геометрии. В дальнейшем геометрами Древней Греции были получены весьма значительные результаты, охватывающие почти все содержание современной элементарной геометрии и найдено многое сверх того — правила для разыскания площади параболы, объема и поверхности шара и других площадей и объемов (Архимед, 287—212 гг. до н. э.), обстоятельная теория конических сечений (Аполлоний, 265—170 гг. до н. э.), приближение для числа π : $\pi = \frac{22}{7} = 3,143...$ (Архимед). Далее было установ-

лено существование несоизмеримых отрезков (школа Пифагора, VI век до н. э.), создана теория отношений, эквивалентная современной теории действительных чисел (Евдокс, 408—350 гг. до н. э.), и т. д. Этим достижениям весьма способствовала социальная и политическая структура Древней Эллады (Греции). Особой заслугой древнегреческих ученых является постановка задачи о построении системы геометрии и решение ее в первом приближении. Задача эта была поставлена рядом древнегреческих философов, из которых в первую очередь следует указать Платона (427—347 гг. до н. э.) и особенно Аристотеля (384—322 гг. до н. э.). Именно Аристотелю, создателю формальной логики, принадлежит четкое оформление идеи построения геометрии в виде цепи предложений, которые вытекают одно из другого на основе одних лишь правил логики. В указанном направлении в V—IV веках до н. э. в Греции появилось много работ, однако все они были забыты, когда появились «Начала» Евклида.

3. «Начала» Евклида. Евклид жил в эллинистическом Египте, в Александрии; расцвет его деятельности приходится на первые годы III века до н. э. Более подробные достоверные биографические сведения о Евклиде до нас не дошли.

«Начала» Евклида состоят из 13 книг. Книги I—VI содержат изложение планиметрии; из них в книге II даны в геометрической форме основные алгебраические тождества, в книге V изложена теория отношений по Евдоксу, в книге VI — теория подобия фигур, в книгах I, III и IV — известные из курса средней школы свойства треугольников, параллелограммов, окружностей. Книги VII, VIII, IX — арифметические, в них изучаются основные свойства натуральных чисел, введены понятия простого и составного чисел, общего наибольшего делителя и общего наименьшего кратного нескольких натуральных чисел, доказана теорема о бесконечности множества простых чисел и т. п. В книге X дана теория квадратичных иррациональностей по Теэтету (IV век до н. э.), в книгах XI—XIII излагается стереометрия¹.

В начале книги I приведены определения, постулаты и аксиомы; для нас будут особенно важны аксиомы и постулаты Евклида, список которых приводим ниже.

¹ Подробное и обстоятельное описание содержания «Начал» Евклида читатель найдет в книге [25], т. I.



Рис. 151

Постулаты (*αληθεια*). Нужно требовать,

I. Чтобы от каждой точки к каждой точке можно было провести прямую линию.

II. И чтобы ограниченную прямую можно было непрерывно продолжать по прямой.

III. И чтобы из всякого центра и всяким расстоянием мог быть описан круг.

IV. И чтобы все прямые углы были равны между собой.

V. И чтобы всякий раз как прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие в сумме двух прямых (рис. 151), то эти две прямые, продолженные неограниченно, встретились с той стороны, где сумма углов меньше двух прямых.

На рисунке 151 «внутренние и по одну сторону углы, меньшие в сумме двух прямых», помечены дужками.

При рассмотрении постулатов I и II следует иметь в виду, что прямой Евклид называет отрезок прямой, который, однако, может быть продолжен в обе стороны неограниченно (что и выражается постулатом II). В постулате III расстоянием назван радиус круга; термина «радиус круга» у Евклида нет.

Аксиомы (общие понятия, *κοινὰ ἔννοια*).

I. Равные одному и тому же равны между собой.

II. И если к равным прибавляются равные, то целые будут равны.

III. И если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.

IV. И совмещающиеся друг с другом равны между собой.

V. И целое больше части.

Для Евклида «равны» означает «равны как величины», поэтому в аксиоме IV в случае многоугольников и многогранников слово «равны» соответствует нашему термину «равновелики». В аксиоме II вместо «целые» мы бы сказали: «суммы».

В чем заключается различие между постулатами и аксиомами, остается неясным; на этот счет существуют много различных мнений, ни одно из которых не может быть признано окончательным.

Для «Начал» характерен такой стиль: одно за другим излагаются предложения, под которыми разумеются как теоремы, так и задачи на построение (проблемы), без всяких пояснений общего характера, без разбиения на отдельные главы и параграфы, без указания целей, преследуемых автором. Никакие практические приложения не приводятся, в чем сказывается влияние идеалистических философских школ.

«Начала» Евклида сыграли огромную роль в истории математики и всей человеческой культуры; они переведены на все основные языки мира, после 1482 г. они выдержали 500 изданий. Больше число изданий имела только Библия. Библиография работ, связанных с «Началами» Евклида, занимает четыре больших тома. «Начала» оказали исключительно большое влияние на дальнейшее развитие математики и на ее преподавание. До начала XIX столетия (а в Англии — до его

середины) все учились математике по «Началам» Евклида. О впечатлении, которое производили на математиков «Начала», можно судить по следующим словам Кардано (итальянский математик XVI века): «Неоспоримая крепость их догматов и их совершенство настолько абсолютны, что никакое другое сочинение по справедливости нельзя с ним сравнивать. Вследствие этого в них отражается такой свет истины, что, по-видимому, только тот способен отличать в сложных вопросах геометрии истинное от ложного, кто усвоил Евклида».

В настоящее время мы не разделяем полностью восторга Кардано. Признавая огромную заслугу Евклида, как сделавшего попытку построить систему геометрии и выполнившего ее для своего времени удачно, мы находим в построенной им системе ряд важных пробелов. Основы, на которых строится все здание, не вполне удовлетворительны. Многие из определений неясны и фактически не используются в дальнейшем изложении; таково, например, определение прямой: «прямая линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней». Постулаты и аксиомы не дают достаточного базиса для построения системы геометрии; ряд важных понятий геометрии ими совсем не охвачен. К таким понятиям относится, в частности, все то, что относится к взаимному расположению фигур, понятия «между», «лежат по одну сторону, по разные стороны» и т. п. Вследствие этого в «Началах» Евклида неизбежны ссылки на наглядность, на впечатление глаза. Такие ссылки у Евклида весьма многочисленны; уже в предложении I книги I без всякой мотивировки принимается, что две окружности должны пересечься, если каждая из них проходит через центр другой. Задача построения системы геометрии как чисто дедуктивной теории Евклидом решена не была; ее удалось решить только в самом конце XIX столетия (Гильберт, Вейль, см. гл. IX и § 55—57). Конечно, это несколько не уменьшает огромной заслуги Евклида.

На русском языке имеется несколько переводов «Начал» Евклида; последний из этих переводов [60] выполнен проф. Д. Д. Мордухай-Болтовским. Читателю будет полезно познакомиться с подробным обзором «Начал» в главе I тома I книги [25] и со статьями М. Я. Выгодского в [59], вып. I, и В. Н. Молодшего и Л. Е. Майстрова в [59], вып. 2.

4. История пятого постулата. Из всех постулатов и аксиом Евклида резко выделяется своей сложностью V постулат. В книге I «Начал» первые 28 предложений доказываются без ссылок на V постулат; видно стремление Евклида доказать как можно больше утверждений без использования V постулата. Указанные обстоятельства породили в течение 2000 лет, прошедших после Евклида, многочисленные попытки доказать V постулат на основе остальных постулатов и аксиом Евклида. Мы рассмотрим некоторые из этих попыток. Предварительно отметим, что V постулат может быть заменен следующей аксиомой параллельности.

Через точку P , не лежащую на прямой a , в плоскости, содержащей P и a , можно провести не более одной прямой, не пересекающей прямую a (см. ниже, § 57, п. 3).

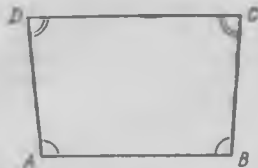


Рис. 152.

Нетрудно установить эквивалентность V постулата и аксиомы параллельности, т. е. на базе остальных аксиом и постулатов доказать, что из V постулата следует аксиома параллельности и, наоборот, из аксиомы параллельности вытекает V постулат.

Одна из первых попыток доказать V постулат принадлежит П о с и д о н и ю (I век до н. э.). Он предложил дать другое определение параллельных прямых: две прямые a и b , лежащие в одной плоскости, называются параллельными, если расстояния от всех точек прямой a до прямой b одинаковы. При таком определении параллельных прямых аксиома параллельности, а следовательно, и V постулат легко доказываются. Однако в определении Посидония неявно содержится такое допущение: все точки плоскости α , в которой лежит прямая b , удаленные от прямой b на одно и то же расстояние и лежащие с одной стороны от нее, расположены на одной прямой. Таким образом, Посидоний не доказал V постулат, а лишь заменил его другим, не менее сложным. Вопрос о доказуемости этого нового постулата остался открытым.

Интересные попытки доказать V постулат дали также Омар Хайям (1048—1123), известный математик и знаменитый поэт; ат-Туси (1201—1274), Валлис (1616—1703). Все эти «доказательства» содержали явно или неявно новый постулат.

Особо замечательная попытка доказать V постулат принадлежит итальянскому аббату Саккери (1667—1733), опубликовавшему в 1733 году работу, носящую заглавие «Евклид, освобожденный от всяких пятен». Саккери ставит цель доказать V постулат от противного; поэтому он принимает, что V постулат неверен, и стремится получить противоречие. Он рассматривает так называемый четырехугольник Хайяма — Саккери $ABCD$ (рис. 152, этот четырехугольник встречается и в рассуждениях Хайяма), у которого углы при вершинах A и B прямые, а стороны AD и BC конгруэнтны. Легко устанавливается, что углы при вершинах C и D также конгруэнтны. Могут, таким образом, представиться три возможности: оба угла C и D острые, они оба тупые и, наконец, они оба прямые. Саккери рассматривает эти возможности, называя их соответственно «гипотеза острого угла», «гипотеза тупого угла», «гипотеза прямого угла». Саккери доказывает совершенно строго, без применения V постулата, что каждая из трех гипотез справедлива для любого четырехугольника Хайяма — Саккери, если она верна для одного из них. Далее он легко приводит к противоречию гипотезу тупого угла. Поскольку на основе гипотезы прямого угла без труда устанавливается V постулат, остается только опровергнуть гипотезу острого угла. На этом пути Саккери получает целый ряд утверждений, стоящих в резком противоречии с нашими привычными представлениями, однако логических противоречий не содержащих. В конце концов, вследствие совершенной им ошибки,

Саккери привел будто бы к противоречию и гипотезу острого угла; поэтому Саккери считал, что он доказал V постулат.

Много внимания уделил проблеме V постулата знаменитый французский математик Лежандр (1752 — 1833). Им был составлен учебник «Элементы геометрии», следующий в основном Евклиду, но во многом отличающийся от «Начал». В этом учебнике в различных его изданиях Лежандр дает различные «доказательства» V постулата, которые все содержат или ошибки, или неявные допущения. Однако при этом он вполне строго, без ссылок на V постулат или другие произвольные допущения, доказал следующие три важные теоремы о сумме углов треугольника¹.

1°. Сумма углов треугольника не может быть больше $2d$ (d — мера прямого угла).

2°. Если сумма углов одного треугольника равна $2d$, то то же справедливо для любого треугольника².

3°. Если сумма углов треугольника равна $2d$, то справедлива аксиома параллельности, а следовательно, и V постулат.

Нетрудно понять, что эти три теоремы Лежандра дают, по существу, то же, что и результаты Саккери.

Подводя итоги, мы видим, что многовековые попытки доказать V постулат на основе остальных аксиом и постулатов Евклида не привели к успеху. Однако эти попытки принесли пользу: они выявили ряд предложений, эквивалентных (п. 4) V постулату, показали, что отрицание V постулата приводит к многим парадоксам.

Более подробно с историей V постулата читатель может познакомиться по книге [25], т. 1, глава II и § 57 главы X.

§ 54. Н. И. Лобачевский и его геометрия. Возникновение современной аксиоматики

1. Лобачевский и его геометрия. Выше было отмечено, что в истории развития геометрии V постулат Евклида сыграл исключительно важную роль. Этот постулат с древних времен привлекал внимание геометров, стремившихся освободить от него геометрию, доказать содержащееся в нем утверждение на основании других постулатов и аксиом. И только в начале XIX века впервые в истории гениальный русский ученый Николай Иванович Лобачевский пришел к выводу, что возможна такая геометрия, в которой место V постулата занимает противоположное допущение. Этим самым Н. И. Лобачевским окончательно была решена проблема V постулата.

Н. И. Лобачевский родился 2 декабря 1792 г. в Нижнем Новгороде (ныне г. Горький). С 1802 по 1807 г. учился в Казанской гимназии, с 1807 по 1811 г. состоял студентом незадолго до того основанного

¹ Доказательство этих теорем читатель найдет в [7], § 2.

² Ранее Лежандра эта теорема была доказана (в 1817 г.) Н. И. Лобачевским, но опубликована им была лишь ее формулировка (в 1829 г.). См. [59], вып. 4, с. 201—229.

Казанского университета, с 1814 г.— адъюнкт, с 1816 г.— профессор того же университета, с 1827 по 1846 г.— его ректор. С 1846 по 1855 г.— помощник попечителя Казанского учебного округа. Скончался Н. И. Лобачевский 24 февраля 1856 г. Более подробные сведения о жизни и научной деятельности Н. И. Лобачевского можно найти в прекрасной книге В. Ф. Кагана [24].

В течение первых лет преподавательской деятельности в Казанском университете Н. И. Лобачевский настойчиво пытался доказать V постулат. Неудача этих попыток и попыток предшественников (§ 53, п. 4) привела его к новой и смелой идее: V постулат доказать нельзя, его справедливость не вытекает из остальных аксиом геометрии; принятие аксиомы, представляющей собой отрицание V постулата, приводит к созданию новой геометрии, существенно отличной от «употребительной» геометрии Евклида: Дата открытия новой геометрии — 23 февраля 1826 г.; в этот день Н. И. Лобачевский сделал на заседании физико-математического факультета Казанского университета доклад: «Краткое изложение основ геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных»; текст его был представлен факультету 18 февраля 1826 г. на французском языке. В этом сочинении содержались основы новой геометрии; оно составило первую часть мемуара «О началах геометрии», напечатанную в 1829—1830 гг. в журнале «Казанский вестник».

В дальнейших своих работах Лобачевский разработал новую геометрию, названную им «воображаемой», весьма основательно; он дал для нее и аналитические, и дифференциально-геометрические методы. Наиболее доступное изложение начал «воображаемой геометрии» мы найдем в работе «Геометрические исследования по теории параллельных» (1840), вошедшей в том I полного собрания сочинений Н. И. Лобачевского [31].

К тем же идеям пришли выдающийся венгерский математик Я. Бойяи (1802—1860) и великий немецкий математик Гаусс (1777—1855). Я. Бойяи опубликовал в 1832 г. на латинском языке произведение: «Приложение, излагающее абсолютно верное учение о пространстве, независимое от правильности или ложности XI аксиомы¹ Евклида...» (по-латински: «Appendix...»). В этой работе, составившей приложение к математическому трактату его отца, Фаркаша Бойяи, также построена геометрия, в которой V постулат заменен его отрицанием (см. [14]).

Гаусс своих исследований по новой геометрии, названной им неевклидовой, не опубликовал.

Все это показывает, что приоритет в открытии «воображаемой геометрии» неоспоримо принадлежит Н. И. Лобачевскому: он опубликовал ее начала на три года ранее Я. Бойяи, а в дальнейшем разработал ее значительно подробнее, чем это сделал Я. Бойяи. В посмертных бумагах Гаусса были обнаружены лишь начальные сведения

¹ В некоторых изданиях «Начал» Евклида V постулат включен в число аксиом и именуется XI аксиомой.

по неевклидовой геометрии. Поэтому с полным основанием новая, созданная Н. И. Лобачевским, геометрия называется *геометрией Лобачевского*.

Работы Н. И. Лобачевского и Я. Бойяи не встретили понимания и признания у современников. Лишь после смерти Гаусса, когда была опубликована переписка Гаусса с некоторыми его друзьями-математиками, в которой содержались восторженные отзывы об исследованиях Лобачевского и Бойяи, внимание математиков всего мира было привлечено к геометрии Лобачевского; появились многочисленные исследования, связанные с ней. Особое впечатление произвела работа Бельтрами «Опыт интерпретации неевклидовой геометрии», опубликованная в 1868 г. (см. [61]); в ней были указаны поверхности, на которых в малом осуществляется двумерная геометрия Лобачевского (см. § 79, п. 5,9^а). Наконец, в 1871 г. знаменитый немецкий математик Ф. Клейн (1849—1925) в работе «О так называемой неевклидовой геометрии» (см. [61], с. 253) доказал непротиворечивость геометрии Лобачевского, чем устранил последние сомнения в ее правоте.

2. Значение геометрии Лобачевского. Геометрия Лобачевского сыграла огромную роль в развитии геометрии; она уничтожила монополию геометрии Евклида и чрезвычайно расширила рамки геометрических исследований. К настоящему времени создано очень много геометрических наук: различного рода неевклидовы геометрии (см. [44]), риманова геометрия (см. [41]), геометрии аффинной и проективной связности (см. [34]) и дальнейшие их обобщения. Все эти геометрические дисциплины интенсивно разрабатываются в СССР и во всем мире. Со времени открытия геометрии Лобачевского и ее всеобщего признания начинается новая эпоха в истории геометрии. Очень ярко оценено значение открытия Лобачевского в следующем высказывании известного английского математика В. К л и ф ф о р д а (1845—1879): «Чем Везалий был для Галена, чем Коперник был для Птолемея, тем Лобачевский был для Евклида. Между Коперником и Лобачевским существует любопытная параллель — оба они славяне по происхождению; каждый из них произвел революцию в научных воззрениях; и обе эти революции имеют одинаково громадное значение — это революции в нашем понимании космоса».

Геометрические идеи Лобачевского сыграли значительную роль в решении вопроса о геометрических свойствах окружающего нас мира. Как следует из теории относительности Эйнштейна (специальной и общей), пространственные, временные и материальные свойства мира должны рассматриваться в диалектическом единстве. В основе теории Эйнштейна лежат риманова геометрия и дальнейшие ее обобщения, создание которых базируется, в конечном счете, также и на геометрии Лобачевского. Таким образом, достижение Лобачевского открыло пути для исследования геометрических свойств космоса. В то же время следует иметь в виду, что для земных расстояний с большой точностью можно пользоваться геометрией Евклида. Как показали геодезические измерения, специально производившиеся Гауссом

на земной поверхности, сумма углов плоских треугольников равна 180° с точностью до 0,00001 секунды.

Открытие Лобачевского сыграло важную роль и в другом отношении: как было отмечено выше, оно решило многовековую проблему V постулата Евклида и тем самым снова привлекло внимание математиков к основам геометрии.

Следует указать еще и на философское значение исследований Лобачевского: они полностью подтвердили установки диалектического материализма и опровергли различного рода идеалистические воззрения на природу пространства и времени. Особенно непоправимый удар нанесла геометрия Лобачевского априоризму Канта. Знаменитый философ-идеалист И. Кант (1724—1804) считал, что пространство и время являются теми формами, в которых наш разум организует все наши ощущения, так что геометрия мира дана нам априори, т. е. до всякого опыта. Ясно, что доступность для нашего разума двух геометрий, геометрии Евклида и геометрии Лобачевского, показывает полную несостоятельность идеалистических взглядов Канта на свойства пространства.

Все вышеизложенное убеждает нас в том, что создание Н. И. Лобачевским носящей его имя новой геометрии является одним из крупнейших переворотов в истории всей науки.

3. Возникновение современной аксиоматики; аксиоматика Гильберта. С научной точки зрения не только аксиомы и постулаты Евклида, но и обычную аксиоматику, которая принята, скажем, в школьных учебниках элементарной геометрии, нельзя признать вполне удовлетворительной. Дело в том, что как у Евклида, так и в современных школьных учебниках при изложении геометрии, помимо аксиом и правил логики, приходится использовать невысказанные явно и недоказанные геометрические допущения.

В конце 60-х годов прошлого столетия перед математиками возникла задача построить такую аксиоматику элементарной геометрии, на базе которой, опираясь лишь на законы логики, можно было бы построить все величественное здание геометрии без каких-либо ссылок на наглядность и очевидность. Эта задача стала особенно актуальной после того, как идеи Лобачевского получили всеобщее признание и появились работы Б. Римана по эллиптической геометрии.

В конце XIX и в начале XX века появились многочисленные работы по обоснованиям геометрии ряда таких крупнейших математиков, как Паш, Пеано, Пиери, Гильберт, Вейль и др.¹ Наиболее исчерпывающими явились работы Гильберта и Вейля. Эти исследования оказали большое влияние на формирование аксиоматического метода, являющегося могучим орудием исследования во всех разделах современной математики.

¹ См., например, P a s c h M., Vorlesungen über neue Geometrie, Berlin, 1926; P e a n o G. Principii di geometria logicamente espositi, 1892; P i e r i M. Della geometria elementare come sistema ipotico deduttivo. Mem. Acad. Sci. Torino, (2), 49, (1899), с. 173—221; W e y l H., Raum, Zeit, Materie, Berlin, 1923, а также книгу [18].

Книга Гильберта «Основания геометрии» [18], которая впервые появилась в 1899 г., сыграла существенную роль в этой серии исследований. По существу, этой работой был завершен целый исторический этап построения геометрии аксиоматическим методом. В предисловии к русскому переводу этой книги проф. П. К. Рашевский дает следующую ее характеристику: «Основная заслуга Гильберта, благодаря которой его труд на наших глазах становится классическим, заключается в следующем. Гильберту удалось сконструировать аксиоматику геометрии, расчлененную настолько естественным образом, что логическая структура геометрии становится совершенно прозрачной. Это расчленение аксиоматики позволяет, во-первых, формулировать аксиомы наиболее простым и кратким образом и, во-вторых, исследовать, как далеко можно развивать геометрию, если положить в ее основу не всю аксиоматику, а те или иные группы аксиом, которые естественным образом расчленяются аксиоматика. Такого рода логический анализ, выясняющий роль отдельных групп аксиом, действительно проведен Гильбертом в ряде интересных исследований, которые и составляют, в сущности, большую часть его книги.

Кроме того, работа Гильберта дала начало целому ряду дальнейших исследований в этом же направлении» (см. [18], предисловие).

В современной научной и методической литературе можно найти и иные схемы аксиоматического построения евклидовой геометрии. Среди них, в первую очередь, следует указать на схему Вейля, о которой более подробно будет сказано ниже, в п. 5. Совершенно новый вариант аксиоматического построения евклидовой геометрии и некоторых других родственных ей геометрий представляет собой схема известного немецкого геометра Ф. Бахмана, основанная на понятии симметрии. С подробным изложением этого пути построения геометрии читатель может познакомиться по книге [12]. Заслуживает также внимания книга [55] французского математика и педагога Г. Шоке, в которой можно обнаружить влияние как идей Вейля, так и идей Бахмана.

4. Перестройка школьного курса преподавания геометрии. Следует, однако, отметить, что, несмотря на существование различных логических путей обоснования геометрии, до последнего времени преподавание геометрии в средней школе базировалось на традиционной системе Евклида. Укажем хотя бы на созданный еще в прошлом столетии учебник А. П. Киселева (Геометрия. М., Учпедгиз, 1962), по которому учились поколения школьников в нашей стране. Этим, в частности, объясняется тот факт, что для подготовки преподавателей математики для средней школы в педвузах до последнего времени считалось необходимым подробное изучение системы аксиом Гильберта как схемы, являющейся, по существу, логическим обоснованием системы Евклида.

Бурное вторжение математики в самые различные области знаний привели к необходимости усиления математической подготовки школьников, в частности, к более стройному изложению курса геометрии в средней школе. Возник ряд предложений о перестройке

школьного курса геометрии. Очевидно, наиболее естественным и близким к традиционному было бы последовательное изложение курса геометрии на базе аксиом Гильберта. Однако этот путь подвергается серьезной критике. Дело в том, что схема Гильберта очень сложна и для того, чтобы довести ее до логического завершения, требуется большое количество аксиом, определений и сложных рассуждений.

Более важное обстоятельство, которое заставляет пересмотреть классический способ изложения геометрии и, по существу, отказаться от аксиоматики Гильберта, заключается в том, что эта аксиоматика практически не имеет выходов в другие области математики, в частности в современную геометрию. Возьмем хотя бы понятие многомерного пространства, которое является весьма актуальным. Для обоснования этого понятия аксиоматика Гильберта оказывается почти непригодной. Кроме того, эта аксиоматика не дает базы для построения геометрий, отличных от евклидовой — римановой, конформной и т. д.

Наконец, отметим, что для аксиоматики Гильберта характерным является фактическое отсутствие теоретико-множественных понятий, в частности понятия бесконечного множества. Не случайно, что при этом способе изложения геометрии прямые и плоскости, как мы увидим ниже, вводятся не как объекты, составленные из бесконечного множества точек, а как основные объекты. Это обстоятельство приводит к тому, что в геометрию весьма слабо проникают аналитические методы изложения. В частности, векторная алгебра, имеющая первостепенное значение в математике и физике, при аксиоматическом построении геометрии по Гильберту оказывается искусственно построенной теорией, органически не связанной с самой геометрией.

В настоящее время в среднюю школу введено новое учебное пособие по геометрии [30], изданное под редакцией акад. А. Н. Колмогорова. В этом пособии получили широкое отражение теоретико-множественная концепция и другие современные идеи, ведущие к пути алгебраизации школьного курса геометрии. Само собой разумеется, что принципы построения этого курса существенно отличаются от традиционных.

5. Аксиоматика Вейля. Принимая во внимание соображения, изложенные выше, авторы настоящего пособия отказались от традиционной схемы обоснования геометрии по Гильберту. В предыдущей главе обоснование евклидовой геометрии дано на базе аксиоматики Вейля, которая в целом отвечает современным требованиям, отмеченным выше¹.

Существенное отличие аксиоматики Вейля (гл. IX) от аксиоматики Гильберта заключается в том, что в схеме Вейля мы отказываемся от некоторых привычных представлений об основных объектах геометрии. По Вейлю, основными объектами, как мы знаем, являются векторы и точки. Все другие геометрические образы определяются че-

¹ Герман Вейль (1885—1955) — один из крупнейших математиков первой половины XX столетия, опубликовал аксиоматику евклидовой геометрии в 1918 г. в книге, цитированной в сноске на с. 274. С подробным изложением этой теории читатель может познакомиться по книге [21].

рез них при помощи теоретико-множественных понятий с существенным использованием теории действительных чисел. В этой схеме вектор фигурирует не как параллельный перенос или как пара точек, как мы его определяем в геометрии, а как основной самостоятельный математический объект. По существу, это допущение не является столь уже неестественным. В самом деле, путь, сила, скорость, ускорение — понятия, с которыми мы встречаемся на практике очень часто. Вектор есть не что иное, как абстрактно-математическое выражение этих понятий.

Помимо общих, принципиальных соображений, схема обоснования евклидовой геометрии по Вейлю, избранная нами в предыдущей главе, позволяет естественным образом связать многие разделы геометрии друг с другом. Выше мы уже отмечали, что обоснование трехмерной евклидовой геометрии, данное в предыдущей главе, вполне согласуется с разделом «Многомерные аффинные и евклидовы пространства» (см. I, гл. XI). Далее, аксиоматика Вейля проективного пространства, приведенная в главе I настоящей книги, как мы увидим ниже, позволяет дать единую схему изложения вопросов неевклидовых геометрий — сферической, гиперболической и эллиптической.

Таким образом, схема Вейля позволяет нам излагать все вопросы евклидовой и неевклидовых геометрий, а также вопросы проективной геометрии, руководствуясь при этом общей точечно-векторной аксиоматикой.

Несмотря на изложенные выше соображения, мы считаем необходимым ознакомить читателя в обзорном порядке с аксиоматикой Гильберта, так как схема построения элементарной геометрии по Гильберту все еще сильно отражена в школьном курсе геометрии. Помимо этого, аксиоматика Гильберта нами будет принята за основу при изложении элементов геометрии Лобачевского синтетическим способом.

6. О происхождении аксиом элементарной геометрии. В настоящем разделе мы не ставим перед собой задачу рассмотреть вопрос о происхождении аксиом элементарной геометрии. По существу, это задача философии математики. Однако, так как этот вопрос является чрезвычайно важным, то считаем необходимым высказать ряд принципиальных соображений, относящихся к данной теме.

С точки зрения диалектического материализма основные геометрические понятия и аксиомы возникли из опыта, из практики. Самое название «геометрия» означает «землемерие». Геометрия возникла из практических нужд человека, из потребностей людей измерять длины, объемы и т. д. Ф. Энгельс по этому поводу говорит следующее: «...совершенно неверно, будто в чистой математике разум имеет дело только с продуктами своего собственного творчества и воображения. Понятия числа и фигуры взяты не откуда-нибудь, а только из действительного мира... Должны были существовать вещи, имеющие определенную форму, и эти формы должны были подвергаться сравнению, прежде чем можно было прийти к понятию фигуры. Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть весьма реальный материал.

Тот факт, что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму, может лишь слабо затушевывать его происхождение из внешнего мира»¹.

Приведем высказывание В. И. Ленина, в котором очень сжато и точно отражена суть вопроса о происхождении аксиом: «...практическая деятельность человека миллиарды раз должна была приводить сознание человека к повторению разных логических фигур, дабы эти фигуры могли получить значение аксиом»².

Но математические понятия, возникшие из опыта, не могут быть исследованы в том виде, в котором они встречаются в жизни. «...Чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это последнее в стороне, как нечто безразличное; таким путем мы получаем точки, лишенные измерений, линии, лишенные толщины и ширины...»³.

§ 55. Обзор аксиоматики Гильберта; аксиомы принадлежности и порядка

В параграфах 55, 56 и 57 дан обзор аксиоматики Гильберта и изложена схема построения элементарной геометрии на основе этой аксиоматики. Более подробное изложение этого вопроса читатель найдет в книге Гильберта [18], а также в учебниках [7], [22], [47] и др.

При аксиоматическом изложении евклидовой геометрии по схеме Гильберта основными понятиями считаются точки, прямые, плоскости (основные объекты) и отношения «принадлежности», «лежать между» и «конгруэнтности» (основные отношения). Основные понятия удовлетворяют аксиомам, которые у Гильберта разбиты на пять групп. Ниже перечислены все пять групп аксиом и дан краткий обзор основных следствий, вытекающих из них.

1. Аксиомы первой группы. Первая группа содержит восемь аксиом, которые называются «аксиомами соединения». В них сформулированы все требования, которые накладываются на основные отношения «точка принадлежит прямой» и «точка принадлежит плоскости».

1.1. Для любых двух точек A, B существует прямая a , принадлежащая каждой из точек A, B .

1.2. Для любых двух точек A и B существует не более одной прямой, принадлежащей каждой из точек A, B .

1.3. На прямой существуют по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

1.4. Для любых трех точек A, B, C , не лежащих на одной прямой, существует плоскость Π , принадлежащая каждой из точек A, B, C . Для любой плоскости всегда существует принадлежащая ей точка.

¹ Энгельс Ф. Анти-Дюринг. М., Политиздат, 1970, с. 33.

² Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 172.

³ Энгельс Ф. Анти-Дюринг. М., Политиздат, 1970, с. 33.

1.5. Для любых трех точек A, B, C , не лежащих на одной и той же прямой, существует не более одной плоскости, принадлежащей этим точкам.

1.6. Если две точки A, B прямой a лежат в плоскости Π , то всякая точка прямой a лежит в плоскости Π .

1.7. Если две плоскости Π_1 и Π_2 имеют общую точку A , то они имеют еще одну общую точку B .

1.8. Существует по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

Следствия, вытекающие из этих аксиом, весьма бедны геометрическим содержанием. Пользуясь ими, можно строго доказать, что две различные прямые имеют не более чем одну общую точку; если две различные плоскости имеют одну общую точку, то они имеют общую прямую, которой принадлежат все общие точки данных плоскостей; плоскость и не принадлежащая ей прямая имеют не более чем одну общую точку; прямая и не принадлежащая ей точка определяют одну и только одну плоскость; каждой плоскости принадлежат по крайней мере три точки, не принадлежащие одной прямой и т. д. Доказательство всех этих предложений мы опускаем, так как в нашу задачу не входит построение геометрии на основе аксиом Гильберта.

По существу, перечисленными выше предложениями исчерпываются все основные следствия, вытекающие из первой группы аксиом. Ниже мы увидим, что без привлечения новых аксиом, пользуясь только первой группой, нельзя, например, доказать, что на прямой существуют более чем две точки или что на плоскости существуют более чем три точки (см. с. 327).

2. Аксиомы второй группы и основные следствия. Аксиомы этой группы определяют основные свойства понятия «лежать между» и делают возможным на основании этого понятия установить порядок точек на прямой, поэтому они называются аксиомами порядка. Понятие «лежать между» применяется к трем точкам. Сформулируем аксиомы второй группы.

II.1. Если точка B лежит между точкой A и точкой C , то A, B и C — три различные точки одной прямой и точка B лежит между точками C и A .

II.2. Если A и B — две точки, то всегда существует по крайней мере одна точка C такая, что точка B лежит между A и C .

II.3. Среди любых трех точек прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.

Прежде чем сформулировать четвертую аксиому, введем следующее определение.

Определение 1. Совокупность двух точек A и B прямой a называется отрезком (по Гильберту), точки A и B называются концами отрезка; точки прямой a , лежащие между A и B (если они существуют), называются внутренними точками отрезка или просто точками отрезка, остальные точки прямой a — точками, лежащими вне отрезка. Отрезок (по Гильберту), определяемый точками A и B , обозначается через

$\{AB\}$ или $\{BA\}$. Для сокращения записи вместо «отрезок по Гильберту $\{AB\}$ » будем говорить¹ «отрезок $\{AB\}$ ».

II.4. Пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой, и a — прямая в плоскости ABC , не проходящая ни через одну из точек A, B, C . Если при этом прямая a проходит через точку отрезка $\{AB\}$, то она проходит и через точку одного из двух других отрезков $\{AC\}$ и $\{BC\}$ ².

Последняя аксиома играет важную роль в логическом построении геометрии по схеме Гильберта. Она называется аксиомой Паша³ (теорема [48.4]).

Из аксиом первой и второй групп вытекают многочисленные следствия. Рассмотрим в обзорном порядке важнейшие из них.

а) Понятие полуплоскости и луча. Прежде всего отметим, что перечисленные выше аксиомы позволяют обосновать такие фундаментальные понятия, как полуплоскость и луч. В самом деле, пользуясь этими аксиомами, можно доказать две важные теоремы: теорему о разделении точек плоскости на два множества (теорема [48.5]) и теорему о разделении данной точкой всех точек прямой на два множества (теорема [47.3]). Предварительно введем определения.

Определение 2. Каждое из двух множеств точек, определяемых точкой O прямой a (теорема [47.3]), называется открытым лучом с началом в точке O .

Лучи мы будем обозначать так же, как и в предыдущей главе (см. § 47, п. 4), т. е. луч (открытый луч) с началом в точке O и содержащий точку A , обозначается через $\{OA\}$ (или соответственно $\{OA\}$).

Определение 3. Каждое из множеств точек, определяемых прямой a плоскости Π (теорема [48.5]), называется открытой полуплоскостью с границей a . Объединение открытой полуплоскости с ее границей называется полуплоскостью с границей a .

б) Неограниченность множества точек прямой. Перечисленные выше аксиомы позволяют установить весьма важный факт: *прямая содержит бесконечное множество точек*. Для доказательства этого утверждения необходимо предварительно доказать теорему о вложении отрезков (ср. 47.5.5), из которой непосредственно следует, что каждый отрезок содержит бесконечное множество точек. Последнее утверждение дает основание ввести в рассмотрение общее определение отрезка AB как множества точек, состоящего из двух различных точек A и B и всех точек, лежащих между ними (см. определение 6, § 47).

¹ Это определение, принадлежащее Гильберту, существенно отличается от определения отрезка, данного выше (см. определение 6, § 47). Во избежание путаницы мы применяем разные обозначения для отрезка в обычном смысле и отрезка по Гильберту: $\{AB\}$ и $\{AB\}$.

² В формулировке аксиомы не исключается возможность, что прямая пересекает и отрезок $\{AC\}$, и отрезок $\{BC\}$.

³ Паш — крупный немецкий математик XIX века. В 1882 г. в «Лекциях по новой геометрии» он дал первую строгую разработку аксиом порядка и конгруэнтности.

Аксиомы второй группы позволяют также упорядочить множество всех точек прямой (см. § 47, п. 3).

3. Понятие угла; теоремы об углах.

Определение 4. Углом называется пара лучей h и k , исходящих из одной точки O и не принадлежащих одной прямой. Точка O называется вершиной угла, а лучи h и k — сторонами угла (обозначение: $\angle(h, k)$). Плоскость, в которой расположены лучи h и k , называется плоскостью угла.

Угол с вершиной в точке O и со сторонами $\{OA\}$ и $\{OB\}$ обозначается через $\angle AOB$. Условимся также в следующем: прямую, содержащую луч h , будем обозначать через $\bar{h}$.

Определение 5. Точка M плоскости угла (h, k) называется внутренней точкой угла, если выполнены следующие условия: а) точка M и луч k лежат по одну и ту же сторону от прямой $\bar{h}$; б) точка M и луч h лежат по одну и ту же сторону от прямой $\bar{k}$.

Всякая точка плоскости угла (h, k) , не являющаяся внутренней, не лежащая на сторонах угла и не совпадающая с вершиной, называется внешней точкой угла.

Пользуясь этим определением, могут быть доказаны свойства 49.1.1, 49.1.2, 49.1.3 и 49.1.4. Среди этих свойств мы выделим свойство 49.1.2: если M — внутренняя точка $\angle AOB$, то открытый луч $\{OM\}$ целиком состоит из внутренних точек. Это свойство позволяет ввести определение 2, § 49, о внутреннем луче угла: открытый луч h называется внутренним лучом $\angle OAB$, если он исходит из точки O и целиком состоит из внутренних точек.

Сформулируем еще две теоремы, которые играют существенную роль при обосновании основных свойств углов.

Теорема [55.1]¹. Пусть дан $\angle(h, k)$ и две точки A и B , лежащие соответственно на сторонах h и k . Тогда всякий внутренний луч угла (h, k) пересекает отрезок $\{AB\}$. $\square$

Теорема [55.2]. Пусть h, k и l — три различных луча, исходящих из точки O и расположенных так, что k и l лежат в одной и той же полуплоскости ω , определяемой прямой h . Тогда один из лучей k или l является внутренним лучом угла, образованного другим лучом с лучом h . $\square$

4. Понятие многоугольника. В заключение отметим, что аксиомы второй группы позволяют дать определение многоугольника. В самом деле, так как нами уже определен отрезок, то, пользуясь аксиомами I.1—I.8 и II.1—II.4, можно дать определение ломаной, соединяющей две точки (определение 3, § 49), замкнутой ломаной, простой замкнутой ломаной, а также многоугольника.

Другими словами, все вопросы, изложенные в п. 3, § 49, могут быть обоснованы исходя из первых двух групп аксиом. Существенно отметить, что теорема Жордана, на которой основывается определение

¹ Формулировка этой теоремы совпадает с формулировкой теоремы [49.1], однако ее доказательство существенно отличается от приведенного ранее.

многоугольника (см. I, § 55, с. 352), также может быть доказана при помощи первых двух групп аксиом, однако доказательство этого предложения весьма сложно и опирается на целый ряд лемм и вспомогательных предложений¹.

§ 56. Обзор аксиоматики Гильберта; аксиомы конгруэнтности и основные следствия

1. Аксиомы конгруэнтности. Выше было отмечено, что по Гильберту, отрезки и углы могут находиться в определенных отношениях, для обозначения которых служит слово «конгруэнтность» или знак $\cong$. Эти соотношения характеризуются следующими пятью аксиомами конгруэнтности.

III.1. Пусть A и B — две точки на прямой a , h' — произвольный луч, исходящий из точки A' (в частности h' может принадлежать прямой a), тогда существует точка B' , принадлежащая лучу h' , и притом такая, что отрезок $\{AB\}$ конгруэнтен отрезку $\{A'B'\}$.

Конгруэнтность отрезка $\{AB\}$ отрезку $\{A'B'\}$ обозначается так: $\{AB\} \cong \{A'B'\}$. Так как отрезок был определен как система двух точек и в определении ничего не было сказано о порядке, в котором точки следуют одна за другой, то записи

$$\{AB\} \cong \{A'B'\}, \quad \{AB\} \cong \{B'A'\}, \quad \{BA\} \cong \{A'B'\}, \quad \{BA\} \cong \{B'A'\}$$

имеют один и тот же смысл.

III.2. Если $\{A'B'\} \cong \{AB\}$, и $\{A'B'\} \cong \{AB\}$, то $\{A'B'\} \cong \{A'B'\}$.

III.3. Пусть A, B, C — три точки прямой a , причем $A \times BC$, а A', B', C' — точки той же прямой или другой прямой a' , причем $A' \times B'C'$. Если при этом $\{AB\} \cong \{A'B'\}$, $\{BC\} \cong \{B'C'\}$, то $\{AC\} \cong \{A'C'\}$.

Введем следующее определение.

Определение 1. Совокупность луча h и полуплоскости ω , определяемой прямой h , называется репером. Начало луча h называется началом репера; прямая h — прямой репера, а плоскость ω , содержащая полуплоскость ω , — плоскостью репера².

Репер, заданный лучом h и полуплоскостью ω , обозначается так: $\{h, \omega\}$ или $\{O, h, \omega\}$, где O — начало репера.

III.4. Пусть даны $\angle(h, k)$ в плоскости α и репер $\{h', \omega'\}$ (в частности, ω' может принадлежать плоскости α); тогда в полуплоскости ω' существует один и только один луч k' , такой, что $\angle(h, k)$ конгруэнтен $\angle(h', k')$. Каждый угол конгруэнтен самому себе.

Конгруэнтность угла $\angle(h, k)$ и угла $\angle(h', k')$ обозначается так: $\angle(h, k) \cong \angle(h', k')$.

¹ См. [18].

² Заметим, что это определение не совпадает с определением репера, данным в § 50 (см. определение 7). Здесь репер состоит только из точек, в то время как в § 50 репер содержит как точки, так и векторы.

III.5. Пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой, и A', B', C' — также три точки, не лежащие на одной прямой. Если при этом $\{AB\} \cong \{A'B'\}$, $\{AC\} \cong \{A'C'\}$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, то $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.

Из первых трех групп аксиом вытекают многочисленные следствия. Прежде всего отметим, что из этих аксиом непосредственно следует предложение: отношение конгруэнтности отрезков удовлетворяет условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности. Далее, пользуясь аксиомой III.5, легко доказать, что углы при основании равнобедренного треугольника конгруэнтны. Эти аксиомы позволяют также доказать три основных признака конгруэнтности треугольников, известные читателю из курса средней школы. При этом треугольники считаются конгруэнтными, если их стороны и углы соответственно конгруэнтны. Доказательство этих теорем мы, естественно, опускаем и отсылаем читателя к книге Гильберта [18], § 6.

2. Сумма отрезков. Введем следующее определение.

Определение 2. Суммой отрезков $\{AB\}$ и $\{CD\}$ называется отрезок $\{PQ\}$, обладающий свойством: для отрезка $\{PQ\}$ существует такая внутренняя точка M , что $\{PM\} \cong \{AB\}$ и $\{MQ\} \cong \{CD\}$.

Пользуясь аксиомой III.1, легко показать, что сумма двух отрезков всегда существует. Для этого достаточно взять на произвольной прямой два дополнительных луча и от общего начала этих лучей отложить данные отрезки. Полученные точки образуют отрезок, равный сумме данных отрезков. Аксиома III.3 показывает, что сумма двух отрезков не зависит от способа построения, т. е. если отрезки $\{PQ\}$ и $\{P'Q'\}$ являются суммой данных отрезков, то $\{PQ\} \cong \{P'Q'\}$. Из этой же аксиомы следует, что сумма двух отрезков не зависит от порядка слагаемых. Отметим, наконец, что, пользуясь свойством о вложении отрезков (см. 47.5.5), легко доказать сочетательный закон для суммы отрезков: каковы бы ни были три отрезка $\{A_1B_1\}$, $\{A_2B_2\}$, $\{A_3B_3\}$, имеют место соотношения: $(\{A_1B_1\} + \{A_2B_2\}) + \{A_3B_3\} \cong \{A_1B_1\} + (\{A_2B_2\} + \{A_3B_3\})$. Таким образом, мы получаем возможность определить сумму трех отрезков: $\{A_1B_1\} + \{A_2B_2\} + \{A_3B_3\} \cong (\{A_1B_1\} + \{A_2B_2\}) + \{A_3B_3\}$ и показать, что она не зависит от порядка слагаемых. Обобщая это определение, получим сумму любого конечного числа отрезков.

Введем следующее определение, необходимое для дальнейшего.

Определение 3. Произведением отрезка $\{AB\}$ на натуральное число n называется отрезок $\{P_nP_n\} = \{AB\} + \{AB\} + \dots + \{AB\}$ (слагаемые берутся n раз, обозначаемый через $n \{AB\}$).

3. Сравнение отрезков. Теперь введем понятия «больше» и «меньше» для отрезков. Учитывая, что эти понятия нами будут сущест-

¹ Заметим, что требование аксиомы ($\angle ABC \cong \angle A'B'C'$) формально можно получить из условия ($\angle BAC \cong \angle B'A'C'$), переставив местами первые две буквы. Этим правилом удобно пользоваться при доказательствах теорем.

венно использоваться в следующей главе, остановимся на этом вопросе более подробно.

Предварительно докажем следующую теорему.

Теорема [56.1] (теорема о разности отрезков). Пусть точки A, B, C принадлежат прямой a и $A\ddot{B}C$. Пусть далее A', B', C' принадлежат той же или другой прямой a' и $A'\ddot{B}'C'$. Если при этом $\{AB\} \cong \{A'B'\}$ и $\{AC\} \cong \{A'C'\}$, то $\{BC\} \cong \{B'C'\}$ и $A'\ddot{B}'C'$.

Доказательство. Возьмем на прямой a' точку C^* так, чтобы $A'\ddot{B}'C^*$ и $\{BC\} \cong \{B'C^*\}$ (III.1). Применяя аксиому III.3 к тройкам точек A, B, C и A', B', C^* , получаем: $\{AC\} \cong \{A'C^*\}$. По условию теоремы $\{AC\} \cong \{A'C'\}$. Точки C' и C^* принадлежат лучу $\{A'B'\}$, так как $A'\ddot{B}'C'$ и $A'\ddot{B}'C^*$. Согласно свойству 1 51.3.3 точка C' совпадает с точкой C^* . ■

Теперь введем следующее определение.

Определение 4. Пусть даны два неконгруэнтных отрезка $\{A_1A_2\}$ и $\{B_1B_2\}$. Возьмем произвольный луч h , исходящий из точки O , и на этом луче возьмем точки A и B так, чтобы $\{OA\} \cong \{A_1A_2\}$, $\{OB\} \cong \{B_1B_2\}$ (III.1). Если при этом $O\ddot{A}B$, то говорят, что отрезок $\{A_1A_2\}$ меньше отрезка $\{B_1B_2\}$, ($\{A_1A_2\} < \{B_1B_2\}$) или отрезок $\{B_1B_2\}$ больше отрезка $\{A_1A_2\}$ ($\{B_1B_2\} > \{A_1A_2\}$).

Прежде всего покажем, что введенное понятие не зависит от выбора луча h . В самом деле, пусть с помощью луча h установлено, что $\{A_1A_2\} < \{B_1B_2\}$. Это означает, что на луче h существуют точки A и B такие, что $\{OA\} \cong \{A_1A_2\}$, $\{OB\} \cong \{B_1B_2\}$ и $O\ddot{A}B$. Возьмем другой луч h' , исходящий из точки O' , и на этом луче точки A' и B' так, чтобы $\{O'A'\} \cong \{A_1A_2\}$ и $\{O'B'\} \cong \{B_1B_2\}$. Из условия транзитивности соотношения конгруэнтности отрезков следует, что $\{OA\} \cong \{O'A'\}$, $\{OB\} \cong \{O'B'\}$. Применяя к тройкам точек O, A, B и O', A', B' теорему [56.1], получаем: $O'\ddot{A}'B'$.

Заметим, что если точка C лежит между точками A и B , то $\{AC\} < \{AB\}$ ¹. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно взять в качестве базисного луча луч AB .

Теперь сформулируем предложения, имеющие существенное значение для обоснования сравнения отрезков.

1°. Для двух произвольных отрезков $\{A_1A_2\}$ и $\{B_1B_2\}$ всегда выполняется одно и только одно из соотношений: $\{A_1A_2\} \cong \{B_1B_2\}$; $\{A_1A_2\} < \{B_1B_2\}$; $\{A_1A_2\} > \{B_1B_2\}$.

Возьмем луч h , исходящий из точки O , и на этом луче точки A и B так, чтобы $\{OA\} \cong \{A_1A_2\}$, $\{OB\} \cong \{B_1B_2\}$. Очевидно, возможны три и только три случая: а) точка A совпадает с точкой B ;

¹ Это свойство можно обосновать на основе аксиом Гильберта.

² Это предложение хорошо известно в следующей формулировке: «часть отрезка меньше целого отрезка».

б) $O\ddot{A}B$; в) $O\ddot{B}A$. В первом случае $\{A_1A_2\} \cong \{B_1B_2\}$. Во втором случае по определению $\{A_1A_2\} < \{B_1B_2\}$ и в третьем случае $\{A_1A_2\} > \{B_1B_2\}$.

Точно так же можно показать, что

2°. Если $\{A_1A_2\} < \{B_1B_2\}$ и $\{B_1B_2\} < \{C_1C_2\}$, то $\{A_1A_2\} < \{C_1C_2\}$. □

Из определения 3 непосредственно следует

3°. Если $m < n$, то $m\{AB\} < n\{AB\}$. Здесь $\{AB\}$ — произвольный отрезок, а m и n — натуральные числа.

4°. Если $m\{AB\} > n\{CD\}$, то $\{AB\} > \{CD\}$. Здесь m — произвольное натуральное число, а $\{AB\}$ и $\{CD\}$ — отрезки.

4. Обзор свойств конгруэнтности углов. Дадим краткий обзор теорем и определений, связанных с понятием конгруэнтности углов. Пользуясь третьим признаком конгруэнтности треугольников, легко доказать, что соотношение конгруэнтности углов удовлетворяет условиям транзитивности и симметричности. Отметим, что условие рефлексивности включено в аксиому III.4.

Определение 5. Два угла называются смежными, если они имеют общую сторону, а две другие стороны различны и принадлежат одной и той же прямой.

Имеет место следующая теорема о смежных углах.

Теорема [56.2]. Если угол (h_1, k_1) конгруэнтен углу (h_2, k_2) , то угол (h_1, k_1) смежный с углом (h_1, k_1) , конгруэнтен углу (h_2, k_2) , смежному с углом (h_2, k_2) (лучи k_1 и k_1' , k_2 и k_2' дополняют друг друга).

Определение 6. Угол называется прямым, если он конгруэнтен углу, смежному с ним.

Из этого определения вовсе не следует, что существование прямых углов является очевидным фактом. Кроме того, из определения не следует также, что все прямые углы конгруэнтны друг другу. Эти факты должны быть логически обоснованы. Их обоснование мы опускаем. Заметим, что доказательство теоремы: все прямые углы конгруэнтны друг другу — проводится сложно (см. [7], теорема 38).

5. Сравнение углов. Понятие суммы двух углов. С помощью аксиом первых трех групп можно ввести понятия «больше» и «меньше» для углов. Однако эта теория значительно отличается от той, которая была изложена в § 52. Важным в этой теории является доказательство предложения 52.4. 1, основанное на системе аксиом Гильберта.

Определение 7. Пусть даны два неконгруэнтных угла (h_1, h_2) и (k_1, k_2) . Возьмем произвольный репер $\{O, l, \omega\}$ и в полуплоскости ω рассмотрим лучи h и k так, чтобы $\angle(l, h) \cong \angle(h_1, h_2)$, $\angle(l, k) \cong \angle(k_1, k_2)$. Если при этом луч h является внутренним лучом угла (l, k) , то говорят, что $\angle(h_1, h_2) < \angle(k_1, k_2)$, или $\angle(k_1, k_2) > \angle(h_1, h_2)$. Можно показать, что введенное понятие не зависит от выбора исходного репера $\{O, l, \omega\}$.

Пользуясь определением 7, можно ввести понятия острого и тупого углов: угол называется острым (тупым), если он меньше (больше) прямого угла.

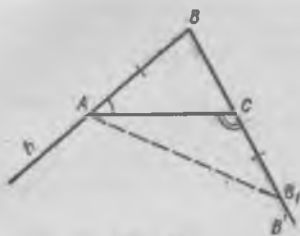


Рис. 153.

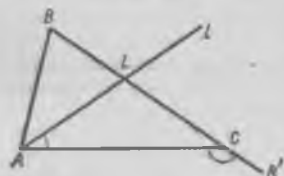


Рис. 154.

В заключение отметим, что сумму двух углов можно определить точно так, как это было сделано в п. 5, § 52: угол (h, k) называется суммой углов (h_1, k_1) и (h_2, k_2) , если существует такой внутренний луч l_0 угла (h, k) , что $\angle(h, l_0) \cong \angle(h_1, k_1)$ и $\angle(l_0, k) \cong \angle(h_2, k_2)$ (см. определение 5, § 52).

6. Теорема о внешнем угле треугольника. Теорема [52.4] о том, что внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов, не смежных с ним, как мы увидим ниже, не может быть доказана на основе первых трех групп аксиом. Эти аксиомы позволяют доказать более слабое предложение.

Теорема [56.3]. Внешний угол треугольника больше любого внутреннего, не смежного с ним.

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник. Рассмотрим внутренний угол BAC и внешний угол ACB' при вершине C .

Покажем, что $\angle BAC$ не конгруэнтен $\angle ACB'$ (рис. 153). Доказательство проведем от противного: пусть $\angle BAC \cong \angle ACB'$. Обозначим через h луч, дополнительный к лучу AB (рис. 153). Возьмем на луче CB' точку B_1 так, чтобы $\{AB\} \cong \{CB_1\}$. Согласно первому признаку конгруэнтности треугольников имеем: $\triangle ABC \cong \triangle CB_1A$, поэтому $\angle ACB \cong \angle CAB_1$. С другой стороны, согласно теореме [56.2] имеем: $\angle ACB \cong \angle(AC, h)$. Лучи $\{AB_1\}$ и h различны, лежат в одной и той же плоскости, определяемой прямой AC . Мы пришли в противоречие с аксиомой III.4.

Теперь перейдем к доказательству утверждения теоремы. Проведем его также от противного. Пусть $\angle BAC$ не меньше $\angle ACB'$. Отсюда следует, что имеет место один из следующих двух случаев: $\angle BAC \cong \angle ACB'$ или $\angle BAC > \angle ACB'$. Первый случай исключается в соответствии с первой частью доказательства, поэтому рассмотрим только вторую возможность. В этом случае существует внутренний луч l угла BAC такой, что $\angle(l, AC) \cong \angle ACB'$ (рис. 154). Согласно теореме [55.1], этот луч пересекает отрезок BC в некоторой точке L . Но в этом случае мы получаем $\triangle ALC$, для которого внешний угол конгруэнтен внутреннему, с ним не смежному. ■

Эта теорема в сочетании с теоремой [56.1] позволяет доказать известные предложения из курса элементарной геометрии.

1°. В треугольнике большая сторона лежит против большего угла и, обратно, больший угол лежит против большей стороны.

2°. Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других.

7. Середина отрезка и биссектриса угла. Серединой отрезка $\{AB\}$ называется точка M прямой AB , удовлетворяющая условию $\{AM\} \cong \{MB\}$ (ср. определение 6, § 51). Пользуясь аксиомами Гильберта, нетрудно доказать:

Теорема [56.4]. Каждый отрезок имеет одну и только одну середину, которая является внутренней ее точкой.

Биссектрисой угла (h, k) называется внутренний луч l_0 этого угла, удовлетворяющий условию: $\angle(h, l_0) \cong \angle(l_0, k)$. Имеет место предложение, аналогичное предыдущей теореме: каждый угол имеет одну и только одну биссектрису.

8. Конгруэнтность произвольных фигур. В геометрии фигурой называется любое непустое множество точек. Для обоснования понятия конгруэнтности произвольных фигур на основе аксиоматики Гильберта необходимо сначала ввести понятие движения и изучить его основные свойства.

Определение 8. Отображение $f: \Pi \rightarrow \Pi$ точек плоскости называется движением, если при этом отображении каждый отрезок, по Гильберту, переходит в конгруэнтный ему отрезок.

Пользуясь этим определением, можно строго обосновать все основные свойства движений, т. е. доказать, что любое движение есть взаимно однозначное отображение, сохраняющее прямолинейное расположение точек и понятие «лежать между». Отсюда легко показать, что при любом движении прямая, отрезок, луч, угол, полуплоскость переходят соответственно в прямую, отрезок, луч, угол и полуплоскость, при этом каждый угол переходит в конгруэнтный ему угол. Используя перечисленные выше свойства движений, устанавливается, что множество всех движений образует группу. Это фундаментальное предложение позволяет геометрию, построенную на основе аксиом Гильберта, свести к геометрии группы движений (см. I, § 31) и в соответствии с этим ввести определение: две фигуры называются конгруэнтными, если существует движение, при котором одна фигура переходит в другую.

Мы не будем останавливаться на выводах, вытекающих из этого определения, так как этот вопрос нами подробно рассмотрен в I, § 31.

§ 57. Обзор аксиоматики Гильберта; заключение

Настоящий параграф посвящен обзору основных следствий из аксиом непрерывности и параллельности.

1. Аксиомы непрерывности. Здесь мы несколько уклонимся от схемы Гильберта и вместо его аксиомы полноты приводим, следуя рекомендации Пуанкаре¹, аксиому IV.2, представляющую собой не что иное, как известный принцип Кантора о стягивающихся отрезках. Можно показать, что аксиомы IV.1 и IV.2, сформулированные ниже, эквивалентны двум аксиомам непрерывности Гильберта.

¹ Предложение о замене в системе аксиом Гильберта аксиомы полноты аксиомой Кантора впервые высказал в 1904 г. А. Пуанкаре в своей рецензии на «Основания геометрии» Гильберта, поданной на конкурс имени Н. И. Лобачевского.

IV.1 (аксиома Архимеда). Пусть $[AB]$ и $[CD]$ — два каких-нибудь отрезка; тогда на прямой AB существует конечное число различных точек $A_1, A_2, \dots, A_n$, отличных от A и таких, что отрезки $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ конгруэнтны отрезку CD и точка B лежит между A и A_n .

З а м е ч а н и е. Из условий этой аксиомы вытекает, что точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ следуют друг за другом, т. е. $AA_1A_2, A_1A_2A_3, \dots, A_{n-2}A_{n-1}A_n$. Это предложение можно доказать, если учесть, что точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ попарно различны и что

$$[AA_1] = [A_1A_2] = \dots = [A_{n-1}A_n].$$

IV.2 (аксиома Кантора). Пусть на произвольной прямой дана бесконечная последовательность отрезков $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n, \dots$, из которых каждый последующий лежит внутри предыдущего. Пусть далее для любого отрезка PQ всегда найдется такой номер n , для которого $[A_nB_n] < [PQ]$. Тогда на прямой a существует точка X , принадлежащая любому из отрезков $[A_1A_2], [A_2B_2], \dots, [A_nB_n], \dots$.

Рассуждением от противного легко показать, что существует только одна точка X , удовлетворяющая условиям аксиомы IV.2.

Первые четыре группы аксиом позволяют обосновать свойства непрерывности пространства, отсюда и название четвертой группы аксиом. В качестве важнейшего следствия отметим предложение Дедекинда, которое доказано в следующем пункте и играет существенную роль в теории измерения отрезков (см. ниже, гл. XII). Отметим также известные теоремы о пересечении прямой и окружности и двух окружностей (см. [30], Геометрия, 6-й класс, § 3), строгое доказательство которых читатель найдет, например, в [47] или [22]. К следствиям из аксиом непрерывности относится также теория измерения отрезков и углов, которой посвящена глава XII настоящего курса. Интересно отметить, что для построения теории измерения многоугольников и многогранников необходимо к перечисленным выше аксиомам добавить аксиому параллельности, то есть эта теория строится на базе всех аксиом евклидовой геометрии.

2. Предложение Дедекинда. Докажем следующую важную теорему.

Т е о р е м а [57.1]. Пусть все точки отрезка AB разбиты на два множества Ω_1 и Ω_2 , обладающие свойствами: а) Каждая точка отрезка AB принадлежит одному и только одному множеству, причем $A \in \Omega_1$ и $B \in \Omega_2$. Каждое из множеств Ω_1 и Ω_2 содержит точки, отличные от A и B . б) Любая точка множества Ω_1 , отличная от A , лежит между A и любой точкой множества Ω_2 .

При этих предположениях существует точка X , принадлежащая отрезку AB и обладающая тем свойством, что любая точка, лежащая между A и X , принадлежит множеству Ω_1 , а любая точка, лежащая между X и B — множеству Ω_2 . Точку X будем называть граничной точкой.

Доказательство. Пусть Y_1 — середина отрезка AB . Эта точка, очевидно, принадлежит одному из множеств Ω_1 или Ω_2 . Из точек A и B выберем ту, которая не принадлежит множеству, содержащему Y_1 . Эта точка вместе с точкой Y_1 образует отрезок, который обозначим через $[A_1B_1]$, причем обозначения выберем так, чтобы $A_1 \in \Omega_1$, а $B_1 \in \Omega_2$. Теперь возьмем середину Y_2 отрезка A_1B_1 ; пользуясь предыдущим принципом, построим отрезок A_2B_2 . Продолжая этот процесс, мы получаем бесконечную последовательность отрезков

$$[AB], [A_1B_1], [A_2B_2], \dots, [A_nB_n], \dots \quad (1)$$

Заметим, что при построении этих отрезков мы существенно пользовались теоремой [56.4] о середине отрезка. Из способа построения этих отрезков, а также из способа обозначения их концов следует, что каждый последующий отрезок лежит внутри предыдущего и, кроме того, точки $A, A_1, \dots, A_n, \dots$ принадлежат множеству Ω_1 , а точки $B, B_1, \dots, B_n, \dots$ — множеству Ω_2 . Легко видеть, что имеют место следующие предложения.

а) При любом n точка M , лежащая между A и A_n , принадлежит множеству Ω_1 .

В самом деле, если допустить обратное, т. е. если предположить, что $M \in \Omega_2$, то из AA_n следует, что $\bar{A}MAM$. Это противоречит условию б) теоремы. По аналогии можно доказать следующее предложение.

б) При любом n точка N , лежащая между B_n и B , принадлежит множеству Ω_2 .

Покажем, что последовательность отрезков (1) удовлетворяет аксиоме Кантора. Для этого достаточно показать, что для любого отрезка PQ всегда найдется такой номер n , что $[A_nB_n] < [PQ]$. Согласно аксиоме Архимеда существует такое натуральное число m , что $m[PQ] > [AB]$. Возьмем n так, чтобы $2^n > m$. Мы утверждаем, что $[A_nB_n] < [PQ]$. В самом деле, из способа построения отрезков (1) следует, что $2[A_1B_1] = [AB]$, $2[A_2B_2] = [A_1B_1]$, ..., $2[A_{n-1}B_{n-1}] = [A_nB_n]$, поэтому $2^n[A_nB_n] = [AB]$. Из 56.3.3 следует, что $m[PQ] < 2^n[PQ]$, поэтому $2^n[PQ] > 2^n[A_nB_n]$. Из 56.3.4 следует, что $[PQ] > [A_nB_n]$.

Согласно аксиоме Кантора существует точка X , принадлежащая любому из отрезков (1). Покажем, что эта точка удовлетворяет условиям теоремы. Пусть M — произвольная точка, лежащая между A и X . Возьмем n так, чтобы $[A_nB_n] < [MX]$. Так как A_nXB_n , то $[A_nX] < [A_nB_n]$, поэтому $[A_nX] < [MX]$. Отсюда следует, что $\bar{M}A_nX$. Таким образом, точки A_n и X принадлежат лучу MX , а точка A принадлежит дополнительному лучу, поэтому $\bar{A}MA_n$. Из предложения а) следует, что $M \in \Omega_1$. По аналогии с этим, пользуясь предложением б), можно показать, что если $\bar{B}NX$, то $N \in \Omega_2$. ■

3. Аксиома параллельности и обзор основных следствий. Геометрия, построенная на аксиомах принадлежности, порядка, конгруэнт-

ности и непрерывности, называется абсолютной геометрией. Чтобы охарактеризовать обычную элементарную геометрию (или, как иначе называют, евклидову геометрию), остается ввести еще одну аксиому, которая известна читателю из курса средней школы, — аксиому параллельности. Эта аксиома заключается в следующем.

V.1. Пусть a — произвольная прямая, а A — точка, не лежащая на ней. В таком случае, в плоскости, определяемой прямой a и точкой A , существует не более одной прямой, проходящей через точку A и не пересекающей прямую a .

На основе всех аксиом элементарной геометрии можно развить дальнейшую теорию, а именно: доказать теоремы о сумме углов треугольников и многоугольников, построить теорию трапеций, параллелограммов, теорию подобия и т. д. Нет надобности все это повторять здесь, так как после изучения перечисленных выше разделов легко проводить доказательства теорем, имеющих в учебниках средней школы, без всяких ссылок на чертеж, наглядность и «очевидность».

Пользуясь всеми аксиомами элементарной геометрии, можно построить теорию измерения многоугольников и многогранников. Этот вопрос рассмотрен в главе XII.

4. О логическом строении школьного курса геометрии. Из приведенного выше краткого обзора легко проследить, как осуществляется логическое построение геометрии на основе аксиом Гильберта. Интересно отметить, что рассмотренная выше схема с некоторыми коррективами может быть применена так же к анализу логического строения школьного курса геометрии. Дело в том, что аксиомы принадлежности Гильберта, по существу, совпадают с аксиомами принадлежности школьного курса, а аксиомы порядка и конгруэнтности Гильберта легко получаются из школьной аксиоматики путем простых рассуждений. Отметим, однако, что при анализе логического строения школьного курса геометрии выводы и рассуждения, в ряде случаев, значительно упрощаются. В самом деле, такие понятия, как луч и плоскость в школьном курсе, по существу, постулируются, поэтому отпадает надобность в доказательстве сложных теорем [48.5] и [47.3]. Далее, введение очень сильной аксиомы подвижности плоскости («Геометрия 8», п. 134, аксиома IV) значительно облегчает изложение всех вопросов, связанных с конгруэнтностью отрезков, углов и фигур. Отметим также, что теория измерения отрезков, изложенная ниже в гл. XII, является весьма сложной в схеме Гильберта и совершенно тривиальной в школьном курсе, благодаря аксиомам расстояния и аксиоме III₂ («Геометрия 8», п. 133). Несмотря на это, как было указано выше, логическое строение школьного курса геометрии, по существу, совпадает со схемой, изложенной выше. В частности, геометрия, построенная на аксиомах принадлежности, расстояния, порядка и подвижности плоскости школьного курса, является абсолютной геометрией. Добавляя к этим аксиомам аксиому параллельности, которая совпадает с аксиомой VI, получаем аксиомы евклидовой геометрии.

ОСНОВНЫЕ ФАКТЫ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

§ 58. Аксиома Лобачевского; параллельные прямые

1. Аксиоматика геометрии Лобачевского. Аксиоматика геометрии Лобачевского отличается от аксиоматики геометрии Евклида только лишь в одном, правда, очень существенном пункте. В этой геометрии содержатся все четыре группы аксиом абсолютной геометрии, а аксиома параллельности заменена ее отрицанием, а именно следующей аксиомой.

V. Л. Через данную точку P , не лежащую на прямой AB , проходят по крайней мере две прямые, лежащие в плоскости, определяемой прямой AB и точкой P , и не пересекающие прямую AB .

Легко видеть, что все теоремы, вытекающие из аксиом абсолютной геометрии, имеют место в геометрии Лобачевского. В последующем изложении мы ознакомим читателя только с теми фактами геометрии Лобачевского, которые непосредственно следуют из аксиомы V. Л., т. е. специфичны для этой геометрии. При этом для простоты изложения ограничимся только случаем планиметрии Лобачевского.

2. Параллельные прямые. Пользуясь аксиомой V. Л., можно показать, что через данную точку P , не лежащую на прямой AB , проходит бесконечное множество прямых, не пересекающих данную прямую AB , поэтому в геометрии Лобачевского нецелесообразно пользоваться тем определением параллельных прямых, которым пользуются в евклидовой геометрии.

Замечание 1. В настоящей главе запись «прямая UV » или, просто UV , означает, что мы рассматриваем *направленную прямую*, причем направление выбрано так, что $U < V$. При этом предполагается, что точки U и V на прямой выбраны так, что все рассматриваемые точки лежат между ними. Условимся также под выражением «луч (OA)» понимать *открытый луч* с началом O , содержащий A .

Введем следующее определение.

Определение 1. Пусть U_1V_1 и U_2V_2 — две направленные прямые и $A \in U_1V_1$, $B \in U_2V_2$. Прямая U_1V_1 называется *параллельной* прямой U_2V_2 в точке A по отношению к точке B , если:

- прямые U_1V_1 и U_2V_2 не пересекаются;
- всякий луч, исходящий из точки A и лежащий внутри угла BAV_1 , пересекает открытый луч (BV_2) (рис. 155, обозначение: $U_1V_1(A) \parallel U_2V_2(B)$).

Замечание 2. Если $U_1V_1(A) \parallel U_2V_2(B)$, то легко показать, что $U_1, U_2 = AB$ и $V_1, V_2 = AB$.

3. Независимость определения параллельности от выбора точек на прямых. Сейчас мы покажем, что понятие параллельности,

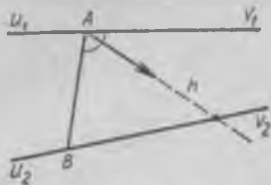


Рис. 155



Рис. 156

введенное определением 1, не зависит ни от выбора точки A на прямой U_1V_1 , ни от выбора точки B на прямой U_2V_2 .

Лемма [58.1] Если $U_1V_1(A) \parallel U_2V_2(B)$, то $U_1V_1(A) \parallel U_2V_2(B')$, где $B' — произвольная точка прямой U_2V_2 .$

Доказательство. Возможны два случая: $B' \in (BV_2)$ и $B' \in (BU_2)$. Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

а) $B' \in (BV_2)$. Возьмем отрезок BC , где $C — точка луча AV_1 (рис. 156). Так как все точки луча (BV_2) являются внутренними точками угла BAV_1 , то луч (AB') является внутренним лучом этого угла, поэтому он пересекает отрезок BC в некоторой точке H (теорема [55.1]). Возьмем произвольный луч k , лежащий внутри угла $B'AC$.$

Этот луч пересекает отрезок BC в некоторой точке K . Так как $H \in K \in BC$ и $B \in H \in BC$, то согласно 47.5.5 имеем: $B \in K \in BC$, поэтому k является внутренним лучом угла BAC . Отсюда следует, что k пересекает (BV_2) . Очевидно, точка пересечения лежит на луче $(B'V_2)$, так как в противном случае луч k по аксиоме Паша будет пересекать отрезок BH , что невозможно.

б) $B' \in (BU_2)$. Возьмем внутренний луч k угла $B'AV_1$. Возможны три случая: 1) луч k лежит внутри угла $B'AB$; в этом случае k пересекает отрезок $B'B$, следовательно, пересекает и луч $B'V_2$; 2) луч k совпадает с лучом (AB) ; тогда точкой пересечения является B ; 3) k лежит внутри угла BAC и в силу условий леммы пересекает луч (BV_2) или $(B'V_2)$. ■

Таким образом, определение параллельности не зависит от выбора точки B на второй прямой. Покажем, что оно не зависит также от выбора точки A на первой прямой.

Лемма [58.2]. Если $U_1V_1(A) \parallel U_2V_2$, то $U_1V_1(A') \parallel U_2V_2$, где $A' — произвольная точка прямой U_1V_1 .$

Доказательство. Возьмем произвольную точку B на прямой U_2V_2 и покажем, что $U_1V_1(A') \parallel U_2V_2(B)$. Так как $U_1V_1(A) \parallel U_2V_2$, то прямые U_1V_1 и U_2V_2 не пересекаются, поэтому достаточно показать, что всякий внутренний луч угла $BA'V_1$ пересекает луч BV_2 . Возможны два случая: а) $A' \in (AV_1)$; б) $A' \in (AU_1)$. Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

а) Доказательство проведем от противного. Пусть в угле $BA'V_1$ найдется некоторый внутренний луч $(A'K)$, который не пересекает

луч (BV_2) , где $K — произвольная точка этого луча (рис. 157). Легко видеть, что K является внутренней точкой угла BAV_1 , поэтому луч (AK) является внутренним лучом угла BAV_1 и пересекает луч (BV_2) в некоторой точке C . Рассмотрим точки A, B, C и прямую $A'K$. Так как $A, K \in U_2V_2$, то CAK . Но AKC , поэтому $A'K$ пересекает отрезок AC . Прямая $A'K$ не пересекает отрезок AB , так как точки луча $(A'K)$ и точки отрезка AB расположены по разные стороны от прямой $A'B$, а точки луча $(A'K)$ и точки отрезка $AB — по разные стороны от прямой U_1V_1 . По аксиоме Паша прямая $A'K$ пересекает отрезок BC . Очевидно, точка пересечения лежит на луче $(A'K)$, так как лучи $(A'K)$ и $(A'K)$ лежат по разные стороны от прямой U_1V_1 .$$

б) $A' \in (AU_1)$. Предлагаем читателю самостоятельно рассмотреть этот случай, воспользовавшись рисунком 158. На этом рисунке $h — вспомогательный луч, исходящий из точки A и удовлетворяющий условию: $\angle (AV_1, h) \cong \angle (A'V_1, x)$. ■$

4. Теорема существования параллельных прямых. Из предыдущего изложения еще не следует, что существуют параллельные прямые в смысле Лобачевского. Прежде чем доказать теорему о существовании параллельных, сформулируем лемму, которая непосредственно следует из теоремы о внешнем угле треугольника.

Лемма [58.3]. Если прямые a и b пересекают прямую c в различных точках и ортогональны к этой прямой, то они не пересекаются.

Теперь докажем следующую важную теорему.

Теорема [58.4]. Если дана прямая U_2V_2 и точка P , не лежащая на этой прямой, то существует одна и только одна прямая U_1V_1 , проходящая через точку P , такая, что $U_1V_1 \parallel U_2V_2$.

Доказательство. Опустим из точки P перпендикуляр на U_2V_2 и обозначим через H основание перпендикуляра (рис. 159). Рассмотрим далее луч (PQ) , перпендикулярный прямой PH и удовлетворяющий условию $(PQ), (HV_2) \perp PH$. Согласно предыдущей лемме, лучи (HV_2) и (PQ) не пересекаются, поэтому все точки луча (HV_2) принадлежат внутренней области угла HPQ .

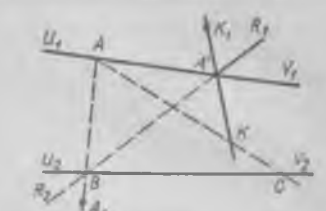


Рис. 157

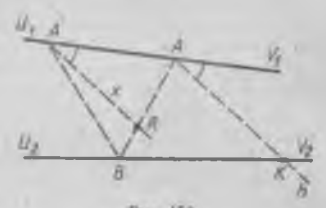


Рис. 158

¹ Существенно подчеркнуть, что прямые U_2V_2 и U_1V_1 считаются направленными (см. замечание 1).

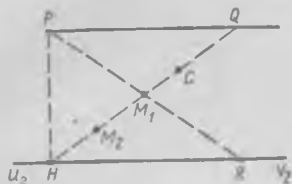


Рис. 159.

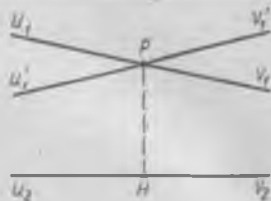


Рис. 160.

Рассмотрим отрезок HQ и все точки этого отрезка вместе с конечными точками, разобьем на два класса по следующему принципу. К первому классу отнесем всякую точку M_1 , удовлетворяющую условию: луч (PM_1) пересекает луч (HV_2) , а ко второму классу отнесем все остальные точки рассматриваемого множества. Легко показать, что при этом разбиении будут удовлетворены все условия теоремы [57.1] (предложение Дедекинда). Выполнение первого условия очевидно; предлагаем читателю проверить выполнение второго условия самостоятельно.

Из предложения Дедекинда следует, что существует точка C , производящая сечение отрезка HQ . Покажем, что C принадлежит второму классу. В самом деле, если предположить, что C — точка первого класса, то, обозначив через D точку пересечения луча (PC) с лучом

(HV_2) и взяв на луче (HV_2) точку E так, чтобы HDE , легко прийти к выводу, что луч (PE) пересекает отрезок CQ (точки D и E на рис. 159 не указаны). Полученный результат противоречит предложению Дедекинда. Таким образом, прямые PC и U_2V_2 не пересекаются.

Доказательство единственности параллельной проведем от противоположного. Пусть U_1V_1 и $U'_1V'_1$ — две различные прямые, проходящие через точку P , причем $U_1V_1 \parallel U_2V_2$ и $U'_1V'_1 \parallel U_2V_2$ (рис. 160). Из замечания 2 следует, что (PV_1) , $(PV'_1) \dots PH$. В силу того что (PV_1) и (PV'_1) — различные лучи, по теореме [55.2] один из них лежит внутри угла, образованного другим лучом и лучом (PH) . Пусть, например, (PV_1) лежит внутри угла HPV'_1 . Так как $U_1V_1 \parallel U_2V_2$, то (PV_1) пересекает луч (HV_2) , что противоречит условию параллельности прямых U_1V_1 и U_2V_2 . ■

§ 59. Основные свойства параллельных прямых.

Расходящиеся прямые

1. Биссектор двух прямых. Для дальнейшего изложения необходимо ввести следующее вспомогательное понятие.

Определение 1. Биссектором двух прямых, расположенных в одной плоскости, называется прямая, по отношению к которой данные прямые расположены симметрично¹.

¹ Это определение принадлежит А. П. Нордену (см. [36], с. 94). Мы подчеркиваем, что биссектор не луч, а прямая.

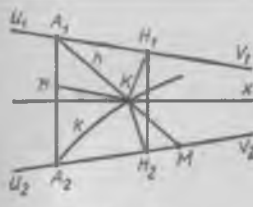


Рис. 161.

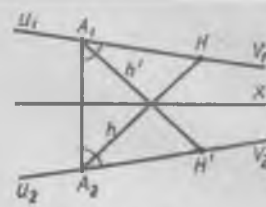


Рис. 162.

Докажем следующее вспомогательное предложение.

Лемма [59.1]. Если $U_1V_1 \parallel U_2V_2$, то существует биссектор x этих прямых. □

Доказательство леммы предлагаем провести самостоятельно, пользуясь рисунком 161. На этом рисунке A_1 и A_2 — произвольные точки прямых U_1V_1 и U_2V_2 , h — биссектриса угла $A_2A_1V_1$, k — биссектриса угла $A_1A_2V_2$, $K = h \cap k$, $KH_1 \perp U_1V_1$, $KH_2 \perp U_2V_2$, а x — серединный перпендикуляр отрезка H_1H_2 . Для доказательства того, что x — искомый биссектор, достаточно рассмотреть симметрию относительно прямой x .

2. Симметричность параллельности по Лобачевскому. Пользуясь этой леммой, легко доказать свойство симметричности понятия параллельности.

Теорема [59.2]. Если $U_1V_1 \parallel U_2V_2$, то $U_2V_2 \parallel U_1V_1$.

Доказательство. Пусть x — биссектор данных прямых. Возьмем точку A_1 на одной из них и рассмотрим точку A_2 , симметричную точке A_1 относительно биссектора x (рис. 162). Покажем, что $U_2V_2 (A_2) \parallel U_1V_1 (A_1)$. Так как U_1V_1 и U_2V_2 не пересекаются, то для доказательства теоремы достаточно показать, что всякий внутренний луч h угла $A_1A_2V_2$ пересекает луч (A_1V_1) .

Пусть σ — отражение от биссектора x . При этом отражении $\angle A_1A_2V_2$ переходит в $\angle A_2A_1V_1$, поэтому внутренний луч h первого угла перейдет в некоторый внутренний луч h' второго угла. В силу условия теоремы луч h' пересекает луч (A_2V_2) в некоторой точке H' ; прообраз H этой точки, очевидно, является точкой пересечения лучей h и (A_1V_1) . Таким образом доказано, что $U_2V_2 \parallel U_1V_1$. ■

3. Транзитивность параллельности по Лобачевскому. Прежде чем перейти к теореме о транзитивности, рассмотрим следующие две леммы.

Лемма [59.3]. Пусть на параллельных прямых U_1V_1 и U_2V_2 даны соответственно точки A_1 и A_2 . Пусть далее U_0V_0 — прямая, проходящая через некоторую внутреннюю точку M_0 отрезка A_1A_2 и не пересекающая прямые U_1V_1 и U_2V_2 . Если на этой прямой направление выбрано так, что точки V_1, V_2, V_0 лежат в одной полуплоскости, определяемой прямой A_1A_2 , то $U_0V_0 \parallel U_1V_1$ и $U_0V_0 \parallel U_2V_2$.

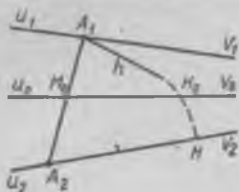


Рис. 163

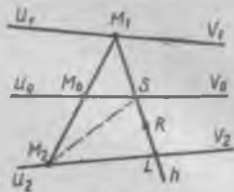


Рис. 164

Доказательство. Докажем, например, что $U_1V_1(A_1) \parallel U_0V_0(M_0)$. Так как прямые U_1V_1 и U_0V_0 не пересекаются, то достаточно показать, что любой внутренний луч h угла $M_0A_1V_1$ пересекает луч M_0V_0 (см. рис. 163). Угол $M_0A_1V_1$ совпадает с углом $A_2A_1V_1$, поэтому h является внутренним лучом последнего угла и, следовательно, в силу параллельности прямых U_1V_1 и U_2V_2 пересекает луч (A_2V_2) в некоторой точке H . Применяя аксиому Паша к треугольнику A_1A_2H и прямой U_0V_0 , мы приходим к выводу, что прямая U_0V_0 пересекает отрезок A_1H в некоторой точке H_0 (прямая U_0V_0 не пересекает U_2V_2 , поэтому U_0V_0 не может пересечь отрезок A_2H). Так как точки V_0, V_2 лежат в одной полуплоскости, определяемой прямой A_1A_2 , то точка H_0 лежит на луче (M_0V_0) .

Точно так же можно показать, что $U_2V_2 \parallel U_0V_0$. ■

Л е м м а [59.4]. Если $U_1V_1 \parallel U_0V_0$, $U_2V_2 \parallel U_0V_0$ и прямые U_1V_1, U_2V_2, U_0V_0 попарно не совпадают, то существует по крайней мере одна прямая, пересекающая данные прямые.

Доказательство. Так как прямые U_1V_1 и U_2V_2 параллельны U_0V_0 , то они не пересекают U_0V_0 . Если U_1V_1 и U_2V_2 лежат по разные стороны от U_0V_0 , то, взяв по одной произвольной точке на U_1V_1 и U_2V_2 и соединив их, получим прямую, пересекающую все данные прямые.

Рассмотрим случай, когда U_1V_1 и U_2V_2 лежат по одну и ту же сторону от прямой U_0V_0 . Возьмем точки M_0, M_1, M_2 , лежащие соответственно на прямых U_0V_0, U_1V_1, U_2V_2 . Если они лежат на одной прямой, то лемма справедлива, поэтому допустим, что они не лежат на одной прямой. Различные лучи (M_0M_1) и (M_0M_2) лежат по одну и ту же сторону от U_0V_0 , поэтому согласно теореме [55.2] один из них лежит внутри угла, образованного другим лучом и лучом (M_0V_0) . Пусть, например, (M_0M_1) является внутренним лучом угла $M_2M_0V_0$. Так как $U_2V_2 \parallel U_0V_0$, то $U_0V_0 \parallel U_2V_2$ или $U_0V_0(M_0) \parallel U_2V_2(M_2)$. Отсюда следует, что луч (M_0M_1) пересекает луч (M_2V_2) , т. е. прямая M_0M_1 пересекает все три данные прямые. ■

Теперь докажем теорему о транзитивности параллельных прямых.

Т е о р е м а [59.5]. Если $U_1V_1 \parallel U_0V_0$, $U_1V_1 \parallel U_0V_0$ и прямые U_1V_1, U_2V_2 различны, то $U_1V_1 \parallel U_2V_2$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что U_1V_1 и U_2V_2 не пересекаются. Если допустить, что они пересекаются в некоторой

точке P , то тогда $U_1V_1(P) \parallel U_0V_0$ и $U_2V_2(P) \parallel U_0V_0$. Это противоречит теореме [58.4]. Согласно предыдущей лемме существует прямая, пересекающая U_0V_0, U_1V_1, U_2V_2 соответственно в точках M_0, M_1, M_2 . Докажем, что $U_1V_1(M_1) \parallel U_2V_2(M_2)$. Так как M_0, M_1, M_2 — различные точки прямой, то возможны следующие два случая: а) $M_1 \overset{\times}{M_0} M_2$, б) $M_0 M_1 M_2$. Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

а) Так как $M_1 \overset{\times}{M_0} M_2$, то прямые U_1V_1 и U_2V_2 лежат в разных полуплоскостях с границей U_0V_0 , поэтому они не пересекаются. Для доказательства теоремы достаточно показать, что всякий луч h , исходящий из M_1 и лежащий внутри угла $M_2M_1V_1$, пересекает луч (M_2V_2) (рис. 164). Луч h пересекает луч (M_0V_0) в некоторой точке S , так как

$U_1V_1(M_1) \parallel U_0V_0(M_0)$. Возьмем точку R так, чтобы $M_1 \overset{\times}{S} R$, очевидно, $R \in h$. Из соотношений $M_1, R \in U_0V_0$ и $M_2, R \in U_0V_0$ следует, что точка R является внутренней точкой угла M_2SV_0 , поэтому луч (SR) является внутренним лучом этого угла. Так как $U_0V_0(S) \parallel U_2V_2(M_2)$, то луч (SR) пересекает луч (M_2V_2) в некоторой точке L ,

которая, очевидно, лежит на луче h . В самом деле, $\bar{S}RL, M_1 \overset{\times}{S} R$, поэтому $M_1 \overset{\times}{S} L$ и $\bar{M}_1SL$. Но $S \in h$, поэтому $L \in h$.

б) Не нарушая общности, можно предположить, что $M_2 \overset{\times}{M_1} M_0$. В этом случае выполняются условия леммы [59.3], поэтому $U_1V_1 \parallel U_2V_2$. ■

4. Параллельность ненаправленных прямых. Определение параллельности, данное в предыдущем параграфе, было введено для направленных прямых.

Введем следующее общее определение параллельности для ненаправленных прямых.

О п р е д е л е н и е 2. Две прямые a и b называются параллельными, если на этих прямых можно выбрать направления так, чтобы они были параллельны как направленные прямые.

Из теоремы [58.4] непосредственно следует, что если дана прямая a и точка P , не лежащая на этой прямой, то существуют две и только две прямые, проходящие через точку P и параллельные прямой a (рис. 165). Далее, теорема [59.2] о симметричности параллельности направленных прямых распространяется и на случай ненаправленных прямых. Отметим, однако, что теорема [59.5] о транзитивности, вообще говоря, не распространяется на данный случай. В самом деле, рассмотрим, например, прямые a, b_1, b_2 , изображенные на рисунке 165. В то время как $b_1 \parallel a, b_2 \parallel a$, прямые b_1 и b_2 различны, но не параллельны друг другу.

Отметим следующую интересную теорему, которая непосредственно следует из леммы [59.3].

Т е о р е м а [59.6]. Если $a \parallel b$ и c является биссектором этих прямых, то $c \parallel a$ и $c \parallel b$. □

5. Взаимное расположение двух прямых на плоскости Лобачевского. В геометрии Лобачевского, в отличие от геометрии Евклида,

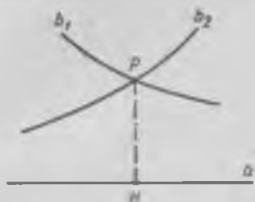


Рис. 165

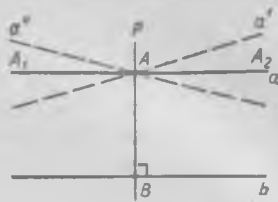


Рис. 166

имеются три случая взаимного расположения двух различных прямых a и b : а) прямые a и b пересекаются; б) прямые a и b параллельны; в) прямые a и b не пересекаются и не параллельны. Третий случай для нас представляет особый интерес, поэтому рассмотрим его более подробно.

Введем следующее определение.

Определение 3. Две различные прямые, лежащие в одной плоскости, называются *расходящимися* (сверхпараллельными), если они не пересекаются и не параллельны.

Докажем теорему, из которой будет следовать существование расходящихся прямых.

Теорема [59.7]. Если для различных прямых a и b , лежащих в одной плоскости, существует прямая p , ортогональная им обоим, то a и b — расходящиеся прямые.

Доказательство. Пусть $A = p \cap a$ и $B = p \cap b$, а A_1 и A_2 — две точки прямой a , причем $A_1 \dot{A} A_2$ (рис. 166). Из леммы [58.3] следует, что прямые a и b не пересекаются. Покажем, что эти прямые не могут быть параллельными. Согласно аксиоме Лобачевского, кроме прямой a , существует по крайней мере еще одна прямая a' , проходящая через A и не пересекающая прямую b . Но в этом случае прямая a' , симметричная прямой a' относительно прямой AB , также не пересекает прямую b (см. рис. 166). Отсюда следует, что существуют внутренние лучи углов BAA_1 и BAA_2 , которые не пересекают прямую b . Но это означает согласно определению 1 (§ 58), что прямая a при любом выборе направления на ней не может быть параллельна прямой b . ■

Следствие 1°. Если при пересечении двух прямых a и b третьей прямой p какие-либо два соответственных угла конгруэнтны, то a и b — расходящиеся прямые.

Пусть $A = p \cap a$, $B = p \cap b$. Легко видеть, что прямая, проходящая через середину отрезка AB и перпендикулярная одной из прямых a и b , перпендикулярна другой.

Следствие 2°. Если две прямые параллельны, то не существует прямой a , ортогональной одновременно этим прямым.

В заключение предлагаем читателю, воспользовавшись п. 8, § 56, доказать следующую теорему.

Теорема [59.8]. При любом движении плоскости две пересекающиеся прямые переходят в пересекающиеся прямые, параллельные прямые — в параллельные (с сохранением направления параллельности), а расходящиеся прямые — в расходящиеся. □

§ 60. Треугольники и четырехугольники

1. Теорема о сумме внутренних углов треугольников. Все теоремы о треугольниках, которые доказываются в элементарной геометрии без помощи аксиомы о параллельности, имеют место также в геометрии Лобачевского. Подавляющее большинство теорем, известных читателю из курса средней школы, относятся именно к этому типу. Теоремы о равнобедренных треугольниках, три признака конгруэнтности треугольников, теорема о внешнем угле треугольника, теорема о соотношениях между сторонами и углами, теоремы о пересечении биссектрис внутренних углов треугольника и о пересечении медиан треугольника в одной точке¹ — вот далеко не полный перечень теорем, которые имеют место как в евклидовой геометрии, так и в геометрии Лобачевского. Но наряду с этим существует целый ряд специфических свойств треугольников на плоскости Лобачевского. Прежде всего отметим следующую важную теорему.

Теорема [60.1]. Сумма внутренних углов любого треугольника меньше двух прямых.

Доказательство. В самом деле, из теорем Лежандра (см. § 53, п. 4) непосредственно следует, что в геометрии Лобачевского нет ни одного треугольника с суммой внутренних углов, равной двум прямым. Отсюда, учитывая первую теорему Лежандра (см. § 53.4.1), приходим к требуемому выводу. ■

Дефектом треугольника ABC называется число $\delta(ABC) = 2d - S(ABC)$, где $S(ABC)$ — сумма внутренних углов треугольника. Пользуясь этим термином, теорему [60.1] формулируем так.

Теорема [60.1]. Дефект любого треугольника — положительное число.

Как непосредственное следствие теоремы [60.1] может быть сформулировано предложение.

Следствие. Сумма внутренних углов любого простого четырехугольника меньше четырех прямых углов.

Это следствие легко обосновать, если принять во внимание следующее замечание. Для каждого простого четырехугольника всегда существуют такие две противоположные вершины, которые лежат по разные стороны от диагонали, соединяющей две другие вершины (рис. 167). Отсюда следует, что изучаемый четырехугольник диагонально можно разбить на два треугольника, не имеющих общих внутренних точек (см. рис. 167). Учитывая это обстоятельство, простым подсчетом углов составляющих треугольников приходим к нужному результату.

¹ Интересно отметить, что высоты треугольника на плоскости Лобачевского не всегда пересекаются в одной точке.

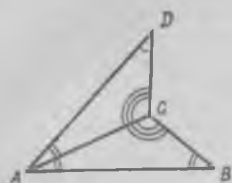


Рис. 167.

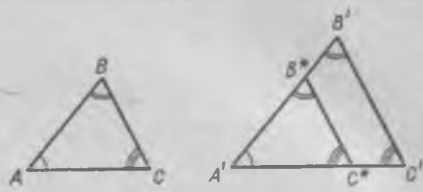


Рис. 168.

2. Некоторые свойства треугольников. Докажем еще одну важную теорему, согласно которой в геометрии Лобачевского отсутствует понятие подобных треугольников и вообще понятие подобия фигур.

Теорема [60.2] (четвертый признак конгруэнтности треугольников). *Треугольник ABC конгруэнтен треугольнику A'B'C', если $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$.*

Доказательство. Возьмем на сторонах A'B' и A'C' угла B'A'C' соответственно точки B* и C* так, чтобы $[A'B*] \cong [AB]$ и $[A'C*] \cong [AC]$ (рис. 168). По первому признаку конгруэнтности треугольников имеем: $\triangle A'B*C* \cong \triangle ABC$, поэтому $\angle A'B*C* \cong \angle ABC \cong \angle A'B'C'$ и $\angle A'C*B* \cong \angle ACB \cong \angle A'C'B'$. Если $[AB] \cong [A'B']$, то по второму признаку конгруэнтности треугольников $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Не нарушая общности, можно допустить, что $[AB] < [A'B']$; в этом случае $A'B*B'$ (см. рис. 168). Лучи (B*C*) и (B'C*) не пересекаются (следствие 1° теоремы [59.7]), поэтому из соотношения $A', B* \dots B'C'$ следует, что $A', C* \dots B'C'$, т. е. B*, C* $\dots B'C'$. Это означает, что четырехугольник B*B'C'C* выпуклый. Из предыдущих рассуждений вытекает, что сумма внутренних углов этого четырехугольника равна четырем прямым. Мы пришли в противоречие со следствием теоремы [60.1]. ■

Отметим, наконец, следующее интересное свойство треугольников, не имеющее своего аналога в евклидовой геометрии.

Теорема [60.3]. *На плоскости существуют треугольники, около которых нельзя описать окружность.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы достаточно привести хотя бы один пример треугольника, вокруг которого нельзя описать окружность. Прежде всего заметим, что, как и в евклидовой геометрии, центр описанной окружности, если последняя существует, лежит на пересечении перпендикуляров, восстановленных в серединах сторон.

Возьмем две параллельные прямые a и b . Из точки P прямой a опустим перпендикуляр на прямую b . Пусть Q — основание перпендикуляра. Возьмем далее на отрезке PQ произвольную точку A и построим точки B и C , симметричные с A относительно прямых a и b . Согласно следствию 2° теоремы [59.7] точки A, B и C не лежат на одной прямой. Таким образом, мы построили треугольник ABC , для

которого перпендикуляры, восстановленные в серединах сторон AB и AC , не пересекаются. Это означает, что около построенного треугольника нельзя описать окружность. ■

3. Двупрямоугольники. Введем следующее важное определение.

Определение 1. Четырехугольник $ABCD$ называется двупрямоугольником, если внутренние углы при вершинах A и B прямые, а две другие вершины расположены в одной и той же полуплоскости с границей AB . Двупрямоугольник $ABCD$ называется двупрямоугольником Саккери, если $[AD] \cong [BC]$ (ср. § 53, п. 4).

В дальнейшем двупрямоугольник будем обозначать в соответствии с приведенным выше определением, т. е. будем считать, что в двупрямоугольнике $ABCD$ через A и B обозначены вершины прямых углов. Условимся далее в следующей терминологии: стороны $[AB]$ и $[CD]$ будем называть соответственно нижним и верхним основаниями, а $[AD]$ и $[BC]$ — боковыми сторонами (рис. 169).

Рассмотрим некоторые простейшие свойства двупрямоугольников.

1°. Сумма двух внутренних углов двупрямоугольника, примыкающих к верхнему основанию, меньше двух прямых углов.

Это свойство непосредственно следует из следствия теоремы [60.1].

Для доказательства дальнейших свойств введем следующее определение. Преобразованием симметрии двупрямоугольника $ABCD$ будем называть отражение σ от серединного перпендикуляра a нижнего основания AB (см. рис. 169). Так как $a \perp AB$, $AD \perp AB$, $BC \perp AB$ и, кроме того, $[AO] \cong [OB]$, где $O = AB \cap a$, то при отражении σ имеем: $\sigma(A) = B$, $\sigma(B) = A$, $\sigma(O) = O$, и, кроме того, луч (AD) переходит в луч (BC) , а луч (BC) — в луч (AD) . Отсюда следует, что если $D' = \sigma(D)$ и $C' = \sigma(C)$, то $D' \in$ лучу (BC) , а $C' \in$ лучу (AD) (на рисунке 169 точка C' не обозначена). ■

2°. Если $ABCD$ — четырехугольник Саккери, то у этого четырехугольника углы при верхнем основании конгруэнтны друг другу и каждый из них является острым углом.

Пусть σ — преобразование симметрии двупрямоугольника $ABCD$, а $D' = \sigma(D)$. Так как $[AD] \cong [BC]$ и $[AD] \cong [BD']$, то $(BC) \cong (BD')$. Но C и D' принадлежат одному и тому же лучу (BC) , поэтому $C = D'$. Отсюда следует, что $\angle ADC \cong \angle BCD$. Вторая часть утверждения 2° непосредственно следует из свойства 1°. ■

3°. Если у двупрямоугольника $ABCD$ боковые стороны удовлетворяют неравенству $[AD] < [BC]$, то $\angle C < \angle D$. Другими словами, против большей боковой стороны лежит больший угол.

Пусть σ — преобразование симметрии данного двупрямоугольника, $D' = \sigma(D)$, а $E = a \cap DC$, где a — ось преобразования (см. рис. 169). Так как $[AD] < [BC]$, то $[BD'] < [BC]$, поэтому $CD' \times B$.

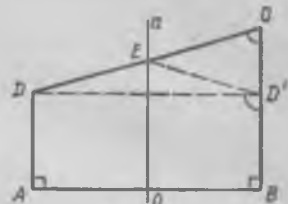


Рис. 169

Рассмотрим треугольник ECD' . Из теоремы о внешнем угле треугольника имеем: $\angle ED'B > \angle ECB$. С другой стороны, при преобразовании σ угол ADE переходит в угол $BD'E$, поэтому $\angle ADC \cong \angle BD'E$. Из этих двух соотношений следует, что $\angle ADC > \angle BCD$. ■

Из доказанного свойства, рассуждая методом от противного, приходим к выводу.

4°. Если у двупрямоугольника углы при верхнем основании конгруэнтны, то данный двупрямоугольник является четырехугольником Саккери. □

Исходя из свойств 3° и 4°, рассуждая от противного, убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

5°. Если у двупрямоугольника углы при верхнем основании не конгруэнтны, то боковые стороны не конгруэнтны друг другу и против большего угла лежит боковая сторона. □

При доказательстве свойства 2° мы обнаружили, что четырехугольник Саккери симметричен относительно серединного перпендикуляра отрезка AB . Отсюда непосредственно следует, что основания четырехугольника Саккери имеют общий перпендикуляр, поэтому согласно теореме [59.7] приходим к выводу.

6°. Основания четырехугольника Саккери являются расходящимися прямыми. При этом прямая, соединяющая середины оснований, перпендикулярна им обоим.

§ 61. Вырожденные треугольники

1. Свойства вырожденных треугольников. Пусть U_1V_1 и U_2V_2 — две параллельные прямые, а A и B — соответственно точки на этих прямых. Конфигурацию, состоящую из отрезка AB и двух параллельных лучей (AV_1) и (BV_2) , будем называть *вырожденным треугольником*. Точки A и B называются *собственными* или *конечными* вершинами треугольника, сторона AB — *отрезочной* стороной, а стороны (AV_1) и (BV_2) — *лучевыми* сторонами. Будем считать, что параллельные стороны (AV_1) и (BV_2) «пересекаются в третьей, бесконечно удаленной вершине V ». Очевидно, никакой реальной точки V на плоскости Лобачевского не существует, так как лучи (AV_1) и (BV_2) не пересекаются. Этим термином показываем, что $AV_1 \parallel BV_2$. Вырожденные треугольники будем обозначать через ABV ; при этом считаем, что первые две вершины являются конечными, а третья вершина бесконечно удаленная точка. Будем говорить, что «прямая a проходит через бесконечно удаленную вершину V », если она параллельна лучам (AV_1) и (BV_2) ¹. В противном случае будем считать, что прямая a не проходит через бесконечно удаленную вершину.

¹ Прямая a называется параллельной лучу (BV_1) , если на ней можно ввести направление так, чтобы направленная прямая a была параллельна направлению прямой BV_1 .



Рис. 170.

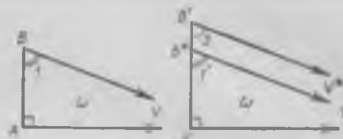


Рис. 171.

Ниже мы увидим, что вырожденные треугольники обладают многими свойствами обыкновенных треугольников. Введенная нами терминология удобна тем, что она позволяет аналогичные свойства обыкновенных и вырожденных треугольников формулировать в одних и тех же терминах.

Рассмотрим некоторые свойства вырожденных треугольников. Прежде всего отметим, что для треугольников имеет место предложение Паша.

Теорема [61.1]. Если прямая лежит в плоскости вырожденного треугольника, не проходит ни через одну из его вершин и пересекает одну из сторон треугольника, то она пересекает одну и не пересекает другую из двух остальных сторон. □

Доказательство этой теоремы опускаем. Читатель может его найти в книге [25], том 1, с. 188.

В ряде случаев, как например при формулировке следующей теоремы, полезно ввести соглашение: угол при бесконечно удаленной вершине вырожденного треугольника будем считать углом, мера которого равна нулю (нулевым углом).

Теорема [61.2] (о внешнем угле треугольника). Внешний угол при каждой вершине вырожденного треугольника больше любого внутреннего с ним не смежного угла.

Доказательство. Пусть ABV — данный вырожденный треугольник. Докажем, например, что внутренний угол при вершине A меньше внешнего угла при вершине B (рис. 170). Обозначим через ω полуплоскость треугольника с границей AB (см. I, § 56, п. 1). Рассмотрим точку M такую, что $A\hat{B}M$.

Докажем, что $\angle MBV > \angle MAV$. Для этой цели в полуплоскости ω построим луч (BB') так, чтобы $\angle MBV' \cong \angle MAV$.

Согласно следствию 1° теоремы [59.7] лучи (BB') и (BV) не совпадают. Из того же предложения следует, что луч (BB') не может лежать внутри угла ABV , так как $BV(B) \parallel AV$. Таким образом, согласно теореме [55.2], луч (BB') лежит внутри угла MBV , поэтому имеет место утверждение теоремы. ■

2. Признаки конгруэнтности вырожденных прямоугольных треугольников. Имеется аналогия между признаками конгруэнтности обыкновенных и вырожденных треугольников. Мы ограничимся рассмотрением признаков конгруэнтности прямоугольных вырожденных треугольников, так как только этот случай найдет применение в дальнейшем изложении.

Вырожденный треугольник называется прямоугольным, если один из углов при конечной вершине прямой. Очевидно, в силу теоремы [61.2] о внешнем угле треугольника у прямоугольного вырожденного треугольника угол при второй конечной вершине всегда острый.

Теорема [61.3]. Пусть ABV и $A'B'V'$ — вырожденные треугольники с прямыми углами при вершинах A и A' . Треугольники ABV и $A'B'V'$ конгруэнтны тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий: а) $[AB] \cong [A'B']$; б) $\angle B \cong \angle B'$.

Доказательство. Пусть ω и ω' — полуплоскости треугольников ABV и $A'B'V'$ соответственно с границами AV и $A'V'$ (рис. 171). Докажем теорему для каждого из случаев а) и б) в отдельности.

а) $[AB] \cong [A'B']$. Рассмотрим движение σ , переводящее репер $[A, (AV), \omega]$ в репер $[A', (A'V'), \omega']$ (см. 1, следствие 2 теоремы [29.8]). Так как при этом движении точка A переходит в точку A' и полуплоскость ω — в полуплоскость ω' , а, кроме того, перпендикулярные прямые переходят в перпендикулярные прямые, то луч $[AB]$ переходит в луч $[A'B']$. В силу конгруэнтности отрезков AB и $A'B'$ имеем: $\sigma(B) = B'$. Из теоремы [59.8] следует, что луч (BV) перейдет в луч $(B'V')$, поэтому $\triangle ABV$ совпадет с $\triangle A'B'V'$. Мы пришли к выводу, что $\triangle ABV \cong \triangle A'B'V'$.

б) $\angle B \cong \angle B'$. Если при этом $[AB] \cong [A'B']$, то согласно предыдущей части доказательства треугольники будут конгруэнтны, поэтому рассмотрим случай, когда $[AB] \not\cong [A'B']$.

Допустим, например, что $[AB] < [A'B']$. Рассмотрим движение, введенное нами при доказательстве первой части теоремы. При движении σ в данном случае точка B перейдет в некоторую точку B^* , лежащую между A' и B' , а луч (BV) — в луч (B^*V') , параллельный лучу $(B'V')$. Мы пришли в противоречие со следствием 1° теоремы [59.7], так как односторонние углы $A'B'V'$ и $A'B^*V'$ не могут быть конгруэнтными. ■

Рассмотрим еще одно свойство прямоугольных вырожденных треугольников.

Теорема [61.4]. Пусть ABV и $A'B'V'$ — два прямоугольных вырожденных треугольника. Если $[AB] < [A'B']$, то внутренний угол при вершине B первого треугольника больше внутреннего угла при вершине B' второго.

Доказательство. Рассмотрим движение σ , введенное нами при доказательстве предыдущей теоремы (см. рис. 171). Выше было показано, что при нашем предположении точка B переходит в точку B^* ($A'B^*B'$), а луч (BV) — в луч (B^*V') , параллельный $A'V'$. Рассмотрим $\triangle B^*B'V'$. Для этого треугольника $\angle 2$ является внутренним, $\angle 1' —$ внешним (см. рис. 171). Согласно теореме [61.2] $\angle 2 < \angle 1'$, с другой стороны, $\angle 1' \cong \angle 1$, поэтому $\angle 1 > \angle 2$. ■

§ 62. Функция Лобачевского

1. Угол параллельности. В этом параграфе будет установлено существование функциональной зависимости между отрезками и углами. Она вводится на основании следующего определения.

Определение 1. Пусть ABV — некоторый вырожденный треугольник¹ с прямым углом при вершине A . Угол ABV называется углом параллельности, соответствующим отрезку AB .

Легко видеть, что, каков бы ни был данный отрезок PQ , всегда существует угол параллельности, соответствующий этому отрезку.

В самом деле, рассмотрим направленную прямую U_1U_2 , проходящую через точку Q и перпендикулярную PQ , а через точку P проведем прямую V_1V_2 так, чтобы $V_1V_2 (P) \parallel U_1U_2 (Q)$ (рис. 172). При этом мы, очевидно, получим вырожденный прямоугольный треугольник PQU_2 с прямым углом при вершине Q . Согласно определению 1 $\angle QPV_2$ будет углом параллельности, соответствующим отрезку PQ .

Свойства вырожденных треугольников, рассмотренные в предыдущем параграфе, позволяют изучить свойства угла параллельности. Из теоремы [61.2] о внешнем угле треугольника немедленно следует:

1°. Угол параллельности, соответствующий любому отрезку, является острым углом. Из теоремы [61.3], а) вытекает:

2°. Если $[X_1Y_1] \cong [X_2Y_2]$, то угол параллельности, соответствующий отрезку X_1Y_1 , конгруэнтен углу параллельности, соответствующему отрезку X_2Y_2 .

Из теоремы [61.4] следует.

3°. Если $[X_1Y_1] > [X_2Y_2]$, то угол параллельности, соответствующий отрезку X_1Y_1 , меньше угла параллельности, соответствующего отрезку X_2Y_2 . Другими словами, чем больше отрезок, тем меньше угол параллельности.

2. Основная теорема.

Лемма [62.1]. Если AOB — острый угол, то существует хотя бы одна прямая, пересекающая луч (OA) под прямым углом и не пересекающая луч (OB) .

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Пусть любая прямая, пересекающая луч (OA) под прямым углом, пересекает луч (OB) . Возьмем на луче (OA) последовательность следующих друг за другом точек $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ так, чтобы $[OA_0] \cong [A_0A_1]$, $[A_1A_2] \cong [OA_1]$, $[A_2A_3] \cong [OA_2]$, ..., $[A_nA_{n+1}] \cong [OA_n]$ (рис. 173). Перпендикуляры, восстановленные в точках $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ согласно предположению пересекают луч (OB) в точках $B_0, B_1, \dots, B_n, \dots$.

¹ Напомним, что в предыдущем параграфе было введено следующее соглашение: если ABV — вырожденный треугольник, то A и B — конечные вершины, а V — бесконечно удаленная вершина.



Рис. 172.

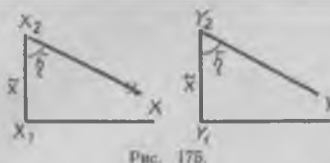


Рис. 175.

Построим вырожденный прямоугольный треугольник X_1X_2X так, чтобы отрезочная сторона этого треугольника совпала с этим отрезком (см. рис. 175). Отрезку X_1X_2 поставим в соответствие острый угол X_1X_2X . Из свойства 2° п. 1 следует, что если $\{X_1X_2\} \cong \{Y_1Y_2\}$,

то $\angle X_1X_2X \cong \angle Y_1Y_2Y$. Таким образом, мы получаем функцию, которая сохраняет конгруэнтность. Эту функцию будем обозначать так:

$\eta = \pi(x)$. Она называется функцией Лобачевского. Если в плоскости Лобачевского ввести измерение отрезков и углов (см. ниже, гл. XII), то этой функции будет соответствовать обычная скалярная функция от скалярного аргумента.

Из свойств углов параллельности, изложенных выше, автоматически следуют свойства функции Лобачевского.

1°. Значения функции Лобачевского являются острыми углами.

2°. Функция Лобачевского является убывающей функцией, т. е. если $x_2 > x_1$, то $\pi(x_2) < \pi(x_1)$.

Из теоремы [62.2] вытекает весьма важное свойство функции Лобачевского.

3°. Любой острый угол является значением функции Лобачевского.

Если в плоскости Лобачевского введено измерение отрезков и углов, то предыдущие свойства могут быть сформулированы в виде следующего предложения. Функция Лобачевского $\pi(x)$ является убывающей функцией, определенной на множестве всех неотрицательных чисел, которая принимает все значения, заключенные между 0 и $\frac{\pi}{2}$.

Н. И. Лобачевский получил аналитическое выражение для этой функции:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi(x)}{2} = e^{-\frac{x}{k}}, \quad (1)$$

где k — некоторое постоянное число.

Наличие функции Лобачевского, устанавливающей связь между углами и отрезками, указывает на существенное отличие геометрии Лобачевского от геометрии Евклида. На евклидовой плоскости нет такой функции, которая бы связывала отрезки с углами. Этим и объясняется то обстоятельство, что в евклидовой геометрии, имея естественную единицу измерения углов (например радиан), нам приходится специально хранить единицу измерения длин (этalon длины — метр), в то время как в геометрии Лобачевского в этом нет никакой необходимости. Так, имея естественную единицу измерения углов, можно условиться об установлении естественной единицы длины; например, можно за единицу длины принять отрезок, соответствующий углу параллельности $\frac{\pi}{2}$ (d — прямой угол).

§ 63. Взаимное расположение параллельных и расходящихся прямых. Основные кривые

В заключение рассмотрим в обзорном порядке ряд дальнейших фактов планиметрии Лобачевского.

1. Критерий расходящихся прямых. Докажем следующую важную теорему.

Теорема [63.1]. Для того чтобы две различные прямые a и b одной плоскости были расходящимися, необходимо и достаточно, чтобы они имели один и только один общий перпендикуляр.

Доказательство. Докажем только необходимость условия, так как достаточность нами уже доказана выше (теорема [59.7]). Пусть A_0 — произвольная точка прямой a , а H_0 — ее проекция на прямую b . Проведем прямые H_0H_1 и H_0H_2 так, чтобы $H_0H_1 \parallel A_2A_1$ и $H_0H_2 \parallel A_1A_2$ (рис. 176). Пусть ω_1 и ω_2 — полуплоскости с общей границей A_0H_0 и $\{H_0H_1\} \in \omega_1$, $\{H_0H_2\} \in \omega_2$ (относительно обозначений см. рис. 176). Заметим, что $\{H_0B_1\} \in \omega_1$, $\{H_0H_1\} \in \omega_1$ и $\{H_0B_1\} \neq \{H_0H_1\}$, так как a и b — расходящиеся прямые, а $H_0H_1 \parallel A_2A_1$. Тогда согласно теореме [55.2] один из этих лучей проходит внутри угла, образованного лучом $\{H_0A_0\}$ и другим лучом. Легко видеть, что таковым может быть только луч $\{H_0H_1\}$, так как в противном случае луч $\{H_0B_1\}$ должен пересечь луч $\{A_0A_1\}$.

Итак, $\{H_0H_1\}$ — внутренний луч прямого угла $B_1H_0A_0$. Отсюда следует, что $\angle B_1H_0H_1$ острый. Точно так же можно показать, что $\angle B_2H_0H_2$ острый. Обозначим эти углы φ_1 и φ_2 и построим отрезки параллельности ξ_1 и ξ_2 , соответствующие этим углам (см. теорему [62.2]). Отложив эти отрезки от точки H_0 соответственно на лучах $\{H_0B_1\}$ и $\{H_0B_2\}$, получаем две точки F_1 и F_2 . Проведем в этих точках перпендикуляры F_1F_1' и F_2F_2' к прямой b . По определению угла параллельности $F_1F_1' \parallel H_0H_1$ и $F_2F_2' \parallel H_0H_2$. В силу транзитивности параллельности будем иметь: $F_1F_1' \parallel A_2A_1$ и $F_2F_2' \parallel A_1A_2$. Таким образом, мы получаем конфигурацию, изображенную на рисунке 176 или 177.

Пусть C — середина отрезка F_1F_2 , а CD — перпендикуляр, опущенный на прямую a (рис. 177). Мы утверждаем, что CD является общим перпендикуляром данных прямых. В самом деле, построим прямые CC_1 и CC_2 так, чтобы $CC_1 \parallel A_2A_1$ и $CC_2 \parallel A_1A_2$.

Из построения видим, что $\angle DCC_1 = \pi(\angle CD)$, $\angle DCC_2 = \pi(\angle CD)$, поэтому $\angle DCC_1 \cong \angle DCC_2$. С другой стороны, из транзитивности параллельности следует, что $CC_1 \parallel F_1F_1'$ и $CC_2 \parallel F_2F_2'$, поэтому $\angle F_1CC_1 = \pi(\angle CF_1)$ и $\angle F_2CC_2 = \pi(\angle CF_2)$. Так как $\{CF_1\} \cong \{CF_2\}$, то согласно 62.1.2 $\angle F_1CC_1 \cong \angle F_2CC_2$. Из этих соотношений вытекает, что $\angle F_1CD \cong \angle F_2CD$. Так как эти углы смежные, то каждый из них является прямым. Итак, $CD \perp a$ и $CD \perp b$.

Легко понять, что две прямые a, b имеют единственный общий перпендикуляр. В противном случае мы получаем выпуклый

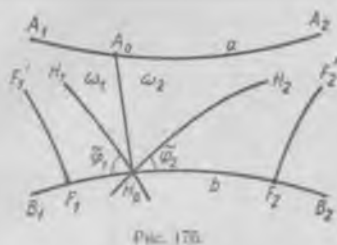


Рис. 176.

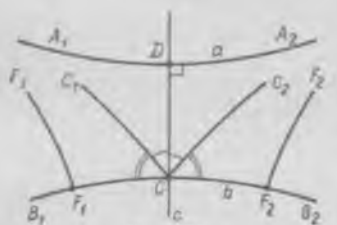


Рис. 177.

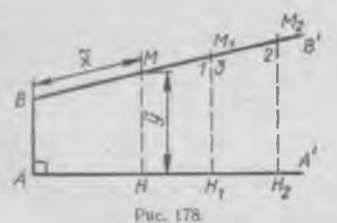


Рис. 178.

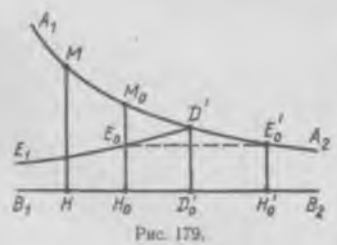


Рис. 179.

четыреугольник с четырьмя прямыми углами, что противоречит следствию теоремы [60.1]. ■

2. Взаимное расположение двух параллельных и расходящихся прямых.

Лемма [63.2]. Пусть лучи (AA') и (BB') , где $A \neq B$, расположены в одной полуплоскости с границей AB и, кроме того, $\angle BAA'$ прямой, а $\angle ABB'$ не острый (рис. 178). Если M — переменная точка луча (BB') , а H — проекция точки M на прямую AA' , то функция $\bar{y} = f(x)$, где $x = |BM|$, $y = |HM|$, является неограниченно возрастающей функцией. □

Доказательство этой леммы мы опускаем. Заметим, однако, что, используя рисунок 178 и применяя свойства 60.3.1 и 60.3.5 к четырехугольникам, изображенным на этом рисунке, легко обосновать первую часть утверждения леммы.

Из сформулированной выше леммы вытекает следующее утверждение.

Пусть a_1 и a_2 — две расходящиеся прямые, H_1H_2 — их общий перпендикуляр (см. [63.1]), h — один из лучей прямой a_1 , исходящий из точки H_1 , M — переменная точка луча h , а H — проекция этой точки на прямую a_2 . Тогда функция $\bar{y} = f(x)$ ($x \cong [H_1M]$, а $y \cong [MH]$) неограниченно возрастает. То есть для двух расходящихся прямых расстояние от точек одной из них до второй неограниченно возрастает при удалении точки от общего перпендикуляра.

Докажем аналогичную теорему для двух параллельных прямых.

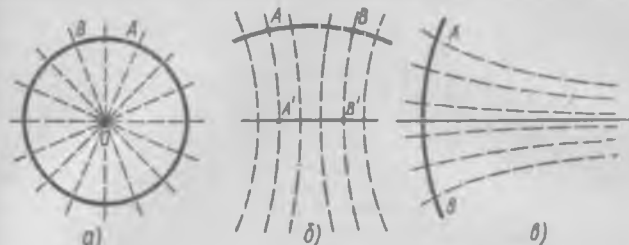


Рис. 180.

Теорема [63.3]. Пусть $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ и M — переменная точка на прямой A_1A_2 , а H — ее проекция на прямую B_1B_2 . Тогда отрезок MH неограниченно возрастает при перемещении точки M в сторону, противоположную параллельности, и стремится к нулю при перемещении точки M в сторону параллельности.

Доказательство. Пусть M_0, H_0 (рис. 179) — некоторое фиксированное положение точек M и H , тогда $\angle H_0M_0A_2 = \pi \setminus (M_0H_0)$, следовательно, он острый, а смежный с ним угол $H_0M_0A_1$ тупой. Из леммы [63.2] следует первая часть утверждения теоремы. Для доказательства второй части выполним следующие построения. На луче $[H_0M_0]$ от точки H_0 отложим заданный сколь угодно малый отрезок $[H_0E_0] = e$ (см. рис. 179) и построим прямую $E_0E_1 \parallel H_0B_1$. Эта прямая согласно теореме Паша [61.1] для вырожденного треугольника $H_0M_0A_2$ пересечет луч (M_0A_2) в некоторой точке D' . Пусть D'_0 — проекция точки D' на прямую B_1B_2 . Так как $\angle E_0D'D'_0 = \pi \setminus (D'_0D')$ и $\angle A_2D'D'_0 = \pi \setminus (D'D'_0)$, то $\angle E_0D'D'_0 = \angle A_2D'D'_0$. Поэтому если ввести в рассмотрение отражение σ от прямой $D'D'_0$, то точка $E'_0 = \sigma(E_0)$ будет принадлежать лучу $(D'A_2)$, а точка $H'_0 = \sigma(H_0)$ — лучу (D_0B_2) . Очевидно, $E_0H_0 \perp B_1B_2$. Таким образом, на прямой A_1A_2 существует такая точка E_0 , что отрезок $[H_0E_0]$ конгруэнтен наперед заданному сколь угодно малому отрезку l . ■

3. Основные кривые на плоскости Лобачевского. На плоскости Лобачевского в отличие от плоскости Евклида (см. 1, § 17, п. 3) рассматривают три вида пучков прямых, а именно: а) пучок пересекающихся прямых, проходящих через одну точку (центр пучка) (см. рис. 180, а); б) пучок расходящихся прямых — совокупность всех прямых, перпендикулярных к некоторой прямой (оси пучка) (см. рис. 180, б); в) пучок параллельных прямых — совокупность прямых, состоящая из фиксированной направленной прямой и всех направленных прямых, параллельных ей (см. рис. 180, в).

Точку плоскости, на которой задан пучок, назовем обыкновенной, если она не совпадает с центром пучка в случае пучка

пересекающихся прямых и не лежит на оси пучка в случае расходящихся прямых. Две обыкновенные точки называются соответствующими друг другу относительно пучка, если они расположены симметрично относительно биссектора двух прямых пучка, проходящих через данные точки. Нетрудно показать, что если две точки соответствуют третьей относительно данного пучка, то они соответствуют друг другу относительно того же пучка.

Введем следующее основное определение: траекторией пучка ω , порожденной обыкновенной точкой A , называется множество, состоящее из точки A и всех точек плоскости, соответствующих этой точке относительно данного пучка (обозначение: $\omega(A)$). Прямые пучка называются осями траектории.

Из этого определения легко прийти к следующему выводу: если $B \in \omega(A)$, то $\omega(A)$ и $\omega(B)$ совпадают.

В соответствии с тремя видами пучков рассматривают три основных вида кривых на плоскости Лобачевского:

Окружность — траектория пучка пересекающихся прямых (см. рис. 180, а). Центр пучка называется центром окружности. Можно показать, что это определение совпадает с обычным определением окружности.

Эквидистанта — траектория пучка расходящихся прямых; ось пучка называется базой эквидистанты (см. рис. 180, б).

Орицикл (предельная линия) — траектория пучка параллельных прямых (см. рис. 180, в).

Эти три кривые имеют ряд общих свойств, а именно: каждая кривая симметрична относительно любой своей оси; любая прямая плоскости имеет не более двух общих точек с данной кривой; касательная к кривой в любой ее точке перпендикулярна к оси, проходящей через эту точку, и др.

Отметим очень важную особенность эквидистанты, которая основана на геометрическом смысле соответствующих точек в случае пучка расходящихся прямых: эквидистанта есть множество всех точек, равноотстоящих от базы эквидистанты и расположенных в одной полуплоскости, определяемой базой. Нам хорошо известно, что в евклидовой плоскости «эквидистанта с базой a » есть не что иное, как прямая, параллельная a .

В геометрии Лобачевского особую важную роль играет предельная линия. Пользуясь предельной линией, можно вывести все тригонометрические соотношения для треугольников плоскости Лобачевского, а также получить явное выражение для функции Лобачевского (см. § 62, (1)). Эти вопросы выходят за рамки настоящего курса (см., например, [36]).

§ 64. Измерение отрезков и углов

Измерение величин (длин, площадей и объемов) играет в геометрии основную роль; ниже мы дадим ему для простейших случаев теоретическое обоснование. Если базироваться на аксиоматике Гильберта, то предварительно необходимо ввести понятие отношения отрезков.

1. Отношение двух отрезков. Пусть нам даны два отрезка; отложим их (аксиома III.1, § 56) на одном и том же луче, исходящем из точки O . Мы получим отрезки OA и OB . Используя их, мы сможем разбить всевозможные упорядоченные пары (m, n) натуральных чисел m и n на два класса; один из этих классов мы будем называть нижним, а другой — верхним. Пара (m, n) попадает в нижний класс K , если

$$m \cdot |OA| \leq n \cdot |OB|, \quad (1)$$

и в верхний класс K' , если

$$m \cdot |OA| > n \cdot |OB| \quad (2)$$

(см. § 56, п. 3, определение 4).

С парой натуральных чисел (m, n) связывается, как известно, положительное рациональное число $p = \frac{m}{n}$. Каждому положительному рациональному числу p отвечает бесчисленное множество дробей, а следовательно, и бесчисленное множество пар натуральных чисел. Если число p равно несократимой дроби $\frac{m}{n}$, то в силу известных из арифметики свойств дробей все указанные пары есть пары вида (km, kn) , где $k = 1, 2, 3, \dots$. Но если для пары (m, n) имеет место неравенство (1), то и при любом натуральном k

$$km \cdot |OA| \leq kn \cdot |OB|,$$

если же для нее справедливо (2), то и

$$km \cdot |OA| > kn \cdot |OB|$$

(для любого натурального k). Мы видим, что все пары (km, kn) , которым соответствует одно и то же рациональное число p , попадают всегда в один и тот же класс. Таким образом, неравенствами (1) и (2) устанавливается разбиение положительных рациональных чисел на два класса K, K' . Отнесем в нижний класс K еще число 0 и все отрицательные рациональные числа; покажем, что теперь получилось дедекиндово сечение $K | K'$ всего множества рациональных чисел¹.

¹ На понятии дедекиндова сечения строится теория действительных чисел по Дедекунду (см. [49], т. I, с. 18—26). При любом другом подходе к понятию действительного числа x класс K есть множество всех рациональных чисел, меньших числа x , а класс K' — множество чисел, больших x . Очевидно, что заданием множеств K и K' число x однозначно определяется.

В самом деле, по самому построению сечения каждое рациональное число попадает в один и только в один из классов. Далее, без труда убеждаемся, что оба класса не пусты: нижний класс K содержит число 0; по аксиоме Архимеда IV.1 (§ 57, п. 1) существует натуральное число m_0 , для которого

$$m_0 \cdot [OA] > [OB],$$

вследствие чего в верхнем классе окажется число $\frac{m_0}{1}$. Наконец, как легко видеть, всякое число p нижнего класса меньше любого числа p' верхнего класса. Это очевидно, если $p \leq 0$; если же обе дроби p и p' положительные, то мы можем привести их к одному знаменателю: $p = \frac{m}{n}$, $p' = \frac{m'}{n}$. Для чисел m, n будет верно неравенство (1), а для m', n —

$$m' \cdot [OA] > n \cdot [OB]. \quad (3)$$

Из (1) и (3) следует:

$$m \cdot [OA] < m' \cdot [OA]; \quad m < m': \quad \frac{m}{n} < \frac{m'}{n}; \quad p < p'.$$

Отметим, что по той же аксиоме Архимеда найдется такое натуральное число n_0 , что

$$[OA] < n_0 \cdot [OB];$$

следовательно, в нижнем классе имеется положительное число $\frac{1}{n_0}$.

Определенное выше дедекиндово сечение $K | K'$ задает положительное действительное число x ($x > 0$, так как $\frac{1}{n_0} \in K$), называемое отношением отрезка OB к отрезку OA :

$$x = \frac{[OB]}{[OA]}. \quad (4)$$

Отрезок OB именуется при этом произведением отрезка OA на число x :

$$[OB] = x \cdot [OA] = [OA] \cdot x. \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что определение произведения отрезка на натуральное число n (§ 56, п. 2, определение 3) находится в согласии с приведенным выше определением.

Если в (4) число x рационально, то отрезки OA и OB соизмеримы; в этом и только в этом случае в соотношении (1) возможен знак равенства. При этом если

$$m_0 \cdot [OA] = n_0 \cdot [OB],$$

то

$$\frac{[OB]}{[OA]} = \frac{m_0}{n_0}.$$

Если же в (4) число x иррационально, то отрезки OA и OB несоизмеримы.

Данное выше определение отношения двух отрезков принадлежит Евдоксу («Начала» Евклида, книга V); ему придана лишь современная формулировка, использующая понятие действительного числа, чуждого древним грекам.

2. Свойства отношения отрезков.

Теорема [64.1]. Отношения отрезков обладают такими двумя свойствами:

$$\frac{[OB] + [OC]}{[OA]} = \frac{[OB]}{[OA]} + \frac{[OC]}{[OA]} \quad (6)$$

$$\frac{[OC]}{[OB]} \cdot \frac{[OB]}{[OA]} = \frac{[OC]}{[OA]}. \quad (7)$$

Доказательство. Пусть

$$\frac{[OB]}{[OA]} = x, \quad \frac{[OC]}{[OA]} = y.$$

Если $\frac{m}{n} \leq x$, а $\frac{m'}{n} \leq y$, т. е. дробь $\frac{m}{n}$ по отношению к числу x принадлежит к нижнему классу, а $\frac{m'}{n}$ — к нижнему классу числа y (не нарушая общности, можем считать обе дроби приведенными к одному знаменателю), то по определению п. 1

$$m \cdot [OA] \leq n \cdot [OB] \text{ и } m' \cdot [OA] \leq n \cdot [OC], \quad (8)$$

вследствие чего

$$(m + m') \cdot [OA] \leq n \cdot ([OB] + [OC]). \quad (9)$$

Неравенство (9) показывает, что для отношения $\frac{[OB] + [OC]}{[OA]}$ число $\frac{m + m'}{n}$ принадлежит к нижнему классу. Аналогично убеждаемся, что $\frac{m + m'}{n}$ окажется в верхнем классе для отношения $\frac{[OB] + [OC]}{[OA]}$, если числа $\frac{m}{n}$ и $\frac{m'}{n}$ находятся в верхних классах чисел x и y . Вспомня определение суммы двух действительных чисел, видим, что¹

$$\frac{[OB] + [OC]}{[OA]} = x + y;$$

равенство (6) доказано.

Пусть далее

$$\frac{[OC]}{[OB]} = z \text{ и } \frac{m}{n} \leq x, \quad \frac{m'}{n} \leq z. \text{ Тогда} \quad m'' \cdot [OB] \leq n'' \cdot [OC]. \quad (10)$$

Из (10) следует:

$$m''n \cdot [OB] \leq nn'' \cdot [OC], \quad (11)$$

¹ См. [49], т. 1, с. 32. При других подходах к понятию действительного числа это равенство обращается в очевидно справедливое предложение.

а первое из неравенств (8) даст:

$$mm'' \cdot |OA| \leq m''n \cdot |OB|. \quad (12)$$

Сопоставляя (11) и (12), видим, что

$$mm'' \cdot |OA| \leq nn'' \cdot |OC|,$$

откуда заключаем, что дробь $\frac{mm''}{nn''}$ принадлежит к нижнему классу числа y . Проведя такое же рассуждение для верхних классов и опираясь на определение произведения положительных действительных чисел¹, убеждаемся, что

$$zx = y;$$

последнее же равенство есть равенство (7). Теорема [64.1] доказана. ■

Как нетрудно понять, из теоремы [64.1] вытекает такое

С л е д с т в и е. *Справедливы соотношения*

$$(x + y) \cdot |OA| = x|OA| + y \cdot |OA|, \quad x(y \cdot |OA|) = xy \cdot |OA|,$$

где x, y — произвольные положительные действительные числа, а $|OA|$ — любой отрезок.

Необходимо обратить внимание на то, что при доказательстве теоремы [64.1] и следствия этой теоремы из аксиом непрерывности используется только аксиома Архимеда IV.1.

3. Измерение отрезков. Измерение отрезков считается установленным, если каждому отрезку отнесено действительное число, называемое длиной (или мерой) отрезка, и притом так, что выполнены следующие четыре требования:

- а) длина любого отрезка положительна;
- б) конгруэнтные отрезки имеют равные длины;
- в) длина суммы двух отрезков равна сумме длин слагаемых отрезков;
- г) некоторый наперед заданный отрезок OE имеет длину, равную 1. Отрезок OE называется единицей длины.

Длину отрезка $|OA|$ будем обозначать, как всегда, так: $|OA|$. Из требований а), б), в) вытекает:

Л е м м а [64.2]. *Большой отрезок имеет большую длину.*

В самом деле, если $|OB| > |OA|$, то $|OB| = |OA| + |AB|$ (предполагается, что оба отрезка отложены на одном и том же луче, исходящем из точки O , см. § 56, п. 2 и 3). В силу требования в) $|OB| = |OA| + |AB|$ и поскольку $|AB| > 0$ (см. а), то $|OB| > |OA|$. ■

Т е о р е м а [64.3]. *Измерение отрезков возможно, и после выбора единицы длины $|OE|$ определяется однозначно; длина отрезка OA равна при этом отношению $\frac{|OA|}{|OE|}$.*

Доказательство. Если мы положим

$$|OA| = \frac{|OA|}{|OE|},$$

то по теореме [64.1] требование γ) окажется выполненным; требования а), б) будут выполнены в силу определения отношения двух отрезков (п. 1); выполнение δ) очевидно, поскольку $\frac{|OE|}{|OE|} = 1$. Таким образом, возможность измерения отрезков установлена.

Обратно, пусть установлено измерение отрезков, удовлетворяющее требованиям а), б), γ), δ); тогда в силу γ) длина отрезка $m \cdot |OE| = m$ (поскольку $m|OE|$ есть сумма m слагаемых, равных $|OE|$). Если

$$\frac{|OA|}{|OE|} = x$$

и рациональное число $\frac{m}{n}$ принадлежит к нижнему классу по отношению к числу x , то (п. 1)

$$m \cdot |OE| \leq n \cdot |OA|,$$

и по лемме [64.2] длина отрезка $m \cdot |OE|$ не превосходит длины отрезка $n \cdot |OA|$, так что

$$m \leq n \cdot |OA|,$$

так что

$$\frac{m}{n} \leq |OA|.$$

Мы видим, что число $\frac{m}{n}$ по отношению к $|OA|$ находится также в нижнем классе. Аналогично убедимся в совпадении верхних классов для чисел x и $|OA|$. Следовательно,

$$|OA| = x = \frac{|OA|}{|OE|},$$

что и доказывает единственность измерения отрезков, если зафиксирована единица длины. ■

Т е о р е м а [64.4]. *Отношение двух отрезков равно отношению их длин.*

Доказательство. Пусть отрезок OE принят за единицу длины. По теореме [64.1] (см. (7))

$$\frac{|OB|}{|OA|} \cdot \frac{|OA|}{|OE|} = \frac{|OB|}{|OE|},$$

т. е. ввиду теоремы [64.3]

$$\frac{|OB|}{|OA|} \cdot |OA| = |OB|,$$

вследствие чего

$$\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|OB|}{|OA|}. \quad \blacksquare$$

Теорема [64.4] сводит отношение отрезков к отношению чисел. Теория измерения отрезков опирается на понятие отношения отрезков и, следовательно, как указано было выше (п. 2), использует из аксиом непрерывности только аксиому Архимеда IV.1.

¹ См. [49], т. 1, с. 35.

4. Произведение отрезка на произвольное положительное действительное число. Докажем следующее важное предложение.

Теорема [64.5]. Существует произведение любого отрезка на произвольное положительное действительное число x .

Доказательство. Отрезок OA примем за единицу длины.

Рассмотрим сначала тот частный случай, когда x есть двоичная дробь $p = \frac{m}{2^k}$, где m и k — натуральные числа. Применив теорему о середине отрезка (теорема [56.4]) k раз, убедимся в существовании отрезка $\frac{|OA|}{2^k}$; следовательно, существует и $|OC| = m \cdot \frac{|OA|}{2^k}$. Длина отрезка OC равна $\frac{m}{2^k} = p$, так что $\frac{|OC|}{|OA|} = p$ и $|OC| = |OA| \cdot p$.

Пусть теперь x — любое положительное действительное число. На произвольном луче h , исходящем из точки O , отложим отрезок OA и установим на прямой a луча h порядок следования точек, в котором точка O предшествует точкам луча h (§ 47, п. 3). Затем разобьем точки прямой a на два класса следующим образом: к I классу отнесем те точки $M \in h$, для которых $|OM| \leq x$, точку O и все точки луча h^* , дополнительного к h , а ко II классу — все остальные точки прямой a , т. е. те точки $M \in h$, для которых $|OM| > x$.

Существуют двоичные дроби, как меньшие числа x , так и большие его; следовательно, по установленному в начале доказательства оба класса, I и II, не пусты. Если точка M луча h принадлежит I классу, а точка N содержится во II классе, то $|OM| < x < |ON|$, $|OM| < |ON|$, вследствие чего точка M предшествует точке N ; то же будет, очевидно, справедливо, если $M \in h^*$ или совпадает с точкой O . Таким образом, все требования принципа Дедекинда (§ 57, п. 2) выполнены. Поэтому существует граничная между классами точка K ; длину отрезка OK обозначим через y .

Как известно, множество двоичных дробей всюду плотно на множестве действительных чисел. В силу этого если $x < y$, то найдется такая двоичная дробь p , что

$$x < p < y.$$

Пусть теперь P есть та точка луча h , для которой $|OP| = p$. Так как $x < p$, то точка P попадет во II класс, а вследствие неравенства $p < y$ точка P предшествует точке K и должна поэтому принадлежать I классу. Полученное противоречие показывает, что x не может быть меньше y . Аналогично убедимся в невозможности неравенства $x > y$. Следовательно, $|OK| = y = x$, $|OK| = x \cdot |OA|$. Теорема [64.5] доказана. ■

Теорема [64.3] устанавливает, что любой отрезок имеет длину; согласно теореме [64.5] всякое положительное действительное число есть длина некоторого отрезка.

Отметим, что доказательство теоремы [64.5] существенно опирается (через принцип Дедекинда) на аксиому Кантора IV.2 (§ 57, п. 1).

Применив теорему [64.5] к числу $x = \frac{1}{n}$, видим, что справедливо такое следствие:

Следствие. Для любого отрезка существует его n -я часть (n — натуральное число).

Известное из школьного курса геометрии построение n -й части отрезка при $n > 2$ требует применения аксиомы параллельности.

5. Измерение углов. Опираясь на теорему [55.1], мы можем доказать и для углов принципы Архимеда, Кантора и Дедекинда. Поэтому теорию измерения углов можно обосновать так же, как и теорию измерения отрезков в п. 1—4; то положительное число, которое относится при этом каждому углу, называется его *мерой*. На таком пути встречается только одно затруднение, связанное с тем, что умножение угла на натуральное число не всегда возможно. Чтобы его устранить, мы поступим так: при определении отношения $\frac{\beta}{\alpha}$ двух углов β и α мы пару (m, n) натуральных чисел отнесем в нижний класс K , если

$$\frac{m}{2^k} \alpha < \frac{n}{2^k} \beta,$$

где натуральное число k выбрано так, чтобы 2^k было больше каждого из чисел m и n , поскольку в силу теоремы о биссектрисе угла (с. 287) умножение угла на двоичную дробь, меньшую единицы, всегда возможно (ср. начало п. 4); аналогично поступим и для верхнего класса. Все дальнейшие доказательства потребуют лишь незначительных изменений, связанных с указанной переменной в определении отношения.

6. Измерение отрезков и углов на основе аксиоматики Вейля. Если строить евклидову геометрию на базе аксиоматики Вейля, то теория измерения отрезков значительно упрощается, поскольку мы сразу можем отнести любому отрезку AB положительное действительное число $|AB|$ — расстояние между точками A и B . Тем самым будет установлена возможность измерения отрезков, так как требования α), β) и δ) п. 3 окажутся непосредственно выполненными (см. § 51, п. 2), а выполнение требования γ) будет следовать из теоремы [51.3]. После этого мы можем определить отношение двух отрезков как отношение их длин и доказать единственность измерения отрезков так же, как это сделано в п. 3 (теорема [64.3]). Необходимость доказывать теорему [64.5] отпадает, поскольку она будет вытекать из определений 1, 2 и 3 в § 51.

Теория измерения углов на основе аксиоматики Вейля строится совершенно так же, как и на основе аксиоматики Гильберта (п. 5).

§ 65. Измерение многоугольников в евклидовой геометрии

1. Вводные соображения. Теорию измерения многоугольников в евклидовой геометрии мы построим на тех же принципах, что и теорию измерения отрезков (см. § 64). При этом мы будем рассматривать только плоские простые многоугольники.

Многоугольник именуется *простым*, если все его вершины расположены в одной плоскости. Многоугольник называется *простым*, если никакие две его стороны не имеют общих точек, ни одна

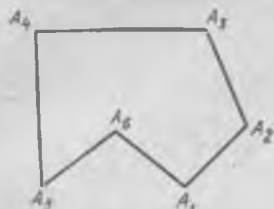


Рис. 181.

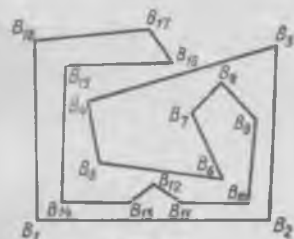


Рис. 182.

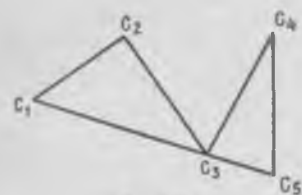


Рис. 183.

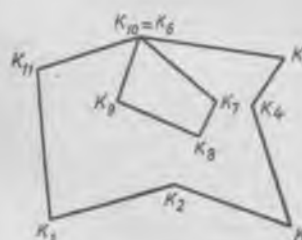


Рис. 184.

из его вершин не лежит на его стороне и каждая вершина служит концом лишь для двух сторон (см. I, § 55, п.5). При таком определении стороной $A_i A_{i+1}$ многоугольника считается *открытый отрезок*, так что вершины A_i и A_{i+1} стороне не принадлежат. На рисунках 181 и 182 показаны простые многоугольники; многоугольники, изображенные на рисунках 183, 184 и 185, не являются простыми.

2. Постановка задачи; характеристика ориентированного многоугольника. Установим прежде всего возможность измерения многоугольников, т. е. покажем, что каждому простому многоугольнику можно отнести действительное число, называемое его площадью, и притом так, чтобы были выполнены следующие четыре требования (см. также § 64, п. 3):

а) площадь любого многоугольника положительна;

б) конгруэнтные многоугольники имеют равные площади.

Согласно этому требованию площадь многоугольника есть инвариант движения.

в) площадь суммы P двух многоугольников равна сумме их площадей.

На рисунке 186 многоугольник P есть сумма многоугольников P_1 и P_2 ; точное определение суммы двух многоугольников дается ниже (§ 65, п. 3).

г) площадь квадрата, сторона которого есть единица длины, равна 1.

Далее вводим понятия ориентированного многоугольника и его характеристики.

Многоугольник называется *ориентированным*, если указан порядок его вершин; при этом начинать можно, конечно, с любой вершины. Ориентированный многоугольник мы будем обозначать одной буквой со стрелкой наверху; таким образом, мы

будем писать:

$$\vec{P} = A_1 A_2 \dots A_n = A_2 A_3 \dots A_n A_1 = A_3 A_4 \dots \dots A_n A_1 A_2 = \dots$$

Для всякого простого многоугольника, очевидно, возможны две (и только две) противоположные друг другу ориентации.

Пусть в плоскости ориентированного n -угольника $\vec{P} = A_1 A_2 \dots A_n$ выбрана произвольная система декартовых прямоугольных координат; тогда его вершины получат координаты: $A_i (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Характеристикой ориентированного многоугольника $\vec{P}$ (относительно данной системы координат) мы назовем число

$$|\vec{P}| = |A_1 A_2 \dots A_n| = (A_1 A_2) + (A_2 A_3) + \dots + (A_{n-1} A_n) + (A_n A_1), \quad (1)$$

где

$$(A_i A_j) = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Легко видеть, что $(A_i A_j) = - (A_j A_i)$; поэтому при замене ориентации многоугольника на противоположную его характеристика меняет только знак.

Пример 1. Характеристика треугольника $A_1 A_2 A_3$, где $A_i (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, будет равна:

$$|A_1 A_2 A_3| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

или

$$|A_1 A_2 A_3| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Из формулы (3) следует, что

$$(A_i A_j) = [O A_i A_j] \quad (4)$$

(O — начало координат).

Систему координат можно выбрать так, чтобы вершины треугольника получили такие координаты:

$$A_1 (0; 0), A_2 (b; 0), A_3 (x_3, h)$$

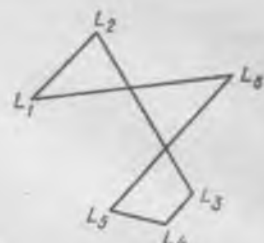


Рис. 185.

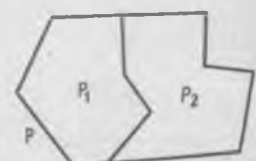


Рис. 186.

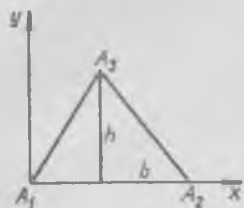


Рис. 187.

($b > 0, h > 0$, рис. 187); тогда $(A_1, A_2) = (A_2, A_1) = 0$ и

$$[A_1, A_2, A_3] = (A_2, A_3) = \begin{vmatrix} b & 0 \\ x_3 & h \end{vmatrix}.$$

т. е.

$$[A_1, A_2, A_3] = bh, \quad (5)$$

где b — основание, а h — высота треугольника.

Пример 2. Пусть дан квадрат $A_1A_2A_3A_4$, сторона которого равна единице длины. При подходящем выборе системы декартовых координат вершины квадрата будут иметь координаты $A_1(0; 0)$, $A_2(1; 0)$, $A_3(1; 1)$, $A_4(0; 1)$, и его характеристика (см. (1)) такова:

$$[A_1, A_2, A_3, A_4] = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix};$$

итак,

$$[A_1, A_2, A_3, A_4] = 2. \quad (6)$$

3. Возможность и единственность измерения многоугольников.

Можно доказать следующую теорему:

Теорема [65.1]. Если за площадь каждого плоского простого многоугольника принять половину абсолютной величины его характеристики, то будут выполнены все четыре требования, перечисленные в п. 2. □

Выполнение требования б) следует из результата примера 2 (п. 2) и инвариантности абсолютной величины характеристики при преобразовании декартовых координат. Отметим также, что при этом площадь треугольника равна половине произведения его основания на соответствующую высоту.

Доказательство теоремы [65.1], которое ввиду его сложности здесь не приводится, читатель найдет в статье Г. Б. Гуревича «Измерение площадей многоугольников в евклидовой геометрии»¹. В этой статье до доказательства теоремы [65.1] устанавливается неизменность абсолютной величины характеристики многоугольника при преобразованиях декартовой системы координат, уточняются понятия ориентации плоскости, левой и правой стороны прямой, внутренних и внешних точек плоского простого многоугольника и дается следующее точное определение суммы простых многоугольников.

Пусть K и L — две различные граничные точки многоугольника $P = A_1A_2...A_n$ (т. е. точки, лежащие на одной из его сторон или же совпадающие с одной из его вершин, рис. 188), а $KC_1C_2...C_pL$ — простая ломаная², все точки которой — внутренние для многоугольника P .

¹ «Математическое просвещение», вып. 5, 1960, стр. 161—177.

² Определение простой ломаной вполне аналогично определению простого многоугольника.

Многоугольник $P = A_1A_2...A_n$ называется суммой простых многоугольников:

$$P_1 = A_1KC_1C_2...C_pLA_{s+1}A_{s+2}... \\ ... A_{n-1}A_n$$

и

$$P_2 = KC_1C_2...C_pLA_{s+1}A_{s+2}... A_sA_1,$$

что записывается так:

$$P = P_1 + P_2.$$

Характеристика многоугольника

$\bar{P} = A_1A_2...A_n$ может быть определена и иначе, без применения координат, если использовать результат (5) примера 1 в п. 2 и формулу (4). Выберем в плоскости многоугольника P произвольную точку O ; для каждого из треугольников OA_1A_2 , OA_2A_3 , ..., $OA_{n-1}A_n$, OA_nA_1 найдем произведение A_iA_{i+1} на соответствующую высоту и возьмем его со знаком «плюс», если точка O лежит слева от стороны A_iA_{i+1} , и со знаком «минус» — в противоположном случае. Характеристикой многоугольника $\bar{P}$ называется сумма всех полученных таким образом n чисел. Из доказанной в статье инвариантности характеристики при переносе начала координат следует, что определенная таким образом характеристика не зависит от выбора точки O ¹.

В статье доказывается и теорема Жордана о разбиении плоскости простой замкнутой ломаной.

¹ В текст упомянутой статьи следует внести некоторое добавление: «В случае рисунка 189 (рис. 18 статьи) необходимо сдвинуть сторону $A_{i-1}A_i$ вверх, а стороны $A_{s+1}A_s$, A_sA_{s+1} и $A_{s+1}A_{s+2}$ заменить ломаной $A_{s-1}A_sA_{s+1}A_{s+2}$, показанной пунктиром на рисунке 188. Если указанные сдвиги сделать достаточно малыми, то при этом многоугольник P останется простым, число его вершин, а также количество пересечений прямой a с $\bar{P}$ и их характер не изменятся. Аналогично поступаем в остальных возможных случаях».

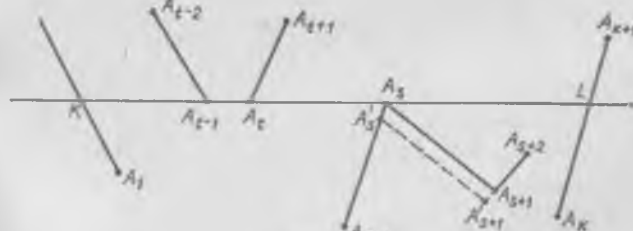


Рис. 188.

Теорема [65.1] устанавливает возможность измерения площадей простых многоугольников и вполне заменяет собой поэтому предпосылки Евклида в теории площадей: «если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны» (аксиома 2), «и если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны» (аксиома 3), «и совмещающиеся друг с другом равны между собой» (аксиома 7), «и целое больше части» (аксиома 8). Этот результат был получен Гильбертом (1899)¹, однако у Гильберта в вопросах, касающихся взаимного расположения фигур, допускаются при этом ссылки на наглядность. В цитированном выше доказательстве таких ссылок нет; оно является вполне аксиоматическим.

Теория площадей, данная в «Началах» Евклида и изучаемая в школе, сохраняет свое значение: она показывает, что, считая требования α), β), γ), δ) (§ 65, п. 2) выполненными, мы получим для вычисления площадей обычные, общеизвестные правила, согласующиеся с вытекающими из теоремы [65.1] (например, правило для площади треугольника). Иначе говоря, теория Евклида устанавливает единственность измерения многоугольников и вместе с теоремой [65.1] полностью исчерпывает соответствующую теорию.

Отметим еще без доказательства следующую интересную теорему Бойаи-Гервина.

Теорема [65.2]. Если два плоских простых многоугольника имеют одинаковую площадь, то они равноставлены, т. е. каждый из них можно разбить на одно и то же число многоугольников, соответственно конгруэнтных друг другу. □

Доказательство теоремы [65.2] читатель может найти, например, в книге [27], с. 158—164.

§ 66. Измерение многогранников в евклидовой геометрии

Постановка задачи измерения многогранников — такая же, как и для отрезков (§ 64) и для многоугольников (§ 65, п. 2). Однако здесь при доказательстве возможности измерения многогранников мы наталкиваемся на значительные трудности. Впервые указанная проблема была решена отечественным математиком С. О. Шагуновским (1903).

Единственность измерения многогранников (при заданной единице объема) устанавливается известными результатами Евклида (XII книга «Начал»); от них современное изложение этого вопроса в школе отличается не очень существенно. При этом, как известно, уже разыскание объема пирамиды производится с использованием понятия предела. Естественно возникает вопрос, является ли это обстоятельство случайным или же оно неизбежно. Указанная проблема была поставлена Гильбертом (1900)². Ее решение последовало вско-

¹ Гильберт Д. [18], § 20, 21 (с. 137—144). До Гильберта аналогичный результат был получен С. О. Шагуновским (1894); см.: Каган В. Ф. Основания геометрии, т. II (1907), с. 545—547.

² Третья среди 23 проблем, предложенных в знаменитом докладе Д. Гильберта на Международном математическом конгрессе в Париже.

ре: в 1900 и 1901 гг. немецкий математик М. Ден опубликовал две работы¹, в которых доказал следующую теорему.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ суть меры двугранных углов многогранника P , а $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ — меры двугранных углов многогранника P' . Для того чтобы многогранники P и P' были равноставлены или равнодополнимы², необходимо, чтобы существовали такие натуральные числа $A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_n$ и такое целое (положительное, отрицательное или равное нулю) число k , что

$$A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \dots + A_m\alpha_m - (B_1\beta_1 + B_2\beta_2 + \dots + B_n\beta_n) = 2kd,$$

где d — мера прямого угла.

Доказательство Дена очень сложно; оно было значительно упрощено В. Ф. Каганом в 1903 г. Поэтому приведенная выше теорема носит название теоремы Дена — Кагана.

Существуют равновеликие многогранники, для которых условие (1) не выполнено; таковыми будут, например, правильный тетраэдр и имеющий одинаковый с ним объем прямоугольный параллелепипед. Таким образом, из теоремы Дена — Кагана следует, что существуют равновеликие многогранники, которые не равноставлены и не равнодополнимы. Вследствие этого применение теории пределов (в той или иной форме) при измерении объема пирамиды является неизбежным.

Доказательство В. Ф. Кагана теоремы Дена — Кагана читатель найдет в книге [27] (с. 161—187). Там же указаны (с. 191—194) более новые результаты, полученные в том же направлении.

Подробное изложение теории измерения многогранников дано также в брошюре [15].

¹ M. Dehn. Über raumgleiche Polyeder, «Göttinger Nachrichten», 1900, Über dem Rauminhalt, «Mathem. Annalen», 55, 1901.

² Два многогранника равнодополнимы, если их можно дополнить до равноставленных соответственно конгруэнтными многогранниками.

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ АКСИОМАТИКИ.
НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ

Настоящая глава посвящена изучению общих вопросов аксиоматики на примерах геометрических аксиом, а также построению неевклидовых геометрий на базе аксиом Вейля. Здесь в отличие от предыдущих разделов сами аксиомы становятся объектами изучения.

§ 67. Требования, предъявляемые к системе аксиом.
Непротиворечивость

1. Три основные задачи исследования аксиоматики. Принято считать, что система геометрических аксиом должна удовлетворять следующим основным требованиям: а) совместности (или непротиворечивости); б) независимости (или минимальности); в) полноты.

В § 44, п. 4 было отмечено, что наиболее существенным из этих требований является требование непротиворечивости. Напомним читателю, что система аксиом называется непротиворечивой, если любые два логических следствия этой системы не противоречат друг другу. Как мы уже знаем, непротиворечивость системы аксиом доказывается подбором интерпретации данной системы. В § 44 мы доказали, что система аксиом Вейля трехмерной евклидовой геометрии непротиворечива, если непротиворечива арифметика действительных чисел. В настоящем параграфе, пользуясь тем же методом, покажем, что рассмотренные нами выше аксиоматики непротиворечивы. При этом аксиоматикой геометрии, базирующейся на аксиомах $A_1, A_2, \dots, A_n$, мы называем совокупность основных понятий и всех аксиом, которым они удовлетворяют (обозначение: $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$).

2. Непротиворечивость первой группы аксиом Гильберта. Доказательство непротиворечивости различных систем аксиом мы начнем с рассмотрения наиболее простого примера, а именно с доказательства непротиворечивости первой группы аксиом Гильберта. Покажем, что первая группа аксиом Гильберта непротиворечива. Доказательство этого предложения сводится к построению интерпретации следующей аксиоматики:

$$\{I\} = \{I.1; I.2; I.3, \dots, I.8\}. \quad (1)$$

Возьмем некоторое множество, состоящее из четырех элементов, которые обозначим через a, b, c, d . Введем далее следующие соглашения¹: g -точкой назовем каждый элемент этого множества, т. е. a, b, c, d ; g -прямой назовем все подмножества, состоящие из двух элементов, т. е. $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$, а g -плоскостью — все

¹ Во избежание путаницы здесь и в дальнейшем основные понятия геометрии по Гильберту будем называть g -понятиями (g -точка, g -прямая и т. д.), основные понятия геометрии Вейля — v -понятиями (v -точка, v -прямая и т. д.).

подмножества, состоящие из трех элементов: $\{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}$. Будем говорить, что g -точка принадлежит g -прямой (или g -плоскости), если соответствующий элемент нашего множества принадлежит соответствующему подмножеству. Например, g -точка a принадлежит g -прямой $\{a, c\}$ и не принадлежит g -прямой $\{b, d\}$; g -точка b принадлежит g -плоскости $\{a, b, d\}$ и т. д. Легко убедиться в том, что при этих соглашениях выполняются все восемь аксиом первой группы Гильберта. Проверка всех аксиом проводится очень просто, поэтому предоставляем ее читателю.

Наличие интерпретации для первой группы аксиом говорит о том, что аксиоматика (1) непротиворечива. Построенная выше интерпретация позволяет также сделать целый ряд выводов о самой геометрии аксиоматики (1). В самом деле, пусть, например, поставлен вопрос: можно ли, пользуясь аксиомами (1), доказать, что в пространстве существует бесчисленное множество точек? Построенная выше интерпретация позволяет дать отрицательный ответ на поставленный выше вопрос; более того, можно утверждать, что, пользуясь первой группой аксиом, невозможно доказать наличие более четырех точек в геометрии аксиоматики (1). В самом деле, если бы можно было доказать, что в геометрии, определяемой аксиоматикой (1), существует более четырех точек, то эта теорема должна была бы выполняться в любой интерпретации аксиоматики этой геометрии, в том числе и в построенной выше.

3. Непротиворечивость проективной геометрии по Вейлю. Пользуясь тем же приемом, покажем, что аксиоматика проективной геометрии, на базе которой строилась эта дисциплина в первом разряде нашего курса, непротиворечива. Точнее, мы собираемся доказать, что аксиоматика четырехмерного линейного векторного пространства V_4 :

$$\{V1, V2, V3, V4, V5, V6, V7, D_1, D_2\} \quad (2)$$

и аксиоматика трехмерного проективного пространства P_3 , связанного с пространством V_4 :

$$\{P1, P2, P3, P4\}, \quad (3)$$

непротиворечивы (см. § 44, п. 2 и § 1, п. 2).

1°. Непротиворечивость аксиоматики векторного пространства V_4 . Покажем, что аксиоматика (2) непротиворечива, если непротиворечива арифметика чисел. Основными объектами этой аксиоматики являются «векторы» и основными соотношениями — «сумма векторов» и «умножение вектора на число». Введем соглашения, аналогичные тем, которые были введены в § 44, п. 5. Вектором назовем любую матрицу-столбец, состоящую из четырех действительных чисел; сумму векторов и умножение вектора на число введем в точном соответствии с понятием сложения матриц и умножения вектора на число:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \alpha_3 + \beta_3 \\ \alpha_4 + \beta_4 \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \alpha_1 \\ \lambda \alpha_2 \\ \lambda \alpha_3 \\ \lambda \alpha_4 \end{pmatrix}.$$

Проверка аксиом системы (2) почти тривиальна, если заметить, что роль нуль-вектора (аксиома V3) выполняет матрица-столбец, состоящая из нулей, а роль четырех линейно независимых векторов (аксиома D1) выполняют следующие четыре вектора:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2°. Непротиворечивость аксиоматики проективного пространства P_3 . Построим аналитическую интерпретацию аксиоматики (3). Для этого введем следующее обозначение: множество всех четверок чисел вида: $k\xi_1, k\xi_2, k\xi_3, k\xi_4$, где k — любое действительное число, а $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ — фиксированные числа, причем $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\} \neq (0, 0, 0, 0)$, обозначим через $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}$. Таким образом, $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}$ есть не что иное, как бесчисленное множество четверок чисел, пропорциональных друг другу. Запись $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\} = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$ означает, что эти множества совпадают, т. е. что числа $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ и $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ пропорциональны.

Основными понятиями аксиоматики (3), как мы знаем, являются точки и соотношение инцидентности между точками и векторами пространства V_4 . Введем следующие соглашения, определяющие эти понятия.

1°. p -точкой назовем множество $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}$, где $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ — любые действительные числа, одновременно не равные нулю. При этом две точки $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}$ и $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$ совпадают тогда и только тогда, когда $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\} = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$.

2°. Будем говорить, что вектор $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$ принадлежит точке $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}$, если $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}$. Другими словами, если числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ пропорциональны числам ξ_1, ξ_2, ξ_3 и ξ_4 , легко убедиться в том, что при этих соглашениях все аксиомы $P1, P2, P3, P4$, сформулированные в п. 2, § 1, выполняются.

Построенная нами интерпретация позволяет утверждать, что аксиоматика проективного пространства непротиворечива, если непротиворечива арифметика действительных чисел.

4. Непротиворечивость планиметрии Лобачевского. Теперь построим интерпретацию аксиом планиметрии Лобачевского, т. е. аксиоматики (см. § 55—58)

(I. 1—3; II. 1—4; III. 1—5; IV. 1, IV. 2; VЛ), (4)

и тем самым докажем, что планиметрия Лобачевского непротиворечива. Построенная ниже интерпретация носит название и н т е р п р е т а ц и К л е й н а.

Возьмем на проективной плоскости некоторую овальную линию второго порядка Γ (см. § 21); l -точкой назовем всякую внутреннюю

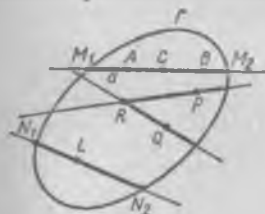


Рис. 190.

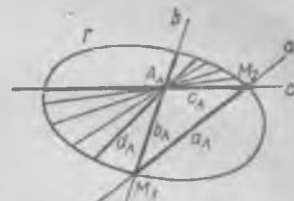


Рис. 191.

точку овальной линии Γ (§ 21, п. 1); l -прямой будем называть множество всех внутренних точек линии Γ , лежащих на любой прямой, пересекающей линию Γ в двух точках (см. рис. 190). Понятие «лежать между» введем следующим образом: пусть A, B, C — три l -точки, лежащие на l -прямой a (см. рис. 190), а M_1 и M_2 — точки пересечения проективной прямой a с кривой Γ . Точку C будем считать лежащей между A и B , если $M_1C \div AB$, где M_1 — одна из точек пересечения прямой a с линией Γ . Пользуясь соотношением 8.4.6, легко показать, что это определение не зависит от выбора точки пересечения прямой a с линией Γ . Для обоснования этого утверждения достаточно записать соотношение 8.4.6 для пяти точек A, B, C, M_1, M_2 :

$$(ABCM_1)(ABM_1M_2)(ABM_2C) = 1.$$

Так как A и B — внутренние точки линии Γ , то $(ABM_1M_2) > 0$, поэтому, как следует из предыдущего соотношения, $(ABCM_1)$ и (ABM_2C) имеют один и тот же знак.

В этой интерпретации l -лучи интерпретируются как проективные отрезки. В самом деле, пусть l — произвольная проективная прямая, пересекающая линию Γ в точках N_1 и N_2 , а L — некоторая внутренняя точка, лежащая на этой прямой. Тогда l -лучами, исходящими из точки L , будут внутренние точки следующих двух проективных отрезков: LN_1/N_2 и LN_2/N_1 (см. рис. 190). В соответствии с этим l -угол интерпретируется как пара l -лучей, исходящих из одной точки и не принадлежащих одной прямой. На рисунке 190 изображен угол PRQ .

Понятия конгруэнтности отрезков и углов интерпретируются несколько сложнее. Рассмотрим множество G всех проективных преобразований плоскости, автоморфных относительно линии Γ (см. § 23, п. 1), т. е. те и только те преобразования, которые точки линии Γ переводят в точки той же линии. Нам известно, что это множество образует группу. При этих преобразованиях каждая l -точка в силу геометрического смысла этого понятия переходит в l -точку, поэтому если U — множество всех l -точек, то каждое преобразование из множества G индуцирует некоторое преобразование множества точек U . Это преобразование будем называть l -д в и ж е н и е м. Для того чтобы убедиться в том, что существует бесконечное множество l -движений, можно воспользоваться теоремой [23.4]. В самом деле, возьмем на кривой

Г три произвольные точки A_0, B_0, C и рассмотрим точку пересечения D касательных в точках A_0, B_0 . Рассмотрим далее другую тройку точек линии Γ : A_0, B_0, C' и точку пересечения D' касательных в точках A_0, B_0 . Если рассмотреть проективное преобразование, которое точки A_0, B_0, C, D переводит соответственно в A_0, B_0, C', D' (существование этого преобразования обеспечивается теоремой [15.1]), то из теоремы [23.4] сразу следует, что это преобразование является автоморфизмом относительно линии Γ .

Теперь введем следующее соглашение: два отрезка $\{AB\}$ и $\{CD\}$ назовем конгруэнтными, если существует такое л-движение, которое отрезок $\{AB\}$ переводит в отрезок $\{CD\}$ (т.е. точку A в точку C , точку B в точку D или точку A в точку D и точку B в точку C). Аналогично определяется конгруэнтность углов.

Можно показать, что при введенных соглашениях выполняются все аксиомы системы (4). Отдельные аксиомы, например аксиомы I.1—I.3, проверяются очень просто, а проверка некоторых (в особенности аксиом конгруэнтности) требует кропотливых рассуждений. Читателя, интересующегося этими вопросами, отсылаем к статье М. В. Васильевой «Интерпретация геометрии Лобачевского в синтетическом изложении» (см. [58], № 243), где дана проверка аксиом и рассмотрен ряд интересных вопросов этой интерпретации.

Очень просто и эффектно проверяется аксиома о параллельных Лобачевского. В самом деле, пусть даны л-прямая a_l и л-точка $A_l \notin a_l$ (см. рис. 191). Из геометрических соображений ясно, что через A_l проходит бесчисленное множество л-прямых, не пересекающих a_l . В этой интерпретации параллельными в системе Лобачевского будут, очевидно, те л-прямые, которые принадлежат проективным прямым, пересекающимся на линии Γ . На рисунке 191 такими прямыми будут прямые a_l и b_l , a_l и c_l . Расходящимися прямыми будут, очевидно, такие две л-прямые, которые лежат на проективных прямых, пересекающихся во внешней точке по отношению к Γ . На рисунке 191 прямые d_l и e_l являются расходящимися.

На интерпретации Клейна можно наглядно проиллюстрировать многие факты геометрии Лобачевского (см. упомянутую выше статью М. В. Васильевой).

Существование интерпретации Клейна дает возможность утверждать, что геометрия Лобачевского непротиворечива, если непротиворечива проективная геометрия. Используя выводы предыдущего пункта, мы приходим к следующему выводу: аксиоматика Лобачевского непротиворечива, если непротиворечива арифметика.

5. Понятие эквивалентности двух аксиоматик; непротиворечивость аксиоматики Гильберта. Существует другой способ доказательства непротиворечивости систем аксиом, основанный на понятии эквивалентности двух аксиоматик. Рассмотрим этот вопрос в обзорном порядке. Будем говорить, что в геометриях, построенных соответственно на аксиоматиках $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ и $\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$, основные понятия согласованы друг с другом, если в каждой из данных гео-

метрий сформулированы предложения, определяющие основные понятия другой геометрии. При этом, очевидно, мы не исключаем случая, когда некоторые или даже все понятия одной геометрии являются соответствующими основными понятиями другой геометрии. Две аксиоматики $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ и $\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ будем называть эквивалентными, если существует такое согласование основных понятий этих аксиоматик, при котором любая аксиома или теорема каждой геометрии является аксиомой или теоремой другой геометрии. Для установления эквивалентности двух аксиоматик достаточно убедиться в том, что любая аксиома каждой из аксиоматик является истинным предложением в геометрии другой аксиоматики.

Можно показать, что аксиоматики Вейля и Гильберта евклидовой геометрии эквивалентны. Для этого прежде всего необходимо установить согласование основных понятий этих геометрий. В геометрии Вейля г-понятиями будем называть соответствующие в-понятия, т.е. г-точкой называется в-точка, г-прямой — в-прямая и т.д. В геометрии Гильберта в-точкой называется г-точка, а в-вектором — свободный г-вектор. Остальные в-понятия, т.е. сложение в-векторов, умножение в-вектора на число и т.д., вводятся в соответствии с обычными определениями (см. [I, § 1, п. 7]; [I, § 2, п. 1]; [I, § 6, п. 3]). Далее необходимо показать, что каждая аксиома любой из геометрий Вейля или Гильберта является аксиомой или теоремой другой геометрии. Эту проверку мы предоставляем выполнить читателю самостоятельно, отметив, что в главах IX и X, а также в [I, гл. I] можно найти все предложения и теоремы, необходимые для этой цели.

Совершенно очевидным является следующее утверждение: если две аксиоматики эквивалентны и если доказано, что одна из них непротиворечива, то вторая аксиоматика также непротиворечива. Отсюда, а также из теоремы [44.1] мы приходим к следующей фундаментальной теореме.

Т е о р е м а [67.1]. Аксиоматика Гильберта евклидовой геометрии непротиворечива, если непротиворечива арифметика.

6. Непротиворечивость системы аксиом Колмогорова. Аналогично предыдущему легко показать, что система аксиом, принятая в школьном курсе геометрии, непротиворечива. Для простоты рассмотрим систему аксиом планиметрии, приведенную в учебнике «Геометрия 8», глава XI (к — система).

$$\{I_1 — I_3, II_1 — II_3, III_1 — III_4, IV, V\} \quad (5)$$

Сначала покажем, что основные понятия к-геометрии могут быть определены в геометрии Вейля. В геометрии Вейля к-точкой будем называть любую в-точку, а к-прямой — множество всех точек любой в-прямой. Под к-расстояниями будем понимать к-расстояния. При этих соглашениях, пользуясь теоремами и предложениями, доказанными в главе IX, легко показать, что все аксиомы системы (5) являются истинными утверждениями в геометрии Вейля. Это утверждение для аксиом $I_1 — I_3$ непосредственно следует из определения I, § 46 и теорем [46.2], [46.3.1], а для аксиом $II_1 — II_3$ — из свойств расстояний, изложенных

в п. 2, § 51. Читатель легко может убедиться в том, что остальные аксиомы к-системы также являются истинными предложениями в геометрии Вейля.

Теперь никакого труда не представляет обоснование следующего важного утверждения: *система аксиом (5) непротиворечива, если непротиворечива аксиоматика Вейля*. В самом деле, так как все аксиомы системы (5) являются истинными предложениями в геометрии Вейля, и мы предполагаем, что эта геометрия непротиворечива, то, очевидно, любые два логических следствия из системы (5) не противоречат друг другу. Из теоремы [67.1] и эквивалентности систем аксиом Вейля и Гильберта получаем фундаментальный результат:

Теорема [67.2]. Система аксиом (5) школьного курса планиметрии непротиворечива, если непротиворечива арифметика.

§ 68. Независимость и полнота системы аксиом

Выше было отмечено, что всякая геометрическая система аксиом должна удовлетворять трем требованиям: непротиворечивости, независимости и полноты. В предыдущем параграфе мы подробно изучили требование непротиворечивости. Данный параграф посвящен двум остальным требованиям.

1. Требование независимости системы аксиом. Требование независимости заключается в следующем: непротиворечивая система аксиом $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется *независимой* (минимальной), если каждая аксиома этой системы не является логическим следствием остальных аксиом. Иными словами, система является независимой, если все требования, сформулированные в аксиомах, являются существенными. Независимая система не допускает исключения каких-либо ее требований с сохранением того же объема следствий из нее.

Пусть $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ — аксиоматика данной геометрии. Для доказательства, например, независимости аксиомы A_n от аксиом $A_1, \dots, A_{n-1}$ следует построить *новую* аксиоматику $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, \bar{A}_n$, где $\bar{A}_n$ есть отрицание A_n , и доказать ее непротиворечивость. В самом деле, если A_n следует из аксиом $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$, то оно следует также из аксиом $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, \bar{A}_n$, т. е. в этой аксиоматике предложение A_n может быть доказано, но тогда построенная аксиоматика будет противоречива. В качестве примера рассмотрим систему (1) предыдущего параграфа, т. е. первую группу аксиом Гильберта. Покажем, например, что аксиома I,1 не зависит от остальных аксиом. Для этой цели докажем непротиворечивость аксиоматики

$$\text{I. } \bar{1}, \text{ I. } 2, \dots, \text{ I. } 8 \quad (1)$$

путем подбора интерпретации. Легко заметить, что если несколько «исправить» интерпретацию, данную в п. 2, § 67, то можно построить интерпретацию указанной выше системы аксиом (1). Это исправление будет заключаться в следующем. Исключим прямую $\{a, b\}$ из числа основных объектов, а остальные основные объекты — точки, прямые

и плоскости и отношения принадлежности сохраним без изменения. Легко убедиться в том, что для построенной таким образом интерпретации выполнены все аксиомы системы (1). Аксиома I,1 формулируется так: существует какая-либо пара точек, которым не принадлежит ни одна прямая. Такими точками в нашей интерпретации будут г-точки a и b , так как в числе прямых не содержится прямая, проходящая через эти две точки. Пользуясь этим приемом, можно доказать независимость других аксиом первой группы от остальных аксиом.

2. Примеры доказательства независимости отдельных аксиом Вейля.

Пример 1. Показать, что в системе аксиом E_2 каждая из аксиом $D1$ и $D2$ не зависит от остальных аксиом (см. п. 2, § 44).

Сначала покажем, что аксиома $D1$ не зависит от остальных аксиом, т. е. что система

$$\{V1 - V7, \bar{D1}, D2, E1 - E5\} \quad (2)$$

совместна. Несколько видоизменяя аналитическую интерпретацию пространства E_2 , данную в § 44, п. 5, построим интерпретацию новой системы. Вектором назовем любую матрицу-столбец вида $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$,

где α_1, α_2 — любые действительные числа. Сумму векторов, произведение вектора на число и скалярное произведение двух векторов введем по аналогии с соглашениями 44.5.2, 44.5.3 и 44.5.4. Скалярным произведением векторов $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ установим ненулевым вектором $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, назовем число $\frac{\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2}{u_1^2 + u_2^2}$. При этих соглашениях все аксиомы системы (2) выполняются. Выполнение аксиом $V1 - V7, D2, E1 - E5$ очевидно, а аксиома $\bar{D1}$ выполняется в силу того, что в нашей интерпретации не имеет места предложение $D1$, ибо любые три вектора, как легко понять, линейно зависимы.

Совершенно аналогично можно показать, что аксиома $D2$ не зависит от остальных аксиом системы E_2 . Для этого достаточно построить интерпретацию аксиоматики

$$\{V1 - V7, D1, \bar{D2}, E1 - E5\}. \quad (3)$$

Для того чтобы доказать непротиворечивость системы (3), можно воспользоваться интерпретацией системы аксиом V_4 (см. § 67, п. 3, 1°). К введенным там соглашениям добавим следующее: скалярным произведением двух векторов $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix}$, установленным ненулевым век-

тором $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$, назовем число $\frac{\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 + \alpha_4 \beta_4}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2}$. При этих согла-

шениях, очевидно, будут выполнены все аксиомы системы E_4 , а следовательно, все аксиомы системы (3).

Пример 2. Доказать, что в системе аксиом евклидовой геометрии по Вейлю аксиомы $T2$ и $T3$ не зависят от остальных аксиом.

Для решения поставленной задачи достаточно построить интерпретации двух следующих систем аксиом:

$$\{VI-7, D1, D2, E1-E5, T1, \bar{T2}, T3\};$$

$$\{VI-7, D1, D2, E1-E5, T1, T2, \bar{T3}\}.$$

Здесь чертой сверху обозначено отрицание соответствующего предложения без черты. Ниже даны модели для каждой из этих систем аксиом. Идея построения этих моделей заключается в следующем. За основу принимаем аналитическую интерпретацию, рассмотренную в § 44, п. 5. Соглашения

$$44.5.1, 44.5.2, 44.5.3 \text{ и } 44.5.4, \quad (4)$$

определяющие аналитическую модель пространства E_3 , оставляем без изменения, а соглашения 44.5.5 и 44.5.6 заменяем другими с таким расчетом, чтобы были выполнены соответствующие аксиомы.

Независимость аксиомы $T2$. В дополнение к соглашениям (4) примем следующее.

а) Точкой назовем матрицу вида $(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4)$, где $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ — произвольные действительные числа. При этом точки $(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4)$ и $(\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4)$ совпадают тогда и только тогда, когда $\xi_1 = \eta_1, \xi_2 = \eta_2, \xi_3 = \eta_3, \xi_4 = \eta_4$.

б) Будем говорить, что упорядоченная пара точек $(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4)$, $(\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4)$ и вектор $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ принадлежат друг другу, если $\eta_1 - \xi_1 = \alpha_1, \eta_2 - \xi_2 = \alpha_2, \eta_3 - \xi_3 = \alpha_3$.

В этой интерпретации будут, очевидно, выполнены все аксиомы $VI-7, D1, D2, E1-E5$, так как, по существу, мы оставили без изменения интерпретацию аксиоматики E_3 , данную в п. 5, § 44. Аксиомы $T1$ и $T3$ также выполняются. Однако легко видеть, что аксиома $T2$ не выполняется, так как в предыдущих соотношениях, характеризующих принадлежность упорядоченной пары точек и вектора, числа ξ_4, η_4 не фигурируют, поэтому они могут быть выбраны произвольно.

Независимость аксиомы $T3$. В дополнение к соглашениям 44.5.1. — 44.5.5 примем следующее соглашение: будем гово-

рить, что упорядоченная пара точек $(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$, $(\eta_1 \eta_2 \eta_3)$ и вектор $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ принадлежат друг другу, если $\eta_1 + \xi_1 = \alpha_1, \eta_2 + \xi_2 = \alpha_2, \eta_3 + \xi_3 = \alpha_3$.

Легко видеть, что при этой интерпретации выполняются все аксиомы Вейля за исключением аксиомы $T3$.

3. Независимость аксиомы параллельности V от остальных аксиом Гильберта. В предыдущем параграфе мы показали, что планиметрия Лобачевского непротиворечива (§ 67, п. 4). Система аксиом планиметрии Лобачевского, очевидно, совпадает со следующей: I.1—I.3; II.1—II.4, III.1—III.5, IV.1, IV.2, V. Из непротиворечивости этой системы аксиом следует, что аксиома параллельности V не зависит от остальных планиметрических аксиом Гильберта. Таким образом, нами дано решение проблемы V постулата Евклида для планиметрии. Для полного решения этой проблемы следует доказать непротиворечивость аксиоматики геометрии Лобачевского для трехмерного пространства. Этот вопрос будет рассмотрен в § 71.

4. Общие замечания о проблемах независимости. Требование независимости или минимальности не столь безусловно, как требование непротиворечивости; к нему обычно стремятся, но в тех случаях, когда это сопровождается большими усложнениями, от него иногда отказываются. Иногда от требования минимальности умышленно отказываются для того, чтобы облегчить изложение, особенно в руководствах, рассчитанных для начинающих. Например, в книге Д. И. Перепелкина [37] изложение ведется строго, однако система аксиом, принятая там, заведомо не удовлетворяет требованию независимости.

Но в некоторых случаях возникают принципиальные трудности в решении проблемы независимости. Так обстоит дело в аксиоматике Гильберта. Нельзя говорить о независимости некоторых аксиом Гильберта потому, что от их содержания зависит ряд других аксиом. Так, бессмысленно ставить вопрос о независимости аксиомы Паша от всех остальных аксиом, так как для самой формулировки, например, аксиом конгруэнтности, мы должны иметь понятия луча и полуплоскости, а эти понятия вводятся на основании аксиомы Паша. Поэтому если мы исключим из рассмотрения аксиому Паша, то некоторые аксиомы III группы не могут быть сформулированы. Отсюда следует, что для аксиоматики Гильберта проблема минимальности не может быть решена до конца.

5. Проблема полноты. Полнота системы аксиом Вейля. Для того чтобы разъяснить требование полноты для системы аксиом, напомним читателю понятие изоморфизма двух интерпретаций, введенное в § 44, п. 3. Две интерпретации называются изоморфными, если между объектами этих интерпретаций можно установить такое взаимно однозначное соответствие, которое сохраняет структуру пространства, т. е. если, например, точке A первой интерпретации соответствует точка A' второй, а плоскости α первой интерпретации — плоскость α' второй и если A лежит в α , то A' лежит в α' ; или если точкам A, B, C первой интерпретации соответствуют точки A', B', C' второй и если B лежит между A и C, то B' лежит между A' и C'.

Требование полноты можно сформулировать так: система аксиом называется полной, если любые две ее интерпретации изоморфны.

Смысл этого требования заключается в том, что для полной системы аксиом различные интерпретации отличаются лишь конкретным содержанием, вкладываемым в основные понятия.

Надо отметить, что в математике часто приходится иметь дело с неполной системой аксиом. В качестве примера можно привести систему аксиом теории групп. Система четырех групповых аксиом не является полной, так как можно указать хотя бы две интерпретации этой системы, которые не изоморфны. В самом деле, совокупность всех рациональных чисел относительно сложения образует группу. Совокупность всех действительных чисел относительно сложения также образует группу. Между тем нам хорошо известно, что не может существовать изоморфизма между этими интерпретациями хотя бы потому, что множества действительных и рациональных чисел имеют различную мощность.

Другим примером неполной системы аксиом может служить, например, первая группа аксиом Гильберта I.1—I.8, так как она допускает различные не изоморфные друг другу интерпретации. Например, интерпретация, построенная нами в п. 2, § 67, содержит конечное число точек, прямых и плоскостей; с другой стороны, как мы знаем, существуют интерпретации той же системы аксиом, содержащие бесконечное множество точек, прямых и плоскостей.

Примером полной системы аксиом является аксиоматика евклидовой геометрии по Вейлю. Для доказательства этого утверждения предварительно заметим, что, пользуясь выводами главы IX, в пространстве TE_3 можно ввести в рассмотрение прямоугольную декартову систему координат. Точку O и три взаимно ортогональных вектора i, j, k назовем системой координат пространства TE_3 . Координатами точки M пространства назовем координаты вектора OM . Таким образом, каждой точке M пространства ставятся в соответствие три числа, причем это соответствие между точками и упорядоченными тройками чисел будет взаимно однозначным. Далее, если точки A и B имеют соответственно координаты (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) , то легко показать, что вектор $\overline{AB}$ будет иметь своими координатами числа:

$$b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3.$$

Теперь легко показать, что любая интерпретация аксиоматики пространства TE_3 изоморфна аналитической интерпретации системы аксиом евклидовой геометрии по Вейлю (см. доказательство теоремы [44.1]). В самом деле, пусть Σ — некоторая произвольная интерпретация данной аксиоматики. Введем в этой интерпретации прямоугольную декартову систему координат и каждой точке и каждому вектору поставим в соответствие их координаты. Тем самым основным объектом (точкам и векторами) интерпретации мы поставили в соответствие основные объекты аналитической интерпретации. Более того, из правил действия над векторами и из сформулированного выше правила определения координат вектора по координатам его концов следует, что это соответствие является изоморфизмом. Таким образом, мы показали, что любая интерпретация системы аксиом евклидовой геометрии по Вейлю изоморфна аналитической интерпретации. А так как понятие изоморфизма обладает свойством транзитивности, то тем самым доказано, что любые две интерпретации аксиом евклидовой геометрии по Вей-

лю изоморфны друг другу. Это и означает, что система аксиом евклидовой геометрии по Вейлю является полной.

Пользуясь тем же приемом, можно показать, что система аксиом Гильберта также является полной системой аксиом.

§ 69. Сферическая и эллиптическая геометрии в схеме Вейля

Настоящий и следующие два параграфа посвящены построению неевклидовых геометрий по Вейлю. Здесь мы существенно используем схему, принятую нами при построении проективной геометрии, поэтому, прежде чем приступить к изучению этого материала, рекомендуем читателю вернуться к § 1 настоящей книги и восстановить в памяти все основные положения, принятые нами при построении проективной геометрии, а также аксиоматику этого пространства.

Здесь мы ограничиваемся построением двумерных неевклидовых геометрий. Это ограничение не является существенным, так как основные принципы, изложенные здесь, без особого труда могут быть обобщены на случай трехмерных неевклидовых геометрий.

I. Система аксиом неевклидовых геометрий. Для построения любой неевклидовой геометрии (сферической, эллиптической или гиперболической) мы будем использовать единую схему, которая уже применялась нами при построении проективной геометрии (см. § 1, п. 2).

Пусть Ω_2 — некоторое трехмерное векторное пространство (линейное векторное пространство V_3 , евклидово векторное пространство E_3 , псевдоевклидово векторное пространство E_3^* и т. д.). Введем понятие неевклидовой плоскости Ω_2 , связанной с векторным пространством Ω_2 . Основными объектами плоскости Ω_2 являются точки, которые, как обычно, обозначаются заглавными буквами латинского алфавита. Мы считаем, что между точками плоскости Ω_2 и ненулевыми векторами пространства Ω_2 существует определенное отношение, которое выражается словом «инцидентность» и обозначается знаком $\times$. Далее формулируются аксиомы, определяющие свойства этих понятий. Содержание аксиом для всех неевклидовых геометрий, по существу, одно и то же и заключается в следующем.

I. Каков бы ни был ненулевой вектор a пространства Ω_2 , существует по крайней мере одна точка A такая, что $a \times A$.

II. Какова бы ни была точка A , существует по крайней мере один ненулевой вектор a пространства Ω_2 , удовлетворяющий условию: $A \times a$.

III. Пусть $a \times A$ и $b \times B$. Если векторы a и b не коллинеарны (в случае сферической геометрии не сонаправлены), то A и B не совпадают.

IV. Пусть $a \times A$, $b \times B$. Если точки A и B не совпадают, то векторы a и b не коллинеарны (в случае сферической геометрии не сонаправлены).

Совокупность всех точек, которые вместе с векторами пространства Ω_2 удовлетворяют перечисленным выше аксиомам I—IV, называется: а) проективной плоскостью, связанной с

векторным пространством $\bar{\Omega}_2$, если $\bar{\Omega}_2$ — линейное векторное трехмерное пространство V_3 ;

б) эллиптической (или сферической) плоскостью, связанной с векторным пространством $\bar{\Omega}_3$, если $\bar{\Omega}_3$ есть трехмерное евклидово пространство E_3 ;

в) гиперболической плоскостью, или плоскостью Лобачевского, связанной с векторным пространством $\bar{\Omega}_3$, если $\bar{\Omega}_3$ — псевдоевклидово векторное пространство E_3^+ . В этом случае в аксиомах I, II предполагается, что вектор a гиперболический¹.

Следует подчеркнуть, что здесь так же, как в проективной плоскости P_2 , к числу основных объектов пространства мы относим только точки. Векторы пространства $\bar{\Omega}_2$ играют вспомогательную роль и не фигурируют как объекты той или иной геометрии.

2. Аксиоматика сферической двумерной геометрии. Приведенные выше аксиомы I—IV являются аксиомами сферической двумерной геометрии C_2 , если

а) $\bar{\Omega}_2$ является трехмерным векторным евклидовым пространством E_3 ;

б) в аксиомах III—IV термин «не коллинеарные» заменить термином «не сонаправленные».

Таким образом, аксиомы геометрии C_2 формулируются следующим образом:

C1. Для любого ненулевого вектора a , $\exists A$ ($A \times a$).

C2. $\nexists A$, $\exists a$ ($a \neq 0$, $a \times A$).

C3. Если $A \times a$, $B \times b$ и a , b не сонаправлены, то A и B не совпадают.

C4. Если $A \times a$, $B \times b$ и $A \neq B$, то a и b не сонаправлены.

Из этих аксиом следует, что существует взаимно однозначное соответствие между точками плоскости C_2 и направлениями векторного пространства E_3 , с которым связана плоскость C_2 .

Заметим, что отличие проективной плоскости P_2 от сферической плоскости C_2 сказывается в двух существенных моментах.

а) Векторное пространство $\bar{\Omega}_2$, связанное с P_2 , является линейным векторным пространством, в то время как в случае сферической плоскости оно является евклидовым.

б) Множество векторов, инцидентных одной точке пространства P_2 , образует одномерное векторное пространство без нулевого вектора, а в C_2 — некоторое направление.

Две точки A и B называются диаметрально противоположными, если направления, с которыми они связаны, различны и принадлежат одному и тому же одномерному векторному подпространству. Понятие прямой вводится точно так же, как и в проективной плоскости (см. § 2, п. 1): множество всех точек плоскости C_2 ,

¹ Понятие псевдоевклидова векторного пространства введено в следующем параграфе. Там же введено понятие гиперболических векторов.

каждая из которых инцидентна по крайней мере одному ненулевому вектору подпространства $\bar{\Omega}_2$, называется прямой, связанной с подпространством $\bar{\Omega}_2$.

Многие свойства проективной плоскости автоматически распространяются на сферическую плоскость, однако в связи с наличием диаметрально противоположных точек основное свойство прямой, состоящее в том, что прямая однозначно определяется заданием двух различных ее точек (см. 2.4.1), на сферической плоскости, вообще говоря, не имеет места. Оно заменяется следующими свойствами:

1°. Если A и B не являются диаметрально противоположными точками, то через них проходит одна и только одна прямая.

2°. Если A и B являются диаметрально противоположными точками, то существует бесчисленное множество прямых, проходящих через эти две точки.

По той же причине свойство проективной плоскости 2.4.9: любые две различные прямые плоскости имеют единственную общую точку — также не имеет места. Это свойство заменяется следующим:

3°. Две различные прямые плоскости C_2 пересекаются в двух и только в двух диаметрально противоположных точках.

3. Сферические отрезки и углы. Пусть l — некоторая прямая, а A — ее произвольная точка. Обозначим через $\bar{l}$ двумерное векторное подпространство, связанное с этой прямой, а через $\bar{A}$ — направление, связанное с точкой A , т. е. множество всех векторов, инцидентных точке A . Согласно теореме [48.1] направление $\bar{A}$ определяет в двумерном подпространстве $\bar{l}$ две области ω_1 и ω_2 . Пусть B — точка прямой l , не совпадающая с точкой A и с диаметрально противоположной точкой A^* . Легко видеть, что все векторы, инцидентные точке B , принадлежат одной области ω_1 или ω_2 , поэтому все точки прямой l , отличные от A и A^* , естественным образом разбиваются на два множества ω_1 и ω_2 следующим образом: ω_1 — есть множество тех и только тех точек прямой l , векторы которых принадлежат ω_1 , а ω_2 — есть множество тех и только тех точек прямой l , векторы которых принадлежат ω_2 . Очевидно, $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$ и, кроме того, $\omega_1 \cup \omega_2$ есть множество всех точек прямой l , за исключением точек A и A^* .

Эти множества называются лучами, исходящими из точки A . Каждая точка прямой определяет на ней два луча, исходящих из этой точки, причем точка A и диаметрально противоположная ей точка A^* на данной прямой определяют одни и те же лучи.

Понятие сферического угла вводится обычным образом, т. е. парой лучей, исходящих из одной и той же точки и не принадлежащих одной прямой, называется сферическим углом.

Введем, наконец, понятие сферического отрезка. Пусть A , B и M — три различные точки прямой, причем A и B не являются диаметрально противоположными. Рассмотрим векторы $a \times A$, $b \times B$ и $m \times M$. Будем говорить, что точка M лежит между A и B , если $m \in (a, b)$

(см. § 47, пример 3). Множество, состоящее из двух не диаметрально противоположных точек, а также из всех точек, лежащих между ними, называется сферическим отрезком.

Изложенная нами схема позволяет довольно просто ввести понятие длины отрезка и величины угла и рассмотреть основные метрические формулы сферической геометрии, в частности сферической тригонометрии. Рамки настоящей книги не позволяют со всей полнотой изложить эти вопросы, поэтому читателя, интересующегося ими, отсылаем к книге [43], где в гл. VI он найдет подробное изложение метрических вопросов сферической геометрии.

4. Эллиптическая геометрия в схеме Вейля. Аксиоматика I—IV, сформулированная в п. I настоящего параграфа, является аксиоматикой эллиптической плоскости E_2 , если векторное пространство $\tilde{V}_2$ является трехмерным евклидовым векторным пространством E_3 . Таким образом, эллиптическая плоскость E_2 отличается от проективной плоскости P_2 только лишь тем, что для эллиптической плоскости связанное с ней векторное пространство является евклидовым, т. е. в этом пространстве введено скалярное произведение.

Все теоремы и определения проективного пространства P_2 автоматически переносятся на плоскость E_2 . В частности, через любые две различные точки E_2 проходит одна и только одна эллиптическая прямая и, кроме того, любые две прямые плоскости E_2 пересекаются в одной и только в одной точке.

Эллиптическая плоскость E_2 обладает некоторыми специфическими свойствами, которыми не обладает проективная плоскость. Эти свойства аналогичны свойствам сферической плоскости S_2 . Наиболее существенными из них являются понятия расстояния между двумя точками и величина угла между двумя прямыми. Отметим, однако, что эта аналогия не полная, так как на эллиптической плоскости, так же как и на проективной, нельзя ввести понятие луча, поэтому приходится рассматривать углы, образованные прямыми, а не лучами. Изложение этих вопросов можно найти в книге [44].

5. Непротиворечивость эллиптической геометрии. Можно построить аналитическую интерпретацию эллиптической плоскости E_2 и тем самым доказать, что эллиптическая геометрия непротиворечива. Для этого следует несколько видоизменить интерпретацию проективного пространства, построенную выше, в п. 3, § 67. А именно, сохранив все соглашения, принятые там, следует вместо V_1 рассмотреть E_3 , точнее, интерпретацию векторного пространства E_3 , приведенную в п. 5, § 44 (соглашения 1°—4°, стр. 226). Аксиомы эллиптической геометрии, по существу, не требуют специальной проверки, так как их выполнение на построенной модели очевидно.

Можно предложить более наглядную модель аксиоматики E_2 с использованием геометрических объектов пространства TE_3 . За векторы пространства, на котором базируется построение пространства E_2 , примем векторы пространства TE_3 . Зафиксируем в TE_3 некоторую точку A_0 и рассмотрим связку прямых $[A_0]_2$ с центром в этой точке. Каждую прямую связки назовем ε -точкой. Будем говорить, что нену-

левой вектор a пространства E_2 инцидентен ε -точке A , если a принадлежит прямой a пространства TE_3 . При этом, очевидно, выполняются все аксиомы эллиптической плоскости. В этой интерпретации за расстояние между ε -точками можно принять угол между соответствующими прямыми связки $[A_0]_2$ пространства TE_3 , а за угол между ε -прямыми — двугранный угол между плоскостями TE_3 , проходящими через центр связки.

§ 70. Псевдоевклидово трехмерное векторное пространство

Для построения аксиоматики геометрии Лобачевского по схеме Вейля необходимо предварительно изучить некоторые свойства псевдоевклидова пространства E_3^A . Настоящий параграф посвящен этому вопросу.

1. Аксиоматика пространства E_3^A . Векторное пространство V_3 называется псевдоевклидовым пространством E_3^A , если в нем введена функция $f: V_3 \times V_3 \rightarrow R$, удовлетворяющая перечисленным ниже аксиомам (R — поле действительных чисел). Значение этой функции для векторов a и b называется псевдоевклидовым произведением векторов a и b и обозначается так: $a \wedge b$.

$$E^A1. \forall a, \forall b: a \wedge b = b \wedge a;$$

$$E^A2. \forall a, \forall b, \forall c: a \wedge (b + c) = a \wedge b + a \wedge c;$$

$$E^A3. \forall a, \forall b, \forall \alpha: (\alpha a) \wedge b = \alpha (a \wedge b);$$

E^A4 . Существует такое двумерное подпространство $\mathfrak{M}_2^A$, что если $a \in \mathfrak{M}_2^A$ и $a \neq 0$, то $a \wedge a > 0$.

E^A5 . Существует хотя бы один вектор p^* такой, что $p^* \wedge p^* < 0$.

Мы видим, что аксиомы $E^A1 - E^A3$ аналогичны аксиомам $E1 - E3$ пространства E_3 , т. е. функция f является симметрической билинейной скалярной функцией от двух векторных аргументов. Однако, как мы увидим ниже, из аксиом E^A4 и E^A5 вытекают свойства, существенно отличные от свойств пространства E_3 .

Модуль вектора в пространстве E_3^A вводится точно так же, как и в E_3 , т. е. модуль вектора a называется числом $|a| = \sqrt{a \wedge a}$. В пространстве E_3^A в отличие от E_3 имеются ненулевые векторы трех видов: а) $|a| \in R$, $a \neq 0$; б) $|a|$ — мнимое число; в) $|a| = 0$. В первом случае вектор будем называть эллиптическим или, коротко, ε -вектором, во втором случае — гиперболическим или h -вектором, а в третьем случае изотропным.

Пусть $\mathfrak{M}_1$ — одномерное векторное подпространство. Если a — ненулевой вектор этого подпространства, то, как известно, $\mathfrak{M}_1$ состоит из векторов вида $p = \lambda a$, где λ — произвольное действительное число.

Из $E^{\wedge 1}$ и $E^{\wedge 2}$ следует, что $p \wedge p = \lambda^2 (a \wedge a)$. Из этого соотношения следует справедливость следующего предложения.

Теорема [70.1]. Любое одномерное подпространство пространства $E_3^{\wedge}$ принадлежит к одному из следующих трех типов:

- а) эллиптическое подпространство; все ненулевые векторы являются эллиптическими;
- б) гиперболическое подпространство; все ненулевые векторы являются гиперболическими;
- в) изотропное подпространство; все ненулевые векторы изотропны.

Как непосредственное следствие этой теоремы, получаем

Следствие. Любые два ненулевых вектора, принадлежащие различным типам (т. е. ε -вектор и η -вектор, или ε -вектор и изотропный вектор) линейно независимы.

Существование эллиптических и гиперболических одномерных подпространств непосредственно следует из аксиом $E^{\wedge 4}$ и $E^{\wedge 5}$, а существование изотропных одномерных подпространств будет доказано ниже.

2. Канонические базисы. Рассмотрим ряд простых свойств векторов пространства $E_3^{\wedge}$, необходимых для дальнейшего изложения.

1°. Любое двумерное подпространство $\mathfrak{M}_2$ имеет по крайней мере один ε -вектор.

Пусть $\mathfrak{M}_2$ — подпространство, удовлетворяющее аксиоме $E^{\wedge 4}$. Из свойства 45.2.7 следует, что $\mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{M}_2^{\perp}$ содержит хотя бы один ненулевой вектор. Так как в $\mathfrak{M}_2$ все ненулевые векторы являются ε -векторами, то $\mathfrak{M}_2$ содержит ε -вектор. ■

2°. Если $e_1 \in \mathfrak{M}_2$ и $|e_1| \neq 0$, то в подпространстве $\mathfrak{M}_2$ существует ненулевой вектор e_2 , удовлетворяющий условию: $e_1 \wedge e_2 = 0$.

Пусть $e_2 = \alpha e_1 + p$, где $p \in \mathfrak{M}_2$, и $L(e_1, p) \neq 0$. Покажем, что всегда существует такое число α , что $e_1 \wedge e_2 = 0$. В самом деле, $e_1 \wedge e_2 = e_1 \wedge (\alpha e_1 + p) = 0$. Отсюда получаем: $\alpha (e_1 \wedge e_1) + (e_1 \wedge p) = 0$. Так как $e_1 \wedge e_1 \neq 0$, то $\alpha = -\frac{e_1 \wedge p}{e_1 \wedge e_1}$. ■

3°. Если $|e_1| \neq 0$, $e_2 \neq 0$ и $e_1 \wedge e_2 = 0$, то $L(e_1, e_2) \neq 0$.

Доказательство проведем от противного. Пусть $L(e_1, e_2) = 0 \Rightarrow \lambda e_2 = e_1$. Вычислим $|e_1|^2 = e_1 \wedge e_1 : e_1 \wedge e_1 = e_1 \wedge (\lambda e_2) = \lambda (e_1 \wedge e_2) = 0$. Мы пришли в противоречие с условием $|e_1| \neq 0$.

Введем следующее определение. Базис e_1, e_2 подпространства $\mathfrak{M}_2$ называется каноническим, если векторы этого базиса удовлетворяют условиям:

$$e_1 \wedge e_1 = 1, e_2 \wedge e_2 = \varepsilon, e_1 \wedge e_2 = 0. \quad (1)$$

Здесь $\varepsilon = 0, 1$ или -1 .

Аналогично, базис e_1, e_2, e_3 пространства $E_3^{\wedge}$ называется каноническим, если

$$\begin{aligned} e_1 \wedge e_2 &= e_1 \wedge e_3 = e_2 \wedge e_3 = 0; \\ e_1 \wedge e_1 &= e_2 \wedge e_2 = 1, e_3 \wedge e_3 = -1. \end{aligned} \quad (2)$$

Из доказанных выше свойств непосредственно следует

Теорема [70.2]. В любом двумерном пространстве $\mathfrak{M}_2$ существует по крайней мере один канонический базис.

Доказательство. В соответствии со свойством 1° введем в рассмотрение ε -вектор a_1 . Так как $|a_1| > 0$, то $|a_1|$ — действительное число. В качестве первого вектора базиса возьмем вектор $e_1 = \frac{a_1}{|a_1|}$. Отсюда следует, что $e_1 \wedge e_1 = \frac{a_1 \wedge a_1}{|a_1|^2} = 1$. Для выбора второго вектора воспользуемся свойствами 2° и 3°. Согласно этим свойствам существует вектор a_2 такой, что $e_1 \wedge a_2 = 0$ и $L(e_1, a_2) \neq 0$. Возможны следующие три случая:

а) a_2 — ε -вектор. В этом случае в качестве второго вектора базиса возьмем вектор $e_2 = \frac{a_2}{|a_2|}$. Аналогично предыдущему получаем $e_1 \wedge e_2 = 1$. Мы видим, что векторы e_1, e_2 образуют канонический базис, причем в данном случае $\varepsilon = 1$.

б) a_2 — η -вектор. В этом случае $a_2 \wedge a_2 = -\alpha$, где $\alpha > 0$. В качестве второго вектора e_2 искомого базиса возьмем вектор $\frac{a_2}{\sqrt{\alpha}}$. Лег-

ко убедиться в том, что $e_2 \wedge e_2 = \frac{a_2 \wedge a_2}{\alpha} = -1$ и каноническим базисом будет e_1, e_2 при $\varepsilon = -1$.

в) a_2 — изотропный вектор. В этом случае можно положить $e_2 = a_2$, и мы снова приходим к каноническому базису e_1, e_2 при $\varepsilon = 0$.

Пользуясь этой теоремой, можно доказать аналогичное предложение для $E_3^{\wedge}$.

Теорема [70.3]. В пространстве $E_3^{\wedge}$ существует по крайней мере один канонический базис. □

В заключение отметим, что если векторы x и y заданы координатами $\{x_1, x_2, x_3\}$ и $\{y_1, y_2, y_3\}$ в каноническом базисе e_1, e_2, e_3 , то, пользуясь аксиомами $E_1^{\wedge}, E_2^{\wedge}$ и $E_3^{\wedge}$ и соотношениями (2), непосредственным вычислением приходим к следующей формуле для вычисления псевдоскалярного произведения векторов x и y :

$$x \wedge y = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3. \quad (3)$$

3. Псевдоортогональные векторы. Два вектора x и y называются псевдоортогональными, если $x \wedge y = 0$. Из формулы (3) получаем условие псевдоортогональности двух векторов $x \{x_1, x_2, x_3\}$ и $y \{y_1, y_2, y_3\}$ в каноническом базисе:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3 = 0. \quad (4)$$

Из этой формулы непосредственно вытекают следующие свойства псевдоортогональности векторов в пространстве $E_3^{\wedge}$.

1°. Нулевой вектор псевдоортогонален любому вектору пространства.

2°. Если вектор p ненулевой, то множество всех векторов пространства, псевдоортогональных вектору p , образует двумерное векторное подпространство.

Рассмотрим еще одно интересное свойство.

3°. Если вектор p — ε -вектор, или g -вектор, а $\mathfrak{M}_p$ — ортогональное ему подпространство, то $p \notin \mathfrak{M}_p$; если же p — изотропный вектор, то $p \in \mathfrak{M}_p$.

В самом деле, вектор $\{x_1, x_2, x_3\}$ подпространства $\mathfrak{M}_p$ удовлетворяет условию: $x_1 p_1 + x_2 p_2 - x_3 p_3 = 0$. Вектор p будет принадлежать подпространству $\mathfrak{M}_p$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет предыдущему соотношению, т. е. когда $p_1 p_1 + p_2 p_2 - p_3 p_3 = 0$, но это означает, что вектор p является изотропным. ■

Теорема [70.4]. Если p — g -вектор, то ортогональное ему двумерное подпространство не содержит ни гиперболических, ни изотропных векторов.

Доказательство. В самом деле, для того чтобы это показать, достаточно убедиться в том, что если p — g -вектор и $p \wedge x = 0$, то x — ε -вектор. Так как $p \wedge p < 0$, то векторы p и x не коллинеарны. Рассмотрим подпространство $\mathfrak{M}_p = \{p, x\}$. Пользуясь свойством п. 2, 1°, возьмем некоторый эллиптический вектор e_1 подпространства $\mathfrak{M}_p$ и разложим этот вектор по базису p, x : $e_1 = \alpha p + \beta x$. Отсюда получаем: $e_1 \wedge e_1 = (\alpha p + \beta x) \wedge (\alpha p + \beta x)$. Учитывая, что $p \wedge x = 0$, будем иметь: $e_1 \wedge e_1 = \alpha^2 (p \wedge p) + \beta^2 (x \wedge x)$. Так как e_1 — ε -вектор, а p — g -вектор, то $e_1 \wedge e_1 > 0$, а $p \wedge p < 0$. Отсюда немедленно следует, что $x \wedge x > 0$. ■

4. Двумерные подпространства в $E_3^\wedge$. Пусть $\mathfrak{M}_2$ — произвольное двумерное подпространство, а e_1, e_2 — канонический базис в нем. Если $x \in \mathfrak{M}_2$ и $x \wedge \{x_1, x_2\}$, то, пользуясь определением канонического базиса, легко показать, что

$$x \wedge x = x_1 x_1 + \varepsilon x_2 x_2. \quad (5)$$

Возможны три случая.

а) $\varepsilon = 1$. В этом случае, как следует из (5), любой ненулевой вектор подпространства $\mathfrak{M}_2$ является эллиптическим; поэтому $\mathfrak{M}_2$ называется эллиптическим подпространством.

б) $\varepsilon = -1$. Изотропные векторы подпространства $\mathfrak{M}_2$ определяются из соотношения $x_1 x_1 - x_2 x_2 = 0 \Rightarrow (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$. Подпространство $\mathfrak{M}_2$ содержит два и только два изотропных одномерных подпространства, определяемых соотношениями: $x_1 + x_2 = 0$ и $x_1 - x_2 = 0$. В этом случае подпространство $\mathfrak{M}_2$ называется гиперболическим.

в) $\varepsilon = 0$. В этом случае $x \wedge x = x_1 x_1$. Подпространство $\mathfrak{M}_2$ имеет только одно изотропное одномерное подпространство, определяемое соотношением $x_1 = 0$; векторы, не принадлежащие этому подпространству, являются эллиптическими. В этом случае $\mathfrak{M}_2$ называется параболическим.

5. Двумерные гиперболические подпространства. Из выводов предыдущего пункта непосредственно вытекает:

1°. Если существует хотя бы один g -вектор, принадлежащий подпространству $\mathfrak{M}_2$, то $\mathfrak{M}_2$ — гиперболическое подпространство.

2°. В гиперболическом двумерном подпространстве всегда существует базис, состоящий из гиперболических векторов.

3°. В гиперболическом двумерном подпространстве всегда существует базис e_1, e_2 , состоящий из изотропных векторов.

Для любого вектора x в этом базисе имеем:

$$x \wedge x = 2x_1 x_2 (e_1 \wedge e_2). \quad (6)$$

Отсюда следует, что $e_1 \wedge e_2 \neq 0$, т. е. имеем:

4°. Если базисные векторы подпространства изотропны, то этот базис не является ортогональным.

Так как $e_1 \wedge e_2 \neq 0$, то путем перехода к базису $e'_1 = \alpha e_1, e'_2 = \beta e_2$ всегда можно добиться того, чтобы $e_1 \wedge e_2 = -\frac{1}{2}$. В этом случае базис будем называть изотропным. В изотропном базисе соотношение (6) принимает вид:

$$x \wedge x = -x_1 x_2. \quad (7)$$

Отсюда приходим к следующему выводу:

5°. Вектор a , заданный в изотропном базисе координатами $\{x_1, x_2\}$, является g -вектором тогда и только тогда, когда

$$x_1 x_2 > 0.$$

Как следствие этого предложения получаем:

6°. В двумерном гиперболическом подпространстве существует бесчисленное множество g -векторов.

В заключение докажем следующую важную теорему.

Теорема [70.5]. Если a и b — неколлинеарные g -векторы, то $(a \wedge b)^2 > (a \wedge a)(b \wedge b)$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}_2$ — подпространство, натянутое на векторы a и b . Так как a и b — g -векторы, то $\mathfrak{M}_2$ — гиперболическое подпространство, поэтому согласно 3° существует базис p, q , состоящий из изотропных векторов. Пусть $p = a + t_1 b, q = a + t_2 b$, тогда $(a + t_1 b) \wedge (a + t_1 b) = 0$ и $(a + t_2 b) \wedge (a + t_2 b) = 0$, поэтому квадратное уравнение $a \wedge a + 2t(a \wedge b) + t^2(b \wedge b) = 0$ имеет два действительных корня. Отсюда следует, что дискриминант этого уравнения будет больше нуля, что и означает искомым результат.

§ 71. Геометрия Лобачевского в схеме Вейля. Независимость V постулата от остальных аксиом Гильберта

1. Аксиоматика плоскости Лобачевского в схеме Вейля. Аксиоматику плоскости Лобачевского L_2 введем по аналогии с аксиоматикой проективной плоскости с той лишь разницей, что векторное пространство V_2 заменим множеством $\bar{\Omega}_L$ всех g -векторов пространства $E_3^\wedge$. В соответствии со схемой, изложенной в п. 1, § 69, аксиомы I—IV в данном случае формулируются следующим образом:

L1. Каков бы ни был вектор a , принадлежащий множеству $\bar{\Omega}_L$, существует по крайней мере одна точка A такая, что $a \times A$.

L2. Какова бы ни была точка A , существует по крайней мере один вектор $a \in \bar{\Omega}_L$ такой, что $a \times A$.

L3. Пусть $a \in A$, $b \in B$. Если $L(a, b) \neq 0$, то $A \neq B$.

L4. Пусть $a \in A$ и $b \in B$. Если $A \neq B$, то $L(a, b) \neq 0$.

Совокупность всех точек, которые вместе с векторами $\bar{\Omega}_L$ удовлетворяют аксиомам L1 — L4, называется двумерной плоскостью Лобачевского, связанной с пространством E_3^A , или просто плоскостью Лобачевского.

Все свойства 1° — 3°, п. 2, § 1, имеют место в плоскости L_A , если при формулировке этих свойств слово «вектор» заменить словом «г-вектор». В частности, свойства 1°, 2°, 3° формулируются так:

1°. Все г-векторы, инцидентные одной и той же точке A , образуют множество всех г-векторов некоторого одномерного гиперболического подпространства A .

Мы будем говорить, что точка A связана с подпространством A .

2°. Если $\mathcal{M}$ — произвольное одномерное гиперболическое подпространство пространства E_3^A , то существует такая точка, которая связана с этим подпространством.

Из этих свойств немедленно следует:

3°. Существует взаимно однозначное соответствие между точками плоскости L_A и одномерными г-подпространствами пространства E_3^A .

Существенно отметить, что г-векторы и изотропные векторы пространства E_3^A не имеют инцидентных точек.

2. Прямая в плоскости L_A . Определение прямой в L_A вводится так же, как и в проективной плоскости. Пусть $\mathcal{M}_A$ некоторое гиперболическое подпространство пространства E_3^A . Множество (l) всех точек пространства L_A , каждая из которых инцидентна по крайней мере одному г-вектору двумерного подпространства $\mathcal{M}_A$, называется прямой, связанной с подпространством $\mathcal{M}_A$. Точки этого множества называются точками прямой. Пространство $\mathcal{M}_A$ по аналогии с обозначениями, принятыми в § 2, будем обозначать через $\bar{l}$.

Легко доказать следующие предложения.

1°. Каковы бы ни были две различные точки A и B , существует одна и только одна прямая (l) , проходящая через точки A и B .

В самом деле, рассмотрим векторы $a \in A$ и $b \in B$. Так как A и B — г-векторы, то подпространство $\{a, b\}$ — гиперболическое подпространство, поэтому прямая, связанная с этим подпространством, — искомая.

2°. Каждая прямая имеет бесчисленное множество точек. Существуют точки, не лежащие на одной прямой.

Теперь покажем, что в L_A выполняется аксиома Лобачевского.

3°. Если A и (l) — произвольные точка и прямая, причем $A \notin (l)$, то существуют по крайней мере две прямые (l_1) и (l_2) , проходящие через точку A и не пересекающие (l) .

В самом деле, пусть $\bar{l}$ — гиперболическое подпространство, с которым связана прямая (l) , а p и q — изотропные векторы этого подпространства (свойство 70.5.3). Пусть $a \in A$; так как $a \notin \bar{l}$, то подпро-

странства $\{p, a\}$ и $\{q, a\}$ не совпадают. Кроме того, согласно 70.5.1 эти подпространства являются гиперболическими. Прямые (l_1) и (l_2) , связанные соответственно с этими подпространствами, не пересекают прямую (l) . Рассмотрим, например, прямые (l_1) и (l) . Они могут пересекаться тогда и только тогда, когда подпространства $\bar{l}$ и $\{p, a\}$ имеют общий гиперболический вектор, но эти пространства не совпадают ($a \notin \bar{l}$), поэтому они имеют единственное общее направление, которое является изотропным. Точно так же можно показать, что (l_2) и (l) не пересекаются.

В рассматриваемой схеме параллельные и расходящиеся прямые определяются так: прямые (l_1) и (l_2) называются параллельными (расходящимися), если подпространство $\bar{l}_1 \cap \bar{l}_2$ является изотропным (эллиптическим).

Исходя из этих определений легко могут быть получены все основные свойства параллельных и расходящихся прямых. Например, свойство, состоящее в том, что через данную точку проходят две и только две прямые, параллельные данной, непосредственно вытекает из того обстоятельства, что в каждой гиперболической плоскости существуют два и только два изотропных направления.

Свойства транзитивности и симметричности параллельных прямых при данном определении параллельности становятся очевидными. Мы не будем входить в детали рассмотрения свойств параллельных и расходящихся прямых, так как наша задача заключается в изложении общей схемы построения плоскости Лобачевского, пользуясь аксиоматикой Вейля.

3. Каноническая система координат на прямой. Рассматриваемая схема построения плоскости Лобачевского особенно удобна тем, что она позволяет довольно просто вводить метрические соотношения на плоскости Лобачевского, что, как мы видели выше, трудно сделать при синтетическом изложении геометрии Лобачевского.

Введем понятие канонической системы координат на прямой. Пусть $\bar{\Omega}_0$ — множество всех г-векторов пространства E_3^A , удовлетворяющих условию $x \wedge x = -1$. Очевидно, каждая точка плоскости L_A будет инцидентна двум и только двум векторам из $\bar{\Omega}_0$. Если A — произвольная точка плоскости и $a \in A$, то такими векторами будут $\frac{a}{|a|}$ и $-\frac{a}{|a|}$.

В дальнейшем будем предполагать, что для всех рассматриваемых г-векторов пространства E_3^A это условие, которое будем называть условием нормирования, выполнено.

Пусть l — произвольная прямая, а $\bar{l}$ — подпространство, с которым оно связано. Обозначим через e_1, e_2 — изотропный базис этого подпространства (см. 70.5.3). Тогда согласно формуле (6), § 70, для любого г-вектора x подпространства $\bar{l}$ имеем: $x \wedge x = 2x_1x_2(e_1 \wedge e_2) = -x_1x_2$. С другой стороны, согласно условию нормирования $x \wedge x = -1$, поэтому $x_1x_2 = 1$; положив $x_1 = t$, $x_2 = \frac{1}{t}$, можем выразить вектор x

через изотропный базис:

$$x = te_1 + \frac{1}{t}e_2 \quad (1)$$

Мы видим, что каждый г-вектор множества $\bar{\Omega}_0$, принадлежащий $\bar{l}$, определяется параметром t . Если x_1 и x_2 — два вектора, а t_1 и t_2 — соответствующие параметры, то $x_1 = t_1e_1 + \frac{1}{t_1}e_2$, $x_2 = t_2e_1 + \frac{1}{t_2}e_2$. Условие коллинеарности векторов x_1 и x_2 запишется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} t_1 & \frac{1}{t_1} \\ t_2 & \frac{1}{t_2} \end{vmatrix} = \frac{t_1}{t_2} - \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_1^2 - t_2^2}{t_1 t_2}. \text{ Отсюда следует, что } x_1 \text{ и } x_2 \text{ коллинеарны тогда и только тогда, когда } |t_1| = |t_2|.$$

Пусть A — произвольная точка прямой l . Выше было сказано, что в связи с условием $x \wedge x = -1$ в множестве $\bar{\Omega}_0$ существуют два и только два вектора, инцидентных точке A . Обозначим их через x и $-x$. Возьмем из них тот вектор, для которого t в соотношении (1) положительно. В этом случае число t будем называть каноническим параметром точки A . Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между всеми точками прямой l и положительными числами. Точку E_0 с параметром $t=1$ назовем единичной. Этой точке инцидентен вектор $e_1 + e_2$. Отметим далее, что каноническую систему координат на прямой l всегда можно выбрать так, чтобы любая ее точка была единичной. В самом деле, пусть e_1, e_2 — какой-либо изотропный базис, а P — произвольная точка прямой, $p \in P$, $p = t_0e_1 + \frac{1}{t_0}e_2$. Векторы $e'_1 = te_1$, $e'_2 = \frac{1}{t_0}e_2$ образуют изотропный базис, так как $e'_1 \wedge e'_2 = (te_1) \wedge (\frac{1}{t_0}e_2) = e_1 \wedge e_2 = -\frac{1}{2}$. В этом базисе точка P имеет параметр $t=1$.

4. Лучи и отрезки. Пусть l — произвольная прямая и $A \in l$. Введем на прямой каноническую систему координат так, чтобы параметр точки A был равен единице. Два множества точек, канонические параметры которых удовлетворяют соответственно условиям $t > 1$ и $t < 1$, называются лучами, исходящими из точки A . Эти множества несущественно отличаются друг от друга, так как если поменять нумерацию векторов изотропного базиса, то они поменяются ролями. Будем говорить, что точка A лежит между точками B и C , если B и C принадлежат различным лучам, исходящим из точки A . Множество, состоящее из двух различных точек, а также всех точек, лежащих между ними, называется отрезком. Пользуясь этими определениями, легко доказать все основные свойства отрезков и лучей. В частности, можно ввести определение угла и рассмотреть основные свойства углов.

5. Длина отрезка и величина угла. Пусть $[AB]$ — отрезок, $|a| = 1$, $|b| = 1$ и $a \wedge b \neq 0$. Так как векторы a и b не коллинеарны, то согласно теореме [70.5] $(a \wedge b)^2 > 1$. Длиной отрезка $[AB]$ на-

зывается положительное число δ , удовлетворяющее условию:

$$\operatorname{ch} \delta = |a \wedge b|. \quad (2)$$

Длина любого отрезка, очевидно, существует.

Рассмотрим луч, исходящий из точки A и содержащий точку B . Изотропный базис возьмем так, чтобы параметр t точки B был больше единицы. Если δ — расстояние между точками A и B , то согласно (2) получаем: $\operatorname{ch} \delta = |(e_1 + e_2) \wedge (te_1 + \frac{1}{t}e_2)| = \frac{1}{2} \frac{1+t^2}{t}$. Отсюда имеем $t^2 - 2t \operatorname{ch} \delta + 1 = 0$, $t = \operatorname{ch} \delta \pm \operatorname{sh} \delta$. Так как $t > 1$, то $t = e^\delta$. Таким образом, формулу (1) для точек данного луча можно переписать так:

$$x = e^\delta e_1 + \frac{1}{e^\delta} e_2. \quad (3)$$

Пользуясь соотношением (3), легко получить все известные свойства длин отрезков.

Введем, наконец, понятие величины угла между пересекающимися прямыми AB и AC . Пусть $a \wedge A$. Рассмотрим подпространство $\mathfrak{W}_2$, ортогональное a . Согласно теореме [70.4] оно является эллиптическим, поэтому углы в $\mathfrak{W}_2$ измеряются так же, как и в евклидовом двумерном подпространстве. Пусть $\overline{BA} = l_1$, $\overline{CA} = l_2$. Векторы p_1 и p_2 , ортогональные, соответственно l_1 и l_2 , лежат в $\mathfrak{W}_2$. Угол между этими векторами в $\mathfrak{W}_2$ называется углом между прямыми AB и AC . При некотором уточнении этого понятия можно ввести величину угла, образованного парой лучей.

6. Аналитическая интерпретация системы аксиом планиметрии Лобачевского по Вейлю. Планиметрия Лобачевского по Вейлю, как мы видели выше, основана на следующей системе аксиом: $\{V1 - V7, D1, D2, E_1^1 - E_1^5 \text{ и } L1 - L4\}$. Можно построить довольно простую аналитическую интерпретацию этой системы аксиом и тем самым доказать, что планиметрия Лобачевского непротиворечива. Одновременно будет получено доказательство известного нам уже факта о том, что аксиома о параллельных Гильберта (или эквивалентный ей V постулат Евклида) не зависит от остальных аксиом.

Предварительно рассмотрим аналитическую интерпретацию пространства E_3^1 . Основными объектами этого пространства являются векторы, а основными соотношениями — сумма векторов, умножение вектора на число и псевдоскалярное произведение векторов. Примем соглашения 44.5.1, 44.5.2, 44.5.3, сформулированные в § 44, и, кроме того, следующее соглашение:

4°. Псевдоскалярным произведением векторов $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ называется число $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3$.

При этих соглашениях, как было показано в § 44, аксиомы $V1 - V7, D1, D2$ выполняются, а проверка аксиом $E^1 - E^5$ почти тривиальна.

В самом деле, в качестве $\mathfrak{M}^*$ следует взять подпространство, определяемое соотношением $x_3 = 0$ (аксиома E^4), а в качестве вектора p^* (аксиома E^5) можно взять вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Теперь построим интерпретацию плоскости L_1 . Для этого введем следующее обозначение. Множество всех троек чисел вида $k\xi_1, k\xi_2, k\xi_3$, где k — любое действительное число, а ξ_1, ξ_2, ξ_3 — фиксированные числа, причем $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \neq (0, 0, 0)$, обозначим через $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$. Рассмотрим интерпретацию пространства E_3^* , введенную выше, и обозначим через $\bar{\Omega}_3$ множество всех векторов $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, удовлетворяющих условию $x_1x_2 + x_2x_3 - x_3x_1 < 0$. Далее введем следующие два соглашения.

5°. Точкой назовем множество $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ при условии, что $\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 < 0$.

6°. Вектор $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ множества $\bar{\Omega}_3$ назовем инцидентным точке $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, если $(\alpha, \beta, \gamma) \in \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$.

Легко убедиться в том, что все аксиомы $L1 - L4$ выполняются. 7. Независимость пятого постулата Евклида от остальных аксиом Гильберта. Мы показали, что планиметрия Лобачевского непротиворечива. Это означает, что аксиома параллельности не зависит от аксиом планиметрии Гильберта. Для полного решения проблемы V постулата необходимо доказать, что система аксиом трехмерной геометрии Лобачевского непротиворечива. Для достижения этой цели можно поступить двояко:

а) Построить модель, на которой осуществляются все аксиомы стереометрии Лобачевского. Это вполне осуществимо и может быть выполнено по аналогии с п. 4, § 67. Отметим, однако, что при проверке отдельных аксиом в интерпретации Клейна трехмерной геометрии Лобачевского, в частности аксиом конгруэнтности, мы неизбежно сталкиваемся с громоздкими рассуждениями. Читателя, интересующегося этим вопросом, мы отсылаем к статье Л. С. Атанасяна «Об изложении непротиворечивости стереометрии Лобачевского в курсе оснований геометрии», помещенной в [58], № 208.

б) Изложенную выше схему построения геометрии Лобачевского на базе аксиом Вейля распространить на трехмерный случай и по аналогии с предыдущим пунктом доказать непротиворечивость построенной аксиоматики. Отметим, что при этом никаких принципиальных трудностей не возникает.

Раздел четвертый ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ

Глава XIV

ЛИНИИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 72. Вектор-функция скалярного аргумента

Настоящий параграф носит вспомогательный характер. В нем определяются вектор-функция скалярного аргумента и излагаются основные факты векторного дифференциального исчисления.

1. Определение вектор-функции скалярного аргумента. Числовым промежутком или просто промежутком будем называть любой числовой сегмент, а также любой интервал или полуинтервал с конечными или бесконечными границами. Другими словами, промежутком называем множества чисел, удовлетворяющих условиям: $a \leq t \leq b$, $a < t < b$, $a \leq t < b$, $a < t \leq b$, $-\infty < t < \infty$, $a \leq t < \infty$, $a < t \leq \infty$, $-\infty < t \leq b$, $-\infty < t \leq a$, где $a < b$. Промежутки будем обозначать через $I_0, I_1, \dots$ и т. д., или $a \leq t \leq b$, $a < t < \infty$ и т. д. Числовую прямую $-\infty < t < \infty$ будем обозначать через I_∞ .

Будем говорить, что на множестве Ω дана вектор-функция скалярного аргумента t , если каждому значению вещественного переменного t из множества Ω поставлен в соответствие по некоторому правилу вектор $r(t)$ пространства TE_3 . В дальнейшем изложении, как правило, будем предполагать, что Ω — числовой промежуток.

Если в пространстве задан прямоугольный декартов базис i, j, k , то для каждого фиксированного значения $t \in \Omega$ вектор $r(t)$ можно разложить по этому базису:

$$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k,$$

где $x(t), y(t), z(t)$ для данного значения t являются действительными числами, а на множестве Ω — скалярными функциями. Эти функции называются координатами векторной функции в базисе i, j, k . Рассмотрим примеры функций скалярных аргументов.

Пример 1. $r = at + b$, где a и b — постоянные векторы, а $\Omega = I_\infty$. Если в базисе i, j, k векторы a и b имеют координаты $a(a_1, a_2, a_3)$, $b(b_1, b_2, b_3)$, то данная функция будет иметь координаты $x(t) = a_1t + b_1$, $y(t) = a_2t + b_2$, $z(t) = a_3t + b_3$. Эти функции являются линейными, поэтому r называется линейной вектор-функцией. При $a = 0$ функция называется постоянной.

Пример 2. $r(t) = (a \cos t) i + (b \sin t) j + ct k$, где i, j, k — базис, a, b, c — постоянные числа, а $\Omega = I_\infty$.

Пример 3. $r(t) = (a \cos t) i + (a \sin t) j + (bt) k$, где i, j, k — базис, a, b — постоянные числа, а $\Omega = I_\infty$.

2. Предел векторной функции скалярного аргумента. Пусть t_0 — точка сгущения¹ числового множества Ω , на котором задана вектор-функция $r(t)$. Говорят, что функция $r(t)$ имеет предел r_0 в точке t_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех t множества Ω , отличных от t_0 и удовлетворяющих условию $|t - t_0| < \delta$, имеет место неравенство $|r(t) - r_0| < \varepsilon$ (обозначение: $r_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} r(t)$).

Имеет место следующая основная лемма.

Лемма [72.1]. В базисе i, j, k дана вектор-функция $r(t)$ на промежутке I_0 своими координатами $x(t), y(t), z(t)$. Для того чтобы векторная функция $r(t)$ имела предел в точке t_0 , необходимо и достаточно, чтобы скалярные функции $x(t), y(t)$ и $z(t)$ имели предел в этой точке. При этом если $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \alpha_0$, $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \beta_0$, $\lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = \gamma_0$, то пределом вектор-функции $r(t)$ в точке t_0 будет вектор

$$r_0 = \alpha_0 i + \beta_0 j + \gamma_0 k.$$

Доказательство. Пусть $r_0 = \alpha_0 i + \beta_0 j + \gamma_0 k$ — предел вектор-функции $r(t)$ в точке t_0 . Очевидно, $|r(t) - r_0| = \sqrt{(x(t) - \alpha_0)^2 + (y(t) - \beta_0)^2 + (z(t) - \gamma_0)^2}$. Отсюда следует, что $|x(t) - \alpha_0| \leq |r(t) - r_0|$, $|y(t) - \beta_0| \leq |r(t) - r_0|$, $|z(t) - \gamma_0| \leq |r(t) - r_0|$. Из этих соотношений следует необходимость условия. Обратно, пусть в точке t_0 функции $x(t), y(t), z(t)$ имеют соответственно пределы $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$. Введем обозначение: $r_0 = \alpha_0 i + \beta_0 j + \gamma_0 k$. Из свойств модулей векторов имеем:

$$|r(t) - r_0| = |(x(t) - \alpha_0)i + (y(t) - \beta_0)j + (z(t) - \gamma_0)k| \leq |x(t) - \alpha_0| + |y(t) - \beta_0| + |z(t) - \gamma_0|.$$

Отсюда следует, что $r(t)$ в точке t_0 имеет предел, равный r_0 . ■

3. Свойства пределов. Доказанная лемма позволяет установить правила перехода к пределу для векторных функций от скалярного аргумента.

Пусть $a(t), b(t)$ — вектор-функции, а $\lambda(t)$ — скалярная функция того же аргумента t на промежутке I_0 . Пусть далее известно, что при $t \rightarrow t_0$ эти функции имеют соответственно пределы a_0, b_0 . Мы утверждаем, что при $t \rightarrow t_0$ имеют место следующие предложения:

1°. Предел суммы двух векторных функций $a(t)$ и $b(t)$ существует и равен сумме пределов: $a_0 + b_0$.

2°. Предел произведения $\lambda(t)$ на $a(t)$ существует и равен $\lambda_0 a_0$.

¹ Напомним, что по определению точки сгущения в любой окрестности точки t_0 содержится хотя бы одна точка x множества Ω , отличная от t_0 . При этом t_0 может как принадлежать, так и не принадлежать Ω .

3°. Предел скалярного произведения $a(t)b(t)$ существует и равен $a_0 b_0$.

4°. Предел векторного произведения $[a(t)b(t)]$ существует и равен $[a_0 b_0]$.

Все эти свойства можно доказать по одной и той же схеме, если разложить данные векторы по координатам:

$$a(t) = \alpha_1(t)i + \alpha_2(t)j + \alpha_3(t)k,$$

$$b(t) = \beta_1(t)i + \beta_2(t)j + \beta_3(t)k.$$

Далее, пользуясь свойствами координат, а также свойствами пределов для скалярных функций, на основании предыдущей леммы легко получить искомым результат.

Пользуясь понятием предела векторной функции, можно дать определение непрерывности вектор-функции в данной точке: функция $r(t)$, заданная на промежутке I_0 , называется непрерывной в точке $t_0 \in I_0$, если в этой точке существует предел этой функции и он равен $r(t_0)$. Пользуясь леммой [72.1], легко доказать следующую теорему.

Теорема [72.2]. Функция $r(t)$, заданная на промежутке I_0 своими координатами, непрерывна в точке $t_0 \in I_0$ тогда и только тогда, когда координаты этой функции $x(t), y(t), z(t)$ непрерывны в той же точке t_0 . □

В силу этой теоремы все векторные функции, введенные в п. 1, являются непрерывными в любой точке числовой оси.

4. Производная вектор-функции в данной точке. Будем говорить, что функция $r(t)$, заданная на промежутке I_0 , дифференцируема в точке t_0 , если при $t \rightarrow t_0$ векторная функция $\frac{r(t) - r(t_0)}{t - t_0}$ имеет предел. Этот предел называется производной векторной функции $r(t)$ в данной точке и обозначается через $r'(t_0)$ или $\frac{dr(t_0)}{dt}$. Таким образом,

$$r'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{r(t) - r(t_0)}{t - t_0}.$$

Для того чтобы установить правила дифференцирования векторных функций, докажем лемму, аналогичную первой основной лемме.

Лемма [72.3]. Пусть дана векторная функция $r(t)$ на промежутке I_0 своими координатами $x(t), y(t), z(t)$. Для того чтобы функция $r(t)$ была дифференцируемой в точке t_0 , необходимо и достаточно, чтобы ее координаты были дифференцируемыми в этой точке. В этом случае производная функция в точке t_0 имеет вид: $x'(t_0)i + y'(t_0)j + z'(t_0)k$.

Доказательство. Для доказательства леммы на промежутке I_0 рассмотрим следующую функцию:

$$R(t) = \frac{r(t) - r(t_0)}{t - t_0}.$$

Так как функция $r(t)$ определена на промежутке I_0 , то функция $R(t)$ будет определена на всем промежутке I_0 за исключением точки t_0 . Однако, если обозначить через $\mathbb{R}$ множество $I_0 \setminus t_0$, то точка t_0 будет точкой сгущения этого множества, поэтому можно определить предел функции $R(t)$ в точке t_0 .

Легко видеть, что координатами функции $R(t)$ будут выражения

$$\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \quad \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}, \quad \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0}.$$

Согласно лемме [72.1] функция $R(t)$ будет иметь предел тогда и только тогда, когда записанные выше скалярные функции имеют пределы.

Так как пределами этих функций являются их производные $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ в точке t_0 , то отсюда вытекает искомый результат. ■

Функция $r(t)$, заданная на промежутке I_0 , называется дифференцируемой в точке $t_0 \in I_0$, если она имеет производную в этой точке. Если $r(t)$ дифференцируема во всех точках промежутка I_0 , то $r(t)$ называется дифференцируемой на промежутке I_0 .

Производная $r'(t)$ данной функции $r(t)$ является функцией на промежутке I_0 , поэтому можно говорить о дифференцируемости этой функции на промежутке I_0 . Таким образом, можно ввести понятие производных высших порядков:

$$r'(t), r''(t), \dots, r^{(n)}(t).$$

Введем следующее определение. Будем говорить, что функция $r(t)$, заданная на промежутке I_0 , принадлежит классу $C^{(k)}(I_0)$, если она во всех точках промежутка I_0 имеет непрерывные производные до k -го порядка включительно. Из теоремы [72.3] и леммы [72.3] непосредственно следует:

Теорема [72.4]. Пусть функция $r(t)$ задана координатами $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ на промежутке I_0 . Для того чтобы $r(t)$ принадлежала классу $C^{(k)}(I_0)$, необходимо и достаточно, чтобы $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ принадлежали классу $C^{(k)}(I_0)$.

5. Техника дифференцирования. Пусть $a(t)$ и $b(t)$ — вектор-функции, а $\lambda(t)$ — скалярная функция от того же аргумента t , заданные на промежутке I_0 . Если эти функции являются непрерывными и дифференцируемыми в некоторой точке t этого отрезка, то имеют место следующие предложения:

1°. Вектор-функция $a(t) + b(t)$ является дифференцируемой функцией в точке t_0 , причем $(a(t) + b(t))' = a'(t) + b'(t)$.

2°. Вектор-функция $\lambda(t) a(t)$ является дифференцируемой в точке t_0 , при этом $(\lambda(t) \cdot a(t))' = \lambda'(t) a(t) + \lambda(t) a'(t)$.

3°. Скалярная функция $a(t) b(t)$ является дифференцируемой, причем $(a(t) b(t))' = a'(t) b(t) + a(t) b'(t)$.

4°. Вектор-функция $[a(t) b(t)]$ является дифференцируемой в точке t_0 , причем $[a(t) b(t)]' = [a'(t) b(t) + a(t) b'(t)]$.

Доказательства всех этих свойств проводятся по одной и той же схеме, а именно той, которой мы пользовались при обосновании свойств предела функции.

Докажем, например, свойство 2°.

Пусть $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — координаты вектора $r(t)$ в базисе i, j, k . Тогда функция $\lambda(t) a(t)$ имеет координаты: $\lambda(t) x(t)$, $\lambda(t) y(t)$, $\lambda(t) z(t)$. Каждая из этих координат — непрерывная и дифференцируемая функция в точке t_0 , поэтому их производные равны:

$$(\lambda(t) x(t))' = \lambda'(t) x(t) + \lambda(t) x'(t);$$

$$(\lambda(t) y(t))' = \lambda'(t) y(t) + \lambda(t) y'(t);$$

$$(\lambda(t) z(t))' = \lambda'(t) z(t) + \lambda(t) z'(t).$$

На основании леммы [72.3] мы заключаем, что функция $\lambda(t) a(t)$ является дифференцируемой и ее производная равна:

$$(\lambda(t) a(t))' = [\lambda'(t) x(t) + \lambda(t) x'(t)] i +$$

$$+ [\lambda'(t) y(t) + \lambda(t) y'(t)] j + [\lambda'(t) z(t) + \lambda(t) z'(t)] k.$$

Воспользовавшись этим выводом и группируя соответствующие члены, получаем:

$$(\lambda(t) a(t))' = \lambda'(t) a(t) + \lambda(t) a'(t).$$

6. Формула Тейлора. По аналогии со скалярной функцией вектор-функцию можно разложить по формуле Тейлора. Это разложение не представляет трудностей, так как, по существу, сводится к разложению по формулам Тейлора трех скалярных функций — координат векторной функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ в декартовом базисе i, j, k .

Пусть векторная функция $r(t)$, данная на сегменте $[a, b]$, принадлежит классу $C^{(n+1)}[a, b]$. Рассмотрим $r(t_0)$ и $r(t_0 + \Delta t)$, причем t_0 и Δt выберем так, чтобы $t_0 \in [a, b]$ и $t_0 + \Delta t \in [a, b]$. Обозначим через $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ координаты функции $r(t)$ в данном базисе. Согласно теореме [72.4] эти функции будут также принадлежать классу $C^{(n+1)}[a, b]$. Разложим функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ по формуле Тейлора с дополнительным членом в форме Лагранжа:

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + x'(t_0) \frac{\Delta t}{1!} + \dots + x^{(n)}(t_0) \frac{\Delta t^n}{n!} +$$

$$+ x^{(n+1)}(t_1) \frac{\Delta t^{n+1}}{(n+1)!};$$

$$y(t_0 + \Delta t) = y(t_0) + y'(t_0) \frac{\Delta t}{1!} + \dots + y^{(n)}(t_0) \frac{\Delta t^n}{n!} +$$

$$+ y^{(n+1)}(t_2) \frac{\Delta t^{n+1}}{(n+1)!};$$

$$z(t_0 + \Delta t) = z(t_0) + z'(t_0) \frac{\Delta t}{1!} + \dots + z^{(n)}(t_0) \frac{\Delta t^n}{n!} +$$

$$+ z^{(n+1)}(t_3) \frac{\Delta t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Важно заметить, что в последних членах производные $(n+1)$ -го порядка, вообще говоря, вычислены в различных точках t_1, t_2, t_3 , принадлежащих сегменту $[t_0, t_0 + \Delta t]$.

Так как $r(t_0 + \Delta t) = x(t_0 + \Delta t)i + y(t_0 + \Delta t)j + z(t_0 + \Delta t)k$, то подставив сюда значения $x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t), z(t_0 + \Delta t)$ из предыдущих соотношений, после элементарных преобразований получаем:

$$r(t_0 + \Delta t) = r(t_0) + r'(t_0) \frac{\Delta t}{1!} + \dots + r^{(n)}(t_0) \frac{\Delta t^n}{n!} + e_{n+1}(t_0, \Delta t) \Delta t^n. \quad (1)$$

Покажем, что в любой точке $t_0 \in [a, b]$ имеем:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} e_{n+1}(t_0, \Delta t) = 0. \quad (2)$$

В самом деле, из способа получения формулы (1) следует, что

$$e_{n+1}(t_0, \Delta t) = Q(t_0, \Delta t) \frac{\Delta t}{(n+1)!}, \quad (3)$$

где $Q(t_0, \Delta t) = x^{(n+1)}(t_1)i + y^{(n+1)}(t_2)j + z^{(n+1)}(t_3)k$. Так как $r(t)$ принадлежит классу $C^{(n+1)}[a, b]$, то функции $x^{(n+1)}(t), y^{(n+1)}(t), z^{(n+1)}(t)$ ограничены на сегменте $[a, b]$, поэтому существует такое постоянное число C , что $|Q(t_0, \Delta t)| < C$ для всех значений $t_0 \in [a, b], t_0 + \Delta t \in [a, b]$. Отсюда, учитывая соотношение (3), получаем искомый результат.

Формула (1) называется формулой Тейлора для вектор-функции.

7. Сложная функция. Понятие суперпозиции функций, известное из курса анализа, может быть перенесено на векторные функции от скалярных аргументов. Пусть на промежутке I_1 дана векторная функция от скалярного аргумента $r = r(t)$ и, кроме того, на промежутке I_2 — скалярная функция от скалярного аргумента $\varphi(u)$, причем для любого $u \in I_2$ имеем: $\varphi(u) \in I_1$. В этом случае будем говорить, что области определений функций $r(t)$ и $\varphi(u)$ согласованы. Векторную функцию $R(u) = r(\varphi(u))$, заданную на промежутке I_2 , будем называть сложной векторной функцией от аргумента u . Пользуясь леммой [72.3], можно доказать следующую теорему о дифференцировании сложных функций.

Теорема [72.5]. Пусть даны функции $r(t)$ и $\varphi(u)$, области определения I_1 и I_2 которых согласованы. Если функция $\varphi(u)$ имеет производную в точке $u_0 \in I_2$, а функция $r(t)$ имеет производную в соответствующей точке $t_0 = \varphi(u_0) \in I_1$, то сложная функция $r(\varphi(u))$ также имеет производную в точке u_0 , причем она вычисляется по формуле:

$$r(\varphi(u))' = r'_t \cdot \varphi'_u \text{ или } \frac{dr}{du} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{du}. \quad (4)$$

Эта теорема позволяет вычислить производную сложной функции по производным составляющих функций. Как следствие этой теоремы и свойства 2° п. 5 получим:

Следствие. Пусть даны функции $r(t)$ и $\varphi(u)$, области определения I_1 и I_2 которых согласованы. Если $\varphi(u)$ принадлежит классу $C^{(n)}(I_2)$, а $r(t)$ принадлежит классу $C^{(n)}(I_1)$, то сложная функция $r(\varphi(u))$ принадлежит классу $C^{(n)}(I_2)$.

§ 73. Кривые в пространстве; естественная параметризация

1. Метрические пространства. Введем некоторые понятия топологии, которые помогут нам дать определение кривой в пространстве. Непустое множество называется метрическим пространством (Ω, ρ) , если для любых его двух элементов x и y определено действительное число $\rho(x, y)$, называемое расстоянием между x и y и удовлетворяющее следующим трем требованиям:

1°. $\rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда элементы x и y совпадают;

2°. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3° (аксиома треугольника). Для любых трех элементов $x, y, z \in \Omega$

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) \leq \rho(x, z).$$

Элементы метрического пространства обычно называются точками. Рассмотрим примеры метрических пространств.

1) Множество всех точек пространства TE_3 . Как мы знаем, в этом множестве определено расстояние между точками, удовлетворяющее перечисленным выше условиям 1°, 2°, 3° (см. § 51, п. 2).

2) Евклидово арифметическое n -мерное пространство E_n . В этом пространстве точкой называется n чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, взятых в определенном порядке, а расстояние между двумя точками $x(x_1, x_2, \dots, x_n), y(y_1, y_2, \dots, y_n)$ таково:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

3) Сегмент $[a, b]$, т. е. множество всех действительных чисел x , удовлетворяющих условию $a \leq x \leq b$, где $a < b$; расстояние между точками x и y определяется формулой $\rho(x, y) = |x - y|$.

Если (Ω, ρ) — метрическое пространство, а $\mathfrak{M}$ — любое подпространство Ω , содержащее по крайней мере две точки, то $(\mathfrak{M}, \rho)$, очевидно, также является метрическим пространством. Оно называется подпространством пространства (Ω, ρ) . Отсюда, в частности, вытекает, что всякое множество точек, содержащееся в евклидовом пространстве TE_3 , является метрическим пространством. Метрическое пространство является частным случаем топологического пространства, которое будет определено в главе XVI.

В метрическом пространстве, так же как и в более общих топологических пространствах, важное значение имеет понятие окрестности данной точки. Окрестностью точки a метрического пространства (Ω, ρ) называется любое множество точек $x \in \Omega$, удовлетво-

ряющих условию: $\rho(a, x) < \delta$, где δ — некоторое фиксированное положительное число¹. Окрестность точки a будем обозначать через $\omega(a)$. Более общее понятие окрестности точки топологических пространств будет введено в главе XVI.

Пусть (Ω, ρ) и (Ω', ρ') — метрические пространства, а $(\mathfrak{M}, \rho)$ и $(\mathfrak{M}', \rho')$ — подпространства этих пространств, причем $\mathfrak{M} \subseteq \Omega$, а $\mathfrak{M}' \subseteq \Omega'$. *Образование* $S: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}'$ называется *непрерывным* в точке $a \in \mathfrak{M}$, если для каждой окрестности $\omega'(b)$, где $b = S(a)$ и $b \in \mathfrak{M}'$, существует такая окрестность $\omega(a)$ точки a , что каждый раз, когда $x \in \omega(a)$, ее образ $x' = S(x) \in \omega'(b)$. *Образование* $S: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}'$ называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке множества $\mathfrak{M}$.

Всякое взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение множества $\mathfrak{M}$ на множество $\mathfrak{M}'$ называется топологическим отображением или гомеоморфизмом. Если существует гомеоморфизм множества $\mathfrak{M}$ на множество $\mathfrak{M}'$, то эти множества называются гомеоморфными.

2. Классы эквивалентности. Напомним понятие классов эквивалентности. Пусть Ω — определенное множество и между некоторыми парами элементов из Ω задано отношение σ , которое будем обозначать через $a\sigma b$ ($a \in \Omega, b \in \Omega$). Отношение σ называется *отношением эквивалентности*, если выполнены следующие три условия: а) для любого a из Ω имеем: $a\sigma a$; б) если $a\sigma b$, то $b\sigma a$; в) если $a\sigma b$ и $b\sigma c$, то $a\sigma c$.

Другими словами, отношение σ обладает свойствами *рефлексивности, симметричности и транзитивности*.

Пусть σ — отношение эквивалентности в Ω , а a — произвольный элемент этого множества. Классом эквивалентности, определяемым элементом a , мы называем множество Σ_a всех элементов x из Ω , удовлетворяющих условию: $x\sigma a$. Очевидно, $a \in \Sigma_a$, поэтому $\Sigma_a \neq \emptyset$. Вообще говоря, Σ_a может состоять из одного-единственного элемента a . Далее, если $a \neq b$, то либо $\Sigma_a = \Sigma_b$, либо $\Sigma_a \cap \Sigma_b = \emptyset$, поэтому все множество Ω есть объединение попарно непересекающихся классов эквивалентности.

3. Путь. Путем l , заданным на промежутке I_0 , будем называть непрерывное отображение f какого-либо числового промежутка I_0 в множество L точек пространства TE_3 , т. е. $f: I_0 \rightarrow L$. Если f является гомеоморфизмом, то l называется *простым путем*. Если в пространстве TE_3 введена прямоугольная декартова система координат, то отображение $M = f(t)$, где $t \in I_0$, $M \in L$, может быть задано координатами точки M или радиус — вектором этой точки:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t); \quad (1)$$

$$r = r(t), \quad (2)$$

¹ Часто эту окрестность называют также δ -окрестностью данной точки.

где $t \in I_0$. Эти соотношения называются соответственно *координатным* и *векторным параметрическим представлением* пути l .

Нетрудно показать, что если (2) — векторное параметрическое представление простого пути, заданного на промежутке I_0 , то $r(t)$ непрерывно на промежутке I_0 и при $t_1 \neq t_2$ имеем: $r(t_1) \neq r(t_2)$.

Путь, заданный на промежутке I_0 , называется *дифференцируемым*, если функция $r(t)$ принадлежит классу $C^1(I_0)$. Дифференцируемый путь, заданный на промежутке I_0 , называется *регулярным*, если во всех точках промежутка I_0 имеем: $r'(t) \neq 0$.

Приведем несколько примеров регулярных путей.

Пример 1. Рассмотрим путь l_1 , векторное параметрическое представление которого имеет вид: $r = at + b$, где $a \neq 0, -\infty < t < \infty$. Этот путь, очевидно, является регулярным, так как $r'(t) = a \neq 0$.

Если в системе координат $Oijk$ ввести обозначения для координат векторов $r, a, b: r(x, y, z), a(a_1, a_2, a_3), b(b_1, b_2, b_3)$, то координаты функции r будут иметь вид:

$$x = a_1 t + b_1, \quad y = a_2 t + b_2, \quad z = a_3 t + b_3.$$

Мы пришли к выводу, что путь l_1 является отображением числовой оси на некоторую прямую пространства TE_3 (см. I, § 51, п. 5).

Пример 2. Рассмотрим путь l_2 , векторное параметрическое представление которого имеет вид: $r = a \cos t \, i + b \sin t \, j + ct \, k$, где a, b, c — произвольные числа, причем $a \neq 0$ и $b \neq 0, 0 \leq t < \pi$. Путь l_2 также является регулярным, так как выполнены оба условия регулярности.

Для того чтобы выяснить геометрический смысл пути l_2 , рассмотрим его параметрическое представление в координатах:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad z = ct.$$

Отсюда следует, что путь l_2 является отображением полусегмента $[0; 2\pi]$ на эллипс: $x = a \cos t, y = b \sin t$, лежащий в плоскости $z = ct$ (см. I, § 34, п. 4).

Пример 3. Рассмотрим путь l_3 , векторное параметрическое представление которого имеет вид: $r = (a \cos t) \, i + (a \sin t) \, j + (bt) \, k$, где a и b — положительные числа, $-\infty < t < \infty$. Путь l_3 является регулярным путем и имеет следующее параметрическое представление в координатах:

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt. \quad (3)$$

4. Понятие кривой. Пусть

$$t = \varphi(u) \quad (4)$$

некоторая скалярная функция от скалярного аргумента u , заданная на промежутке I_0 . Функция $\varphi(u)$ называется *допустимым* значением параметра, если она принадлежит классу $C^1(I_0)$ и во всех точках промежутка I_0 имеем: $\frac{d\varphi}{du} \neq 0$.

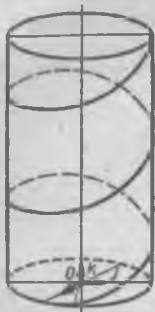


Рис. 192.

Введем следующее определение. Два простых пути I_1 и I_2 , заданных соответственно на промежутках I_1 и I_2 , называются эквивалентными, если при одном и том же выборе полюса их параметрические представления $r_1 = r_1(t)$, $t \in I_1$ и $r_2 = r_2(u)$, $u \in I_2$, удовлетворяют условию: на промежутке I_2 существует такое допустимое изменение параметра $t = t(u)$, что $I_1 = t(I_2)$ и, кроме того, $r_1(t(u)) = r_2(u)$.

Легко показать, что введенное выше понятие эквивалентности путей является отношением эквивалентности (см. п. 2). Класс эквивалентных между собой простых путей называется кривой или линией¹. Аналогично, класс эквивалентных между собой дифференцируемых путей называется дифференцируемой кривой,

а класс эквивалентных регулярных путей — регулярной кривой или регулярной линией. Очевидно, кривая в указанном выше смысле определяет некоторое множество точек, принадлежащих TE_3 , поэтому иногда в учебной литературе под кривой понимается это множество точек. Далее, всякая кривая L вполне определяется заданием хотя бы одного пути I из класса эквивалентных путей, характеризующих данную кривую L . Поэтому, если (2) — параметрическое представление пути I , то мы будем говорить, что кривая L задана векторной функцией (2), или что функция (2) является векторным параметрическим представлением кривой L . Аналогично будем говорить, что кривая L задана скалярными функциями (1), или (1) является параметрическим представлением кривой в координатах.

Существенно отметить, что если кривая L задана векторной функцией (2), то не всякое свойство функции $r = r(t)$ является свойством кривой L . Любое свойство кривой L должно быть общим для всех параметрических представлений класса эквивалентных путей, определяющих кривую L , т. е. эти свойства должны быть независимы от выбора параметра.

Кривые, заданные путями I_1 и I_2 в примерах 1 и 2 предыдущего пункта, являются соответственно прямой и эллипсом, а кривая, заданная путем I_3 (пример 3), называется винтовой линией. Из первых двух соотношений (3) следует, что любая точка рассматриваемой кривой лежит на круговой цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = a^2$ (см. рис. 192).

По аналогии с предыдущим можно обобщить понятие регулярной кривой и ввести определение регулярной кривой класса $C^k(I_0)$, где k — любое натуральное число. Для этого достаточно слово в слово повторить все рассуждения, приведенные в п. 3 и 4 настоящего параграфа со следующими коррективами:

¹ В учебной литературе этот геометрический образ иногда называется простой кривой.

1. Векторное параметрическое представление (2) пути I принадлежит классу $C^k(I_0)$, где $k \geq 1$ (путь класса $C^k(I_0)$).

2. Функция (4), определяющая допустимые изменения параметра, принадлежит классу $C^k(I_1)$.

Класс эквивалентных между собой регулярных путей класса $C^k(I_0)$, где $k \geq 1$, называется регулярной кривой класса $C^k(I_0)$. При $k = 1$ получаем определение регулярной кривой.

В заключение сделаем следующее существенное замечание. Легко видеть, что регулярный путь класса $C^k(I_0)$ является также регулярным путем класса $C^l(I_0)$, если $l < k$. Однако аналогичное утверждение для регулярных кривых не имеет места, т. е. регулярная кривая класса $C^k(I_0)$ не является регулярной кривой класса $C^l(I_0)$, где $l < k$. В самом деле, регулярная кривая $r = r(t)$ класса $C^k(I_0)$ содержит только класс эквивалентных между собой регулярных путей класса $C^k(I_0)$, то есть путей, параметрические представления которых получаются из $r = r(t)$ при помощи допустимых изменений параметров класса $C^k(I_0)$. Кривая же класса C^l , где $l < k$, в дополнение к предыдущему, содержит пути, параметрические представления которых получаются из $r = r(t)$ при помощи допустимых изменений параметров класса $C^l(I_0)$, которые не являются изменениями параметров класса $C^k(I_0)$.

Таким образом, если предположить, что векторной функцией (2), заданной на промежутке I_0 , определена регулярная кривая класса $C^k(I_0)$, где $k \geq 1$, то это означает, что переход от параметра t к другому параметру u должно быть осуществлено при помощи функции, принадлежащей классу $C^k(I_0)$, т. е. более узкому классу, чем в случае просто дифференцируемой кривой. Например, винтовую линию, заданную путем I_0 (пример 3), можно рассматривать, как дифференцируемую кривую, если рассматривать класс эквивалентных путей, полученных из I_0 допустимыми изменениями параметра. Но если ограничиться изменениями параметров, заданных только аналитическими функциями (4), т. е. функциями, принадлежащими классу $C^\infty(I_0)$, то получим регулярную аналитическую кривую.

5. Параметризованная кривая. Векторное параметрическое задание (2) регулярной кривой L (или, что то же самое, координатное параметрическое задание (1)) определяет не только кривую L , но и путь, т. е. гомеоморфизм, порождающий эту линию. Но так как гомеоморфизм является взаимно однозначным отображением сегмента $[a_0, b_0]$ на точки множества L , то тем самым каждой точке регулярной кривой ставится в соответствие число $t = f^{-1}(M)$. Оно называется параметром данной точки M . Регулярная кривая, заданная при помощи формулы (3), называется параметризованной.

В соответствии с этой терминологией параметризацией регулярной кривой будем называть тот или иной конкретный гомеоморфизм, который порождает эту кривую.

Очевидно, существует большой произвол в параметризации кривой L , так как одну и ту же кривую можно определить любым представителем класса эквивалентных между собой путей. В соответствии с этим одна и та же кривая имеет, вообще говоря, бесчисленное множество векторных параметрических представлений. Переход от одной параметризации к другой осуществляется, как мы знаем, при помощи допустимого изменения параметра (4). Из условий, накладываемых на эту функцию (см. п. 4), следует, что $\frac{d\varphi}{du}$ является непрерывной и $\frac{d\varphi}{du} \neq 0$. Поэтому возможны два случая: 1) $\frac{d\varphi}{du} > 0$ на промежутке I_1 ; в этом случае $\varphi(u)$ — монотонно возрастающая функция; 2) $\frac{d\varphi}{du} < 0$ на промежутке I_1 . В этом случае $\varphi(u)$ — монотонно убывающая функция. В любом случае существует обратная функция $u = \varphi^{-1}(t)$, которая также является допустимым изменением параметра на промежутке I_1 .

Если линия L при параметризации t задана векторной функцией $r(t)$, то, очевидно, при параметризации u та же линия будет задана функцией $r = r(\varphi(u))$. Таким образом, при переходе к новому параметру линия будет задаваться сложной функцией

$$r = r(\varphi(u)). \quad (5)$$

6. Естественная параметризация на кривой. Выше было отмечено, что параметризацию на кривой L можно осуществлять бесчисленным множеством способов. Поэтому возникает необходимость в выборе такой параметризации на кривой, которая была бы естественно связана с самой кривой. Мы сейчас покажем, что для регулярных кривых такая параметризация всегда существует. Введем следующее определение: параметризацию s регулярной кривой L будем называть естественной, если векторная функция $R = R(s)$, заданная на промежутке I_0 и определяющая кривую L в этой параметризации, обладает свойством $|\frac{dR}{ds}| = 1$ во всех точках промежутка I_0 .

Покажем, что для всякой регулярной кривой существует естественная параметризация, и выясним произвол ее выбора.

Сначала допустим, что на регулярной кривой L , заданной векторной функцией (2) класса $C^{(1)}(I_0)$, существует естественная параметризация s , причем функция $s = s(t)$, являющаяся допустимым изменением параметра, согласно пункту б) определения удовлетворяет условию: во всех точках промежутка I_0 имеем $s'(t) \neq 0$. Поэтому, не нарушая общности, будем считать, что во всех точках промежутка I_0 $s'(t) > 0$, т. е. $s = s(t)$ — строго возрастающая функция. Это означает, что существует обратная функция $t = t^{-1}(s)$ на соответствующем промежутке I_0 , которая также строго возрастающая функция.

Кривая L в параметризации s задана сложной функцией $R(s) = r(t(s))$, поэтому $\dot{R} = r' \dot{t}$. Здесь и в дальнейшем точкой сверху обозначены производные по естественному параметру s , а штрихом —

производные по произвольному параметру t . Так как s — естественный параметр, то $|R| = 1$, поэтому $|r' \dot{t}| = 1 \Rightarrow |r'| |\dot{t}| = 1 \Rightarrow |r'| \dot{t} = 1$. Отсюда следует, что $|r'| = \frac{1}{\dot{t}}$.

Таким образом, мы получаем следующее явное выражение для функции s :

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{dr}{dt} \right| dt, \quad (6)$$

где $t_0 \in I_0$. Итак, если существует естественная параметризация, то функция, осуществляющая переход от данной параметризации к естественной, определяется формулой (6). Легко видеть, что эта функция является допустимым изменением параметра. В самом деле, из формулы (6) непосредственно вытекает, что $s'(t) = \left| \frac{dr}{dt} \right| > 0$ во всех точках промежутка I_0 и, кроме того, $s(t) \in C^1(I_0)$. Таким образом, мы приходим к следующему важному выводу: какова бы ни была параметризация регулярной кривой L , всегда существует допустимое изменение параметра (6), осуществляющее переход от этой параметризации к естественной. Другими словами, на регулярной кривой L всегда существует естественная параметризация.

Формула (6) позволяет выяснить геометрический смысл естественной параметризации. В самом деле, если $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — координаты вектор-функции $r(t)$, то $\left| \frac{dr}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$; поэтому соотношение (6) принимает вид:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt. \quad (7)$$

Известно, что по этой формуле вычисляется длина дуги кривой L с концами $M_0(t_0)$ и $M(t)$, $t > t_0$. Таким образом, мы приходим к следующему геометрическому смыслу естественной параметризации: параметр s есть длина дуги, вычисленная от некоторой фиксированной точки $M_0(t_0)$ кривой до переменной точки M с параметром t и взятая с определенным знаком, а именно при $t > t_0$ $s > 0$, при $t = t_0$ $s = 0$ и при $t < t_0$ $s < 0$.

Отсюда, в частности, можно сделать вывод о степени произвола при выборе естественной параметризации: естественная параметризация однозначно определяется выбором начальной точки и направления на кривой. Таким образом, если s и s^* — две естественные параметризации на кривой, то эти параметризации связаны соотношением:

$$s^* = \varepsilon_1 s + a, \quad (8)$$

где $\varepsilon_1 = \pm 1$ и a — произвольное постоянное число.

¹ См. [49], т. II, гл. X.

В дальнейшем всюду условимся производные по естественному параметру отмечать точками: $\dot{r} = \frac{dr}{ds}$, $\ddot{r} = \frac{d^2r}{ds^2}$ и т. д. В отличие от этого, производные по произвольному параметру будем обозначать штрихами: r' , r'' и т. д.

Пример. Записать в естественной параметризации уравнения винтовой линии (3), заданной в произвольной параметризации.

Решение. Пользуясь формулой (7), сначала определим функцию $s(t)$. Приняв за начальную точку $t_0 = 0$, из соотношений (3) получаем:

$$\begin{aligned} x' &= -a \sin t, \quad y' = a \cos t, \quad z' = b, \quad \text{поэтому} \\ s &= \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} t. \end{aligned}$$

Отсюда получаем: $t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Подставив значения t в соотношения (3), окончательно будем иметь:

$$x = a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad z = \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (9)$$

§ 74. Соприкасающаяся плоскость. Сопровождающий трехгранник

1. Вектор-функция постоянного модуля. Пусть дана вектор-функция

$$r = r(t), \quad (1)$$

дифференцируемая на промежутке I_1 . Эту функцию будем называть функцией постоянного модуля, если для всех значений $t \in I_1$ имеем: $|r(t)| = \alpha_0$, где α_0 — некоторое постоянное положительное число. Легко понять геометрический смысл рассматриваемого класса функций: кривая, определяемая функцией (1) постоянного модуля, будет принадлежать сфере радиуса α_0 с центром в полюсе¹.

Соотношение $|r(t)| = \alpha_0$ эквивалентно следующему: $r(t)r(t) = \alpha_0^2$. Дифференцируя его, получаем:

$$r'(t)r(t) = 0. \quad (2)$$

Таким образом, для функции постоянного модуля выполняется соотношение (2).

Имеет место обратное предложение: если соотношение (2) выполняется для всех $t \in I_1$, то (1) является функцией постоянного модуля.

¹ Выше, в п. 4 § 73, было отмечено, что каждая кривая L в пространстве TE_3 определяет некоторое множество точек $\{L\}$, поэтому если $\{L\} \subset \Omega$, где Ω — некоторое множество точек (в частности поверхность), то говорят, что кривая L принадлежит Ω .

В самом деле, из (2) получаем:

$$r(t)r'(t) + r'(t)r(t) = 0 \Rightarrow \frac{d(r(t)r(t))}{dt} = 0 \Rightarrow r(t)r(t) = \text{const}.$$

Таким образом, мы пришли к следующему выводу:

Лемма [74.1]. Для того чтобы вектор-функция (1), дифференцируемая на промежутке I_1 , была функцией постоянного модуля, необходимо и достаточно, чтобы при любом $t \in I_1$ векторы $r(t)$ и $r'(t)$ были ортогональны.

Сформулированное предложение имеет простой геометрический смысл: для того чтобы пространственная кривая лежала на некоторой сфере с центром в точке O , необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке M этой кривой касательная к кривой была ортогональна к отрезку OM (см. п. 3).

2. Особые точки и точки распрямления. Пусть функция (1), заданная на промежутке I_0 , является параметрическим представлением дифференцируемой, но не регулярной кривой L . Точка M_0 кривой L называется *особой*, если в этой точке $r'(t) = 0$.

Из формулы (4), § 72, следует, что это определение не зависит от выбора параметрического представления кривой. Так как мы в дальнейшем ограничиваемся изучением только регулярных кривых, то в силу определения этих кривых особые точки из рассмотрения исключаются. Заметим, однако, что с понятием особых точек связаны интересные геометрические результаты (см. [40]).

Теперь рассмотрим регулярную кривую L , заданную функцией (1) на промежутке I_0 . Точка M_0 кривой называется *точкой распрямления*, если в этой точке $r'(t) \parallel r''(t)$.

Пользуясь теоремой [72.5], легко показать, что это определение носит геометрический характер и не зависит от выбора параметрического представления кривой, т. е. при любом параметрическом представлении $r = r(u)$ будем иметь: $\frac{dr}{du} \parallel \frac{d^2r}{du^2}$.

Пользуясь этим замечанием, докажем предложение.

Лемма [74.2]. Для того чтобы данная точка кривой, заданной в естественной параметризации $r = r(s)$, была точкой распрямления, необходимо и достаточно, чтобы $r = 0$.

Доказательство. По определению в точке распрямления $\dot{r} \parallel \ddot{r}$. Так как $\dot{r}$ — вектор-функция постоянного модуля, то согласно лемме [74.1] $\dot{r} \perp r$. Из этих двух соотношений следует, что $r = 0$. Обратное утверждение очевидно. ■

Прямая линия является тривиальным примером регулярной кривой, каждая точка которой является точкой распрямления. (Отсюда и термин «точка распрямления».) В самом деле, пусть прямая задана вектор-функцией $r = at + b$ (см. § 73, пример 1). Тогда $r'(t) = a$ и $r''(t) = 0$, поэтому $r' \parallel r''$. Более интересное и менее очевидное является обратное утверждение: *если на некотором участке кривой L все точки являются точками распрямления, то кривая L на данном участке является отрезком прямой.* В самом деле, если L задана в

естественной параметризации вектор-функцией $r = r(s)$ на промежутке I_0 , то согласно лемме [74.2] имеем: $\frac{dr}{ds} = 0$. Отсюда следует, что $\frac{dr}{ds} = p$, где p — постоянный вектор. Запишем полученное соотношение в координатах: $\frac{dx}{ds} = p_1, \frac{dy}{ds} = p_2, \frac{dz}{ds} = p_3$, где p_1, p_2, p_3 — координаты вектора p . Пронтегрируем эти соотношения: $x = p_1 s + a_1, y = p_2 s + a_2, z = p_3 s + a_3$. Мы получим параметрические уравнения прямой на промежутке I_0 .

Таким образом, регулярные линии, отличные от прямых, могут иметь только отдельные точки распрямления. В дальнейшем эти точки, как правило, будем исключать из рассмотрения.

3. Касательная прямая к кривой. Пусть L — некоторая регулярная кривая, заданная вектор-функцией (1).

Секущей кривой L называется любая прямая, проходящая через две ее точки $M_1(t_1)$ и $M_2(t_2)$. В дальнейшем нам удобно считать, что каждая секущая на параметризованной кривой является направленной прямой, при этом направление определяется вектором $\overline{M_1 M_2}$, если $t_1 < t_2$, и вектором $\overline{M_2 M_1}$, если $t_2 < t_1$. В этом случае будем говорить, что секущая направлена в сторону возрастания параметра кривой.

Возьмем некоторую фиксированную точку M_0 на кривой L и в окрестности этой точки переменную точку M , принадлежащую той же кривой. Пусть прямая $M_0 M$ будет направленной секущей данной кривой. Касательной к данной кривой в точке M_0 будем называть предельное положение секущей, когда $M \rightarrow M_0$ (ср. I, § 41, п. 7). Покажем, что в любой точке регулярной кривой существует касательная. Для этой цели проведем следующие простые рассуждения. Пусть t_0 и $t_0 + \Delta t$ — соответственно параметры точек M_0 и M , тогда

$$\overline{M_0 M} = r(t_0 + \Delta t) - r(t_0). \quad (3)$$

Этот вектор, очевидно, принадлежит секущей $M_0 M$ и имеет направление возрастания параметра кривой, если $\Delta t > 0$, и противоположное направление, если $\Delta t < 0$. Вектор $p(\Delta t) = \frac{\overline{M_0 M}}{\Delta t}$ также является вектором секущей, но в отличие от вектора $\overline{M_0 M}$ при любом $\Delta t \neq 0$ направлен в сторону возрастания параметра кривой.

Из соотношения (3) следует:

$$p(\Delta t) = \frac{r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)}{\Delta t}. \quad (4)$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ вектор-функция $p(\Delta t)$ имеет предел, так как вектор-функция $r(t)$ дифференцируема в точке t_0 . Более того, из того же выражения видно, что $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} p(\Delta t) = r'(t_0)$. Напомним, что, согласно условию регулярности линии L , $r'(t_0) \neq 0$, отсюда следует, что $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} p(\Delta t) \neq 0$.

Теперь вернемся к секущей $M_0 M$. Так как при любом $\Delta t \neq 0$ вектор $p(\Delta t)$ принадлежит этой секущей и так как $p(\Delta t)$ при $\Delta t \rightarrow 0$ имеет пределом вектор $r'(t_0)$, то отсюда мы заключаем, что при $M \rightarrow M_0$ секущая $M_0 M$ имеет предельное положение, совпадающее с прямой, проходящей через M_0 и содержащей вектор $r'(t_0)$. Другими словами, в точке M_0 имеется касательная к кривой L , содержащая вектор $r'(t_0)$.

Для дальнейшего изложения нам удобно считать, что не только секущие к кривой, проходящие через данную точку M_0 , являются направленными прямыми, но и касательная в этой точке является направленной прямой. При этом, естественно, направление на касательной выбрать так, чтобы оно было согласовано с направлением всех хорд, проходящих через точку M_0 . Выше было отмечено, что вектор $p(\Delta t)$ при любом положении точки M , отличном от M_0 , имеет направление секущей $M_0 M$, поэтому целесообразно считать, что направление на касательной (которая является предельным положением секущей) определяется вектором $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} p(\Delta t) = r'(t_0)$. В этом случае мы будем говорить, что направление на касательной выбрано в сторону возрастания параметра.

Резюмируя, приходим к следующей теореме.

Теорема [74.3]. В каждой точке t_0 регулярной кривой, заданной соотношением (1), существует касательная, содержащая вектор $r'(t_0)$. При этом направление на касательной, выбранное в сторону возрастания параметра, совпадает с направлением вектора $r'(t_0)$.

Заметим, что формула (4), § 72, как легко видеть, полностью согласуется с этой теоремой, т. е. производная вектор-функции, определяющей данную кривую, при любой параметризации направлена по касательной к кривой в данной точке.

Следствие. В каждой точке регулярной кривой, заданной в естественной параметризации $r = r(s)$, единичный вектор $\frac{dr}{ds}$ направлен по касательной.

4. Сопровождающий трехгранник кривой. Пусть регулярная кривая L класса C^2 задана соотношением (1). Рассмотрим в точке M_0 , отличной от точки распрямления, векторы $\frac{dr}{dt}$ и $\frac{d^2 r}{dt^2}$. Так как по предположению точка M_0 не является точкой распрямления, то эти векторы не коллинеарны, поэтому они определяют вместе с точкой M_0 некоторую плоскость, которую назовем соприкасающейся плоскостью кривой L в данной точке M_0 . Существенно заметить, что положение соприкасающейся плоскости не зависит от выбора параметризации на кривой L . В самом деле, если $R = R(u)$ — задание той же кривой в параметризации u , а $t = \varphi(u)$ — функция, осуществляющая допустимое изменение параметра, то $R(u) = r(\varphi(u))$, поэтому в силу теоремы [72.5] имеем:

$$\frac{dR}{du} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{du}, \quad \frac{d^2 R}{du^2} = \frac{d^2 r}{dt^2} \left(\frac{dt}{du} \right)^2 + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d^2 t}{du^2}. \quad (5)$$

Очевидно, плоскости $\left\{ M_0, \frac{dr}{dt}, \frac{d^2 r}{dt^2} \right\}$ и $\left\{ M_0, \frac{dR}{du}, \frac{d^2 R}{du^2} \right\}$ совпадают.

Легко видеть, что касательная l_i к кривой в точке M_0 лежит в соприкасающейся плоскости, так как она определяется точкой M_0 и вектором r' . Обозначим через ω полуплоскость соприкасающейся плоскости, определяемую касательной в точке M_0 и вектором r'' (см. определение 1, § 48). Из формул (5) следует, что при любой параметризации на кривой вектор r'' лежит в полуплоскости ω .

Таким образом, заданием кривой L эта полуплоскость определяется однозначно. Ее мы будем называть полуплоскостью вогнутости кривой по соображениям, изложенным ниже.

Нормалью к кривой в точке M_0 называется любая прямая пространства, проходящая через точку M_0 и ортогональная касательной к кривой в этой точке. Нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости, называется главной нормалью, а нормаль, перпендикулярная к соприкасающейся плоскости, — бинормалью. Главную нормаль обозначим через l_n , а бинормаль — через l_b . Таким образом, в данной точке M_0 мы получили три взаимно перпендикулярные прямые l_i , l_n и l_b , из которых пара прямых l_i и l_n определяет соприкасающуюся плоскость Π_{in} , остальные две пары прямых l_n , l_b и l_i , l_b определяют еще две плоскости Π_{nb} и Π_{ib} , которые называются соответственно нормальной и спрямляющей плоскостями. Построенный геометрический образ, состоящий из трех прямых l_i , l_n , l_b и трех плоскостей Π_{in} , Π_{ib} , Π_{nb} , называется сопровождающим трехгранником кривой (рис. 193).

Полупространство, определяемое спрямляющей плоскостью Π_{ib} , содержащее полуплоскость вогнутости кривой, называется полупространством вогнутости кривой.

Для дальнейшего изложения нам необходимо с данной точкой M_0 кривой связать некоторый прямоугольный декартов базис t, n, b , который вводится следующим образом. Если кривая задана уравнением (1), то условимся вектор t выбирать так, чтобы он был сона-

правлен с вектором $\frac{dr}{ds}$. Далее, век-

тор n направим так, чтобы он принадлежал полуплоскости вогнутости кривой, и наконец, в качестве третьего вектора выберем вектор $b = [t, n]$.

Построенную систему координат M_0, t, n, b назовем локальной системой координат в точке M_0 .

Из способа построения векторов t, n, b непосредственно следуют соотношения:

$$t = [nb], \quad n = [bt], \quad b = [tn]. \quad (6)$$

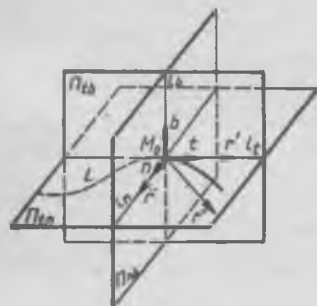


Рис. 193.

Заметим, что направление вектора n полностью определяется данной кривой и не зависит от выбора параметризации, так как понятие «полуплоскость вогнутости кривой», как уже отмечалось выше, определяется самой кривой. Направления же векторов t и b меняются, если изменить направление параметризации на кривой.

5. Взаимное расположение кривой и плоскости.

Возьмем некоторую регулярную кривую L , принадлежащую классу $C^{(n)}$, и на этой кривой точку M_0 , которая не является точкой распрямления. Предположим, что через эту точку проведена некоторая плоскость Π . Оценим «степень близости» кривой L к плоскости Π . Для того чтобы уточнить поставленную задачу, выполним следующее построение: возьмем некоторую переменную точку M на кривой L , принадлежащую окрестности точки M_0 , и рассмотрим проекцию H этой точки на плоскость Π (см. рис. 194). Обозначим через Δs длину дуги M_0M . Введем следующее соглашение: будем говорить, что в точке M_0 кривая L имеет с плоскостью Π касание n -го порядка, если $|MH|$ есть бесконечно малая не ниже $(n+1)$ -го порядка относительно Δs , и касание точно n -го порядка, если $|MH|$ есть бесконечно малая точно $(n+1)$ -го порядка относительно Δs . Для того чтобы определить порядок касания данной кривой с плоскостью Π , воспользуемся формулой Тейлора. Предположим, что кривая задана функцией $r = r(s)$, где s — естественный параметр, и запишем формулу Тейлора для функции $r(s)$ в точке s_0 для $n = 2$ (см. формулу (1), § 72)¹.

$$r(s_0 + \Delta s) = r(s_0) + \dot{r}_0 \frac{\Delta s}{1!} + \ddot{r}_0 \frac{\Delta s^2}{2!} + e(s_0, \Delta s) \Delta s^2, \quad (7)$$

где $\dot{r}_0 = \dot{r}(s_0)$, $\ddot{r}_0 = \ddot{r}(s_0)$.

Если m — единичный вектор, ортогональный плоскости Π , то ясно, что $M_0M \cdot m = e |MH|$, где $e = \pm 1$. Принимая во внимание, что $M_0M = r(s_0 + \Delta s) - r(s_0)$, из формулы (7) получаем:

$$e |MH| = m \dot{r}_0 \frac{\Delta s}{1!} + m \ddot{r}_0 \frac{\Delta s^2}{2!} + m e(s, \Delta s) \Delta s^2.$$

Заметим, что в этой формуле $\dot{r}_0, \ddot{r}_0$ — постоянные векторы, а оставшийся член $m e$ стремится к нулю при $\Delta s \rightarrow 0$. Исследуем полученную формулу. Могут представиться следующие случаи.

1°. $m \dot{r}_0 \neq 0$. В этом случае, очевидно, $|MH|$ есть бесконечно малая точно первого порядка относительно Δs , так как $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|MH|}{\Delta s} = e m \dot{r}_0 \neq 0$; поэтому кривая L имеет с плоскостью касание точно нулевого порядка.

¹ Напомним, что $\dot{r} = \frac{dr}{ds}$, $\ddot{r} = \frac{d^2r}{ds^2}$, ... (см. конец § 73).

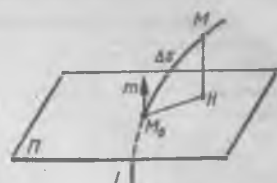


Рис. 194.

2°. $m\vec{r}_0 = 0$, $m\vec{r}_0 \neq 0$. В этом случае $|MH|$ будет бесконечно малой точно второго порядка относительно Δs , так как $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|MH|}{\Delta s^2} = \epsilon m\vec{r}_0 \neq 0$. В силу этого кривая L с плоскостью Π будет иметь касание точно первого порядка.

3°. $m\vec{r}_0 = 0$ и $m\vec{r}_0 = 0$. В этом случае, как нетрудно видеть, $|MH|$ будет бесконечно малой третьего порядка относительно Δs , поэтому кривая L имеет с плоскостью Π касание второго порядка.

Выясним геометрический смысл каждого из случаев, рассмотренных выше. В случае 1° плоскость Π проходит через точку M_0 и пересекает касательную под некоторым углом, так как $r_0 \notin \Pi$.

В случае 2° плоскость содержит касательную прямую, так как $m\vec{r} = 0$, но не совпадает с соприкасающейся плоскостью. В этом случае мы имеем касание точно первого порядка. Примером такой плоскости является спрямляющая плоскость $\Pi_{\text{сп}}$. В случае 3° векторы $\vec{r}_0$ и $\vec{r}_0$ принадлежат плоскости Π , поэтому плоскость Π совпадает с соприкасающейся плоскостью $\Pi_{\text{сп}}$.

Таким образом, мы приходим к следующему геометрическому свойству соприкасающейся плоскости: *соприкасающаяся плоскость — это та единственная плоскость, проходящая через точку M_0 , которая имеет с кривой касание второго порядка.*

§ 75. Кривизна и кручение. Плоские кривые

1. Скорость изменения вектор-функции по отношению к параметру. Пусть $r = r(t)$ — вектор-функция, заданная на промежутке I_0 и не обращающаяся в нуль ни в одной точке этого промежутка. Введем понятие скорости изменения направления этой функции по отношению к ее аргументу. Пусть Δt — приращение аргумента в данной точке t_0 , а $\delta\varphi$ — угол между векторами $r(t_0)$ и $r(t_0 + \Delta t)$. Величину $\left| \frac{\delta\varphi}{\Delta t} \right|$

назовем средней скоростью изменения направления функции $r(t)$ на участке от t_0 до $t_0 + \Delta t$, а предел этой величины, если он существует, — скоростью изменения направления функции $r(t)$ в точке t_0 . Легко доказать следующее предложение.

Теорема [75.1]. Если вектор-функция единичного модуля $m = m(t)$, заданная на промежутке I_0 , дифференцируема на этом промежутке, то в каждой точке этого промежутка существует скорость изменения направления вектор-функции по отношению к аргументу t , которая вычисляется по формуле

$$V_t = \left| \frac{dm}{dt} \right|. \quad (1)$$

Доказательство. Для удобства изложения будем предполагать, что для всех $t \in I_0$ векторы $m(t)$ приложены к некоторой фиксированной точке O пространства, а L — кривая, заданная вектор-функцией $m = m(t)$. Пусть M_0 и M точки, соответствующие значениям

параметров t_0 и $t_0 + \Delta t$. Так как $|OM_0| = |OM| = 1$, то $\delta\varphi = \angle M_0OM$; поэтому $\left| \frac{\delta\varphi}{\Delta t} \right| = \frac{|M_0M|}{|\Delta t|} = \frac{|M_0M|}{|\Delta t|} \cdot \frac{|\Delta t|}{|M_0M|}$, где $|M_0M|$ — длина хорды дуги M_0M .

Учитывая, что $|M_0M| = |m(t_0 + \Delta t) - m(t_0)|$, получаем:

$$\left| \frac{\delta\varphi}{\Delta t} \right| = \left| \frac{m(t_0 + \Delta t) - m(t_0)}{\Delta t} \right|. \quad (2)$$

Так как функция $\frac{m(t_0 + \Delta t) - m(t_0)}{\Delta t}$ от аргумента Δt при $\Delta t \rightarrow 0$ имеет предел, равный $\left(\frac{dm}{dt} \right)_0$, то модуль этой функции также имеет предел, равный $\left| \frac{dm}{dt} \right|_0$. Последнее утверждение станет очевидным, если перейти к координатам функции $m(t)$. Из соотношения (2), перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем искомый результат. ■

2. Кривизна кривой. Пусть L — кривая, заданная вектор-функцией от естественного параметра

$$r = r(s) \quad (3)$$

на промежутке I_0 . Предположим, что на этом промежутке кривая L не имеет особых точек и дважды дифференцируема. Рассмотрим вектор-функцию

$$t = t(s) = r'(s). \quad (4)$$

Как было показано выше (см. следствие теоремы [74.3]), эта функция в каждой точке кривой определяет единичный касательный вектор. Скорость изменения направления функции $t(s)$ по отношению к естественному параметру s называется кривизной кривой L и обозначается через k . Таким образом, в силу теоремы [75.1] имеем:

$$k(s) = \left| \frac{dt}{ds} \right| = \left| \frac{d^2r}{ds^2} \right|. \quad (5)$$

В каждой фиксированной точке M_0 кривой кривизна есть некоторое положительное число k , а на кривой в целом — функция от естественного параметра s . Легко показать, что кривизна кривой в данной точке не зависит ни от выбора полюса O , ни от выбора начальной точки и направления естественной параметризации. Предлагаем читателю провести это доказательство самостоятельно, используя соотношение (8), § 73.

Теорема [75.1] показывает, что данное нами определение кривизны полностью согласуется с нашим наглядным представлением о кривизне кривой как степени ее отклонения от своей касательной. В самом деле, из этой теоремы следует, что k есть скорость изменения направления касательного вектора $t = t(s)$ по отношению к естественному параметру s , т. е. эта величина в данной точке t_0 характеризует скорость отклонения касательной от ее первоначального положения.

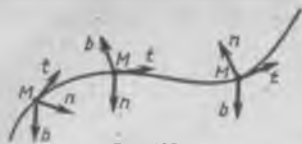


Рис. 195.

Формула (5) показывает, что кривизна k в данной точке M_0 не отрицательна; она равна нулю тогда и только тогда, когда точка M_0 является точкой распрямления (см. лемму [74.2]). Учитывая выводы п. 2, § 74, приходим к следующему результату: для того чтобы кривизна

кривой во всех точках равнялась нулю, необходимо и достаточно, чтобы кривая была прямой линией. Так как мы условились исключить из рассмотрения точки распрямления, то в дальнейшем предполагаем, что во всех точках рассматриваемого участка кривой кривизна положительна.

3. Формулы Серре — Френе. Если предположить, что точка M регулярной кривой L движется вдоль нее, то векторы t, n, b локальной системы координат $Mtnb$ (см. § 74, п. 4) меняют свое положение в пространстве, как бы сопровождая точку M . Мы получаем картину, изображенную на рисунке 195.

Если кривая L задана в естественной параметризации (3) на промежутке I_n , то $t = t(s)$, $n = n(s)$, $b = b(s)$ будут функциями от s на том же промежутке. Из определения векторной функции единичного модуля $n(s)$ с учетом соотношения (5) получаем:

$$n = \frac{\dot{r}}{|\dot{r}|} = \frac{\dot{r}}{k}, \text{ или } \dot{r} = kn. \quad (6)$$

Учитывая соотношение (4), получим (см. § 74, (6)):

$$[\dot{r}\dot{r}] = [t(kn)] = kb. \quad (7)$$

Предположим, что L — регулярная кривая класса не ниже чем три, и поставим следующую задачу: вычислить координаты векторов t, n, b в базисе t, n, b . Соотношение (6) с учетом (4) можно записать так:

$$\dot{t} = kn. \quad (8)$$

Согласно лемме [74.1] имеем: $b\dot{b} = 0$, поэтому

$$\dot{b} = \alpha t + \beta n. \quad (9)$$

Далее, $tb = 0 \Rightarrow \dot{tb} + t\dot{b} = 0 \Rightarrow (kn)b + t\dot{b} = 0 \Rightarrow t\dot{b} = 0 \Rightarrow \dot{t}(\alpha t + \beta n) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$. Если положить $\beta = -\kappa$, то из (9) получаем:

$$\dot{b} = -\kappa n. \quad (10)$$

Для вычисления координат вектора n заметим, что согласно лемме [74.1] имеем: $nn = 0$, поэтому $\dot{n} = \alpha't + \gamma'b$. Отсюда следует, что $\alpha' = -\kappa t$ и $\gamma' = \kappa b$. Дифференцируя соотношения $nt = 0$ и $nb = 0$ и учитывая (8) и (10), легко прийти к выводу, что $\alpha' = -\kappa$, $\gamma' = \kappa$, поэтому

$$\dot{n} = -\kappa t + \kappa b. \quad (11)$$

Поставленная выше задача решена: мы получили разложение векторов t, n, b в локальном базисе t, n, b :

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= \kappa n, \\ \frac{dn}{ds} &= -\kappa t + \kappa b, \\ \frac{db}{ds} &= -\kappa n. \end{aligned} \quad (12)$$

Полученные формулы называются формулами Серре — Френе.

4. Кривизна кривой. Величина κ в формуле (10) называется кривизной кривой. Оно, так же как и кривизна, является некоторым числом в данной точке и функцией $\kappa = \kappa(s)$ на всей кривой, но в отличие от кривизны для регулярных кривых κ может принимать положительные, отрицательные значения и в отдельных точках обращаться в нуль. Геометрический смысл кривизны легко усматривается из соотношения (10). Учитывая, что $\left|\frac{db}{ds}\right| = |\kappa|$, из теоремы [75.1] приходим к выводу: модуль кривизны в данной точке кривой есть скорость изменения направления функции $b(s)$ по отношению к естественному параметру s . Так как вектор $b(s)$ всегда перпендикулярен соприкасающейся плоскости, то отсюда вытекает, что $|\kappa|$ характеризует скорость изменения положения соприкасающейся плоскости по отношению к параметру s .

Из формулы (10) усматривается также геометрический смысл знака кривизны. Мы знаем, что вектор n в данной точке всегда принадлежит полупространству вогнутости кривой (см. п. 4, § 74), поэтому при $\kappa < 0$ вектор $\frac{db}{ds}$ принадлежит полупространству вогнутости кривой, а при $\kappa > 0$ этот вектор принадлежит другому полупространству.

Выясним, как вычислить кривизну кривой, если кривая задана в естественной параметризации (3). Дифференцируя соотношение (6), получаем: $\dot{r} = kn + k(\kappa b - kt)$, или $\dot{r} = -k^2t + kn + k\kappa b$. Отсюда следует, что $\dot{r}\dot{r} = t(kn)(-k^2t + kn + k\kappa b) = k^2\kappa$, так как $(tnb) = 1$. Таким образом,

$$\kappa = \frac{\dot{r}\dot{r}}{r^2} = \frac{\dot{r}\dot{r}}{k^2}. \quad (13)$$

Пример. Вычислить кривизну и кручение винтовой линии, заданной в естественной параметризации (9), § 73.

Решение. Для решения задачи воспользуемся формулами (5) и (13). Предварительно определим координаты векторов $r, \dot{r}, \ddot{r}$:

$$x = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad z = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}:$$

$$\bar{x} = -\frac{a}{a^2+b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \bar{y} = -\frac{a}{a^2+b^2} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad \bar{z} = 0;$$

$$\bar{x} = \frac{a}{(a^2+b^2)^{3/2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \bar{y} = -\frac{a}{(a^2+b^2)^{3/2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad \bar{z} = 0.$$

Подставив эти значения в формулы (5) и (13), после элементарных преобразований, получим:

$$k = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \kappa = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Мы видим, что кривизна и кручение винтовой линии суть постоянные величины, отличные от нуля. Можно показать, что эти условия являются характеристическими для винтовой линии.

В заключение отметим, что если в уравнениях (9), §73 положить $b = 0$, то получим уравнение окружности радиуса a в пространстве, поэтому из полученных соотношений приходим к выводу, что для окружности $k = \frac{1}{a}$, $\kappa = 0$.

5. Строение кривой вблизи данной точки. Допустим, что кривая класса $C^{(4)}$ задана соотношением (3) в естественной параметризации. Возьмем точку M_0 этой кривой, в которой $k > 0$ и $\kappa \neq 0$, и изучим строение кривой вблизи этой точки. Для этой цели рассмотрим в данной точке локальную систему координат $M_0 t_0 n_0 b_0$. Не нарушая общности, можно считать, что точка M_0 принята за полюс и, кроме того, она является начальной точкой естественной параметризации. При этом, очевидно, $\overline{M_0 M} = r(s)$, а $s_0 = 0$. Запишем формулу Тейлора для вектор-функции $r(s)$ в точке M_0 при $n = 3$. При этом, учитывая, что $s_0 = 0$, для упрощения записи положим $\Delta s = s$ (см. (1), § 72).

$$\overline{M_0 M} = r(s) = \vec{r}_0 \cdot s + \frac{1}{2} \vec{r}_0 s^2 + \frac{1}{6} \vec{r}_0 s^3 + e_{(4)}(0, s) s^3.$$

Продифференцировав выражение $\vec{r} = k\vec{n}$ и воспользовавшись соотношениями (4) и (6), это равенство можем преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{M_0 M} = & t_0 \left\{ s - \frac{1}{6} k_0^2 s^3 + e_{(4)1}(s) s^3 \right\} + \\ & + n_0 \left\{ \frac{1}{2} k_0 s^2 + \frac{1}{6} k_0 s^3 + e_{(4)2}(s) s^3 \right\} + \\ & + b_0 \left\{ \frac{1}{6} k_0 \kappa_0 s^3 + e_{(4)3}(s) s^3 \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $e_{(4)1}(s)$, $e_{(4)2}(s)$, $e_{(4)3}(s)$ — координаты вектор-функции $e_{(4)}(0, s)$ в базисе t_0, n_0, b_0 . Формулу (14) мы используем для изучения строения кривой вблизи точки M_0 .

Прежде всего заметим, что коэффициенты при t_0, n_0 и b_0 являются бесконечно малыми, соответственно первого, второго и третьего порядков относительно s (при $s \rightarrow 0$ имеем $e_{(4)1}(s) \rightarrow 0$, $e_{(4)2}(s) \rightarrow 0$ и $e_{(4)3}(s) \rightarrow 0$).

→ 0). Этот факт имеет следующий геометрический смысл: а) если пренебречь бесконечно малыми второго и более высокого порядка, то точка M при изменении s смещается по касательной; б) если пренебречь бесконечно малыми третьего и более высокого порядка, то смещение точки происходит в соприкасающейся плоскости; в) если учесть бесконечно малые третьего порядка, то точка получает дополнительное смещение по бинормали. Наглядно выражаясь, при изменении s точка быстрее всего удаляется от нормальной плоскости, медленно удаляется от спрямляющей плоскости и еще медленнее от соприкасающейся плоскости.

Теперь изучим поведение кривой относительно трехгранника в данной точке. Для этой цели выберем достаточно малую окрестность точки M_0 с таким расчетом, чтобы во всех ее точках знаки коэффициентов при t_0, n_0, b_0 определялись знаками главных (т. е. первых) членов в каждой скобке. Такая окрестность, очевидно, всегда существует, так как в точке M_0 $s = 0$. Из соотношения (14) следует, что если точка $M(s)$ перемещается в пределах этой окрестности, то при изменении знака параметра s этой точки коэффициенты при t_0 и b_0 меняют знак, а коэффициент при n_0 не меняет знак. Геометрически это означает, что кривая в точке M_0 пересекает свою нормальную плоскость, не пересекает спрямляющую плоскость и пересекает соприкасающуюся плоскость (см. рис. 193). Таким образом, в рассматриваемой окрестности данной точки кривая расположена в том же полупространстве, где расположен вектор n_0 , т. е. в полупространстве вогнутости кривой. Формула (14) показывает также, что если $\kappa_0 > 0$, то все точки кривой рассматриваемой окрестности расположены в первом и шестом октантах локальной системы координат (см. I, § 42, п. 1), если же $\kappa_0 < 0$, то в пятом (при $s > 0$), втором (при $s < 0$) октантах.

6. Плоские кривые. Кривая называется плоской, если в пространстве существует плоскость, которой принадлежат все точки кривой. Из третьей формулы Серре — Френе (см. формулу (12)) непосредственно следует, что во всех точках плоской кривой кручение равно нулю, так как для рассматриваемых кривых вектор b является постоянным вектором. Менее очевидным фактом является следующее предложение.

Теорема [75.2]. Если во всех точках кривой L кручение равно нулю, то кривая является плоской.

Доказательство. Пусть (3) является векторным параметрическим представлением данной кривой L . Введем в рассмотрение векторные функции $t = t(s)$ и $b = b(s)$. Согласно третьей формуле Серре — Френе (см. (12)) $\frac{dt(s)}{ds} = 0$, поэтому $b(s) = b_0$, где b_0 — постоянный вектор. Таким образом, будем иметь: $t(s) b_0 = 0 \Rightarrow \frac{dr}{ds} b_0 = 0$. Отсюда $\frac{d(r(s) b_0)}{ds} = 0 \Rightarrow r(s) b_0 = \alpha_0$, где α_0 — некоторая константа. Если ввести в рассмотрение координаты вектор-функции $r(s)$ ($x(s), y(s), z(s)$) и координаты b_0 ($\beta_1, \beta_2, \beta_3$), то предыдущее соотношение в координатах запишется так: $x(s) \beta_1 + y(s) \beta_2 +$

$+z(s)\beta_3 = \alpha_0$. Отсюда вытекает, что все точки кривой принадлежат плоскости $x\beta_1 + y\beta_2 + z\beta_3 = \alpha_0$. ■

Для всех точек плоской кривой соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью кривой, поэтому она не меняется от точки к точке. Аналитическим выражением этого является тот факт, что для плоской кривой кручение во всех точках равно нулю.

Если $r = r(t)$ — параметрическое представление плоской кривой, то все производные функции $r(t)$ принадлежат плоскости кривой. Этот вывод станет очевидным, если заметить, что вектор r' всегда лежит в плоскости кривой, поэтому $r'b_0 = 0$, где b_0 — нормальный вектор плоскости. Дифференцируя это соотношение многократно, получаем искомый результат. В связи с этим обстоятельством теория плоских кривых значительно упрощается. В этом случае формулы Серре — Френе принимают следующий вид:

$$\frac{dt}{ds} = -kn, \quad \frac{dn}{ds} = kt. \quad (15)$$

Так как при изучении кривых локальная система координат используется для разложения производных вектор-функции, определяющей кривую, то из предыдущего замечания следует, что для плоской кривой нет надобности рассматривать полный сопровождающий трехгранник, а достаточно ограничиться введением локальной системы M, t, n . В заключение отметим, что из исследования, проведенного в п. 5, вытекает весьма интересный факт: в окрестности данной неособой точки плоской кривой, не являющейся точкой распрямления, все точки кривой расположены в полуплоскости вогнутости кривой.

7. **Натуральные уравнения.** Если дана кривая, на которой введена естественная параметризация, то кривизна k и кручение κ являются функциями параметра s :

$$k = k(s), \quad \kappa = \kappa(s). \quad (16)$$

Эти уравнения называются **натуральными уравнениями** кривой. Имеет место замечательная теорема, которая раскрывает основное значение натуральных уравнений. Для того чтобы ее сформулировать, введем следующее соглашение: будем говорить, что у двух кривых t и t^0 натуральные уравнения совпадают, если на каждой из них существует такая естественная параметризация, что у одинаковыми параметрами кривизны и кручения совпадают. Можно доказать, что если у двух кривых натуральные уравнения совпадают, то эти кривые отличаются только положением в пространстве¹. Таким образом, натуральные уравнения характеризуют кривую с точностью до движения.

8. **Вычислительные формулы для кривизны и кручения кривой.** Формулы (5) и (13) могут быть использованы для вычисления кривизны и кручения, если кривая задана в естественной параметризации.

¹ Читателю, интересующемуся этой теорией, рекомендуем обратиться к книге [40].

Пользуясь этими формулами, легко вывести формулы для вычисления кривизны и кручения в произвольной параметризации.

Пусть $r = r(t)$ — векторное параметрическое задание кривой. Введем на данной кривой естественную параметризацию и допустим, что $t = \varphi(s)$ есть функция, осуществляющая переход от параметризации t к параметризации s . Тогда в новой параметризации кривая будет иметь уравнение: $R(s) = r(\varphi(s))$. Обозначая производные по естественному параметру через $R, \dot{R}, \dots, r, \dot{r}, \dots$, а по произвольному параметру через $R', R'', \dots, r', r'', \dots$ и используя формулы (5) § 74, мы легко получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r't; \\ \ddot{r} &= r''(\dot{t})^2 + r'\ddot{t}; \\ \ddot{r} &= r'''(\dot{t})^3 + 3r''\dot{t}\ddot{t} + r'\ddot{t}^2. \end{aligned}$$

Из этих соотношений, принимая во внимание (7) и (13), получаем следующие выражения:

$$t = r'\dot{t}, \quad kb = [r'r''](\dot{t})^3, \quad k^2\kappa = (r'r''r''')(\dot{t})^6. \quad (17)$$

Подставив значение $\dot{t}$ из первого во второе из записанных выше выражений (17), предварительно взяв модуль этого выражения, получаем формулу для вычисления кривизны:

$$k = \frac{|[r'r'']|}{|r'|^3}. \quad (18)$$

Из последнего соотношения, принимая во внимание предыдущую формулу, окончательно будем иметь:

$$\kappa = \frac{(r'r''r''')}{|r'r''|^3}. \quad (19)$$

Пример. Вычислить кривизну и кручение линии

$$x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad z = 3t + t^3.$$

Решение. Вычислим производные данной функции:

$$\begin{aligned} x' &= 3 - 3t^2, & y' &= 6t, & z' &= 3 + 3t^2, \\ x'' &= -6t, & y'' &= 6, & z'' &= 6t, \\ x''' &= -6, & y''' &= 0, & z''' &= 6. \end{aligned}$$

Пользуясь этими выражениями легко показать, что

$$[r'r''] = 18(t^2 - 1), \quad -36t, \quad 18(t^2 + 1),$$

поэтому $|r'| = 3\sqrt{2}(t^2 + 1)$, $|[r'r'']| = 18\sqrt{2}(t^2 + 1)$, $r'r''r''' = 216$.

Подставив эти выражения в формулы (18) и (19), получаем:

$$k = \frac{1}{3(t^2 + 1)^2}, \quad \kappa = \frac{1}{3(t^2 + 1)^3}.$$

Мы видим, что во всех точках кривой $k = \kappa$.

ПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 76. Понятие поверхности

1. Простые и регулярные поверхности. Множество точек евклидовой плоскости называется простой областью, если оно является образом открытого круга при его топологическом отображении (§ 73, п. 1); открытый круг, как известно, есть множество точек плоскости, лежащих внутри окружности. Множество Ω точек евклидова трехмерного пространства E_3 именуется простой поверхностью, если оно есть образ простой области Φ при ее топологическом отображении в E_3 . Пусть u, v — декартовы координаты точки области Φ , а x, y, z — декартовы координаты соответствующей точки простой поверхности Ω . Тогда

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v). \quad (1)$$

Равенства (1) называют уравнениями поверхности Ω в параметрической форме; их мы будем, как правило, писать в векторном виде:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v). \quad (2)$$

Множество Ω точек E_3 мы будем называть регулярной поверхностью класса $C^{(k)}$, если любая точка множества Ω имеет окрестность U (§ 73, п. 1), которая является простой поверхностью, представимой уравнениями (1) (все три функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ принадлежат к классу $C^{(k)}$, т. е. имеют непрерывные производные до порядка k включительно, при $k = 1$ имеем гладкую поверхность). В силу требования, чтобы U взаимно однозначно и непрерывно отображалась на простую область в E_2 , матрица

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \quad (3)$$

должна иметь ранг, равный 2, или, что то же, радиус-вектор $\mathbf{r}$ поверхности должен в окрестности U удовлетворять условию¹

$$\mathbf{r}_u \nparallel \mathbf{r}_v. \quad (4)$$

Точки поверхности Ω , в которых в нарушение условия (4) векторы $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ коллинеарны, именуется особыми точками параметризации поверхности.

Если во всех точках окрестности U соотношение (4) неверно, т. е. $\mathbf{r}_u \parallel \mathbf{r}_v$, то ранг ρ матрицы (3) не превышает 1. Если $\rho = 1$, то, как доказывается в математическом анализе, среди переменных x, y, z две

¹ Здесь и в дальнейшем через $x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v, \dots$ обозначаются частные производные: $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$, $y_u = \frac{\partial y}{\partial u}$ и т. д.

будут функциями от третьей, и вместо поверхности мы будем иметь линию. Если же $\rho = 0$, то x, y, z постоянны и мы имеем точку.

Если поверхность задана уравнениями (1) (или, что то же, уравнением (2)), то говорят, что она задана параметрически. Параметризация поверхности изменится, если мы положим:

$$\bar{u} = \varphi(u, v), \quad \bar{v} = \psi(u, v) \quad (5)$$

и выразим $\mathbf{r}$ с помощью (5) как функцию от новых параметров $\bar{u}, \bar{v}$. Чтобы сохранить класс $C^{(k)}$ регулярности поверхности, мы должны потребовать, чтобы обе функции φ и ψ также принадлежали к классу $C^{(k)}$, т. е. имели непрерывные производные до k -го порядка включительно. Кроме того, для разрешимости уравнений (5) относительно u и v необходимо, чтобы функции φ и ψ были независимы, для чего, как известно, должно быть выполнено условие:

$$\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} \neq 0 \quad (6)$$

(φ_u — сокращенное обозначение для $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ и т. д.). Если условие (6) верно в какой-либо точке P поверхности, то в силу непрерывности функций φ и ψ оно будет справедливо и в некоторой окрестности V точки P . В этой окрестности в новой параметризации поверхность S снова будет простой и сохранит свой класс регулярности.

Гомеоморфизм, отображающий по формулам (1) простую область Φ на простую поверхность Ω , именуется параметрическим представлением поверхности Ω . Изменяя параметризацию на основе формул (5), мы получим другое параметрическое представление той же поверхности Ω . Два указанных представления считаются эквивалентными, если во всей области Φ выполнено условие (6) и в (5) обе функции φ и ψ принадлежат к классу $C^{(k)}$. Таким образом, простая поверхность Ω представляет собой класс эквивалентности, содержащий все эквивалентные друг другу ее параметрические представления.

Если, в частности, при параметрическом задании поверхности $u = x, v = y$, то у нас налицо явное задание поверхности

$$z = f(x, y). \quad (7)$$

Как известно из математического анализа, если матрица (3) имеет ранг, равный 2, или, иначе говоря, если по меньшей мере один из определителей

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad (8)$$

скажем первый из них, отличен от нуля в данной точке P , то первое и второе из уравнений (1) определяет в некоторой окрестности точки P, u и v как функции от x, y :

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \quad (9)$$

Подставляя выражения для u, v из (9) в третье из уравнений (1), найдем:

$$z = f(x, y).$$

Мы видим, что параметрическое задание поверхности всегда может быть сведено (в достаточно малой окрестности) к явному заданию; обратно, явное задание есть частный случай параметрического ($u = x, v = y$).

Часто применяется еще и неявное задание поверхности, т. е. задание ее уравнением вида

$$F(x, y, z) = 0, \quad (10)$$

где функция F принадлежит к классу $C^{(k)}$, $k \geq 1$. Если хотя одна из производных $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$, например $\frac{\partial F}{\partial z}$, отлична от нуля в данной точке P , а следовательно, в ее окрестности U , то, как известно из теории неявных функций, в U координата z есть функция от x, y :

$$z = f(x, y),$$

причем функция f находится в том же классе $C^{(k)}$. Таким образом, и неявное задание поверхности может быть сведено (в достаточно малой окрестности) к явному.

Точка поверхности (10), в которой

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad (11)$$

называется ее особой точкой.

2. Гауссовы координаты точек поверхности. Пусть простая поверхность S задана уравнением (2), где пары чисел (u, v) принадлежат простой области Φ . Каждой точке P поверхности S взаимно однозначно отвечает пара чисел $(u, v) \in \Phi$. Таким образом, задание чисел u, v определяет точку P поверхности S , что записывается так: $P(u, v)$. Числа u, v называются гауссовыми координатами точки P .

Линии, вдоль которых постоянна одна из гауссовых координат, именуются координатными линиями (рис. 196); линия, вдоль которой v постоянно, а изменяется лишь координата u , носит название u -линии, линия, вдоль которой постоянно u , — v -линия. В силу указанной выше взаимной однозначности через каждую точку простой поверхности S проходит одна и только одна u -линия и одна и только одна v -линия; каждая u -линия пересекает любую v -линию не более чем в одной точке. Координатные линии образуют на S координатную сеть.

Теперь становится ясным геометрический смысл векторов r_u, r_v : r_u есть касательный вектор к u -линии, направленный в сторону возрастания координаты u (§ 74, п. 3); аналогичный смысл имеет и вектор r_v .

Если изменение параметризации производится по формулам:

$$\bar{u} = \varphi(u), \quad \bar{v} = \psi(v), \quad (12)$$

то, как нетрудно понять, координатные линии останутся неизменными.

3. Примеры. Во всех примерах, рассмотренных ниже, предполагается, что в пространстве введена прямоугольная декартова система координат.

Пример 1. Сфера. На поверхности сферы (рис. 197; на чертеже для большей ясности изображена лишь восьмая часть сферы, расположенная в первом координатном октанте) зададим координаты u, v нижеследующим образом. Через точку M сферы проведем большой круг PMA и обозначим через u угол NOM ($NM \perp OA$), составленный радиус-вектором OM точки M с плоскостью XOY , и через v двугранный угол между плоскостью меридиана PMA точки M и плоскостью XOZ ; на чертеже показан линейный угол $v = \angle XOA$ этого двугранного угла. В географических терминах плоскость XOY есть плоскость экватора, точки P и P' , в которых ось OZ пересекает сферу, — полюсы, плоскость XOZ — плоскость первого меридиана, u есть широта точки M , v — ее долгота. Широта u и долгота v изменяются в таких пределах:

$$-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}; \quad -\pi < v \leq \pi. \quad (13)$$

Из чертежа находим: $z = \pm |NM| = a \sin u$, где a — радиус сферы, $\pm |ON| = a \cos u$, $x = \pm |OD| = \pm |ON| \cos v$, $y = \pm |DN| = \pm |ON| \sin v$, причем эти формулы, как нетрудно убедиться, справедливы при любых значениях u и v , удовлетворяющих неравенствам (13). Итак, сфера при указанном на чертеже расположении системы прямоугольных декартовых координат задается параметрически такими уравнениями:

$$x = a \cos u \cos v, \quad y = a \cos u \sin v, \quad z = a \sin u \quad (a > 0), \quad (14)$$

или в векторной форме

$$r = \{a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, a \sin u\}. \quad (15)$$

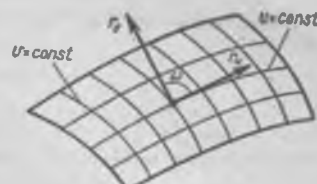


Рис. 196

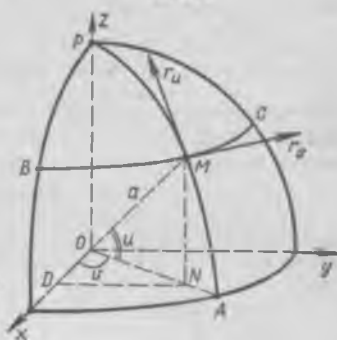


Рис. 197

Возведя все три равенства (14) в квадрат и сложив, найдем:

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \quad (16)$$

равенство (16) есть хорошо известное неявное уравнение данной сферы. Из (15) следует:

$$r_u = \{-a \sin u \cos v, -a \sin u \sin v, a \cos u\} \quad (17)$$

$$r_v = \{-a \cos u \sin v, a \cos u \cos v, 0\},$$

$$r_u r_v = 0, [r_u, r_v] = -a \cos u r; \quad (18)$$

векторы r_u и r_v показаны на рисунке 197.

Координатные u -линии суть полумеридианы, v -линии — параллели; на рис. 197 проведены u -линия PMA и v -линия BMC , проходящие через точку M . В силу первого из равенств (18) в любой точке сферы u -линия и v -линия пересекаются под прямым углом, т. е. координатная сеть ортогональная. Второе из равенств (18) приводит нас к выводу, что условие (4) нарушено лишь в тех точках, для которых $\cos u = 0, u = \pm \frac{\pi}{2}$, т. е. в полюсах P и P' ; следовательно, точки P и P' и только они являются особыми точками параметризации. И действительно, в этих точках долгота v остается неопределенной, так что в них нарушена взаимная однозначность соответствия между точками сферы и парами их координат; все u -линии, т. е. все меридианы, проходят через обе точки P и P' . Поэтому ни один из полюсов P, P' при данной параметризации не может быть включен в простой кусок сферы.

Дифференцируя (16) и учитывая, что $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$, имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z,$$

вследствие чего соотношения (11) выполняются только в точке $(0; 0; 0)$, не лежащей на сфере. Следовательно, на сфере нет особых точек.

На этом примере мы убеждаемся в том, что

1°. Особая точка параметризации поверхности может не быть особой точкой поверхности.

Пример 2. Поверхность, заданная параметрическими уравнениями:

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = bv \quad (b > 0) \quad (19)$$

или

$$r = \{u \cos v, u \sin v, bv\}. \quad (20)$$

В (19) и (20) u и v принимают любые действительные значения. Исключая из уравнений (19) переменные u и v , найдем:

$$y = x \operatorname{tg} \frac{z}{b}; \quad (21)$$

уравнение (21) даст нам явное задание той же поверхности.

Ввиду (20) имеем:

$$r_u = \{\cos v, \sin v, 0\}, \quad r_v = \{-u \sin v, u \cos v, b\}; \quad (22)$$

$$r_u r_v = 0, [r_u, r_v] = \{b \sin v, -b \cos v, u\}. \quad (23)$$

Координатные u -линии суть прямые $y = x \operatorname{tg} v$, $z = bv$, параллельные плоскости XOY и пересекающие ось OZ , v -линии — при $u \neq 0$ винтовые линии (§ 73, пример 3), при $u = 0$ — прямая (ось OZ). Согласно первому из равенств (23) координатная сеть ортогональная. Второе из равенств (23) показывает нам, поскольку $b > 0$, что условие (4) выполнено при любых u, v , так что особых точек параметризации нет.

Поверхность (19) носит название прямого геликоида; она изображена на рисунке 198. Эта поверхность образована прямой, перпендикулярной к оси OZ и ее пересекающей, когда она равномерно движется вверх, одновременно равномерно вращаясь вокруг оси OZ (переменная v принята за время).

Пример 3. Множество точек, заданное уравнением

$$r = \{u^2 + 2uv + v^2, e^u \cdot e^v, \cos u \cos v - \sin u \sin v\}. \quad (24)$$

Из (24) следует:

$$r_u = r_v = \{2u + 2v, e^u \cdot e^v, -\sin u \cos v - \cos u \sin v\},$$

так что матрица (3) имеет ранг $\rho = 1$; рассматриваемое множество точек есть линия¹.

В самом деле, переписав (24) в виде

$$r = \{(u + v)^2, e^{u+v}, \cos(u + v)\}$$

и положив $u + v = t$, будем иметь:

$$r = \{t^2, e^t, \cos t\}.$$

4. Неявное и явное задание линии. В § 73 мы познакомились с параметрическим (координатным и векторным) заданием линии в евклидовом трехмерном пространстве. Теперь мы можем указать еще так называемое неявное задание линии C , в котором C задается двумя уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z) &= 0, \\ \Phi(x, y, z) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

где F и Φ — две функции класса C^k , $k \geq 1$, в области Ω пространства TE_3 .

Уравнениями (25) линия C определяется как пересечение двух поверхностей $F(x, y, z) = 0$ и $\Phi(x, y, z) = 0$. При этом требуется выполнение такого условия: матрица Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (26)$$

¹ В главе термин «линия» понимается как множество точек (см. § 73, п. 4).



Рис. 198.

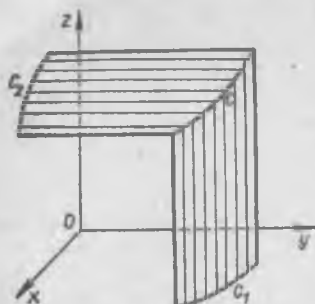


Рис. 199

должна иметь ранг, равный 2; это условие должно иметь место в какой-либо точке $M(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, тогда в силу непрерывности функций F и Φ это условие будет справедливо в некоторой окрестности U точки M . Если матрица (26) в некоторой точке M_0 линии C имеет ранг, меньший двух, то эта точка M_0 есть особая точка линии C . Если же это обстоятельство имеет место во всех точках, удовлетворяющих уравнениям (25), то, как известно из теоремы неявных функций, одно из уравнений (25) следует из другого, и уравнения (25) (если они непротиворечивы) задают не линию, а поверхность.

Пусть в окрестности U

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0;$$

Как известно из теории неявных функций, уравнения (25) разрешимы относительно y и z , так что из (25) следует:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = \varphi(x) \end{cases} \quad (27)$$

Уравнения (27) дают явное задание линии C . Оно является частным случаем параметрического задания, при котором роль параметра играет координата x .

Легко понять геометрический смысл каждого из уравнений (27). Первое из этих уравнений

$$y = f(x) \quad (28)$$

есть уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси OZ (см. I, § 62, 1); поверхность эта, очевидно, проходит через линию C . Направляющая C_1 этого цилиндра, задаваемая уравнениями

$$y = f(x), \quad z = 0, \quad (29)$$

будет, следовательно, проекцией линии C на плоскость HOY (рис. 199). Уравнение (28) есть, таким образом, уравнение цилиндра, проектирующего линию C (см. (27)) на плоскость HOY .

Аналогично убеждаемся в том, что второе из уравнений (27)

$$z = \varphi(x) \quad (30)$$

есть уравнение цилиндра, проектирующего линию C на плоскость HOZ , и что проекция C_2 линии C на плоскость HOZ (рис. 198) задается уравнениями

$$z = \varphi(x), \quad y = 0. \quad (31)$$

Пример 4. Пусть линия задана неявно в прямоугольных декартовых координатах уравнениями

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad (32)$$

Матрица Якоби левых частей обоих уравнений (32)

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (33)$$

имеет ранг, равный 2, поскольку определитель, составленный из последних двух столбцов матрицы (33), равен $2y - 2z \neq 0$; он обращается в нуль, как легко подсчитать, только в двух точках линии: $(\frac{2R\sqrt{6}}{6}, -\frac{R\sqrt{6}}{6}, -\frac{R\sqrt{6}}{6})$ и $(-\frac{2R\sqrt{6}}{6}, \frac{R\sqrt{6}}{6}, \frac{R\sqrt{6}}{6})$, но зато в этих двух точках отличен от нуля определитель $2x - 2y$ матрицы (33), составленный из первых двух ее столбцов.

Нетрудно установить, что представляет собой линия (32). Первое из уравнений (32) есть уравнение сферы с центром в начале координат, радиус которой равен R . Второе уравнение (32) есть уравнение плоскости, проходящей через начало координат, т. е. через центр сферы. Мы видим, что линия (32) есть окружность S , имеющая радиус R и центр в начале координат, лежащая в плоскости $x + y + z = 0$.

§ 77. Первая квадратичная форма поверхности

1. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Пусть на регулярной поверхности S , заданной уравнением

$$r = r(u, v), \quad (1)$$

дана регулярная линия l . Точки дуги l_1 этой линии будут находиться во взаимно однозначном соответствии с точками отрезка $t_0 < t < t_1$ числовой прямой (§ 73, п. 3), вследствие чего вдоль l_1

$$u = u(t), \quad v = v(t). \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) следует, что для точек дуги l_1 ,

$$r = r(u(t), v(t)) = r(t), \quad t_0 < t < t_1, \quad (3)$$

и поскольку l_1 есть дуга регулярной линии l , то

$$r'(t) \neq 0, \quad t_0 < t < t_1. \quad (4)$$

Уравнения (2) мы будем называть уравнениями линии (2) на поверхности S . Как и выше, мы будем всегда предполагать, что в (2) обе функции $u(t)$ и $v(t)$ имеют на отрезке $t_0 < t < t_1$ непрерывные производные $u'(t)$ и $v'(t)$. По правилам дифференциаль-

ного исчисления из (3) следует:

$$r'(t) = r_u u'(t) + r_v v'(t). \quad (5)$$

Равенство (5) показывает, что вектор $r'(t)$, если приложить его к точке $P(t)$ дуги l_1 , расположится в плоскости, определяемой этой точкой P и векторами r_u и r_v . Таким образом,

1°. Касательные к регулярным линиям, проведенным по поверхности S через данную на ней точку P , лежат все в одной плоскости.

Определенная в 1° плоскость носит название касательной к поверхности S в точке P ; точка P называется ее точкой касания.

Из (5) видим, что направление касательного вектора $r'(t)$ зависит лишь от отношения $\frac{v'(t)}{u'(t)} = \frac{dv}{du}$. Следовательно,

2°. Направление касательной к линии на поверхности S в ее точке P вполне определяется отношением дифференциалов $\frac{dv}{du}$.

Перпендикуляр к касательной плоскости поверхности S в точке P , восстановленный из точки касания P , именуется нормалью к поверхности S в точке P . Единичный вектор, направленный вдоль нормали к поверхности, мы будем всегда обозначать буквой m . Поскольку векторы r_u и r_v оба принадлежат касательной плоскости, то вектор m коллинеарен векторному произведению $[r_u r_v]$, вследствие чего

$$m = \frac{[r_u r_v]}{|[r_u r_v]|}. \quad (6)$$

В формуле (6) мы считаем u первой координатой, а v второй координатой. Если мы примем, что v есть первая координата, а u вторая, то в правой части (6) числитель станет $[r_v r_u]$ и вектор m заменится на $-m$.

Специально остановимся на случае, когда поверхность S задана неявным уравнением

$$F(x, y, z) = 0. \quad (7)$$

Если регулярная линия l

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (8)$$

лежит на поверхности S , то вдоль ее дуги l_1 будет справедливо тождество

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0. \quad (9)$$

Дифференцируя по t обе части тождества (9), получим:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0. \quad (10)$$

В неособой точке P поверхности S вектор

$$N = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\} \quad (11)$$

отличен от нулевого вектора (см. § 76, п. 1). Согласно тождеству (10) вектор N ортогонален к касательному вектору

$$r'(t) = \left\{ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right\}$$

любой регулярной линии (8), проведенной по поверхности S через точку P , вследствие чего все касательные в P векторы к таким линиям параллельны одной плоскости; мы вновь пришли к утверждению 1°. Кроме того, мы обнаружили, что вектор N ортогонален к касательной плоскости в точке P , так что единичный вектор m нормали к поверхности S в точке P будет (см. I, § 49, п. 3)

$$m = \pm \frac{N}{|N|},$$

поскольку мы можем направить вектор m в ту или другую сторону.

Если нормальный вектор m или N поверхности S в ее точке $P(x_0, y_0, z_0)$ в прямоугольной системе координат имеет координаты (N_1, N_2, N_3) (см. (6) и (11)), то уравнение касательной плоскости к поверхности S в точке P будет (см. I, § 49, п. 3)

$$N_1(x - x_0) + N_2(y - y_0) + N_3(z - z_0) = 0, \quad (13)$$

а канонические уравнения нормали к S в той же точке суть (см. I, § 51, п. 2)

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ N_1 & N_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} y - y_0 & z - z_0 \\ N_2 & N_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} z - z_0 & x - x_0 \\ N_3 & N_1 \end{vmatrix} = 0, \quad (14)$$

причем среди уравнений (14) одно уравнение есть следствие остальных двух.

Пример 1. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к прямому геликонду (см. § 76, п. 3, пример 2) в точке $P(u = a, v = \frac{\pi}{2})$. Система координат — прямоугольная декартова.

По формулам (20) и (22), § 76, находим координаты векторов r, r_u, r_v в точке P :

$$r = \left\{ 0, a, \frac{\pi}{2} b \right\}, \quad r_u = \{0, 1, 0\}, \quad r_v = \{-a, 0, b\},$$

вследствие чего (I, § 45, (3) или (4))

$$[r_u r_v] = \{b, 0, a\}.$$

Поэтому по формулам (12) и (13) уравнение искомой касательной плоскости есть

$$bx + az - \frac{\pi}{2} ab = 0,$$

а уравнения нормали (учесть, что $b > 0$)

$$y - a = 0, \quad ax - bz + \frac{\pi}{2} b^2 = 0.$$

Пример 2. Найти уравнения касательной к линии

$$x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0, \quad x + y + z = 0 \quad (15)$$

в точке $P(1, -3, 2)$ (ср. § 76, п. 4, пример 4); система координат — прямоугольная декартова.

Искомая касательная является пересечением касательных плоскостей в точке P к поверхностям (15). Плоскость $x + y + z = 0$ есть касательная плоскость к ней в любой ее точке. Обозначая левую часть уравнения сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$ через $F(x, y, z)$, будем иметь:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z.$$

Применяя формулу (11) к точке P , находим следующие координаты для нормального вектора N к сфере в точке P (после сокращения на 2): $N = \{1, -3, 2\}$, вследствие чего уравнение касательной плоскости к сфере в точке P будет:

$$x - 3y + 2z - 14 = 0.$$

Итак, уравнения искомой касательной таковы:

$$x - 3y + 2z - 14 = 0, \quad x + y + z = 0.$$

Приведя эти уравнения к каноническому виду, найдем:

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-2}{-4}.$$

2. Длина линии, проведенной по поверхности. Пусть на регулярной поверхности S , заданной уравнением (1), проведена регулярная линия l , вдоль которой

$$u = \varphi(t), \quad v = \psi(t). \quad (16)$$

Найдем длину дуги этой линии от точки M_0 ($t = t_0$) до точки M_1 ($t = t_1$). Согласно формуле § 73, (7) длина s указанной дуги равна

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \quad (17)$$

В (17) подынтегральное выражение ds равно $\sqrt{dr^2}$, поскольку $r = \{x, y, z\}$, а $dr = \{dx, dy, dz\}$. Но

$$dr = r_u du + r_v dv, \quad (18)$$

причем ввиду (16)

$$du = \varphi'(t) dt, \quad dv = \psi'(t) dt. \quad (19)$$

Из (18) следует, что

$$ds^2 = dr^2 = (r_u du + r_v dv)^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2, \quad (20)$$

где

$$E = r_u^2, \quad F = r_u r_v, \quad G = r_v^2. \quad (21)$$

Дифференциальная квадратичная форма

$$Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2, \quad (22)$$

в которой коэффициенты E, F, G заданы как функции от гауссовых координат u, v равенствами (21), называется первой квадратичной формой поверхности S . Если эта форма известна, т. е. если в ней E, F, G даны как функции от u и v , то согласно вышеизложенному длина дуги линии l на поверхности S , заключенной между точками $t = t_0$ и $t = t_1$, если линия l задана уравнениями (16), определится по формуле



Рис. 200.

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2}, \quad (23)$$

где в функции E, F, G вместо u, v надо подставить их выражения из (16), а du и dv надо заменить по (19).

3. Угол между линиями на поверхности. С помощью формы (22) может быть вычислен еще ряд величин, связанных с поверхностью S . Найдем, прежде всего, величину угла между линиями на поверхности. Углом между двумя линиями l_1 и l_2 , проведенными по поверхности и пересекающимися в точке $P(u, v)$ (рис. 200), называется, как известно, угол ω , составленный касательными в точке P к линиям l_1 и l_2 . В первую очередь, остановимся на случае, когда l_1 и l_2 суть линии координатной сети (рис. 196). Угол между u -линией и v -линией в данной точке $P(u, v)$ поверхности обозначим через ω . Поскольку (§ 76, п. 2) вектор r_u направлен по касательной к u -линии, а r_v — по касательной к v -линии, то ω есть угол между векторами r_u и r_v , так что

$$\cos \omega = \frac{r_u r_v}{|r_u| |r_v|},$$

или ввиду (21)

$$\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}. \quad (24)$$

Согласно (24)

3°. Если $F = 0$ во всех точках простого куска поверхности, то на нем координатная сеть ортогональная.

Обратимся теперь к общему случаю. Пусть линии l_1 и l_2 заданы на поверхности соответственно уравнениями

$$l_1: u = \varphi_1(t), \quad v = \psi_1(t),$$

$$l_2: u = \varphi_2(\tau), \quad v = \psi_2(\tau),$$

где функции $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2$ имеют непрерывные производные в точке P , в которой пересекаются линии l_1 и l_2 . Полагая

$$du = \varphi_1'(t) dt, \quad dv = \psi_1'(t) dt,$$

$$d\tau = \varphi_2'(\tau) d\tau, \quad d\tau = \psi_2'(\tau) d\tau,$$

будем иметь для линии l_1 в точке P

$$dr = r_u du + r_v dv \quad (25)$$

и для линии l_2 в той же точке P

$$\delta r = r_u \delta u + r_v \delta v. \quad (26)$$

Угол между линиями l_1 и l_2 в точке P , т. е. угол между касательными к ним в точке P , равен углу φ между векторами dr и δr (рис. 200), вследствие чего

$$\cos \varphi = \frac{dr \delta r}{|dr| |\delta r|},$$

или по (25) и (26)

$$\cos \varphi = \frac{(r_u du + r_v dv)(r_u \delta u + r_v \delta v)}{|r_u du + r_v dv| |r_u \delta u + r_v \delta v|}. \quad (27)$$

Выражая множители знаменателя правой части (27) из (20) и раскрывая в ее числителе скобки с учетом (21), находим окончательно:

$$\cos \varphi = \frac{E du \delta u + F (du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}}. \quad (28)$$

Формула (28) показывает, что, зная коэффициенты E , F , G первой квадратичной формы (22) поверхности, мы сможем вычислить и угол между любыми линиями, проведенными по этой поверхности.

4. Площадь поверхности. Первая квадратичная форма поверхности позволяет также найти площадь любого простого ее куска. Как известно из курса математического анализа, площадь Q простого куска поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$, вычисляется по формуле:

$$Q = \iint_{\Omega_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy, \quad (29)$$

где Ω_0 — та область плоскости XOY , на которую проектируется (взаимно однозначно) рассматриваемый кусок поверхности. Предполагая поверхность заданной векторным уравнением (1), перейдем в формуле (29) к переменным u, v . С этой целью запишем координатное задание поверхности в виде (1), § 76 и воспользуемся равенствами

$$z_u = \frac{\partial z}{\partial x} x_u + \frac{\partial z}{\partial y} y_u,$$

$$z_v = \frac{\partial z}{\partial x} x_v + \frac{\partial z}{\partial y} y_v,$$

из которых находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}}. \quad (30)$$

Фигурирующие в формулах (30) определители суть координаты вектора $[r_u, r_v]$:

$$\{r_u, r_v\} = \{N_x, N_y, N_z\},$$

$$N_x = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}, \quad N_y = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}, \quad N_z = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix},$$

так что (30) может быть переписано в виде:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{N_x}{N_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{N_y}{N_z}.$$

Формула (29) после перехода к переменным u, v дает:

$$Q = \iint_{(\Omega)} \frac{\sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}}{|N_z|} |x_u y_v - x_v y_u| du dv,$$

(Ω — та область переменных u, v , которая соответствует области Ω_0) или по сокращении на $|N_z|$

$$Q = \iint_{(\Omega)} |[r_u, r_v]| du dv. \quad (31)$$

Далее имеем по (21) и (24):

$$|[r_u, r_v]| = |r_u| |r_v| \sin \omega = \sqrt{E} \sqrt{G} \sqrt{1 - \frac{F^2}{EG}},$$

т. е.

$$|[r_u, r_v]| = \sqrt{EG - F^2}. \quad (32)$$

Таким образом, окончательно

$$Q = \iint_{(\Omega)} \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (33)$$

Если простой кусок поверхности не проектируется взаимно однозначно на плоскость XOY , то мы разбиваем его на части, обладающие требуемым свойством, что всегда возможно; в результате мы снова придем к формуле (33), в которой Ω есть область пар переменных u, v , отвечающая тому куску поверхности, площадь Q которого вычисляется.

Элемент площади $d\sigma = |[r_u, r_v]| du dv$, стоящий под знаком двойного интеграла в формуле (31), имеет простой наглядно-геометрический смысл: это есть площадь U_1 параллелограмма $M_0 N_1 N_2$, построенного на векторах $r_u du$ и $r_v dv$ (рис. 201). Таким образом, формула (31) имеет такое содержание: площадь U_2 криволинейного параллелограмма с вершинами $M_0(u, v)$, $M_1(u + du, v)$, $M_2(u, v + dv)$, $M_3(u + du, v + dv)$, проекция которого на касательную плоскость в точке M_0 есть параллелограмм $M_0 N_1 N_2$, заменяется при интегрировании площадью U_1 ,

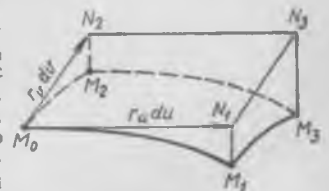


Рис. 201.

отличающейся от площади U_2 на бесконечно малую высшего порядка.

Согласно (33) для вычисления площади Q достаточно знать первую квадратичную форму поверхности.

§ 78. Кривизна линий на поверхности

1. Кривизна кривой на поверхности. Имея целью изучить меру искривления поверхности, мы будем исследовать кривизну различных линий на поверхности. При этом мы наложим на поверхность большие ограничения: до сих пор мы предполагали, что поверхность — регулярная (§ 76, п. 1) класса $C^{(1)}$, в дальнейшем же, в § 78 и 79, мы потребуем, чтобы она была регулярной класса $C^{(3)}$. Для краткости мы будем говорить просто: «регулярная поверхность».

Пусть на регулярной поверхности, заданной параметрическим уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (1)$$

проведена через точку P регулярная линия l , определяемая равенствами

$$u = u(s), \quad v = v(s), \quad (2)$$

где s — естественный параметр (см. § 73, п. 6) линии l . В точке P единичный касательный вектор

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{r}_u \frac{du}{ds} + \mathbf{r}_v \frac{dv}{ds}. \quad (3)$$

По первой формуле Серре — Френэ (§ 75, (12))

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{\rho}, \quad (4)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор главной нормали линии l в точке P , а ρ — ее радиус кривизны¹ в той же точке. Из (3) и (4) получаем:

$$\frac{\mathbf{n}}{\rho} = \mathbf{r}_{uu} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2\mathbf{r}_{uv} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \mathbf{r}_{vv} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \mathbf{r}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \mathbf{r}_v \frac{d^2v}{ds^2} \quad (5)$$

($\mathbf{r}_{uu}$ — производная второго порядка $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2}$ и т. п.). Умножая обе части равенства (5) скалярно на единичный вектор $\mathbf{m}$ нормали к поверхности в точке P и введя обозначения: θ — угол между векторами $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$,

$$L = m\mathbf{r}_{uu}, \quad M = m\mathbf{r}_{uv}, \quad N = m\mathbf{r}_{vv}, \quad (6)$$

найдем, поскольку $m\mathbf{r}_u = m\mathbf{r}_v = 0$:

$$\frac{\cos \theta}{\rho} = \frac{L \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2M \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + N \left(\frac{dv}{ds} \right)^2}{E \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2F \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + G \left(\frac{dv}{ds} \right)^2}, \quad (7)$$

мы заменим при этом ds^2 его выражением из § 77, (20).

¹ Радиусом кривизны ρ линии называется число, обратное ее кривизне k : $\rho = \frac{1}{k}$.

Угол между касательной плоскостью к поверхности в точке P и соприкасающейся плоскостью линии l в той же точке равен $\pm \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$. В итоге мы приходим к такому выводу.

Теорема [78.1]. Если две линии, проведенные по простому куску регулярной поверхности через его точку P , имеют в этой точке одну и ту же касательную и одну и ту же соприкасающуюся плоскость, не совпадающую с касательной плоскостью к поверхности в точке P , то кривизны этих линий в точке P одинаковы.

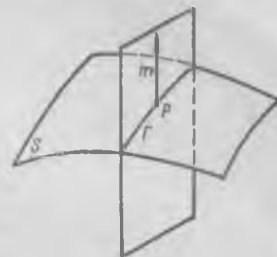


Рис. 202

Если соприкасающаяся плоскость линий и касательная плоскость к поверхности в точке P совпадают, то угол $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\cos \theta = 0$, и приведенное выше доказательство теоремы [78.1] теряет силу.

Теорема [78.1] сводит разыскание кривизны любых линий на поверхности к той же задаче для ее плоских сечений.

Выражение, стоящее в числителе правой части формулы (7), носит название второй квадратичной формы поверхности. Поскольку

$$m = \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}} \quad (8)$$

[см. § 77, формулы (6) и (32)], то ввиду (6)

$$L = \frac{\mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad M = \frac{\mathbf{r}_{uv}\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad N = \frac{\mathbf{r}_{vv}\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}. \quad (9)$$

2. Нормальные сечения поверхности. Нормальным сечением поверхности S в ее точке P называется линия Γ , являющаяся пересечением поверхности S с плоскостью, проходящей через нормаль к поверхности в точке P (рис. 202).

Для нормального сечения либо $\mathbf{n} = \mathbf{m}$, $\theta = 0$, либо $\mathbf{n} = -\mathbf{m}$, $\theta = \pi$. Принято в первом случае считать радиус кривизны R нормального сечения положительным, а во втором — отрицательным. Тогда в обоих случаях при $\theta = 0$ и при $\theta = \pi$ формула (7) дает:

$$\frac{1}{R} = \frac{L \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2M \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + N \left(\frac{dv}{ds} \right)^2}{E \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2F \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + G \left(\frac{dv}{ds} \right)^2}. \quad (10)$$

Сопоставляя формулы (7) и (10), имеем:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos \theta}{\rho},$$

т. е.

$$\rho = R \cos \theta \quad (11)$$

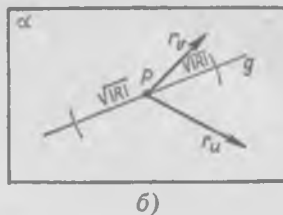


Рис. 203.

Поскольку ρ всегда положительно, то согласно (11) при $R > 0$ угол θ острый, а при $R < 0$ тупой.

Угол θ между векторами m и n равен углу между плоскостями нормального и наклонного сечения. Поэтому формула (11) выражает следующее утверждение.

Теорема [78.2] (теорема Менье). Радиус кривизны ρ наклонного сечения l регулярной поверхности в ее точке P равен произведению радиуса кривизны нормального сечения Γ в той же точке, имеющего в точке P ту же касательную, что и линия l , на косинус угла θ , составленного плоскостями наклонного сечения l и нормального сечения Γ (т. е. составленного нормальным вектором m поверхности и единичным вектором n главной нормали линии l).

Теорема Менье вместе с теоремой [78.1] сводит вопрос о кривизне любой линии, проведенной по поверхности через ее точку, к исследованию кривизны нормальных сечений поверхности в той же точке.

Хорошую иллюстрацию теоремы Менье мы получим, применив ее к сфере. Нормальными сечениями сферы будут ее большие круги, наклонными сечениями — ее малые круги, R и ρ — соответственно их радиусы. Соотношение (11) получается сразу из прямоугольного треугольника (рис. 203, а).

3. Индикатриса Дюпена. К изучению кривизны нормальных сечений поверхности удобно применить наглядную модель, именуемую индикатрисой Дюпена. В касательной плоскости α к поверхности в точке P (рис. 203, б) на каждой прямой g , проходящей через P , отложим в обе стороны от P отрезки, равные по длине $\sqrt{|R|}$, где R есть радиус кривизны того нормального сечения Γ , которое расположено в плоскости, проходящей через прямую g и нормаль к поверхности в точке P . Линия, образованная концами указанных отрезков, и есть индикатриса Дюпена.

Найдем уравнение индикатрисы Дюпена D . С этой целью обозначим через q радиус-вектор $\overrightarrow{PN}$ точки N линии D ; тогда согласно описанному выше построению

$$q = \pm \sqrt{|R|} t = \pm \sqrt{|R|} \frac{dr}{ds} = \pm \sqrt{|R|} \left(r_u \frac{du}{ds} + r_v \frac{dv}{ds} \right), \quad (12)$$

где

$$u = u(s), \quad v = v(s) —$$

уравнения на поверхности соответствующего нормального сечения, s — его естественный параметр, а t — единичный касательный вектор к нему в точке P . Примем точку P за начало аффинной системы координат в касательной плоскости α , а r_u и r_v — за координатные векторы той же системы (рис. 203, б). Согласно (12) относительно этой системы координат точка N индикатрисы D имеет такие координаты:

$$x = \pm \sqrt{|R|} \frac{du}{ds}, \quad y = \pm \sqrt{|R|} \frac{dv}{ds}. \quad (13)$$

Формулу (10) можем записать в виде:

$$\pm \frac{1}{|R|} = L \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2M \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + N \left(\frac{dv}{ds} \right)^2. \quad (14)$$

Исключая $\frac{du}{ds}$ и $\frac{dv}{ds}$ из равенств (13) и (14), приходим к уравнению

$$Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = \pm 1; \quad (15)$$

в правой части $+1$, если $R > 0$, и -1 , если $R < 0$. Уравнение (15) и есть искомое уравнение индикатрисы Дюпена; оно показывает, что 1°. Индикатриса Дюпена представляет собой две линии второго порядка.

4. Классификация точек поверхности. Подвергнем линии (15) подробному исследованию по правилам аналитической геометрии. При таком исследовании основную роль играет, как известно, м а л ы й д и с к р и м и н а н т:

$$I_2 = LN - M^2 \quad (16)$$

(1, [40.2] и [40.3]). Остановимся сперва на случае, когда

$$a) \quad I_2 = LN - M^2 > 0. \quad (17)$$

Мы можем здесь принять, что $L > 0$; иначе мы переменим направление единичного вектора m нормали к поверхности на противоположное (см. § 77, п. 1), отчего ввиду § 78, (6) все три коэффициента L, M, N второй квадратичной формы умножатся на -1 .

Поскольку $L > 0$ и $LN - M^2 > 0$, то в (15) левая часть при любых значениях x, y положительна; поэтому, если мы хотим получить действительную линию, мы должны справа взять $+1$. Так как при этом $I_2 > 0$, то (1, § 39, п. 2) индикатриса Дюпена есть эллипс (рис. 204). В правой части (15) у нас всегда $+1$; следовательно, при любом направлении касательной к нормальному сечению его радиус кривизны $R > 0$, $n = m$, все нормальные сечения вогнуты в одну сторону. В направлении AA величины $\sqrt{R}$ и R имеют наибольшее значение, а в направлении BB — наименьшее.

Вблизи точки P поверхность имеет вид, изображенный на рисунке 205. Касательная плоскость поверхности S в точке P имеет вблизи P только одну общую точку с S . Если для точки P имеет место случай

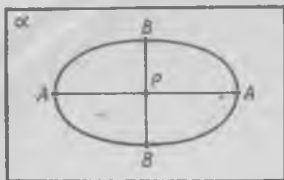


Рис. 204.

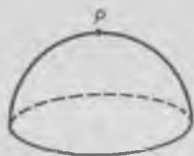


Рис. 205.

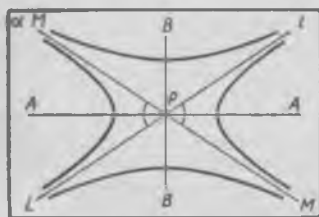


Рис. 206.



Рис. 207.

а) [см. (17)], то она именуется эллиптической точкой. Как нетрудно видеть, у эллипсоида, двуполостного гиперболюида и эллиптического параболоида все точки эллиптические.

Отметим еще тот частный случай, когда индикатриса Дюпена есть окружность. Тогда кривизна $\frac{1}{R}$ нормальных сечений одинакова по всем направлениям; такая точка P называется точкой закругления (или омбилической точкой).

$$b) \quad I_2 = LN - M^2 < 0. \quad (18)$$

В этом случае (1, § 39, п. 2) индикатриса Дюпена состоит из двух сопряженных гипербол (рис. 206). Одна из них получается, когда в правой части (15) имеем $+1$; на рис. 206 это будут правая и левая ветви. Другая — когда в правой части имеем -1 ; на рисунке 206 — верхняя и нижняя ветви. Для направлений LL и MM радиус $R = \infty$ и кривизна нормального сечения $\frac{1}{R} = 0$; они носят название асимптотических направлений. Для направлений касательных, проходящих в отмеченных дужками углах LPM , радиус $R > 0$ и соответствующие нормальные сечения вогнуты в одну сторону; для касательных, проходящих в остальных углах LPM , $R < 0$, вследствие чего соответствующие нормальные сечения вогнуты в противоположную сторону. Таким образом, в случае б) поверхность вблизи точки P имеет седлообразный вид (рис. 207). В направлении AA радиус кривизны R имеет наименьшее положительное значение, кривизна $\frac{1}{R}$ имеет наи-

большее значение. В направлении BB радиус R имеет наименьшее по абсолютной величине отрицательное значение, для кривизны $\frac{1}{R}$ направление BB дает наибольшее по абсолютной величине отрицательное значение, т. е. с учетом знака — наименьшее значение.

Если в точке P имеет место случай б) (см. (18)), то P называется гиперболической точкой поверхности. Касательная плоскость поверхности в ее гиперболической точке P пересекает вблизи этой точки поверхность.

Из невырожденных поверхностей второго порядка у однополостного гиперболюида и гиперболического параболоида все точки гиперболические.

в)

$$I_2 = LN - M^2 = 0. \quad (19)$$

Здесь мы исключим из рассмотрения тот случай, когда

$$L = M = N = 0; \quad (20)$$

когда имеют место равенства (20), то P именуется точкой уплощения. Пусть $(L, M, N) \neq (0, 0, 0)$; тогда можем считать, что $L > 0$. Ввиду (19) левая часть (15) есть полный квадрат, и действительная линия получится лишь тогда, когда правая часть (15) равна $+1$. Итак, индикатриса Дюпена имеет уравнение

$$(ax + by)^2 = 1, \quad a = \sqrt{L}, \quad b = \pm \sqrt{N},$$

или

$$ax + by = \pm 1. \quad (21)$$

Мы видим, что в случае в) индикатриса Дюпена представляет собой две параллельные прямые (рис. 208). Все нормальные сечения вогнуты в одну сторону, кроме сечения, касательная к которому есть AA ; для этого нормального сечения кривизна $\frac{1}{R} = 0$, и оно может иметь в P точку перегиба. Нормальное сечение с касательной AA имеет наименьшую кривизну, сечение с касательной $BB \perp AA$ — наибольшую кривизну. Направление AA есть единственное асимптотическое направление.

Точка P поверхности, в которой $LN - M^2 = 0$ и не имеют места равенства (20), носит название параболической точки. На рисунке 209 изображен один из тех видов, который может иметь поверхность вблизи ее параболической точки.

Отметим, что если оставить в стороне точки закругления и точки уплощения, то при всех трех возможностях а), б), в) наибольшей и наименьшей кривизне нормальных сечений отвечают два взаимно перпендикулярных направления AA и BB (рис. 204, 206 и 208); они

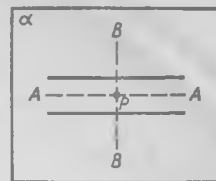


Рис. 208.



Рис. 209.

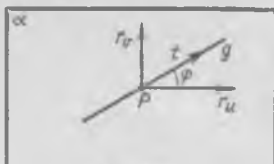


Рис. 210.

называются главными направлениями поверхности в точке P , соответствующие им кривизны $\frac{1}{R_1}$ и $\frac{1}{R_2}$ именуются главными кривизнами. Зафиксируем указанный факт.

2°. Главные направления поверхности в ее точке P , не являющейся точкой закругления или точкой уплощения, перпендикулярны друг другу.

5. Формула Эйлера. Зависимость между главными кривизнами $\frac{1}{R_1}$ и $\frac{1}{R_2}$ и кривизной $\frac{1}{R}$ любого нормального сечения устанавливается формулой Эйлера. Для ее вывода выберем на поверхности координатную сеть так, чтобы в данной точке P векторы r_u и r_v шли по главным направлениям. Тогда ввиду 2° $r_u \perp r_v$ и (см. § 77, (24)) в точке P коэффициент F первой квадратичной формы равен нулю. Главные направления совпадают с осями симметрии индикатрисы Дюпена, вследствие чего в ее уравнении (15) коэффициент M при xy должен оказаться равным нулю. Итак, $F = M = 0$ и равенство (10) принимает вид:

$$\frac{1}{R} = L \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + N \left(\frac{dv}{ds} \right)^2, \quad (22)$$

где R — радиус кривизны нормального сечения Γ поверхности в точке, имеющего касательную направления $\frac{dr}{ds}$, причем ds^2 определяется равенством

$$ds^2 = Edu^2 + Fdu dv + Gdv^2. \quad (23)$$

Обозначим через t единичный вектор касательной Γ к нормальному сечению Γ , а через φ — угол между векторами t и r_u (рис. 210). Так как вдоль Γ

$$t = \frac{dr}{ds} = r_u \frac{du}{ds} + r_v \frac{dv}{ds}, \quad (24)$$

то проекции вектора t на направления векторов r_u и r_v равны соответственно $|r_u| \frac{du}{ds} = \sqrt{E} \frac{du}{ds}$ и $|r_v| \frac{dv}{ds} = \sqrt{G} \frac{dv}{ds}$. С другой стороны, поскольку $|t| = 1$, эти проекции равны $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$. Таким образом,

$$\frac{du}{ds} = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{E}}, \quad \frac{dv}{ds} = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{G}},$$

вследствие чего равенство (22) принимает вид:

$$\frac{1}{R} = \frac{L}{E} \cos^2 \varphi + \frac{N}{G} \sin^2 \varphi. \quad (25)$$

При $\varphi = 0$ касательная g содержит вектор r_u , т. е. имеет главное направление; поэтому, положив в (25) $\varphi = 0$, найдем: $\frac{1}{R_1} = \frac{L}{E}$. Аналогично, положив в (25) $\varphi = \frac{\pi}{2}$, получим: $\frac{1}{R_2} = \frac{N}{G}$. Мы видим, что соотношение (25) может быть записано и так:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \varphi + \frac{1}{R_2} \sin^2 \varphi. \quad (26)$$

Равенство (26) и есть формула Эйлера.

В случае точки закругления $\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1}$ формула Эйлера дает: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}$, т. е. в точке закругления кривизна нормального сечения одинакова во всех направлениях.

Теоремы [78.1], [78.2] и формула Эйлера (26) приводят нас к такому общему выводу.

Теорема [78.3]. Главные кривизны $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ поверхности в данной ее точке P определяют собой кривизну в этой точке любой линии, проведенной по поверхности через точку P .

6. Средняя и полная кривизны поверхности. Средняя кривизна H и полная кривизна K поверхности в данной ее точке P определяются соответственно равенствами:

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad K = \frac{1}{R_1 R_2}, \quad (27)$$

где $\frac{1}{R_1}$ и $\frac{1}{R_2}$ — главные кривизны поверхности в точке P . Если известны H и K , то по формулам Виета можно составить квадратное уравнение, из которого найдутся обе главные кривизны $\frac{1}{R_1}$ и $\frac{1}{R_2}$. По причинам, которые выяснятся в § 79, п. 3, полную кривизну K называют также гауссовой кривизной.

Выведем формулы для вычисления средней и полной кривизны. С этой целью в формуле (10) для кривизны $k = \frac{1}{R}$ нормального сечения в ее правой части разделим числитель и знаменатель на du^2 и положим $\frac{dv}{du} = \theta$; в результате мы найдем:

$$k = \frac{L + 2M\theta + N\theta^2}{E + 2F\theta + G\theta^2}. \quad (28)$$

Из (28) следует:

$$(N - kG)\theta^2 + 2(M - kF)\theta + L - kE = 0. \quad (29)$$

Равенство (29) показывает, что число k не может принимать любые значения: для k возможны лишь те, при которых квадратное относительно θ уравнение (29) имеет действительные корни, для чего необходимо и достаточно, чтобы дискриминант этого уравнения

$$\Delta = (M - kF)^2 - (N - kG)(L - kE) \quad (30)$$

был неотрицательным. Раскрыв в (30) скобки, видим, что кривизна k должна удовлетворять неравенству

$$(EG - F^2)k^2 - (LG + NE - 2MF)k + LN - M^2 \leq 0.$$

Поскольку $EG - F^2 = |r_u r_v|^2 > 0$ (см. § 77, (32)), то, согласно известным правилам для решения неравенств второй степени, кривизна $k = \frac{1}{R}$ должна заключаться между корнями λ_1 и λ_2 квадратного уравнения

$$(EG - F^2)\lambda^2 - (LG + NE - 2MF)\lambda + LN - M^2 = 0. \quad (31)$$

Отсюда заключаем, что эти корни и являются главными кривизнами

$$\lambda_1 = \frac{1}{R_1}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{R_2},$$

вследствие чего

$$H = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2), \quad K = \lambda_1 \lambda_2.$$

Применяя к квадратному уравнению (31) формулы Виета, получаем искомые формулы для средней и полной кривизны:

$$H = \frac{LG + NE - 2MF}{2(EG - F^2)}, \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \quad (32)$$

Так как $EG - F^2 > 0$, то знак полной кривизны K зависит лишь от знака числителя $LN - M^2$. Следовательно (п. 4), в эллиптических точках поверхности $K > 0$, в гиперболических точках $K < 0$, в параболических точках $K = 0$.

Для разыскания тех значений $\theta = \frac{dv}{du}$, которые соответствуют главным направлениям, надлежит, согласно правилам дифференциального исчисления, найти из (28) производную $\frac{dk}{d\theta}$ и приравнять ее нулю. На этом пути мы придем к уравнению

$$(NF - MG)\theta^2 + (NE - LG)\theta + ME - LF = 0, \quad (33)$$

из которого и найдутся значения $\theta_1 = \left(\frac{dv}{du}\right)_1$ и $\theta_2 = \left(\frac{dv}{du}\right)_2$, отвечающие главным направлениям. Для того чтобы избежать затруднений, возникающих при $NF - MG = 0$ ¹, заменим в уравнении (33) θ на $\frac{dv}{du}$ и освободимся от знаменателей, после чего (33) примет такой вид:

$$(ME - LF)du^3 + (NE - LG)dudv + (NF - MG)dv^3 = 0. \quad (34)$$

¹ В этом случае надо провести аналогичные рассуждения, положив $\omega = \frac{du}{dv}$.

7. Примеры. Применим результаты § 77 и 78 к поверхностям, рассмотренным в качестве примеров в § 76, п. 3.

Пример 1. Сфера. Векторы r_u , r_v , $[r_u r_v]$ найдены в § 76, п. 3, (17), (18). Из этих формул с помощью § 77, (21) находим, что первая квадратичная форма сферы имеет вид:

$$I = a^2(du^2 + \cos^2 u dv^2) \quad (35)$$

и что

$$\sqrt{EG - F^2} = a^2 \cos u, \quad (36)$$

$\cos u$ всегда положителен, так как $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ (полюсы, как особые точки параметризации, исключены). Далее имеем:

$$r_{uu} = \{-a \cos u \cos v, -a \cos u \sin v, -a \sin u\},$$

$$r_{uv} = \{a \sin u \sin v, -a \sin u \cos v, 0\},$$

$$r_{vv} = \{-a \cos u \cos v, -a \cos u \sin v, 0\}.$$

По формулам (9) находим:

$$L = a, \quad M = 0, \quad N = a \cos^2 u,$$

так что вторая квадратичная форма имеет вид:

$$II = a(du^2 + \cos^2 u dv^2). \quad (37)$$

Ввиду (35) и (37) формула (10) даст:

$$\frac{1}{R} = \frac{II}{I} = \frac{1}{a}. \quad (38)$$

Таким образом, во всех точках сферы и по всем направлениям кривизна нормальных сечений одна и та же, что очевидно в силу известных свойств сечений сферы. Все точки сферы суть точки закругления.

Для средней и полной кривизны сферы из (32) находим в соответствии с (38):

$$H = \frac{1}{a}, \quad K = \frac{1}{a^2}. \quad (39)$$

Пример 2. Прямой геликоид. В § 76 (п. 3, (22) и (23)) для прямого геликоида найдены векторы r_u , r_v , $[r_u r_v]$, откуда по § 77, (21) и (32) имеем:

первая квадратичная форма

$$I = du^2 + (u^2 + b^2)dv^2, \quad \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{u^2 + b^2}.$$

Далее находим:

$$r_{uu} = 0, \quad r_{uv} = \{-\sin v, \cos v, 0\}, \quad r_{vv} = \{-u \cos v, -u \sin v, 0\},$$

и по формулам (9)

$$L = 0, \quad M = -\frac{b}{\sqrt{u^2 + b^2}}, \quad N = 0.$$

Таким образом, вторая квадратичная форма

$$II = -\frac{2b}{\sqrt{u^2 + b^2}} dudv.$$

Воспользовавшись уравнением (15) индикатрисы Дюпена, видим, что векторы r_u , r_v имеют оба асимптотические направления, так что координатные u -линии и v -линии обладают в каждой точке касательными, направление которых асимптотическое; такие кривые называются асимптотическими линиями.

По формулам (32) получаем:

$$H = 0, K = \frac{-b^2}{(u^2 + b^2)^3},$$

вследствие чего

$$\frac{1}{R_1} = \frac{b}{u^2 + b^2}, \frac{1}{R_2} = -\frac{b}{u^2 + b^2}.$$

Все точки поверхности — гиперболические.

Поверхности, у которых во всех точках средняя кривизна равна нулю, носят название минимальных: можно показать, что из всех поверхностей, ограниченных данным замкнутым контуром, минимальная поверхность имеет наименьшую площадь. *Прямой геликоид есть минимальная поверхность.*

§ 79. Внутренняя геометрия поверхности

1. Изометрические отображения поверхностей. При изучении поверхности надлежит различать два вида ее свойств. Те свойства поверхности, которые можно установить, производя измерения непосредственно по самой поверхности, не выходя за ее пределы, называются ее внутренними свойствами. Таковыми будут длины дуг линий, проведенных по поверхности, угол между двумя такими линиями, площадь куска поверхности. В дальнейшем (п. 2—4) мы обнаружим еще ряд других внутренних свойств поверхностей. Совокупность внутренних свойств поверхности есть ее внутренняя геометрия.

Если же какое-либо свойство поверхности требует при его установлении обязательного использования окружающего трехмерного пространства, то оно носит название внешнего свойства поверхности. В качестве примера внешнего свойства поверхности можно привести кривизну проведенной по ней линии. В случае поверхности Земли внутренние ее свойства устанавливаются с помощью геодезических измерений, для изучения ее внешних свойств необходимы астрономические инструменты.

Две поверхности S и S^* называются *изометричными*, если у них одинаковы все внутренние свойства. Ниже будет показано (теорема [79.1]), что все внутренние свойства сохраняются, если остаются неизменными длины дуг кривых. Поэтому можно дать такое определение изометричных поверхностей: *две поверхности S и S^* называются изометричными, если можно установить такое взаимно однозначное отображение поверхности S на S^* , при котором длины соответствующих дуг кривых одинаковы.* Указанное отображение име-

ется *изометрическим отображением* поверхности S на поверхность S^* . Возьмем, например, прямой круговой цилиндр, получающийся при вращении бесконечной прямой вокруг другой прямой, ей параллельной; разрезав его вдоль одной из образующих, мы сможем развернуть его поверхность S на плоскость в виде полосы S^* , заключенной между двумя параллельными прямыми. При этом, очевидно, все внутренние свойства сохраняются: останутся неизменными все длины кривых, углы между линиями, площади кусков поверхности. Таким образом, поверхность S цилиндра изометрична полосе S^* . Если мы каждой точке $M \in S$ поставим в соответствие ту точку $M^* \in S^*$, с которой совмещается точка M при указанном разворачивании, то мы получим изометрическое отображение поверхности S цилиндра на полосу S^* . При этом отображении отрезок прямой на полосе S^* , не параллельный ее краю, будет образом куска винтовой линии; мы видим, что кривизна линии, проведенной по поверхности, изменилась: кривизна прямой равна нулю, кривизна винтовой линии отлична от нуля (см. § 75, п. 4, пример).

Если мы реализуем поверхность S в виде гибкой нерастяжимой пленки и будем ее деформировать, то получим новую поверхность S^* , которая, очевидно, изометрична поверхности S ; мы осуществили таким путем изометрическое отображение S на S^* . Поэтому если изометрическое отображение поверхности S на поверхность S^* может быть получено непрерывной деформацией поверхности S , то его называют *изгибанием* поверхности S . Ясно, что поверхность кругового цилиндра получается из полосы в плоскости ее изгибанием. Иногда изгибанием поверхности называют (не совсем точно) всякое ее изометрическое отображение.

Установим теперь условие, при котором отображение поверхности будет изометрическим. Пусть $f: S \rightarrow S^*$ есть отображение поверхности S на поверхность S^* . Если на поверхности S установлена гауссова система координат (u, v) , и точке $M(u, v)$ отвечает при отображении f точка $M' = f(M)$, то мы можем отнести точке M' те же координаты (u, v) и тем самым установить систему гауссовых координат на поверхности S^* , сделав это для всех точек $M \in S$. Если в указанной системе координат первая квадратичная форма поверхности S есть

$$ds^2 = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) dudv + G(u, v) dv^2, \quad (1)$$

и отображение f изометрическое, то, как нетрудно убедиться, ту же первую квадратичную форму (1) будет иметь и поверхность S^* . В самом деле, изометричность поверхностей влечет за собой равенство длин дуг кривых на поверхностях, отвечающих друг другу в отображении f , а следовательно, и их дифференциалов ds . Принимая далее во внимание, что $du = u'(t) dt$ и $dv = v'(t) dt$ произвольны, приходим к выводу, что коэффициенты $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$ первой квадратичной формы у обеих поверхностей должны быть одинаковы. Обратное утверждение очевидно. Итак,

Теорема [79.1]. *Две поверхности S и S^* изометричны тогда и только тогда, когда преобразованием гауссовых координат первая*

квадратичная форма поверхности S^* может быть сделана одинаковой с такой же формой поверхности S .

Из теоремы [79.1] следует:

1°. Внутренними свойствами поверхности S являются те ее свойства, которые могут быть выражены с помощью коэффициентов E , F и G первой квадратичной формы поверхности S .

2. Геодезические линии. Линия l на поверхности называется геодезической, если ее главная нормаль во всех точках линии l совпадает с нормалью к поверхности. Если линия l есть прямая, то она также считается геодезической, поскольку любая нормаль к прямой может быть принята за главную.

Геодезические линии имеют важное значение в механике. Если материальная точка движется по поверхности S при отсутствии внешних сил, действующих на точку, то ускорение, испытываемое точкой, вызывается силой реакции поверхности, которая всегда направлена по ее нормали. Следовательно, вектор ускорения $r''(t)$, где t — время, имеет направление по нормали к поверхности S , так что соприкасающаяся плоскость траектории l движения содержит в каждой своей точке нормаль к S . Но нормаль к поверхности есть в то же время и нормаль к линии l ; поэтому в рассматриваемом случае она будет для l главной нормалью, и линия l есть геодезическая.

На сфере геодезическими являются окружности больших кругов, так как главная нормаль такой окружности в каждой ее точке проходит через центр сферы и совпадает, следовательно, с нормалью к сфере.

Выведем теперь правило для разыскания геодезических линий. Пусть уравнение поверхности S есть $r = r(u, v)$, а геодезическая линия поверхности S задана уравнениями

$$u = u(s), \quad v = v(s), \quad (2)$$

где s — естественный параметр (см. § 73, п. 6). Для упрощения выкладок мы примем, что поверхность S отнесена к ортогональной системе гауссовых координат, так что (см. 77.2.3)

$$E = r_u^2, \quad F = r_u r_v = 0, \quad G = r_v^2. \quad (3)$$

общность рассуждений при этом, конечно, не нарушится.

Вектор $\frac{dr}{ds}$ будет направлен по главной нормали к линии l (§ 74, п. 4), а так как линия l есть геодезическая, то этот вектор перпендикулярен к касательной плоскости поверхности, так что

$$\frac{d^2 r}{ds^2} r_u = 0, \quad \frac{d^2 r}{ds^2} r_v = 0, \quad (4)$$

поскольку оба вектора r_u и r_v лежат в касательной плоскости. Но

$$\frac{dr}{ds} = r_u \frac{du}{ds} + r_v \frac{dv}{ds},$$

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = r_{uu} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2r_{uv} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + r_{vv} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + r_u \frac{d^2 u}{ds^2} + r_v \frac{d^2 v}{ds^2}. \quad (5)$$

Умножив обе части равенства (5) на r_u , а затем на r_v , ввиду (3) и (4) находим:

$$r_{uu} r_u \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2r_{uv} r_u \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + r_{vv} r_u \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + E \frac{d^2 u}{ds^2} = 0, \quad (6)$$

$$r_{uu} r_v \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2r_{uv} r_v \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + r_{vv} r_v \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + G \frac{d^2 v}{ds^2} = 0. \quad (7)$$

Дифференцируя по u и по v равенства (3), получим:

$$\frac{\partial E}{\partial u} = 2r_{uu} r_u, \quad \frac{\partial E}{\partial v} = 2r_{uv} r_u, \quad \frac{\partial F}{\partial u} = r_{uu} r_v + r_{uv} r_u = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = r_{uv} r_v + r_{vv} r_u = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial u} = 2r_{uv} r_v, \quad \frac{\partial G}{\partial v} = 2r_{vv} r_v,$$

откуда вытекает, что (так как $F = 0$)

$$r_{uu} r_u = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u}, \quad r_{uv} r_u = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v}, \quad r_{uv} r_v = -\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}, \quad (8)$$

$$r_{uu} r_v = -\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v}, \quad r_{uv} r_v = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}, \quad r_{vv} r_v = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v}.$$

В силу (8) формулы (6) и (7) дают:

$$\frac{d^2 u}{ds^2} = -\frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial u} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 - \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial v} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \frac{1}{2E} \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2; \quad (9)$$

$$\frac{d^2 v}{ds^2} = \frac{1}{2G} \frac{\partial E}{\partial v} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 - \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial u} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} - \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial v} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2. \quad (10)$$

При интегрировании системы уравнений (9) и (10) следует еще учесть, что функции $\frac{du}{ds}$ и $\frac{dv}{ds}$ связаны равенством (см. (1), $F = 0$):

$$E \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + G \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 1. \quad (11)$$

Замечая, что в уравнениях (9), (10), (11) все множители при производных от искомых функций выражаются через коэффициенты E , G первой квадратичной формы и их производные, ввиду 1° приходим к такому важному выводу:

2°. Понятие геодезической линии поверхности принадлежит ее внутренней геометрии.

Уравнения (9), (10), (11) дадут нам возможность выразить вдоль геодезической координаты u , v как функции от s ; более удобным является дифференциальное уравнение, позволяющее для геодезической непосредственно установить функциональную связь между u и v . Для вывода этого уравнения исходим из соотношений:

$$\frac{dv}{du} = \frac{\frac{dv}{ds}}{\frac{du}{ds}},$$

$$\frac{d^2 v}{du^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dv}{du} \right) : \frac{du}{ds} = \frac{\frac{du}{ds} \frac{d^2 v}{ds^2} - \frac{dv}{ds} \frac{d^2 u}{ds^2}}{\left(\frac{du}{ds} \right)^3},$$

с помощью которых находим из (9) и (10):

$$\frac{d^2v}{du^2} = \frac{1}{2G} \frac{\partial E}{\partial v} + \left(\frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial u} - \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial u} \right) \frac{dv}{du} + \left(\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial v} \right) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 - \frac{1}{2E} \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{dv}{du} \right)^3. \quad (12)$$

Согласно теории дифференциальных уравнений равенство (12) определит однозначно v как функцию от u , если при некотором $u = u_0$ будут заданы значения $v = v_0$ и $\frac{dv}{du} = v'_0$. Поскольку отношение $\frac{dv}{du}$ задает направление геодезической (§ 77.1.2), то нами доказано такое утверждение:

3°. Через каждую точку (u_0, v_0) поверхности в данном на ней направлении проходит одна и только одна геодезическая.

Используя методы вариационного исчисления, можно показать, что

4°. Дуга геодезической между ее точкой A и достаточно близкой к A ее точкой B есть кратчайшее расстояние по поверхности между точками A и B .

Предложение 4° легко подтверждается в случае сферы. Для сферы геодезическими служат окружности больших кругов. Дуга AB такой окружности, не содержащая диаметрально противоположных точек сферы, короче, как известно, всякой другой линии, проведенной по сфере от точки A до точки B .

Доказательство утверждения 4°, не опирающееся на вариационное исчисление, дано в [40] § 92, 93.

3. Теоремы Гаусса и Гаусса — Бонне. Для внутренней геометрии поверхностей важное значение имеют следующие две теоремы, которые приводим без доказательств.

Теорема [79.2] (теорема Гаусса). Полная кривизна K регулярной поверхности в некоторой ее точке может быть выражена через коэффициенты E, F, G первой квадратичной формы поверхности и их производные (до второго порядка включительно) и принадлежит, следовательно, к внутренней геометрии поверхности¹⁾. □

Теорема [79.3] (теорема Гаусса — Бонне). Пусть на регулярной поверхности S дан геодезический n -угольник²⁾ с углами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Тогда справедлива формула

$$\sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i) + \iint_Q K d\sigma = 2\pi, \quad (13)$$

где K — полная кривизна поверхности, $d\sigma = \sqrt{EG - F^2} du dv$ — элемент площади поверхности, а двойной интеграл распространен на область Q , ограниченную геодезическим n -угольником. □

¹⁾ Эта теорема составляет содержание задачи 1150 задачника [8]. Читатель легко ее докажет с помощью задач 1148 и 1149 того же задачника.

²⁾ Т. е. часть поверхности, ограниченная n отрезками геодезических.

Доказательства теорем [79.2] и [79.3] можно найти, например, в книге [40], § 82, 98. Теорема [79.2] и является причиной того, что полную кривизну K поверхности именуют гауссовой.

Можно доказать ([40], § 92), что первая квадратичная форма всякой регулярной поверхности в достаточно-малой окрестности любой ее точки может быть приведена к виду

$$du^2 + G(u, v) dv^2, \quad (14)$$

причем $G(0, v) = 1$, и при $u = 0$ производная $\frac{\partial G(u, v)}{\partial u}$ равна нулю; тогда полная кривизна K выразится формулой

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}. \quad (15)$$

Из формулы (15) теорема [79.2] следует очевидным образом.

Отметим еще следующее важное обстоятельство. Полная кривизна плоскости равна нулю в каждой ее точке. Поэтому ни одна поверхность, кривизна K которой отлична от нуля, не может в силу теоремы [79.2] оказаться изометричной плоскости; вследствие этого ее нельзя изобразить на плоскости вполне точно, с сохранением величины всех длин, углов и т. п. Это заключение относится и к поверхности Земли. Отсюда возникает задача изображения на карте частей земной поверхности с возможно меньшими искажениями; указанная задача, имеющая исключительно важное практическое значение, решается специальной наукой — картографией (см., например, [23] или [26], ч. II, § 66).

4. Дефект геодезического треугольника. Применив формулу (13) Гаусса — Бонне к геодезическому треугольнику, мы получим:

$$\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = - \iint_Q K d\sigma. \quad (16)$$

В формуле (16) слева стоит разность между мерой π двух прямых углов и суммой мер всех углов геодезического треугольника, т. е. его дефект (ср. § 60, п. 1). Стоящий справа двойной интеграл принято называть интегральной кривизной области Q . Итак,

5°. Дефект геодезического треугольника равен его интегральной кривизне, взятой с обратным знаком.

В случае поверхности постоянной кривизны, т. е. регулярной поверхности, у которой полная кривизна одинакова во всех ее точках, в правой части формулы (16) K выйдет за знак двойного интеграла:

$$\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = -K\sigma, \quad (17)$$

где σ — площадь геодезического треугольника. Следовательно, поскольку $\sigma > 0$,

6°. На поверхности постоянной нулевой кривизны сумма углов геодезического треугольника равна π (двум прямым углам), на поверхности постоянной положительной кривизны та же сумма больше π , а на поверхности постоянной отрицательной кривизны эта сумма меньше π .

При $K \neq 0$ формула (17) дает правило для вычисления площади геодезического треугольника.

5. Поверхности постоянной кривизны. Укажем еще некоторые свойства поверхностей постоянной кривизны. Согласно (15)

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} + K \sqrt{G} = 0, \quad (18)$$

причем (см. пояснение к формуле (14))

$$\text{при } u = 0 \quad G = 1, \quad \frac{\partial G}{\partial u} = 0. \quad (19)$$

Равенство (18) представляет собой дифференциальное уравнение для неизвестной функции $\sqrt{G}$; его требуется проинтегрировать при начальных условиях (19).

Если $K = 0$, то (18) даст:

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = 0, \quad \sqrt{G} = Cu + D, \quad G = (Cu + D)^2,$$

где C и D — функции от v . Начальные условия (19) покажут, что $D = \pm 1$, $C = 0$. Таким образом, первая квадратичная форма поверхности постоянной нулевой кривизны в достаточно малой окрестности любой ее точки может быть приведена к виду

$$du^2 + dv^2.$$

Но такой же вид имеет метрическая (первая квадратичная) форма плоскости в декартовых прямоугольных координатах (если положить $x = u$, $y = v$). Мы пришли к такому результату:

7°. Если гауссова (полная) кривизна K поверхности в любой ее точке равна нулю, то поверхность изометрична в малом плоскости.

Пусть далее постоянная гауссова кривизна K положительна; примем, что

$$K = \frac{1}{a^2}. \quad (20)$$

В этом случае общее решение уравнения (18) есть

$$\sqrt{G} = C \cos \frac{u}{a} + D \sin \frac{u}{a},$$

где C и D — произвольные функции от v . По начальным условиям (19) находим: $C = \pm 1$, $D = 0$, так что первая квадратичная форма поверхности, у которой гауссова кривизна постоянна и определяется из (20), может быть приведена (в достаточно малой окрестности точки) к виду

$$du^2 + \cos^2 \frac{u}{a} dv^2. \quad (21)$$

Положив в (21) $u = au$, $v = av$, получим:

$$a^2 (du^2 + \cos^2 u dv^2). \quad (22)$$

В (22) мы узнаем первую квадратичную форму сферы (§ 78, п. 7); следовательно, 8°. Любая поверхность постоянной положительной кривизны изометрична в малом сфере.

Обратимся, наконец, к случаю, когда гауссова кривизна K поверхности постоянна и отрицательна:

$$K = -\frac{1}{a^2}.$$

Здесь общее решение уравнения (18) таково:

$$\sqrt{G} = Ce^{\frac{u}{a}} + De^{-\frac{u}{a}}; \quad (23)$$

в (23) C и D — произвольные функции от v . Начальные условия (19) дадут:

$$C + D = \pm 1, \quad C - D = 0, \quad C = D = \pm \frac{1}{2},$$

вследствие чего

$$\sqrt{G} = \pm e^{\frac{u}{a} + \frac{u}{a}} = \pm \frac{u}{a}$$

и первая квадратичная форма рассматриваемой поверхности равна

$$du^2 + \text{ch}^2 \frac{u}{a} dv^2.$$

Но, как известно (см., например, [25], т. II, с. 23, формула (19)), той же формулой выражается и метрическая форма плоскости Лобачевского. Мы доказали, что

9°. Любая поверхность постоянной отрицательной кривизны изометрична в малом плоскости Лобачевского.

Это предложение было установлено Е. Бельтрами (1835—1900) (см. [61], с. 180—212); оно показывает, что двумерная геометрия Лобачевского может быть в малом реализована на поверхностях постоянной отрицательной кривизны. Некоторые такого рода поверхности были также указаны Е. Бельтрами (рис. 211). Это открытие Бельтрами сыграло весьма важную роль на пути признания геометрии Лобачевского.

Следует указать, что все поверхности постоянной кривизны в евклидовом трехмерном пространстве, как доказал в 1901 г. Гильберт ([18], добавление V), обязательно имеют особенности. Такой поверхности, на которой осуществлялась бы геометрия Лобачевского в целом, в трехмерном евклидовом пространстве не существует.

Вспоминая то, что нам известно о сумме углов треугольника на евклидовой плоскости, на сфере и на плоскости Лобачевского, мы видим, что в утверждении 6° частично проявляется справедливость предположений 7°, 8°, 9°.



Рис. 211.

ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ

§ 80. Топологические и метрические пространства

1. Топологическое пространство. Топология изучает свойства геометрических фигур, инвариантные относительно всех взаимно однозначных и взаимно непрерывных отображений¹⁾. Если, например, речь идет о поверхности, реализованной в виде гибкой и растяжимой пленки, то ее взаимно однозначными и взаимно непрерывными преобразованиями (отображениями на себя) будут ее растяжения и сжатия без разрывов и склеиваний.

Фундаментальным понятием топологии является понятие топологического пространства, которое вводится следующим образом. Множество R , элементы которого будем называть *точками*, называется *топологическим пространством*, если в нем задано семейство $\Phi = \{F_\alpha\}$ его подмножеств F_α , именуемых *открытыми множествами*, и притом так, что выполнены следующие аксиомы.

I. Объединение любой системы (конечной или бесконечной) открытых множеств есть открытое множество.

II. Пересечение любых двух открытых множеств есть открытое множество.

III. Пустое множество $\emptyset$ и все множество R являются открытыми множествами.

Будем говорить, что семейство $\Phi = \{F_\alpha\}$ является *топологической структурой* на R или просто *топологией* в R . Таким образом, топологическое пространство есть пара, состоящая из множества R и введенной на нем топологической структуры Φ . Топологическое пространство обозначается через (R, Φ) и только в тех случаях, когда ясно, о какой топологической структуре Φ идет речь, топологическое пространство (R, Φ) обозначается просто через R .

Из аксиомы II следует, что пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество.

Рассмотрим примеры топологических пространств.

Пример 1. В произвольном бесконечном множестве R открытыми множествами будем считать только два множества — пустое множество и само множество R . Такая топология называется *тривиальной*.

Пример 2. Пусть R — произвольное множество. Открытыми множествами будем считать все подмножества множества R , включая пустое множество. Такая топология называется *дискретной*.

Пример 3. Пусть R — произвольное бесконечное множество.

¹⁾ См. § 73, п. 1.

Открытыми множествами будем считать R , $\emptyset$, и любое множество вида $R \setminus T$, где T — любое конечное подмножество множества R .

Пример 4. Рассмотрим множество R , состоящее из двух различных точек a и b . Открытыми множествами будем считать R , $\emptyset$ и $\{a\}$.

Предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что во всех этих примерах выполняются аксиомы I—III топологического пространства.

Окрестностью точки a топологического пространства R именуется любое открытое множество $U \subseteq R$, содержащее точку a .

Пусть R — топологическое пространство, а M — произвольное множество точек этого пространства. Точка $a \in M$ называется *внутренней точкой* множества M , если существует такая окрестность U_a точки a , что $U_a \subseteq M$. Имеет место следующая теорема.

Теорема [80.1]. Все точки открытого множества являются внутренними точками. Обратно, если все точки множества $F \subseteq R$ топологического пространства (R, Φ) внутренние, то множество F является открытым.

Доказательство. Первая часть теоремы очевидна, поэтому докажем только вторую часть теоремы. Так как все точки множества F внутренние, то для любой точки a этого множества существует такая окрестность U_a , что $U_a \subseteq F$. Легко видеть, что $F = \bigcup_a U_a$. Согласно

аксиоме I, F — открытое множество. ■

Сейчас мы покажем, что любое подмножество топологического пространства может быть рассмотрено как топологическое пространство. В самом деле, пусть (R, Φ) топологическое пространство, а M подмножество множества R . Открытым множеством в M назовем любое его подмножество вида $F_\alpha = M \cap F_\alpha$, где F_α любой элемент семейства Φ . Легко убедиться в том, что при этом определении выполняются все аксиомы I—III топологического пространства, поэтому мы будем говорить, что на множестве M индуцируется топологическая структура $\Phi' = \{F_\alpha\}$. Топологическое пространство (M, Φ') называется *подпространством* топологического пространства (R, Φ) . Совершенно очевидно, что если $X \subseteq M$ и X является открытым множеством пространства (R, Φ) , то X — открытое множество подпространства (M, Φ') . Важно подчеркнуть, что обратное утверждение, вообще говоря, не справедливо (см. ниже, пример 9).

2. Замкнутые множества. Предельные точки. Множество M топологического пространства (R, Φ) называется *замкнутым*, если $R \setminus M$ является открытым множеством, т. е. если $R \setminus M \in \Phi$. Из этого определения и аксиомы III непосредственно следует

1°. Все пространство R и пустое множество $\emptyset$ являются замкнутыми множествами.

Далее, так как $R \setminus (M_1 \cup M_2) = (R \setminus M_1) \cap (R \setminus M_2)$, то из аксиомы II непосредственно следует

2°. Объединение любых двух замкнутых множеств есть замкнутое множество.

Так как $R \setminus \bigcap_{\alpha} M_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} R \setminus M_{\alpha}$ для любой (конечной или бесконечной) системы $\{M_{\alpha}\}$ множеств, то из аксиомы I получаем:

3°. Пересечение любой системы (конечной или бесконечной) замкнутых множеств есть замкнутое множество.

Точка a топологического пространства (R, Φ) называется *предельной точкой* множества $M \subseteq R$, если любая окрестность U_a точки a содержит точку множества M , отличную от a . Отметим, что предельные точки множества не обязательно принадлежат самому множеству. Точнее, имеет место следующее предложение.

4°. Множество M пространства (R, Φ) замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

В самом деле, если M — замкнутое множество, то $R \setminus M$ — открытое множество, поэтому, согласно теореме [80.1] любая точка a этого множества является внутренней точкой этого множества и поэтому имеет хотя бы одну окрестность U_a , целиком состоящую из точек множества $R \setminus M$. Таким образом, $U_a \cap M = \emptyset$, поэтому a не является предельной точкой множества M . Для доказательства обратного утверждения достаточно показать, что $R \setminus M$ открытое множество. Но это утверждение непосредственно следует из того обстоятельства, что любая точка этого множества не является предельной точкой множества M , поэтому имеет хотя бы одну окрестность, целиком состоящую из точек множества $R \setminus M$. ■

Точка a топологического пространства (R, Φ) называется *границей* множества M , если в любой ее окрестности существуют как точки множества M , так и точки множества $R \setminus M$. Множество всех граничных точек называется *границей* множества. Множество всех внутренних и граничных точек множества M называется *замыканием* множества и обозначается через $\bar{M}$.

Из этого определения непосредственно следует:

5°. Для любого множества M имеем: $M \subset \bar{M}$; $\bar{M} = \bar{\bar{M}}$.

6°. Если $M_1 \subset M_2$, то $\bar{M}_1 \subset \bar{M}_2$.

7°. Замыкание любого множества M есть замкнутое множество.

Для обоснования последнего утверждения достаточно показать, что $R \setminus \bar{M}$ — открытое множество. Но это утверждение с очевидностью вытекает из того обстоятельства, что множество $R \setminus \bar{M}$ не содержит ни внутренних, ни граничных точек множества M , поэтому любая его точка является внутренней.

8°. Если F замкнутое множество и $F \supset M$, то $F \supset \bar{M}$.

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из того факта, что $R \setminus F$ является открытым множеством, поэтому ни одна точка этого множества не может быть ни внутренней, ни граничной точкой множества M .

Из свойств 5° и 8° следует:

9°. Если M — замкнутое множество, то $\bar{M} = M$.

В самом деле, так как $M \subset \bar{M}$, то из 8° следует, что $\bar{M} \subset M$. С другой стороны, из 5° следует, что $M \subset \bar{M}$, поэтому $\bar{M} = M$.

Как следствие из 7° и 8° получаем:

10°. Замыкание множества M есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих M .

3. **Базис топологического пространства.** Семейство открытых множеств $\{B_{\alpha}\}$ называется *базисом* топологического пространства (R, Φ) , если любое открытое множество $G \subset R$ может быть представлено как объединение некоторых множеств из семейства $\{B_{\alpha}\}$.

Если $\{B_{\beta}\}$ — базис топологического пространства, то легко доказать следующие предложения:

1°. $R = \bigcup_{\beta} B_{\beta}$.

2°. Пусть B_1 и B_2 — произвольные множества из $\{B_{\alpha}\}$. Если $a \in B_1 \cap B_2$, то существует такое B_3 , что $a \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема [80.2]. Для того чтобы семейство открытых множеств $\{B_{\alpha}\}$ было базисом топологического пространства (R, Φ) , необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $a \in R$ и любой окрестности U_a этой точки существовало множество $B \subset \{B_{\alpha}\}$ такое, что $a \in B \subset U_a$.

Доказательство. Необходимость непосредственно следует из определения базиса, поэтому докажем достаточность условия. Пусть U — произвольное открытое множество в R . Так как для любой точки $a \in U$ множество U является окрестностью, то существует множество B_a такое, что $a \in B_a \subset U$. Отсюда следует, что U есть объединение некоторых множеств из семейства $\{B_{\alpha}\}$. ■

4. **Метрические пространства.** Важным классом пространств, в которых легко может быть задана топология, являются метрические пространства (R, ρ) , определенные ранее в п. 1, § 73. Так называется множество R с заданной на ней метрикой, т. е. неотрицательной вещественной функцией $\rho(x, y)$, определенной на $R \times R$ и удовлетворяющей аксиомам 1°, 2° и 3°, сформулированным в п. 1, § 73. В § 73 были рассмотрены три примера метрических пространств. Рассмотрим еще два примера.

Пример 5. В проективной плоскости легко может быть задана метрика. Точкам проективной плоскости P_2 взаимно однозначно соответствуют прямые связки $[O]$, с центром O , лежащим вне плоскости P_2 . Расстоянием $\rho(A, B)$ между двумя точками A и B плоскости P_2 назовем тот из углов, составленных прямыми OA и OB , который меньше π . Тем самым проективная плоскость превратится в метрическое пространство, именуемое *эллиптической плоскостью* или *плоскостью Римана* (см. § 69, п. 5).

Построим далее сферу с центром в точке O . Всякая прямая связки пересечет сферу в двух диаметрально противоположных точках. Если эти точки мы отождествим (т. е. будем их считать одной точкой), то убедимся, что эллиптическую плоскость можно представить в TE_2 в виде сферы с отождествленными диаметрально противоположными точками.

Пример 6. В множестве M непрерывных функций $f(x)$, заданных на отрезке $0 \leq x \leq 1$, введем метрику, положив для двух функций $f_1, f_2 \in M$

$$\rho(f_1, f_2) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

В силу известных теорем теории функций действительного переменного такой максимум всегда существует. Построенное таким путем метрическое пространство играет важную роль в функциональном анализе.

Выполнение требований 1°, 2° и 3° п. 1, § 73 в примерах 5 и 6 устанавливается легко, что мы предоставляем сделать читателю.

Мы сейчас покажем, что метрические пространства являются частным случаем топологических пространств; точнее, покажем, что заданные метрики ρ в множестве R позволяют естественным образом определить топологическую структуру в пространстве (R, ρ) . Для этого достаточно в (R, ρ) ввести понятие открытого множества так, чтобы были выполнены аксиомы I—III, п. 1. Шаровой r — о к р е с т н о с т ью точки a пространства (R, ρ) назовем множество всех точек $x \in (R, \rho)$, удовлетворяющих условию $\rho(a, x) < r$ (обозначение: $U(a, r)$). Открытым множеством пространства (R, ρ) назовем либо пустое множество, либо любое непустое множество M , удовлетворяющее условию: для каждой точки $a \in M$ существует хотя бы одна шаровая окрестность точки a , целиком принадлежащая множеству M . Предоставляем читателю самостоятельно убедиться в том, что при этом определении все три аксиомы I—III, п. 1 выполняются. Определенная таким образом топология Φ_ρ называется т о п о л о г и е й, и н д у ц и р о в а н н о й в (R, ρ) м е т р и к о й ρ или п р о с т о т о п о л о г и е й м е т р и ч е с к о г о п р о с т р а н с т в а (R, ρ) .

Из приведенного выше определения следует, что в топологическом пространстве (M, ρ) пустое множество $\emptyset$ и семейство шаров $\{U(a, r)\}$, где a пробегает все R , а r — всю совокупность положительных чисел, образует базис пространства.

Рассмотрим примеры.

Пример 7. В метрическом пространстве (R, ρ) любая шаровая r — окрестность $U(a, r)$ является открытым множеством. Открытыми множествами будут также пересечения конечного множества шаровых окрестностей $U(a_1, r_1), U(a_2, r_2), \dots, U(a_k, r_k)$ и объединение любого конечного или бесконечного множества шаровых окрестностей.

Пример 8. В евклидовом арифметическом пространстве E_1 (см. § 73, п. 1, пример 2) интервал (a, b) является открытым множеством, а сегмент $[a, b]$ (см. § 73, п. 1, пример 3) не является открытым множеством.

Последнее утверждение следует из того обстоятельства, что любая r — окрестность точки a (или b) содержит точки, не принадлежащие сегменту $[a, b]$.

Введем понятие подпространства метрического пространства (R, ρ) . Для этого заметим, что всякое множество M метрического пространства

(R, ρ) само является метрическим пространством (M, ρ) , поэтому метрикой ρ на (M, ρ) индуцируется топологическая структура Φ_ρ . Таким образом, рассматривая метрические пространства (R, ρ) и (M, ρ) как топологические пространства, можно считать, что (M, ρ) является подпространством пространства (R, ρ) . Это утверждение полностью согласуется с общим определением топологических подпространств (см. п. 1). В самом деле, топология Φ_ρ пространства (R, ρ) индуцирует на M топологическую структуру Φ_ρ^* , которая, как легко видеть, совпадает с Φ_ρ . Другими словами, топологические пространства (M, Φ_ρ) и (M, Φ_ρ^*) совпадают.

Пример 9. Пусть (R, ρ) — обычное евклидово пространство E_3 , а Π — плоскость в E_3 . В соответствии с приведенным выше определением открытым множеством пространства (Π, ρ) будет любое множество N точек плоскости Π , удовлетворяющих условию: для каждой точки плоскости существует хотя бы один открытый круг с центром в a , целиком принадлежащий множеству N . Такими множествами будут, например, все открытые круги, внутренние области треугольников, квадратов и т. д. Заметим, что в данном случае открытые множества в пространстве (Π, ρ) не будут открытыми множествами в (R, ρ) .

5. Аксиома отделимости. Топологическое пространство называется х а у с д о р ф о в ы м, если выполняется следующая аксиома отделимости.

IV. Для любых двух различных точек пространства R существуют непересекающиеся окрестности, содержащие эти точки.

Примером хаусдорфова пространства является метрическое пространство. В самом деле, пусть a и b — различные точки, а $\rho(a, b) = r$. Шаровые окрестности $U(a, \frac{r}{2})$ и $U(b, \frac{r}{2})$ очевидно не имеют общих точек. С другой стороны пространство, рассмотренное выше в примере 3, не является хаусдорфовым, так как любые два непустые открытые множества имеют бесчисленное множество общих точек.

Легко видеть, что любое подпространство хаусдорфова пространства является также хаусдорфовым. В дальнейшем мы всюду, без особых оговорок, будем предполагать, что рассматриваемые пространства являются хаусдорфовыми.

§ 81. Топологические отображения, связность и компактность

1. Отображения. Напомним простейшие определения, связанные с общими отображениями. Пусть X и Y произвольные множества, а

$$f: X \rightarrow Y \quad (1)$$

— отображение множества X в множество Y . Обозначим через $f(X)$ множество образов всех точек множества X . Очевидно, $f(X) \subseteq Y$. Если $f(X) = Y$, то f называется отображением множества X на множество Y . Отображение множества X на множество Y называется в з а -

Пример 6. В множестве M непрерывных функций $f(x)$, заданных на отрезке $0 \leq x \leq 1$, введем метрику, положив для двух функций $f_1, f_2 \in M$

$$\rho(f_1, f_2) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

В силу известных теорем теории функций действительного переменного такой максимум всегда существует. Построенное таким путем метрическое пространство играет важную роль в функциональном анализе.

Выполнение требований 1°, 2° и 3° п. 1, § 73 в примерах 5 и 6 устанавливается легко, что мы предоставляем сделать читателю.

Мы сейчас покажем, что метрические пространства являются частным случаем топологических пространств; точнее, покажем, что задание метрики ρ в множестве R позволяет естественным образом определить топологическую структуру в пространстве (R, ρ) . Для этого достаточно в (R, ρ) ввести понятие открытого множества так, чтобы были выполнены аксиомы I—III, п. 1. Шаровой r — окрестностью точки a пространства (R, ρ) назовем множество всех точек $x \in (R, \rho)$, удовлетворяющих условию $\rho(a, x) < r$ (обозначение: $U(a, r)$). Открытым множеством пространства (R, ρ) назовем либо пустое множество, либо любое непустое множество M , удовлетворяющее условию: для каждой точки $a \in M$ существует хотя бы одна шаровая окрестность точки a , целиком принадлежащая множеству M . Предоставляем читателю самостоятельно убедиться в том, что при этом определении все три аксиомы I—III, п. 1 выполняются. Определенная таким образом топология Φ_ρ называется топологией, индуцированной в (R, ρ) метрикой ρ или просто топологией метрического пространства (R, ρ) .

Из приведенного выше определения следует, что в топологическом пространстве (M, ρ) пустое множество $\emptyset$ и семейство шаров $\{U(a, r)\}$, где a пробегает все R , а r — всю совокупность положительных чисел, образует базис пространства.

Рассмотрим примеры.

Пример 7. В метрическом пространстве (R, ρ) любая шаровая r — окрестность $U(a, r)$ является открытым множеством. Открытыми множествами будут также пересечения конечного множества шаровых окрестностей $U(a_1, r_1), U(a_2, r_2), \dots, U(a_n, r_n)$ и объединение любого конечного или бесконечного множества шаровых окрестностей.

Пример 8. В евклидовом арифметическом пространстве E_1 (см. § 73, п. 1, пример 2) интервал (a, b) является открытым множеством, а сегмент $[a, b]$ (см. § 73, п. 1, пример 3) не является открытым множеством.

Последнее утверждение следует из того обстоятельства, что любая r — окрестность точки a (или b) содержит точки, не принадлежащие сегменту $[a, b]$.

Введем понятие подпространства метрического пространства (R, ρ) . Для этого заметим, что всякое множество M метрического пространства

(R, ρ) само является метрическим пространством (M, ρ) , поэтому метрикой ρ на (M, ρ) индуцируется топологическая структура Φ_ρ . Таким образом, рассматривая метрические пространства (R, ρ) и (M, ρ) как топологические пространства, можно считать, что (M, ρ) является подпространством пространства (R, ρ) . Это утверждение полностью согласуется с общим определением топологических подпространств (см. п. 1). В самом деле, топология Φ_ρ пространства (R, ρ) индуцирует на M топологическую структуру Φ_ρ^* , которая, как легко видеть, совпадает с Φ_ρ . Другими словами, топологические пространства (M, Φ_ρ) и (M, Φ_ρ^*) совпадают.

Пример 9. Пусть (R, ρ) — обычное евклидово пространство E_3 , а Π — плоскость в E_3 . В соответствии с приведенным выше определением открытым множеством пространства (Π, ρ) будет любое множество N точек плоскости Π , удовлетворяющих условию: для каждой точки плоскости существует хотя бы один открытый круг с центром в a , целиком принадлежащий множеству N . Такими множествами будут, например, все открытые круги, внутренние области треугольников, квадратов и т. д. Заметим, что в данном случае открытые множества в пространстве (Π, ρ) не будут открытыми множествами в (R, ρ) .

5. Аксиома отделимости. Топологическое пространство называется хаусдорфовым, если выполняется следующая аксиома отделимости.

IV. Для любых двух различных точек пространства R существуют непересекающиеся окрестности, содержащие эти точки.

Примером хаусдорфова пространства является метрическое пространство. В самом деле, пусть a и b — различные точки, а $\rho(a, b) = r$. Шаровые окрестности $U(a, \frac{r}{2})$ и $U(b, \frac{r}{2})$ очевидно не имеют общих точек. С другой стороны пространство, рассмотренное выше в примере 3, не является хаусдорфовым, так как любые два непустые открытые множества имеют бесчисленное множество общих точек.

Легко видеть, что любое подпространство хаусдорфова пространства является также хаусдорфовым. В дальнейшем мы всюду, без особых оговорок, будем предполагать, что рассматриваемые пространства являются хаусдорфовыми.

§ 84. Топологические отображения, связность и компактность

1. Отображения. Напомним простейшие определения, связанные с общими отображениями. Пусть X и Y произвольные множества, а

$$f: X \rightarrow Y \quad (1)$$

— отображение множества X в множество Y . Обозначим через $f(X)$ множество образов всех точек множества X . Очевидно, $f(X) \subseteq Y$. Если $f(X) = Y$, то f называется отображением множества X на множество Y . Отображение множества X на множество Y называется в з а -

мно однозначным, если различные точки переходят при этом отображении в различные точки. Очевидно, взаимно однозначное отображение (1) допускает обращение, т. е. существует единственное отображение $g: Y \rightarrow X$, такое, что $gf = I_X$ и $fg = I_Y$, где I_X и I_Y — тождественные отображения множеств X и Y . Отображение g называется обратным для f и обозначается через f^{-1} .

Введем еще ряд определений, необходимых для дальнейшего изложения. Пусть (1) — данное отображение, а N — подмножество множества Y . Полным прообразом множества N будем называть множество всех точек в X , образы которых при отображении (1) содержатся в N . Заметим, что полный прообраз множества может быть и пустым множеством. Если N — точка, то ее полный прообраз может быть пустым множеством, одной точкой и множеством, состоящим более чем из одной точки. Приведением отображения (1) называется отображение

$\bar{f}: X \rightarrow f(X)$, которое определяется так: при любом $x \in X$ имеем: $\bar{f}(x) = f(x)$. Очевидно, если $f(X) = Y$, то отображения f и $\bar{f}$ совпадают. Пусть дано отображение (1) и множество $M \subset X$. Отображение $f_M: M \rightarrow Y$ называется сужением отображения (1), если для всех $x \in M$ имеем: $f(x) = f_M(x)$.

2. Непрерывные отображения. В топологии важную роль играют непрерывные отображения, которые определяются так: пусть X и Y — топологические пространства. Отображение (1) называется непрерывным в точке $x \in X$, если для каждой окрестности U' точки $f(x)$ существует такая окрестность U точки x в X , что $f(U) \subset U'$. Отображение (1) называется непрерывным на множестве $M \subset X$, если оно непрерывно в каждой точке множества M . Отображение (1) называется непрерывным, если оно непрерывно на множестве X .

Имеет место следующая теорема.

Теорема [81.1]. Для того чтобы отображение (1) было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы полный прообраз любого открытого множества был открытым множеством.

Доказательство. Пусть (1) — непрерывное отображение, N' — произвольное открытое множество в Y , а N — полный прообраз этого множества. Докажем, что N — открытое множество. Для этого достаточно показать, что каждая точка x этого множества является внутренней (см. теорему [80.1]). Так как $f(x) \in N'$, то N' — окрестность точки $f(x)$. В силу непрерывности отображения (1) существует окрестность U точки x такая, что $f(U) \subset N'$. Отсюда следует, что $U \subset N$, т. е. что x — внутренняя точка.

Теперь докажем достаточность условия. Пусть x — произвольная точка множества X , $f(x)$ — образ той точки, а U' — любая окрестность точки $f(x)$. Если U — полный прообраз множества U' , то U — открытое множество. Очевидно, U — окрестность точки x и, кроме того, $f(U) \subset U'$. Таким образом, отображение (1) непрерывно в точке x . ■

Переходом к дополнительным множествам легко обосновать следующее предложение.

Следствие. Для того чтобы отображение (1) было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы полный прообраз любого замкнутого множества был замкнутым множеством.

Важно отметить, что при непрерывном отображении образ открытого (замкнутого) множества не всегда является открытым (замкнутым) множеством.

Предыдущая теорема позволяет доказать ряд важных предложений. **1°.** Пусть X, Y и Z — топологические пространства. Если $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ непрерывны, то $gf: X \rightarrow Z$ непрерывно. □

Предлагаем читателю, пользуясь теоремой [81.1], самостоятельно доказать это предложение.

2°. Если отображение (1) непрерывно, то для любого $M \subset X$ отображение $f_M: M \rightarrow Y$ непрерывно¹.

Это предложение непосредственно следует из 1°, если учесть, что $f_M = f|_M$, где $e: M \rightarrow X$ отображение, при котором образ каждой точки из M совпадает с самой точкой.

3°. Приведение $\bar{f}: X \rightarrow f(X)$ отображения² (1) непрерывно тогда и только тогда, когда отображение (1) непрерывно.

Пусть $e: f(X) \rightarrow Y$ — отображение, при котором образ каждой точки из $f(X)$ совпадает с самой точкой. Очевидно, $\bar{f} = ef$, поэтому если $\bar{f}$ непрерывно, то из 1° следует, что f — непрерывно. Обратное утверждение очевидно. ■

3. Гомеоморфизмы. Пусть X и Y — топологические пространства. Отображение (1) пространства X на пространство Y называется топологическим, если оно взаимно однозначное и, кроме того, отображения f и $f^{-1}: Y \rightarrow X$ непрерывны. Топологические отображения называются также гомеоморфизмами³. Простейшим примером гомеоморфизма является тождественное отображение $I: X \rightarrow X$, при котором каждая точка множества X переходит сама в себя. Рассмотрим еще один пример. Пусть X и Y числовые интервалы, точнее $X = \{x | 0 < x < 1\}$ и $Y = \{y | a < y < b\}$, где a, b — действительные числа, причем $a < b$. Очевидно, X и Y являются метрическими пространствами (см. § 73, п. 1, пример 3), поэтому они являются топологическими. Легко убедиться в том, что отображение $y = (b - a)x + a$ является топологическим.

Из определения гомеоморфизма непосредственно следует

1°. Если отображение $f: X \rightarrow Y$ является топологическим, то отображение $f^{-1}: Y \rightarrow X$ также является топологическим.

Из п. 2, 1° легко прийти к выводу:

2°. Если $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ являются гомеоморфизмами, то $gf: X \rightarrow Z$ является гомеоморфизмом.

¹ Предполагается, что топология в M индуцирована топологией пространства X .

² Предполагается, что топология в $f(X)$ индуцируется топологией пространства Y .

³ Название это происходит от греческих слов: ομοιος — одинаковый и μορφή — форма.

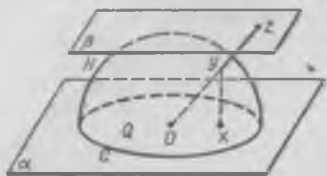


Рис. 212.

Топологическое пространство X называется гомеоморфным топологическому пространству Y , если существует такой гомеоморфизм, при котором X переходит в Y . Из свойств 1° и 2° следует, что отношение гомеоморфности топологических пространств рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. оно является отношением эквивалентности (см. § 73, п. 2).

Понятие гомеоморфизма легко может быть распространено на множества точек, принадлежащих топологическим пространствам. Пусть R_1 и R_2 — топологические пространства, а $X \subset R_1$, $Y \subset R_2$ произвольные множества точек этих пространств. отображение (1) называется непрерывным в точке x , если для любой окрестности U' точки $f(x)$ в R_2 существует окрестность U_x точки x в R_1 такая, что образы всех точек из $U_x \cap X$ принадлежат окрестности U' . отображение (1) называется непрерывным, если оно непрерывно во всех точках множества X . Взаимно однозначное отображение (1) множества X на множество Y называется топологическим или гомеоморфным, если отображения (1) и $f^{-1}: Y \rightarrow X$ непрерывны. Если существует гомеоморфизм множества X на множество Y , то множества X и Y называются гомеоморфными.

Чтобы установить, что два множества X и Y гомеоморфны, достаточно найти хотя бы одно топологическое отображение X на Y . Если, например, при топологическом отображении $f: R_1 \rightarrow R_2$ имеем $Y = f(X)$, то X и Y гомеоморфны. Но для установления гомеоморфизма двух множеств вовсе не обязательно рассматривать отображения объемлющих пространств. Рассмотрим пример.

Пример. В трехмерном евклидовом пространстве E_3 открытый круг Q плоскости гомеоморфен всей евклидовой плоскости.

Открытый круг Q есть, как известно, множество точек плоскости α , лежащих внутри окружности C . Нетрудно видеть, что Q есть открытое множество. Границей для Q служит окружность C . Присоединив к Q все точки окружности C , мы получим замкнутый круг. Построим на окружности C полусферу (рис. 212), каждой точке x открытого круга Q поставим в соответствие ту точку y полусферы, ортогональная проекция которой на плоскость α есть точка x , а затем спроектируем каждую точку y полусферы из центра O окружности C в точку z на плоскости β , параллельной α и касающейся полусферы в ее наивысшей точке. отображение открытого круга Q на евклидову плоскость β , при котором x переходит в z , является, очевидно, взаимно однозначным и взаимно непрерывным, т. е. топологическим. Следовательно, круг Q и евклидова плоскость β гомеоморфны. ■

Труднее установить, что два множества не гомеоморфны; здесь бывают полезны топологические инварианты. Топологическим инвариантом (топологическим свойством) называют всякое

свойство, инвариантное относительно любого топологического отображения. Из теоремы [81.1] учитывая, что топологическое отображение есть взаимно непрерывное, приходим к следующему выводу.

3°. Свойство множества быть открытым (или замкнутым) есть топологический инвариант.

Ниже будут указаны еще некоторые топологические инварианты. Если у множества X некоторый топологический инвариант присутствует, а у множества Y тот же инвариант отсутствует, то множества X и Y не могут быть гомеоморфны.

Гомеоморфные множества топологически эквивалентны; с точки зрения топологии они не отличаются одно от другого. Изучая топологию какого-либо топологического пространства R мы будем иметь дело с топологическими преобразованиями (отображениями на себя) множества R . Эти преобразования, очевидно, образуют группу.

4. Связность. Топологическое пространство R называется связным, если существуют два непустых открытых множества M и N таких, что $M \cap N = \emptyset$ и $M \cup N = R$. Пространство R называется связным, если оно не является несвязным. Из этого определения следует, что каждое из множеств M и N является дополнением к другому, поэтому каждое из них является одновременно открытым и замкнутым множествами.

Множество M топологического пространства R называется связным, если оно является связным топологическим пространством относительно индуцированной в M топологии. Другими словами, M называется связным, если нельзя найти двух открытых множеств G_1 и G_2 в R таких, что а) $M \subseteq G_1 \cup G_2$; б) $G_1 \cap M \neq \emptyset$, $G_2 \cap M \neq \emptyset$; в) $G_1 \cap G_2 \cap M = \emptyset$.

Непустое открытое связное множество $M \subseteq R$ называется областью.

Из определения следует, что несвязное множество топологического пространства имеет по крайней мере две точки, поэтому множество, содержащее только одну точку, является связным. С другой стороны, легко показать, что любое множество, содержащее конечное число точек, является несвязным.

Из свойства 3° предыдущего пункта следует:

1°. Свойство топологического пространства быть связным есть топологический инвариант.

2°. Свойство множества X топологического пространства быть связным есть топологический инвариант.

Докажем следующее важное предложение.

Теорема [81.2]. Сегмент $I = [a, b]$ является связным топологическим пространством¹⁾.

Доказательство. Доказательство проведем от противного, т. е. допустим, что существуют открытые множества U и V удовлетворяющие условиям $U \cup V = I$, $U \cap V = \emptyset$. Рассмотрим скалярную

¹⁾ Сегмент $[a, b]$ является примером метрического пространства (см. § 73, п. 1, пример 3), поэтому он является топологическим пространством.

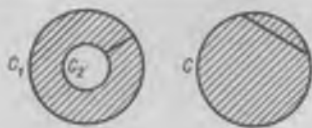


Рис. 213.

функцию скалярного аргумента¹ $f: [a, b] \rightarrow E_1$, которая определяется так: $f(x) = 1$, если $x \in U$ и $f(x) = -1$, если $x \in V$. Легко показать, что f — непрерывная на отрезке I функция. В самом деле, пусть x_0 — произвольная точка отрезка; предположим, что $x_0 \in U$. Так как U — область, то по определению (см. § 81 п. 4) существует шаровая окрестность $U(x_0, \delta)$ (в данном случае интервал), целиком принадлежащая множеству U . Отсюда следует, что во всех точках интервала $U(x_0, \delta)$ значение функции равно 1, т. е. функция f непрерывна в точке x_0 . Мы пришли в противоречие с известной теоремой Коши о промежуточном значении. ■

Простой дугой называется гомеоморфный образ сегмента. Из свойства 1° и теоремы [81.2] следует:

3°. Простая дуга есть связное топологическое пространство.

Понятие простой дуги позволяет ввести следующее важное определение. Топологическое пространство, любые две точки которого можно соединить простой дугой, называется линейно связным. Аналогично определяется линейно связное множество топологического пространства.

Легко доказать следующее предложение.

4°. Линейно связное топологическое пространство (множество топологического пространства) связно.

Предложение докажем от противного. Пусть R — линейно связное топологическое пространство, для которого существуют непустые открытые множества M и N , удовлетворяющие условиям: $M \cup N = R$ и $M \cap N = \emptyset$. Пусть $a \in M$, $b \in N$, а L — простая дуга, соединяющая эти две точки. В силу соотношений $L \subseteq M \cup N$, $L \cap M \neq \emptyset$, $L \cap N \neq \emptyset$ и $M \cap N \cap L = \emptyset$ множество L несвязное, что противоречит свойству 3°.

Заметим, что предложение, обратное 4°, не имеет места (см. например, [62], с. 542).

На основе свойства 4° легко доказывается такое предложение.

5°. Круговое кольцо не гомеоморфно кругу Q .

Круговое кольцо S есть множество точек евклидовой плоскости TE_2 , которые расположены между двумя concentрическими окружностями C_1 и C_2 (рис. 213). Точки, лежащие на C_1 или на C_2 , к S не принадлежат. Окружности C_1 и C_2 вместе составляют границу множества S .

Чтобы установить, что множества Q и S не гомеоморфны, рассуждаем так: если мы соединим отрезком две точки, принадлежащие соответственно окружностям C_1 и C_2 и лежащие на одном и том же радиусе, и исключим из S все точки этого отрезка, то ввиду 4° множество останется связным. Если же мы в Q соединим отрезком две любые точки его

границы C , то по исключении из Q всех точек этого отрезка множество распадается на две компоненты. Так как связность есть топологический инвариант, то отсюда и следует, что множества Q и S не гомеоморфны.

5. Компактность. Открытым покрытием топологического пространства (R, Φ) называется совокупность открытых множеств $\{M_\beta\}$, если $R = \bigcup_\beta M_\beta$. Топологическое пространство R называется

компактным, если из всякого его открытого покрытия можно выделить конечное открытое покрытие. Множество M топологического пространства R называется компактным, если оно является компактным относительно индуцированной топологии. Открытым покрытием множества M топологического пространства R называется совокупность открытых множеств $\{G_\beta\}$ пространства R , если $M \subseteq \bigcup_\beta G_\beta$. Нетрудно показать, что для того чтобы M было компактным

множеством, необходимо и достаточно, чтобы из любого открытого покрытия множества M в R можно было выделить конечное покрытие. Можно показать, что в E_n необходимым и достаточным условием компактности множества является его замкнутость и ограниченность¹.

В заключение отметим, что свойство топологического пространства (множества топологического пространства) быть компактным есть топологический инвариант. Это утверждение непосредственно следует из свойства 3°, п. 3 и определения компактности.

§ 82. Поверхности

1. Многообразия; поверхности. Хаусдорфово топологическое пространство называется n -мерным топологическим многообразием, если каждая его точка имеет окрестность, гомеоморфную открытому множеству в E_n . Для того чтобы дать определение поверхности, введем два вспомогательных понятия. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется вложением X в Y , если приведение $\tilde{f}$ этого отображения (см. п. 1, § 81) является гомеоморфизмом. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется погружением X в Y , если для каждой точки $x \in X$ существует окрестность U такая, что f_u является вложением.

Пусть U , V и W — многообразия. Погружения $f_1: U \rightarrow W$ и $f_2: V \rightarrow W$ называются эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\phi: U \rightarrow V$ такой, что $f_1 = f_2 \phi$. Так как U и V топологически эквивалентны, то, не нарушая общности при определении эквивалентности, можно ограничиться погружениями $f_1: U \rightarrow W$ и $f_2: U \rightarrow W$, где U произвольное из эквивалентных между собой многообразий. Очевидно, отношение эквивалентности разбивает множество всех погружений на непересекающиеся классы.

¹ Здесь E_1 — одномерное евклидово арифметическое пространство (см. § 73, пример 2).

¹ Здесь E_n — евклидово арифметическое n -мерное пространство.

Теперь введем следующее основное определение: m -поверхностью в n -мерном многообразии W_n (где $m \leq n$) называется класс эквивалентных погружений связанных m -мерных многообразий в W_n . Ясно, что m -поверхность определяет некоторое множество S_m в W_n , т. е. некоторое m -мерное подмногообразие в W_n . В учебной литературе термин «поверхность» иногда применяется в узком смысле, например, когда класс погружений является классом вложений, то указанное выше множество S_m называется поверхностью. В общем случае m -поверхность однозначно определяется заданием любого своего погружения, которое называется параметризованной m -поверхностью.

Рассмотрим примеры поверхностей, причем для большей наглядности будем считать, что $W = TE_3$, т. е. будем представлять поверхности реализованными в обычном евклидовом трехмерном пространстве.

Поверхность $f: U \rightarrow TE_3$ называется простой поверхностью, если U — открытый круг, а f — вложение. Другими словами, простая поверхность есть топологический образ открытого круга (см. § 76, п. 1).

Примером простой поверхности может служить полусфера H , построенная над кругом Q (рис. 212); сопоставив каждой точке x круга Q ту точку y полусферы H , ортогональная проекция которой на плоскость круга Q совпадает с x , мы получим, как легко видеть, топологическое отображение круга Q на полусферу H . Точки окружности S , которая ограничивает оба множества Q и H , к полусфере H не должны причисляться.

Пусть S множество точек пространства TE_3 , которое определяется заданной поверхностью. Если S — связное множество и, кроме того, содержит все свои предельные точки, то поверхность именуется полной поверхностью. Полная поверхность, являющаяся ограниченным множеством в TE_3 , называется замкнутой поверхностью.

Простейшим примером замкнутой поверхности может служить сфера. На рисунках 214, 215, 216 изображены замкнутые поверхности, соответственно эллипсоид, тор и крендель. Проективная плоскость также есть замкнутая поверхность, поскольку она гомеоморфна сфере с отождествленными диаметрально противоположными точками. Эллиптический параболоид (рис. 217) есть незамкнутая полная поверхность. Если поверхность не является полной, то множество ее предельных точек, не принадлежащих S , называется краем поверхности, а сама поверхность — поверхностью с краем.

2. Простейшие поверхности. а) Сфера с p ручками. Пусть S есть сфера, а $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ — не пересекающиеся малые окружности на сфере S (рис. 218). Через G_i ($i = 1, 2, \dots, k$) обозначим открытый круг сферы, ограниченный окружностью σ_i и меньший полусферы. Поверхность $S \setminus (G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k)$ называется сферой с k отверстиями.

Ручкой (рис. 219) называют поверхность, гомеоморфную боковой поверхности цилиндра. Если к сфере с $2p$ отверстиями $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2p}$



Рис. 214.

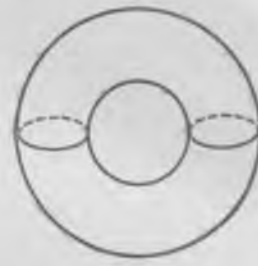


Рис. 215.

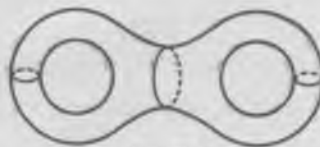


Рис. 216.



Рис. 217.

к парам окружностей σ_1 и σ_2 ; σ_3 и σ_4 ; ...; σ_{2p-1} и σ_{2p} приклеить соответственно p ручек (рис. 220), то получим поверхность, именуемую сферой с p ручками.

Если сферу с одной ручкой осуществить в виде эластичной пленки, то, растягивая ее без разрывов и склеиваний, мы можем превратить ее в тор (рис. 215). Отсюда заключаем, что

1°. Сфера с одной ручкой гомеоморфна тору.

Аналогично можем установить, что

2°. Сфера с двумя ручками гомеоморфна кренделю (рис. 216).

б) Лист Мёбиуса. Возьмем прямоугольник $ABCD$ (рис. 221), повернем его сторону CD на 180° и склеим ее со стороной AB так, чтобы точка C совпала с точкой A , а точка D — с точкой B . Мы получим таким образом поверхность, называемую листом Мёбиуса (рис. 221); она обладает рядом замечательных свойств.



Рис. 218.



Рис. 219.



Рис. 220.



Рис. 225.



Рис. 226.

окажутся несогласованными друг с другом: например, сторона AC в обоих соседних треугольниках 2, 4 направлена одинаково, от A к C . Итак,

5°. Лист Мёбиуса и проективная плоскость — неориентируемые поверхности.

С неориентируемостью связано другое свойство листа Мёбиуса: он является односторонней поверхностью (правильнее сказать, в пространстве TE_3 он расположен односторонне). Сферу можно покрасить так, чтобы ее наружная (лицевая) сторона стала красной, а внутренняя сторона (изнанка) — синей. У листа Мёбиуса этого сделать нельзя: перемещая кисточку непрерывно по средней линии, мы приходим к тому же месту, откуда начали закрашивание, но с противоположной стороны (рис. 226).

4. Теорема Эйлера для многогранников. Из первой части курса (1, [58.2]) читателю известна такая теорема:

Теорема [81.1] (теорема Эйлера). Для всякого многогранника нулевого рода справедливо соотношение

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2, \quad (1)$$

где α_0 , α_1 , α_2 — соответственно число вершин, ребер и граней многогранника.

Теорема Эйлера [81.1] остается верной для всякого клеточного разбиения любой замкнутой поверхности, гомеоморфной сфере, если α_0 , α_1 , α_2 суть соответственно число вершин, ребер и клеток клеточного разбиения.

На рисунке 227 приведен пример многогранника, для которого формула (1) не верна: подсчитав число вершин, ребер и граней этого многогранника, мы найдем

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 16; \quad \alpha_2 = 32$$

и

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 0. \quad (2)$$

Происходит это потому, что поверхность многогранника, изображенно-

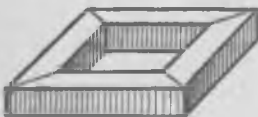


Рис. 227.

го на рисунке 227, гомеоморфна тору (рис. 215), а не сфере.

5. Топологическая классификация замкнутых поверхностей. Упомянутая в заглавии классификация дается следующей теоремой:

Теорема [81.2]. Всякая ориентируемая замкнутая поверхность гомеоморфна сфере с r ручками (п. 2) при некотором r .

Всякая неориентируемая замкнутая поверхность гомеоморфна сфере с q листами Мёбиуса (п. 2) при некотором q . □

Доказательство теоремы [81.2] очень громоздко, и потому мы его не приводим. Это доказательство читатель может найти, например, в книге [62], том V, с. 506—516.

Число r называется родом замкнутой ориентируемой поверхности. Сфера есть поверхность рода нуль; поскольку тор гомеоморфен сфере с одной ручкой (п. 2, 1°), то тор есть поверхность рода 1.

Для замкнутой неориентируемой поверхности число q носит название ее порядка связности: для ориентируемой замкнутой поверхности порядок связности $q = 2r$. Порядок связности есть топологический инвариант поверхности.

С порядком связности замкнутой поверхности S в простом соотношении состоит ее так называемая эйлерова характеристика. Пусть дано какое-либо клеточное разбиение поверхности S , имеющее α_0 вершин, α_1 ребер и α_2 клеток; число

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$$

одинаково для всех ее клеточных разбиений и называется эйлеровой характеристикой поверхности S . Имеет место следующая

Теорема [81.3]. Эйлерова характеристика замкнутой поверхности равна $2 - q$, где q есть порядок связности поверхности:

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2 - q. \quad (3)$$

Доказательство — см. [62]. т. V, с. 496—497.

Для сферы $r = 0$, $q = 2r = 0$, и формула (3) превращается в формулу (1). Таким образом, теорема Эйлера [81.1] есть частный случай теоремы [81.3].

Для тора $r = 1$, $q = 2$, и формула (3) дает для него:

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

Теперь понятно, почему для многогранника, изображенного на рисунке 227, который гомеоморфен тору, имеет место равенство (2).

6. Топологические свойства проективной плоскости. В предыдущем изложении мы несколько раз касались топологических свойств проек-



Рис. 228.

тивной плоскости. Мы показали, что она может быть превращена в метрическое пространство (§ 80, п. 4), что проективная плоскость есть замкнутая поверхность (п. 1), гомеоморфная сфере с отождествленными диаметрально противоположными точками (§ 80, п. 4); мы установили также, что проективная плоскость является неориентируемой поверхностью (п. 3).

Определим порядок связности проективной плоскости. С этой целью рассмотрим гиперболу на расширенной несобственными элементами евклидовой плоскости TE_2^∞ (рис. 228) и выделим ту ограниченную гиперболой замкнутую часть F плоскости, которая содержит ее асимптоты (на рисунке 228 эта часть плоскости заштрихована). Точки A и A , которые соответствуют несобственной точке асимптоты на плоскости TE_2^∞ , отождествляются; также мы поступаем и с точками B и B . Но такое же отождествление производится при склеивании листа Мёбиуса из прямоугольной полоски. Поэтому указанная часть F плоскости гомеоморфна листу Мёбиуса. Остальная часть плоскости, состоящая из внутренних точек гиперболы, гомеоморфна открытому кругу Q , в который она может быть переведена проективным преобразованием расширенной евклидовой плоскости (теорема [20.4]). Сфера с одним отверстием (п. 2), изготовленная из эластичной пленки, может быть преобразована растяжением без разрывов и склеиваний в открытый круг Q и, следовательно, ему гомеоморфна. Мы приходим к выводу, что в согласии с теоремой [81.2] проективная плоскость гомеоморфна сфере с одним листом Мёбиуса, вследствие чего

6°. Порядок связности проективной плоскости $q = 1$.

В пункте 3 мы построили клеточное разбиение проективной плоскости, состоящее из четырех треугольников (рис. 225). Для него $\alpha_0 = 3$, $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 4$; эйлерова характеристика проективной плоскости

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 1,$$

что находится в согласии с формулой (3), поскольку $q = 1$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

КРАТКИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Для сознательного усвоения теоретического материала, изложенного в настоящем учебнике, необходимо изучение каждой темы сопровождать решением разнообразных задач. Мы рекомендуем читателю пользоваться задачником [8], который полностью соответствует этому пособию и имеет такую же структуру.

Следует учесть, что из-за ограниченности объема в настоящей книге мало примеров и задач, иллюстрирующих теоретический материал, поэтому многие задачи в задачнике [8], снабженные указаниями и решениями, могут быть использованы в качестве примеров, поясняющих теоретический материал.

Авторы считают целесообразным привести здесь список задач из указанного выше задачника, соответствующих отдельным разделам и главам настоящего руководства. При этом даны только те задачи, которые соответствуют темам, не выходящим по своему содержанию за пределы обязательного минимума, требуемого программой. По мнению авторов, решение этих задач необходимо для полного усвоения теоретического материала. Кроме того, ниже даны пояснения к текстам отдельных задач, а также приведен список замеченных опечаток.

Р а з д е л I. Проективное пространство

Главы настоящего учебника	Номера рекомендуемых задач
Глава I	1—7, 15—17;
Глава II	8—14, 18—42, 98—124;
Глава III	43—74, 125—151;
Глава IV	164—223;
Глава V	248—298, 335—393.

В разделе 1 задачника [8] обнаружены следующие опечатки.

На стр. 6 в последней строке текста ссылку на § 14 учебника следует исправить на § 11, а в подстрочном примечании ²⁾ ссылку на § 6 учебника следует исправить на § 4.

Задача 238. К тексту задачи следует добавить: «Предполагается, что на плоскости дана овальная линия второго порядка».

Задача 337. Ответ. Напечатано: «... $\omega'\omega''\omega''$ и $\omega''\omega'$ »; следует читать: «... $\omega'\omega''\omega'$. Инволюции ω и $\omega'\omega''$ ».

Задача 353, указание. Напечатано «...перспективным (см. задачу 352). Показать...»; следует читать: «...перспективным. Пользуясь задачей 352 показать...».

Р а з д е л II. Геометрические построения на плоскости и методы изображений

Главы настоящего учебника	Номера рекомендуемых задач
Глава VI	445—600;
Глава VII	286—298, 434—444, 601—650;
Глава VIII	741—832.

Задачи на построение, выполняемые циркулем и линейкой (задачи 445—632), следует решать на основании аксиом $K1—K7$, помещенных в § 28 учебника. При этом существенно учесть, что в этом разделе курса *прямые и окружности рассматриваются не как множества точек, а как самостоятельные объекты* (см. § 28, п. 1 настоящего пособия). Задачи же, помещенные в гл. VII задачника «Геометрические построения в пространстве», следует решать на основании аксиом, перечисленных во введении к гл. VII задачника (с. 74). В формулировках этих задач употребляются символы и обозначения, список которых помещен на с. 171 задачника.

Ниже даны конкретные замечания, уточняющие формулировки отдельных задач данного раздела.

1. Предполагается, что все соотношения, встречающиеся в задачах 500—507, 511—513, 543, 562—566, 572, 633, 667—669, 700, 701, 709, 710, являются «отрезочными» k -уравнениями (см. § 33, п. 1), поэтому во всех указанных выше задачах модули отрезков следует заменить самими отрезками. Например, задачу 500 следует читать так: « a , h_a и отрезок p , удовлетворяющий условию $b^2 - c^2 = p^2$ ».

2. В задачах 498 и 499 r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей.

3. В задаче 633 предполагается, что a, b, c и d — данные отрезки.

4. Ответ задачи 654 следует исправить: «б) Пустое множество или прямая, перпендикулярная плоскости (ABC)».

5. В задачах 671—681 термин «объединение» следует заменить термином «множество», так как здесь, как уже отмечалось, прямые рассматриваются как самостоятельные объекты.

6. В задаче 689 слова «и пересекающую каждую из них» следует исключить.

7. В § 30 помещены задачи на построение в пространстве с использованием некоторых множеств прямых, поэтому заглавие этого параграфа следует читать так: «Построения в пространстве с применением некоторых множеств прямых».

Раздел III. Основания геометрии

Главы настоящего учебника	Номера рекомендуемых задач
Глава IX	862—886;
Глава XI	902—918;
Глава XIII	843—861; 887—901.

В разделе III обнаружены следующие опечатки.

Задача 844. Напечатано: « $V_1—V_7$ »; следует читать: « $V1—V7$ ».

Задача 859. В указании к этой задаче ссылку на задачу 848 следует заменить ссылкой на задачу 849.

Раздел IV. Линии и поверхности в евклидовом пространстве. Элементы топологии

Главы настоящего учебника	Номера рекомендуемых задач
Глава XIV	934—1037;
Глава XV	1038—1172;
Глава XVI	1173—1216.

При решении задач из данного раздела следует учесть следующее.

1. Во всех задачах § 46 задачника [8], за исключением 1026, 1031—1034 предполагается, что в плоскости выбрана прямоугольная декартова система координат Oij .

2. Во всех задачах, помещенных в главах XI и XII, в которых точки заданы координатами, а кривые и поверхности уравнениями в пространстве, предполагается, что в пространстве выбрана прямоугольная декартова система координат $Oijk$.

3. Предполагается, что в каждой из следующих задач 1083, 1086, 1098, 1104, 1108, 1114, 1120, 1124, 1130, 1131, 1137, 1151, 1160, 1168 поверхность, указанная в условиях задачи, задана конкретным уравнением. Однако, в целях экономии места, ее уравнение в тексте задачи не выписано, а сделана ссылка на соответствующую страницу или задачу.

ОСНОВНЫЕ СИМВОЛЫ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

I. Символы, применяемые для обозначения различных пространств и группы аксиом и постулатов

V — линейное векторное пространство (§ 44, п. 2)

V_n — линейное n -мерное векторное пространство (§ 44, п. 2)

E_n — векторное евклидово n -мерное пространство (I, § 69, п. 1; § 44, п. 2)

E_3 — псевдоевклидово векторное пространство трех измерений (§ 70)

TV_n — точечно-векторное n -мерное аффинное пространство (I, § 66; § 44, п. 2)

TE_n — точечно-векторное n -мерное евклидово пространство¹ (I, § 69, § 44, п. 2)

$P_2 (P_2)$ — проективное пространство (плоскость) (§ 1, п. 2)

P_2^* — проективная плоскость с фиксированным абсолютом (§ 23, п. 2)

P_2^ω — проективная плоскость с фиксированным абсолютом, т. е. прямой с заданной на ней эллиптической инволюцией (§ 26, п. 1)

$\bar{P}_2$ — множество всех точек плоскости P_2^* , не лежащих на абсолюте p^* (§ 24, п. 1)

$\bar{P}_2^\omega$ — множество всех точек плоскости P_2^ω , не лежащих на абсолюте p^ω (§ 26, п. 1)

$TV_3^\infty (TV_3^\infty)$ — расширенное аффинное пространство (плоскость) (§ 4)

$TE_3^\infty (TE_3^\infty)$ — расширенное евклидово пространство (плоскость) (§ 4)

$P1—P4$ — аксиомы проективного пространства по схеме Вейля (§ 1)

$L1—L4$ — аксиомы геометрии Лобачевского по схеме Вейля (§ 71)

$C1—C4$ — аксиомы сферической геометрии по схеме Вейля (§ 69)

V, L — аксиомы Лобачевского (§ 58)

$KP1—KP4$ — постулаты построения на проективной плоскости (§ 11)

$K1—K7$ — постулаты построения циркулем и линейкой (§ 28)

II. Символы теории множеств и логики

$\Omega_1 \cap \Omega_2$ — пересечение множеств Ω_1 и Ω_2

$\Omega_1 \cup \Omega_2$ — объединение множеств Ω_1 и Ω_2

$\Omega_1 \setminus \Omega_2$ — множество всех тех элементов Ω_1 , которые не принадлежат Ω_2

$\Omega_1 \times \Omega_2$ — прямое (декартово) произведение

$\{x | x \in \Omega, f(x) = m\}$ — множество всех таких элементов x , что $x \in \Omega$ и $f(x) = m$

$\forall \xi$ — следует читать: «для произвольного элемента ξ ». При этом предполагается, что известно множество, откуда берутся ξ

$\exists a : \Phi$ или $\exists a (\Phi)$ — следует читать: «существует такое a , для которого имеет место утверждение Φ »

$\exists ! a \Phi$ или $\exists ! a (\Phi)$ — следует читать: «существует одно и только одно a , для которого имеет место утверждение Φ »

¹ В I, § 66 и 69, пространства TV_n и TE_n обозначены соответственно через $\bar{R}_n$ и $\bar{E}_n$.

$\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2$ — следует читать: «из утверждения Φ_1 следует утверждение Φ_2 »

$f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ — отображение множества Ω_1 на множество Ω_2

■ — конец доказательства

□ — предложение дано без доказательства

III. Символы, применяемые в векторной алгебре

- $\langle a, b \rangle$ — векторное подпространство, натянутое на векторы a и b
 $(p), (a, b), [a, b], \{a, b\}$ — векторные области (§ 47)
 ab/a — скалярное произведение векторов, установленное вектором a
 $a \wedge b$ — псевдоскалярное произведение векторов a и b (§ 70)
 $L(a, b) \neq 0$ — следует читать: «векторы a и b линейно независимы»
 $L(a, b) = 0$ — следует читать: «векторы a и b линейно зависимы»
 $p = l(a, b)$ — следует читать: «вектор p есть линейная комбинация векторов a и b »
 $a \parallel b$ — следует читать: «векторы a и b сонаправлены» (§ 47, п. 3)
 $a \nparallel b$ — следует читать: «векторы a и b имеют противоположные направления» (§ 47, п. 3)
 $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ или $(\lambda, \mu, \nu) \neq (0, 0, 0)$ — следует читать: «числа λ и μ (числа λ, μ, ν) не все равны нулю»

IV. Символы и обозначения, применяемые в геометрии

- $(a), (b), \dots, (x), (y), (z), \dots$ — множества точек соответствующих прямых
 AB — прямая, проходящая через точки A и B
 $\{A, p\}$ или $\{A, \mathcal{M}_1\}$ — прямая, определяемая точкой A и вектором p (подпространством $\mathcal{M}_1$) (§ 46)
 $\{A, p, q\}$ или $\{A, \mathcal{M}_2\}$ — плоскость, определяемая точкой A и векторами p и q (подпространством $\mathcal{M}_2$) (§ 46)
 $A_{\infty}, B_{\infty}, \dots, a_{\infty}, b_{\infty}, \dots$ — несобственные точки и прямые аффинного или метрического пространства (§ 4)
 $a^{\infty}, b^{\infty}, \Pi^{\infty}$ — расширенные прямые и плоскости пространства TV^{∞} или TE^{∞} (§ 4)
 $[AB]$ — отрезок с концами A и B (§ 47, п. 6)
 $\{AB\}$ — отрезок по Гильберту с концами A и B (§ 55)
 $[O, p]$ — луч, исходящий из точки O и содержащий вектор p (§ 47, п. 4)
 $\{AB\}$ — луч, исходящий из точки A и содержащий точку B (§ 55)
 (O, p) или (AB) — открытые лучи
 $\angle(h, k)$ — угол со сторонами h и k
 $\angle Opq$ — угол с вершиной в точке O и со сторонами $[Op]$ и $[Oq]$ (§ 49)
 $[O, h, \omega]$ или $[h, \omega]$ — точечно-векторный или точечный репер (определение 7, § 50, и определение 1, § 56)
 $[O]$ или $[O]_{\Pi}$ — пучок прямых на плоскости (плоскости Π) с центром в точке O
 $\{l\}$ — пучок плоскостей с осью l
 $[O]$ — связка прямых с центром в точке O
 $\{O\}$ — связка плоскостей с центром в точке O
 $\{\{O\}\}$ — множество всех прямых и плоскостей, проходящих через точку O
 $\Omega_1 \Omega_2$ — соединение линейных геометрических образов (§ 2, п. 5)
 $\cong$ — знак конгруэнтности отрезков или углов

$\overline{ABC} (\overline{BAC})$ — следует читать: «точка B лежит (не лежит) между A и C (§ 47 п. 1)
 $AB \rightarrow CD (AB=CD)$ — пара точек AB на проективной плоскости разделяет (не разделяет) пару точек CD (§ 9)

$AB=CD$ — пара A, B гармонически разделяет пару CD (§ 10)
 $\pi: (l) \rightarrow (l')$ — проективное отображение прямых (§ 12)

$\alpha: (l) \rightarrow (l')$ — перспективное отображение прямых с центром в точке O (§ 12)

$\pi[O] \rightarrow [O']$ — проективное отображение пучков (§ 12)

$\pi: \Pi \rightarrow \Pi$ — проективное преобразование (§ 14)

V. Символы, применяемые в задачах на построение в разделе II

- $A, B, C, \dots, L, M, N, \dots, X, Y, Z$ — точки, соответственно данные, промежуточные и искомые
 $a, b, c, \dots, l, m, n, \dots, x, y, z$ — прямые, соответственно данные, промежуточные и искомые
 $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega, \pi, \dots, \xi, \eta, \varphi$ — окружности как основные объекты, соответственно данные, промежуточные и искомые
 $O(r)$ — окружность как основной объект с центром в точке O и радиусом r
 (O, r) — окружность как множество точек с центром в точке O и радиусом r
 $a, b, \dots, p, q, \dots, x, y, \dots$ — отрезки
 $\overline{AB}, \overline{XY}$ — отрезки, заданные концами
 $|AB|, |XY|$ — меры отрезков
 φ, ψ — углы
 Φ, Ψ — меры углов

ЛИТЕРАТУРА

1. Адлер А. Теория геометрических построений. Л., Учпедгиз, 1940.
2. Александров И. И. Сборник геометрических задач на построения. М., Учпедгиз, 1950.
3. Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии. М., «Наука», 1968.
4. Аргунов Б. И. и Балк М. Б. Геометрические построения на плоскости. М., Учпедгиз, 1957.
5. Аргунов Б. И. и Балк М. Б. Элементарная геометрия. М., «Просвещение», 1966.
6. Атанасян Л. С. Геометрия. Ч. I. М., «Просвещение», 1973.
7. Атанасян Л. С. Основания геометрии. М., Учпедгиз, 1960.
8. Атанасян Л. С. и др. Сборник задач по геометрии. Ч. II. М., «Просвещение», 1975.
9. Базылев В. Т. и др. Геометрия II, М., «Просвещение», 1975.
10. Бакельман И. Я. и др. Введение в дифференциальную геометрию в целом. М., «Наука», 1973.
11. Бакельман И. Я. Высшая геометрия. М., «Просвещение», 1967.
12. Бахман Ф. Построение геометрии на основе понятия симметрии. М., «Наука», 1969.
13. Бляшке В. Введение в дифференциальную геометрию. М., Гостехиздат, 1957.
14. Бойан Янош. Приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную. М., Гостехиздат, 1950.
15. Болтянский В. Г. Равновеликие и равносторонние фигуры. М., Гостехиздат, 1956.
16. Васильева М. В. Лекции по проективной геометрии. М., 1973.
17. Вольберг О. А. Основные идеи проективной геометрии. М.—Л., Учпедгиз, 1940.
18. Гильберт Д. Основания геометрии. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
19. Глаголев Н. А. Начертательная геометрия. Изд. 3-е. М., ГТТИ, 1953.
20. Гуревич Г. Б. Проективная геометрия. М., Физматгиз, 1960.
21. Дьедонне Ж. Линейная алгебра и элементарная геометрия. М., «Наука», 1972.
22. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. М., Физматгиз, 1961.
23. Каврайский В. В. Математическая картография. М., 1934.
24. Каган В. Ф. Н. И. Лобачевский. Изд. 2-е. М.—Л., 1948.
25. Каган В. Ф. Основания геометрии. Т. I, 1949; т. II, 1956. М., Гостехиздат.
26. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении, Ч. I, 1947; ч. II, 1948. М.—Л., Гостехиздат.
27. Каган В. Ф. Очерки по геометрии. Изд-во МГУ, 1963.
28. Клейн Ф. Высшая геометрия. М.—Л., Науч.-тех. издат., 1939.
29. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. М.—Л., Науч.-тех. издат., 1936.
30. Колмогоров А. Н. и др. Геометрия, 6-й класс, 1975; 7-й класс 1975; 8-й класс 1975. М., «Просвещение».
31. Лобачевский Н. И. Полное собрание сочинений. Т. I—V. М., Гостехиздат, 1946—1951.
32. Моделов П. С. Сборник задач по дифференциальной геометрии. М., Учпедгиз, 1949.
33. Норден А. П. Краткий курс дифференциальной геометрии. М., Физматгиз, 1958.
34. Норден А. П. Пространства аффинной связности. М., Гостехиздат, 1950.
35. Норден А. П. Теория поверхностей. М., Гостехиздат, 1956.
36. Норден А. П. Элементарное введение в геометрию Лобачевского. М., Гостехиздат, 1953.
37. Перепелкин Д. И. Курс элементарной геометрии. Т. I, 1948; т. II, 1949. М.—Л., Гостехиздат.
38. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. М., «Наука», 1969.
39. Погорелов А. В. Основания геометрии. М., «Наука», 1968.
40. Рахеевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. М., ГИТТЛ, 1956.
41. Рахеевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., «Наука», 1964.
42. Розендорф Э. Р. Задачи дифференциальной геометрии. М., «Наука», 1971.
43. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М., «Наука», 1966.
44. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М., «Наука», 1969.
45. Рыбкин Н. Сборник задач по геометрии. Ч. II (стереометрия). М., «Просвещение», 1970.
46. Рыбников К. А. История математики. Изд-во МГУ, 1974.
47. Трайнин Я. Л. Основания геометрии. М., Учпедгиз, 1961.
48. Фиников С. П. Курс дифференциальной геометрии. М., Гостехиздат, 1960.
49. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I, 1947; т. II, 1948; т. III, 1949. М.—Л., Гостехиздат.
50. Четверухин Н. Ф. Изображение фигур в курсе геометрии. М., Учпедгиз, 1958.
51. Четверухин Н. Ф. и др. Курс начертательной геометрии. М., Гостехиздат, 1956.
52. Четверухин Н. Ф. Проективная геометрия. М., «Просвещение», 1969.
53. Четверухин Н. Ф. Стереометрические задачи на проекционном чертеже. М., Учпедгиз, 1952.
54. Широков П. А., Каган В. Ф. Строение неевклидовой геометрии. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
55. Шоке Г. Геометрия. М., «Мир», 1970.
56. Юнг Дж. Проективная геометрия. М., Гос. изд-во иностранной литературы, 1949.
57. Вопросы дифференциальной и неевклидовой геометрии. — «Ученые записки МГПИ им. В. И. Ленина», № 208, 1963.
58. Вопросы дифференциальной и неевклидовой геометрии. — «Ученые записки МГПИ им. В. И. Ленина», № 243, 1965; № 374, 1970.
59. Историко-математические исследования, вып. I, 1948; вып. II, 1949; вып. IV, 1951. См. также вып. XI, 1958, статья А. П. Нордена.
60. «Начала» Евклида. т. I, 1948; т. II, 1949; т. III, 1950. М., Гостехиздат.
61. Об основаниях геометрии. Сборник работ. М., Гостехиздат, 1956.
62. Энциклопедия элементарной математики. т. II, 1951; т. IV, 1963; т. V, 1966. М., Физматгиз.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолют 111, 123
 Абсолютная инволюция 123
 Автоморфное преобразование 111
 Аксиома Архимеда 288
 — Кантора 288
 — Лобачевского 291
 — отделимости 415
 — параллельности 299
 — Паша 280
 Аксиоматика плоскости Лобачевского 291
 — пространства $\hat{E}_3$ 341
 — сферической геометрии 338
 — школьного курса геометрии 331
 — эллиптической плоскости 340
 Аксиомы Вейля 221
 — Гильберта 278, 282, 288
 — Евклида 268
 — линейного векторного пространства 222
 — проективного пространства 6
 — расстояния метрического пространства 357
 Аксиометрическая система координат 196
 Аксиометрия 196
 Алгебраический метод решения задачи на построение 171
 Аналитическая интерпретация системы аксиом планиметрии Лобачевского по Вейлю 349
 Аналитическое задание проективного пространства 327

Асимптотические линии 402
 — направления 396
 — — на поверхности 402
 Аффинная геометрия с проективной точки зрения 114
 — гиперболическая гомология 112
 — гомология 112
 — классификация линий второго порядка 119
 — коллинеация 111
 — — переносов 113
 Аффинное отображение плоскости на плоскость 193
 — преобразование плоскости 114
 Базис канонический в пространстве E_3 342
 — прямоугольный декартовый 261
 — репера 261
 — топологического пространства 413
 Базисные точки и прямые системы координат 23, 26
 Бинораль 368
 Биссектор двух прямых 294
 Биссектриса угла 287
 Больше (меньше) для отрезков 264
 — — — углов 264, 285
 Вектор 118, 221
 — гиперболический 341
 — единичный 254
 — измерения 250
 — изотропный 341

Вектор, сложение 221
 — , умножение на число 221
 — эллиптический 341
 Вектор-функция дифференцируемая 353
 — — линейная 351
 — — непрерывная 353
 — — постоянного модуля 364
 — — скалярного аргумента 351
 — — сложная 356
 Векторная область 236
 — — , плоскость, определяемая прямой 243
 — — , размерность 237
 Векторное евклидово пространство 223
 — подпространство одномерное и двумерное 228
 Векторы противоположного направления 238
 — псевдоортогональные 343
 — сонаправленные 238
 Взаимное расположение параллельных и расходящихся прямых 309
 Винтовая линия 360
 Вложение 421
 Внутреннее (внешнее) свойство поверхности 402
 Внутренняя (внешняя) точка овальной линии 99
 — геометрия поверхности 402
 — точка множества 411
 — — угла 246, 281
 Вторая квадратичная форма поверхности 393
 Гармонически сопряженные пары точек эллиптической инволюции 77
 Гармонические четверки прямых 49
 — — точек 48
 Геликонд 383
 Геодезические линии поверхности 404
 Геометрия абсолютная 290
 Геометрия проективной группы 81
 Геометрическая фигура 12, 133
 — плоская 17
 Гипербола 121
 Главная нормаль 368

Главные кривизны поверхности 398
 — направления поверхности 398
 Гомеоморфизм 358, 417
 Гомология 79
 — гиперболическая 79
 — параболическая 79
 Граница 412
 Группа проективных преобразований 80
 Движение 287
 Двумерное проективное пространство 9
 Двупрямоугольник 301
 Действительная (вещественная) точка 31
 Дефект геодезического треугольника 407
 — треугольника 299
 Длина дуги кривой 363
 — — на поверхности 389
 — отрезка 258, 316, 348
 Допустимое изменение параметра 359
 Евклидова геометрия 124
 — — с проективной точки зрения 124
 Евклидово арифметическое пространство 357
 Единица измерения 257
 Задача Аполлония 164
 — о квадратуре круга 184
 — о спрямлении окружности 184
 — о трисекции угла 182
 — об удвоении куба 184
 Задачи на построение 132
 — , разрешимые с помощью циркуля и линейки 179
 Замкнутое множество 411
 Замыкание множества 412
 Изгибание поверхности 403
 Измерение многогранников 324
 — многоугольников 320
 — отрезков 316

Изображение полное и неполное 206
 — правильных многоугольников 210
 Изоморфизм 9, 224
 Изоморфные интерпретации 335
 Инверсия 159
 Инволюция 66
 — гиперболическая 67
 — ортогональная 69
 — эллиптическая 67
 Индекс угла 262
 Индикатриса Дюпена 394
 Интерпретация Клейна 328
 — проективного пространства в свя-
 зке прямых 19
 — проективной плоскости в свя-
 зке прямых 19
 — системы аксиом 19, 225
 Инцидентность вектора и точки 6
 Каноническая система координат 95,
 96
 — — на прямой 347
 Каноническое уравнение линии 95, 96
 Картография 407
 Касательная к кривой 366
 — к линии второго порядка 85
 — плоскость поверхности 386
 Квадрат с проективной точки зрения
 126
 Квадратичная форма уравнения ли-
 нии второго порядка 84
 Классификация линий второго поряд-
 ка 96
 Клеточное разбиение поверхности
 424
 Коллинеарность трех точек 8
 Компактность 421
 Комплексная (невещественная) точка
 31
 Комплексно сопряженные точки 32
 Конгруэнтность отрезков 258
 — углов 127, 263
 — фигур 265
 Конгруэнтные окружности 128
 — отрезки и углы с проективной то-
 чки зрения 127
 Конструктивное множество точек 142
 Конструктивные задачи на проектив-

ной плоскости 55
 Координатные линии поверхности 380
 Координаты прямой 34
 — точки 25
 — — гауссовы на поверхности 380
 — проективные на плоскости 25
 — — на прямой 24
 Корреляция 13
 Коэффициент искажения 196
 Край поверхности 422
 Крендель 422
 Кривая (линия) 360
 — параметризованная 361
 — регулярная 361
 Кривизна кривой 371
 — линии на поверхности 392
 — поверхности, вычисление 400
 — — полная 399
 — — средняя 399
 Круговое кольцо 420
 Кручение кривой 373
 k -функция 166
 Лежать между 115, 240
 Линейная вектор-функция 351
 — зависимость (независимость) то-
 чек 7
 Линейное векторное пространство 222
 — преобразование 76
 Линия, см. также кривая 360
 — второго порядка 83
 — — —, вырожденная 91
 — — —, невырожденная 91
 — —, неявное задание 383
 — первого порядка 83
 — —, явное задание 384
 Лист Мебиуса 423
 Локальная система координат в то-
 чке кривой 368
 Ломаная 248
 Луч 239, 280, 348
 — открытый 239, 280
 Масштабный эллипс 200
 Матрица уравнения линии 84
 — Якоби 383
 Мера угла 319

Метод геометрических transforma-
 ций 151
 — инверсии 159
 — Монжа 216
 — применения конструктивных мно-
 жеств 142
 Метрика плоскости изображений 208
 Метрическое пространство 357
 Многоугольник 249
 — простой 319
 — ориентированный 320
 Множество упорядоченное 46
 Модуль вектора 254
 Направление одномерного подпро-
 странства 238
 — прямой 239
 Натуральные уравнения кривой 376
 Независимость системы аксиом 332
 Неоднородная координата точки на
 прямой 37
 Неподвижная точка проективного
 преобразования 65, 78
 Непротиворечивость аксиоматики век-
 торного пространства 327
 — — Гильберта 331
 — — проективного пространства 328
 — планиметрии Лобачевского 330
 — системы аксиом 225, 326
 — — трехмерного евклидова про-
 странства 225
 — эллиптической геометрии 340
 Несобственные точки, прямые и плос-
 кости 20, 114
 Нормаль к кривой 368
 — к поверхности 386
 Нормальное сечение поверхности 393
 Нулевая линия второго порядка 97
 Нулевой пучок второго порядка 99

Область 419
 — угла 246
 Образующие подпространства 229
 Обыкновенная точка по отношению к
 линии второго порядка 89
 Овальная линия второго порядка 97
 Овальная линия, порожденная проек-
 тивным отображением 102

Овальный пучок второго порядка 99
 Однородная функция 83
 Односторонняя поверхность 426
 Окрестность точки метрического про-
 странства 357, 414
 — — топологического пространства
 411
 Окружность 126, 312
 Ориентация клетки 425
 Орицикл 312
 Ортогональная аксиометрическая
 проекция 203
 Ортогональная система координат 126
 Ортогональное дополнение 251
 Ортогональность прямых и плоскостей
 252
 Ортогональные окружности 145
 — подпространства 251
 Основная плоскость в теории геомет-
 рических построений 132
 — теорема аксиоматики 197
 — — о разрешимости задач на по-
 строение 179
 Основной объект в теории геометри-
 ческих построений 132
 Основные понятия аксиоматики Вей-
 ля 221
 — — — Гильберта 278
 — отношения в теории геометриче-
 ских построений 132
 Особая точка кривой 365
 — — параметризация поверхности
 378
 — — по отношению к линии второго
 порядка 89
 Ось гомотопии проективного отобра-
 жения 64
 — проекций 216
 Открытое множество 410
 — — метрического пространства 414
 — — топологического подпространст-
 ва 410
 — покрытие топологического про-
 странства 421
 Отношение отрезков 313
 — эквивалентности 358
 Отображение 415

Отображение гомеоморфное 417
 — изометрическое 403
 — непрерывное 358, 416
 — топологическое 358, 417, 418
 Отрезки дополнительные 45
 — несоизмеримые и соизмеримые 314
 Отрезок 242, 348
 — по Гильберту 279
 — проективный 45
 Отрезочная функция 165
 Отрезочное квадратное уравнение 171
 Отрезочное уравнение 171

Парабола 121
 Параллельность ненаправленных прямых 297
 — прямых и плоскостей 234
 Параллельные прямые аффинной плоскости 115
 — — плоскости Лобачевского 291, 297
 Параллельный перенос 118
 Параметрические уравнения прямой 33
 — — пучка 36
 Параметризация естественная 362
 — регулярной кривой 361
 Параметризованная m -поверхность 422
 Параметрическое представление кривой 361
 Первая квадратичная форма поверхности 389
 Пересечение линейных геометрических образов 233
 Пересекающиеся основные образы 11
 Пересечение линии второго порядка с прямой 84
 — множеств 11
 Перпендикулярные прямые 125
 Параллельные плоскости 234
 Плоскость 8, 231
 Плоскость изображений 191
 — нормальная 368
 — проективного пространства 8
 — проекций горизонтальная 216
 — фронтальная 216
 — соприкасающаяся 367

— спрямляющая 368
 — эллиптическая 338, 413
 Плоское поле точек и прямых 12
 Площадь многоугольника 320
 — простого куска поверхности 390
 Поверхности изометрические 402
 Поверхность 422
 — гладкая 378
 — замкнутая 422
 — n -мерного многообразия 422
 — ориентируемая 425
 — полная 422
 — постоянной кривизны 407
 — простая 378, 422
 — регулярная 378
 Погружение 421
 Подпространство
 — гиперболическое 342, 344
 — изотропное 342
 — топологического пространства 411
 — эллиптическое 342, 344
 Полнота системы аксиом 335
 Полный квадрат 126
 — прообраз 416
 — четырехвершинник 50
 — четырехсторонник 52
 Полуплоскость 244, 280
 — вогнутости кривой 368
 — открытая 244
 Полупространство вогнутости кривой 368
 Полус прямой 91
 Поляры точки 91
 Порядок связности замкнутой поверхности 427
 — точек на проективной прямой 46
 Построение касательной к овальной линии в данной точке 109
 — основного объекта 133
 — полюса 110
 — поляры 109
 — правильных многоугольников 175
 — точек пересечения эллипса с прямой 156
 — — с целочисленными координатами 58
 — четвертого гармонического элемента 57

Построения ограниченными средствами 184
 — одной линейкой 185
 — одним циркулем 190
 Построенный основной объект 55, 133
 Постулаты Евклида 268
 — построения 134
 — — на проективной плоскости 56
 Предел векторной функции 352
 Предельная линия 312
 — точка 412
 Предложение Архимеда 288
 — Дедекнда 288
 Преобразование подобия 124
 — точек на проективной плоскости 70
 Приведение отображения 416
 Принадлежность упорядоченной пары точек и вектора 221
 Принцип двойственности в пространстве 12
 — — на плоскости 17
 Проективная геометрия 81
 — плоскость комплексная 31
 Проективное отображение 60
 — — одномерных образов 60, 63
 — преобразование одномерных образов 60, 63
 — —, сохраняющее абсолют 124
 — — точек плоскости 70
 Проективное пространство 6
 Проективные классы линий второго порядка 97
 Проектирование 191
 Проекция аксонометрическая 197
 — — вторичная 198
 — — ортогональная 203
 — горизонтальная 217
 — диметрическая 197
 — изометрическая 197
 — кавальерная 197
 — триметрическая 197
 — фронтальная 217
 Произведение вектора на число 221
 — отрезка на натуральное число 259
 Производная вектор-функции 354

Промежуток 351
 Простая дуга 420
 Простое отношение точек 117
 Простой шестивершинник 104
 — шестисторонник 107
 Пространство метрическое 357
 — топологическое 410
 — Хаусдорфа 415
 Прямая 8
 — в плоскости Лобачевского 346
 — направленная 239
 — Паскаля 106
 — проективного пространства 8
 Прямоугольная декартова система координат 126
 Прямые параллельные 297
 — расходящиеся 298
 — общего положения 52
 Псевдоевклидово произведение 341
 Пути эквивалентные 360
 Путь 358
 — простой 358
 — регулярный 359
 Пучок второго порядка 98
 — плоскостей 12
 — прямых 12
 Пятый постулат Евклида 268
 Радикальная ось двух окружностей 145
 Радикальный центр трех окружностей 145
 Радиус окружности 127
 — кривизны линии 392
 Разделенность (неразделенность) точек прямой 244
 — пар точек 43
 Ранг линии второго порядка 91
 Расстояние между точками 257
 Расширение поля допустимое 177
 — — квадратичное 177
 — — простое 177
 Расширенное аффинное пространство 20
 — евклидово пространство 22
 Регулярная кривая класса $C^k(I_0)$ 361
 Репер 254, 282

Свободное решение задачи на построение 138
 Свойства аффинных отображений 193
 Свойство взаимности полюсов и поляр 92
 Связка плоскостей 12
 — прямых 12
 Связанное решение задачи на построение 138
 Сегмент числовой 357
 Середина отрезка 117, 259
 Симплекс 8
 Система аксиом неевклидовых геометрий 337
 — на проективной прямой и проективной плоскости 23, 25
 — , присоединенная к совокупности точек 169
 Скалярное произведение векторов 221
 След плоскости 204, 219
 — прямой 204, 219
 Сложное отношение прямых 41
 — — на расширенной плоскости 43
 — — точек 36
 — — на расширенной прямой 41
 Собственные точки, прямые и плоскости 20
 Соединение линейных геометрических образов 11
 Сопровождающий трехгранник 368
 Сопряженные направления 123
 — точки 86
 Структура метрическая 223
 — топологическая 410
 Сумма векторов 221
 — отрезков 259, 283
 — простых многоугольников 323
 — углов 285
 Сфера 381
 — с листами Мёбиуса 424
 — с k отверстиями 422
 — с p ручками 422
 Сферическая плоскость 338

Сферическая прямая 339
 Сферический отрезок 340
 — угол 339
 Сходящиеся прямые 200
 Теорема Бойяи — Гервина 324
 — Брианшона 107
 — Гаусса 406
 — Гаусса — Бонне 406
 — Дезарга 53
 — Дена — Кагана 325
 — Жордана 281
 — Лежандра о сумме углов треугольника 271
 — Менье 394
 — Мора — Маскерони 190
 — о внешнем угле треугольника 286
 — Паппа 54
 — Паскаля 104
 — Польке — Шварца 195
 — Штейнера 102
 — о построениях одной линейкой 188
 — Эйлера для многогранников 426
 Тождественное преобразование 61
 Топологическая классификация замкнутых поверхностей 427
 Топологический инвариант 418
 Топологическое многообразие 421
 — пространство компактное 421
 — — линейно связное 420
 — — несвязное 419
 — — связное 419
 Топология 410
 — дискретная 410
 — тривиальная 410
 Тор 423
 Трехвершинник 12
 — автополярный 83
 Точечно-векторное пространство 223
 Точка 6, 221
 — гиперболическая 397
 — граничная 412
 — закругления 396
 — омбилическая 396
 — особая кривой 365
 — — поверхности 380
 параболическая 397

предельная 412
 — распрямления 365
 — уплощения 397
 — эллиптическая 396
 Треугольник
 — вырожденный 302
 — прямоугольник вырожденный 304
 — , признаки конгруэнтности 283, 300
 Угол 281
 — между линиями на поверхности 389
 — острый 264
 — параллельности 305
 — прямой 264
 — развернутый
 — смежный 285
 — тупой 264
 Уравнение поверхности 378
 — прямой на проективной плоскости 32
 — пучка прямых 35

Фигура пространства P_n 12
 Фигуры двойственные 15
 Фигуры проективно-эквивалентные 82

Формула Тейлора 356
 — Эйлера 398
 Формулы преобразования координат на проективной прямой и плоскости 30
 — Серре — Френе 373
 Функция конструктивная 165
 — Лобачевского 307
 — однородная
 Функция от отрезков 165
 Функция, принадлежащая классу $S_k(I_0)$ 354

Центр гомологии 79
 — проекций 191

Числовое поле 177
 — — , соответствующее данной системе координат 178

Шаровая окрестность 414

Эквивалентность аксиоматики 331
 Эквидистанта 312
 Эллипс 120
 Эпюр 217

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
-------------	---

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Глава I. Понятие проективного пространства	5
§ 1. Проективное пространство	—
§ 2. Прямая и плоскость; свойства принадлежности	8
§ 3. Принцип двойственности	12
§ 4. Модели проективной плоскости и проективного пространства	18
Глава II. Проективные координаты на прямой и плоскости	23
§ 5. Координаты точек на прямой и плоскости	—
§ 6. Преобразование координат точек плоскости. Комплексная проективная плоскость	27
§ 7. Уравнение прямой; координаты прямой	32
§ 8. Сложное отношение точек и прямых	36
§ 9. Отрезки на проективной прямой; порядок точек	43
§ 10. Гармонические четверки точек и прямых. Полный четырехвершинник	47
§ 11. Теоремы Дезарга и Паппа. Конструктивные задачи на проективной плоскости	52
Глава III. Проективные преобразования	60
§ 12. Проективные отображения множества точек прямых и множества прямых пучков	—
§ 13. Проективные преобразования точек прямых; инволюции	65
§ 14. Проективные преобразования плоскости	70
§ 15. Способы задания проективных преобразований точек плоскости; гомологии	74
§ 16. Группа проективных преобразований; предмет проективной геометрии	80
Глава IV. Линии и пучки второго порядка на проективной плоскости	83
§ 17. Линии второго порядка	—
§ 18. Сопряженные точки относительно линии второго порядка; особые точки	86
§ 19. Полюсы и поляры	91

§ 20. Проективная классификация линий второго порядка. Пучки второго порядка	94
§ 21. Геометрические свойства овальной линии второго порядка	99
§ 22. Теоремы Паскаля и Брианшона. Задачи на построение	104

Глава V. Аффинная и евклидова геометрии с проективной точки зрения. Приложения к элементарной геометрии	111
---	-----

§ 23. Геометрия на проективной плоскости с фиксированной прямой	—
§ 24. Проективное истолкование аффинной геометрии	114
§ 25. Проективное истолкование линий второго порядка аффинной плоскости	119
§ 26. Проективное истолкование евклидовой геометрии	123
§ 27. Приложение проективной геометрии к решению задач элементарной геометрии	128

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ И МЕТОДЫ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Глава VI. Методы геометрических построений на плоскости	132
§ 28. Задачи на построение с помощью циркуля и линейки; постулаты построений	—
§ 29. Общая схема решения задач на построение	137
§ 30. Применение конструктивных множеств к задачам на построение	142
§ 31. Применение геометрических преобразований к решению задач на построение	151
§ 32. Инверсия; применение инверсии к решению задач на построение	159
Глава VII. Теория геометрических построений	165
§ 33. Построение отрезков, заданных простейшими формулами	—
§ 34. Алгебраический метод решения задач на построение	171
§ 35. Разрешимость задач на построение циркулем и линейкой	176
§ 36. Примеры классических задач на построение, не разрешимых циркулем и линейкой	182
§ 37. О решении задач на построение различными средствами	184
Глава VIII. Методы изображений	191
§ 38. Основные положения теории изображений	—
§ 39. Аксонометрия	196
§ 40. Аффинные и метрические задачи аксонометрии	199
§ 41. Полные и неполные изображения	203
§ 42. Метрическая определенность изображений	208
§ 43. Метод Монжа	216

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ

ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Глава IX. Обоснование евклидовой геометрии по Вейлю	220
§ 44. Точно-векторная аксиоматика трехмерного евклидова пространства	221
§ 45. Простейшие следствия из аксиом точно-векторного трехмерного аффинного пространства	227

§ 46. Прямая и плоскость трехмерного аффинного пространства	230
§ 47. Направленная прямая; луч и отрезок	235
§ 48. Полуплоскость; понятие полупространства	242
§ 49. Угол, многоугольник; понятие двугранного угла	246
§ 50. Трехмерное евклидово пространство; ортогональность прямых и плоскостей	249
§ 51. Расстояние между двумя точками и конгруэнтность отрезков. Координаты точек на прямой	254
§ 52. Конгруэнтность углов	261
Глава X. Исторический обзор обоснования геометрии	266
§ 53. Геометрия до Евклида. «Начала» Евклида и история пятого постулата	—
§ 54. Н. И. Лобачевский и его геометрия. Возникновение современной аксиоматики	271
§ 55. Обзор аксиоматики Гильберта; аксиомы принадлежности и порядка	278
§ 56. Обзор аксиоматики Гильберта; аксиомы конгруэнтности и основные следствия	282
§ 57. Обзор аксиоматики Гильберта; заключение	287
Глава XI. Основные факты геометрии Лобачевского	291
§ 58. Аксиома Лобачевского; параллельные прямые	—
§ 59. Основные свойства параллельных прямых. Расходящиеся прямые	294
§ 60. Треугольники и четырехугольники	299
§ 61. Вырожденные треугольники	302
§ 62. Функция Лобачевского	305
§ 63. Взаимное расположение параллельных и расходящихся прямых. Основные кривые	309
Глава XII. Измерение геометрических величин	313
§ 64. Измерение отрезков и углов	—
§ 65. Измерение многоугольников в евклидовой геометрии	319
§ 66. Измерение многогранников в евклидовой геометрии	324
Глава XIII. Общие вопросы аксиоматики. Неевклидовы геометрии	326
§ 67. Требования, предъявляемые к системе аксиом. Непротиворечивость	—
§ 68. Независимость и полнота системы аксиом	332
§ 69. Сферическая и эллиптическая геометрии в схеме Вейля	337
§ 70. Псевдоевклидово трехмерное векторное пространство	341
§ 71. Геометрия Лобачевского в схеме Вейля. Независимость пятого постулата от остальных аксиом Гильберта	345

РАЗДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ

ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ

Глава XIV. Линии в евклидовом пространстве	351
§ 72. Вектор-функция скалярного аргумента	—
§ 73. Кривые в пространстве; естественная параметризация	357

§ 74. Соприкасающаяся плоскость. Сопровождающий трехгранник	364
§ 75. Кривизна и кручение. Плоские кривые	370

Глава XV. Поверхности в евклидовом пространстве 378

§ 76. Понятие поверхности	—
§ 77. Первая квадратичная форма поверхности	385
§ 78. Кривизна линий на поверхности	392
§ 79. Внутренняя геометрия поверхности	402

Глава XVI. Элементы топологии 410

§ 80. Топологические и метрические пространства	—
§ 81. Топологические отображения, связность и компактность	415
§ 82. Поверхности	421

Приложение. Краткие методические рекомендации к использованию учебной литературы 429

Основные символы и обозначения 431

Литература 434

Предметный указатель 436

*Левон Сергеевич Атанасян
Григорий Борисович Гуревич*

ГЕОМЕТРИЯ, ЧАСТЬ II

Редактор А. М. Абрамов
Переплет художника Б. Л. Николаева
Художественный редактор Е. Н. Карасик
Технический редактор Н. Н. Махова
Корректоры Н. И. Новикова, Р. Б. Штутман

Сдано в набор 7/IV 1976 г. Подписано к печати 4/XI 1976 г.
60×90^{1/16}. Бумага типографская № 3. Печ. л. 28. Уч.-изд. л. 29,82.
Тираж 74 тыс. экз.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение»
Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам из-
дательства, полиграфии и книжной торговли Москва, 3-й проезд
Марьиной рощи, 41

Главное предприятие республиканского производственного объеди-
нения «Полиграфкинг» Госкомиздата УССР, г. Киев, Довженко, 3.
Зак. № 6—1057.

Цена 93 к.