В. Т. БАЗЫЛЕВ

ГЕОМЕТРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Допущено
Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебного пособия
для студентов математических
специальностей вузов

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1989

ББК 22.151
Б17
УДК 513

Рецензенты: кафедра геометрии Ленинградского государственного педагогического института им. А. И. Герцена (зав. кафедрой — д-р физ.-мат. наук, проф. А. Л. Вернер); д-р физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова Л. Е. Евтушик

Базылев В. Т.

Б17 Геометрия дифференцируемых многообразий: Учеб. пособие для вузов.— М.: Высш. шк., 1989. — 221 с.

ISBN 5-06-000462-7

В пособии дается современное изложение таких важнейших понятий геометрии, как многообразие, поверхность, линия, и изучаются их основные свойства. Пособие содержит следующие главы: «Гладкие многообразия», «Внешние дифференциальные формы», «Элементы теории групп Ли и геометрические объекты», «Связности в расслоениях», «О системах уравнений Пфаффа в инволюции» и «Основы геометрии погруженных многообразий».

Б $\dfrac{1602050000(4309000000)-338}{001(01)-89}$ 11—89 ББК 22.151 517.4

ISBN 5-06-000462-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие написано на основе лекций, прочитанных автором для студентов старших курсов математических факультетов МОПИ им. Н. К. Крупской и МГПИ им. В. И. Ленина. Цель пособия — подвести студентов к современному пониманию таких важных понятий геометрии, как многообразие, поверхность, линия, и изучить их основные свойства.

Часть изложенного в пособии материала (например, главы I, II, IV) может составить содержание соответствующего спецкурса, а другая часть (главы III, V, VI) обеспечит факультативный курс для студентов, интересующихся геометрией. Некоторые примеры и упражнения могут быть использованы на спецсеминаре, а также могут служить темами для курсовых и дипломных работ по геометрии.

Заметим, что излагаемый материал тесно примыкает к разделу «Элементы топологии. Линии и поверхности в евклидовом пространстве» из учебного пособия «Геометрия II» В. Т. Базылева и К. И. Дуничева (М., Просвещение, 1975). Там же приведены и многочисленные примеры, которые полезно использовать при чтении спецкурса по данному пособию.

Хорошо известно, что теория дифференцируемых многообразий составляет предмет дифференциальной топологии [13], а не геометрии. Современная дифференциальная геометрия изучает дифференцируемые многообразия с обогащенной (дополнительной) структурой. Именно в таком смысле и надо понимать название настоящего пособия.

Автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю признательность кафедре геометрии Ленинградского государственного педагогического института им. А. И. Герцена (зав. кафедрой — проф. А. Л. Вернер) и доктору физико-математических наук, старшему научному сотруднику МГУ Л. Е. Евтушику за их ценные замечания по содержанию пособия.

Автор

ГЛАВА I

ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Здесь предполагается знание элементов топологии в объеме соответствующего раздела программы по геометрии для педвузов [2].

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГООБРАЗИЯ. ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Пусть G — открытое множество в $\mathbf{R}^n$ (где $\mathbf{R}^n$ — n-мерное числовое пространство с его естественной топологией).

Отображение $f: G \to \mathbf{R}^p$ переводит каждую точку $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in G$ в определенную точку $f(x) = y = (y^1, y^2, \ldots, y^p) \in \mathbf{R}^p$. Следовательно, отображение f определяется p функциями $y^i = y^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ — *компонентами отображения* f.

Если каждая из функций y^i имеет в G непрерывные частные производные до порядка k включительно, то отображение f называется *отображением класса гладкости* C^k или просто *отображением класса* C^k. Пишут: $f \in C^k(G, \mathbf{R}^p)$ или, короче, $f \in C^k$ (если G и p известны).

Если компоненты y^i отображения f имеют в G непрерывные частные производные любого порядка, то множество таких отображений обозначают через $C^\infty(G, \mathbf{R}^p)$. Множество всех *аналитических отображений* из G в $\mathbf{R}^p$, т. е. таких, компоненты которых в окрестности каждой точки $x \in G$ можно разложить в сходящиеся степенные ряды, обозначают через $C^\omega(G, \mathbf{R}^p)$. Наконец, $C^0(G, \mathbf{R}^p)$ — это множество всех непрерывных отображений множества G в $\mathbf{R}^p$. Имеем $C^0(G, \mathbf{R}^p) \supset C^1(G, \mathbf{R}^p) \supset \ldots \supset C^\infty(G, \mathbf{R}^p) \supset C^\omega(G, \mathbf{R}^p)$. Можно показать, что в этой цепочке ни одно включение не является равенством.

Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство. Гомеоморфизм φ некоторого открытого подмножества $U \subset X$ на открытое подмножество в $\mathbf{R}^n$ называется *n-мерной картой* (или *n-мерной системой координат*).

При этом U называют *координатной окрестностью* или *областью карты* φ. Если $x \in U$, то $\varphi(x) = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbf{R}^n$. Эти n вещественных чисел x^i называются *координатами точки* x в данной карте φ. Если $x \in U$, где U — область карты φ, то говорят, что φ — координатная система в точке x.

Пусть имеется хаусдорфово топологическое пространство X, на котором задано *покрытие* $\{U_\alpha\}$ областями n-мерных карт (n — заданное натуральное число): $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, где U_α — область карты φ_α и A — множество индексов. Тогда пространство X называется *n-мерным топологическим многообразием.*

Для нужд геометрии такое определение многообразия оказывается слишком общим и на пространство X кроме его отделимости обычно налагают и другие требования, такие, как *связность* [12] или наличие *счетной базы* [5].

Пусть многообразие X обладает счетной базой. Это значит, что существует такое семейство B открытых в X множеств, что для любой точки $x \in X$ и любой окрестности V_x этой точки существует открытое множество $B_x \in B$ такое, что $x \in B_x \subset V_x$. Это семейство B и называется базой топологии пространства X. Будем предполагать, что топология пространства X обладает такой базой B, которая содержит не более счетного множества элементов B_x (тогда X называют *пространством со счетной базой*). Мы не будем требовать, чтобы многообразие X было связным топологическим пространством.

Как известно, в пространстве с базой B всякое открытое множество U_α есть объединение элементов из B. Таким образом, если топология многообразия X обладает счетной базой, то мы можем считать, что покрытие $\{U_\alpha\}$ содержит не более чем счетное множество элементов U_α (т. е. множество A не более чем счетно).

Пусть X — n-мерное топологическое многообразие и k — целое число, причем $0 \leqslant k \leqslant \infty$. Множество $A = (\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ карт φ_α называется *атласом* класса C^k на X, если выполнены два условия (аксиомы атласа класса C^k):

1) области U_α этих карт образуют покрытие многообразия X, т. е. $X \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$;

2) для любых α, $\beta \in A$ таких, что $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, отображение $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$: $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ принадлежит классу C^k. Эти отображения $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ называются *преобразованиями координат.*

Пусть A — атлас класса C^k на многообразии X. Карта φ на X называется *C^k-согласованной с A*, если $A \cup \{\varphi\}$ — также атлас класса C^k на X. Атлас A класса C^k называется *дифференцируемой структурой* класса C^k на X, если каждая карта, C^k-согласованная с A, принадлежит A (*свойство максимальности атласа* [3]).

Ясно, что каждый атлас класса C^k на X определяет однозначно дифференцируемую структуру класса C^k, а именно-множество всех C^k-согласованных с ним карт.

Пара (X, A), где X — n-мерное топологическое многообразие и A — дифференцируемая структура класса C^k на X, называется *n-мерным многообразием класса C^k* (точнее, *n-мерным дифференцируемым многообразием класса C^k*).

Пусть A_0 — некоторый атлас класса C^k на X. Атлас A_0 можно пополнить до единственной дифференцируемой структуры A класса C^k. Атлас A_0 называют *базисом C^k-структуры* A. Таким образом, пара (X, A_0) определяет единственное C^k-многообразие (X, A), если A_0 — какой-либо атлас класса C^k на X.

Заметим, что C^0-многообразие — это просто топологическое многообразие.

Если в данном выше определении атласа класса C^k положить $k=\omega$ (т. е. потребовать, чтобы отображения $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ были аналитическими), то получим атлас класса C^ω. Атлас A класса C^ω, обладающий свойством максимальности, называется *аналитической структурой* на X, а пара (X, A) — *аналитическим многообразием.*

Многообразия класса C^k $(k>0)$ называются также *гладкими.*

Пример 1. Аффинное пространство A_n. Как известно [2], при определении структуры пространства A_n базой этой структуры служит числовое пространство $\mathbf{R}^n$. Поэтому в качестве карты φ можно взять тождественное преобразование в $\mathbf{R}^n$. Область такой карты — все $\mathbf{R}^n$. Следовательно, можно рассматривать атлас $A_0 = \{\varphi\}$ из одной карты φ. Соответствующее преобразование координат $y^i = x^i$ $(i=1, 2, \ldots n)$ определяется, как видим, аналитическими функциями. Следовательно, аффинное пространство A_n (как и евклидово E_n) является примером дифференцируемого (и даже аналитического) многообразия.

Пример 2. Рассмотрим сферу S_{n-1} в евклидовом пространстве E_n: $S_{n-1}=\{x\in E_n \mid \rho(0, x)=r>0\}$, точки $x_1(0, 0, \ldots, 0, r)$, $x_2(0, \ldots, 0, -r)$ и гиперплоскость $E_{n-1}: x^n=0$ (предполагаем, что в E_n выбран ортонормированный репер $\{0, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_n\}$). Определим отображения $\varphi: S_{n-1}\setminus\{x_1\}\to E_{n-1}$, $\psi: S_{n-1}\setminus\{x_2\}\to E_{n-1}$ как стереографические проекции из точек x_1 и x_2 соответственно на E_{n-1}. Нетрудно проверить, что $A_0=\{\varphi, \psi\}$ — базис дифференцируемой структуры на сфере S_{n-1}.

Можно убедиться, что проективное пространство P_n, эллиптическое пространство Римана S_n и гиперболическое пространство Лобачевского Λ_n являются C^∞-многообразиями.

Замечание. Уитни в 1936 г. доказал, что если на топологическом многообразии X существует C^1-структура, то на нем существует и C^ω-структура, причем из максимального C^1-атласа можно выбрать атлас C^ω-согласованных карт, т. е. базис C^ω-структуры [15].

Поэтому во многих вопросах геометрии можно рассматривать сразу C^∞-многообразия. Можно было бы рассматривать сразу C^ω-многообразия. Однако требование аналитичности нередко оказывается слишком сильным (как известно, поведение аналитической функции в целом определяется ее поведением в сколь угодно малой окрестности одной точки).

Как показал Кервер в 1960 г., для всех $n\geqslant 10$ существуют топологические многообразия размерности n, на которых нельзя ввести никакой C^k-структуры при $k>0$. Можно показать, что если X — топологическое многообразие размерности $n\leqslant 4$, то на X существует C^k-структура, $k>0$ [15].

Будем обозначать n-мерное дифференцируемое многообразие через X_n, Y_n, ..., M_n. При этом, как правило, мы не будем указывать, какому классу C^k принадлежит это многообразие, считая k достаточно большим, для того чтобы все рассуждения были корректными. Заметим только, что всякое C^k-многообразие является и C^p-многообразием для $p<k$.

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть X_n, Y_p — дифференцируемые многообразия классов C^k и C^q соответственно и G — открытое подмножество в X_n. Рассмотрим отображение $f: G \to Y_p$. Пусть φ — карта с областью $U \subset G$ и ψ — карта с областью $V \supset f(U)$. Отображение f называется *дифференцируемым класса* C^m $(m \leqslant \min(k, q))$, если отображение $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \psi(V)$ (где $\varphi(U) \subset \mathbf{R}^n$, $\psi(V) \subset \mathbf{R}^p$) принадлежит классу C^m, для любой карты φ, область которой $U \subset G$.

Отображение $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ переводит точку $\varphi(x) \in \in \varphi(U) \subset \mathbf{R}^n$ в точку $y \in \psi(V) \subset \mathbf{R}^p$. Если $\varphi(x) = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ (и, значит, x^i — координаты точки $x \in U$ в карте φ) и $y = (y^1, y^2, \ldots, y^p)$, то $y^a = y^a(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $a = 1, 2, \ldots, p$. По определению, $f \in C^m(X_n, Y_p) \Leftrightarrow y^a \in C^m(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$.

Если в качестве Y^p взять $\mathbf{R}$, то получим вещественную функцию f класса C^m от n аргументов, определенную на множестве G. Пусть по-прежнему X_n — многообразие класса C^k и $C_x{}^k$ — множество функций класса C^k, определенных на открытом подмножестве G, содержащем точку $x \in X_n$ $(k > 0)$. Если φ — карта в точке x и $\varphi(x) = (x^1, x^2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, то $x = \varphi^{-1}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и $y = f(x) = f(\varphi^{1-}(x^1, x^2, \ldots, x^n)) = f^*(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, где $f^* = f \circ \varphi^{-1}$. Обозначим $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x (f) \stackrel{\text{def}}{=} \left.\frac{\partial f^*}{\partial x^i}\right|_{\varphi(x)}$. Вместо $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x (f)$ пишут $\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_x$.

Зададим n чисел $\xi^i \in \mathbf{R}$ и рассмотрим линейный функционал $X: C_x{}^k \to \mathbf{R}$, действующий по закону $\forall f \in \in C_x{}^k$: $X(f) = \xi^i \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_x$ (суммирование по i от 1 до n). Этот функционал обозначают так:

$$X = \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x. \tag{1}$$

На множестве всех таких функционалов определим сложение по правилу $(X_1 + X_2)(f) = X_1(f) + X_2(f)$ и умножение на число по правилу $(\alpha X)(f) = \alpha X(f)$.

Множество T_x всех функционалов вида (1) становится векторным $\mathbf{R}$-пространством. Оно называется *касательным пространством* к многообразию X_n в точке x, его векторы — *касательными векторами* к многообразию X_n в этой точке. Таким образом, в данной карте φ вектор $X\in T_x$ определяется n числами ξ^i. Выбирая $\xi^i=\delta_k{}^i$ (символ Кронекера), получим n векторов $X_k^0=\frac{\partial}{\partial x^k}$ $(k=1, 2,\ldots, n)$.

Покажем, что векторы $X_k{}^0$ линейно независимы. Рассмотрим равенство

$$\lambda^k X_k^0=0 \quad (\lambda^k\in \mathrm{R}). \tag{2}$$

Функционал $\lambda^k X_k{}^0$ можно применить к функции $x^i\in C_x{}^k$. Получим $\lambda^k X^0{}_k(x_i)=0$ или $\lambda^k\frac{\partial x^i}{\partial x^k}=0$, т. е. $\lambda^k\delta^i{}_k=0$. Отсюда $\lambda^k=0$. Таким образом, равенство (2) возможно лишь при всех λ^k, равных нулю. Следовательно, векторы $\frac{\partial}{\partial x^k}$ линейно независимы.

Согласно формуле (1), каждый вектор $X\in T_x$ является линейной комбинацией векторов $\frac{\partial}{\partial x^k}$. Следовательно, $\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)$ — базис пространства T_x и $\dim T_x=n$.

Дифференциал функции f в точке x определен формулой

$$df=\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_x \mathrm{d}x^i. \tag{3}$$

Если $f, g\in C_x{}^k$, то $df+dg$ есть дифференциал функции $f+g\in C_x{}^k$. Если $\alpha\in\mathrm{R}$, то αdf — дифференциал функции $\alpha f\in C_x{}^k$. Следовательно, дифференциалы функций из $C_x{}^k$, вычисленные в точке x, образуют векторное пространство $T_x{}^*$ над полем R вещественных чисел. Имеем $x^i\in C_x{}^k$ и, значит, $dx^i\in T_x{}^*$. Так как $\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_x\in\mathrm{R}$, то в силу формулы (3) заключаем, что любой дифференциал $df\in T_x{}^*$ является линейной комбинацией n линейно независимых дифференциалов dx^i (как дифференциалов независимых переменных). Следовательно, $\dim T_x{}^*=n$ и (dx^i) — базис векторного пространства $T_x{}^*$.

Всякий элемент df пространства $T_x{}^*$ определяет линейное отображение $df: T_x\to\mathrm{R}$ по закону

$$(df)(X)=X(f) \quad \forall X\in T_x. \tag{4}$$

Если взять $f=x^i$, $X=\frac{\partial}{\partial x^k}$, то по формуле (4) получим $(dx^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)=\delta_k^i$. Таким образом, векторное пространство $T_x{}^*$ является сопряженным пространству T_x, а базис (dx^i) пространства $T_x{}^*$ сопряжен базису (∂_k) пространства T_x $\left(\text{где } \partial_k=\frac{\partial}{\partial x^k}\right)$.

Элементы пространства $T_x{}^*$ называются *ковариантными векторами* (короче, *ковекторами*) или линейными формами в точке x, а само векторное пространство $T_x{}^*$ называется *кокасательным пространством* к многообразию X^n в этой точке.

Замечание. В евклидовом пространстве E_n возьмем ортонормированный репер $R=(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ и какой-либо вектор $\vec{v}=\alpha^i\vec{e}^i=\vec{0}$. Пусть f — функция класса C^k $(k>0)$, определенная в некоторой области $G\subset E_n$. Тогда в точке $x\in G$ определен вектор $\operatorname{grad} f=$ $=\sum\limits_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_x\vec{e}_i$. Находим

$$\vec{v}\cdot\operatorname{grad} f=\alpha^i\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_x=\alpha^i\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x(f). \tag{5}$$

Таким образом, вектор $\vec{v}$ определяет линейное отображение $X: C_x{}^k\to\mathbf{R}$ по закону $X(f)=\alpha^i\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_x$. Отождествим вектор $\vec{v}$ с этим отображением X. При этом, как показывает формула (5), $\vec{v}(f)=\vec{v}\cdot\operatorname{grad} f$ есть *производная функции f в направлении $\vec{v}$*.

Базис пространства T_x, т. е. упорядоченное множество из n линейно независимых векторов $X_1, \ldots, X_n$ из T_x, называют *репером* в точке x и обозначают R_x [10]. Реперу R^x пространства T_x соответствует в пространстве $T_x{}^*$ сопряженный базис или *корепер* θ_x — упорядоченное множество из n линейно независимых линейных форм θ^i в точке x таких, что $\theta^i(X_k)=\delta_k{}^i$. Репер (∂_k) и корепер (dx^i) называют *естественным репером* и *корепером* в карте φ, где $\varphi(x)=(x^1, x^2, \ldots, x^n)$.

Пусть φ_1 и φ_2 — карты, определенные в окрестности точки $x\in X_n$, причем $\varphi_1(x)=(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $\varphi_2(x)=(y^1, y^2, \ldots, y^n)$. Как векторы из T_x, так и ковекторы из $T_x{}^*$ будут иметь различные представления относительно этих карт.

Теорема. *При переходе от карты φ_1 к карте φ_2 базисные векторы в T_x преобразуются по закону*

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^l}\right|_x=\left.\frac{\partial x^j}{\partial y^l}\right|_x\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x, \tag{6}$$

а базисные ковекторы в T_x^* преобразуются по закону

$$dy^l=\left.\frac{\partial y^l}{\partial x^k}\right|_x dx^k. \tag{7}$$

□ По условию, $\varphi_1(x)=(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $\varphi_2(x)=(y^1, y^2, \ldots, y^n)$. Так как φ_1 и φ_2 — гомеоморфизмы, то для них существуют обратные отображения (также гомеоморфизмы) и, следовательно,

$$x=\varphi_1^{-1}(x^1,\ x^2,\ldots, x^n),\ \varphi_2(\varphi_1^{-1}(x^1,\ x^2,\ldots,x^n))=$$
$$=(y^1,\ y^2,\ldots,\ y^n).$$

Отсюда

$$y^l=y^l(x^1,\ x^2,\ldots,x^n). \tag{8}$$

Точно так же найдем

$$x^j=x^j(y^1,\ y^2,\ldots,\ y^n). \tag{9}$$

При этом правые части в формулах (8) и (9) являются функциями определенного класса C^k ($k>0$) гладкости, так как φ_1, φ_2 — карты атласа класса C^k на X_n (по предположению).

Формулу (6) можно вывести просто, если воспользоваться правилом дифференцирования сложной функции. В самом деле, пусть $f\in C_x^k$. Тогда в карте φ_1 получится функция $f^*(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. При переходе к карте φ_2 мы должны применить формулы (9) и получим функцию $f^*(x^1(y^1, y^2, \ldots, y^n), \ldots, x^n(y^1, y^2, \ldots, y^n))$. Поэтому

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y^l}\right)_x=\left(\frac{\partial f}{\partial x^k}\right)_x\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^l}\right)_x \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial}{\partial y^l}\right)_x(f)=\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^l}\right)_x\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_x(f),$$

$\forall f\in C_x^k$. Это и есть формула (6). Формулы (7) получим, дифференцируя функции (8). ■

Заметим, что так как $\left(\frac{\partial}{\partial y^l}\right)_x$ — базис в T_x, то матрица $\left\|\frac{\partial x^j}{\partial y^l}\right\|$ в формуле (6) невырожденная: $\det\left\|\frac{\partial x^j}{\partial y^l}\right\|\neq 0$.

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ОТОБРАЖЕНИЯ

Рассмотрим снова дифференцируемые многообразия X_n и Y_p, открытое подмножество $G \subset X_n$ и дифференцируемое отображение $f: G \to Y_p$. В каждой точке $x \in G$ отображение f порождает линейное отображение $f_{*x}: T_x \to T_{f(x)}$ (где $T_{f(x)}$ — касательное пространство к Y_p в точке $f(x)$) по следующему закону.

Если $X \in T_x$, $g \in C^k_{f(x)}$ (где $C^k_{f(x)}$ — множество функций класса C^k, определенных в некоторой окрестности точки $f(x)$ многообразия Y_p), то положим

$$(f_{*x}(X))(g) = X(g \circ f). \tag{1}$$

Так как $g \in C^k_{f(x)}$, то $g \circ f \in C_x{}^k$ и, значит, правая часть в формуле (1) определена. Если φ — карта в окрестности точки $x \in X_n$, а ψ — карта в окрестности точки $y = f(x)$, то $\varphi(x) = (x^1, x^2, ..., x^n)$. Отсюда $x = \varphi^{-1}(x^1, x^2, ..., x^n)$, $y = f(x) f \circ \varphi^{-1}(x^1, x^2, ..., x^n)$. Далее, имеем $\psi(y) = (y^1, y^2, ..., y^p)$, т. е. $(y^1, y^2, ..., y^p) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x^1, x^2, ..., x^n)$. Следовательно,

$$y^a = y^a(x^1,\ x^2, \dots, x^n)\ (a = 1, 2, \dots, p). \tag{2}$$

Полученную систему уравнений (2) называют *выражением отображения f в координатах* [20].

Мы видим, что $f_{*x}(X)$ есть линейное отображение в $\mathbf{R}$, определенное на $C^k_{f(x)}$. Следовательно, $f_{*x}(X) \in T_{f(x)}$. Пусть $X = \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right)_x$ и $h = g \circ f = g^*(y^1(x^1, ..., x^n), ..., y^p(x^1, ..., x^n))$. Тогда

$$X(g \circ f) = \xi^l \left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right)_x (h) = \xi_l \left(\frac{\partial h}{\partial x^l}\right)_x = \xi^l \left(\frac{\partial h}{\partial y^a}\right)_{f(x)} \left(\frac{\partial y^a}{\partial x^l}\right)_x,$$

т. е.

$$X(g \circ f) = \left(\frac{\partial y^a}{\partial x^l}\right)_x \xi^l \left(\frac{\partial}{\partial y^a}\right)_{f(x)} (h).$$

Учитывая формулу (1), заключаем, что если вектор $X \in T_x$ имеет в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right)_x$ координаты ξ^i, то соответствующий вектор $f_{*x}(X)$ имеет в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial y^a}\right)_{f(x)}$ координаты

$$\left(\frac{\partial y^a}{\partial x^l}\right) \xi^l \neq \eta^a. \tag{3}$$

Таким образом, если отображение $f: G \to Y_p$ в координатах имеет вид (2) и в точке $x \in G$ выбран репер $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x$, а в точке $f(x)$ — репер $\left(\frac{\partial}{\partial y^a}\right)_{f(x)}$, то линейное отображение f_{*x} выражается формулами (3) с помощью якобиевой матрицы $\left\|\frac{\partial y^a}{\partial x^i}\right\|$ отображения $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

Отображение f_{*x} называется *дифференциалом отображения* или *индуцированным отображением* (его обозначают также f'_x или df).

Отображение f индуцирует еще отображение $f_x^*: T^*_{f(x)} \to T_x^*$ по следующему закону. Если $g \in C^k_{f(x)}$ и, значит, $dg = (dg)_{f(x)} \in T^*_{f(x)}$, то положим $f_x^*(dg) = d(g \circ f)_x$.

Если $f \in C_x^k$, $g \in C^k_{f(x)}$, то $g \circ f \in C_x^k$ и, значит, $d(g \circ f)_x \in T_x^*$. Пусть отображение f в координатах имеет вид $y^a = y^a(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, а g — вид $g = g^*(y^1, y^2, \ldots, y^p)$. Тогда $g \circ f = g^*(y^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, y^p(x^1, \ldots, x^n))$.

Поэтому $d(g \circ f) = \left(\frac{\partial g}{\partial y^a}\right)_{f(x)} \cdot \left(\frac{\partial y^a}{\partial x^i}\right)_x dx^i$, т. е. $f^*_x(dg) = \left(\frac{\partial y^a}{\partial x^i}\right)_x \left(\frac{\partial g}{\partial y^a}\right)_{f(x)} dx^i$. Следовательно, если ковектор $dg \in T^*_{f(x)}$ имел в корепере (dy^a) координаты $\left(\frac{\partial g}{\partial y^a}\right)_{f(x)} = \eta_a$, то соответствующий ковектор $f_x^*(dg) \in T_x^*$ имеет в корепере (dx^i) координаты $\xi_i = \left(\frac{\partial y^a}{\partial x^i}\right)_x \eta_a$. Так выражается в координатах отображение f_x^*.

Пусть даны дифференцируемые отображения $f: X_n \to Y_p$ и $g: Y_p \to Z_q$. Тогда возникает индуцированное отображение $(g \circ f)_{*x}: T_x \to T_{(g \circ f)(x)}$, которое можно получить как композицию двух индуцированных отображений $f_{*x}: T_x \to T_{f(x)}$ и $g_{*f(x)}: T_{f(x)} \to T_{(g \circ f)x}$, и получаем так называемое *цепное правило*:

$$(g \circ f)_{*x} = g_{*f(x)} \circ f_{*x}. \tag{4}$$

Отметим два частных случая. 1. Тождественное отображение $e: X_n \to X_n$. Согласно формуле (1), $\forall X \in T_x$, $\forall g \in C^k_{f(x)}: (f_{*x}(X))g = X(g \circ f)$. Так как $f = e$, то $f(x) = e(x) = x$. Следовательно, $g \in C_x^k$. Поэтому $X(g\circ f)=X(g(x))=\xi^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x(g)$. Итак, $f_{*x}(X)=$ $=e_{*x}(X)=\xi^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x=X$, т. е. e_{*x} есть тождественное преобразование векторного пространства T_x.

2. Пусть $f: X_n \to Y_p$ есть диффеоморфизм класса C^k (короче, C^k — диффеоморфизм; это значит, что f биективно и отображения f и f^{-1} принадлежат классу C^k).

Так как $f^{-1}\circ f=e$, то по формуле (4) получим $(f^{-1})_{*f(x)}\circ f_{*x}=e_{*x}$ — тождественное отображение. Следовательно, f_{*x} обратимо, причем обратным к нему служит отображение $(f^{-1})_{*f(x)}$, т. е. $(f_{*x})^{-1}=(f^{-1})_{*f(x)}$. Отсюда следует, что отображение f_{*x} биективно и потому $\dim T_x=\dim T_{f(x)}$. Следовательно, $n=p$, т. е. *диффеоморфные многообразия имеют одинаковую размерность.*

Пусть по-прежнему множество G открыто в X_n и дано дифференцируемое отображение $f: G\to Y_p$.

Рангом отображения f в точке $x\in G$ называется ранг индуцированного отображения $f_{*x}: T_x\to T_{f(x)}$, т. е. размерность векторного подпространства $f_{*x}(T_x)\subset \subset T_{f(x)}$. Можно сказать, что ранг отображения f в точке x равен рангу якобиевой матрицы $\left\|\frac{\partial y^a}{\partial x^i}\right\|$ в точке $\varphi(x)$. Из анализа известна следующая теорема [11].

Теорема о ранге. *Пусть даны дифференцируемые многообразия X_n и Y_p и дифференцируемое отображение $f: X_n\to Y_p$, которое имеет один и тот же ранг r в каждой точке $x\in X_n$. Тогда в окрестности любой точки $x\in X_n$ существует карта φ (в которой $\varphi(x)=(x^1, x^2, \ldots, x^n)$), а в окрестности точки $y=f(x)$ существует карта ψ (в которой $\psi(y)=(y^1, y^2, \ldots, y^p)$) такие, что в этих координатах отображение f выражается формулами*

$$y^t=x^t\ (t=1, 2, \ldots, r);\quad y^s=0\ (s=r+1, \ldots, p).$$

Следствие. *Пусть дано дифференцируемое отображение $f: X_n\to Y_n$ (многообразия одинаковой размерности n). Если f имеет в точке x максимальный ранг (n), то существует такая открытая окрестность U точки x, что сужение $f|_U$ есть диффеоморфизм U на $f(U)$.*

□ Пусть в точке $x\in X_n$ ранг $f=n$. Так как $\det\left\|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right\|$

есть функция непрерывная, то она отлична от нуля в некоторой окрестности точки x. По теореме о ранге найдутся окрестность U точки x, карта φ в этой окрестности и карта ψ в некоторой окрестности точки $f(x)\in Y_n$ такие, что в этих координатах отображение имеет вид $y^i=x^i$ ($i=1, 2, \ldots, n$). Из этих уравнений следует, что сужение $f|_U$ биективно, причем как оно, так и обратное ему отображение дифференцируемы. Следовательно, это есть диффеоморфизм U на $f(U)$. ■

Замечание. Легко проверить, что C^k-диффеоморфизм является отношением эквивалентности на множестве всех дифференцируемых многообразий. Это основное отношение эквивалентности в *дифференциальной топологии* (которая изучает те свойства фигур в X_n, которые сохраняются при диффеоморфизмах). Диффеоморфизм является частным случаем гомеоморфизма, но не наоборот. Известно, что если $n\leqslant 6$ и гладкие многообразия X_n и Y_n гомеоморфны, то они и диффеоморфны [4]. Иначе обстоит дело при $n>6$. Так, в 1957 г. Милнор нашел [15], что существует в точности 28 гладких многообразий, гомеоморфных семимерной сфере S_7 (и, значит, гомеоморфных между собой), но попарно не диффеоморфных. Таким образом, при $n>6$ диффеоморфизм и гомеоморфизм — это два различных отношения эквивалентности.

§ 4. ПОГРУЖЕНИЯ И ВЛОЖЕНИЯ

Дифференцируемое отображение $f: X_n\to Y_p$ называется *погружением*, если $\forall x\in X_n$ ранг $f_{*x}=n$ [21]. Ясно, что при этом $n\leqslant p$. Погружение f инъективно только локально (в некоторой окрестности U_x каждой точки $x\in X_n$), но не обязательно глобально. Например, отображение $f: \mathbf{R}\to E_2$ (на E_2 задан ортонормированный репер) по закону

$$x=\frac{2at^2}{1+t^2},\quad y=\frac{at(t^2-1)}{1+t^2},\quad a=\mathrm{const}>0$$

(здесь $f(\mathbf{R})$ — строфоида) является погружением. Оно (как и всякое погружение) локально инъективно, но не является глобально инъективным, так как две различные точки $t_1=-1$, $t_2=1$ из $\mathbf{R}$ переходят в одну и ту же точку $A(a, 0)\in E_2$.

Погружение $f: X_n \to Y_p$ называется *вложением,* если $X_n \overset{\text{top}}{\sim} f(X_n)$, т. е. когда f — гомеоморфизм на свой образ в индуцированной топологии. Таким образом, вложение есть инъективное погружение. Обратное, вообще говоря, неверно. Например, отображение $f: \mathbf{R} \to E_2$ по закону $x=t$, $y=\sin t$ является вложением.

Из этих определений можно заключить, что *каждое погружение локально является вложением.* Это значит, что если $f: X_n \to Y_p$ — погружение, то для каждой точки $x \in X_n$ существует такая ее окрестность U_x, что сужение $f|_{U_x}$ есть вложение U_x в Y_p.

Пусть $f: X_n \to Y_p$ — погружение (класса C^k, как дифференцируемое отображение). У каждой точки $x \in X_n$ найдется карта φ, в которой $\varphi(x) = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, с областью определения $U \subset X_n$, а у точки $f(x) = y$ — карта ψ, в которой $\psi(y) = (y^1, y^2, \ldots, y^p)$, с областью определения $V \supset f(U)$, такие, что отображение f будет представлено в координатах уравнениями

$$y^a = y^a(x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad (a = 1, 2, \ldots, p), \tag{1}$$

где $\forall x \in U$ ранг $\left\|\frac{\partial y^a}{\partial x^i}\right\|_{\varphi(x)} = n \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Мы всегда можем считать координаты x^i пронумерованными так, что $\det \left\|\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right\| \neq 0$. Тогда, как известно из анализа, в некоторой окрестности $U_0 \subset U$ первые n уравнений системы (1) можно разрешить относительно $x^i: x^i = x^i(y^1, y^2, \ldots, y^n)$, причем правые части — функции класса C^k в U_0. Подставив такие выражения для x^i в остальные уравнения системы (1), получим $y^\alpha = y^\alpha(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ $(\alpha = n+1, \ldots, p)$. Это означает, что в области U_0 кроме карты φ, в которой $\varphi(x) = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, имеется еще карта $\bar{\varphi}$ с $\bar{\varphi}(x) = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$.

Перейдем к карте $\bar{\varphi}$ и вместо y^k будем обозначать координаты по-прежнему через x^k. Тогда система (1), представляющая погружение f в координатах, примет вид

$$\begin{cases} y_i = x^i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ y^\alpha = y^\alpha(x^1, x^2, \ldots, x^n) \quad (\alpha = n+1, \ldots, p), \end{cases} \tag{2}$$

где $y^\alpha \in C_x^k$.

Ясно, что верно и обратное: если f в некоторой окрестности каждой точки $x \in X_n$ можно представить в координатах уравнениями вида (2), где $y^\alpha \in C_x^k$, то f — погружение класса C^k.

Пусть X_n и Y_p — дифференцируемые многообразия. Рассмотрим тот случай, когда X_n — подмножество в $Y_p : X_n \subset Y_p$. Пусть $i : X_n \to Y_p$ — *включение* (сужение на X_n тождественного отображения $e : Y_p \to Y_p$, т. е. $i = e|_{X_n}$). Тогда если i — погружение, то X_n называется *погруженным многообразием*, если же i — вложение, то X_n называется *подмногообразием* в Y_p [20; 21].

Важно уяснить, что на погруженном многообразии X_n индуцированная топология может и не совпадать с топологией X_n как дифференцируемого многообразия. Если же X_n — подмногообразие, то эти топологии совпадают.

Введем несколько новых понятий. Топологическое пространство X называется *локально компактным*, если выполнены два условия: а) X отделимо; б) для всякой точки $x \in X$ существует компактная окрестность.

Например, числовое пространство $\mathbf{R}^n$ является локально компактным (но не компактным) пространством.

Нетрудно доказать, что всякое топологическое многообразие X_n локально компактно.

Говорят, что локально компактное пространство X_n *счетно в бесконечности*, если оно является объединением не более чем счетного множества компактных множеств.

Например, числовое пространство $\mathbf{R}$ является счетным в бесконечности. Так, $\mathbf{R}^1 = \bigcup [-n, n]$.

Следующие результаты установлены Уинти в 1934 г. для C^k-многообразий, счетных в бесконечности [15].

Теорема 1 (теорема Уитни о погружениях). *Для любого C^k-многообразия $X_n (k \geqslant 1)$ и любого $p \geqslant 2n$ существует бесконечное множество C^k-погружений X_n в $\mathbf{R}^p$.*

Теорема 2 (теорема Уитни о вложениях). *Для любого C^k-многообразия $X_n (k \geqslant 1)$ и любого $p \geqslant 2n+1$ существует бесконечное множество C^k-вложений X_n в $\mathbf{R}^p$.*

Заметим, что в теореме 1 оговорка $p \geqslant 2n$ существенна. Например, окружность ($n=1$) нельзя погрузить в $\mathbf{R}^1$.

§ 5. ПОВЕРХНОСТИ В МНОГООБРАЗИЯХ

Пусть $\mathbf{R}_+^n = \{(x^1, x^2, ..., x^n) \in \mathbf{R}^n \mid x^n \geqslant 0\}$. Естественная топология из $\mathbf{R}^n$ индуцирует на подмножестве $\mathbf{R}_+^n$ свою топологию, вместе с которой множество $\mathbf{R}_+^n$ становится топологическим пространством (подпространством в $\mathbf{R}^n$). В дальнейшем мы будем понимать $\mathbf{R}_+^n$ как подпространство в R^n.

Пусть X — отделимое пространство со счетной базой и пусть $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие пространства X такое, что для каждого $\alpha \in A$ определен гомеоморфизм φ_α множества U_α на открытое подмножество пространства $\mathbf{R}_+^n$, причем хотя бы для одного значения α множество $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ содержит точки, для которых $x^n = 0$. Тогда X называется *n-мерным многообразием с краем* (или *с границей*). Точка $x \in X$ называется *внутренней*, если найдется пара $(U_{\alpha_0}, \varphi_{\alpha_0})$ такая, что $x \in U_{\alpha_0}$ и $\varphi_{\alpha_0}(U_{\alpha_0}) \cap \{(x^1, ..., x_n) \in \mathbf{R}_+^n \mid x_n = 0\} = \varnothing$. Точка $x \in X$ называется *граничной* (или *точкой края*), если она не является внутренней. Множество всех граничных точек называется *границей* (или *краем*) многообразия с краем X.

Пусть Ω — открытое подмножество в $\mathbf{R}_+^n$ и функция f определена на Ω. Говорят, что эта функция принадлежит классу C^k, если ее можно продолжить до функции F класса C^k, которая определена на некотором открытом множестве Ω' в $\mathbf{R}^n$, причем $\Omega' \supset \Omega$. Это значит, что $F \in C^k(\Omega')$ и $F \mid \Omega = f$.

Если указанное выше семейство $S_0(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ обладает свойством C^k-согласованности карт, т. е. тем свойством, что отображение $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ принадлежит классу C^k для всех α, β, для которых $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, то говорят, что семейство S_0 карт φ_α определяет на X структуру C^k-многообразия с краем. Сама же C^k-структура на X — это семейство карт $S \supset S_0$, обладающее свойством максимальности по C^k- согласованности карт.

На C^k-многообразиях с краем можно определить функции класса C^k, касательные векторы и ковекторы. Для C^k-многообразий с краем можно определить понятия гладкого отображения, ранга отображения, погружения и вложения. Все эти понятия определяются таким же способом, как и для обычных C^k-многообразий.

В топологии доказывается, что многообразие с краем может быть гомеоморфно только многообразию с краем, причем при этом гомеоморфизме край переходит в край.

Примеры. 1. Отрезок, луч числовой прямой — примеры одномерных гладких многообразий с краем.

2. Круг, полуплоскость в E_2 — примеры двумерных гладких многообразий с краем.

3. В евклидовом пространстве E_3, в котором задан ортонормированный репер, рассмотрим фигуру $S^* = \{M(x, y, z) \mid x^2+y^2+z^2=r^2, z \geqslant 0\}$. Это верхняя полусфера вместе с большой окружностью $x^2+y^2=r^2$, $z=0$, лежащей в плоскости xOy. Легко видеть, что S^* — двумерное гладкое многообразие с краем. Краем служит указанная окружность плоскости xOy.

Мы будем обозначать через X_n, X'_n, X_n'', Y_p, ... C^k-многообразия или C^k-многообразия с краем соответствующей размерности.

Пусть даны два C^k-погружения: $f : X_n \to Y_p$ $(n \leqslant p)$ и $g : X'_n \to Y_p$. Говорят, что погружения f и g находятся в отношении σ_k, если существует C^k-диффеоморфизм $h : X_n \to X'_n$ такой, что $f = gh$. Обозначим через C^k (n, Y_p) множество всех C^k-погружений n-мерных многообразий (с краем или без края) в многообразие Y_p.

Докажем, что σ_k — отношение эквивалентности на множестве $\mathrm{C}^k(n, Y_p)$.

а) Так как тождественное отображение $e : X_n \to X_n$ можно рассматривать как C^k-диффеоморфное, то $\forall f \in \mathrm{C}^k(n, Y_p) : f\sigma_k f$.

б) Пусть дано $f, g \in C^k$ (n, Y_p) и $f\sigma_k g$. Следовательно, существует C^k-диффеоморфизм $h : X_n \to X'_n$ такой, что $f = gh$. Тогда существует C^k-диффеоморфизм $h^{-1} : X_n' \to X_n$ такой, что $g = fh^{-1}$. Имеем $g\sigma_k f$.

в) Пусть даны $f, g, u \in \mathrm{C}^k(n, Y_p)$, причем $f\sigma_k g$ и $g\sigma_k u$. Это значит, что существует C^k-диффеоморфизм $h : X_n \to X'_n$ такой, что $f = gh$, и если $u : X_n'' \to Y_p$, то существует такой C^k-диффеоморфизм $t : X'_n \to X_n''$, что $g = ut$.

Из соотношений $f = gh$ и $g = ut$ имеем $f = u(th)$. Так как $th : X_n \to X_n''$ есть C^k-диффеоморфизм, то $f\sigma_k u$, что и требовалось установить.

Элементы фактор-множества $\mathrm{C}^k(n, Y_p)/\sigma^k$ называются *n-мерными поверхностями класса C^k в многообразии Y_p*. Таким образом, n-мерная поверхность F_n класса C^k в многообразии Y_p — это класс эквивалентных C^k-погружений n-мерных многообразий (или n-мерных многообразий с краем) в Y_p.

Поверхность F_n класса C^k при $k \geqslant 1$ называют *гладкой* поверхностью. Каждое погружение $f: X_n \to Y_p$ однозначно определяет класс эквивалентных ему погружений — n-мерную поверхность F_n в Y_p. При этом само погружение f называют *параметризацией* n-поверхности F_n.

Если f и g — эквивалентные погружения, то $f = gh$ и, значит, $f(X_n) = g(h(X_n))$, т. е. $f(X_n) = g(X'_n)$. Мы видим, что эквивалентные погружения имеют своим образом одно и то же погруженное многообразие $f(X_n)$ в Y_p.

Если n-поверхность F_n определяется погружением $f: X_n \to Y_p$, то будем отождествлять F_n с множеством $f(X_n)$ и даже писать $F_n \subset Y_p$. Однако при этом надо помнить, что поверхность F_n (т. е. множество $f(X_n)$) в общем случае погружения может и не быть подмногообразием в Y_p и что для данной поверхности F_n существует бесконечное множество параметризаций.

Примеры поверхностей даны в [2].

В многообразии Y_p n-поверхность F_n называется *линией* (или *кривой*) при $n=1$ и *гиперповерхностью* при $n=p-1$.

§ 6. ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОГООБРАЗИЙ. ПОНЯТИЕ РАССЛОЕННОГО МНОГООБРАЗИЯ

Пусть даны C^k-многообразия X_n и Y_p. На декартовом произведении $X_n \times Y_p$ можно определить C^k-структуру следующим способом. Возьмем карты φ на X_n и ψ на Y_p с областями определения $U \subset X_n$ и $V \subset Y_p$ и определим отображение $\varphi \times \psi : U \times V \to \mathbf{R}^{n+p}$ по закону $(\varphi \times \psi)(x, y) = (\varphi(x), \psi(y)) \in \mathbf{R}^{n+p}$.

Можно проверить, что это отображение есть гомеоморфизм $U \times V$ на $\varphi(U) \times \psi(U) \subset \mathbf{R}^{n+p}$. Значит, $\varphi \times \psi$ — карта на $X_n \times Y_p$.

Если A_0, B_0 — атласы класса C^k на X_n и Y_p соответственно, то $A_0 \times B_0 = \{\varphi \times \psi \mid \varphi \in A_0,\ \psi \in B_0\}$ есть атлас класса C^k на $X_n \times Y_p$. Этот атлас порождает на $X_n \times Y_p$ структуру C^k-многообразия. Полученное C^k-многообразие $X_n \times Y_p$ называется *произведением* данных C^k-многообразий X_n и Y_p; при этом $\dim(X_n \times Y_p) = n+p$.

Рассмотрим так называемые *естественные проекции* π_1, π_2 многообразия $X_n \times Y_p$ на оба множителя: $\pi_1(x, y) = x$, $\pi_2(x, y) = y \; \forall (x, y) \in X_n \times Y_p$. Если

$\varphi|\varphi(x)=(x^1, x^2, \dots, x^n)$ — карта на X_n, $\psi|\psi(y)=(y^1, y^2, \dots, y^p)$ — карта на Y_p, то $\varphi\times\psi|(\varphi\times\psi)(x, y)=(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^p)$ — карта на $X_n\times Y_p$. Отсюда $(x, y)=(\varphi\times\psi)^{-1}(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^p)$; $\pi_1(x, y)=x \Rightarrow x=\pi_1\circ(\varphi\times\psi)^{-1}(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^p)$. Значит, $(x^1, \dots, x^n)=\varphi(x)\Rightarrow(x^1, \dots, x^n)=\varphi\circ\pi_1\circ(\varphi\times\psi)^{-1}(x_1, \dots, x^n, y_1, \dots, y^p)$.

Мы видим, что проекция π_1, *выраженная в координатах, представляет собой естественную проекцию числового пространства* $\mathbf{R}^{n+p}$ *на* $\mathbf{R}^n$ и поэтому выражается уравнениями вида

$$x^i=f^i(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^p),$$

где f^i означает i-ю координату точки $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^p)\in\mathbf{R}^{n+p}$. Ясно, что эти функции дифференцируемы, причем $\frac{\partial f^i}{\partial x^k}=\delta^i_k$, $\frac{\partial f^i}{\partial y^t}=0$. Поэтому $\forall(x, y)\in X_n\times Y_p$ ранг $\left\|\frac{\partial f^i}{\partial x^k}, \frac{\partial f^i}{\partial y^t}\right\|_{(x, y)}=n$. Значит, π_1 — дифференцируемое отображение ранга n. Аналогично убеждаемся, что π_2 — дифференцируемое отображение ранга p.

Введем теперь более общее понятие расслоенного многообразия (оно локально сводится к произведению двух многообразий).

Пусть P, X, Y — гладкие многообразия. *Расслоенным многообразием* (или, короче; *расслоением*) называется четверка (P, X, Y, π), которая состоит из *пространства расслоения* P, *базы* X, *типового* (или *стандартного*) *слоя* Y и сюръективного дифференцируемого отображения $\pi:P\to X$ (называемого *проекцией*), удовлетворяющего следующему условию: для каждой точки $x\in X$ существуют открытая окрестность U и диффеоморфизм $h:\pi^{-1}(U)\to U\times Y$ (называемый *картой расслоения*) такой, что $\forall x\in U$, $\forall y\in Y:\pi(h^{-1}(x, y))=x$. Все такие окрестности U образуют открытое покрытие базы X, а соответствующие диффеоморфизмы h составляют так называемый атлас расслоения. Множество $\pi^{-1}(x)$ называется *слоем над точкой* x.

Расслоение называется *тривиальным*, если существует карта расслоения, для которой $U=X$. Тогда P диффеоморфно произведению $X\times Y$, а π становится естественной проекцией на X. В общем случае расслоение только *локально тривиально*. Заметим, что всегда $\dim P=\dim X+\dim Y$.

Примеры. 1. Для любых C^k-многообразий X и Y можно построить расслоенное пространство $(X \times Y, X, Y, \pi)$, где $\pi: X \times Y \to X$ — естественная проекция на первый сомножитель. Это расслоение — тривиальное.

2. Расслоенное многообразие реперов. Пусть X — гладкое многообразие; $P = \{R^x | x \in X\}$ — множество всех реперов во всех точках многообразия X, $n = \dim X$; V — n-мерное векторное пространство над полем $\mathbf{R}$; Y — множество всех базисов в V.

Зафиксируем в пространстве V какой-либо базис B_0. Тогда всякий элемент $B \in Y$ определяется невырожденной матрицей $\|a^i{}_j\|$ (матрицей перехода от базиса B_0 к базису B). Легко видеть, что с помощью этой координации множество Y становится n^2-мерным гладким многообразием.

Пусть φ — карта в окрестности U точки $x \in X_n$, $\varphi(x) = (x^1, \dots, x^n)$. Тогда координатные векторы репера R^x, где $x \in U$, можно представить в виде $X_i = \xi_i{}^k \partial_k$, причем $\det \|\xi_i{}^k\| \neq 0$.

Переменные x^l, $\xi_i{}^k$ будем считать координатами репера $R^x \in P$. Можно проверить, что эта координация превращает P в гладкое многообразие; $\dim P = n + n^2$.

Определим проекцию $\pi: P \to X$ равенством $\forall R^x \in P: \pi(R^x) = x$. Ясно, что π — сюръективное и дифференцируемое отображение. Множество $\pi^{-1}(U)$ есть множество всех реперов R^x, у которых $x \in U$. Определим отображение $h: \pi^{-1}(U) \to U \times Y$ следующим образом. Если репер $R^x \in \pi^{-1}(U)$ имеет координаты $(x^l, \xi_i{}^k)$ в карте φ, то положим $h(R^x) = (x, B)$, где $x = \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n)$, B — базис из Y, определяемый матрицей $\|\xi_i{}^k\|$. Легко заметить, что h — диффеоморфизм. Возьмем теперь произвольный элемент $(x, B) \in U \times Y$. Пусть $\varphi(x) = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ и базис B определяется матрицей $\|b_i{}^k\|$. Тогда по определению h имеем $h^{-1}(x, B) = R^x$, где R^x имеет координаты $(x^i, b_j{}^k)$. Следовательно, $\pi(h^{-1}(x, B)) = x$, что и требовалось. Итак, (P, X, Y, π) — расслоенное пространство. Оно называется *расслоенным многообразием реперов.*

ГЛАВА II

ВНЕШНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

§ 7. РАССЛОЕНИЕ, КАСАТЕЛЬНОЕ К МНОГООБРАЗИЮ. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ И ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Пусть X_n — дифференцируемое C^{k+1}-многообразие, $T(X_n)=\bigcup\limits_{x\in X_n} T_x$ — множество всех векторов, касательных к X_n; $\varphi\,|\,\varphi(x)=(x^1, x^2, \dots, x^n)$ — карта на X_n с областью определения U.

Рассмотрим отображение $\bar{\varphi}$: $\bigcup\limits_{x\in U} T_x \to \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ по следующему закону: если $X=\xi^i\partial_i\in T_x$, то $\bar{\varphi}(x)=(x^1, \dots, x^n;\ \xi^1, \dots, \xi^n)$. Значит, если обозначить $\bar{\varphi}(X)=(\bar{\varphi}^i(X),\ \bar{\varphi}^{n+i}(X))$, то $\bar{\varphi}^i(X)=x^i$ — координаты точки x в карте φ, а $\bar{\varphi}^{n+i}(X)=\xi^i$ — координаты вектора X в естественном репере $(\partial_i)_x$.

Ясно, что $\bar{\varphi}$ есть биекция множества $T(U)=\bigcup\limits_{x\in U} T_x$ на $\varphi(U)\times\mathbf{R}^n$.

Отображение $\bar{\varphi}$ называется картой на множестве $T(X_n)$, *ассоциированной* с картой φ [5]. Можно показать, что в $T(X_n)$ можно ввести топологию (притом однозначно определенную), для которой карты $\bar{\varphi}$ являются гомеоморфизмами. Множество всех таких карт образует атлас A класса C^k, который и определяет дифференцируемую структуру на $T(X_n)$. Следовательно, $T(X_n)$ становится гладким многообразием размерности $2n$.

Естественная проекция π: $T(X_n)\to X_n$ определяется так: $\forall X\in T_x$ $\pi(X)=x$. Ясно, что π — сюръективное отображение. Возьмем $X\in T_x$. Тогда $\bar{\varphi}(X)=(x^1, \dots, x^n,\ \xi^1, \dots, \xi^n)$. Пусть π_1 — проекция $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ на первый множитель. Тогда $\pi_1\circ\bar{\varphi}(X)=(x^1, \dots, x^n)=\varphi(x)$. Мы видим, что координаты точки $x=\pi(X)$ в карте φ представляют собой первые n координат вектора X в ассоциированной карте $\bar{\varphi}$. Поэтому ясно, что проекция π дифференцируема.

Если $x\in X_n$, то $\pi^{-1}(x)=T_x$ — слой над точкой x. Типовым слоем в этом случае служит n-мерное векторное пространство V над полем $\mathbf{R}$. Зададим в V какой-либо базис B_0.

Рассмотрим отображение $h:\pi^{-1}(U)\to U\times V$ по следующему закону: если $X\in T_x\subset\pi^{-1}(U)$, то $h(X)=(x, \vec{v})$, где вектор $\vec{v}$ имеет в базисе B_0 те же координаты ξ^i, что и вектор X в репере (∂_i).

Нетрудно заметить, что h — диффеоморфизм. Так как $h(X)=(x, \vec{v})$, то $h^{-1}(x, \vec{v})=X\in T_x$. По определению проекции π имеем $\forall x\in U$, $\forall\vec{v}\in V$ $\pi(h^{-1}(x, \vec{v}))=x$. Таким образом, четверка $(T(X_n), X_n, V, \pi)$ есть расслоенное пространство с пространством расслоения $T(X_n)$. Это расслоенное пространство называется *касательным пучком* (или *касательным расслоением*) *к многообразию* X_n.

Пусть $T^*(X_n)=\bigcup\limits_{x\in X_n} T^*_x$ — множество всех ковекторов, касательных к X_n. Аналогично изложенному выше, множество $T^*(X_n)$ можно наделить структурой гладкого многообразия и получить расслоенное многообразие $(T^*(X_n), X_n, V^*, \pi)$, которое называется *кокасательным расслоением к многообразию* X_n.

Пусть дано некоторое расслоение (P, X, Y, π) и открытое в X подмножество U. *Сечением* класса C^k над U называется C^k-отображение $s:U\to P$ такое, что $\pi\circ s=id_U$; здесь id_U — тождественное отображение множества U на себя. Значит, $\forall x\in U$ $s(x)\in\pi^{-1}(x)$. Можно сказать, что s *есть функция, которая каждой точке* $x\in U$ *ставит в соответствие определенный элемент слоя над этой точкой.*

Рассмотрим касательное расслоение $(T(X_n), X_n, V, \pi)$. *Векторным полем* класса C^k на C^k-многообразии X_n называется C^k-сечение касательного расслоения $T(X_n)$. Если X — векторное поле, то $X|_x\in\pi^{-1}(x)=T_x$. Пусть φ — карта в окрестности U точки $x\in X$. Тогда $X=\xi^i\partial_i$ в каждой точке $x\in U$. Поле X имеет класс C^k тогда и только тогда, когда ξ^i — функции класса C^k. Заметим, что векторное поле X может быть определено не на всем X_n, а лишь в некоторой области $G\subset X_n$.

Пусть в области G задано дифференцируемое семейство σ гладких линий так, что через каждую точку $x\in G$ проходит в точности одна линия $\gamma\in\sigma$. Пусть φ — карта, определенная в окрестности U точки x и $\varphi(x)=(x^1,\dots,x^n)$.

Линия $\gamma\ni x$ в карте φ определяется параметрическими уравнениями $x^i=x^i(t)$, $t\in I$, где I — некоторый интервал в $\mathbf{R}$ и $x^i(t)$ — дифференцируемые в I функции, причем $\frac{dx^i}{dt}$ не обращаются в нуль одновременно ни в одной точке из I.

Любая функция f класса C^k на многообразии X_n является на кривой γ функцией от переменной t, причем $\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}$ или $\frac{d}{dt}(f)=\frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}(f)$. Следовательно, получаем вектор $\left(\frac{d}{dt}\right)_{x\in\gamma}=\frac{dx^i}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x\in\gamma}\in T_x$, который называется вектором, касательным к линии γ в точке x.

Таким образом, по известному семейству σ гладких линий в области $G\subset X_n$ мы можем определить сечение касательного расслоения $T(X_n)$, т. е. векторное поле в области G, по закону $s(x)=\frac{dx^i}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x\in\gamma}$, где γ — линия из σ, проходящая через точку x.

Для другой параметризации $x^i=x^i(\tau)$, $\tau\in I'$, линий семейства σ имеется C^k-диффеоморфизм $I\to I'$: $\tau=\tau(t)$, который приводит к эквивалентности C^k-погружений $I\to X_n$, $I'\to X_n$ (см. определение кривой). В каждой точке $x\in\gamma$ получим касательный вектор

$$\frac{d}{d\tau}=\frac{dt}{d\tau}\left(\frac{d}{dt}\right)_{x\in\gamma}. \tag{1}$$

В области G получается новое поле векторов, касательных к линиям семейства σ, которое выражается через старое поле векторов, касательных к тем же линиям, по формуле (1).

Обратно: пусть X — векторное поле класса C^k на X_n, которое не обращается в нуль ни в одной точке $x\in X_n$. Пусть φ — карта, определенная в области $U\subset\subset X_n$ и $\varphi(x)=(x^1,\dots,x^n)$. Тогда $X=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, где ξ^i — функции класса C^k в U. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{dx^i}{dt}=\xi^i(x^1, x^2,\dots,x^n)$, где x^i — неизвестные функции переменной t. Согласно известной теореме существования решений такой системы, можно указать такие числа $\delta>0$ и $\varepsilon>0$, что эта система имеет единственное решение $x^i=x^i(t, x_0^i)$, определенное для $|t|<\varepsilon$ и удовлетворяющее начальным условиям $x^i(0, x_0^j)=x_0^i$ для любого набора $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$, если $|x_0^i|<\delta$. Таким образом, в некоторой области $G\subset U$ определено семейство σ гладких линий $x^i=x^i(t, x_0^j)$, для которых полем касательных векторов служит данное поле X. Линии семейства σ называются *интегральными кривыми векторного поля* X.

Пусть X, Y — векторные поля на многообразии X_n и пусть в карте φ имеем $X=\xi^i\partial_i$, $Y=\eta^j\partial_j$, где ξ^i, η^j — функции класса C^k. Если f — функция класса C^k на X_n, то

$$Y(f)=\eta^j\partial_j f;\quad XY(f)=X(\eta^j\partial_j f)=\xi^i(\partial_i\eta^j\partial_j f+\eta^j\partial^2_{ji}f),$$

$$X(f)=\xi^i\partial_i f;\ YX(f)=Y(\xi^i\partial_i f)=\eta^j(\partial_j\xi^i\partial_i f+\xi^i\partial^2_{ij}f).$$

Следовательно, $XY(f)-YX(f)=(\xi^i\partial_i\eta^j-\eta^i\partial_i\xi^j)\,\partial_j f$.

Мы получили новое векторное поле $[X, Y]=XY-YX$ класса C^{k-1}, которое в естественном репере (∂_j) имеет координаты

$$\left(\xi^i\frac{\partial\eta^j}{\partial x^i}-\eta^i\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}\right). \tag{2}$$

Векторное поле $[X, Y]$ называется *скобкой* полей X и Y (или *коммутатором* полей X, Y, или *скобкой Ли* этих полей).

В частности, возьмем векторные поля $\partial_k=\delta_k^i\partial_i$, $\partial_l=\delta_l^j\partial_j$. Значит, в формуле (2) надо положить $\xi^i=\delta_k^i$, $\eta^j=\delta_l^j$. Тогда получим $[\partial_k, \partial_l]=0$, т. е. скобки любых двух полей координатных векторов естественного репера равны нулю.

Нетрудно проверить, что скобка Ли обладает следующими свойствами:

1⁰. $[X, Y+Z]=[X, Y]+[X, Z]$.

2⁰. $[X, fY]=(X(f))Y+f[X, Y]$, $f\in C^k(X_n)$.

3⁰. $[X, Y]=-[Y, X]$.

4⁰. $[X, [Y, Z]]+[Y, [Z, X]]+[Z, [X, Y]]=0$ (тождество Якоби).

5⁰. $h_{*x}[X, Y]=[h_{*x}X, h_{*x}Y]$ $\forall x\in X_n$ и любого диффеоморфизма h многообразия X_n на себя.

Рассмотрим семейство $g_t: X_n\to X_n$ диффеоморфизмов многообразия X_n на себя, зависящее от параметра t $(-\infty<t<+\infty)$. Это семейство называется *од-*

нопараметрической группой дифференцируемых преобразований многообразия X_n (или *потоком на многообразии* X_n), если отображение $g: \mathbf{R}\times X_n \to X_n$ по закону $g(t, x)=g_t(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1^0) g дифференцируемо;

2^0) $g_{t+s}=g_t \circ g_s$ для любых t и s;

3^0) g_0 — тождественный диффеоморфизм.

Покажем, что однопараметрическая группа g_t индуцирует векторное поле на многообразии X_n.

Действительно, для произвольной точки $x \in X_n$ определим отображение $f_x: \mathbf{R} \to X_n$ по закону $f_x(t) = g_t(x)$, т. е. $f_x(t)=g(t, x)$, где x фиксировано. По условию 1^0 это отображение дифференцируемо. Пусть g_t — какой-либо диффеоморфизм из группы g_t. Если $y=g_t(x)$, то в координатах этот диффеоморфизм выражается уравнениями $y^i=y^i(t; x^1, x^2, \dots, x^n)$, где правые части представляют собой функции, дифференцируемые по всем своим переменным. При этом $\frac{\partial y^i}{\partial t}$ не обращаются в нуль одновременно (в противном случае мы получили бы, что диффеоморфизм g_t не зависит от t, что противоречит условию). Значит, ранг $\left\|\frac{\partial y^i}{\partial t}\right\|=1$ и поэтому отображение f_x является некоторым C^k-погружением $\mathbf{R}$ в X_n и определяет гладкую кривую $\gamma_x \subset X_n$. При $t=0$ получим $f_x(0)=g_0(x)=x$ (см. условие 3^0), т. е. $x \in \gamma_x$.

Таким образом, все многообразие X_n оказывается покрытым семейством гладких кривых γ_x. На самом деле это покрытие является разбиением. Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить, что если $y \notin \gamma_x$, то $\gamma_y \cap \gamma_x = \varnothing$. Предположим противное: пусть $y \notin \gamma_x$ и $z \in \gamma_y \cap \gamma_x$. Тогда имеем $z \in \gamma_x \Rightarrow z=g_{t_1}(x)$, $z \in \gamma_y \Rightarrow z=g_{t_2}(y)$. Отсюда $g_{t_1}=g_{t_2}(y)$ и, следовательно,

$$y=g_{t_2}^{-1} \circ g_{t_1}(x). \tag{3}$$

В силу условия 2^0 $g_t \circ g_{-t}=g_{t+(-t)}=g_0$ — тождественный диффеоморфизм. Значит, $g_t^{-1}=g_{-t}$. Поэтому $g_{t_2}^{-1} \circ g_{t_1}=g_{-t_2} \circ g_{t_1}=g_{(-t_2)+t_1}=g_{t_1-t_2}$, Равенство (3) примет вид $y=g_{t_1-t_2}(x)$. Отсюда следует, что $y \in \gamma_x$, а это противоречит условию. Следовательно, $\gamma_y \cap \gamma_x = \emptyset$. Данное многообразие X_n оказывается покрытым семейством $\{\gamma_x\}_{x \in X_n}$ гладких кривых так, что через каждую точку $x \in X_n$ проходит в точности одна линия этого семейства. Поле X касательных векторов к линиям этого семейства и есть векторное поле, индуцированное группой g_t.

Обратно: пусть на многообразии X_n дано векторное поле X. В общем случае не существует такой однопараметрической группы преобразований g_t многообразия X_n, которая индуцировала бы данное поле X. Однако локально такая группа существует. Именно, в некоторой окрестности любой точки $x \in X_n$ существует *локальная однопараметрическая группа локальных преобразований* [16], которая в этой окрестности индуцирует данное поле X. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть на гладком многообразии X_n задано векторное поле X. Для любой точки $x \in X_n$ существуют:* а) *ее окрестность* U; б) *число* $\varepsilon > 0$; в) *единственное семейство дифференцируемых отображений* $g_t : U \to X_n$, $|t| < \varepsilon$ — *такие, что выполняются следующие три условия:*

1) *отображение* $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to X_n | g(t, x) = g_t(x)$ *дифференцируемо*;

2) *если* $|t|, |s|, |t+s| < \varepsilon$ *и* $x, g_t(x) \in U$, *то* $g_{s+t}(x) = g_s \circ g_t(x)$;

3) для $x \in U$ *вектор* $X|x$ *есть касательный вектор кривой* $\gamma_x : t \to g_t(x)$.

Доказательство см. в [16].

Пусть G — открытое подмножество на гладком многообразии X_n (в частности, $G = X_n$). Для простоты будем здесь предполагать, что X_n принадлежит классу C^∞, и будем рассматривать на множестве G векторные поля также класса C^∞. Множество всех таких полей обозначим через $D^1(G)$. Какой алгебраической структурой естественно наделить это множество?

Предварительно напомним некоторые сведения из алгебры.

1. Пусть A — кольцо, на котором определен внешний закон композиции с множеством операторов Ω, т. е. $f : \Omega \times A \to A$, (будем писать $f(\lambda, a) = \lambda a$), удовлетворяющий условиям:

а) $\forall \lambda \in \Omega,\ \forall a,\ b \in A \quad \lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$;

б) $\lambda(ab)=(\lambda a)b=a(\lambda b)$.

Тогда A называют *кольцом с операторами.*

2. Пусть M — коммутативная группа (с аддитивной записью), на которой определен внешний закон композиции $f: A \times M \to M$ (запись: $f(\alpha \cdot m)=\alpha m$), имеющий множество операторов кольцо A и удовлетворяющий условиям:

а) $\forall \alpha \in A,\ \forall x,\ y \in M \quad \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$;

б) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;

в) $\alpha(\beta(x)=(\alpha\beta)x$.

Тогда M называют *левым модулем* над кольцом A (или *левым A-модулем*). Аналогично определяется правый A-модуль (операторы из A действуют на элементы из M справа). Если кольцо A коммутативно, то понятия левого и правого A-модулей совпадают. Если кольцо A имеет единицу ε, которая служит нейтральным оператором внешнего закона (т. е. $\varepsilon x=x$), то A-модуль M называют *унитарным.*

Заметим, что *если в качестве кольца A взять поле K и построить унитарный K-модуль, то получим векторное пространство над полем K.* Таким образом, понятие модуля является обобщением понятия векторного пространства.

3. Пусть A — коммутативное кольцо с единицей, M — унитарный A-модуль. Если, кроме того, M является кольцом с операторами и множеством операторов служит A, то M называется *алгеброй над A* или *A-алгеброй* (или гиперкомплексной системой над A). В частности, $\mathbf{R}$-алгебра — это векторное пространство V над полем $\mathbf{R}$, причем в этом векторном пространстве задан *второй внутренний* закон композиции — умножение (конечно, не скалярное!) таким образом, что V становится кольцом с операторами и множеством операторов служит $\mathbf{R}$.

Обозначим через $F(G)$ множество вещественных функций класса C^∞, определенных на G. Это множество можно естественным образом наделить структурой векторного пространства над полем $\mathbf{R}$ вещественных чисел. Именно, если $f,\ g \in F(G),\ \alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$, то можно определить функцию $\alpha f+\beta g \in F(G)$ следующим образом: $\forall x \in G\ (\alpha f+\beta g)x=\alpha f(x)+\beta g(x)$. Более того, положим $(fg)(x)=f(x)\cdot g(x)$. Легко видеть, что теперь $F(G)$ становится алгеброй над полем $\mathbf{R}$ (короче, $\mathbf{R}$-алгеброй).

Выше мы обозначили через $D^1(G)$ множество всех векторных полей класса C^∞, определенных на множестве G. На этом множестве определим операцию сложения и операцию умножения на элементы кольца $F(G)$. Именно, если $X, Y \in D^1(G)$, $g, f \in F(G)$, то положим $(X+Y)(g) = X(g)+Y(g)$, $(fX)(g) = fx(g)$. Легко проверить, что теперь $D^1(G)$ становится унитарным модулем над кольцом $F(G)$.

Однако наделение множества $D^1(G)$ алгебраической структурой можно провести иначе. Ясно, что это множество есть векторное пространство над полем $\mathbf{R}$. Скобка [,] определяет в векторном пространстве $D^1(G)$ второй внутренний закон композиции — умножение. При этом $D^1(G)$ становится кольцом с операторами и множеством операторов служит $\mathbf{R}$. Таким образом, $D^1(G)$ превращается в $\mathbf{R}$-алгебру.

Алгебра, в которой умножение антикоммутативно и удовлетворяет тождеству Якоби, называется *алгеброй Ли.*

Итак, множество $D^1(G)$ становится алгеброй Ли над полем $\mathbf{R}$, если в качестве умножения взять скобку Ли.

Возьмем кокасательное расслоение $(T^*(X_n), X_n, V^*, \pi)$; пусть G — открытое подмножество в X_n (в частности, $G = X_n$).

Ковекторным полем (или *линейной дифференциальной формой,* короче: 1-формой) класса C^k, определенным на G, называется C^k-сечение кокасательного расслоения $T^*(X_n)$ над G. Если ω есть 1-форма, $x \in G$, то $\omega|_x \in \pi^{-1}(x) = T^*_x$. Поэтому если φ — карта в окрестности $U \subset G$ точки x, то $\omega = a_i dx^i$ в каждой точке $x \in U$. При этом 1-форма ω принадлежит классу C^k тогда и только тогда, когда a_i — функции класса C^k.

Обозначим через $D_1(G)$ множество всех 1-форм класса C^∞, определенных на открытом подмножестве G многообразия X_n. Если $\omega^1, \omega^2 \in D_1(G)$, то в каждой координатной окрестности $U \subset G$ имеем $\omega^1 = a_i{}^1 dx^i$, $\omega^2 = a_i{}^2 dx^i$. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Положим $\alpha\omega^1 + \beta\omega^2 = (\alpha a_1{}^i + \beta a_i{}^2) dx^i$. Этим законом на множестве G определена новая 1-форма $\alpha\omega^1 + \beta\omega^2 \in D^1(G)$ и $D^1(G)$ становится векторным пространством над $\mathbf{R}$. Однако и здесь можно поступить иначе. Если $f, g \in$

$\in F(G)$, то в каждой координатной окрестности $U \subset G$ положим $f\omega^1+g\omega^2=(fa_i^1+ga_i^2)dx^i$ при условии, что в этой окрестности $\omega^1=a_i^1dx^i$, $\omega^2=a_i^2dx^i$. Можно проверить, что множество $D_1(G)$ становится унитарным $F(G)$-модулем.

Пусть A — коммутативное кольцо с единицей и M-унитарный модуль над A. Обозначим через M^* множество всех линейных отображений модуля M в кольцо A, т. е. таких отображений $\theta: M \to A$, что $\forall a, b \in A$, $\forall x, y \in M$ $\theta(ax+by)=a\theta(x)+b\theta(y)$. В алгебре доказывается, что M^* также является унитарным A-модулем. Он называется *модулем, сопряженным* (или *дуальным*) к M.

В каждой точке $x \in G$ векторное поле $X \in D^1(G)$ определяет вектор $X_{|x} \in T_x$, а 1-форма $\omega \in D_1(G)$ определяет ковектор $\omega_{|x} \in T_x^*$.

По этому закону $F(G)$-модули $D_1(G)$ и $D^1(G)$ определяют в точке $x \in G$ векторные пространства T_x^* и T_x над полем $\mathbb{R}$. Эти векторные пространства являются сопряженными в каждой точке $x \in G$. Отсюда следует, что $F(G)$-модуль $D_1(G)$ является дуальным к $F(G)$-модулю $D^1(G)$.

Многообразие X_n называется *параллелизуемым*, если существует n линейно независимых сечений касательного расслоения $T(X_n)$, т. е. существуют такие векторные поля $X_i \in D^1(X_n)$, что для каждой точки $x \in X_n$ векторы $X_{i|x}$ образуют базис в T_x. В этом случае можно определить n линейно независимых 1-форм $\omega^j \in D_1(X_n)$ таких, что для каждой точки $x \in X_n$ ковекторы $\omega^j_{|x}$ образуют базис в T_x^*.

Проще всего выбрать формы ω^j так, чтобы базис $\omega^l_{|x}$ был дуальным к базису $X_{i|x}$:

$$\omega^j_{|x}(X_{i|x})=\delta^j_i \ \forall x \in X_n. \tag{4}$$

Если в координатной окрестности U карты φ имеем $X_i=\xi_i^k\partial_k$, $\det\|\xi_i^k\|\neq 0$, то надо взять $\omega^j=\tilde{\xi}^j_k\,dx^k$, где $\|\tilde{\xi}^j_k\|=\|\xi_i^k\|^{-1}$. Тогда мы получим в точности соотношение (4).

Замечания. 1. Можно доказать, что X_n параллелизуемо тогда и только тогда, когда касательное расслоение $T(X_n)$ тривиально.

2. Необходимым условием параллелизуемости X_n является существование на нем векторного поля без нулевых точек. В топологии известна следующая тео-

рема: *гладкое многообразие* X_n *допускает векторное поле без нулевых точек тогда и только тогда, когда эйлерова характеристика этого многообразия равна нулю:* $\chi(X_n)=0$. Это имеет место, например, если X компактно и нечетномерно ([3], с. 67). В частности, на сфере S_{2n-1} при любом n существует гладкое векторное поле без нулевых точек, так как $\chi(S_{2n-1})=0$. Но $\chi(S_{2n})=2$, поэтому на четномерной сфере (в частности, на обычной сфере $S_2\subset E_3$) такого поля не существует.

3. Милнор доказал, что единственными параллелизуемыми сферами являются S_1, S_3, S_7. На других нечетномерных сферах число линейно независимых векторных полей меньше размерности сферы. Другими авторами в 1961—1962 гг. ([24], с. 209—221) было установлено, что $M(n-1)=\rho(n)-1$. Здесь $M(n-1)$ — максимальное число линейно независимых векторных полей на сфере S_{n-1}. Число $\rho(n)$ находится следующим образом. Представим натуральное число $n\geqslant1$ в виде произведения нечетного числа и степени двойки: $n=(2a(n)+1)\cdot2^{b(n)}$; затем разделим $b(n)$ на 4: $b(n)=c(n)+4d(n)$, где $c(n)\leqslant3$. Тогда $\rho(n)=2^{c(n)}+8d(n)$.

Как следствие этой теоремы получается результат Милнора о том, что из множества сфер параллелизуемы только сферы S_1, S_3, S_7.

Эта теорема замечательна тем, что вопрос о числе $M(n-1)$ она сводит к арифметической природе числа n.

4. Числовое пространство $\mathbf{R}^n$ параллелизуемо, так как на $\mathbf{R}^n$ существует n линейно независимых векторных полей ∂_i. Следовательно, параллелизуемы евклидово пространство E_n и аффинное пространство A_n.

Используя модель проективного пространства P_n в виде связки прямых пространства E_{n+1} и учитывая, что только сферы S_1, S_3, S_7 параллелизуемы, заключаем, что из всех проективных пространств над полем $\mathbf{R}$ параллелизуемы только P_1, P_3, P_7.

5. В классической дифференциальной геометрии при изучении p-мерной поверхности V_p в A_n мы также в каждой точке $x\in V_p$ имеем векторное пространство T_x, касательное к V_p в этой точке. При этом удобно наделять T_x структурой центроаффинного или даже аффинного пространства и рассматривать T_x как p-мерную плоскость в A_n, называя ее касательной

плоскостью к поверхности V_p в точке x; ее обозначают $T_p(x)$.

Важно отметить, что касательные плоскости $T_p(x_1)$ и $T_p(x_2)$, $x_1 \neq x_2$, могут иметь общие точки, что неверно для касательных пространств к многообразию X_p (когда не существует никакого объемлющего пространства с линейной структурой).

Это замечание является существенным для геометрии многообразия X_n, так как при построении касательного расслоения как дифференцируемого $2n$-мерного многообразия важно, что $T_{x_1} \cap T_{x_2} = \varnothing$, $x_1 \neq x_2$.

§ 8. ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ. ТЕНЗОРЫ

Пусть V и W — векторные пространства над полем K; $\dim V = n$; $\dim W = m$; $(\vec{a}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — базис в V, $(\vec{b}_t)_{1 \leqslant t \leqslant m}$ — базис в W. Используя множество $V \times W = \{(\vec{x}, \vec{y}) \mid \vec{x} \in V, \vec{y} \in W\}$, построим новое векторное пространство, которое обозначим через $V \otimes W$. Именно, примем следующие определения [25].

1°. Базисом в $V \otimes W$ служит множество всех упорядоченных пар $(\vec{a}_i, \vec{b}_t)$, которые запишем в виде $\vec{a}_i \otimes \vec{b}_t = \vec{f}_{it}$.

2°. Каждому элементу $(\vec{x}, \vec{y}) \in V \otimes W$, где $\vec{x} = x^i \vec{a}_i$, $\vec{y} = y^t \vec{b}_t$ поставим в соответствие в $V \otimes W$ элемент $\vec{x} \otimes \vec{y} = x^i y^t \vec{f}_{it}$, который назовем *тензорным произведением векторов* $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

3°. Если $\vec{p}, \vec{q} \in V \otimes W$, $\alpha \in K$, $\vec{p} = p^{it} \vec{f}_{it}$, $\vec{q} = q^{it} \vec{f}_{it}$, то по определению полагаем $\vec{p} + \vec{q} = (p^{it} + q^{it}) \vec{f}_{it}$, $\alpha \vec{p} = (\alpha p^{it}) \vec{f}_{it}$.

Отсюда следует, что $V \otimes W$ — векторное пространство размерности $n \cdot m$ над полем K. Оно называется *тензорным произведением* данных *векторных пространств* V и W. Из 2° и 3° получаем следующие свойства тензорного произведения векторов: $\forall \vec{x}, \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$, $\forall \vec{y}, \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in W$, $\forall \alpha \in K$

$$\vec{x} \otimes (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \vec{x} \otimes \vec{y}_1 + \vec{x} \otimes \vec{y}_2;$$

$$(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \otimes \vec{y} = \vec{x}_1 \otimes \vec{y} + \vec{x}_2 \otimes \vec{y}; \qquad (1)$$

$$(\alpha \vec{x}) \otimes \vec{y} = \vec{x} \otimes (\alpha \vec{y}) = \alpha (\vec{x} \otimes \vec{y}).$$

Условимся в векторном пространстве $V \otimes W$ считать допустимой не всякую замену базиса $(\vec{f}_{it})$. Именно, если в векторных пространствах V и W заменим базисы: $\vec{a}_{i'} = a^i_{i'}\vec{a}_i$, $\vec{b}_{t'} = b^t_{t'}\vec{b}_t$, то в силу (1) $\vec{a}_{i'} \otimes \vec{b}_{t'} = a^i_{i'}b^t_{t'}\vec{a}_i \otimes \vec{b}_t$. Положим $f_{i't'} = \vec{a}_{i'} \otimes \vec{b}_{t'}$.

Указанной замене базисов в V и W поставим в соответствие замену базиса в $V \otimes W$ по закону

$$\vec{f}_{i't'} = a^i_{i'}b^t_{t'}\vec{f}_{it}. \qquad (2)$$

Только такую замену базиса в пространстве $V \otimes W$ (которая индуцирована заменой базисов в пространствах V и W) будем считать допустимой.

Теперь нетрудно проверить, что элемент $\vec{x} \otimes \vec{y}$ не зависит от выбора базисов в пространствах V и W (а значит, не зависит и от выбора базиса в пространстве $V \otimes W$). Пусть $\vec{x} = x^i\vec{a}_i$, $\vec{y} = y^t\vec{b}_t$ и, следовательно,

$$\vec{x} \otimes \vec{y} = x^i y^t \vec{f}_{it}. \qquad (3)$$

Заменим базисы в пространствах V и W: $\vec{a}_{i'} = a^i_{i'}\vec{a}_i$, $\vec{b}_{t'} = b^t_{t'}\vec{b}_t$; пусть $x = x^{i'}\vec{a}_{i'}$, $\vec{y} = y^{t'}\vec{b}_{t'}$. В пространстве $V \otimes W$ рассмотрим вектор $(\vec{x} \otimes \vec{y})' = x^{i'} y^{t'} \vec{f}_{i't'}$, составленный по тому же закону (3). Пользуясь формулой (2), находим $(\vec{x} \otimes \vec{y})' = (x^{i'}a^i_{i'})(y^{t'}b^t_{t'})\vec{f}_{it}$.

Но, согласно закону преобразования координат вектора при замене базиса, имеем $a^i_{i'}x^{i'} = x^i$, $b^t_{t'}y^{t'} = y^t$ и потому $(\vec{x} \otimes \vec{y})' = x^i y^t \vec{f}_{it} = \vec{x} \otimes \vec{y}$, что и требовалось установить.

Тензором над векторными пространствами V и W называется всякий вектор пространства $V \otimes W$. Это элемент вида $T = \vec{t}^{it} f_{it}$, где $t^{it} \in K$ называются *координатами тензора* T в базисе $(\vec{f}_{it})$.

После допустимой замены базиса (2) тензор T будет иметь другие координаты $t^{i't'}$. При этом

$$T = t^{i't'}\vec{f}_{i't'} = t^{i't'}a^i_{i'}b^t_{t'}\vec{f}_{it}.$$

(Но $T = t^{it}f_{it}$. Отсюда $t^{it} = a^i_{i'}b^t_{t'}t^{i't'}$ или $t^{i't'} = \tilde{a}^{i'}_i \tilde{b}^{t'}_t t^{it}$, где $\|\tilde{a}^{i'}_i\| = \|a^i_{i'}\|^{-1}$, $\|\tilde{b}^{t'}_t\| = \|b^t_{t'}\|^{-1}$. Так выражаются новые координаты $t^{i't'}$ тензора T через его старые координаты t^{it} при замене базисов в V и W.

Аналогично определяется тензорное произведение любого конечного множества векторных пространств над полем K.

Для геометрии важным является тот случай, когда каждое из пространств-сомножителей тензорного произведения совпадает с данным векторным пространством $V(\dim V=n)$ или с дуальным к нему пространством V^*, причем каждое из этих пространств предполагается отнесенным к одному и тому же базису $(\vec{e}_i)$ в V или дуальному базису $(\vec{e}^k)$ в V^*.

Рассмотрим, например, тензорное произведение $V^*\otimes V\otimes V^*$ Его базис $(\vec{e}^i\otimes\vec{e}_j\otimes\vec{e}^k)$. Вектор T этого пространства записывается в виде $T=t_{i\cdot k}^{\cdot j\cdot}\;\vec{e}^i\otimes\vec{e}_j\otimes\vec{e}^k$ и называется **тензором** валентности $3=1+2$ или тензором типа (1, 2) (один раз контравариантным и дважды ковариантным). Если в векторном пространстве V заменить базис: $\vec{e}_{i'}=c_{i'}^{i}\vec{e}_i$ (тогда дуальный базис в V^* заменится по формуле $\vec{e}^{i'}=\tilde{c}_i^{i'}\vec{e}^i$), то, как легко проверить, координаты тензора T преобразуются по закону $t_{i'\cdot k'}^{\cdot j'\cdot}=c_{i'}^{i}\tilde{c}_j^{j'}c_{k'}^{k}t_{i\cdot k}^{\cdot j\cdot}$.

Нетрудно заметить, что по такому же закону преобразуются и координаты тензора $t_{ik\cdot}^{\cdot\cdot j}$ (или тензора $t_{\cdot ik}^{j\cdot\cdot}$) — элемента векторного пространства $V^*\otimes V^*\otimes V$ (соответственно $V\otimes V^*\otimes V^*$).

Во многих вопросах (но не во всех) не представляет интереса различать эти тензоры: важно лишь число контравариантных и число ковариантных индексов. В таких случаях условимся отождествлять эти тензоры и писать координаты тензора в виде $t^j{}_{ik}$ (не отмечая точками пропущенные места). Заметим, что тензор типа (0, 1) с координатами a_i есть просто ковектор $\vec{a}=a_i\vec{e}^i$ из V^*, а тензор типа (1, 0) с координатами a^i есть вектор $\vec{a}=a^i\vec{e}_i$ из V.

Рассмотрим операции над тензорами.

I. Сложение. Пусть A и B — тензоры одного и того же типа (p, q). Это векторы в тензорном произведении p пространств V и q пространств V^*, которое обозначается через $(\overset{p}{\otimes}V)\otimes(\overset{q}{\otimes}V^*)$. Эти векторы можно сложить; получим вектор $C=A+B$. Согласно известному правилу сложения векторов, координаты тензора C (сумма тензоров A и B) равны сумме соответствующих координат данных тензоров A и B.

II. Умножение. Пусть даны тензор A типа (p, q) и тензор T типа (r, s). Значит, $A \in (\overset{p}{\otimes} V) \otimes (\overset{q}{\otimes} V^*)$, $T \in (\overset{r}{\otimes} V) \otimes (\overset{s}{\otimes} V^*)$. Пусть $a^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ — координаты тензора A, $t^{k_1 \dots k_r}_{l_1 \dots l_s}$ — координаты тензора T. Элементы $U^{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_r}_{j_1 \dots j_q l_1 \dots l_s} = a^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} t^{k_1 \dots k_r}_{l_1 \dots l_s}$ поля K являются координатами некоторого вектора $U \in (\overset{p+r}{\otimes} V) \otimes (\overset{g+s}{\otimes} V^*)$. Этот вектор U, представляющий собой тензорное произведение данных векторов A и T, является тензором типа $(p+r, q+s)$. Значит, чтобы перемножить два тензора A и T, надо каждую координату тензора A умножить на каждую координату тензора T; получим тензор $U = A \otimes T$. Таким же образом можно получить тензор $W = T \otimes A$. Тензоры U и W — векторы одного и того же векторного пространства $(\overset{p+r}{\otimes} V) \otimes (\overset{g+s}{\otimes} V^*)$. Легко заметить, что в общем случае соответствующие координаты этих векторов различны и потому $A \otimes T \neq$ $\neq T \otimes A$ (уже $\vec{x} \otimes \vec{y} \neq \vec{y} \otimes \vec{x}$).

Итак, умножение тензоров не подчиняется закону коммутативности. Однако, как нетрудно проверить, оно подчиняется закону ассоциативности $(A \otimes B) \otimes C =$ $= A \otimes (B \otimes C)$ и закону дистрибутивности $A \otimes (B +$ $+ C) = A \otimes B + A \otimes C$, $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \varnothing C$.

III. Свертывание. Возьмем тензор A типа (p, q), $p \neq 0$, $q \neq 0$, $A \in (\overset{p}{\otimes} V) \otimes (\overset{g}{\otimes} V^*)$. Из всех координат $a^{i_1 \dots i_t \dots i_p}_{j_1 \dots j_s \dots j_q}$ этого тензора отберем все те, у которых $i_t = j_s$. Элементы поля K

$a^{i_1 \dots i_{t-1} i_{t+1} \dots i_p}_{j_1 \dots j_{s-1} j_{s+1} \dots j_q} = a^{i_1 \dots i_{t-1} k i_{t+1} \dots i_p}_{j_1 \dots j_{s-1} k j_{s+1} \dots j_q}$ (сумма по k от 1 до n)

являются координатами тензора A_1 типа $(p-1, q-1)$

$$A_1 \in \left(\overset{p-1}{\otimes} V\right) \otimes \left(\overset{q-1}{\otimes} V^*\right),$$

о котором говорят, что он получен *свертыванием* тензора A по индексам i_t и j_s.

Пример. Дан тензор A типа $(1, 2)$ с координатами $a^i{}_{jk}$. Свернув его по индексам i и k, получим тензор A_1 с координатами $a_j = a^k{}_{jk}$. Проверим, что A_1 —

действительно тензор, т. е. что при замене базиса элементы a_j поля K преобразуются по тензорному закону.

При замене базиса имеем $a^{l'}_{j'k'}=\tilde{c}^{l'}_l c^j_{j'} c^k_{k'} a^l_{jk}$. Поэтому $a_{j'}=a^{k'}_{j'k'}=\tilde{c}^{k'}_i c^j_{j'} c^k_{k'} a^i_{jk}=c^j_{j'}\delta^k_i a^i_{jk}=c^j_{j'} a^k_{jk}$, т. е. $a_{j'}=c^j_{j'} a_j$, что и требовалось установить.

Если $p=q$, то операцию свертывания можно продолжить, пока не будут уничтожены все индексы. При этом получим тензор нулевой валентности, т. е. *инвариант* — некоторый элемент поля K, который, конечно, не зависит от выбора базиса в векторном пространстве V. Поэтому операция свертывания является источником получения инвариантов.

Рассмотрим частный случай, когда A — тензор типа (1, 1), причем $A=\vec{a}\otimes\vec{b}$. Координаты тензора A таковы: $a^i{}_j=a^i b_j$. Свернув тензор A по индексам i и j, получим инвариант $<\vec{a}, \vec{b}>=a^k b_k$. Этот инвариант имеет простой геометрический смысл, который заключается в следующем.

Векторное пространство V служит пространством переносов n-мерного аффинного пространства A_n над полем K. Зафиксируем точку $O\in A_n$. Тогда, как известно [2], можно отождествить пространство A_n и пространство V. Возьмем в V какой-либо базис $B=(\vec{e}_i)$ и в A_n получим репер $R=(O, \vec{e}_i)$.

Ковектору $\vec{b}\in V^*$ можно поставить в соответствие гиперплоскость П: $b_i x^i+1=0$ пространства A_n (заметим, что $0\notin П$).

Если в V заменить базис, то в A_n получим в новом репере $R'=(O, \vec{e}_{i'})$ другое уравнение:

$$b_{l'}x^{l'}+1=0. \tag{4}$$

Это уравнение в старом репере R имеет вид $c^l_{l'} b_l c^{l'}_k x^k+1=0$, т. е. $\delta^i{}_k b_i x^k+1=0$ или $b_i x^i+1=0$. Значит, уравнение (4) определяет ту же гиперплоскость П. Прямая $(O, \vec{a})$ с направляющим вектором $\vec{a}$ имеет параметрические уравнения $x^i=a^i t$. Точка A такая, что $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, имеет координаты $A(a^1, ..., a^n)$. Пусть вектор $\vec{a}$ не параллелен плоскости П; значит, $a^i b_i\neq 0$. Найдем точку $X=(O, \vec{a})\cap П$. Имеем $b_i(a^i t)+$

$+1=0$. Отсюда $t=-\frac{1}{a^l b_l}$ и координаты точки X таковы: $x^i=-\frac{1}{a^j b_j} a^i$. Поэтому $\overrightarrow{OX}=-\frac{1}{a^l b_l}\overrightarrow{OA}$ и, следовательно, $\overrightarrow{AO}=a^l b_l \overrightarrow{OX}$; значит, отношение трех точек A, X, O есть $(AX, O)=a^i b_i$. Итак,

а) $<\vec{a}, \vec{b}>=0 \Leftrightarrow a \| \Pi$;

б) если же $<a, b>\neq 0$, то $<\vec{a}, \vec{b}>=(AX, O)$.

IV. Симметрирование. Возьмем какой-либо тензор A с координатами a^{ij}_{klm}. С помощью этих координат можно определить другой тензор B, имеющий, например, координаты $b^{ij}_{klm}=a^{ij}_{lkm}$. Говорят, что тензор B получен из тензора A *подстановкой* его *индексов* k и l. В подстановке может участвовать любое число одноименных (только нижних или только верхних) индексов тензора A.

Операция симметрирования тензора A типа (p, q) состоит в следующем. Из его одноименных индексов выбираем некоторое их число s, над этими индексами производим $s!$ всевозможных подстановок и берем среднее арифметическое полученных при этом $s!$ тензоров.

Так, с помощью тензора A с координатами a_{ijk} мы можем получить новые тензоры: A_1 с координатами $a_{(ij)k}=\frac{1}{2}(a_{ijk}+a_{jik})$; A_2 с координатами $a_{(i|j|k)}=\frac{1}{2}\times$ $\times(a_{ijk}+a_{kji})$ (промежуточный индекс, не участвующий в симметрировании, ставится между вертикальными черточками), A_3 с координатами $a_{(ijk)}=\frac{1}{3!}(a_{ijk}+$ $+a_{jki}+a_{kij}+a_{jik}+a_{ikj}+a_{kji})$.

Если тензор не изменяется от симметрирования по некоторым индексам, то он называется *симметрическим* по этим индексам. Так, если тензор a_{ij} симметрический, то $a_{(ij)}=a_{ij}$, т. е. $\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji})=a_{ij}$. Последнее равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a_{ij}=a_{ji}$.

Ясно, что в результате симметрирования данного тензора по некоторым индексам получится тензор, симметрический по этим индексам. Например, $a_{(ij)k}=$

$=\frac{1}{2}(a_{ijk}+a_{jik})$, $a_{(ji)k}=\frac{1}{2}(a_{jik}+a_{ijk})$ и, значит, $a_{(ij)k}=$ $=a_{(ji)k}$.

V. Альтернирование. Возьмем поделенную на $s!$ ту же сумму $s!$ тензоров, что и в IV, но с чередующимися знаками перед слагаемыми: знак «+», если подстановка взятых индексов четная, и знак «—», если подстановка нечетная. Например, $a_{[ij]k}=$ $=\frac{1}{2}(a_{ijk}-a_{jik})$ (квадратные скобки, окружающие индексы, указывают на альтернирование по этим индексам). Заметим, что если тензор симметричен по некоторым индексам, то альтернирование по этим индексам дает нулевой тензор. Например, если $a_{[ji]}=$ $=a_{ij}$, то $a_{[ij]}=\frac{1}{2}(a_{ij}-a_{ji})=0$.

Если тензор не изменяется от альтернирования по некоторым индексам, то он называется *кососимметрическим* (или *антисимметрическим*) по этим индексам.

Например, если $a_{[ij]}=a_{ij}$, т. е. $\frac{1}{2}(a_{ij}-a_{ji})=a_{ij}$, то $a_{ij}=a_{ji}$. Легко проверить, что свойство тензора быть симметрическим или антисимметрическим по некоторым индексам не зависит от выбора базиса, следовательно, это свойство самого тензора.

Если тензор кососимметричен по некоторым индексам, то симметрирование по этим индексам дает нулевой тензор. Так, если $a_{ij}=-a_{ji}$, то $a_{(ij)}=\frac{1}{2}(a_{ij}+$ $+a_{ji})=0$.

Поливектором называется тензор типа $(p, 0)$ или $(0, q)$, кососимметричный по всем своим индексам.

Аффинором называется тензор типа $(1, 1)$. Пусть $a^i{}_j$ — координаты аффинора в каком-либо базисе $(\vec{e}_i)$ пространства V. Каждому вектору $\vec{x}=x^i\vec{e}_i$ аффинор ставит в соответствие вектор $\vec{y}=y^i\vec{e}_i$, где $y^i=a^i{}_jx^j$; короче, $\vec{y}=A\vec{x}$.

Итак, всякий аффинор определяет некоторый линейный оператор в векторном пространстве V. Верно и обратное: всякий линейный оператор в V осуществляется при помощи некоторого аффинора. В этом и состоит геометрический смысл аффинора.

§ 9. ТЕНЗОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ. ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ

Пусть X_n есть C^k-многообразие (для простоты можно взять $k=\infty$) и $x\in X_n$. Обозначим

$$T^p_{q,x}=(\overset{p}{\otimes}T_x)\otimes(\overset{q}{\otimes}T^*_x),\quad T^p_q(X_n)=\bigcup_{x\in X_n}T^p_{q,x}.$$

Множество $T^p{}_q(X_n)$ можно наделить структурой C^k-многообразия размерности $n+n^{p+q}$.

Естественная проекция π: $T^p{}_q(X_n)\to X_n$ определяется обычно: $\pi(X)=x$, если $X\in T^p_{q,x}$. Пусть V — вещественное n-мерное векторное пространство и $\Gamma^p{}_q=(\overset{p}{\otimes}V)\otimes(\overset{q}{\otimes}V^*)$. Можно показать, что четверка $(T^p{}_q(X_n),\ X_n,\ \Gamma^p{}_q,\ \pi)$ есть расслоенное пространство с пространством расслоения $T^p{}_q(X_n)$ (доказательство этого утверждения аналогично доказательству соответствующего утверждения для касательного расслоения, и мы его опускаем). Это расслоенное пространство называется *тензорным расслоением типа (p, q)*. При $p=1$, $q=0$ получим касательное расслоение $T(X_n)$, а при $p=0$, $q=1$ — кокасательное расслоение $T^*(X_n)$.

Тензорным полем типа (p, q) и класса C^k на C^k-многообразии X_n называется C^k-сечение тензорного расслоения $T^p{}_q(X_n)$.

Если T — тензорное поле типа (p, q), то $T_{|x}\in\pi^{-1}(x)=T^p_{q,x}$. Если φ — карта в окрестности точки $x\in X_n$, то относительно базиса (∂_i) пространства T_x тензор $T_{|x}$ имеет координаты $t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$. В точке x эти координаты — вещественные числа. Если же берется все тензорное поле T, то $t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ — вещественные функции. Поле T имеет класс C^k тогда и только тогда, когда эти функции принадлежат классу C^k.

Заметим, что тензорное поле T может быть определено не на всем многообразии X_n, а лишь на некотором его открытом подмножестве G. Вместо словосочетания «тензорное поле T» употребляют и такое: «поле тензора T».

§ 10. ВНЕШНИЕ ЭЛЕМЕНТЫ. ВНЕШНЯЯ АЛГЕБРА

Пусть V — векторное пространство над полем K, $\dim V=n$. *Внешним произведением* ковекторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ (т. е. элементов из V^*) называется антисимметрический тензор: $\vec{x}\wedge\vec{y}=\vec{x}\otimes\vec{y}-\vec{y}\otimes\vec{x}$. Значит, $\vec{x}\wedge\vec{y}\in V^*\otimes V^*$.

Если $(e^i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ — базис в V^*, то $\vec{e}^i\wedge\vec{e}^j=\vec{e}^i\otimes\vec{e}^j-\vec{e}^j\otimes\vec{e}^i$. Пусть $\vec{x}=x_i\vec{e}^i$, $\vec{y}=y_j\vec{e}^j$. Тогда $\vec{x}\wedge\vec{y}=x_iy_j\vec{e}^i\otimes\vec{e}^j-y_jx_i\vec{e}^j\otimes\vec{e}^i=x_iy_j\vec{e}^i\otimes\vec{e}^j-x_jy_i\vec{e}_i\otimes\vec{e}^j=(x_iy_j-x_jy_i)\vec{e}^i\otimes\vec{e}^j$. Но $(\vec{e}^i\otimes\vec{e}^j)$ — базис векторного пространства $V^*\otimes V^*$. Значит, внешнее произведение $\vec{x}\wedge\vec{y}$ (как вектор пространства $V^*\otimes V^*$) имеет в этом базисе координаты $t_{ij}=x_iy_j-x_jy_i:\vec{x}\wedge\vec{y}=t_{ij}\vec{e}^i\otimes\vec{e}^j$. Имеем

$$\vec{x}\wedge\vec{y}=\frac{1}{2}(t_{ij}\vec{e}^i\otimes\vec{e}^j+t_{ij}\vec{e}^i\otimes\vec{e}^j)=\frac{1}{2}(t_{ij}\vec{e}^i\otimes\vec{e}^j+$$

$$+t_{ji}\vec{e}^j\otimes\vec{e}^i)=\frac{1}{2}(t_{ij}\vec{e}^i\otimes\vec{e}^j-t_{ij}\vec{e}^j\otimes\vec{e}^i)=$$

$$=\frac{1}{2}t_{ij}(\vec{e}^i\otimes\vec{e}^j-\vec{e}^j\otimes\vec{e}^i)=\frac{1}{2}t_{ij}\vec{e}^i\wedge\vec{e}^j.$$

Таким образом, если использовать внешнее произведение векторов базиса в V^*, то получим

$$\vec{x}\wedge\vec{y}=\frac{1}{2}t_{ij}\vec{e}^i\wedge\vec{e}^j, \qquad (1)$$

где $t_{ij}=x_iy_j-x_jy_i=\begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix}$.

Из чисел 1, 2, ..., n возьмем какие-либо два различные: $i_0<j_0$. В сумме (1) найдутся член $\frac{1}{2}t_{i_0j_0}\vec{e}^{i_0}\wedge\vec{e}^{j_0}$ и член $\frac{1}{2}t_{j_0i_0}\vec{e}^{j_0}\wedge\vec{e}^{i_0}$. Их сумма равна

$$\frac{1}{2}t_{i_0j_0}\vec{e}^{i_0}\wedge\vec{e}^{j_0}+\frac{1}{2}(-t_{i_0j_0})(-1)\vec{e}^{i_0}\wedge\vec{e}^{j_0}=t_{i_0j_0}\vec{e}^{i_0}\wedge\vec{e}^{j_0},$$

где $i_0<j_0$. Поэтому формулу (1) можно записать так:

$$\vec{x}\wedge\vec{y}=\sum_{i<j}t_{ij}\vec{e}^i\wedge\vec{e}^j. \qquad (2)$$

Внешнее произведение p ковекторов $\underset{\to}{x}^1, \ldots, \underset{\to}{x}^p$ из V^* определяется формулой

$$\underset{\to}{x}^1 \wedge \underset{\to}{x}^2 \wedge \ldots \underset{\to}{x}^p = \sum (-1)^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p]} \underset{\to}{x}^{\alpha_1} \otimes \underset{\to}{x}^{\alpha_2} \otimes \ldots \otimes \underset{\to}{x}^{\alpha_p},$$

где $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p)$ — подстановка индексов 1, 2, ..., p и $[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p]$ — число беспорядков в этой подстановке.

Таким образом, $\underset{\to}{x}^1 \wedge \ldots \wedge \underset{\to}{x}^p$ есть *антисимметрический ковариантный тензор валентности* p (короче, ковариантный p-вектор), это определенный элемент тензорного произведения $\overset{p}{\otimes} V^*$.

Если $(\underset{\to}{e}^i)$ — базис в V^* и $\underset{\to}{x}^\alpha = x^\alpha{}_i \underset{\to}{e}^i$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, p;$ $i = 1, 2, \ldots, n)$, то

$$\underset{\to}{x}^1 \wedge \ldots \wedge \underset{\to}{x}^p = \sum (-1)^{[\alpha_1\ldots\alpha_p]} x^{\alpha_1}_{i_1} \ldots x^{\alpha_p}_{i_p} \underset{\to}{e}^{i_1} \otimes \underset{\to}{e}^{i_2} \otimes \ldots \otimes \underset{\to}{e}^{i_p}.$$

Обозначим через

$$t_{i_1i_2\ldots i_p} = \begin{vmatrix} x^1_{i_1} x^1_{i_2} \ldots x^1_{i_p} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x^p_{i_1} x^p_{i_2} \ldots x^p_{i_p} \end{vmatrix}$$

определитель из координат с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_p$ данных ковекторов $\underset{\to}{x}^1, \ldots, \underset{\to}{x}^p$. Тогда

$$\underset{\to}{x}^1 \wedge \ldots \wedge \underset{\to}{x}_p = t_{i_1i_2\ldots i_p} \underset{\to}{e}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \underset{\to}{e}^{i_p}.$$

Значит, $t_{i_1i_2\ldots i_p}$ — координаты внешнего произведения $\underset{\to}{x}^1 \wedge \ldots \wedge \underset{\to}{x}^p$ как вектора из $\overset{p}{\otimes} V^*$ относительно базиса $(\underset{\to}{e}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \underset{\to}{e}^{i_p})$ этого векторного пространства.

Введем внешнее произведение векторов базиса $(\underset{\to}{e}^i)$ в V^*:

$$\underset{\to}{e}^{i_1} \wedge \underset{\to}{e}^{i_2} \wedge \ldots \wedge \underset{\to}{e}^{i_p} = \sum (-1)^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p]} \underset{\to}{e}^{i_{\alpha_1}} \otimes \underset{\to}{e}^{i_{\alpha_2}} \otimes \ldots \otimes \underset{\to}{e}^{i_{\alpha_p}}.$$

Тогда получим формулы, аналогичные формулам (1) и (2):

$$\underset{\to}{x}^1 \wedge \underset{\to}{x}^2 \wedge \ldots \wedge \underset{\to}{x}^p = \frac{1}{p!} t_{i_1\ldots i_p} \underset{\to}{e}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \underset{\to}{e}^{i_p}, \tag{3}$$

$$\underset{\to}{x}^1 \wedge \underset{\to}{x}^2 \wedge \ldots \wedge \underset{\to}{x}^p = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} t_{i_1i_2\ldots i_p} \underset{\to}{e}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \underset{\to}{e}^{i_p}. \tag{4}$$

Вообще всякий ковариантный антисимметрический тензор A валентности p, т. е. тензор $A = a_{i_1 \dots i_p} \underset{\to}{e}^{i} \otimes \dots \otimes \underset{\to}{e}^{i_p}$, можно записать в виде

$$A = \frac{1}{p!} a_{i_1 \dots i_p} \underset{\to}{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \underset{\to}{e}^{i_p}$$

или в виде

$$A = \sum_{i_1 < \dots < i_p} a_{i_1 \dots i_p} \underset{\to}{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \underset{\to}{e}^{i_p}. \tag{5}$$

Заметим, что всякий такой тензор A (т. е. ковариантный p-вектор) определяется значениями своих C^p_n координат, у которых $i_1 < i_2 < \dots < i_p$. Эти координаты называются *существенными* (остальные координаты этого тензора выражаются через существенные координаты либо равны нулю).

Ковариантный p-вектор вида $\underset{\to}{x}^1 \wedge \dots \wedge \underset{\to}{x}^p$, $\underset{\to}{x}^\alpha \in V^*$ называется *разложимым*. Из формулы (5) следует, что всякий ковариантный p-вектор A есть сумма разложимых p-векторов.

Из сказанного выше следует, что внешнее умножение обладает следующими свойствами:

1^0. $\underset{\to}{x} \wedge \underset{\to}{y} = -\underset{\to}{y} \wedge \underset{\to}{x}$ (антикоммутативность; отсюда $\underset{\to}{x} \wedge \underset{\to}{x} = 0$).

2^0. $\left.\begin{aligned} &\underset{\to}{x} \wedge (\underset{\to}{y} + \underset{\to}{z}) = \underset{\to}{x} \wedge \underset{\to}{y} + \underset{\to}{x} \wedge \underset{\to}{z} \\ &(\underset{\to}{x} + \underset{\to}{y}) \wedge \underset{\to}{z} = \underset{\to}{x} \wedge \underset{\to}{z} + \underset{\to}{y} \wedge \underset{\to}{z} \end{aligned}\right\}$ (дистрибутивность).

3^0. $(\alpha \underset{\to}{x}) \wedge \underset{\to}{y} = \underset{\to}{x} \wedge (\alpha \underset{\to}{y}) = \alpha (\underset{\to}{x} \wedge \underset{\to}{y})$, $\alpha \in K$.

4^0. $\underset{\to}{x}^1 \wedge \underset{\to}{x}^2 \wedge \dots \wedge \underset{\to}{x}^p = 0 \Leftrightarrow (\underset{\to}{x}^1, \underset{\to}{x}_2, \dots, \underset{\to}{x}^p$ линейно зависимы).

В самом деле, $\underset{\to}{x}^1 \wedge \underset{\to}{x}^2 \wedge \dots \wedge \underset{\to}{x}^p = 0$ (нулевой вектор из $\overset{p}{\otimes} V^*$) тогда и только тогда, когда равны нулю все его координаты $t_{i_1 i_2 \dots i_p}$, т. е. равны нулю все миноры порядка p матрицы $\|x^\alpha{}_i\|$ из координат ковекторов $\underset{\to}{x}^1, \dots, \underset{\to}{x}^p$. Это и означает, что ковекторы $\underset{\to}{x}^1, \dots, \underset{\to}{x}^p$ линейно зависимы.

Обозначим через $\overset{p}{\wedge} V^*$ множество всех ковариантных p-векторов. Ясно, что $\overset{p}{\wedge} V^* \subset \overset{p}{\otimes} V^*$. Если $A, B \in$

$\in\overset{p}{\bigwedge}V^*$, то и $A+B$ — ковариантный антисимметрический тензор валентности p и, значит, $A+B\in\overset{p}{\bigwedge}V^*$. Далее, $(A\in\overset{p}{\bigwedge}V^*,\ \alpha\in K)\Rightarrow\alpha A\in\overset{p}{\bigwedge}V^*$. Таким образом, *подмножество* $\overset{p}{\bigwedge}V^*$ *векторного пространства* $\overset{p}{\otimes}V^*$ *является подпространством в* $\overset{p}{\otimes}V^*$.

Векторное пространство $\overset{p}{\bigwedge}V^*$ называется p-й *внешней степенью векторного пространства* V^*; его элементы называются *внешними элементами степени* p.

Базис пространства $\overset{p}{\bigwedge}V^*$ образован внешними произведениями $\vec{e}^{i_1}\wedge\vec{e}^{i_2}\wedge\ldots\wedge\vec{e}^{i_p}$, где индексы $i_1, i_2, \ldots, i_p$ пробегают значения от 1 до n так, что $i_1<i_2<\ldots<i_p$. Отсюда следует, что $\dim\overset{p}{\bigwedge}V^*=C^p_n$ (число сочетаний из n элементов по p).

Рассмотрим p-вектор $A\in\overset{p}{\bigwedge}V^*$ и q-вектор $B\in\overset{p}{\bigwedge}V^*$, где $p+q\leqslant n=\dim V^*$. Пусть

$$A=\frac{1}{p!}a_{i_1i_2\ldots i_p}\vec{e}^{i_1}\wedge\vec{e}^{i_2}\wedge\ldots\wedge\vec{e}^{i_p},$$

$$B=\frac{1}{q!}b_{j_1j_2\ldots j_q}\vec{e}^{j_1}\wedge\vec{e}^{j_2}\wedge\ldots\vec{e}^{j_q}.$$

Внешним произведением поливекторов A и B называется $(p+q)$-вектор

$$A\wedge B=\frac{1}{p!}\,\frac{1}{q!}a_{i_1\ldots i_p}b_{j_1\ldots i_q}\vec{e}^{i_1}\wedge\ldots\wedge\vec{e}^{i_p}\wedge\vec{e}^{j_1}\wedge\ldots$$

$$\ldots\wedge\vec{e}^{j_q}\in\overset{p+q}{\bigwedge}V^*.$$

Это определение распространяется и на случай $p=0$ или $q=0$, если условиться считать, что $\alpha\wedge B=\alpha B$ и $A\wedge\alpha=\alpha A$, где $\alpha\in K$. В случае $p=1$, $q=1$ внешнее произведение ковекторов $\vec{x}=x_i\vec{e}^i$ и $\vec{y}=y_j\vec{e}^j$ есть бивектор $\vec{x}\wedge\vec{y}$, рассмотренный выше.

Из определения $A\wedge B$ получаем такие следствия:

1. $(\alpha A)\wedge B = A\wedge(\alpha B) = \alpha(A\wedge B)$ — скалярный множитель можно выносить за знак внешнего произведения.

2. $A\wedge(B_1+B_2)=A\wedge B_1+A\wedge B_2$, (дистрибутивность). $(A_1+A_2)\wedge B=A_1\wedge B+A_2\wedge B$

3. Если A есть p-вектор, B есть q-вектор, то $A\wedge B=(-1)^{pq}B\wedge A$.

4. Для любых p-вектора A, q-вектора B и r-вектора C имеем $(A\wedge B)\wedge C=A\wedge(B\wedge C)$ (ассоциативность). Поэтому здесь скобки можно опустить и писать $A\wedge B\wedge C$.

Обозначим через $\wedge V^*$ прямую сумму векторных пространств $\overset{p}{\wedge} V^*$ для всех $p\geqslant 0$ (надо брать лишь $p\leqslant n$, так как всякий p-вектор при $p>n$ является нулевым и, значит, соответствующее векторное пространство $\overset{p}{\wedge} V^*$ состоит из одного нулевого вектора). Таким образом, $\wedge V^*$ есть прямая сумма $n+1$ векторных пространств $\overset{0}{\wedge} V^*=K$, $\overset{1}{\wedge} V^*$, ..., $\overset{n}{\wedge} V^*$, $n=\dim V^*$. Каждый элемент $z\in\wedge V^*$ однозначно представим в виде $z=\sum\limits_{p=0}^{n} z_p$, где $z_p\in\overset{p}{\wedge} V^*$.

Так как $\wedge V^*$ есть прямая сумма пространств $\overset{p}{\wedge} V^*$, $p=0, 1, ..., n$, то $\dim(\wedge V^*)=\sum\limits_{p=0}^{n}\dim(\overset{p}{\wedge} V^*)=$ $=\sum\limits_{p=0}^{n} C_n^p=2^n$ (как сумма биномиальных коэффициентов). Для любых двух элементов $z=\sum\limits_{p=0}^{n}\times$ $\times z_p$, $z'=\sum\limits_{q=0}^{n} z'_q$ из $\wedge V^*$ положим $z\wedge z'=\sum\limits_{p,q}(z_p\wedge z'_q)$.

Таким образом, на векторном пространстве $\wedge V^*$ определено умножение. Можно проверить, что теперь $\wedge V^*$ есть алгебра над K. Она называется *внешней алгеброй* (или *алгеброй Грассмана*) *векторного пространства* V^*. Каждый элемент из V^* есть линейная форма, определенная на векторном пространстве V. Каждый элемент из $\overset{p}{\wedge} V^*$ (т. е. каждый ковариантный p-вектор или, иначе говоря, каждый внешний элемент степени p) называют *внешней формой степени* p на векторном пространстве V.

Пусть φ^k — r линейно независимых линейных форм, т. е. r линейно независимых ковекторов из V^*

(удобнее в дальнейшем писать φ^k, а $\underset{\to}{\varphi}^k$), а ψ_k — другие r элементов из V^* таких, что

$$\psi_k \wedge \varphi^k = 0 \text{ (сумма по } k=1, 2, \ldots, r). \tag{6}$$

Лемма Картана. *Равенство* (6) *имеет место тогда и только тогда, когда формы* ψ_l *являются линейными комбинациями форм* φ^k, т. е. $\psi_l = c_{lk} \cdot \varphi^k$, *с симметрической матрицей коэффициентов:* $c_{lk} = c_{kl}$.

□ Включим формы φ^k в какой-либо базис ($\varphi^1, \ldots, \varphi^r, \varphi^{r+1}, \ldots, \varphi^n$) пространства V^*. Тогда $\psi_l = c_{l\alpha}\varphi^\alpha$ (сумма по $\alpha = 1, 2, \ldots, n$). Равенство (1) примет вид

$$c_{k\alpha}\varphi^\alpha \wedge \varphi^k = 0. \tag{7}$$

Значит, внешняя квадратичная форма, стоящая слева, является нулевой. Эта форма есть элемент векторного пространства $\overset{2}{\wedge} V^*$, и этот элемент — нулевой вектор. Следовательно, в любом базисе пространства $\overset{2}{\wedge} V^*$ все координаты этого вектора равны нулю. Базис образован элементами $\varphi^\alpha \vee \varphi^\beta$, где $\alpha < \beta$. Равенство (7) можно записать так:

$$c_{kl}\varphi^l \wedge \varphi^k + c_{ka}\varphi^a \wedge \varphi^k = 0 \; (k, l = 1, 2, \ldots, r; \; a = r+1, \ldots, n)$$

или

$$\sum_{l<k} (c_{kl} - c_{lk})\, \varphi^l \wedge \varphi^k - c_{ka}\varphi^k \wedge \varphi^a = 0.$$

Теперь данная 2-форма разложена по элементам базиса в $\overset{2}{\wedge} V^*$, и так как форма — нулевая, то $c_{kl} - c_{lk} = 0$, $c_{ka} = 0$. Значит,

$$\psi_k = c_{kl}\varphi^l, \quad c_{kl} = c_{lk}. \tag{8}$$

Обратно: пусть условие (8) выполнено. Тогда

$$\psi_k \wedge \varphi^k = c_{kl}\varphi^l \wedge \varphi^k = \sum_{l<k} (c_{kl} - c_{lk})\, \varphi^l \wedge \varphi^k = 0. \quad \blacksquare$$

§ 11. ВНЕШНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Пусть X_n есть C^k-многообразие, $x \in X_n$, и p — целое число такое, что $0 \leqslant p \leqslant n$. Рассмотрим $\overset{p}{\wedge} T^*_x$, т. е. p-ю внешнюю степень векторного пространства T^*_x. Пусть φ — карта, определенная в окрестности U точки x, и

$\varphi(x)=(x^1, \ldots, x^n)$. Тогда $(\partial_i)_x$ — базис в T_x и $(dx^i)_x$ — сопряженный ему базис в T^*_x. Значит, базис векторного пространства $\overset{p}{\wedge}T^*_x$ образован элементами $(dx^{i_1})_x \wedge (dx^{i_2})_x \wedge \ldots \wedge (dx^{i_p})_x$, $i_1<i_2<\ldots<i_p$. Положим $\overset{p}{\wedge}T^*(X_n)= \bigcup\limits_{x\in X_n} \overset{p}{\wedge} T^*_x$.

Можно доказать, что множество $\overset{p}{\wedge}T^*(X_n)$ наделено естественным образом структурой C^{k-1}-многообразия размерности $n+C^p_n$ [15]. Это многообразие называется *расслоением p-форм на* X_n. Естественная проекция π: $\overset{p}{\wedge}T^*(X_n)\to X_n$ определяется так: $\pi(\Omega)=x$, если $\Omega\in\overset{p}{\wedge}T^*_x$.

Пусть V — векторное n-мерное пространство над полем $\mathbf{R}$ вещественных чисел. Можно показать, что четверка

$$\left(\overset{p}{\wedge} T^*(X_n),\ X_n,\ \overset{p}{\wedge} V^*,\ \pi\right)$$

есть расслоенное пространство с пространством расслоения $\overset{p}{\wedge}T^*(X_n)$, базой X_n, типовым слоем $\overset{p}{\wedge}V^*$ и проекцией π.

Дифференциальной формой степени p (или *p-формой*) и класса C^r на C^k-многообразии X_n называется C^r-сечение расслоения $\overset{p}{\wedge}T^*(X_n)$. Если $X_n\in C^k$, то $r\leqslant k-1$ ([15], с. 72). Если Ω — p-форма, то $\Omega_{|x} \in \pi^{-1}(x)=\overset{p}{\wedge}T^*_x$ и, значит,

$$\Omega_{|x}=a_{i_1\ldots i_p}(dx^{i_1})_x\wedge\ldots\wedge(dx^{i_p})_x,\quad i_1<\ldots<i_p.$$

В точке $x\in X_n$ коэффициенты $a_{i_1 i_2\ldots i_p}\in \mathbf{R}$. Если же берется дифференциальная форма Ω, то $a_{i_1\ldots i_p}$ — вещественные функции: $\Omega=a_{i_1\ldots i_p}(x)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}$, где $dx^{i_k}=(dx^{i_k})_x$. При этом $\Omega\in C^r \Leftrightarrow$ (все $a_{i_1\ldots i_p}(x)\in C^r$). Заметим, что p-форма Ω может быть определена не на всем многообразии X_n, а лишь на некотором его открытом подмножестве G.

Как было установлено выше, $\Omega_{|x}$ есть ковариантный p-вектор. Поэтому задание p-формы Ω на множестве G означает задание на этом множестве поля ковариантного p-вектора. Значит, дифференциальная форма на G есть частный случай тензорного поля на этом множестве G. Всякую 1-форму называют также *формой Пфаффа* на X_n (или на G). Пусть $X_n \in C^\infty$ и G открыто в X_n. Обозначим через $A^p(G)$ множество всех p-форм (класса C^∞) на G. Можно проверить, что $A^p(G)$ есть $F(G)$-модуль. Положим $A^0(G)=F(G)$ и обозначим $A(G)=\sum\limits_{p=0}^{\infty} A^p(G)$ прямую сумму $F(G)$-модулей $A^p(G)$. Элементы модуля $A(G)$ называются *внешними дифференциальными формами на множестве* G (без указания степени). Они состоят из слагаемых, которые являются p-формами, причем число слагаемых, отличных от нуля, конечно.

Пусть $\theta,\ \omega \in A(G)$. Каждая из этих форм однозначно представима в виде

$$\theta=\sum_{p=0}^{\infty} z_p,\quad \omega=\sum_{q=0}^{\infty} z'_q,\quad z_p \in A^p(G),\quad z'_q \in A^q(G).$$

Положим $\theta\wedge\omega=\sum\limits_{p,q} z_p\wedge z'_q$. Этим на $F(G)$-модуле $A(G)$ определено умножение. Оно превращает $A(G)$ в ассоциативную алгебру над кольцом $F(G)$. Эта алгебра называется *внешней алгеброй* (или *алгеброй Грассмана) над множеством* G (в частности, над X_n при $G=X_n$).

§ 12. ВНЕШНЕЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Пусть на множестве G, открытом в X_n, задана p-форма:

$$\omega=a_{i_1 i_2\ldots i_p}dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}.$$

Внешним дифференциалом этой формы называется $(p+1)$-форма:

$$D\omega=da_{i_1\ldots i_p}\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}$$

(иногда вместо $D\omega$ пишут $d\omega$).

Нетрудно проверить, что формы $D\omega$ не зависят от выбора координат x^k на множестве G.

Из этого определения вытекает ряд следствий.

Следствие 1. *Внешний дифференциал от полного дифференциала функции равен нулю.*

□ Имеем

$$D(df)=D\left(\frac{\partial f}{\partial x^k}\,dx^k\right)=d\,\frac{\partial f}{\partial x^k}\wedge dx^k=\frac{\partial^2 f}{\partial x^k\partial x^l}dx^l\wedge dx^k=$$

$$=\sum_{l<k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^k\partial x^l}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^l\partial x^k}\right)dx^l\wedge dx^k=0. \blacksquare$$

Следствие 2. *Если* $\omega=a_{i_1\ldots i_p}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}$ — p-*форма*, $\theta=b_{j_1\ldots j_q}dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q}$ — q-*форма, то*

$$D(\omega\wedge\theta)=(D\omega)\wedge\theta+(-1)^p\,\omega\wedge D\theta. \qquad (1)$$

□ Имеем

$$\omega\wedge\theta=a_{i_1\ldots i_p}b_{j_1\ldots j_q}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q}.$$

Значит,

$$D(\omega\wedge\theta)=(b_{j_1\ldots j_q}da_{i_1\ldots i_p}+a_{i_1\ldots i_p}db_{j_1\ldots j_q})\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots$$

$$\ldots dx^{i_p}\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q}=b_{j_1\ldots j_q}da_{i_1\ldots i_p}\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots$$

$$\ldots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q}+a_{i_1\ldots i_p}db_{j_1\ldots j_q}\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots$$

$$\ldots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q}=(da_{i_1\ldots i_p}\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p})\wedge$$

$$\wedge(b_{j_1\ldots j_q}dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q})+a_{i_1\ldots i_p}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}(-1)^p\wedge$$

$$\wedge db_{j_1\ldots j_q}\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q}=(D\omega)\wedge\theta+(-1)^p\,\omega\wedge D\theta. \blacksquare$$

Следствие 3. *Если* $a\in F(G)$ (говорят, что a — дифференциальная форма степени $p=0$), то

$$D(a\theta)=da\wedge\theta+aD\theta$$

(эта формула получается из (1) при $p=0$).

Следствие 4. *Пусть* $\omega=df^1\wedge df^2\wedge\ldots\wedge df^p$, *где* $f^k\in F(G)$. *Тогда* $\omega=(df^1\wedge df^2\wedge\ldots\wedge df^{p-1})\wedge df^p$. Применяя формулу (1) и учитывая, что $D(df^k)=0$ (согласно следствию 1), получим $D\omega=D(df^1\wedge df^2\wedge\ldots\wedge df^{p-1})\wedge df^p$. Повторяя эти рассуждения, найдем

$$D\omega=D(df^1\wedge df^2\wedge\ldots\wedge df^{p-2})\wedge df^{p-1}\wedge df^p=\ldots$$

$$\ldots=D(df^1)\wedge df^2\wedge\ldots\wedge df^p=0.$$

Следствие 5. $D(\omega_1+\omega_2)=D\omega_1+D\omega_2$ (это очевидно).

Следствие 6 (теорема Пуанкаре). *Внешний дифференциал от внешнего дифференциала равен нулю.*

□ Пусть $\omega = a_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$. Тогда

$$D\omega = d_{a_{i_1 \dots i_p}} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

Учитывая следствия 4 и 5, находим $D(D\omega) = 0$. ■

Внешняя дифференциальная форма ω называется *замкнутой*, если $D\omega = 0$. Форма ω называется *точной*, если существует форма θ такая, что $\omega = D\theta$.

В силу теоремы Пуанкаре всякая точная дифференциальная форма является замкнутой. Обратное неверно: 1-форма $\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ замкнута на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, но не является точной.

Однако локально обратное утверждение справедливо: если ω — замкнутая форма, определенная в координатной окрестности U, то на окрестности U существует форма θ такая, что $\omega = D\theta$ [12]. Тот факт, что это обратное утверждение справедливо только локально, а не на всем многообразии в целом, имеет важное значение в топологии дифференцируемых многообразий. Теперь нетрудно ответить на вопрос, когда 1-форма ω является полным дифференциалом. Если $\omega = df$, то $D\omega = 0$. Обратно: пусть $\omega = a_i dx^i$ и $D\omega = 0$, т. е. $da_i \wedge dx^i = 0$ или $\frac{\partial a_i}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i = 0$. Отсюда

$$\sum_{k<l} \left(\frac{\partial a_l}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k}{\partial x^l} \right) dx^k \wedge dx^l = 0,$$

и так как подобные члены приведены, то $\frac{\partial a_l}{\partial x^k} = \frac{\partial a_k}{\partial x^l}$.

Как известно из анализа, в этом случае в некоторой окрестности U точки x существует функция $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ такая, что $a^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ и, значит, $\omega = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$. Следовательно, $\omega = Df$ в U.

Пусть X_n и Y_k — многообразия класса C^∞ и $f: X_n \to Y_k$ есть C^∞-отображение. Пусть ω — некоторая p-форма на Y_k. Тогда на X_n определена p-форма $\omega^* = f^*(\omega)$ следующим образом. Предположим, что U и

V — открытые множества в X_n и Y_k, в которых введены соответственно системы координат $\varphi|\varphi(x) = (x^1, ..., x^n)$; $\psi|\psi(y) = (y^1, ..., y^k)$. Отображение f имеет на U следующее выражение в координатах (предполагаем, что $f(U) \subset V$) $: y^j = y^j(x^1, ..., x^n)$, $j = 1, 2, ..., k$. Если форма ω имеет на множестве U выражение

$$\omega = a_{i_1 \dots i_p}(y^1, \dots, y^k)\, dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_p}, \tag{2}$$

то

$$\omega^* = \bar{a}_{i_1 \dots i_p}(x^1, \dots, x^n)\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

где

$$\bar{a}_{i_1 \dots i_p}(x^l) = a_{j_1 \dots j_p}(y^1(x^l), \dots, y^k(x^l)) \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial y^{j_p}}{\partial x^{i_p}}. \tag{3}$$

Следовательно, форма ω^* получается из формы ω, если в ω подставить $y^j = y^j(x^1, x^2, ..., x^n)$ и $dy^j = \dfrac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i$. Из формул (2), (3) заключаем, что отображение f^*-форм на Y_k в формы на X_n действует по закону $f^*(\omega) = \omega \circ df$. Непосредственным вычислением можно убедиться, что $f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = (f^*(\omega_1)) \wedge (f^*(\omega_2))$, $D(f^* \times \times (\omega)) = f^*(D\omega)$. Поэтому можно сказать, что отображение f^* является гомоморфизмом внешней алгебры $A(Y_k)$ во внешнюю алгебру $A(X_n)$, причем этот гомоморфизм коммутирует с оператором внешнего дифференцирования.

§ 13. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И КОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА МНОГООБРАЗИИ

В каждой точке $x \in X_n$ существует касательное векторное пространство T_x (его обозначают также $T_x(X_n)$). Зададим натуральное число p такое, что $1 \leqslant \leqslant p \leqslant n-1$; пусть $T_p(x)$ — p-мерное подпространство в T_x, а $T_p = \{T_p(x) \,|\, x \in X_n\}$ — множество, элементами которого служат всевозможные $T_p(x)$ из T_x для всех $x \in X_n$.

Назовем *р-мерным распределением* (или *дифференциальной системой размерности р*) на многообразии X отображение $\Delta_p : X_n \to T_p$ такое, что $\Delta_p(x) = T_p(x) \subset \subset T(x)$, т. е. $\Delta_p(x)$ — определенное векторное подпространство касательного векторного пространства T_x [4; 12]. Говорят, что распределение Δ_p принадлежит классу C^k в точке $x \in X_n$, если в некоторой окрестности U точки x существуют векторные поля $X_1, \ldots, X_p$ класса C^k такие, что в любой точке $x_0 \in U$ векторы $X_{1|x_0}, \ldots, X_{p|x_0}$ порождают подпространство $\Delta_p(x_0)$ (и, значит, образуют базис этого подпространства). Мы будем рассматривать распределения класса C^∞.

В каждой точке $x \in X_n$ существует касательное пространство $T_x{}^*$ ковекторов. Зададим натуральное число q такое, что $1 \leqslant q \leqslant n-1$; пусть $T_q{}^*(x)$ — q-мерное подпространство в $T_x{}^*$ и $T_q{}^* = \{T_q{}^*(x) \mid x \in X_n\}$ — множество, элементами которого являются всевозможные $T_q{}^*(x)$ для всех $x \in X_n$.

Назовем *q-мерным короспределением* (или *системой Пфаффа ранга q*) на многообразии X_n отображение $\theta_q : X_n \to T_q{}^*$ такое, что $\theta_q(x) = T_q{}^*(x) \subset T_x{}^*$. Говорят, что кораспределение θ_q принадлежит классу C^k в точке $x \in X_n$, если в некоторой окрестности U точки x существуют 1-формы $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^q$ класса C^k, порождающие θ_q в каждой точке $x_0 \in U$ (следовательно, θ^j линейно независимы).

Пусть $\theta^j = a_i^j dx^i$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, q)$. В каждой точке $x \in X_n$ существует $(n-q)$-мерное векторное подпространство $T_{n-q}(x) \subset T_x$ такое, что $\forall A \in T_{n-q}(x)$ $\theta^j(X) = 0$. Этим на многообразии X_n определено распределение Δ_{n-q} такое, что $\forall x \in X_n : \Delta_{n-q}(x) = T_{n-q}(x)$. Говорят, что распределение Δ_{n-q} *ассоциировано с кораспределением* θ_q [4].

Обратно: пусть на гладком многообразии X_n задано распределение Δ_p. В каждой точке $x \in X_n$ существует p-мерное векторное подпространство $\Delta_p(x) \subset T_x$. Подпространство $\Delta_p(x)$ можно рассматривать как пересечение $n-p$ различных $(n-1)$-мерных векторных подпространств H_a $(a = p+1, \ldots, n)$.

В самом деле, возьмем какой-либо базис $B = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p, \vec{e}_{p+1}, \ldots, \vec{e}_n)$ в пространстве T_x такой, что $e_t \in \Delta_p(x)$, $t = 1, 2, \ldots, p$. Обозначим через H_a подпространство в T_x, порожденное векторами $B \setminus \{\vec{e}_a\}$ для фиксированного a. Ясно, что H_a различны и $\Delta_p(x) = \bigcap H_a$. Пусть $\theta = (\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^n)$ — корепер в $T_x{}^*$, взаимный реперу B в T_x. Тогда $\theta^i(\vec{e}_j) = \delta_j{}^i$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Следовательно, $\theta^a(\vec{e}_j) = 0$ для всех $j \neq a$. Поэтому уравнение $\theta^a = 0$ (a фиксировано) определяет подпространство H_a, содержащее $\Delta_p(x)$.

Таким образом, заданное распределение Δ_p является ассоциированным с построенным $(n-p)$-мерным кораспределением $\theta_{n-p}=\{\theta^{p+1}, \ldots, \theta^n\}$. Систему 1-форм θ^a называют *ассоциированной с распределением* Δ_p.

Здесь важно отметить следующее. Если векторные поля X_t $(s, t=1, 2, \ldots, p)$ порождают распределение Δ_p и функции $f_t{}^s\in F(X_n)$ таковы, что $\forall x\in X_n$ $\det\|f_t{}^s\|\neq 0$, то векторные поля $\overline{X}_t=f_t{}^s\vec{X}_s$, очевидно, порождают то же распределение Δ_p.

Точно так же: если 1-формы θ^a порождают $(n-p)$-мерное кораспределение θ_{n-p} и функции $h_a{}^b\in F(X_n)$ таковы, что $\forall x\in X_n:\det\|h_a{}^b\|\neq 0$, то 1-формы $\theta^b=h_a{}^b\theta^a$ определяют то же кораспределение θ_{n-p}.

Это обстоятельство будем учитывать в дальнейшем.

Возьмем в точке $x\in X_n$ репер $R^x=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и взаимный ему корепер $\theta_x=\{\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^n\}$. Следовательно, $\theta^i(v_j)=\delta_j{}^i$. Возьмем вектор $\xi\in T_x$. Имеем $\xi=\xi^i v_i$ и, значит,

$$\theta^i(\xi)=\theta^i(\xi^j v_j)=\xi^j\theta^i(v_j)=\xi^j\delta_j^i=\xi^i.$$

Итак, $\xi^i=\theta^i(\xi)$, поэтому $\xi=\theta^i(\xi)v_i$. Следовательно, сами 1-формы θ^i являются координатами вектора во взаимном репере R^x: для любого $\xi\in T_x$ можно найти такие значения форм θ^i, что $\xi^i=\theta^i$ (надо взять $\theta^i=\theta^i(\xi)$). В частности, для любого $\xi\in T_x$, $\xi=\widehat{\xi}^i\partial_i$ можно найти такие значения форм dx^i, что $\widehat{\xi}^i=dx^i$.

Возьмем функцию $f\in F(X_n)$ и произвольный вектор $v\in T_x$, $v=v^i\partial_i$. Дифференциал df функции f есть линейная форма, определенная формулой $Vv\in T_x:(df)\times\times(v)=v(f)$. Находим $f(v)=v^i\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ и, выбирая $dx^i=v^i$, получим $v(f)=\dfrac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$ — это дифференциал функции f, как он определяется в анализе.

Если на многообразии X_n имеем $f=\mathrm{const}$, то $df=0$ $\left(\text{так как } \dfrac{\partial f}{\partial x^i}=0\right)$. Мы приходим к такому выводу: если на многообразии X_n функция f — постоянная, то ее дифференциал df является 1-формой, которая в каждой точке $x\in X_n$ аннулируется любым вектором $v\in T_x:(df)(v)=0$. Верно и обратное: если $f\in F(X_n)$ и $\forall v\in T_x$, $\forall x\in X_n$ $(df)(v)=0$, то $f=\mathrm{const}$ на X_n (это известно из анализа).

Пусть на гладком многообразии X_n задано распределение Δ_p. Подмногообразие V_p в X_n называется *интегральным многообразием* распределения Δ_p, если $\forall x \in V_p \; \Delta_p(x) = T_x(V_p)$.

Распределение Δ_p называется *интегрируемым* (или *вполне интегрируемым*), если для каждой точки $x \in X_n$ существует p-мерное интегральное многообразие, проходящее через точку x.

Кораспределение θ_{n-p} называется *вполне интегрируемым,* если вполне интегрируемо ассоциированное с ним распределение Δ_p. Если при этом кораспределение θ_{n-p} задано системой линейно независимых форм Пфаффа θ^a, то говорят, что система форм θ^a *вполне интегрируема.*

Пусть распределение Δ_p, заданное на X_n, вполне интегрируемо. Тогда через каждую точку $x \in X_n$ проходит интегральное многообразие V_p этого распределения.

Точка x, как точка многообразия X_n, имеет карту φ в некоторой координатной окрестности U на X_n:

$$\varphi : U \to \mathbf{R}^n, \quad \varphi(x) \doteq (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbf{R}^n. \tag{1}$$

Точка x, как точка подмногообразия V_p, имеет карту ψ в некоторой координатной окрестности V на V_p:

$$\psi : V \to \mathbf{R}^p, \quad \psi(x) = (t^1, \ldots, t^p) \in \mathbf{R}^p.$$

Отсюда $x = \psi^{-1}(t^1, \ldots, t^p)$ и, значит, в силу (1) $(x^1, \ldots, x^n) = \varphi_0 \psi^{-1}(t^1, \ldots, t^p)$. Поэтому

$$x^i = x^i(t^1, t^2, \ldots, t^p), \tag{2}$$

причем эти функции дифференцируемы, так как X_n — гладкое многообразие, а V_p — его гладкое подмногообразие.

Пусть $f \in F(X_n)$ и $f_1 = f_{|V_p}$. Тогда $\frac{\partial f_1}{\partial t^k} = \frac{\partial f_1}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t^k}$, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial t^k} = \frac{\partial x^i}{\partial t^k} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \; k = 1, 2, \ldots p). \tag{3}$$

Но $\left(\frac{\partial}{\partial t^k}\right)$ — естественный репер в пространстве $T_x(V_p)$, а $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ — естественный репер в пространстве $T_x(X_n)$. Так как векторы каждого из этих реперов линейно независимы, то из (3) заключаем, что $\forall x \in V_p$ ранг $\left\| \frac{\partial x^i}{\partial t^k} \right\|$ равен p.

Координаты x^i точки x всегда можно занумеровать так, что $\det \left\| \frac{\partial x^t}{\partial t^k} \right\| \neq 0$ $(k, t=1, ..., p)$. Разрешая первые p уравнений системы (2) относительно t^k (что можно сделать лишь локально), найдем $t^k = t^k(x^1, ..., x^p)$. Подставляя эти выражения в остальные $n-p$ уравнений системы (1), получим

$$x^\alpha = x^\alpha (x^1, ..., x^p) \quad (\alpha = p+1, ..., n). \tag{4}$$

Уравнения (4) определяют многообразие V_p в некоторой окрестности $U^* \subset U$ точки x на X_n, т. е. определяют $V_p \cap U^*$.

Это имеет место для одного интегрального многообразия V_p данного распределения Δ_p. Так как Δ_p вполне интегрируемо, то через каждую точку $x \in U^*$ должно проходить p-мерное интегральное многообразие этого распределения и это многообразие в окрестности U^* можно задать системой уравнений вида (4). Следовательно, указанное семейство интегральных многообразий должно существенно зависеть от $n-p$ произвольных постоянных и определяется в окрестности U^* системой вида

$$x^\alpha = x^\alpha (x^1, ..., x^p;\ c^{p+1}, ..., c^n). \tag{5}$$

Мы предполагаем, что x^α дифференцируемы по x^t и по c^β. Выражение «существенно зависит» означает, что ранг $\left\| \frac{\partial x^\alpha}{\partial c^\beta} \right\|$ есть $n-p$ (равен числу произвольных постоянных).

Разрешая уравнения (5) относительно c^α, получим

$$y^\alpha (x^1, ..., x^n) = c^\alpha. \tag{6}$$

Если задать произвольную точку $x_0(x_0^i) \in U^*$, то, подставив ее координаты в (6), определим значения $c^\alpha = y^\alpha(x_0^1, ..., x_0^n)$ и, значит, $y^\alpha(x^1, ..., x^n) = y^\alpha(x_0^1, ..., x_0^n)$ есть то интегральное многообразие, которое проходит через точку x_0. Заметим, что функции y^α, входящие в левые части уравнений (6), не могут быть связаны никакой функциональной зависимостью, т. е. не существует такой дифференцируемой функции $\Phi(u^{p+1}, \ldots, u^n) \not\equiv 0$, что $\Phi(y^{p+1}, \ldots, y^n) \equiv 0$. В противном случае мы получили бы, что $\Phi(c^{p+1}, \ldots, c^n) = 0$, и отсюда одно c^α можно было бы выразить через остальные. Следовательно, в уравнениях (5) число постоянных можно было бы уменьшить, а это означало бы, что не все эти постоянные существенны вопреки предположению.

Так как функции y^α не связаны функционально, то их дифференциалы dy^α — линейно независимые 1-формы в любой точке $x \in X_n$. На каждом интегральном многообразии V_p распределения Δ_p функции $y^\alpha = \mathrm{const}$. Поэтому, согласно сказанному выше, 1-формы dy^α аннулируются любым вектором $v \in T_x(V_p)$. Итак, $n-p$ линейно независимых форм Пфаффа dy^α задают кораспределение $\theta_{n-p} = \{\theta^\alpha\}$, с которым ассоциировано вполне интегрируемое распределение Δ_p. Функции $y^\alpha(x^1, \ldots, x^n)$ в (6) называются *первыми интегралами* вполне интегрируемой системы Пфаффа $\theta^\alpha = 0$, а вся система равенств (6) называется *общим интегралом* этой системы Пфаффа.

Если то же распределение Δ_p ассоциировано с кораспределением θ_{n-p}, заданным 1-формами θ^β, то должна существовать невырожденная матрица $\|h_\alpha^\beta\|$, $h_\alpha^\beta \in F(X_n)$, такая, что

$$\theta^\beta = h_\alpha^\beta dy^\alpha. \tag{7}$$

Обратно: если имеют место равенства (7), где $\forall x \in X_n \det\|h_\alpha^\beta\| \neq 0$, то с системой Пфаффа θ^β ассоциировано то же распределение Δ_p, что и с системой dy^α. Ясно, что последняя система вполне интегрируема. Значит, вполне интегрируема и система θ^β.

Таким образом, система Пфаффа θ^β вполне интегрируема тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in X_n$ существует такая окрестность U и такие функции h_α^β, $y^\alpha \in F(U)$, что $\forall x \in U \det\|h_\alpha^\beta\| \neq 0$, и $\theta^\beta = h_\alpha^\beta dy^\alpha$.

§ 14. ТЕОРЕМА ФРОБЕНИУСА

Пусть на гладком многообразии X_n кораспределение θ_{n-p} (система Пфаффа) задано линейно независимыми 1-формами θ^α $(\alpha, \beta, \gamma = p+1, \ldots, n)$.

Теорема 1 (теорема Фробениуса). *Кораспределение θ_{n-p} вполне интегрируемо тогда и только тог-*

да, когда существуют 1-*формы* θ_β^α *такие, что*

$$D\theta^\alpha = \theta^\beta \wedge \theta^\alpha_\beta. \qquad (1)$$

□ Пусть система форм Пфаффа θ^α вполне интегрируема. Тогда для каждой точки $x \in X_n$ существует такая ее окрестность U и такие функции h_α^β, что $\forall x \in U$ $\det \|h_\alpha^\beta\| \neq 0$ и

$$\theta^\alpha = h^\alpha_\beta dy^\beta. \qquad (2)$$

Значит, $D\theta^\alpha = dh^\alpha_\beta \wedge dy^\beta$. Из равенства (2) находим $dy^\beta = \tilde{h}^\beta_\gamma \theta^\gamma$ и поэтому $D\theta^\alpha = dh^\alpha_\beta \wedge \tilde{h}^\beta_\gamma \theta^\gamma = \theta^\gamma \wedge (-\tilde{h}^\beta_\gamma dh^\alpha_\beta)$; $D\theta^\alpha = \theta^\gamma \wedge \theta^\alpha_\gamma$, где $\theta^\alpha_\gamma = -\tilde{h}^\beta_\gamma dh^\alpha_\beta$. Необходимость доказана.

Докажем теперь достаточность. Пусть дана система уравнений Пфаффа

$$\theta^\alpha = 0, \qquad (3)$$

где $\theta^\alpha = a_i^\alpha dx^i$ ($\alpha = p+1, \ldots, n$; $i = 1, \ldots, n$). Эти уравнения линейно независимы в окрестности U точки $x \in X_n$. Если в системе (3) $n-p = n-1$ (т. е. $p = 1$), то найдем отношения между dx^i:

$$\frac{dx^1}{\varphi^1} = \ldots \frac{dx^n}{\varphi^n}, \text{ где } \varphi^i = \varphi^i(x^1, \ldots, x^n).$$

Это так называемая нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Считая, что в U функции φ^i непрерывны и имеют непрерывные частные производные по всем аргументам $x^1, x^2, \ldots, x^n$, как известно из теории дифференциальных уравнений, получим общий интеграл этой системы в виде

$$y^h(x^1, \ldots, x^n) = c^h \quad (h = 2, 3, \ldots, n),$$

т. е. систему $n-1$ независимых первых интегралов ($c^h = \mathrm{const}$). Следовательно, через каждую точку $x_0 \in U$ проходит (и единственное) интегральное многообразие (интегральная кривая) системы (3). Итак, при $n-p = n-1$ система (3) вполне интегрируема.

Далее применим индукцию. Предположим, что теорема уже доказана для $p = k-1$ ($k > 1$). Рассмотрим систему (3), удовлетворяющую условиям (1) и такую, что $p = k$, и положим $x^n = x_0^n$, $dx^n = 0$, где $x_0(x_0^1, \ldots, x_0^n) \in U$. Тогда система (3) является системой $n-k$ уравнений Пфаффа с $n-1$ переменными; для нее $p' =$

$=(n-1)-(n-k)=k-1$ и, значит, по предположению индукции, эта система вполне интегрируема. Она имеет $n-k$ различных первых интегралов $y^\alpha(x^1, ..., x^{n-1})=$ $=\mathrm{const}$ $(\alpha, \beta=1, 2, ..., n-k)$. Без ограничения общности можно считать, что в окрестности U имеем $\det\left\|\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}\right\|\neq 0$. Поэтому уравнения $y^\alpha=y^\alpha(x^1, ..., x^{n-1})$ можно разрешить относительно x^α:

$$x^\alpha=x^\alpha(y^1,\ldots, y^{n-k};\quad x^{n-k+1},\ldots, x^{n-1}).$$

Подставив эти выражения x^α в первоначальную систему (3), получим систему

$$\bar{\theta}^\alpha=0, \tag{4}$$

которая при $x^n=x_0^n$, $dx^n=0$ эквивалентна системе $dy^\alpha=0$ (по построению).

Значит, система (3), как и система (4), эквивалентна следующей:

$$\tilde{\theta}=dy^\alpha+z^\alpha dx^n=0, \tag{5}$$

где

$$z^\alpha=z^\alpha(y^1,\ldots, y^{n-k};\quad x^{n-k+1},\ldots, x^n).$$

Система (5) удовлетворяет уравнениям (1) (по условию), т. е. $D\tilde{\theta}^\alpha=\tilde{\theta}^\beta\wedge\tilde{\theta}^\alpha{}_\beta$ (где $\tilde{\theta}^\alpha{}_\beta$ — некоторые линейные формы). Из (4) находим

$$D\tilde{\theta}^\alpha=dz^\alpha\wedge dx^n=\frac{\partial z^\alpha}{\partial y^\beta}dy^\beta\wedge dx^n+$$

$$+\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^t}dx^t\wedge dx^n\quad (t=\overline{n-k+1,\ n-1}).$$

Так как из системы (4) следует, что $dy^\beta=\tilde{\theta}^\beta-z^\beta dx^n$, то получим

$$D\tilde{\theta}^\alpha=\tilde{\theta}^\beta\wedge\frac{dz^\alpha}{\partial y^\beta}dx^n+\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^t}dx^t\wedge dx^n=\tilde{\theta}^\beta\wedge\tilde{\theta}^\alpha_\beta,$$

(в силу равенств (1), которые по условию выполняются). Далее, так как формы $\tilde{\theta}^\beta$ и dx^t независимы, то последнее равенство возможно только при $\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^t}=0$ $(t=$ $=n-k+1, ..., n-1)$. Значит, $z^\alpha=z^\alpha(y^1, ..., y^{n-k}, x^n)$. Поэтому (5) — нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных y^α и x^n. Ее общий интеграл имеет вид

$$u^\alpha(y^1, \ldots, y^{n-k}, x^n) = c^\alpha = \text{const} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-k).$$

Следовательно, система (3) эквивалентна системе $du^\alpha = 0$, т. е. вполне интегрируема, и теорема доказана. ■

Замечание 1. Сравнивая уравнения (1) и (3), заключаем, что теорему Фробениуса можно иначе сформулировать так: *для того чтобы система уравнений Пфаффа* (3) *была вполне интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы равенство нулю внешних дифференциалов* $D\theta^\alpha = 0$ *было алгебраическим следствием самой системы* (3).

Замечание 2. Рассмотрим систему линейно независимых уравнений Пфаффа $\theta^\alpha = 0$, т. е. $a_i^\alpha(x^1, \ldots, x^n)dx^i = 0$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n-p)$.

По условию, ранг $\|a_i^\alpha\| = n-p$ в некоторой окрестности U точки $x \in X_n$. Пусть для определенности $\det\|a_\beta^\alpha\| \neq 0$. Обозначим $x^\alpha = z^\alpha$, $x^{n-p+1} = u^1, \ldots, x^n = u^p$. Данная система примет вид

$$a_\beta^\alpha(z^1, \ldots, z^{n-p};\ u^1, \ldots, u^p)dz^\beta + a_t^\alpha(z^1, \ldots, z^{n-p};\ u^1, \ldots$$
$$\ldots, u^p)\, du^t = 0.$$

Отсюда $dz^\beta + a_t^\alpha \tilde{a}_\alpha^\beta du^t = 0$ или

$$dz^\beta = \psi_t^\beta du^t, \tag{6}$$

где

$$\psi_t^\beta = -a_t^\alpha \tilde{a}_\alpha^\beta = \psi_t^\beta(z^1, \ldots, z^{n-p};\ u^1, \ldots u^p).$$

На p-мерном интегральном многообразии V_p переменные z^β являются функциями независимых переменных $u_t : z^\beta = z^\beta\ (u^1, u^2, \ldots, u_p)$ и, значит, систему (6) можно записать в виде $\frac{\partial z^\beta}{\partial u^t} du^t = \psi_t^\beta du^t$. Так как дифференциалы du^t независимы, то

$$\frac{\partial z^\beta}{\partial u^t} = \psi_t^\beta(z^1, \ldots, z^{n-p};\ u^1, \ldots, u^p). \tag{7}$$

Обратно: систему вида (7) можно привести к виду (6) и, значит, к виду $\theta^\alpha = 0$. Таким образом, система $n-p$ линейно независимых уравнений Пфаффа от n переменных, имеющая вид $\theta^\alpha = 0$, эквивалентна системе уравнений в частных производных (7).

Найдем условие полной интегрируемости системы уравнений (7), т. е. полной интегрируемости эквивалентной ей системы уравнений Пфаффа:

$$-dz^\alpha + \psi_t^\alpha du^t = 0. \tag{8}$$

Надо потребовать, чтобы равенства $D(-dz^\alpha + \psi_t^\alpha du^t) = 0$, т. е. $d\psi_t^\alpha \wedge du^t = 0$, были алгебраическим следствием системы (8) или, что то же самое, системы (7). Имеем

$$\left(\frac{\partial\psi_t^\alpha}{\partial z^\beta} dz^\beta + \frac{\partial\psi_t^\alpha}{\partial u^s} du^s\right) \wedge du^t = 0,$$

или

$$\left(\frac{\partial\psi_t^\alpha}{\partial z^\beta} \psi_s^\beta + \frac{\partial\psi_t^\alpha}{\partial u^s}\right) du^s \wedge du^t = 0,$$

откуда

$$\sum_{s<t}\left(\frac{\partial\psi_t^\alpha}{\partial z^\beta} \psi_s^\beta + \frac{\partial\psi_t^\alpha}{\partial u^s} - \frac{\partial\psi_s^\alpha}{\partial z^\beta} \psi_t^\beta - \frac{\partial\psi_s^\alpha}{\partial u^t}\right) du^s \wedge du^t = 0.$$

Значит,

$$\frac{\partial\psi_s^\alpha}{\partial z^\beta} \psi_t^\beta + \frac{\partial\psi_s^\alpha}{\partial u^t} = \frac{\partial\psi_t^\alpha}{\partial z^\beta} \psi_s^\beta + \frac{\partial\psi_t^\alpha}{\partial u^s}. \tag{9}$$

Если эти условия выполняются тождественно, то система (7) вполне интегрируема.

Замечание 3. Можно дать еще одну формулировку теоремы Фробениуса. Пусть X_n — гладкое многообразие и на открытом множестве $G \subset X_n$ задано p-мерное распределение Δ_p и векторное поле X (гладкое). Говорят, что векторное поле X принадлежит распределению Δ_p, и пишут $X \in \Delta_p$, если $\forall x \in G\ X_{|x} \in \Delta_p(x)$.

Распределение Δ_p называется *инволютивным*, если для любых гладких векторных полей X, Y, принадлежащих Δ_p, их скобка принадлежит Δ_p: $(X, Y \in \Delta_p) \Rightarrow [X, Y] \in \Delta_p$.

Пусть X_s $(s, t, k = 1, 2, \ldots, p)$ — гладкие векторные поля, заданные на G и такие, что в каждой точке $x \in G$ векторы $X_{s|x}$ образуют базис в $\Delta_p(x)$. Значит, все $X_s \in \Delta_p$.

Если распределение Δ_p инволютивно, то требование инволютивности выполняется и для полей X_s: $[X_s,$

$X_t]\in\Delta_p$, т. е. $[X_s, X_t]=c^k{}_{st}X_k$, где $c^k{}_{st}$ — гладкие функции на G. Пусть X, Y — любые два гладких векторных поля на G, принадлежащие распределению Δ_p. Тогда если $X_s=\xi_s{}^i\partial_i$, $X=\lambda^sX_s$, $Y=\mu^sX_s$, то $X=\lambda^s\xi_s{}^i\partial_i$, $Y=$ $=\mu^s\xi_s{}^i\partial_i$ и, значит,

$$[X, Y]=\{\lambda^s\xi_s^l\partial_l(\mu^t\xi_t^j)-\mu^s\xi_s^l\partial_l(\lambda^t\xi_t^j)\}\partial_j=$$

$$=\{\lambda^s\xi_s^l\xi_t^j\partial_l\mu^t+\lambda^s\xi_s^l\mu^t\partial_l\xi_t^j-\mu^s\xi_s^l\xi_t^j\partial_l\lambda^t-\mu^s\xi_s^l\lambda^t\partial_l\xi_t^j\}\partial_j=$$

$$=\lambda^s\mu^t(\xi_s^l\partial_l\xi_t^j-\xi_t^l\partial_l\xi_s^j)\partial_j+(\lambda^s\xi_s^l\partial_l\mu^t-\mu^s\xi_s^l\partial_l\lambda^t)\xi_t^j\partial_j=$$

$$=\lambda^s\mu^t[X_s, X_t]+h^tX(t).$$

Получим

$$[X, Y]=\lambda^s\mu^tc_{st}^kX_k+h^tX_t=(\lambda^s\mu^tc_{st}^k+h^k)X_k\in\Delta_p.$$

Следовательно, чтобы распределение Δ_p было инволютивным, необходимо и достаточно, чтобы для каких-либо p линейно независимых гладких векторных полей X_s, принадлежащих Δ_p, выполнялось условие $[X_s, X_t]\in$ $\in\Delta_p$ $(s, t=1, 2, ..., p)$.

Теорема 2. *Для того чтобы распределение Δ_p было инволютивным, необходимо и достаточно, чтобы оно было вполне интегрируемым* (это еще одна формулировка теоремы Фробениуса).

□ Пусть на открытом множестве $G\subset X_n$ задано гладкое распределение Δ_p. Если $x\in G$, то в некоторой окрестности точки это распределение можно задать системой $n-p$ линейно независимых уравнений Пфаффа $\theta^\alpha=0$, где $\theta^\alpha=a_i{}^\alpha dx^i$, которую можно заменить эквивалентной системой

$$dx^\alpha-\psi_t^\alpha dx^t=0, \tag{10}$$

где $s, t, k=1, 2, ..., p$; $\alpha, \beta, \gamma=p+1, ..., n$.

Вектор (dx^i) принадлежит Δ_p, если его координаты dx^i удовлетворяют системе (10). Значит, векторные поля $X_s=(\delta_s{}^t, \psi_s{}^\alpha)\in\Delta_p$; они являются гладкими (функции $\psi_t{}^\alpha$ предполагаются гладкими) и линейно независимыми. Если $X_s=\xi_s{}^i\partial_i$, то распределение Δ_p инволютивно тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\xi_s^l\frac{\partial\xi_t^j}{\partial x^l}-\xi_t^l\frac{\partial\xi_s^j}{\partial x^l}=c_{st}^k\xi_k^j.$$

Учитывая выражение координат X_s, получим

$$\delta_s^k \frac{\partial \xi_t^j}{\partial x^k} + \psi_s^\beta \frac{\partial \xi_t^j}{\partial x^\beta} - \delta_t^k \frac{\partial \xi_s^j}{\partial x^k} - \psi_t^\beta \frac{\partial \xi_s^j}{\partial x^\beta} = c_{st}^k \xi_k^j \quad (j = 1, \ldots, n),$$

или

$$\frac{\partial \xi_t^j}{\partial x^s} + \frac{\partial \xi_t^j}{\partial x^\beta} \psi_s^\beta - \frac{\partial \xi_s^j}{\partial x^t} - \frac{\partial \xi_s^j}{\partial x^\beta} \psi_t^\beta = c_{st}^k \xi_k^j. \tag{11}$$

Если здесь взять $j = l \leqslant p$, то получим $0 = c^k{}_{st} \delta^l{}_k$. Значит, все $c^l{}_{st} = 0$. Поэтому система (11) примет вид

$$\frac{\partial \psi_t^\alpha}{\partial x^s} + \frac{\partial \psi_t^\alpha}{\partial x^\beta} \psi_s^\beta = \frac{\partial \psi_s^\alpha}{\partial x^t} + \frac{\partial \psi_s^\alpha}{\partial x^\beta} \psi_t^\beta, \tag{12}$$

что в точности совпадает с системой (9), полученной выше.

Итак, распределение Δ_p является инволютивным тогда и только тогда, когда в каждой точке $x \in G$ выполняются равенства (12), т. е. когда ассоциированная система 1-форм θ^α вполне интегрируема. ■

§ 15. УРАВНЕНИЯ СТРУКТУРЫ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

В евклидовом пространстве E_n зададим ортонормированный репер $R_0 = (0, \vec{I}_1, \ldots, \vec{I}_n)$ («начальный» репер). Всякий другой репер $R^x = (x, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ определяется радиусом-вектором своего начала $x : \vec{x} = x^i \vec{I}_i$ и координатными векторами $\vec{e}_i = \xi_i{}^k \vec{I}_k$.

Если потребовать, чтобы репер R^x был ортонормированным, то векторы $\vec{e}_i$ должны удовлетворять условию

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \tag{1}$$

(δ_{ij} — символ Кронекера). Следовательно, матрица $\|\xi_i{}^k\|$ должна быть ортогональной. Поэтому n^2 элементов $\xi_i{}^k$ этой матрицы должны удовлетворять $n + C^2{}_n = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ уравнениям (1). Значит, независимыми останутся $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ элементов $\xi_i{}^k$. Вместе с n переменными x^i они составят $r = n +$

$+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$ параметров, от которых зависит ортонормированный репер R^x в E_n.

Но задание упорядоченной пары реперов (R_0, R^x) однозначно определяет движение $f|f(R_0)=R^x$ [2]. Поэтому можно сказать, что группа движений пространства E_n зависит от $r=\frac{n(n+1)}{2}$ параметров. Каждая система значений этих r параметров определяет свой ортонормированный репер R_x и, значит, соответствующее движение f пространства E_n.

Обозначим через u^a $(a=1, 2, ..., r)$ те значения рассматриваемых параметров, для которых получен репер $R^x=(x, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$.

Придадим этим параметрам бесконечно малые приращения du^a, т. е. рассмотрим новые значения u^a+du^a указанных параметров. Эти новые значения параметров определят новый ортонормированный репер $R^{x'}(x', \vec{e}_1{}', ..., \vec{e}'_n)$, где $\vec{x}'=\vec{x}+\Delta\vec{x}$, $\vec{e}_i{}'=\vec{e}_i+\Delta\vec{e}_i$. Обозначим через $d\vec{x}$ и $d\vec{e}_i$ главные части бесконечно малых приращений $\Delta\vec{x}$ и $\Delta\vec{e}_i$ соответственно. Векторы $d\vec{x}$ и $d\vec{e}_i$ можно разложить по координатным векторам репера R^x:

$$d\vec{x}=\omega_l\vec{e}_l;\ d\vec{e}_l=\omega_l^j\vec{e}_j\quad (i,\ j,\ k=1,..., n). \tag{2}$$

Здесь ω^i, $\omega_i{}^j$ представляют собой 1-формы, которые (как будет показано ниже) линейно выражаются через дифференциалы du^a параметров u^a.

Эти 1-формы ω^i, $\omega_i{}^j$ называются *компонентами движений репера* R^x ([26], с. 137). Их нельзя брать произвольно.

Прежде всего надо учесть, что мы имеем семейство ортонормированных реперов R^x. Следовательно, соотношения (1) должны выполняться тождественно (при любых значениях u^a из допустимой области описываемой точкой (u^a)). Поэтому указанные соотношения можно дифференцировать. Находим $(d\vec{e}_i)\vec{e}_j+$ $+\vec{e}_i\cdot(d\vec{e}_j)=0$ и, используя уравнения (2), получим

$$\omega_i^k\vec{e}_k\cdot\vec{e}_j+\omega_j^k\vec{e}_k\cdot\vec{e}_i=0 \text{ или } \omega_i^k\delta_{kj}+\omega_j^k\delta_{ki}=0.$$

Отсюда $\omega_i{}^j+\omega_j{}^i=0$, т. е. $(n\times n)$-матрица $\omega=(\omega_i{}^j)$ должна быть кососимметричной. В частности, все элементы главной диагонали этой матрицы равны нулю: $\omega_i^i=0$ ($i=1, 2, \ldots, n$).

Однако существуют и другие условия, которым должны удовлетворять компоненты движений репера R^x,— это так называемые *уравнения структуры пространства* E_n. Чтобы получить их, запишем систему (2) (используя репер R_0) в виде

$$d(x^k\vec{I}_k)=\omega^i\xi_i^k\vec{I}_k,\quad d(\xi_i^k\vec{I}_k)=\omega_i^j\xi_j^k\vec{I}_k.$$

Следовательно, система (2) эквивалентна такой системе:

$$dx^k=\omega^i\xi_i^k;\quad d\xi_i^k=\omega_i^j\xi_j^k. \tag{3}$$

Отсюда

$$\omega^i=\tilde{\xi}_k^i dx^k,\quad \omega_i^j=\tilde{\xi}_k^j d\xi_i^k. \tag{4}$$

Так выражаются формы ω^i, ω_i^j через координаты начала x, координаты векторов $\vec{e}_i$ репера R^x и дифференциалы этих координат. Так как $\xi_i^k\tilde{\xi}_k^j=\delta_i^j$, то

$$(d\xi_i^k)\tilde{\xi}_k^j+\xi_i^k d\tilde{\xi}_k^j=0. \tag{5}$$

Далее, находим

$$D\omega^i=d\tilde{\xi}_k^i\wedge dx^k. \tag{6}$$

Из (3) и (4) получим $\omega_i^j=-\xi_i^k d\tilde{\xi}_k^j$. Отсюда

$$d\tilde{\xi}_k^i=-\tilde{\xi}_k^t\omega_t^i. \tag{7}$$

Теперь равенство (6) примет вид

$$D\omega^i=-\tilde{\xi}_k^t\omega_t^i\wedge dx^k,$$

или

$$D\omega^i=\tilde{\xi}_k^j dx^k\wedge\omega_j^i.$$

Используя первое из уравнений (4), получим

$$D\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j^i. \tag{8}$$

Из равенства (8) по теореме Фробениуса заключаем, что система форм ω^i вполне интегрируема.

Из второго уравнения системы (4) находим $D\omega_i^j=d\tilde{\xi}_k^j\wedge d\xi_i^k$, откуда, используя (7), имеем $D\omega_i^j=-\tilde{\xi}_k^t\omega_t^j\wedge d\xi_i^k=\tilde{\xi}_k^t d\xi_i^k\wedge\omega_t^j$. С учетом второго из уравнений (4) получим

$$D\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \qquad (9)$$

Отсюда по теореме Фробениуса следует, что система форм ω_i^j вполне интегрируема.

Итак, мы получили уравнения

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i; \quad D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i; \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0$$

$$(i,\ j,\ k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (10)$$

которые и называются *уравнениями структруы евклидова пространства* E_n. В силу уравнений (10) система (3), или, что то же самое, система (2) (это та же система (3), записанная в векторной форме), вполне интегрируема. В этой системе неизвестными являются x^k и ξ_i^k, т. е. векторы $\vec{x}$, $\vec{e}_i$, которые и определяют репер R^x. Покажем, что если выбрать начальные условия так, чтобы соответствующий репер $(R^x)_0$ был ортонормированным, то эти начальные условия определят такое решение $\vec{x}$, $\vec{e}_i$, для которого репер R^x также будет ортонормированным.

Прежде всего заметим, что компоненты ω^i, ω_i^j не зависят от выбора неподвижного репера R_0 (они зависят только от положения репера $R^{x'}$ относительно репера R^x).

В самом деле, если от репера $R_0(0, \vec{I}_k)$ перейти к реперу $R_0' = (O', \vec{I}_k)$ (перенос начала), то $\overrightarrow{O'x} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{Ox}$ и, дифференцируя, получим $d\overrightarrow{O'x} = d\overrightarrow{Ox} (= \omega^i \vec{e}_i)$. Если же от репера $R_0 = (O, \vec{I}_k)$ перейти к реперу $R'_0 = (O, \vec{I'}_k)$ (замена координатных векторов), то координаты каждого вектора, конечно, меняются, но сами векторы $\vec{x}$, $\vec{e}_i$ останутся неизменными. Значит, в уравнениях (2) ни один из векторов $d\vec{x}$, $\vec{e}_i$, $d\vec{e}_i$ не изменится при замене неподвижного репера R_0, а потому останутся неизменными и компоненты ω^i, ω_i^j.

Пусть начальные условия для системы уравнений (2) выбраны так, что соответствующий репер $R^{x_0} = (x_0, (\vec{e}_i)_0)$ — ортонормированный.

Рассмотрим «бесконечно близкий» репер $R^x = (x, \vec{e}_i)$, где $\vec{x} = \vec{x}_0 + d\vec{x}$; $\vec{e}_i = (\vec{e}_i)_0 + \omega_i^j \cdot (\vec{e}_j)_0$. Находим

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = [(\vec{e}_i)_0 + \omega_i^k (\vec{e}_k)_0] \cdot [(\vec{e}_j)_0 + \omega_j^t (\vec{e}_t)_0] =$$

$$=(\vec{e}_i)_0(\vec{e}_j)_0+\omega_i^k(\vec{e}_k)_0\cdot(\vec{e}_j)_0+\omega_j^t(\vec{e}_t)_0\cdot(\vec{e}_i)_0+$$
$$+\omega_i^k\omega_j^t(\vec{e}_k)_0\cdot(\vec{e}_t)_0.$$

Так как репер R^{x_0} — ортонормированный, то $(\vec{e}_g)_0\times\times(\vec{e}_h)_0=\delta_{gh}$ и поэтому

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij}+\omega_i^k\delta_{kj}+\omega_j^t\delta_{ti}+\omega_i^k\omega_j^t\delta_{kt}=\delta_{ij}+\omega_i^j+$$
$$+\omega_j^i+\sum_k\omega_i^k\omega_j^k.$$

В силу уравнений структуры имеем $\omega_i^j+\omega_j^i=0$, и так как мы учитываем (при интегрировании) лишь бесконечно малые первого порядка, то $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij}$. Следовательно, репер R^x — ортонормированный.

Применяя такую же процедуру к R^x (принимая репер R^x за начальный репер R^{x_0}), найдем, что всякий соседний репер $R^{x'}$ является ортонормированным, и т. д. Значит, все семейство реперов (R^x), образованное решениями системы (2), состоит из ортонормированных реперов.

Замечание. Как отмечено выше, система 1-форм ω^i вполне интегрируема. Первое уравнение системы (4) показывает, что первыми интегралами системы уравнений $\omega^i=0$ являются x^k, т. е. координаты точки x — вершины репера R^x. Если мы положим

$$x^k=x^k(t',\ldots,t^p)\qquad(11)$$

(где правые части — дифференцируемые функции в некоторой области $\Omega\subset\mathbf{R}^p$, причем ранг $\left\|\frac{\partial x^k}{\partial t^s}\right\|$ равен p в Ω) и подставим это выражение в первое из уравнений (3), то получим, что 1-формы ω^i зависят только от p независимых дифференциалов dt^s. После интегрирования системы (3) получим семейство реперов $\{R^x\}$, вершины которых заполняют p-поверхность (11).

Обратно: если в системе уравнений (3) формы ω^i зависят только от p независимых дифференциалов и выполняются уравнения (10), то эта система при задании репера $(R^x)_0$ определит семейство реперов $\{R^x\}$, вершины которых заполняют некоторую p-поверхность (здесь везде рассмотрение локальное). Система (2) будет определять не только эту поверхность, но также и все те, которые получаются из нее с помощью произвольных движений, т. е. все ей конгруэнтные поверхности [26].

§ 16. УРАВНЕНИЯ СТРУКТУРЫ АФФИННОГО И ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВ

В аффинном пространстве A_n зададим аффинный репер $R_0=(O, \vec{a}_1, ..., \vec{a}_n)$ («начальный» репер). Всякий другой аффинный репер $R^x=(x, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ определяется радиусом-вектором $\vec{Ox}=\vec{x}=x^i\vec{a}_i$ и координатными векторами $\vec{e}_i=\xi_i^k\vec{a}_k$. Значит, репер R^x в A_n зависит от $r=n+n^2=n(n+1)$ параметров x^i, ξ_i^k.

Задание упорядоченной пары реперов (R_0, R^x) однозначно определяет аффинное преобразование $f|f(R_0)=R^x$ [2]. Таким образом, группа аффинных преобразований пространства A_n зависит от $r=n(n+1)$ параметров.

Обозначим через u^a $(a=1, ..., r)$ те значения этих параметров, для которых получен репер $R^x=(x, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$.

Придадим параметрам u^a бесконечно малые приращения du^a, перейдя к новым значениям u^a+du^a этих параметров. Эти новые значения параметров определят новый аффинный репер $R^{x'}=(x', \vec{e}_1{}', ..., \vec{e}_n{}')$, где $\vec{x}'=\vec{x}+\Delta\vec{x}$, $\vec{e}_i{}'=\vec{e}_i+\Delta\vec{e}_i$. Для главных частей $d\vec{x}$, $d\vec{e}_i$ бесконечно малых приращений $\Delta\vec{x}$, $\Delta\vec{e}_i$ снова получим уравнения

$$d\vec{x}=\omega^i\vec{e}_i;\quad d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j. \tag{1}$$

Однако теперь в этих уравнениях $\vec{e}_i$ — просто линейно независимые векторы (не единичные и не ортогональные). Мы снова придем к уравнениям (3) и (4) § 15, где $\|\xi_i^k\|$ — невырожденная матрица (тогда как в § 15 она была ортогональной). Дифференцируя внешним образом систему (4), получим первые две формулы (10) § 15:

$$D\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j^i;\quad D\omega_i^j=\omega_i^k\wedge\omega_k^j. \tag{2}$$

Это и есть уравнения структуры пространства A_n. Обратно: если 1-формы ω^i, ω_j^i удовлетворяют уравнениям (2), то система (1) вполне интегрируема и определяет единственное семейство аффинных реперов $\{R^x\}$, начальный репер которого совпадает с произвольно заданным аффинным репером $(R^x)_0$.

Если формы ω^i зависят только от p независимых дифференциалов и удовлетворяют уравнениям (2), то получим (при заданном начальном репере $(R^x)_0$) семейство аффинных реперов $\{R^x\}$, вершины которых заполняют некоторую p-поверхность в A_n. Система (1) определяет не только эту поверхность, но и любую ей аффинно-эквивалентную.

Рассмотрим теперь эквиаффинное пространство $\mathring{A}_n$. Здесь репер R^x должен быть таким, что $\det\|\xi_i^k\| = 1$, т. е.

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n) = 1. \tag{3}$$

Значит, группа эквиаффинных преобразований в $\mathring{A}_n$ зависит от $r = n(n+1) - 1$ параметров.

Дифференцируя тождество (3) (напомним, что определитель дифференцируют «по столбцам»), получим

$$(\omega_1^k \vec{e}_k, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n) + (\vec{e}_1, \omega_2^k \vec{e}_k, \ldots, \vec{e}_n) + \ldots +$$
$$+ (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \omega_n^k \vec{e}_k) = 0.$$

Учитывая, что определитель с двумя одинаковыми столбцами равен нулю, а также равенство (3), найдем

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_n^n = 0. \tag{4}$$

Уравнения (2) и (4) и есть *уравнения структуры пространства* $\mathring{A}_n$.

В проективном пространстве P_n зададим проективный («начальный») репер $R_0 = (M_0, M_1, \ldots, M_n, E_0)$ — упорядоченную систему $n+2$ точек $M_0, M_1, \ldots, M_n, E_0$ общего положения. Как известно [2], пространство P_n порождено $(n+1)$-мерным вещественным векторным пространством V.

В пространстве V существует базис $B_0 = (\vec{M}_0, \vec{M}_1, \ldots, \vec{M}_n)$ (определенный с точностью до гомотетии) и такой, что вектор $\vec{M}_\alpha$ порождает точку M_α $(\alpha = 0, \ldots, n)$, вектор $\vec{E}_0 = \vec{M}_0 + \ldots + \vec{M}_n$ порождает точку E_0 (единичную точку репера R_0). Всякий репер R в P_n можно теперь задать базисом $B = (\vec{A}, \vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n)$ в V, считая, что векторы $\vec{A}_\alpha$ порождают вершины A_α репера R, а вектор $\vec{E}=\vec{A}+\ldots+\vec{A}_n$ порождает единичную точку этого репера. При этом пишут $R=(\vec{A}, \vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_n)$.

Задание упорядоченной пары проективных реперов R_0 и R определяет проективное преобразование в P_n, переводящее репер R_0 в R.

Пусть

$$\vec{A}_\beta=x_\beta^\alpha\vec{M}_\alpha \quad (\alpha, \beta=0, 1, 2,\ldots, n). \tag{5}$$

Так как векторы $\vec{A}_\beta$ образуют базис в V, то они линейно независимы и потому $\det\|x_\beta{}^\alpha\|\neq 0$. Матрица $\|x_\beta{}^\alpha\|$ содержит $(n+1)^2$ элементов. При умножении всех векторов базиса B на одно и то же число $\lambda\neq 0$ получим гомотетичный базис B_1, который определит тот же репер R. Поэтому, чтобы определить репер R, достаточно знать элементы матрицы $\|x_\beta{}^\alpha\|$ лишь с точностью до общего множителя. Этот множитель можно выбрать так, что $\det\|x_\beta{}^\alpha\|=1$. Следовательно, репер R определяется заданием числовых значений $(n+1)^2-1=n(n+2)$ параметров. Это значит, что группа проективных преобразований пространства P_n зависит от $r=n(n+2)$ параметров. Обозначим через u^a значения этих параметров, при которых получен репер R. Дадим этим параметрам бесконечно малые приращения du^a, т. е. рассмотрим новые значения u^a+du^a указанных параметров. Они определят новый проективный репер $R'=(\vec{A}', \vec{A}_1',\ldots,\vec{A}_n')$, где $\vec{A}_\alpha'=\vec{A}_\alpha+\Delta\vec{A}_\alpha$.

Обозначим через $d\vec{A}_\alpha$ главную часть приращения $\Delta\vec{A}_\alpha$ и разложим векторы $d\vec{A}_\alpha$ по базису $(\vec{A}_\alpha)$, порождающему репер R:

$$d\vec{A}_\alpha=\omega_\alpha^\beta\vec{A}_\beta. \tag{6}$$

Здесь $\omega_\alpha{}^\beta$—1-формы, которые будут найдены в дальнейшем. Для этого используя формулы (5), перепишем равенство (6) в виде $d(x_\alpha{}^\gamma\vec{M}_\gamma)=\omega_\alpha{}^\beta x_\beta{}^\gamma\vec{M}_\gamma$, или (так как векторы $\vec{M}_\gamma$ постоянны) в виде $(dx_\alpha{}^\gamma)\vec{M}_\gamma=$ $=x_\beta{}^\gamma\omega_\alpha{}^\beta\vec{M}_\gamma$. Отсюда $x_\beta{}^\gamma\omega_\alpha{}^\beta=dx_\alpha{}^\gamma$. Следовательно,

$$\omega_\alpha^\beta=\tilde{x}_\gamma^\beta dx_\alpha^\gamma, \tag{7}$$

где

$$\tilde{x}^{\beta}_{\gamma} x^{\gamma}_{\alpha} = \delta^{\beta}_{\alpha}. \qquad (8)$$

Находим

$$D\omega^{\beta}_{\alpha} = d\tilde{x}^{\beta}_{\gamma} \wedge dx^{\gamma}_{\alpha}. \qquad (9)$$

Выразим из (7) $dx_{\alpha}{}^{\gamma} = x_{\delta}{}^{\gamma}\omega_{\alpha}{}^{\delta}$ и, подставив в (9), получим

$$D\omega^{\beta}_{\alpha} = x^{\gamma}_{\delta} d\tilde{x}^{\beta}_{\gamma} \wedge \omega^{\delta}_{\alpha}. \qquad (10)$$

Из (8) следует $x^{\gamma}_{\alpha} d\tilde{x}^{\beta}_{\gamma} + \tilde{x}^{\beta}_{\alpha} dx^{\gamma}_{\alpha} = 0$ и в силу (7) имеем $x^{\gamma}_{\beta} d\tilde{x}^{\beta}_{\gamma} = -\omega^{\beta}_{\alpha}$. Поэтому (10) примет вид $D\omega^{\beta}_{\alpha} = -\omega^{\beta}_{\delta} \wedge \omega^{\delta}_{\alpha}$, или

$$D\omega^{\beta}_{\alpha} = \omega^{\gamma}_{\alpha} \wedge \omega^{\beta}_{\gamma}. \qquad (11)$$

Условие $\det\|x_{\beta}{}^{\alpha}\| = 1$ можно записать так:

$$(\vec{A}, \vec{A}_1, .., \vec{A}_n) = 1, \qquad (12)$$

где слева стоит определитель из координат векторов $\vec{A}, \vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n$.

Дифференцируя тождество (12), получим

$$(\omega^0_0 \vec{A}, \vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n) + (\vec{A}, \omega^1_1 \vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n) + \ldots$$
$$+ (\vec{A}, \vec{A}_1, \ldots, \omega^n_n A_n) = 0,$$

откуда, учитывая (12), находим

$$\omega^0_0 + \omega^1_1 + \ldots + \omega^n_n = 0. \qquad (13)$$

Уравнения (11) и (13) составляют *уравнения структуры пространства P_n*.

Если система 1-форм $\omega_{\alpha}{}^{\beta}$ удовлетворяет уравнениям (11), (13), то система (6) вполне интегрируема и определяет единственное семейство реперов, начальный репер которого совпадает с произвольно заданным репером. При $\alpha = 0$ получим часть уравнений (10)

$$D\omega^{\beta}_0 = \omega^{\gamma}_0 \wedge \omega^{\beta}_{\gamma} \quad (\beta = 0, 1, \ldots, n),$$

среди которых имеем следующие:

$$D\omega^i = \omega^0_0 \wedge \omega^i + \omega^j \wedge \omega^i_j \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда по теореме Фробениуса заключаем, что система 1-форм ω^i вполне интегрируема. Из уравнений (6) следует, что точка A неподвижна тогда и только тогда, когда все $\omega^i=0$.

Если формы ω^i зависят только от p независимых дифференциалов и удовлетворяют уравнениям (11), (13), то точка A при заданном репере $(R)_0$ опишет p-мерную поверхность в P_n. Однако система (6) определяет эту поверхность с точностью до проективного преобразования. Это видно из того, что решение системы (6) — поверхность V_p — определяется заданием начального репера R_1. Задав другой начальный репер R_2, получим другое решение V'_p. Проективное преобразование, переводящее R_1 в R_2, переведет V_p в V'_p.

ГЛАВА III

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРУПП ЛИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ

§ 17. ГРУППА ЛИ И ЕЕ АЛГЕБРА ЛИ

Группой Ли называется r-мерное многообразие $G_r \in C^\infty$, которое одновременно является группой с групповой операцией класса C^∞, т. е. отображения

$$G\times G\to G\,|\,(g, h)=gh;\quad G\to G|g\to g^{-1} \tag{1}$$

принадлежат классу C^∞.

Каждый элемент $g \in G_r$ порождает диффеоморфизмы группы G_r на себя:

а) левый сдвиг $L_g: G_r \to G_r\,|\,\forall x \in G_r: L_g(x)=gx$;

б) правый сдвиг $R_g: G_r \to G_r\,|\,\forall x \in G_r: R_g(x)=xg$;

в) внутренний автоморфизм $\alpha_g=L\circ R_{g^{-1}}$.

Аналитичность этих отображений непосредственно следует из аналитичности отображения (1).

Пусть G_r — группа Ли и H_m — ее подмножество, удовлетворяющее двум условиям: а) H_m — подгруппа группы G_r в теоретико-групповом смысле; б) H_m — подмногообразие в G_r. Тогда H_m называют *подгруппой Ли* группы Ли G_r [16].

Теорема 1. *Если подгруппа H группы Ли G открыта, то она и замкнута* [8].

□ Так как H — подгруппа, то G можно разбить на левые классы смежности $gH=L_gH$. Множество H —

открытое, поэтому и множество $L_g H$ — открытое (поскольку L_g — диффеоморфизм). Следовательно, множество $G \setminus H = \bigcup_{g \notin H} gH$ открыто, а потому H замкнуто. ■

Теорема 2. *Компонента $\tilde{G}$ группы Ли G_r, содержащая единицу e, является открытой подгруппой и нормальным делителем в G_r.*

□ Пусть $\tilde{G}$ — компонента (иногда говорят «связная компонента») единицы e в группе Ли G_r. Для любого $g \in G_r$ множество $g\tilde{G}g^{-1}$ связно (поскольку, по условию, $\tilde{G}$ связно и L_g, $R_{g^{-1}}$ — диффеоморфизмы). Так как $e \in \tilde{G}$, то $e \in g\tilde{G}g^{-1}$ и потому

$$g\tilde{G}g^{-1} \subset \tilde{G} \tag{2}$$

(поскольку $\tilde{G}$ — компонента единицы e). Заменив в соотношении (2) g на g^{-1}, получим $g^{-1}\tilde{G}g \subset \tilde{G}$. Отсюда $\tilde{G} \subset g\tilde{G}g^{-1}$, что вместе с (2) дает $\forall g \in G_r$ $g\tilde{G}g^{-1} = \tilde{G}$. Это и означает, что $\tilde{G}$ — нормальный делитель в G_r.

Пусть U — область определения какой-либо координатной карты, содержащая точку e. Значит, U — открытое и связное множество. Без ограничения общности можно считать, что $U \subset \tilde{G}$ (т. е. можно взять область U «достаточно малой»). Тогда для каждого $g \in \tilde{G}$ множество gU является открытой окрестностью точки g, причем $gU \in \tilde{G}$. Следовательно, $\tilde{G} = \bigcup_{g \in \tilde{G}} gU$, а потому $\tilde{G}$ — открытая подгруппа. ■

Пусть G — какая-либо группа (не обязательно группа Ли). В алгебре доказывается, что если $(H_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — какое-либо семейство подгрупп группы G, то $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$ — подгруппа группы G. Пусть теперь M — некоторое множество элементов группы G и $H(M)$ — пересечение всех подгрупп из G, содержащих множество M. В силу сказанного $H(M)$ — подгруппа группы G. Ясно, что это минимальная подгруппа из G, содержащая множество M: если для какой-либо подгруппы H_1 имеем $M \subset H_1$, то $H(M) \subset H_1$. Говорят, что подгруппа $H(M)$ порождена множеством M. Пусть $M^{-1} = \{x \in G \mid x^{-1} \in M\}$. Докажем, что $H(M)$ состоит из всех элементов вида

$$x = x^1 x^2 \ldots x^q, \tag{3}$$

где $x^i \in M \cup M^{-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$. Имеем $M \subset H(M)$ и $H(M)$ — подгруппа группы G. Поэтому все элементы вида (3) группы G входят в $H(M)$. Обозначим через H_1 множество тех элементов группы G, которые представимы в виде (3), т. е. в виде произведения конечного числа элементов множества $M \cup M^{-1}$. Заметим, что $(x, y \in H_1) \Rightarrow xy, x^{-1} \in H_1$. Следовательно, H_1 — подгруппа, содержащая M. Как отмечено выше, $(x \in \in H_1) \Rightarrow x \in H(M)$ и потому $H_1 \subset H(M)$. Но $H(M)$ — минимальная подгруппа, содержащая M. Значит, $H(M) = H_1$.

Теорема. 3. *Если группа Ли G_r связна, то она порождается любой открытой окрестностью U единичного элемента e.*

□ Пусть U — открытая окрестность единицы e группы G_r и $U^{-1} = \{x \in G_r \mid x^{-1} \in U\}$. Обозначим $V = = U \cap U^{-1}$. Значит, если $x \in V$, то и $x^{-1} \in V$, а потому $V = V^{-1}$. Так как отображение $G_r \to G_r \mid g \to g^{-1}$ принадлежит классу C^ω, то оно тем более непрерывно. Но оно и обратимо: обратным служит отображение $g^{-1} \to \to g = (g^{-1})^{-1}$ (это, по существу, то же отображение), причем это отображение, очевидно, также принадлежит классу C^ω. Значит, отображение $g \to g^{-1}$ есть диффеоморфизм (и тем более — гомеоморфизм) и потому переводит открытое множество в открытое. Отсюда заключаем, что множество U^{-1} — открытое; открыто и V (как пересечение двух открытых множеств U и U^{-1}).

Если обозначить через V^i множество всевозможных произведений по i сомножителей из V, то аналогично убеждаемся, что множество V^i — открытое. Поэтому открытым является и множество $H = H(V) = = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} V^i$ — подгруппа, порожденная окрестностью V. Подгруппа $H(U)$, порожденная окрестностью U, содержит окрестность V (так как $V \subset U$) и, следовательно,

$$H(V) \subset H(U). \tag{4}$$

Согласно теореме 1, подгруппа H замкнута. Поэтому ее дополнение $G_r \setminus H$ открыто. Если предположить, что $G_r \setminus H \neq \varnothing$, то получим, что G_r есть объединение двух непустых непересекающихся открытых множеств H и $G_r \setminus H$ и, значит, группа G_r несвязна, что противоречит условию. Следовательно, $G_r \setminus H = \varnothing$, а потому $H = G_r$. Учитывая (4), имеем $G_r = H(U)$. ■

Примеры групп Ли. 1. Рассмотрим группу $GL(n, \mathbf{R})$ — группу автоморфизмов векторного пространства $\mathbf{R}^n$. Если в $\mathbf{R}^n$ задать базис $(\vec{a}_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, то автоморфизм $f \in GL(n, \mathbf{R})$ определяется своей матрицей $\|a_j{}^i\|$ относительно базиса $(\vec{a}_i)$. Именно, если $\vec{x} = x^j \vec{a}_j$, то $f(\vec{x}) = \vec{y} = y^i \vec{a}_i$, где $y^i = a_j{}^i x^j$, причем $\det \|a_j{}^i\| \neq 0$.

Поэтому $GL(n, R)$ (называемую *общей* или *полной линейной группой*) часто отождествляют с группой невырожденных матриц порядка n над полем $\mathbf{R}$.

Если автоморфизму $g \in GL(n, \mathbf{R})$ соответствует матрица $\|b_j{}^i\|$, то произведению $g \circ f$ соответствует матрица $c_j{}^i = b^i{}_k a_j{}^k$. Здесь правые части — аналитические функции от $a_j{}^k$ и $b^i{}_k$.

Автоморфизм f^{-1} определяется с помощью матрицы $\|\tilde{a}_j{}^i\| = \|a_i{}^j\|^{-1}$. Значит, $\tilde{a}_j{}^i$ — аналитические функции от $a_i{}^k$. Таким образом, $GL(n, \mathbf{R})$ есть группа Ли размерности $r = n^2$.

Как известно, группа всех матриц $\|a_j{}^i\|$ порядка n над $\mathbf{R}$ есть n^2-мерное вещественное векторное пространство, изоморфное векторному пространству $\mathbf{R}^{n^2}$. Поэтому можно сказать, что $GL(n, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^{n^2} \setminus M_0$, где M_0 — множество всех вырожденных матриц порядка n. Легко заметить, что отображение $f \to \|a_j{}^i\|$ определяет на $GL(n, \mathbf{R})$ две карты: одну для $\det \|a_j{}^i\| > 0$ и другую для $\det \|a_j{}^i\| < 0$. Значит, $GL(n, \mathbf{R})$ — несвязное многообразие класса C^ω.

2. Векторное пространство $\mathbf{R}^n$ является группой Ли размерности $r = n$ относительно сложения.

3. Обозначим через $SL(n, \mathbf{R})$ множество всех таких $f \in CL(n, \mathbf{R})$, для которых $\det \|a_j{}^i\| = 1$. Это подгруппа Ли, ее называют *специальной линейной группой.*

4. Ортогональная группа $O(n)$ определяется как подгруппа в $GL(n, \mathbf{R})$, удовлетворяющая требованию ортогональности матрицы $\|a_j{}^i\|$. Группа $O(n)$ является подгруппой Ли и состоит из двух связных компонент. Та из этих компонент, которая содержит единицу, называется *специальной ортогональной группой* $SO(n)$. Ясно, что $SO(n) = SL(n, \mathbf{R}) \cap O(n)$.

5. Можно также проверить, что группа D_n движений в E_n, группа $A(n, \mathbf{R})$ аффинных преобразований в A_n и группа $P(n, \mathbf{R})$ проективных преобразований пространства P_n являются группами Ли, имеющими со-

ответственно размерности $n(n+1)/2$, $n(n+1)$, $n(n+2)$.

Напомним, что алгеброй Ли над полем $\mathbf{R}$ называется пара $(V, [,])$, где V — векторное пространство над $\mathbf{R}$, а $[,]$ — внутренний закон композиции в V (умножение) такой, что V становится кольцом с операторами и множеством операторов служит $\mathbf{R}$, причем умножение $[,]$ антикоммутативно и удовлетворяет тождеству Якоби (см. § 7).

В § 7 мы установили, что если G — открытое множество на гладком многообразии X_n и $D^1(G)$ — множество всех гладких векторных полей на множестве G, то $D^1(G)$ — алгебра Ли над полем $\mathbf{R}$, где в качестве умножения взята скобка Ли $[,]$.

Пусть $X_k=\xi^i{}_k\partial_i$ — система линейно независимых векторных полей на $G\subset X_n$. Возьмем еще какое-либо поле $Y=\eta^i\partial_i\in D^1(G)$. Если рассматривать значения этих полей в фиксированной точке $x\in G$, то $X_{k|_x}$, $Y_{|x}\in T_x$ и поэтому $\exists\lambda^k\in\mathbf{R}$ такие, что $Y_{|x}=\lambda^k X_{k|_x}$. Но для произвольно взятого поля X не найдется таких чисел λ^k, что $X=\lambda^k X_k$.

Известно, что всякое векторное пространство имеет базис конечный или бесконечный. Если векторное пространство не имеет конечного базиса, то оно бесконечномерно. Значит, векторное пространство $D^1(G)$ над $\mathbf{R}$ — бесконечномерное. Поэтому и полученная алгебра Ли $D^1(G)$ — бесконечномерная.

Если в качестве X_n взять группу Ли G_r, то аналогично получим бесконечномерную алгебру Ли $D^1(G_r)$. Свяжем с G_r конечномерную алгебру Ли.

Векторное поле X, определенное на G_r, называется *левоинвариантным*, если оно инвариантно относительно дифференциалов левых сдвигов, т. е. $\forall g, h\in G_r$ $dL_g(X_{|_h})=X_{|_{gh}}$. Обозначим через $\mathfrak{g}_r$ множество всех левоинвариантных векторных полей на группе Ли G_r. Легко видеть, что $\mathfrak{g}_r$ — векторное пространство над полем $\mathbf{R}$. Рассмотрим отображение $\hat{f}$: $\mathfrak{g}_r\to T_e(G_r)$ (e — единица группы G_r) по закону $\forall X\in\mathfrak{g}_r$ $\hat{f}(X)=X_{|_e}$. Тогда (по определению действий над полями) получим

$$\hat{f}(X+Y)=(X+Y)_{|_e}=X_{|_e}+Y_{|_e},$$

$$\hat{f}(\alpha X)=(\alpha X)_{|e}=\alpha\,(X_{|e}),\quad \alpha\in\mathbf{R}.$$

Следовательно, $\hat{f}$ — линейное отображение векторного пространства $\mathfrak{g}_r$ в векторное пространство $T_e(G_r)$. Возьмем какой-либо вектор $X_{|e}\in T_e(G_r)$ и рассмотрим векторное поле X, определенное по закону

$$X_{|x}=dL_x(X_{|e}). \tag{5}$$

Покажем, что определенное так поле левоинвариантно. Для любых левых сдвигов L_f и L_g имеем $L_f(h)=fh$, $L_g(L_f(h))=(gf)h=L_{gf}(h)$. Значит, $L_g\cdot L_f=L_{gf}$.

В § 3 мы получили «цепное правило»:

$$(g\circ f)_{*x}=g_{*f(x)}\circ f_{*x},\quad \text{т. е.}\quad d(g\circ f)_{|x}=dg_{|f(x)}\circ df_{|x}.$$

Из равенства (5) находим

$$dL_g(X_{|x})=dL_g\cdot dL_x(X_{|e}). \tag{6}$$

Тогда правая часть формулы (6) примет вид

$$dL_g\cdot dL_x(X_{|e})=d(L_g\cdot L_x)(X_{|e})=dL_{gx}(X_{|e})=X_{|gx}$$

(здесь снова использована формула (5)). Итак, формулу (6) можно переписать в виде

$$\forall g,\ x\in G_r,\quad dL_g(X_{|x})=X_{|gx}.$$

Следовательно, векторное поле X, определенное формулой (5), левоинвариантно. Мы видим, что в отображении $\hat{f}$ каждый вектор $X_{|e}\in T_e(G_r)$ получается из определенного векторного поля $X\in\mathfrak{g}_r$ (для поля X, определенного формулой (5), имеем $\hat{f}(X)=dL_e(X_{|e})=X_{|e}$, так как dL_e есть тождественное отображение векторного пространства на себя). Следовательно, $\hat{f}$ — сюръекция. Возьмем два различных векторных поля X, $Y\in\mathfrak{g}_r$ и предположим, что $X_{|e}=Y_{|e}$. Для $\forall x\in G_r$ находим $X_{|x}=dL_x(X_{|e})$, $Y_{|x}=dL_x(Y_{|e})$, и так как $X_{|e}=Y_{|e}$, то $\forall x\in G_r\ X_{|x}=Y_{|x}$, т. е. $X=Y$, что противоречит условию. Значит, $X\neq Y\Rightarrow\hat{f}(X)\neq\hat{f}(Y)$ (отображение $\hat{f}$ инъективно). Таким образом, линейное отображение $\hat{f}$ биективно и векторные пространства $\mathfrak{g}_r$ и $T_e(G_r)$ оказываются изоморфными.

Из формулы (5) следует, что каждое левоинвариантное векторное поле аналитично (так как отображение dL_x — аналитическое).

Для гладких векторных полей X, Y на X_n и любого диффеоморфизма h многообразия X_n на себя имеем $h_{*x}[X, Y]=[h_{*x}X, h_{*x}Y]$ (см. § 7).

Пусть теперь $X, Y\in\mathfrak{g}_r$, L_g — левый сдвиг. Находим $dL_g([X, Y]|_h)=[dL_g(X|_h), dL_g(Y|_h)]=[X|_{gh}, Y|_{gh}]=$ $=[X, Y]|_{gh}$. (по определению). Следовательно, $X, Y\in$ $\in\mathfrak{g}_r\Rightarrow[X, Y]\in\mathfrak{g}_r$, а потому $\mathfrak{g}_r$ — алгебра Ли над полем R. Это r-мерная алгебра, так как, по доказанному выше, векторные пространства $\mathfrak{g}_r$ и $T_e(G_r)$ изоморфны, а $\dim T_e(G_r)=r$. Она называется *алгеброй Ли группы Ли* G_r. Положив $[X|_e, Y|_e]=[X, Y]|_e$, перенесем коммутатор [,] из $\mathfrak{g}_r$ в $T_e(G_r)$ и с помощью изоморфизма f отождествим $\mathfrak{g}_r$ с $T_e(G_r)$. Таким образом, с помощью отображения f: $\mathfrak{g}_r\to T_e(G_r)$ мы переносим структуру алгебры Ли $\mathfrak{g}_r$ на векторное пространство $T_e(G_r)$.

Замечание. Вместо левых сдвигов L_g в основу произведенных построений можно было бы положить правые сдвиги R_g, определить с их помощью правоинвариантные векторные поля и соответствующую алгебру Ли. Обозначим через I симметрию относительно e, т. е. отображение I: $G_r\to G_r$ по закону $\forall x\in G_r$ $I(x)=x^{-1}$. Можно доказать, что если $X\in\mathfrak{g}_r$, то I_*X — правоинвариантное векторное поле. Так как $[I_*X, I_*Y]=I_*[X, Y]$, то отображение I_*: $\mathfrak{g}_r\to\mathfrak{g}_r$ есть изоморфизм алгебры Ли левоинвариантных векторных полей на алгебру Ли $\mathfrak{g}_r$ правоинвариантных векторных полей на группе Ли G_r.

Пусть X_a $(a, b, c=1, 2,\dots, r)$ — какой-либо базис в $\mathfrak{g}_r$. Так как $[X_a, X_b]\in\mathfrak{g}_r$, а $\mathfrak{g}_r$ — r-мерное векторное пространство над полем $\mathbf{R}$, то

$$[X_a, X_b]=\bar{c}^c_{ab}X_c,\quad \bar{c}^c_{ab}\in\mathbf{R}. \tag{7}$$

Числа $\bar{c}^c{}_{ab}$ называют *структурными константами алгебры Ли* $\mathfrak{g}_r$. Поскольку умножение в $\mathfrak{g}_r$ антикоммутативно и удовлетворяет тождеству Якоби, структурные константы удовлетворяют условиям:

$$\bar{c}^c_{ab}+\bar{c}^c_{ba}=0; \tag{8}$$

$$\bar{c}^c_{ab}\bar{c}^f_{cd}+\bar{c}^c_{bd}\bar{c}^f_{ca}+\bar{c}^c_{da}\bar{c}^f_{cb}=0,\ \text{или}\ \bar{c}^c_{(ab}\bar{c}^f_{d)c}=0, \tag{9}$$

где символом (   ) обозначено циклирование по индексам, стоящим в скобках. Если заменить базис: $X_{a'} = p^a_{a'} X_a$ ($p^a_{a'} \in \mathbf{R}$, $\det \| p^a_{a'} \| \neq 0$), то из $[X_{a'}, X_{b'}] = \bar{c}^{c'}_{a'b'} X_{c'}$ имеем

$$[p^a_{a'} X_a, p^b_{b'} X_b] = \bar{c}^{c'}_{a'b'} p^c_{c'} X_c \Rightarrow p^a_{a'} p^b_{b'} \bar{c}^c_{ab} X_c =$$

$$= p^c_{c'} \bar{c}^{c'}_{a'b'} X_c \Rightarrow p^c_{c'} \bar{c}^{c'}_{a'b'} = p^a_{a'} p^b_{b'} \bar{c}^c_{ab} \Rightarrow \bar{c}^{c'}_{a'b'} =$$

$$= \tilde{p}^{c'}_c p^a_{a'} p^b_{b'} \bar{c}^c_{ab}.$$

Таким образом, при замене базиса в $\mathfrak{g}_r$ константы $\bar{c}^c{}_{ab}$ преобразуются как координаты тензора типа (1; 2).

Обратно: пусть даны r-мерное векторное пространство V над полем $\mathbf{R}$ и тензор $\bar{c}$ типа (1; 2) над V, который в некотором базисе (X_a) удовлетворяет условиям (8), (9). Определим на V скобку [,] равенством $[X_a, X_b] = \bar{c}^c{}_{ab} X_c$, которое продолжим «по линейности»: если $X = \xi^a X_a$, $Y = \eta^b X_b$, то

$$[X, Y] = [\xi^a X_a, \eta^b X_b] = \xi^a \eta^b [X_a, X_b] = \bar{c}^c_{ab} \xi^a \eta^b X_c.$$

Теперь V становится кольцом с операторами и множеством операторов служит $\mathbf{R}$. Значит, V есть $\mathbf{R}$-алгебра. В этой алгебре умножение антикоммутативно и удовлетворяет тождеству Якоби. Следовательно, на векторном пространстве V определена структура $\mathbf{R}$-алгебры Ли. Можно сказать поэтому, что алгебра Ли полностью определяется своим тензором $\bar{c}$ типа (1; 2), удовлетворяющим условиям (8) и (9). Тензор $\bar{c}$ называют *тензором структуры данной алгебры Ли.*

§ 18. СТРУКТУРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГРУППЫ ЛИ

В приложениях теории групп Ли к геометрии часто вместо всей группы Ли G_r рассматривают лишь некоторую окрестность единичного элемента. Это объясняется тем, что в геометрических приложениях обычно имеют дело с системами дифференциальных уравнений, для которых существование решения гарантировано лишь локально (в некоторой окрестности начальной точки).

Локальной группой Ли называется аналитическое многообразие X_r с отмеченным элементом e, открытой окрестностью $U \subset X_r$ этого элемента и парой аналитических отображений φ: $U \times U \to X_r$ и ψ: $U \to U$ таких, что имеют место следующие три условия:

1°) в некоторой окрестности $V_1 \subset U$ точки e выполнено равенство $\varphi(x, e) = \varphi(e, x) = x$;

2°) в некоторой окрестности $V_2 \subset U$ точки e выполнено равенство $\varphi(x, \psi(x)) = \varphi(\psi(x), x) = e$;

3°) для некоторой окрестности $V_3 \subset U$ точки e выполнено включение $\varphi(V_3 \times V_3) \subset U$, причем

$$\forall x, y, z \in V_3 (\varphi(x, \varphi(y, z)) = \varphi(\varphi(x, y), z).$$

Вместо $\varphi(x, y)$ пишут xy, а вместо $\psi(x)$ пишут x^{-1} [16].

Условимся, что во всех случаях, где используются координаты, речь будет идти о локальной группе Ли.

Пусть G_r — группа Ли, U — открытая окрестность единицы e, удовлетворяющая условиям 1°, 2°, 3° (ясно, что группу Ли G_r всегда можно рассматривать как локальную группу Ли). Окрестность U можно сузить так, чтобы она стала координатной окрестностью некоторой карты. Координаты точки $u \in U$ в этой карте будем обозначать через u^a ($a, b, c = 1, 2, \ldots, r$). Карту всегда можно выбрать так, чтобы все координаты точки e были равны нулю: $e^a = 0$. Пусть $X = \xi^a \dfrac{\partial}{\partial u^a}$ — векторное поле в U. Тогда $\xi^a = \xi^a(u', \ldots, u^r) = \xi^a(u)$. Левый сдвиг $L_a(u) = a \cdot u = v$ с помощью отображения φ можно записать в координатах так:

$$v^a = \varphi^a(a', \ldots, a^r; u', \ldots, u^r) \equiv \varphi^a(a, u). \qquad (1)$$

Если поле X — левоинвариантное, то

$$\forall a, u \in U \; dL_a(X_{|u}) = X_{|au}. \qquad (2)$$

Так как X в базисе $\left(\dfrac{\partial}{\partial u^a}\right)$ имеет координаты $\xi^a = \xi^a(u)$, а отображение L_a задано в координатах формулами (1), то $dL_a(X_{|u}) = \dfrac{\partial v^a}{\partial u^b} \xi^b(u) \dfrac{\partial}{\partial v^a}$ и условие (2) примет вид

$$\left(\frac{\partial v^a}{\partial u^b}\right) \xi^b(u) = \xi^a(v). \qquad (3)$$

Возьмем какой-либо базис (X_a) алгебры $\mathfrak{g}_r$. Каждое из полей X_a удовлетворяет условию (3), поэтому имеем систему уравнений $\left(\frac{\partial v^a}{\partial u^b}\right)\xi_c^b(u)=\xi_c^a(v)$. Отсюда $\left(\frac{\partial v^a}{\partial u^b}\right)=\xi_c^a(v)\cdot\tilde{\xi}_b^c(u)$ и, значит, $\left(\frac{\partial v^a}{\partial u^b}\right)\tilde{\xi}_a^c(v)=\tilde{\xi}_b^c(u)$ $(\|\tilde{\xi}_b^a\|=\|\xi_a^b\|^{-1})$. Применяя к этому равенству свертку с тензором du^b, получим

$$\tilde{\xi}_b^c(u)\,du^b=\tilde{\xi}_a^c(v)\left(\frac{\partial v^a}{\partial u^b}\right)du^b, \tag{4}$$

т. е.

$$\tilde{\xi}_b^c(u)\,du^b=\tilde{\xi}_a^c(v)\,dv^a. \tag{5}$$

Векторы $X_a|_u$ образуют репер R^u касательного пространства $T_u(G_r)$ в каждой точке $u\in U$. Взаимным ему является корепер θ_u из 1-форм

$$\omega^c=\tilde{\xi}_b^c du^b. \tag{6}$$

Формулы (4) означают, что каждая из 1-форм ω^c является *левоинвариантной*, т. е. удовлетворяет условию

$$\forall a\subset U,\quad \overset{*}{L}_a\omega^c=\omega^c. \tag{7}$$

Здесь можно писать $\forall a\in G_r$, поскольку поля X_a, а значит, и формы ω^c определены глобально на всей группе G_r.

Всякая 1-форма, определенная на G_r и удовлетворяющая условию (7), называется левоинвариантной. Значит, корепер θ_u, взаимный реперу R^u, образован левоинвариантными 1-формами.

Формулу (4) можно записать так:

$$\forall a,\ u\in G_r\quad \omega^c(u,\ du)=\omega^c(\varphi^c(\varphi(a,\ u),\ d\varphi(a,\ u)). \tag{8}$$

где a^c надо рассматривать как постоянные. Это другая запись того же условия (7) левоинвариантности 1-формы ω^c.

Используя формулу (6), находим $D\omega^c=d\tilde{\xi}_b^c\wedge\wedge du^b=\frac{\partial\tilde{\xi}_b^c}{\partial u^a}du^a\wedge du^b$. Так как в силу (6) $du^b==\xi_d^b\omega^d$, то

$$D\omega^c = \frac{\partial \tilde{\xi}^c_b}{\partial u^a}\,\xi^a_d\omega^d \wedge \xi^b_f\omega^f = \xi^a_d\xi^b_f\,\frac{\partial \tilde{\xi}^c_b}{\partial u^a}\,\omega^d \wedge \omega^f.$$

Далее, имеем

$$\xi^b_f\tilde{\xi}^c_b = \delta^c_f \Rightarrow \tilde{\xi}^c_b\,\frac{\partial \xi^b_f}{\partial u^a} + \xi^b_f\,\frac{\partial \tilde{\xi}^c_b}{\partial u^a} = 0.$$

Поэтому

$$D\omega^c = -\tilde{\xi}^c_b\xi^a_d\,\frac{\partial \xi^b_f}{\partial u^a}\,\omega^d \wedge \omega^f = -\frac{1}{2}\,\tilde{\xi}^c_b\left(2\xi^a_d\,\frac{\partial \xi^b_f}{\partial u^a}\,\omega^d \wedge \omega^f\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\tilde{\xi}^c_b\left(\xi^a_d\,\frac{\partial \xi^b_f}{\partial u^a}\,\omega^d \wedge \omega^f + \xi^a_d\,\frac{\partial \xi^b_f}{\partial u^a}\,\omega^d \wedge \omega^f\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\tilde{\xi}^c_b\left(\xi^a_d\,\frac{\partial \xi^b_f}{\partial u^a} - \xi^a_f\,\frac{\partial \xi^b_d}{\partial u^a}\right)\omega^d \wedge \omega^f.$$

Из равенства $[X_d, X_f] = \bar{c}^g{}_{df}X_g$ находим

$$\tilde{\xi}^c_b\left(\xi^a_d\,\frac{\partial \xi^b_f}{\partial u^a} - \xi^a_f\,\frac{\partial \xi^b_d}{\partial u^a}\right) = \bar{c}^c_{df}.$$

Следовательно,

$$D\omega^c = -\frac{1}{2}\,\bar{c}^c_{df}\omega^d \wedge \omega^f,$$

откуда, обозначая $\bar{c}^c{}_{df} = -c^c{}_{df}$, получим

$$D\omega^a = \frac{1}{2}\,c^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c. \qquad (9)$$

Левоинвариантные 1-формы ω^a называются *базисными инвариантными формами группы Ли* G_r. Они должны удовлетворять уравнениям (9), которые называются *структурными уравнениями* или *уравнениями Маурера — Картана группы Ли* G_r. Постоянные $c^a{}_{bc} = -\bar{c}^a{}_{bc}$ называются *структурными константами группы Ли*. Ясно, что они удовлетворяют тем же соотношениям, что и константа $\bar{c}^a{}_{bc}$, т. е.

$$c^a_{(bc)} = 0, \quad c^a_{\underline{(bc}}c^d_{\underline{f)}a} = 0, \qquad (10)$$

З а м е ч а н и е. Отображение φ определяет закон композиции на группе: $\varphi(u, v) = uv$, что можно подробнее записать в виде

$$w^a = \varphi^a(u', \ldots, u^r;\ v', \ldots, v^r).$$

Можно показать, что базисные левоинвариантные 1-формы ω^a группы Ли удовлетворяют системе линейно независимых уравнений

$$du^a = \left(\frac{\partial \varphi^a(u, v)}{\partial v^b}\right)_{(|v^c=0} \omega^b. \tag{11}$$

Зная функции $\varphi^a(u, v)$, находим 1-формы ω^a из системы (11).

Теорема 1. *Система r линейно независимых форм Пфаффа $\omega^a(u, du)$, заданных на некотором открытом множестве U аналитического многообразия X_r, является системой базисных инвариантных форм некоторой локальной группы Ли тогда и только тогда, когда система дифференциальных уравнений* (8) *инвариантности этих форм, имеющая вид*

$$\omega^a(v, dv) = \omega^a(u, du), \tag{12}$$

вполне интегрируема.

Заметим, что в системе (12) имеется r линейно независимых уравнений и $r+r=2r$ переменных u^a и v^b.

□ Пусть $\omega^a(u, du)$ — инвариантные формы группы Ли G_r. Тогда они удовлетворяют условию инвариантности (8) и, значит, система (12) имеет решение

$$v^b = \varphi^b \quad (a, u) \tag{13}$$

(в некоторой окрестности точки $e \in U$), где a^c — произвольные постоянные.

Прежде всего отметим следующее. Так как группу Ли G_r можно рассматривать и как локальную группу Ли, то для нее выполняются условия 1°—3° в некоторой окрестности U единицы e группы.

Будем считать, что в U выбраны координаты так, что все координаты точки e равны нулю: $e^a=0$ ($a = 1, 2, \dots, r$). Согласно условию 1°, имеем

$$\varphi^a(u, e) = \varphi^a(e, u) = u^a. \tag{14}$$

Покажем, что в некоторой окрестности единицы e отличны от нуля следующие якобианы:

$$\det\left\|\frac{\partial \varphi^a(u, v)}{\partial u^b}\right\| \neq 0, \quad \det\left\|\frac{\partial \varphi^a(u, v)}{\partial v^b}\right\| \neq 0. \tag{15}$$

В самом деле, в силу равенства (14) имеем

$$\det\left\|\frac{\partial\varphi^a(u,\ e)}{\partial u^b}\right\|=1,\quad \det\left\|\frac{\partial\varphi^a(e,\ v)}{\partial v^b}\right\|=1.$$

Поэтому в силу непрерывности якобианы (15) отличны от нуля и в некоторой окрестности точки e.

В той окрестности, где отличен от нуля первый из якобианов (15), возьмем произвольную точку $v^b=$ $=v_0{}^b$ и рассмотрим систему уравнений $\varphi^b(a,\ u)=v_0{}^b$. Согласно теореме существования неявных функций, эта система разрешима относительно a^b: $a^b=\widehat{\varphi}^b(u,$ $v_0)$. Таким образом, выбирая произвольные постоянные a^b, можно получить решение (13), проходящее через любую точку $(u_0{}^a,\ v_0{}^b)$ пространства всех переменных. Значит, система (12) вполне интегрируема.

Обратно: пусть система (12) вполне интегрируема. Общее решение можно записать так:

$$f^a(u,\ v)=\widehat{c}^a, \tag{16}$$

где $\hat{c}^a=\text{const}$ и f^a — аналитические функции. Так как переменные u^a, v^b входят в левые части уравнений (16) существенно (формы $\omega^a(u,\ \mathrm{d}u)$ содержат r линейно независимых дифференциалов du^b), то ранги $\left\|\frac{\partial f^a}{\partial u^b}\right\|$ и $\left\|\frac{\partial f^a}{\partial v^b}\right\|$ равны r. Поэтому уравнения (16) разрешимы как относительно u^a, так и v^b.

Разрешая (16) относительно v^a, получим

$$v^a=\tilde{\varphi}^a(\hat{c},\ u). \tag{17}$$

Полагая $\tilde{\varphi}^a(\hat{c},\ 0)=c^a$, определим отсюда константы $\hat{c}^a$ и подставим их в решение (17). Тогда оно примет вид

$$v^a=\varphi^a(c,\ u), \tag{18}$$

причем $\varphi^a(c,\ 0)=c^a$, так как

$$\varphi^a(c,\ 0)=v^a_{|u^b=0}=\tilde{\varphi}^a(\hat{c},\ u)_{|u^b=0}=\tilde{\varphi}^a(\hat{c},\ 0)=c^a. \tag{19}$$

В частности,

$$\varphi^a(0,\ 0)=0. \tag{20}$$

Вполне интегрируемая система (12) имеет решение $v^a=u^a$. Это должно быть ее единственным решением, удовлетворяющим нулевым начальным условиям $v^a_{|u^b=0}=0$. Однако решение $v^a=\varphi^a(0, u)$ удовлетворяет тем же начальным условиям (20). Поэтому эти решения должны совпадать, т. е.

$$\varphi^a(0, u)=u^a. \tag{21}$$

Уравнения (18) дают решение системы (12). Следовательно, можно сказать, что эти уравнения определяют преобразование переменных u^a в переменные v^b (при постоянных c^a), *сохраняющее инвариантные формы* ω^a. Последовательное выполнение таких преобразований также сохраняет формы ω^a инвариантными. Поэтому из равенств $v^a=\varphi^a(a, u)$, $w^a=\varphi^a(b, v)$ следует, что

$$w^a=\varphi^a(b, \varphi(a, u))=\varphi^a(c, u). \tag{22}$$

Полагая здесь $u^b=0$ и учитывая (19), получим $\varphi^a(b, a)=c^a$. Формулу (22) можно записать так:

$$\varphi^a(b, \varphi(a, u))=\varphi^a(\varphi(b, a), u). \tag{23}$$

Будем считать в $U\subset X_r$ отмеченной точку с координатами $u^a=0$. Тогда равенства (19) и (21) показывают, что выполнено условие 1^0 из определения локальной группы Ли, а равенство (23) — что выполнено условие 3^0 из этого определения.

Так как в уравнения (18) переменные c^a и u^b входят существенно, то $\det\left\|\frac{\partial\varphi^a}{\partial c^b}\right\|\neq 0$ и $\det\left\|\frac{\partial\varphi^a}{\partial u^b}\right\|\neq 0$ и, значит, эти уравнения можно разрешить относительно c^a и u^b. В частности, разрешимы уравнения

$$\varphi^a(x, y)=0 \tag{24}$$

и

$$\varphi^a(y, x)=0. \tag{25}$$

Обозначим их решения соответственно через $\psi^a(x)$ и $\alpha^a(x)$. Имеем

$$\varphi^a(x, \psi(x))=0, \tag{26}$$

$$\varphi^a(\alpha(x), x)=0. \tag{27}$$

Далее воспользуемся формулой (23):

$$\varphi^a(\alpha(x), \varphi(x, \psi(x)))=\varphi^a(\varphi(\alpha(x), x), \psi(x))=$$
$$=\varphi^a(0, \psi(x))=\psi^a(x). \tag{28}$$

С другой стороны, в силу равенства (26) получим

$$\varphi^a(\alpha(x),\ \varphi(x,\ \psi(x)))=\varphi^a(\alpha(x),\ 0)=\alpha^a(x). \qquad (29)$$

Из формул (28), (29) следует, что $\alpha^a(x)=\psi^a(x)$, и равенство (27) примет вид

$$\varphi^a(\psi(x),\ x)=0. \qquad (30)$$

Из равенств (26) и (30) заключаем, что выполнено и условие 2^0 из определения локальной группы Ли. Единственность этой группы следует из единственности решения (18) системы (12), удовлетворяющего начальным условиям (19). ■

Теорема 2. *Линейно независимые* 1-*формы* ω^a *являются инвариантными формами некоторой локальной группы Ли тогда и только тогда, когда они удовлетворяют структурным уравнениям вида* (9):

$$D\omega^a=\frac{1}{2}c^a_{bc}\omega^b\wedge\omega^c \quad (c^a_{bc}=-c^a_{cb}=\text{const}). \qquad (31)$$

□ Необходимость установлена выше при выводе уравнений (9).

Докажем достаточность. Из (31) непосредственно следует, что система 1-форм ω^a вполне интегрируема. Пусть u^a — ее первые интегралы. Тогда $\omega^a=$ $=a_b{}^a du^b$. Докажем, что коэффициенты $a_b{}^a$ являются функциями только от u^c. Предположим, что в коэффициенты $a_b{}^a$ кроме первых интегралов u^c входят и другие переменные v^ξ:

$$\omega^a=a^a_b(u,\ v)\,du^b.$$

Тогда

$$D\omega^a=\left(\frac{\partial a^a_b}{\partial u^c}du^c+\frac{\partial a^a_b}{\partial v^\xi}dv^\xi\right)\wedge du^b.$$

Подставив ω^a и $D\omega^a$ в уравнения (31), получим

$$\frac{\partial a^a_b}{\partial u^c}du^c\wedge du^b+\frac{\partial a^a_b}{\partial v^\xi}dv^\xi\wedge du^b=$$

$$=\frac{1}{2}c^a_{bc}a^b_f a^c_g du^f\wedge du^g.$$

После приведения подобных членов находим $\dfrac{\partial a^a_b}{\partial v^\xi}=0.$

Значит, формы ω^a зависят только от своих первых интегралов u^b: $\omega^a=\omega^a(u, du)$. Составим систему уравнений инвариантности этих форм:

$$\omega^a(v, dv)=\omega^a(u, du). \tag{32}$$

Внешнее дифференцирование этих уравнений с использованием (31) дает систему внешних уравнений

$$\frac{1}{2}c^a_{bc}\omega^b(v, dv)\wedge\omega^c(v, dv) =$$

$$=\frac{1}{2}c^a_{bc}\omega^b(u, du)\wedge\omega^c(u, du).$$

Но эти уравнения удовлетворяются алгебраически в силу самих же уравнений (32). По теореме Фробениуса, система (32) вполне интегрируема, а значит, согласно теореме 1, определяет однозначно локальную группу Ли. ■

Замечание. Согласно условию теоремы 2

$$c^a_{(bc)}=0. \tag{33}$$

Если же продифференцировать внешним образом уравнения (31), то, используя затем эти же уравнения (31), получим

$$c^a_{(bc}c^d_{f)a}=0. \tag{34}$$

Оказывается справедливой следующая теорема, которую приведем без доказательства.

Теорема 3. *Если константы* $c^a{}_{bc}$ $(a, b, c=1, 2, \ldots, r)$ *удовлетворяют тождествам* (10), *то они являются структурными константами некоторой* r*-мерной локальной группы Ли.*

Пусть ω^a — базисные инвариантные формы группы Ли G_r, а Ω—p—форма, определенная на G_r. Эту форму можно разложить по формам ω^a (образующим корепер в любой точке $u\in G_r$):

$$\Omega=c_{a_1\ldots a_p}\omega^{a_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{a_p}, \tag{35}$$

причем коэффициенты $c_{a_1\ldots a_p}$ можно считать альтернированными и, значит, кососимметрическими.

Теорема 4. *Определенная на группе* p*-форма* Ω *инвариантна* (точнее, левоинвариантна) *тогда и только тогда, когда в ее разложении* (35) *по базисным ин-*

вариантным формам все альтернированные коэффициенты $c_{a_1 \ldots a_p}$ — постоянные.

□ Если в разложении (35) все $c_{a_1 \ldots a_p}$ постоянны, а 1-формы ω^a инвариантны, то ясно, что и сама p-форма Ω является инвариантной. Поэтому достаточность условия очевидна. Докажем необходимость. Возьмем инвариантную p-форму и разложим ее по базисным инвариантным формам: $c_{a_1 \ldots a_p}(u^1, \ldots, u^r)\, \omega^{a_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{a_p}$. По условию эта форма левоинвариантна, т. е. сохраняется при замене u^a на $\varphi^a(a, u)$. Значит, учитывая инвариантность базисных форм, можно записать тождество

$$c_{a_1 \ldots a_p}(\varphi^1(a, u), \ldots, \varphi^r(a, u))\, \omega^{a_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{a_p} =$$

$$= c_{a_1 \ldots a_p}(u^1, \ldots, u^r)\, \omega^{a_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{a_p}.$$

Отсюда следует совпадение альтернированных коэффициентов: $c_{a_1 \ldots a_p}(\varphi^1(a, u), \ldots, \varphi^r(a, u)) = c_{a_1 \ldots a_p}(u^1, \ldots u^r)$. Полагая здесь $u^a = 0$, получим

$$c_{a_1 \ldots a_p}(a^1, \ldots, a^r) = c_{a_1 \ldots a_p}(0, \ldots, 0),$$

где a^b — произвольные. Следовательно, $c_{a_1 \ldots a_p}$ — постоянные. ■

Замечание 1. Две r-мерные группы Ли G_r и G_r' называются *изоморфными*, если существует диффеоморфизм $f: G_r \to G_r'$, сохраняющий групповую композицию, т. е.

$$\forall u_1, u_2 \in G_r, \quad f(u_1 \cdot u_2) = f(u_1) \cdot f(u_2).$$

Оказывается, что две *r-мерные группы Ли G_r и G_r' изоморфны* (локально — в некоторых окрестностях U и U' своих единиц e и e') *тогда и только тогда, когда их структурные константы c^a_{bc} и $c^{a'}_{b'c'}$ связаны тензорным законом преобразования:*

$$c^{a'}_{b'c'} = p^{a'}_a p^b_{b'} p^c_{c'} c^a_{bc},$$

где коэффициенты $p^a_{a'}$, $p^{a'}_a$ — постоянные и $p^{a'}_a p^a_{b'} = \delta^{a'}_{b'}$, $p^a_{a'} p^{a'}_b = \delta^a_b$.

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — алгебры Ли над полем K. Линейное отображение $\sigma\, \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ называется *гомоморфизмом*, если

$$\forall X, Y \in \mathfrak{A} \quad \sigma([X, Y]) = [\sigma(X), \sigma(Y)].$$

Если при этом $\sigma^{-1}(0) = 0$, то σ называется *изоморфизмом алгебры* $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Справедливо утверждение: *группы Ли G_r и G_r' локально изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их алгебры Ли* $\mathfrak{G}_r$ и $\mathfrak{G}_r'$ [4].

Замечание 2. Можно показать, что всякая подгруппа Ли H_m группы Ли G_r является интегральным многообразием системы уравнений вида $\theta^i(u, du) = 0$ $(i = 1, \ldots, r-m)$, проходящим через единицу e группы, где $\theta^i(u, du) = c_a{}^i \omega^a(u, du)$, $c_a{}^i = \mathrm{const}$. Следуя Г. Ф. Лаптеву, эти линейно независимые 1-формы θ^i будем называть *определяющими формами подгруппы.* При этом имеет место утверждение: *система линейно независимых инвариантных 1-форм группы Ли является системой определяющих форм некоторой подгруппы Ли тогда и только тогда, когда эта система вполне интегрируема. Интегральными многообразиями этой системы являются все классы смежности по указанной подгруппе и только они.*

Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра Ли над полем K (характеристики 0); $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ — векторные подпространства в $\mathfrak{A}$. Через $[\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]$ обозначают векторное подпространство в $\mathfrak{A}$, порожденное множеством векторов $[X, Y]$, где $X \in \mathfrak{B}$, $Y \in \mathfrak{C}$. Подпространство $\mathfrak{B}$ называется *подалгеброй в* $\mathfrak{A}$, если $[\mathfrak{B}, \mathfrak{B}] \subset \mathfrak{B}$. Оказывается справедливым следующее утверждение: *пусть G_r — группа Ли, H_m — ее подгруппа Ли, $\mathfrak{G}_r$ и h_m — их алгебры Ли.* Тогда *h_m — подалгебра в $\mathfrak{G}_r$.* Обратно: *каждая подалгебра* в $\mathfrak{G}_r$ *является алгеброй Ли определенной связной подгруппы Ли в G_r* [23].

Замечание 3. *Инвариантной подгруппой* или *нормальным делителем группы G_r* называется подгруппа, инвариантная относительно группы $\{\alpha_a\}$ внутренних автоморфизмов группы G_r:

$$\forall \alpha_a \in \{\alpha_a\} \quad \alpha_a(H) = H.$$

Можно доказать, что *система инвариантных 1-форм $\omega^i(u, du)$ группы G_r является определяющей для некоторой инвариантной подгруппы H_m тогда и только тогда, когда внешние дифференциалы форм*

ω^i *выражаются только через эти формы:*

$$D\omega^i = \frac{1}{2} c^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k. \qquad (36)$$

Из уравнений (36) заключаем, что 1-формы ω^i ($i=1, 2, \ldots, r-m$) являются базисными инвариантными формами некоторой (локальной) группы Ли G_{r-m}. Элементами из G_{r-m} являются классы смежности по H_m в G_r, т. е. $G_{r-m} = G_r/H_m$ (точнее, G_{r-m} изоморфна G_r/H_m). Таким образом, *система определяющих форм ω^i инвариантной подгруппы H_m группы G_r сама является системой базисных инвариантных форм фактор группы G_r/H_m* [11, 18].

Пусть $\mathfrak{B}$ — векторное подпространство алгебры Ли $\mathfrak{A}$. Это подпространство называется *идеалом* в $\mathfrak{A}$, если $[\mathfrak{B}, \mathfrak{A}] \subset \mathfrak{B}$. Следовательно, всякий идеал алгебры $\mathfrak{A}$ есть частный случай ее подалгебры.

Справедливо следующее утверждение: *идеалу h_{r-m} алгебры Ли $\mathfrak{G}_r$ группы Ли G_r соответствует инвариантная подгруппа H_{r-m} в G_r.* Обратно: *если подгруппа Ли H_{r-m} — нормальный делитель в G_r, то ее алгебра Ли h_{r-m} является идеалом в $\mathfrak{G}_r$.*

Замечание 4. Можно доказать, что *группа Ли G_r коммутативна тогда и только тогда, когда ее тензор структуры нулевой*: $c^a{}_{bc}=0$. Но тогда и $\bar{c}^a{}_{bc}=0$ и, значит, в алгебре Ли $\mathfrak{G}_r$ получим $[X_b, X_c]=0$ для любого базиса (X_a) алгебры $\mathfrak{G}_r$. Нетрудно заметить, что при этом

$$\forall X, Y \in \mathfrak{G}_r, \quad [X, Y]=0. \qquad (37)$$

Обратно: из (37) легко получить $c^a{}_{bc}=0$. Алгебра, удовлетворяющая условию (37), называется *коммутативной*. Таким образом, *группа Ли G_r коммутативна тогда и только тогда, когда коммутативна ее алгебра Ли $\mathfrak{G}_r$.*

§ 19. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ЛИ. РЕПЕРЫ

Пусть G и $\bar{G}$ — группы. *Представлением* (или *гомоморфизмом*) группы G в группу $\bar{G}$ называют отображение $f: G \to \bar{G}$ такое, что $\forall x, y \in G$ $f(xy) = f(x) \times \times f(y)$.

При $y=e$ (единица в G) получим $f(x) = f(x) \cdot f(e)$. Следовательно, $f(e) = \bar{e}$ (единица в $\bar{G}$). Далее, имеем $f(xx^{-1}) = f(x) f(x^{-1})$, т. е. $\bar{e} = f(x) f(x^{-1})$, и, значит,

$f(x^{-1})=(f(x))^{-1}$. Мы видим, что: а) $f(x), f(y)\in f(G)\Rightarrow$ $\Rightarrow f(x)\cdot f(y)=f(xy)\in f(G)$, б) $f(x)\in f(G)\Rightarrow (f(x))^{-1}=$ $=f(x^{-1})\in f(G)$.

Следовательно, $f(G)$ — группа (подгруппа в $\bar{G}$). Из алгебры известно, что ядро H гомоморфизма f (полный прообраз единицы $\bar{e}$) является нормальным делителем в G; группа $f(G)$ изоморфна фактор-группе $G/H: f(G)\simeq G/H$.

Как известно [2], для всякого множества $E\neq\varnothing$ существует группа $\mathfrak{S}_E$ всех преобразований этого множества. Ее подгруппы называются *группами преобразований* множества E.

Можно рассматривать представление $f: G\to\mathfrak{S}_E$ группы G в группу $\mathfrak{S}_E$. Если гомоморфизм f — инъективный (и, значит, группы G и $f(G)$ изоморфны), то $f(G)$ называют *реализацией* группы G в виде группы преобразований множества E (при этом говорят, что f — *точное представление*).

Всякая группа G допускает реализации в виде групп преобразований, например в виде группы ее левых сдвигов или в виде группы ее правых сдвигов.

Из сказанного выше следует, что в общем случае представления $f: G\to\mathfrak{S}_E$ группа $f(G)$ есть реализация фактор-группы G/H в виде группы преобразований множества E, где H — ядро гомоморфизма f. В этом общем случае представления f говорят, что группа G действует на множестве E (и называют G группой операторов). Пусть $f(g)=\bar{g}\in\mathfrak{S}_E$. Вместо $\bar{g}(x)$ пишут $g(x)$ и даже gx (при операторной точке зрения).

Фигурой будем называть всякое подмножество в $E\neq\varnothing$. Пусть Γ — группа преобразований множества E. В множестве $P(E)$ всех фигур из E можно установить отношение эквивалентности: $F\overset{\Gamma}{\sim}F'$, если $\exists f\in$ $\in\Gamma \mid f(F)=F'$.

Элементы фактор-множества $P(E)/\Gamma$ называются *классами интранзитивности* группы Γ.

Возьмем элемент $a\in E$. Так как $\{a\}\in P(E)$, то элемент a определяет содержащий его класс интразитивности $L(a)=\{f(a)\mid f\in\Gamma\}$, который называют *орбитой элемента* a относительно группы Γ.

Группа Γ называется *транзитивной*, если $\forall a, b\in E$ $\exists f\in\Gamma \mid f(a)=b$; в противном случае группа называется *интразитивной*. Для транзитивной группы Γ имеем $\forall a\in E$ $L(a)=E$, т. е. существует только один класс интразитивности из одноэлементных подмножеств множества E и этот класс совпадает с E.

Пусть дано представление $f: G \to \mathfrak{G}_E$. Говорят, что G транзитивно действует в E, если $f(G)$ — транзитивная группа преобразований E.

Пусть H — произвольная подгруппа группы G и G/H — множество левых смежных классов по подгруппе H. Тогда G действует транзитивно на множестве G/H. Действительно, для любых двух элементов $u=aH$ и $v=bH$ этого множества имеем $a^{-1}u=$ $=b^{-1}v$ и, значит, $v=(ba^{-1})u$.

Можно показать, что действие группы G на множестве G/H является точным, если подгруппа H не содержит никакого нормального делителя группы G, отличного от $\{e\}$. Всякая транзитивная реализация группы G может быть с точностью до изоморфизма получена таким образом.

Пусть G действует на множестве E. Зафиксируем точку x_0 в E. Множество $H_{x_0}=\{g \in G \mid g(x_0=x_0\}$ называют *группой изотропии* или *стационарной подгруппой* точки x_0 (легко видеть, что H_{x_0} действительно является подгруппой в G). Возьмем $y_0 \in L(x_0)$ (орбита точки x_0). Тогда $\exists g \in G \mid g(x_0)=y_0$. Пусть $h \in H_{x_0}$, $l \in H_{y_0}$. Значит, $h(x_0)=x_0$ $l(y_0)=y_0$. Поэтому соотношение $y_0=g(x_0)$ можно записать так: $y_0=(gh)(x_0)=$ $=(ghg^{-1})(y_0)$. Следовательно, $ghg^{-1} \in H_{y_0}$.

Точно так же имеем $x_0=g^{-1}(y_0)=(g^{-1}l)(y_0)=$ $=(g^{-1}lg)(x_0)$. Отсюда $g^{-1}lg \in H_{x_0}$. Значит, $H_{y_0}=$ $=gH_{x_0}g^{-1}$, т. е. группы изотропии точек x_0 и y_0 (одной орбиты) сопряжены.

Будем рассматривать различные представления группы Ли G_r в виде группы гомеоморфизмов аналитического многообразия X_n (причем все такие рассмотрения будут носить локальный характер). Будем называть X_n пространством представления группы G_r или пространством с фундаментальной группой G_r [11].

Если группа G_r действует в X_n транзитивно, то X_n называется *пространством Клейна* или *однородным пространством*.

Возьмем в X_n фигуру F. Множество $H_F=\{u \in$ $\in G_r \mid u(F)=F\}$ является подгруппой в G_r, она называется *стационарной подгруппой фигуры* F. Если фигуры F и F' G-эквивалентны, то их стационарные подгруппы сопряжены (доказательство такое же, как и выше).

Репером пространства представления группы называется такая фигура R, стационарная подгруппа которой является единичной, т. е. $H_R=\{e\}$.

Теорема 1. *Если представление группы G_r — точное и транзитивное, то в пространстве представления X_n существует репер, состоящий из конечного множества точек.*

□ Возьмем точку $x_1 \in X_n$. Так как G_r транзитивно действует в X_n, то стационарная подгруппа

$$H_{x_1} \neq G_r. \tag{1}$$

Как в самой группе G_r, так и в ее подгруппе H_{x_1} будем рассматривать лишь связную компоненту единицы. Поэтому из (1) следует, что $\dim H_{x_1}=r_1<r$.

Если $H_{x_1}=\{e\}$, то уже точка x_1 образует репер (это имеет место в случае просто транзитивного представления, т. е. такого представления, когда для любых $x, y \in X_n$ существует единственный элемент $g \in G_r$ такой, что $g(x)=y$). Пусть $H_{x_1} \neq \{e\}$. Тогда существует точка $x_2 \in X_n$, не инвариантная относительно H_{x_1} (если бы все точки из X_n были инвариантны относительно H_{x_1}, то ядро представления было бы отлично от $\{e\}$ и, значит, представление не было бы точным).

Стационарная подгруппа H_{x_2} сопряжена с H_{x_1} и, значит, $\dim H_{x_2}=r_1$, но $H_{x_2} \neq H_{x_1}$ (иначе точка x_2 была бы инвариантна относительно H_{x_1}, что неверно). Поэтому их пересечение $H_{x_1} \cap H_{x_2}=H_{x_1, x_2}$ — стационарная подгруппа упорядоченной пары (x_1, x_2) точек, причем $\dim H_{x_1, x_2}=r_2<r_1$.

Если $H_{x_1, x_2}=\{e\}$, то доказательство закончено. Если же $H_{x_1, x_2} \neq \{e\}$, то в силу точности представления группы G_r существует точка x_3, не инвариантная относительно H_{x_1, x_2} и, значит, $H_{x_1, x_2} \subset H_{x_3}$. Их пересечение $H_{x_1, x_2, x_3}=H_{x_1, x_2} \cap H_{x_3}$ — стационарная подгруппа упорядоченной тройки (x_1, x_2, x_3), причем $\dim H_{x_1, x_2, x_3}=r_3<r_2$, и т. д.

Наконец, получаем упорядоченное множество точек $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ такое, что его стационарная подгруппа $H_{x_1, \ldots, x_m}=\{e\}$. Значит, это упорядоченное множество точек и есть репер пространства представления. ■

Замечание 1. Если представление транзитивное, но не точное, то реперы в обычном смысле построить нельзя. Можно построить лишь фигуру F, стационарная подгруппа которой совпадает со стационарной подгруппой всего пространства. Обозначим эту подгруппу через H_{X_n}. Можно доказать, что $H_{X_n}=\bar{H}$ — максимальный нормальный делитель группы G_r, содержащийся в стационарной подгруппе H_x точки $x\in X_n$. Для группы $G_r/\bar{H}$ представление f является транзитивным и точным.

Замечание 2. Если представление не транзитивное, то все пространство разбивается на классы интранзитивности — орбиты точек, причем на каждой орбите группа действует транзитивно. Для каждой орбиты можно строить реперы, как указано выше.

В дальнейшем будем рассматривать только однородные пространства. На построенный репер R воздействуем всеми операторами группы G_r. Получим полное семейство реперов S_R, так как если R — репер и $a\in G_r$, то $a(R)$ также репер. В самом деле, пусть $R'=aR$. Значит, фигуры R и R' эквивалентны. Поэтому их стационарные подгруппы сопряжены: $H_{R'}=aH_Ra^{-1}$. Но $H_R=\{e\}$, так как R — репер. Следовательно, $H_{R'}=a\{e\}a^{-1}=\{e\}$, т. е. R' также репер.

Если $R'\in S_R$, то $\exists a\in G_r|a(R)=R'$ (по определению S_R). Легко видеть, что такой оператор a единственный. В самом деле, если предположить, что $R'=$ $=b(R)$, то $a(R)=b(R)$. Отсюда $(b^{-1}a)(R)=R$, и так как R — репер, то $b^{-1}a=e$ и, значит, $a=b$. Следовательно, группа G_r действует на множестве S_R просто транзитивно.

Теорема 2. *Существует биекция* $g:S_R\to G_r$.

□ Возьмем в множестве S_R какой-либо репер R_0 и назовем его начальным репером: поставим ему в соответствие единичный элемент e группы G_r. Согласно сказанному выше, для каждого репера R существует, и притом единственный, элемент $a\in G_r$ такой, что $R=a(R_0)$. Значит, $S_R=S_{R_0}$.

Каждому реперу $R\in S_{R_0}$ поставим в соответствие именно тот (единственный) элемент $a\in G_r$, для которого $R=a(R_0)$: $g(R)=a$. Ясно, что $R_1\neq R_2\Rightarrow$ $\Rightarrow g(R_1)\neq g(R_2)$ и, значит, g — инъекция. Для $\forall b\in$ $\in G_r$ имеем $b(R_0)=R'$, следовательно, $g(R')=b$ и поэтому g — сюръекция. Окончательно получим, что g — биекция. ■

Следствие. *Координаты u^a точки u на группе G_r можно рассматривать как параметры соответствующего репера R, т. е. такого репера, что $g(R)=u$ (u, значит, $R=g^{-1}u$).*

В пространстве X_n представления группы Ли G_r введем локальную координатную систему $K:U\to R^n$ (где U открыто в X_n), $K(x)=(x', x^2,\dots,x^n)\in R^n$, $x\in\in U$.

Если $u\in G_r$ и $\tilde{x}=u(x)$, причем $x(x^i)$, $\tilde{x}(\tilde{x}^i)$, где x^i и $\tilde{x}^i$ — координаты точек x и $\tilde{x}$ в одной и той же системе K, то

$$\tilde{x}^i=f^i(u^a, x^k) \quad (i,\ j,\ k=1, 2,\dots, n;$$
$$a,\ b,\ c=1, 2,\dots, r), \tag{2}$$

Потребуем, чтобы функции f^i были аналитическими функциями своих аргументов. Эти функции должны удовлетворять следующим трем условиям:

$$f^i(0,\ x^k)=x^i \tag{3}$$

(так как единица e в G_r получается при $u^a=0$),

$$f^i(u,\ f^k(v,\ x))=f^i(\varphi(u,\ v),\ x); \tag{4}$$

$$x^i=f^i(\overset{*}{u},\ \tilde{x}^k), \tag{5}$$

где $\overset{*}{u}=u^{-1}$ (условия (3)—(5) имеют место в силу того, что мы рассматриваем представление группы G_r в группу преобразований множества X_n).

Однако можно считать, что формулы (2) или (что то же самое) формулы (5) определяют преобразование старых «абсолютных» координат x^i в новые «относительные» координаты x^i той же точки.

Таким образом, представление группы G_r определяет в $U\subset X_n$ семейство $\{K_u\}$ эквивалентных между собой систем координат (предполагается, что первоначальная система координат K выбрана). Свяжем эти системы координат с реперами следующим образом. Начальному реперу R_0 поставим в соответствие исходную «абсолютную» систему координат, которую обозначим K_0. Возьмем произвольный репер $R\in S_{R_0}$. Тогда $\exists u\in G_r | R=u(R_0)$. Этот репер R будем обозначать через R_u.

Координатами точки x относительно репера R_u назовем абсолютные координаты (т. е. координаты в системе K_0 или, как говорят, относительно репера R_0) точки $\check{x}=u^{-1}(x)$. Следовательно, *с каждым репером R_u оказывается связанной своя координатная система K_u*. Связь между абсолютными координатами $\tilde{x}^i$ точки x (т. е. координатами относительно репера R_0) и ее относительными координатами x^i (т. е. относительно репера R_u) и определяется формулами вида (2).

Заметим, что *если репер и точку подвергнуть одному и тому же преобразованию группы, то относительные координаты точки не изменятся.*

Это следует из того, что $u(R_0)=R_u$ и $u(\check{x})=x$, причем точка x имеет относительно R_u те же координаты, что и точка $\check{x}$ относительно R_0.

§ 20. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ ЛИ

В § 19 было отмечено, что левоинвариантные 1-формы ω^a группы Ли G_r удовлетворяют условию

$$du^a=\left(\frac{\partial\varphi^a(u,\ v)}{\partial v^b}\right)_{|v^c=0}\omega^b. \tag{1}$$

Поэтому можно записать

$$u^a+du^a\approx\varphi^a,\ (u,\ \omega), \tag{2}$$

где $\approx$ означает равенство лишь главных частей, т. е. членов нулевого и первого порядков. В самом деле, разлагая здесь правую часть по степеням ω^b, т. е.

$$\varphi^a(u,\ 0)+\left(\frac{\partial\varphi^a(u,\ v)}{\partial v^b}\right)_{|v^c=0}\omega^b+\ldots,$$

и учитывая, что $\varphi^a(u,\ 0)=u^a$, мы и получим формулу (2).

Рассмотрим формулы (2) § 19:

$$\tilde{x}^i=f^i(u^a,\ x^k). \tag{3}$$

Будем здесь считать $\tilde{x}^i$ абсолютными координатами точки x, x^i — ее относительными координатами. Зафиксируем $\tilde{x}^i$ (точка x неподвижна в абсолютной системе координат) и изменим параметры u^a (тогда изменятся и относительные координаты, так как, по формуле (4) § 19, $x^i = x^i(u, \tilde{x})$). Получим $\tilde{x}^i = f^i(u + du, x + dx)$ и, согласно формуле (2), находим

$$\tilde{x}^i \approx f^i(\varphi(u, \omega), x + dx).$$

В силу формулы (4) § 19 имеем

$$\tilde{x}^i = f^i(u, f(\omega, x + dx)). \tag{4}$$

Разложим функцию $f^k(\omega, x+dx)$ по степеням ω:

$$f^k(\omega, x + dx) = f^k(0, x + dx) + \left(\frac{\partial f^k(\omega, x + dx)}{\partial \omega^b}\right)_{\omega^c = 0} \omega^b + \ldots . \tag{5}$$

Разложим функцию $f^k(\omega, x+dx)$ по степеням dx:

$$f^k(\omega, x + dx) = f^k(\omega, x) + \frac{\partial f^k(\omega, x)}{\partial x^l} dx^l + \ldots .$$

Учитывая формулу (3) § 19, запишем равенство (5) в виде

$$f^k(\omega, x + dx) = x^k + dx^k + \frac{\partial}{\partial \omega^b}\left(f^k(\omega, x) + \frac{\partial f^k(\omega, x)}{\partial x^l} dx^l + \ldots\right)_{\omega^c = 0} \omega^b + \ldots .$$

Учитывая лишь бесконечно малые первого порядка, получим

$$f^k(\omega, x + dx) \approx x^k + dx^k + \left(\frac{\partial f^k(\omega, x)}{\partial \omega^b}\right)_{\omega^c = 0} \omega^b = x^k + dx^k + \left(\frac{\partial f^k(u, x)}{\partial u^b}\right)_{u^c = 0} \omega^b.$$

Обозначим $dx^k + \left(\frac{\partial f^k(u, x)}{\partial u^b}\right)_{u^c = 0} \omega^b = \lambda^k$. Формула (4) примет вид

$$\tilde{x}^i \approx f^i(u^a, x^k + \lambda^k).$$

Разложим правую часть по степеням λ^k:

$$\tilde{x}^i \approx \tilde{x}^i + \frac{\partial f^i(u, x)}{\partial x^k} \lambda^k + \ldots .$$

Отсюда $\frac{\partial f^i(u, x)}{\partial x^k} \lambda^k = 0$ (принимаем во внимание лишь бесконечно малые первого порядка); так как $\det \left\| \frac{\partial f^l(u, x)}{\partial x^k} \right\| \neq 0$ (см. формулу (3) § 19), то $\lambda^k = 0$, или в развернутой записи

$$dx^k - \xi_a^k(x)\,\omega^a = 0, \tag{6}$$

где

$$\xi_a^k(x) = -\left(\frac{\partial f^k(u, x)}{\partial u^a}\right)_{u^b = 0}.$$

Таким образом, равенству (6) должны удовлетворять относительные координаты x^l точки $x \in X_n$ при условии, что ее абсолютные координаты $\tilde{x}^l$ сохраняются, т. е. что точка x остается неподвижной при преобразованиях из G_r.

Систему (6) называют *системой дифференциальных уравнений инвариантности точки пространства представления* [11].

Система дифференциальных уравнений (6) вполне интегрируема, так как ее решением служит многообразие, определяемое уравнениями (1), где $\tilde{x}^l = \mathrm{const}$, в пространстве всех переменных x^k, u^a. Это интегральное многообразие максимально возможной размерности r, причем через каждую точку пространства всех переменных проходит одно такое многообразие. Следовательно, система (6) вполне интегрируема.

Обратно: пусть система (6) вполне интегрируема. Тогда она имеет интегральное многобразие размерности r, проходящее через наперед заданную точку: $x^l = \tilde{x}^l (= \mathrm{const})$, $u^a = 0$, которое можно определить (локально) системой вида

$$\tilde{x}^l = f^l(u, x), \tag{7}$$

причем $\tilde{x}^l = \mathrm{const}$ и $f^l(0, x) = x^l$.

Так как 1-формы ω^a левоинвариантны; т. е. $\omega^a(\varphi(a, u), d\varphi(a, u)) = \omega^a(u, du)$, то многообразие $c^l{}_1 = f^l(\varphi(a, u), x)$ является интегральным. Как известно, любые (дифференцируемые) функции от первых интегралов также являются интегралами. Поэтому интегральным будет и многообразие $c^l{}_2 = f^l(a, f^k(u, x))$. При $u^a = 0$ получим $c^l{}_1 = f^l(a, x)$, $c^l{}_2 = f^l(a, x)$, т. е. $c^l{}_1 = c^l{}_2$. Однако начальные условия $\tilde{x}^l = c^l{}_1$, $u^a = 0$ определяют только одно интегральное многообразие и поэтому

$$f^i(a,\ f^k(u,\ x))=f^i(\varphi(a,\ u),\ x^k). \tag{8}$$

Система уравнений (7) определяет некоторое семейство G преобразований пространства X_n (переменных x^i). Формула (8) показывает, что произведение двух преобразований из G принадлежит множеству G.

Далее, используя формулы (8), имеем

$$f^i(\overset{*}{u},\ f^k(u,\ x))=f^i(\varphi(\overset{*}{u},\ u),\ x^k)=f^i(0,\ x^k)=x^i. \tag{9}$$

Значит, преобразование, обратное любому преобразованию из G, также принадлежит G. Из (8) и (9) следует, что G — группа. Формулы (7) на самом деле устанавливают сюръективное отображение f: $G_r \to G$, причем формулы (8) показывают, что произведению любых двух элементов из G_r отображение f ставит в соответствие произведение соответствующих элементов из G. Значит, f — гомоморфизм группы Ли G_r в группу преобразований (некоторой области в X_n), т. е. f — представление группы G_r. Этим доказана следующая основная теорема теории представлений группы Ли.

Теорема Ли — Картана. *Система дифференциальных уравнений*

$$dx^i=\xi^i_a\omega^a \tag{10}$$

определяет в пространстве переменных $x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n$ представление группы G_r с данными инвариантными 1-формами ω^a тогда и только тогда, когда коэффициенты $\xi^i{}_a=\xi^i{}_a(x)$ являются функциями (аналитическими) только от переменных $x^1,\ \ldots,\ x^n$ и эта система (10) *вполне интегрируема.*

В качестве примера применения формул (1) найдем левоинвариантные 1-формы ω^a аффинной группы $A(n, \mathbf{R})$. Эта группа действует в аффинном n-пространстве A_n. Преобразование $f\in A(n, \mathbf{R})$ переводит точку $x\in A_n$ в точку $y=f(x)\in A_n$. Пусть относительно одного и того же аффинного репера R точка x имеет координаты x^i, а точка y — координаты y^i. Тогда, как известно,

$$y^i=v^i_j x^j+v^i. \tag{11}$$

Преобразование $f \in A(n, \mathbf{R})$ определяется числовыми значениями $r=n^2+n=n(n+1)$ параметров $v^i{}_j$, v^i.

Возьмем другое преобразование $g \in A(n, \mathbf{R})$. Пусть $g(y)=z$ и в репере R точка z имеет координаты z^i. Тогда $z^i=a^i{}_j y^j+a^i$. Следовательно, $z^i=a^i{}_j(v^j{}_k x^k+ +v^j)+a^i$, т. е.

$$z^i=a^i_j v^j_k x^k+(a^i_j v^j+a^i). \tag{12}$$

Имеем $(gf)(x)=z$, причем из (12) заключаем, что gf определяется параметрами

$$c^i_k=a^i_j v^j_k, \quad c^i=a^i_j v^j+a^i. \tag{13}$$

Согласно формуле (1),

$$du^a=\left(\frac{\partial\varphi^a(u, v)}{\partial v^b}\right)_{v^c=0} \omega^b.$$

В данном случае роль u^a играют $a^i{}_j$, a^i, поэтому система форм ω^a состоит из форм $\omega^i{}_j$ и ω^i. По формулам (13) находим

$$da^i_k=\left(\frac{\partial c^i_k}{\partial v^j_t}\right)_{v=0} \omega^j_t, \quad da^i_k=a^i_j\omega^j_k.$$

Отсюда $\omega^j_k=\tilde{a}^j_i da^i_k$. Далее, $da^i=\left(\frac{\partial c^i}{\partial v^j}\right)_{v=0} \omega^j$ или $da^i= =a^i_j\omega^j$ и, значит,

$$\omega^j=\tilde{a}^j_i da^i. \tag{14}$$

Мы видим, что левоинвариантные 1-формы $\omega^i{}_j$, ω^i группы $A(n, \mathbf{R})$ представляют собой найденные в § 17 относительные компоненты подвижного аффинного репера. Там было показано, что эти компоненты удовлетворяют уравнениям структуры аффинного пространства A_n:

$$\left\{\begin{array}{l} D\omega^i=\omega^j\wedge\omega^i_j; \\ D\omega^i_j=\omega^k_j\wedge\omega^i_k. \end{array}\right. \tag{15}$$

С точки зрения теории групп Ли уравнения (15) следует называть уравнениями структуры аффинной группы $A(n, \mathbf{R})$, само же пространство A_n является пространством представления группы $A(n, \mathbf{R})$. Точно так же уравнениями структуры евклидова пространства E_n (или проективного P_n) служат уравнения структуры группы движений D_n (соответственно проективной группы $P(n, \mathbf{R})$.

§ 21. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ

Для одной и той же группы Ли G_r можно получить различные ее представления. Чтобы получить транзитивное представление, необходимо потребовать $n \leqslant r$.

Например, в проективном пространстве P_3 действует проективная группа $P(3, \mathbf{R})$. Однако эта же группа действует и на четырехмерном многообразии M_4 прямых из P_3. Таким образом, для одной и той же группы $P(3, \mathbf{R})$ мы уже имеем два различных пространства представления: P_3 и M_4.

Пусть дана группа Ли G_r. *Геометрическим объектом, присоединенным к группе* G_r, называется всякая точка какого-либо пространства представления этой группы [11].

Пусть X_n — пространство представления группы Ли G_r, $x \in X_n$, и $H_x = \{f \in G_r \mid f(x) = x\}$ — стационарная подгруппа точки x (объекта x). Напомним, что если $y \in L(x)$ (где $L(x)$ — орбита точки x относительно G_r), то подгруппы H_x и H_y сопряжены. Так как мы условились рассматривать только транзитивные представления, то $\forall x \in X_n$ $L(x) = X_n$ и можно сказать, что H_x и H_y сопряжены для любых точек x, y из X_n.

Основная теорема теории представления групп Ли сразу же приводит к следующей основной теореме теории геометрических объектов.

Теорема 1. *Система дифференциальных уравнений вида*

$$dx^i - \xi^i_a \omega^a = 0, \tag{1}$$

где $\omega^a(u, du)$ *— левоинвариантные формы группы Ли* G_r, *является системой дифференциальных уравнений инвариантности геометрического объекта* x *с относительными координатами* x^i *и группой преобразований* G_r *тогда и только тогда, когда выполнены два условия:* 1) *коэффициенты* ξ^i_a *являются аналитическими функциями только от переменных* x^k; 2) *система* (1) *вполне интегрируема.*

Можно доказать, что представление группы G_r, в котором переменные x^i играют роль относительных координат геометрического объекта, определяется однозначно [11].

Геометрический объект x называется *линейным объектом* (или *квазитензором*), если группа преобразований его координат линейна, т. е. эти преобразования имеют вид

$$\tilde{x}^i = b^i_k(u)\,x^k + b^i(u). \tag{2}$$

Геометрический объект x называется *линейным однородным объектом* (или *тензором*), если группа преобразований его координат линейна и однородна, т. е. если эти преобразования имеют вид

$$\tilde{x}^i = b^i_k(u)\,x^k. \tag{3}$$

Теорема 2 (теорема Г. Ф. Лаптева [11]). *Геометрический объект x является квазитензором только тогда, когда его система дифференциальных уравнений имеет вид*

$$dx^i = (k^i_{ja}x^j + k^i_a)\,\omega^a, \tag{4}$$

где $k^i{}_{ja}$ и $k^i{}_a$ — постоянные (т. е. функции $\xi^i{}_a(x)$ — линейные).

Геометрический объект x является тензором только тогда, когда его система дифференциальных уравнений имеет вид

$$dx^i = k^i_{ja}x^j\omega^a, \tag{5}$$

где $k^i{}_{ja}$ — постоянные (т. е. функции $\xi^i{}_a(x)$ — линейные однородные).

Замечание. Рассмотрим какой-либо тензор над вещественным векторным n-пространством V, например тензор T валентности $(0, 2)$. Пусть в базисе $B = (\vec{e}_i)$ тензор T имеет координаты t_{ij}, а в базисе $B' = (\vec{e}_{i'})$ — координаты $t_{i'j'}$. Тогда, как известно,

$$t_{i'j'} = a^i_{i'}a^j_{j'}t_{ij}, \tag{6}$$

где $\vec{e}_{i'} = a^i_{i'}\vec{e}_i$.

Можно считать, что V является пространством представления центроаффинной группы $A^0{}_n$ размерности $r = n^2$ (роль u^a играют $a^i{}_{i'}$). Мы видим, что уравнения (6) имеют вид (3). Следовательно, T является геометрическим объектом и притом тензором в смысле Г. Ф. Лаптева. Чтобы под символом T понимать точку пространства представления, следует учитывать, что T является вектором пространства $V^*\otimes V^*$, которое также служит пространством представления группы A^0_n.

Инвариантом называется тензор, имеющий только одну координату.

Конечные преобразования инварианта задаются уравнением вида $\tilde{x}=b(u)x$, а его дифференциальное уравнение есть $dx=xk_a\omega^a$, $k_a=\text{const}$.

Инвариант называется *относительным,* если $b(u)\not\equiv 1$ и, значит, не все k_a равны нулю.

Инвариант называется *абсолютным,* если $b(u)\equiv 1$, т. е. $\tilde{x}=x$. Значит, дифференциальные уравнения абсолютного инварианта имеют вид $dx=0$ (т. е. все k_a равны нулю).

ГЛАВА IV

СВЯЗНОСТИ В РАССЛОЕНИЯХ

§ 22. ЛИНЕЙНАЯ СВЯЗНОСТЬ НА ГЛАДКОМ МНОГООБРАЗИИ

Пусть X_n — гладкое многообразие и D^1 — множество всех (дифференцируемых) векторных полей на X_n. Мы знаем, что D^1 является унитарным модулем над кольцом $F(X_n)$. Элементы модуля D^1 будем обозначать $X, Y, \ldots$. Известно, что каждое векторное поле на X_n есть сечение касательного расслоения $T(X_n)$.

Линейной связностью на многообразии X_n называется отображение $\Delta: D^1\times D^1\to D^1$ (вместо $\Delta(X, Y)$ пишут $\Delta_X Y$), которое удовлетворяет следующим двум условиям (аксиомам линейной связности на X_n):

1^0. $\forall f, g\in F(X_n)$, $\forall X_i, Y\in D^1: \nabla_{fX_1+gX_2}Y=$ $=f\nabla_{X_1}Y+g\nabla_{X_2}Y$.

2^0. $\nabla_X(fY_1+gY_2)=(Xf)Y_1+f\nabla_X Y_1+(Xg)Y_2+$ $+g\nabla_X Y_2$.

При этом определено отображение $\Delta_X: D^1\to D^1$, которое называется *ковариантной производной* относительно векторного поля X.

Пару (X_n, ∇) называют *пространством линейной связности* (или аффинной связности) и обозначают через L_n.

Пусть U — координатная окрестность на X_n с картой φ: $U \to R^n$ и $\varphi(x) = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Тогда в U определены векторные поля $\partial/\partial x^i$.

Обозначим $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} = \nabla_i$ и определим на U функции Γ^k_{ij} формулой

$$\nabla_i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{1}$$

Пусть V — другая координатная окрестность (содержащая точку x) с картой $\psi: V \to R^n$ и $\psi(x) = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$. Тогда

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = \Gamma'^k_{ij}\frac{\partial}{\partial y^k}.$$

Если $x \in U \cap V$, то x имеет координаты x^i в карте φ и координаты y^j в карте ψ и, как мы знаем, $x^i = x^i(y^1, \ldots, y^n)$, $y^i = y^i(x^1, \ldots, x^n)$, где правые части этих равенств — дифференцируемые функции. Как известно, $\frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial x^j}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^j}$. Имеем

$$\nabla_{\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^j}}\left(\frac{\partial}{\partial y^t}\right) = \Gamma'^k_{it}\frac{\partial}{\partial y^k}.$$

По аксиоме 1^0, левая часть этого равенства есть $\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\nabla_j\left(\frac{\partial}{\partial y^t}\right)$ и, следовательно,

$$\Gamma'^k_{it}\frac{\partial}{\partial y^k} = \frac{\partial x^j}{\partial y^i}\nabla_j\left(\frac{\partial}{\partial y^t}\right). \tag{2}$$

Используя аксиому 2^0, находим

$$\nabla_j\left(\frac{\partial}{\partial y^t}\right) = \left(\frac{\partial^2 x^p}{\partial y^t \partial y^s}\frac{\partial y^s}{\partial x^j}\frac{\partial y^k}{\partial x^p} + \frac{\partial x^p}{\partial y^t}\Gamma^q_{jp}\frac{\partial y^k}{\partial x^q}\right)\frac{\partial}{\partial y^k}.$$

Учитывая, что матрицы $\left\|\frac{\partial y^s}{\partial x^j}\right\|$ и $\left\|\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\right\|$ взаимно обратны, а векторы $\frac{\partial}{\partial y^k}$ линейно независимы, получим

$$\Gamma'^k_{it} = \frac{\partial x^j}{\partial y^i}\frac{\partial x^p}{\partial y^t}\frac{\partial y^k}{\partial x^q}\Gamma^q_{jp} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial y^i \partial y^t}\frac{\partial y^k}{\partial x^p}. \tag{3}$$

Пусть $A=(\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ — дифференцируемый атлас, определяющий на X_n структуру дифференцируемого многообразия. Тогда координатные окрестности U_α карт φ_α образуют покрытие многообразия X_n. Допустим, что в каждой координатной окрестности U_α задана система функций $\Gamma^k_{ij}\in F(U_\alpha)$ такая, что в пересечении $U_\alpha\cap U_\beta$ любых двух окрестностей имеют место формулы (3).

Тогда можно определить ∇_i формулой (1). Мы получим линейную связность $\nabla_{(U_\alpha)}$ в каждой координатной окрестности U_α.

Затем мы можем определить линейную связность ∇ на всем многообразии X_n следующим способом. Пусть $X, Y\in D^1$, $x\in X_n$. Существует координатная окрестность U_α, содержащая точку x. Положим

$$(\nabla_X Y)_x=(\nabla_{(U_\alpha)X}Y)_x.$$

Тогда ∇ — линейная связность на многообразии X_n, индуцирующая в каждой координатной окрестности U_α связность $\nabla_{(U_\alpha)}$[19].

Таким образом, линейная связность на многообразии X_n определяется в общем случае заданием n^3 функций Γ^k_{ij} от n аргументов. Эти функции Γ^k_{ij} называются *коэффициентами аффинной связности* ∇ в репере $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$.

Пусть $X=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y=\eta^j\frac{\partial}{\partial x^j}$. Найдем координаты $\nabla_X Y$. Пользуясь аксиомами 1^0 и 2^0, находим

$$\nabla_X Y=\xi^i\left(\frac{\partial\eta^k}{\partial x^i}+\Gamma^k_{ij}\eta^j\right)\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Заметим, что $\nabla_i\left(\eta^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right)=\left(\frac{\partial\eta^k}{\partial x^i}+\Gamma^k_{ij}\eta^j\right)\frac{\partial}{\partial x^k}$.

Это так называемая i-я ковариантная производная векторного поля $Y=\eta^k\frac{\partial}{\partial x^k}$. Ее записывают короче:

$$\Delta_i\eta^k=\frac{\partial\eta^k}{\partial x^i}+\Gamma^k_{ij}\eta^j.$$

В координатной окрестности U зададим n линейно независимых векторных полей X_i $(i=1, 2, ..., n)$ и вместо естественного репера $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x$ будем пользоваться репером $(X_i)_x$. Положим

$$\nabla_{X_i} X_j = \gamma^k_{ij} X_k. \tag{4}$$

Так, определенные функции $\gamma^k{}_{ij} \in F(U)$ называются *коэффициентами связности* ∇ в репере (X_i) [10]. Пусть $X_i = \alpha^j_i \frac{\partial}{\partial x^j}$. Значит, $\forall x \in U$ $\det\|\alpha^i{}_j\|_x \neq 0$. Имеем

$$\nabla_{X_i} X_j = \nabla_{\alpha^t_i \frac{\partial}{\partial x^t}} \left(\alpha^s_j \frac{\partial}{\partial x^s}\right) =$$

$$= \left(\alpha^t_i \alpha^s_j \Gamma^p_{ts} + \alpha^t_i \frac{\partial \alpha^p_j}{\partial x^t}\right) \tilde{\alpha}^k_p X_k.$$

Сравнивая с формулой (4), находим

$$\gamma^k_{ij} = \tilde{\alpha}^k_p \left(\alpha^t_i \alpha^s_j \Gamma^p_{ts} + \alpha^t_i \frac{\partial \alpha^p_j}{\partial x^t}\right). \tag{5}$$

Формулы (5) в точности совпадают с формулами (3), если положить $\alpha^j_i = \frac{\partial x^j}{\partial y^i}$, т. е. если брать $X_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$ (это частный случай выбора репера (X_i)).

Таким образом, если известны функции $\Gamma^k{}_{ij}$ и векторные поля X_i, то по формулам (5) определяются и функции $\gamma^k{}_{ij}$. Обратно: зная функции $\gamma^k{}_{ij}$ и векторные поля X_i, можно по формулам (5) найти функции $\Gamma^k{}_{ij}$.

Пусть корепер $(\omega^i)_x$ взаимен реперу $(X_i)_x$. Тогда $\omega^i = \tilde{\alpha}^i{}_j dx^j$. Определим 1-формы $\omega^k{}_j$ формулами $\omega^k{}_j = \gamma^k{}_{ij} \omega^i$. Находим

$$D\omega^i = d\tilde{\alpha}^i_j \wedge dx^j = \alpha^t_p \alpha^j_q \frac{\partial \tilde{\alpha}^i_j}{\partial x^t} \omega^p \wedge \omega^q.$$

Рассмотрим 1-строчную матрицу $\Sigma = (\Sigma^1, \Sigma^2, \ldots, \Sigma^n)$, элементами которой являются 2-формы $\Sigma^i = D\omega^i - \omega^p \wedge \omega^i{}_p$. Матрица Σ определяет так называемое *кручение связности* ∇.

Имеем

$$\Sigma^i = D\omega^i - \omega^p \wedge \omega^i_p = \frac{1}{2} S^i_{pq} \omega^p \wedge \omega^q,$$

где введено обозначено

$$S^i_{pq}=2\left(\gamma^i_{[pq]}+\alpha^t_{[p}\alpha^j_{q]}\frac{\partial a^i_j}{\partial x^t}\right). \tag{6}$$

Поэтому

$$D\omega^i=\omega^p\wedge\omega^i_p+\frac{1}{2}S^i_{pq}\omega^p\wedge\omega^q. \tag{7}$$

Если $X_i=\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, то $\alpha^t_i=\delta^t_i$, а согласно формулам (5), $\gamma^k{}_{ij}=\Gamma^k{}_{ij}$ и тогда, используя формулы (6), получим

$$S^i_{pq}=2\Gamma^i_{[pq]}. \tag{8}$$

Далее, по формулам (3), учитывая, что $\dfrac{\partial^2 x^p}{\partial y^l\partial y^t}=$ $=\dfrac{\partial^2 x^p}{\partial y^t\partial y^l}$, находим

$$\Gamma'^k_{[lt]}=\frac{\partial x^j}{\partial y^l}\frac{\partial x^p}{\partial y^t}\frac{\partial y^k}{\partial x^q}\Gamma^q_{[jp]}.$$

Следовательно, $\Gamma^q_{[jp]}$ — координаты тензора типа (1; 2) в естественном репере $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)$. В силу формул (8) функции $S^i{}_{pq}$ также определяют в точке $x\in X_n$ тензор типа (1; 2). Функции $S^i{}_{pq}$ в формулах (1) (т. е. функции, определяемые формулами (6)) — координаты этого тензора в репере (X_i). Тензор $S^i{}_{pq}$ называется *тензором кручения связности* ∇; он кососимметричен по нижним индексам.

Матрицу $\omega=(\omega^k{}_i)$ размера $n\times n$ называют *формой связности* ∇.

Так как в корепере $(\omega^i)_x$ имеем $\omega^k{}_i=\gamma^k{}_{ji}\omega^j$, то

$$D\omega^k_i=d\gamma^k_{ji}\wedge\omega^j+\gamma^k_{ji}\left(\omega^p\wedge\omega^j_p+\frac{1}{2}S^j_{pq}\omega^p\wedge\omega^q\right).$$

Положим $d\gamma^k{}_{ji}=\gamma^k{}_{ji,q}\omega^q$ (функция $\gamma^k{}_{ji,q}$ называется *пфаффовой производной функции* $\gamma^k{}_{ji}$ по форме ω^q) [12]. Тогда

$$D\omega^k_i=\left(\gamma^k_{qi,p}-\gamma^k_{ji}\gamma^j_{pq}+\frac{1}{2}\gamma^k_{ji}S^j_{pq}\right)\omega^p\wedge\omega^q.$$

Рассмотрим $(n\times n)$-матрицу $\Omega=\|\Omega_i{}^k\|$, элементами которой являются 2-формы $\Omega^k{}_i=D\omega^k{}_i-\omega^t{}_i\wedge\omega^k{}_t$. Матрица Ω определяет так называемую *кривизну связности* ∇.

Имеем

$$\Omega_i^k=D\omega_i^k-\omega_i^t\wedge\omega_t^k=\frac{1}{2}R^k_{ipq}\omega^p\wedge\omega^q,$$

где

$$R^k_{ipq}=2\left(\gamma^k_{[q|i|,p]}-\gamma^k_{ji}\gamma^j_{[pq]}+\frac{1}{2}\gamma^k_{ji}S^j_{pq}-\gamma^t_{[p|i|}\gamma^k_{q]t}\right), \quad (9)$$

при этом учтено, что $S^j_{[pq]}=S^j_{pq}$ в силу косой симметрии этого тензора по нижним индексам. Таким образом,

$$D\omega_i^k=\omega_i^t\wedge\omega_t^k+\frac{1}{2}R^k_{ipq}\omega^p\wedge\omega^q. \quad (10)$$

Уравнения (7), (10) называются *уравнениями структуры пространства* L_n.

Если взять естественный репер из векторов $X_i=\partial_i$, то $\gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ij}$ и $\frac{1}{2}S^j_{pq}=\Gamma^j_{[pq]}$ и в силу формулы (9) получим

$$R^k_{ipq}=\frac{\partial\Gamma^k_{qi}}{\partial x^p}-\frac{\partial\Gamma^k_{pi}}{\partial x^q}+\Gamma^t_{qi}\Gamma^k_{pt}-\Gamma^t_{pi}\Gamma^k_{qt}. \quad (11)$$

Используя формулы (3), можно проверить, что в точке $x\in X_n$ функции $R^k{}_{ipq}$, определенные формулами (11), являются координатами тензора типа (1; 3) в естественном репере $(\partial_i)_x$. Следовательно, функции $R^k{}_{ipq}$ в формуле (10), определенные формулами (9), являются координатами этого же тензора в репере $(X_i)_x$. Тензор $R^k{}_{ipq}$ называется *тензором кривизны связности* ∇; он кососимметричен по двум последним нижним индексам p и q.

Замечание 1. Как известно, равенство тензора нулю не зависит от выбора базиса в векторном пространстве. Если тензор кручения равен нулю, т. е. $S^i{}_{pq}=0$, то в случае естественного репера $\Gamma^i_{]pq]}=0$, т. е. $\Gamma^i_{pq}=\Gamma^i_{qp}$. Обратно: $\Gamma^i_{[pq]}=0\Rightarrow S^i_{pq}=0$.

В этом случае линейная связность ∇ называется *симметрической* (или *линейной связностью без круче-*

ния). Пространство линейной связности без кручения будем обозначать через L^0_n.

Замечание 2. Если равен нулю не только тензор кручения, но и тензор кривизны, то формулы (7) и (10) принимают вид

$$D\omega^i = \omega^p \wedge \omega^i_p; \quad D\omega^k_i = \omega^t_i \wedge \omega^k_t.$$

Именно такой вид имеют уравнения структуры аффинного пространства A_n. При этом необходимо учитывать следующее. В случае пространства A_n формы ω^i, ω^j_i определены во всем пространстве, тогда как в пространстве L_n они определены лишь в некоторой окрестности каждой точки. Поэтому можно сказать, что в этом случае пространство L^0_n для каждой своей точки имеет окрестность, геометрия которой совпадает с геометрией некоторой области в A_n, хотя все L^0_n может быть отлично от A_n. Говорят, что в этом случае L^0_n есть *локально аффинное пространство.*

Рассмотрим пространство L_n. Для любых $X, Y \in D^1$ положим

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \qquad (12)$$

Формулы (12) устанавливают отображение $T\colon D^1 \times \times D^1 \to D^1$. Заметим, что

$$T(X, Y) = -T(Y, X). \qquad (13)$$

Так как $[fX, Y] = f[X, Y] - (Yf)X$, то $T(fX, Y) = = fT(X, Y)$. Далее, имеем $T(X_1 + X_2, Y) = T(X_1, Y) + + T(X_2, Y)$.

Мы доказали, что отображение T является F-линейным по первому аргументу. В силу равенства (13) оно F-линейно и по второму аргументу. Определим теперь отображение $S\colon D_1 \times D^1 \times D^1 \to F(X_n)$ по закону

$$S(\omega, X, Y) = \omega(T(X, Y)).$$

Ясно, что это отображение F-линейно по каждому аргументу. Следовательно, $S \in D^1_2$, где D^1_2 — множество гладких тензорных полей типа (1; 2) на многообразии X_n.

Возьмем снова координатную окрестность $U \subset X_n$ и естественный репер (∂_i). Если $X = \xi^i \partial_i$, $Y = \eta^j \partial_j$, то, как было показано выше,

$$\nabla_X Y = (\xi^i \partial_i \eta^k + \Gamma^k_{ij} \xi^i \eta^j)\, \partial_k. \qquad (14)$$

Аналогично,

$$\nabla_Y X=(\eta^l\partial_l\xi^k+\Gamma^k_{lj}\eta^l\xi^j)\,\partial_k. \qquad (15)$$

Как известно,

$$[X,\ Y]=(\xi^l\partial_l\eta^k-\eta^l\partial_l\xi^k)\,\partial_k. \qquad (16)$$

Итак, из (14), (15), (16), (12) следует $T(X,\ Y)=$ $=S^k{}_{ij}\xi^i\eta^j\partial_k$.

Таким образом, отображение $S\in D^1{}_2$ есть *тензорное поле кручения связности* ∇. Если $T(X,\ Y)=0$, то согласно формулам (12) получим

$$\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,\ Y].$$

Следовательно, поле тензора кручения S позволяет для любых $X,\ Y\in D^1$ построить векторное поле $T(X,\ Y)$, которое характеризует *отклонение* векторного поля $\nabla_X Y-\nabla_Y X$ от скобки $[X,\ Y]$ полей X и Y.

Рассмотрим далее отображение $\tilde{R}: D^1\times D^1\times D^1\to$ $\to D^1$ по закону

$$\tilde{R}(X,\ Y,\ Z)=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z. \qquad (17)$$

Из формулы (17) заключаем, что $\tilde{R}(X,\ Y,\ Z)=$ $=-\tilde{R}(Y,\ X,\ Z)$. Непосредственной проверкой (как и выше) можно убедиться, что отображение $\tilde{R}$ является F-линейным по каждому аргументу.

Определим отображение $R: D_1\times D^1\times D^1\times D^1\to F(X_n)$ по закону

$$R(\omega,\ X,\ Y,\ Z)=\omega(\tilde{R}(X,\ Y,\ Z)).$$

Очевидно, это отображение F-линейно по каждому аргументу. Следовательно, $R\in D^1{}_3$ (где $D^1{}_3$ — множество гладких тензорных полей типа (1; 3) на многообразии X_n). Если в координатной окрестности U имеем $X=\xi^i\partial_i$, $Y=\eta^j\partial_j$, $Z=\zeta^k\partial_k$, то, пользуясь формулой (17), получим

$$R(X,\ Y,\ Z)=R^t_{kij}\xi^i\eta^j\zeta^k\partial_t.$$

Значит, отображение $R\in D^1{}_3$ есть *поле тензора кривизны связности* ∇. Из формулы (17) следует, что поле тензора кривизны R позволяет для любых $X,\ Y,\ Z\in D^1$ построить векторное поле $\tilde{R}(X,\ Y,\ Z)$, которое характеризует *отклонение* векторного поля $\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z$ от векторного поля $\nabla_{[X,Y]}Z$.

§ 23. ПАРАЛЛЕЛИЗМ. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ

Пусть I — промежуток в R. Гладкой кривой (параметризованной) на многообразии X_n называется дифференцируемое отображение $\gamma: I \to X_n$ ранга 1 в каждой точке $t \in I$.

Дифференцирование по параметру t будем обозначать точкой. Дифференциал $d\gamma$ этого отображения переводит вектор dt, касательный к I в точке t, в вектор $d\gamma = \dot{\gamma}(t)dt \in T_{\gamma(t)}$.

Вектор $\dot{\gamma}(t)$ называется *касательным вектором* к кривой γ в точке $\gamma(t)$. Если U — координатная окрестность на многообразии X_n, то пересечение $\gamma(I) \cap U$ можно задать уравнениями $x^i = x^i(t)$. При этом $\dot{\gamma}(t) = \dot{x}^i \partial_i$. Если кривая γ задана, то функции $\dot{x}^i = \xi^i(t)$ известны и можно рассмотреть систему дифференциальных уравнений $\frac{dx^i}{dt} = \xi^i(t)$. Решение этой системы определит в X_n семейство интегральных кривых так, что через каждую точку некоторой области $G \subset X_n$ проходит в точности одна кривая этого семейства (γ — одна из этих кривых). Касательные векторы к кривым семейства определяют некоторое векторное поле X на многообразии X_n (точнее, в области G). Таким образом, на X_n существует векторное поле X такое, что $X_{\gamma(t)} = \dot{\gamma}(t)$.

Для поля $Y \in D^1$ получим («вдоль кривой γ») семейство векторов $Y_{\gamma(t)} = Y(t)$. Следовательно, для векторного поля $\nabla_X Y$ определено вдоль кривой γ семейство векторов $(\nabla_X Y)_{\gamma(t)}$. Семейство векторов $Y(t)$ называется *параллельным вдоль кривой* γ, если $(\nabla_X Y)_{\gamma(t)} = 0$ для всех $t \in I$. При этом говорят, что *вектор $Y(t)$ получен из вектора $Y(t_0)$ параллельным переносом вдоль кривой* γ. Если обозначить $X = \zeta^i \partial_i$ (и значит, $\zeta^i = \dot{x}^i$), $Y = \eta^j \partial_j$, то получим

$$\nabla_X Y = (\dot{x}^l \partial_l \eta^k + \Gamma^k_{lj} \dot{x}^l \eta^j) \partial_k.$$

Так как $(\nabla_X Y)_{\gamma(t)} = 0$, то $\left(\dot{x}^l \frac{\partial \eta^k}{\partial x^l} + \Gamma^k_{lj} \dot{x}^l \eta^j\right)_{\gamma(t)} = 0$. Отсюда

$$\frac{d\eta^k}{dt} + \Gamma^k_{lj} \dot{x}^l \eta^j = 0. \qquad (1)$$

Таким образом, чтобы семейство векторов $Y(t)=$ $=\eta^k(t)\dfrac{\partial}{\partial x^k}$ было параллельным вдоль кривой $\gamma(t)$, необходимо и достаточно, чтобы координаты $\eta^k(t)$ вектора $Y(t)$ удовлетворяли системе дифференциальных уравнений (1). При этом следует иметь в виду, что в этой системе $\Gamma^k{}_{ij}=\Gamma^k{}_{ij}(x^1(t),\dots,x^n(t))$ — известные функции переменной t (функции $x^i(t)$ известны, так как кривая γ задана). Заметим, что в уравнениях (1) участвуют только значения полей X и Y на кривой γ. Следовательно, условие параллельности $(\nabla_X Y)_{\gamma(t)}=0$ не зависит от значения полей X и Y вне кривой γ.

Возьмем какой-либо вектор $Y_0=\overset{k}{\eta_0}\partial_k\in T_{\gamma(t_0)}$. Как известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, система (1) имеет, и притом единственное, решение η^k такое, что $\overset{k}{\eta}|_{t=t_0}=\overset{k}{\eta_0}$. Значит, существует единственное семейство векторов $Y(t)$, параллельное вдоль кривой $\gamma(t)$ и такое, что $Y(t_0)=Y_0$.

Пусть $Z(t)$ — другое семейство векторов, параллельное вдоль $\gamma(t)$, причем $Z(t_0)=Z_0=\overset{k}{\xi_0}\partial_k\in T_{\gamma(t_0)}$. Вектор $W_0=\alpha Y_0+\beta Z_0$, $(\alpha,\ \beta\in R)$ определяет семейство векторов $W(t)$, параллельное вдоль $\gamma(t)$. Так как уравнения системы (1) однородны, то $W(t)=$ $=\alpha Y(t)+\beta Z(t)$.

Отсюда следует, что линейная зависимость (или независимость) векторов в «начальной» точке $\gamma(t_0)\in$ $\in X_n$ сохраняется (и притом с теми же коэффициентами α, $\beta,\dots$ в случае линейной зависимости) и для соответствующих семейств векторов, параллельных вдоль $\gamma(t)$.

Пусть $X_1(t_0),\dots,X_n(t_0)$ — базис векторного пространства $T_{\gamma(t_0)}$. Эти векторы определяют n семейств $X_i(t)$, параллельных вдоль кривой $\gamma(t)$, и в точке $\gamma(t_1)$ получим базис $X_1(t_1),\dots,X_n(t_1)$ векторного пространства $T_{\gamma(t_1)}$. Вектор $X(t_0)=\alpha^i{}_i X_i(t_0)$, $\alpha^i\in R$, определяет семейство векторов $X(t)=\alpha^i X_i(t)$, параллельное вдоль $\gamma(t)$, и при $t=t_1$ получим $X(t_1)=\alpha^i X_i(t_1)$.

Следовательно, *параллелизм векторов вдоль кривой $\gamma(t)$ индуцирует изоморфизм $\tau: T_{\gamma(t_0)}\to T_{\gamma(t_1)}$ по закону $\tau(X(t_0))=X(t_1)$.*

Кривая γ называется *геодезической,* если семейство касательных векторов $\dot\gamma(t)$ параллельно вдоль γ.

Положив в уравнениях (1) $\eta^k=\dot{x}^k$, получим уравнения геодезических в пространстве L_n:

$$\frac{d^2x^k}{dt^2}+\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{dt}\;\frac{dx^j}{dt}=0. \tag{2}$$

Это система n дифференциальных уравнений второго порядка с n неизвестными функциями $x^k(t)$. Как известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, такая система имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$x^k(t)_{|t=t_0}=x^k_0,\quad \frac{dx^k}{dt}_{|t=t_0}=\xi^k_0.$$

Таким образом, *если задать точку* $x_0\in L_n$ *и вектор* $X_0=\xi^i_0\dfrac{\partial}{\partial x^i}\in T_{x_0}$, *то через точку* x_0 *в некоторой окрестности этой точки проходит единственная геодезическая, которая в точке* x_0 *имеет своим касательным вектором вектор* X_0.

Заметим, что на геодезической линии допустима линейная замена параметра: $\tau=at+b$ (a, $b=\mathrm{const}$ $a\neq 0$), так как при такой замене уравнения (2) сохраняют свой вид.

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — базис векторных полей в координатной окрестности $U\subset L_n$. Возьмем X, $Y\in D^1(U)$ и найдем координаты $\nabla_X Y$ в репере (X_i) (см. § 22). Имеем $X=\xi^i X_i$, $Y=\eta^j X_j$. Далее, находим $\nabla_X Y=(\nabla_X\eta^k)X_k$, где $\nabla_X\eta^k=X(\eta^k)+\gamma^k{}_{ij}\xi^i\eta^j$ — координаты вектора $\nabla_X Y$ в репере $(X_k)_x$.

Пусть $X_i=\alpha_i{}^j\partial_j$ — разложение X_i в естественном репере (∂_j). Тогда $X=\xi^i X_i=\xi^i\alpha_i{}^j\partial_j=\hat{\xi}^j\partial_j$, где $\hat{\xi}^j=\alpha_i{}^j\xi^i$.

В корепере (dx^i), взаимном реперу (∂_i), имеем

$$(dx^k)(X)=(dx^k)(\hat{\xi}^j\partial_j)=\hat{\xi}^j(dx^k)(\partial_j)=\hat{\xi}^j\delta^k_j=\hat{\xi}^k=\alpha^k_i\xi^i.$$

Отсюда $\xi^i=\tilde{\alpha}_i{}^j dx^j(X)$, т. е. $\xi^i=\omega^i(X)$, где (ω^i) — корепер, взаимный реперу (X_i). Находим

$$X(\eta^k)=\hat{\xi}^j\partial_j\eta^k=\partial_j\eta^k(dx^j)(X)=(d\eta^k)(X).$$

Далее,

$$\gamma^k_{ij}\xi^i=\gamma^k_{ij}\omega^i(X)=\omega^k_j(X).$$

Следовательно,

$$\nabla_X \eta_k = (d\eta^k)(X) + \omega_j^k(X)\,\eta^j.$$

Обычно в этой записи не указывают поля X, относительно которого берется ковариантная производная поля Y, и записывают эту формулу так: $\nabla\eta^k = d\eta^k + \omega_j{}^k\eta^j$.

Теперь можно определить ковариантную производную $\nabla_X T$ произвольного тензорного поля T относительно векторного поля X.

Пусть ω — поле ковектора, т. е. 1-форма, и $\gamma = \gamma(t)$ — какая-либо интегральная кривая векторного поля X. Для 1-формы ω существует семейство ковекторов $\omega_{\gamma(t)}$ вдоль кривой γ.

Говорят, что *семейство ковекторов параллельно вдоль* γ, если для любого семейства векторов $Y(t)$, параллельного вдоль γ, функция $f = \omega(Y)_{\gamma(t)}$ постоянна.

Если $Y = \eta^j X_j$, $\omega = a_i\omega^i$ (обозначения те же, что и выше), то $\omega(Y) = a_i\eta^i$. Находим

$$(da_i)\,\eta^i + a_i d\eta^i = 0. \qquad (3)$$

Так как семейство $Y(t)$ параллельно вдоль γ, то $d\eta^i + \omega_j{}^i\eta^j = 0$. Отсюда $d\eta^i = \omega_j{}^i\eta^j$ и формула (3) примет вид $(da_k - \omega_k{}^i a_i)\eta^k = 0$; так как η^k можно считать произвольными, то $da_k - \omega_k{}^i a_i = 0$. Это условие параллельности семейства ковекторов $\omega_{\gamma(t)}$ вдоль кривой $\gamma(t)$. Поле ковектора с координатами $\nabla a_k = da_k - \omega_k{}^i a_i$ называют *ковариантной производной* поля ковектора ω относительно векторного поля X и обозначают $\nabla_X\omega$.

Пусть в L_n дано тензорное поле T типа (r, s) (его координаты имеют r верхних индексов и s нижних) и γ — какая-либо интегральная кривая векторного поля X.

Говорят, что семейство тензоров $T_{\gamma(t)}$ параллельно вдоль γ, если для любых r семейств ковекторов $\theta^t{}_{\gamma(t)}$ и любых s семейств векторов $Y_h(t)$, параллельных вдоль γ, функция $f = T(\theta^1, \dots, \theta^r;\ Y_1, \dots, Y_s)_{\gamma(t)}$ постоянна.

Отсюда легко найти выражение для ковариантной производной $\nabla_X T$, пользуясь такими же рассуждениями, что и выше. Так, для тензора T типа $(0;\ 2)$ с координатами a_{ij} получим, что $\nabla_X T$ есть тензор $\nabla a_{ij} = da_{ij} - a_{kj}\omega_i{}^k - a_{ik}\omega_j{}^k$. Для тензора T типа $(1;\ 2)$ с координатами $a^i{}_{jk}$ найдем, что $\nabla_X T$ есть тензор $\nabla a^i{}_{jk} = da^i{}_{jk} + a^t{}_{jk}\omega_t{}^i - a^i{}_{tk}\omega^t{}_j - a^i{}_{jt}\omega^t{}_k$.

Аналогично можно выписать и координаты ковариантной производной $\nabla_X T$ тензора T любой другой валентности. При этом если в некоторой точке $x \in L_n$ имеем $X|_x = 0$, то полагаем $(\nabla_X T)_x = 0$ [23].

Для функции $f \in F$ (тензор валентности нуль) считаем $\nabla_X f = X(f)$. Таким образом, оператор ∇_X сохраняет тип тензоров.

§ 24. РАЗВЕРТКА КРИВОЙ γ ИЗ L_n В АФФИННОЕ ПРОСТРАНСТВО A_n

В пространстве L_n зададим гладкую кривую γ. В § 23 было отмечено, что на L_n существует векторное поле X такое, что $X_{\gamma(t)} = \dot\gamma(t)$. Пусть (X_i) — базис векторных полей в координатной окрестности $U \subset L_n$, а (ω^i) — взаимный ему базис ковекторных полей. Если $X = \xi^i X_i$, то $\xi^i = \omega^i(X)$ и $\gamma^k{}_{ij}\xi^i = \omega_j{}^k(X)$.

В аффинном пространстве A_n с фиксированным репером $R_0 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ рассмотрим систему уравнений

$$d\vec{y} = \omega^i \vec{a}_i, \quad d\vec{a}_i = \omega_i^k \vec{a}_k, \tag{1}$$

где $\omega^i = \omega^i(X)$, $\omega_i{}^k = \omega_i{}^k(X)$. Здесь неизвестными являются векторные функции $\vec{y}(t)$ и $\vec{a}_i(t)$ скалярного аргумента t. Если перейти к координатам этих векторных функций, то получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Как известно из теории дифференциальных уравнений, решение такой системы однозначно определяется заданием начальных значений неизвестных: $\vec{y}|_{t=t_0} = \vec{y}_0$, $\vec{a}_i|_{t=t_0} = (\vec{a}_i)_0$. При этом если начальные значения $(\vec{a}_i)_0$ выбраны линейно независимыми, то при любом t (при котором определено решение) векторы $\vec{a}_i(t)$ линейно независимы. Пусть это выполнено.

Точка y такая, что $\overrightarrow{Oy} = \vec{y}(t)$, опишет в пространстве A_n некоторую кривую γ_0. В каждой точке $y(t) \in \gamma_0$ определен аффинный репер $R(t) = (y(t), \vec{a}_1(t), \dots, \vec{a}_n(t))$. Следовательно, в пространстве A_n получим однопараметрическое семейство реперов $R(t)$, заданных вдоль кривой γ_0.

Пусть f — какое-либо аффинное преобразование пространства A_n. Это преобразование порождается некоторым линейным преобразованием A пространства переносов V и некоторым вектором переноса $\vec{a}$. Если $f(\vec{y})=\vec{z}$, то

$$\vec{z}=A\vec{y}+\vec{a}, \tag{2}$$

и так как $\vec{a}_i \in V$, то каждый вектор $\vec{a}_i$ перейдет в вектор

$$\vec{b}_i=A\vec{a}_i. \tag{3}$$

Заметим, что линейный оператор A и вектор $\vec{a}$ не зависят от t. Поэтому из формул (2) и (3) находим $d\vec{z}=Ad\vec{y}$, $d\vec{b}_i=Ad\vec{a}_i$, или, учитывая систему (1), $d\vec{z}=\omega^i\vec{b}_i$, $d\vec{b}_j=\omega_j{}^k\vec{b}_k$.

Следовательно, система векторов $\vec{z}$, $\vec{b}_i$ также является решением системы дифференциальных уравнений (1). Отсюда заключаем, что кривая γ_0 и семейство реперов $R(t)$ вдоль нее определены лишь с точностью до аффинного преобразования пространства A_n. Этого вполне достаточно, так как в геометрии пространства A_n изучаются лишь те свойства фигур, которые сохраняются при любых аффинных преобразованиях этого пространства.

Таким образом, каждая точка $x=x(t)\in\gamma$ отображается в точку $y=y(t)\in\gamma_0$. Семейству векторов $Y(t)=\eta^iX_i$, заданному вдоль кривой γ, соответствует семейство векторов $\vec{v}=\eta^i\vec{a}_i$ вдоль кривой γ_0 с теми же координатами η^i относительно репера $R(t)$.

Говорят, что *кривая* γ_0 *получена развертыванием кривой* γ *из* L_n *в аффинное пространство* A_n. Находим

$$d\vec{v}=(\nabla\eta^k)\vec{a}_k.$$

Если семейство векторов $Y(t)$ параллельно вдоль γ, то $\nabla\eta^k=0$, но тогда и $d\vec{v}=0$, т. е. вектор $\vec{v}$ не изменяется при смещении точки y вдоль кривой γ_0. При этом можно сказать, что семейство векторов $\vec{v}(t)$ параллельно в обычном смысле вдоль кривой γ_0, т. е. в смысле геометрии пространства A_n.

Касательному вектору $X_{\gamma(t)}=\dot{\gamma}(t)$ к кривой γ соответствует вектор $\omega^i\vec{a}_i$, т. е. вектор $d\vec{y}$, касательный к кривой γ_0. По определению, γ — геодезическая, если семейство касательных векторов $\dot{\gamma}(t)$ параллельно вдоль γ. Тогда в силу сказанного выше вектор $d\vec{y}$ не изменяется при смещении точки y вдоль γ_0. Следовательно, $d\vec{y}=\vec{c}$, т. е. не зависит от t. Отсюда $\vec{y}=\vec{c}t+\vec{c}_1$ и, значит, γ_0 — часть прямой. Итак, геодезическими в L_n являются такие линии, развертки которых в аффинное пространство лежат на прямых.

Замечание. Пусть X_n — дифференцируемое многообразие. *Направлением* в точке $x \in X_n$ называется одномерное векторное подпространство $\Delta_1(x)$ касательного пространства T_x. Значит, если на многообразии X_n задано 1-распределение Δ_1, то его значение в точке $x \in X_n$ и есть направление в этой точке.

Если задана кривая γ на многообразии X_n, то можно говорить о семействе направлений $\Delta_1(x(t))$ вдоль кривой γ. Говорят, что это семейство направлений параллельно вдоль γ, если существует параллельное вдоль этой кривой семейство векторов $Y(t)$, порождающее данное семейство направлений. Это значит, что $Y(t) \in \Delta_1(x(t))$ для любого t из промежутка I определения кривой γ.

Семейство направлений $\Delta_1(x(t))$ вдоль γ можно задать семейством векторов $Z(t)=\xi X_i$. Если семейство векторов $Y(t)=\eta^i X_i$ порождает это же семейство направлений, то $\xi^k=\alpha\eta^k$, где $\alpha=\alpha(t)$. Тогда находим

$$\nabla\xi^k=(d\alpha)\,\eta^k+\alpha\nabla\eta^k.$$

Следовательно, $\nabla\xi^k=(d\ln\alpha)\xi^k+\alpha\nabla\eta^k$.

Так как, по условию, семейство векторов $Y(t)$ параллельно вдоль γ, то $\nabla\eta^k=0$ и $\nabla\xi^k=(d\ln\alpha)\xi^k$.

Обратно: пусть для семейства векторов $Z(t)=\xi^i X_i$ вдоль кривой γ имеем $\nabla\xi^k=\theta\xi^k$. Здесь 1-форма θ зависит только от одного дифференциала dt (и в коэффициенте не содержит других независимых переменных). Значит, $D\theta=0$, т. е. θ — полный дифференциал (рассмотрение локальное).

Рассмотрим семейство векторов $Y(t)=hZ(t)$, $h=h(t)$. Если $Y=\eta^i X_i$, то $\eta^k=h\xi^k$. Отсюда находим

$$\nabla\eta^k=(dh+h\theta)\,\xi^k.$$

Если в качестве функции h взять решение дифференциального уравнения $dh+h\theta=0$, то получим $\nabla\eta^k=0$ и семейство векторов $Y(t)$ будет параллельным вдоль кривой γ.

Таким образом, семейство направлений $\Delta_1(X(t))$ параллельно вдоль кривой $\gamma(t)$ в пространстве L_n тогда и только тогда, когда для какого-либо семейства векторов $Y(t)$, порождающих это семейство направлений, выполняется соотношение $(\nabla_X Y)_{\gamma(t)} = \theta Y(t)$, где $X|_{\gamma(t)} = \dot{\gamma}(t)$.

§ 25. ПРОСТРАНСТВО L_n С НУЛЕВЫМ ПОЛЕМ ТЕНЗОРА КРИВИЗНЫ

Поставим задачу найти условие, при котором пространство L_n обладает абсолютным параллелизмом векторов, т. е. для любых двух точек x_1, $x_2 \in L_n$ изоморфизм $\tau: T_{x_1} \to T_{x_2}$ (см. § 23) не зависит от кривой γ, соединяющей на L_n точки x_1, x_2. Значит, система уравнений

$$d\eta^i + \omega_j^i \eta^j = 0, \qquad (1)$$

определяющая семейство векторов $Y(t)$, параллельное вдоль γ, должна иметь решение при любых η^j и любой кривой γ. Следовательно, система (1) должна быть вполне интегрируемой.

Поэтому внешние дифференциалы левых частей уравнений (1) должны обращаться в нуль вследствие самих же уравнений (1).

Находим $d\eta^j \wedge \omega_j{}^i + \eta^j D\omega_j{}^i = 0$. Используя уравнения (1) и уравнения структуры пространства L_n, получим $\eta^j R^i{}_{jkl} \omega^k \wedge \omega^l = 0$; так как η^j произвольны, то $R^i{}_{jkl} \omega^k \wedge \omega^l = 0$. Приведем подобные члены:

$$(R^i_{jkl} - R^i_{jlk})\,\omega^k \wedge \omega^l = 0 \quad (l < k);$$

получим $R^i{}_{jkl} - R^i{}_{jlk} = 0$, откуда $2R^i{}_{jkl} = 0$. Отсюда $R^i{}_{jkl} = 0$, т. е. L_n — пространство с нулевым полем тензора кривизны.

Обратно: если $R^i{}_{jkl} = 0$, то система (1) вполне интегрируема и для любых точек x_1, $x_2 \in X_n$ изоморфизм $\tau: T_{x_1} \to T_{x_2}$ не зависит от выбора кривой γ, соединяющей точки x_1 и x_2. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема. *Для того чтобы пространство L_n обладало абсолютным параллелизмом векторов, необходимо и достаточно, чтобы его поле тензора кривизны было нулевым.*

§ 26. ЭКВИАФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ

Поливектор $e_{i_1 i_2 \dots i_n}$ валентности n называется *n-вектором.* Его *существенной координатой* называется координата $\hat{e} = e_{1 2 \dots n}$. Следовательно,

$$e_{i_1 i_2, \dots, i_n} = \begin{cases} 0, & \text{если среди чисел } i_1, i_2, \dots, i_n \text{ есть равные;} \\ (-1)^{[i_1 i_2 \dots i_n]}\, \hat{e}, & \text{если среди чисел } i_1, i_2, \dots, i_n \text{ равных нет.} \end{cases}$$

Пусть (X_i) — базис векторных полей в некоторой области $G \subset L_n^0$. Возьмем произвольную точку $x \in G$ и n линейно независимых векторов $Y_{(k)|x} = \eta^j_{(k)} X_{j|x}$ и составим свертку:

$$V = e_{i_1 \dots i_n} \eta^{i_1}_{(1)} \dots \eta^{i_n}_{(n)} = \hat{e} \det \|\eta^j_{(k)}\|. \qquad (1)$$

Через точку x проведем в пространстве L_n^0 произвольную гладкую кривую $\gamma(t)$. Каждый из векторов $Y_{(k)}$ определит семейство векторов $Y_{(k)}(t)$, параллельное вдоль кривой $\gamma(t)$. При этом вдоль указанной кривой выражение V является функцией от t.

Если функция V остается постоянной для любых векторов $Y_{(k)|x}$ (линейно независимых) и любой кривой $\gamma(t)$, то пространство L_n^0 линейной связности без кручения называется *пространством эквиаффинной связности* (а соответствующая связность — *∇-эквиаффинной связностью*). При этом число $|V|$ называется *объемом n-мерного параллелепипеда,* построенного на векторах $Y_{(k)}$, а n-вектор $e_{i_1 \dots i_n}$ называется *основным n-вектором.*

Из определения следует, что семейство n-векторов $e_{i_1 \dots i_n}(t)$ параллельно вдоль $\gamma(t)$. Следовательно, $\nabla e_{i_1 \dots i_n} = 0$, т. е.

$$de_{i_1 i_2 \dots i_n} - e_{j i_2 \dots i_n} \omega^j_{i_1} - e_{i_1 j \dots i_n} \omega^j_{i_2} - \dots - e_{i_1 i_2 \dots j} \omega^j_{i_n} = 0.$$

Отсюда, учитывая, что $e_{i_1 i_2 \dots i_n}$ отличен от нуля только тогда, когда все индексы различны, находим

$$d\hat{e} = \hat{e}\,(\omega_1^1 + \omega_2^2 + \dots + \omega_n^n),$$

или $d \ln \hat{e} = \omega_\alpha^\alpha$ (суммирование по $\alpha = 1, 2, \dots, n$). Значит, сумма ω_α^α есть полный дифференциал.

Обратно: пусть ∇ — линейная связность без кручения и такая, что сумма ω_α^α есть полный дифференциал: $\omega_\alpha^\alpha = d\varphi$, $\varphi \in F$. Найдем функцию $\hat{e}$ из условия $d \ln \hat{e} = d\varphi$. Значит, $\hat{e} = c e^\varphi$ ($c = \mathrm{const}$, e — основание натуральных логарифмов). Функция $\hat{e}$ определяет на пространстве L_n^0 поле n-вектора $e_{i_1 \dots i_n}$ с существенной координатой $e_{12\dots n} = \hat{e}$. Проведенные выше выкладки показывают, что относительно поля этого n-вектора связность ∇ является эквиаффинной.

Итак, *связность ∇ без кручения является эквиаффинной тогда и только тогда, когда сумма ω_α^α (т. е. след формы связности $\omega = \|\omega_j^i\|$) есть полный дифференциал.*

Этому условию можно придать другой вид. В силу уравнений структуры имеем

$$D\omega_\alpha^\alpha = \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \frac{1}{2} R_{\alpha k e}^\alpha \omega^k \wedge \omega^l. \tag{2}$$

Нетрудно заметить, что $\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha = 0$ (сумма по α, $\beta = 1, 2, \dots, n$).

В самом деле, для каждого слагаемого $\omega_{\alpha_0}^{\beta_0} \wedge \omega_{\beta_0}^{\alpha_0}$ (α_0 и β_0 фиксированы) в этой сумме найдется другое слагаемое: $\omega_{\beta_0}^{\alpha_0} \wedge \omega_{\alpha_0}^{\beta_0}$. Эти слагаемые взаимно уничтожаются. Равенство (2) принимает вид

$$D\omega_\alpha^\alpha = \frac{1}{2} R_{\alpha kl}^\alpha \omega^k \wedge \omega^l. \tag{3}$$

Если ω_α^α — полный дифференциал, то $D\omega_\alpha^\alpha = 0$ и из формулы (2) найдем (учитывая косую симметрию тензора кривизны по двум последним нижним индексам)

$$R_{\alpha kl}^\alpha = 0 \text{ (суммирование по } \alpha). \tag{4}$$

Обратно: из (4) в силу (3) получим $D\omega_\alpha^\alpha = 0$ и, значит, ω_α^α — полный дифференциал (рассмотрение локальное).

Итак, *эквиаффинная связность характеризуется тем свойством, что ее кручение равно нулю, а тензор кривизны R_{jkl}^l удовлетворяет условию $R_{\alpha kl}^\alpha = 0$.*

Для пространства L_n^0 имеем уравнения структуры

$$D\omega^l = \omega^k \wedge \omega_k^l, \tag{5}$$

$$D\omega_j^l = \omega_j^k \wedge \omega_k^l + \frac{1}{2} R_{jkl}^l \omega^k \wedge \omega^l. \tag{6}$$

Дифференцируя внешним образом уравнение (5), находим

$$R_{krs}\omega^k \wedge \omega^r \wedge \omega^s = 0.$$

Приведя подобные члены, получим $R^l_{[krs]} = 0$. Учитывая косую симметрию тензора кривизны по двум последним нижним индексам, имеем

$$R^l_{krs} + R^l_{rsk} + R^l_{skr} = 0. \tag{7}$$

Такому условию удовлетворяет тензор кривизны пространства L_n^0. Оно носит название *тождеств Бианки 1-го рода.* Из (7) следует

$$R^i_{krs} = R^l_{srk} - R^l_{rsk}. \tag{8}$$

Тензор $R_{ij} = R^k{}_{ijk}$ называют *тензором Риччи* линейной связности ∇ (не обязательно без кручения).

Произведя в равенстве (8) свертку по индексам i и k, получим $R^k_{krs} = R_{sr} - R_{rs}$.

В силу (4) заключаем, что *эквиаффинная связность характеризуется тем, что ее кручение равно нулю, а ее тензор Риччи симметричен:* $R_{sr} = R_{rs}$ [17].

§ 27. СВЯЗНОСТЬ ВЕЙЛЯ

Пространство L_n^0 линейной связности без кручения называется *пространством с угловой метрикой,* если во всех касательных пространствах $T_x (x \in L_n^0)$ задан поляритет направлений, который сохраняется при параллельном перенесении направлений.

Этот поляритет можно задать с помощью поля симметрического дважды ковариантного тензора g_{ij}, причем координаты его достаточно знать лишь с точностью до общего множителя (отличного от нуля).

Поляритет направлений Δ_1', Δ_1'', порождаемых векторами $X_{|x} = \xi^i X_i$, $Y_{|x} = \eta^j X_j$, выражается условием

$$g_{ij}\xi^i\eta^j = 0. \tag{1}$$

Это условие должно сохраняться при параллельном переносе направлений, т. е. когда $\nabla\xi^i = \alpha\xi^i$, $\nabla\eta^j = \beta\eta^j$.

Дифференцируя тождество (1), находим

$$(\nabla g_{ij})\xi^i\eta^j = 0. \tag{2}$$

Значит, тензор ∇g_{ij} определяет тот же поляритет, что и g_{ij}, поэтому

$$\nabla g_{ij}=\theta g_{ij}. \tag{3}$$

Здесь θ — некоторая 1-форма. Условие (3) характеризует *пространство с угловой метрикой.* Тензор g_{ij} (заданный с точностью до общего множителя его координат) называется *основным тензором этого пространства*, а ковектор θ — *дополнительным ковектором* [13].

Нормируя основной тензор $\hat{g}_{ij}=\lambda^2 g_{ij}(\lambda\in F)$, получим

$$\nabla\hat{g}_{ij}=\hat{\theta}\hat{g}_{ij}\,(\hat{\theta}=\theta+2d\ln\lambda). \tag{4}$$

Итак, при умножении основного тензора g_{ij} на λ^2 дополнительный ковектор преобразуется по закону (4).

Пусть теперь даны два направления $\Delta_1'(x)$, $\Delta_2''(x)\subset T_x$, порождаемых векторами $X_{|x}=\xi^i X_i$, $Y_{|x}=\eta^j X_j$. Угол φ между направлениями можно определить по формуле

$$\cos\frac{\varphi}{c}=\frac{g_{ij}\xi^i\eta^j}{\sqrt{g_{ij}\xi^i\xi^j}\,\sqrt{g_{ij}\eta^i\eta^j}}, \tag{5}$$

где $c=\mathrm{const}$ («масштабная константа» по А. П. Нордену [17]). При этом мы предполагаем, конечно, что $g_{ij}\xi^i\xi^j\neq 0$, $g_{ij}\eta^i\eta^j\neq 0$.

Так как поляритет относительно тензора g_{ij} сохраняется при параллельном переносе направлений, то сохраняется и угол между двумя направлениями, переносящимися параллельно (это же можно проверить и непосредственным вычислением, используя формулу (5)).

Если основной поляритет невырожденный ($\det\|g_{ij}\|\neq 0$), то такое пространство с угловой метрикой называется *пространством Вейля* или W_n, его связность ∇ — *связностью Вейля,* а его геометрия — *геометрией Вейля.*

Имеем $\nabla g_{ij}=\theta g_{ij}$ (причем $\det\|g_{ij}\|\neq 0$), т. е.

$$g_{ik}\omega_j^k+g_{kj}\omega_i^k=dg_{ij}-\theta g_{ij}. \tag{6}$$

В естественном корепере (dx^t) находим

$$\omega_i^k=\Gamma_{it}^k dx^t,\quad dg_{ij}=\partial_t g_{ij}dx^t,\quad \theta=v_t dx^t,$$

и система (6) примет вид

$$g_{ik}\Gamma^k_{tj}+g_{kj}\Gamma^k_{ti}=\partial_t g_{ij}-v_t g_{ij}. \qquad (7)$$

Аналогично,

$$g_{tk}\Gamma^k_{ji}+g_{ki}\Gamma^k_{jt}=\partial_j g_{ti}-v_j g_{ti}, \qquad (8)$$

$$g_{jk}\Gamma^k_{it}+g_{kt}\Gamma^k_{ij}=\partial_i g_{jt}-v_i g_{jt}. \qquad (9)$$

Сложим почленно (7) и (8) и вычтем (9); тогда, учитывая симметрию g_{ij} и то, что связность без кручения ($\Gamma^k{}_{pq}=\Gamma^k{}_{qp}$), получим

$$\Gamma^h_{jt}=\frac{1}{2}g^{hi}(\partial_t g_{ij}+\partial_j g_{it}-\partial_i g_{jt})-$$

$$-\frac{1}{2}(v_j\delta^h_t+v_t\delta^h_j-v_i g^{ih}g_{jt}). \qquad (10)$$

§ 28. ПРОСТРАНСТВО РИМАНА

В классическом понимании *римановым пространством* V_n называется эквиаффинное пространство Вейля [17].

Из этого определения следует, что все сказанное выше о пространстве $L_n{}^0$ и, в частности, о вейлевом пространстве имеет место и для пространства Римана. Однако эквиаффинность приводит здесь ко многим новым свойствам.

Дифференцируя внешним образом уравнения (6) § 6, используя исходное уравнение и уравнения структуры пространства $L_n{}^0$, находим

$$g_{ij}D\theta+\frac{1}{2}\left(g_{ik}R^k_{jrs}+g_{jk}R^k_{irs}\right)\omega^r\wedge\omega^s=0.$$

Умножая обе части этого равенства на g^{ij} и свертывая по индектам i и j, получим

$$nD\theta+R^\alpha_{\alpha rs}\omega^r\wedge\omega^s=0. \qquad (1)$$

Так как связность эквиаффинная, то $R^\alpha_{\alpha rs}=0$ и, значит, $D\theta=0$, а потому 1-форма θ — полный дифференциал.

Обратно: если $D\theta=0$, то из (1) следует $R^\alpha_{\alpha rs}=0$, т. е. связность эквиаффинная, а так как она, по условию, вейлева, то мы имеем риманово пространство.

Итак, *чтобы пространство* W_n *было римановым,* *необходимо и достаточно, чтобы 1-форма θ, определяющая поле его дополнительного ковектора, была полным дифференциалом.*

Как известно, при перенормировании основного тензора пространства W_n его дополнительный ковектор меняется по закону $\widehat{\theta}=\theta+2d\ln\lambda$. Если W_n является римановым пространством V_n, то $D\theta=0$ и, значит, $\theta=d\varphi$ (рассмотрение локальное). Возьмем нормирующий множитель λ^2 так, чтобы $2d\ln\lambda+d\varphi=0$, т. е. $\lambda^2=ce^{-\varphi}$, где $c=\text{const}$. Тогда $\widehat{\theta}=0$.

Значит, *в римановом пространстве V_n основной тензор можно нормировать так, что дополнительный ковектор будет равен нулю* (такое нормирование определяется с точностью до постоянного множителя c). Обычно, говоря о римановом пространстве, предполагают, что такая нормировка основного тензора уже проведена.

При этом уравнение (3) и формулы (10) § 6 принимают вид

$$\nabla g_{ij}=0; \tag{2}$$

$$\Gamma^h_{jt}=\frac{1}{2}g^{hl}(\partial_t g_{lj}+\partial_j g_{lt}-\partial_l g_{jt}). \tag{3}$$

Выражение, стоящее в правой части формулы (3), называется *скобкой Кристоффеля* тензора g_{ij} и обозначается так: $\{^h{}_{jt}\}$.

Значит, *коэффициенты связности в V_n в естественном репере (∂_i) равны скобкам Кристоффеля основного тензора:* $\Gamma^k{}_{ij}=\{^k{}_{ij}\}$. Отсюда заключаем, что *связность риманова пространства полностью определяется заданием поля его основного тензора g_{ij}.*

Пусть g^{ij} — тензор, взаимный основному: $g_{ti}g^{ij}=\delta_t{}^j$. Дифференцируя это тождество, находим $\nabla g^{ij}=0$.

Основной тензор g_{ij} пространства V_n удобно использовать для перебрасывания индексов. Так, из тензора $t^i{}_{.j}$ получаем тензор

$$t_{ij}=g_{is}t^s{}_{.j}. \tag{4}$$

Заметим при этом, что для индексов координат тензоров в V_n мы применяем единую нумерацию. Например, у координаты $t^s{}_{.j}$ первым показан верхний индекс s (тогда первое место внизу помечено точкой). В формуле (4) левая часть получена так: индекс s

мы опустили с помощью тензора g_{is} на свободное первое место.

Можно проверить, что справедливы следующие правила ковариантного дифференцирования тензорных полей (T, Φ — тензорные поля, $\lambda \in F(X_n)$): 1^0) $\nabla(T \pm \Phi) = \nabla T \pm \nabla \Phi$; 2^0) $\nabla(\lambda T) = d\lambda T + \lambda \nabla T$; 3^0) $\nabla(T\Phi) = (\nabla T)\Phi + T(\nabla \Phi)$. Из формулы (4) по правилу 3^0 находим $\nabla(g_{is}t^s{}_{.j}) = g_{is}\nabla t^s{}_{.j}$, т. е. операция перебрасывания индексов с помощью основного тензора в V_n перестановочна с операцией ковариантного дифференцирования.

В точке $x \in V_n$ возьмем два вектора: $X|_x = \xi^i X_i$, $Y|_x = \eta^j X_j$. *Скалярным произведением* этих векторов называется их свертка с основным тензором: $\langle X, Y \rangle_x = g_{ij}\xi^i\eta^j$.

Используя формулу (2), легко проверить, что скалярное произведение сохраняется при параллельном переносе векторов: $d(g_{ij}\xi^i\eta^j) = 0$.

В римановом пространстве V_n рассмотрим n-вектор $e_{i_1 \dots i_n}$ с существенной координатой $e_{12\dots n} = \hat{e} = \sqrt{\varepsilon g}$, где $g = \det\|g_{ij}\|$ — так называемый дискриминант основного тензора, а $\varepsilon = \pm 1$ выбрано так, чтобы подкоренное выражение было положительным.

Такой n-вектор в V_n называется *дискриминантным тензором*. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $Y_{(k)}|_x = \eta^i{}_{(k)} X_i$, определяется формулой

$$V = \hat{e} \det \|\eta^i_{(k)}\| = \sqrt{\varepsilon \det \|\langle Y_{(r)}, Y_{(s)} \rangle_x\|},$$

т. е. выражается через скалярные произведения (формула Грама для пространства V_n).

Отсюда следует, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $Y_{(k)}|_x$, сохраняется при параллельном переносе этих векторов (это и означает эквиаффинность пространства V_n). Следовательно, дискриминантный тензор в V_n есть его основной n-вектор и потому удовлетворяет условию $\nabla e_{i_1 \dots i_n} = 0$.

Из сказанного выше следует, что *риманово пространство V_n можно определить как такое гладкое многообразие X_n, на котором задано поле дважды ковариантного симметрического невырожденного тензора g_{ij}*.

Для риманова пространства V_n касательное в точке x векторное пространство T_x становится евклидовым векторным пространством, так как теперь в T_x определено скалярное произведение векторов $\langle Y, Z\rangle_x$. Риманово пространство V_n называется *собственно римановым* либо *псевдоримановым* в зависимости от того, являются ли его касательные пространства T_x собственно евклидовыми либо псевдоевклидовыми.

Нормой (или *длиной*) вектора $Y|_x$ называется число $\sqrt{\langle Y, Y\rangle_x}$. Пусть в V_n дана дуга для гладкой кривой $\gamma(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$. В точке $x(t)\in\gamma(t)$ имеем касательный вектор $\dot\gamma(t)\in T_{x(t)}$ к кривой $\gamma(t)$. Пусть $(X_i)_x$ — репер в точке x и $(\omega^i)_x$ — взаимный ему корепер. Если $\dot\gamma(t)=\xi^i X_i$, то, как известно, $\xi^i=\omega^i(\dot\gamma t))$ и норма вектора $\dot\gamma(t)$ равна $\sqrt{g_{ij}\,\omega^i\omega^j}$, где $\omega^k=\omega^k(\dot\gamma(t))$.

По аналогии с евклидовым пространством, определим дифференциал ds длины дуги $\gamma(t)$ формулой $ds^2=g_{ij}\omega^i\omega^j$.

Если репер (X_i) естественный: $X_i=\partial_i$, то $\omega^k=dx^k$ и тогда $ds^2=g_{ij}dx^idx^j$. Здесь правая часть — дифференциальная квадратичная форма, причем инвариантная, так как получена в результате полного свертывания тензора g_{ij} с дважды взятым тензором dx^i. Эту форму называют *метрической формой* (или *линейным элементом*) пространства V_n. Пусть дуга $\gamma(t)$ задана параметрическими уравнениями $x^i=x^i(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$. *Длиной дуги* $\gamma(t)$ называется интеграл от дифференциала длины дуги:

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{g_{ij}dx^idx^j}=\int_\alpha^\beta \sqrt{g_{ij}\dot x^i\dot x^j}\;dt=l(\gamma).$$

В собственно римановом пространстве дифференциал ds всегда вещественный. В псевдоримановом пространстве имеются кривые трех видов: 1) вещественные (ds — вещественный); 2) мнимые (ds — чисто мнимый); 3) изотропные ($ds=0$).

Евклидово пространство E_n обладает полем метрического тензора $g_{ij}=\vec e_i\vec e_j$, где $\vec e_k$ — координатные векторы какого-либо репера $R=(0, \vec e_1, \vec e_2, \dots, \vec e_n)$ — в E_n (не обязательно ортонормированного).

Значит, *евклидово пространство есть частный случай риманова пространства.*

Но в аффинной системе координат в E_n имеем $g_{ij}=\vec e_i\cdot\vec e_j=\mathrm{const}$, тогда как в произвольном римановом пространстве V_n не существует «прямолинейных» координатных систем.

Если для каждой точки $x \in V_n$ существует координатная окрестность U_x, в которой можно выбрать такую карту φ, что $g_{ij} = \text{const}$ в окрестности U_x, то пространство V_n называется *локально евклидовым*. Каждая такая окрестность геометрически устроена как некоторая окрестность в евклидовом E_n.

В дальнейшем под римановым пространством будем понимать только собственно риманово пространство. Линейная связность на V_n, коэффициенты которой в естественном репере определяются формулами $\Gamma^k_{ij} = \{^k{}_{ij}\}$, называется *римановой связностью* [23] или *связностью Леви-Чивита* [5, 8].

Пусть V_n связно. Тогда каждые две точки $x, y \in V_n$ можно соединить дугой. Определим отображение $\rho: V_n \times V_n \to \mathbf{R}_+$ формулой $\rho(x, y) = \inf l(\gamma_{x,y})$, $\gamma_{x,y} \in \Gamma$, где Γ — множество всех гладких дуг, соединяющих точки x, y. Можно доказать, что отображение ρ является метрикой на V_n, причем топология в V_n, определяемая этой метрикой, совпадает с исходной топологией многообразия V_n [8].

Таким образом, *риманово пространство V_n является метрическим.*

Заметим, что в случае псевдориманова пространства такое же отображение ρ не является метрикой, так как здесь возможно $\rho(x, y) = 0$, $x \neq y$ (когда точки лежат на одной изотропной линии). Для риманова пространства V_n можно доказать следующую теорему: *если $x, y \in V_n$, $l(\gamma_{x,y}) = \rho(x, y)$, то $\gamma_{x,y}$ — дуга геодезической* [23].

Следовательно, геодезические линии в V_n можно рассматривать как аналог прямых в E_n.

З а м е ч а н и е 1. В геометрии нередко используют понятие *пути* (более общее, чем понятие кривой). Пусть E — топологическое пространство. *Параметризованным путем* называют непрерывное отображение $f: I \to E$, где I — любой промежуток в $\mathbf{R}$. Тогда всякую параметризованную кривую $\gamma(t)$ в X_n можно считать частным случаем параметризованного пути (когда f — локальный гомеоморфизм). Обратное неверно. Например, постоянный путь $f(t) = \text{const}$ имеет своим образом лишь одну точку и не определяет кривой. Другой пример дают «кривые» Пеано: множество точек на плоскости, заполняющих квадрат и определяемых параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, где правые части непрерывны на сегменте $[0, 1]$. «Кривая» Пеано есть параметризованный путь, но это не есть кривая, как ее понимают в геометрии.

Замечание 2. Пусть V_n и V_n' — римановы многообразия. Отображение $f: V_n \to V_n'$ называется *изометрией* (или *изометрическим отображением*), если оно удовлетворяет двум условиям: а) f — диффеоморфизм; б) f сохраняет метрику, т. е.

$$\forall X, Y \in T_x, \quad \forall x \in V_n \langle X, Y \rangle = \langle f_* X, f_* Y \rangle.$$

Отображение f называется *локальной изометрией*, если у каждой точки $x \in V_n$ существует такая открытая окрестность U, что сужение $f|_U$ является изометрией многообразия U на $f(U)$.

Из определения следует, что если f — изометрия риманова многообразия на себя, то f сохраняет расстояния, т. е. $\forall x$, $y \in V_n$ $\rho(f(x), f(y)) = \rho(x, y)$. Можно доказать [23], что верно и обратное: если отображение f риманова многообразия на себя сохраняет расстояния, то f — изометрия.

Изометрия риманова пространства V_n на себя образует группу — подгруппу в группе $\mathrm{Diff}\, V_n$ всех диффеоморфизмов V_n на себя. Произвольное риманово пространство V_n не допускает изометрий, кроме тождественной.

Замечание 3. Пусть X_n — гладкое многообразие. Согласно теореме Уитни существует вложение $f: X_n \to E_k$ (где E_k — евклидово пространство $k \geqslant 2n+1$). При этом на X_n возникает риманова метрика, индуцированная метрикой пространства E_k. Таким образом, на каждом гладком многообразии существует риманова метрика.

В 1956 г. Нэш доказал, что всякое риманово пространство V_n можно изометрически вложить в евклидово пространство E_k [5]. Значит, класс всех римановых многообразий не шире класса римановых подмногообразий евклидовых пространств (и, следовательно, не шире класса гладких поверхностей евклидовых пространств).

Замечание 4. В [5] риманово многообразие определяется как гладкое многообразие X_n, на котором задано поле тензора типа $(0; 2)$, удовлетворяющего условиям: а) $\forall X$, $Y \in D^1$, $g(X, Y) = g(Y, X)$; б) $\forall x \in X_n$ $X|_x \neq 0$, $g(X, X)|_x > 0$. При этом линейная связность ∇ на X_n называется *римановой*, если $\nabla g = 0$ (вдоль любого векторного поля $X \in D^1$). В общем случае такая связность обладает кручением. Среди всех римановых связностей на римановом многообразии одна не имеет кручения. Она и называется связностью Леви — Чивита.

§ 29. ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ РИМАНОВА ПРОСТРАНСТВА. СКАЛЯРНЫЕ КРИВИЗНЫ

Рассмотрим так называемый ковариантный тензор кривизны:

$$R_{ijkl} = g_{il} R^{l}_{\cdot jkl}.$$

Этот тензор обладает следующими тремя свойствами.

1^0. $R_{ijkl} = R_{klij}$, т. е. *первую и вторую пару индексов можно менять местами.*

□ Так как V_n является частным случаем пространства L_n, то для него имеем

$$D\omega_j^l = \omega_j^k \wedge \omega_k^l + \frac{1}{2} R^l_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l. \qquad (1)$$

В естественном репере (∂_i) имеем $\omega^t = dx^t$, $\omega_j^l = \Gamma^l_{tj} dx^t$ и из формулы (1) находим

$$\left(\frac{1}{2} R^l_{jst} - \partial_s \Gamma^l_{tj} + \Gamma^k_{sj}\Gamma^l_{tk}\right) dx^s \wedge dx^t = 0.$$

Отсюда

$$R^l_{jst} = \partial_s \Gamma^l_{jt} - \partial_t \Gamma^l_{js} + \Gamma^k_{jt}\Gamma^l_{ks} - \Gamma^k_{js}\Gamma^l_{kt}.$$

Так выражаются координаты тензора кривизны в естественном репере в любом пространстве L_n^0. В случае риманова пространства далее находим

$$R_{hjst} = g_{hl}(\partial_s \Gamma^l_{jt} - \partial_t \Gamma^l_{js} + \Gamma^k_{jt}\Gamma^l_{ks} - \Gamma^k_{js}\Gamma^l_{kt}). \qquad (2)$$

Имеем

$$\partial_s (g_{hl}\Gamma^l_{jt}) = \partial_s g_{hl}\Gamma^l_{jt} + g_{hl}\partial_s \Gamma^l_{jt}.$$

Отсюда

$$g_{hl}\partial_s \Gamma^l_{jt} = \partial_s (g_{hl}\Gamma^l_{jt}) - \partial_s g_{hl}\Gamma^l_{jt}.$$

Так как

$$\Gamma^l_{jt} = \frac{1}{2} g^{lh}(\partial_t g_{hj} + \partial_j g_{ht} - \partial_h g_{jt}),$$

то

$$g_{hl}\Gamma^l_{jt}=\frac{1}{2}(\partial_t g_{hj}+\partial_j g_{ht}-\partial_h g_{jt}).$$

Далее, так как $\nabla g_{hi}=0$, то $dg_{hi}=g_{ki}\omega_h^k+g_{hk}\omega_i^k$. Отсюда $\partial_s g_{hi}=g_{ki}\Gamma^k_{sh}+g_{hk}\Gamma^k_{si}$. Теперь формула (2) принимает вид

$$R_{hjst}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ht}}{\partial x^j\partial x^s}+\frac{\partial^2 g_{js}}{\partial x^h\partial x^t}-\frac{\partial^2 g_{hs}}{\partial x^j\partial x^t}-\frac{\partial^2 g_{jt}}{\partial x^h\partial x^t}\right)+$$
$$+g_{kl}\left(\Gamma^k_{ht}\Gamma^l_{js}-\Gamma^k_{hs}\Gamma^l_{jt}\right).$$

Отсюда прямо следует, что $R_{hjst}=R_{sthj}$. ■

2^0. $R_{hjst}=-R_{jhst}=-R_{hjts}$, т. е. *ковариантный тензор кривизны пространства V_n кососимметричен как по индексам первой пары, так и по индексам второй пары.*

□ В V_n, как и во всяком пространстве L_n, имеем $R^{i}_{.jkl}=-R^{i}_{.jlk}$. Умножая обе части этого равенства на g_{hi} и свертывая по индексу i, получим $R_{hjkl}=-R_{hjlk}$. Применив к этому равенству свойство 1^0, найдем $R_{klhj}=-R_{lkhj}$. ■

3^0. $R_{hjst}+R_{hstj}+R_{htjs}=0$ — *тождество Бианки I рода для ковариантного тензора кривизны.*

□ Так как V_n есть частный случай пространства L_n^0, то

$$R^{i}_{.jst}+R^{i}_{.stj}+R^{i}_{.tjs}=0.$$

Свертывая с тензором g_{hi} по индексу i, получим требуемое равенство. ■

Так как риманово пространство V_n есть частный случай пространства эквиаффинной связности, то его тензор Риччи симметричен: $R_{ij}=R_{ji}$.

Функция $R=g^{ij}R_{ij}$ называется *скалярной кривизной*. Это инвариант, так как он получен путем полной свертки двух тензоров g^{ij} и R_{ij}.

В точке $x\in V_n$ $(n\geqslant 2)$ возьмем два неколлинеарных вектора $X_{|x}=\xi^i X_i$, $Y_{|x}=\eta^j X_j$; пусть (X_i) — какой-либо репер в точке x. Эти векторы определяют двумерное векторное подпространство Π_2^0 касательного пространства T_x. Число

$$K=\frac{R_{ijkl}\xi^i\eta^j\xi^k\eta^l}{\begin{vmatrix} g_{ik}g_{jk} \\ g_{il}g_{jl}\end{vmatrix}\cdot\xi^i\eta^j\xi^k\eta^l} \qquad (3)$$

называют *секционной кривизной* или *кривизной пространства V_n в точке x в двумерном направлении* Π_2^0. В случае $n=2$ имеем

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}dx^1dx^2 + g_{22}(dx^2)^2;$$

тензор R_{ijkl} имеет одну существенную координату R_{1212}. Применяя формулу (3), получим

$$K = \frac{R_{1212}}{g} \quad (g = \det \|g_{ij}\|). \qquad (4)$$

В общем случае V_n $(n>2)$ множество всех геодезических, проходящих через точку $x \in V_n$ в направлении векторов из Π_2^0, образуют двумерное подмногообразие V_2 (оно называется *геодезическим в точке* x).

Гауссова кривизна V_2 в точке x и вычисляется по формуле (3). Из этой формулы следует, что

$$(R_{ijkl} - K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}))\xi^i\xi^k\xi^j\xi^l = 0. \qquad (5)$$

Кривизна K в точке $x \in V_n$ в двумерном направлении не зависит от выбора этого направления тогда и только тогда, когда в левой части формулы (5) стоит нуль-многочлен относительно ξ^j, η^k, т. е. когда

$$R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \qquad (6)$$

Умножая равенство (6) на g^{hi} и свертывая по индексу i, получим

$$R^{h}_{.jkl} = K(\delta^h_k g_{jl} - \delta^h_l g_{jk}). \qquad (7)$$

В формуле (7) проведем свертку по индексам h и l:

$$R_{jk} = K(g_{jk} - ng_{jk}),$$

т. е.

$$R_{jk} = (1-n)Kg_{jk}. \qquad (8)$$

Умножая равенство (2) на g^{jk} и свертывая, получим

$$R = n(1-n)K. \qquad (9)$$

Если в любой точке $x \in V_n$ кривизна K в двумерном направлении не зависит от выбора этого направления, то кривизна K является функцией точки, причем K и скалярная кривизна R связаны формулой (9).

Нам понадобится еще одно тождество, которому удовлетворяет тензор кривизны пространства L_n^0.

Как известно, уравнения структуры этого пространства имеют вид

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i; \tag{10}$$

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \frac{1}{2} R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l. \tag{11}$$

Если уравнения (11) продифференцировать внешним образом и использовать уравнения (10), то получим

$$\nabla R_{jkl}^i \wedge \omega^k \wedge \omega^l = 0. \tag{12}$$

Положим $\nabla R_{jkl}^i = R_{jkl,m}^i \omega^m$. Можно проверить, что функции $R_{jkl,m}^i$ образуют тензор типа (1.4). Теперь равенство (12) примет вид

$$R_{jkl,m}^i \omega^m \wedge \omega^k \wedge \omega^l = 0.$$

Отсюда $R_{j[kl,m]}^i = 0$ и, учитывая, что $R_{jkl,m}^i = -R_{jlk,m}^i$, получим тождества

$$R_{jkl,m}^i + R_{jlm,k}^i + R_{jmk,l}^i = 0, \tag{13}$$

которые называются *тождествами Бианки II рода.*

Свертывая в (13) по индексам i и m, находим

$$R_{jkl,i}^i = R_{jk,l} - R_{jl,k}.$$

Умножая это равенство на g^{jk} и свертывая, получим

$$R_{l,i}^i = R_{,l} - g^{jk} R_{jl,k}. \tag{14}$$

Но $g^{jk} R_{jl} = R_{.l}^k$ и потому $g^{jk} R_{jl,k} = R_{.l,k}^k$.

Равенство (14) примет вид

$$2R_{l,i}^i = R_{,l}. \tag{15}$$

Уравнение (2) можно записать в виде $R^i_{.l} = (1-n) K\delta_l^i$ или, учитывая (9), в виде

$$R_{.l}^i = \frac{1}{n} R\delta_l^i. \tag{16}$$

Подставим (16) в (15):

$$\frac{2}{n} R_{,l} = R_{,l}.$$

Следовательно, если $n>2$, то $R_{,l}=0$ и, значит, $dR=0$, а потому $R=\mathrm{const}$. Тогда в силу равенства (9) $K=\mathrm{const}$. Итак, доказана следующая теорема:

Теорема Шура. *Если в каждой точке $x\in V_n$ ($n>2$) кривизна в двумерном направлении не зависит от выбора этого направления, то эта кривизна постоянна и во всем V_n (т. е. не зависит и от точки x).*

Такое риманово пространство V_n называется *пространством постоянной кривизны*. Заметим, что в этом случае и скалярная кривизна $R=\mathrm{const}$ (см. формулу (9)).

Если $K=\mathrm{const}=0$, то из формулы (7) следует, что $R^{l}_{.jkl}=0$, т. е. V_n — пространство с нулевым полем тензора кривизны, а так как оно одновременно и $L_n{}^0$, то такое V_n является *локально евклидовым пространством* (в частности, *евклидовым*).

Замечание. Можно показать, что пространство V_n постоянной кривизны допускает группу изометрий, которая зависит от такого же числа $n(n+1)/2$ параметров, что и группа движений евклидова пространства E_n. Частными случаями римановых пространств постоянной кривизны являются (кроме евклидова) также сферическое, эллиптическое пространства и пространство Лобачевского.

Пусть $(X_i)_x$ — репер в точке $x\in V_n$ и $(\bar{X}_i)_x$ — ортонормированный репер в той же точке, причем $\bar{X}_k=\xi^i{}_{(k)}X_i$.

Относительно репера $(\bar{X}_i)_x$ метрический тензор имеет координаты $\bar{g}_{kl}=\langle\bar{X}_k,\ \bar{X}_l\rangle=g_{ij}\xi^i_{(k)}\xi^j_{(l)}=\delta_{kl}$ (символ Кронекера).

Следовательно, и $\bar{g}^{kl}=\delta^{kl}$. Согласно тензорному закону преобразования координат, $g^{ij}=\xi^i_{(k)}\xi^j_{(l)}\bar{g}^{kl}$; в данном случае $g^{ij}=\xi^i_{(k)}\xi^j_{(l)}\delta^{kl}$, т. е.

$$g^{ij}=\sum_k \xi^i_{(k)}\xi^j_{(k)}. \tag{17}$$

Кривизна в двумерном направлении $\Delta(\bar{X}_k,\ \bar{X}_l)_x$ равна $K_{kl}=R_{ijst}=\xi^i_{(k)}\xi^j_{(l)}\xi^s_{(k)}\xi^t_{(l)}$ (здесь учтено, что векторы $\bar{X}_k$, $\bar{X}_l$ — единичные и попарно ортогональные). Учитывая (17), находим

$$\sum_l K_{kl}=R_{ijst}\xi^i_{(k)}\xi^s_{(k)}g^{jt}. \tag{18}$$

Но $R_{ijst}g^{jr} = -R_{jist}g^{jr} = -R^{r}_{.ist}$. Поэтому $R_{ijst}g^{jt} = -R^{t}_{.ist} = -R_{is}$.

Итак,

$$\sum_{l} K_{kl} = -R_{is}\xi^{i}_{(k)}\xi^{s}_{(k)}. \tag{19}$$

Из (17) и (19) вытекает, что

$$\sum_{k,l} K_{kl} = -R_{is}g^{is},$$

т. е.

$$\sum_{k,l} K_{kl} = -R. \tag{20}$$

Формула (20) выражает геометрический смысл скалярной кривизны: *сумма* $\sum\limits_{k,l} K_{kl}$ *не зависит от выбора ортонормированного репера* $(\bar{X}_i)_x$ *и отличается только знаком от скалярной кривизны* R *пространства* V_n *в точке* x.

Из формулы (19) следует, что если в точке $x \in V_n$ взять орт $\bar{X}_k$ (k фиксировано), то независимо от выбора остальных $n-1$ векторов ортонормированного репера $(\bar{X}_i)_x$ сумма $n-1$ кривизн K_{kl} $(l \neq k)$ в $n-1$ двумерных направлениях $\Delta(\bar{X}_k, \bar{X}_l)$ окажется одной и той же (обозначим ее через $M_{(k)}$):

$$M_{(k)} = -R_{is}\xi^{i}_{(k)}\xi^{s}_{(k)}, \tag{21}$$

Это так называемая *кривизна Риччи в направлении орта* $\bar{X}_k$. Из (19), (20), (21) следует, что $R = \sum\limits_{k} M_{(k)}$.

Если $X = \xi^i X_i$ — ненулевой неединичный вектор, то его орт $\bar{X}$ имеет координаты $\xi^i_0 = \dfrac{\xi^i}{\sqrt{g_{st}\xi^s\xi^t}}$.

Найдем кривизну Риччи в направлении орта $\bar{X}$: $M = -R_{ij}\xi_0{}^i\xi_0{}^j$, т. е.

$$M = -\frac{R_{ij}\xi^i\xi^j}{g_{ij}\xi^i\xi^j}.$$

Так вычисляется кривизна Риччи в направлении данного вектора X (не обязательно единичного). Имеем

$$\frac{\partial M}{\partial \xi^j} = -\frac{2(R_{ij} - Mg_{ij})\xi^j}{g_{kl}\xi^k\xi^l}.$$

Следовательно, направления ξ^i, дающие стационарное значение кривизны Риччи M, определяются из условия

$$(R_{ij} - Mg_{ij})\xi^j = 0 \tag{22}$$

и, значит, такие направления ξ^i являются главными направлениями тензора Риччи. В общем случае существует n таких взаимно ортогональных направлений (их называют *направлениями Риччи*).

Риманово пространство V_n, в каждой точке которого направления Риччи неопределенны, называется *пространством Эйнштейна.*

В этом случае ранг системы уравнений (22) должен быть равен нулю и поэтому $R_{ij} = Mg_{ij}$. Умножая это равенство на g^{ij} и свертывая, получим $R = nM$. Отсюда $M = \frac{1}{n}R$ и, значит,

$$R_{ij} = \frac{R}{n} g_{ij}. \tag{23}$$

Таково строение тензора Рикки пространства Эйнштейна. Можно доказать, что для пространства Эйнштейна размерности $n > 2$ скалярная кривизна $R = \text{const}$ ([27]). Если V_n — пространство постоянной кривизны ($K = \text{const}$), то, согласно формуле (8), $R_{ij} = (1 - n)Kg_{ij}$, а согласно формуле (9), $R = n(1 - n)K$, т. е. $K(1 - n) = \frac{R}{n}$ и, значит, $R_{ij} = \frac{R}{n} g_{ij}$.

Итак, *всякое пространство постоянной кривизны* ($K = \text{const}$) *есть пространство Эйнштейна, причем его скалярная кривизна определяется формулой*

$$R = n(1 - n)K.$$

Можно доказать, что если V_3 ($n = 3$) — пространство Эйнштейна, то оно является пространством постоянной кривизны $K = \text{const}$. Каждое V_2 есть пространство Эйнштейна.

§ 30. СВЯЗНОСТЬ В РАССЛОЕНИИ

Использованное выше определение линейной связности на гладком многообразии как отображения $\nabla: D^1 \times D^1 \to D^1$, удовлетворяющее указанным двум аксиомам, было предложено Кошулем в 1951 г. (в работе, опубликованной в Трудах семинара Н. Бурбаки).

Однако развитие теории связностей началось в 1917 г. с работы Т. Леви-Чивита о параллельном переносе векторов в римановой геометрии. Большой вклад в теорию связностей внесли Г. Вейль, Э. Картан, И. А. Схоутен, В. В. Вагнер, А. П. Норден, П. К. Рашевский, Г. Ф. Лаптев и др.

К концу 30-х годов XX в. в математике сформировалось понятие дифференцируемого многообразия, а в последующие годы — понятие расслоенного пространства. Все это позволило строить теорию связностей на более общей основе. Первыми в этом направлении были работы Эресмана и А. Картана, опубликованные в 1950 г.

Напомним определение гладкого расслоения (см. гл. I). Пусть P, X, Y — дифференцируемые многообразия. Многообразие P называется *дифференцируемым расслоением над базой X с типовым слоем Y*, если существует дифференцируемое сюръективное отображение (проекция) $\pi: P \to X$, удовлетворяющее следующему условию: для каждой точки $x_0 \in X$ существуют такая окрестность U и такой диффеоморфизм h: $\pi^{-1}(U) \to U \times Y$, которые диффеоморфно отображают слой $\pi^{-1}(x)$ на $\{x\} \times Y$ $(x \in U)$.

Диффеоморфизм h называется *картой расслоения*. Расслоение P называется *тривиальным*, если существует карта расслоения с $U = X$ (тогда P диффеоморфно $X \times Y$). В общем случае расслоение только локально тривиально.

Пусть P и X — дифференцируемые многообразия и G — группа Ли.

Многообразие P называется *главным расслоенным многообразием с базой X и структурной группой G* (такое многообразие обозначают $P(X, G)$), если выполнены следующие три условия [16]:

1°. Группа G действует на многообразии P справа и дифференцируемо: если $z \in P$, $a \in G$, то $za = R_a(z) \in P$, причем G не имеет на P неподвижных точек (или, как говорят, действует на P свободно). Последнее означает, что если $za=z$, то $a=e$ (единица группы).

2^0. $X=P/G$, причем каноническая проекция $\pi:P\to X$ есть дифференцируемое отображение (значит, $\pi^{-1}(\pi(z))$ — орбита точки $z\in P$).

3^0. P локально тривиально. Следовательно, для любой точки $x\in X$ существует окрестность U такая, что ее полный прообраз $\pi^{-1}(U)$ изоморфен произведению $U\times G$ в следующем смысле: отображение $h:\pi^{-1}(U)\to U\times G$ по закону $h(z)=(\pi(z), \varphi(z))$ есть диффеоморфизм, обладающий свойством $\varphi(za)=\varphi(z)\cdot a$ $\forall a\in G$.

Таким образом, *слой* $\pi^{-1}(x)$ *над точкой* $x\in X$ *диффеоморфен структурной группе* G.

Пример 1. Пусть даны группа Ли G и дифференцируемое многообразие X. Определим действие группы G на прямом произведении $X\times G$ по закону $(x, a)b=(x, ab)$. Тогда $X\times G$ — тривиальное главное расслоенное многообразие.

Пусть $P(X, G)$ — некоторое главное расслоенное многообразие. Если V — открытое подмногообразие в X, то $\pi^{-1}(V)$ — открытое подмногообразие в P (так как отображение π дифференцируемо и, значит, непрерывно). Многообразие $\pi^{-1}(V)$ можно рассматривать как главное расслоенное многообразие с базой V и структурной группой G.

Пример 2. Однородное пространство G/H. Пусть G — группа Ли и H — ее замкнутая подгруппа. Можно считать, что H действует на G справа: если $g\in G$, $h\in H$, то $gh\in G$. Получаем главное расслоенное многообразие $G(G/H, H)$ над базой $X=G/H$ со структурной группой H. Заметим, что в этом примере G является транзитивной группой преобразований базы G/H. Таким образом, G/H есть *однородное пространство с фундаментальной группой* H.

Пример 3. Расслоенное многообразие реперов. Пусть X — дифференцируемое многообразие. Напомним, что репером R^x в точке $x\in X$ называется всякий базис $(X_1, X_2, ..., X_n)$, $n=\dim X$, касательного векторного пространства T_x. Обозначим $P=\{R^x | x\in X\}$. Можно считать, что каждый элемент $a\in GL(n, R)$ действует на P справа по следующему закону: если $a=\|a_i{}^j\|$, то $R^x a=(a_1{}^i X_i, ..., a_n{}^i X_i)$ — новый репер в той же точке x.

Отображение $\pi: P \to X$ по закону $\pi(R^x) = x$ есть проекция P на X. В локальных координатах $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ в окрестности U точки $x \in X$ каждый репер $R^x \in \pi^{-1}(U)$ можно записать так: $R^x = (X_1, \ldots, X_n)$, $X_i = \xi_i^k \partial_k$, $\|\xi_i^k\|$ — неособенная матрица. Возьмем в качестве локальных координат переменные x^i, ξ_j^k. Можно проверить, что тогда P становится дифференцируемым многообразием, и притом главным расслоенным многообразием с базой X и структурной группой $G = GL(n, R)$.

Рассмотрим главное расслоенное многообразие $P(X, G)$. Обозначим через T касательное векторное пространство к многообразию P в точке $z \in P$, а через T'_z — касательное пространство к слою в точке z.

Связностью (или инфинитезимальной связностью) *в расслоении* P называется распределение Γ, заданное на P и удовлетворяющее следующим трем условиям:

1⁰. $\Gamma(z)$ есть дополнительное подпространство к T'_z в T_z.

2⁰. $\forall a \in G$, $\forall z \in P$ подпространство $\Gamma(za)$ есть образ подпространства $\Gamma(z)$ при отображении dR_a: $\Gamma(za) = dR_a(\Gamma(z))$.

3⁰. $\Gamma(z)$ дифференцируемо зависит от z.

Пусть Q — открытое подмножество в P и $X \in D^1(Q)$. Согласно условию 1⁰, в каждой точке $z \in Q$ имеем $X|_z = Y|_z + Z|_z$, где $Y|_z \in T'_z$, $Z|_z \in \Gamma(z)$. Векторы $Y|_z$ определяют векторное поле Y, которое называют *вертикальной составляющей поля* X. Точно так же векторы $Z|_z$ определяют поле Z — *горизонтальную составляющую поля* X. Условие 3⁰ означает, что если поле X гладкое, то и поле Z — гладкое (а тогда и поле Y будет гладким).

Если связность Γ задана, то $\Gamma(z)$ называют *горизонтальным подпространством в точке* z. Векторное поле $X \in D^1(P)$ называют *вертикальным*, если $\forall z \in P$ $X|_z \in T'_z$; поле X называют *горизонтальным*, если $\forall z \in P$ $X|_z \in \Gamma(z)$.

Заметим, что проекция $\pi: P \to X$ порождает индуцированное отображение $\pi_{*z}: T_z \to T''_{\pi(z)}$, где $T''_{\pi(z)}$ — касательное пространство к базе X в точке $\pi(z)$. Можно доказать, что π_{*z} *отображает изоморфно* $\Gamma(z)$ *на* $T''_{\pi(z)}$.

Отсюда следует, что если задано векторное поле X на базе X, то существует, и притом единственное, горизонтальное векторное поле $\bar{X}$ на P, которое *накрывает поле X*, т. е. $\pi_*\bar{X}=X$ (именно, $\bar{X}=\pi_*^{-1}X$). Поле $\bar{X}$ называют *лифтом* (или *подъемом*) *поля X*.

Кривая в многообразии P называется *горизонтальной*, если она принадлежит распределению Γ (т. е. все ее касательные векторы горизонтальны). Пусть на базе X задана гладкая кривая $\gamma=\gamma(t)$ $(t\in I)$.

Лифтом кривой γ называют горизонтальную кривую $\bar{\gamma}=\bar{\gamma}(t)$ $(t\in I)$ такую, что $\forall t\in I$ $\pi(\bar{\gamma}(t))=\gamma(t)$.

Нетрудно заметить, что для любой точки $z_0\in\in\pi^{-1}(\gamma(t_0))$ $(t_0\in I)$ существует, и притом единственный, лифт $\bar{\gamma}$, проходящий через точку z_0. В самом деле, как мы знаем, в некоторой окрестности U точки $\gamma(t_0)\in X$ определено векторное поле X такое, что $X_{|\gamma(t)}=\dot{\gamma}(t)$, когда $\gamma(t)\subset U$.

Значит, в окрестности $Q=\pi^{-1}(U)$ точки z_0 определено векторное поле $\bar{X}$ — лифт поля X. Существует, и притом единственная, интегральная кривая $\bar{\gamma}$ поля $\bar{X}$, проходящая через точку z_0. Ясно, что $\bar{\gamma}$ — лифт кривой γ. Этот лифт обозначим через $\bar{\gamma}(z_0)$. Пусть $z_1==\bar{\gamma}(t_1)$ $(t_1\in I)$. Теперь определим параллельный перенос вдоль кривой $\gamma\subset X$ как отображение σ_γ: $\pi^{-1}(\gamma(t_0))\to\pi^{-1}(\gamma(t_1))$ по закону $\sigma_\gamma(z_0)=z_1$. Можно показать, что σ_γ *есть дифференцируемый изоморфизм слоя* $\pi^{-1}(\gamma(t_0))$ *на слой* $\pi^{-1}(\gamma(t_1))$ [16].

Замечание. Пусть $P(X, G)$ — расслоенное многообразие реперов $(G=GL(n, R)$, $n=\dim X)$. Можно показать, что инфинитезимальная связность в расслоении P есть в точности линейная связность ∇ по Кошулю, которую мы определили в начале этой главы. Доказательство см. в [16].

Г. Ф. Лаптев подошел к теории связностей иначе и разработал аналитический аппарат, хорошо приспособленный к изучению связностей [11; 18]. Здесь мы не будет рассматривать глобальные построения Г. Ф. Лаптева: они не простые и с ними можно познакомиться в указанных работах.

ГЛАВА V

О СИСТЕМАХ УРАВНЕНИЙ ПФАФФА В ИНВОЛЮЦИИ

§ 31. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА СЕМЕЙСТВА ВНЕШНИХ ФОРМ

Пусть в некоторой области G числового пространства $\mathbf{R}^n$ дана внешняя форма степени p:

$$\Omega = a_{i_1 i_2 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}, \tag{1}$$

где $a_{i_1 i_2 \ldots i_p} \in F(G)$. Мы можем считать, что в правой части формулы (1) приведены подобные члены (и коэффициенты проальтернированы).

Алгебраической производной от p-формы Ω по 1-форме dx^{i_k} называется внешняя форма $\dfrac{\partial \Omega}{\partial (dx^{i_k})}$ (в общем случае степени $p-1$), которая получается из формы Ω с помощью следующих двух операций:

1) замены нулем всех слагаемых, не содержащих 1-формы dx^{i_k};

2) перестановкой 1-формы dx^{i_k} во всех слагаемых, где она содержится, на первое место (с учетом закона антикоммутативности внешнего умножения) и затем заменой ее единицей.

Алгебраические производные высших порядков (могут быть отличными от нуля только смешанные) определяются как производные от производных. Однако при этом, как следует из определения,

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial (dx^i)\, \partial (dx^j)} = -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial (dx^j)\, \partial (dx^i)}.$$

Для данной внешней формы Ω степени p можно найти множество всех ненулевых алгебраических производных $(p-1)$-го порядка. Это определенная система линейных форм, ее называют *ассоциированной системой форм внешней формы* Ω. *Рангом p-формы* Ω называется ранг ее ассоциированной системы линейных форм.

Пусть дано семейство внешних форм Ω_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, s)$, в котором p_α — степень Ω_α (эти p_α могут быть различными).

Ассоциированной системой этого *семейства внешних форм* называют систему линейных форм, которая является объединением ассоциированных систем форм Ω_α. *Рангом семейства внешних форм* Ω_α называется ранг ее ассоциированной системы.

Теорема 1. *Пусть система внешних форм* Ω_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, s)$ *имеет ранг* r *и* $(\omega^t)_{1 \leqslant t \leqslant r}$ — *базис ее ассоциированной системы. Тогда все формы* Ω_α *можно выразить с помощью 1-форм* ω^t, *причем никакой заменой базиса нельзя выразить формы* Ω_α *с помощью меньшего, чем* r, числа 1-форм.

□ В доказательстве можно ограничиться случаем одной формы Ω степени p. Если $r = n$, то теорема справедлива (так как формы ω^t образуют корепер). Пусть $r < n$. Дополним формы ω^t новыми формами ω^ξ $(\xi = r+1, \ldots, n)$ до корепера $(\omega^i)_x$ в текущей точке $x \in G$. Тогда каждая форма, в том числе и форма Ω, может быть выражена через 1-формы корепера ω^i:

$$\Omega = b_{i_1 i_2 \ldots i_p} \omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_p}.$$

При этом можно считать, что в правой части этой формулы приведены подобные члены. Предположим, что форма Ω содержит хотя бы одно слагаемое с 1-формой ω^{ξ_0} $(r < \xi_0 \leqslant n)$, т. е.

$$\Omega = a\omega^{h_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{h_{p-1}} \wedge \omega^{\xi_0} + \ldots,$$

где $a \neq 0$, а индексы $h_1, \ldots, h_{p-1}$ имеют различные значения, отличные от значения ξ_0. Тогда

$$\frac{\partial^{p-1}\Omega}{\partial\omega^{h_1} \ldots \partial\omega^{h_{p-1}}} = a\omega^{\xi_0} + \ldots = \theta.$$

Значит, форма θ должна войти в состав ассоциированной системы. Но тогда она окажется линейной комбинацией форм ω^t базиса этой системы, который не содержит формы ω^{ξ_0}. Мы пришли к противоречию, так как формы ω^t и ω^{ξ_0} принадлежат одному кореперу и, значит, независимы.

Предположим теперь, что с помощью замены базиса (ω^t) ассоциированной системы линейных форм нам удалось выразить форму Ω через меньшее, чем r, число 1-форм. Но тогда ранг ассоциированной системы оказался бы меньше r. ■

Пусть в области $G \subset \mathbf{R}^n$ дано семейство внешних форм Ω_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, s)$. *Характеристической системой* этого *семейства* называется система линейных форм, ассоциированная системе форм Ω_α, $D\Omega_\alpha$.

Теорема 2. *Пусть* $(dy^t)_{1<t<r}$ *— базис характеристической системы семейства форм* Ω_α. *Тогда каждую форму* Ω_α *этого семейства можно выразить так, что ни под знаком дифференциала, ни в коэффициентах она не будет содержать других независимых переменных, кроме переменных* $y^1, .., y^r$.

□ Пусть Ω — одна из форм семейства (Ω_α) и p — степень этой формы. Согласно теореме 1,

$$\Omega = a_{t_1 t_2 \ldots t_p} dy^{t_1} \wedge dy^{t_2} \wedge \ldots \wedge dy^{t_p}, \tag{2}$$

причем можно считать, что в правой части этой формулы приведены подобные члены. Если бы коэффициенты содержали независимую переменную y^h $(h > r)$, то форма $D\Omega$ содержала бы член

$$\frac{\partial a_{t_1 t_2 \ldots t_p}}{\partial y^h} dy^h \wedge dy^{t_1} \wedge \ldots \wedge dy^{t_p},$$

который не имеет подобных, так как в (2) подобные члены приведены.

Следовательно, характеристическая система семейства форм Ω_α содержала бы 1-форму dy^h, которая не зависит от форм базиса (dy^t), и мы приходим к противоречию. ■

Теорема 3. *Характеристическая система вполне интегрируема.*

Доказательство см. в [26].

Рассмотрим систему уравнений Пфаффа:

$$\theta^\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, s). \tag{3}$$

Эта система имеет те же решения, что и система $g\theta^\alpha = 0$, где g — некоторая гладкая функция, отличная от нуля. Имеем

$$D(g\theta^\alpha) = dg \wedge \theta^\alpha + gD\theta^\alpha.$$

Заметим, что через dg могут войти дифференциалы новых переменных, которых не содержат формы θ^α (ни в коэффициентах, ни под знаком дифференциала). Чтобы отбросить dg, надо внешний дифференциал $D(g\theta^\alpha)$ умножить внешним образом на θ^α (с тем же индексом α). Можно ввести следующее определение: *характеристической системой уравнений Пфаф-*

фа (3) называется ассоциированная система семейства внешних форм θ^α, $\theta^\alpha \wedge D\theta^\alpha$.

Если не допускать умножения левых частей уравнений (3) на произвольные функции, то характеристическая система уравнений (3) получится добавлением к формам θ^α ненулевых алгебраических производных от форм $D\theta^\alpha$, т. е. она будет совпадать с характеристической системой семейства форм θ^α.

В общем же случае 1-формы характеристической системы уравнений (3) могут отличаться от 1-форм характеристической системы форм θ^α лишь функциональным множителем g (отличным от нуля).

В силу данных выше теорем заключаем, что:

а) *характеристическая система уравнений Пфаффа* (3) *вполне интегрируема;*

б) *ее первые интегралы образуют наименьшую систему переменных, через которые можно выразить все данные уравнения* (3).

§ 32. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ПФАФФА В ИНВОЛЮЦИИ

В настоящем параграфе для упрощения рассуждений будем рассматривать системы уравнений Пфаффа, заданные в областях числового пространства надлежащей размерности.

В теории систем дифференциальных уравнений с частными производными (как и в теории систем уравнений Пфаффа) важную роль играет следующее утверждение.

Теорема 1 (теорема Коши — Ковалевской). Если правые части уравнений системы

$$\frac{\partial z^a}{\partial x^1} = f^a\left(x^1, \ldots, x^n;\ z^1, \ldots, z^r, \frac{\partial z^1}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial z^r}{\partial x^n}\right),$$
$$a = 1, 2, \ldots, r, \tag{1}$$

аналитичны в некоторой области $G_0 \subset \mathrm{R}^{n(r+1)}$, *содержащей точку* $M_0(x_0^1, \ldots, x_0^n;\ z_0^1, \ldots, z_0^r,\ (p_2^1)_0, \ldots, (p_n^r)_0$, где $p_{\hat{i}}^a = \dfrac{\partial z^a}{\partial x^{\hat{i}}}$, $\hat{i} = 2, 3, \ldots, n$, *и* $\varphi^a(x^2, \ldots, x^n)$ — *произвольные функции, аналитические в области* $G_1 \subset \mathrm{R}^{n-1}$, *содержащей точку* $M_1(x_0^2, \ldots, x_0^n)$, *и в этой точке принимающие вместе со своими производными значения*

$$\varphi^a = z_0^a, \quad \frac{\partial \varphi^a}{\partial x^{\hat{i}}} = (p_{\hat{i}}^a)_0,$$

то существует единственное решение этой системы

$$z^a = \Phi^a(x^1, \dots, x^n), \tag{2}$$

аналитическое в некоторой области $G \subset \mathbf{R}^n$, *содержащей точку* $M'_0(x_0^1, \dots, x_0^n)$, *и удовлетворяющее условиям*

$$\Phi^a(x_0^1, x^2, \dots, x^n) = \varphi^a(x^2, \dots, x^n).$$

Заметим, что в системе уравнений (1) переменные $x^1, x^2, \dots, x^n$ являются независимыми, а z^a — неизвестные функции. Число уравнений равно числу неизвестных функций. Доказательство теоремы Коши — Ковалевской см. в [26].

Эта теорема служит фундаментом теории систем уравнений в инволюции, основы которой изложены ниже.

Уравнения (2) определяют n-поверхность $V_n \subset \subset \mathbf{R}^{n+r}$ класса C^ω. Так как функции Φ^a образуют решение системы (1), то при подстановке в систему (1) вместо z^a функций Φ^a эта система обратится в тождество в области G. В этом смысле поверхность V_n называют *интегральной поверхностью системы* (1). Начальные условия, однозначно определяющие эту поверхность, имеют простое геометрическое истолкование. Так как

$$dz^a = \frac{\partial z^a}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial z^a}{\partial x^{\hat{\imath}}} dx^{\hat{\imath}}, \tag{3}$$

то в точке $\tilde{M}_0(x_0^1, \dots, x_0^n, z_0^1, \dots, z_0^r) \in \mathbf{R}^{n+r}$ известно выражение 1-форм dz^a через n линейно независимых 1-форм $dx^1, \dots, dx^n$ (при этом $\left(\frac{\partial z^a}{\partial x^1}\right)_0$ вычислим по формулам (1), используя координаты точки M_0). Следовательно, известно касательное пространство

$$T_{\tilde{M}_0}(V_n).$$

Уравнения

$$\begin{cases} z^a = \varphi^a(x^2, \dots, x^n), \\ x^1 = x_0^1 \end{cases} \tag{4}$$

определяют поверхность V_{n-1} класса C^ω в гиперплоскости $x^1 = x_0^1$, причем эта поверхность проходит через точку $\tilde{M}_0$ (так как $\varphi^a(x_0^2, \dots, x_0^n) = z_0^a$ по условию). В силу уравнений (4) в точке $\tilde{M}_0$ имеем

$$dz^a = \frac{\partial \varphi^a}{\partial x^{\hat{i}}} dx^{\hat{i}} = (p_{\hat{i}}^a)_0 dx^{\hat{i}}. \qquad (5)$$

Значит, $T_{\tilde{M}_0}(V_{n-1}) \subset T_{\tilde{M}_0}(V_n)$, а из (3) следует, что $V_{n-1} \subset V_n$.

Заметим, что $\tilde{M}_0$ есть проекция точки $M_0 \in \mathbf{R}^{n(r+1)}$ (указанной в формулировке теоремы) на подпространство $\mathbf{R}^{n+r}$.

Таким образом, содержание теоремы Коши — Ковалевской геометрически сводится к следующему. *Пусть правые части уравнений системы* (1) *являются аналитическими функциями в окрестности точки* $M_0 \in \mathbf{R}^{n(r+1)}$ *и* $\tilde{M}_0$ — *проекция точки* M_0 *на подпространство* $\mathbf{R}^{n+r}$ *переменных* $x^1, ..., x^n$, $z^1, ..., z^r$. *Тогда координаты точки* M_0 *позволяют определить в гиперплоскости* $x^1 = x_0^1$ *по формулам* (5) $(n-1)$*-мерное векторное подпространство* $T'_{\tilde{M}_0}$, *а по формулам* (3) — n*-мерное векторное подпространство* $T''_{\tilde{M}_0} \subset T'_{\tilde{M}_0}$ *в пространстве* R^{n+r}.

Если теперь в гиперплоскости $x^1 = x_0^1$ *задать поверхность* V_{n-1} *класса* C^ω, *проходящую через точку* $\tilde{M}_0$ *и имеющую* $T'_{\tilde{M}_0}$ *своим касательным пространством в этой точке, то в пространстве* $\mathbf{R}^{n+r}$ *найдется, и притом единственная, поверхность* V_n *класса* C^ω, *которая проходит через поверхность* V_{n-1} *и имеет* $T''_{\tilde{M}_0}$ *своим касательным пространством в точке* M_0.

Пусть в области $G \subset \mathbf{R}^{n+r}$ дана система уравнений Пфаффа:

$$\theta^\alpha = 0 \ (\alpha, \beta = 1, 2, ..., s), \qquad (6)$$

где $\theta^\alpha = a_a^\alpha dz^a + b_i^\alpha dx^i$, $a, b = 1, 2, ..., r$, $i, j = 1, 2, ..., n$, x^i — независимые переменные, z^a — неизвестные функции и a_a^α, b_i^α — аналитические в области G функции переменных x^i, z^a.

Из двух задач интегрирования: а) найти все интегральные многообразия данной системы уравнений; б) найти интегральные многообразия при заданной системе независимых переменных — мы будем рассматривать вторую задачу, так как при задании системы (6) указано, что x^i — независимые переменные.

Будем считать, что уравнения системы (6) линейно независимы в области G. Тогда в каждой точке этой области

$$\text{ранг } \|a_a^\alpha\| = s. \tag{7}$$

При этом $r \geqslant s$, так как матрица $\|a_a{}^\alpha\|$ ранга s имеет r столбцов.

Далее заметим следующее. Пусть на гладком многообразии дана система уравнений Пфаффа $\theta^\alpha=0$, где $\theta^\alpha = a_i{}^\alpha dx^i$ ($\alpha=1, 2,\dots, s$, i, $j=1, 2,\dots, n$) и Y_p — интегральное многоообразие этой системы. В некоторой окрестности точки $y \in Y_p$ многообразие Y_p можно задать системой уравнений вида

$$x^i = x^i(t^1,\dots, t^p). \tag{8}$$

Эти функции x^i от переменных t^a (a, b, $c=1, 2,\dots, p$) образуют решение системы $\theta^\alpha=0$. Следовательно, если в эту систему вместо x^i подставить правые части уравнений (8), то получим тождество относительно t^a:

$$a_i^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial t^a} dt^a = 0.$$

Так как dt^a независимы на Y_p, то

$$a_i^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial t^a} = 0. \tag{9}$$

Далее,

$$D\theta^\alpha = \frac{\partial a_i^\alpha}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i$$

и на многообразии Y_p имеем

$$D\theta^\alpha = \frac{\partial a_i^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial t^b} \frac{\partial x^i}{\partial t^a} dt^b \wedge dt^a =$$

$$= \frac{\partial a_i^\alpha}{\partial x^j} \left(\frac{\partial x^j}{\partial t^b} \frac{\partial x^i}{\partial t^a} - \frac{\partial x^j}{\partial t^a} \frac{\partial x^i}{\partial t^b} \right) dt^b \wedge dt^a. \tag{10}$$

Дифференцируем тождество (9) по переменной t^b:

$$\frac{\partial a_i^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial t^b} \frac{\partial x^i}{\partial t^a} + a_i^\alpha \frac{\partial^2 x^i}{\partial t^a \partial t^b} = 0. \tag{11}$$

Поменяв здесь индексы a и b местами, получим

$$\frac{\partial a_i^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial t^a}\frac{\partial x^i}{\partial t^b}+a_i^\alpha\frac{\partial^2 x^i}{\partial t^b \partial t^a}=0. \qquad (12)$$

Вычитая равенство (12) из равенства (11), получим формулу, в силу которой формула (10) принимает вид $D\theta^\alpha=0$.

Итак, на интегральном многообразии системы уравнений Пфаффа $\theta^\alpha=0$ обращаются в нуль и внешние дифференциалы форм θ^α, т. е. кроме системы уравнений $\theta^\alpha=0$ всегда имеем и систему уравнений $D\theta^\alpha=0$. Поэтому *при отыскании интегрального многообразия V_n системы* (6) (если оно существует) *надо рассмотреть новую систему*

$$\begin{cases} \theta^\alpha=0, \\ D\theta^\alpha=0, \end{cases} \qquad (13)$$

которая называется *замыканием данной системы* (6).

Внешние квадратичные формы $D\theta^\alpha$ имеют вид

$$D\theta^\alpha=a_{ab}^\alpha dz^a\wedge dz^b+c_{ai}^\alpha dz^a\wedge dx^i+b_{ij}^\alpha dx^i\wedge dx^j. \qquad (14)$$

Замечание. Пусть в некоторой области $G\subset X_p$ дана внешняя квадратичная форма

$$\Phi=a_{ij}\omega^i\wedge\omega^j \quad (i,\ j=1, 2,\dots p),$$

где $a_{ij}\in C^k(G)$. В точке $x_0\in G$ получим $a_{ij}(x_0)\in\mathbf{R}$.

Внешняя квадратичная форма Φ позволяет построить отображение

$$\widehat{\Phi}: T_{x_0}\times T_{x_0}\to\mathbf{R} \qquad (15)$$

по следующему закону: если $X_0,\ Y_0\in T_{x_0}$, то

$$\widehat{\Phi}(X_0,\ Y_0)=a_{ij}(x_0)\begin{vmatrix}\omega^i(X_0) & \omega^j(X_0)\\ \omega^i(Y_0) & \omega^j(Y_0)\end{vmatrix}.$$

Отображение (15) является билинейной кососимметрической формой, определенной на векторном пространстве T_{x_0}. Она называется *билинейной формой, присоединенной к внешней квадратичной форме* Φ (*в точке* x_0). Заметим, что $\forall X_0\in T_{x_0}$ $\widehat{\Phi}(X_0,\ X_0)=0$.

Вернемся к рассмотрению системы (13). Для этой системы введем следующие определения.

Интегральным линейным элементом $e(M_0,\ d)$ называется совокупность точки $M_0(x_0^1, \dots, x_0^n,\ z_0^1,\ \dots,\ z_0^r)\in G$

и ненулевого вектора $d(dx^i, dz^a) \in T_{M_0}(G)$, координаты которых обращают в нуль все формы θ^α (т. е. удовлетворяют линейным уравнениям системы (13): $\theta^\alpha(d) = 0$). Заметим, что если $e(M_0, d)$ — интегральный линейный элемент, то интегральным линейным элементом является и $e_\lambda(M_0, \lambda d)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$, так как уравнения системы (6) — линейные однородные относительно дифференциалов dx^i, dz^a. Следовательно, пара $e(M_0, d)$ определяет одномерное векторное подпространство из $T_{M_0}(G)$ и каждый ненулевой вектор λd этого подпространства вместе с точкой M_0 образует интегральный линейный элемент.

Система уравнений (6) в области $G \subset \mathbf{R}^{n+r}$ определяет $(n+r-s)$-мерное распределение Δ_{n+r-s}. Ясно, что $d \in \Delta_{n+r-s}(M_0)$. Если в каждой точке $x_0 \in G$ построить интегральный линейный элемент, то этим будет определено 1-распределение $\Delta_1 \subset \Delta_{n+r-s}$.

Интегральным двумерным элементом $E_2(M_0, d_1, d_2)$ называется совокупность точки $M_0 \in G$ и двух линейно независимых векторов $d_1, d_2 \in T_{M_0}(G)$, которые удовлетворяют не только линейным уравнениям системы (13), но и обращают в нуль все билинейные формы $\widehat{D\theta^\alpha}(d_1, d_2)$, присоединенные к квадратичным формам $D\theta^\alpha$ в точке M_0. При этом говорят, что интегральные линейные элементы $e_1(M_0, d_1)$ и $e_2(M_0, d_2)$ *находятся в инволюции.*

Векторы d_1, d_2 образуют базис двумерного векторного пространства $T' \subset \Delta_{n+r-s}(M_0)$. Возьмем какие-либо ненулевые векторы $\bar{d}_s \in T'(s, t, f, g = 1, 2)$. Имеем $\bar{d}_s = c_s^f d_f$. Так как θ^α — линейные формы и $\theta^\alpha(d_f) = 0$, то $\theta^\alpha(\bar{d}_s) = \theta^\alpha(c_s^f d_f) = c_s^f \theta^\alpha(d_f) = 0$ и, значит, мы получили новые интегральные элементы $e_s(M_0, \bar{d}_s)$. Далее, так как $\widehat{D\theta^\alpha}$ — билинейные формы и $(\widehat{D\theta^\alpha})(d_f, d_g) = 0$, то

$$(\widehat{D\theta^\alpha})(\bar{d}_s, \bar{d}_t) = (\widehat{D\theta^\alpha})(c_s^f d_f, c_t^g d_g) = c_s^f c_t^g (\widehat{D\theta^\alpha})(d_f, d_g) = 0$$

и, значит, новые интегральные элементы $\bar{e}_1(M_0, \bar{d}_1)$ и $\bar{e}_2(M_0, \bar{d}_2)$ также находятся в инволюции. Таким образом, любые два вектора из T' определяют интегральные линейные элементы в инволюции. Если в каждой точке $M_0 \in G$ построить интегральный двумерный элемент E_2, то этим будет определено 2-распределение $\Delta_2 \subset \Delta_{n+r-s}$ такое, что любые два неколлинеарных вектора из

$\Delta_2(M)$ $(M \in G)$ определяют интегральный линейный элемент в инволюции.

Интегральным p-мерным элементом $E_p(M_0, d_1, d_2, \ldots, d_p)$ $(2 \leqslant p \leqslant n)$ называется совокупность точки $M_0 \in G$ и p линейно независимых векторов $d_f \in T_{M_0}(G)$ $(f, g = 1, 2, \ldots, p)$, если все его линейные элементы $e_f(M_0, d_f)$ — интегральные: $\theta^\alpha(d_f) = 0$ — и попарно находятся в инволюции: $\widehat{D\theta^\alpha}(d_f, d_g) = 0$ $(f \neq g)$.

Векторы d_f образуют базис p-мерного векторного пространства $T'' \subset \Delta_{n+r-s}(M_0)$. Как и выше, убеждаемся, что любые два неколлинеарных вектора $\bar{d}_1, \bar{d}_2 \in T''$ определяют интегральные линейные элементы в инволюции. Если в каждой точке $M_0 \in G$ построить интегральный p-мерный элемент E_p, то будет определено p-распределение $\Delta_p \subset \Delta_{n+r-s}$ такое, что любые два неколлинеарных вектора из $\Delta_p(M)$ определяют интегральные линейные элементы в инволюции. Поставим задачу: *зная интегральный элемент* $E_h{}^0$ $(1 \leqslant h < n)$, *провести через него интегральный элемент* E_{h+1}. Она сводится к отысканию вектора d_{h+1} такого, чтобы пара $e_{h+1}(M_0, d_{h+1})$ была интегральным линейным элементом и этот элемент находился в инволюции со всеми h интегральными линейными элементами $e_t(M_0, d_t)$ $(t = 1, 2, \ldots, h)$ из $E_h{}^0$. Следовательно, координаты вектора d_{h+1} должны удовлетворять системе уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} \theta^\alpha(d_{h+1}) = 0, \\ \widehat{D\theta^\alpha}(d_t, d_{h+1}) = 0 \quad (t = 1, 2, \ldots, h). \end{array}\right. \tag{16}$$

Так как координаты векторов d_t известны (интегральный элемент $E_h{}^0$ задан), то (16) есть система линейных уравнений относительно координат вектора d_{h+1} и, значит, рассматриваемая задача может быть решена средствами линейной алгебры. В общем случае вектор d_{h+1} определяется из системы (16) неоднозначно. Тогда возьмем какое-либо одно ненулевое решение $d^0{}_{h+1}$ системы (16) и получим интегральный элемент $E^0{}_{h+1} = (E^0{}_h, d^0{}_{h+1})$. Система уравнений (16) называется *полярной системой элемента* $E_h{}^0$.

Таким образом, мы можем получить последовательность вложенных один в другой интегральных элементов: $E_0{}^1 \subset E_2{}^0 \subset \ldots \subset E^0{}_p$. Такую последовательность называют *цепью интегральных элементов*.

Интегральный элемент $E_h{}^0$ называют *особым*, если через него проходит больше интегральных элементов

E_{h+1}, чем через соседние элементы E_h. При этом интегральные элементы E_h^0 и E_h считаются соседними, если координаты их линейных элементов $e_t^0(M_0, d_t^0)$ и $e_t(M, d_t)$ $(t=1, 2, \ldots, h)$ отличаются на бесконечно малые для каждого t.

Если r — ранг матрицы коэффициентов при неизвестных координатах вектора d_{h+1} системы (16) в случае неособого интегрального элемента E_h, то, чтобы получить особый интегральный элемент E_h, надо рассмотреть систему уравнений, которая получится, если приравнять нулю все миноры порядка r матрицы коэффициентов системы (16).

Цепь интегральных элементов называют *особой*, если хотя бы один ее элемент — особый. Интегральное многообразие V_p называется *особым*, если в каждой точке $M \in V_p$ касательное векторное пространство T_m натянуто на особый p-мерный элемент E_p.

Изучение особых интегральных многообразий представляет дополнительные трудности, и такие многообразия рассматривать не будем (см. [22]).

Неособая цепь интегральных элементов называется *регулярной*. Построением регулярной цепи интегральных элементов $E_1^0 \subset E_2^0 \subset \ldots \subset E^0_{n-1} \subset E^0_n$, как оказывается, решается вопрос о существовании интегрального многообразия V_n (конечно, неособого).

Рассмотрим снова систему уравнений (6), заданную в области $G \subset \mathbf{R}^{n+r}$. Точка $M_0 \in G$ (элемент E_0 нулевого измерения) при заданных значениях независимых переменных x_0^i зависит от r параметров z_0^a — значений z^a. Интегральный линейный элемент $E_1 = e_1(M_0, dx^i, dz^a)$ в заданной точке M_0 определяется числовыми значениями дифференциалов dx^i, dz^a, удовлетворяющих системе (6). Так как x^i — независимые переменные, то различный выбор дифференциалов dx^i определяет на интегральном многообразии V_n различные линейные элементы — касательные векторы $e_1(M_0, d)$, не меняя многообразия V_n. Поэтому будем считать дифференциалы dx^i заданными. Следовательно, линейный элемент E_1 определяется значениями r дифференциалов dz^a. Но s из этих дифференциалов можно найти из системы (6), при этом они выражаются через $r_1 = r - s$ свободных параметров (значений остальных dz^σ). Задавая числовые значения этих r_1 параметров dz^σ, получим определенный линейный интегральный элемент $E_2 = (E_1^0, d_2)$.

Через элемент E_1^0 проведем интегральный двумерный элемент $E_2=(E_1^0, d_2)$. Элемент $e_2(M_0, d_2)$ должен быть интегральным и находиться в инволюции с элементом E_1^0. Имеем $d_2(d_2x^i, d_2z^a)$. При этом дифференциалы d_2x^i независимых переменных опять надо считать заданными. Дифференциалы d_2z^a при отыскании линейного интегрального элемента e_2 окажутся зависящими от r_1 произвольных параметров (как было и при отыскании e_1). При этом уравнения системы (6) удовлетворяются:

$$\theta^\alpha(d_2)=0. \tag{17}$$

Но элемент e_2 должен быть в инволюции с уже выбранным элементом e_1^0. Поэтому координаты вектора d_2 должны еще удовлетворять системе уравнений

$$\widehat{D\theta^\alpha}(d_2, d_2)=0. \tag{18}$$

При заданном элементе e_1^0 система (18) есть система линейных неоднородных уравнений относительно дифференциалов d_2z^a. С помощью уравнений (17) исключим из (18) s из дифференциалов d_2z^a и получим систему линейных неоднородных уравнений относительно r_1 дифференциалов d_2z^σ. Пусть эта система совместна и s_1 — ее ранг. Тогда мы найдем s_1 и r_1 неизвестных d_2z^σ и останутся свободными $r_2=r_1-s_1$ параметров (значения остальных d_2z^σ). Задавая числовые значения этих r_2 параметров d_2z^σ, получим определенный линейный элемент e_2^0, находящийся в инволюции с элементом e_1^0, и, значит, имеем определенный интегральный двумерный элемент $E_2^0(M_0, d_1, d_2)$. Конечно, задавая числовые значения d_1x^i и d_2x^i, надо проследить, чтобы векторы d_1 и d_2 оказались линейно независимыми.

Через элемент E_2^0 проведем интегральный трехмерный элемент $E_3(E_2^0, d_3)$, где $d_3(d_3x^i, d_3z^a)$. Дифференциалы d_3x^i независимых переменных считаем заданными (но так, чтобы векторы d_1, d_2, d_3 оказались линейно независимыми). Так как линейный элемент $e_3(M_0, d_3)$ должен быть интегральным, то s из дифференциалов d_3z^a найдем из уравнений $\theta^\alpha(d_3)=0$.

Выражения найденных дифференциалов подставим в систему уравнений

$$(\widehat{D\theta^\alpha})(d_1, d_3)=0, \tag{19}$$

$$(\widehat{D\theta^\alpha})(d_2, d_3)=0, \tag{20}$$

которая выражает условие того, что элемент e_3 находится в инволюции с каждым из элементов e_1^0, e_2^0. Система (19), (20) станет системой линейных неоднородных уравнений относительно $r_1=r-s$ неизвестных d_3z^σ. Заметим, что система (19) в точности совпадает с системой (18) (только вместо d_2 поставлено d_3). Следовательно, система (19) совместна и ранг ее равен s_1.

Пусть система (19), (20) совместна и ее ранг равен s_1+s_2. Тогда найдем s_1+s_2 из r_1 дифференциалов d_3z^σ и останутся свободными $r_3=r_1-(s_1+s_2)=r_1-$ $-s_1-s_2=r_2-s_2$ параметров (значения остальных d_3z^σ). Задавая числовые значения этих параметров, получим интегральный линейный элемент e_3^0, который находится в инволюции с элементами e_1^0, e_2^0. Таким образом, найдем определенный интегральный элемент $E_3^0(M_0,$ d_1, d_2, $d_3)$ и т. д.

Пусть интегральный h-мерный элемент E_h, проходящий через $E^0{}_{h-1}$, зависит от r_h произвольных параметров. Следовательно, система уравнений

$$\theta^\alpha(d_h)=0, \tag{21}$$

$$(\widehat{D\theta^\alpha})(d_1,\ d_h)=0,\dots,(\widehat{D\theta^\alpha})(d_{h-1},\ d_h)=0 \tag{22}$$

определяет неизвестные d_hz^a с r_h произвольными параметрами, причем $r_h=r_{h-1}-s_{h-1}$. Мы предполагаем, что после исключения из системы (22) s из дифференциалов d_hz^a с помощью уравнений (21) полученная система совместна относительно $r_1=r-s$ неизвестных d_3z^σ и ее ранг равен $s_1+s_2+\dots+s_{h-1}$. Придав числовые значения параметрическим величинам d_3z^σ, получим определенный интегральный h-мерный элемент $E^0{}_h\supset$ $\supset E^0{}_{h-1}$.

Через элемент $E^0{}_h$ проведем интегральный $(h+1)$-мерный элемент $E_{h+1}=(E^0{}_h,\ d_{h+1})$. Элемент $e_{h+1}(M_0,$ $d_{h+1})$ должен быть интегральным и находиться в инволюции с каждым из элементом $e_1^0,\dots,e^0{}_h$.

Дифференциалы $d_{h+1}x^i$ мы по-прежнему задаем произвольно (только векторы $d_1,\dots,d_h,d_{h+1}$ должны быть линейно независимыми). Следовательно, $d_{h+1}z^a$ надо искать из системы уравнений

$$\theta^\alpha(d_{h+1})=0, \tag{23}$$

$$(\widehat{D\theta^\alpha})(d_1,\ d_{h+1})=0,\dots,(\widehat{D\theta^\alpha})(d_{h-1},\ d_{h+1})=0,$$

$$(\widehat{D\theta^\alpha})(d_h,\ d_{h+1})=0. \tag{24}$$

Из системы (23) найдем s из дифференциалов $d_{h+1}z^a$ и найденные дифференциалы исключим из уравнений системы (24). Тогда система (24) станет системой линейных неоднородных уравнений относительно r_1 неизвестных $d_{h+1}z^{\sigma}$. Система подчеркнутых уравнений та же, что была и при построении элемента e_h. Следовательно, эта система совместна и ее ранг равен $s_1+s_2+ + \ldots +s_{h-1}$.

Пусть система (24) совместна и имеет ранг $s_1+ +s_2 \ldots +s_{h-1}+s_h$. Тогда найдем $s_1+s_2+ \ldots +s_h$ из r_1 дифференциалов $d_{h+1}z^{\sigma}$ и останутся свободными $r_{h+1}= =r_1-(s_1+s_2+ \ldots +s_{h-1}+s_h)=r_h-s_h$ параметров (значения остальных неизвестных $d_{h+1}z^{\sigma}$). Таким образом, интегральный $(h+1)$-мерный элемент E_{h+1}, проходящий через данный интегральный элемент $E^0{}_h$, зависит от $r_{h+1}=r_h-s_h$ произвольных параметров. Придавая этим параметрам числовые значения, получим определенный интегральный элемент $E^0{}_{h+1}\supset E^0{}_h$.

Пусть для системы уравнений Пфаффа (6) построена цепь интегральных элементов $E_0{}^0\subset E_1{}^0\subset \ldots \subset E^0{}_n$ и пусть через каждый элемент $E^0{}_h$ проходит интегральный элемент E_{h+1} с произволом r_{h+1} параметров (свободных величин $d_{h+1}z^{\sigma}$). Целые числа

$$s=r-r_1,\ s_1=r_1-r_2, \ldots, s_{n-1}=r_{n-1}-r_n,\ s_n=r_n \qquad (25)$$

называются *характерами цепи.* Если цепь регулярная, то ее характеры называются *характерами системы* (6) *уравнений Пфаффа.* Складывая равенства (25), находим $s_1 + s_2 + \ldots + s_n=r$, т. е. сумма всех характеров равна числу неизвестных функций системы (6). Можно доказать, что *характеры начиная с* s_1 *не возрастают*: $s_1\geqslant s_2\geqslant \ldots \geqslant s_n$. Значит, если $s_h=0$, то и $s_{h+1}=0$ [26].

Говорят, что *система* (6) *уравнений Пфаффа* с n независимыми переменными x^i *находится в инволюции,* если она допускает регулярную цепь интегральных элементов: $E_0\subset E_1\subset \ldots \subset E_{n-1}\subset E_n$. Оказывается справедливой следующая теорема о системе уравнений Пфаффа в инволюции:

Теорема 2 (теорема Картана). *Если для системы* (6) *уравнений Пфаффа построена регулярная цепь интегральных элементов* $E_0\subset E_1\subset \ldots \subset E_{n-1}\subset E_n$ *с характерами* $s_1, s_2, \ldots, s_n$, *то:* а) *существует интегральное многообразие* V_n, *имеющее в точке* $E_0=M_0$ *касательное пространство, натянутое на интегральный элемент* E_n; б) *это интегральное многообразие опреде-*

ляется заданием s_n произвольных (аналитических) функций от n аргументов, s_{n-1} произвольных функций $n-1$ аргументов, ..., s_1 произвольных функций одного аргумента и s произвольных постоянных.

Доказательство см. в [26].

Можно доказать, что если система (6) находится в инволюции, то через каждую точку $M_0(x_0^i, z_0^a) \in G$ проходит по крайней мере одно одномерное интегральное многообразие V_1, через каждое одномерное интегральное многообразие V_1^0 — по крайней мере одно двумерное интегральное многообразие V_2 и т. д., наконец, через каждое интегральное многообразие V^0_{n-1} проходит по крайней мере одно интегральное многообразие V_n.

Замечание. Пусть $f(x^1, ..., x^n)$, $\varphi(x^2, ..., x^n)$, $\psi(x^3, ..., x^n)$ — произвольные аналитические функции указанных аргументов, области определения которых имеют непустое пересечение. Тогда и функция $f+\varphi+\psi$ является произвольной аналитической функцией от n аргументов. Поэтому если система (6) находится в инволюции с характерами $s, s_1, ..., s_n$, причем s_k — последний из отличных от нуля характеров, то говорят, что интегральное многообразие V_n зависит от s_k произвольных функций от k аргументов, и не указывают число произвольных функций от меньшего числа аргументов.

Пример. Дана система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} dz^1+z^2du-z^3dv=0, \\ dz^2+z^4dz^3=0. \end{cases} \tag{26}$$

Определить произвол решения (иначе говорят — широту решения), если u, v — независимые переменные, а z^1, z^2, z^3, z^4 — неизвестные функции.

Дифференцируем внешним образом уравнения (26):

$$\begin{cases} dz^2\wedge du-dz^3\wedge dv=0, \\ dz^4\wedge dz^3=0. \end{cases} \tag{27}$$

Систему (26) разрешаем относительно dz^1, dz^2:

$$\begin{cases} dz^1=-z^2du+z^3dv, \\ dz^2=-z^4dz^3. \end{cases} \tag{28}$$

С учетом уравнений (28) система (27) примет вид

$$\left\{\begin{array}{r} z^4 dz^3 \wedge du + dz^3 \wedge dv = 0, \\ dz^4 \wedge dz^3 = 0. \end{array}\right. \qquad (29)$$

Линейный интегральный элемент $e_1(M_0, d)$ задается точкой $M_0(u_0, v_0, z_0^a)$ $(a=1, 2, 3, 4)$ и векторами $d(du, dv, dz^a)$, где du, dv, dz^3, dz^4 произвольны, а dz^1, dz^2 находим по формулам (28) в точке M_0.

Двумерный интегральный элемент $E_2(M_0, d, \delta)$, проходящий через $e_1(M_0, d)$, определяется еще вторым интегральным линейным элементом $e_2(M_0, \delta)$ с той же точкой M_0 и вектором $\delta(\delta u, \delta v, \delta z^a)$, где δu, dv произвольны (только векторы d и δ должны быть линейно независимы), δz^1, δz^2 находим по формулам (28) в точке M_0 а δz^3, δz^4 надо брать такими, чтобы удовлетворялись билинейные уравнения, присоединенные к уравнениям (29):

$$\left\{\begin{array}{l} z_0^4 du\delta z^3 + dv\delta z^3 = z_0^4 dz^3 \delta u + dz^3 \delta v, \\ dz^4 \delta z^3 - dz^3 \delta z^4 = 0. \end{array}\right. \qquad (30)$$

Ранг матрицы коэффициентов при неизвестных δz^3, δz^4 системы (30) равен двум. Следовательно, (30) — система Крамера. Из нее находим δz^3, δz^4. Мы построили регулярную цепь интегральных элементов $E_0 = M_0 \subset E_1 \subset E_2$, и, значит, система уравнений (26) находится в инволюции. Характеристическая система форм системы уравнений состоит из левых частей этих уравнений или представляющих их форм dz^1, dz^2 и форм dz^3, dz^4, du, dv. Всего получили шесть линейно независимых 1-форм. Следовательно, базис характеристической системы состоит из этих же форм и потому неизвестные функции z^a входят существенно. Имеем $r=4$, $s=2$, $s_1=2$ и, значит, $s_2 = r - (s+s_1) = 0$. Система уравнений (26) имеет решение, зависящее от двух произвольных функций одного аргумента.

§ 33. КРИТЕРИЙ КАРТАНА РЕГУЛЯРНОСТИ ЦЕПИ

В задачах геометрии, которые приводят к исследованию системы уравнений Пфаффа

$$\theta^\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, s), \qquad (1)$$

обычно можно производить замену независимых переменных, а также замену неизвестных функций:

$$x^i = f^i(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n), \quad z^a = \Phi^a(\bar{z}^1, \ldots, \bar{z}^r, \bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \ a = 1, 2, \ldots, r),$$

где f^i, Φ^a — аналитические функции. Это приводит к замене базиса (dx^i, dz^a) характеристической системы форм системы уравнений (1). Именно, вместо 1-форм dx^i можно брать какую-либо систему 1-форм $\omega^i = a^i_j(x^k, z^\alpha)dx^j$, где ранг $\|a_j{}^i\| = n$ в G. Следовательно, система форм ω^i вполне интегрируема и ее интегралами служат независимые переменные данной системы уравнений (1). Затем в базис характеристической системы можно включить формы θ^α (вместо тех s дифференциалов из dz^α, которые были найдены из уравнений (1)) и $q = r - s = r_1$ форм $\tilde{\omega}^\sigma$, которые представляют r_1 остальных дифференциалов dz^σ неизвестных функций (формы $\tilde{\omega}^\sigma$ находятся из квадратичных уравнений $D\theta^\alpha = 0$).

Таким образом, имеем базис из 1-форм ω^i, θ^α, $\tilde{\omega}^\sigma$ (всего $n+r$ форм). Если задать числовые значения этих форм, то это равносильно заданию всех дифференциалов dx^i, dz^a. Поэтому интегральные линейные элементы можно задавать значениями этих форм, причем надо брать $\theta^\alpha = 0$ (как этого требует система уравнений (1)).

Формы ω^i можно считать заданными произвольно (так же как мы раньше считали произвольно заданными дифференциалы dx^i независимых переменных). Следовательно, выбор интегральных линейных элементов полностью определяется выбором значений форм $\tilde{\omega}^\sigma$. Построение цепи интегральных элементов и вычисление характеров цепи проводится точно так же, как и ранее.

При построении цепи интегральных элементов $E_0 \subset E_1 \subset E_{n-1} \subset E_n$ системы уравнений (1) мы для каждого E_h должны были подсчитать ранг матрицы коэффициентов полярной системы, проверить, что соответствующая система неоднородных линейных уравнений относительно неизвестных $d_h z^\sigma$ совместна, и, выбрав определенное решение этой системы, получить определенный интегральный элемент $E^0{}_h$. Оказывается, можно поступать проще.

На интегральном линейном элементе $e_h(M_0, d_h)$ ($\theta^\alpha(d_h)=0$) положим $\omega^i=u^i_h$ и обозначим $\tilde{\omega}^\sigma(d_h)=l_h^\sigma$. При построении элемента цепи $E_h=(E^0_{h-1}, e_h)$ мы должны искать неизвестные l_h^σ из системы уравнений

$$(\widehat{D\theta^\alpha})(d_1, d_h)=0, \quad (\widehat{D\theta^\alpha})(d_2, d_h)=0, \ldots$$
$$\ldots, (\widehat{D\theta^\alpha})(d_{h-1}, d_h)=0.$$

Пусть для каждого $h\leqslant n$ ранг матрицы коэффициентов при неизвестных l_h^σ равен $s_1+s_2+\ldots+s_{h-1}$. Так мы определим числа $s_1, s_2, \ldots, s_n$ (при этом s_n находим как $s_n=r_1-(s_1+s_2+\ldots+s_{n-1})$). Число $Q=s_1+2s_2+\ldots+ns_n$ называется *числом Картана* для цепи. Пусть наиболее общий интегральный элемент E_n цепи зависит от N параметрических l_h^σ (т. е. тех l_h^σ, которые остаются свободными на интегральном элементе E_h). Справедлива следующая теорема.

Критерий Картана регулярности цепи. *Если* $Q=N$, *то цепь регулярна и числа* $s_1, s_2, \ldots, s_n$ — *ее характеры. Если же* $Q>N$ *для произвольных* u_i^j, *то система уравнений* (1) *находится не в инволюции и ее надо продолжать.* Доказательство см. в [26].

Заметим, что не может иметь место неравенство $Q<N$ (если такое неравенство получилось, то это показывает, что допущена ошибка в вычислениях и необходимо все проверить). Число N параметров, от которого зависит наиболее общий интегральный элемент E_n, определяют следующим образом. На интегральном многообразии V_n неизвестные z^a должны быть функциями независимых переменных x^k. Следовательно, на V_n кроме равенства нулю форм θ^α формы $\tilde{\omega}^\sigma$ должны быть линейными комбинациями форм ω^i:

$$\tilde{\omega}^\sigma=l^\sigma_k\omega^k. \tag{2}$$

Выражения (2) форм $\tilde{\omega}^\sigma$ подставим в квадратичные уравнения $D\theta^\alpha=0$ и после приведения подобных членов получим уравнения вида

$$f^\alpha_{[ij]}(l^\sigma_k)\,\omega^i\wedge\omega^j=0 \quad (i, j=1, 2, \ldots, n;\ i<j).$$

Так как формы ω^h линейно независимы, то

$$f^\alpha_{[ij]}(l^\sigma_k)=0 \quad (i, j=1, 2, \ldots, n;\ i<j). \tag{3}$$

Если система (3) позволяет выразить все l_k^σ как функции от N независимых параметров $y^1, y^2, \ldots, y^N$, т. е. $l_k^\sigma = l_k^\sigma(y^1, y^2, \ldots, y^N)$, то в этом случае говорят, что наиболее общий интегральный элемент E_n зависит от N параметров.

Если из уравнений $D\theta^\alpha = 0$ можно выразить все $\tilde{\omega}^\sigma$ по лемме Картана, то число параметрических величин l_k^σ подсчитывается непосредственно из полученных разложений $\tilde{\omega}^\sigma = l_k^\sigma \omega^k$ с учетом лишь симметрии коэффициентов разложения, о которой сказано в лемме Картана.

Замечание. Как было сказано выше, формы $\tilde{\omega}^\sigma$ вместе с формами θ^α, ω^i образуют базис характеристической системы форм системы уравнений (1). При решении конкретных задач формы $\tilde{\omega}^\sigma$ мы находим из квадратичных уравнений $D\theta^\alpha = 0$ (по правилу отыскания форм характеристической системы). Если найденные формы $\tilde{\omega}^\sigma$ оказались линейно независимыми, то все они войдут в базис характеристической системы. Поэтому каждый раз следует только проверять, что формы $\tilde{\omega}^\sigma$ линейно независимы.

Пример. Ищем интегральное многообразие V_3 системы

$$\begin{aligned} \theta^1 &\equiv dz^1 + x^1 du^2 - 2x^1 x^2 dx^1 + u^1 dx^2 = 0, \\ \theta^2 &\equiv dz^2 - x^3 du^3 + x^1 x^2 dx^3 = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где x^1, x^2, x^3 — независимые переменные. Определить широту решения [26].

Дифференцируем данные уравнения внешним образом:

$$\begin{aligned} dx^1 \wedge du^2 + 2x^1 dx^1 \wedge dx^2 + du^1 \wedge dx^2 &= 0, \\ du^3 \wedge dx^3 + d(x^1 x^2) \wedge dx^3 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Положим

$$\tilde{\omega}^1 = -(du^2 + x^1 dx^2), \quad \tilde{\omega}^2 = du^1 + x^1 dx^1,$$

$$\tilde{\omega}^3 = du^3 + d(x^1 x^2).$$

Система квадратичных уравнений (5) примет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^1 \wedge dx^1 + \tilde{\omega}^2 \wedge dx^2 &= 0, \\ \tilde{\omega}^3 \wedge dx^3 &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь число независимых форм $\tilde{\omega}^\sigma$ равно $q=3$. На интегральном линейном элементе $e_1(M_0, d_1)$ формы θ^α ($\alpha=1, 2$) равны нулю, а формы $d_1x^i=u_1{}^i$ и $\tilde{\omega}^\sigma(d_1)=$ $=l_1{}^\sigma$ задаем произвольно. Зафиксировав произвольный элемент $e_1(M_0, d_1)$, проведем через него интегральный элемент $E_2(M_0, d_1, d_2)$. При этом значения $d_2x^i=$ $=u_2{}^i$ задаем произвольно, а $\tilde{\omega}^\sigma(d_2)=l_2{}^\sigma$ ищем из условия $(\widehat{D\theta^\alpha})(d_1, d_2)=0$, которое здесь имеет вид

$$\left.\begin{aligned} u_1^1l_2^1+u_1^2l_2^2&=\dots\\ u_1^3l_2^3&=\dots\end{aligned}\right\}\text{ (правые части известны).}$$

Находим ранг s_1 матрицы коэффициентов при неизвестных $l_2{}^\sigma$; имеем $s_1=2$. Зафиксировав построенный интегральный элемент E_2, проведем через него интегральный элемент $E_3(M_0, d_1, d_2, d_3)$. Значения d_3x^i задаем произвольно, а $\tilde{\omega}^\sigma(d_3)=l_3{}^\sigma$ ищем из условия $(\widehat{D\theta^\alpha})(d_1, d_3)=0$, $(\widehat{D\theta^\alpha})(d_2, d_3)$, которое имеет вид

$$\left.\begin{aligned} u_1^1l_3^1+u_1^2l_3^2&=\dots\\ u_2^1l_3^1+u_2^2l_3^2&=\dots\\ u_1^3l_3^3&=\dots\\ u_2^3l_3^3&=\dots\end{aligned}\right\}\text{ (правые части известны).}$$

Находим ранг s_1+s_2 матрицы коэффициентов при неизвестных $l_3{}^\sigma$; имеем $s_1+s_2=3$. Следовательно, $s_2=$ $=1$. Так как $s+s_1+s_2+\dots+s_n=r$, то $s_1+s_2+\dots+s_n=$ $=r-s=q$. В данном примере $s_1+s_2+s_3=3$. Но уже $s_1+s_2=3$. Значит, $s_3=0$. Число Картана $Q=s_1+2s_2=$ $=4$.

Разрешим систему (6) по лемме Картана:

$$\tilde{\omega}^1=adx^1+bdx^2,\quad \tilde{\omega}^2=bdx^1+cdx^2,\quad \tilde{\omega}^3=hdx^3.$$

Наиболее общий интегральный элемент E_3 зависит от $N=4$ параметров a, b, c, h. Имеем $Q=N$. Следовательно, цепь интегральных элементов $E_0\subset E_1\subset E_2\subset E_3$ регулярна, система уравнений (4) обладает трехмерным интегральным многообразием, которое существует с произволом одной функции двух аргументов ($s_2=$ $=1$).

Пусть имеется система s линейно независимых уравнений Пфаффа

$$\theta^\alpha=0 \tag{7}$$

с n независимыми переменными x^i и r неизвестными функциями z^α.

В ряде задач геометрии оказывается, что переменные x^i и z^α кроме дифференциальных уравнений (7) связаны еще конечными (не дифференциальными) уравнениями

$$f_t(x^i, z^\alpha)=0 \quad (t=1, 2, \ldots, \tau<r). \tag{8}$$

Следовательно, мы приходим к системе уравнений (7), (8). На интегральном многообразии уравнения (8) должны обратиться в тождества и, значит, эти тождества можно дифференцировать:

$$df_t=0. \tag{9}$$

Мы получили новую систему уравнений Пфаффа (7), (9). Эту систему будем исследовать обычным методом. В силу теоремы Пуанкаре уравнения (9) не дадут квадратичных. Поэтому для системы (7), (9) получатся те же квадратичные уравнения, что и для системы (7). Но при нахождении независимых форм $\tilde{\omega}^\sigma$ надо учитывать уравнения (9).

Пусть система уравнений (1) оказалась не в инволюции: $N<Q$ — и ее надо продолжить. Это делают следующим образом. К системе уравнений (1) присоединяем уравнения

$$\tilde{\omega}^\sigma=l_k^\sigma\omega^k, \tag{10}$$

где $l_k{}^\sigma=l_k{}^\sigma(y^1, y^2, \ldots, y^N)$ и y^v $(v=1, 2, \ldots, N)$ рассматриваем как вспомогательные неизвестные. Полученная система уравнений (1), (10) называется первым продолжением системы (1). Эту новую систему (1), (10) исследуем на инволютивность обычным способом. Уравнения $D\theta^\alpha=0$ обратятся в тождество в силу (10). Следовательно, квадратичные уравнения, замыкающие систему (1), (10), будут содержать только внешние дифференциалы от уравнений (10).

Имеет место теорема Картана о том, что *всякая система уравнений Пфаффа* $\theta^\alpha=0$ *с помощью конечного числа продолжений либо приводит к системе в инволюции, либо приводит к противоречию* [26].

ГЛАВА VI

ОСНОВЫ ГЕОМЕТРИИ ПОГРУЖЕННЫХ МНОГООБРАЗИЙ

§ 34. МНОГООБРАЗИЕ, ПОГРУЖЕННОЕ В ПРОСТРАНСТВО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ЛИ

Пусть X_n — пространство представления группы Ли G_r, которая действует в X_n транзитивно и точно (и, значит, X_n — однородное пространство с фундаментальной группой G_r). Левоинвариантные 1-формы ω^a группы G_r удовлетворяют структурным уравнениям (см. § 18):

$$D\omega^a = \frac{1}{2} c^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c \quad (a, b, c = 1, 2, \ldots, r). \tag{1}$$

В пространстве X_n зафиксируем какой-либо репер R_0 в качестве «начального» репера и координаты точек из X_n относительно репера R_0 назовем *абсолютными координатами* этих точек. Для всякого репера R_u пространства X_n существует единственный элемент $u \in G_r$ такой, что $R_u = u(R_0)$. Координаты точек относительно репера R_u назовем *относительными координатами*, а репер R_u — *подвижным репером.*

Согласно § 20, представление группы G_r как группы преобразований пространства X_n можно определить вполне интегрируемой системой форм:

$$\Delta x^I = dx^I - \xi^I_a(x)\,\omega^a \quad (I, J, K = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

где x^I — относительные координаты точек на X_n относительно некоторого репера R_u. Уравнения

$$\Delta x^I = 0 \tag{3}$$

определяют формулы преобразования относительных координат при переходе к другому реперу R_u. При этом 1-формы $\omega^a\,(u, du)$ называют также *компонентами перемещений* репера R_u.

Известно, что систему независимых первых интегралов $\tilde{x}^I$ системы уравнений (3) можно рассматривать как систему абсолютных координат точки пространства X_n.

В пространстве X_n будем рассматривать p-мерное погруженное многообразие (p-мерную поверхность) V_p класса C^k. Согласно определению (см. § 5), V_p

есть класс эквивалентных C^k-погружений C^k-многообразия (или C^k-многообразия с краем) M_p в X_n. В дальнейшем ограничимся случаем, когда M_p является C_k-многообразием. Поверхность V_p однозначно определяется каким-либо своим представителем (параметризацией) $f: M_p \to X_n$, где f есть C^k-погружение. Если $f(t)=x$, то на многообразии M_p существует карта φ с координатной окрестностью $U \ni t$ и $\varphi(t)=(t^1, \ldots, t^p)$, а на многообразии X_n существует карта ψ с координатной окрестностью $V \supset f(U) \ni x$ и $\psi(x)=(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$, где $\tilde{x}^I$ — абсолютные координаты точки x. Отображение f выражается в координатах уравнениями

$$\tilde{x}^I = y^I(t^1, \ldots, t^p) \tag{4}$$

(параметрические уравнения поверхности V_p в окрестности U точки $t \in M_p$). Здесь $y^I \in C^k(U)$, $\forall t \in U$ ранг $\|\partial y^I/\partial t^i\|$ равен p $(i, j, k=1, 2, \ldots, p)$, так как $\forall t \in U$ ранг f равен p по определению погружения.

Поверхность V_p не изменится, если многообразие M_p заменить на любое ему C^k-диффеоморфное многообразие $\overline{M}_p$ (замена параметризации поверхности V_p). Это приводит к тому, что на поверхности $f(U) \subset V_p$ мы переходим от координат t^i к координатам $\bar{t}^i = h^i(t^1, \ldots, t^p)$, где $h^i \in C^k(U)$, $\det\|\partial h^i/\partial t^j\| \neq 0$ в U.

Естественному реперу $(\partial/\partial t^i)_t$ взаимен корепер (dt^i). Пусть (θ^i) — какой-либо корепер в точке $t \in U$. Тогда $\theta^i = t_j^i dt^j$, $\det\|t_j^i\| \neq 0$.

При этом существуют 1-формы θ_j^i такие, что $D\theta^i = \theta^j \wedge \theta_j^i$ (поскольку система форм θ^i вполне интегрируема). Так как $\tilde{x}^I$ — система независимых первых интегралов системы уравнений (3), то система (3) равносильна системе $d\tilde{x}^I=0$ и потому

$$\Delta x^I = \eta_K^I d\tilde{x}^K, \quad (\det\|\eta_K^I\| \neq 0). \tag{5}$$

На поверхности V_p уравнения (4) являются тождествами, откуда находим

$$d\tilde{x}^K = (\partial y^K/\partial t^i)\, dt^i. \tag{6}$$

Имеем

$$dt^i = \tilde{t}_j^i \theta^j, \quad (\|\tilde{t}_j^i\| = \|t_j^i\|^{-1}). \tag{7}$$

Из (5)—(7) следует, что

$$\Delta x^I = X_j^I \theta^j, \tag{8}$$

где $X_j{}^I = \eta^I{}_K (\partial y^K/\partial t^i) \tilde{t}_j{}^i$ и, значит, ранг $\|X_j{}^I\|$ равен p.

Мы получили систему (8) дифференциальных уравнений поверхности $V_p \subset X_n$. Запишем уравнение (8) в развернутом виде:

$$dx^I - \xi_a^I(x)\,\omega^a = X_j^I \theta^j. \tag{9}$$

Дифференцируя уравнение (9) внешним образом, получим

$$\Delta X_j^I \wedge \theta^j = 0, \quad (\Delta X_j^I = dX_j^I - X_l^I \theta_j^l - (\partial \xi_a^I/\partial x^K)\, X_j^K \omega^a). \tag{10}$$

Отсюда по лемме Картана находим

$$\Delta X_j^I = X_{jl}^I \theta^l. \tag{11}$$

Если продифференцировать внешним образом формы $\theta^i = t_j{}^i dt^j$, то можно найти формы $\theta_j{}^i$ и затем доказать существование форм $\theta^i{}_{kj}$ таких, что

$$D\theta_j^l = \theta_j^k \wedge \theta_k^l + \theta^k \wedge \theta_{kj}^l. \tag{12}$$

Чтобы фиксировать точку $x \in V_p$, надо фиксировать ее «криволинейные координаты» t^i, т. е. положить все формы θ^i равными нулю.

Из уравнений (12) следует, что формы $\overset{\circ}{\theta}{}_j^l = \theta^l_{j|\theta^k=0}$ становятся инвариантными 1-формами центроаффинной группы пространства $T_x(V_p)$, которую называют также *первой дифференциальной группой* $D^1{}_p$ пространства M_p. Обозначим $\Delta X^I_{j|\theta^i=0} = \tilde{\Delta} X_j^I$. При фиксации точки $x \in V_p$ получаем систему

$$\Delta x^I = 0; \quad \tilde{\Delta} X_j^I = 0. \tag{13}$$

Обозначим символом δ дифференцирование при закрепленной точке $x \in V_p$ (переменные t^i, изменение которых перемещает точку x по поверхности V_p, называют *главными параметрами*, а все остальные независимые переменные задачи — *вторичными параметрами*, поэтому можно сказать, что δ — символ дифференцирования по вторичным параметрам). Как следует из формул (9), (10), уравнения (13) в развернутом виде записываются так:

$$\delta x^I - \xi_a^I(x)\,\omega^a = 0; \tag{14}$$

$$\delta X_j^I - X_l^I \overline{\theta}_j^l - (\partial \xi_a^I/\partial x^K)\, X_j^K \omega^a = 0. \tag{15}$$

Как уже отмечалось, система уравнений (14) вполне интегрируема. Можно показать, что вся система уравнений (14), (15) вполне интегрируема. Учитывая структуру этих уравнений, в силу теоремы Г. Ф. Лаптева заключаем, что система функций x^I, $X^I{}_j$ образует геометрический объект, присоединенный к стационарной подгруппе H_x-группы $\bar{G}=G_r\times D^1{}_p$. На всей поверхности V_p получим поле геометрического объекта $(x^I, X^I{}_j)$, который называется *фундаментальным объектом первого порядка поверхности* V_p. Уравнения (9), (11) и составляют систему дифференциальных уравнений этого поля.

Продолжая уравнения (11), убедимся, что функции x^I, $X^I{}_j$, $X^I{}_{jl}$ образуют на поверхности V_p поле нового геометрического объекта, который называют *фундаментальным объектом второго порядка,* и т. д.

Как показал Г. Ф. Лаптев [11], изучение дифференциальной геометрии погруженного многообразия $V_p\subset X_n$ сводится к изучению полей фундаментальных геометрических объектов, определенных на V_p. Существует так называемый *полный фундаментальный объект*. Задание его координат как функций от p параметров t^i определяет поверхность V_p в X_n с точностью до преобразования фундаментальной группы G_r.

Систему дифференциальных уравнений (8) погруженного многообразия можно упростить. Так как X_n — однородное пространство с фундаментальной группой G_r, то $n\leqslant r$. Мы можем каким-либо образом фиксировать относительные координаты x^I, придав им определенные числовые значения. Этим мы сузим группу преобразований репера R_u (т. е. ограничим свободу перемещений подвижного репера). Так как x^I — постоянные, то и $\xi^I{}_a(x)=C^I{}_a$ — постоянные и формы Δx^I, обращение которых в нуль фиксирует точку в X_n, примут вид $\Delta x^I=-c^I{}_a\omega^a$. Следовательно, Δx^I — левоинвариантные 1-формы группы C_r. Они линейно независимы (поскольку относительные координаты x^I точки в X_n независимы) и их можно включить в состав базисных форм ω^a, приняв $\Delta x^I=\omega^I$. Дифференциальные уравнения (8) погруженного многообразия примут вид

$$\omega^I=X^I_j\theta^j. \qquad (16)$$

Как отмечено выше, ранг $\|X^I{}_j\|=p$. Мы можем перенумеровать формы ω^I так, что $\det\|X^i{}_j\|\neq 0$. Систему (16) разобьем на две подсистемы:

$$\omega^i = X^i_j \theta^j; \tag{17}$$

$$\omega^\alpha = X^\alpha_j \theta^j \tag{18}$$

$$(i,\ j = 1, 2,.., p;\quad \alpha, \beta = p+1,..., n).$$

Из системы (17) находим $\theta^j = \tilde{X}^j{}_i \omega^i$ $(\|\tilde{X}^j{}_i\| = \|X^i{}_j\|^{-1})$. Уравнения (18) примут вид

$$\omega^\alpha = \Lambda^\alpha_i \omega^i, \tag{19}$$

где $\Lambda^\alpha_i = X^\alpha_j \tilde{X}^j_i$.

Левоинвариантные 1-формы ω^i группы G_r называют *главными*. Их обращение в нуль фиксирует точку x на поверхности V_p (так как при этом $\theta^j = 0$). Но тогда в силу (16) и $\omega^i = 0$, значит, точка x оказывается неподвижной и как точка пространства X_n.

Система дифференциальных уравнений (19) поверхности V_p не содержит параметрических форм θ^i. Заметим, что система форм ω^i вполне интегрируема (так как вполне интегрируемы системы форм θ^j). Независимые первые интегралы $u^1, u^2, ..., u^p$ этой системы можно принять в качестве локальных координат точки $x \in V_p$. Точку x можно считать началом подвижного репера (напомним, что репер в пространстве X_n состоит из конечного множества точек).

Если поверхность задана системой уравнений (19), то говорят, что эта поверхность отнесена к подвижному реперу нулевого порядка (началом репера служит текущая точка поверхности). Функции $\Lambda^\alpha{}_i$ в уравнениях (19) определяют на поверхности V_p поле фундаментального объекта первого порядка (относительно репера нулевого порядка). Продолжения системы (19) дадут последовательность полей фундаментальных объектов $\{\Lambda^\alpha_i\}$, $\{\Lambda^\alpha_i, \Lambda^\alpha_{ij}\}$, $\{\Lambda^\alpha_i, \Lambda^\alpha_{ij}, \Lambda^\alpha_{ijk}\}$.. Таким образом, исходя из системы (19) мы опять приходим к схеме Г. Ф. Лаптева продолжений полей геометрических объектов, но при этом оказывается исключенным из рассмотрения пространство параметров M_p. Это значительно упрощает вычисления.

Дальнейшие упрощения в вычислениях связаны с так называемой *канонизацией подвижного репера R_u*, которая состоит в следующем.

Рассмотрим изменения функций $\Lambda^{\alpha}{}_i$ при преобразованиях из стационарной подгруппы H_x точки $x \in V_p$. Накладывая определенные ограничения на преобразования из H_x, придадим наиболее простые числовые значения максимально возможному числу функций $\Lambda^{\alpha}{}_i$. После этого продолжим дифференциальные уравнения поверхности. При этом упрощаются уравнения (14) и получаются новые уравнения

$$\omega^{a_1} = \Lambda_i^{a_1} \omega^i \quad (a_1 = p+1, \ldots, p_1). \tag{20}$$

Говорят, что поверхность V_p отнесена к подвижному реперу первого порядка. С уравнениями (20) поступаем таким же образом (второй шаг в канонизации репера), получим репер второго порядка и т. д. Процесс канонизации будет закончен, когда все инвариантные 1-формы ω^a группы G_r окажутся линейными комбинациями главных форм ω^i. Коэффициенты в этих линейных комбинациях являются числами либо функциями точки поверхности (дифференциалы этих функций представляют собой линейные комбинации главных форм). Эти функции — инварианты поверхности (аналогично кривизне и кручению кривой в E_3). Полученный при этом подвижный репер называется *каноническим репером поверхности* $V_p \subset \subset X_n$.

Метод канонизации репера был развит в работах Э. Картана и С. П. Финикова и широко применялся в исследованиях их и их учеников.

Важно заметить следующее. В процессе канонизации репера мы обычно вынуждены отказаться от рассмотрения тех частных случаев поверхностей, для которых такая канонизация не проходит. Таким образом, с помощью канонического репера мы изучаем не вообще гладкую p-поверхность, а лишь гладкую p-поверхность некоторого класса (именно того класса, поверхности которого допускают рассматриваемую канонизацию подвижного репера). Поэтому с точки зрения общности исследования лучше пользоваться методом Г. Ф. Лаптева продолжений полей геометрических объектов на погруженном многообразии V_p. При этом можно не проводить канонизации репера или же провести частичную канонизацию, которая не налагает каких-либо жестких требований на поверхность. Примеры этого будут приведены в дальнейшем.

§ 35. ПОВЕРХНОСТИ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Проективное пространство P_n является пространством представления проективной группы $P(n, \mathbf{R})$. Будем предполагать, что в пространстве P_n задан «начальный» проективный репер $R_0=\{M_0, M_1, ..., M_n, E\}$. Тогда всякий другой проективный репер R_u можно задать векторами $\vec{A}_I$ $(I=0, 1, ..., n)$, порождающими его вершины [2]. Деривационные формулы подвижного репера R_u имеют вид (см. § 16)

$$d\vec{A}_I=\omega_I^K\vec{A}_K \quad (I,\ K,\ L=0, 1,..., n), \tag{1}$$

причем 1-формы $\omega^k{}_l$ удовлетворяют уравнениям структуры пространства P_n:

$$D\omega_I^K=\omega_I^L\wedge\omega_L^K, \quad \sum\omega_I^I=0. \tag{2}$$

Пусть в пространстве P_n задана гладкая p-поверхность V_p. Отнесем ее к реперу нулевого порядка R_u, в котором $A_0=A\subset V_p$. Как показывает первое из уравнений (1),

$$d\vec{A}=\omega_0^0\vec{A}+\omega^{\hat{I}}\vec{A}_{\hat{I}} \tag{3}$$

$(\omega^{\hat{I}}=\omega_0^{\hat{I}},\ \hat{I}=1, 2,..., n)$, точка A неподвижна тогда и только тогда, когда формы $\omega^{\hat{I}}$ обращаются в нуль. Следовательно, в подвижном репере нулевого порядка поверхность V_p определяется системой уравнений (см. формулу (16) § 34)

$$\omega^\alpha=\Lambda_i^\alpha\omega^i \quad (i,\ j,\ k=1, 2,..., p;\ \ \alpha, \beta, \gamma=p+1,..., n). \tag{4}$$

Уравнение (3) примет вид

$$d\vec{A}=\omega_0^0\vec{A}+\omega^i(\vec{A}_i+\Lambda_i^\alpha\vec{A}_\alpha).$$

Перейдем к новому реперу $\check{R}_u$, вершины которого порождены векторами $\vec{B}=\vec{A}$, $\vec{B}_i=\vec{A}_i+\Lambda^\alpha{}_i\vec{A}_\alpha$, $\vec{B}_\alpha=\vec{A}_\alpha$ (эти векторы линейно независимы). Формулы (1) для репера $\check{R}_u$ примут вид

$$d\vec{B}=\omega_0^0\vec{B}+\omega^i\vec{B}_i, \quad d\vec{B}_{\hat{I}}=\check{\omega}_{\hat{I}}^K\vec{B}_K. \tag{5}$$

Первая из формул (5) показывает, что теперь

$$\check{\omega}^\alpha=0. \tag{6}$$

Такой вид принимает система (4) в репере $\tilde{R}_u$ (все $\Lambda^\alpha{}_i=0$). Следовательно, $\tilde{R}_u$ есть репер первого порядка поверхности V_p. Будем предполагать, что уже с самого начала поверхность V_p отнесена к подвижному реперу первого порядка, и применять обычную символику, обозначая этот репер через R_u и записывая уравнения (5) и (6) в виде

$$d\vec{A}=\omega_0^0\vec{A}+\omega^i\vec{A}_i,\quad d\vec{A}_{\hat{I}}=\omega_{\hat{I}}^K\vec{A}_K, \tag{7}$$

$$\omega^\alpha=0. \tag{8}$$

Система (8) представляет собой систему дифференциальных уравнений поверхности V_p в P_n относительно подвижного репера первого порядка R_u. Геометрически этот репер характеризуется тем, что его вершины $\vec{A_i}$ лежат в касательной p-плоскости $T_p(A)$ к поверхности V_p в точке A.

Рассмотрим систему форм ω^i. Учитывая уравнения (8), уравнения структуры пространства P_n и используя теорему Фробениуса, убеждаемся, что эта система форм вполне интегрируема. При $\omega^i=0$ точка A поверхности V_p неподвижна (см. первое из уравнений (7)). Независимые первые интегралы $u^1, \ldots, u^p$ системы уравнений $\omega^i=0$ можно принять за локальные координаты точки A на поверхности V_p.

Относительно начального репера R_0 имеем

$$\vec{A}=\vec{M}_0+x^{\hat{I}}\vec{M}_{\hat{I}} \tag{9}$$

(абсолютные координаты точки A взяты так, что $x^0=1$). Находим

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial x^{\hat{K}}}=\frac{\partial\vec{M}_0}{\partial x^{\hat{K}}}+\delta_{\hat{K}}^{\hat{I}}\vec{M}_{\hat{I}}+x^{\hat{I}}\frac{\partial\vec{M}_{\hat{I}}}{\partial x^{\hat{K}}}. \tag{10}$$

Так как R_0 — фиксированный репер, то порождающий его векторный базис $(\vec{M}_0, \vec{M}_1, \ldots, \vec{M}_n)$ может переходить только в базис, ему гомотетичный [3], а потому, если $\partial\vec{M}_0/\partial x^{\hat{K}}=\lambda_{\hat{K}}\vec{M}_0$, то и $\partial\vec{M}_{\hat{I}}/\partial x^{\hat{K}}=\lambda_{\hat{K}}\vec{M}_{\hat{I}}$ и равенство (10) примет вид

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial x^{\hat{K}}}=\lambda_{\hat{K}}\vec{A}+M_{\hat{K}}. \tag{11}$$

Переменные $\hat{x}^I$ в формуле (9) можно рассматривать как координаты точки A в P_n. Следовательно, $(\partial/\partial x^{\hat{I}})$ — естественный репер векторного пространства $T_A(P_n)$, касательного к многообразию P_n в точке A. Отождествим этот репер с репером, имеющим началом точку A и координатные векторы $\partial\vec{A}/\partial x^{\hat{K}}$.

Векторное пространство $T_A(P_n)$ удобно наделить структурой аффинного, затем расширенного и, наконец, проективного пространства. Как показывают формулы (11), это пространство определяется точками A и $M_{\hat{K}}$, т. е. совпадает с данным пространством P_n.

Пусть теперь точка A описывает поверхность V_p, отнесенную к реперу P_u первого порядка, так что имеют место формулы (7), (8). Тогда в уравнениях (9) имеем $x^{\hat{I}}=x^{\hat{I}}(u^1, \ldots, u^p)$, причем

$$\text{ранг} \left\| \frac{\partial x^{\hat{I}}}{\partial u^i} \right\| = p \tag{12}$$

в некоторой координатной окрестности U точки A на поверхности. При этом $(\partial/\partial u^i)$ — естественный репер векторного пространства $T_A(V_p)$, касательного в точке A к поверхности V_p. Имеем

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial u^i} = \frac{\partial x^{\hat{K}}}{\partial u^i} \frac{\partial\vec{A}}{\partial x^{\hat{K}}} . \tag{13}$$

Из равенств (12), (13) следует, что векторы $\partial\vec{A}/\partial u^i$ линейно независимы. Учитывая это, отождествим репер $(\partial/\partial u^i)$ пространства $T_A(V_p)$ с репером, имеющим началом точку A и координатные векторы $\partial\vec{A}/\partial u^i$. Здесь также удобно векторное пространство $T_A(V_p)$ наделить последовательно структурой аффинного, расширенного и, наконец, проективного пространства. Полученное при этом проективное p-пространство $T_p(A)$ называется *p-плоскостью, касательной к поверхности V_p в точке A.* Следовательно, эта плоскость определяется точкой A и p точками, порождаемыми векторами $\partial\vec{A}/\partial u^i$. Так как $d\vec{A}=(\partial\vec{A}/\partial u^i)du^i$, то вектор $d\vec{A}$ при любых значениях du^i порождает точку, лежащую в плоскости $T_p(A)$.

Точку A порождает и вектор $\vec{A}^*=\lambda\vec{A}$, $\lambda\in F(U\times\mathbf{R})$, т. е. λ — дифференцируемая функция от координат u^i точки $A\in V_p$ и параметра t, меняющего значение λ при неподвижной точке A. Находим

$$dA^*=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u^i}du^i+\frac{\partial\lambda}{\partial t}dt\right)\vec{A}^*+\lambda\frac{\partial\vec{A}}{\partial u^i}du^i. \quad (14)$$

Формы ω^i (см. первое из уравнений (7)) образуют вполне интегрируемую систему на поверхности V_p (т. е. с учетом уравнений (8)), а ее независимые первые интегралы являются локальными координатами u^i точки A на поверхности. Следовательно, существуют такие дифференцируемые функции $\alpha^i{}_j$ (от главных и, возможно, вторичных параметров), что $\omega^i=\alpha^i{}_j du^j$, $\det\|\alpha^i{}_j\|\neq 0$. Отсюда $du^i=\tilde{\alpha}^i{}_j\omega^j$. Подставив это выражение в (14), получим

$$d\vec{A}^*=\omega_0^0\vec{A}^*+\omega^j\vec{A}_j, \quad (15)$$

где

$$\omega_0^0=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u^i}du^i+\frac{\partial\lambda}{\partial t}dt\right); \quad \vec{A}_j=\lambda\tilde{\alpha}_j^i\partial\vec{A}/\partial u^i. \quad (16)$$

Из (16) заключаем, что векторы $\vec{A}_j$ линейно независимы и точки, порождаемые этими векторами, лежат в плоскости $T_p(A)$. Обозначая в формулах (15) вектор $\vec{A}^*$ снова через $\vec{A}$, запишем эти формулы в виде $d\vec{A}=\omega^0{}_0\vec{A}+\omega^i\vec{A}_i$, что в точности совпадает с первой из формул (7).

Система (8) есть система дифференциальных уравнений поверхности $V_p\subset P_n$ относительно подвижного репера первого порядка R_u. На интегральном многообразии системы (8) имеем $D\omega^\alpha=0$, что, используя уравнения структуры пространства P_n, можно записать в виде $\omega^\alpha{}_i\wedge\omega^i=0$. Отсюда, по лемме Картана,

$$\omega_i^\alpha=b_{ij}^\alpha\omega^j, \quad b_{ij}^\alpha=b_{ji}^\alpha. \quad (17)$$

Продолжая систему уравнений (17), получим

$$\Delta b_{ij}^\alpha\wedge\omega^j=0, \quad (18)$$

где

$$\Delta b_{ij}^\alpha=db_{ij}^\alpha+b_{ij}^\alpha\omega_0^0-b_{kj}^\alpha\omega_i^k-b_{ik}^\alpha\omega_j^k+b_{ij}^\beta\omega_\beta^\alpha. \quad (19)$$

Из уравнений (18) по лемме Картана находим

$$\Delta b^{\alpha}_{ij}=b^{\alpha}_{ijk}\omega^{k}, \tag{20}$$

где b^{α}_{ijk} симметричны по всем нижним индексам.

Если фиксировать точку $A\subset V_p$, то из уравнений (19), (20) получим

$$\delta b^{\alpha}_{ij}+b^{\alpha}_{ij}\pi^{0}_{0}-b^{\alpha}_{kj}\pi^{k}_{i}-b^{\alpha}_{ik}\pi^{k}_{j}+b^{\beta}_{ij}\pi^{\alpha}_{\beta}=0, \tag{21}$$

где $\pi^{K}_{I}=\omega^{K}_{I|\omega^{i}=0}$ и символом δ обозначено дифференцирование по вторичным параметрам, т. е. по параметрам стационарной подгруппы H_A точки A.

Используя теорему Фробениуса, можно проверить, что система уравнений (21) вполне интегрируема. Учитывая вид этих уравнений, заключаем, что система функций $b^{\alpha}{}_{ij}$ образует тензор (*основной тензор поверхности* $V_p\subset P_n$). На всей поверхности V_p получим поле этого тензора; уравнения (20) — дифференциальные уравнения этого поля.

Если поле основного тензора поверхности нулевое, т. е. $b^{\alpha}{}_{ij}=0$, то уравнения (17) примут вид

$$\omega^{a}_{i}=0. \tag{22}$$

Пользуясь теоремой Фробениуса, устанавливаем, что система уравнений (8), (22) вполне интегрируема. Следовательно, она определяет некоторую подгруппу H проективной группы пространства P_n. Теперь имеем

$$d\vec{A}=\omega^{0}_{0}\vec{A}+\omega^{i}\vec{A}_{i},\quad d\vec{A}_{i}=\omega^{0}_{i}\vec{A}+\omega^{j}_{i}\vec{A}_{j}. \tag{23}$$

Уравнения (23) показывают, что при любых приращениях du^k координат u^k точки A эта точка, как и точки A_i, не выходит из плоскости $T_p(A)$. Следовательно, когда точка A описывает поверхность V_p (точнее, некоторую окрестность $U\subset V_p$), касательная плоскость $T_p(A)$ остается неподвижной и потому $V_p\subset T_p(A)$ (точнее, $U\subset T_p(A)$). В этом случае принято говорить, что V_p есть p-плоскость (было бы точнее сказать, что поверхность V_p является локально плоской). Подгруппа H и есть стационарная подгруппа плоскости $T_p(A)$. Обратно: если поверхность $V_p\subset P_n$ есть p-плоскость P_p, то, отнеся ее к подвижному реперу первого порядка (A, A_i, A_α), в котором $A\in P_p$, $A_i\in P_p$, среди деривационных формул получим и формулы (23). Значит, имеют место уравнения (8), (22) и потому $b^{\alpha}{}_{ij}=0$.

Таким образом, *поверхность V_p в P_n является р-плоскостью тогда и только тогда, когда поле ее основного тензора — нулевое: $b^{\alpha}{}_{ij}=0$.*

Прямая $d\subset P_n$ называется *одномерной нормалью* поверхности V_p в точке $A\in V_p$, если $A\in d$, $d\not\subset T_p(A)$. Если такая прямая задана в каждой точке $A\in V_p$, то говорят, что вдоль поверхности определено *поле $d(A)$ одномерной нормали.* При этом предполагается, что прямая $d(A)$ этого поля дифференцируемо зависит от точки A.

Пусть вдоль поверхности V_p в P_n заданы $n-p$ полей $d^{\alpha}(A)$ одномерных нормалей. Говорят, что эти поля *линейно независимы,* если в каждой точке $A\in V_p$ плоскость, натянутая на прямые $d^{\alpha}(A)$, имеет размерность $n-p$. В этом случае можно вершины A_{α} подвижного репера R_u выбрать на одномерных нормалях: $A_{\alpha}\in d^{\alpha}(A)$. При фиксации точки A будет фиксирована и каждая из прямых $d^{\alpha}(A)$. Поэтому $\delta A_{\alpha}=$ $=\pi^0{}_{\alpha}A+\pi^{\alpha}{}_{\alpha}A_{\alpha}$. Следовательно, $\pi^{\beta}{}_{\alpha}=0$, $\alpha\neq\beta$, т. е. формы $\omega^{\beta}{}_{\alpha}$ $(\alpha\neq\beta)$ стали главными (линейными комбинациями форм ω^i). Уравнения (21) примут вид

$$\delta b^{\alpha}_{ij}+b^{\alpha}_{ij}\left(\pi^0_0+\pi^{\alpha}_{\alpha}\right)-b^{\alpha}_{kj}\pi^k_i-b^{\alpha}_{ik}\pi^k_j=0. \qquad (24)$$

Можно проверить, что для каждого фиксированного значения α $(\alpha=p+1, \ldots, n)$ система уравнений (24) вполне интегрируема. Учитывая вид этих уравнений, заключаем, что каждая из систем функций $b^{\alpha}{}_{ij}$ (α фиксировано) является тензором, присоединенным к стационарной подгруппе H_A точки $A\in V_p$. Итак, *если прямые (AA_{α}) вдоль поверхности V_p описывают $n-p$ линейно независимых полей одномерных нормалей, то поле основного тензора $b^{\alpha}{}_{ij}$ этой поверхности распадается в систему $n-p$ полей дважды ковариантных симметрических тензоров $b^{\alpha}{}_{ij}$ (α фиксировано для каждого из этих полей).*

Зададим на поверхности V_p гладкую линию γ системой дифференциальных уравнений

$$\omega^i=l^i\theta, \quad \omega^{\alpha}=0, \qquad (25)$$

где θ — параметрическая 1-форма, вполне интегрируемая; $D\theta=\theta\wedge\theta_1$, а l^i — дифференцируемые функции главных и вторичных параметров. Продолжая эту систему, находим

$$dl^i - l^i\omega_0^0 + l^j\omega_j^i - l^i\theta_1 = l_1^i\theta. \qquad (26)$$

При смещении точки A вдоль кривой γ имеем $d\vec{A} = \omega^0{}_0\vec{A} + \theta\vec{M}$, где $\vec{M} = l^i\vec{A}_i$. Если зафиксировать точку $A \in \gamma$, то получим

$$\delta\vec{M} = l^i\pi_i^0\vec{A} + (\delta l^i + l^j\pi_j^i)\vec{A}_i. \qquad (27)$$

Чтобы фиксировать точку A на кривой γ, надо положить $\theta = 0$. Тогда из уравнений (26) находим

$$\delta l^i + l^j\pi_j^i = l^i\varphi \ (\varphi = \pi_0^0 + \theta_1).$$

Теперь формула (27) примет вид

$$\delta\vec{M} = l^i\pi_i^0\vec{A} + \varphi\vec{M}.$$

Следовательно, при изменении вторичных параметров (при закрепленных главных параметрах) точка M может смещаться только по прямой (AM), касательной линии γ в точке A.

Таким образом, хотя функции l^i и могут зависеть от вторичных параметров, но если они удовлетворяют системе уравнений (26), то прямая (AM), касательная к кривой γ в текущей точке A, не зависит от вторичных параметров. В этом случае уравнения (25) определяют в некоторой области $U \subset V_p$ семейство гладких линий — интегральных кривых системы (25) (независимо от выбора подвижного репера первого порядка).

В точке A линия γ касается прямой $(AM) = [\vec{A}, d\vec{A}]$, где $d\vec{A} = \omega^0{}_0\vec{A} + \theta\vec{M}$. Находим второй дифференциал точки A при ее смещении вдоль γ:

$$d^2\vec{A} = \varphi^0\vec{A} + \varphi^1\vec{M} + \theta^2(l_1^i\vec{A}_i + b_{ij}^\alpha l^i l^j\vec{A}_\alpha), \qquad (28)$$

где $\varphi^0 = d\omega_0^0 + (\omega_0^0)^2 + \theta l^i\omega_i^0$; $\varphi^1 = 2\omega_0^0\theta + d\theta + \theta\theta_1$.

Двумерная плоскость $\Pi_2(A, \gamma) = [\vec{A}, d\vec{A}, d^2\vec{A}]$ (если она существует, т. е. если векторы $\vec{A}, d\vec{A}, d^2\vec{A}$ линейно независимы) называется *соприкасающийся 2-плоскостью к линии γ в точке A.*

Если P_s и P_t — две плоскости (размерностей s, t) в проективном пространстве P_n, то их *суммой* называется плоскость наименьшей размерности, содержащая каждую из плоскостей P_s и P_t. Аналогично вводится понятие суммы любого семейства $(P_{s_\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ плоскостей P_{s_λ}.

Сумма плоскостей $\Pi_2(A, \gamma)$, построенных для всевозможных гладких кривых, проведенных на поверхности V_p через ее точку A, называется *соприкасающейся плоскостью к поверхности* V_p в точке A. Из формулы (28) следует, что эта плоскость определяется точками, порожденными векторами $\vec{A}$, $\vec{A}_i$, $\Phi^\alpha \vec{A}_\alpha$, где $\Phi^\alpha = b^\alpha_{ij}\omega^i\omega^j$ (или $\Phi^\alpha = \omega^i\omega^\alpha_i$) — так называемые *квадратичные асимптотические формы поверхности* V_p.

Если линия γ такова, что в точке A выполняется равенство $b^\alpha_{ij}l^il^j = 0$, то из формулы (28) следует

$$\Pi_2(A, \gamma) \subset T_p(A). \tag{29}$$

В этом случае направление (AM), определяемое параметрами l^i, называется *асимптотическим направлением* в точке A. Линия $\gamma \subset V_p$ называется *асимптотической*, если в каждой точке $A \in \gamma$ выполняется условие (29).

Замечание. Если в точке $A \in \gamma$ векторы $\vec{A}$, $d\vec{A}$, $d^2\vec{A}$ линейно зависимы, то порождаемые ими точки лежат на одной прямой и не определяют плоскости. В этом случае говорят, что соприкасающаяся плоскость $\Pi_2(A, \gamma)$ — неопределенная, и считают, что включение (29) имеет место и, следовательно, направление (l^i) — асимптотическое. В частности, это справедливо в любой точке прямой, лежащей на поверхности. Значит, *если прямая лежит на p-поверхности, то она является асимптотической линией этой поверхности.*

Рассмотрим матрицу $\|b^\alpha_{ij}\|$, где α — номер строки, а столбцы нумеруются двумя индексами: i, j. Нас интересует ранг этой матрицы, поэтому, учитывая, что $b^\alpha_{ij} = b^\alpha_{ji}$, при $i \neq j$ будем выписывать лишь один столбец, именно тот, в котором $i < j$. Таким образом, матрица $\|b^\alpha_{ij}\|$ имеет $n-p$ строк и $p(p+1)/2$ столбцов. Следовательно, ранг $\|b^\alpha_{ij}\|$ равен q, $q \leqslant \min(n-p; p(p+1)/2)$.

Мы видим, что q есть число линейно независимых асимптотических форм Φ^α поверхности V_p. Пусть

$q<n-p$. Вершины A_α подвижного репера всегда можно перенумеровать так, чтобы первые q строк матрицы $\|b^\alpha{}_{ij}\|$ были линейно независимы и, значит, остальные строки окажутся линейными комбинациями первых q строк:

$b^\sigma_{ij}=\lambda^\sigma_a b^a_{ij}$ $(a, b=p+1,\ldots, p+q;\ \sigma=p+q+1,\ldots, n)$.

Формула (28) примет вид

$$d^2\vec{A}=\varphi^0\vec{A}+\varphi^1\vec{M}+\theta^2\left[l^l_1\vec{A}_l+b^a_{ij}l^il^j(\vec{A}_a+\lambda^\sigma_a\vec{A}_\sigma)\right]. \tag{30}$$

Следовательно, соприкасающаяся плоскость к поверхности V_p в точке A определяется точками, которые порождены следующей системой линейно независимых векторов:

$$\vec{A},\ \vec{A}_l,\ \vec{A}^*_a=\vec{A}_a+\lambda^\sigma_a\vec{A}_\sigma. \tag{31}$$

Эта плоскость имеет размерность $p+q$ и ее будем обозначать через $T'_{p+q}(A)$. Из (31) заключаем, что $T_p(A)\subset T'_{p+q}(A)$. Если взять вершины репера $A_a\in\in T'_{p+q}(A)$, т. е. $A_a=A^*{}_a$, то, как показывают формулы (31), получим $\lambda^\sigma{}_a=0$ и потому $b^\sigma{}_{ij}=0$.

Итак, *если q вершин A_a подвижного репера лежат в соприкасающейся плоскости $T'_{p+q}(A)$, то формы $\Phi^a(a=p+1,\ \ldots,\ p+q)$ линейно независимы, а остальные формы Φ^σ — нулевые:* $\Phi^\sigma=0$.

Рассмотрим еще один арифметический инвариант поверхности. Если заменить вершины подвижного репера по формулам

$$\vec{A}_\alpha=\lambda^\beta_\alpha\vec{A}^*_\beta, \tag{32}$$

то получим

$$\Phi^\alpha\vec{A}_\alpha=\Phi^\alpha\lambda^\beta_\alpha\vec{A}^*_\beta=\overset{*}{\Phi}{}^\beta\vec{A}^*_\beta,$$

$$\overset{*}{\Phi}{}^\beta=\lambda^\beta_\alpha\Phi^\alpha. \tag{33}$$

Следовательно, при замене вершин A_α репера по формуле (32) асимптотические формы Φ^α поверхности заменяются по формулам (33).

Пусть формы Φ^α зависят от $r<p$ независимых переменных (1-форм ω^i). Перенумеруем формы ω^i так, чтобы Φ^α зависели от форм ω^{i_1} $(i_1,\ j_1=1,\ 2,\ \ldots,\ r)$ и не зависели от форм ω^{i_2} $(i_2,\ j_2=r+1,\ldots, p)$. Так как $\omega^\alpha{}_i=\frac{1}{2}\partial\Phi^\alpha/\partial\omega^{i_2}$ и формы Φ^α не зависят от ω^{i_2}, то $\partial\Phi^\alpha/\partial\omega^{i_2}=0$, т. е.

$$\omega_{i_2}^{\alpha}=0. \tag{34}$$

Из (34) заключаем, что $b_{i_2 i_1}^{\alpha}=0$, а потому $b_{i_1 i_2}^{\alpha}=0$ и, следовательно,

$$\omega_{i_1}^{\alpha}=b_{i_1 j_1}\omega^{j_1}. \tag{35}$$

Продолжая уравнения (34) (с учетом уравнений $\omega^{\alpha}=0$ поверхности и уравнений (35)), найдем

$$b_{j_1 i_1}^{\alpha}\omega_{i_2}^{i_1}=t_{j_1 i_1 k_1}^{\alpha}\omega^{k_1}. \tag{36}$$

Применяя, если надо, преобразование (33) над формами Φ^{α}, всегда можно получить по крайней мере одну из этих форм, зависящую существенно от полного числа r независимых переменных. Поэтому можно считать, что для некоторого значения $\alpha=\alpha_0$ ранг $\|b_{j_1 i_1}^{\alpha_0}\|=r$. Для такого значения α_0 из (36) найдем

$$\omega_{i_2}^{i_1}=a_{i_2 k_1}^{i_1}\omega^{k_1}. \tag{37}$$

Учитывая формулы (37), замечаем, что на поверхности V_p система уравнений $\omega^{i_1}=0$ вполне интегрируема. Эта система имеет r независимых первых интегралов. Ее интегральными многообразиями служат $(p-r)$-мерные поверхности, содержащиеся в поверхности V_p, причем через каждую точку $A\in V_p$ проходит одна такая поверхность V_{p-r}. Говорят, что *поверхность V_p с помощью системы уравнений $\omega^{i_1}=0$ расслаивается в r-параметрическое семейство поверхностей размерности $p-r$.*

Если точка A смещается по поверхности V_{p-r} $(\omega^{i_1}=0)$, то

$$d\vec{A}=\omega_0^0\vec{A}+\omega^{i_2}\vec{A}_{i_2}, \quad d\vec{A}_{i_2}=\omega_{i_2}^0\vec{A}+\omega_{i_2}^{j_2}\vec{A}_{j_2}. \tag{38}$$

Итак, когда точка A описывает поверхность V_{p-r}, вершины A, A_{i_2} подвижного репера, определяющие касательную плоскость $T_{p-r}(A)$ к этой поверхности, не выходят из плоскости $T_{p-r}(A)$. Отсюда следует, что эта плоскость неподвижна и локально $V_{p-r}\subset T_{p-r}(A)$. Можно сказать, что V_{p-r} есть $(p-r)$-плоскость (плоская образующая поверхности V_p). Когда точка A описывает плоскую образующую V_{p-r}, имеют место формулы (38) и

$$d\vec{A}_{i_1}=\omega_{i_1}^0\vec{A}+\omega_{i_1}^{j_1}\vec{A}_{j_1}+\omega_{i_1}^{i_2}\vec{A}_{i_2}; \tag{39}$$

значит, при этом плоскость $T_p(A)$ неподвижна. Эта плоскость меняется только от изменения параметров u^{k_1} независимых первых интегралов вполне интегрируемой системы уравнений $\omega^{i_1}=0$.

Рангом поверхности V_p называется число независимых параметров, от которых зависит семейство касательных p-плоскостей этой поверхности. Это число совпадает с наименьшим числом 1-форм ω^{i_1}, через которые могут быть выражены одновременно все асимптотические формы Φ^α. Можно также сказать, что ранг поверхности, отнесенной к подвижному реперу первого порядка, есть ранг системы форм $\omega^\alpha{}_i$.

Мы доказали, что *поверхность* V_p *ранга* $r<p$ *представляет собой* r*-параметрическое семейство плоских образующих размерности* $p-r$, *причем вдоль каждой такой образующей касательная* p*-плоскость к поверхности* V_p *одна и та же.*

Поверхность V_2 ранга $r=1$ называется *развертывающейся*. Поверхность V_p ранга $r<p$ называется *тангенциально-вырожденной*. Изучением таких поверхностей занимались многие авторы (Э. Картан, Н. Н. Яненко, С. И. Савельев, М. А. Акивис, В. В. Рыжков и др.).

Рассмотрим гладкое многообразие X_p $(p>1)$ и некоторую его область G, на которой можно задать p линейно независимых гладких 1-распределений $\Delta^i{}_1$ $(i=1, 2, \ldots, p)$. Каждое распределение $\Delta^i{}_1$ определяет в области G семейство σ^i интегральных кривых этого распределения. В области G получим систему $\Sigma_p=\{\sigma^1, \ldots, \sigma^p\}$ из p семейство гладких кривых, обладающую следующим свойством: через каждую точку $x\in G$ проходит по одной линии каждого семейства σ^i так, чтобы касательное пространство $T_x(V_p)$ является прямой суммой подпространств $\Delta^i{}_1(x)$.

Систему Σ_p кривых, обладающую этим свойством, называют *сетью* (точнее, *сетью гладких кривых*) в области G. При этом 1-распределения $\Delta^i{}_1$, задающие сеть Σ_p, в области G определяют $(p-1)$-распределения $\Delta^i{}_{p-1}$ такие, что в каждой точке $x\in G$ подпространство $\Delta^i{}_{p-1}(x)$ является прямой суммой подпространств $\Delta^j{}_1$ $(j\neq i)$. Пусть распределение $\Delta^i{}_{p-1}$ (i фиксировано) интегрируемо и γ^i — интегральная кривая распределения $\Delta^i{}_1$. Тогда через каждую точку $x\in\gamma^i$ проходит интегральное многообразие распределения $\Delta^i{}_{p-1}$, причем на каждом из этих интегральных многообразий определена сеть $\Sigma_{p-1}(x)$ из кривых, принадлежащих семействам σ^j $(j \neq i)$.

Назовем *рангом сети* Σ_p число r всех неинтегрируемых распределений Δ^i_{p-1}, задаваемых этой сетью. Ясно, что *ранг сети является ее топологическим инвариантом.* Множество всех сетей, определенных в области G, можно теперь разбить на три класса:

а) *голономные сети* — сети ранга $r=0$;

б) *частично голономные сети,* для которых $0<r<p$;

в) *сети полного ранга* $r=p$.

Частично голономные сети можно подразделить на подклассы в зависимости от значения их ранга r.

Пусть D_1 — модуль, двойственный F-модулю D^1, и сеть $\Sigma_p \subset G$ порождена векторными полями $X_i \in D^1$. Тогда в области G можно определить систему p линейно независимых 1-форм $\omega^i \in D_1$ условием

$$\omega^i (X_j)_{|x} = \delta^i_j \quad \forall x \in G. \tag{40}$$

Уравнению $\omega^i(X)_{|x}=0$ (i фиксировано) удовлетворяет каждый вектор $X_{j|x}$ $(j \neq i)$, и, значит, что уравнение определяет векторное подпространство $\Delta^i_{p-1}(x) \subset T_x$. Система $p-1$ уравнений $\omega^j(X)_{|x}=0$ определяет одномерное подпространство $\Delta^i_1(x) \subset T_x$. Следовательно, система уравнений $\omega^j=0$ $(j=1, 2, \ldots, p;\ j \neq i)$ определяет 1-распределение Δ^i_1 в области G. Таким образом, сеть Σ_p можно задать 1-формами ω^i, удовлетворяющими условию (40).

Интегрируемость распределения Δ^i_{p-1} равносильна тому, что уравнение $\omega^i=0$ вполне интегрируемо. Это позволяет легко найти ранг сети, заданной 1-формами ω^i.

Рассмотрим гладкую поверхность V_p в проективном пространстве P_n.

Пусть в области $G \subset V_p$ задана сеть Σ_p гладких линий. Репер $R=(A, A_1, \ldots, A_n)$ выберем теперь так, чтобы прямые AA_i были касательными в точке $A \in G$ к линиям этой сети. Деривационные формулы репера R имеют вид

$$\begin{aligned} d\vec{A} &= \omega^0_0 \vec{A} + \omega^i \vec{A}_i, \\ d\vec{A}_i &= \omega^0_i \vec{A} + \omega^j_i \vec{A}_j + \omega^\alpha_i \vec{A}_\alpha, \\ d\vec{A}_\alpha &= \omega^0_\alpha \vec{A} + \omega^i_\alpha \vec{A}_i + \omega^\beta_\alpha \vec{A}_\beta \end{aligned} \tag{41}$$

$(i, j, k=1, 2, \ldots, p;\ \alpha, \beta, \gamma=p+1, \ldots, n).$

Если теперь фиксировать точку A $(\omega^i=0)$, то этим будет фиксирована каждая из прямых AA_i и вторая строка формул (41) должна иметь вид

$$\delta\vec{A}_i=\pi_i^0\vec{A}+\pi_i^i\vec{A}_i$$

(δ — символ дифференцирования по вторичным параметрам и $\pi_A^\beta=\omega_{A|\omega_i=0}^B$). Следовательно, формы ω^j_i $(i\neq j)$ — главные:

$$\omega_i^j=a_{ik}^j\omega^k \quad (i\neq j). \tag{42}$$

Обратно: если в деривационных формулах (41) подвижного репера R, присоединенного к поверхности $V_p\subset P_n$, формы ω_i^j $(i\neq j)$ — главные, то на поверхности V_p выделена сеть: линии этой сети являются огибающими прямых AA_i репера R. Сеть $\Sigma_p\subset V_p\subset P_n$ называется *плоской*, если $p=n$.

Продолжение системы (42) имеет вид

$$da_{ik}^j+a_{ik}^j(\omega_0^0-\omega_i^i-\omega_k^k+\omega_j^j)-\omega_i^0\delta_k^j+$$
$$+a_{is}^ja_{hk}^s\omega^k-a_{ik}^ja_{il}^t\omega^l+b_{ik}^\alpha\omega_\alpha^j=a_{ikl}^j\omega^l. \tag{43}$$

Из (43) следует, что в общем случае система функций $a^j{}_{ik}$ не образует геометрического объекта. Из (27) и (43) заключаем, что относительно стационарной подгруппы H_A точки $A\in V_p$ мы имеем систему тензоров $\{a^k{}_{ij},\ b^\alpha{}_{ij}\}$ $(i,\ j,\ k$ фиксированы, $j\neq i,\ k)$ и квазитензоров $\{a^i{}_{ij},\ b^\alpha{}_{ij}\}$.

Если обозначить $\nu_{ij}^k=2a_{[ij]}^k$, то из уравнений (43) находим

$$d\nu_{ij}^k+\nu_{ij}^k(\omega_0^0-\omega_i^i-\omega_j^j+\omega_k^k)=h_{ijs}^k\omega^s$$

и, значит, $\nu^k{}_{ij}$ — относительный инвариант. Система функций $\nu^k{}_{ij}$ $(i,\ j,\ k=1,\ 2,\ ...,\ p;\ k\neq i,\ j)$ определяет геометрический объект, который назовем *объектом неголономности сети* $\Sigma_p\subset V_p$. Для каждого значения индекса k сеть Σ_p определяет $(p-1)$-распределение $\Delta^k{}_{p-1}$ такое, что $\Delta^k{}_{p-1}(A)=(AA_1...A_{k-1}A_{k+1}...A_p)$. Распределение $\Delta^k{}_{p-1}$ интегрируемо тогда и только тогда, когда на поверхности V_p вполне интегрируемо уравнение $\omega^k=0$, т. е. когда для данного k имеем $\nu^k{}_{ij}=0$. Таким образом, *чтобы сеть была голономна* (имела ранг $r=0$), *необходимо и достаточно, чтобы ее объект неголономности был равен нулю.*

§ 36. ПОВЕРХНОСТИ, НЕСУЩИЕ СОПРЯЖЕННУЮ СЕТЬ

Пусть в пространстве P_n дано дифференцируемое многообразие X_r, образующим элементом которого служит h-плоскость: $P_h(u)=P_h(u^1, \ldots, u^r)=(M_1, M_2, \ldots, M_{h+1})$. Если точка $M \in P_n$ порождена вектором $\vec{M}$, то, как обычно [2], пишут $\pi(\vec{M})=M$. Справедливо утверждение: *если учитывать лишь бесконечно малые первого порядка, то*

$$\pi(x^s\vec{M}_s) \in P_h(u+du) \Leftrightarrow \pi(x^s d\vec{M}_s) \in P_h(u).$$

□ Плоскость $P_h(u)$ определена точками, порожденными векторами $\vec{M}_s$. Следовательно, плоскость $P_h(u+du)$ определена точками, порожденными векторами $\vec{M}_s+d\vec{M}_s$, точка $\pi(x^s\vec{M}_s) \in P_h(u)$. Эта точка принадлежит и плоскости $P_h(u+du)$ тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$x^s\vec{M}_s=\sum_s (x^s+\varepsilon^s)(\vec{M}_s+d\vec{M}_s),$$

где ε^s — бесконечно малые ($x^s+\varepsilon^s$ — координаты точки $\pi(x^s\vec{M}_s)$ относительно репера из точек $\pi(\vec{M}_s+d\vec{M}_s)$ в плоскости $P_h(u+du)$). Отсюда $x^s d\vec{M}_s=-\varepsilon^s\vec{M}_s$. Но $\pi(\varepsilon^s\vec{M}_s) \in P_h(u)$. Значит, и $\pi(x^s dM_s) \in P_h(u)$. ■

В плоскости $T_p(A)$, касательной к поверхности V_p в точке A, возьмем два направления, определяемые направляющими параметрами (ω^i) и $(\overline{\omega}^i)$. Это значит, что эти направления задают в плоскости $T_p(A)$ прямые (AM) и $(A\overline{M})$, где $\vec{M}=\omega^0{}_0\vec{A}+\omega^i\vec{A}_i$, $\vec{\overline{M}}=\overline{\omega}^0{}_0\vec{A}+\overline{\omega}^i\vec{A}_i$. Точка $\overline{M}=\pi(\vec{\overline{M}}) \in T_p(A)$ принадлежит плоскости $T_p(\pi(\vec{M}))$, касательной к поверхности в соседней точке $\pi(\vec{M})$, взятой в направлении (AM), только в том случае, если $\pi(\overline{\omega}^0{}_0 d\vec{A}+\overline{\omega}^i d\vec{A}_i) \in T_p(A)$, т. е. если $\pi(\overline{\omega}^i d\vec{A}_i) \in T_p(A)$ (так как $\pi(\overline{\omega}^0{}_0 d\vec{A} \in T_p(A))$. Отсюда следует

$$b^\alpha_{ij}\omega^i\overline{\omega}^j=0. \tag{1}$$

Мы видим, что соотношение (1) эквивалентно следующему условию:

$$\text{направление } (\overline{\omega}^i) \subset T_p(A) \cap T_p(\pi(\omega^0_0\vec{A}+\omega^i\vec{A}_i)). \tag{2}$$

Но в формуле (1) направления (ω^i) и $(\bar{\omega}^i)$ равноправны. Значит, если имеет место (2), то справедливо и следующее условие:

$$\text{направление } (\omega^i) \subset T_p(A) \cap T_p(\pi(\bar{\omega}_0^0 \vec{A} + \bar{\omega}^i \vec{A}_i)). \qquad (3)$$

Направления (ω^i), $(\bar{\omega}^i)$ на поверхности $V_p \subset P_n$ называются *сопряженными,* если они удовлетворяют условию (2) (а значит, и условию (3)). Следовательно, *два направления (AM) и (AN) на поверхности сопряжены тогда и только тогда, когда их направляющие параметры удовлетворяют условию* (1).

Вершины $A_a (a, b = p+1, \ldots, p+q)$ репера будем брать в плоскости $T'_{p+q}(A)$, соприкасающейся к поверхности V_p в точке A. Тогда формы Φ^a являются линейно независимыми и все остальные квадратичные асимптотические формы Φ^σ равны нулю. Условие (1) примет вид

$$b^a_{ij} \omega^i \bar{\omega}^j = 0. \qquad (4)$$

Отсюда следует, что если направления прямых AA_i, AA_j репера R сопряжены, то все $b^a{}_{ij}$ равны нулю, и обратно. Значит, в каждой точке $A \in V_p$ существует p линейно независимых попарно сопряженных направлений тогда и только тогда, когда асимптотические формы поверхности можно одновременно привести к каноническому виду

$$\Phi^a = \sum_i b^a_{ii} (\omega^i)^2. \qquad (5)$$

Если асимптотические формы Φ^a поверхности $V_p \subset \subset P_n$ приведены к виду (5), то сеть интегральных кривых 1-распределений $\Delta^i{}_1 = (AA_i)$ назовем *сопряженной сетью поверхности* V_p.

Как известно, для поверхности V_p инвариант q равен рангу $\|b^\alpha{}_{ij}\|$. Если асимптотические формы поверхности приведены к виду (5), то q равно рангу $\|b^a{}_{ii}\|$. Матрица $\|b^a{}_{ii}\|$ имеет p столбцов. Следовательно, для поверхности V_p, несущей сопряженную сеть, имеем $q \leqslant p$. Если при этом $q = p$, то V_p называют *поверхностью Картана* (такую поверхность впервые рассматривал Э. Картан и называл ее «многообразием особого проективного типа»). Рассмотрим такую поверхность.

Заменим вершины A_a репера по формуле

$$\vec{A}_a = \lambda_a^b \check{\vec{A}}_b, \quad \det \|\lambda_a^b\| \neq 0. \tag{6}$$

Тогда получим

$$d\vec{A}_i = \omega_i^0 \vec{A} + \omega_i^j \vec{A}_j + \omega_i^a \lambda_a^b \check{\vec{A}}_b$$

и новые формы $\check{\omega}^b{}_i = \lambda^b{}_a \omega^a{}_i$. Следовательно, при замене (6) вершин репера коэффициенты квадратичных асимптотических форм поверхности изменяются по закону

$$\check{b}_{ii}^b = \lambda_a^b b_{ii}^a.$$

Матрицу $\|\lambda^b{}_a\|$ можно выбрать так, чтобы матрица $\|\check{b}^b{}_{ii}\|$ стала диагональной. Будем считать такой выбор вершин $\check{A}_b$ выполненным и вернемся к прежним обозначениям. Имеем

$$\omega_i^{p+i} = b_{ii}^{p+i} \omega^i, \quad \omega_i^{p+j} = 0 \quad (i \neq j) \tag{7}$$

(суммирование по i не производится). Здесь $b_{ii}^{p+i} \neq 0$, так как ранг $\|b_{ii}^{p+i}\|$ равен p.

Докажем теорему существования поверхности Картана. Относительно выбранного подвижного репера R такая поверхность определяется системой уравнений (7) и уравнениями

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_i^\sigma = 0 \quad (\sigma = 2p+1, \dots, n). \tag{8}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (7), (8), находим:

$$\Delta b_{ii}^{p+i} \wedge \omega^i + \omega_j^i \wedge \omega^j = 0 \text{ (суммирование по } j \neq i), \tag{9}$$

$$\tilde{\omega}_{p+i}^{p+j} \wedge \omega^i + \omega_i^j \wedge \omega^j = 0 \quad (i \neq j, \text{ нет суммирования}), \tag{10}$$

$$\omega_{p+i}^\sigma \wedge \omega^i = 0 \text{ (нет суммирования)}, \tag{11}$$

где
$$\Delta b_{ii}^{p+i} = -d \ln b_{ii}^{p+i} - \omega_0^0 - \omega_{p+i}^{p+i} + 2\omega_i^i;$$

$$\tilde{\omega}_{p+i}^{p+j} = -\frac{b_{ii}^{p+i}}{b_{ii}^{p+j}} \omega_{p+i}^{p+j}.$$

Замечание. Пусть дана система уравнений Пфаффа

$$\theta^\alpha = 0, \tag{12}$$

у которой система квадратичных уравнений $D\theta^\alpha=0$ состоит из двух подсистем:

$$\theta_i^a \wedge \omega^i=0, \tag{13}$$

$$\theta_i^\sigma \wedge \omega^i=0, \tag{14}$$

где ω^i — линейно независимые главные формы на интегральном многообразии X_p, формы $\theta^a{}_i$ не зависят от форм $\theta^\sigma{}_i$, а формы $\theta^\sigma{}_i$ не зависят от форм $\theta^a{}_i$ (в пространстве всех переменных). Тогда полярную матрицу интегрального элемента можно записать в клеточном виде:

$$(M)=\left(\begin{array}{c|c} (A) & 0 \\ \hline 0 & (B) \end{array}\right),$$

где матрица (A) записана с использованием только уравнений (13), а (B) — с использованием только уравнений (14). Имеем

$$\text{ранг } (M)=\text{ранг } (A)+\text{ранг } (B).$$

Отсюда вытекает, что исследование системы (12) на инволютивность в этом случае упрощается. Вычисляя ранги матриц типа (A) и (B), можно найти числа Q', Q'' (аналогичные числу Картана общего случая), затем найти число N' параметров, от которых зависит наиболее общее выражение форм $\theta^a{}_i$, удовлетворяющих системе (13), и число N'' для форм $\theta^\sigma{}_i$ системы (14).

В силу теоремы Картана система (12) находится в инволюции тогда и только тогда, когда $Q'=N'$ и $Q''=N''$.

Вернемся к исследованию системы (7), (8). Система квадратичных уравнений, замыкающих систему уравнений Пфаффа (7), (8), состоит из двух подсистем: подсистемы (9), (10) и подсистемы (11), которые можно исследовать в отдельности в соответствии со сказанным в замечании.

Для подсистемы (9), (10) находим $s'_1=p^2$, $s'_2=$ $=p(p-1)$, $s'_3=0$, $Q'=p(3p-2)$. Такое же значение получается и для N'. Для подсистемы (11) имеем

$$s''_1=p(n-2p), \quad s''_2=0, \quad Q''=N''.$$

Таким образом, система уравнений (7), (8) находится в инволюции с характерами $s_1=s'_1+s''_2=$

$=p(n-p)$, $s_2=s'_2+s''_2=p(p-1)$, $s_3=\dots s_p=0$ и справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *В проективном n-пространстве существуют p-поверхности Картана с произволом $p(p-1)$ функций двух аргументов (здесь $4\leqslant 2p\leqslant n$).*

Из формулы (9) следует $a^j_{ik}=0$ (i, j, k различны) и потому $\nu^j_{ik}=0$, т. е. *сопряженная сеть на поверхности Картана является голономной.*

Пусть на гладкой поверхности $V_p\subset P_n$ задано 1-распределение Δ_1. Это распределение называется *фокальным,* если на прямой $AM=\Delta_1(A)\forall A\in V_p$ существует *фокус,* т. е. такая точка $F\neq A$, что при некотором смещении точки A по поверхности V_p точка F описывает линию, касающуюся прямой AM в точке F (или же точка F неподвижна).

Когда точка A описывает поверхность $V_p=(A)$, точка F описывает некоторую поверхность (F) так, что прямая AF, проходя через соответствующие точки A и F, касается обеих поверхностей: поверхности (A) — в точке A и поверхности (F) — в точке F.

На поверхности V_p рассмотрим 1-распределение Δ_1 и отнесем эту поверхность к подвижному реперу $R=(A, A_k, A_\alpha)$, в котором $(AA_i)=\Delta_1(A)$, а i фиксировано. Имеем

$$d\vec{A}_i=\omega_i^0\vec{A}+\omega_i^k\vec{A}_k+\omega_i^\alpha\vec{A}_\alpha.$$

Если положить все $\omega^k=0$, то должна быть фиксирована прямая AA_i: $\delta\vec{A}_i=\pi^0{}_i\vec{A}+\pi^i{}_i\vec{A}_i$. Следовательно, $\pi^\alpha{}_i=0$ (что известно) и $\pi^j{}_i=0$ $(j\neq i)$. Значит, формы $\omega^j{}_i$ — главные:

$$\omega_i^j=a_{ik}^j\omega^k \quad (i \text{ фиксировано, } j, k=1, 2,\dots, p;\ j\neq i). \tag{15}$$

На прямой AA_i ищем фокус F. Имеем

$$\vec{F}=\lambda\vec{A}+\vec{A}_i \tag{16}$$

и при некотором смещении точки A по поверхности V_p получим

$$d\vec{F}=\theta\vec{A}+\varphi\vec{A}_i, \tag{17}$$

где θ и φ — некоторые 1-формы. Подставив в (17) дифференциал $d\vec{F}$, найденный из (16), и учитывая линейную независимость векторов, порождающих вершины репера R, находим:

$$d\lambda + \lambda\omega_0^0 + \omega_i^0 = \theta, \tag{18}$$

$$\lambda\omega^i + \omega_i^i = \varphi, \tag{19}$$

$$\lambda\omega^j + \omega_i^j = 0 \quad (j \neq i), \tag{20}$$

$$b_{ik}^{\alpha}\omega^k = 0. \tag{21}$$

Уравнения (18), (19), (20) определяют 1-формы θ, φ и функцию λ.

Направление (AA_i) имеет в репере R направляющие параметры $\bar{\omega}^i \neq 0$, остальные $\bar{\omega}^j = 0$. Уравнение (21) перепишем в виде

$$b_{ik}^{\alpha}\bar{\omega}^i\omega^k = 0.$$

Отсюда заключаем, что *если направление AA_i — фокальное, то оно сопряжено соответствующему направлению (ω^j) смещения точки A. Следовательно,* 1*-распределение* Δ_1 *на поверхности заведомо не может быть фокальным, если для него не существует сопряженного* 1*-распределения.*

Пусть σ_p — сопряженная сеть на поверхности Картана $V_p \subset P_n$. Касательные к линиям этой сети определяют p линейно независимых 1-распределений $\Delta_1{}^i$. Отнесем поверхность V_p к подвижному реперу $R = (A, A_i, A_\alpha)$, где $AA_i = \Delta_1{}^i(A)$. Тогда имеют место формулы (7), (8). Ищем фокус F на прямой AA_i, i фиксировано. Уравнение (21) теперь примет вид $b_{ii}^{p+i}\omega^i = 0$, и так как $b_{ii}^{p+i} \neq 0$, то $\omega^i = 0$. Следовательно, смещение точки A должно принадлежать подпространству $\Delta^i{}_{n-1}(A) = (AA_1 \ldots A_{i-1}A_{i+1} \ldots A_p)$. При $\omega^i = 0$ уравнение (20) примет вид (см. формулу (9))

$$(\lambda + a_{ij}^j)\,\omega^j = 0 \quad (j \neq i). \tag{22}$$

Так как ω^j не могут быть равны нулю одновременно (при $\omega^i = 0$), то $\det\|\lambda + a^j{}_{ij}\| = 0$. Отсюда $\prod\limits_{j \neq i} (\lambda + a^j{}_{ij}) = 0$. Это уравнение имеет $p-1$ корней $\lambda_i{}^j = -a^j{}_{ij}$ и, следовательно, на каждой прямой (AA_i) имеем $p-1$ фокусов $A_i{}^j$, порождаемых векторами $\vec{A}_i{}^j = -a^j{}_{ij}(\vec{A}) + \vec{A}_i$. Пусть среди $a^j{}_{ij}$ (i фиксировано) нет равных и, значит, все фокусы прямой (AA_i) различны. Следовательно, различны все λ_i^j при фиксированном i. Возьмем определенное значение индекса $j=j_0$. Подставив $\lambda=-a_{ij_0}^{j_0}$ в систему (22), получим

$$0\cdot\omega^{j_0}=0, \quad (-a_{ij_0}^{j_0}+a_{ij_1}^{j_1})\omega^{j_1}=0 \quad (j_1\neq j_0).$$

Значит, точка $A_i^{j_0}$ описывает ребро возврата развертывающейся поверхности с образующими AA_i тогда, когда точка A смещается по линии семейства σ^{j_0} сети σ_p (т. е. когда $\omega^{j_0}\neq 0$, а остальные $\omega^{j_1}=0$, $\omega^i=0$).

Таким образом, сопряженная сеть σ_p на поверхности Картана обладает тем свойством, что касательные к линиям любого семейства σ^i линий этой сети, взятые вдоль линии любого другого семейства σ^j линий этой сети, образуют развертывающуюся поверхность. Поверхность $V_p\subset P_n$, несущая сеть σ_p, обладающую этим свойством, называется *p-сопряженной системой.* При этом $2\leqslant p\leqslant n$. Отнесем p-сопряженную систему V_p к подвижному реперу, построенному на касательных к линиям ее сети σ_p. Прямые AA_i, взятые вдоль линии ω^j сети, образуют развертывающуюся поверхность. Согласно сказанному выше, направления AA_i, AA_j сопряжены. Следовательно, сеть σ_p, указанная в определении p-сопряженной системы V_p, является сопряженной сетью на этой поверхности. При отыскании фокуса F на прямой AA_i снова получим уравнения (18), (19), (20). Уравнение (21) примет вид $b^\alpha_{ii}\omega^i=0$ (нет суммирования) (так как $b^\alpha_{ik}=0$, $i\neq k$, в силу сопряженности сети σ_p). Это уравнение удовлетворяется, так как по определению p-сопряженной системы точка F описывает ребро возврата развертывающейся поверхности с образующими AA_i тогда, когда точка A описывает на поверхности линию ω^j (для которой все $\omega^k=0$, $k\neq j$), где $j\neq i$. По этой же причине формы ω_i^j $(j\neq i)$ должны линейно выражаться только через формы ω^i и ω^j (см. уравнение (20)) и, значит, сеть σ_p — голономная.

Можно доказать, что *p-сопряженная система в проективном n-пространстве* $(2\leqslant p\leqslant n)$ *существует с произволом* $p(p-1)$ *функций двух аргументов.*

З а м е ч а н и е. Легко установить, что поверхность Картана есть частный случай p-сопряженной системы: это такая p-сопряженная система, у которой в каждой ее точке соприкасающаяся плоскость $2p$-мерная $(q=p)$.

Как мы показали выше, для поверхности $V_p \subset P_n$, несущей сопряженную сеть, инвариант $q \leqslant p$. При этом если $q=p$, то V_p — поверхность Картана. Рассмотрим теперь строение поверхности V_p, несущей сопряженную сеть σ_p и такой, что $1 \leqslant q < p$. Относя поверхность к подвижному реперу $R(A, A_i, A_\alpha)$, построенному на касательных к линиям сети σ_p в точке $A \in V_p$ и $A_a \in \in T'_{p+q}(A)$, получим для асимптотических форм поверхности выражения вида

$$\Phi^a = \sum_i b^a_{ii} (\omega^i)^2$$

$(i=1, 2, \dots, p;\ a=p+1, \dots, p+q)$. Изменяя, если нужно, нумерацию вершин A_i репера, всегда можно добиться того, чтобы ранг $\|b^a{}_{ss}\|$ был равен q $(s=1, 2, \dots, q)$. Заменой вершин A_a в соприкасающейся плоскости $T'_{p+q}(A)$ приведем эту матрицу к диагональному виду. Последующим нормированием вершин A_a приведем коэффициенты $b_{ss}{}^{p+s}$ к единице. Тогда поверхность V_p определится следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\omega^a=0, \ \omega^\sigma=0 \quad (\sigma=p+q+1, \dots, n), \\ &\omega_i^{p+i}=\omega^i, \ \omega_i^{p+j}=0 \quad (i \neq j, \ i, \ j=1, 2, \dots, q), \\ &\omega_l^{p+l}=b_{ll}^{p+l}\omega^l \quad (l=q+1, \dots, p), \\ &\omega_i^\sigma=0, \quad \omega_l^\sigma=0. \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Дифференцируя внешним образом первое уравнение четвертой строки, получим

$$\omega_i^{p+i} \wedge \omega_{p+i}^\sigma=0 \ \text{(нет суммирования)},$$

или, учитывая первое уравнение второй строки системы (23), имеем

$$\omega_{p+i}^\sigma \wedge \omega^i=0 \quad \text{(нет суммирования)}.$$

Отсюда по лемме Картана находим

$$\omega_{p+i}^\sigma=\lambda_{p+i}^\sigma \omega^i. \qquad (24)$$

Дифференцируя второе уравнение четвертой строки, получим

$$\sum_l \omega_l^{p+l} \wedge \omega_{p+l}^\sigma=0,$$

что, используя уравнения третьей строки системы (23) и уравнения (24), можно записать в виде

$$\sum_{l} b_{ll}^{p+l} \lambda_{p+l}^{\sigma} \omega^{l} \wedge \omega^{l} = 0.$$

Отсюда в силу независимости форм ω^i, ω^l имеем

$$b_{ll}^{p+l} \lambda_{p+l}^{\sigma} = 0 \quad \text{(нет суммирования).} \tag{25}$$

Здесь возможны следующие случаи:

1⁰. Матрица $\|b_{il}^{p+l}\|$ не имеет строк, состоящих из одних нулей. Тогда $\lambda^{\sigma}{}_{p+i} = 0$ и, следовательно, $\omega^{\sigma}{}_{p+i} = 0$. Дифференциалы векторов, порождающих точки A, A_i, A_{p+i}, разлагаются по этим же векторам. Поэтому, когда точка A описывает поверхность V_p, соприкасающаяся плоскость $T'_{p+q}(A) = (AA_1 \ldots A_{p+q})$ неподвижна, поверхность V_p лежит в своей соприкасающейся плоскости. Следовательно, V_p — поверхность коразмерности q (это значит, что $V_p \subset P_{p+q}$, но $V_p \not\subset P_{p+q-1}$).

2⁰. Матрица $\|b_{il}^{p+l}\|$ состоит из одних нулей. Тогда $\Phi^{p+i} = (\omega^i)^2$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$ и поверхность V_p имеет ранг q.

3⁰. Матрица $\|b_{il}^{p+l}\|$ имеет q' строк, состоящих из одних нулей, а в каждой из остальных строк есть элементы, отличные от нуля. Пусть из одних нулей состоят первые $q' < q$ строк этой матрицы. Тогда из равенств (25) находим

$$b_{il}^{p+l} = 0 \quad \lambda_{p+i_2}^{\sigma} = 0 \quad (i_1,\ j_1 = 1, 2, \ldots, q';\ i_2,\ j_2 = q'+1, \ldots, q)$$

В этом случае система (23) имеет такой вид:

$$\omega^{a} = \omega^{\sigma} = \omega_{i}^{\sigma} = \omega_{l}^{\sigma} = 0,$$

$$\omega_{l}^{p+l} = \omega^{l}, \tag{26}$$

$$\omega_{i_1}^{p+j_1} = 0, \quad i_1 \neq j_1, \tag{27}$$

$$\omega_{l}^{p+i_1} = 0, \tag{28}$$

$$\omega_{i_1}^{p+i_2} = 0, \tag{29}$$

$$\omega_{i_2}^{p+i_1} = 0, \tag{30}$$

$$\omega_{i_2}^{p+j_2} = 0, \quad i_2 \neq j_2, \tag{31}$$

$$\omega_i^{p+i_2}=b_{ii}^{p+i_2}\omega^{i_1}, \tag{32}$$

$$\omega_{p+i_2}^{\sigma}=0,$$

$$\omega_{p+i_1}^{\sigma}=\lambda_{p+i_1}^{\sigma}\omega^{i_1}.$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (27), (30), (28), получим:

$$\omega_{i_1}^{j_1}\wedge\omega^{j_1}+\omega^{i_1}\wedge\omega_{p+i_1}^{p+j_1}=0, \tag{33}$$

$$\omega_{i_2}^{i_1}\wedge\omega^{i_1}+\omega^{i_2}\wedge\omega_{p+i_2}^{p+i_1}=0 \tag{34}$$

$$\omega_i^{i_1}\wedge\omega^{i_1}+\omega^i\wedge\sum_i b_{ii}^{p+i_2}\omega_{p+i_2}^{p+i_1}=0. \tag{35}$$

Из уравнений (33), (34), (35) по лемме Картана находим:

$$\omega_{i_1}^{j_1}=a_{i_1j_1}^{j_1}\omega^{j_1}+a_{i_1i_1}^{j_1}\omega^{i_1},\quad i_1\neq j_1, \tag{36}$$

$$\omega_{p+i_1}^{p+j_1}=-a_{i_1i_1}^{j_1}\omega^{j_1}+\lambda_{i_1i_1}^{j_1}\omega^{i_1}, \tag{37}$$

$$\omega_{i_2}^{i_1}=a_{i_2i_1}^{i_1}\omega^{i_1}+a_{i_2i_2}^{i_1}\omega^{i_2}, \tag{38}$$

$$\omega_{p+i_2}^{p+i_1}=-a_{i_2i_2}^{i_1}\omega^{i_1}+h_{i_2i_2}^{i_1}\omega^{i_2}, \tag{39}$$

$$\omega_i^{i_1}=a_{ii_1}^{i_1}\omega^{i_1}+a_{ii}^{i_1}\omega^i, \tag{40}$$

$$\sum_{i_2} b_{ii}^{p+i_2}\omega_{p+i_2}^{p+i_1}=-a_{ii}^{i_1}\omega^{i_1}+\mu_{ii}^{i_1}\omega^i. \tag{41}$$

Из (39) и (41) получим

$$-\sum_{i_2} b_{ii}^{p+i_2}a_{i_2i_2}^{i_1}\omega^{i_1}+\sum_{i_2} b_{ii}^{p+i_2}h_{i_2i_2}^{i_1}\omega^{i_2}=-a_{ii}^{i_1}\omega^{i_1}+\mu_{ii}^{i_1}\omega^i.$$

Так как формы ω^k линейно независимы, то

$$a_{ii}^{i_1}=\sum_{i_2} b_{ii}^{p+i_2}a_{i_2i_2}^{i_1},\quad \sum_{i_2} b_{ii}^{p+i_2}h_{i_2i_2}^{i_1}=0,\quad \mu_{ii}^{i_1}=0. \tag{42}$$

Далее, имеем

$$D\omega^{i_1}=\omega_0^0\wedge\omega^{i_1}+\omega^{j_1}\wedge\omega_{j_1}^{i_1}+\omega^{i_2}\wedge\omega_{i_2}^{i_1}+\omega^i\wedge\omega_i^{i_1}.$$

Подставив сюда выражения форм $\omega_{j_1}^{i_1}$, $\omega_{j_2}^{i_1}$, $\omega_i^{i_1}$ из (36), (38), (40), находим

$$D\omega^{i_1}=(\omega_0^0+a_{j_1i_1}^{i_1}\omega^{j_1}+a_{i_2i_1}^{i_1}\omega^{i_2}+a_{ii_1}^{i_1}\omega^i)\wedge\omega^{i_1}.$$

Отсюда по теореме Фробениуса следует, что на поверхности V_p каждая 1-форма ω^{i_1} вполне интегрируема. Следовательно, и вся система форм ω^{i_1} вполне интегрируема и определяет расслоение поверхности V_p на q'-параметрическое семейство поверхностей $V_{p-q'}$. Поверхность $V_{p-q'}$ имеет асимптотические формы

$$\Phi^{p+i_2}=\omega^{i_2}\omega_{i_2}^{p+i_2}+\omega^{l}\omega_{l}^{p+i_2}=(\omega^{i_2})^2+\sum_{l} b_{ll}^{p+i_2}(\omega^{l})^2. \tag{43}$$

Вершины A_{i_1} репера не лежат в касательной плоскости $T_{p-q'}(A)$ поверхности $V_{p-q'}$, поэтому появляются новые формы

$$\Phi^{i_1}=\omega^{i_2}\omega_{i_2}^{i_1}+\omega^{l}\omega_{l}^{i_1}.$$

Подставляя сюда выражения форм $\omega_{i_2}^{i_1}$ и $\omega_{l}^{i_1}$ из (38), (40) при $\omega^{i_1}=0$, получим

$$\Phi^{i_1}=\sum_{i_2} a_{i_2 i_2}^{i_1}(\omega^{i_2})^2+\sum_{l} a_{ll}^{i_1}(\omega^{l})^2. \tag{44}$$

Подставим в формулу (44) выражение для $a_{ll}^{i_1}$ из первого равенства (42):

$$\Phi^{i_1}=\sum_{i_2} a_{i_2 i_2}^{i_1}\left((\omega^{i_2})^2+\sum_{l} b_{ll}^{p+i_2}(\omega^{l})^2\right)=\sum_{i_2} a_{i_2 i_2}^{i_1}\Phi^{p+i_2}.$$

Следовательно, поверхность $V_{p-q'}$ имеет $q-q'$ линейно независимых асимптотических форм (43) и, согласно доказанному выше, является поверхностью коразмерности $q-q'$.

Дифференцируя внешним образом уравнение (29), находим

$$\omega_{i_1}^{i_2}\wedge\omega_{i_2}^{p+i_2}+\omega_{i_1}^{l}\wedge\omega_{l}^{p+i_2}+\omega_{i_1}^{p+i_1}\wedge\omega_{p+i_1}^{p+i_2}=0.$$

Используя уравнения (26), (32), это можно записать в виде

$$\omega_{i_1}^{i_2}\wedge\omega^{i_2}+\sum_{l}\omega_{i_1}^{l}\wedge b_{ll}^{p+i_2}\omega^{l}+(-\omega_{p+i_1}^{p+i_2})\wedge\omega^{i_1}=0$$

(i_1, i_2 фиксированы).

Отсюда в силу леммы Картана заключаем, что форма $\omega_{i_1}^{i_2}$ выражается линейно через формы ω^{i_1}, ω^{i_2} (с теми же индексами) и формы ω^{m} (l, $m=q+1,\dots,p$), а формы $\omega^{l}{}_{i_1}$ выражаются линейно через форму ω^{i_1} (с тем же индексом) и формы ω^{i_2}, ω^m:

$$\omega_{i_1}^{i_2}=a_{i_1i_1}^{i_2}\omega^{i_1}+a_{i_1i_2}^{i_2}\omega^{i_2}+a_{i_1m}^{i_2}\omega^m, \tag{45}$$

$$\omega_{i_1}^{l}=a_{i_1i_1}^{l}\omega^{i_1}+a_{i_1i_2}^{l}\omega^{i_2}+a_{i_1m}^{l}\omega^m. \tag{46}$$

Имеем

$$D\omega^{i_2}=\omega_0^0\wedge\omega^{i_2}+\omega^{i_1}\wedge\omega_{i_1}^{i_2}+\omega^{j_2}\wedge\omega_{j_2}^{i_2}+\omega^{l}\wedge\omega_{l}^{i_2},$$

$$D\omega^{l}=\omega_0^0\wedge\omega^{l}+\omega^{i_1}\wedge\omega_{i_1}^{l}+\omega^{i_2}\wedge\omega_{i_2}^{l}+\omega^m\wedge\omega_m^{l},$$

что, используя равенства (45), (46), можно записать в виде

$$D\omega^{i_2}=(\omega_0^0+a_{i_1i_2}^{i_2}\omega^{i_1})\wedge\omega^{i_2}+\omega^{j_2}\wedge\omega_{j_2}^{i_2}+$$
$$+(a_{i_1m}^{i_2}\omega^{i_1}-\omega_m^{i_2})\wedge\omega^m,$$

$$D\omega^{l}=\omega_0^0\wedge\omega^{l}+(a_{i_1i_2}^{l}\omega^{i_1}-\omega_{i_2}^{p})\wedge\omega^{i_2}+$$
$$+(a_{i_1m}^{l}\omega^{i_1}-\omega_m^{l})\wedge\omega^m.$$

Отсюда по теореме Фробениуса заключаем, что на поверхности V_p система 1-форм ω^{i_2}, ω^l вполне интегрируема и, следовательно, определяет расслоение поверхности V_p на $(p—q')$-параметрическое семейство поверхностей $V_{q'}$. Поверхность $V_{q'}$ имеет следующие линейно независимые асимптотические формы:

$$\Phi^{p+i_1}=(\omega^{i_1})^2. \tag{47}$$

Вершины A_{i_2}, A_l репера не лежат в касательной плоскости $T_{q'}(A)$ поверхности $V_{q'}$, поэтому появляются новые асимптотические формы:

$$\Phi^{i_2}=\omega^{i_1}\omega_{i_1}^{i_2}=\sum_{i_1}a_{i_1i_1}^{i_2}(\omega^{i_1})^2,$$

$$\Phi^{l}=\omega^{i_1}\omega_{i_1}^{l}=\sum_{i_1}a_{i_1i_1}^{l}(\omega^{i_1})^2,$$

которые являются линейными комбинациями форм (47). Следовательно, поверхность $V_{q'}$ имеет q' линейно независимых асимптотических форм, приведенных к каноническому виду (47). Значит, $V_{q'}$ есть поверхность Картана.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если поверхность $V_p\subset P_n$ несет сопряженную сеть, а максимальное число q ее линейно незави-*

симых асимптотических форм Φ^α удовлетворяет условию $1 \leqslant q < p$, то эта поверхность:

1^0) *либо имеет коразмерность q;*

2^0) *либо имеет ранг q;*

3^0) *либо расслаивается двумя способами:*

а) *на q'-параметрическое семейство поверхностей размерности $p-q'$ и коразмерности $q-q'$, каждая из которых несет сопряженную сеть;*

б) *на $(p-q')$-параметрическое семейство поверхностей Картана размерности q'.*

Нетрудно установить, какой из этих случаев имеет место для конкретной поверхности V_p, несущей сопряженную сеть. Для этого следует отнести поверхность к подвижному реперу, построенному на касательных к линиям сопряженной сети и такому, что $A_a \in T'_{p+q}(A)$ $(a = p+1, \ldots, p+q)$. Затем матрицу $\|b_{ii}{}^a\|$ коэффициентов асимптотических форм Φ^α надо привести к виду

$$\begin{pmatrix} b_{11}^{p+1} & & 0 & \vdots & \\ & b_{22}^{p+2} & & \vdots & (b_{ii}^{p+l}) \\ & & \ddots & \vdots & \\ 0 & & b_{pp}^{p+q} & \vdots & \end{pmatrix} \qquad (48)$$

элементарными преобразованиями над строками $(b_{ss}^{p+s},\ s = 1, 2, \ldots, q)$. Заключение доказанной теоремы связано со строением матрицы $B_1 = \|b_{ii}^{p+l}\|$.

Рассмотрим частный случай $q=1$: поверхность V_p имеет только одну линейно независимую асимптотическую форму Φ^{p+1}. Выбором вершин A_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ в касательной плоскости $T_p(A)$ всегда можно привести форму Φ^{p+1} к сумме квадратов. Если в этой сумме окажется больше одного слагаемого, то матрица B_1 — ненулевая и, согласно утверждению 1^0, V_p есть поверхность коразмерности 1. Если же $B_1 = 0$, т. е. Φ^{p+1} — квадрат линейной формы, то в силу утверждения 2^0 V_p — поверхность ранга 1 (развертывающаяся поверхность). Ясно, что при $q=1$ утверждение 3^0 не имеет места.

Следствие (теорема К. Сегре). *Если поверхность $V_p \subset P_n$ имеет только одну линейно независимую асимптотическую форму, то эта поверхность* *или принадлежит некоторому пространству P_{p+1}, или является развертывающейся.*

Замечание. Можно доказать, что поверхность V_p в P_n может нести голономную сопряженную сеть и не быть p-сопряженной системой.

§ 37. ПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть в евклидовом пространстве E_n задана p-мерная поверхность V_p. Присоединим к поверхности V_p подвижный репер $R=(x, \vec{e}_h)$, где орты $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p$ образуют базис касательного пространства T_x к поверхности в ее точке x, а векторы $\vec{e}_{p+1}, \ldots, \vec{e}_n$ образуют ортонормированный базис ортогонального дополнения $N_{n-p}(x)$ пространства T_x. Деривационные формулы такого репера имеют вид

$$d\vec{x}=\omega^i\vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j+\omega_i^\alpha\vec{e}_\alpha, \quad d\vec{e}_\alpha=\omega_\alpha^i\vec{e}_i+\omega_\alpha^\beta\vec{e}_\beta \quad (i,\ j,\ k=1, 2, \ldots, p;\ \alpha, \beta, \gamma=p+1, \ldots, n). \tag{1}$$

Следовательно, $\omega^\alpha=0$, что при продолжении приводит к уравнениям

$$\omega_i^\alpha=b_{ij}^\alpha\omega^j \quad (b_{ij}^\alpha=b_{ji}^\alpha). \tag{2}$$

Функции $\gamma_{ij}=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j$ — компоненты первого основного тензора поверхности. Находим

$$d\gamma_{ij}=\gamma_{ik}\omega_j^k+\gamma_{kj}\omega_i^k. \tag{3}$$

Дифференцируя тождество $\vec{e}_\alpha\cdot\vec{e}_\beta=\delta_{\alpha\beta}$, где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, получим

$$\omega_\alpha^\beta+\omega_\beta^\alpha=0. \tag{4}$$

Точно так же тождество $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_\alpha$ приводит к соотношениям

$$\omega_\alpha^k+\gamma^{kl}\omega_l^\alpha=0, \tag{5}$$

где γ^{kl} — контравариантные компоненты метрического тензора γ_{ij} поверхности. Функции $b^\alpha{}_{ij}$ образуют поле второго основного тензора поверхности (доказательство такое же, как и для случая $V_p\subset P_n$). Если задать поля одномерных нормалей $(x, \vec{e}_\alpha)$, то функции $b^\alpha{}_{ij}$ для каждого фиксированного α определяют на поверхности поле дважды ковариантного симметрического тензора.

При замене базиса $(\vec{e}_\alpha)$ в плоскости $N_{n-p}(x)$ величины $b^\alpha{}_{ij}$ (i, j фиксированы) преобразуются как координаты вектора и в плоскости $N_{n-p}(x)$ имеем систему $\frac{1}{2}p(p+1)$ векторов $\vec{b}_{ij}=\vec{b}_{ji}=b^\alpha{}_{ij}\vec{e}_\alpha$. Пусть q — число независимых векторов этой системы. Вместе с точкой x они определяют q-плоскость $N_q(x)\subset N_{n-p}(x)$.

Векторы $\vec{e}_a$ $(a, b=p+1,\dots,p+q)$ расположим в плоскости $N_q(x)$. Тогда все векторы $\vec{b}_{ij}$ разлагаются по векторам $\vec{e}_a : \vec{b}_{ij}=b^a_{ij}\vec{e}_a$ и, следовательно,

$$b^\sigma_{ij}=0 \quad (\sigma=p+q+1,\dots, n). \tag{6}$$

Таким образом, поверхность V_p имеет q линейно независимых вторых квадратичных форм $\Phi^a=b^a{}_{ij}\omega^i\omega^j$.

Внешнее дифференцирование системы $\omega_i{}^\sigma=0$, полученной из системы (2) и тождеств (6), в силу леммы Картана приводит к соотношениям

$$b^a_{ij}\omega^\sigma_a=c^\sigma_{ijk}\omega^k, \tag{7}$$

где $c^\sigma{}_{ijk}$ симметричны по всем нижним индексам. Матрица $(b^a{}_{ij})$ имеет q строк и $p(p+1)/2$ столбцов; ее ранг равен q. Пусть независимы столбцы с номерами (i_r, j_r) $(r=1, 2,\dots,q)$ и матрица $(B^{i_r j_r}_a)$ — обратная матрице $(b^a_{i_r j_r})$. Систему (7) разобьем на две системы: $b^a_{i_r j_r}\omega^\sigma_a=c^\sigma_{i_r j_r k}\omega^k$, $b^a_{i_t j_t}\omega^\sigma_a=c^\sigma_{i_t j_t k}\omega^k$. Из первой системы находим

$$\omega^\sigma_a=B^{i_r j_r}_a c^\sigma_{i_r j_r}\omega^k, \tag{8}$$

и вторая система приводит к конечным соотношениям

$$c^\sigma_{i_t j_t k}=b^a_{i_t j_t}B^{i_r j_r}_a c^\sigma_{i_r j_r k}. \tag{9}$$

Уравнения (8) показывают, что формы $\omega_a{}^\sigma$ — главные, а в силу (4) главными являются и формы $\omega_\sigma{}^a$. Если для поверхности V_p инвариант q имеет максимальное значение $p(p+1)/2$, то система (8), а следовательно, и конечные соотношения (9) отсутствуют.

Плоскость $T'_{p+q}(x)=T_p(x)+N_q(x)$ (где $T_p(x)=(x, T_x)$ — касательная плоскость к V_p в точке x) есть соприкасающаяся плоскость к поверхности в точке x. Плоскость $N_q(x)$, которая является ортогональным дополнением касательной плоскости $T_p(x)$ в соприкасающейся $T'_{p+q}(x)$, назовем *главной нормалью поверхности* V_p *в точке* x.

Пусть в некоторой области $\Omega\subset V_p$ (в частности, на всей поверхности V_p) задана сеть Σ_p. Векторы e_i подвижного репера возьмем теперь на касательных в точке x к линиям данной сети. Тогда ω_i^j $(i\neq j)$ — главные формы:

$$\omega_i^j=a_{ik}^j\omega^k \quad (i\neq j). \tag{10}$$

Продолжение системы (10) имеет вид

$$da_{ik}^j-a_{il}^j\omega_k^l+a_{ik}^l\omega_l^j+b_{ik}^a\omega_a^j=a_{iks}^j\omega^s. \tag{11}$$

Так как формы ω^j_a — главные в силу (5) и (2), то из (11), пользуясь теоремой Г. Ф. Лаптева, заключаем, что a^j_{ik} инварианты сети.

Гладкую линию $\gamma\subset V_p$ можно задать отношением форм ω^i: $\omega^i=\theta l^i$ (где θ — некоторая 1-форма). При смещении точки x по линии γ имеем $d\vec{x}=\omega^i\vec{e}_i=\theta l^i\vec{e}_i=$ $=\theta\vec{a}$, где $\vec{a}=l^i\vec{e}_i$ — направляющий вектор касательной к линии γ в точке x. Направление вектора $\vec{a}$ должно быть инвариантным (не должно зависеть от вторичных параметров репера): $\delta\vec{a}=\theta_1\vec{a}$, где δ — символ дифференцирования по вторичным параметрам и θ_1 — некоторая 1-форма. Подробнее $(\delta l^i)\vec{e}_i+l^i(\pi_i{}^j\vec{e}_j+\pi_i{}^a\vec{e}_a)=$ $=\theta_1 l^i\vec{e}_i$. Из равенств (2) и (8) заключаем, что $\pi_i{}^a=0$, $\pi_i{}^j=0$ $(i\neq j)$. Так как $\gamma_{ii}=1$ ($\vec{e}_i$ — орты), то из формул (3) следует $\pi_i{}^i=0$, откуда $\delta l^i=\theta_1 l^i$. Если на линии γ изменить параметризацию, то изменится и направляющий вектор касательной к линии в точке x: $\vec{a}_1=\lambda\vec{a}$. Находим $\delta\vec{a}_1=(\delta\lambda+\lambda\theta_1)\vec{a}$. Заметим, что θ_1 — полный дифференциал: $\theta_1=dt$. Можно выбрать такую параметризацию линии γ, которая удовлетворяет условию $\delta\lambda+\lambda dt=0$ ($\delta\ln\lambda+dt=0\Rightarrow\ln\lambda+t=c$), т. е. приводит форму θ_1 к нулю. Будем считать, что такая параметризация уже выбрана, и вернемся к прежним обозначениям: $\delta\vec{a}=0$ и потому $\delta(\vec{a}^2)=0$, т. е. $\delta(\gamma_{ij}l^il^j)=0$. Отсюда $\gamma_{ij}l^il^j=c=\mathrm{const}>0$. Заменяя вектор $\vec{a}$ на вектор $\dfrac{\vec{a}}{\sqrt{c}}$, приведем постоянную c к единице. Получим $\gamma_{ij}l^il^j=1$. Это значит, что $|\vec{a}|=1$. Так как $d\vec{x}=\theta\vec{a}$, то $(d\vec{x})^2=\theta^2$, т. е. $\theta^2=ds^2$, где ds — дифференциал длины дуги линии γ. Орт $\vec{a}$ направляющего вектора касательной к линии γ в точке x всегда можно направить так, что $\theta=ds$. Тогда $l^i=\dfrac{\omega^i}{ds}$ и орт $\vec{a}=l^i\vec{e}_i$. Находим

$$\frac{d\vec{a}}{ds}=\frac{dl^j+l^i\omega_i^j}{ds}\vec{e}_j+\frac{l^i\omega_i^a}{ds}\vec{e}_a=\vec{K}_T+\vec{K}_N,$$

где

$$\vec{K}_T=\left(\frac{dl^j}{ds}+a_{ik}^jl^il^k\right)\vec{e}_j,\quad \vec{K}_N=b_{ij}^al^il^j\vec{e}_a. \tag{12}$$

Вектор $\vec{K}_T$ называют *вектором относительной* (или *геодезической*) *кривизны*; $\vec{K}_N$ — *вектором вынужденной* (или *нормальной*) *кривизны линии* γ *в точке* x; $\vec{K}_T+\vec{K}_N$ — *вектором абсолютной кривизны линии* γ.

Входящие в формулу для $\vec{K}_T$ величины $a^i{}_{ik}$ выражаются через $a^s{}_{ik}$ $(s\neq i)$ из формулы (3) для $i=j$ $(\gamma_{ii}=1,\ d\gamma_{ii}=0)$ и формулы (10).

Для линии ω^i сети Σ_p (все $\omega^k=0$, кроме ω^i; i фиксировано) имеем $l^i=1$ и все остальные $l^k=0$. Поэтому

$$\vec{K}_{T(i)}=a_{ii}^j\vec{e}_j=\vec{a}_{ii},\quad \vec{K}_{N(i)}=b_{ii}^a\vec{e}_a=\vec{b}_{ii}.$$

Следовательно, $a^j{}_{ii}$ — координата вектора относительной кривизны i-й линии сети в точке x по орту касательной j-й линии этой сети в той же точке, $b_{ii}{}^a$ — координата вектора нормальной кривизны i-й линии сети в точке x.

Обозначим через d_j символ дифференцирования в направлении линии ω^j сети. Вектор

$$\frac{d_j\vec{e}_i}{\omega^j}=a_{ij}^k\vec{e}_k+b_{ij}^a\vec{e}_a\quad (i\neq j)$$

называется *вектором абсолютной кривизны векторного поля* $\vec{e}_i$ *вдоль линии* ω^j. Векторы $\vec{a}_{ij}=a^k{}_{ij}\vec{e}_k$ и $\vec{b}_{ij}=b^a{}_{ij}\vec{e}_a$ называются соответственно *вектором относительной* и *вектором вынужденной кривизны поля* $\vec{e}_i$ *вдоль линии* ω^j. Равенство $\vec{b}_{ij}=0$ $(i\neq j)$ есть условие сопряженности на поверхности направлений, определяемых векторами $\vec{e}_i$, $\vec{e}_j$.

Равенство $\vec{a}_{ij}=0$ является условием того, что вектор $\vec{e}_i$ переносится параллельно вдоль линии ω^j (при этом достаточно, чтобы $a^t_{ij}=0$, $t\neq i$).

Обозначим $\vec{a}_{ij}-\vec{a}_{ji}=2\vec{a}_{[ij]}$. Условие $\vec{a}_{[ij]}\in(x, \vec{e}_i, \vec{e}_j)$ (i, j фиксированы, $i\neq j$), т. е. $a^r_{ij}=a^r_{ji}$ ($r\neq i, j$), выражает критерий того, что на поверхности V_p система форм ω^r вполне интегрируема и, следовательно, эта поверхность расслаивается на двумерные поверхности, несущие сеть линий ω^i, ω^j. Если это имеет место для любых значений индексов i, j, $i\neq j$, то сеть Σ_p голономна.

Для точки $\vec{y}=\vec{x}+y^a\vec{e}_a\in N_q(x)$ имеем

$$d\vec{y}=(\omega^i+y^a\omega_a)\vec{e}_i+(dy^b+y^a\omega_a^b)\vec{e}_b+y^a\omega_a^\sigma\vec{e}_\sigma.$$

Ясно, что $d\vec{y}\in N_{n-p}(x)$, если смещение точки по поверхности V_p удовлетворяет условию

$$\omega^i+y^a\omega_a^i=0, \tag{13}$$

или в силу (5) и (2)

$$\left(\sum_a \gamma^{ik}b^a_{kj}y^a-\delta^i_j\right)\omega^j=0$$

Так как при смещении точки x формы ω^j не могут обращаться в нуль одновременно, то y^a должны удовлетворять уравнению

$$\det\left\|\sum_a \gamma^{ik}b^a_{kj}y^a-\delta^i_j\right\|=0. \tag{14}$$

В общем случае это уравнение степени p относительно y^a. Оно определяет в плоскости $N_q(x)$ алгебраическую гиперповерхность порядка p, не проходящую через точку x. Эта поверхность называется *присоединенной к поверхности V_p в точке x* и обозначается через $\tilde{V}_{q-1}(x)$.

Поверхность $\tilde{V}_{q-1}(x)$ можно получить иначе. Рассмотрим p-параметрическое семейство нормалей $N_{n-p}(x)$-поверхности V_p. Точка $\vec{z}=\vec{x}+y^a\vec{e}_a+z^\sigma\vec{e}_\sigma$ называется *фокусом* плоскости $N_{n-p}(x)$, если найдется такое смещение плоскости внутри семейства (или, что то же самое, такое смещение точки x на поверхности

V_p), для которого $dz \in N_{n-p}(x)$. Если учесть, что $\omega^i_\sigma = 0$, то отыскание фокуса z плоскости $N_{n-p}(x)$ снова приводит к системе (13). В результате получается, что проекция точки z на главную нормаль должна принадлежать поверхности $\tilde{V}_{q-1}(x)$. Следовательно, если через каждую точку $y \in \tilde{V}_{q-1}(x)$ провести плоскость E_{n-p-q} — ортогональное дополнение к $N_q(x)$ в $N_{n-p}(x)$, то получим поверхность $V_{n-p-1} \subset N_{n-p}(x)$ с плоскими $(n-p-q)$-мерными образующими, которая является геометрическим местом фокусов нормали $N_{n-p}(x)$ (*фокусная поверхность*), при этом

$$\tilde{V}_{q-1}(x) = V_{n-p-1}(x) \cap N_q(x).$$

Если $p+q=n$, то присоединенная поверхность $\tilde{V}_{q-1}(x)$ всегда является фокусной поверхностью нормали $N_{n-p}(x) = N_q(x)$.

В плоскости $N_q(x)$ найдем первую поляру точки x относительно алгебраической гиперповерхности $\tilde{V}_{q-1}(x)$. Если записать уравнение (14) в однородных координатах:

$$F(y^0, y^{p+1}, \dots, y^{p+q}) = 0, \tag{15}$$

то уравнение искомой поляры примет вид

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y^\alpha}\right)_0 y^\alpha = 0 \quad (\alpha = 0,\ p+1, \dots, p+q),$$

где нуль внизу скобки означает, что частные производные вычисляются в точке x $(1, 0, \dots, 0)$.

Дифференцируя по y^{a_0} (a_0 фиксировано) левую часть уравнения (14), находим

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y^{a_0}}\right)_0 = (-1)^{p-1} \gamma^{ik} b^{a_0}_{ik}.$$

Уравнение (15) имеет вид

$$\sum a_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_p} (y^{\alpha_1})^{\varepsilon_1} (y^{\alpha_2})^{\varepsilon_2} \dots (y^{\alpha_p})^{\varepsilon_p} + (-1)^p (y_0)^p = 0,$$

где $\varepsilon_g = 0, 1$, причем если $\varepsilon_g = 0$, то вместо $(y^{\alpha_g})^{\varepsilon_g}$ надо подставить y^0 и положить $\alpha_g = 0$. Находим

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y^0}\right)_0 = (-1)^p p.$$

Таким образом, *первая поляра точки x относительно поверхности $\tilde{V}_{q-1}(x)$ определяется уравнением*

$$\sum_a \gamma^{ik} b^a_{ik} y^a - p = 0.$$

Это можно записать в виде

$$\vec{M}\cdot\vec{xy}=1, \tag{16}$$

где $\vec{M}=\frac{1}{p}\gamma^{ik}b^a_{ik}\vec{l}_a$ — *вектор средней кривизны поверхности* V_p в точке x (он является вектором нормали плоскости (16) как гиперплоскости пространства $N_q(x)$) и $\vec{xy}=\vec{y}-\vec{x}$).

Вектор $\vec{M}$ можно получить другим способом. Возьмем в плоскости $T_p(x)$ систему p попарно ортогональных ортов $\vec{i}_k=\lambda^i{}_k\vec{e}_i$. Кривая на поверхности V_p, проходящая через точку x в направлении $\vec{i}_k$, имеет вектор нормальной кривизны

$$\vec{K}_{N(k)}=b^a_{ij}\lambda^i_k\lambda^j_k\vec{e}_a.$$

Рассмотрим вектор

$$\vec{M}=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\vec{K}_{N(k)}=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\lambda^i_k\lambda^j_k b^a_{ij}\vec{e}_a.$$

В плоскости $T_p(x)$ имеем два векторных базиса: $(\vec{e}_i)$ и $(\vec{i}_k)$. Очевидно, матрица тензора γ^{ij} в базисе $(\vec{i}_k)$ является единичной. Согласно закону преобразования координат тензора при замене базиса, имеем

$$\gamma^{ij}=\lambda^i_k\lambda^j_l\delta^{kl}=\sum_k\lambda^i_k\lambda^j_k.$$

и, значит, $\vec{M}=\frac{1}{p}\gamma^{ij}b^a_{ij}\vec{e}_a$. Следовательно, вектор средней кривизны есть «среднее арифметическое» векторов $\vec{K}_{N(k)}$. Как видно, этот вектор не зависит от выбора ортонормированного базиса $(\vec{i}_k)$, использованного при его построении.

Поверхность V_p называется *минимальной*, если в каждой ее точке $\vec{M}=0$. В дальнейшем исключим из рассмотрения минимальные поверхности и будем предполагать $\forall x\in V_p\ \vec{M}\neq 0$.

Пусть $\vec{m}$ — орт вектора $\vec{M}$. Точку z, определяемую радиусом-вектором $\vec{z}=\vec{x}+\frac{\vec{m}}{|\vec{M}|}$, назовем *центром* *средней кривизны поверхности V_p в точке x.* Если $y \in (x, \vec{M})$, то $\overrightarrow{xy} = t\vec{M}$ и для точки y пересечения средней нормали $(x, \vec{M})$ с плоскостью (1) имеем

$$\vec{M}^2 t - 1 = 0, \quad t = \frac{1}{\vec{M}^2}, \quad \overrightarrow{xy} = \frac{\vec{M}}{\vec{M}^2} = \frac{\vec{m}}{|\vec{M}|}, \quad \vec{y} = \vec{x} + \frac{\vec{m}}{|\vec{M}|}.$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Первая поляра точки x относительно присоединенной поверхности $\tilde{V}_{q-1}$ проходит через центр средней кривизны и ортогональна средней нормали.*

Пусть на поверхности $V_n \subset E_n$ задано поле одномерных нормалей $(x, \vec{n})$, $x \in V_p$, $\vec{n} \in N_q(x)$. Возьмем орт $\vec{e}_{a_0}$ (a_0 фиксировано) репера так, чтобы он был коллинеарен вектору $\vec{n}$. Тогда $(x, \vec{n}) = (x, \vec{e}_{a_0})$. Имеем

$$d\vec{e}_{a_0} = \omega^i_{a_0}\vec{e}_i + \omega^\alpha_{a_0}\vec{e}_\alpha. \tag{17}$$

Так как $(\vec{e}_{a_0})$ — поле орта, то при фиксации главных параметров (когда все $\omega^j = 0$) должно быть $\delta\vec{e}_{a_0} = 0$ (δ — символ дифференцирования по вторичным параметрам). Из (17) следует, что формы $\omega^i{}_{a_0}$ и $\omega^\alpha{}_{a_0}$ — главные. Тогда и формы $\omega_\alpha{}^{a_0}$ являются главными.

Продолжая уравнения $\omega_i^{a_0} = b_{ij}^{a_0}\omega^j$, получим

$$db_{ij}^{a_0} - b_{kj}^{a_0}\omega_i^k - b_{ik}^{a_0}\omega_j^k + b_{ij}^b\omega_b^{a_0} = b_{ijk}^{a_0}\omega^k.$$

При фиксации точки x находим

$$\delta b_{ij}^{a_0} - b_{kj}^{a_0}\pi_i^k - b_{ik}^{a_0}\pi_j^k = 0. \tag{18}$$

Применяя теорему Фробениуса, нетрудно убедиться, что система уравнений (18) вполне интегрируема. Учитывая вид этих уравнений, согласно теореме Г. Ф. Лаптева заключаем, что система величин $b_{ij}^{a_0}$ образует тензор относительно стационарной подгруппы точки $x \in V_p$.

На всей поверхности V_p получим поле тензора $b_{ij}^{a_0}$ (поле второго тензора поверхности V_p, соответствующего заданному полю одномерных нормалей $(x, \vec{e}_{a_0}) = (x, \vec{n})$).

На каждой нормали $(x, \vec{e}_{a_0})$ возьмем точку y: $\vec{y} = \vec{x} + \rho\vec{e}_{a_0}$, где ρ — некоторая гладкая функция точки

$x \in \bar{V}_p$. Чтобы имело место включение $d\vec{y} \in N_{n-p}(x)$ (т. е. $y \in \bar{V}_{q-1}$), нужно потребовать

$$\rho\omega^i_{a_0} + \omega^i = 0. \qquad (19)$$

Но $\omega^i_{a_0} + \gamma^{ij}\omega^{a_0}_j = 0$ (см. формулу (5)), где $\omega^{a_0}_j = b^{a_0}_{jk}\omega^k$. Поэтому уравнение (19) можно записать в виде

$$(\rho b^{a_0}_{ij} - \gamma_{ij})\,\omega^j = 0. \qquad (20)$$

Следовательно, *точка x должна смещаться в одном из главных направлений тензора $b^{a_0}_{ij}$* (так называются направления в плоскости $T_p(x)$, которые попарно сопряжены относительно квадратичной формы $b^{a_0}_{ij}\xi^i\xi^j$ и попарно ортогональны). В общем случае в каждой точке поверхности существует p главных направлений относительно тензора $b^{a_0}_{ij}$ (или, что то же самое, относительно поля $(x, \vec{n})$). На поверхности V_p получим p линейно независимых 1-распределений. Их интегральные кривые определяют на поверхности (или в некоторой ее области) ортогональную сеть, которая называется *сетью линий кривизны относительно поля одномерных нормалей* $(x, \vec{e}_{a_0})$. Учитывая, что найденная точка $y \in \bar{V}_{q-1}$ и $y \in (x, \vec{e}_{a_0})$, заключаем, что значения ρ являются абсциссами точек пересечения прямой $(x, \vec{e}_{a_0})$ с присоединенной поверхностью $\bar{V}_{q-1}$.

Если главные направления относительно поля $(x, \vec{e}_{a_0})$ удовлетворяют условию $\omega^\sigma{}_{a_0} = 0$ $(\sigma = p+q+1, \ldots, n)$, то $d\vec{y} \in N_q(x)$ и точка y — фокус плоскости $N_q(x)$. Если, кроме того, $\omega^b{}_{a_0} = 0$, то y — фокус нормали $(x, \vec{e}_{a_0})$, а поверхность (y), описанная точкой y, называется *эволютой поверхности* V_p.

Имеем $(x, \vec{e}_{a_0}) = (x, \vec{n})$, где $\vec{e}_{a_0}$ — орт, а $\vec{n}$ в общем случае не орт. Пусть $\vec{n} = \lambda\vec{e}_{a_0}$. Радиус-вектор точки y можно теперь выразить так:

$$\vec{y} = \vec{x} + \rho_1\vec{n}, \qquad (21)$$

где $\rho_1\lambda = \rho$. При этом, как легко проверить, система (21) сохранится.

Если потребовать, чтобы проекция вектора $d\vec{n}$ на касательное пространство T_x была коллинеарна вектору $d\vec{x} = \omega^i\vec{e}_i$ смещения точки x, т. е. $\lambda\omega^i{}_{a_0}\vec{e}_i = \mu\omega^i\vec{e}_i$, то снова придем к системе, определяющей главные направления относительно $(x, \vec{e}_{a_0})$, где теперь $\rho = -\lambda/\mu$.

Если искать точку $y \in (x, \vec{e}_\sigma)$ для заданного поля одномерных нормалей $(x, \vec{e}_\sigma) \perp N_q(x)$ при прежнем условии $d\vec{y} \in N_{n-p}(x)$, то, учитывая, что $\vec{y} = \vec{x} + \rho\vec{e}_\sigma$ и $d\vec{y} = \omega^i\vec{e}_i + d\rho\vec{e}_\sigma + \rho(\omega^a{}_0\vec{e}_a + \omega\vec{e}_\tau)$ (напомним, что $\omega^i{}_\sigma = 0$), получим $\omega^i = 0$ и, следовательно, точка x неподвижна. Таким образом, для поля одномерных нормалей $(x, \vec{n}) \perp N_q(x)$ не существует сети линий кривизны.

Если же задано поле одномерных нормалей $(x, \vec{n})$, где $(x, \vec{n}) \not\subset N_q(x)$, $(x, \vec{n})$ не ортогональна $N_q(x)$ и $(x, \vec{n}_1)$ — ортогональная проекция прямой $(x, \vec{n})$ на главную нормаль $N_q(x)$, то *сеть линий кривизны для поля $(x, \vec{n})$ останется той же, что и для поля $(x, \vec{n}_1)$*.

Пусть на поверхности V_p (или в некоторой ее области Ω) задана ортогональная сеть Σ_p. В каком случае эту сеть можно рассматривать как сеть линий кривизны для некоторого поля одномерных нормалей $(x, \vec{n})$? Направим вектор $\vec{e}_i$ репера по касательным к линиям сети Σ_p в точке x, а орт вектора $\vec{n}$ примем в качестве вектора $\vec{e}_{a_0'}$ нового ортонормированного базиса $\vec{e}_{a_0'} = u^b_{a_0'}\vec{e}_b$ в плоскости $N_q(x)$. Тогда

$$b^{a_0'}_{ij} = U^{a_0'}_b b^b_{ij} \quad (U^{a_0'}_b u^c_{a_0'} = \delta^c_b). \tag{22}$$

Система (20) примет вид

$$\left(\rho b^{a_0'}_{ij} - \delta_{ij}\right)\omega^j = 0.$$

Этой системе должно удовлетворять для $\rho = \rho_{i_0}$ каждое из направлений $\omega^{i_0} \neq 0$ (i_0 фиксировано, все $\omega^j = 0$, $j \neq i_0$). Следовательно,

$$\left(\rho_{i_0} b^{a_0'}_{ii_0} - \delta_{ii_0}\right)\omega^{i_0} = 0 \text{ (по } i_0 \text{ нет суммирования)},$$

и так как $\rho_{i_0} \neq 0$ (ρ_{i_0} — один из корней уравнения $\det\left\|\rho b^{a_0'}_{ij} - \delta_{ij}\right\| = 0$), то $b^{a_0'}_{ii_0} = 0$ $(i \neq i_0)$. Полагая $i_0 =$

$=1, 2, \ldots, p$, заключаем, что все

$$b_{ij}^{a'_0}=0 \quad (i \neq j). \qquad (23)$$

Таким образом, дело сводится к существованию в плоскости $N_q(x)$ такого ортогонального преобразования, которое приводит одну из вторых квадратичных форм $\Phi^a = b^a{}_{ij}\omega^i\omega^j$ к каноническому виду. При $i \neq j$ находим

$$\vec{e}_{a'_0} \cdot \vec{b}_{ij} = u^c_{a'_0} \vec{e}_c \cdot b^b_{ij} \vec{e}_b = u^c_{a'_0} b^b_{ij} \delta_{cb} =$$

$$= \sum_b u^b_{a'_0} b^b_{ij} = U^{a'_0}_b b^b_{ij} = b^{a'_0}_{ij} = 0$$

(так как матрица $u^b_{a'}$ ортогональна, то $U^{a'}_b = u^b_{a'}$). Следовательно, $\vec{e}_{a'_0} \perp \vec{b}_{ij}$ $(i, j=1, 2, \ldots, p; \ i \neq j)$. Обратно; если существует поле орта $\vec{e}_{a'_0}$, удовлетворяющее для данной ортогональной сети $\Sigma_p \subset V_p$ условию $\vec{e}_{a'_0} \perp \vec{b}_{ij}$ $(i \neq j, \ i, j=1, 2, \ldots, p)$, то, включив вектор $\vec{e}_{a'_0}$ в новый ортонормированный базис в плоскости $N_q(x)$, получим, что условие (23) выполняется и, значит, данная сеть является сетью линий кривизны относительно поля нормалей $\left(x, \vec{e}_{a'_0}\right)$. Поэтому верна следующая теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы данная ортогональная сеть $\Sigma_p \subset V_p$ была сетью линий кривизны для некоторого поля одномерных нормалей поверхности V_p, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке $x \in V_p$ существовала $(q-1)$-плоскость $\Pi_{q-1}(x) \subset N_q(x)$, содержащая вектор вынужденной кривизны $\vec{K}_{N(i,j)} = \vec{b}_{ij}$ любой пары направлений сети в этой точке по отношению друг к другу, т. е. чтобы ранг r системы $\frac{1}{2}p(p-1)$ векторов $\vec{K}_{N(i,j)} = \vec{b}_{ij}$ был меньше q. Тогда если $\forall x \in V_p$ $(x, \vec{n}) \subset N_q(x)$ и $(x, \vec{n}) \perp \Pi_{q-1}(x)$, то Σ_p — сеть линий кривизны относительно поля нормалей $(x, \vec{n})$.*

Следствие 1. *Если $r<q$, то существует $(q-r)$-плоскость $\Pi^*_{q-r}(x)$, которая в плоскости $N_q(x)$ вполне ортогональна r-плоскости, содержащей все векторы $\vec{K}_{N(i,\,j)}$.*

Для любого поля одномерной нормали $(x, \vec{n}) \subset \Pi^*_{q-r}(x)$ сеть Σ_p является сетью линий кривизны.

Следствие 2. *Если поверхность V_p несет ортогональную сопряженную сеть, то эта сеть является сетью линий кривизны для любого поля одномерных нормалей $(x, \vec{n}) \subset N_q(x)$.*

Так как все $\vec{b}_{ij}=0$ $(i \neq j)$, то такая сеть называется просто *сетью линий кривизны поверхности* без указания поля нормалей $(x, \vec{n})$.

Заметим, что далеко не всякая ортогональная сеть на гладкой поверхности является сетью линий кривизны для какого-либо поля одномерных нормалей. Так, поверхность $V_2 \subset E_3$ (отличная от сферы) несет бесконечное множество ортогональных сетей, но только для сети линий кривизны имеет место доказанная выше теорема.

Назовем поле одномерных нормалей $(x, \vec{n}) \subset N_q(x)$ *особым*, если относительно этого поля любое направление (ω^i) на поверхности V_p является главным. Нормали $(x, \vec{n})$ особого поля будем называть *особыми нормалями*. Для того чтобы существовало такое поле, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке $x \in \Omega$ (где Ω — некоторая область поверхности V_p) существовала ортогональная $q \times q$-матрица $(U^{a'}_b)$ такая, что (см. систему (20))

$$\rho b^{a'_0}_{ij} = \gamma_{ij}$$

или

$$\gamma_{ij} = h_a b^a_{ij}, \quad \text{где } h_a = \rho U^{a'_0}_a. \tag{24}$$

Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Для того чтобы в области Ω поверхности V_p существовало особое поле одномерных нормалей, необходимо и достаточно, чтобы в этой области поля метрического тензора γ_{ij} и второго тензора b^a_{ij} поверхности удовлетворяли условию* (24).

Если поля нормалей $(x, \vec{e}_a)$ заданы $(a=p+1, \ldots, p+q)$, то, как известно, поле трехвалентного тензора b_{ij}^a сводится к системе q полей дважды ковариантных симметрических тензоров ${}^{r}b_{ij}^{a}$ (для каждого значения a свой тензор). В этом случае равенство (24), выражающее критерий существования особого поля нормалей, показывает, что *метрический тензор* γ_{ij} *поверхности должен быть линейной комбинацией ее вторых тензоров* ${}^{r}b_{ij}^{a}$.

Следствие 1. Поскольку ранг $\|b_{ij}^a\|=q$ (a — номер строки матрицы), из (24) следует, что *если поле особых нормалей существует, то оно единственное* (так как если система (24) относительно неизвестных h_a имеет решение, то оно единственное).

Следствие 2. Если $q=q_{\max}=\frac{1}{2}p(p+1)$, то ранг (b_{ij}^a)-ранг $\begin{pmatrix} b_{ij}^a \\ \gamma_{ij} \end{pmatrix}=q$ и система (24) совместна. Следовательно, *для поверхности* V_p *с максимальной размерностью главной нормали* (или, что то же самое, с максимальной размерностью $\frac{1}{2}p(p+3)$ соприкасающейся плоскости) *всегда существует особое поле нормалей.*

Пусть поверхность V_p имеет особое поле нормалей. Мы можем указать положение нормали $(x, \vec{n})$ этого поля в плоскости $N_q(x)$. Для всевозможных ортов $\vec{a}=a^i\vec{e}_i$ будем откладывать от точки x соответствующие векторы

$$\vec{k}_{N(\vec{a})}=b_{ij}^a a^i a^j \vec{e}_a. \tag{25}$$

Фигура, образованная их вторыми концами, называется *индикатрисой кривизны поверхности* в точке x. Если z^a — координаты произвольной точки индикатрисы относительно репера $(x, \vec{e}_a)$ в плоскости $N_q(x)$, то в силу (25) и равенства $|\vec{a}|=1$ получим

$$\left\{\begin{array}{l} z^a=b_{ij}^a a^i a^j, \\ 1=\gamma_{ij}a^i a^j. \end{array}\right. \tag{26}$$

Это параметрические уравнения индикатрисы кривизны (параметры a^i связаны последним из уравнений (26)). Если имеет место соотношение (24), то вторая строка в формулах (26) примет вид $1=h_a b^a_{ij} a^i a^j$ и в силу первой строки формул (26) получим

$$h_a z^a = 1, \tag{27}$$

а значит, индикатриса кривизны лежит в $(q-1)$-плоскости (27) плоскости $N_q(x)$.

Обратно: пусть индикатриса кривизны лежит в плоскости (27). Из (26) и (27) находим

$$\left(h_a b^a_{ij} - \gamma_{ij}\right) a^i a^j = 0. \tag{28}$$

Если $\vec{a}$ — орт вектора $\vec{v} = v^i \vec{e}_i$, то $a^i = v^i / \sqrt{\gamma_{kl} v^k v^l}$. Поэтому (28) можно записать в виде

$$\left(h_a b^a_{ij} - \gamma_{ij}\right) v^i v^j = 0. \tag{29}$$

Уравнение (29) должно удовлетворяться при любых значениях v^i. Следовательно, левая часть (29) есть нуль-многочлен и мы приходим к соотношениям (24).

Учитывая, что к виду (27) можно привести уравнение любой $(q-1)$-плоскости в $N_q(x)$, не проходящей через точку x, и что h_a — координаты вектора нормали к плоскости (27) (напомним, что репер $(x, \vec{e}_a)$ в плоскости $N_q(x)$ ортонормированный), приходим к такому утверждению:

Теорема 4. *Для того чтобы поверхность V_p имела в точке x нормаль, принадлежащую особому полю нормалей, необходимо и достаточно, чтобы индикатриса кривизны в этой точке принадлежала некоторой $(q-1)$-плоскости, не проходящей через точку x. Нормаль $(x, \vec{n})$ из особого поля ортогональна этой $(q-1)$-плоскости.*

Следствие. *Поле особых нормалей и асимптотические линии на поверхности V_p не могут существовать одновременно.* Это непосредственно вытекает из доказанной теоремы, если учесть, что при наличии в точке x хотя бы одного асимптотического направления индикатриса кривизны проходит через точку x.

Замечание. Те точки поверхности $V_p \subset E_n$, в которых квадратичные формы $\varphi_0 = \gamma_{ij}\omega^i\omega^j$, $\Phi^a = b^a{}_{ij}\omega^i\omega^j$ линейно зависимы при $q < p\,(p+1)/2$, называются *полуомбилическими*. Следовательно, можно сказать, что *поверхность V_p имеет особую нормаль:* а) *во всякой* *своей точке, если* $q=p(p+1)/2$; б) *только в полуомбилической точке, если* $q<p(p+1)/2$.

Для поверхности $V_p \subset E_n$ как риманова пространства имеем

$$D\omega_i^l = \omega_i^k \wedge \omega_k^l - \frac{1}{2} R_{i.jk}^l \omega^j \wedge \omega^k, \qquad (30)$$

где $R_{i.jk}^l$ — координаты тензора Римана — Кристоффеля (тензора кривизны этого риманова пространства). С другой стороны, в силу уравнений структуры пространства E_n имеем

$$D\omega_i^l = \omega_i^k \wedge \omega_k^l + \omega_i^a \wedge \omega_a^l. \qquad (31)$$

Но $\omega_a{}^l + \gamma^{lt}\omega_t{}^a = 0$. Поэтому запишем формулу (31) так:

$$D\omega_i^l = \omega_i^k \wedge \omega_k^l - \gamma^{lt} \sum_a \omega_i^a \wedge \omega_t^a. \qquad (32)$$

Так как $\omega_i^a = b_{ij}^a \omega^j$, то, сравнивая формулы (30) и (32), находим

$$R_{i.jk}^l = \gamma^{lt} \sum_a \left(b_{ij}^a b_{tk}^a - b_{ik}^a b_{tj}^a\right). \qquad (33)$$

Правую часть равенства (33) можно выразить через скалярные произведения соответствующих векторов:

$$R_{i.jk}^l = \gamma^{lt} (\vec{b}_{ij} \vec{b}_{tk} - \vec{b}_{ik} \vec{b}_{tj}). \qquad (34)$$

Уравнения (33) (как и уравнения (34)) носят название *уравнений Гаусса* для поверхности $V_p \subset E_n$. Тензор Риччи имеет вид

$$R_{ij} = R_{i.jk} = p\vec{M}\vec{b}_{ij} - \vec{b}_{ik}\vec{b}_{jt}\gamma^{kt}, \qquad (35)$$

где $\vec{M} = \frac{1}{p} \gamma^{ij} b_{ij}^a \vec{e}_a$ — вектор средней кривизны поверхности V_p.

Введем обозначения:

$$m \cdot \vec{b}_{ij} = \alpha_{ij}, \quad \vec{b}_{ik}\vec{b}_{jt}\gamma^{kt} = \beta_{ij}, \qquad (36)$$

где $\vec{m} = m^a \vec{e}_a$ — орт вектора $\vec{M}$ (предполагаем $\vec{M} \neq 0$). Равенства (36) определяют поля симметрических тензоров α_{ij}, β_{ij} на поверхности V_p и в силу (35) имеем

$$R_{ij} = pM\alpha_{ij} - \beta_{ij} \quad (M = |\vec{M}|). \qquad (37)$$

Рассмотрим квадратичные формы

$$\varphi=\alpha_{ij}\omega^i\omega^j,\quad \psi=\beta_{ij}\omega^i\omega^j. \tag{38}$$

Находим

$$d\vec{x}=\omega^i\vec{e}_i;\quad d^2x=(d\omega^i+\omega^j\omega^i_j)\,\vec{e}_i+b^a_{ij}\omega^i\omega^j\vec{e}_a$$

и, значит, $\varphi=\vec{m}\cdot d^2\vec{x}$. Дифференцируя тождество $\vec{m}\cdot d\vec{x}=0$, получим $\vec{m}\cdot d^2\vec{x}+d\vec{m}\cdot d\vec{x}=0$. Поэтому

$$\varphi=\vec{m}\cdot d^2\vec{x}=-d\vec{m}\cdot d\vec{x}. \tag{39}$$

Следовательно, для *неминимальной поверхности V_p в E_n форму φ можно рассматривать как аналог второй квадратичной формы гиперповерхности.*

Имеем

$$d\vec{e}_a=\omega^i_a\vec{e}_i+\omega^b_a\vec{e}_i+\omega^\sigma_a\vec{e}_\sigma.$$

Отсюда

$$\vec{\Pi}_{pT_x}d\vec{e}_a=\omega^i_a\vec{e}_i=-\gamma^{ij}\omega^a_j\vec{e}_i=-\gamma^{ij}b^a_{jk}\omega^k\vec{e}_i.$$

Поэтому

$$\sum_a(\Pi_{pT_x}d\vec{e}_a)^2=\sum_a\gamma^{ij}b^a_{jk}\omega^k\,b^a_{il}\omega^l\gamma_{is}=$$

$$=\sum_a\gamma^{tj}b^a_{tl}b^a_{jk}\omega^l\omega^k=\gamma^{tj}\vec{b}_{tl}\vec{b}_{jk}\omega^l\omega^k=\beta_{lk}\omega^l\omega^k=\psi.$$

Итак,

$$\psi=\sum_a(\vec{\Pi}_{pT_x}d\vec{e}_a)^2 \tag{40}$$

независимо от выбора ортонормированного базиса $(\vec{e}_a)$ в плоскости главной нормали $N_q(x)$.

Формула (40) показывает, что *форма ψ является аналогом третьей квадратичной формы гиперповерхности.*

Известно, что если на поверхности V_p задано поле одномерных нормалей $(x,\vec{n})\subset N_q(x)$, то, выбирая в качестве вектора $\vec{e}_{a_0}$ (a_0 фиксировано) подвижного репера орт вектора $\vec{n}$, мы выделим из поля трехвалентного тензора b^a_{ij} поле двухвалентного тензора $b^{a_0}_{ij}$. Его главные направления определяются из системы $(\rho b^{a_0}_{ij}-\gamma_{ij})\,\omega^j=0$, где ρ — корень уравнения $\det\|\rho b^{a_0}_{ij}$ —

$-\gamma_{ij}\|=0$. Поля этих направлений определяют на поверхности V_p ортогональную сеть — сеть линий кривизны относительно поля нормалей $(x, \vec{n})$.

Нетрудно заметить, что

$$b_{ij}^{a_0}\omega^i\omega^j=\vec{e}_{a_0}d^2\vec{x}. \tag{41}$$

Из (39) и (41) вытекает следующая теорема.

Теорема 5. *Главные направления тензора α_{ij} являются главными направлениями относительно средней нормали (x, m).*

Если направления $\vec{e}_i$, $\vec{e}_j$ сопряжены относительно конуса $\varphi=0$, то $\alpha_{ij}=0$ (i, j фиксированы, $i\neq j$), т. е. $\vec{m}\cdot\vec{b}_{ij}=0$, и обратно. Поэтому верна такая теорема:

Теорема 6. *Два направления на поверхности сопряжены относительно конуса $\varphi=0$ тогда и только тогда, когда вектор вынужденной кривизны этих направлений по отношению друг к другу ортогонален средней нормали.*

Пусть r — ранг матрицы $\|\alpha_{ij}\|$. Выберем векторы $\vec{e}_i$ репера на главных направлениях тензора α_{ij}. Тогда

$$\varphi=\sum_{i=1}^{p}\alpha_{ii}(\omega^i)^2,$$

где $\alpha_{i_s i_s}\neq 0\,(s=1, 2,\ldots, r)$, $\alpha_{i_t i_t}=0$ $(t=r+1,\ldots, p)$.

Для абсцисс ρ точек из $(x, \vec{m})\cap\bar{V}_{q-1}(x)$ получим

$$\det\|\alpha_{ij}-\lambda\delta_{ij}\|=0 \quad (\lambda=1/\rho,\ \alpha_{ij}=0,\ i\neq j), \tag{42}$$

т. е.

$$\lambda^{p-r}\prod_{s=1}^{r}(\alpha_{i_s i_s}-\lambda)=0. \tag{43}$$

Следовательно, $p-r$ из корней λ_i равны нулю.

Обратно: если $p-r$ корней уравнения (42) равны нулю, то уравнение (42) должно иметь вид (43) и, значит, в точности $p-r$ из α_{ii} равны нулю. Заметим теперь, что каждому нулевому корню уравнения (42) соответствует $\rho=\infty$, и, значит, получим несобственную точку пересечения прямой $(x, \vec{m})$ с поверхностью $\bar{V}_{q-1}(x)$ (предполагаем, что мы перешли к расширенному пространству E_n). Итак, получен следующий результат.

Теорема 7. *Ранг матрицы* $\|\alpha_{ij}\|$ *неминимальной поверхности равен* r $(0<r\leqslant p)$ *тогда и только тогда, когда средняя нормаль имеет с присоединенной поверхностью* $(p-r)$*-кратное пересечение в несобственной точке.*

Пусть некоторое векторное поле $\vec{\xi}=\xi^i\vec{e}_i$ на поверхности аннулирует форму ψ: $\psi(\vec{\xi})=0$. Так как E_n — собственное евклидово пространство, то из (27) заключаем, что $\vec{\Pi}_{pT_x}d\vec{e}_a=0$, где дифференцирование d берется вдоль векторного поля ξ. Поэтому ω_a^k (для всех a, k) и, значит, $\omega_i^a=0$. Следовательно, ранг системы форм $\{\omega_i^a\}$, т. е. ранг поверхности V_p (число существенных параметров, от которых зависит плоскость $T_p(x)$), меньше p и поверхность является тангенциально вырожденной.

Обратно: пусть ранг поверхности V_p есть $r<p$. Тогда, как известно, через каждую точку $x\in V_p$ проходит $(p-r)$-мерная плоская образующая поверхности V_p, причем вдоль такой образующей поверхность имеет одну и ту же касательную p-плоскость. Для любого вектора $\vec{\xi}=\xi^i\vec{e}_i\,(\omega^i=\xi^i\theta)$, принадлежащего этой образующей, получим $\omega_i^a=0$ и, значит, $\psi(\vec{\xi})=0$.

Учитывая, что форма ψ не может принимать отрицательных значений (см. формулу (40)), приходим к такому утверждению:

Теорема 8. *Ранг матрицы* $\|\beta_{ij}\|$ *равен рангу поверхности* V_p.

§ 38. СКАЛЯРНАЯ И СРЕДНЯЯ КРИВИЗНЫ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть на поверхности $V_p\subset E_n$ задано поле одномерных нормалей $(x, \vec{n})\subset N_q(x)$, где $\vec{n}$ — орт. Для всякого направления (ω^i) в точке x на поверхности определен вектор

$$\vec{r}=\frac{\vec{\Pi}_{pT_x}d\vec{n}}{ds}\quad(ds^2=\gamma_{ij}\omega^i\omega^j),$$

который назовем *вектором Родрига* для данного направления (ω^i) и данного поля $\vec{n}$.

Если направление (ω^i) определить с помощью орта $\vec{t}=t^i\vec{e}_i$, а орт $\vec{n}$ принять за вектор $\vec{e}_{a_0}$ (a_0 фиксировано) базиса $(\vec{e}_a)$ в плоскости $N_q(x)$, то, учитывая, что $\text{Пр}_{T_x} d\vec{e}_{a_0}=\omega^l_{a_0}\vec{e}_l$ и $\omega^l_{a_0}+\gamma^{lk}\omega^{a_0}_k=0$, получим

$$\vec{r}^{a_0}=-\gamma^{lk}b^{a_0}_{kj}t^j\vec{e}_l. \tag{1}$$

Возьмем вектор $\vec{v}=v^i\vec{e}_i$. Тогда

$$\vec{v}\cdot\vec{r}^{a_0}=-b^{a_0}_{ij}v^it^j. \tag{2}$$

Значит, $\vec{v}\cdot\vec{r}^{a_0}=0$, если направления $\vec{t}$ и $\vec{v}$ сопряжены относительно конуса $\Phi^{a_0}=0$. Отсюда вытекает следующее утверждение:

Теорема 1. *Вектор Родрига* $\vec{r}^{a_0}$, *найденный для данного направления* $\vec{t}$ *и данного поля вектора* $\vec{e}_{a_0}$, *ортогонален $(p-1)$-направлению, сопряженному направлению* $\vec{t}$ *относительно соответствующего конуса* $\Phi^{a_0}=0$.

Следствие 1. *Векторы* $\vec{r}^{a_0}$ и $\vec{t}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда направление* $\vec{t}$ *является главным относительно нормали* $(x, \vec{e}_{a_0})$ *(т. е. относительно конуса* $\Phi^{a_0}=0$*).*

Следствие 2. *Векторы* $\vec{r}^{a_0}$ *и* $\vec{t}$ *ортогональны тогда и только тогда, когда направление* $\vec{t}$ *принадлежит конусу* $\Phi^{a_0}=0$.

В самом деле, согласно формуле (2), $\vec{t}\cdot\vec{r}^{a_0}=-b^{a_0}_{ij}t^it^j$.

Для данного направления $\vec{t}$ и q векторов $\vec{e}_a$ по формуле (1) получим q векторов $\vec{r}^a$. При замене базиса $(\vec{e}_i)$ в касательном пространстве T_x векторы $\vec{r}^a$ (для данного направления $\vec{t}$) не меняются (это непосредственно следует из формулы (1)). При замене векторов $\vec{e}_a$ в нормальном пространстве $N: \vec{e}_{a'}=u^a_{a'}\vec{e}_a$ (с ортогональной матрицей $\|u^a_{a'}\|$) в силу (1) находим $\vec{r}^{a'}=u^a_{a'}\vec{r}^a$. Следовательно, *подпространство* $R_x(\vec{t})$ *в* T_x, *порождаемое векторами* $\vec{r}_a$, *не зависит от выбора полуортогонального репера* $(x, \vec{e}_i, \vec{e}_a, \vec{e}_\sigma)$. Для заданного на поверхности V_p векторного поля $\vec{t}$ получим распределение $R(\vec{t})$, которое называется *распределением Родрига для данного векторного поля* $\vec{t}$.

Из следствия 2 вытекает еще одно утверждение:

Следствие 3. *Вектор $\vec{t}$ ортогонален соответствующему подпространству $R_x(\vec{t})$ тогда и только тогда, когда направление $\vec{t}$ принадлежит всем конусам $\Phi^a = 0$, т. е. является асимптотическим направлением на поверхности.*

Если $\vec{t} \subset R(\vec{t})$, то $\vec{t} = \lambda_{a_g} \vec{r}^{a_g}$, где $(\vec{r}^{a_g})$ — базис системы векторов $\{\vec{r}^a\}$ $(g = 1, 2, \ldots, s \leqslant q)$. Используя формулу (1), находим

$$t^l = -\lambda_{a_g} \gamma^{lk} b^{a_g}_{kj} t^j,$$

или

$$\left(\lambda_{a_g} b^{a_g}_{kj} + \gamma_{kj}\right) t^j = 0. \tag{3}$$

Если взять поле вектора $\vec{n} = \sum\limits_g \lambda_{a_g} \vec{e}_{a_g}$, то, как известно, $\vec{n} \cdot d^2\vec{x} = \lambda_{a_g} \Phi^{a_g}$ и из (3) заключаем, что направление $\vec{t}$ является главным для нормали $(x, \vec{n})$.

Обратно: если направление $\vec{t}$ является главным для некоторой нормали $(x, \vec{n})$, то, выбирая базис $(\vec{e}_a)$ в плоскости $N_q(x)$ так, чтобы орт лежал на этой нормали, согласно следствию 1 получим, что $\vec{t}$ и $\vec{r}^{a_0}$ коллинеарны и, значит, $\vec{t} \subset R(\vec{t})$.

Следствие 4. *Отношение $\vec{t} \in R(\vec{t})$ имеет место тогда и только тогда, когда направление $\vec{t}$ является главным для некоторого поля одномерной нормали $(x, \vec{n})$.*

Следствия 3 и 4 обобщают на случай произвольной гладкой поверхности $V_p \subset E_n$ известные свойства направления, определяемого вектором Родрига на поверхности $V_2 \subset E_3$.

Пусть некоторое направление $\vec{v}$ на поверхности V_p ортогонально подпространству $R_x(t)$. Тогда $\vec{v} \cdot \vec{r}^a = 0$ для любого a. Направления $\vec{t}$ и $\vec{v}$ сопряжены относительно любого конуса $\Phi^a = 0$, что дает два сопряженных направления на поверхности.

Обратно: если направления $\vec{t}$ и $\vec{v}$ на поверхности сопряжены, то из формулы (2) следует $\vec{v} \cdot \vec{r}^a = 0$ для любого a и, значит, $\vec{v} \perp R_x(\vec{t})$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. *Если в точке $x \in V_p$ направлению $\vec{t}$ сопряжено k-мерное направление $\Pi_k^0(x)$, то подпространство $R_x(\vec{t})$ имеет размерность $p-k$ и является ортогональным дополнением к $\Pi_k^0(x)$ в пространстве T_x.*

Следствие. *Если для направления $\vec{t}$ не существует сопряженных направлений на поверхности V_p, то ранг $\{\vec{r}^a\}=p$ и $R_x(\vec{t})=T_x$.*

Пусть поверхность $V_p \subset E_n$ *отнесена к подвижному реперу* $R=(x, \vec{e}_i, \vec{e}_a, \vec{e}_\sigma)$, где $x \in V_p$, $\vec{e}_i \in T_x$, $\vec{e}_a \in N_q(x)$, $\vec{e}_\sigma \in N_{n-p}(x)$. Кривизна Риччи поверхности V_p в направлении $d\vec{x}=\omega^i \vec{e}_i$ определяется формулой

$$K(d\vec{x})=\frac{R_{ij}\omega^i\omega^j}{ds^2}.$$

Имеем

$$\psi=\sum_a (\vec{\Pi}_{pT_x} d\vec{e}_a)^2, \qquad \vec{r}_a=\frac{\vec{\Pi}_{pT_x} d\vec{e}_a}{ds}.$$

Отсюда

$$\psi/ds^2=\sum_a (\vec{r}^a)^2.$$

Как известно,

$$R_{ij}=pM\alpha_{ij}-\beta_{ij}, \quad \vec{K}_N=\frac{b^a_{ij}\omega^i\omega^j}{ds^2}\vec{e}_a=\frac{\vec{b}_{ij}\omega^i\omega^j}{ds^2},$$

$$M\alpha_{ij}=M\vec{m}\cdot\vec{b}_{ij}=\vec{M}\cdot\vec{b}_{ij}.$$

Поэтому

$$K(d\vec{x})=p\vec{M}\cdot\vec{K}_N(d\vec{x})-\sum_a (\vec{r}^a)^2. \tag{4}$$

Отсюда вытекает следующее утверждение:

Теорема 3. *На минимальной p-поверхности $(M=0)$ кривизна Риччи в данном направлении отличается только знаком от суммы квадратов векторов Родрига $\vec{r}^a$, соответствующих этому направлению.*

Пусть в пространстве T_x базис $(\vec{e}_i)$ — ортонормированный (и, значит, весь подвижный репер — ортонормированный). Векторы Родрига для направления $\vec{e}_i$ обозначим через $\vec{r}_i^a$. Так как $\vec{K}_N(\vec{e}_i)=\vec{b}_{ii}$, то формула (2) примет вид

$$K(\vec{e}_i)=\rho\vec{M}\cdot\vec{b}_{ii}-\sum_a(\vec{r}_i^a)^2. \qquad (5)$$

Но $\vec{r}_j^a=-\gamma^{lk}b_{kj}^a\vec{e}_l$ (см. формулу (1)), и следовательно,

$$(\vec{r}_i^a)^2=b_{ki}^a b_{li}^a\gamma^{kl}=\sum_k(b_{ki}^a)^2.$$

Поэтому

$$\sum_a(\vec{r}_i^a)^2=\sum_k(\vec{b}_{ki})^2.$$

Суммируя в равенстве (5) по i от 1 до p и учитывая, что $\sum_i K(\vec{e}_i)=R$, где R — скалярная кривизна поверхности в точке x и $\sum_i\vec{b}_{ii}=p\vec{M}$, получим

$$(p\vec{M})^2-R=\sum_{i,j}(\vec{b}_{ij})^2. \qquad (6)$$

Итак доказана следующая теорема:

Теорема 4. *Если поверхность $V_p\subset E_n$ отнесена к ортонормированному подвижному реперу, то в каждой точке $x\in V_p$ справедлива формула* (6).

Следствие 1. *Не существует поверхности V_p в E_n, отличной от p-плоскости, на которой скалярная и средняя кривизны связаны соотношением $R=(pM)^2$.*

Следствие 2. *Скалярная кривизна минимальной поверхности, отнесенной к ортонормированному подвижному реперу, выражается формулой*

$$R=-\sum_{i,j}(\vec{b}_{ij})^2.$$

Следствие 3. *Единственной p-поверхностью в E_n, в каждой точке которой скалярная и средняя кривизны равны нулю, является p-плоскость.*

В самом деле, если $R=M=0$, то из формулы (6) получим $\vec{b}_{ij}=\vec{0}$, т. е. все $b^a_{ij}=0$. Значит, второй основной тензор поверхности V_p — нулевой и, следовательно, V_p представляет собой p-плоскость.

УПРАЖНЕНИЯ

К главам I—III

1. Доказать, что евклидово пространство E_n является гладким многообразием.

2. Доказать, что сфера S_n является гладким многообразием.

3. Доказать, что проективное пространство P_n является гладким многообразием.

4. Доказать, что тор является двумерным гладким многообразием.

5. Пусть X, Y, Z — гладкие многообразия; $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ — дифференцируемые отображения. Доказать, что композиция $g \circ f$ является дифференцируемым отображением.

6. Проверить, что определение ранга отображения f не зависит от выбора локальных координат в окрестностях точек x и $f(x)$.

7. Пусть $f: X_p \to Y_q$ — дифференцируемое отображение ранга p $(p \leqslant q)$. Доказать, что можно так выбрать локальные координаты (x^i) в окрестности точки x и (y^i, y^α) в окрестности точки $f(x)$, что отображение f определяется локально формулами $y^i = x^i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, $y^\alpha = y^\alpha(x^1, x^2, \ldots, x^p)$ $(\alpha = p+1, \ldots, q)$.

8. Пусть X_p — гладкое многообразие в евклидовом пространстве E_n и X_r $(r < p)$ — подмногообразие в X_p. Доказать, что $T_x(X_r) \subset T_x(X_p)$.

9. Пусть $f: X_p \to Y_n$ — погружение класса C^k. Доказать, что $f_*: T(X_p) \to T(Y_n)$ является погружением класса C^{k-1}.

10. В области Ω евклидова пространства E_3 дана дифференциальная форма $\theta = Pdx + Qdy + Rdz$, где P, Q, R — дифференцируемые функции координат x, y, z точки из Ω. Найти условия полной интегрируемости этой формы.

11. Доказать, что группа $GL(n, \mathbf{R})$ невырожденных вещественных матриц порядка n является группой Ли.

12. Найти алгебру Ли группы $GL(n, \mathbf{R})$.

13. Пусть X и Y — многообразия класса C^∞ и $f: X \to Y$ — дифференцируемое отображение, X_1, X_2 — векторные поля на X и $f_*(X_i) = Y_i$ $(i = 1, 2)$. Доказать, что $f_*[X_1, X_2] = [Y_1, Y_2]$.

К главе IV

1. Пусть $\gamma = \gamma(t)$ — геодезическая линия в пространстве аффинной связности (X_n, ∇). Если положить $t = \varphi(s)$ $(\varphi'(s) \neq 0)$, то получится параметризованная кривая $\bar{\gamma} = \gamma(\varphi(s))$. Доказать, что линия $\bar{\gamma}$ является геодезической тогда и только тогда, когда φ — линейная функция.

2. Многообразие X_n называется параллелизуемым, если существует n линейно независимых сечений касательного расслоения $T(X_n)$ над X_n, т. е. существуют такие векторные поля X_1, $X_2, \ldots, X_n$ на многообразии X_n («параллелизация»), что в каждой точке $x \in X_n$ векторы $X_{1|x}, \ldots, X_{n|x}$ образуют базис в T_x. Доказать, что на таком многообразии отображение ∇: $D^1(X_n) \times D^1(X_n) \to D^1(X_n)$ по закону $\nabla_X(\eta^i X_i) = X(\eta^i) X_i$ есть линейная связность.

3. Доказать, что для линейных связностей ∇ и $\bar{\nabla}$ на многообразии X_n разность $\nabla - \bar{\nabla}$ есть тензорное поле типа (1; 2) на

X_n. Обратно: для любого тензорного поля s типа (1; 2) сумма $\nabla+S$ есть линейная связность.

4. Доказать, что кручение связности ∇ на многообразии X_n равно нулю тогда и только тогда, когда в окрестности каждой точки $x\in X_n$ можно ввести такую координатную систему, что в этой точке $\Gamma_{ij}^k(x)=0$.

5. Пусть ∇ — линейная связность с коэффициентами Γ_{ij}^k в естественном репере (∂_i) на многообразии X_n и S_{ij}^k — тензор кручения связности ∇. Доказать, что функции $\overline{\Gamma}_{ij}^k=\Gamma_{ij}^k-\frac{1}{2}S_{ij}^k$ являются коэффициентами некоторой линейной связности $\overline{\nabla}$ без кручения на X_n, причем связности ∇ и $\overline{\nabla}$ обладают одними и теми же геодезическими.

6. Пусть Γ_{ij}^k и $\check{\Gamma}_{ij}^k$ — коэффициенты двух линейных связностей в естественном репере на многообразии X_n. Доказать, что функции $\overline{\Gamma}_{ij}^k=\dfrac{\Gamma_{ij}^k+\lambda\check{\Gamma}_{ij}^k}{1+\lambda}$ определяют линейную связность на этом многообразии.

7. Доказать, что в римановом пространстве объем параллелепипеда сохраняется при параллельном переносе тех векторов, на которых он построен.

8. Доказать, что в римановом пространстве коэффициент связности удовлетворяет условию $\Gamma_{kl}^k=\dfrac{\partial\ln\sqrt{g}}{\partial u^l}$, где $g=\det\|g_{ij}\|$ и g_{ij} — основной тензор пространства.

9. Пусть X_n — параллелизуемое многообразие и $X_1,\ldots,X_n\in D^1(X_n)$ — параллелизация $\langle X_{i|x}, X_{j|x}\rangle=\delta_{ij}$ в каждой точке $x\in X_n$. Доказать, что этим условием определена риманова метрика на X_n.

К главе V

1. Найти произвол существования интегрального многообразия уравнения Пфаффа $udx+zdy+xdz=0$, считая $dx\wedge dy\neq 0$.

2. Найти произвол существования интегрального многообразия V_2 системы уравнений $udx-gdy-xdf=0$, $(f-u)dx+ydg=0$, на котором $dx\wedge dy\neq 0$.

3. Определить произвол существования интегрального многообразия V_2 системы уравнений Пфаффа $\theta^\alpha=0$ $(\alpha=1, 2,\ldots, s)$, если система $D\theta^\alpha=0$ имеет вид $\varphi^1\wedge\omega^1+\varphi^2\wedge\omega^2=0$, $\varphi^2\wedge\omega^1-\varphi^1\wedge\omega^2=0$.

Здесь θ^α, φ^1, φ^2, ω^1, ω^2 — независимые 1-формы от $s+4$ переменных и система $\omega^1=0$, $\omega^2=0$ вполне интегрируема.

4. Определить произвол существования интегрального многообразия V_3 системы уравнений Пфаффа $\theta^\alpha=0$ $(\alpha=1, 2,\ldots, s)$, если система $D\theta^\alpha=0$ имеет вид $\varphi^i\wedge\omega^i=0$ $(i=1, 2, 3)$. Все θ^α φ^i, ω^i — независимые 1-формы, и система уравнений $\omega^i=0$ вполне интегрируема.

5. Используя критерий Картана, найти произвол существования интегрального многообразия V_3 системы уравнений $dz^1 = x^1du^1 - u^2dx^2$, $dz^2 = x^2du^2 + x^3du^3$, $dz^3 = -u^3dx^3 + x^1du^1$, на котором $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \neq 0$.

6. Используя критерий Картана, найти произвол существования интегрального многообразия V_3 системы уравнений Пфаффа $\theta^\alpha = 0$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, s)$, на котором $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \neq 0$, если система уравнений $D\theta^\alpha = 0$ имеет вид $\varphi^1 \wedge \omega^1 = 0$, $\varphi^3 \wedge \omega^1 + \varphi^4 \wedge \omega^2 + \varphi^5 \wedge \omega^3 = 0$, $\varphi^2 \wedge \omega^2 = 0$, $\varphi^5 \wedge \omega^1 - \varphi^4 \wedge \omega^2 + \varphi^3 \wedge \omega^3 = 0$ и все формы φ^i линейно независимы.

7. Найти произвол существования интегрального многообразия системы Пфаффа $\theta^\alpha = 0$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, s)$, на котором $\omega^1 \wedge \omega^2 \neq 0$, если система уравнений $D\theta^\alpha = 0$ имеет вид $\tilde{\omega}^1 \wedge \omega^1 + \tilde{\omega}^2 \wedge \omega^2 = 0$, $\tilde{\omega}^2 \wedge \omega^1 - \omega^1 \wedge \omega^2 = 0$ и формы $\tilde{\omega}^1$, $\tilde{\omega}^2$ линейно независимы.

8. На интегральном многообразии V_3 системы Пфаффа $\theta^\alpha = 0$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, s)$ имеем $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \neq 0$. Определить, находится ли система в инволюции, если система $D\theta^\alpha = 0$ имеет вид $\tilde{\omega}^1 \wedge \omega^1 + \tilde{\omega}^2 \wedge \omega^2 = 0$, $\tilde{\omega}^2 \wedge \omega^2 + \tilde{\omega}^3 \wedge \omega^3 = 0$ и формы $\tilde{\omega}^1$, $\tilde{\omega}^2$, $\tilde{\omega}^3$ линейно независимы.

9. На интегральном многообразии V_3 системы Пфаффа $\theta^\alpha = 0$ имеем $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \neq 0$. Определить, находится ли система в инволюции, если система $D\theta^\alpha = 0$ имеет вид $\tilde{\omega}^2 \wedge \omega^1 - \tilde{\omega}^1 \wedge \omega^2 = 0$, $\tilde{\omega}^3 \wedge \tilde{\omega}^3 = 0$, $\tilde{\omega}^3 \wedge \omega^1 - \tilde{\omega}^2 \wedge \omega^3 = 0$ и формы $\tilde{\omega}^1$, $\tilde{\omega}^2$, $\tilde{\omega}^3$ линейно независимы.

К главе VI

1. Построить канонический репер $R(A, A_1, A_2, A_3)$ гладкой поверхности V_2 в проективном пространстве P_3 так, чтобы $A \in V_2$, а прямые AA_1, AA_2 касались в точке A линий сопряженной сети, заданной на поверхности.

2. В проективном пространстве P_6 заданы попарно не пересекающиеся поверхность Картана V_3, плоскость P_4 и прямая P_1. Доказать, что проекция поверхности V_3 из центра P_1 на плоскость P_4 является трижды сопряженной системой в P_4.

3. (Обобщение задачи 2.) В проективном пространстве $P_n (n \geqslant 4)$ заданы попарно не пересекающиеся поверхность Картана V_p $(p \leqslant n/2)$, плоскости P_s и P_{n-s-1} $(s \geqslant p)$. Доказать, что проекция поверхности V_p из центра P_{n-s-1} на плоскость P_s является p-сопряженной системой в P_s.

4. Если в упр. 3 вместо поверхности Картана взять p-сопряженную систему в пространстве P_n, то какова будет ее проекция из центра P_{n-s-1} на плоскости P_s?

5. В упр. 3 выяснить, какая связь существует между преобразованием Лапласа поверхности Картана V_p и преобразованием Лапласа ее проекции на плоскость P_s.

6. Пусть V_p — гладкая p-поверхность проективного пространства P_n. Присоединим к этой поверхности два семейства плоскостей, гладким образом зависящих от текущей точки $A \in V_p$: семейство $(n-p)$-плоскостей $P_{\mathrm{I}}(A)$ (нормалей I рода) и семейство $(p-1)$-плоскостей $P_{\mathrm{II}}(A)$ (нормалей II рода), где $P_{\mathrm{I}}(A) \cap$

$\bigcap T_p(A)=\{A\}$, $P_{II}(A)\subset T_p(A)$, но $A\notin P_{II}(A)$ ($T_p(A)$ — касательная p-плоскость поверхности в точке A). В таком случае поверхность называется нормализованной в смысле А. П. Нордена [17]. Присоединим к поверхности V_p подвижный репер $R=(A, A_i, A_\alpha)$, где $A_i\in P_{II}(A)$, $A_\alpha\in P_I(A)$ ($i, j, k=1, 2, ..., p$; $\alpha, \beta=p+1, ..., n$). Доказать, что на нормализованной поверхности V_p реализуется линейная связность ∇ без кручения с формой связности $\|\bar{\omega}^i_j\|$, где $\bar{\omega}^i_j=\omega^i_j-\delta^i_j\omega^0_0$ и ω^A_B — 1-формы из деривационных формул репера R.

7. Доказать, что линия $\gamma\subset V_p$ является геодезической линией в связности ∇, построенной в упр. 6, тогда и только тогда, когда в каждой точке $x\in\gamma$ соприкасающаяся плоскость этой линии пересекает нормаль I рода по прямой или является неопределенной.

8. Доказать, что в евклидовом пространстве E_n ($n>3$) не существует гиперповерхностей постоянной отрицательной кривизны.

9. Доказать, что, для того чтобы гиперповерхность V_{n-1} в E_n имела постоянную кривизну, необходимо и достаточно, чтобы линии кривизны этой гиперповерхности были неопределенными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Базылев В. Т. Материалы по геометрии. М., 1978, вып. 1; 1979, вып. 2.
2. Базылев В. Т., Дуничев К. И., Иваницкая В. П. Геометрия. М., 1974, т. I; 1975, т. II.
3. Бишоп Р., Криттенден Р. Геометрия многообразий. М., 1967.
4. Бурбаки Н. Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводки результатов. М., 1975.
5. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. М., 1971.
6. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М., 1986.
7. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Проблемы геометрии. М, 1979, т. 9.
8. Зуланке Р., Винтген П. Дифференциальная геометрия и расслоения. М., 1975.
9. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М., 1981, тт. I, II.
10. Кобаяси Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М., 1986.
11. Лаптев Г. Ф. Труды Московского математического общества. М., 1953, т. 2. Итоги науки. Геометрия. М., 1965; Труды геометрического общества. М., 1966, т. 1; 1969, т. 2; 1971, т. 3.
12. Лихнерович А. Теория связанностей в целом и группы голономии. М., 1960.
13. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. М., 1972.
14. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии. М., 1980.
15. Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях. М., 1971.
16. Номидзу К. Группы Ли и дифференциальная геометрия. М., 1960.
17. Норден А. П. Пространства аффинной связности. М., 1976.
18. Остиану Н. М., Рыжков В. В., Швейкин П. И. Очерк научных исследований Г. Ф. Лаптева. Труды геометрического семинара. М., 1973, т. 4.
19. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. М., 1973.
20. Серр Ж. П. Алгебры Ли и группы Ли. М., 1969.
21. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М., 1970.
22. Телеман К. Элементы топологии и дифференцируемые многообразия. М., 1967.

23. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М., 1964.
24. Шварц Дж. Дифференциальная геометрия и топология. М., 1970.
25. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. М., 1960.
26. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. М., 1948.
27. Яно К. и Бохнер С. Кривизна и числа Бетти. М., 1957.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Базылев Вячеслав Тимофеевич

ГЕОМЕТРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Зав. редакцией Е. С. Гридасова. Редактор А. М. Суходский. Мл. редактор Н. П. Майкова. Художественный редактор В. И. Пономаренко. Технический редактор Е. И. Герасимова. Корректор Г. И. Кострикова

ИБ № 7422

Изд. № ФМ-893. Сдано в набор 22.11.88. Подп. в печать 10.05.89. Формат 84×108¹/₃₂. Бум. кн.-журн. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 11,76 усл. печ. л. 11,97 усл. кр.-отт. 10,50 уч.-изд. л. Тираж 9650 экз. Зак. № 935. Цена 35 коп.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4. Неглинная ул. д. 29/14.

Московская типография № 8 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 101898, Москва, Центр, Хохловский пер., 7.

В издательстве «Высшая школа» готовится к выпуску серия учебных пособий «Актуальные вопросы прикладной и вычислительной математики». Каждая из книг указанной серии будет содержать материал по одному из современных направлений прикладной и вычислительной математики, изложенный в доступной и краткой форме. Авторами книг являются ведущие специалисты по этим направлениям. Материал серии может служить основой для создания широкого цикла актуальных спецкурсов как в университетах, так и в технических вузах страны.

В 1990 г. будут изданы следующие книги из этой серии:

Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. **Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений** (поз. 14, темплан 1990 г.).

В книге в краткой и доступной форме изложены основы теории сингулярных возмущений, описаны алгоритмы построения асимптотик решений для многих классов задач математической физики, приводящих к сингулярно возмущенным уравнениям, представлены современные результаты, активно используемые в приложениях. Большое внимание уделяется применению методов теории сингулярных возмущений к различным прикладным задачам.

Предназначается для студентов вузов, обучающихся по специальностям «Физика» и «Прикладная математика», а также аспирантов и специалистов, занимающихся теоретическими проблемами асимптотических методов и их приложениями.

Солдатов А. П. **Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций** (поз. 15, темплан 1990 г.).

Дается современное изложение нетеровской теории сингулярных интегрофункциональных операторов и рассматриваются ее приложения к широкому классу локальных и нелокальных краевых задач для эллиптических систем на плоскости. Основное внимание уделяется случаю, когда коэффициенты краевых условий являются кусочно-непрерывными, а граница области, в которой ищется искомое решение,— кусочно-гладкой. В качестве иллюстрации даны решения основных смешанно-контактных задач плоской теории упругости в классической постановке.

Предназначается для широкого круга специалистов, работающих в области теории функций и математической физики, и студентов математических факультетов вузов.