

Педагогика ўқув юртлари
учун ўқув қўлланма

А.П. Стойлова
А.М. Пишкало

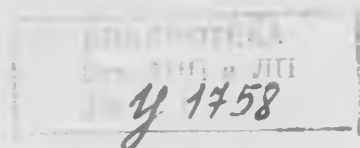
БОШЛАНҒИЧ МАТЕМАТИКА КУРСИ АСОСЛАРИ

Ў-81

Л. П. СТОЙЛОВА
А. М. ПИШКАЛО

БОШЛАНҒИЧ МАТЕМАТИКА КУРСИ АСОСЛАРИ

СССР Халқ таълими Давлат комитети
педагогика билим юртларининг № 2001 «Умумий
таълим мактабларининг бошланғич синфларида
ўқитиш» ихтисослиги ўқувчилари учун ўқув
қўлланма сифатида рухсат этган



Қўлланма педагогика билим юртлари программасига мослаб ёзилган. Унда назарий материаллардан ташқари кўп миқдорда машқлар келтирилган бўлиб, уларни ечиш бўлғуси ўқитувчиларга профессионал малакаларни эгаллашларига ёрдам беради.

С 4308000400—92 30—91
353 (04) — 91

ISBN—5—645—00809—X.

© Издательство «Просвещение»,
1988

© Ўзбек тилига таржима, «Ўқитувчи» нашриёти, 1991

СЎЗ БОШИ

Бошланғич синф ўқувчиларига математикани муваффақият билан ўқитиш ўқитувчидан на фақат методик маҳоратни, балки математик тушунча ва фактлар моҳиятини чуқур тушунишни ҳам талаб этади. Гап фақат бошланғич синфларда «сон» ва «катталиқ» каби муҳим тушунчаларга асос яратиш, ҳарфий символика ва геометрия элементлари билан танишиш, мантикий малакалар ҳосил қилишда эмас, балки кўпгина математик тушунчаларни бошланғич синф ўқувчилари қатъий таърифсиз, кўп ҳолларда эса ошкормас ҳолда фойдаланишларида ҳамдир. Буларнинг ҳаммаси бошланғич мактаблар ўқитувчиларининг математик тайёргарликларига алоҳида талаблар қўяди. У натурал сонлар ва катталиқлар тушунчаларини эгаллаган бўлиш, сонлар устида арифметик амалларнинг турли таърифларини ва уларнинг хоссаларини билиш, оғзаки ва ёзма ҳисоблашларни бажара олиши ва тушунтира олиши, текстли масалаларни ечишда амалларни танлашни асослай олиши ва катталиқлар орасидаги боғланишлар турини аниқлай олиши керак. Ўқитувчига яна математика дарсидан ўқувчиларни тарбиялаш учун, хусусан, уларда илмий дунёқараш асосларини шакллантириш учун фойдаланиш малакаси ҳам зарур.

Ушбу ўқув қўлланма программага мослаб ёзилган бўлиб, у бўлғуси бошланғич синфлар ўқитувчисининг математик тайёргарлигини таъминлаш масаласини ҳал қилишни кўзда тутди. Бу тайёргарлик ўқитувчига ўқувчиларни саводли, ижодий ўқитиш ва тарбиялаш учун, математик билимларини чуқурлаштириш ва кенгайтиришдаги бундан буёнги ишлари учун зарур.

Қўлланманинг тузилиши қуйидагича: бутун материал бешта бўлимга, бўлимлар параграфларга, параграфлар пунктларга бўлинган. Ҳар бир пункт машқлар билан тугалланади. Бу машқлар ҳам назарияни анчагина чуқур ўрганиш учун, ҳам бўлғуси ўқитувчида қатор профессионал малакаларни, масалан, ўқув-

Биринчи сабабини кесма ўтказиш мисолида осон тушуниш мумкин. Қадимги Мисрда ер ўлчовчилар ерга иккита қозик қоққанлар ва улар орасига арқон тортганлар. Бироқ, кичик қозиклар олиш, арқон ўрнида эса ингичка ип олиш мумкин. Бунини яна ҳам аниқлаштириш нима учун мумкин эмаслиги ноаниқ.

Шундай қилиб, биринчи сабаб амалиёт ва кўргазмаларни тасаввур жисмлар шакллари ва геометрик яшашларни аниқроқ қилиш имкониятини ҳар доим кўрсатгани ва кўрсатаётганидан иборат. Тўғри чизик кесмасининг давомини тасаввур қилар эканмиз, биз унинг принципиал чегараларини кўрмадик ва чексиз давом этувчи тўғри чизик ҳақида тасаввур шундай ҳосил бўлади.

Ноаниқликлар моддий жисмларнинг ўзига хос хусусиятлари у ёки бу шартлар билан боғлиқ. Бироқ, буларнинг ҳаммаси геометрик яшашларнинг ўзининг моҳиятига нисбатан бегона ва тасодифийдир. Шунинг учун жисмларнинг шакли ва ўлчамлари асосан чексиз аниқлаштирилишчи деб тасаввур қилингани каби бу яшашлар ҳам чексиз аниқлаштирилишчи сифатида қатнашади.

Бундан идеал геометрик фигуралар ҳақида тасаввурлар ҳосил бўлади. Масалан, ёғочдан ҳам, темирдан ҳам, бошқа нарсадан ҳам ясалмаган учбурчак, умуман учбурчак, демак, идеал учбурчак қаралапти.

Бу тасаввурларнинг вужудга келиши ва қарор топишининг биринчи сабаби билан узвий боғланган иккинчи сабаби аниқ мулоҳазалар жуда аниқ аниқланган предметларни талаб қилишидан иборат. Хулосалар чиқариш, амалий топшириқларни ечиш учун аниқ қоида зарур. Аниқ қоида эса аниқ тушунчани талаб этади, шунингдек, аниқ тушунча аниқ назарияни талаб этади. Геометриянинг идеал тушунчаларининг қарор топишининг иккинчи сабаби мана шундан иборат. Ҳозир ҳам давом этаётган геометрик тушунчаларни аниқлаштириш математик мулоҳазалар — таъриф ва теоремаларни аниқлаштириш билан мустақкам боғланган. Аниқ иш учун яхши аниқ иш қуроли зарур бўлгани каби, аниқ назария, оқибат натижада, фан ва техникада қўллаш учун зарур».

Айтилганларга яна шунини қўшимча қилиш мумкинки, моддий дунёнинг фазовий шакли ва миқдорий муносабатларини ўргана бориб, математика на фақат абстрактлашнинг турли усуллари билан фойдаланади, балки абстрактлашнинг ўзи кўп босқичли жараён сифатида қатнашади. Математикада фақат реал предметларни ўрганиш давомида пайдо бўлган тушунчаларгина эмас, балки дастлабки тушунчалар асосида вужудга келган тушунчаларнинг хоссалари ҳам қаралади. Масалан, ўзгарувчи тушунчани конкрет ўзгарувчи миқдор (катталиқ)нинг абстракциясидир, яъни абстракциядан абстракциядир.

Математика ўзининг ривожланиш даврида бир қанча босқичлардан ўтди. У бу босқичларнинг ҳар бирида моддий дунёнинг турли-туман шакли ва миқдорий муносабатларини билиш

ва англашнинг маълум усуллари яратди. Хусусан, ҳозирги вақтда кенг тарқалган ўрганишнинг математик моделларини яшаш методи каби методи яратилган эди. У ташқи дунё ҳодисаларининг бирор-бир мажмуаси (тўплами) нинг математик символикалар ёрдамида тақрибан тавсифланишидир. Математика моделларни ўрганиш билан бирга, у реал борлиқнинг ўзини ҳам ўрганади. Масалан, $y=kx$ функциянинг хоссалари ҳақидаги билимлар турли миқдорлар орасидаги: вақт билан тўғри чиқиқли текис ҳаракатдаги масофа орасидаги, буюм миқдори билан нархи орасидаги ва бошқа боғланишларнинг ўзига хос хусусиятларини тавсифлаш имконини беради.

Умуман, математикада абстрактлаш уни билишнинг турли соҳаларида қўллаш имконини беради, чуқури у табиатни билиш ва техникани яратишнинг қудратли қуролидир.

Машқлар

1. Қуйидаги масалаларни ечинг ва қайси геометрик фигуралар улар орасида реал предметларнинг идеал моделлари сифатида иштирок этаётганини тушунтиринг:

1) Мактаб коридорининг узунлиги 30 м, эни эса 5 м. Мактаб коридорининг юзи қандай? 2) Зилзила ер сиртнда 0,8 км/с тезлик билан тарқалади. 10 с дан кейин зилзила қандай майдонни эгаллаш мумкин? 3) Улчамлари 130×60 м бўлган тўғри тўртбурчак шаклидаги ер участкасида эни 1 м бўлган зовур қазилади, бунда зовур участканинг ичидан ўтади. Участка янги майдонининг юзи қандай? 4) Тўғри тўртбурчак шаклидаги сузиш бассейнининг узунлиги 50 м, эни (кенглиги) 24 м ва чуқурлиги 3 м. Агар бассейндаги сув сатҳи бассейн ён деворлари (борти) дан 50 см паст бўлса, бассейнга неча куб метр сув сиғади?

2. Қайси функция қуйидаги масалаларда қаралаётган боғланишларнинг модели бўлади:

1) Турист А дан В га 3 соатда борган бўлсин. Агар турист 1,5 марта тезроқ юрса, у шу йўлни неча соатда босиб ўтган бўлар эди?

2) Совхоз ер майдонини учта трактор 60 соатда шудгорлайди. Шу майдонни 9 та шундай трактор қанча вақтда шудгорлайди?

2. Тушунчанинг ҳажми (кўлами) ва мазмуни

Ҳар қандай математик объект маълум хоссаларга эга. Масалан, квадрат тўртта томон, тўртта тўғри бурчак, тенг диагоналлarga эга.

Квадратнинг бошқа хоссаларини ҳам кўрсатиш мумкин.

Объектнинг хоссалари орасида уни бошқа объектлардан ажратиш учун муҳим ва муҳим бўлмаган хоссалари фарқ қилинади. Агар хосса объект учун ўзига хос ва бу хоссасиз объектнинг мавжуд бўлиши мумкин бўлмаса, бу хосса объект учун муҳим хосса ҳисобланади. Муҳим бўлмаган хосса — бу

чилар ечадиган текстли масалаларни ечиш ва топшириқнинг математик мазмунини таҳлил қилиш малакасини шакллантириш учун мўлжалланган.

Қўлланманинг профессионал йўналганлиги маълум назарий материалларни танлаш ва бошланғич синф ўқувчилари бажарадиган топшириқларни (улар, асосан, бошланғич синфлар учун математикадан мавжуд дарсликлардан олинган) киритиш йўли билан бу материаллар баёнига методик ёндашиш орқали эришилади. 4-§ «Текстли масалалар ва уларни ечиш»ни ёзишда муаллифлар С. Е. Царева ва Р. Н. Шиковалар тайёрлаган материаллардан фойдаландилар.

1-§. МАТЕМАТИК ТУШУНЧАЛАР

1. Кириш

Математика бошқа фанлар сингари атрофимизни ўраб турган дунёни, табиат ва жамият ҳодисаларини ўрганади, бироқ у бу ҳодисаларнинг фақат алоҳида томонларини ўрганади. Масалан, геометрияда предметларнинг шакли ва ўлчамлари ўрганилади, унинг бошқа хоссалари: ранги, массаси, қаттиқлиги ва бошқалар эътиборга олинмайди, абстрактланади. Шунинг учун геометрияда «предмет» сўзи ўрнига «Геометрик фигура» дейилади. Кесма, нур, тўғри чизиқ, бурчак, квадрат — геометрик фигуралардир.

«Сон» ва «катталиқ» каби энг муҳим математик тушунчалар ҳам абстрактлаш натижасидир.

Умуман, ҳар қандай математик объектлар — бу атроф дунё предмет ва ҳодисаларидан миқдорий ва фазовий хосса ва муносабатларни ажратиш ҳамда уларни бошқа барча хоссалардан абстрактлаш натижасидир. Демак, математик объектлар реал ҳолда мавжуд эмас, бизни ўраб турган дунёда геометрик фигуралар, сонлар ва ҳоказолар йўқ. Уларнинг барчаси жамиятнинг тарихий ривожланиш жараёнида кишилар онги билан яратилган ва фақат кишилар тафаккурида ҳамда математик тилини ташкил этувчи белги ва символларда мавжуд.

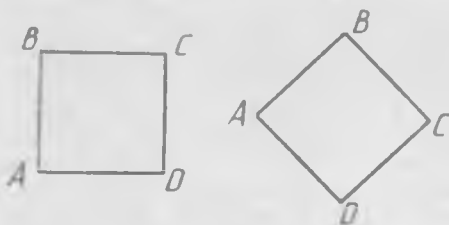
Бунинг устига, математик объектларни ташкил этишда мос предметларни қўлгина хоссалардан на фақат абстрактлаш, балки уларга ҳеч қандай реал предмет эга бўлмаган хоссаларни қўшниш ҳоллари ҳам юз беради. Масалан, тўғри чизиқ каби математик объектда фақат реал предметларнинг узунликлари хоссасигина эмас, балки маълумки, иккала йўналишдаги чексиз узунликлари хоссаси намоён бўлади, аслида реал мавжуд предметларнинг ҳеч бири бундай хоссага эга эмас.

Савол туғилади: математик объектлар ҳақидаги бундай тасаввур қандай вужудга келди ва у нима учун керак?

Бу саволга А. Д. Александров, А. Л. Венгер ва В. И. Рижик¹ бундай жавоб беришади:

«Идеал геометрик тасаввурларнинг вужудга келиши ва қарор топишининг иккита асосий сабабини кўрсатиш мумкин.

¹ А. Д. Александров ва бошқалар. 9—10- синфлар учун геометрия: Математика чуқур ўрганиладиган мактабларнинг ва синфларнинг ўқувчилари учун, — М., 1984. 6—7- бетлар.



1-расм

эмас (агар $ABCD$ квадрат бурилса (1-расм), AD томон бошқача ҳолатда жойлашади). Шунинг учун берилган объект нимани англатишини тушуниб олиш учун унинг муҳим хоссаларини билиш етарли. Бундай ҳолда бу объект ҳақида «тушунча мавжуд» дейишади.

Объектнинг барча ўзаро боғланган муҳим хоссалари тўплами бу объект ҳақидаги тушунчалар мазмуни дейилади.

Математик объектлар ҳақида гап борганда, одатда битта термин (сўз, ном) билан ифодаланадиган (белгиланадиган) барча объектлар тўплами кўзда тутилади. Жумладан, квадрат ҳақида гап борганда квадрат бўлган барча геометрик фигура-лар кўзда тутилади. Барча квадратлар тўплами квадрат тушунчаси қўламини (ҳажмини) ташкил этади.

Умуман, тушунчанинг ҳажми — бу айнан бир термин билан белгиланувчи барча объектлар мажмуи (тўплами) дир.

Шундай қилиб, ҳар қандай тушунча термин, ҳажм ва мазмун билан характерланади.

Тушунча ҳажми ва унинг мазмуни орасида боғланиш мавжуд: тушунчанинг ҳажми қанча «катта» бўлса, унинг мазмуни шунча «кичик» бўлади ва аксинча. Масалан, «тўғри бурчакли учбурчак» тушунчасининг ҳажми «учбурчак» тушунчасининг ҳажмидан «кичик», чунки биринчи тушунчанинг ҳажмига ҳамма учбурчаклар киравермайди, фақат унга тўғри бурчакли учбурчаклар киради. Бироқ биринчи тушунчанинг мазмуни иккинчи тушунчанинг мазмунидан «катта»: тўғри бурчакли учбурчак фақат барча учбурчакларнинг хоссаларигагина эга бўлиб қолмай, балки фақат тўғри бурчакли учбурчакларга хос бўлган бошқа хоссаларга ҳам эга.

Бошланғич математика курси турли-туман математик тушунчаларга бой. Масалан, ўқувчилар I синфдаёқ «рақам», «сон», «қўшилувчи», «йиғинди», «кесма», «кесманинг узунлиги» ва бошқа кўпгина тушунчалар билан танишадилар. II синфда буларга кўпайтириш ва бўлиш билан боғлиқ тушунчалар, III синфда эса каср, фигуранинг юзи ва бошқа тушунчалар қўшилади.

Машқлар

1. 1) геометрик фигура; 2) тўғри тўртбурчак; 3) квадрат; 4) ромб тушунчасининг ҳажмига тегишли бўлган учта объектни чизинг.

шундай хоссаларки, уларнинг бўлмаслиги объектнинг мавжуд бўлишига таъсир этмайдн. Масалан, квадратнинг юқорида айтиб ўтилган хоссалари муҳим хоссалардир, « $ABCD$ квадратнинг AD томони горизонтал ҳолатда» хосса муҳим хосса

2. 1) учбурчак; 2) тўғри тўртбурчак; 3) трапеция тушунчасининг бешта муҳим хоссасини айтинг.

3. Трапециянинг қуйида келтирилган хоссаларидан қайсилари муҳим хоссалар, қайсилари муҳим бўлмаган хоссалар бўлади: 1) трапециянинг иккита томони параллел; 2) трапециянинг асослари горизонтал ҳолатда; 3) катта асосидаги иккала бурчаги ўткир; 4) кичик асосидаги иккала бурчаги ўтмас; 5) трапеция ички бурчакларининг йиғиндиси 360° га тенг?

4. «Тўғри тўртбурчак» тушунчасининг ҳажми «квадрат» тушунчасининг ҳажмидан «катта» экани тўғрими? Бу тушунчаларнинг мазмуни орасида ўзаро қандай боғланиш мавжуд?

5. Тушунчанинг ҳажми қандай: 1) рақам; 2) бир хонали сон?

6. Тўғри тўртбурчак ва квадрат учун умумий бўлган бир неча хоссани айтинг ва ушбу даъволардан қайсилари тўғри бўлишини аниқланг: 1) тўғри тўртбурчакнинг ҳар қандай хоссаси квадрат учун ўринли; 2) квадратнинг ҳар қандай хоссаси тўғри тўртбурчак учун ўринли.

7. Қуйидаги хоссалар орасидан квадрат эга бўладиганларини ажратинг: 1) диагоналлари кесишиш нуқтасида бир-бирини тенг иккига бўлади; 2) диагоналлари бурчакларни тенг иккига бўлади.

8. Қуйидагилар 7-машқда айтилган хоссаларнинг қайси биринга эга бўлади: 1) тўғри тўртбурчак; 2) параллелограмм; 3) ромб?

3. Тушунчалар таърифи

Бирор бир математик объект ҳақидаги тушунча мазмунига шу объектнинг кўпгина турли-туман муҳим хоссалари киради. Бироқ объект мазкур тушунчанинг ҳажмига кириш-кирмаслигини аниқлаш (яъни уни билиш) учун унда фақат айрим муҳим хоссаларнинггина мавжудлигини текшириш зарур. Обьект-ни билиш учун етарли бўлган унинг бу муҳим хоссаларини кўрсатиш объект ҳақидаги тушунчанинг таърифи дейилади.

Умуман, таъриф — бу тушунчанинг мазмунини очувчи логик (мантиқий) операциядир.

Тушунчани таърифлаш усуллари турличадир. Дастлаб ошкор ва ошқормас таърифлар фарқланади.

Ошкор таъриф тенглик, икки тушунчанинг мос келишлик шаклига эга. Масалан, тўғри бурчакли учбурчак — бу тўғри бурчаги бўлган учбурчакдир. Агар «тўғри бурчакли учбурчак» тушунчасини a билан, «тўғри бурчаги бўлган учбурчак» тушунчасини b билан белгиласак, у ҳолда тўғри бурчакли учбурчакка берилган мазкур таърифининг схемаси қуйидагича бўлади: « a b нинг ўзидир».

Ошқормас таъриф икки тушунчанинг мос келишлик шаклига эга эмас. Бундай таърифларга контекстуал ва остенсив таъриф деб аталувчи таърифлар мисол бўлади.

Контекстуал таърифларда янги тушунчанинг мазмуни кириштирилган тушунчанинг маъносини ифодаловчи текст парчаси

орқали, контекст орқали, конкрет вазиятнинг анализи орқали очиб берилади. Контекстуал таърифга II синф учун синов дарслигида¹ келтирилган тенглама ва унинг ечими таърифи мисол бўла олади. Бу ерда $3+x=9$ ёзуви ҳамда санаб ўтилган 2, 3, 6 ва 7 сонлардан кейин текст келади, « x — топилиши керак бўлган номаълум сон. Тенглик тўғри бўлиши учун бу сонлардан қайси бирини x нинг ўрнига қўйиш керак? Бу 6 сонидир». Бу текстдан тенглама — топилиши керак бўлган номаълум сон қатнашган тенглик эканлиги, тенгламани ечиш эса — x нинг тенгламага қўйганда тўғри тенглик ҳосил бўладиган қийматини топиш эканлиги келиб чиқади.

Остенсив таърифлар объектларни намоён қилиш йўли билан терминларни келтириб чиқариш учун ишлатилади, бунда объектлар мана шу терминлар билан белгиланади. Шунинг учун остенсив таърифлар яна кўрсатиш йўли билан таърифланадиган таърифлар деб ҳам аталади. Масалан, бошланғич мактабда тенглик ва тенгсизлик тушунчалари мана шундай усул билан таърифланади.

$$2.7 > 2.6$$

$$78 - 9 < 78$$

$$39 + 6 > 37$$

$$9.3 = 27$$

$$6.4 = 4.6$$

$$17 - 5 = 8 + 4$$

Булар тенгсизликлар

Булар тенгликлар

Юқорида айтиб ўтилганидек, ошкор таърифларда икки тушунча бир-бирига тенглаштирилади. Улардан бири таърифланувчи тушунча, иккинчиси таърифловчи тушунча деб айтилади. Таърифловчи тушунча орқали таърифланувчи тушунчанинг мазмуни очиб берилади.

Масалан, квадрат таърифининг структурасини таҳлил қиламиз: «Квадрат деб ҳамма томонлари тенг бўлган тўғри тўртбурчакка айтилади». У мана бундай: дастлаб таърифланувчи тушунча «квадрат» кўрсатилади, кейин эса ушбу: тўғри тўртбурчак бўлишлик, ҳамма томонлари тенг бўлишлик хоссаларини ўз ичига олувчи таърифловчи тушунча киритилади.

«Тўғри тўртбурчак бўлишлик» хоссаси шунини кўрсатадики, барча квадратлар тўғри тўртбурчаклардир, яъни «тўғри тўртбурчак» тушунчаси «квадрат» тушунчасига нисбатан анча умумий тушунчадир. У таърифланувчи «квадрат» тушунчасига нисбатан жинс жиҳатдан тушунча дейилади.

Иккинчи хосса — «тенг томонларга эга бўлишлик» — бу тур жиҳатдан хосса кўрсаткичи, шу асосда квадрат тўғри тўртбурчакнинг бошқа турларидан фарқ қилинади.

Мактаб математика курсининг бошқа таърифлари ҳам худди шундай структурага эга. Бундай таърифлар структурасини схематик равишда қуйидагича тасвирлаш мумкин:

¹ М. И. Моро ва бошқалар. Математика. 2-синф. Синов дарслиги. М., 1986.

Таърифланувчи тушунча	=	Жинс жиҳатдан тушунча	+	Тур жиҳатдан фарқ

Таърифловчи тушунча

Тушунчаларни бундай схема бўйича таърифлаш жинс ва тур жиҳатдан таърифлаш дейилади.

Математикада бошқача қурилган таърифлар ҳам учрайди. Масалан, учбурчакнинг ушбу таърифини қарайлик: «Учбурчак деб бир тўғри чизиқда ётмаган учта нуқта ва уларни жуфт-жуфти билан туташтирувчи учта кесмадан иборат фигурага айтилади». Бу таърифда учбурчакка нисбатан жинс тушунча — фигура кўрсатилган, сўнгра учбурчак бўлувчи бундай фигурани яшаш усули берилган: бир тўғри чизиқда ётмаган учта нуқта олинадиган ва уларнинг ҳар бир жуфти кесмалар билан туташтирилади. Бундай таърифлашлар генетик¹ таърифлашлар деб аталади.

Энди арифметик прогрессия таърифига мурожаат этамиз: «Арифметик прогрессия деб иккинчи ҳадидан бошлаб ҳар бир ҳади олдинги ҳадга айтиб қўшилган натижасига тенг бўлган сонли кетма-кетликка айтилади». Бу ерда таърифланувчи тушунча — «арифметик прогрессия», жинс тушунча — «сонли кетма-кетлик», шундан сўнг прогрессиянинг иккинчи ҳадидан бошлаб барча ҳадларини ҳосил қилиш усули баён этилган. Бу таърифни формула кўринишида қуйидагича ёзиш мумкин: $a_n = a_{n-1} + d$, бу ерда $n \geq 2$. Бундай таъриф индуктив² ёки рекуррент³ таъриф деб аталади.

Математиканинг бошланғич курсида жинс ва тур жиҳатдан таърифланувчи тушунчалар жуда кам сонли ташкил қилади. Масалан, кўпайтириш бундай таърифланади: «Бир хил қўшилувчиларни қўшиб кўпайтириш дейилади». Бироқ кўп ҳолларда бошланғич мактабда тушунчаларни келтириб чиқаришда остенсиив ва контекстуал таърифлардан фойдаланилади. Баъзида контекст ва кўрсатишни бирга қўшиб қаровчи таърифлар ҳам учрайди. Бундай таърифга II синф математика дарслигида келтирилган тўғри тўртбурчак таърифи мисол бўлади. Унда тўртбурчаклар чизилган (кўрсатилган) ва текст келтирилган: «Бу тўртбурчакларда ҳамма бурчаклар тўғри бурчаклардир». Расмлар остига бундай ёзилган: «Булар тўғри тўртбурчаклар».

Машқлар

1. Ушбу тушунчалар учун энг яқин жинс тушунчани кўрсатинг: 1) тўғри тўртбурчак; 2) кесма; 3) тоқ сон; 4) айлана.
2. Қайси ҳолларда ушбу даъво тўғри бўлади: « a тушунча b тушунчага нисбатан жинс тушунчадир: 1) a — кўпбурчак, b —

¹ «Генезис», яъни келиб чиқиш сўзидан.

² «Индукция» (яъни хусусий мулоҳазалардан умумий мулоҳазаларни келтириб чиқариш) сўзидан.

³ «Рекурсия», яъни қайтиш сўзидан.

учбурчак, 2) a — бурчак, b — ўткир бурчак, 3) a — нур, b — тўғри чизиқ; 4) a — ромб, b — квадрат?

3. Қуйида келтирилган таърифларда таърифланувчи тушунча, жинс тушунча ва тур жиҳатдан фарқни ажратинг: 1) Агар тўғри чизиқлар бир текисликда ётса ва кесишмаса, улар параллел дейилади. 2) Агар учбурчакнинг ақалли иккита томони тенг бўлса, бу учбурчак тенг ёили учбурчак дейилади. 3) Узгарувчининг тенгламани тўғри тегиликка айлантирувчи қийматни тенгламанинг илдизи дейилади. 4) Учбурчакнинг иккита томони ўрталарини туташтирувчи кесма унинг ўрта чизиғи дейилади.

4. Алгебра курсидан генетик ва индуктив таърифларга ми-
соллар келтиринг.

5. Бошланғич синфларда «уч хонали сон» тушунчаси қуйидагича киритилади: ўқувчиларга қуйидаги саволга жавоб бериш таклиф этилади: «Қуйидаги сонларнинг ҳар бирини ёзишда ҳаммаси бўлиб қанча рақамдан (белгидан) фойдаланилади: 582, 336, 400, 841, 804, 333, 565?» Кейин ўқитувчи хулоса чиқаради: «Булар уч хонали сонлардир».

Бу ҳолда уч хонали сон тушунчаси қандай таърифланган?

6. «Тўғри тўртбурчакнинг қарама-қарши томонлари» тушунчаси билан ўқувчилар бундай танишадилар: «Қизил чизиқлар билан тўғри тўртбурчакнинг иккита қарама-қарши томони, кўк чизиқлар билан эса унинг қолган иккита қарама-қарши томони белгиланган».

Агар дарсликда, текстдан ташқари, яна мос расм бўлса, бу тушунча қандай таърифланади?

7. I—IV синфлар математикасидаги қуйидаги тушунчалар қандай таърифланишини аниқланг: 1) математик ифода; 2) бўлиш; 3) кўпайтма; 4) тоқ сон; 5) периметр; 6) бир хонали сон; 7) икки хонали сон; 8) сантиметр.

4. Тушунчалар таърифига қўйиладиган талаблар

Ошкор таърифларнинг тўғрилигини баҳолаш учун тушунчаларни таърифлаш қондасини билиш зарур. Мактаб математика курсидаги таърифларнинг кўпчилигини жинс ва тур жиҳатдан фарқ орқали бериладиган таърифлар ташкил қилгани учун қуйида ана шу таърифлар қондалари ҳақида сўз юритилади.

Ҳаммадан олдин таърифланувчи ва таърифловчи тушунчалар ўлчовдош (мутаносиб) бўлиши зарур. Бу демак, улар ўз ичига олган предметлар мажмун бир хил бўлиши керак деган сўз. Масалан, «тўғри тўртбурчак» ва «ҳамма бурчакларни тўғри бурчаклар бўлган тўртбурчак» тушунчалари ўлчовдош тушунчалардир. Агар таърифловчи тушунчанинг ҳажми таърифланувчи тушунчанинг ҳажмини ўз ичига олса, у ҳолда жуда кенг таърифларнинг хатоси ҳақида сўз боради. Масалан, «Агар a ва b тўғри чизиқлар умумий нуқтага эга бўлмаса ёки устма-уст тушса, улар параллел дейилади» таърифи жуда кенг таърифдир, чунки уни айқаш тўғри чизиқлар ҳам қаноатлантиради.

Агар таърифловчи тушунчанинг ҳажми таърифланувчи тушунчанинг ҳажмига кирса, у ҳолда жуда тор таърифларнинг хатоси ҳақида гапириш ўринли бўлади. Масалан, «Агар a ва b тўғри чизиқлар умумий нуқтага эга бўлмаса, улар параллел дейилади» таърифи жуда тор таърифдир, чунки уни устма-уст тушувчи тўғри чизиқлар қа-ноатлантирмайди.



2-расм

Таърифлашнинг иккинчи қондаси нуқсонли доирани ман этади: тушунчани ўз-ўзи билан таърифлаш ёки ўзи шу тушунча билан таърифланадиган бошқа тушунча орқали таърифлаш мумкин эмас. Бошланғич математиканинг «кўпайтириш» ва «кўпайтма» каби тушунчаларини оламиз ва уларга қуйидагича таъриф берамиз.

Сонларни кўпайтириш деб унинг ёрдамида шу сонларнинг кўпайтмаси топиладиган амалга айтилади.

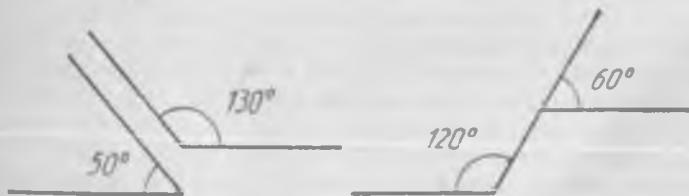
Сонларнинг кўпайтмаси деб уларни кўпайтириш натижасига айтилади.

Кўриб турибмизки, кўпайтириш кўпайтма тушуинчаси орқали, кўпайтма эса кўпайтириш тушунчаси орқали таърифланаяпти. Таърифлар «нуқсонли доира» ҳосил қилди. Натижада курс доирасида қурилган кетма-кет таърифлар занжири узилди.

Ушбу таърифда ҳам нуқсонли доира мавжуд: «Тенгламанинг ечими деб унинг ечими бўладиган сонга айтилади». Бу ерда «тенгламанинг ечими» тушунчаси, аслини олганда, тенгламанинг ечими орқали таърифланаяпти.

Тушунчани мантиқан тўғри таърифлашнинг учинчи муҳим талаби қуйидагидан иборат: таърифда таърифланувчи тушунчанинг ҳажмига тегишли бўлган объектларни бир қийматли ажратишга имкон берувчи барча хоссалар кўрсатилиши керак.

Масалан, «қўшни бурчаклар» тушунчасининг ушбу таърифини қараймиз: «Йиғиндиси 180° га тенг бўлган бурчаклар қўшни бурчаклар» дейилади. Мана шу таъриф бўйича нафақат 2-расмда кўрсатилган ва ҳақиқатан қўшни бурчаклар бўлган бурчакларни, балки 3-расмда тасвирланган бурчакларни ҳам кўриш қийин эмас. Нима учун бундай бўлди? Гап шундаки, қўшни бурчакларнинг келтирилган таърифида уларнинг фақат битта хоссаси, бурчаклар йиғиндисининг 180° га тенг бўлишлик хоссаси кўрсатилган, бироқ бу бошқа бурчаклар орасидан қўшни бурчакларни ажратиш учун етарли эмас.



3-расм

Тушунчани тўғри таърифлашнинг яна бир талаби унда ортиқча нарсаларнинг бўлмаслигидир. Бу шунин билдирадиган, тушунчанинг таърифида шу таърифга кирган хоссалардан келиб чиқувчи бошқа ортиқча хоссалар кўрсатилмаслигин керак.

Ушбу таърифни кўрайлик: «Тўғри тўртбурчак деб қарама-қарши томонлари тенг ва барча бурчаклари тўғри бурчаклар бўлган тўртбурчакка айтилади». Таърифга киритилган «тенг қарама-қарши томонларга эга бўлишлик» хоссаси «тўғри бурчакларга эга бўлишлик» хоссасидан келиб чиқшини кўрсатиш мумкин. Демак, тўғри тўртбурчакнинг бу таърифида ортиқча нарсалар бор ва уни қуйидагича тўғри таърифлаш мумкин: «Тўғри тўртбурчак деб ҳамма бурчаклари тўғри бурчаклар бўлган тўртбурчакка айтилади».

Шуни айтиш керакки, тушунчанинг ҳар қандай таърифида ихтиёрийлик элементи бор. Бу нарса, биринчидан, терминларни танлашда (барча томонлари тенг бўлган тўғри тўртбурчакни бошқача аташ ҳам мумкин), иккинчидан таърифга киритилган хоссаларни танлашда намоён бўлади. Аслида квадрат тушунчасини бундай таърифлаш мумкин: «Квадрат деб барча бурчаклари тўғри бурчаклар бўлган ромбга айтилади» — ёки бундай: «Квадрат деб барча томонлари тенг, бурчаклари эса тўғри бўлган параллелограммга айтилади». Айни бир тушунчани турлича таърифлаш мумкин, чунки бу тушунчанинг мазмунига кирувчи кўп сонли хоссалардан айримларигина таърифга киритилади.

Агар айни бир тушунчага, масалан, иккита турлича таъриф берилса, у ҳолда бу таърифлар тенг кучли бўлиши зарур. Бу шунин билдирадиган, бир таърифга киритилган хоссалардан бошқа таърифга асос бўлувчи хоссалар келиб чиқиши керак ва аксинча.

Бирор тушунчанинг мумкин бўлган таърифларидан биттасини танлашда нимага амал қилинади? Бунда назарияни бундан буён қуриш учун қайси таъриф соддароқ, табиироқ ёки мақсадга мувофиқ эканлигидан келиб чиқилади.

Агар бирор хосса таърифга киритилган бўлса, у ҳолда шу объектларнинг бу таърифга кирган хоссаларидан бошқа бирини мантиқан чиқариб ташлаш мумкин. Бу муҳим қонундан билишга доир масалаларни ечишда фойдаланилади. Агар A объект таърифланувчи тушунчанинг ҳажмига тегишли бўлса, у ҳолда у тушунчанинг таърифида кўрсатилган барча хоссаларга эга бўлади. Тескари даъво ҳам ўринли, яъни агар A объект термин билан аталувчи тушунчанинг таърифида кўрсатилган барча хоссаларга эга бўлиши маълум бўлса, у ҳолда A объектни ҳам шу термин билан аташ мумкин.

Мисол. Айлананинг диаметри таърифидан фойдаланиб, 4-расмда тасвирланган ҳоллардан қайси бирида CD кесма диаметр бўлишини аниқлаймиз.

Айлананинг диаметрини қуйидагича таърифлаймиз: айлананинг диаметри деб унинг марказидан ўтувчи ватарга айтилади. CD кесма диаметр бўлиши учун ушбу иккита шартнинг бир



4- расм

вақтда бажарилиши етарли: CD кесма айлананинг ватари бўлиши ва унинг марказидан ўтиши керак. Бу иккита шартни «а» ҳолдаги CD кесма қаноатлантиради, «б» ҳолда CD кесма — ватар, бироқ у айлана марказидан ўтмайди, «в» ҳолда CD кесма айлана марказидан ўтади, бироқ у ватар эмас.

Тушунчани мантиқан тўғри таърифлашнинг яна бир талаби қуйидагича: таърифланувчи объект мавжуд бўлиши зарур. Масалан, бундай таърифни қарайлик: «Ўтмас бурчакли учбурчак деб ҳамма бурчаклари ўтмас бурчаклар бўлган учбурчакка айтилади». Ҳамма бурчаклари ўтмас бурчаклар бўлган учбурчакнинг мавжуд эмаслигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Демак, мазкур таърифга аниқ ҳеч нарса мос келмайди, шунинг учун уни мантиқан тўғри деб ҳисоблаш мумкин эмас.

Математикада берилган таърифни қаноатлантирувчи объект мавжудми деган саволга жавоб сифатида, одатда таърифда гапирилаётган объектнинг мавжуд бўлиши мумкинлигини тасдиқловчи махсус теорема исбот қилиншини эслатиб ўтамиз. Геометрияда таърифни қаноатлантирувчи объектнинг мавжуд бўлиши, баъзида уни ясаш билан исботланади.

Машқлар

1. Тўғри бурчакли учбурчакка таъриф берниг ва унинг структурасини аниқланг.

2. Ўқувчи тўғри бурчакни томонлари ўзаро перпендикуляр бўлган бурчак сифатида, ўзаро перпендикуляр тўғри чизикларни эса кесишиш натижасида тўғри бурчаклар ҳосил қилувчи тўғри чизиклар сифатида таърифлади. Ўқувчи қандай хатога йўл қўйган? Бошланғич синф ўқувчиларини тўғри бурчак тушунчаси билан қандай таништириш мумкин?

3. Ўқувчи ўткир бурчакли учбурчак таърифига ўхшаш ушбу ўткир бурчакли тўртбурчак таърифини ёзди: «Ўткир бурчакли тўртбурчак деб ҳамма бурчаклари ўткир бўлган қавариқ тўртбурчакка айтилади». Бу таърифни тўғри деб ҳисоблаш мумкинми?

4. Бир ўқувчи тўғри тўртбурчак тушунчасини бундай таърифлади: «Тўғри тўртбурчак деб ҳамма бурчаклари тўғри бурчак-



5- расм

лар ва томонлари жуфт-жуфти билан тенг бўлган тўртбурчакка айтилади».

Иккинчи ўқувчи бундай деди: «Тўғри тўртбурчак деб ҳамма бурчаклари тўғри бурчаклар бўлган тўртбурчакка айтилади».

Ва ниҳоят, учинчи ўқувчи бундай таъриф берди: «Тўғри тўртбурчак деб қарама-қарши ётган томонлари тенг бўлган тўртбурчакка айтилади».

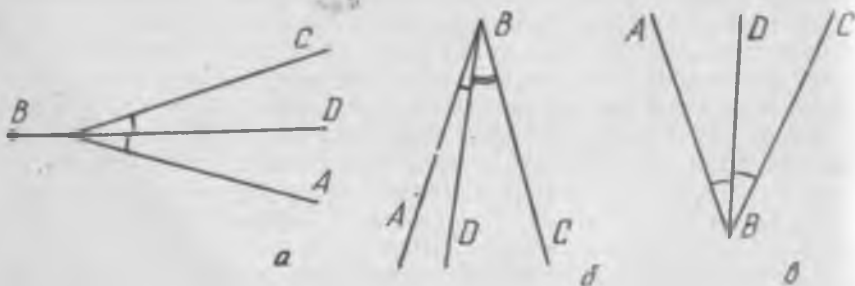
Ўқувчилардан қайси бирн тўғри тўртбурчакка тўғри таъриф берди? Бу тушунчани яна бирор бошқача шаклда таърифлаш мумкинми?

5. Математик тушунчаларнинг қуйида келтирилган таърифларидан қайсиларида хатолар бор? Агар иложи бўлса, уларни тузатинг.

1) Учбурчакнинг биссектрисаси деб учбурчак бурчагини тенг иккига бўлувчи тўғри чизиққа айтилади. 2) Доиранинг диаметри деб доира марказидан ўтувчи ватарга айтилади. 3) Айланага уринма деб айланага уринувчи тўғри чизиққа айтилади. 4) Ромб деб иккита қўшни томони тенг бўлган параллелограммга айтилади. 5) Қўшиш деб шундай амалга айтиладикн, бунинг натижасида сонлар қўшилади. 6) Тенг томонли учбурчак деб барча томонлари ва барча бурчаклари тенг учбурчакка айтилади. 7) Параллелограмм деб қарама-қарши ётган томонлари жуфт-жуфти билан параллел бўлган кўпбурчакка айтилади.

6. Тўғри тўртбурчакнинг (тўртбурчак орқали) таърифининг мантиқий структурасини таҳлил қилинг ва фигуралардан (5-расм) қайсилари тўғри тўртбурчак бўлишини аниқланг.

7. Бурчакларнинг биссектрисалари таърифини беринг ва расмлардан қайси бирида BD нур бурчак биссектрисаси бўлишини аниқланг (6-расм).



6- расм

8. «Тўғри тўртбурчак» ни жинс жиҳатдан тушунча сифатида кўрсатиб, «квадрат» тушунчасининг таърифини ифодаланг. Берилган таърифдан фойдаланиб: 1) фигура квадрат бўладиган; 2) фигура квадрат бўлмайдиган шартларни кўрсатинг.

9. Тўртбурчак тўғри тўртбурчак бўлиши учун қуйида келтирилган шарт етарлими: 1) у икки жуфт параллел томонларга эга; 2) унинг учта бурчаги тўғри бурчаклар; 3) унинг диагоналлари конгруэнт; 4) унинг икки томони параллел?

10. Бошланғич синфлар математика дарсликларидан фигура ва бошқа объектларни билишга доир масалаларга мисоллар келтиринг.

2-§. МАТЕМАТИК ЖУМЛАЛАР

5. Содда ва мураккаб жумлалар

Атроф дунёни била бориб, инсон объектлар орасидаги, объектлар ва уларнинг хоссалари орасидаги ва бошқа турли ўзаро боғланишларни аниқлайди. Тилда бу боғланишлар тушунчалардан ташкил топган жумлалар ёрдамида ифодаланади. Масалан: «Тенг томонли учбурчакнинг ҳамма бурчаклари тенг», «28 сони 7 га бўлинади»...

Ҳар бир математик жумла мазмуни ва мантиқий структураси билан характерланади. Бизнинг диққатимиз, асосан, жумланинг структурасига қаратилади.

Математикада содда ва мураккаб жумлалар фарқ қилинади. «28 сони 7 га бўлинади» жумла содда жумла. Масалан, қуйидаги жумлалар мураккаб жумлалардир:

1) 28 жуфт сон ва у 7 га бўлинади;

2) x сони 8 дан кичик ёки унга тенг;

3) агар учбурчак тенг ёнли бўлса, у ҳолда унинг асосидаги бурчаклари тенг;

4) 14 сони 4 га бўлинмайди.

Мураккаб жумла содда жумлалардан «ва», «ёки» сўзлари, «эмас (майди)» қўшимчаси ва бошқалар ёрдамида ҳосил қилинади. Бу сўзлар математикада мантиқий боғловчилар деб аталади.

Мураккаб жумлаларнинг мантиқ... структурасини аниқлаштириш бу:

1) мазкур мураккаб жумла қандай содда жумлалардан ҳосил қилинганлигини;

2) у қандай мантиқий боғловчилар ёрдамида ҳосил қилинганлигини билиш демакдир.

Масалан, «28 жуфт сон ва у 7 га бўлинади» жумланинг мантиқий структурасини кўриб чиқайлик. У иккита содда жумладан ташкил топган: A жумла — «28 жуфт сон» ва B жумла — «28 сони 7 га бўлинади». Улар «ва» мантиқий боғловчи ёрдамида битта мураккаб жумлага бирлаштирилган. Содда жумлаларнинг киритилган белгилашларидан фойдаланиб, мазкур

41458



7-расм

мураккаб жумла « A ва B » мантикий структура (форма) га эга дейиш мумкин.

Иккинчи жумла бошқача тузилган. Агар « x сони 8 дан кичик» жумлани A билан, « x сони 8 га тенг» жумлани B билан белгиласак, у ҳолда « x сони 8 дан кичик ёки унга тенг» жумла ҳақида у « A ёки B » структурага эга дейиш мумкин.

«Агар учбурчак тенг ёнли бўлса, у ҳолда унинг асосидаги бурчаклари тенг» жумла: «Агар A бўлса, у ҳолда B бўлади» структурага эга, бу ерда A ҳарфи орқали «учбурчак тенг ёнли» жумла, B ҳарфи орқали эса «учбурчакнинг асосидаги бурчаклари тенг» жумла белгиланган.

Охирги жумланинг структурасини очиш учун A орқали «14 сони 4 га бўлинади» жумлани белгилаймиз. У ҳолда «14 сони 4 га бўлинмайдн» жумла ҳақида у « A эмас» ёки « A экани нотўғри» формага эга дейиш мумкин.

Машқлар

1. Қуйидаги жумлалардан қайсилари содда ва қайсилари мураккаб жумлалар: 1) тенг ёнли ABC учбурчакда (7-расм) BD биссектриса медиана ва баландликдир; 2) тўғри бурчакли ABD учбурчакда гипотенузанинг квадрати катетлар квадратларининг йиғиндисига тенг; 3) ABC учбурчакнинг юзи AC асосининг BD баландликка кўпайтмасининг ярмига тенг; 4) агар ABC учбурчак тенг ёнли бўлса, у ҳолда унинг асосидаги бурчаклари тенг; 5) ABD учбурчакда BD катет AD катетдан узун ёки унга тенг?

2. Ҳар бир фикрнинг мантикий структурасини очинг: 1) 12 жуфт сон ва 6 га бўлинади; 2) агар бурчаклар вертикал бўлса, у ҳолда улар тенгдир; 3) $\sqrt{3}$ сони рационал ёки иррационал сондир; 4) ABC учбурчак тенг томонли учбурчак эмас; 5) агар сон бутун ва мусбат бўлса, у ҳолда у натурал сон бўлади.

3. Жумлаларни охирига етказинг ва уларнинг мантикий структураларини очинг: 1) учбурчакнинг ўрта чизиги асосга параллел ва ...; 2) агар $a \cdot b = 0$ бўлса, у ҳолда $a = 0$ ёки ...

4. Қуйидагича структурага эга бўлган математик жумлаларга мисоллар келтиринг: 1) A ва B ; 2) A ёки B ; 3) агар A бўлса, у ҳолда B бўлади.

6. Фикрлар. «ва», «ёки», «эмас [майди]» сўзларининг маъноси

Математик тушунчалар орасида турлича муносабатлар ўрнатувчи муҳокамалар ичида фикр ва фикрий формалар ажралиб туради.

Агар жумлага нисбатан у чинми ёки ёлгон саволи маънога эга бўлса, у ҳолда бу жумла фикр дейилади.

Масалан, «6 жуфт сон» жумла чин фикр, « $2+4=3^2$ » жумла эса ёлгон фикр.

Умуман, ҳар бир фикрга, агар у чин бўлса, Ч (чин) ва агар у ёлгон бўлса, Ё (ёлгон) қийматлардан бири берилadi. Ч ва Ё қийматлар фикрнинг чинлик қийматлари дейилadi. Агар фикр содда бўлса, у ҳолда унинг чинлик қиймати маълум қийматларга суянган ҳолда мазмунига қараб аниқланади.

Агар фикр мураккаб бўлса нима қилиш керак? Бундай фикрнинг чинлик қиймати қандай аниқланади? Бу ерда фикрнинг формаси (шакли) ёрдамга келади.

Агар иккала A ва B фикр чин бўлса, у ҳолда « A ва B » кўринишдаги фикр чин ҳисобланади. Агар фикрлардан ақалли биттаси ёлгон бўлса у ҳолда « A ва B » кўринишдаги фикр ёлгон ҳисобланади.

Мисол. Ушбу фикрнинг чин ёки ёлгон эканлигини аниқлаймиз: 1) 102 жуфт сон ва у 9 га бўлинади; 2) $3 < 6 < 7$.

1-ҳолда мураккаб фикр « A ва B » шаклга эга, бунда A — «102 жуфт сон», B — «102 сони 9 га бўлинади». A фикр чин, B фикр эса ёлгон (102 сони 9 га бўлинмайди, чунки бу соннинг ёзувидаги рақамлар йиғиндиси 9 га бўлинмайди). Демак, бутун жумла ёлгон эканини кўриш осон.

2-ҳолда ҳам биз мураккаб жумла « $3 < 6$ ва $6 < 7$ га» эгамиз. У чин, чунки у иккита содда чин фикрдан «ва» боғловчи ёрдамида ҳосил қилинган.

Энди « A ёки B » кўринишдаги фикрга мурожаат этамиз. A ва B фикрлардан ақалли биттаси чин бўлса, у ҳолда « A ёки B » кўринишдаги фикр чин ҳисобланади. A ва B фикрларнинг иккаласи ҳам ёлгон бўлса, у ҳолда « A ёки B » фикр ёлгон ҳисобланади.

Мисол. Қуйндаги фикрларнинг чин ёки ёлгон эканини аниқлаймиз:

- 1) 102 жуфт сон ёки у 3 га бўлинади;
- 2) $3 \leq 7$;
- 3) $5 \leq 3$.

1-ҳолда мураккаб фикр « A ёки B » шаклга эга, бунда A — «102 жуфт сон», B — «102 сони 3 га бўлинади».

A ва B фикрлар чин эканини кўриб турибмиз, демак, мазкур мураккаб фикр чин экан.

2-ҳолда ҳам « A ёки B » шаклдаги мураккаб фикрга эгамиз, бунда A — « $3 < 7$ », B — « $3 = 7$ ». A фикр чин бўлгани учун $3 \leq 7$ мураккаб фикр чин бўлади.

$5 \leq 3$ фикр (3-ҳол) — ёлгон фикр, чунки у иккита ёлгон фикр: $5 < 3$, $5 = 3$ нинг «ёки» мантиқий боғловчи билан бирлаштирилишидан ҳосил қилинади.

Математикада кўпинча бирор бир нарсани инкор этадиган фикрларни тузишга тўғри келади. Масалан, «12 туб сон» фикр берилган бўлсин. Бу ёлгон фикр, чунки 12 сони ўзига ва 1 га бўлинибгина қолмай, балки у бошқа сонларга ҳам бўлинади. Унинг инкорини тузамиз: «12 туб сон экани ёлгон». Чин фикр

ҳосил қилдик. Айнан шу фикрнинг инкорини бошқача тузиш мумкин: «12 туб сон эмас». Бу ҳам чин фикр.

А фикрнинг инкори $\bar{A}$ билан белгиланади, $\bar{A}$ белги бундай ўқилади: « A эмас» ёки « A экани ёлғон».

Умуман, A фикрнинг инкори деб A фикр ёлғон бўлганда чин, A фикр чин бўлганда ёлғон бўлувчи $\bar{A}$ фикрга айтилади.

Шундай қилиб, содда фикрлардан «ва», «ёки», «эмас» сўзлари ёрдамида ташкил топган мураккаб фикрларнинг чинлик қиймати уларни ташкил этувчи содда фикрларнинг чинлик қийматига боғлиқ.

A	B	A ва B	A ёки B	A эмас
Ч	Ч	Ч	Ч	Ё
Ч	Ё	Ё	Ч	Ч
Ё	Ч	Ё	Ч	Ч
Ё	Ё	Ё	Ё	Ч

Машқлар

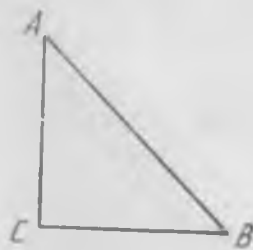
1. Қуйидаги жумлалар, орасидан фикрларни топинг ва уларнинг чинлик қийматини аниқланг: 1) 8 бутун сон; 2) 42 ни 5 га бўлганда 3 қолдиқ қолади; 3) $x < 3$; 4) ҳар қандай тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари тенг; 5) $34 \cdot 2 - 17 = 51$.

2. Ушбу фикрлардан қайсилари чин: 1) 6 сони 2 га ва 3 га бўлинади; 2) 123 сони 3 га ва 9 га бўлинади; 3) ABC учбурчак (8- расм) тўғри бурчакли ёки тенг томонли учбурчак; 4) ABC учбурчакнинг (8- расм) бурчакларидан бири 60° га тенг; 5) $\frac{2}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{4}$?

3. Қуйидаги фикрларнинг инкорини тузинг: 1) 132 сони 9 га бўлинади; 2) $5 < 4$; 3) 3,2 — натурал сон; 4) ABC учбурчак (8- расм) — тенг томонли.

4. A чин фикр экани маълум. Фақат шуни билган ҳолда қуйидаги кўринишдаги фикрларнинг чинлик қийматларини аниқлаш мумкинми: 1) A ва B ; 2) A ёки B ?

5. A ёлғон фикр экани маълум. Фақат шуни билган ҳолда қуйидаги кўринишдаги фикрларнинг чинлик қийматларини аниқлаш мумкинми: 1) A ва B ; 2) A ёки B ?



8- расм

6. Қуйидаги фикрлар жуфти бир-бирининг инкори бўла оладими: 1) 253 туб сон. 253 мураккаб сон; 2) ABC учбурчак (8- расм) тўғри бурчакли ва тенг томонли. ABC учбурчак (8- расм) тўғри бурчакли эмас ёки тенг томонли эмас.

7. Агар: 1) « $\bar{A}$ ва $\bar{B}$ » — чин фикр; 2) « $\bar{A}$ ёки $\bar{B}$ » — чин фикр экани маълум бўлса, у ҳолда A фикрнинг чинлик қийматини аниқлаш мумкинми?

7. Фикрий формалар

Математикада бир ёки бир неча ўзгарувчини ўз ичига олувчи жумлалар кўп учрайди. Масалан: $x < 3$; $x + y = 8$. Бу жумлалар фикр эмас, чунки уларга нисбатан улар чинми ёки ёлгонми деган савол маънога эга эмас. Лекин ўзгарувчиларнинг қийматларини ўрнига қўйилганда бу жумлалар чин (ёки ёлгон) фикрга айланади. Масалан, $x < 3$ жумлага $x = 2$ қўйилса, $2 < 3$ чин фикр ҳосил бўлади, $x = 4$ қўйилса, $4 < 3$ ёлгон фикр ҳосил бўлади.

Бундай кўринишдаги жумлалар **фикрий формалар** деб аталади. Ҳар бир фикрий форма аynи бир форма (шакл)даги фикрларни келтириб чиқаради. Масалан, $x < 3$ жумла $1 < 3$, $2 < 3$, $5 < 3$, $10 < 3$ ва Ҳ. к. кўринишдаги фикрларни олишга имкон беради.

$x < 3$ фикрий форма бир ўзгарувчига эга. Бундай фикрий формалар бир ўринли фикрий формалар дейилади. Икки ўзгарувчили $x + y = 8$ жумла икки ўринли фикрий формадир.

Шундай қилиб, **фикрий форма** — бу ўзгарувчиларнинг ўрнига уларнинг конкрет қийматларини қўйганда фикрга айланувчи бир ёки бир неча ўзгарувчили жумладир.

Фикрий форма тушунчасини бизга маълум ушбу тушунчаларнинг умумлашмаси деб қараш мумкин: бир, икки ва Ҳ. к. ўзгарувчили тенгламалар, ўзгарувчили тенгсизликлар ва бошқалар.

Фикрий формаларга нисбатан бундай савол туғилади: ўзгарувчиларнинг қандай қийматларида бу форма чин фикрга айланади? Агар фикрий форма тенглама (ёки ўзгарувчили тенгсизлик) бўлса, у ҳолда бу саволга жавоб бериш учун тенгламани (ёки тенгсизликни) ечиш керак.

Мисол. x ўзгарувчининг қандай қийматида $3x - 4 = 5$ фикрий форма чин фикрга айланишини топамиз. Бундан $3x = 9$, $x = 3$ га эга бўламиз.

$3x - 4 = 5$ тенгламани ечамиз. Демак, берилган тенглама $x = 3$ бўлганда $3 \cdot 3 - 4 = 5$ чин фикрга айланади.

Фикрлар каби фикрий формалар ҳам содда ва мураккаб бўлади. Мураккаб фикрий формалар содда фикрий формалардан «ва», «ёки» мантиқий боғловчилар, «эмас» сўзи ёрдамида ташкил қилинади.

Машқлар

1. Қуйидаги жумлалар орасидан фикрий формаларни кўрсатинг: 1) $x^2 - 5x + 4 = 0$; 2) $2x - 3 < 7$; 3) $2 \cdot 4 - 3 < 7$; 4) Исталган сон $2x - 3 < 7$ тенгсизлигининг ечими бўлади; 5) баъзи сонлар $2x - 3 < 7$ тенгсизлигининг ечими бўлади.

2. $x^3 - 5x = 0$ фикрий формадан 3 та фикр ҳосил қилинган. x нинг қандай қийматларида берилган фикрий форма чин фикрга айланади?

3. y ўзгарувчининг қандай қийматларида қуйидаги фикрий формалар чин фикрга айланишини топинг: 1) $2y - 5 = 7 - y$; 2) $2y - 3 < 7$.

4. Ушбу сонлар берилган: 21, 52, 409, 248, 30, 2094, 322, 22, 371, 142, 2, 222, 14, 20.

1) Ёзувида иккита рақам ва 2 рақами бўлган барча сонларни кўчириб ёзинг. 2) Ёзувида иккита рақам ёки 2 рақами бўлган барча сонларни кўчириб ёзинг.

8. «Барча» ва «баъзи» сўзларининг маъноси

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 сонлар ҳақида қуйидагиларни айтиш мумкин:

а) берилган **барча** сонлар бир хонали сонлардир;

б) берилган сонлардан **баъзилари** жуфт сонлардир.

Бу жумлаларга нисбатан уларнинг чин ёки ёлғонлиги туғрисида гапириш мумкин бўлгани учун ҳосил қилинган бу жумлалар фикрлар бўлади.

Бундай жумлалар қандай қурилганлигини аниқлаймиз.

Агар «а» жумладан «барча» сўзини олиб ташласак, «Берилган сонлар бир хонали сонлардир» деган жумлани ҳосил қиламиз. Бу фикрий формадир (жумлада ўзгарувчи ошкор кўринишда қатнашмаса ҳам), чунки «Бу жумла чинми ёки ёлғонми?» саволи маънога эга эмас. Демак, берилган фикрий формада қатнашаётган «барча» сўзи уни фикрга айлантиради.

«б» жумла ҳам шунга ўхшаш тузилган, фақат «Берилган сонлар жуфт сонлардир» фикрий формани «баъзи» («баъзилари») сўзи фикрга айлантиради.

«Барча» ва «баъзи» сўзлари **кванторлар** деб айтилади. «Квантор» сўзи латинча бўлиб, «қанча» маъносини билдиради, яъни квантор у ёки бу жумлада қанча (барча ёки баъзи) объект ҳақида гап бораётганини кўрсатади.

Умумийлик ва мавжудлик кванторлари фарқ қилинади.

«Ихтиёрий», «ҳар қандай», «ҳар бир», «барча (ҳамма)» сўзлари умумийлик кванторларидир.

«Мавжуд», «баъзи» (айрим), «топилади» «ақалли (камида) битта» сўзлари мавжудлик кванторларидир.

Шундай қилиб, агар бир ўринли фикрий формада бирор-бир квантор (яъни «ихтиёрий», «ҳар қандай», «мавжуд» ва ҳоказо) қатнашса, у ҳолда фикр ҳосил бўлади. Демак, бир ўринли фикрий формадан фикрни фақат фикрий формадаги ўзгарувчига конкрет қиймат бериш билангина эмас, балки фикрий формага квантор (умумийлик ёки мавжудлик квантори) киритиш билан ҳам ҳосил қилиш мумкин.

Қўпгина математик жумлалар кванторли фикр шаклига эга, масалан: **барча** квадратлар туғри тўртбурчаклардир;

баъзи жуфт сонлар 4 га бўлинади;

ихтиёрий туғри тўртбурчакда ички бурчаклар йингиндисини 360° га тенг.

Қўп ҳолларда фикрлардаги кванторлар тушириб қолдирилади; масалан, сонларни қўшишнинг ўрин алмаштириш қонуни

$a+b=b+a$ тенглик кўринишида ёзиладн, у ихтиёрий a ва b сонлар учун $a+b=b+a$ тенгликнинг ўринли эканлигини, яъни қўшишнинг ўрин алмаштириш қонунн умумийлик квантори қатнашган фикр эканини билдирадн.

Кванторли фикрнинг чинлик қиймати қандай аниқланади? Ушбу фикрларни кўриб чиқамиз:

1. Ихтиёрий 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 сонлар $x+2>x$ тенгсизликнинг ечими бўлади.

2. Кетма-кет келувчи ихтиёрий учта натурал соннинг йиғиндис 3 га бўлинади.

3. Ихтиёрий тўғри тўртбурчак квадратдир.

Берилган фикрлар қандай тузилган? Уларнинг ҳаммаси «ихтиёрий» сўзи билан ифодаланувчи умумийлик кванторига эга. Бу фикрлар чинми ёки ёлгонми?

Биринчи жумлага эътибор берайлик. Ихтиёрий 0, 1, 2,..., 9 сонлар $x+2>x$ тенгсизликнинг ечими бўлишига ишонч ҳосил қилиш учун қуйидаги ҳолларни кўриб чиқамиз:

$x=0$ да $0+2>0$ бўлади, яъни чин сонли тенгсизлик.

$x=1$ да $1+2>1$ бўлади, яъни чин сонли тенгсизлик.

$x=2$ да $2+2>2$ бўлади, яъни чин сонли тенгсизлик...

$x=9$ да $9+2>9$ бўлади, яъни чин сонли тенгсизлик.

Ҳақиқатан ҳам, 0, 1, 2,..., 9 тўпламдаги ихтиёрий сон $x+2>x$ тенгсизликнинг ечими бўлади, яъни «ихтиёрий 0, 1, 2,..., 9 сонлар $x+2>x$ тенгсизликнинг ечими бўлади» фикр — чин фикр. Биз бунн қандай аниқладик? Барча хусусий ва мумкин бўлган ҳолларни қараб чиқиш билан исботладик. Исботлашнинг биз фойдаланган ушбу усули тўла индукция деб аталади.

Энди иккинчи жумлага эътибор берайлик. Исботлашнинг биринчи жумла учун қўлланилган усулини бу ерда қўллаб бўлмайди, чунки биз барча ҳолларни кўриб чиқиш имконига эга эмасмиз. Исботлашнинг бошқа усули керак.

Кетма-кет келувчи натурал сонларни x , $x+1$, $x+2$ лар орқали белгилаймиз ва ихтиёрий x да $x+(x+1)+(x+2)$ йиғиндис 3 га бўлинишини исботлаймиз.

$x+(x+1)+(x+2)$ ифодани $x+x+1+x+2=3x+3=3(x+1)$ кўринишда ёзиш мумкин. 3 сони 3 га бўлингани учун $3(x+1)$ кўпайтма ҳам 3 га бўлинади. Демак, кетма-кет келувчи ихтиёрий учта натурал соннинг йиғиндиси ҳам 3 га бўлинади.

Учинчи жумлани кўриб чиқамиз. Бу — ёлгон фикр. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун квадрат бўлмайдиган тўғри тўртбурчак чиқиш етарли. Биз бу фикрнинг нотўғрилигини контрмисол келтириш билан исботладик.

Хулоса чиқарамиз. Биз биринчи ва иккинчи жумдалар чин фикрлар эканини аниқладик. Бунн биз исботлаш йўли билан бажардик. Учинчи жумла ёлгон фикр. Биз бунга контрмисол келтириш билан ишонч ҳосил қилдик.

Умуман, умумийлик квантори қатнашган фикрнинг чинлиги исботлаш йўли билан аниқланади. Бундай фикрларнинг ёлгонлигига ишонч ҳосил қилиш (уларни рад этиш) учун контрмисол келтириш етарли.

Мавжудлик квантори қатнашган фикрнинг чинлик қиймати қандай топилишини аниқлаймиз. Ушбу фикрларни кўриб чиқамиз:

1. 3 га каррали натурал сонлар мавжуд.

2. Тўғри бурчакли тенг томонли учбурчаклар мавжуд.

Биринчи фикр чин фикр. Бу хулосани асослаш учун мисол келтириш етарли. Масалан, 9 натурал сон ва у 3 га бўлинади.

Иккинчи фикр ёлғон. Ҳақиқатан ҳам, тўғри бурчакли учбурчакнинг бир бурчаги 90° бўлиши керак, тенг томонли учбурчакнинг ҳамма бурчаклари катталиклари 60° га тенг. Демак, тўғри бурчакли учбурчаклар орасида тенг томонли учбурчаклар йўқ.

Шундай қилиб, иккинчи ҳолдаги хулосани асослаш учун бизга исботлаш ўтказишга тўғри келди.

Умуман, мавжудлик квантори қатнашган фикрнинг чинлиги конкрет мисоллар келтириш билан аниқланади. Бундай фикрнинг ёлғонлигига ишонч ҳосил қилиш учун исботлаш ўтказиш зарур.

Бошланғич математика курсида кванторли фикрлар кўп учрайди. Аслини олганда умумий характердаги барча фикрлар умумийлик квантори қатнашган фикрлар бўлади. Қуйидаги фикрлар худди шундай фикрлардир:

$$\begin{array}{lll} a + b = b + a & 0 + a = a & ab = ba \\ 0 \cdot a = 0 & 1 \cdot a = a & a : 1 = a \end{array}$$

ва бошқалар.

Ҳақиқатан ҳам, ихтиёрий b ва a натурал сонлар учун қўшиш ва кўпайтиришнинг ўрин алмаштириш хоссаси ўринли: ихтиёрий a натурал сон учун $0 + a = a$, $0 \cdot a = 0$ ва бошқа тенгликлар тўғри.

Машқлар

1. Қуйидаги жумлаларнинг структураларини таҳлил қилинг: а) баъзи тоқ сонлар 9 га бўлинади; 2) ҳар қандай тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари тенг; 3) биринчи ўнликдаги сонлардан ақалли биттаси мураккаб сон; 4) кетма-кет келувчи ихтиёрий иккита натурал соннинг кўпайтмаси 2 га каррали.

2. 1-машқда берилган жумлалардан қайсыларининг чинлигини исботлаш ўтказиш билан аниқлаш мумкин?

3. Қуйидаги фикрларни исботланг ёки рад этинг:

1) ихтиёрий тўртбурчакнинг диагоналлари тенг; 2) баъзан тоқ сонлар 4 га бўлинади; 3) 7 га каррали жуфт сонлар мавжуд; 4) барча тўғри тўртбурчаклар кўпбурчаклардир.

4. Фикрларнинг чинлигини тўла индукциядан фойдаланиб, исботланг: 1) барча бир хонали натурал сонлар $2 \cdot (x + 3) = 6 + 2x$ тенгламанинг ечими бўлади; 2) 4 дан катта, лекин 20 дан кичик ҳар бир жуфт натурал сонни иккита туб соннинг йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкин.

5. Қуйидаги фикрларнинг қайсилари чин фикрлар: 1) ҳар қандай квадрат параллелограмм бўлади; 2) ҳар қандай ромб квадрат бўлади; 3) ҳар қандай ромбнинг диагоналлари кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади.

6. Қуйида келтирилган жумлаларнинг қайсларини чин фикрга айлантириш учун уларга «ҳар қандай» ёки «мавжуд» сўзини қўшиш мумкин: 1) ромбнинг диагоналлари унинг бурчакларини тенг иккига бўлади; 2) параллелограммнинг қарама-қарши ётган бурчаклари йиғиндиси 180° га тенг; 3) тўртбурчакнинг диагоналлари ўзаро перпендикулярдир?

9. Кванторларни ўз ичига олган фикрларнинг инкорларини яшаш қоидалари

Ушбу фикрни қараймиз: «Барча натурал сонлар 3 га бўлинади». Бу ёлғон фикр эканига контрмисол келтириш билан осон ишонч ҳосил қилиш мумкин. Масалан, 17 натурал сон 3 га бўлинмайди,

Берилган фикрнинг инкорини тузамиз (ясаймиз). Бундай дейиш мумкин: «Барча натурал сонларнинг 3 га бўлиниши ёлғон». Бу фикр чин фикр ва у мазмунига кўра «3 га бўлинмайдиган натурал сонлар мавжуд» деган фикр билан бир хил.

Шундай қилиб, «Барча натурал сонлар 3 га бўлинади» фикрнинг инкорини икки усул билан яшаш мумкин экан:

1) берилган жумланинг охирига «бўлишн (экани) ёлғон» сўзини қўшиш билан;

2) умумийлик кванторини мавжудлик кванторига алмаштириш ҳамда квантордан кейин келувчи сўзни унинг инкорига айлантириш билан.

«Барча натурал сонлар 3 га бўлинмайди» жумла «Барча натурал сонлар 3 га бўлинади» жумланинг инкори эмас эканини эслатиб ўтамиз, чунки бу жумла ҳам берилган жумла каби ёлғон фикр бўлади.

Энди мавжудлик квантори қатнашган ушбу жумлани оламиз: «Баъзи тоқ сонлар 4 га бўлинади». Бу ёлғон фикр: барча тоқ сонлар иккига бўлинмайди ва демак, 4 га ҳам бўлинмайди.

Берилган фикрнинг инкорини ясаймиз. Бундай дейиш мумкин: «Баъзи тоқ сонларнинг 4 га бўлиниши ёлғон». Бу жумла чин жумла ва мазмунига кўра у бундай жумлага мос келади: «Барча тоқ сонлар 4 га бўлинмайди».

Шундай қилиб, «Баъзи тоқ сонлар 4 га бўлинади» жумланинг инкорини икки усул билан яшаш мумкин:

1) берилган жумланинг охирига «экани (бўлиши) ёлғон» сўзини қўшиш билан;

2) мавжудлик кванторини умумийлик кванторига алмаштириш ҳамда квантордан кейин келувчи жумлани унинг инкорига алмаштириш билан.

Фикрларнинг инкорларини яшада биз исботсиз қабул қилинган ушбу қоидадан фойдаландик.

Кванторли (умумийлик ёки мавжудлик) фикрнинг инкори икки хил усул билан ясалиши мумкин:

1) берилган фикрнинг охирига «экани (бўлиши) ёлғон» сўзларини қўшиш билан;

2) умумийлик (мавжудлик) кванторини мавжудлик (умумийлик) кванториға алмаштириш ҳамда квантордан кейин келувчи жумлани унинг инкорига алмаштириш билан.

Келтирилган бу қоида кванторли фикрнинг инкорини тўғри ясаш учун етарли эканини эслатиб ўтамиз. Берилган фикрнинг инкори яна бошқача шаклда ҳам ясалиши мумкин. Бунда фақат ушбу талабга риоя қилиш муҳим: агар берилган фикр ёлғон бўлса, у ҳолда унинг инкори чин фикр бўлиши керак ва аксинча.

Машқлар

1. Қуйидаги жумлалар жуфтлари бир-бирининг инкори бўлиш-бўлмаслигини аниқланг:

1) 289 сонни 9 га каррали, 289 сонни 9 га каррали эмас;

2) ихтиёрий натурал сон 5 га бўлинади. Ихтиёрий натурал сон 5 га бўлинмайди;

3) ҳар қандай кўпбурчак тўртбурчак бўлади. Тўртбурчак бўлмаган кўпбурчаклар мавжуд;

4) баъзи натурал сонлар бирдан кичик. Ҳар бир натурал сон бирдан кичик эмас.

2. Қуйидаги фикрлар ёлғон фикрлар эканини исботланг ва уларнинг инкорини икки хил усул билан ясанг:

1) квадратнинг ҳар қандай хоссаси тўғри тўртбурчак учун ўринли;

2) ихтиёрий натурал сон $2x-3=1$ тенгламанинг ечими бўлади;

3) $x^2=-1$ тенгламанинг ечими бўлган натурал сон мавжуд.

3. Қуйида келтирилган фикрларнинг қайсылари «Ҳар қандай жуфт сон 3 га бўлинади» жумланинг инкори бўлади:

1) ҳар қандай жуфт сон 3 га бўлинмайди;

2) ҳар қандай жуфт соннинг 3 га бўлиниши нотўғри;

3) 3 га бўлинмайдиган жуфт сон мавжуд;

4) баъзи жуфт сонлар 3 га бўлинади;

5) ҳар қандай сон ҳам 3 га бўлинавермайди?

4. Қуйидаги жумлалар орасидан « $2x+6<2$ тенгсизлиkning ечими бўлган натурал сон мавжуд» фикрнинг инкорини топинг:

1) барча натурал сонлар $2x+6<2$ тенгсизлиkning ечими бўлмайди;

2) $2x+6<2$ тенгсизлиkning ечими бўлмаган натурал сон мавжуд;

3) $2x+6<2$ тенгсизлиkning ечими бўлган натурал соннинг мавжудлиги нотўғри;

4) $2x+6<2$ тенгсизлиkning ечими бўлган натурал сон мавжуд эмас.

5. Ҳуқуқи $3+5=8$, $9+5=14$, $11+17=28$ тенгликлари ҳосил қилиб, қуйидагича ҳулоса чиқаради: ихтиёрий иккита тоқ соннинг йиғиндиси жуфт сон бўлади. Бу ҳулоса тўғрими? Йиғиндиси тоқ сон бўладиган иккита тоқ сон ўйлаб топа оласизми? Сўзнинг жавобингиз бундай иккита тоқ сон мавжуд эмаслигини исботлай оладими?

10. Жумлалар орасидаги келиб чиқишлик ва тенг кучлилиқ муносабатлари

Ҳар қандай мулоҳаза «демак», «берилган жумладан келиб чиқадики», «бундан келиб чиқади» сўзларисиз амалга ошмайди. Бу сўзлар қандай маъноларга эга?

Иккита жумла оламиз: A жумла — « x сони 4 га каррали» ва B жумла — « x сони 2 га каррали». Улар бир-бири билан боғланган: 4 га каррали ихтиёрий сон 2 га каррали бўлади, ёки бошқача айтганда: соннинг 4 га каррали эканидан унинг 2 га каррали экани келиб чиқади.

Агар ҳар сафар A жумла чин бўлганда B жумла ҳам чин бўлса, A жумладан B жумла келиб чиқади дейилади.

A дан B келиб чиқади», жумлани $\Rightarrow$ белгидан фойдаланиб, бундай ёзиш мумкин: $A \Rightarrow B$. $\Rightarrow$ белги — бу жумлалар орасидаги келиб чиқишлиқ муносабати.

$A \Rightarrow B$ ёзув турлича ўқилади: а) A дан B келиб чиқади; б) B A дан келиб чиқади; в) агар A бўлса, у ҳолда B бўлади; г) A бўлади, демак, B бўлади; д) ҳар қандай A B ҳамдир.

Масалан, « x сони 4 га каррали эканидан унинг 2 га каррали экани келиб чиқади» жумлани яна бундай ёзиш ҳам мумкин: а) 4 га бўлинувчи ҳар қандай сон 2 га ҳам бўлинади; б) агар сон 4 га бўлинса, у ҳолда у 2 га ҳам бўлинади; в) x сони 4 га бўлинади. Демак, у 2 га ҳам бўлинади.

Ушбу жумлалар берилган бўлсин: A — «учбурчак тенг ёнли» ва B — «Учбурчакнинг асосидаги бурчаклари тенг». Улар ўзаро қандай боғланганлигини аниқлаймиз.

Агар учбурчак тенг ёнли бўлса, у ҳолда унинг асосидаги бурчаклари тенг (яъни $A \Rightarrow B$ деб тасдиқлаш мумкин) экани ва аксинча: агар учбурчакнинг асосидаги бурчаклар тенг бўлса, у ҳолда бу учбурчак тенг ёнли учбурчак (яъни $B \Rightarrow A$) бўлиши геометрия курсида исботланган.

Агар A жумладан B жумла келиб чиқса, B жумладан эса A жумла келиб чиқса, у ҳолда A ва B жумлалар тенг кучли жумлалар дейилади.

Бу таърифга кўра «Учбурчак тенг ёнли» ва «Учбурчакнинг асосидаги бурчаклари тенг» жумлалар тенг кучли жумлалар бўлади.

« A B га тенг кучли» жумлани $\Leftrightarrow$ белгидан фойдаланиб, бундай ёзилади: $A \Leftrightarrow B$.

$A \Leftrightarrow B$ ёзув турлича ўқилади: а) A B га тенг кучли; B ва фақат B бўлганда A бўлади; в) Агар B ва фақат B бўлса, A бўлади.

Мисол. Ушбу жумлалар берилган: A — « X ва Y бурчаклар вертикал бурчаклар», B — « X ва Y бурчаклар тенг». Мазкур жумлалар қандай муносабатда бўлишнини аниқлаймиз.

Геометрияда исботланганига кўра, агар бурчаклар вертикал бўлса, у ҳолда улар тенгдир, яъни $A \Rightarrow B$, лекин $B \Rightarrow A$ келиб чиқишлик эса бажарилмайди. Демак, мазкур жумлалар тенг кучли жумлалар эмас, улар фақат келиб чиқишлик муносаба-тида экан, бунда A дан B келиб чиқади.

Машқлар

1. Қуйида келтирилган A ва B жумлалар келиб чиқишлик муносабатида бўлиш-бўлмаслигини аниқланг: 1) A — « x сони 3 га каррали», B — « x сони 9 га каррали»; 2) A — « F тўртбурчакнинг диагоналлари тенг», B — « F тўртбурчак тўғри тўртбурчакдир»; 3) A — « x жуфт сон», B — « x 5 га каррали сон», 4) A — « F учбурчак тўғри бурчакли учбурчакдир», B — « F учбурчак тенг ёнли учбурчакдир».

2. «Демак» сўзи тўғри қўлланилганми: 1) a — натурал сон, демак, $15 \cdot a$ ҳам натурал сон; 2) $15 \cdot a$ — натурал сон, демак, a ҳам натурал сон?

3. $a > 2$ экани маълум. Бундан қуйидагилар келиб чиқадими: 1) $a - 2$ — мусбат сон; 2) $a - 4$ — мусбат сон; 3) $a - 1$ — мусбат сон?

4. Агар A ва B жумлалар қуйидагича бўлса, улар тенг кучли жумлалар бўладими: 1) A — « x сони 3 га бўлинади», B — « x сонининг рақамлари йиғиндиси 3 га бўлинади». 2) A — «Йиғиндининг ҳар бир қўшилувчиси 4 га бўлинади», B — «Йиғинди 4 га бўлинади?»

5. «ва» ёки «ёки» боғловчиларни шундай қўйингки, натижада қуйидаги жумлалар чин жумлалар бўлсин: 1) $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \dots b = 0$; 2) $a \cdot b \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \dots b \neq 0$.

6. Қуйида келтирилган фикрлар орасидан чин фикрларни кўрсатинг ва уларни «Агар ... бўлса, у ҳолда ... бўлади» кўри-нишида ифодаланг:

1) тўғри бурчакдан кичик ҳар қандай бурчак ўткир бурчакдир; 2) ўтмас бурчакдан кичик ҳар қандай бурчак ўткир бурчакдир; 3) ҳар қандай ўткир бурчак ёйиқ бурчакдан кичик-дир.

7. Қуйидаги фикрларнинг чин ёки ёлғонлигини аниқланг:

1) $x > 2 \Rightarrow x \neq 2$; 2) $x < 3 \Rightarrow x \neq 2$; 3) $x \neq 2 \Rightarrow x < 2$; 4) $x \neq 2 \Rightarrow x > 2$ ёки $x < 2$.

11. Зарур ва етарли шартлар

Жумлалар орасидаги келиб чиқишлик муносабати математикада кўп қўлланиладиган «зарур» ва «етарли» сўзларининг маъносини аниқлаштришга имкон беради.

Агар A жумладан B жумла келиб чиқса, у ҳолда B A учун зарур шарт, A эса B учун етарли шарт дейилади.

Бошқача сўз билан айтганда, B жумла A жумладан мантиқан келиб чиқса, B жумла A учун зарур шарт дейилади. Агар A жумладан B жумла келиб чиқса, A жумла B учун етарли шарт дейилади.

$A \Rightarrow B$ B жумла A учун зарур шарт A жумла B учун етарли шарт

Агар A ва B жумлалар тенг кучли жумлалар бўлса, у ҳолда A жумла B учун зарур ва етарли шарт дейилади ва аксинча.

1-мисол. Илгари биз A — « X ва Y бурчаклар вертикал бурчаклар» жумладан B — « X ва Y бурчаклар тенг» жумла келиб чиқишини аниқлаган эдик. Шунинг учун юқорида берилган таърифга кўра бурчакларнинг тенглиги бурчакларнинг вертикал бўлиши учун зарур шарт, бурчакларнинг вертикал бўлиши эса уларнинг тенг бўлиши учун етарли шарт дейиш мумкин. Шунга кўра, «Агар бурчаклар вертикал бўлса, у ҳолда улар тенг» жумлани «зарур» ва «етарли» сўзларидан фойдаланиб, бошқача ифодалаш мумкин:

1) Бурчаклар вертикал бўлиши учун улар тенг бўлиши зарур.

2) Бурчаклар тенг бўлиши учун улар вертикал бўлиши етарли.

2-мисол. A — « x сонининг ёзуви 0, 2, 4, 6, 8 рақамларнинг бири билан тугайди» жумла, B — « x сони 2 га бўлинади» жумла бўлсин. Маълумки, x сонининг ёзуви 0, 2, 4, 6, 8 рақамларининг бири билан тугашидан бу соннинг 2 га бўлиниши келиб чиқади. Тескари даъво ҳам ўринли. Демак, берилган A ва B жумлалар тенг кучли ва уларнинг ҳар бири иккинчиси учун зарур ва етарли шарт бўлади. Шунинг учун бундай дейиш мумкин: соннинг 2 га бўлиниши учун бу соннинг ёзуви 0, 2, 4, 6, 8 рақамларининг бири билан тугаши зарур ва етарли. Соннинг 2 га бўлинишининг маълум аломатини ҳосил қилдик.

3-мисол. Ушбу «Тўртбурчакнинг ромб бўлиши учун унинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлиши зарур» жумла берилган бўлсин. Бу жумлани бошқача ифодалаш мумкин-мумкин эмаслигини аниқлаймиз.

«Ромбнинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр» жумла «Тўртбурчак — ромб» жумладан келиб чиқаётгани учун «Тўртбурчакнинг ромб бўлиши учун унинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлиши зарур» жумлани яна бундай ифодалаш мумкин:

1) Тўртбурчакнинг ромб бўлишидан унинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлиши келиб чиқади.

2) Ҳар қандай ромбнинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр.

3) Агар тўртбурчак ромб бўлса, у ҳолда унинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлади.

4) Тўртбурчакнинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлиши учун унинг ромб бўлиши етарли.

Одатда бошланғич математика курснда «зарур» ва «етарли» сўзлари ишлатилмайдн, бироқ уларнинг синонимлари — мос равишда «керак» ва «мумкин» сўзларидан кенг фойдаланилади.

Мисол келтирамиз. М а с а л а. Биринчи қўтида 6 та, иккинчисид а э с а ундан 2 та кам қалам бор. Икка л а қўтида неч та қалам бор?

Масала ечимини топиш мумкин бўлган йўллардан бири бундай бўлиши мумкин. Уқитувчи сўрайди: Ҳаммаси бўлиб неч та қалам борлигини бирданига билиш мумкинми (яъни берилган саволга бирданига жавоб бериш учун масалада маълумотлар етарлими)?

Уқувчи жавоб беради:

— Мумкин эмас. Яна, иккинчи қўтида неч та қалам борлигини билиш керак (яъни буни билиш зарур).

Уқитувчи яна сўрайди:

— Иккинчи қўтида неч та қалам борлигини билиш мумкинми, яъни бу саволга жавоб бериш учун масаладаги маълумотлар етарлими?

— Мумкин,— жавоб беради ўқувчи.

— Бунинг учун нима қилиш керак?— сўрайди ўқитувчи ва ҳоказо.

Уқувчиларнинг «керак» ва «мумкин» сўзларини тўғри қўллана олишлари бундан буён математикани ўрганишда «зарур» ва «етарли» сўзларидан фойдаланишларида муваффақият гаровидир.

Машқлар

1. Ушбу «Агар сон 4 га бўлинса, у ҳолда у 2 га бўлинади» жумла чин экани маълум. Уни «зарур» ва «етарли» сўзларидан фойдаланиб, бошқача ифодаланг.

2. Қўйдаги жумлалардан қайсиларини «зарур» ва «етарли» сўзларидан фойдаланиб, қайта ифодалаш мумкин: 1) ҳар қандай тенг томонли учбурчак тенг ёнли учбурчак бўлади; 2) ҳар қандай тўғри бурчакли учбурчак тенг ёнли учбурчак бўлади?

3. Қўйдаги жумлаларни «агар... бўлса, у ҳолда... бўлади», «ҳар қандай», «келиб чиқади» сўзларидан фойдаланиб, қайта ифодаланг: 1) сон 10 га бўлиниши учун унинг ёзуви ноль билан тугаши зарур; 2) 2a бутун сон бўлиши учун a нинг бутун сон бўлиши етарли.

4. Қўйда келтирилган фикрлардан қайсилари чин фикрлар: 1) сон 2 га бўлиниши учун унинг ноль билан тугаши зарур; 2) сон 3 га бўлиниши учун унинг 6 га бўлиниши етарли; 3) сон 10 га бўлиниши учун унинг 2 га ва 5 га бўлиниши зарур ва етарли; 4) сон 15 га бўлиниши учун унинг 5 га бўлиниши зарур; 5) сон 100 га бўлиниши учун унинг 10 га бўлиниши етарли?

5. Қўйдаги жумлалардан қайсиларини «зарур» ва «етарли» сўзларидан фойдаланиб ифодалаш мумкин: 1) 3 га ва 5 га бўлинувчи ҳар қандай сон 15 га бўлинади; 2) тўғри тўртбур-

чакнинг диагоналлари тенг; 3) иккита жуфт соннинг йигиндисини жуфт сон бўлади?

6. Кўп нуқталар ўрнига «зарур» ёки «етарли» ёки «зарур ва етарли» сузларини шундай қўйингки, натижада чин жумла ҳосил бўлсин: 1) иккита натурал соннинг йигиндисини 2 га бўлиниши учун ҳар бир қўшилувчининг 2 га бўлиниши...; 2) сон 72 га бўлиниши учун унинг 8 га ва 9 га бўлиниши...; 3) сон манфий бўлиши учун унинг нолдан кичик бўлиши...; 4) бурчак ўтмас бурчак бўлиши учун унинг тўғри бурчакдан катта бўлиши...

12. Теореманинг структураси. Теоремаларнинг турлари

Илгари биз объектнинг муҳим хоссалари бу объект ҳақидаги тушунчалар мазмунини ташкил этишини кўрсатиб ўтган эдик. Бу хоссаларнинг бир қисми тушунчанинг таърифига кирилади. Объект ҳақида етарлича тўла тасаввурга эга бўлиш учун унинг бошқа хоссалари ҳам ўрганилади.

Асосий (бошлангич) тушунчаларнинг хоссалари аксиомаларда¹ исботсиз қабул қилинадиган (баъзи назарияларда) жумлаларда очилади. Масалан, геометриянинг «нуқта», «тўғри чизиқ», «текислик» каби асосий тушунчаларининг хоссалари ушбу аксиомаларга киритилган:

Тўғри чизиқ қандай бўлмасин, тўғри чизиққа тегишли бўлган нуқталар ва тўғри чизиққа тегишли бўлмаган нуқталар мавжуд.

Ихтиёрий иккита нуқта орқали битта ва фақат битта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.

Тўғри чизиқ текисликни иккита ярим текисликка ажратади.

Биз фақат берилган тушунчаларнинг хоссаларини очувчи баъзи аксиомаларни айтиб ўтдик.

Умуман, ихтиёрий математик назариянинг аксиомалар системаси асосий тушунчаларнинг хоссаларини очиш билан, аслини олганда, уларнинг таърифини беради. Бу таърифлар аксиоматик таърифлар дейилади.

Тушунчаларнинг асосий бўлмаган ва таърифларга киритилмаган хоссалари, одатда, исботланади, яъни таърифлардан, аксиома ва илгари исботланган хоссалардан натижа сифатида келтириб чиқарилади. Тушунчаларнинг исбот қилинадиган хоссалари кўпинча теоремалар, баъзида натижалар ёки аломатлар деб аталади. Алгебрада — формулалар, айн timerлар, қоидалар деб аталади.

Ҳар хил айтилишига қарамай бу жумлаларнинг тузилишлари бир хил бўлади. Шунинг учун уларнинг ҳаммасини теоремалар деб атаймиз.

Шундай қилиб, теорема — бу A хоссадан B хоссанинг келиб

¹ «Аксиома» сузи грекчадан таржимэ қилинганда «тўғрилигини тан олиш» маъносини англатади.

чиқиши ҳақидаги фикр экан. Бу фикрнинг чинлиги исботлаш йўли билан аниқланади.

Теорема $A \Rightarrow B$ кўринишдаги фикр бўлгани учун унинг сўзма-сўз ифодаси турлича шаклга эга бўлиши мумкин (10, 11- п. ларга қ.). Бироқ теорема қандай кўринишда ифодаланган бўлмасин, унда ҳар доим A шарт (нима берилган) ва B хулоса (нимани исботлаш керак) ажратилади.

Ушбу $A \Rightarrow B$ теорема берилган бўлсин. Унда $B \Rightarrow A$, $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$, $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ кўринишдаги фикрларни ҳосил қиламиз.

$A \Rightarrow B$ ва $B \Rightarrow A$ теоремалар бир-бирига тескари теоремалар, $A \Rightarrow B$ ва $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$ теоремалар эса бир-бирига қарама-қарши теоремалар дейилади.

$\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ теорема қарама-қаршисига тескари теорема дейилади.

Мисол. Ушбу теорема берилган: «Агар учбурчаклар вертикал бурчаклар бўлса, у ҳолда улар тенг бўлади». Бу теоремага тескари, қарама-қарши ва қарама-қаршисига тескари теоремаларни ифодалаймиз.

Берилган теоремага тескари теорема: «Агар бурчаклар тенг бўлса, у ҳолда улар вертикал бурчаклар бўлади». Бу — ёлғон фикр.

Берилган теоремага қарама-қарши теорема: «Агар бурчаклар вертикал бурчаклар бўлмаса, у ҳолда улар тенг бўлмайди». Бу ҳам ёлғон фикр.

Қарама-қаршисига тескари: «Агар бурчаклар тенг бўлмаса, у ҳолда улар вертикал бурчаклар бўлмайди». Бу — чин фикр.

Теоремаларнинг айтиб ўтилган турлари орасида қандайдир бирор-бир боғланиш мавжудми?

$A \Rightarrow B$ ва $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ теоремаларнинг тенг кучли экани, яъни ҳар доим $A \Rightarrow B$ теорема чин бўлганда, $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ теорема чин ва аксинча бўлиши аниқланган:

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$$

Ҳосил қилинган тенг кучлилиқ контрапозиция қонуни дейилади.

$A \Rightarrow B$ кўринишидаги бирор-бир теорема исботлангандан кейин унга тескари теоремани текшириш маънога эгадир. Ҳар бир ҳолда унинг мустақил исботини ўтказиш керак, чунки берилган теоремага тескари теорема ёлғон бўлиши мумкин. Бундай ҳодиса, масалан, юқорида кўрган мисолимизда юз берди.

Агар берилган теорема ҳам, унга тескари теорема ҳам тўғри бўлса, у ҳолда уларни «бўлганда ва фақат шундай бўлганда» ёки «зарур ва етарли» сўзлари ёрдамида битта теоремага бирлаштириш мумкин.

Машқлар

1. Қуйидаги теоремаларнинг ҳар бирида шарт ва хулосани ажратинг.

1) агар учбурчакнинг ҳамма томонлари тенг бўлса, у ҳолда унинг ҳамма бурчаклари ҳам тенг бўлади; 2) иккита жуфт соннинг йиғиндиси — жуфт сон; 3) агар сон 3 ва 4 га каррали бўлса, у 12 га каррали бўлади; 4) айрма берилган сонга бўлиниши учун камаювчи ва айрилувчи шу сонга бўлиниши етарли; 5) a ва b натурал сонлар айирмаси натурал сон бўлиши учун $a > b$ бўлиши зарур ва етарли.

2. Ушбу: «Тўртбурчакнинг параллелограмм бўлиши учун унинг қарама-қарши томонлари тенг бўлиши зарур» теорема берилган. Бу теоремада шарт ва хулосани ажратинг ва 1) келиб чиқади; 2) ҳар қандай; 3) етарли сўзларини қўллаб уни қайта ифодаланг.

3. Қуйидаги теоремалардан қайсилари «ҳар қандай тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари тенг бўлади» теоремага тенг кучли: 1) агар тўртбурчак тўғри тўртбурчак бўлса, у ҳолда унинг диагоналлари тенг бўлади; 2) агар тўртбурчакнинг диагоналлари тенг бўлмаса, у ҳолда бу тўртбурчак тўғри тўртбурчак бўлмайди; 3) агар тўртбурчакнинг диагоналлари тенг бўлса, у ҳолда бу тўртбурчак тўғри тўртбурчак бўлади; 4) тўртбурчакнинг диагоналлари тенг бўлиши учун бу тўртбурчак тўғри тўртбурчак бўлиши етарли?

4. Қуйидаги теоремалар жуфти бир-бирига тескари теоремалар бўла оладими: 1) агар тўртбурчак квадрат бўлса, у ҳолда унда тўғри бурчак бор. Тўртбурчакнинг квадрат бўлиши учун унда тўғри бурчакнинг бўлиши етарли; 2) сон натурал сон бўлиши учун унинг мусбат бўлиши зарур. Агар сон натурал сон бўлса, у ҳолда у мусбат сон бўлади?

5. Берилган теоремаларга тескари, қарама-қарши, шунингдек, қарама-қаршисига тескари теоремаларни ёзинг, улардан қайсилари ёлгон эканини аниқланг: 1) агар соннинг ёзуви ноль билан тугаса, у ҳолда бу сон 5 га бўлинади; 2) ромбнинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлади.

6. Берилган теоремага тескари теоремани ёзинг ва берилган теоремани унинг тескарисини билан битта теоремага бирлаштириш мумкин-мумкин эмаслигини аниқланг: 1) агар бурчаклар қўшни бурчаклар бўлса, у ҳолда уларнинг йиғиндиси 180° га тенг бўлади; 2) агар учбурчакнинг иккита бурчаги тенг бўлса, у ҳолда бу бурчаклар қаршисидаги томонлар ҳам тенг бўлади.

3-§. МАТЕМАТИК ИСБОТЛАР

13. Дедуктив мULOҳазалар

$A \Rightarrow B$ теоремани исботлаш — бу ҳар доим A хосса бажариладиганда, B хосса ҳам бажарилишини мантиқий йўл билан аниқлаш демакдир.

Математикада исботлаш қатор хусусиятларга эга. Хусусан, у кўргазмали ва тажрибаларга бирор-бир йўналтиришсиз логика қондалари бўйича ўтказилади.

Исботлаш асосида мулоҳаза — логик (мантикий) операция ётади. Бу операция натижасида маъносига кўра ўзаро боғланган бир ёки бир неча жумлалардан янги (берилган билимларга нисбатан) билимларни ўз ичига олган жумла ҳосил бўлади.

Мисол сифатида биринчи синф ўқувчисининг 7 ва 8 сонлар орасидаги «кичик» муносабатини аниқлашдаги мулоҳазасини кўрамиз. Ўқувчи бундай дейди: « $7 < 8$, чунки 7 саноқда 8 дан олдин айтилади».

Ҳосил қилинган бу мулоҳазада хулоса қандай фактларга асосланганини аниқлаймиз.

Бундай фактлар иккита:

1. Агар a сони саноқда b сонидан олдин айтилса, у ҳолда $a < b$ бўлади (ихтиёрий a ва b натурал сонлар учун).

2. 7 саноқда 8 дан олдин айтилади.

Биринчи жумла умумий характерга эга, чунки унда жумла ихтиёрий a ва b натурал сонлар учун ўринли бўлишини таъкидловчи умумийлик квантори мавжуд; у умумий асос (общая посылка) дейилади.

Иккинчи жумла конкрет 7 ва 8 сонларига тегишли, хусусий ҳолларни ифодалайди, у хусусий асос дейилади.

Икки асосдан эса янги факт ($7 < 8$) келтириб чиқарилади, у хулоса деб аталади.

Умуман ҳар қандай мулоҳазада ҳам асос, ҳам хулоса бор. Асос ва хулоса орасида маълум боғланиш мавжуд, бу боғланиш ёрдамида улар мулоҳазани ташкил этади.

Асос билан хулоса орасидаги келиб чиқишлик муносабати ўринли бўладиган мулоҳаза дедуктив¹ мулоҳаза дейилади.

Бошқача айтганда, агар мулоҳаза ёрдамида чин асосдан ёлғон хулоса чиқариш мумкин бўлмаса, у ҳолда бу мулоҳаза дедуктив бўлади. Акс ҳолда мулоҳаза дедуктивмас ҳисобланади.

Мулоҳаза дедуктив бўладиган шартлар қандай шартлар экан?

Мисолларга мурожаат қиламиз.

1-мисол. Ушбу мулоҳаза берилган, унда:

умумий асос: «Агар натурал сон 4 га каррали бўлса, у ҳолда у 2 га каррали бўлади»;

хусусий асос: «12 сони 4 га каррали»;

хулоса: «12 сони 2 га каррали».

Бу мулоҳазада асос ҳам, хулоса ҳам чин. Уни дедуктив деб тахмин қилиш мумкин.

2-мисол. Ушбу мулоҳаза берилган, унда:

умумий асос: «Агар натурал сон 4 га каррали бўлса, у ҳолда у 2 га каррали бўлади»;

хусусий асос: «126 сони 2 га каррали»;

хулоса: «126 сони 4 га каррали».

Берилган мулоҳазада асослар чин, хулоса эса ёлғон — 126

¹ Дедуктив — латинча deductio сўзидан олинган бўлиб, ҳосил қилиш, келтириб чиқариш маъноларини билдиради.

сонин 4 га бўлинмайди. Демак, бу мулоҳаза дедуктив эмас, бундан келиб чиқадики, асосларнинг чинлиги мулоҳазанинг дедуктивлигини таъминловчи ягона шарт эмас.

Чин хулоса ҳосил қилиш учун яна нима муҳим экаи?

Келтирилган мулоҳазаларни солиштираммз. Бунинг учун уларни символик шаклда тасвирлаймиз. Агар A орқали «х натурал сон 4 га каррали» жумлани, B орқали эса «Натурал сон 2 га каррали» жумлани белгиласак, у ҳолда иккала мулоҳаза учун умумий асос $A \Rightarrow B$ кўринишга эга бўлади. I-мисолдаги иккинчи асос хусусий асос, у A жумлада x ўрнига 12 ни қўйиш билан ҳосил қилинади. Уни A (12) билан белгилаймиз. У ҳолда биринчи мулоҳазада хулосани B (12) билан белгилаш мумкин. Иккинчи мисол учун: иккинчи асос B (126) кўринишга, хулоса эса A (126) кўринишга эга бўлади.

Киритилган белгилашларга кўра берилган мулоҳазаларни бундай кўринишда тасвирлаш мумкин:

1- мисол	2- мисол
I асос: $A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow B$
II асос: A (12)	B (126)
Хулоса: B (12)	A (126)

Биринчи мисолда мулоҳаза ($A \Rightarrow B$ ва A (12)) $\Rightarrow B$ (12) схема бўйича, иккинчи мисолда эса ($A \Rightarrow B$ ва B (126)) $\Rightarrow A$ (126) схема бўйича ўтказилади. Кўриб турибмизки, мулоҳазалар схемалари турлича. Биринчи ҳолда фойдаланилган схема чин хулосага, иккинчи мулоҳаза схемаси эса ёлгон хулосага олиб келади.

Кўриб ўтилган мисоллар асосларнинг чинлиги ҳар донм ҳам хулосанинг чин бўлишига кафолат бера олмаслигини тасдиқлайди. Мулоҳазаларни яна шундай схемалар (қоидалар) бўйича юритиш керакки, у шундай хулосани таъминласин.

Машқлар

1. Қуйидаги мулоҳазаларнинг ҳар бирида умумий асосни, хусусий асосни ва хулосани ажратинг: 1) агар учбурчак тенг ёнли бўлса, у ҳолда унинг асосидаги бурчаклари тенг бўлади; ABC учбурчак тенг ёнли, демак, унинг асосидаги бурчаклар тенг; 2) ҳар қандай тенг ёнли учбурчакнинг асосидаги бурчаклари тенг; ABC учбурчакнинг асосидаги бурчаклари тенг эмас, демак, ABC тенг ёнли учбурчак эмас; 3) ҳар қандай тенг ёнли учбурчакнинг асосидаги бурчаклари тенг бўлади; ABC тенг ёнли учбурчак эмас, демак, унинг асосидаги бурчаклари тенг бўлмайди.

2. I-машқдаги ҳар бир мулоҳазанинг схемасини таҳлил қилинг. Улар орасида дедуктивмас мулоҳаза борми?

3. I синф ўқувчиларига ушбу «Карим 5 та ёнғоқ топди, Олим эса 3 та ёнғоқ топди. Карим нечта кўп ёнғоқ топди?» масалани ечишда амаллар танлашини асослаш тавсия этилган эди.

Бир ўқувчи бундай қилди: «Бу масалада 5 сони 3 дан нечта

кўп эканлигини билиш керак. Шунинг учун 5 дан 3 ни айириш керак».

Бошқа ўқувчи бундай асослашни тавсия этди: «Бир сон иккинчисидан нечта кўп эканлини аниқлашни талаб этадиган ҳамма масалалар айириш билан ечилади. Бу масалада 5 сони 3 дан нечта кўп эканлини билиш керак. Демак, масаланинг саволига жавоб бериш учун 5 дан 3 ни айириш керак».

Ўтказилган мулоҳазалар тўғрими? Улар нима билан фарқ қилади?

4. Кичик мактаб ўқувчисининг қуйидаги мулоҳазасида қандай асос ошкормас қўлланилган: 1) $13 \cdot 5 = 65$ тенгликнинг чинлиги асосланган. $13 -$ бу 10 ва 3 сонларининг йиғиндиси; 10 ни 5 га кўпайтурсак, 50 ҳосил бўлади, 3 ни 5 га кўпайтурсак, 15 ҳосил бўлади; $50 + 15 = 65$. Демак, $13 \cdot 5 = 65$. 2) Ушбу «Бир китоб 36 варақли, иккинчи китоб 18 варақли. Биринчи китобнинг варақлари иккинчи китобнинг варақларидан неча марта кўп?» текстли масалани ечишда амаллар танлаш асосланган.

Масалада 36 сони 18 дан неча марта катта эканлини билиш керак. Масаланинг саволига жавоб бериш учун 36 ни 18 га бўлиш керак.

5. Қуйидаги тенгликларнинг чинлигини асосланг:

- 1) $17 + 12 = 29$; 2) $18 \cdot 5 = 90$.

14. Дедуктив мулоҳазаларнинг энг содда схемалари

Ҳар бир дедуктив мулоҳазанинг асосида хулоса чиқаришнинг маълум қондаси ётади деб ҳисобланади. Биз шундай қондалардан фақат учтасини қараймиз, уларни исботсиз қабул қиламиз.

1. Хулоса қондаси: $(A \Rightarrow B \text{ ва } A(a)) \Rightarrow B(a)$, бу ерда $A \Rightarrow B$ — умумий асос, $A(a)$ — хусусий асос, $B(a)$ — хулоса.

2. Инкор қондаси. $(A \Rightarrow B \text{ ва } \overline{B(a)}) \Rightarrow \overline{A(a)}$.

3. Силлогизм қондаси: $(A \Rightarrow B \text{ ва } B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

Бу қондаларни қўлланиш мулоҳазанинг дедуктив бўлишига қаратилган бўлади, яъни чин асослардан чин хулосалар чиқаришга имкон беради.

Мулоҳазаларнинг тўғрилигини текшириш учун берилган қондалардан қандай фойдаланишни кўрсатамиз.

М а с а л а. Қуйидаги мулоҳаза дедуктив бўладими:

1) Ёзуви ноль билан тугайдиган ҳамма сонлар 5 га бўлинади; сон 5 га бўлинмайди, демак, унинг ёзуви ноль билан тугамайди;

2) Агар натурал сон 8 га каррали бўлса, у ҳолда у 4 га каррали бўлади, агар натурал сон 4 га каррали бўлса, у ҳолда у 2 га каррали бўлади, демак, агар сон 8 га каррали бўлса, у ҳолда у 2 га каррали бўлади;

3) Агар соннинг ёзуви ноль билан тугаса, у ҳолда у 5 га бўлинади; сон ноль билан тугамаса, демак, у 5 га бўлинмайди.

Е чиш. 1) Келтирилган мулоҳазанинг схемасини аниқлаймиз. Дастлаб, умумий асосни «Агар соннинг ёзуви ноль билан тугаса, у ҳолда у 5 га бўлинади» шартли жумла кўринишида ифодалаймиз. Кейин A ҳарфи билан «Соннинг ёзуви ноль билан тугайди» жумлани, B ҳарфи билан «Сон 5 га бўлинади» жумлани белгилаймиз. У ҳолда умумий асос $A \Rightarrow B$ кўринишга, хусусий асос B , хулоса эса $\overline{A}$ кўринишга эга бўлади, яъни $(A \Rightarrow B \text{ ва } \overline{B}) \Rightarrow \overline{A}$ схемадаги мулоҳазага эга бўламиз.

Бу қоида хулосанинг чинлигига кафолат берувчи инкор қондасидир. Демак, мазкур мулоҳаза дедуктивдир.

2) Агар «Натурал сон 8 га каррали» жумлани A орқали, «Натурал сон 4 га каррали» жумлани B орқали ва «Натурал сон 2 га каррали» жумлани C орқали белгиласак, у ҳолда мазкур мулоҳазанинг схемаси ушбу кўринишга эга бўлади:

$$(A \Rightarrow B \text{ ва } B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C).$$

Бундай схема — бу силлогизм қондасидир, у асос чин бўлганда хулосанинг ҳам чин бўлишига кафолат беради.

3) A ҳарфи билан «Соннинг ёзуви ноль билан тугайди» жумлани, B ҳарфи билан «Сон 5 га бўлинади» жумлани белгилаймиз. У ҳолда берилган мулоҳазанинг схемаси $(A \Rightarrow B \text{ ва } \overline{A}) \Rightarrow \overline{B}$ кўринишга эга бўлади. У ёлгон хулосага олиб келади: масалан, 15 сони ноль билан тугамайди, бироқ у 5 га бўлинади. Умуман, мулоҳазанинг бу схемаси хулосанинг чин бўлишига кафолат бера олмайди — у чин хулосага ҳам, ёлгон хулосага ҳам олиб келиши мумкин.

Баъзи ҳолларда чин хулосага, баъзи ҳолларда ёлгон хулосага олиб келувчи схема бўйича мулоҳаза дедуктивмас мулоҳаза ҳисобланади. Демак, берилган мулоҳаза дедуктивмас мулоҳаза экан.

Дедуктивмас мулоҳазанинг ушбу иккита схемасини ёдда сақлаш мақсадга мувофиқ:

$$1) (A \Rightarrow B \text{ ва } B) \Rightarrow A; \quad 2) (A \Rightarrow B \text{ ва } \overline{A}) \Rightarrow \overline{B}.$$

Бу схемалар асослар чин бўлганда хулосаларнинг ҳам чин бўлишига кафолат беролмайди.

Келтирилган схемалар бўйича тўла дедуктив мулоҳаза иккита асосни кўрсатишни талаб этишини эслатиб ўтамиз. Бироқ мулоҳаза юритиш жараёнида бу схемалар, масалан, умумий асосни тушириб қолдириш билан қисқартирилади.

Математикада хулосаларнинг чин бўлишига кафолат бермайдиган схемалардан фойдаланиш, шунингдек, теорема ва формулаларга қўлланишлик шартларининг бажарилмаслиги, хато чизмаларни қўлланиш нотўғри фикрга, ёлгон хулосага олиб келиши азалдан маълум. Математиклар кўринишдан тўғри бўлиб, аслида нотўғри бўлган мулоҳазаларни атайини ўйлаб топа бошладилар. Бундай мулоҳазалар софизмлар номини олди.

Софизмлар таҳлили нафақат тўғри мулоҳаза юритиш қўникмаларини шакллантиради, шунингдек купгина математик фактларни ўзлаштириб олишга ҳам ёрдам беради.

Софизмга мисол қараймиз.

$5=1$ эканини исботлаймиз.

5 ва 1 сонларидан айни бир 3 сонини айирамиз. $5-3=2$, $1-3=-2$ га эга бўламиз. 2 ва -2 сонларини квадратга оширамиз. Натижада тенг сонлар ҳосил бўлади: $2^2=4$, $(-2)^2=4$. Демак, дастлабки 5 ва 1 сонлари ҳам тенг бўлиши керак. Шундай қилиб, $5=1$.

Келтирилган мулоҳазадаги хулосанинг ёлғонлиги аниқ. Бироқ қаерда хатога йўл қўйилди?

Келтирилган мулоҳазани таҳлил қилиб чиқамиз. У уч қадамдан иборат, бунда улар қисқа кўринишда берилган. Биз ҳар бир қадамнинг иккала асосини тиклаймиз.

1-қадам (5 ва 1 сонларидан бутун 3 сонини айнириш).

Умумий асос: «Ихтиёрий бутун сонлар айирмаси мавжуд».

Хусусий асос: «5, 1 ва 3 бутун сонлар».

Хулоса: « $5-3$, $1-3$ айирмалар мавжуд ва $5-3=2$, $1-3=-2$ ».

Хулоса қондаси асосида мулоҳаза юритганимиз учун биз чин асосларда чин хулосага эга бўлдик. Шунинг учун бу қадамда хато йўқ.

2-қадам (2 ва -2 сонларини квадратга ошириш).

Умумий асос: «Ихтиёрий бутун соннинг квадрати ҳар доим мавжуд ва у номанфий сон бўлади».

Хусусий асос: «2 ва -2 бутун сонлар».

Хулоса: «2 ва -2 сонларининг квадратлари мавжуд, бунда $2^2=4$, $(-2)^2=4$ ».

Бу ерда ҳам мулоҳаза хулоса қондаси бўйича олиб борилди, тўғри фикрга келдик. Шунинг учун бу қадамда хатога йўл қўйилмаган.

3-қадам (5 ва 1 сонларининг тенглиги ҳақида хулоса).

Умумий асос: «Агар сонлар тенг бўлса, уларнинг квадратлари ҳам тенг».

Хусусий асос: «Сонларнинг квадратлари тенг ($4=4$)».

Хулоса: «Сонларнинг ўзи ҳам тенг: $5-3=1-3$, ёки $5=1$ ».

Бу босқичда мулоҳаза ($A \Rightarrow B$ ва $B \Rightarrow A$ схема бўйича олиб борилди, бу эса хулосанинг чинлигига кафолат бера олмайди. Натижада ёлғон хулоса келиб чиқди.

Машқлар

1. Қуйидаги мулоҳазаларнинг ҳар бирининг схемасини аниқланг ва улар орасидан дедуктив мулоҳазаларни кўрсатинг: 1) параллелограммнинг қарама-қарши бурчаклари тенг; $ABCD$ тўртбурчак — параллелограмм; демак, $\angle A = \angle C$; 2) параллелограммнинг қарама-қарши бурчаклари тенг; $ABCD$ тўртбурчакнинг қарама-қарши бурчаклари тенг; демак, $ABCD$ — параллелограмм; 3) параллелограммнинг қарама-қарши бурчаклари тенг, $ABCD$ тўртбурчак параллелограмми эмас; демак, унинг қарама-қарши бурчаклари тенг эмас; 4) параллелограммнинг қарама-қарши бурчаклари тенг; $ABCD$ тўртбурчакнинг қара-

ма-қарши бурчаклари тенг эмас; демак, $ABCD$ тўртбурчак параллелограмм эмас.

2. Мулоҳазани шундай тугаллангки, натижада у тўғри бўлсин: 1) агар соннинг рақамлари йиғиндиси 3 га бўлинса, у ҳолда сон 3 га бўлинади; 327 сонининг рақамлари йиғиндиси 3 га бўлинади, демак,...; 2) агар соннинг рақамлари йиғиндиси 3 га бўлинса, у ҳолда сон 3 га бўлинади; m сони 3 га бўлинмайди, демак,...; 3) агар сон 18 га бўлинса, у ҳолда у 6 га бўлинади; агар сон 6 га бўлинса, у ҳолда у 3 га бўлинади, демак, ...

3. Қуйидаги мулоҳазалар дедуктивми: 1) III синфнинг ҳамма аълочилари спорт билан шуғулланади; III синф ўқувчиси Салим — аълочи; демак, Салим спорт билан шуғулланади; 2) III синфнинг ҳамма аълочилари спорт билан шуғулланади. III синф ўқувчиси Вали спорт билан шуғулланмайди; демак, у аълочи эмас; 3) III синфнинг ҳамма аълочилари спорт билан шуғулланади. III синф ўқувчиси Лола аълочи эмас; демак, у спорт билан шуғулланмайди; 4) III синфнинг ҳамма аълочилари спорт билан шуғулланади. III синф ўқувчиси Раъно спорт билан шуғулланади, демак, у аълочи?

4. Қуйидаги ҳар бир мулоҳазада умумий асосни тикланг: 1) 12 натурал сон, демак, у мусбат; 2) ABC учбурчак тенг томонли учбурчак, демак, у тенг ёнли учбурчак; 3) 188 сони 9 га бўлинмайди, демак, унинг рақамлари йиғиндиси 9 га бўлинмайди.

5. Қуйидаги софизмларнинг ҳар бирида хатоларни топинг: 1) Ҳамма сонлар ўзаро тенг. $a \neq b$ бўлсин. $a^2 - 2ab + b^2 = b^2 - 2ab + a^2$ айниятни оламиз. $(a - b)^2 = (b - a)^2$ га эга бўламиз. Бундан $a - b = b - a$ ёки $2a = 2b$, демак, $a = b$. 2) Тенг бўлмаган икки сондан биринчиси иккинчисидан ҳар доим катта. m ва n ихтиёрий сонлар ва $m \neq n$ бўлсин. $(m - n)^2 > 0$, яъни $m^2 - 2mn + n^2 > 0$ ёки $m^2 + n^2 > 2mn$ га эга бўламиз. Ҳосил бўлган тенгсизликнинг иккала қисмига $-2n^3$ ни қўшамиз. $m^2 - n^2 > 2mn - 2n^3$ ёки $(m + n)(m - n) > 2n(m - n)$ га эга бўламиз. Иккала қисмини $m - n$ га бўлгандан сўнг, $m + n > 2n$ га эга бўламиз, бундан $m > n$ келиб чиқади.

15. Тўлиқсиз индукция

Агар $n^2 + n + 41$ ифодада n ўрнига 1, 2, 3, 4 ва ҳ. к. сонлар қўйилса, у ҳолда кўриш мумкинки, $n = 1$ да ифоданинг қиймати туб сон 43 га тенг, $n = 2$ да ифоданинг қиймати туб сон 47 га тенг, $n = 3$ да ифоданинг қиймати туб сон 53 га тенг ва ҳ. к. бўлади.

Олинган натижаларга суянган ҳолда ихтиёрий натурал n да $n^2 + n + 41$ ифоданинг қиймати туб сон бўлади деб хулоса чиқариш мумкин.

Маълумки, 15 сони 5 га бўлинади, 25 сони 5 га бўлинади, 35 сони 5 га бўлинади, 95 сони 5 га бўлинади. Буларни ҳисобга

олиб, ёзуви 5 рақами билан тугайдиган ихтиёрий сон 5 га бўлинади деб хулоса чиқарамиз.

Кўриб ўтилган мулоҳазаларда биз қатор хусусий ҳоллар асосида умумий хулоса чиқардик. Бундай мулоҳаза тўлиқсиз индукция деб аталади.

Тўлиқсиз индукция бу шундай мулоҳазаларки, бунда объектлар тўплагининг баъзи объекtlари маълум хоссаларга эга бўлишдан бу тўплагининг барча объекtlари ҳам шу хоссаларга эга деб хулоса чиқаришга асосланилади.

Тўлиқсиз индукция натижасида олинган хулосалар чин ҳам, ёлгон ҳам бўлиши мумкин. Масалан, ёзуви 5 рақами билан тугайдиган соннинг 5 га бўлиниши ҳақидаги хулоса чин. «Ихтиёрий натурал n да $n^2 + n + 41$ ифоданинг қиймати тўб сон бўлади» даъво эса ёлгон. Ҳақиқатан ҳам, агар $n = 41$ бўлса, $41^2 + 41 + 41 = 41^2 + 2 \cdot 41 = 41 \cdot (41 + 2) = 41 \cdot 43$ га эга бўламиз, яъни $n^2 + n + 41$ ифоданинг қиймати мураккаб сон бўлиб чиқади.

Тўлиқсиз индукция ёрдамида ҳосил бўлган хулосаларга танқидий муносабатда бўлиш керак. Бу хулосалар тахминлар, гипотезалар характериға эга бўлиб, уларни исботлаш (дедуктив усуллар билан) ёки рад этиш керак бўлади. Шундай қилиб, билиш жараёнида дедуктив ва индуктив мулоҳазалар ўзаро боғланган бўлиб чиқади.

Индуктив мулоҳазалар ҳар доим тўғри хулосаларға олиб келавермаса ҳам, математика ва бошқа фанларни ўрганишда уларнинг роли жуда катта. Индуктив мулоҳазалар юритиш давомида конкрет хусусий ҳолларда умумийликни кўра билиш, ўз тахминларини айта олиш малакалари шаклланади.

Бошланғич мактабда тўлиқсиз индуктив хулоса тез-тез қўлланилади. Одатда барча умумий қонуниятлар бу ерда индуктив йўл билан келтирилиб чиқарилади. Қўшиш ва қўпайтиришнинг ўрин алмаштириш қонуни $0 + a = a$; $1 \cdot a = a$; $a : 1 = a$; $0 \cdot a = 0$ тенгликлар ва бошқа қонуниятлар шундай асосланилади.

Бошланғич синфларда тўлиқсиз индуктив хулосадан ташқари аналогия¹ бўйича (таққослаб) хулоса чиқаришдан кенг фойдаланилади, бунда билимларни ўрганилган объектлардан нисбатан кам ўрганилган объектларға кўчириш амалға оширилади. Кўчириш учун бу объектларнинг ўхшашлик ва фарқ қилиш аломатлари ҳақидаги билимлар асос бўлиб хизмат қилади.

Аналогия шу билан муҳимки, у бизни тахмин ва фаразларға олиб келади. Бундан ташқари, аналогия математик интуицияни ривожлантириш имконини беради, у фанни чуқур ўзлаштиришға имкон берувчи ассоциацияларнинг муҳим манбаи бўлади.

Бироқ шунини унутмаслик керакки, аналогия бўйича ҳосил қилинган хулосалар чин бўлиши ҳам, ёлгон бўлиши ҳам мумкин. Аналогия бўйича ҳосил қилинган хулосалар дедуктив метод билан исбот қилиниши керак.

¹ Аналогия ва мулоҳазаларнинг бошқа кўринишлари ҳақида, масалан, И. В. И. А. А. Искусство правильно мыслить. — М., 1986 — китобдан ўқиш мумкин.

Машқлар

1. Иккита жуфт соннинг йиғиндиси қандай сон бўлиши мумкин? Бир нечта хусусий ҳолларни кўринг ва ўз мулоҳазангизни айтинг. Унинг чинлигини қандай исботлаш мумкин?

2. Ушбу тенгликларни қараб чиқинг: $1^2=1$, $3^2=9$, $5^2=25$, $7^2=49$. Тоқ сонларнинг квадратларига нисбатан ўзингизнинг бирор-бир хулосангизни айтинг ва унинг чинлигини аниқлашнинг мумкин бўлган усуллари кўрсатинг.

3. 3^2 , 5^2 , 7^2 сонларининг ҳар бирини 4 га бўлинг. Бу ҳолларнинг ҳар бирида қолдиқ нимага тенг? Олинган натижаларга асосланиб, қандай мулоҳаза билдириш мумкин? Билдирилган мулоҳазанинг чинлигига кафолат бериш учун нечта тоқ сонни квадратга ошириш ва 4 га бўлиш керак бўлар эди?

4. $n = 1, 2$ ва 3 да $n^2 - n + 11$ ифоданинг қийматини топинг. Олинган жавоблар асосида $n^2 - n + 11$ ифоданинг қиймати ихтиёрий натурал n да туб сон бўлади деб даъво қилиш мумкинми?

5. Бошланғич синфлар ўқувчиларини қандай қилиб қуйидаги фикрларнинг чинлигига ишонтириш мумкин эканини аниқланг:

1) $0 + a = a$; 2) $1 \cdot a = a$; 3) $0 \cdot a = 0$; 4) $ab = ba$.

6. Ўқувчи 3 га ва 9 га бўлиниш аломатига ўхшатиб 27 га бўлиниш аломатини қуйидагича ифодалади.

«Сон 27 га бўлиниши учун унинг ёзувидаги рақамлар йиғиндиси 27 га бўлиниши зарур ва етарли». Ўқувчи чиқарган хулоса тўғрими?

7. Ўқувчи 96 ни 16 га бўлиб, бўлинмада 10 ни ҳосил қилди ва ўзи бажарган амални қуйидагича асослади: $96 : 16 = 90 : 10 + 6 : 6 = 9 + 1 = 10$. Ўқувчи қандай назарий фактлардан нотўғри фойдаланган?

16. Фикрларнинг чинлигини исботлаш усуллари

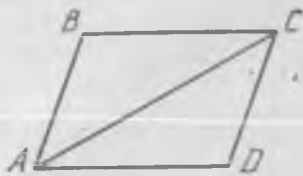
Дедуктив хулоса математик исботлашларнинг асосий усулидир. Бунда математик исбот дедуктив мулоҳазаларнинг шундай занжирини ифодалайдики, улардан ҳар бирининг хулосаси, охиригисидан ташқари, ундан кейин келувчи мулоҳазалардан бирига асос бўлади.

$7 < 8$ даъвонинг чинлигининг исботи битта қадамни ўз ичига олган битта мулоҳазадан ташкил топган.

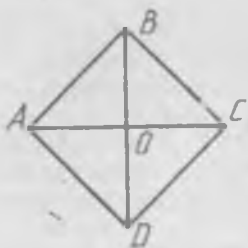
Икки ва ундан ортиқ қадамдан ташкил топган мулоҳазанинг исботига доир мисоллар кўриб чиқамиз.

1-мисол. Ҳар бир диагональ параллелограмми иккита тенг учбурчакка ажратишни исботлаймиз.

Исботи. 1. Ихтиёрий параллелограммнинг қарама-қарши томонлари тенг; $ABCD$ — параллелограмм (9-расм), демак, $AB = CD$, $BC = AD$. Мулоҳаза хулоса қондаси асосида олиб борилди, демак, олинган хулоса чин.



9-расм



10- расм

2. Агар бир учбурчакнинг учта томони мос равишда иккинчи учбурчакнинг учта томонига тенг бўлса, у ҳолда бундай учбурчаклар тенг бўлади: $AB = CD$, $BC = AD$, AC томон умумий, демак, ABC ва ACD учбурчаклар тенг.

Бу ҳолда ҳам мулоҳаза хулоса қонуни асосида олиб борилди, демак, хулоса чин.

Теорема исботланди.

Теореманинг исботи ҳамма асосларни кўрсатиш билан тула мантиқий формада олиб борилган мулоҳазаларнинг икки қадамидан ташкил топганини эслатиб ўтамиз. Бироқ бундай исботлаш узундан-узоқ ва шунинг учун одатда уларни мулоҳазалар схемасидаги алоҳида асосларни тушириб қолдириш билан ихчамланган қисқартирилган формада олиб борилади.

Масалан, биз ўтказган исботнинг ихчамланган шакли бундай бўлиши мумкин: ABC ва ACD учбурчакларда AB ва CD , AD ва BC томонлар тенг, чунки улар $ABCD$ параллелограммининг қарама-қарши томонлари, AC томон улар учун умумий, демак, ABC ва ACD учбурчаклар тенг.

2- мисол. Ромбнинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр эканини исботлаймиз.

Исботи. Дастлаб уни ихчамланган шаклда берамиз. AOB ва AOD учбурчакларни қараймиз (10- расм). Уларда $AB = AD$ — ромбнинг томонлари; $BO = OD$, чунки кесишиш нуқтасида ромбнинг диагоналлари тенг иккига бўлинади; AO — умумий томон. Демак, $\triangle AOB = \triangle AOD$.

Бу учбурчакларнинг тенглигидан $\angle AOB = \angle AOD$ га эга бўламиз, бироқ бу бурчаклар қўшни бурчаклардир. Шунинг учун AOB ва AOD бурчаклар тўғри бурчаклар, демак, ромбнинг диагоналлари ўзаро перпендикулярдир.

Исботнинг мантиқий таҳлилни бажарамиз, яъни {мулоҳазалар занжирини ажратамиз ва ҳар бир звенода фойдаланиладиган хулоса қондасини аниқлаймиз.

1. Ромбнинг ҳамма томонлари тенг: $ABCD$ — ромб, демак, $AB = AD$ (хулоса қондаси).

2. Ромбнинг диагоналлари кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади; $ABCD$ — ромб, $BO = OD$ (хулоса қондаси).

3. Агар бир учбурчакнинг учта томони мос равишда иккинчи учбурчакнинг учта томонига тенг бўлса, у ҳолда бундай учбурчаклар тенг бўлади; $AB = AD$, $BO = OD$, AO томон умумий, демак, AOB ва AOD учбурчаклар тенг (хулоса қондаси).

4. Агар учбурчаклар тенг бўлса, у ҳолда уларнинг мос бурчаклари тенг бўлади; $\triangle AOB = \triangle AOD$, демак, $\angle BOA = \angle AOD$ хулоса қондаси.

5. Агар қўшни бурчаклар тенг бўлса, у ҳолда улар тўғри бурчаклар бўлади; AOB ва AOD бурчаклар қўшни ва тенг бурчаклардир, демак, улар тўғри бурчаклардир (хулоса қондаси).

6. Агар тўғри чизиқлар кесишиш натижасида тўғри бурчаклар ҳосил қилса, у ҳолда улар перпендикулярдир; $\angle AOB$ ва $\angle AOD$ тўғри бурчаклар, демак, AC ва BD диагоналар ўзаро перпендикуляр (хулоса қондаси).

Шундай қилиб, берилган жумланинг исботи ҳар бир ҳолда хулосаларнинг чин бўлишини таъминловчи хулоса қондаси бўйича ўтказиладиган мулоҳазаларнинг дедуктив занжирини ифодалайди. Ҳар бир мулоҳазадан чиқарилган хулоса, охиригисидан ташқари, ундан кейин келувчи мулоҳазалардан бирига асос бўлади.

Олиб бориш (ўтказиш) усулига кўра исботлаш бевосита ва билвосита исботлашга бўлинади. Юқорида кўрилган барча исботлашлар бевосита (воситасиз) исботлашлар эди: уларда бирор-бир чин жумлага асосланиб чин хулосага олиб келувчи мулоҳазаларнинг дедуктив занжири қурилар эди.

8-пунктда сўз борган тўла индукция ҳам бевосита исботлашга тегишлидир.

Билвосита (воситали) исботлашга тескарисидан (тескарисини фараз қилиб) исботлаш усули мисол бўлади.

Шундай исботлашга доир мисол қараймиз. Агар иккита турли a ва b тўғри чизиқлар учинчи c тўғри чизиққа параллел бўлса, у ҳолда улар ўзаро параллел бўлишини исботлаймиз.

Исботи. Тескарисини фараз қиламиз, яъни a ва b тўғри чизиқлар ўзаро параллел бўлмасин. У ҳолда улар c тўғри чизиққа тегишли бўлмаган бирор P нуқтада кесишади. Шартга кўра a тўғри чизиқ c га ва b тўғри чизиқ c га параллел бўлгани учун c тўғри чизиқдан ташқаридаги P нуқта орқали c га иккита параллел тўғри чизиқ ўтказиш мумкин деган хулосага келамиз. Бу фикр параллеллик аксиомасига зид. Демак, бизнинг фаразимиз нотўғри. Бироқ у ҳолда берилган теорема чин (тўғри) бўлади.

Умуман, $A \Rightarrow B$ теоремани тескарисидан исботлаш усулининг моҳияти қуйидагидан иборат. B теореманинг хулосаси ёлгон, демак, унинг инкори $\bar{B}$ чин деб фараз қилинади. Бу жумлаларни исботлаш жараёнида қўлланиладиган асослар тўпламига (улар орасида A шарт ҳам бўлади) қўшиб, улардан асослардан бирнга зид бўлувчи жумла чиқмагунча натижалар чиқарилаверилади. Мулоҳазалар жараёнини тугатиш билан ҳосил бўлган зиддият теоремани исботлайди дейилади.

Билвосита исботлашнинг яна бир формаси контрапозиция қонунига асосланган исботлашдир. Унинг моҳияти шундан иборатки, $A \Rightarrow B$ теоремани исботлаш ўрнига унга тенг кучли бўлган $B \Rightarrow A$ кўринишдаги теорема исботланади. Агар бу теорема чин бўлса, у ҳолда дастлабки теорема ҳам чин бўлади.

Агар $\frac{a-b}{a+b}$ қисқармас каср бўлса, у ҳолда $\frac{a}{b}$ ҳам қисқармас каср бўлишини исботлаймиз.

Исботи. $\frac{a}{b}$ — қисқарувчи каср бўлсин деб фараз қилайлик.

У ҳолда унинг сурати ва маҳражи аини бир сонга, масалан, m га бўлинади, яъни $a = mq$, $b = mp$. Демак, $\frac{a-b}{a+b} = \frac{mq-mp}{mq+mp} = \frac{m(q-p)}{m(q+p)}$, яъни $\frac{a-b}{a+b}$ каср қисқарувчи бўлади.

Шундай қилиб, «Агар $\frac{a}{b}$ қисқарувчи каср бўлса, у ҳолда $\frac{a-b}{a+b}$ ҳам қисқарувчи каср бўлади» жумланинг чинлиги исботланди. Бу жумла қарама-қаршисига тескари теоремани ифодалайди. Демак, контрапозиция қонунига кўра дастлабки теорема ҳам чин бўлади.

Машқлар

1. Ушбу «Ихтиёрий жуфт соннинг квадрати 4 га бўлинади» фикрнинг чинлиги қуйидагича исботланиши мумкин:

«Жуфт $2n$ соннинг квадрати $4n^2$ кўринишга эга бўлади, бунда n — натурал сон».

«4 сони 4 га бўлингани учун $4n^2$ кўпайтма ҳам 4 га бўлинади». Бу исботнинг мантиқий таҳлилини ўтказинг.

2. Тўғри тўртбурчакнинг диагонали уни иккита тенг учбурчакка ажратишни исботланг. Ўтказилган исботлашнинг мантиқий таҳлилини бажаринг.

3. MPN учбурчакда PMN бурчак PNM бурчакка тенг экани маълум. $\angle PMC = \angle PND$ эканини исботланг (11- расм).

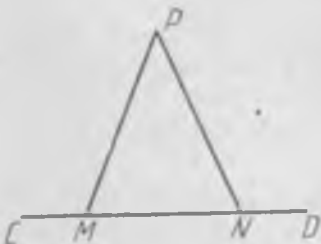
4. Қуйидаги фикрларнинг чинлигини исботланг: 1) агар $a > b$ бўлса, у ҳолда $15a > 15b$; 2) агар $a > b$ бўлса, у ҳолда $-8a < -8b$; 3) агар $8 \cdot 3 = 24$ бўлса, у ҳолда $3 = 24 : 8$.

5. Ушбу мулоҳазанинг тўғрилигини асосланг: «Номаълум кўпайтувчини топиш учун кўпайтмани маълум кўпайтувчига бўлиш керак. $5x = 30$ тенгламада кўпайтувчи номаълум. Демак, $x = 30 : 5$ ».

6. Тескарисини фараз қилиш усули билан исботланг: 1) агар иккита турли тўғри чизиқлар кесишса, у ҳолда уларнинг кесишишидан битта ва фақат битта нуқта ҳосил бўлади; 2) турли томонли учбурчакда бурчак биссектрисаси қаршисидagi томонга перпендикуляр эмас; 3) турли томонли учбурчакда ҳеч қандай иккита бурчак тенг эмас; 4) бирорта ҳам учбурчак иккита тўғри бурчакка эга бўла олмайди.

7. Бошланғич математика курсида қўлланиладиган бутун номанфий сонларни кўпайтириш таърифига асосланиб, қуйидагиларни исботланг: а) $3 \cdot 5 = 15$; б) $0 \cdot 3 = 0$; в) $1 \cdot 5 = 5$.

8. Ўқувчи ушбу $2 + 4 = 6$, $4 + 6 = 10$, $6 + 8 = 14$, $4 + 8 = 12$ тенгликларни ҳосил қилиб, қуйидагича хулоса чиқарди: ихтиёрий иккита жуфт соннинг йиғиндиси жуфт сон бўлади. Шу тўғрими? Ўқувчининг хулосасини бу мулоҳазанинг исботи деб ҳисоблаш мумкинми?



11- расм

17. Текстли масала тушунчаси

Бошланғич математикани ўқитишда текстли масалаларнинг роли улкандир. Масалаларни еча бориб ўқувчилар янги математик билимларни эгаллайдилар, амалий фаолиятга тайёрлана борадилар. Масалалар уларнинг мантикий фикрлашларини ривожлантиришга имкон беради. Масала ечиш ўқувчиларнинг шахсий тарбияларида ҳам катта аҳамиятга эга. Шунинг учун ўқитувчининг текстли масала ҳақида, унинг тузилиши ҳақида чуқур тасаввурга эга бўлиши, бундай масалаларни турли усуллар билан еча олиши муҳимдир.

Текстли масала бирор-бир вазият (вазиятлар) нинг табиий тилдаги ифодаси (тавсифи) бўлиб, унда бу вазиятнинг бирор-бир компонентасига миқдорий характеристика бериш, унинг компонентларн орасидаги баъзи муносабатлар бор-йўқлигини аниқлаш ёки бу муносабат турини аниқлаш талаб этилади.

Ҳар қандай текстли масала икки қисмдан иборат: *шартлар* ва *талаблар* (савол).

Шарта объектлар ва берилган объектларни характерловчи баъзи миқдорлар ҳақида, бу объектларнинг маълум ва номаълум қийматлари ҳақида, улар орасидаги муносабатлар ҳақида маълумотлар берилади.

Масаланинг талаби — бу нимани топиш кераклигини кўрсатишидир. У буйруқ (Тўғри тўртбурчакнинг юзини топинг) ёки сўроқ (Тўғри тўртбурчакнинг юзи нимага тенг?) шаклидаги жумла билан ифодаланиши мумкин.

Ушбу масалани қараймиз: «Колхоз ер майдонини «Кировец» тракторида 10 кунда, «Казахстан» тракторида эса 15 кунда шудгорлаш мумкин. Шудгорлаш ишига иккала трактор ҳам жалб этилди. Бу майдон неча кунда шудгорлаб бўлинади?».

Бу масаланинг шарти «Колхоз ер майдонини «Кировец» тракторида 10 кунда, «Казахстан» тракторида эса 15 кунда шудгорлаш мумкин. Шудгорлаш ишига иккала трактор ҳам жалб этилди.» Унда учта миқдор орасидаги муносабат ифодаланапти: иш ҳажми, меҳнат унумдорлиги ва ишни бажаришда сарфланадиган вақт, бунда учта турли вазият қаралади.

Биринчи вазият. Бирор иш ҳажми фақат «Кировец» тракторида маълум унумдорлик билан бажарилади. Бир миқдорнинг қиймати маълум, у ҳам бўлса иш вақти — 10 кун. Бошқа миқдорларнинг қиймати номаълум.

Иккинчи вазият. Айнан ўша иш ҳажми фақат «Казахстан» тракторида маълум унумдорлик билан бажарилади. Иш вақти маълум — 15 кун. Бошқа миқдорларнинг қийматлари номаълум.

Учинчи вазият. Айнан ўша иш ҳажми икки тракторда уларнинг ҳар бирининг мос унумдорлиги билан бажарилади. Учала миқдорнинг қийматлари номаълум.

Масаланинг талаби (савол): «Бу майдон неча кунда шудгорлаб бўлинади?». Унда номаълум миқдорлардан бирининг қийматини, у ҳам бўлса, иккала тракторнинг биргаликда ишлаган вақтини топиш кераклиги кўрсатилади. Шу талабнинг ўзини буйруқ шаклида ҳам ифодалаш мумкин: «Иккала трактор биргаликда ишлаганда майдонни шудгорлаш учун уларга неча кун талаб этилишини топинг».

Мазкур масалада миқдорларнинг бешта номаълум қийматлари бор, улардан бири масаланинг талабига киради. Миқдорнинг бу қийматини изланувчи миқдор деб атаймиз.

Баъзида масалалар масала шартининг бир қисми ёки шартнинг ҳаммаси масаланинг талаби билан битта жумлага киритилган шаклда ифодаланади. Масалан, юқорида келтирилган масала қуйидагича шаклда берилиши мумкин: «Колхоз ер майдонини «Кировец» тракторида 10 кунда, «Қазахстан» тракторида эса 15 кунда шудгорлаш мумкин. Агар иккала трактор ишласа, шу майдонни неча кунда шудгорлаш мумкин? Унда шартнинг бир қисми («иккала трактор ҳам ишлайди») масала талаби билан битта жумлага киритилган. Қуйидаги текстда ҳамма шарт савол билан битта жумлага киритилган: «Агар майдон «Кировец» ва «Қазахстан» тракторларидан бири билан 10 кунда, иккинчиси билан 15 кунда шудгорланса, улар биргаликда ишлаганда майдонни неча кунда шудгорлаш мумкин?».

Кундалик турмушда турли-туман муаммоли вазиятлар тез-тез учраб туради. Улар асосида тузилган масалаларда ортиқча маълумотлар, яъни масала талабини бажариш учун зарур бўлмаган маълумотлар бўлиши мумкин. Масалан, юқорида қаралган масалада унинг талабини бажариш учун тракторлар маркаларининг номи аҳамиятга эга эмас. Бу ерда фақат масалада турли унумдорликка эга бўлган икки трактор ҳақида гап бораётганлиги муҳимдир.

Ушбу «Лола 10 та олма ва 5 та нок олди, Дилшод эса 7 та олма олди. Болалар нечта олма олишган? Масалада нок ҳақидаги ортиқча маълумот бор. Берилган «5 та нок» ортиқча.

Ҳаётда вужудга келадиган муаммоли вазиятлар асосида талабини бажариш учун етарлича маълумотлар бўлмаган масалалар тузилиши ҳам мумкин. Масалан, «Агар бўйи энидан 3 м катта экани маълум бўлса, тўғри тўртбурчак шаклидаги участканинг бўйи ва энини топинг» масалада унинг саволига жавоб бериш учун маълумотлар етарли эмас.

Бу масалани ечиш мумкин бўлиши учун уни етишмаётган маълумотлар билан тўлдириш зарур. Майдон юзининг қиймати ёки изланаётган томонлардан бирини аниқлашда зарур бўладиган баъзи маълумотлар шундай маълумотлар бўлиши мумкин.

Айнан бир масаланинг ўзи масала ечувчидаги мавжуд билимга қараб ортиқча (етарлича бўлмаган) маълумотли масала сифатида ҳам, етарлича сондаги маълумотларга эга масала сифатида ҳам қаралиши мумкин. Масалан, касрлар ва улар

устиди амаллар ҳақидаги билимга эга бўлмаган ўқувчи юқоридида келтирилган майдонни шудгорлаш ҳақидаги масалани етарлича маълумотга эга бўлмаган масала сифатида қабул қилиши мумкин. У бу масалани агар масалага, айтайлик шудгорланаётган майдон юзининг қиймати киритилса, еча олиши мумкин. Касрлар ва улар устида амалларга доир билимга эга бўлганда масаланинг саволига майдоннинг юзини билмасдан туриб ҳам жавоб бериш мумкин.

Машқлар

1. Қуйидаги масалаларда масала шarti ва талабини ажратинг: 1) Иккита автобус бир вақтда шаҳардан 72 км масофадаги пионер лагери томон йўлга чиқди. Биринчи автобус лагерига иккинчисига қараганда 15 минут олдин етиб келди. Агар автобуслардан бирининг тезлиги иккинчисиникига қараганда 4 км/соат ортиқ бўлса, ҳар бир автобус қандай тезлик билан юрган? 2) Агар тўғри тўртбурчакнинг томонларидан бири иккинчисидан 14 см катта ва унинг диагонали 34 см га тенг экани маълум бўлса, тўғри тўртбурчакнинг томонларини топинг.

2. Юқорида келтирилган масалаларни шундай ифодалангки, масала шартини ўз ичига олган жумла шарт элементларини ўз ичига олмасин.

3. Юқоридаги масалаларда талабнинг буйруқ шаклини сувоқ шакли билан ва аксинча алмаштиринг.

4. 1- машқдаги масалаларни ечинг.

18. Текстли масалаларни ечиш усуллари

Масалани ечиш — бу масалада бевосита ёки билвосита мавжуд бўлган сонлар, миқдорлар, муносабатлар устида амаллар ва операцияларнинг мантиқан тўғри кетма-кетлиги орқали масалаларнинг талабини бажариш (унинг саволига жавоб бериш) демакдир.

Математикада масалаларни ечишнинг асосий усуллари сифатида арифметик ва алгебранк усуллар фарқ қилинади. Арифметик усулда масаланинг саволига жавоб сонлар устида арифметик амаллар бажариш натижасида топилади.

Айни бир масалани ечишнинг турлича арифметик усуллари берилганлар орасидаги, берилганлар билан номаълумлар орасидаги, берилганлар билан изланувчилар орасидаги арифметик амалларни танлашда асос бўлувчи муносабатлар билан ёки амалларни танлашда бу муносабатларни бажаришдаги кетма-кетликлар билан фарқ қилади.

Қонкрет масалани ечишнинг турли арифметик усулларини намоиш этамиз.

М а с а л а. 8 соатда ишчи 96 та бир хил деталь тайёрлайди. У 5 соатда нечта деталь тайёрлайди?

I усул

- 1) $96 : 8 = 12$ (дет)
 2) $12 \cdot 5 = 60$ (дет)

II усул

- 1) $8 : 5 = 1,6$ (марта)
 2) $96 : 1,6 = 60$ (дет)

III усул

- 8 соат = 480 мин.
 1) $480 : 96 = 5$ (мин)
 5 соат = 300 мин
 2) $300 : 5 = 60$ (дет)

Алгебраик усулда масаланинг саволига жавоб тенглама тузиш ва ечиш натижасида топилади.

Ҳарф (ҳарфлар) билан белгилаш учун номаълум (номаълумларни) танлашга, мулоҳазалар юритиш йўлларига боғлиқ равишда айни бир масала бўйича турлича тенгламалар тузиш мумкин. Бундай ҳолда бу масаланинг турлича алгебраик ечимлари ҳақида гапириш мумкин.

Конкрет масаланинг турлича алгебраик ечимларини кўриш асосий қамиз.

Масала. Коса ва иккита пиёлага 740 г сув кетади. Косага пиёлага қараганда 380 г кўп сув кетади. Косага неча грамм сув кетади?

I усул

Косага x г сув кетсин, у ҳолда битта пиёлага $(x - 380)$ г сув кетади, иккита пиёлага $(x - 380) \cdot 2$ г сув кетади, коса ва иккита пиёлага $(x + (x - 380) \cdot 2)$ г сув кетади. Коса ва иккита пиёлага 740 г сув кетгани учун бундай тенглама тузиш мумкин: $x + (x - 380) \cdot 2 = 740$. Уни ечиб $x = 500$, яъни косага 500 г сув кетишини топамиз.

II усул

Пиёлага x г сув кетсин, у ҳолда косага $(x + 380)$ г сув кетади, иккита пиёлага $2x$ г сув кетади, коса ва иккита пиёлага $((x + 380) + 2x)$ г сув кетади.

Коса ва иккита пиёлага 740 г сув кетганлиги учун бундай тенглама тузиш мумкин: $(x + 380) + 2x = 740$. Уни ечиб, $x = 120$ ни топамиз. Косага қанча сув кетишини топиш учун x нинг топилган қийматини $x + 380$ ифодага қўямиз. У ҳолда $120 + 380 = 500$. Демак, косага 500 г сув кетади.

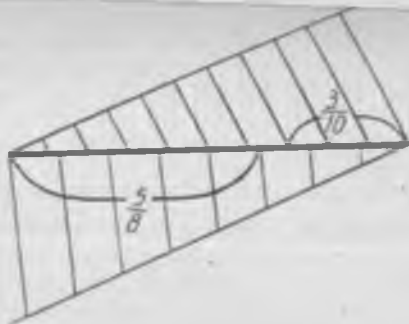
III усул

Косага x г сув, битта пиёлага y г сув кетсин, у ҳолда иккита пиёлага $2y$ г сув кетади, коса ва иккита пиёлага $(x + 2y)$ г сув кетади, битта пиёлага $(x - 380)$ г сув кетади. $x - 380$ ифода y нинг ўзи ҳамда коса ва иккита пиёлага 740 г сув кетгани учун қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} x - 380 = y, \\ x + 2y = 740. \end{cases}$$

Бу системани ечиб $x=500$, $y=120$ га эга бўламиз. Масалада косага қанча сув кетишини топиш талаб этилаётгани учун топилган маълумотлардан талаб этилаётганини танлаймиз.

Текстли масалаларни ечишнинг арифметик ва алгебраик усулларида ташқари математикада ечишнинг бошқа усулларида ҳам фойдаланилади.



Ушбу масалани қараймиз: Икки пунктдан бир-бирига то-

12- расм

мон икки пиёда йўлга чиқди. Биринчи пиёда йўлнинг $\frac{5}{8}$ қисмини, иккинчи пиёда $\frac{3}{10}$ қисмини ўтди. Бундай ҳолда пиёдалар учрашадими?

Пунктлар орасидаги масофани ихтиёрый кесма билан ифодалаймиз (12-расм). Фалес теоремасига асосланиб, кесмани тенг 8 ва 10 бўлакка бўламиз.

Фақат чизмага асосланиб, масаланинг саволига осон жавоб бериш мумкин: «Пиёдалар учрашмайди». Ечишнинг бундай усулини график усул деб аташ мумкин.

Баъзида масалани ечишнинг график усули фақат кесмаларни ясаш билангина эмас, балки уларнинг узунлигини ўлчаш билан ҳам боғлиқдир.

М а с а л а. Пионер звеноси биринчи кун мактаб биноси олдида 3 та терак ва 5 та қайин, иккинчи кун шунча терак ва 2 та кам қайин ўтқазди. Икки кунда звено нечта дарахт ўтқазган?

Ҳар бир дарахтни 1 см ли кесма билан тасвирлашни шартлашиб оламиз. У ҳолда икки кунда ўтқазилган ҳамма дарахтларни АВ кесма кўринишида тасвирлаш мумкин (13-расм).

Ҳамма дарахтларни тасвирловчи кесмани ўлчаб, масаланинг саволига жавоб оламиз: «Пионер звеноси икки кунда 14 та дарахт ўтқазди».

Баъзи масалаларни предметлар билан амаллар бажариш ёрдамида ечиш мумкин.

Масала қараймиз: «Совхозда 40 та автомашина — енгил ва юк машиналари бор, бунда ҳар бир енгил машинага 4 та юк машинаси тўғри келади. Совхозда нечта енгил машина ва нечта юк машинаси бор?



13- расм



14- расм

Ҳар бир машинани таёқча билан тасвирлаймиз (40 та машина — 40 та таёқча). Ҳар битта енгил машинага 4 та юк машинанинг учун битта таёқча қўямиз — бу енгил машина. Унинг остига 4 та таёқча қўямиз — бу юк машиналари.

Ишни ҳамма таёқчаларни шу тартибда қўйиб тугатгунча давом эттирамиз. Масаланинг саволига жавоб бериш учун юқориги қаторга нечта таёқча ва пастки қаторга нечта таёқча қўйилганини санаш етарли (14- расм).

Ечишнинг бундай усулини амалий усул деб аташ мумкин. Бу ҳам текстли масалаларни ечишнинг яна бир усулидир.

Машқлар

1. Қўйидаги масалаларни иккита арифметик усул билан ечинг:

1) Китобни нашр қилишда бир бетга 28 сатр ва ҳар бир сатрга 40 та ҳарф жойлаштириш кўзда тутилган эди. Бироқ қоғознинг ўлчамига қараб, бир бетга 35 сатр жойлаштириш мақсадга мувофиқ деб топилди. Китобдаги умумий бетлар сони ўзгаришсиз қолиши учун ҳар бир сатрга нечта ҳарф жойлаштириш керак?

2) Мотоциклчи 40 км/соат тезлик билан ҳаракатланиб, бирор масофани 12 минутда ўтди. Велосипедчи 15 км/соат тезлик билан ҳаракатланиб, бу масофани неча минутда ўтади?

2. Ушбу масалани турлича алгебраик усуллар билан ечинг: 560 тахта қоғоздан икки хил навли 60 та дафтар тайёрланди, бунда бир нав дафтарга 8 тахта, иккинчи нав дафтарга 12 тахта қоғоз сарфланди. Ҳар бир нав дафтардан алоҳида нечтадан тайёрланган?

Бу масалани арифметик усул билан ечиш мумкинми?

3. Қўйидаги масалаларни аввал чизмалар чизиб, кейин ечинг:

1) Бир бўлак сим иккинчи бўлак симдан 54 м узун. Ҳар бир бўлак симдан 12 м дан қирқиб олингандан сўнг, иккинчи бўлакда биринчидан 4 марта қисқа сим қолди. Ҳар бир бўлак симнинг дастлабки узунлигини топинг.

2) Токчада ликобчалар турибди. Дастлаб ҳамма ликобчаларнинг $\frac{1}{3}$ қисми олинди, кейин қолган ликобчаларнинг $\frac{1}{2}$ қисми олинди. Шундан сўнг токчада 9 та ликобча қолди. Токчада нечта ликобча бўлган?

4. График усул билан ечинг:

Иккита бола 96 та ёнғоқ терди. Биринчи бола терган ёнғоқларнинг $\frac{2}{3}$ қисми иккинчи бола терган ёнғоқларнинг $\frac{2}{5}$ қисмига тенг. Ҳар бир бола нечта ёнғоқ терган?

19. Арифметик усулларда масалалар ечиш босқичлари. Масала мазмунини таҳлил қилиш усуллари

Текстли масалаларни арифметик усулда ечиш — бу мураккаб фаолият бўлиб, унинг мазмуни конкрет масалага ҳам, ечувчининг малакасига ҳам боғлиқ. Шундай бўлсада, унда бир неча босқични ажратиш мумкин:

1. Масаланинг мазмунини тушуниб етиш ва таҳлил қилиш.
2. Масаланинг ечиш планини излаш ва тузиш.
3. Ечиш планини бажариш. Масаланинг талабини бажариш ҳақидаги хулосани ифодалаш (масаланинг саволига жавоб бериш).

4. Ечимни текшириш ва агар хато бўлса, уни тузатиш. Масаланинг талабини бажариш ёки масаланинг саволига жавоб бериш ҳақидаги узил-кесил хулосани ифодалаш.

Шуни таъкидлаш керакки, масала ечишнинг конкрет жараёнида айтиб ўтилган босқичлар қатъий чегарага эга эмас ва ҳар доим ҳам бирдай тўла бажарилмайди. Масалан, баъзида масалани тушуниб етишнинг ўзидаёқ ечувчи берилган масала унга маълум қўринишдалигини ва уни қандай ечишни билишини пайқashi мумкин. Бундай ҳолда ечимни излаш алоҳида босқичларга ажратилмайди ва дастлабки учта босқични бажаришда ҳар бир қадамни асослаш ечувчини ечишни бажаргандан кейинги текширишдан қутқаради. Бироқ тўла, мантиқан тугалланган ечим албатта барча босқичларни ўз ичига олади.

Босқичлардан ҳар бирини бажаришнинг мумкин бўлган усуллари билиш ҳар қандай масалани ечиш жараёнини тушунарли, мақсадга мувофиқ, ва демак, анча муваффақият билан бажариш имконини беради.

Ечишнинг биринчи босқичининг асосий мақсади — ечувчининг масалада ифодаланувчи бутун вазиятини тушуниши, масаланинг шартини, унинг талабини ёки саволини текстда мавжуд бўлган барча термин ва белгилар мазмунини тушунишидан иборат.

Қўлланилиши масаланинг мазмунини тушунишга имкон берувчи бир қанча усуллар мавжуд.

Масалан, ушбу масалани ўқинг:

Пулда айнан бир йўналишда икки бола кетмоқда. Дастлаб улар орасидаги масофа 2 км эди, бироқ олдинда бораётган боланинг тезлиги 4 км/соат, иккинчи боланинг тезлиги эса 5 км/соат бўлгани учун иккинчи бола биринчи болага яқинлашиб боради. Ҳаракат бошлангандан то иккинчи бола биринчисига етиб олгунча улар орасида ўртача 8 км/соат тезлик билан ит югуради. Ит орқадаги боладан олдинда кетаётган бола томон югуради, унга етгач, орқасига қайтади ва бу ҳаракатни болалар ёнма-ён келгунча давом эттиради. Шу бутун вақт давомида ит қанча йўл босади?

Агар текст бўйича махсус саволлар бериб ва уларга жавоб берилса, бу масаланинг мазмунини тушуниб етиш, унинг шарт ва талабини ажратиш олиш мумкин.

1. Бу масала нима ҳақида? (Икки бола ва итнинг ҳаракати ҳақидаги масала. Бу ҳаракат унинг ҳар бир қатнашчиси учун тезлик, вақт ва ўтилган масофа билан характерланади).

2. Масалада нимани топниш талаб этилади? (Масалада шу бутун вақт мобайнида ит босиб ўтган масофани топниш талаб этилади.)

3. «Шу бутун вақт мобайнида» сўзлари нимани англатади? (Масалада айтилишича ит ҳаракат бошлангандан то иккинчи бола биринчисига етиб боргунча икки бола орасида югуради. Шунинг учун «шу бутун вақт мобайнида» сўзлари «ҳаракат бошлангандан то иккинчи бола биринчисига етиб боргунча бўлган вақт» маъносини англатади.)

4. Масалада унинг ҳар бир қатнашчисининг ҳаракати ҳақида нима маълум? (Масалада қуйидагилар маълум: 1) Болалар бир хил йўналишда кетмоқда; 2) ҳаракат бошлангунга қадар болалар орасидаги масофа 2 км эди; 3) олдинда бораётган биринчи боланинг тезлиги 4 км/соат; 4) орқада бораётган иккинчи боланинг тезлиги 5 км/соат; 5) итнинг югуриш тезлиги 8 км/соат; 6) ҳамма қатнашчиларнинг ҳаракат вақти бир хил; бу болалар орасидаги масофа 2 км бўлгандаги ҳаракатнинг бошланишидан то болаларнинг учрашиш пайтигача, яъни улар орасидаги масофа 0 км бўлгунча бўлган вақт.)

5. Масалада нима номаълум? (Масалада иккинчи бола биринчи болани қанча вақтда қувиб етиши, яъни унинг ҳамма қатнашчиларининг ҳаракат вақти номаълум. Шунингдек, болаларнинг яқинлашиши қандай тезликда юз бераётгани ҳам номаълум. Ва ит босиб ўтган масофа ҳам номаълум — масалада бунни аниқлаш талаб этиляпти.)

6. Нима изланувчи: сонми, катталиكنинг қийматими, муносабатнинг турими? (Катталиكنинг қиймати — ҳамма қатнашчилар учун умумий бўлган вақт мобайнида итнинг босиб ўтган йўли изланувчи бўлади.)

Масаланинг мазмунини тушуниб етишда ва масала ечимини излаш учун асос яратишда масала текстини қайта ифодалаш — вазиятларнинг берилган ифодасини, барча муносабатларни, боғланиш ва миқдорий характеристикаларни сақловчи, бироқ уларни анча ошкор тасвирловчи бошқа ифодаси билан алмаштириш катта ёрдам беради. Бу воситадан текстни маъноли қисмларга ажратиш мақсадларида фойдаланиш айниқса самаралидир.

Қайта ифодалашнинг йўналишлари қуйидагича бўлиши мумкин: муҳим бўлмаган, ортиқча маълумотларни чиқариб ташлаш; айрим тушунчалар ифодасини мос терминлар билан алмаштириш ва аксинча, айрим терминларни уларга мос тушунчалар маъносининг ифодаси билан алмаштириш; масала текстини ечимни излаш учун қулай бўладиган шаклда қайта тузиш.

Асосий вазиятларни ажратиш қайта ифодалашнинг натижаси бўлиши керак. Масалан, юқорида келтирилган масалада гап ҳаракат ҳақида бораётганлигини таъкидлаб, уни қуйидагича қайта ифодалаш мумкин:

«Биринчи боланинг тезлиги 4 км/соат, уни қувиб бораётган боланинг тезлиги 5 км/соат (масаланинг биринчи қисми). Болалар бир-бирига яқинлашиб бораётган масофа 2 км (иккинчи қисм). Болаларнинг юриш вақти — бу иккинчи боланинг биринчи болага етиб олгунча бўлган вақт, яъни иккинчи боланинг биринчи боладан 2 км кўп йўл ўтиши учун сарфланган вақт (учинчи қисм). Итнинг югуриш тезлиги 8 км/соат. Итнинг югуриш вақти болаларнинг учрашгунча юрган вақтига тенг. Ит югуриб ўтган масофани топиш талаб этилади.

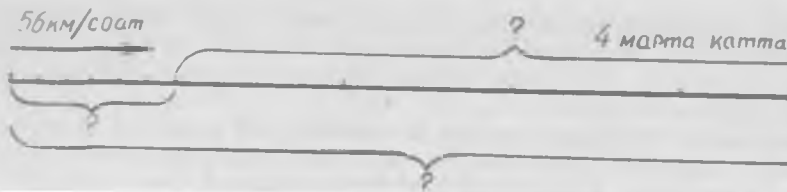
Яна қуйидагича масалани қараймиз: «Икки токчада шу токчалардан биридагига қараганда 5 та кўп китоб бор. Иккинчи токчада нечта китоб бор?»

Текстни биринчи марта ўқиб чиққандан кейин масалада иккинчи токчадаги китоблар ҳақида маълумотлар етишмаётгандек туюлади. Бироқ: «5 та кўп китоб» муносабатининг маъносини очиш билан масалани қайта ифодалашга ҳаракат қилиб кўрамиз. Қуйидаги текстга эга бўламиз: «Икки токчада биринчи токчада қанча китоб бўлса, шунча ва яна 5 та китоб бор. Иккинчи токчада қанча китоб бор?» Текстни ундаги «икки токчада» сўзини «биринчи ва иккинчи токчаларда биргаликда» сўзи билан алмаштириб, яна бир марта қайта ифодаляймиз: «Биринчи ва иккинчи токчаларда биргаликда биринчи токчада қанча китоб бўлса, шунча ва яна 5 та китоб бор. Иккинчи токчада қанча китоб бор?» Яна ҳам аниқлаштириш мумкин: «Биринчи ва иккинчи токчадаги китобларнинг биргаликдаги сони — бу биринчи токчадаги китоблар сони ва яна 5 та китобдир. Иккинчи токчада нечта китоб бор?»

Бу текстдан 5 та китоб — бу иккинчи токчадаги китоблар экани энди тушунарли. Шундай қилиб, мазкур ҳолда қайта ифодалаш нафақат масаланинг мазмунини тушуниб етишга олиб келди, балки (унча мураккаб бўлмаган мантикий мулоҳазаларни бажаргандан сўнг) масаланинг саволига жавоб бериш имконини берди.

Қайта ифодаланган текстни схематик кўринишда ёзиш кўп ҳолларда ифодали бўлади. Масалан, биринчи масаланинг қайта ифодалангандан кейинги мазмунини қуйидаги жадвал кўринишида ёзиш мумкин:

Тезлик	Вақт	Масофа
1- бола 4 км/соат 2- бола 5 км/соат Ит 8 км/соат	? ? ? Бир хил	? ? 2 км кўп ?



15-расм

Қайта ифодаланган текстнинг схематик ёзуви бошқача кўринишга ҳам эга бўлиши мумкин. Масалага қараймиз: «Турист 56 км/соат бўлган поездда 6 соат юрди. Шундан сўнг унга юрганидан яна 4 марта кўп йўл юриш қолди. У ҳаммаси бўлиб неча километр йўл юриши керак эди?».

Қайта ифодалангандан сўнг текст қуйидагича кўринишга эга бўлиши мумкин: «Турист 56 км/соат тезлик билан 6 соат юрди. 4 марта кўп йўл юриш қолди. Бутун йўлни топиш талаб этилади».

Бу масаланинг схематик ёзувини қуйидагича бажариш мумкин:

Юрди — 56 км/соат тезлик билан 6 соат.

Юриш қолди —?, 4 марта кўп.

Келтирилган ёзувда масалада ифодаланган барча вазиятлар — берилганлар, маълумлар, изланувчилар ва улар орасидаги муносабатлар акс эттирилган.

Масалани таҳлил қилишнинг муҳим воситаси чизмадир. Масалан, охириги масалага бундай чизма чизилган бўлиши мумкин (15-расм).

У катталиклар, миқдорлар орасидаги барча алоқа ва боғланишларни кўргазмалли тасвирлайди, бу масала ечимини излашда анча енгиллаштиради.

Машқлар.

1. Текст бўйича махсус саволлар бериб ва уларга жавоб айтиб, қуйида келтирилган масалалар мазмунини таҳлил қилинг. Масалаларни ечинг:

1) Дарё оқими бўйлаб ўтилган йўлга теплоход 18 соат сарфлади. Агар теплоходнинг ўз тезлиги 26 км/соат, дарё оқимининг тезлиги эса 2 км/соат бўлса, орқага қайтиш учун теплоходга қанча вақт керак бўлади?

2) Болалар 140 челақ сув келтириб, 8 та олма ва 4 та олча дарахтини суғордилар. Агар бир туп олма дарахтини суғориш учун бир туп олча дарахтини суғоришга кетганидан 3 марта кўп сув кетган бўлса, олма дарахтининг остига неча челақ ва олча дарахтининг остига неча челақ сув қуйилган?

3) Эрталаб хирмонда 96,5 т буғдой бор эди, тушгача хирмонга ҳар бирида 4,5 т дан буғдой бўлган уч машина буғдой келтирилди.

ҳамма буғдойнинг $\frac{3}{5}$ қисми тегирмонга жўнатиладигандан кейин хирмонда неча тонна буғдой қолди?

2. Масала текстини маъноли қисмларга ажратинг ва асосий вазиятларни кўрсатиш билан уни қайта ифодаланг. Масалаларни ечинг:

1) Бир мактаб пионерлари 80 т темир-терсак, бошқа мактаб пионерлари эса бу миқдорнинг $\frac{5}{8}$ қисмича темир-терсак тўплашди. Тўплаган ҳамма темир-терсаклардан рельслар тайёрланди. Агар ҳар 10 т темир-терсакдан 70 м рельс чиқса, ҳаммаси бўлиб неча метр рельс чиққан?

2) Яшиқда 100 кг дон бор эди. Яшиқдан 2 қоп дон олингандан сўнг унда ҳамма доннинг 10% қолди. Агар қоплардан бирига иккинчисига нисбатан 2 марта кам дон солинган бўлса, ҳар бир қопга қанчадан дон солинган?

3. Масалани ечиш планини аниқлаш учун қайта ифодаланган текстни ёзишнинг қандай усули (қисқача ёзув, жадвал, схематик чизма) анча самарали бўлишини топинг.

Аэродромдан 210 км/соат тезлик билан вертолёт учиб кетди. 2 соатдан сўнг шу аэродромдан самолёт учди ва у 3 соатдан кейин вертолётдан 840 км ўзиб кетди. Самолётнинг тезлигини топинг.

20. Масалани ечиш планини излаш усуллари ва уни бажариш

Арифметик усуллар билан масалани ечиш планини излашнинг анча кўп тарқалган усулларида бири (берилган ёки қайта ифодаланган) текст бўйича масалани таҳлил қилишдир.

Текст бўйича масалани таҳлил қилиш масаладаги берилганлардан ҳам, унинг саволларидан ҳам бошланиши мумкин бўлган мулоҳазалар занжири кўринишида ўтказилиши мумкин.

Масалани берилганлардан саволга томон таҳлил қилишда масала текстида иккита маълумотни ажратиш ва улар орасидаги боғланишга оид билимларга (бундай билимлар ечишнинг биринчи босқичини бажариш даврида эгалланган бўлиши керак) асосланган ҳолда бу берилганлар бўйича қандай топилиши мумкинлигини аниқлаш керак. Буни номаълумни берилган маълумот деб ҳисоблаб, яна ўзаро боғланган иккита маълумотни ажратиш, унинг ёрдамида топилиши мумкин бўлган номаълумни ва шунингдек, мос арифметик амални аниқлаш керак ва ҳоказо. Бу жараён бажарилиши изланувчининг ҳосил қилишга олиб келувчи амални аниқлашда давом эттирилади.

19-пунктда қаралган масаланинг тексти бўйича қуйидаги таҳлилни келтирамиз. «Турист 56 км/соат тезлик билан 6 соат юрди. Юрганидан 4 марта кўп йўл қолди. Бутун йўлни топиш талаб этилади».

Мулоҳазани берилганлардан саволга томон олиб борамиз: «Турист 56 км/соат тезлик билан 6 соат юргани маълум. Бу маълумотлар асосида турист ўтган масофани топиш мумкин. Бунинг учун тезликни вақтга кўпайтириш етарли. Утилган масофани ва қолган масофа ўтилган масофадан 4 марта кўп эканини билган ҳолда қолган масофа қанчага тенг эканини топиш мумкин. Бунинг учун ўтилган масофани 4 га кўпайтириш (4 марта орттириш) керак. Турист неча километр юрганини ва у яна қанча юриши керак эканини билган ҳолда йўлнинг топиш қисмларини, бутун йўлни топиш мумкин. Шундай қилиб, биринчи амал билан турист поездда ўтган масофани топамиз: иккинчи амал билан турист ўтиши керак бўлган қолган масофани, учинчи амал билан — бутун йўлни топамиз».

Масалани саволдан берилганлар томон таҳлил қилишда саволга эътибор бериш ва масала саволига жавоб бериш учун нимани билиш етарли эканини (масала текстини таҳлил қилиш пайтида олинган ахборот асосида) аниқлаш керак. Масала шартига эътибор бериш ва унинг учун зарур маълумотлар бериш қилини аниқлаш керак. Агар бундай маълумотлар йўқ бўлса ёки фақат биттагина маълумот бўлса, у ҳолда етишмаётган маълумотни (маълумотларни) топиш учун нимани билиш кераклигини аниқлаш керак. Кейин план тузилади. Бундай ҳолда мулоҳаза тескари тартибда ўтказилади.

Мулоҳазалар занжирини саволдан берилганлар томон қуриб, айнан шу масаланинг қуйидагича таҳлилини келтирамиз:

«Масалада бутун йўлни топиш талаб этилади. Биз бутун йўлни икки қисмдан иборат эканини аниқладик. Демак, масала талабини бажариш учун турист неча километр ўтганини ва яна неча километр ўтиши кераклигини билиш етарли. Унис ҳам, буниси ҳам номаълум. Утилган йўлни топиш учун туристнинг йўлга сарфлаган вақтини ва тезлигини билиш етарли. Масалада бу маълум. Тезликни вақтга кўпайтириб, ўтилган йўлни топамиз. Утилган йўлни 4 марта орттириб (4 га кўпайтириб) қолган йўлни топиш мумкин. Шундай қилиб, дастлаб ўтилган йўлни топиш мумкин, кейин қолган йўлни, ундан кейин эса қўйиш билан бутун йўлни топиш мумкин».

Масала ечимини излаш биринчи босқичда тузилган чизма ва схематик ёзув бўйича ўтказилиши мумкин.

Схема бўйича ечимни излашни қандай амалга ошириш мумкинлигини кўрсатамиз. Масала қараймиз:

«Бидонда сут бор эди. Дастлаб унинг ярми ва яна 5 л, кейин эса қолганининг $\frac{1}{3}$ қисмича сут қуйиб олинди. Шундан сўнг бидонда 10 л сут қолди. Бидонда неча литр сут бўлган?».

AB кесма (16-расм) изланувчи қийматни ифодаласин. Чизмадан бу кесма иккита тенг қисмга бўлинганлиги кўриниб турибди: $AO=OB$, AO кесма бир неча қисмлардан ташкил топган. Бунда 10 л ни тасвирловчи кесма учта тенг қисмлардан икки-

тасини ўз ичига олиши кўриниб турибди. У ҳолда булардан бири (10:2) л ни, яъни 5 л ни тасвирлайди. Энди бутун кесманинг бу ярми ҳар бири 5 л ни тасвирловчи тўртта тенг қисмдан ташкил топганлиги маълум бўлади. У ҳолда масаланинг саволига жавоб бериш учун 5 ни 4 га ва 2 га кўпайтириш етарли. Қўзда тутилган планни бажариб, ушбуга эга бўламиз: $10:2=5$ (л). $5 \cdot 4 \cdot 2=40$ (л).

Қуйидаги масалани ечиш плани масала текстини жадвал ёрдамида ёзгандан сўнг осон топилади.

М а с а л а. Агар 12 кг металлдан 8 та деталь чиқса, 36 кг металлдан неча деталь чиқади?

1 та деталнинг массаси	Деталлар сони	Ҳамма деталлар массаси
	8	12 кг
Бир хил	?	36 кг

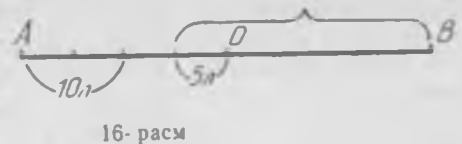
Жадвал графаларига учта катталикнинг қийматлари киритилган. Улардан иккитасининг биринчи сатрда ёзилган маълум қийматлари бўйича учинчи катталикнинг қиймати, яъни битта деталнинг массасини топиш мумкин. Натижада иккинчи сатрда иккита катталикнинг қийматлари пайдо бўлади, булар ёрдамида деталларнинг изланаётган миқдорини топиш мумкин.

Ечишнинг учинчи босқичи қўзда тутилган планни амалга оширишдир. Планни бажариш оғзаки шаклда ҳам, ёзма шаклда ҳам ўтказилиши мумкин. Масала ечимини ёзишнинг қуйидаги шакллари маълум.

1. Масала шарт бўйича ифодаalar тузиш. Ечимнинг бундай шаклдаги ёзуви босқичма-босқич амалга оширилади. Дастлаб натижада ифодага олиб келувчи алоҳида қадмлар ёзилади, шундан сўнг ифоданинг қиймати топилади ва ёзув тенглик кўринишини олади. Бу тенгликнинг чап қисми масала шарт бўйича тузилган ифодадан, ўнг қисми эса унинг қийматидан иборат. Шунинг ўзи масала талабининг бажарилиши ҳақида хулоса чиқаришга (масала саволига жавоб беришга) имкон беради.

Қуйида шундай шаклда ёзишнинг намуналари кўрсатилган:

56·6(км) — турист поездда 6 соатда ўтган масофа.
 56·6·4(км) — турист ўтиши керак бўлган қолган масофа.
 56·6 + 56·6·4(км) — турист ўтиши керак эди.
 56·6 + 56·6·4 = 1680(км).



Жавоб: 1680 км.

Амалларга доир тушунтиришларни ёзмасдан уларни оғзаки формада бериш мумкин. У ҳолда ечимнинг ёзуви қуйидаги кўриниш олади:

$$56 \cdot 6 + 56 \cdot 6 \cdot 4 = 1680 \text{ (км)}.$$

Жавоб: 1680 км.

II. Амаллар бўйича бажарилган ҳар бир амал тушунтириш билан ёзиш.

Масалан:

$56 \cdot 6 = 336$ (км) — турист поездда 6 соатда ўтган йўл.

$336 \cdot 4 = 1344$ (км) — турист ўтиши керак бўлган қолган йўл.

$336 + 1344 = 1680$ (км) — турист ўтиши керак бўлган бутун йўл.

Агар тушунтиришлар оғзаки формада бўлса, у ҳолда ечимнинг ёзилиши қуйидагича бўлади:

$$56 \cdot 6 = 336 \text{ (км)}$$

$$336 \cdot 4 = 1344 \text{ (км)}$$

$$336 + 1344 = 1680 \text{ (км)}$$

Жавоб: 1680 км.

III. Планнинг ҳар бир пунктини мос арифметик амаллар билан ёзиш. Турист 6 соатда ўтган масофани топамиз:

$$56 \cdot 6 = 336 \text{ (км)}.$$

Турист ўтиши керак бўлган қолган масофани топамиз:

$$336 \cdot 4 = 1344 \text{ (км)}.$$

Турист ўтиши керак бўлган бутун масофани топамиз:

$$336 + 1344 = 1680 \text{ (км)}.$$

Жавоб: 1680 км.

IV. Саволларни ва мос амалларни ёзиш.

1) Турист поездда неча километр юрган?

$$56 \cdot 6 = 336 \text{ (км)}.$$

2) Турист яна неча километр йўл юриши керак?

$$336 \cdot 4 = 1344 \text{ (км)}.$$

3) Турист ҳаммаси бўлиб неча километр йўл юриши керак эди?

$$336 + 1344 = 1680 \text{ (км)}.$$

Жавоб: 1680 км.

Машқлар

1. Масаланинг мазмунини анализ қилинг, унинг таҳлилининг ўтказинг ҳамда ечимини саволлар ва мос амаллар шаклида ёзинг:

«Теплоход капитанп 16 соатда 540 км масофани ўтиш топшириғини олди. Теплоход 180 км ни 30 км/соат тезлик билан сузиб ўтди. Тегишли вақтда топшириқни бажариш учун теплоход қолган масофани қандай тезликда сузиб ўтиши керак?».

2. Масалани ечишнинг иккита арифметик усулини топинг, битта ечимни амаллар бўйича, иккинчи ечимни ифода тузиб ёзинг:

«Қишлоқдан ундан 27 км масофадаги шаҳарга велосипедчи жунади. Йўлнинг $\frac{1}{3}$ қисмини ўтиб, у қишлоққа қайтди, у ерда ярим соат бўлди ва шундан сўнг яна шаҳарга жунади. Агар велосипедчининг тезлиги 15 км/соат бўлса, у шаҳарга етиб бориш учун қанча вақт сарфлаган?

Бу масалани алгебраик усул билан ечиш мумкинми?

3. Масалани арифметик усул билан ечинг:

«Уйнинг томида бир нечта каптар ўтирган эди. Томга 15 та каптар келиб қўниб, 18 та каптар учиб кетгандан сўнг томда 16 та каптар қолди. Дастлаб томда нечта каптар бор эди?»

Ечишни амаллар бўйича, бажарилган ҳар бир амални тушунтириш билан ёзинг.

4. Ушбу масала берилган: икки дурадгор биргаликда 140 сўм ишлади. Улардан бири кунига 7 соатдан 14 кун, иккинчиси кунига 6 соатдан 7 кун ишлади. Агар дурадгорларнинг бир соатли иш ҳақи бир хил бўлса, уларнинг ҳар бири неча сўм ишлаган?».

1) Масала шартини қисқача ёзинг.

2) Берилган масалани таҳлил қилишнинг қайси усули самаралироқ бўлишини аниқланг.

3) Масалани арифметик усул билан ечинг.

5. Берилган масалани таҳлил қилишнинг қайси усули самаралироқ бўлади:

«Бир бидонда 36 л сут бор. Бу бидондан бошқасига 4 л сут қўйиб олингандан кейин иккала бидонда баравар сут бўлди. Иккинчи бидонда неча литр сут бўлган?»

6. Ушбу масала берилган: «Ораларидаги масофа 76 км бўлган икки қишлоқдан бир-бирига томон икки велосипедчи йўлга чиқди. 2 соатдан сўнг улар учрашди. Агар велосипедчилардан бирининг тезлиги иккинчисиникидан 3 км/соат кам экани маълум бўлса, улардан ҳар бирининг тезлиги қандай?

Масалани ечишнинг турли усулларини таққосланг.

I усул

II усул

1) $76 : 2 = 38$ (км)

1) $3 \cdot 2 = 6$ (км)

2) $38 - 3 = 35$ (км/соат)

2) $76 - 6 = 70$ (км)

3) $35 : 2 = 17,5$ (км/соат)

3) $70 : 2 = 35$ (км)

4) $17,5 + 3 = 20,5$ (км/соат)

4) $35 : 2 = 17,5$ (км/соат)

5) $17,5 + 3 = 20,5$ (км/соат)

Қайси усулда мулоҳаза соддароқ?

21. Масала ечимини текшириш усуллари

Текшириш ечининг якунловчи босқичига киради, бунинг натижасида бажарилган ечининг тўғри ёки нотўғри эканлиги аниқланади.

Текширишда қатор ақлий ёки амалий фаолиятлар асосида қуйидаги мулоҳаза кўринишидаги хулоса чиқарилиши керак «... бўлгани учун масала тўғри (нотўғри) ечилган».

Масаланинг тўғри ёки нотўғри ечилганлигини аниқлаш ёрдам берадиган бир неча усул маълум.

1. Чамалаб кўриш. Бу усулнинг моҳияти ечиш натижасининг тўғрилигини бирор даражадаги аниқликда олдиндан айтишдан иборат. Чамалаб кўриш усулини қўлланиш фақат масалани ечганда чиққан натижа олдиндан айтилган натижага мос келмаган ҳолдагина «Масаланинг ечими тўғрими?» деган саволга аниқ жавоб беради.

Бу усулдан фойдаланиб, қуйидаги масалалар ечимини текширишда мулоҳаза қандай ўтказилишини кўрсатамиз.

Бир бўлакда 5 м газлама бор, иккинчисида шундай газламадан 7 м бор. Агар иккала бўлак учун 36 сўм тўланган бўлса, ҳар бир бўлак қанча туради?

Дастлаб масала мазмунини таҳлил қилиш асосида ҳар бир бўлак газламанинг нархи 36 сўмдан кам ва иккинчи бўлак биринчидан арзон эканини аниқлаймиз. Ушбу: $5 + 7 = 12$ (м), $36 : 12 = 3$ (сўм), $3 \cdot 5 = 15$ (сўм), $3 \cdot 7 = 21$ (сўм) ҳисоблашларни бажариб, ҳақиқатан ҳам бир бўлак газламанинг 36 сўмдан кам туришини ва иккинчи бўлак биринчисидан қиммат эканини аниқлаймиз. Ҳосил қилинган натижа олдиндан айтилган натижага мос келяпти, кўринишдан масала тўғри ечилган.

Давом эттирамиз ва бу масалани ечиш натижасида қуйидагига эга бўламиз: биринчи бўлак 25 сўм, иккинчиси эса 21 сўм туради. Бу натижаларни олдиндан айтилган натижалар билан таққослаб, ҳар бир бўлак 36 сўмдан арзон туришини, бироқ иккинчи бўлак биринчисидан арзон (аслида қиммат бўлиши керак) эканини ҳосил қиламиз. Демак, ечишда қаярдадир хатога йўл қўйилган ва нотўғри натижа олинган. Хатони топиш учун олдин ҳисоблашлар текшириб кўрилади. Агар ҳисоблашларда хато топилмаса, у ҳолда ечишни янгидан ўтказиш мумкин. Ҳар бир амални масала шартлари билан таққослаш ва унинг маъносини, амаллар тўғри ёки нотўғри танланганлигини текшириш мумкин.

2. Ҳосил қилинган натижа билан масала шартларини таққослаш. Бу усулнинг моҳияти қуйидагидан иборат: топилган натижа масала текстига киритилади ва мулоҳазалар асосида бунда зиддият вужудга келиш-келмаслиги аниқланади.

Ушбу «Ўтказиш учун 600 туп ўрик ва 400 туп олма кўчатларни келтирилди. Улар қаторларга баравардан ўтказилди. Бун-

да ўрик ўтказилган қатор олма ўтказилган қатордан 5 та кўп бўлди. Ўрик ва олма ўтказилган қаторлар алоҳида нечтадан бўлди?» Масалани ечишда олма 10 қатор ва ўрик 15 қатор бўлиши келиб чиқсин.

Масаладаги саволлар ўринга уларнинг жавобларини қўйиб масала текстини ўқиймиз: «Ўтказиш учун 600 туп ўрик ва 400 туп олма кўчатлари келтирилди. Улар қаторларга баравардан ўтказилди. Бунда ўрик ўтказилган қатор олма ўтказилган қатордан 5 та кўп бўлди. Ўрик 15 қатор, олма 10 қатор бўлди».

Бу текстда зиддият бор-йўқлигини аниқлаймиз. Масалан, бундай мулоҳаза юритамиз. Шартда айтилишича: «Ўрик ўтказилган қатор олма ўтказилган қатордан 5 та кўп бўлди». Ҳосил бўлган ўрик қаторлари сонини олма қаторлари сони билан таққослаймиз. Ўрик қаторларни 15 та, олма қаторларни — 10 та. 15 сони 10 дан 5 та кўп. Демак, бу муносабат бажарилмапти.

Масалада мавжуд бўлган бошқа муносабатни: ҳар бир қатордаги дарахтлар сонининг тенглик шартини текшираемиз. Бунинг учун бир қатордаги ўриклар сонини ва бир қатордаги олмалар сонини аниқлаймиз: $600 : 15 = 40$, $400 : 10 = 40$. Бу муносабат ҳам бажарилди.

Масалада мавжуд бўлган ҳамма муносабатлар текширилди ва зиддият йўқлиги аниқланди. Демак, масала тўғри ечилган.

3. Масалани турли усуллар билан ечиш. Масалани бирор-бир усул билан ечганда бирор натижа ҳосил бўлган бўлсин. Агар уни бошқа усул билан ечганда яна шундай натижа келиб чиқса, у ҳолда масала тўғри ечилганлиги ҳақида хулоса чиқариш мумкин.

Айтилганларни конкрет мисолда тушунтирамиз. Ушбу масалани қараймиз: «А пунктдан 60 км/соат тезлик билан юк машинаси жўнади. 2 соатдан сўнг унинг кетидан А дан 90 км/соат тезлик билан енгил машина жўнади. А дан қандай масофада енгил машина юк машинасига етиб олади?».

Бу масала арифметик усул билан қуйидагича ечилган бўлсин:

$$90 - 60 = 30 \text{ (км/соат)}$$

$$60 \cdot 2 = 120 \text{ (км)}$$

$$120 : 30 = 4 \text{ (соат)}$$

$$90 \cdot 4 = 360 \text{ (км)}$$

Жавоб: енгил машина юк машинасига А пунктдан 360 км масофада етиб олади.

Олинган натижанинг тўғрилигини текшириш учун бу масалани алгебраик усул билан ечиш, яъни $x \cdot 90 = (x - 2) \cdot 60$ тенглама тузиш (бунда, x соат — енгил машинанинг ҳаракатланиш вақти) мумкин. Натижа арифметик усулда ечиш натижасининг худди ўзи бўлади. Демак, мазкур масала арифметик усулда ҳам тўғри ечилган.

Агар масала дастлаб арифметик усул билан ечилган бўлса, у ҳолда унинг ечимининг тўғрилигини бу масалани тенглама тузиш усули билангина текшириш мумкин эмаслигини эслатиб ўтамиз. Бу ҳолда текшириш усули уни график ечиш ҳам, шу-

нингдек биринчи арифметик усулдан фарқ қилувчи бош арифметик усул билан ечиш ҳам бўлиши мумкин.

Шунингдек, текширишсиз текстли масаланинг ечими бўлмади деб ўйламаслик ҳам керак. Ечимнинг тўғри бўлиши бирин навбатда масала устида ишлашнинг ҳамма бошқа босқичлариниқ ва мантиқий мулоҳаза юритиш орқали таъминланади.

Машқлар

1. Масалани ечинг ва текширишни натижа билан масала шarti орасида мослик ўрнатиш усули ёрдамида бажаринг.

1) Спортчи найзани ядрога нисбатан 5 марта узоққа ёки 48 м узоққа улоқтирди. Найза неча метр масофага ва ядро неча метр масофага бориб тушган?

2) Турли малакали икки ишчи 6 соатда биргаликда би ишни бажарди. Биринчи ишчининг меҳнат унумдорлиги иккинчисиникидан 20% ортиқ. Иккинчи ишчи бутун ишни қанча вақт нчида бажара олиши мумкин?

2. Масалани турли усуллар билан ечинг:

1) Автомобиль 60 км/соат тезлик билан ҳаракатланса, А нуқтадан В нуқтагача бўлган масофани 3 соат-у 15 минутда ўтади. Агар автомобиль тезлигини 15 км/соат оширса, у ш масофани қанча вақтда ўтади?

2) 4,5 м газламага 18 сўм тўланди. Худди шу газламанинг 27 метри қанча туради?

22. Масалаларни алгебраик усуллар билан ечиш

Ҳар қандай масалани алгебраик усул билан ечишда масаланинг мазмунини таҳлил қилгандан сўнг номаълум танланади, ҳарф билан белгиланади, масала текстига киритилади, шундан сўнг масала мазмунда ажратилган боғланиш асосида тенглик муносабати билан боғланган иккита ифода тузилади, бу мос тенгламани ёзиш имконини беради. Тенгламани ечиш натижасида топилган илдиэлар масала мазмуни нуқтан назаридан кўриб чиқилади, масала шартига мос келмаган илдиэлар чиқариб ташланади. Агар ҳарф билан изланувчи белгиланган бўлса, қолган илдиэлар масала саволига бирданига жавоб бериши мумкин. Агар ҳарф билан изланувчи бўлмаган номаълум белгиланган бўлса, у ҳолда изланувчи ҳарф билан белгиланган номаълум ва изланувчи орасидаги ўзаро боғланиш асосида топилади.

Алгебраик усулда ечишнинг барча босқичларини қуйидаги масала мисолида кўрсатамиз: «Тўғри тўртбурчак шаклига эга бўлган томорқанинг бир томони иккинчи томонидан 10 м катта. Шу томорқани девор билан ўраб чиқиш талаб этилади. Агар томорқа майдонининг юзи 1200 м² экани маълум бўлса, деворнинг узунлигини аниқланг».

Масаланинг мазмунини таҳлил қилиш ва уни алгебраик ечиш усулида бажариш йўллари арифметик усулда ечишдаги мос йўللардан деярли фарқ қилмайди, шунинг учун бундай таҳлилнинг фақат натижасини келтирамиз холос.

Масалада тўғри тўртбурчак шаклидаги майдон қаралмоқда. Унинг бир томони иккинчи томондан 10 метр катта экани, юзи эса 1200 м^2 экани маълум. Бу тўғри тўртбурчак шаклидаги майдоннинг периметрини аниқлаш талаб этилмоқда.

Агар тўғри тўртбурчакнинг томонлари узунликлари маълум бўлса, унинг периметрини топиш мумкин. Шунинг учун x м билан унинг бир томони узунлигини белгилаймиз. У ҳолда $(x + 10)$ м — унинг иккинчи томони узунлиги. Тўғри тўртбурчакнинг юзини унинг томонлари узунликлари орқали ифодалаш мумкин бўлгани учун $x \cdot (x + 10) = 1200$ тенгламага эга бўламиз. Уни ечамиз:

$$x^2 + 10x = 1200,$$

$$x^2 + 10x - 1200 = 0,$$

$$x = -5 \pm \sqrt{25 + 1200} = -5 \pm 35,$$

$$x_1 = 30, x_2 = -40.$$

Масаланинг маъносига кўра x (томонлар узунликлари) нинг қиймати мусбат сон бўлиши керак. Шу шартни фақат биринчи илдиз қаноатлантиради. Демак, тўғри тўртбурчак шаклидаги майдоннинг бир томони узунлиги 30 м, иккинчи томони узунлиги 40 м ($30 + 10 = 40$) га, периметри эса $2 \cdot 30 + 2 \cdot 40 = 140$ м га тенг.

Текширишни топилган натижа билан масала шартини таққослаш асосида бажариш мумкин. Бунинг учун масала текстига топилган натижани кiritамиз: «Тўғри тўртбурчак шаклига эга бўлган томорқанинг бир томони 30 м, иккинчи томони эса биринчи томонидан 10 м катта. Шу томорқани девор билан ўраб чиқиш талаб этилади. Деворнинг узунлиги 140 м, томорқа майдонининг юзи эса 1200 м^2 ».

Айтилганлардан текстда бирор-бир зиддият келиб чиқиш-чиқмаслигини текшириб кўрамиз. Тўғри тўртбурчакнинг бир томони узунлиги 30 м, периметри 140 метр бўлгани учун унинг иккинчи томони узунлиги $(140 - 2 \cdot 30) : 2 = 40$ (м), яъни биринчи томонидан 10 метр катта бўлади. Бундан ташқари, томонлар узунликларини билган ҳолда тўғри тўртбурчакнинг юзини топиш мумкин: $30 \cdot 40 = 1200 \text{ м}^2$. Кўриб турганимиздек, ҳосил бўлган текстда зиддият йўқ. Демак, топилган натижа масала шартини қаноатлантиради.

Текширишни, масалани бошқача усул билан ечиш орқали, бошқача бажариш мумкин.

Машқлар

1. Масалани турлича усуллар билан ечинг:

1) Қишлоқдан совхозгача 20 км, совхоздан станциягача эса 40 км. Совхоздан станция томон 12 км/соат тезлик билан ве-

лосипедчи йўлга чиқди. Бир вақтда қишлоқдан станцияга совхоз орқали шу йўлдан мотоциклчи йўлга чиқди. Мотоциклчи велосипедчига у станцияга етиб келгунича етиб олиши учун қандай тезлик билан юриши керак?

2) Тўғри тўртбурчакнинг периметри 60 см га тенг. Агар тўғри тўртбурчакнинг узунлиги 10 см орттирилса, кенглиги эса 6 см камайтирилса, у ҳолда унинг юзи 32 см^2 га камаяди. Тўғри тўртбурчакнинг юзини топинг.

2. Масалани алгебраик усул билан ечинг ва уни арифметик усул орқали ечиш билан текширинг:

1) Колхоз буғдой ва шоли учун 700 га ер ажратди, бунда шоли учун ажратилган майдон буғдой учун ажратилган майдондан 60 га кўп эди. Шоли учун неча гектар ва буғдой учун неча гектар ер ажратилган?

2) Икки бўлакда бир хил миқдорда газлама бор. Бир бўлакдан 18 м, иккинчи бўлакдан 25 м газлама қирқиб олингандан сўнг биринчи бўлакда иккинчи бўлакдагидан икки марта кўп газлама қолди. Ҳар бир бўлакда неча метр газлама бўлган?

3) А пунктдан велосипедчи йўлга чиқди. Шу вақтда унинг кетидан 20 км масофадаги В пунктдан мотоциклчи йўлга чиқди. Велосипедчи 12 км/соат тезлик билан, мотоциклчи 16 км/соат тезлик билан юрди. А пунктдан қандай масофада мотоциклчи велосипедчига етиб олади?

5-§. ТўПЛАМЛАР ВА УЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

23. ТўПлам ва тўПлам элементлари тушунчалари

Математикада кўпинча бирор объектлар группаларини ягона бутун деб қарашга тўғри келади: 1 дан 10 гача бўлган сонлар, натурал сонлар, бир хонали сонлар, учбурчаклар, квадратлар ва шу кабилар. Бундай турли мажмуалар тўпламлар деб аталади.

Тўплам тушунчаси математиканинг асосий тушунчаларидан биридир ва шунинг учун у бошқа тушунчалар орқали таърифланмайди. Уни мисоллар ёрдамида тушунтириш мумкин. Жумладан, бирор синфдаги ўқувчилар тўплами ҳақида, ўзбек алфавитидаги унли товушлар тўплами ҳақида, натурал сонлар тўплами ҳақида гапириш мумкин.

«Тўплам» сўзининг математик маъноси бу сўзни кўп сонли предметлар билан боғловчи одатдаги нутқда ишлатилишидан фарқ қилади. Математикада тўплам сўзини кўп сонли предметлар билан боғлаш талаб этилмайди. Бу ерда битта объектдан ташкил топган тўплам ва бирорта ҳам объектни ўз ичига олмаган тўплам қаралади.

Баъзи ҳолларда тўпламлар латин алфавитининг *A, B, C, ...*, *Z* ҳарфлари билан белгиланади. Бирорта ҳам объектни ўз ичига олмаган тўплам бўш тўплам дейилади ва $\emptyset$ белги билан белгиланади.

Тўпламни ташкил этувчи объектлар унинг элементлари дейилади. Тўплам элементларини латин алфавитининг кичик ҳарфлари $a, b, c, \dots, z$ билан белгилаш қабул қилинган.

Математикада ва бошқа фанларда кўпинча бирор-бир объектнинг қаралаётган тўпламга тегишлими ёки йўқми эканини аниқлашга тўғри келади. Масалан, биз 5 ни натурал сон деймиз. Бошқача айтганда, биз 5 сони натурал сонлар тўпламига тегишли деб тасдиқлаймиз. Ёки, масалан, 0,75 сони натурал сон эмас деймиз. Бу 0,75 сони натурал сонлар тўпламига тегишли эмаслигини билдиради.

«*а объект А тўпламга тегишли*» кўринишдаги жумлани символлардан фойдаланиб бундай ёзиш мумкин: $a \in A$. Уни турлича ўқиш мумкин:

а объект А тўпламга тегишли.

а объект — А тўпламнинг элементи.

А тўплам а элементни ўз ичига олади.

«*а объект А тўпламга тегишли эмас*» жумлани бундай ёзиш мумкин: $a \notin A$. У бундай ўқилади:

а объект А тўпламга тегишли эмас.

а объект А тўпламнинг элементи эмас.

А тўплам а элементни ўз ичига олмайди.

А — бир хонали сонлар тўплами бўлсин. У ҳолда « $3 \in A$ » жумлани бундай ўқиш мумкин: «3 бир хонали сон», « $12 \notin A$ » жумла эса «12 бир хонали сон эмас» эканини билдиради.

Тўпламлар чексиз ва чекли бўлади. Масалан, ҳафтадаги кунлар тўплами чекли, тўғри чизикдаги нуқталар тўплами эса чексиздир. Натурал сонлар тўплами, бутун сонлар тўплами, рационал сонлар тўплами, ҳақиқий сонлар тўплами каби тўпламлар ҳам чексиз тўпламлардир. Математикада бундай тўпламлар учун махсус белги қабул қилинган: N ҳарфи билан натурал сонлар тўплами белгиланади, Z — бутун сонлар тўплами, Q — рационал сонлар тўплами, R — ҳақиқий сонлар тўплами.

Машқлар

1. Ушбу тўпламларнинг учта элементини айтинг: 1) педагогика билим юртида ўрганиладиган фанлар тўплами; 2) ўзбек алфавитидаги жарангли ундош товушлар тўплами; 3) натурал сонлар тўплами.

2. Ушбу тўпламларни турлича усуллар билан ўқинг: 1) $12 \in X$; 2) $— 3 \notin X$.

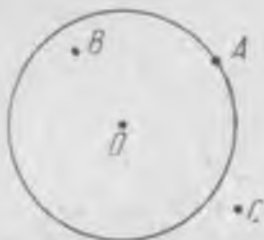
3. B — жуфт сонлар тўплами. Буни билган ҳолда қуйидаги жумлаларни символлар ёрдамида ёзинг: 1) 20 жуфт сон; 2) 12 жуфт сон эмас.

4. Қуйидаги фикрларни ўқинг ва улар орасидан ростларини кўрсатинг:

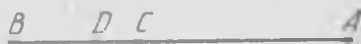
1) $100 \in N$; 2) $— 8 \in Z$; 3) $— 8 \notin N$; 4) $5,36 \in Q$;

5) $102 \notin R$; 6) $\sqrt{2} \in Q$; 7) $— 7 \in R$; 8) $\frac{3}{4} \in N$;

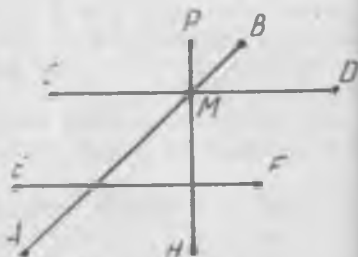
9) $0 \in Z$.



17-расм



18-расм



19-расм

5. P 7 дан катта ва 14 дан кичик бутун сонлар тўплами. 13, 10, 5, 7, 14 сонлари шу тўпламга тегишли ёки тегишли эмаслигини аниқланг. Жавобингизни $\in$ ва $\notin$ белгиларидан фойдаланиб ёзинг.

6. D — бутун манфий сонлар тўплами. Шу тўпламга тегишли бўлган бешта сон айтинг. — $1 \in D$; $0 \notin D$; — $3, 2 \in D$ экани тўғрими.

7. 325; 0; — 17; — 3,8; 7 сонлари берилган. Бу сонлардан қайсылари: 1) натурал сонлар тўпламига; 2) бутун сонлар тўпламига; 3) рационал сонлар тўпламига; 4) ҳақиқий сонлар тўпламига тегишли бўлишини аниқланг.

8. M — 17-расмда тасвирланган айлана нуқталари тўплами. Қуйидаги жумлаларни ўқинг ва улар орасидан тўғриларини кўрсатинг: 1) $A \in M$; 2) $O \in M$; 3) $B \in M$; 4) $C \notin M$.

9. 8-машқнинг шартини шундай ўзгартирингки, натижада ҳамма фикрлар тўғри бўлсин.

10. C нуқта тегишли бўлган кесмалар тўпламини ёзинг (18-расм).

11. $\in$ ва $\notin$ белгилари ёрдамида AB , CD , EF ва PH кесмаларда қайсилари M нуқтадан ўтишини, қайсилари M нуқтадан ўтмаслигини ёзинг (19-расм).

24. Тўплamlарнинг берилиш усуллари

Тўплaм тушунчасини биз таърифсиз қўлланамиз. Бироқ у ёки бу мажмуанинг тўплaм бўлишини ёки тўплaм бўлмаслигини қандай билиш керак?

Тўплaм ўз элементлари билан аниқланади, яъни, агар ихтиёрий объект ҳақида у бирор тўплaмга тегишли ёки тегишли эмас дейиш мумкин бўлса, бу тўплaм берилган деб ҳисобланади.

Тўплaмни унинг барча элементларини санаб кўрсатиш билан бериш мумкин. Масалан, агар биз A тўплaм 3, 4, 5 ва 6 сонлардан ташкил топган десак, биз бу тўплaмни берган бўламиз, чунки унинг барча элементларини санаб кўрсатилди. Уни бундай ёзиш мумкин: $A = \{3, 4, 5, 6\}$, бунда санаб кўрсатилган элементлар катта қавслар ичига ёзилади.

Бироқ тўплам чексиз бўлса, у ҳолда тўплам элементларини санаб кўрсатиш мумкин эмас. Кўп сонли элементларга эга бўлган чекли тўпламни ҳам бундай усул билан бериш қийин. Бундай ҳолларда тўпламларни беришнинг бошқа усули қўлланилади: тўплам элементларининг характеристик хоссаси кўрсатилади.

Характеристик хосса — бу шундай хоссаки, тўпламга тегишли ҳар бир элемент бу хоссага эга бўлади ва унга тегишли бўлмаган бирорта ҳам элемент бу хоссага эга бўлмайди.

Масалан, икки хонали сонлар тўплами A ни қарайлик. Мазкур тўпламнинг ихтиёрий элементи эга бўлган хосса — «икки хонали сон бўлишликдир». Бу характеристик хосса бирор-бир объектнинг A тўпламга тегишли ёки тегишли эмаслиги ҳақидаги масалани ечиш имконини беради. Масалан, 21 сони A тўпламга тегишли, чунки у икки хонали сон, 145 сони эса A тўпламга тегишли эмас, чунки у икки хонали сон эмас.

Айни бир тўпламни унинг элементларининг турлича характеристик хоссаларини кўрсатиш билан бериш мумкин бўлган ҳоллар ҳам учрайди. Масалан, квадратлар тўпламини тенг томонли тўғри тўртбурчаклар тўплами сифатида ҳам, тўғри бурчакли ромблар тўплами сифатида ҳам бериш мумкин.

Шундай қилиб, бирор тўпламни бериш учун ёки унинг ҳамма элементларини санаб кўрсатиш ёки унинг элементларининг характеристик хоссасини кўрсатиш етарли. Иккинчи усул анча умумийдир: у одатда элементлари унчалик кўп бўлмаган чекли тўпламларни бериш учун қўлланиладиган биринчи усулдан фарқли равишда чекли ва чексиз тўпламларни ҳам бериш имконини беради. Баъзида бу, биринчи усул чексиз тўпламларни бериш учун ҳам қўлланилади. Масалан, натурал сонлар тўплами N қуйидаги кўринишда берилиши мумкин: $N = \{1, 2, 3, \dots\}$. Бироқ бундай ёзиш усули фақат тўпламнинг ёзилган қисми бўйича кўп нуқта нимани англатиши равшан бўлган ҳолдагина мумкин.

Шуни таъкидлаш керакки, қатор ҳолларда айни бир тўпламнинг ўзи биринчи усулда ҳам, иккинчи усулда ҳам берилган бўлиши мумкин. Масалан, ўз элементларининг характеристик хоссасини бевосита кўрсатиш билан берилган 7 дан кичик натурал сонлар тўплами B ни яна бундай бериш мумкин: $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, яъни унинг ҳамма элементларини санаб кўрсатиш билан бериш мумкин.

Бошланғич математика курсида тўплам ва тўплам элементлари тушунчалари ошкор кўринишда ўрганилмайди, бироқ бу тушунчалар катта умумийликка эга бўлгани учун, амалда улар бутун бошланғич математикага кириб боради. Масалан, «65 дан катта ва 75 дан кичик сонларни ёзинг» топшириқни бажаришда ўқувчилар сонларнинг айни бир мажмуасини беришнинг икки усулини учратадилар.

Биринчи усул — сонларнинг «65 дан катта ва 75 дан кичик бўлиш» хоссасини кўрсатиш, иккинчи усул — бу мажмуадаги

сонлар санаб кўрсатилади: 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75. Машқнинг маъноси — тўпламни беришнинг бир усулидан иккинчи усулига ўтиш.

Бошқа дарсларда ҳам кичик мактаб ўқувчиларига шунга ўхшаш топшириқларни ечишга тўғри келади, хусусан, ўзбек тили дарсларида: «Ўзбек алфавитидаги ҳамма ундош ҳарфларни айтнинг». «Берилган машқлардаги ҳамма отларнинг тагига чизинг», «Текстан ҳамма сифатларни кўчириб ёзинг» ва ҳоказо.

Машқлар

1. Ушбу жумлаларни тенглик белгиси ва катта қавслар ёрдамида ёзинг: 1) $X = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ сонлари тўплами; 2) Y — «математика» сўзидаги ҳарфлар тўплами.

2. C тўплам квадрат, доира ва учбурчакдан ташкил топган. Бу тўпламга квадратнинг диагонали тегишли бўладими?

3. Қуйидаги тўпламларнинг элементларини санаб кўрсатинг: A — бир хонали тоқ сонлар тўплами;

B — 5 дан кичик бўлмаган натурал сонлар тўплами;

C — 10 га бўлинувчи икки хонали сонлар тўплами.

4. Ушбу тўпламлар элементларининг характеристик хоссаларини кўрсатинг:

1) $\{a, e, \bar{e}, n, o, y, \bar{y}, \bar{y}\}$;

2) $\{23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15\}$;

3) $\{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$.

5. Координата тўғри чизиғида ушбу тенгсизликларнинг ечимлари тўпламини тасвирланг (x — ҳақиқий сон): 1) $x > 5,3$; 2) $x \leq -3,8$; 3) $-4,5 \leq x < 4$; 4) $2,7 \leq x \leq 9$.

6. Ҳар бир ҳолда координата тўғри чизиғида қандай тенгсизликнинг ечимлари тўплами тасвирланганини аниқланг (20-расм).

7. Тенгламанинг ҳақиқий илдизлар тўпламини топинг:

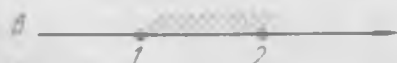
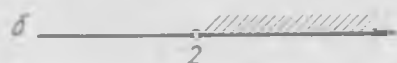
$$1) 3x = x + 8;$$

$$[3) 3x + 5 = 3(x + 1);$$

$$2) 3(5x + 10) = 30 + 15x;$$

$$4) x(x + 16) = 0.$$

8. A — ёзуви 1 рақами билан тугайдиган икки хонали сонлар тўплами. Бу тўпламга 28, 31, 321, 61 сонлари тегишли бўладими?



20-расм

25. Тўпламлар орасидаги муносабатлар

Иккита тўплам берилган: $A = \{a, b, c, d, e\}$ ва $B = \{b, d, k, e\}$. b ва d элементлар бир вақтда A тўпламга ҳам, B тўпламга ҳам тегишли экани кўриниб турибди. Бундай ҳолда b ва d A ва B тўпламларнинг умумий элементлари, тўпламларнинг ўзи эса кесишувчи тўпламлар дейилади.

Агар тўпламлар умумий элементларга эга бўлмаса, у ҳолда бу тўпламлар кесишмайди дейилади.

Энди $A = \{a, b, c, d, e\}$ ва $B = \{c, d, e\}$ тўпламларни қараймиз. Улар кесишади ва бундан ташқари, B тўпламнинг ҳар бир элементи A тўпламнинг ҳам элементи. Бундай ҳолда B тўплам A тўпламга тегишли ёки B тўплам A тўпламнинг қисм тўплами деб айтилади.

Таъриф. Агар B тўпламнинг ҳар бир элементи A тўпламнинг ҳам элементи бўлса, B тўплам A тўпламнинг қисм тўплами дейилади.

Агар B A тўпламнинг қисм тўплами бўлса, $B \subset A$ каби ёзилади ва бундай ўқилади: « B A нинг қисм тўплами». « B тўплам A га киради».

Бўш тўплам ихтиёрий тўпламнинг қисм тўплами бўлади, яъни $\emptyset \subset A$ ва ихтиёрий тўплам ўз-ўзига қисм тўплам бўлади, яъни $A \subset A$ бўлади. Шунинг учун берилган A тўпламнинг барча қисм тўпламлари орасида бўш тўплам ва A тўпламнинг ўзи албатта бўлиши керак.

Масалан, $A = \{2, 3, 4\}$ тўпламнинг барча қисм тўпламларини ёзиб чиқамиз. Улар орасида бир элементли қисм тўпламлар: $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, икки элементли қисм тўпламлар: $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, шунингдек, A тўпламнинг ўзи: $\{2, 3, 4\}$ ва бўш тўплам $\emptyset$ бўлади. Шундай қилиб, берилган A тўплам 8 та қисм тўпламга эга экан.

Энди $A = \{a, b, c, d, e\}$ ва $B = \{c, a, b, e, d\}$ тўпламларни қарайлик. Улар кесишади ва A тўпламнинг ҳар бир элементи B тўпламнинг ҳам элементи бўлади, яъни $A \subset B$, ва аксинча, B тўпламнинг ҳар бир элементи A тўпламнинг ҳам элементи бўлади, яъни $B \subset A$. Бундай ҳолда A ва B тўпламлар тенг деб айтилади.

Таъриф. Агар $A \subset B$ ва $B \subset A$ бўлса, A ва B тўпламлар тенг дейилади.

Агар A ва B тўпламлар тенг бўлса, у ҳолда $A = B$ каби ёзилади.

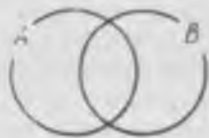
Таърифдан тенг тўпламларнинг аниқ бир элементлардан ташкил топиши ва тўпламлар элементларини ёзиш тартиби аҳамиятга эга эмаслиги келиб чиқади.

Тўпламлар орасидаги муносабатлар Эйлер¹ доиралари деб аталувчи махсус чизмалар ёрдамида кўргазмални тасвирланади. Бунинг учун тўпламлар, улар нечта элементни ўз ичига олиш-

¹ Леонард Эйлер (1707 — 1783) — Петербург фанлар академиясининг аъзоси. Л. Эйлер Швейцарияда туғилган. 1727 йилда Петербург фанлар академияси таълифига кўра Россияга келади ва бу ерда йирик математик бўлиб етишади. Эйлернинг илмий мероси улкан, унинг илмий меҳнатлари рўяхатида 800 дан ортиқ ишлар маълум.



21- расм



22- расм



23- расм

ларидан қатъи назар, доиралар, оваллар ёки бирор бошқ. геометрик фигуралар кўринишида тасвирланади.

Масалан, $A = \{a, b, c, d, e\}$ ва $B = \{c, d, e\}$ тўпламлар орасидаги тегишли муносабатни Эйлер доиралари ёрдамида 21- расмда тасвирлангани каби тасвирлаш мумкин.

$A = \{a, b, c, d, e\}$ ва $B = \{b, d, k, e\}$ тўпламлар кесишади, лекин уларнинг бирортаси ҳам бошқасининг қисм тўплами бўлмайди. Шунинг учун улар Эйлер доиралари ёрдамида 22- расмдаги каби тасвирланади.

Кесишмайдиган тўпламлар умумий нуқтага эга бўлмаганикита доира ёрдамида тасвирланади (23- расм).

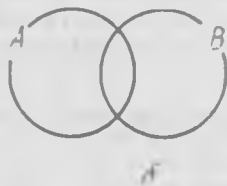
Тўпламлар орасидаги муносабатни аниқлай олиш — ўқитувчи учун муҳим малакадир. Гап шундаки, математика ва бошқа фанлар фақат маълум объектлар ва ҳодисаларнигина ўрганиб қолмай, балки тўпламлар орасидаги ўзаро боғланишларни жумладан, муносабатларни ҳам ўрганади.

Масалан, жуфт сонлар тўплами A ва 4 га каррали сонлар тўплами B ўзаро қандай боғланганини аниқлаймиз. 24- расмда тасвирланган ҳолларнинг қайси бирида берилган тўпламлар орасидаги муносабат тўғри тасвирланган?

Берилган тасвирларни ҳал қиламиз. 24-а расмдан ҳамма жуфт сонлар 4 га бўлинади, деган нотўғри хулоса чиқади: 4 га бўлинмайдиган жуфт сонни кўрсатиш мумкин, масалан, 14 сон. Бу контр мисол берилган тўпламларнинг тенг бўлишини яъни 24-б расмда тасвирланган ҳолнинг бажарилишини раътади. 24-б расмдан 4 га каррали сонлар орасида жуфт сонлар ва шу билан бирга 2 га бўлинмайдиган сонлар ҳам бор деган хулоса келиб чиқади, бу эса нотўғри: 4 га каррали ҳар қандай сон жуфт сон эканини исботлаш қийин эмас. Демак, 4 га кар



24- расм



рали сонлар тўплами жуфт сонлар тўпламининг қисм тўплами экан. Бу боғланиш 24-г расмда тасвирланган.

Тўплам тушунчаси сингари қисм тўплам тушунчаси бошланғич математикада ошкор кўринишда ўрганилмайди, бироқ баъзи мажмуалар қисмларини ажратиш билан боғлиқ масалаларни ўқувчилар кўп ечадилар. Масалан:

«Берилган тўртбурчаклар орасидан тўғри тўртбурчакларни кўрсатинг».

«Берилган сонлар орасидан жуфт сонларни айтинг» ва ҳоказо.

Машқлар

1. Нима учун $X = \{2, 4, 6\}$ тўплам $Y = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ тўпламининг қисм тўплами бўлишини, $Z = \{4, 6, 12\}$ тўплам эса қисм тўплам бўлмаслигини тушунтиринг.

2. $A = \{5, 10, 15, 25\}$ тўплам берилди. A тўпламга тегиш иккита тўплам ёзинг.

3. a элемент A тўпламга ҳам, B тўпламга ҳам тегишли экани маълум. Бундан 1) $A \subset B$; 2) $B \subset A$; 3) $A = B$ экани келиб чиқадими?

4. A тўпламининг ҳар бир элементи B тўпламга тегишли экани маълум. Y ҳолда 1) $A \subset B$; 2) $A = B$ бўлиши тўғрими?

5. $K = \{216, 546, 153, 171, 234\}$ тўпламдан: 1) 3 га бўлинадиган; 2) 9 га бўлинмайдиган; 3) 4 га бўлинмайдиган; 4) 5 га бўлинмайдиган сонларни кўчириб ёзинг.

Хосил қилинган қисм тўпламлар орасида K тўпламга тенг тўплам борми?

6. Тенгсизликларнинг ечимлар тўплами ва тенгсизликларнинг ўзи қандай муносабатда эканини аниқланг:

1) $x < 12$ ва $x < 10$; 2) $x < 12$ ва $x > 15$; 3) $x < 12$ ва $x > 10$; 4) $x < 12$ ва $-3x > -36$.

7. Агар: 1) A — жуфт сонлар тўплами, B — 3 га каррали сонлар тўплами; 2) A — квадратлар тўплами, B — тўғри тўртбурчаклар тўплами; 3) A — квадратлар тўплами, B — тўғри бурчакли учбурчаклар тўплами; 4) A — квадратлар тўплами, B — тенг томонли тўғри тўртбурчаклар тўплами бўлса, A ва B тўпламлар орасидаги муносабатни Эйлер доиралари ёрдамида тасвирланг.

8. Агар: 1) $A \subset B$ ва $B \subset C$; 2) $A \subset B$, C нинг B билан кесишиши, бироқ A билан кесишмаслиги; 3) A , B ва C ларнинг кесишиши, бироқ бирортаси бошқасининг қисм тўплами бўлмаслиги маълум бўлса, A , B ва C тўпламлар орасидаги муносабатларни Эйлер доиралари ёрдамида тасвирланг.

9. X , Y ва Z тўпламларга шундай мисол келтирингки, улар орасидаги муносабатлар 25- расмда тасвирлангани каби бўлсин.

10. $A = \{a, b, c, d\}$ тўплам берилди. A тўпламининг: 1) иккита элементни; 2) учта элементни ўз ичига олувчи барча қисм тўпламларини тузинг.



25- расм

11. $P = \{3, 5, 7, 9\}$ тўпламнинг мумкин бўлган барча қисм тўпламларини тузинг.

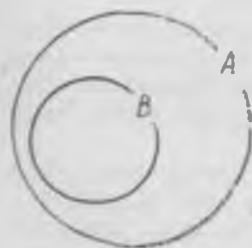
12. Бошланғич синф ўқувчилари ушбу масалаларни бажаришда тўпламлар назариясига оид қандай тушунчалар билан тўқнашишларини айтинг: 1) 10 дан 19 гача бўлган сонларни тартиб билан ёз. Жуфт соннинг тагига чиз ва ўқи; 2) 1 дан 20 гача бўлган сонлар қаторидан 5 га қолдиқсиз бўлинадиган сонларни тартиб билан кўчириб ёз; 3) 27, 45, 38, 62, 53, 72, 8, 48 сонларидан 5 га бўлганда қолдиқда 3 қоладиган сонларни кўчириб ёз.

26. Тўплам ва тушунча

Маълумки, ҳар қандай тушунча ҳажмга эга. Илгарироқ биз объектлар мажмуаси ҳақидаги каби айрим терминлар билан аталувчи тушунчалар ҳажми ҳақида гапирган эдик, уларни шу терминлар билан ҳам аташ мумкин. Назарий тўплам нуқтаи назардан тушунча ҳажми — бу тушунчани ифодаловчи сўзлар билан аташ мумкин бўлган объектлар тўпламидир. Масалан, «учбурчак» тушунчасининг ҳажми — учбурчаклар тўплами, «тўғри бурчак» тушунчасининг ҳажми — тўғри бурчаклар тўпламидир.

Тушунча ҳажмини тўплам сифатида қараш тушунчалар орасидаги муносабатни кўргазмали тасвирлаш имконини беради.

Ушбу иккита тушунчани қараймиз: a тушунча — «тўғри тўртбурчак» ва b тушунча — «квадрат». Уларнинг ҳажмларини мос равишда A ва B ҳарфлари билан белгилаймиз. Ҳар қандай квадрат тўғри тўртбурчак бўлгани учун Эйлер доиралари ёрдамида берилган тушунчалар ҳажмлари орасидаги муносабат 26-расмдаги каби тасвирланади. Бундай ҳолда «тўғри тўртбурчак» тушунчаси «квадрат» тушунчасига лисбатан жинс билдирувчи тушунча, «квадрат» тушунчаси эса «тўғри тўртбурчак»



26- расм

тушунчасига нисбатан тур билдирувчи тушунча дес мумкин бўлади.

Жинс билдирувчи муносабатда ҳам, тур билдирувчи муносабатда ҳам бўлмайдиган тушунчалар мавжуд. Масалан, «квадрат» ва «учбурчак» — уларнинг ҳажмлари тегишли бўлиш муносабатида бўлмайди.

Жинс билдирувчи ва тур билдирувчи тушунчалар нисбийдир: айтиб бериш билдирувчи муносабатга нисбатан жинс билдирувчи, бошқасига нисбатан тур билдирувчи бўлиши мумкин. Масалан, «тўғри тўртбурчак» тушунчаси «квадрат» тушунчасига нисбатан жинс билдирувчи ва «тўртбурчак» тушунчасига нисбатан тур билдирувчи бўлади.

Айтиб бериш билдирувчи учун унга нисбатан жинс билдирувчи бир нечта тушунчани кўрсатиш мумкин. Масалан, «тўғри тўртбурчак» тушунчаси учун «тўртбурчак», «параллелограмм», «кўпбурчак» тушунчалари жинс билдирувчи тушунчалардир. Улар орасидан энг яқинини кўрсатиш мумкин. «Тўғри тўртбурчак» тушунчаси учун энг яқин жинс билдирувчи тушунча «параллелограмм» тушунчасидир.

Машқлар

1. a ва b тушунчалар ҳажмлари орасидаги муносабатларни Эйлер доиралари ёрдамида тасвирланг:

1) a — «учбурчак», b — «тўғри бурчакли учбурчак»;

2) a — «тўғри чизик», b — «кесма»;

3) a — «тенг ёнли учбурчак», b — «ўтмас бурчакли учбурчак».

2. «Тўғри тўртбурчак» тушунчаси «тўртбурчак» тушунчасига нисбатан тур билдирувчи тушунча эканини Эйлер доиралари ёрдамида кўрсатиш ва тўртбурчакларнинг тўғри тўртбурчаклар эга бўлган хоссаларини айтиш.

3. Ушбу фикрларни Эйлер доиралари ёрдамида тасвирланг:

1) 6 га каррали ҳамма сонлар 3 га ҳам каррали;

2) 7 га каррали сонлар орасида 5 га ҳам каррали сонлар бор;

3) тоқ сонлар орасида 4 га бўлинадиган бирорта ҳам сон йўқ.

4. Ушбу тушунчалар берилган: a — «жуфт натурал сон», b — «тоқ натурал сон», c — «натурал сон». 27-расмдаги қайси ҳолда берилган тушунчалар ҳажмлари орасидаги муносабатлар тасвирланган (тушунчалар ҳажмлари мос равишда A , B , C лар билан белгиланган)?

5. Агар:

1) a — «бир хонали сон», b — «икки хонали сон», c — «натурал сон»;

2) a — «учбурчак», b — «тенг томонли учбурчак», c — «тенг ёнли учбурчак»;



27- расм

3) a — «бир текисликда ётувчи тўғри чизиқлар», b — параллел тўғри чизиқлар», c — «кесишувчи тўғри чизиқлар»;

4) a — «натурал сон», b — «бутун сон», c — «рационал сон» бўлса, a , b ва c тушунчалари орасидаги муносабатларни Эйлер доиралари ёрдамида тасвирланг.

6. Ораларидаги муносабатлар 1) 27- a ; 2) 27- b расмлардаги каби тасвирланадиган тушунчаларга мисол келтиринг.

27. Тўпламлар кесишмаси

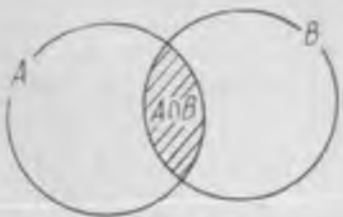
Икки ва ундан ортиқ тўпламлар элементларидан янги тўпламлар тузish мумкин. Бу янги тўпламлар тўпламлар устида бажариладиган амаллар натижаси бўлиб, ўз навбатида уларни турли мажмуалар устида бажарилувчи амалларнинг умумлашмаси сифатида қараш керак деб ҳисобланади. Хусусан, икки ва ундан ортиқ тўпламнинг умумий элементларини топиш, икки ва ундан ортиқ мажмуаларни биттага бирлаштириш, мажмуадан унинг қисмларини ажратиш шулар жумласидандир.

$A = \{2, 4, 6, 8\}$ ва $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ тўпламлар берилган бўлсин. A ва B тўпламларнинг элементлари киртилган C тўпламини тузамиз: $C = \{6, 8\}$. Шундай ҳосил қилинган C тўплам A ва B тўпламларнинг кесишмаси дейилади.

Таъриф. A ва B тўпламларнинг кесишмаси деб шундай тўпламга айтиладики, у фақат A ва B тўпламга тегишли элементларнигина ўз ичига олади.

A ва B тўпламларнинг кесишмаси $A \cap B$ каби белгиланади.

Агар A ва B тўпламларни Эйлер доиралари ёрдамида тасвирласак, у ҳолда берилган тўпламларнинг кесишмаси штрихланган соҳа билан тасвирланади (28-расм). A ва B тўпламлар умумий элементларга эга бўлмаган ҳолда уларнинг кесишмаси бўш деб аталади ва $A \cap B = \emptyset$ каби ёзилади.



28- расм

Тўпламларнинг кесишмасини топишда бажариладиган операция ҳам кесишма деб аталади.

Конкрет ҳолларда тўпламларнинг кесишмаси қандай топилади? Мисоллар қарашдан олдин кесишманинг таърифига кўра $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ ва $x \in B$ эканини эслатиб ўтамиз.

Агар A ва B тўпламнинг элементлари санаб кўрсатилган бўлса, у ҳолда $A \cap B$ ни топиш учун A ва B га тегишли бўлган элементларни, яъни уларнинг умумий элементларини санаб кўрсатиш етарли.

Агар тўпламлар улар элементларининг характеристик хоссалари ёрдамида берилган бўлса, нима қилиш керак?

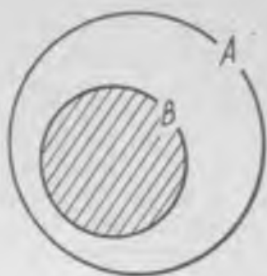
Таърифдан кўринадик, $A \cap B$ тўпламнинг характеристик хоссаси кесишувчи тўпламлар характеристик хоссаларининг «ва» боғловчи ёрдамида тузилишидан келиб чиқади.

Масалан, A — жуфт сонлар тўплами ва B — икки хонали натурал сонлар тўпламининг кесишмасини топайлик. A тўплам элементларининг характеристик хоссаси — «жуфт натурал сон бўлиши», B тўплам элементларининг характеристик хоссаси — «икки хонали натурал сон бўлиши» дир. У ҳолда таърифга кўра, берилган тўпламлар кесишмасининг элементлари «жуфт ва икки хонали натурал сон бўлишлик» хоссасига эга бўлиши керак. Шундай қилиб, $A \cap B$ тўплам икки хонали жуфт сонлардан («ва» боғловчинини мазкур ҳолда тушириб қолдириш мумкин) ташкил топган. Ҳосил қилинган тўплам бўш эмас. Масалан, $24 \in A \cap B$, чунки 24 сони жуфт ва икки хонали сон.

Энди A — жуфт натурал сонлар тўплами ва B — 4 га қаррали натурал сонлар тўпламининг кесишмаси қандай тўплам эканини аниқлаймиз. Берилган A ва B тўпламлар чексиз тўпламлар ва B тўплам A тўпламнинг қисм тўплами. Шунинг учун A тўпламга ва B тўпламга тегишли элементлар B тўпламнинг элементлари бўлади (29-расм). Демак, $A \cap B = B$.

Машқлар

1. Қуйидаги фикрларнинг рост бўлишини таъминловчи шартларни ифодаланг: 1) $5 \in A \cap B$; 2) $7 \in A \cap B$.
2. $x \in A$ экани маълум. Бундан $x \in A \cap B$ бўлиши келиб чиқадими?
3. $x \in A \cap B$ экани маълум. Бундан $x \in A$ экани келиб чиқадими?
4. A — айлана нуқталари тўплами, B — 1 тўғри чизиқ нуқталари тўплами. Берилган тўпламларнинг кесишмаси нечта элементдан ташкил топиши мумкин? У буш бўлиши мумкинми? Мумкин бўлган ҳолларни тасвирланг.
5. Бир хонали ва жуфт бўлган S сонлар тўпламини ёзинг. У қандай тўпламларнинг кесишмаси бўлади?



29-расм

6. Агар: 1) $A \subset B$; 2) $B \subset A$; 3) $A \cap B = \emptyset$ бўлса, A ва B тўп-
ламлар кесишмасини Эйлер доиралари ёрдамида тасвирланг.

7. Агар:

1) $A = \{a, b, c, d, e, f\}$; $B = \{b, e, f, k, l\}$;

2) $A = \{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$; $B = \{17, 26, 58\}$;

3) $A = \{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$; $B = \{2, 6, 3, 9, 1, 7\}$

бўлса, A ва B тўп-ламларнинг кесишмасини топинг.

8. «Математика» сўзидаги ҳарфлар тўплами ва «геометрия» сўзи-
даги ҳарфлар тўпламининг кесишмаси қандай элементлардан ташкил
топган?

9. M — бир хонали натурал сонлар тўплами, P — тоқ натурал
сонлар тўплами. Берилган M ва P тўп-ламларнинг кесишмасига
қандай сонлар кирази? 1, 5 ва 17 сонлари кесишмага тегишли бўл-
дими? Жавобингизни $\in$ ва $\notin$ символларидан фойдаланиб ёзинг.

10. Ўзгарувчиси ҳақиқий сон бўлган ушбу тенгсизликлар ечим-
лари тўпламининг кесишмасини топинг: 1) $x > -2$ ва $x > 0$;
2) $x > -3,7$ ва $x \leq 4$; 3) $x > 5$ ва $x < -7,5$; 4) $-2 < x < 4$
ва $x \geq -1$; 5) $-7 \leq x \leq 5$ ва $-6 \leq x \leq 2$.

11. Иккита учбурчакни шундай чизингки, уларнинг кесишмаси:
1) учбурчак бўлсин; 2) кесма бўлсин; 3) нуқта бўлсин; 4) купбур-
чак бўлсин.

12. Учбурчак ва тўртбурчакнинг кесишмасидан қандай фигура
ҳосил бўлиши мумкин? Бир неча ҳолни қаранг.

13. 1) Тўғри чизиқ ва айлананинг; 2) кесма ва айлананинг;
3) икки айлананинг кесишмасида неча нуқта бўлиши мумкин?

14. Қуйидаги шартлар бажарилганда C ва D тўп-ламлар кесиш-
масига тегишли бўладиган иккита фигурани чизинг.

1) C — квадратлар тўплами; D — тўғри тўртбурчаклар тўплами;

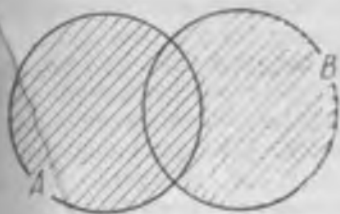
2) C — ромблар тўплами; B — тўғри тўртбурчаклар тўплами.

15. $A: 3x + y = 15$ тенглама ечимлари тўплами, $B: 2x + y = 11$
тенглама ечимлари тўплами. Бу тенгламалар системасининг ечими
бўлмиш нуқталар тўплами C ни топинг. $C = A \cap B$ бўлиши тўғри-
ми?

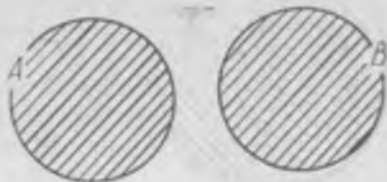
28. Тўп-ламларнинг бирлашмаси

Ўқувчиларга $2+3=5$ эканини тушунтириш учун ўқитувчи
2 та қизил ва 3 та кўк доирача олади. Бу фигураларни санаб
чиқишни сўрайди, кейин қизил доирачаларга кўк доирачалар-
ни яқинлаштиришни (яъни бу икки мажмуани, икки тўп-ламни
бирлаштиришни) ва ҳосил қилинган мажмуадаги ҳамма доира-
чаларни санаб чиқишни таклиф этади. Улар 5 та экани, яъни
 $2+3=5$ экани аниқланади. Шундай қилиб, сонларни қўшиш ик-
кита тўп-ламни бирлаштириш операциясига асосланар экан.

Қаралган мисолда умумий элементларга эга бўлмаган тўп-
ламлар бирлаштирилди. Математикада кесишувчи тўп-ламлар-
нинг бирлашмасини бажаришга ҳам тўғри келади.



30- расм



31- расм

Таъриф. A ва B тўпamlарнинг бирлашмаси деб шундай тўпamга айтиладики, у фақат A ёки B тўпamнинг элементларини ўз ичига олади.

A ва B тўпamlарнинг бирлашмаси $A \cup B$ каби белгиланади.

Агар кесишувчи A ва B тўпamlарни Эйлер доиралари ёрдамида тасвирласак, у ҳолда уларнинг бирлашмаси штрихланган соҳа билан тасвирланади (30- расм).

Агар A ва B тўпamlар кесишмаса, у ҳолда уларнинг бирлашмаси 31- расмдаги каби тасвирланади.

Тўпamlарнинг бирлашмасини топишда бажариладиган операция ҳам бирлашма деб аталади.

Конкрет ҳолларда тўпamlарнинг бирлашмаси қандай тспилади?

Мисоллар қарашдан олдин бирлашманинг таърифига кўра

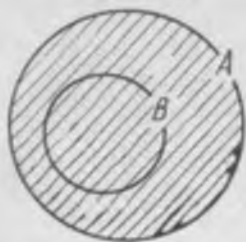
$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ёки } x \in B \quad \text{бўлишини эслатиб ўтамиз.}$$

Агар A ва B тўпamlар элементлари санаб кўрсатилган бўлса, у ҳолда $A \cup B$ ни топиш учун A ёки B тўпamlарга тегишли бўлган элементларни, яъни улардан ақалли биттасига тегишли бўлган элементларни санаб кўрсатиш етарли. Масалан, $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ бўлса, у ҳолда $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ бўлади.

Тўпamlар улар элементларининг характеристик хоссалари ёрдамида берилган ҳолларда нима қилиш керак?

Таърифдан $A \cup B$ тўпamнинг характеристик хоссаси A ва B тўпamlар характеристик хоссаларидан «ёки» боғловчиси ёрдамида тузилиши келиб чиқади.

Масалан, жуфт сонлар тўпами A ва икки хонали сонлар тўпами B нинг бирлашмасини топамиз. A тўпam элементлари характеристик хоссаси — «жуфт сон бўлишлик», B тўпam элементлари характеристик хоссаси — «икки хоссали сон бўлишлик» бўлгани учун берилган тўпamlар бирлашмасига характеристик хоссаси — «жуфт ёки икки хонали сон бўлишлик» бўлган сонлар киради. Бундай сонлар чексиз тўпamни ҳосил қилади, бироқ ифодаланган характеристик хосса у ёки бу элемент A ва B тўпamlар бирлашмасига тегишли бўладими ёки йўқми эканини бир қийматли аниқлашга имкон беради. Масалан, $A \cup B$ да 8 сони бор, чунки у жуфт сон; 17 сони



бор, чунки у икки хонали сон; 36 сони бор, чунки у жуфт ва икки хонали сон.

Энди A — жуфт натурал сонлар тўплами ва B — 4 га қаррали натурал сонлар тўпламининг бирлашмаси қандай тўплам эканини аниқлаймиз. Илгарироқ $B \subset A$ экани аниқланган эди. Шунинг учун $A \cup B$ тўпламга тегишли элементлар A тўпламининг элементлари бўлади (32-расм). Демак, мазкур ҳолда $A \cup B = A$.

32-расм

Машқлар

1. Қуйидаги фикрларнинг рост бўлишини таъминловчи шартларни ифодаланг: 1) $5 \in A \cup B$; 2) $7 \in A \cup B$.

2. $x \in A$ экани маълум. Бундан $x \in A \cup B$ бўлиши келиб чиқадими?

3. $x \in A \cup B$ экани маълум. Бундан $x \in A$ бўлиши келиб чиқадими?

4. $x \in A$ ва $x \in B$ экани маълум. Бундан $x \in A \cup B$ бўлиши келиб чиқадими?

5. Тоқ ёки 3 га қаррали бўлган бир хонали натурал сонлар тўплами K ни ёзинг. Бу тўпламни бир хонали тоқ сонлар тўплами A ва 3 га қаррали бир хонали сонлар тўплами B орқали ифодаланг.

6. Агар: 1) $A \subset B$; 2) $B \subset A$ бўлса, A ва B тўпламлар бирлашмасини Эйлер донралари ёрдамида тасвирланг.

7. Агар:

1) $A = \{a, b, c, d, e, f\}$; $B = \{d, e, f, k, l\}$;

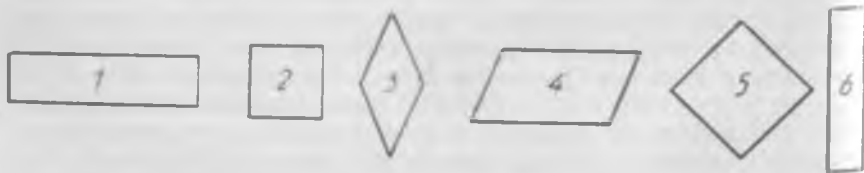
2) $A = \{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$; $B = \{17, 26, 58\}$;

3) $A = \{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$; $B = \{2, 6, 3, 9, 1, 7\}$

бўлса, A ва B тўпламлар бирлашмасини топинг.

8. «Математика» сўзидаги ҳарфлар тўплами ва «геометрия» сўзидаги ҳарфлар тўпламининг бирлашмаси қандай элементлардан ташкил топган?

9. M — бир хонали натурал сонлар тўплами. P — тоқ натурал сонлар тўплами. M ва P тўпламларнинг бирлашмасига қандай сонлар қиради? 4, 14, 17 сонлар тўпламга тегишли бўладими? Жавобингизни $\in$ ва $\notin$ белгилардан фойдаланиб ёзинг.



33-расм

10. x ўзгарувчи ҳақиқий қийматлар қабул қиладиган тенгсизликлар ечимлари тўпламининг бирлашмасини топинг:

- 1) $x > -2$; $x > 0$; 2) $x > -3,7$, $x \leq 4$;
3) $x \geq 5$, $x < -7,5$; 4) $-2 < x < 4$, $x > -1$;
5) $-7 \leq x < 5$, $-6 \leq x \leq 2$.

11. Агар иккита учбурчакнинг кесишмаси: 1) учбурчак;

2) олтибурчак; 3) кесма бўлса, уларнинг бирлашмаси қандай фигура бўлади?

12. Агар:

1) C — квадратлар тўплами, D — тўғри тўртбурчаклар тўплами;

2) C — тўғри бурчакли учбурчаклар тўплами, D — ўтмас бурчакли учбурчаклар тўплами бўлса, C ва D тўпламлар бирлашмасига тегишли бўлган иккита фигурани чизинг.

13. 33-расмда келтирилган фигуралардан қайсилари ромблар тўпламининг ва тўғри тўртбурчаклар тўпламининг бирлашмасида ётишини аниқланг.

14. ABC учбурчак ва унинг AB томони кесишмаси қандай фигура бўлади? Уларнинг бирлашмаси-чи?

15. Координаталар тўғри чизғида x ўзгарувчининг шундай қийматлари тўпламини тасвирлангки, бу қийматларда қуйидаги жумлалар чин фикрга айлансин: 1) $x > -4$ ва $x \leq 1$; 2) $x \leq -2$ ёки $x > 2$; 3) $|x| \leq 3$; 4) $|x| > 4$.

16. Масалада сўз бораётган ҳамма тўпламларни айтинг:

1) Мактаб олдида 4 туп олма ва 3 туп олча ўтқазилди. Мактаб олдида ҳаммаси бўлиб неча туп дарахг ўтқазилди?

2) Пионерлар колхозга сабзини йиғиштириб олишда кўмаклашишди. Бир отряд 40 сават, иккинчи отряд ундан 10 сават ортиқ сабзи терди. Иккала отряд неча сават сабзи терди?

17. Қайси тўплам масалада қаралаётган иккита бошқа тўпламнинг бирлашмаси бўлишини аниқланг: 1) Қаримда 6 та китоб бор эди. Туғилган кунда унга яна 4 та китоб совға қилишди. Қаримда неча китоб бўлди?

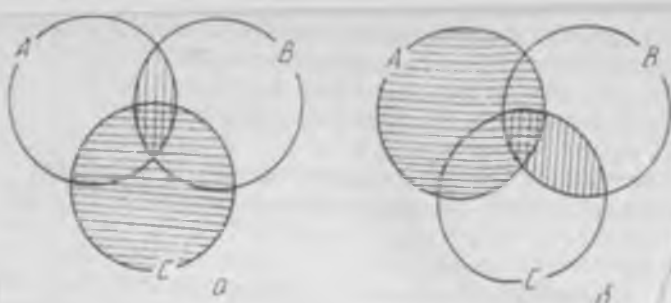
2) Уй ёнида 2 та терак ўсмоқда, кўприк ёнида эса ундан 4 та кўп терак ўсмоқда. Кўприк ёнида неча терак ўсмоқда?

3) Ҳар бир ликопчада 5 та олма бор. 3 та ликопчада неча олма бор?

29. Тўпламлар кесишмаси ва бирлашмаси қонунлари

Маълумки, сонларни қўшиш ва кўпайтириш амали қатор қондаларга: ўрин алмаштириш, группалаш ва бошқа қондаларга бўйсунди.

Тўпламлар кесишмаси ва бирлашмаси амали учун қандайдир қондалар мавжудми? Мавжуд ва улардан баъзиларидан биз фойдаландик. Хусусан, тўпламларнинг кесишмаси ёки бирлашмасини топишда биз тўпламлар устида амаллар бажариш тартиби ҳақида ўйлаб кўрмадик. Бунинг сабаби шундаки, тўпламлар кесишмаси ва бирлашмаси таърифидан ихтиёрий A ва B тўпламлар учун тўпламлар



34- расм

кешишмаси ва бирлашмасининг ўрин алмаштириш қонунини ифода-
ловчи $A \cap B = B \cap A$ ва $A \cup B = B \cup A$ тенгликнинг ўринли бўли-
ши келиб чиқади.

Тўпламлар кесишмаси ва бирлашмаси учун, шунингдек, группа-
лаш қонуни ҳам ўринли, ихтиёрий A , B ва C тўпламлар учун
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ тенгликлар бажари-
лади.

Бу ёзувлардаги қавсларнинг вазифаси сонлар устидаги амаллар
ёзувидаги қавслар вазифасининг айнан ўзи эканини эслатиб ўтамиз.

Группалаш қонунларини Эйлер доиралари ёрдамида кўргазмалли
тасаввур қилиш мумкин. Масалан, тўпламлар кесишмасининг груп-
палаш қонунини кўриб чиқайлик. A , B ва C тўпламларни жуфт-
жуфти билан кесишадиган учга доира кўрinishида тасвирлаймиз
(34- расм). $(A \cap B) \cap C$ ифодада қавслар амаллар тартибини аниқлай-
ди: дастлаб A ва B тўпламлар кесишмаси бажарилади — 34- расмда
вертикал чизиклар билан штрихланган, кейин эса ҳосил қилинган
тўплам билан C тўплам кесишмаси топилади. Агар C тўпламни
горизонтал чизиклар билан штрихласак, у ҳолда икки марта штрих-
ланган соҳа $(A \cap B) \cap C$ тўпламни ифодалайди.

Энди 34-б расмга эътибор берайлик. Бу ерда дастлаб B ва C
тўпламлар кесишмаси бажарилган — у расмда вертикал чизиклар
билан штрихланган, кейин эса A тўплам билан ҳосил бўлган тў-
лам кесишмаси топилади. Агар A тўпламни горизонтал чизиклар
билан штрихласак, у ҳолда икки марта штрихланган соҳа $A \cap (B \cap C)$
тўпламни тасвирлайди.

Расмларда $(A \cap B) \cap C$ ва $A \cap (B \cap C)$ тўпламларни тасвирловчи
соҳалар бир хил эканини кўрамиз. Бу тўпламлар кесишмасининг
группалаш қонуни ўринли эканини тасдиқлайди.

Тўпламлар бирлашмасининг группалаш қонуни учун ҳам шунга
ўхшаш кўргазмалли мисол бажариш мумкин.

Кўриб ўтилган группалаш қонунларининг вазифалари нималар-
дан иборат? Улар иккига тўплам учун тўпламлар кесишмаси ва
бирлашмаси қонунларини билган ҳолда учга тўпламнинг кесишмаси
ва бирлашмасини қандай топишни тушунтиради. Бундан ташқари,
группалаш қонунига асосан $(A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C)$ ифода-ларда қавс-

ларни тушириб қолдириб, уларни қуйидагича ёзиш мумкин: $A \cap B \cap C$, $A \cup B \cup C$.

Тўпламлар кесишмаси ва бирлашмасининг группалаш қонуни ихтиёрий сондаги тўпламлар учун қўлланиш мумкин.

Тўпламларнинг кесишмаси ва бирлашмаси бир-бири билан тақсимот (дистрибутивлик) қонунлари билан боғланган; ихтиёрий A , B ва C тўпламлар учун

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (1)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \quad (2)$$

тенгликлар ўринли.

Агар ифодаларда кесишма ва бирлашма ишоралари бўлиб, қавслар бўлмаса, у ҳолда дастлаб кесишиш амали бажарилишини эслатиб ўтамиз, чунки кесишиш амали бирлашиш амалидан анча «кучли» ҳисобланади. Айтилганларга боғлиқ равишда кесишманинг бирлашмага нисбатан тақсимот қонунининг (1) ёзувини тенгликнинг ўнг қисмидаги қавсларни тушириб қолдириш билан соддалаштириш мумкин.

Машқлар

1. Агар: 1) $x \in A$; 2) $x \in A$ ва $x \in B$; 3) $x \in A$, $x \in B$ ва $x \in C$; 4) $x \notin A$, лекин $x \in C$; 5) $x \notin A$, лекин $x \in C$ ва $x \in B$ бўлса, x элемент A , B ва C тўпламлар бирлашмасига тегишли бўладими?

2. y элемент $A \cap B \cap C$ тўламга тегишли бўлишини таъминловчи шартни ифодаланг.

3. Ушбу ифодаларда тўпламлар устида амалларни қандай тартибда бажариш керак:

1) $A \cup B \cap C$; 2) $A \cap (B \cup C)$; 3) $A \cap B \cap C$?

4. A — 20 дан кичик натурал сонлар тўплами, B , C ва D — унинг қисм тўпламлари, бунда B 3 га қаррали сонлардан, C 4 га қаррали сонлардан, D жуфт сонлардан ташкил топган. Қандай сонлар ушбу тўпламларнинг элементлари бўлади:

1) $(A \cap B) \cap C$; 3) $A \cup (B \cup C)$; 5) $A \cap B \cup C$;

2) $A \cap (B \cap C)$; 4) $(A \cup B) \cup C$; 6) $A \cap (B \cup C)$?

Тўпламлар орасидан тенг тўпламлар жуфтларини айтинг.

5. Эйлер доираларидан фойдаланиб, қуйидагиларнинг ўринли эканини намойиш этинг:

1) тўпламлар бирлашмасининг группалаш қонуни;

2) кесишманинг бирлашмага нисбатан тақсимот қонуни.

6. 35 ва 36-расмларда штрихлаб ажратилган соҳалардан қайси бири $A \cup B \cup C$ тўпламини тасвирлашини аниқланг.

7. X — икки хонали сонлар тўплами, Y — жуфт сонлар тўплами, P — 4 га қаррали сонлар тўплами. $A = X \cap Y \cap P$ ва $B = (X \cup Y) \cup P$ тўпламлар элементларининг характеристик хоссалари қандай?

Эйлер доиралари ёрдамида X , Y , P , A ва B тўпламларни тасвирланг. A тўламга тегишли учта сон ва B тўламга тегишли учта сон айтинг.



35- расм



36- расм

8. A — ромблар тўплами, B — учбурчаклар тўплами, C — 60° ли бурчакка эга бўлган кўпбурчаклар тўплами. $X = A \cap C \cup B \cap C$ тўпламга тегишли иккита фигурани чизинг.

30. Қисм тўпламнинг тўлдирувчиси

Ўқувчига $5 - 3 = 2$ эканини тушунтириш учун кўпинча бундай усулдан фойдаланилади. 5 та буюм, масалан, 5 та доирача олинади. Ўқувчилар санаш ёрдамида ҳақиқатан ҳам доирачалар 5 та эканига ишонч ҳосил қилганидан сўнг, уларга 3 та доирачани олиб қўйиш ва қолган доирачаларни санаш таклиф этилади. 2 та доирача қолади, демак, $5 - 3 = 2$.

Бу усулнинг моҳияти нимадан иборат? a та элементга эга бўлган берилган тўпладан b та элементга эга бўлган қисм тўплам чиқариб ташланыпти. У ҳолда тўпламнинг қолган қисмида $a - b$ та элемент бўлади.

Эйлер доиралари ёрдамида мазкур вазият 37-расмдаги каби тасвирланади, бунда A тўпладан B қисм тўплам чиқариб ташлангандан кейин қолган қисм — бу штрихланган қисмдир. Бу қисм B тўпламнинг A тўплагача тўлдирувчиси дейилади.

Таъриф. $B \subset A$ бўлсин. A тўпламнинг B тўплагача тегишли бўлмаган элементларинигина ўз ичига олган тўплам B тўпламнинг A тўплагача тўлдирувчиси дейилади.

B тўпламнинг A тўплагача тўлдирувчиси ($B \subset A$ шарт бажарилганда) $A \setminus B$ каби белгиланади.

Қисм тўпламнинг тўлдирувчисини топишда фойдаланиладиган операция айириш амали дейилади.

Конкрет ҳолларда қисм тўпламнинг тўлдирувчиси қандай топилади? Мисоллар кўришга ўтишдан олдин тўлдирувчининг таърифига кўра қуйидагининг ўринли эканини эслатиб ўтамыз:



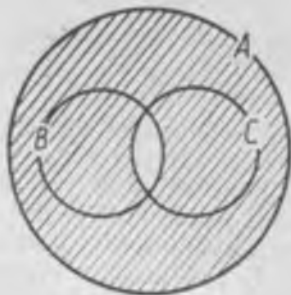
37- расм

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ ва } x \notin B$$

Агар A ва B тўпламлар элементлари санаб кўрсатилган бўлса, у ҳолда $A \setminus B$ ни топиш учун A тўплагача тегишли бўлган ва B тўплагача те-

гишли бўлмаган элементларини санаб кўрсатиш етарли. Масалан, агар $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{1, 5\}$ бўлса, у ҳолда $A \setminus B = \{2, 3\}$.

A ва B ($B \subset A$) тўпламлар элементларининг характеристик хоссалари кўрсатилган ҳолда $A \setminus B$ тўпламининг характеристик хоссаси « $x \in A$ ва $x \notin B$ » кўринишга эга бўлади. Масалан, B тўпламининг A тўпламгача тўлдирувчисини A — жуфт сонлар тўплами, B — 4 га каррали сонлар тўплами шarti остида топамиз ҳамда 20 ва 26 сонлари шу тўлдирувчига тегишли бўлиш-бўлмаслигини аниқлаймиз.



38- расм

4 га каррали ҳамма сонлар жуфт сон бўлгани учун $B \subset A$ бўлади. Агар A тўпламдан 4 га каррали ҳамма сонларни чиқариб ташласак, у ҳолда унда 4 га каррали бўлмаган жуфт сонлар қолади. Демак, $A \setminus B$ — 4 га каррали бўлмаган жуфт сонлар тўплами. Бу тўплам элементларининг характеристик хоссаси — «4 га каррали бўлмаган жуфт сонлар бўлишлик».

20 сони 4 га каррали жуфт сон, шунинг учун $20 \notin A \setminus B$, 26 сони 4 га каррали бўлмаган жуфт сон, шунинг учун $26 \in A \setminus B$ эканини кўриш қийин эмас.

Энди, агар A — жуфт сонлар тўплами, B — 4 га каррали сонлар тўплами, C — 6 га каррали сонлар тўплами бўлса, $A \setminus B \cap C$ тўплам қандай сонлардан ташкил топганини аниқлаймиз.

$A \setminus B \cap C$ тўпламининг ёзувида қавслар йўқ. Савол туғилади: қайси амал биринчи бажарилади? Тўпламлар кесишмаси операцияси айиришга нисбатан анча «кучли» деб ҳисоблаш шартлашиб олинган. Шунинг учун $A \setminus B \cap C$ ёзувдаги тўпламлар устида амаллар бажариш тартиби қуйидагича: дастлаб B ва C тўпламларнинг кесишмаси топилади, кейин эса ҳосил қилинган тўплам A тўпламдан айирилади.

B ва C тўпламларнинг кесишмаси 4 ва 6 га каррали сонлардан ташкил топган. Агар бу кесишмани A тўпламдан чиқариб ташласак, у ҳолда унда 4 ва 6 га (бир вақтда) каррали бўлмаган жуфт сонлар қолади. Эйлер донралари ёрдамида берилган A , B ва C тўпламларини 38-расмда тасвирлангани каби тасвирлаш мумкин. Унда B ва C тўпламлар кесишмасининг A тўпламгача тўлдирувчиси штрихланган.

Машқлар

1. Қуйидаги фикрлар чин бўлишини таъминловчи шартларни ифодаланг:

1) $5 \in A \setminus B$; 2) $7 \notin A \setminus B$.

2. $x \in A \setminus B$ экани маълум. Бундан қуйидаги келиб чиқади:

1) $x \in A$; 2) $x \in B$?

3. C тўпламнинг D тўпламгача тўлдирувчисини топинг, бунда:

1) $C = \{a, b, e, z, d, e\}; \quad D = \{a, b, e, z, d, e, ж, u\};$

2) $C = \{41, 42\}; \quad D = \{40, 41, 42, 43, 44\};$

3) $C = \{9, 10, 11, 12\}; \quad D = \{11, 9, 12, 10\}.$

4. Тўпламлар берилган: A — натурал сонлар тўплами; B — 7 га каррали натурал сонлар тўплами. Қуйидагилар тўғрими:

1) $84 \in A \setminus B$; 2) $17 \in A \setminus B$?

5. Агар: 1) Y — AB кесма нуқталари тўплами, X — AB тўғри чизиқ нуқталари тўплами;

2) Y — квадрат нуқталари тўплами, X — берилган квадрат ички чизилган доира нуқталари тўплами бўлса, Y тўпламнинг X тўпламгача тўлдирувчисини топинг.

6. F — тенг ёнли учбурчаклар тўплами, H — тенг томонли учбурчаклар тўплами.

$F \setminus H$ тўпламга тегишли иккита учбурчак чизинг.

7. Қуйидаги тўлдирувчилар қандай сонлардан ташкил топган:

1) натурал сонлар тўпламининг бутун сонлар тўпламигача тўлдирувчиси;

2) бутун сонлар тўпламининг рационал сонлар тўпламигача тўлдирувчиси;

3) рационал сонлар тўпламининг ҳақиқий сонлар тўпламигача тўлдирувчиси?

8. Агар: 1) A — натурал сонлар тўплами, B — 7 га каррали натурал сонлар тўплами, C — 3 га каррали натурал сонлар тўплами; 2) A — натурал сонлар тўплами, B — 4 га каррали натурал сонлар тўплами, C — 8 га каррали натурал сонлар тўплами бўлса, қандай сонлар $A \setminus B \cup C$ тўпламга тегишли бўлади?

Қўрсатма. Тўпламлар айирмаси ва бирлашмаси операциялари қавслар бўлмаган ҳолларда тартиб билан бажарилади.

9. $B \subset A$, $C \subset A$ бўлганда ихтиёрий A , B ва C тўпламлар учун қуйидаги тенгликлар тўғри бўлишини Эйлер доиралари ёрдамида намоён этинг:

1) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

2) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

10. Масаладаги ҳамма тўпламларни айтинг:

1) Каримда 10 та китоб бор, у иккита китобини ўртоғига совға қилди. Каримда неча китоб қолди?

2) Саҳнада 7 та ўғил бола бор эди. Қизлар ўғил болалардан 2 та кам. Саҳнада неча қиз бола бор эди?

11. Қуйидаги масалаларнинг ҳар бирида қандай тўплам бир тўпламнинг иккинчи тўпламгача тўлдирмаси эканини аниқланг:

1) Пионерлар 10 та ўйинчоқ ясашди. Улардан 8 тасини болалар боғчасига беришди. Пионерларда неча ўйинчоқ қолган?

2) Валида 6 та значок, Лолада эса ундан 2 та кам значок бор. Лолада неча значок бор?

31. Тўпламларни синфларга ажратиш тушунчаси

Тўпламлар ва тўпламлар устида операциялар тушунчаси бизнинг классификация ҳақидаги тасаввурларимизни ойдинлаштиришга имкон беради.

Классификация — бу синф ичида объектларнинг ўхшашлиги ва уларнинг бошқа синфлардаги объектлардан фарқ қилиши асосида синфлар бўйича объектларни ажратиш амалидир.

Одатда, классификациядан мақсад билимларимизни системага солишдир. Масалан, биологияда 1,5 млн. гача бўлган турли ҳайвонларни ўз ичига олган ҳайвонлар классификацияси мавжуд, ботаникада 500 минг турдаги ўсимликларни ўз ичига олган ўсимликлар классификацияси мавжуд. Классификация бу кўп хилликни маълум бир системада кўриб чиқиш, ўсимликлар ёки ҳайвонларнинг бизларни қизиқтирувчи турларини ажратиш имконини беради.

Математикада классификация кенг қўлланилади. Масалан, натурал сонлар жуфт ва тоқ сонларга бўлинади; бурчаклар (ёйиқ бурчакдан кичик бурчаклар) ўткир, тўғри ва ўтмас бўлади.

Тўғри бажарилган классификация қандай шартларни бажариши керак?

Ҳар қандай классификация объектларнинг бирор тўпламини қисмларга ажратиш билан боғлиқ. Агар бунда берилган тўпламнинг ҳар бир элементи битта ва фақат битта қисм тўпламга тушса, ҳамма ажратилган қисм тўпламлар бирлашмаси бутун тўплам билан мос тушса, у ҳолда берилган тўплам кесишмайдиган қисм тўпламларга ёки синфларга ажратилган дейилади.

Агар: 1) $X_1, X_2, \dots, X_n$ қисм тўпламлар жуфт-жуфти билан ўзаро кесишмаса;

2) $X_1, X_2, \dots, X_n$ қисм тўпламларнинг бирлашмаси X тўплам билан мос тушса, X тўплам $X_1, X_2, \dots, X_n$ синфларга ажратилган деб ҳисобланади.

Агар шу шартлардан ақалли биттаси бажарилмаса, классификация нотўғри ҳисобланади.

Масалан, учбурчакларнинг X тўпламини учта синфга ажратиш мумкин: ўткир бурчакли, тўғри бурчакли ва ўтмас бурчакли учбурчаклар. Ҳақиқатан, ажратилган қисм тўпламлар жуфт-жуфти билан кесишмайди (ўткир бурчакли учбурчаклар орасида тўғри бурчакли ва ўтмас бурчакли учбурчаклар йўқ, тўғри бурчаклилари орасида ўтмас бурчаклилари йўқ) ва уларнинг бирлашмаси X тўплам билан мос келади.

Бироқ берилган тўпламнинг ҳар қандай қисм тўпламлари системаси ҳам бу тўпламни ажратишни ифодалайвермайди. Масалан, агар учбурчакларнинг X тўпламидан тенг ёнли, тенг томонли ва турли томонли учбурчаклар қисм тўпламларини ажратсак, у ҳолда биз X тўпламни синфларга ажратишга эга бўлмаймиз, чунки тенг ёнли ва тенг томонли учбурчаклар тўп-



39- расм

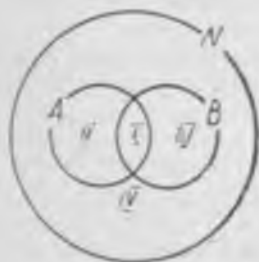
ҳоказо сонлар бор. Бизни 3 га бўлиниш хоссасига эга бўлган сонлар қизиқтиради деб фараз қилайлик. Бу хосса натурал сонлар тўпламидан 3 га каррали сонлар қисм тўпламини ажратиш имконини беради. У ҳолда қолган натурал сонлар ҳақида, улар 3 га каррали бўлмаган сонлар дейиш мумкин, яъни натурал сонлар тўпламининг яна битта қисм тўпламини ҳосил қиламиз (39- расм). Ажратилган қисм тўпламлар кесишмайди, уларнинг бирлашмаси эса N тўплам билан устма-уст тушади.

Шундай қилиб, натурал сонлар тўплами элементларининг битта хоссасини бериш бу тўпламни иккита синфга ажратишга олиб келди: 3 га каррали сонлар синфи (бу синфга, масалан, 3, 6, 15 каби сонлар киради) ва 3 га каррали бўлмаган сонлар синфи (бу синфга, масалан, 4, 5, 13 каби сонлар киради).

Агар тўплам элементлари учун иккита хосса кўрсатилса, яъни тўпламдан иккита турлича қисм ажратилса, тўпламни синфларга ажратиш қандай бўлади?

Мисолларга мурожаат этамиз.

Натурал сонларнинг иккита хоссасини кўриб чиқамиз: «3 га каррали бўлишлик» ва «5 га каррали бўлишлик». Бу хоссалар ёрдамида натурал сонлар тўпламидан иккита қисм тўпламни ажратиш мумкин: A — 3 га каррали сонлар тўплами ва B — 5 га каррали сонлар қисм тўплами. Бу қисм тўпламлар кесишади, лекин улардан ҳеч бири иккинчисининг қисм тўплами бўлмайди (40-расм). Вужудга келган вазиятни таҳлил қилиб кўрамиз. Натурал сонлар тўплами N ни тасвирловчи доира кесишмайдиган 4 та соҳага ажралади — улар рим рақамлари билан номерланган. Ҳар бир соҳа N тўпламининг бирор қисм тўпламини тасвирлайди. Бу кесишмайдиган тўпламларнинг ҳар бирида қандай сонлар бўлишини аниқлаймиз. I қисм тўплам 3 га ва 5 га каррали сонлардан; II қисм тўплам 3 га каррали ва 5 га каррали бўлмаган сонлардан; III қисм тўплам 5 га каррали ва 3 га каррали бўлмаган сонлардан; IV қисм тўплам 3 га ҳам, 5 га ҳам каррали бўлмаган сонлардан ташкил топган. Бу тўртта қисм тўпламларнинг бирлашмаси N тўпламининг ўзидир.



40- расм

Шундай қилиб, натурал сонларнинг иккита хоссасини ажратиш натурал сонлар тўпламини 4 та синфга ажратишга олиб келди: 3 га ва 5 га каррали сонлар синфи; 3 га каррали ва 5 га каррали бўлмаган сонлар синфи; 5 га каррали ва 3 га каррали бўлмаган сонлар синфи; 3 га ҳам, 5 га ҳам каррали бўлмаган сонлар синфи.



Тўплам элементларининг иккита хоссасини бериш бу тўпламни айнан 4 та синфга ажратишга олиб келади деб ўйламаслик керак. Ҳар доим ҳам бундай бўлавермайди. Масалан, иккита «тўғри бурчакли бўлишлик» ва «ўтмас бурчакли бўлишлик» хоссалар ёрдамида учбурчаклар тўплами учта синфга ажралади (41-расм):

тўғри бурчакли учбурчаклар синфи;
ўтмас бурчакли учбурчаклар синфи;
тўғри бурчакли ҳам, ўтмас бурчакли ҳам бўлмаган бурчаклар синфи (расмда у чизиқлар билан штрихланган).

Машқлар

1. $K = \{0, 2, 6, 8, 9, 12, 15\}$ тўпламдан иккита қисм тўплам ажратинг. Улардан бирига 2 га каррали сонларни, иккинчисига 3 га каррали сонларни киритинг. K тўпламни 2 га каррали сонлар синфига ва 3 га каррали сонлар синфига ажратиш юз бердими?

Берилган K тўпламни қуйидагича учта синфга ажратиш мумкинми:

$$K_1 = \{0, 2, 6\}, K_2 = \{8, 9\} \text{ ва } K_3 = \{12, 15\}?$$

2. Мактаб кутубхонасидаги китоблар тўпламини қуйидаги синфларга ажратиш мумкинми: бадий адабиёт, дарсликлар, техникага оид ва болалар адабиётлари?

3. Қуйидаги классификациялар тўғрими:

1) бурчаклар тўплами ўткир ва ўтмас бурчаклар қисм тўпламларига бўлинади;

2) параллелограммлар тўплами тўғри бурчаклар, ромблар ва квадратлар қисм тўпламларига бўлинади?

4. Ўзбек алфавити ҳарфлари тўпламини қандай синфларга ажратиш мумкин?

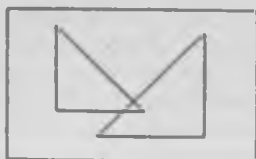
5. Текислик нуқталари тўплами: 1) айлана; 2) доира; 3) тўғри чизиқ ёрдамида қандай синфларга ажратилади?

6. 42-расмда келтирилган фигураларни қайта чизинг ва уларнинг ҳар бирида кесинмовчи соҳаларни (турли йўналишдаги чизиқлар билан штрихлаб) ажратинг.

7. Натурал сонлар тўпламидан 8 га каррали сонлар қисм тўпламини ажратинг. Бунда натурал сонлар тўпламини нечта синфга ажратиш юз беради? Ҳосил бўлган синфларни Эйлер



a



b



b

42- расм

доиралари ёрдамида тасвирланг ва ҳар бир синфнинг иккитадан вакилини айтинг.

8. Учбурчаклар тўпламини «уткир бурчакли бўлишлик» хос-саси ёрдамида қандай синфларга ажратиш мумкин? Ҳар бир синфнинг вакили бўлган иккитадан учбурчак чизинг.

9. Баъзи натурал сонлар «3 га каррали бўлишлик» хос-сасига, баъзи натурал сонлар эса «9 га каррали бўлишлик» хос-сасига эга. 43- расмда тасвирланган ҳоллардан қайси бирида кўрсатилган хоссаларга эга бўлган қисм тўпламлар тасвирланганини аниқланг ва бунда натурал сонлар тўплами нечта синфга ажратилишини топинг.

10. Агар тўртбурчаклар тўплами X ни синфларга ажратиш қуйидаги хоссалар ёрдамида амалга оширилса, бу тўпламнинг синфларини аниқланг:

1) «тўғри тўртбурчак бўлишлик» хоссаси;

2) «тўғри тўртбурчак бўлишлик» ва «ромб бўлишлик» хос-салари;

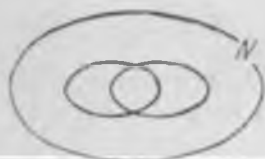
3) «тўғри тўртбурчак бўлишлик» ва «квадрат бўлишлик» хоссалари;

4) «тўғри тўртбурчак бўлишлик» ва «трапеция бўлишлик» хоссалари.

11. Масалани ечиш берилган тўпламни жуфт-жуфти билан кесишмовчи қисм тўпламларга ажратиш билан боғлиқ эканини кўрсатинг:

1) Пионерлар 12 та байроқчани октябрийларнинг ҳар бирига 2 тадан қилиб тарқатишди. Нечта октябрий байроқчалар олган?

2) Волейбол ўйнаш учун 12 та бола баравардан иккита командага бўлинди. Ҳар бир командада нечтадан бола бўлди?



a



b



b

43- расм

12. Масалада қандай тўпламлар ва улар устида қандай операциялар ҳақида гап борапти:

1) Бир эгатдан 25 бош карам, иккинчисидан 15 бош карам узилди. Бу ҳамма карамлар саватларга ҳар бирига 8 тадан қилиб жойланди. Нечта сават керак бўлган?

2) Мактаб боғи учун 24 туп олма кўчати келтирилди. Пионерлар бир участкага 6 та кўчат ўтқазишди, бошқа участкага эса қолган кўчатларни 3 қаторга баравардан ўтқазишди. Ҳар бир қаторга нечта кўчат ўтқазилган?

3) Болалар боғчаси учун ҳар бирида 6 тадан 9 қути рангли қалам ва 46 та қора қалам сотиб олинди. Ҳаммаси бўлиб нечта қалам сотиб олинган?

4) Тўлқин коллекция учун тўплаган маркаларини альбомнинг ҳар бир бетига 6 тадан қилиб 3 та бетига жойлаштирди. Улардан 4 тасини Тўлқин дўстига совға қилди. Унда нечта марка қолди?

32. Чекли тўпламлар устида операциялар билан боғлиқ бўлган баъзи масалалар

Математикада, хусусан бошланғич математикада кўпинча ё тўпламнинг, ёки тўпламлар бирлашмасининг, ёхуд қисм тўплам тўлдирувчисининг элементлари сонини аниқлашни талаб этадиган масалаларни ечишга тўғри келади. Бундай масалаларни ечишнинг маълум услублари мавжуд.

Чекли A тўплам элементлари сонини $n(A)$ символи билан белгилашни келишиб оламиз. Масалан, агар $A = \{m, p, r, s, t\}$ бўлса, у ҳолда $n(A) = 5$ деб ёзиш ва A тўпламда 5 та элемент бор дейиш мумкин.

Ушбу иккита тўплам берилган бўлсин: $A = \{k, l, m\}$ ва $B = \{p, t, m, r\}$. $n(A) = 3$, $n(B) = 4$ ва $A \cap B \neq \emptyset$ эканини кўрамиз, чунки тўпламлар умумий элемент m га эга. Берилган тўпламларнинг бирлашмасига A тўпламнинг ҳамма элементлари ва B тўпламнинг p, t, r элементлари киради. Демак, $n(A \cup B) = 6$.

Умуман, агар $A \cap B \neq \emptyset$ бўладиган чекли A ва B тўпламлар берилган бўлса, у ҳолда уларнинг бирлашмасидаги элементлар сони қуйидаги формула ёрдамида ҳисобланади:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Агарда A ва B тўпламлар умумий элементларга эга бўлмаса, яъни $A \cap B = \emptyset$ бўлса, у ҳолда уларнинг бирлашмасидаги элементлар сони бундай аниқланади:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

Агар $B \subset A$ ҳамда A ва B тўпламлар элементлари сони маълум бўлса, у ҳолда B қисм тўпламни A тўпламгача тўлдирувчи тўпламнинг элементлари сони қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$(A \setminus B) = n(A) - n(B).$$



44- расм

Ушбу масалани қараймиз: «Синфдаги 40 ўқувчидан 34 таси «Ленин учқуни» газетасига, 23 таси «Ёш куч» журнаliga, 17 таси ҳам газетага, ҳам журналга ёзилган. Синфда журналга ҳам, газетага ҳам ёзилмаган ўқувчи борми?

Масала шартини таҳлил қилиш шуни кўрсатаднки, масалада гап синфдаги ўқувчилар тўплами A ҳақида (унинг элементи 40 та), «Ленин учқуни» газетасига ёзилган ўқувчилар тўплами B ҳақида (унинг элементи 34 та) ва «Ёш куч» журнаliga ёзилган

ўқувчилар тўплами C ҳақида (унинг элементи 23 та) боряпти. Масала шартидан, шунингдек, B ва C нинг A тўпламининг қисм тўплами экани, уларнинг кесишиши ва кесишмада 17 элемент борлиги келиб чиқади. Ҳосил бўлган вазиятни Эйлер доиралари ёрдамида тасвирлаймиз (44-расм).

Иккита B ва C қисм тўпламни кўрсатиш A тўпламни 4 та синфга ажратишга олиб келди:

ҳам газета, ҳам журналга ёзилган ўқувчилар, улар 17 та; газетага ёзилган, лекин журналга ёзилмаган ўқувчилар, улар 17 та, чунки $34 - 17 = 17$ (киши);

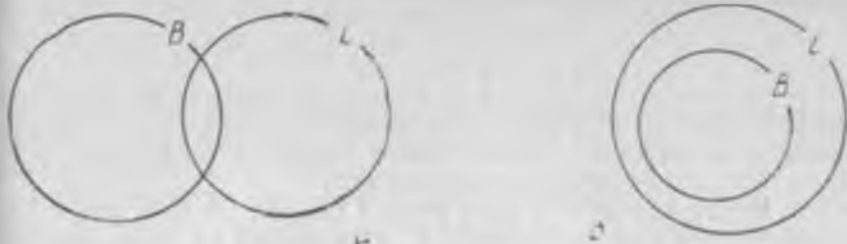
журналга ёзилган, лекин газетага ёзилмаган ўқувчилар, улар 6 та, чунки $23 - 17 = 6$ (киши);

газетага ҳам, журналга ҳам ёзилмаган ўқувчилар.

Бу тўртинчи синфдаги ўқувчилар сонини топиш учун синфдаги барча ўқувчилар сонидан газета ёки журналга ёзилган ўқувчилар сонини, яъни A ва B тўпламлар бирлашмасининг элементлари сонини айириб ташлаш зарур. B ва C тўпламлар бирлашмасидаги элементлар сонини турли усуллар билан топиш мумкин. Биринчидан, дастлабки уч синфда бўлган ўқувчилар сонининг йиғиндисини олиш: $17 + 17 + 6 = 40$ (ўқувчи), иккинчидан, иккита кесишувчи тўпламлар бирлашмаси элементлар сонини ҳисоблашнинг ушбу формуласидан фойдаланиш: $n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C) = 34 + 23 - 17 = 40$ (ўқувчи). Синфда ҳаммаси бўлиб 40 та ўқувчи бўлгани учун газетага ҳам, журналга ҳам ёзилмаган ўқувчилар сони $40 - 40 = 0$ га тенг, яъни синфда газетага ҳам, журналга ҳам ёзилмаган ўқувчи йўқ.

Яна бундай масалани қарайлик. «Синфдаги 40 ўқувчидан 23 таси математика тўғарагига, 27 таси адабиёт тўғарагига қатнашади. а) Ҳам математика, ҳам адабиёт тўғарагига қатнашувчи; б) бу тўғараклардан ақалли биттасига қатнашувчи ўқувчилар сони қандай бўлиши мумкин?

Масалада қуйидаги тўпламлар қаралапти: A — синфдаги ўқувчилар, B — математика тўғарагига қатнашувчи ўқувчилар, C — адабиёт тўғарагига қатнашувчи ўқувчилар ва $n(A) = 40$, $n(B) = 23$, $n(C) = 27$ экани маълум. Бир вақтда иккала тўғаракда қатнашувчи ўқувчилар сони — бу B ва C тўпламлар кесишмаси элементлари сони, уни x билан белгилаймиз. Бу тўғараклардан ақалли биттасига



45- расм

қатнашувчи ўқувчилар сони — бу B ва C тўпламлар бирлашмасидаги элементлар сони. Уни y билан белгилаймиз. x ва y сонлар B ва C тўпламлар орасида қандай муносабатлар мавжудлигига боғлиқ равишда турли натурал қийматлар қабул қилади (25- бандга қarang).

Берилган масалада B ва C тўпламлар шундайки, уларнинг кесишмаси ҳар доим бўш эмас. Ҳақиқатан ҳам, агар $B \cap C = \emptyset$ десак, y ҳолда $n(B \cup C) = 23 + 27 = 50$ бўлади, бунинг бўлиши мумкин эмас, чунки синфда ҳаммаси бўлиб 40 та ўқувчи бор. Демак, B ва C тўпламлар учун мазкур масалада мумкин бўлган ҳоллар 45-расмда тасвирлаб кўрсатилган.

B ва C тўпламлар бирлашмаси A тўплам билан устма-уст тушганда, яъни $n(B \cap C) = n(B) + n(C) - n(B \cup C) = 23 + 27 - 40 = 10$ бўлганда, B ва C тўпламлар кесишмасидаги элементлар сони x минимал бўлиши аниқ. Бу сон B тўплам C тўпламининг қисм тўплами бўлиб қолгунча ортиб бориши мумкин ва y ҳолда $n(B \cap C) = 23$ бўлади. Бунда тўғараклардан ақалли биттасига қатнашувчи ўқувчилар сони 40 тадан 27 (27 — бу $B \subset C$ шартдаги B ва C тўпламлар бирлашмасидаги элементлар сони) тагача камаяди.

Шундай қилиб, ҳам математика, ҳам адабиёт тўғарагига қатнашувчи ўқувчилар сони 10 дан 23 гача ўзгариши мумкин, яъни $10 \leq x \leq 23$, $x \in N$, тўғараклардан ақалли биттасига қатнашувчи ўқувчилар сони эса бунда 40 дан 27 гача ўзгариши мумкин, яъни $27 \leq y \leq 40$, $y \in N$.

Машқлар

1. Агар синфда: 1) 17 та ўғил бола ва 15 та қиз бола; 2) 17 та ўғил бола ва 23 та пионер бўлса, синфда нечта ўқувчи борлигини билиш мумкинми?

2. Синфдаги 50 ўқувчининг 37 таси инглиз тилини, 17 таси немис тилини ўрганади. Нечта ўқувчи иккала тилни ҳам ўрганади?

3. Синфдаги бир нечта ўқувчи маркалар йиғишди. 15 ўқув-

чи СССР маркаларини, 11 ўқувчи чет эл маркаларини, улардан 5 таси ҳам СССР маркаларини, ҳам чет эл маркаларини йнғди. Синфда нечта ўқувчи марка йиққан?

4. 32 ўқувчидан 12 таси волейбол секциясига, 15 таси баскетбол секциясига, 8 таси эса ҳам волейбол, ҳам баскетбол секциясига қатнашади. Нечта ўқувчи волейбол секциясига ҳам, баскетбол секциясига ҳам қатнашмайди?

5. 100 студентдан 44 таси инглиз тилини, 50 таси немис тилини, 49 таси француз тилини, 13 таси инглиз ва немис тилини, 14 таси инглиз ва француз тилини, 12 таси немис ва француз тилини ўрганади, 5 та студент учала тилни ўрганади. Нечта студент фақат битта тилни ўрганади? Нечта ўқувчи бирорта ҳам тилни ўрганмайди?

6. Чанғи, хоккей ва узунликка сакраш секцияларига 38 киши қатнашади. Чанғи секциясига қатнашувчи 21 кишидан 3 таси узунликка сакраш секциясига, 6 таси хоккей секциясига ва биттаси бир вақтда учала секцияга қатнашиши маълум. Узунликка сакраш секциясига қатнашувчи 13 кишидан 5 таси бир вақтда учала секцияга қатнашади. Неча киши хоккей секциясига қатнашади?

7. Синфда 40 та ўқувчи бор. 26 ўқувчи баскетбол билан, 25 ўқувчи сузиш билан, 27 ўқувчи югуриш билан шуғулланади. Бир вақтда сузиш ва баскетбол билан 15 ўқувчи, баскетбол ва югуриш билан 16 ўқувчи, сузиш ва югуриш билан 18 ўқувчи шуғулланади. Бир ўқувчи физкультура машғулотларидан озод этилган. Неча ўқувчи кўрсатилган барча спорт турлари билан шуғулланади? Неча ўқувчи фақат битта спорт тури билан шуғулланади?

8. Гурппада 30 ўқувчи бўлиб, улардан 18 таси математика, 17 таси ўзбек тилига қизиқади. Иккала фанга қизиқувчилар сони қандай бўлиши мумкин? Ақалли битта фанга қизиқувчи ўқувчилар сони қандай бўлиши мумкин?

9. Гурппадаги 30 ўқувчидан 15 таси тўқишни, 12 таси тикишни билади. Тўқиш ва тикишни билувчи; тўқиш ёки тикишни билувчи ўқувчилар сони қандай бўлиши мумкин?

10. 100 кишидан иборат туристлар гурппаси чет элга жўнади. Улардан 10 таси немис тилини ҳам, француз тилини ҳам билмайди, 75 таси немис тилини, 83 таси француз тилини билади. Нечта турист иккала тилни билади?

33. Тўпламларининг Декарт кўпайтмаси

Бошланғич синфларда ўқувчилар қуйидаги масалани ечадилар: «1, 2 ва 3 рақамидан фойдаланиб, мумкин бўлган барча икки хонали сонларни ёзинг». Бирма-бир кўриб чиқиш билан ўқувчилар қуйидагига эга бўладилар:

11	12	13
21	22	23
31	32	33

Ҳосил бўлган ҳар бир соннинг езуви иккита рақамдан иборат, бунда уларнинг келиш тартиби муҳимдир, масалан, 1 ва 2 рақамларидан иккита турли 12 ва 21 сонлари ҳосил қилинган.

Тўплам элементларининг келиш тартиби муҳим бўлган ҳолларда, математикада элементларнинг тартибланган наборлари ҳақида гап боради. Мазкур масалада биз тартибланган жуфтликлар билан иш кўрамыз.

a ва b элементлардан ташкил топган тартибланган жуфтликни (a, b) билан белгилаш қабул қилинган, бунда a элемент жуфтликнинг биринчи координатаси (компонентаси), b элемент эса бу жуфтликнинг иккинчи координатаси (компонентаси) дейилади.

(a, b) ва (c, d) жуфтликларда $a = c$ ва $b = d$ бўлган ҳолдагина бу жуфтликлар тенг бўлади.

Тартибланган жуфтликда $a = b$ бўлиши мумкин. Масалан, 11, 22, 33 сонларни $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ тартибланган жуфтликлар сифатида қараш мумкин.

Юқорида қаралган масалага яна бир марта қараймиз. Унда биз аслида, $\{1, 2, 3\}$ тўплам билан иш кўрдик: унинг элементларидан мумкин бўлган барча тартибланган жуфтликларни ҳосил қилдик.

Иккита турли тўпламлар элементларидан ҳам тартибланган жуфтликлар ҳосил қилиши мумкин. Масалан, $A = \{1, 2, 3\}$ ва $B = \{3, 5\}$ тўпламларни оламыз ва мумкин бўлган тартибланган жуфтликларни шундай ҳосил қиламизки, жуфтликларнинг биринчи компонентаси A тўпламдан, иккинчи компонентаси эса B тўпламдан танлаб олинсин. Ушбу тўпламга эга бўламиз:

$$\{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 3), (3, 5)\}.$$

Формал характерга эга бўлган ушбу масалага конкрет маъно бериш мумкин — мумкин бўлган барча икки хонали сонларни шундай ҳосил қилинганки, бунда ўнликлар рақами 1, 2, 3 рақамлардан танлаб олинади, бирликлар рақами эса 3 ёки 5 рақами бўлиши мумкин.

Бу масалани ечиш жараёнида берилган икки A ва B тўпламлардан янги тўплам ҳосил қилинди, бунда бу тўпламнинг элементлари сонларнинг тартибланган жуфтликлари бўлади. Бу янги тўплам A ва B тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси дейилади.

Таъриф. A ва B тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси деб биринчи компонентаси A тўпламга, иккинчи компонентаси B тўпламга тегишли бўлган жуфтликлар тўпламига айтилади.

A ва B тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси $A \times B$ каби белгиланади.

Декарт кўпайтмани топишда қўлланиладиган амал тўпламларни Декарт кўпайтириш дейилади.

Декарт кўпайтириш ўрин алмаштириш хоссасига эга эмас, яъни шундай A ва B тўпламлар мавжудки, улар учун $A \times B \neq B \times A$ ўринли. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун $A \times B$ ва $B \times A$ Декарт кўпайтмаларини, масалан, $A = \{1, 2, 3\}$ ва $B = \{3, 5\}$ тўпламлар учун ҳосил қилиш етарли. $A \times B$ тўпламини биз юқорида ҳосил

қилган эдик, $B \times A$ тўплам эса қуйидагича: $\{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$. $A \times B \neq B \times A$ эканини кўриш қийин эмас, чунки $A \times B$ ва $B \times A$ тўпламлар турли элементлардан ташкил топган.

Тўпламларни Декарт кўпайтириш группалаш қонунига ҳам бўйсунмайди, бироқ тўпламлар бирлашмаси операцияси билан тақсимот хоссаси ёрдамида боғланган: ихтиёрий A , B ва C тўпламлар учун $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ тенглик ўринли.

Биз буни исботсиз қабул қиламиз.

Иккита чекли тўпламнинг Декарт кўпайтмаси элементларини тўғри тўртбурчак шаклидаги жадвал ёрдамида ёзиш қулай. Масалан, $A = \{1, 2, 3\}$ ва $B = \{3, 5\}$ тўпламларнинг Декарт кўпайтмасини қуйидаги кўринишда тасвирлаш мумкин:

$A \backslash B$	3	5
1	(1, 3)	(1, 5)
2	(2, 3)	(2, 5)
3	(3, 3)	(3, 5)

Математикада на фақат тартибланган жуфтликлар, балки уч, тўрт ва ҳоказо элементлардан иборат тартибланган наборлар ҳам қаралади. Бундай тартибланган наборлар кортежлар деб ҳам аталади. Жумладан, $(1, 5, 6)$ — узунлиги 3 бўлган кортеж (яъни унда 3 та элемент бор), $(7, 8, 9, 4, 3)$ — узунлиги 5 бўлган кортеж.

Кортеж тушунчасидан фойдаланиб, n та тўпламнинг Декарт кўпайтмаси тушунчасини таърифлаш мумкин.

Таъриф. $A_1, A_2, \dots, A_n$ тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси деб узунлиги n бўлган шундай кортежлар тўпламига айтиладики, бунда кортежнинг биринчи компонентаси A_1 тўпламга, иккинчи компонентаси A_2 тўпламга, $\dots$, n -компонентаси A_n тўпламга тегишли бўлади.

$A_1, A_2, \dots, A_n$ тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ каби белгиланади.

Агар $A_1 = \{2, 3\}$, $A_2 = \{3, 4, 5\}$, $A_3 = \{7, 8\}$ бўлса, A_1, A_2 ва A_3 тўпламларнинг Декарт кўпайтмасини топамиз.

$A_1 \times A_2 \times A_3$ Декарт кўпайтманинг элементлари узунлиги 3 бўлган ва қуйидагича ҳосил қилинган кортежлар бўлади: биринчи компонента A_1 тўпламдан танлаб олинади, иккинчиси A_2 тўпламдан, учинчиси A_3 тўпламдан танлаб олинади. Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(2, 3, 7), (2, 3, 8), (2, 4, 7), (2, 4, 8), (2, 5, 7), (2, 5, 8), (3, 3, 7), (3, 3, 8), (3, 4, 7), (3, 4, 8), (3, 5, 7), (3, 5, 8)\}$.

Машқлар

1. $2x - y = 3$ тенглама берилган. Мазкур тенгламанинг бир нечта ечимини ёзинг. Ҳар бир ечим нимани ифодалайди? (4, 5) жуфтлик берилган тенгламанинг ечими бўладими? (5, 4) жуфтлик-чи?

2. A ва B тўпламлар элементлари қуйидаги сонлар жуфти бўлади: $A = \{(1, 12), (2, 9), (3, 6), (4, 3), (5, 0)\}$, $B = \{(1, 9), (2, 7), (3, 6), (4, 7), (5, 0)\}$. Қандай сонлар жуфти берилган тўпламлар кесишмасига киради? Қандай сонлар жуфти уларнинг бирлашмасига киради?

3. Сурати $A = \{4, 5\}$ тўпламдан олинган сон, махражи эса $B = \{3, 7, 9\}$ тўпламдан олинган сон бўлган касрлар тўпламини ёзинг.

4. $A \times B$ Декарт кўпайтма элементларини санаб кўрсатинг, бунда:

1) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{t, n, r\}$;

2) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c\}$;

3) $A = \{a, b, c\}$, $B = \emptyset$;

4) $A = \emptyset$, $B = \{b, n, r\}$.

5. $A = \{a, b\}$ ва $B = \{c, d\}$ тўпламлар берилган. C тўплам A ва B тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси бўладими, бунда:

1) $C = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$;

2) $C = \{(a, d), (b, d), (a, c)\}$;

3) $C = \{(a, d), (b, d), (c, d), (a, c)\}$?

6. 1, 2, 3, 4 рақамлардан фойдаланиб, турлича икки хонали сонларни ёзинг. Улар орасида ёзуви 3 рақамидан бошланадиган нечта сон бор?

Тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси тушунчасидан фойдаланиб, бу масалани бошқача ифодаланг.

7. Агар $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ бўлса, $A \times B$ ва $B \times A$ тўпламларни тўғри тўртбурчак шаклида ёзинг. Ҳосил қилинган Декарт кўпайтмалар нечта элементни ўз ичига олади? $A \times B = B \times A$ дейиш мумкинми?

8. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ва $Y = \{0, 4, 6, 8\}$ тўпламлар берилган. Қуйидаги ҳоллардан қайси бирида $A \subset X \times Y$ рост бўлади, бунда:

1) $A = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (5, 4)\}$;

2) $A = \{(2, 0), (2, 6), (0, 6), (4, 4)\}$;

3) $A = \{(3, 4), (4, 3), (5, 4), (3, 6)\}$?

9. $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{6, 8, 9\}$, $C = \{0, 1\}$ тўпламлар учун $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ тенгликнинг тўғри бўлишини текшириб кўринг.

10. $A = \{3, 5, 6, 8, 9\}$, $B = \{8, 9\}$, $C = \{0, 1, 2\}$ тўпламлар учун $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$ тенглик бажарналадими?

11. «Барабан» сўзида нечта ҳарф бор? Бу сўзда нечта турли ҳарф бор?

Тўплам ва кортеж тушунчаларидан фойдаланиб, бу масалани қайта ифодаланг.

12. 56 576 сонининг ёзувидаги рақамлар тўплами унинг ёзувидаги рақамлар кортежидан нима билан фарқ қилади?

13. 1, 2, 3 рақамлар ёрдамида мумкин бўлган барча уч хонали сонларни ёзинг. Нечта шундай сон ҳосил бўлди?

34. Иккита сонли тўпламнинг Декарт кўпайтмасини координата текислигида тасвирлаш

A ва B тўпламлар чекли бўлиб, унча кўп бўлмаган элементларни ўз ичига олса, уларнинг Декарт кўпайтмасини топиш қийин эмас. Агар A ва B тўпламлар чексиз бўлса-чи? Масалан, 3 дан катта натурал сонлар тўплами A билан 5 дан катта натурал сонлар тўплами B нинг Декарт кўпайтмаси қандай тасвирланади?

Бу ҳолда Эйлер доиралари бизга ёрдам бера олмайди.

Математикада бу вазиятдан чиқишга йўл топилди. Иккита сонли тўпламнинг Декарт кўпайтмасининг кўргазмали тасвирини координата текислиги ёрдамида ҳосил қилиш мумкин экан. Қандай қилиб?

Бу саволга жавоб бериш учун координата тўғри чизиги ва координата текислиги ҳақида ўз тасаввуримизни аниқлаштирамиз.

Координата тўғри чизиги — бу унда санок боши, узунлик бirlиги ва мусбат йўналиш берилган тўғри чизиқдир (46-расм).

Координата тўғри чизигининг вазифаси нимадан иборат?

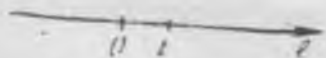
1) тўғри чизиқда C нуқтани (M нуқта O билан устма-уст тушмайди) оламиз ва унга шундай x сонни мос қўямизки: 1) бу соннинг модули O дан M гача масофага тенг; 2) агар M нуқта OE нурда ётса, у мусбат ва агар M нуқта қарама-қарши нурда ётса, у манфий бўлади.

Бундай аниқланган x сон M нуқтанинг координатаси дейилади ва $M(x)$ каби ёзилади.

Масалан, 47-расмда M нуқта 4 координатага, K нуқта — 2 координатага эга.

M нуқта O нуқта билан устма-уст тушган ҳолда M нуқтанинг координатаси нолга тенг деб ҳисобланади ва $M(0)$ каби ёзилади.

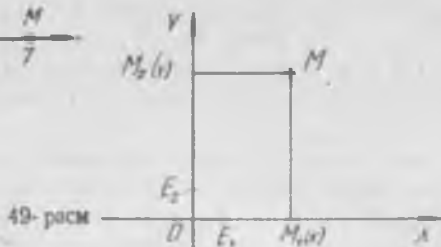
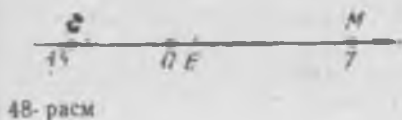
Шундай қилиб, координата тўғри чизигини киритиш билан тўғри чизиқ нуқталари ва ҳақиқий сонлар орасида боғланиш ўрнатилади: координата тўғри чизигининг ҳар бир M нуқтасига ягона x ҳақиқий сон — шу нуқтанинг координатаси мос келади.



46-расм



47-расм



Тескари даъво ҳам ўринли: ҳар бир x ҳақиқий сонга координатаси x сон бўлган M нуқта мос қўйилади.

Масалан, 7 сонини координата тўғри чизигида (48-расм) M (7) нуқта билан, $-3,5$ сонини C ($-3,5$) нуқта билан тасвирлаш мумкин.

Умумий саноқ бошига ва $OE_1 = OE_2$ шартни қаноатлантирувчи узунлик бирлигига эга бўлган ўзаро перпендикуляр иккита Ox ва Oy координата ўқларини оламиз (49-расм). Бундай Ox ва Oy тўғри чизиклар тўғри бурчакли координаталар системасининг ўқлари дейилади, бунда Ox тўғри чизик абсциссалар ўқи, Oy эса ординаталар ўқи дейилади. Умумий саноқ боши (координата ўқлари кесишган нуқта) га ва айнан бир хил узунлик бирлигига эга бўлган координата ўқлари ясаган текислик координата текислиги дейилади.

Координата текислигининг вазифаси нимадан иборат? Координата текислигида M нуқтани оламиз (49-расм). Бу ерда унинг вазияти иккита сон: абсцисса ва ордината билан аниқланади. M нуқтанинг абсциссаси — бу M_1 нуқтанинг Ox ўқдаги координатаси, M нуқтанинг ординатаси эса — бу M_2 нуқтанинг Oy ўқдаги координатаси.

Агар x сон — M нуқтанинг абсциссаси, y сон — унинг ординатаси бўлса, y ҳолда $M(x, y)$ каби ёзилади ва M нуқта x ва y координаталарга эга деб айтилади.

Шундай қилиб, тўғри бурчакли координаталар системаси текислигининг ҳар бир нуқтасига ҳақиқий сонларнинг ягона жуфтини — бу нуқтанинг координаталарини мос қўйиш имконини беради. Тескари даъво ҳам ўринли: ҳақиқий сонларнинг ҳар бир (x, y) жуфтига координаталари x ва y бўлган ягона M нуқта мос қўйилади.

Координата методининг муҳимлигини яна бир бор таъкидлаб ўтамиз: тўғри чизикда ва текисликда координата (яъни, нуқтанинг вазиятини аниқловчи сон) ни киритиш билан кўпгина геометрик масалаларни сонлар билан ҳисоблашлар ўтказиб, алгебра воситаларида ечиш имконияти вужудга келади, бу эса ўз навбатида, ЭХМ ни геометрик масалалар ечишда қўлланишга имкон беради. Ва аксинча, координата тўғри чизиги ва координата текислиги ёрдамида кўпгина алгебраик масалаларни кўрғазмали ечиш мумкин.

Тўғри чизикдаги ва текисликдаги нуқталарнинг координа-

талари тушунчаси геометрияга биринчи марта француз олим ва файласуфи Рене Декарт томонидан XVII асрда киритилган эди. Бу воқеа математикада янги давр — функция ва геометрик алмаштириш тушунчасининг туғилиши ва ривожланиши даври бўлди.

Текисликдаги тўғри бурчакли координаталар Рене Декарт номи билан Декарт координаталари деб ҳам аталади.

Бироқ XVII асрда яшаган Декарт номи билан математикага XIX асрнинг охирида киритилган тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси тушунчаси қандай боғланган? Бу саволга жавоб бериш учун аввало иккита сонли тўпламнинг Декарт кўпайтмасини кўргазмали тасвирлашда тўғри бурчакли координата системасидан қандай фойдаланишни аниқлаймиз.

А ва В сонли тўпламлар бўлсин. У ҳолда бу тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси элементлари сонларнинг тартибланган жуфтлари бўлади. Ҳар бир сонлар жуфтлигини координаталар текислигидаги нуқталар орқали белгилаб, А ва В тўпламларнинг Декарт кўпайтмасини кўргазмали тасвирловчи фигурани ҳосил қиламиз.

Координаталар текислигида А ва В тўпламларнинг Декарт кўпайтмасини тасвирлаймиз, бунда:

- 1) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 5\};$
- 2) $A = \{1, 2, 3\}, B = [3, 5];$
- 3) $A \neq [1, 3] B = [3, 5];$
- 4) $A = R, B = [3, 5];$
- 5) $A = R, B = R.$

1-ҳолда берилган тўпламлар чекли ва унча катта бўлмаган сондаги элементларни ўз ичига олади, шунинг учун уларнинг Декарт кўпайтмасининг ҳамма элементларини санаб кўрсатиш мумкин: $A \times B = \{(1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (3,3), (3,5)\}.$

Координата ўқларини ясаймиз ва Ох ўқда А тўплам элементларини, Оу ўқда В тўплам элементларини белгилаймиз.

Сўнгра $A \times B$ тўпламдаги ҳар бир сонлар жуфтлигини координата текислигидаги нуқталар билан тасвирлаймиз (50-расм). Одатта нуқтадан ҳосил қилинган бу фигура А ва В тўпламларнинг Декарт кўпайтмасини кўргазмай фойдалайди.

2-ҳолда тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси элементларини санаб кўрсатишнинг имкони йўқ, чунки В тўплам чексиз тўпламдир.

Бироқ бу Декарт кўпайтмаси ҳосил қилиш жараёнини намоён қилиш мумкин. Ҳар бир жуфтликда биринчи компонента ёки 1, ёки 2, ёки 3, иккинчи компонента эса $[3, 5]$ оралиқдан олинган ҳақиқий сонлардир. Биринчи компонентаси 1 сонли бўлган, иккинчи компонента эса 3 дан 5 гача (3 ва 5 ҳам киради) қийматларини кетма-кет қабул қилган барча жуфтликлар РМ кесма нуқталари билан тасвирланади; биринчи компонента 2 бўлган, иккинчи компонента эса $[3, 5]$ оралиқдаги ҳамма ҳақиқий қийматларни қабул қилувчи барча жуфтликлар КЛ кесма нуқталари билан тасвирланади; биринчи компонента 3 сонли бўлган, иккинчи компонента эса $[3, 5]$ оралиқдаги ихтиёрий ҳақиқий сонни қабул қилувчи жуфтликлар эса SQ кесма нуқталари билан тасвирланади (51-расм).

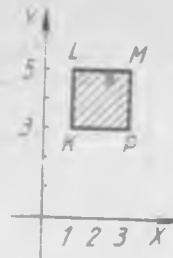
Шундай қилиб, 2-ҳолда А ва В тўпламларнинг координаталар текислигидаги Декарт кўпайтмаси РМ, КЛ, SQ кесмалар кўринишида тасвирланади.

3-ҳол кўриб ўтилган 2-ҳолдан шу билан фарқ қиладики, бунда фақат В тўплами эмас, А тўплам ҳам чексиздир. Бу шу нарсага олиб келадики, бунда $A \times B$ тўпламга тегишли жуфтликларнинг биринчи компоненталари $[1, 3]$ оралиқнинг фақат охириларигина бўлмай, балки бу оралиқдаги ихтиёрий сон бўлиши мумкин. Шунинг учун А ва В тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси элементларини тасвирловчи нуқталар КЛМР квадратни ҳосил қилади (52-расм). Декарт кўпайтманинг элементлари квадрат нуқталари билан тасвирланишини кўрсатиш учун бу квадратни тўғри чизиқлар билан штрихлаш мумкин.

4-ҳол аввалгисидан шу билан фарқ қиладики, бунда А тўплам барча ҳақиқий сонлардан ташкил топган, яъни $A \times B$ тўплам элементларини тасвирловчи нуқталарнинг абсциссаси ҳамма ҳақиқий қийматларни кетма-кет қабул қилади, бу вақтда ордината сифатида $[3, 5]$ оралиқдаги сонлар олинади. Бундай нуқталар тўплами полоса ҳосил қилади (53-расм).

$R \times R$ Декарт кўпайтма (5-ҳол) ҳақиқий сонларнинг мумкин бўлган барча жуфтликларидан ташкил топган. Бу жуфтликларни тасвирловчи нуқталар координата текислигини бутунлай қоплайди. Шундай қилиб, $R \times R$ Декарт кўпайтма координата текислигида қанча нуқта бўлса, шунча элементга эга.

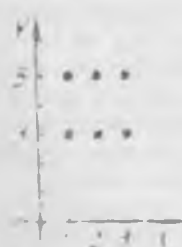
Кўриб ўтилган мисоллар «тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси» деб аташ тасодикий эмаслигини кўрсатиб турибди: унда сонларнинг тартибланган жуфтликлари билан унинг тўғри бурчакли Декарт координаталар системасида тасвирланиши орасида яқиндан боғланиш борлиги кўриниб турибди.



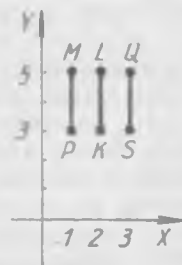
52-расм



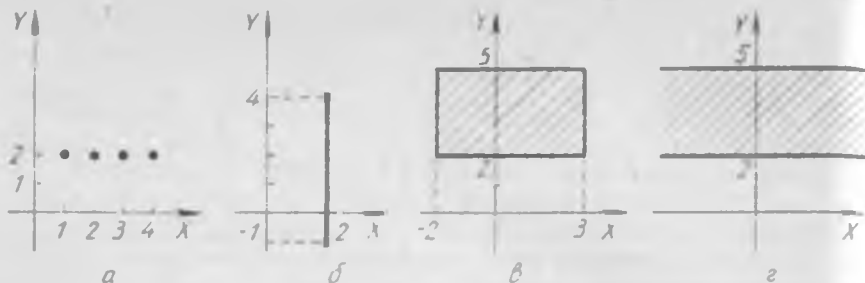
53-расм



50-расм



51-расм



54-расм

Машқлар

1. $(-1, 0)$, $(-1, 4)$, $(3, 0)$, $(3, 4)$ сонлар жуфтлигини тасвирловчи нуқталар координата текислигида қандай фигурани ҳосил қилади?

2. Координата текислигининг абсциссаси манфий ва ординатаси мусбат бўлган нуқталарни тўплаганини тўғри чизиқлар билан штрихлаб белгиланг.

3. Абсциссаси $[-2, 2]$ тўплагамга, ординатаси $[-3, 3]$ тўплагамга тегишли бўлган нуқталар қандай фигурани ҳосил қилади?

4. Агар $A = \{0, 2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ бўлса, $A \times B$ Декарт кўпайтмани тўғри бурчакли координаталар системасида тасвирланг. $(2, 3)$ нуқта ҳосил қилинган фигурага тегишли бўладими? $(3, 0)$ нуқта-чи?

5. 54-расмда қандай X ва Y тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси тасвирланганлигини аниқланг.

6. Тўғри бурчакли координаталар системасида $A \times B$ тўплаганини тасвирланг, бунда

1) $A = [-2, 2]$, $B = \{2, 3, 4\}$;

2) $A = [-2, 2]$, $B = [2, 4]$;

3) $A = R$, $B = [2, 4]$.

7. $A = \{3, 2, 1\}$ ва $B = \{4, 4, 6\}$ тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси урин алмаштириш хоссасига эга эмаслигини график усулда кўрсатинг.

35. Чекли тўпламларни Декарт кўпайтириш билан боғлиқ баъзи масалалар

Биз тўпламлар устида янги операция — Декарт кўпайтириш билан танишиб чиқдик. Турли Декарт кўпайтмаларни ҳосил қила бориб, биз унинг ҳамма элементларини ҳосил қилишга, бирорта ҳам элементини қолдириб кетмасликка алоҳида эътибор бердик. Бироқ берилган тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси элементларининг ҳаммаси санаб ўтилган-ўтилмаганлигини қан-

дай қилиб текшириш мумкин? Бошқача айтганда, A тўпламдаги ва B тўпламдаги элементлар сонини билган ҳолда $A \times B$ Декарт кўпайтмадаги элементлар сонини қандай аниқлаш мумкин? Бу саволга қуйидаги теорема жавоб беради:

Теорема. *Агар A тўплам m элементга, B тўплам эса n элементга эга бўлса, у ҳолда $A \times B$ Декарт кўпайтма $m \cdot n$ элементга эга бўлади.*

Исботи. $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ бўлсин. У ҳолда $A \times B$ тўплам ушбу мумкин бўлган барча жуфтликлардан ташкил топади:

$$\begin{aligned} & (a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_n), \\ & (a_2, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_2, b_n), \\ & (a_m, b_1), (a_m, b_2), \dots, (a_m, b_n). \end{aligned}$$

Бу жадвалнинг ҳар бир устунида m та жуфтлик бор ва бундай устунлар n тадир. Демак, $A \times B$ тўплам ҳаммаси бўлиб $m \cdot n$ та элементга эга.

Исботланган теоремани n та тўпламнинг Декарт кўпайтмаси учун ҳам кенгайтириш мумкин, яъни

$$n(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot \dots \cdot n(A_n).$$

Масала. Агар $A = \{a, b, c, d, e\}$ бўлса, $A \times A$ Декарт кўпайтмада неча элемент бор?

Ечилиши. A тўпламда 5 та элемент бўлгани учун $A \times A$ Декарт кўпайтмада $5 \cdot 5 = 25$ та жуфтлик бўлади.

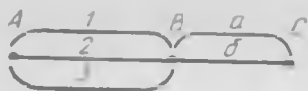
Иккита чекли тўпламнинг Декарт кўпайтмасидаги жуфтликларни ҳисоблаш қондаси ва уни тўпламлар n та бўлган ҳол учун умумлаштириш комбинаторлик масалалар деб аталувчи масалаларни ечишда кенг қўлланилади.

Комбинаторик масалалар — бу шундай масалаларки, улар чекли тўпламлар элементларидан турли-туман комбинацияларнинг баъзи қондалари бўйича тузилади.

Жумладан, «4, 2, 8 рақамларидан фойдаланиб, мумкин бўлган барча икки хонали сонларни шундай ёзингки, соннинг ёзувида айни бир рақам такрорланмасин» деган масалада 4, 2, 8 рақамлар билан бажариладиган турли комбинацияларни, бу комбинацияларда рақамлар такрорланмаслиги шартда кўриб чиқиш талаб этилади. Демак, бу масала комбинаторлик масаладир, уни бошланғич синфларда ечилади.

Математиканинг комбинаторик масалаларни ечиш билан шуғулланадиган бўлими комбинаторика деб аталади. Комбинаторика эҳтимоллар назарияси, кибернетика, ҳисоблаш техникаси ва математиканинг бошқа соҳаларидаги қатор муаммоларни ҳал қилишда муҳим роль ўйнайди.

Декарт кўпайтманинг элементларини ҳисоблаш қондаси комбинаторикада кўпайтма қондаси номи билан аталишини ва кўпинча қуйидагича ифода этилишини эслатиб ўтамиз: агар x элементни m та усул билан, y элементни эса n та усул билан тан-



55-расм

лаш мумкин бўлса, у ҳолда (x, y) жуфтликни $m \cdot n$ та усул билан танлаш мумкин.

1-м а с а л а. A шаҳардан B шаҳарга учта йўл бор, B шаҳардан C шаҳарга эса иккита йўл бор (55-расм). A дан C га B орқали неча усул билан бориш мумкин?

Е ч и л и ш и. A дан B га 1, 2 ва 3 йўллар олиб боради, B дан C га эса a ва b йўллар олиб боради деб тасаввур қилайлик (55-расм). У ҳолда A дан C га B орқали қуйидагича усуллар билан бориш мумкин: $(1, a)$, $(1, b)$, $(2, a)$, $(2, b)$, $(3, a)$, $(3, b)$.

Бироқ берилган масалани расмга мурожаат этмасдан ҳам ечиш мумкин эди, A дан C га B орқали боришнинг ҳамма усулларини қарашга ҳожат ҳам йўқ. Масаланинг саволига жавоб бериш учун масалада гап биринчи компонентаси A дан B га борадиган йўллардан, иккинчи компонентаси B дан C га борадиган йўллардан танлаб олинadиган мумкин бўлган барча жуфтликлар сони ҳақида бораётганлигини тушунишнинг ўзи етарли. A дан B га борадиган йўлларни танлаш усули 3 та. B дан C га борадиган йўлларни танлаш усули 2 та бўлгани учун, кўпайтма қондасига асосан, йўлларнинг тартибланган жуфтликларини $3 \cdot 2 = 6$ та усул билан танлаш мумкин.

2-м а с а л а. Агар соннинг ёзувида рақамларнинг такрорланиши: 1) мумкин бўлса, 2) мумкин бўлмаса, 5, 6, 7 рақамларидан фойдаланиб неча уч хонали сон тузиш мумкин?

Е ч и л и ш и. 1) Агар рақамларнинг такрорланиши мумкин бўлса, уч хонали сонларнинг ёзувидаги ҳар бир ўринга берилган учта рақамдан ихтиёрий биттасини қўйиш мумкин, яъни биринчи рақамни танлаш усули 3 та, иккинчи рақамни танлаш усули 3 та, учинчи рақамни танлаш усули 3 та. Демак, бу ҳолда $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ та уч хонали сон тузиш мумкин. 2) Агар соннинг ёзувида рақамлар такрорланмаса, у ҳолда биринчи рақамни танлаш усули 3 та, иккинчи рақамни танлаш усули 2 та, учинчи рақамни танлаш усули 1 та. Демак, бу ҳолда $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ та уч хонали сон тузиш мумкин.

Машқлар

1. A тўпلامда 7 та элемент бор. Агар $A \times B$ Декарт кўпайтмада: 1) 42 та; 2) 7 та; 3) 0 та элемент бўлса, B тўпلامда неча та элемент бор?

2. Набор китоб ва блокнотлардан тузилган. Агар 20 та турли китоб ва 15 та турли блокнот бўлса, неча ҳил набор тузиш мумкин?

3. Агар сонларнинг ёзувида рақамлар. 1) такрорланса, 2) такрорланмаса, 1, 2, 3, 4 рақамларидан фойдаланиб, неча икки хонали сон тузиш мумкин?

4. Агар сонларнинг ёзувида 1, 2, 4, 6, 8 рақамларидан фақат бир мартадан фойдаланиш мумкин бўлса, бу рақамлардан фойдаланиб, нечта турли тўрт хонали сон ёзиш мумкин? Улар орасида 2 рақамидан бошланадиган нечта сон бор?

5. Агар рақамлар соннинг ёзувида такрорланмаса, 3, 4, 0 рақамларидан фойдаланиб нечта уч хонали сон ёзиш мумкин?

6. Космик кема командаси уч кишидан ташкил топган: кема командири, борт инженери ва врач. Кема командирлигига 2 та номзод бор, борт инженерлигига 3 та, врачликка 4 та номзод бор. Кема командасини неча усул билан танлаш мумкин?

7. Агар синфда 40 та ўрин бўлса, 5 та ўқувчини неча усул билан ўтказиш мумкин?

8. Айланада 4 та нуқта белгиланган. Улар нечта турли ватарни аниқлайди?

9. Синфда 10 та фан ўрганилади. Душанба кuni 5 та дарс бўлиб, уларнинг ҳаммаси ҳар хил. Душанба кuni учун дарс жадвалини неча хил усул билан тузиш мумкин?

10. Мажлис ўтказиш учун 36 кишидан мажлис раиси ва секретарини танлаш керак. Бунини неча усул билан бажариш мумкин?

11. 5 га бўлинадиган нечта тўрт хонали сон тузиш мумкин?

6-§. МУНОСАБАТ ВА МОСЛИК

36. Муносабат тушунчаси

Математикада фақат объектларни (сонлар, фигуралар, катталиклар) нинг ўзигина эмас, балки улар орасидаги боғланишлар, муносабатлар ҳам ўрганилади. Масалан, бошланғич математикадаги ва умуман, математикадаги муҳим тушунчалардан бири натурал сон тушунчасини ўзлаштириш сонлар орасидаги турли-туман ўзаро боғланишларни ўрганиш билан амалга оширилади. Масалан,

5 сони 2 сонидан катта (ортнқ);

10 сони 8 сонидан 2 та кўп;

7 сони 6 дан кейин келади, яъни сонлар турли-туман муносабатлар: «катта (ортиқ)», «та кўп», «кейин келади» ва ҳоказолар билан боғланган деб тушунтирилади.

Геометрияда тўғри чизиқларнинг параллеллиги ва перпендикулярлиги, фигураларнинг тенглиги ва ўхшашлиги, яъни геометрик объектлар орасидаги турли-туман муносабатлар ўрганилади.

Тўпламларни таққослаб, биз масалан, улар кесишади ёки тенг, ёки бири иккинчисида ётади деймиз, яъни тўпламлар орасидаги муносабатларни аниқлаймиз.

Математикада кўпроқ икки объект орасидаги муносабат қаралади. Булар бинар муносабатлар дейилади. Бизнинг курси-

мизда биз фақат шундай муносабатларни ўрганамиз, шунинг учун бундан кейин «бинар» сўзини тушириб қолдирамиз.

Бизнинг олдимизда бундай масала турибди: сонлар орасидаги. геометрик фигуралар орасидаги, тўпламлар ва бошқа объектлар орасидаги конкрет муносабатлар ҳақида тасаввурга эга бўлган ҳолда бу муносабатларда қандай умумийлик борлигини аниқлаш, қандай қилиб бундай улкан сондаги — турлитуман муносабатларни классификация қилиш мумкин? Бу материални билиш бошланғич синф ўқитувчисига бошланғич мактабда конкрет муносабатларни ўрганаётган у ёки бу тушунчаларни ўзлаштиришда, уларнинг умумийлигини, ўзаро боғланишини, ролини тушуниш учун керак.

Дастлаб, бизга маълум бўлган турли-туман муносабатлар орасида қандай умумийлик борлигини аниқлаймиз.

$X = \{3, 4, 5, 6, 8\}$ сонлар тўпламини қараймиз. Бу тўпламдаги сонлар орасида «катта» муносабати мавжуд: $4 > 3$, $5 > 3$, $6 > 3$, $8 > 3$, $5 > 4$, $6 > 4$, $8 > 4$, $6 > 5$, $8 > 6$.

Берилган сонлар учун «1 та кўп» (1 та ортиқ) муносабатини ҳам қараш мумкин: «4 сони 3 дан 1 та кўп (ортиқ)», «5 сони 4 дан 1 та кўп (ортиқ)», «6 сони 5 дан 1 та кўп (ортиқ)».

Берилган тўпламдаги сонлар, шунингдек, «2 марта кичик (кам)» муносабати билан ҳам боғланган: «3 сони 6 дан 2 марта кичик (кам)», «4 сони 8 дан 2 марта кичик (кам)».

3, 4, 5, 6 ва 8 сонлари орасидаги яна бошқа муносабатларни ҳам кўрсатиш мумкин, биз уларнинг юқорида санаб ўтилган учтаси билан чегараланамиз.

Эътиборимизни қуйидагига қаратамиз: у ёки бу муносабатларни қарашда биз ҳар сафар берилган тўпламлардаги сонлардан ташкил топган тартибланган жуфтликлар билан операциялар бажардик. «Катта» муносабати учун бу $\{(4, 3), (5, 3), (6, 3), (8, 3), (5, 4), (6, 4), (8, 4), (6, 5), (8, 5), (8, 6)\}$ тўплам, «1 та кўп» муносабати учун бу $\{(4, 3), (5, 4), (6, 5)\}$ тўплам бўлди, ««икки марта кичик» муносабати учун эса бу иккита жуфтликни ўз ичига олган $\{(3, 6), (4, 8)\}$, тўплам бўлди. Шундай қилиб айтиш мумкинки, кўриб ўтилган ҳар бир муносабат $X = \{3, 4, 5, 6, 8\}$ тўплам элементларидан ҳосил қилинган сонлар жуфтликлари тўплами билан аниқланади.

Маълумки, тартибланган жуфтликларнинг — бу тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси элементлари Декарт кўпайтманинг қисм тўпламининг элементларидир. «Катта», «1 та кўп» ва «2 марта кам» муносабатларни аниқловчи жуфтликлар тўплами $X \times X = \{(3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 8), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (4, 8), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (5, 8), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6), (6, 8), (8, 3), (8, 4), (8, 5), (8, 6), (8, 8)\}$ Декарт кўпайтманинг қисм тўплами бўлишини кўриш қийин эмас.

Шундай қилиб, кўриб ўтилган муносабатларнинг ҳар бири ўз навбатида $X \times X$ Декарт кўпайтманинг қисм тўплами бўлувчи жуфтликлар тўплами билан аниқланар экан.

Муносабат жуфтликлар тўплами билан аниқланади дейиш ўрнига, математикада бу жуфтликлар тўпламининг ўзи X тўпلام элементлари орасидаги муносабат дейилади.

Таъриф. X тўпلام элементлари орасидаги муносабат ёки X тўпلامда муносабат деб $X \times X$ Декарт купайтманинг ҳар қандай қисм тўпламига айтилади.

Муносабат латин алфавитининг бош ҳарфлари билан белгиланади: P, Q, R, S ва ҳоказо. Демак, агар R, X тўпلام элементлари орасидаги муносабат бўлса, у ҳолда $R \subset X \times X$ бўлади.

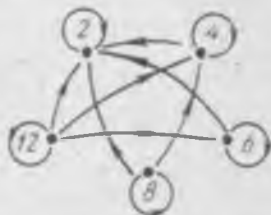
X чекли тўпلامдаги муносабатни стрелка билан туташтирилган нуқталардан ташкил топган алоҳида чизмалар ёрдамида кўргазмали тасвирлаш мумкин. Бундай чизмалар графлар¹ деб аталади.

Масалан, $X = \{2, 4, 6, 8, 12\}$ тўпلام элементлари орасидаги «катта» муносабатни графигини ясаймиз. Бунинг учун берилган тўпلام элементларини нуқталар билан тасвирлаймиз ва «катта» муносабатида бўлувчи сонларни тасвирловчи нуқталарни стрелкалар билан туташтирамиз. $4 > 2$ бўлгани учун 4 дан 2 га стрелка ўтказамиз, $6 > 4$ бўлгани учун 6 дан 4 га стрелка ўтказамиз ва ҳоказо. Бу жараёни берилган муносабат билан боғланувчи ҳамма жуфтликларни кўрсатиб бўлгунча давом эттирамиз. Натижада $X = \{2, 4, 6, 8, 12\}$ тўпلام элементлари учун «катта» муносабати графигига эга бўламиз (56-расм).

Энди худди шу X тўпلامда «каррали» муносабатини қараймиз ва унинг графигини ясаймиз. X тўпلام элементларини юқоридаги ҳолдагига ўхшаш нуқталар билан тасвирлаймиз ва «каррали» муносабатида бўлувчи сонларни тасвирловчи стрелкалар билан туташтирамиз. 12 сони 2 га каррали, 12 сони 4 га каррали ва ҳоказо. X тўпلامдаги ихтиёрий сон ўз-ўзига каррали бўлгани учун бу муносабатнинг графиги боши ва охири устма-уст тушадиган стрелкаларга эга (57-расм). Графикдаги бундай стрелкалар сиртмоқлар (петля) дейилади.



56-расм



57-расм

Машқлар

1. 1) натурал сонлар; 2) текисликдаги тўғри чизиқлар; 3) учбурчаклар; 4) тўпلامлар орасида мавжуд бўладиган муносабатларга мисоллар келтиринг.

¹«Граф» сўзи «график» сўзи каби грекча «графос» сўзидан олинган бўлиб, ёзма маъносини англатади.



а

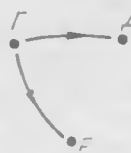
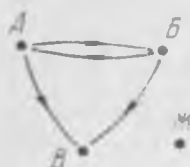


б



в

58- расм



3

59- расм

2. $X = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ тўп-
лам элементларидан мумкин бўл-
ган барча шундай сонлар жуфт-
ликларини ҳосил қилингки, бун-
да (x, y) жуфтликларнинг компо-
ненталари қуйидаги муносабат
билан боғланган бўлсин:

- 1) « x y дан 3 марта катта»;
 - 2) « x y дан 3 та кўп (ортиқ)».
- Мазкур муносабатларнинг гра-
фини ясанг.

3. Қуйидаги тўп-ламлардан қайсилари $A = \{0, 3, 6, 9, 12\}$ тўп-
лам элементлари орасидаги муносабат бўлади:

- 1) $P = \{(6, 3), (9, 3), (12, 3), (12, 6), (3, 3), (6, 6), (9, 9), (12, 12)\}$;
- 2) $T = \{(3, 3), (3, 6), (3, 9), (3, 12), (6, 6), (9, 9), (12, 12)\}$;
- 3) $M = \{(3, 6), (6, 12), (9, 18)\}$?

4. 58- расмда келтирилган графлардан қайси бири $B = \{5, 10, 20, 30, 40\}$ тўп-
ламда берилган « x y сонининг бўлувчиси» муно-
сабатининг графи бўлишини аниқланг.

5) $X = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ тўп-ламда P, Q, S муносабатлар берил-
ган. Агар:

P — «кичик» муносабати;

Q — «2 марта кичик» муносабати;

S — «2 та кам» муносабати бўлса, уларнинг графини ясанг.

6. M тўп-лам Пўлатовлар онла аъзолари — ота Салим Қур-
бонович, она Ҳалима Солиевна ва болалар: Толиб, Карим, Нар-
гиза ва Нигоралардан иборат. Онла аъзолари орасида турлича
муносабат мавжуд. Қуйидаги муносабатлар графларини ясанг:

1) «қизи бўлишлик», 2) «акаси (укаси) бўлишлик», 3) «онаси
бўлишлик».

7. 59- расмда бир уйда яшовчи болаларнинг (болалар А, Б,
В, Г, Д, Ж, З нуқталар билан белгиланган) «акаси (укаси)
бўлишлик» муносабати графи берилган. Улардан қайсилари
қиз болалар, қайсилари ўғил болалар? Бу граф бўйича бо-
лалардан қайсилари тўғрисида бирор нарса дейиш мумкин
эмас?

37. Муносабатларнинг берилиш усуллари

Таърифга кўра X тўплам элементлари орасидаги R муносабат, бу $X \times X$ Декарт кўпайтманинг ҳар қандай қисм тўплами, яъни элементларни тартибланган жуфтликлар бўлган тўпламдир. Шунинг учун муносабатларнинг берилиш усуллари аслида тўпламларнинг берилиш усуллари каби бўлади.

1. X тўпламда берилган R муносабатни X тўпламдан олинган ва шу муносабат билан боғланган барча элементлар жуфтликларини санаб кўрсатиш билан бериш мумкин.

Бунда ёзиш шакллари турлича бўлиши мумкин. Масалан, $X = \{4, 5, 6, 7, 9\}$ тўпламдаги бирор муносабатни қуйидаги жуфтликлар тўпламини ёзиш билан бериш мумкин: $\{(5, 4), (6, 4), (6, 5), (7, 4), (7, 5), (7, 6), (9, 4), (9, 5), (9, 6), (9, 7)\}$. Шу муносабатнинг ўзини яна графлар ёрдамида ҳам бериш мумкин (60-расм).

2. Қўлингча X тўпламдаги R муносабат шу R муносабатда бўлган барча элементлар жуфтликларининг характеристик хос-сасини кўрсатиш билан берилади. Баъзан ўзгарувчиларнинг белгиланишлари тушириб қолдирилса-да, бу хосса икки ўзгарувчилик жумла кўрinishида ифодаланади.

Масалан, биз N натурал сонлар тўпламидаги муносабатлар орасидан қуйидагиларни айтиб ўтдик: « x сони y сонидан катта», « x сони y сонининг бўлувчиси», « x сони y сонидан 3 марта кичик» ва ҳоказо. Тўғри, биз одатда бу жумлаларнинг қисқа шакллари билан иш кўрдик: «катта», «бўлувчи бўлишлик», «3 марта кичик» муносабатлари ҳақида гапирдик.

Математикада икки ўзгарувчилик кўпгина жумлалар символлардан фойдаланиб ёзилади. Масалан, сонлар учун «катта» муносабати $x > y$ тенгсизлик кўрinishида ёзилиши мумкин, « x сони y сонидан 3 марта кичик» муносабати эса $y = 3x$ тенглик кўрinishида ёзилиши мумкин. Текисликдаги тўғри чизиқлар орасидаги муносабатлар қисқа шаклда (параллеллик муносабати, перпендикулярлик муносабати ва ҳ. к.) ҳам, символлардан фойдаланиб ҳам берилиши мумкин: $x \parallel y$, $x \perp y$.

Алоҳида белгилар учбурчаклар орасидаги муносабатларни ёзиш учун ҳам ишлатилади: $\triangle ABC = \triangle A_1 B_1 C_1$, $\triangle ABC \sim \triangle A_1 B_1 C_1$. Келтирилган ёзувларнинг умумлашмаси $x R y$ ёзуви бўлиб, бу x элемент y элемент билан R муносабатда деган маънони англатади.

Бошланғич математика курсида ҳам, ўрта мактабда ҳам муносабат тушунчаси умумий кўрinishида киритилмайди, бу ерда турли объектлар орасидаги конкрет муносабатлар ўрганилади.

Бошланғич математикада катта эътибор сонлар орасидаги муносабатларни ўрганишга қаратилади. Улар турлича берилади: қисқа шаклга («катта», «...марта катта», «...та кам») эга бўлган икки ўзгарувчилик



60-расм

жумлалар ёрдамида берилади, жадваллар тўлдирилади. Бошланғич синф ўқувчилари кўп сонли муносабатлар билан текстли масалаларни ечишда учрашадилар. Масалан, «Колхоз давлатга 364 т бугдой, бугдойдан 76 т кам шoli, шolidан 32 марта кам гречиха сотди. Колхоз давлатга ҳаммаси бўлиб қанча дон сотган?» деган масалани ечиш учун ўқувчилар «76 т кам», «32 марта кам» муносабатларининг маъносини яхши тушуниб олишлари керак.

Машқлар

1. $A = \{3, 6, 9, 18, 27\}$ тўплам элементлари орасидаги бирор муносабатни турли усуллар билан беринг.

2. Жумлаларни теигликлар кўринишида ёзинг:

1) x сони y сонидан 5 та кўп; 2) x сони y сонидан 7 та кам, 3) x сони y сонидан 5 марта катта, 4) x сони y сонидан 5 марта кичик.

3. Муносабатларни икки ўзгарувчи тенгсизликлар кўринишида ёзинг.

1) «кичик»; 2) «кичик ёки тенг».

4. Бошланғич синфларда қаралдиган: 1) натурал сонлар тўпламидаги; 2) кесмалар тўпламидаги; 3) текстли масалалардаги муносабатларга мисоллар келтиринг.

5. $X = \{0, 1, 3, 4, 6\}$ тўплам элементлари $P = \{(0, 1), (0, 3), (0, 4), (0, 6), (1, 4), (6, 6)\}$ муносабатда. Бу муносабатнинг графини ясанг.

6. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ тўпламда берилган «кагта ёки тенг» муносабатининг графини ясанг. Бу муносабатни икки ўзгарувчи тенгсизлик ёрдамида қандай бериш мумкин?

7. Масалани, дастлаб унда қаралаётган муносабатни ажратиб кўрсатиб, ечинг.

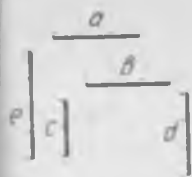
1) Бир токчада иккинчисидигидан 3 марта кўп китоб бор эди. Биринчи токчадан 8 та китоб олиниб, иккинчи токчага 5 та китоб қўйилгандан кейин иккинчи токчада биринчисидигидан 17 та кам китоб бўлди. Ҳар бир токчада нечта китоб бўлган?

2) Автобазада автобуслардан 46 та кўп юк машинаси бор эди. Агар юк машинаси автобуслардан 3 марта кўп бўлса, автобазада нечта юк машинаси бўлган?

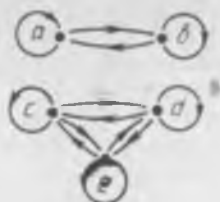
38. Муносабатларнинг хоссалари

Юқорида биз математикада икки объект орасидаги турли-туман муносабатлар ўрганилишини аниқладик. Уларнинг ҳар бири бирор X тўпламда қаралади ва жуфтликлар тўпламини ифодалайди.

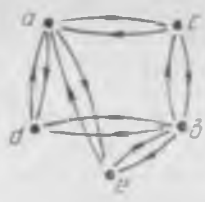
Бироқ бундай кўп сонли муносабатларни қандай ўрганиш мумкин? Уларни бирор-бир усул билан классификациялаш мумкин эмасмикан? Мумкин экан. Бунинг учун муносабатларнинг хоссаларини ажратиб кўрсатиш керак.



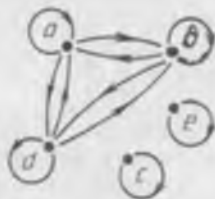
61-расм



Параллеллик
муносабатининг
графи



Перпендикулярлик
муносабатининг
графи



Тенглик
муносабатининг
графи



"Узунроқ"
муносабатининг
графи

62-расм

61-расмда тасвирланган кесмалар тўпламида параллеллик¹, перпендикулярлик, тенглик, узунроқлик муносабатларини қараб чиқамиз. Бу муносабатларнинг графларини ясаймиз (62-расм).

Параллеллик ва тенглик муносабатлари графларининг ўхшашлиги нима билан тушунтирилади? Ёки перпендикулярлик ва параллеллик муносабатлари графларининг ўхшашлиги-чи? Бу муносабатлар жуфтликлари «ўхшаш» хоссаларга эга экани шубҳасиз. Бу қандай хоссалар?

Параллеллик ва тенглик муносабатлари графларини қарайлик. Улар сиртмоқларга эга. Бу сиртмоқлар биз X тўпладан қандай кесма олмайлик, бу кесма ҳақида у ўз-ўзига параллел ёки ўз-ўзига тенг дейиш мумкинлигини билдиради.

Параллеллик ва тенглик муносабатлари ҳақида улар рефлексивлик хоссасига эга ёки содда қилиб улар рефлексив дейилади.

Таъриф. Агар X тўпладagi иштиёрий элемент ҳақида у ўз-ўзи билан R муносабатда дейиш мумкин бўлса, X тўпладagi муносабат рефлексив муносабат дейилади.

Бу таърифни қисқагина бундай ёзиш мумкин:

X да R рефлексив $\iff$ иштиёрий $x \in X$ учун $x R x$.

¹ Бунда параллеллик муносабатининг қуйидаги таърифларидан келиб чиқамиз: Агар икки тўғри чизиқ бир текисликда ётса ва умумий нуқтага эга бўлмаса ёки устма-уст тушса, у ҳолда улар параллел дейилади.

Айтиб ўтганимиздек, агар R муносабат рефлексив бўлса, у ҳолда графнинг ҳар бир учида сиртмоқ бўлади. Тескариси ҳам ўринли: ҳар бир учида сиртмоқ бўлган граф бирор рефлексив муносабатнинг графини ифодалайди.

Рефлексивлик хоссасига эга бўлмаган муносабатлар мавжуд. Масалан, перпендикулярлик муносабати шундай муносабатдир (62-расм). X тўпламда ўз-ўзига перпендикуляр дейиш мумкин бўлган бирорта ҳам кесма йўқ.

Энди кесмаларнинг параллеллик, перпендикулярлик ва тенглик муносабатлари графларига эътибор берайлик. Уларнинг ўзига хос хусусиятлари шундан иборатки, агар элементлар жуфтлари туташтирувчи битта стрелка бор бўлса, у ҳолда, албатта шу элементларни туташтирувчи, лекин қарама-қарши йўналган бошқа стрелка ҳам бор бўлади. Бу стрелкалар қуйидагиларни билдиради:

1) агар биринчи кесма иккинчисига параллел бўлса, у ҳолда иккинчи кесма ҳам биринчисига параллел бўлади;

2) агар биринчи кесма иккинчисига перпендикуляр бўлса, у ҳолда иккинчиси ҳам биринчисига перпендикуляр бўлади;

3) агар биринчи кесма иккинчисига тенг бўлса, у ҳолда иккинчи кесма ҳам биринчига тенг бўлади.

Параллеллик, перпендикулярлик ва тенглик муносабатлари ҳақида улар симметриклик хоссасига эга ёки соддароқ қилиб, улар симметрик деб айтилади.

Таъриф. Агар X тўпламдаги x элемент y элемент билан R муносабатда бўлишдан y элементнинг ҳам x элемент билан R муносабатда бўлиши келиб чиқса, X тўпламдаги R муносабат симметрик муносабат дейилади.

Қисқача бундай бўлади:

$$X \text{ да } R \text{ симметрик} \iff x R y \Rightarrow y R x.$$

Симметрик муносабатнинг графи қуйидаги хусусиятга эга: x дан y га боровчи ҳар бир стрелка билан бирга, граф y дан x га боровчи стрелкага ҳам эга. Тескари даъво ҳам ўринли: x дан y га боровчи ҳар бир стрелка билан бирга y дан x га боровчи стрелкага эга бўлган граф симметрик муносабатнинг графи бўлади.

Симметриклик хусусиятига эга бўлмаган муносабатлар ҳам мавжуд. Масалан, кесмалар учун «узунроқ» муносабати шундай муносабатдир.

Шу муносабатнинг графини қараймиз. Унинг ўзига хос хусусияти қуйидагидан иборат: агар стрелка иккита учни туташтирса, у ҳолда y ягона бўлади. «Узунроқ» муносабати ҳақида у антисимметриклик хоссасига эга ёки қисқа қилиб антисимметрик муносабат деб айтилади.

Таъриф. Агар X тўпламнинг турли x ва y элементлари учун x элементнинг y элемент билан R муносабатда бўлишдан y эле-

ментнинг x элемент билан K муносабатда бўлмаслиги келиб чиқса, X тўпلامдаги R муносабат антисимметрик муносабат дейилади.

Қисқача бундай ёзиладн:



63- расм



64- расм

$$X \text{ да } R \text{ антисимметрик} \Leftrightarrow xRy \text{ ва } x \neq y \Rightarrow \overline{yRx}$$

Антисимметрик муносабатнинг графн қўйидаги хусусиятга эга: агар графнинг иккита учн стрелка билан туташтирилган бўлса, у ҳолда бу стрелка ягонадир. Тескари даъво ҳам ўринли: учлари фақат битта стрелка билан туташтирилувчи граф антисимметрик муносабатнинг графн бўлади.

Ҳамма муносабатлар симметрик ва антисимметрик муносабатларга бўлинади деб уйламаслик керак. Шундай муносабатлар учрайдики, улар на симметрик хоссасига ва на антисимметрик хоссасига эга эмас. Масалан, бир оиладаги болалар тўпламида, «ака (ука) бўлишлик» муносабатини қарайлик. Оилада учта бола бўлсин: Карим, Мурод, Турсуной. У ҳолда «ака (ука) бўлишлик» муносабатининг графн 63- расмдаги каби бўлади.

У берилган муносабат на симметрик хоссасига ва на антисимметрик хоссасига эга эканлигини кўрсатади.

Эътиборимизни параллеллик, тенглик ва «узунроқ» муносабатлари графнинг яна бир ўзига хос хусусиятига (бу хусусият бирданига кўзга ташланмайди) қаратамиз: агар стрелка биринчи элементдан иккинчига ва иккинчи элементдан учинчи элементга борса, у ҳолда, албатта биринчи элементдан учинчи элементга борадиган стрелка бор бўлади. Графларнинг бу хусусияти берилган муносабатларнинг транзитивлик хоссаси деб аталувчи хоссани ифодалайди.

Таъриф. Агар X тўпلامдаги x элементнинг у элемент билан R муносабатда бўлиши ва у элементнинг z элемент билан R муносабатда бўлишидан x элементнинг z элемент билан R муносабатда бўлиши келиб чиқса, X тўпلامдаги R муносабат транзитив муносабат дейилади.

Қисқача бундай ёзилади:

$$X \text{ да } R \text{ транзитив} \Leftrightarrow xRy \text{ ва } yRz \Rightarrow xRz$$

Транзитив муносабатнинг графн x дан y га ва y дан z га боровчи ҳар бир стрелкалар жуфтлиги билан бирга x дан z га боровчи стрелкага ҳам эга (64- расм). Тескари даъво ҳам ўринли.

Транзитивлик хоссасига эга бўлмаган муносабатлар ҳам мавжуд. Масалан, кесмаларнинг перпендикулярлик муносабати шундай муно-

сабатдир: агар a кесма d га ва d кесма b га перпендикуляр бўлса, у ҳолда a кесма b га перпендикуляр бўлмайди.

Муносабатларнинг ажратиб кўрсатилган хоссалари турли муносабатларни умумий нуқтаи назар бўйича — уларда у ёки бу хоссанинг бор-йўқлиги бўйича таққослашга имкон беради. Масалан, биз юқорида қараган кесмаларнинг параллеллиги ва тенглиги муносабатлари айнан бир хил хоссаларга эга: улар рефлексивлик, симметриклик ва транзитивлик хоссаларидир. Перпендикулярлик муносабати улардан фарқ қилади, чунки перпендикулярлик муносабати симметрик, лекин у на рефлексивлик хоссасига ва на транзитивлик хоссасига эга бўлмайди. «Узунроқ» муносабати бошқача характерга эга — у антисимметрик ва транзитив.

Машқлар

1. $X = \{1, 2, 4, 8, 12\}$ тўпلامда « x сони y га каррали» муносабати берилган. Берилган муносабатнинг графини ясанг ва хоссаларини ифодаланг.

2. X тўпلامда берилган (1- машққа қ.) « x y нинг бўлувчиси» муносабати графи « x сони y га каррали» муносабати графидан нима билан фарқ қилади? Бу муносабатларнинг хоссаларида фарқ борми?

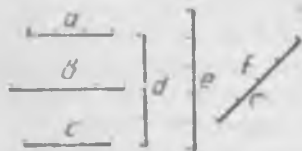
3. Кесмаларнинг A тўпلاميда (65- расм) «тенг» ва «қисқа» муносабатлари берилган. Мазкур муносабатларнинг графларини ясанг ва хоссаларини ифодаланг. Бу муносабатлардан қайси бири рефлексивлик хоссасига эга эмас? Унинг графи қандай хусусиятга эга?

4. $B = \{0, 2, 4\}$ тўпلامда берилган «каррали» муносабати рефлексивлик хоссасига эгами?

5. $X = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ тўпلامда «катта» ва «катта ёки тенг» муносабатлари берилган. Шу муносабатларнинг графларини ясанг ва хоссаларини ифодаланг. Улардан қайси бири рефлексивлик хоссасига эга? Нима учун?

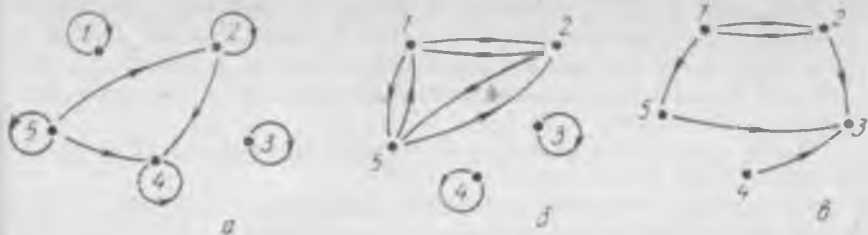
6. $Y = \{2, 4, 6, 8, 12\}$ тўпلامда берилган «2 марта катта» ва «2 та катта» муносабатларининг хоссалари қандай? Бу муносабатларнинг графлари нимаси билан ўхшаш? Ушбу мулоҳаза тўғрими: «2 марта катта» муносабати антисимметрик муносабат, чунки x сони y дан 2 марта катталигидан y сони x дан 2 марта катта экани келиб чиқмайди?

7. R муносабатнинг графи ясалди ва у a элементдан b элементга борувчи ҳамда b элементдан c элементга борувчи стрелкаларга эга эканлиги, a дан c га борувчи стрелкага эса эга эмаслиги кўриниб қолди. R муносабат транзитив муносабат бўладими? Нима учун?



65- расм

8. S муносабатнинг графига x элементдан y элементга борадиган стрелка



66- расм

бор. S муносабат транзитив муносабат бўла оладими?

9. $E = \{a, b, c, d\}$ тўпламда $R = \{(a, b), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (c, d), (c, a), (a, b)\}$ муносабатлар берилган. У қандай хоссаларга эга?

10. 66-расмда $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ тўпламда берилган муносабатнинг графи келтирилган.

Бу муносабатлардан қайсилари: 1) рефлексив; 2) транзитив; 3) симметрик ва транзитив; 4) антисимметрик ва транзитив?

11. Қуйидаги масалаларда қандай муносабатлар қаралаётганини аниқланг ва уларнинг ечиш усуллари ўхшашлигини асосланг:

1) Пионерлар карнавалга ўғил болалар учун 15 та шапка, қизлар учун улардан икки марта кўп шапка ясашди. Улар ҳаммаси бўлиб нечта карнавал шапкаси ясашган?

2) Октябрятлар арча учун 26 та юлдузча қирқишди, бу қирқилган қор парчалардан 2 марта кам. Октябрятлар ҳаммаси бўлиб нечта юлдузча ва қор парча қирқишган?

39. Эквивалентлик муносабати

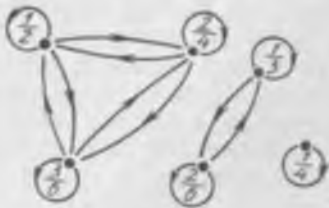
$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}\right\}$ касрлар тўпламида тенглик муносабати берилган. Унинг графи 67-расмда келтирилган. Берилган муносабат қандай хоссаларга эга?

1) У рефлексив, чунки ихтиёрий каср ўз-ўзига тенг.

2) У симметрик, чунки x касрнинг y касрга тенглигидан y касрнинг x касрга тенглиги ҳам келиб чиқади.

3) У транзитив, чунки x касрнинг y касрга ва y касрнинг z касрга тенглигидан x касрнинг z касрга тенглиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, касрларнинг тенглик муносабати рефлексив, симметрик ва транзитив муносабатдир. Бундай ҳолда бу эквивалентлик муносабати бўлади деб айтилади.



67- расм

Таъриф. Агар X тўпламда берилган R муносабат рефлексив, симметрик ва транзитив бўлса, у ҳолда у эквивалентлик дейилади.

Масалан, тўғри чизиқларнинг параллеллик муносабати, фигураларнинг тенглик муносабати эквивалентлик муносабат бўлади.

Нима учун математикада муносабатларнинг бу тури ажратилган?

Касрларнинг тенглиги муносабати графини, шунингдек, кесмаларнинг параллеллиги ва тенглиги муносабатлари графларини қарайлик (62-расм). Буларнинг ҳаммаси бошқа муносабатлар графларидан шу билан фарқ қиладики, уларда муносабати берилган тўплам бир нечта қисм тўпламларга ажралиши кўриниб туради. Масалан, касрларнинг тенглиги муносабати графиди (67-расм) учта қисм тўплам ажратилади: $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}\right\}$, $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}\right\}$, $\left\{\frac{1}{4}\right\}$. Бу қисм тўпламлар кесишмайди, уларнинг бирлашмаси эса X тўплам билан устма-уст тушади, яъни X тўпламни жуфт-жуфти билан кесишмайдиган қисм тўпламга ажратишга эга бўламиз. Биз кесмаларнинг параллеллиги ва тенглиги муносабатларни учун ҳам шунга ўхшаш ҳодисага эга бўламиз. Бу тасодифий эмас.

Теорема. Агар X тўпламда эквивалентлик муносабати берилган бўлса, у ҳолда бу муносабат X тўпламни жуфт-жуфти билан кесишмайдиган қисм тўпламлар (эквивалентлик синфлари) га ажратади.

Тескари даъво ҳам ўринли: агар X тўпламда берилган бирор-бир муносабат бу тўпламни синфларга ажралишини аниқласа, у ҳолда бу муносабат эквивалентлик муносабати бўлади.

Биз бу теоремани исботсиз қабул қиламиз.

Агар эквивалентлик муносабати номга эга бўлса, у ҳолда синфларга ҳам унга мос ном берилади. Масалан, агар кесмалар тўпламида тенглик муносабати берилса (бу эквивалентлик муносабати бўлади), у ҳолда кесмалар тўплами тенг кесмалар синфига ажралади. Учбурчаклар тўплами ўхшашлик муносабати билан ўхшаш учбурчаклар синфига ажратилади.

Тўпламни бундай синфларга ажратишнинг муҳимлиги нимада? Гап шундаки, эквивалентликнинг ҳар бир синфида эквивалент элементлар, яъни баъзи муносабатлар нуқтан назаридан фарқланмайдиган элементлар бўлади. Масалан, тенг касрлар ёки ўхшаш бурчаклар. Шунинг учун эквивалентлик синфи (тўплам) ўзининг ихтиёрий (битта) вакили билан, яъни бу синфнинг ихтиёрий элементи билан аниқланади деб ҳисобланади. Масалан, тенг касрларнинг ихтиёрий синфини шу синфга тегишли ихтиёрий касрни кўрсатиш билан бериш мумкин.

Эквивалентлик синфини унинг битта вакили бўйича аниқлаш тўпламнинг ҳамма элементлари ўрнига эквивалентлик синфининг алоҳида вакиллари тўпламини ўрганишга имкон беради.

Машқлар

1. X — текисликдаги тўғри чизиқлар тўплами. Қуйидаги муносабатлардан қайсилари шу тўпلامдаги эквивалентлик муносабати бўлади: 1) « x y га параллел; 2) x y га перпендикуляр»; 3) « x y билан кесишади»?

2. $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ тўпلامда «3 га бўлганда айнан бир хил қолдиққа эга» муносабат берилган. Берилган муносабат эквивалентлик муносабати эканини кўрсатинг ва X тўпلام бўлинадиган барча эквивалентлик синфларини ёзинг. Нечта шундай синф ҳосил бўлди?

3. X тўпلامда (2- машққа қ.) «4 га бўлганда айнан бир хил қолдиққа эга» муносабат нечта эквивалентлик синфларини аниқлайди? Бу синфларни ёзинг. Ҳар бир синфнинг биттадан вакилини айтинг.

4. Тўғри тўртбурчаклар тўплами M да (68- расм) тенгдошлик муносабати берилган. Бу эквивалентлик муносабати эканини кўрсатинг ва шу муносабат ёрдамида M тўпلام бўлинадиган синфларни айтинг.

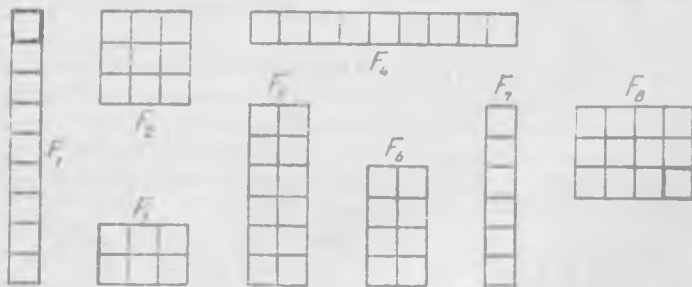
5. $X = \{7 - 3; 2^2; 5 \cdot 2; 60 : 6; 1 + 3; 0 : 4; 0 \cdot 10; 4 : (10 - 10)\}$ тўпلامни «бир хил қийматга эга» муносабати ёрдамида синфларга ажратиш мумкинми?

6. Нима учун кесмаларнинг тенглиги муносабати эквивалентлик муносабати бўлишини, «қисқароқ» муносабати эса бўлмаслигини тушунтиринг.

7. $X = \{213, 37, 21, 87, 82\}$ тўпلامда P — «ёзувида бир хил рақамларга эга» муносабати берилган. P муносабат эквивалентлик муносабати бўладими?

8. T — «айнан бир хил сондаги бўлувчиларга эга» муносабати $\{1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 11\}$ тўпلامда берилган. T — эквивалентлик муносабати эканини кўрсатинг ва эквивалентликнинг ҳамма синфларини ёзинг.

9. 0 дан 999 гача бўлган бутун сонлар тўпلامда R — «ёзувида айнан бир хил сондаги рақамларга эга» муносабати берилган. R эквивалентлик муносабати бўлишини кўрсатинг. У берилган сонлар тўпلامини нечта синфга ажратади? Ажратиш-



68- расм

нинг ҳар бир синфидаги энг катта ва энг кичик элементларни айтинг.

10. «Айнан бир хил рақам билан тугайди» муносабати натурал сонлар тўпламида нечта эквивалентлик синфини аниқлайди? Ҳар бир синфнинг биттадан вакилини айтинг.

40. Тартиб муносабати

Биз «тартиб» сўзини кундалик ҳаётдаги каби математика дарсларида ҳам кўп қўллаймиз. Биз ишга тушиш тартиби ҳақида, жумладаги сўзлар тартиби ҳақида гапиримиз; математика дарсида амалларнинг бажарилиш тартибини, тенгламаларни, масалаларни ечиш тартибини ва ҳоказоларни муҳокама қиламиз.

Тартибнинг ўзи нима?

Бир нечта мисол қараймиз:

1) Синфдаги ўқувчилар тўпламида тартиб ўрнатиш учун уларни бўларига қараб сафга турғизиш етарли. Амалда бу иш ўқувчилар жуфтини таққослашга олиб келади, яъни ўқувчилар тўпламида «баланд бўлишлик» муносабати қаралади. Бу муносабат антисимметрик ва транзитивдир.

2) Синфдаги ўқувчиларни ёшлари бўйича, яъни «катта бўлишлик» муносабатини бериш билан тартиблаштириш ҳам мумкин. Бу муносабат ҳам антисимметрик ва транзитив бўлишини эслатиб ўтамиз.

3) Ўзбек алфавитида ҳарфларнинг келиш тартиби ҳаммага маълум. Бунинг антисимметрик ва транзитивлик хоссаларига эга бўлган «кейин келишлик» муносабати таъминлайди.

Тўпланда бирор тартибни ўрнатувчи муносабатнинг биз эслатиб ўтган хоссаси тартиб муносабатининг таърифига асос бўлди.

Таъриф. Агар X тўпландаги R муносабат транзитив ва антисимметрик бўлса, у ҳолда бу муносабат тартиб муносабати дейилади.

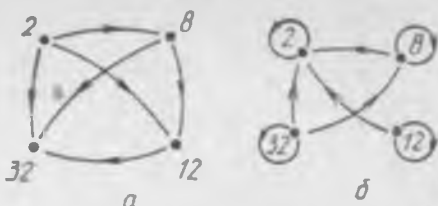
X тўпланим, унда берилган тартиб муносабати билан бирга тартибланган тўпланим деб аталади.

$X = \{2, 8, 12, 32\}$ тўпланим «кичик» муносабати ёрдамида тартиблаштириш мумкин (69-а расм), бунинг «каррали» муносабати ёрдамида ҳам амалга ошириш мумкин (69-б расм). Бироқ тартиб муносабати бўла туриб «кичик» ва «каррали» муносабатлари натурал сонлар тўпланимининг турлича тартиблаштирилади. «Кичик» муносабати X тўпландаги ихтиёрий иккита турли сонни таққослашга имкон беради, «каррали» муносабати эса бундай хоссага эга эмас. Масалан, 8 ва 12 сонлар жуфти «каррали» муносабати билан боғланган эмас: 8 сонни 12 га каррали ёки 12 сонни 8 га каррали дейиш мумкин эмас.

Барча муносабатлар эквивалентлик муносабати ва тартиб муносабатига бўлинади деб ўйламаслик керак. Шундай катта

сондаги муносабатлар мавжудки, улар на эквивалентлик муносабати ва на тартиб муносабати бўлмайди.

I синфдаёқ ўқувчилар натурал сонлар учун «катта» ва «кичик» муносабатлари билан танишадилар. Кейин кесмалар учун «узун» ва «қисқа» муносабатлари пайдо бўлади. Бу муносабатлар ёрдамида сонлар тўпламида ва кесмалар тўпламида тартиб ўрнатилади.



69- расм

Машқлар

1. X — кесмалар тўплами. Қуйидаги муносабатлардан қайсилари бу тўпланда тартиб муносабати бўлади: 1) « x y га тенг»; 2) « x y дан узун»; 3) « x y дан 2 см қисқа»; 4) « x y дан 3 марта узун».

2. $X = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ тўпланда « x y нинг бўлувчиси» муносабати берилган. Бу муносабат X тўпламини тартиблаштиришини кўрсатинг. Бу тартиб X тўпланда «катта» муносабати билан ўрнатилган тартибдан нима билан фарқ қилади?

3. «Кичик ёки тенг» муносабати X тўпламини (2-машққа қ.) тартиблаштирадими? Бу муносабатнинг графини ясанг.

4. «Кейин келиш» муносабати натурал сонлар тўпламини тартиблаштирадими? «Бевосита кейин келиш» муносабат-чи?

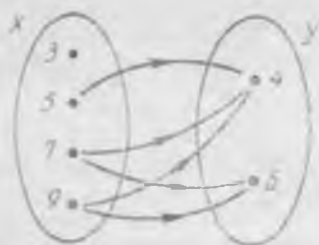
5. M — текисликдаги айланалар тўплами, R — « x айлана y айлананинг ичида ётади» муносабати. Бу муносабат M тўпламини тартиблаштирадими?

6. Текисликдаги тўғри чизиклар тўпламини қуйидаги муносабатлар ёрдамида тартиблаштириш мумкинми: 1) « x тўғри чизик y тўғри чизикни кесади»; 2) « x тўғри чизик y тўғри чизикқа перпендикуляр»?

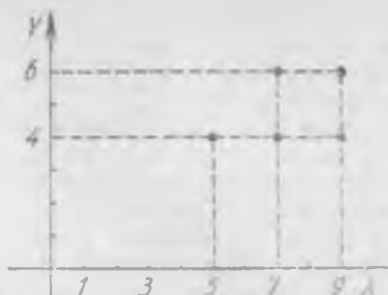
41. Мослик тушунчаси

Тўпландаги муносабатлардан ташқари кўпинча икки тўплам элементлари орасидаги муносабатларни қарашга ҳам тўғри келади. Бундай муносабатлар мосликлар деб аталади. Масалан, кесмаларнинг узунликларини ўлчаш жараёнида кесмалар ва ҳақиқий сонлар орасида мослик ўрнатилади; координата текислиги ёрдамида текислик нуқталари ва ҳақиқий сонлар жуфтлари орасида мослик ўрнатилади.

Ўз моҳиятига кўра икки X ва Y тўплам элементлари орасидаги мослик, тўпландаги муносабат каби жуфтликлар тўпламини ифодалайди ҳамда X ва Y тўпламлар Декарт кўпайтмасининг қисм тўплами бўлади.



70-расм



71-расм

Чекли тўпламлар орасидаги мослик графлар ёрдамида кўргазмалар ифодаланади. Масалан, $X = \{3, 5, 7, 9\}$ ва $Y = \{4, 6\}$ тўпламлар элементлари орасидаги «катта» мослигининг графини ясаймиз. Бунинг учун берилган тўпламлар элементларини нуқталар билан белгилаймиз ва X тўплам элементларини тасвирловчи нуқталардан Y тўплам элементларини тасвирловчи нуқталарга стрелкалар ўтказамиз, бунда «катта» мослиги бажарилиши керак. Масалан, стрелка 5 нуқтадан 4 нуқтага бориши керак, чунки 5 сон 4 дан катта. 7 нуқтадан 4 ва 6 нуқталарга боровчи стрелкалар бўлиши керак ва ҳ. к. Натижада X ва Y тўпламлар элементлари орасидаги «катта» мослигига эга бўламиз (70- расм).

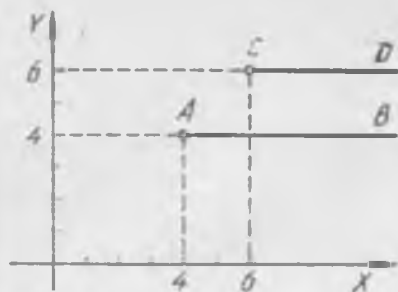
X ва Y сонли тўпламлар элементлари орасидаги мослик координата текислигидаги график ёрдамида тасвирланади. Бунинг учун R мосликда бўлган барча сонлар жуфти координата текислигидаги нуқталар билан тасвирланади. Бунинг натижасида ҳосил бўлган фигура R мослиқнинг графиги бўлади. Ақсинча: координата текислиги нуқталарининг ихтиёрий қисм тўплари бирор мослиқнинг графиги ҳисобланади.

Масалан, $X = \{3, 5, 7, 9\}$ ва $Y = \{4, 6\}$ тўпламлар элементлари орасидаги «катта» мослигининг графини ясаймиз. Берилган мосликда бўлган сонлар жуфттини ёзамиз: $(5, 4)$, $(7, 4)$, $(7, 6)$, $(9, 4)$, $(9, 6)$. X тўплам элементларини Ox ўқда, Y тўплам элементларини Oy ўқда тасвирлаймиз, ҳосил бўлган ҳар бир жуфтликни эса координата текислигида нуқта билан тасвирлаб, X ва Y тўплам элементлари орасидаги «катта» мослигининг графини ҳосил қиламиз (71- расм).

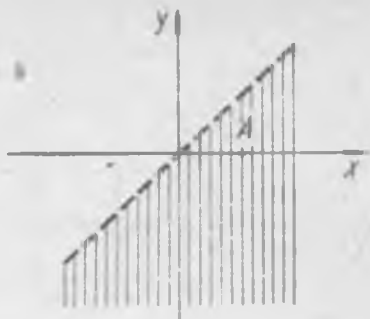
Мослиқни бундай тасвирлаш уларни берилган мосликда чексиз кўп сонлар жуфти бўлган вазиятда кўргазмалар тасвирлаш имконини беради.

Масалан, $X = R$ ва $Y = \{4, 6\}$ тўпламлар элементлари орасидаги «катта» мослигини қарайлик ва унинг графигини ясайлик.

Бу ҳолда X тўплам элементлари абсциссалар ўқини бутунлай тўлдиради, Y тўплам эса иккита элементдан иборат: 4 ва 6. X ва Y тўплам элементлари учун «катта» мослиги берилгани учун X тўпламдаги қандай сонлар 4 дан катта эканини аниқлаймиз.



72-расм



73-расм

4 дан катта ҳамма сонлар Ox ўқида 4 сонини тасвирловчи нуқтадан ўнг томонда жойлашади. Демак, абсциссаси $(4, \infty)$ ораликдан олинувчи, ординатаси эса 4 га тенг бўлган барча нуқталар AB нурини ҳосил қилади (72-расм). Бу нур бошланғич нуқтага эга эмас, чунки $(4, 4)$ нуқта берилган мосликнинг графигига тегишли эмас. Шунга ўхшаш, абсциссаси $(6, \infty)$ ораликдан олинувчи, ординатаси эса 6 га тенг бўлган барча нуқталар CD нурини ҳосил қилади.

Шундай қилиб, $X = R$ ва $Y = \{4, 6\}$ тўпламлар элементлари орасидаги — «катта» мослиги графиги AB ва CD нурлари бўлиб, бунда A ва C нуқталар графикка кирмайди.

Айни бир «катта» мослигининг графиклари турли тўпламларда турлича бўлишини эслатиб ўтамиз. Бунга яна бир марта ишонч ҳосил қилиш учун R ҳақиқий сонлар тўпламида берилган, яъни $X = Y = R$ ҳолдаги «катта» ($x > y$) мослигининг графигини ясаймиз.

Абсциссаси ординатасига тенг бўлган ҳамма сонлар 1- ва 3-координата бурчаклари биссектрисасида жойлашади (73-расмда y штрих билан кўрсатилган). Абсциссаси ординатасидан катта бўлган ҳамма нуқталар биссектриса остида жойлашган. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун бу соҳадан нуқта, масалан, $A(3, 0)$ нуқтани олиш старли.

Шундай қилиб, R ҳақиқий сонлар тўпламида берилган «катта» мослигининг графиги 1- ва 3-координата бурчаклари биссектрисаси остида жойлашган ярим текислик бўлади, бунда биссектрисасининг ўзи бу ярим текисликка тегишли бўлмайди.

Машқлар

1. Жадвал (74-расм) ётоқхонада яшовчи болаларнинг хона бўйича навбатчилик графигини ифодалайди. Бу жадвал қандай тўпламлар орасида мослик ўрнатади? Берилган мосликка тегишли бўлган ҳар бир тартибланган жуфтлик нимани ифодалайди? Берилган тўпламлар орасида бошқа мосликни бериш мумкинми? Бу қандай қилинади?

2. Ўқувчи китоб учун 70 тийин, дафтар учун 3 тийин, қалам учун 5 тийин, мўйқалам учун 6 тийин, ўчирғич учун

Ф. И. кунлар	Д	С	Ч	П	Ж	Ш	Я
Аҳмедов О.							
Султонов Т.							
Пулатов К.							
Олимов Н.							

74- расм

4 тийин тўлади. Бунда қандай иккита тўплам орасида мослик ўрнатилган?

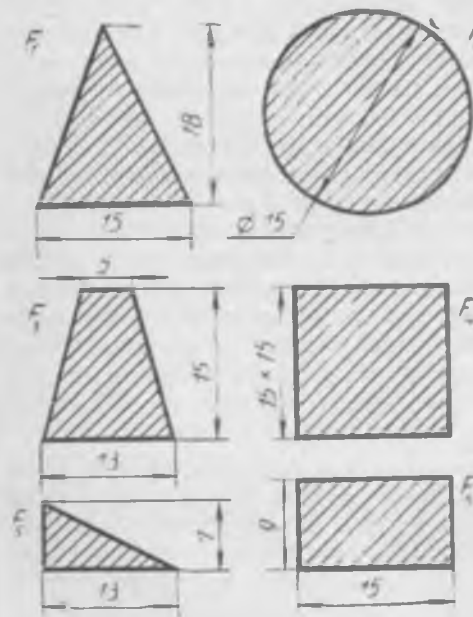
3. 75- расмда тасвирланган фигуранинг юзини ҳисобланг. Қандай тўпламлар орасида мослик ўрнатилган? Ҳар бир фигурани $F_1, F_2, \dots, F_6$ нуқталар билан белгилаб, бу мосликнинг графини ясанг.

4. 76- расмда P мосликнинг графи тасвирланган. Шу мосликда бўлган барча сонлар жуфттини ёзинг. Берилган A ва B тўпламлар орасидаги бошқа иккита мосликни аниқланг.

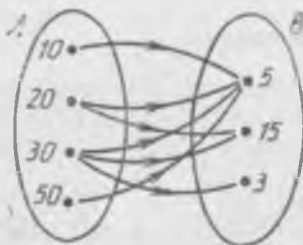
5. $M = \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, 0, -4, 4\}$ ва N — натурал сонлар тўплами берилган. Бу тўпламлар элементлари орасидаги R мослик — « m сонининг квадрати n сонига тенг», бунда $m \in M, n \in N$.

Берилган мосликда бўлган жуфтликлар тўпламини ёзинг. Қуйидагилар тўғрими: 1) $(-3, 9) \in R$; 2) $(0, 0) \in R$; 3) $(-4, 16) \in R$?

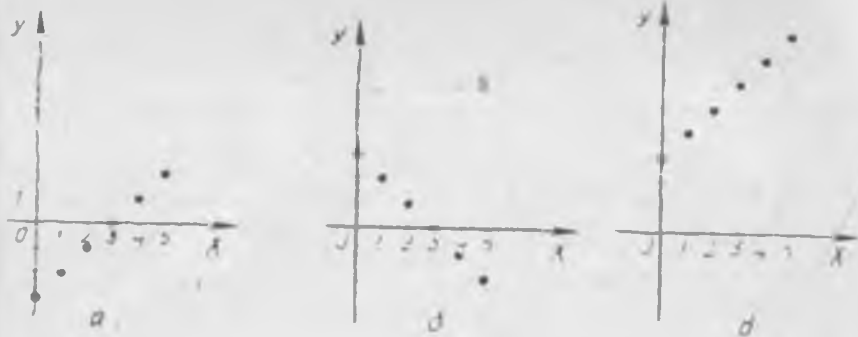
6. $A = \{1, 2, 4, 6\}$ ва $B = \{5, 7\}$ тўпламлар элементлари орасида «кичик» мослиги берилган. Бу мосликнинг графини ясанг. Шу тўпламлар



75- расм



76- расм



77-расм

элементлари орасидаги «1 та кам» мослигининг графиги қандай бўлади?

7. $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ва $y = Z$ тўпламлар элементлари « x сони y сонидан 3 та кам», $x \in X$, $y \in Y$ мосликда, 77-расмда тасвирланган графиклардан қайси бири берилган мослиқнинг графиги бўлади?

8. 78-расмда X ва Y тўпламлар орасидаги мослиқнинг графиги келтирилган. Нечта сонлар жуфти берилган мосликда бўлади? X тўпламга 2; 0; 27; $-1,5$ сонлари, Y тўпламга эса 4; 0; -1 ; 0,5 сонлари тегишли бўладими? $(0, 0)$, $(-1, 4)$, $(-2, -4)$ сонлар жуфти берилган мосликда бўладими?

9. X ва Y тўпламлар орасида берилган P мослиқнинг графиги $ABCD$ тўғри тўртбурчак бўлади (79-расм). Шу графикка тегишли бўлган учта нуқтанинг координаталарини айтинг. X ва Y тўпламларга тегишли бўлган сонларнинг характеристик хосасини кўрсатинг.

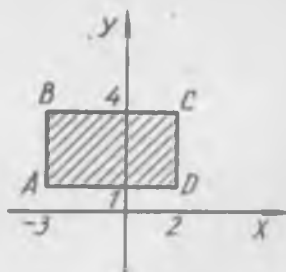
10. $X = \{2, 5\}$ ва $Y = \{3, 6\}$ тўпламлар берилган. Берилган тўпламлар Декарт кўпайтмаси элементларини санаб кўрсатинг ва ҳосил бўлган тўпламнинг ҳамма қисм тўпламларини ёзинг. Қисм тўпламлардан қайсилари: 1) «катта»; 2) «кичик»; 3) «катта ёки тенг» мослигини беради?

11. Бошланғич математика курсидан ечишда:

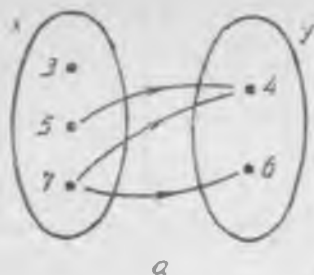
1) кесмалар тўплами ва натурал сонлар тўплами;



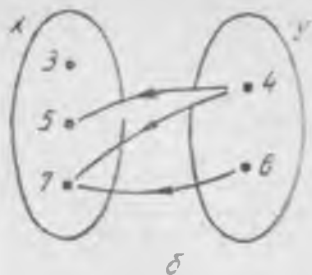
78-расм



79-расм



80- расм



2) тўғри тўртбурчаклар тўплами ва натурал сонлар тўплами;

3) тенгламалар тўплами ва натурал сонлар тўплами орасидаги мослик қараладиган масалаларга намуналар келтиринг.

42. Берилган мосликка тескари мослик

R $X = \{3, 5, 7\}$ ва $Y = \{4, 6\}$ тўпламлар элементлари орасидаги «катта» мослиги бўлсин. У ҳолда $R = \{(5, 4), (7, 4), (7, 6)\}$ ва бу муносабатнинг графи 80-а расмдаги каби бўлади.

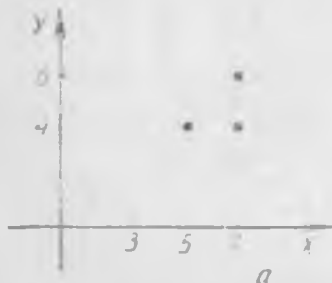
Бу графнинг стрелкалари йўналишини тескарисига алмаштирамиз. X ва Y тўпламлар орасида қараладиган ҳамда $\{(4, 5), (4, 7), (6, 7)\}$ жуфтликлар билан аниқланадиган янги «кичик» муносабати графигига эга бўламиз (80-б расм).

Графи 80-б расмда тасвирланган мослик берилган R мосликка тескари мослик деб аталади ва R^{-1} симболи билан белгиланади.

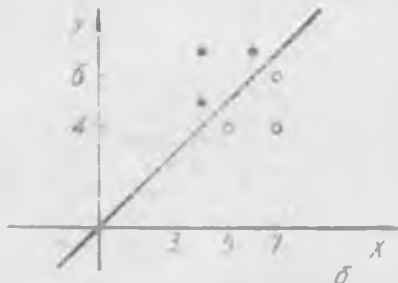
Берилган R мосликка тескари мослик умумий кўрinishда қуйидагича таърифланади:

Таъриф. R X ва Y тўпламлар элементлари орасидаги мослик бўлсин. Агар $x R y$ бўлганда ва фақат шу ҳолда $y R^{-1} x$ бўлса, X ва Y тўпламлар элементлари орасидаги R^{-1} мослик берилган мосликка тескари мослик деб аталади.

R ва R^{-1} мосликлар ўзаро тескари мосликлар дейилади. Ўзаро



81- расм



тескари мосликлар графиклари қандай хусусиятларга эга эканини аниқлаймиз.

$R = \{(5, 4), (7, 4), (7, 6)\}$ мосликнинг графигини ясаймиз (81-расм).

$R^{-1} = \{(4, 5), (4, 7), (6, 7)\}$ мосликнинг графигини ясашда биз жуфтликларнинг биринчи компоненталарини Y тўпламдан, иккинчи компоненталарини X тўпламдан танлаб олишимиз керак. Натижада R^{-1} мосликнинг графиги R мосликнинг графиги билан устма-уст тушиб қолади, бу эса жуда ноқулай. R ва R^{-1} мосликларнинг графикларини фарқлаш учун R^{-1} мослик жуфтликларнинг биринчи компоненталарини абсциссалар, иккинчи компонентларини ординаталар деб ҳисоблашни келишиб оламиз. Масалан, агар $(5, 4) \in R$ бўлса, у ҳолда $(4, 5) \in R^{-1}$. $(5, 4)$ ва $(4, 5)$ координатли нуқталар, умумий ҳолда эса (x, y) ва (y, x) нуқталар 1- ва 3- координата бурчаклари биссектрисаларига нисбатан симметрик бўлади. Демак, R мосликка тескари R^{-1} мосликнинг графиги R мослик графигининг нуқталарига 1-ва 3- координата бурчаклари биссектрисасига нисбатан симметрик нуқталардан ташкил топади.

Шунинг учун $R^{-1} = \{(4, 5), (4, 7), (6, 6)\}$ мосликнинг графиги 81-б расмда тасвирланган нуқталар тўлами бўлади.

Агар R — бир тўплам элементлари орасидаги муносабат бўлса, у ҳолда берилган тескари R^{-1} муносабат ҳам худди мослик каби таърифланади, яъни (x, y) жуфтлик R муносабатда бўлганда ва фақат шу ҳолда (y, x) жуфтлик элементлари R^{-1} муносабатда бўлади.

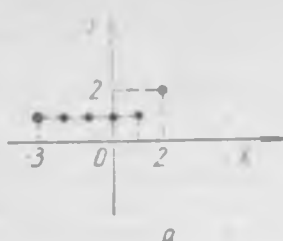
Масалан, агар R натурал сонлар тўламида берилган « x сони y дан кичик» муносабати бўлса, у ҳолда унга тескари муносабат « y сони x дан катта» муносабати бўлади. Кесмалар орасидаги « x y дан узун» муносабати учун тескари муносабат « y x дан қисқа» муносабати бўлади.

Бошланғич математикани ўқитишда ўзаро тескари муносабатларга катта эътибор берилади. Ўқувчилар, агар $5 > 3$ бўлса, $3 < 5$ бўлишини, агар AB кесма CD кесмадан қисқа бўлса, у ҳолда CD кесма AB кесмадан узун бўлишини яхши тушунишлари керак. Текстли масалаларни ечишда муносабатлар орасидаги ўзаро боғланишни билиш алоҳида роль ўйнайди. Масалан, ўқувчи «Стол 15 сўм туради, бу шкафдан 10 марта арзон. Стол ва шкаф бирга қанча туради», деган масалани фақат, агар стол шкафдан 10 марта арзон бўлса, у ҳолда шкаф столдан 10 марта қиммат туриши фактини тушунгандагина тўғри ечади.

Машқлар

1. $P = \{(1, 1), (3, 0), (3, 1), (4, 0), (4, 1), (6, 1)\}$ тўплам $X = \{1, 3, 4, 6\}$ ва $Y = \{0, 1\}$ тўпламлар элементлари орасидаги мосликни ифодалайди. P мосликка тескари P^{-1} мосликни беринг ва битта координата системасида P ва P^{-1} мосликлар графикларини ясанг.

2. $X = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ тўпламда T — « x сони y сонидан 2 та кам» муносабати берилган. T^{-1} муносабатини беринг ва координата текислигида унинг графигини ясанг.



82- расм

3. X — ABC учбурчак бурчаклари тўплами ва Y — унинг томонлари тўплами орасида P — x бурчак y томон қаршисида ётади мослиги берилган P мосликка тескари P^{-1} мосликни: 1) икки ўзгарувчилик жумла ёрдамида; 2) граф ёрдамида беринг.

4. R ва Q мосликлар графиклари берилган (82-расм). R ва Q мосликларни ўзаро тескари мосликлар деб айтиш мумкинми?

5. Берилганига тескари мосликнинг графигини ясанг (83-расм).

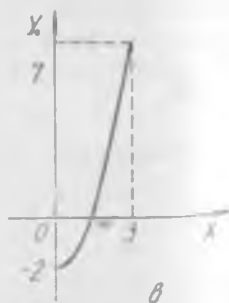
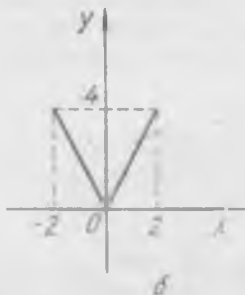
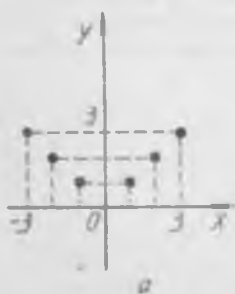
6. Кесмалар тўпламида «узун», «3 марта узун», «5 см узун» муносабатлари қаралмоқда. Берилганларига тескари муносабатларни қандай бериш мумкин?

7. Қуйида келтирилаётган масалалар бошланғич синфлар учун математика дарсликларидан олинган. Уларни ечинг ва ечиш жараёнида қандай муносабатлар қаралаётганини тушунтиринг:

1) Қаламнинг узунлиги 15 см. У ручкадан 1 см узун. Ручканинг узунлиги нимага тенг?

2) Ҳовлида 8 туп олма бор. Улар олчалардан 2 та кам. Ҳовлида неча туп олча бор?

3) Самолётлар 6 та бўлиб, улар вертолётлардан 2 марта куп. Вертолётлар самолётлардан неча марта кам? Вертолётлар неча?



83- расм

4) Иккита кесма чиз: биринчисининг узунлиги 6 см бўлиб, у иккинчисидан 2 марта узун бўлсин. Иккинчи кесманинг узунлиги нимага тенг?

5) Ошхона столи 25 сўм бўлиб, у курсидан 6 марта қиммат. Курси қанча туради?

43. Ҳазаро бир қийматли мослик

Икки X ва Y тўплам элементлари орасида ўрнатиш мумкин бўлган барча мумкин бўлган мосликлардан бизни биринчи навбатда X тўпламнинг ҳар бир элементига Y тўпламнинг ягона элементи мос келадиган ва Y тўпламнинг ҳар бир элементи X тўпламнинг фақат биргина элементига мос келадиган мосликлар жуда қизиқитради. Бундай мосликлар Ҳазаро бир қийматли мосликлар деб аталади.

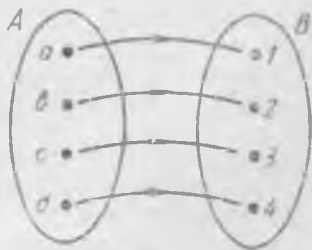
Шундай мосликларга доир мисоллар қараймиз.

1. $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ бўлсин. Бу тўпламлар элементлари орасидаги мослик граф ёрдамида ўрнатиш мумкин (84-расм). A тўпламнинг ҳар бир элементига (A тўпламнинг элементини тасвирловчи ҳар бир нуқтадан стрелка чиқади) B тўпламдан ягона сон мос келгани учун ($a \rightarrow 1$, $b \rightarrow 2$, $c \rightarrow 3$, $d \rightarrow 4$) ва B тўпламдаги ҳар бир сон A тўпламдаги фақат биргина элементга мос келгани учун A ва B тўпламлар орасидаги берилган мослик Ҳазаро бир қийматли мослик бўлади.

2. X — координата тўғри чизиғи нуқталари тўплами, $Y = R$ бўлсин. Координата киритилиши билан тўғри чизиқдаги ҳар бир нуқтага ягона сон (шу нуқтанинг координатаси) мос қўйилиши ва ҳар бир ҳақиқий сон шу тўғри чизиқнинг ягона нуқтасига (ўз координатасида шу сонга эга бўлган) мос қўйилиши сабабли, ўрнатиш мумкин Ҳазаро бир қийматли мослик бўлади.

3. X — координата текислиги нуқталари тўплами, Y — ҳақиқий сонлар жуфтликлари тўплами бўлсин. Агар текисликнинг ҳар бир нуқтасига ҳақиқий сонларнинг ягона жуфтлиги (шу нуқтанинг координаталари) мос қўйилса ва ҳақиқий сонларнинг ҳар бир жуфтлиги (ўз координатасида шу сонлар жуфтига эга бўлган) шу текисликнинг ягона нуқтасига мос қўйилса, у ҳолда координата текислиги нуқталари тўплами ва ҳақиқий сонлар жуфтликлари тўплами орасидаги мослик Ҳазаро бир қийматли мослик бўлади.

Бошланғич математика курсида Ҳазаро бир қийматли мослик тушунчасидан ошқормас кўринишда фойдаланилади; унга санаш жараёни ва сонларни таққослаш асосланган. Масалан, $3=3$ ёзувини тушунтириш учун учта қизил ва учта яшил квадрат



84-расм

олинади ва ҳар бир қизил квадратга ягона яшил квадрат мос қўйилади (амалда квадратлар ёнма-ён, устма-уст қўйилади, кесмалар билан туташтирилади ва ҳ. к.), яъни бу квадратлар тўплами устида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилади. $3 < 4$ эканини кўрсатиш учун учта элементли тўплам ва тўртта элементли ўз ичига олувчи тўпламнинг учта элементли қисм тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилади.

Машқлар

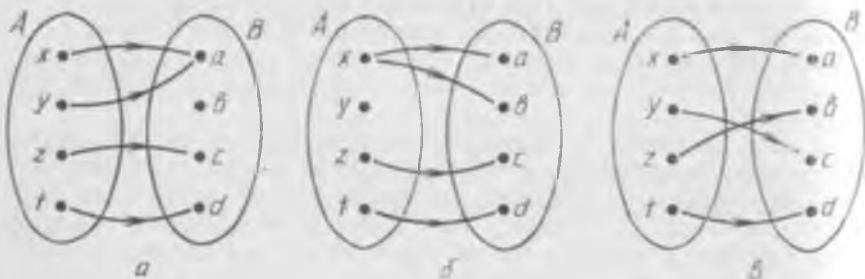
1. $A = \{x, y, z, t\}$ ва $B = \{a, b, c, d\}$ тўпламлар орасида турлича мосликлар ўрнатиш (85-расм). Улардан қайси бири ўзаро бир қийматли мослик бўлади?

2. $X = \{k, l, m, n, p\}$ ва $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ тўпламлар берилган. Берилган тўпламлар орасида учта турлича ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш. X ва Y тўпламлар орасида ҳаммаси бўлиб нечта шундай мослик ўрнатиш мумкин?

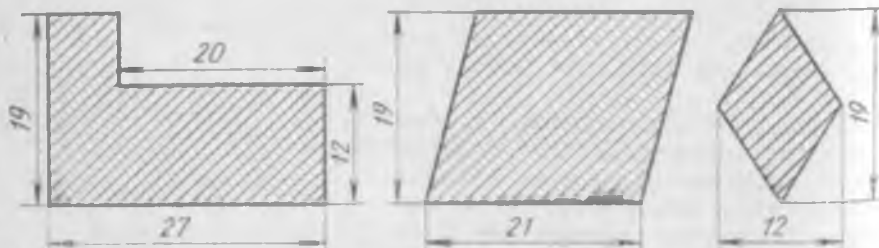
3. Иккита $A = \{1, 2, 5\}$ ва $B = \{3, 7\}$ тўплам берилган. $A \times B$ ва $B \times A$ тўпламларни топинг. Бу тўпламлар орасида бирор-бир усул билан ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкинми?

4. N — натурал сонлар тўплами, Y — натурал сонлар квадратлари тўплами. N ва Y тўпламлар орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкинлигини кўрсатинг.

5. M — 86-расмда тасвирланган геометрик фигуралар тўплами, R — ҳақиқий сонлар тўплами. Ҳар бир фигурага унинг юзининг қийматини ифодаловчи сонни мос қўямиз. Бу мослик M ва R тўпламлар орасидаги ўзаро бир қийматли мослик бўладими?



85-расм



86-расм

6. Бошланғич синфлар математика дарсликларидан бажаришда тўпламлар орасидаги ўзаро бир қийматли мослик тушунчасидан ошкормас равишда фойдаланиладиган машқларга мисоллар келтиринг.

44. Тенг қувватли тўпламлар

Иккита тўплам турлича муносабатда бўлиши мумкин: улар кесишиши, кесишмаслиги, тенг бўлиши мумкин, бири иккинчисининг қисм тўплами бўлиши мумкин.

Тўпламлар орасидаги ўзаро бир қийматли мослик тушунчаси тўпламлар орасидаги яна бир муносабатни — тенг қувватлилик муносабатини киритиш имконини беради.

Агар X ва Y тўпламлар орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд бўлса, у ҳолда улар тенг қувватли тўпламлар деб ҳисобланади.

« X тўплам Y тўпламга тенг қувватли» жумла қисқача бундай ёзилади: $X \sim Y$. Масалан, агар $X = \{a, b, c, d, e\}$, $Y = \{x, y, z, t, p\}$ бўлса, у ҳолда $X \sim Y$ бўлади, чунки, X ва Y тўпламлар орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин.

Тўпламларнинг тенг қувватлилик муносабати қатор хоссаларга эга.

1. Y рефлексив, яъни ҳар бир тўплам ўз ўзига тенг қувватли: $X \sim X$.

2. Y симметрик, яъни $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$.

3. Y транзитив, яъни $X \sim Y$ ва $Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$.

Тўпламларнинг тенг қувватлилик муносабати рефлексив, симметрик ва транзитив бўлгани учун у эквивалентлик муносабати бўлади.

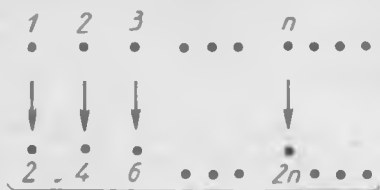
Чекли тўпламлар ҳам, чексиз тўпламлар ҳам тенг қувватли бўлиши мумкин.

Агар X ва Y тўпламлар чекли бўлса ва улар орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилган бўлса, у ҳолда берилган тўпламлар баравардан элементларга эга, ёки улар тенг сонли, ёки X тўпламда қанча элемент бўлса, Y тўпламда ҳам шунча элемент бор деб айтилади.

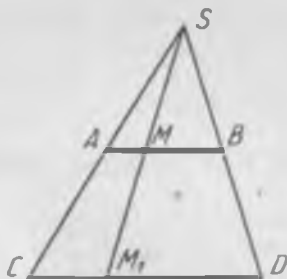
Иккита чексиз тўпламни қараймиз: N натурал сонлар тўплами ва Y — жуфт натурал сонлар тўплами. n натурал сонга $2n$ жуфт сонни мос қўямиз (87-расм). Бу ўзаро бир қийматли мосликдир: ҳар бир натурал сонга ягона жуфт сон мос келади ва ҳар бир жуфт сон ягона натурал сонга мос келади. Демак, $N \sim Y$, яъни натурал сонлар тўплами ва унинг жуфт сонлар қисм тўплами тенг қувватли тўпламлардир.

N натурал сонлар тўплами тоқ сонлар қисм тўпламига тенг қувватли эканини ҳам шунга ўхшаш кўрсатиш мумкин.

Ҳосил қилинган фактлар чексиз тўпламларнинг алоҳида хоссаларини намоён этиди. Чексизлик оламида бутун ва қисм орасидаги одатдаги муносабатлар ўзгаради. Бу ерда тўпламнинг қисми бутун тўпламга тенг қувватли бўлиб қолади.



87- расм



88- расм

Бунга яна бир бор ишонч ҳосил қилиш учун AB кесма нуқталарни тўплами CD кесма нуқталарни тўпламига тенг қувватли эканини исботлаймиз (88- расм). AB ва CD кесмалар турли узунликларга эга.

A ва C , B ва D нуқталар орқали тўғри чизиқлар ўтказамиз ва уларни S нуқтада кесишгунча давом эттирамиз. AB ва CD кесмалар нуқталари тўплами орасидаги мосликни қуйидагича ўрнатамиз: AB кесманинг M нуқтасига CD кесманинг M нуқта билан SM тўғри чизиқда ётувчи M_1 нуқтасини қўямиз. Ўрна-тилган мослик ўзаро бир қийматли мослик эканига ишонч ҳо-сил қилиш қийин эмас. Демак, CD кесма нуқталари тўплами AB кесма нуқталари тўпламига тенг қувватли экан.

Ҳамма чексиз тўпламлар бир-бири билан тенг қувватли бў-лади деб ўйламаслик керак. Масалан, натурал сонлар тўплами ва тўғри чизиқдаги нуқталар тўплами¹ тенг қувватли тўплам-лар эмас.

Машқлар

1. $x = \{a, b, c\}$ тўпламга тенг қувватли бўлган учта тўпламга мисол келтиринг.

2. Қуйидагиларни исботланг: 1) $X \sim X$; 2) $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$;

3) $X \sim Y$ ва $Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$.

3. Тўпламларнинг тенглик муносабатларни хоссаларини ифо-даланг. У эквивалентлик муносабати бўладими?

4. Тўпламлар учун ўз ичига олиш муносабати қандай хосса-ларга эга? У тартиб муносабати бўлиши тўғрими?

5. Жуфт натурал сонлар тўплами ва тоқ натурал сонлар тўплами тенг қувватли эканини исботланг.

6. 5 га каррали натурал сонлар тўплами N натурал сонлар тў-пламига тенг қувватли бўладими?

¹ Чексиз тўпламларнинг хоссалари ҳақида Н. Я. Виленкининг «Рассказы о множествах». — М., 1969 китобидан ўқишингиз мумкин.

7. *N* — натурал сонлар тўпамидан шу *N* натурал сонлар тўпамига тенг қувватли бўладиган учта қисм тўплаш ажратинг.

8. Қуйидаги масалаларда сўз бораётган тўпламлар тенг қувватли эканини исботланг: 1) 20 дан кичик барча икки хонали сонларни ёз. Уларнинг ҳар бирини 5 марта орттир. 2) Барча бир хонали жуфт сонларни ёз ва уларнинг ҳар бирини 3 марта орттир. Қандай сонлар ҳосил бўлди: жуфт сонларми ёки тоқ сонларми?

9. Ҳар бир масаланинг ечими тенг қувватли тўпламларни ажратиш билан боғлиқ бўлишини расмлар ёрдамида кўрсатинг: 1) Бир цехда 10 та станок бор, иккинчисидан ундан 4 та станок кўп. Иккинчи цехда нечта станок бор? 2) Малликда 9 та марка бор, Раҳимда эса 2 та кам марка бор. Раҳимда нечта марка бор? 3) Еш табиатшунослар 15 та жўжа, ундан 3 марта кам ўрдакчалар ўстиришди. Улар нечта ўрдакчалар ўстиришган? 4) Болалар боғчаси учун 4 та яшил, яшилдан 3 марта кўп қизил копток сотиб олинди. Болаларга нечта қизил копток сотиб олинган?

II Б О Б

БУТУН НОМАНФИЙ СОНЛАР

7-§. СОН ТУШУНЧАСИ

45. Натурал сон ва ноль тушунчасининг вужудга келиши тарихи ҳақида

1, 2, 3, 4, ... сонлар натурал сонлар деб аталади.

Натурал сон тушунчаси математиканинг асосий тушунчаларидан биридир. У бутун математика фани сингари кишилар амалий фаолиятларидаги эҳтиёжлар натижасида вужудга келган. У дастлаб амалий характердаги, кейин эса назарий характердаги борган сари мураккаблашиб боровчи масалаларни ечиш жараёнида аста-секин вужудга кела бошлаган. Турли-туман чекли тўпламларни бир-бири билан таққослаш зарурати кишиларнинг натурал сонларни яратишларига сабаб бўлди.

Ўзининг ривожланиш даврида натурал сонлар тушунчаси бир нечта босқични ўтди. Жуда қадим замонларда чекли тўпламларни таққослаш учун берилган тўпламлар орасида ёки тўпламлардан бири билан иккинчи тўпламнинг қисм тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатишган, яъни бу босқичда кишилар буюмлар тўплаганининг саноғини уларни санамасдан идрок қилганлар. Масалан, бешта буюмдан иборат группанинг саноғи ҳақида «Қўлда нечта бармоқ бўлса, шунча», йиғирмата буюмдан иборат тўпламнинг саноғи ҳақида «Одамда қанча бармоқ бўлса, ўшанча» деб аташган. Бундай метод шундай камчиликка эга эдики, бунда таққосланувчи тўпламлар бир вақтда кўзга кўринадиган бўлиши керак эди.

Жуда узоқ ривожланиш даври натижасида кишилар нату-
рал сонларни яратишнинг навбатдаги босқичига келдилар —
тўпламларни таққослаш учун воситачи тўпламларни: майда тош-
чаларни, чиганоқларни, бармоқларни қўлланила бошладилар.
Бу воситачи тўпламлар энди натурал сон тушунчаси куртакла-
рини намойиш қила бошлаган бўлса-да, бироқ бу босқичда ҳам
ҳали сон саналадиган тўпламлардан ажралмаган эди: гап уму-
ман сон ҳақида эмас, бешта тош, бешта бармоқ ҳақида борар
эди. Воситачи тўпламлар номини шу тўпламлар билан таққос-
ловчи тўпламнинг саногини аниқлашда қўллана бошладилар.
Масалан, баъзи қабилаларда бешта элементдан иборат тўплам-
лар саногини «қўл» сўзи билан, 20 та буюмдан иборат тўплам-
нинг саногини «бутун одам» сўзи билан белгиланган.

Кишилар воситачи тўпламлар билан амаллар бажаришни
ўргангандан кейингина мавжуд умумийликни, масалан, бешта
бармоқ ва бешта олма орасидаги мавжуд умумийликни аниқ-
ладилар, яъни воситачи тўпламлар элементлари табиатидан
чекланиш юз бера бошлаши билан натурал сон ҳақидаги та-
саввур вужудга кела бошлади. Бу босқичда санашда, масалан,
олмани санашда битта, иккита ва ҳоказо олма саналмай, балки
«бир», «икки», «уч» ва ҳоказо сўзларини ишлатиб санай бош-
ладилар. Бу сон тушунчаси ривожланишининг энг муҳим бос-
қичи бўлди. Замонанинг энг йирик математиги Н. Н. Лузин
мана бундай деган эди: «Биз бирлик тушунчасини яратган
(очган эмас, айнан яратган) Инсон даҳоси қаршисида бош
эгишимиз керак. Сон вужудга келди, у билан бирга математи-
ка вужудга келди. Сон ғояси — мана буюк фанлардан бирининг
«тарихи нимадан бошланган»¹.

Вақт ўтиши билан одамлар фақат сонларни аташни эмас,
балки уларни белгилашни, шунингдек, улар устида амаллар
бажаришни ўрганиб олдилар. Бу муаммоларни ҳал қилишдаги
кўпгина қийинчиликлар Қадимги Ҳиндистонда сонларни ёзиш-
нинг ўнли системасини ва ноль тушунчасини яратиш билан ҳал
қилинган эди. Аста-секин натурал сонларнинг чексизлиги ҳа-
қидаги тасаввурлар ҳам уйғунлаша бошлади.

Натурал сон тушунчаси шакллангандан сўнг сонлар муста-
қил объектлар бўлиб қолди ва уларни математик объектлар
сифатида ўрганиш имконияти вужудга келди. Сонни ва сонлар
устида амалларни ўргана бошлаган фан «арифметика»² номини
олди.

Арифметика қадимги Шарқ мамлакатлари: Вавилон, Хитой,
Ҳиндистон, Мисрда вужудга келди. Бу мамлакатларда тўплан-
ган математик билимлар Қадимги Грецияда ривожлантирилди
ва давом эттирилди. Арифметиканинг ривожланишига аср ўр-

¹ Моисеев Г. Н. Математика ставит эксперимент. — М., 1979. 12-бет.

² «Арифметика» сўзи грекча *arithmos* сўзидан келиб чиққан бўлиб, «сон» маъ-
носини англатади. Демак, арифметика — бу сон ҳақидаги фан.

таларида ҳинд, араб дунёси мамлакатлари ва Урта Осиё математиклари, XVIII асрдан бошлаб эса, европалик олимлар катта ҳисса қўшдилар.¹

«Натурал сон» терминини биринчи бўлиб римлик олим А. Бозций қўллади (тахминан 480—542 йиллар).

Ҳозирги вақтда натурал сонларнинг хоссалари, улар устида амаллар математиканинг «сонлар назарияси» деб аталувчи бўлимида ўрганилади.

XIX асрда олимларнинг диққати натурал соннинг математик назарияларининг қурилиши ва мантиқий асосланишига қаратилган эди. Бу назариялар натурал сонлар билан ҳисоблашлар асосида ётади.

46. Тартибий ва миқдорий натурал сонлар

Сизга маълумки, натурал сонлар деб буюмларни санашда қўлланиладиган сонларга айтилади. Санаш жараёни нимани ифодалайди? Масалан, биз $A = \{k, l, m, r\}$ тўплам элементларини санашни қандай олиб боришимиз керак? Бу тўпламнинг ҳар бир элементини кўрсатиб, биз «биринчи», «иккинчи», «учинчи», «тўртинчи» деймиз. Ва шу билан санаш жараёни тугайди, чунки A тўпламнинг ҳамма элементлари фойдаланилди. Санаб бориб биз қатор қондаларга амал қиламиз: A тўпламнинг ихтиёрий элементи санашда биринчи кўрсатилиши мумкин, бироқ бирор-та ҳам элемент тушириб қолдирилмаслиги ва икки марта саналмаслиги керак.

A тўплам элементларини санаб биз A тўпламда тўртта элемент бор деймиз, яъни бу тўпламнинг миқдорий характеристикасига эга бўламиз. Бироқ буни ҳосил қилиш учун тартибий натурал сонлар: «биринчи», «иккинчи», «учинчи», «тўртинчи» дан фойдаландик. Бошқача айтганда, биз натурал қатор кесмаси деб аталувчи $\{1, 2, 3, 4\}$ тўпламдан фойдаландик.

Таъриф. Натурал қаторнинг N_a кесмаси деб a натурал сондан катта бўлмаган натурал сонлар тўпламига айтилади.

Масалан, N_4 кесма $1, 2, 3, 4$ натурал сонлар тўпламининг ўзидир.

Таърифдан келиб чиқадики, натурал қаторнинг N_a кесмаси $x \leq a$ бўлган барча x сонлардан ташкил топади. Бундан ташқари ихтиёрий N_a кесма $a > 1$ да 1 ни ўз ичига олади.

Натурал қатор кесмасининг киритилган таърифи тўплам элементларни санаги тушунчасини аниқлаштириш имконини беради. Бироқ аввал шунини эслатиб ўтамизки, $A = \{k, e, m, r\}$ тўплам элементларини санаш жараёнида бу тўпламнинг ҳар бир элементига N_1 кесмадан ягона сон қўйилган эди, яъни A тўплам билан натурал қаторнинг N_1 кесмаси орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилган эди.

¹ Арифметиканинг ривожланиши ҳақида тула маълумотни, масалан, қуйидаги китоблардан ўқишингиз мумкин: Энциклопедический словарь юного математика. Тузувчи А. П. Савин — М., 1985, 26 — 29-бетлар; И. Я. Депман. История арифметики. М., 1965 ва бошқалар.

Таъриф. A тўплам элементларини санаш деб, A тўплам билан натурал қаторнинг N_a кесмаси орасида ўзаро бир қийматли мослиқ ўрнатишга айтилади.

a сони деб A тўпламдаги элементлар сонига айтилади ва $n(A)=a$ каби ёзилади. Бу a сони ягона ва у миқдорий натурал сондир.

Шундай қилиб, қайта санашда чекли A тўплам элементлари нафақат маълум тартибда жойлаштирилади (бунда «биринчи», «иккинчи», «учинчи» ва ҳоказо сонлар билан ифодаланувчи тартибний натурал сонлардан фойдаланилади) балки, шунингдек, A тўплам нечта элементни ўз ичига олиши ҳам аниқланади (бунда «бир», «икки», «уч» ва ҳ. к. сонлар билан ифодаланувчи миқдорий натурал сонлардан фойдаланилади).

Саноқнинг таҳлили шуни кўрсатадики, санаш учун аввалдан етарлича сонлар запасига эга бўлиш зарур, бунда сонлар бир қатор хоссаларга эга бўлиши керак: маълум тартибда жойлашиши, биринчи сон мавжуд бўлиши керак ва ҳоказо.

Бошланғич математика ўқитишда ҳам тартибний ва миқдорий сонларнинг узвий боғланиши ўз ифодасини топган. Сонларнинг бундай томонлари билан ўқувчилар биринчи ўнликдаги сонларни ўрганишдаёқ танишадилар. Бу турли-туман тўпламлар элементларини санашда юз беради.

«Мазкур тўплам нечта элементга эга?» деган саволга жавоб миқдорий натурал сон билан ифодаланади, тартибний сон эса саноқда у ёки бу предмет қайси ўринни эгаллашини кўрсатади ва «Саноқда берилган предмет нечанчи ўринда бўлади?» деган саволга жавоб беради.

Машқлар

1. N_8 , N_{10} тўпламларнинг барча элементларини ёзинг. Бу тўпламлар қандай аталади?

2. Қуйидаги тўпламларни натурал қатор кесмалари деб аташ мумкинми: 1) $\{0, 1, 2, 3\}$; 2) $\{1, 3, 5, 7\}$; 3) $\{1, 2, 3\}$; 4) $\{3, 4, 5\}$?

3. Чекли тўплам элементларини санашда амал қилиниши зарур бўлган шартларни ифодаланг.

4. Ушбу жумлани ўқинг: $n(A)=7$, $n(B)=2$. Бу ерда 7 ва 2 натурал сонлари қандай роль ўйнапти? Мазкур шартларни қаноатлантирувчи A ва B тўпламлар ўйлаб топинг.

47. Миқдорий натурал сон ва нолнинг назарий тўплам маъноси

Олдинги пунктда санаш ҳам чекли тўплам элементларини тартиблаштириш учун, ҳам уларнинг миқдорини аниқлаш учун хизмат қилиши ва умумий ҳолда тартибний сон миқдорий сонга олиб келиши аниқланган эди.

Миқдорий сон маъносини тўпламларнинг тенг қувватлилиги тушунчасидан фойдаланиб, назарий тўплам нуқтани назардан бошқача талқин қилиш мумкин.

Бирор бир чекли A тўпламни олампиз ва унга тенг қувватли барча тўпламларни бир синфга киритамиз. Масалан, агар A — учбурчакнинг учлари тўплами бўлса, у ҳолда у билан бирга бир синфга қуйидаги тўпламлар киради: учбурчак томонлари тўплами, «тил» сўзидан ҳарфлар тўплами ва Ҳ. к.

A га тенг қувватли бўлмаган бирор-бир чекли B тўпламни олиб, B тўпламга тенг қувватли бўлган барча тўпламларни ажратамиз. Натижада чекли тўпламларнинг янги синфини ҳосил қиламиз.

Агар бу жараён давом эттирилса, у ҳолда тенг қувватлилиқ муносабати эквивалентлик муносабати эканидан ҳамма чекли тўпламлар эквивалентлик синфлари бўйича бўлинган бўлиб қолади, бунда бир синфнинг ихтиёрий иккита тўплами тенг қувватли бўлади, турли синфларга тегишли иккита тўплам тенг қувватли бўлмайди.

Айни бир синфнинг барча тўпламлари учун қандай умумийлик бор? Улар бир хил қувватга эга. Эквивалентликнинг битта синфидаги барча тўпламлар учун бу умумий хоссадир ва у натурал сон ҳисобланади. Масалан, учбурчакнинг учлари тўпламига тенг қувватли тўпламлар учун умумий хосса «уч» натурал сонидир, тўғри тўртбурчакнинг томонлари тўпламига тенг қувватли тўпламлар учун эса умумий хосса «тўрт» натурал сонидир.

Шундай қилиб, назарий тўплам нуқтан назаридан миқдорий натурал сон чекли тенг қувватли тўпламлар синфининг умумий хоссасидир.

Ҳар бир синфга биргина ва фақат биргина натурал сон мос келади, ҳар бир натурал сонга тенг қувватли чекли тўпламларнинг биргина ва фақат биргина синфи мос келади.

Маълумки, эквивалентликнинг ҳар бир синфи унга тегишли ихтиёрий элементни — бу синфнинг вакилини бериш билан бир қийматли аниқланади. Демак, тенг қувватли тўпламнинг ҳар бир синфини унинг вакилини кўрсатиш билан ҳам бериш мумкин экан. Масалан, учбурчакнинг учлари тўпламига тенг қувватли бўлган ва «уч» натурал сонни аниқловчи тўпламлар синфини $A = \{k, l, m\}$ тўпламни кўрсатиш билан бериш мумкин. Демак, A тўплам «уч» натурал сонини аниқлайди.

Умуман, ҳар бир чекли A тўпламга битта ва фақат битта натурал сон $a = n(A)$ мос келади, бироқ ҳар бир a натурал сонга бир эквивалентлик синфининг тенг қувватли турли тўпламлари мос келади. Шунинг учун «беш» сонига бешбурчак томонлари тўплами ҳам, унинг учлари тўплами ҳам, «китоб» сўзидаги ҳарфлар тўплами ҳам ва ҳоказолар мос келади.

Ноль сони ҳам назарий тўплам талқинига эга ва у бўш тўпламга мос қўйилади: $0 = n(\emptyset)$.

Бошланғич математика курсида миқдорий натурал сон тенг қувватли чекли тўпламлар синфининг умумий хоссаси сифатида қаралади. Шунинг учун ўқувчилар «бир» сонини ўрганаётганда дарсликнинг бетида битта буюмнинг тасвири келтирилади: битта челақ, битта қиз, битта сол ва Ҳ. к. «уч» сонини ўрганаёт-

ганда дарсликнинг бетида учта элементга эга турли тўпламлар тасвири келтирилади: учта куб, учта тош, учта таёқча ва ҳоказо. Биринчи ўнликдаги ҳамма сонларни ўрганишда шундай қилинади, бироқ тўпламдаги элементлар сони санаш йўли билан аниқланади. Шундай қилиб, миқдорий ва тартибий натурал сонлар бошланғич таълимда ўзаро узвий боғланган, биргалликда қатнашади.

Машқлар

1. $n(A) = n(B) = 7$ бўладиган турли A ва B тўпламларга мисоллар келтиринг. A ва B тўпламлар қандай муносабатда бўлади?

2. «Беш» натурал соннинг назарий тўплам маъноси қандай?

3. I синф учун математика дарслигининг «уч» сони ўрганиладиган бетида келтирилган расм ва ёзувларни кўриб чиқинг. Улардан қайсилари ўқувчиларга «уч» сонининг тартибий ва миқдорий қийматини очиб бериш мақсадида келтирилганини тушунтиринг.

Сиз шу мақсадда қандай расм иловаларни қўшимча қилган бўлар эдингиз?

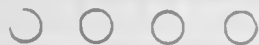
4. Бошланғич синфлар учун математика дарсликларидан сон: 1) тартибий сон; 2) миқдорий сон сифатида қатнашадиган машқларга намуналар келтиринг.

8-§. БУТУН НОМАНФИЙ СОНЛАР УСТИДА АМАЛЛАР ТУШУНЧАСИ

48. Қўшиш

Биринчи синф ўқувчилари ечадиган ушбу масалани қараймиз: «Пўлат 4 та, Наима эса 3 та қўзиқорин топди. Болалар ҳаммаси бўлиб нечта қўзиқорин топишган? Масала қўшиш амали ёрдамида ечилади: $4 + 3 = 7$. Бироқ нима учун бошқа амал эмас, қўшиш амалидан фойдаланилганлиги қандай тушунтирилади?

Пўлат топган ҳар бир қўзиқоринни доирача билан, Наима топган ҳар бир қўзиқоринни квадратча билан тасвирлаб, масала шартини кўргазмали намойиш этамиз (89-расм). Масала саволига жавоб бериш учун Пўлатнинг қўзиқоринларига Наиманинг қўзиқоринларини қўшиш (бирлаштириш) керак, яъни иккита қўзиқоринлар тўпламини бирлаштириш (90-расм) ва



89- расм



90- расм

бу бирлашмада нечта элемент ҳосил булганини санаб чиқиш керак. Кўриниб турибдики, бутун номанфий сонларни қўшиш тўпламларнинг бирлашмаси билан ўзвий боғланган экан.

Яна битта масалани қараб чиқамиз. $A = \{a, b, c, d\}$ ва $B = \{c, x, y\}$ тўпламлар бирлашмасидаги элементлар сонини топамиз. $n(A) = 4$, $n(B) = 3$, $A \cup B = \{a, b, c, d, x, y\}$ эканини, бироқ $n(A \cup B) \neq 4 + 3$ бўлишини аниқлаш қийин эмас. Нима учун шундай?

Гап шундаки, бу масалада A ва B тўпламлар кесишади, ва демак, улар бирлашмасидаги элементлар сони $n(A) + n(B)$ йиғинди билан устма-уст тушмайди.

Шунинг учун бутун номанфий сонлар йиғиндиси кесишмайдиган тўпламлар бирлашмаси орқали аниқланади.

Таъриф. Бутун номанфий a ва b сонларнинг йиғиндиси деб, $n(A) = a$, $n(B) = b$ бўлиб, кесишмайдиган A ва B тўпламлар бирлашмасидаги элементлар сонига айтилади:

$$a + b = n(A \cup B),$$

бу ерда $n(A) = a$, $n(B) = b$ ва $A \cap B = \emptyset$.

Мисол. Берилган таърифдан фойдаланиб, $5 + 2 = 7$ бўлишини тушунтирамиз. 5 — бу бирор A тўпламнинг элементлари сони, 2 — бирор B тўпламнинг элементлари сони, бунда уларнинг кесишмаси бўш тўплам бўлиши керак. Масалан, $A = \{x, y, z, t, p\}$, $B = \{a, b\}$ тўпламларни оламиз. Уларни бирлаштирамиз: $A \cup B = \{x, y, z, t, p, a, b\}$. Санаш йўли билан $n(A \cup B) = 7$ эканини аниқлаймиз. Демак, $5 + 2 = 7$.

Кўриб ўтилган мисолга кўра қуйидагича савол туғилиши мумкин: 5 ва 2 сонларининг йиғиндиси $n(A) = 5$, $n(B) = 2$ бўладиган кесишмайдиган A ва B тўпламларнинг танланишига боғлиқ эмасмикин? Бошқача айтганда, агар кесишмайдиган бошқа, лекин $n(A_1) = 5$, $n(B_1) = 2$ шартни қаноатлантирувчи A_1 ва B_1 тўпламлар олинса, $5 + 2$ йиғинди ўзгармасмикин? Аслини олганда, ўзгармайди.

Умуман $a + b$ йиғинди $n(A) = a$, $n(B) = b$ шартни қаноатлантирувчи кесишмайдиган A ва B тўпламларнинг танланишига боғлиқ эмас. Бу умумий даъвои биз исботсиз қабул қиламиз.

Бундан ташқари, бутун номанфий сонлар йиғиндиси ҳар доим мавжуд ва ягонадир. Бошқача айтганда, биз қандай иккита бутун номанфий a ва b сонлар олмайлик, уларнинг йиғиндиси — бутун номанфий c сонни ҳар доим топиш мумкин, у берилган a ва b сонлари учун ягона бўлади.

Йиғиндининг мавжудлиги ва ягоналиги икки тўплам бирлашмасининг мавжудлиги ва ягоналигидан келиб чиқади.

Йиғиндини топишда қўлланиладиган амал қўшиш амали, қўшнлаётган сонлар эса қўшилувчилар деб аталади.

Юқорида биз икки қўшилувчининг йиғиндисига таъриф берган эдик. Бир нечта қўшилувчининг йиғиндисига қандай таъриф берилади?

Иккига қўшилувчининг йиғиндиси аниқланган ва n та қўшилувчининг йиғиндиси ҳам аниқланган бўлсин. У ҳолда $n + 1$ та қў-

шилувчидан изборат йиғинди, яъни $a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}$ йиғинди $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + a_{n+1}$ га тенг.

Масалан, $2 + 7 + 15 + 19$ йиғиндини топиш учун юқоридаги таърифга кўра қуйидаги алмаштиришларни бажариш керак:
 $2 + 7 + 15 + 19 = (2 + 7 + 15) + 19 = ((2 + 7) + 15) + 19 = (9 + 15) + 19 = 24 + 19 = 43$.

Бошланғич математика курсида бутун номанфий сонларни қўшиш иккита предметлар тўпламининг бирлашмаси (бунда назарий тўплам терминологияси ва символикасида фойдаланилмайди) билан боғлиқ амалий машқлар асосида киритилади. Қўшишнинг назарий тўплам маъносини очишнинг бош мезони содда¹ арифметик масалаларни ечишдир. Битта шундай масалани ечишнинг моҳияти пунктнинг бошида таҳлил қилинган.

Машқлар

1. Бутун номанфий сонларнинг йиғиндисини таърифидан фойдаланиб, қуйидагиларни тушунтиринг:

1) $4 + 1 = 5$; 2) $2 + 7 = 9$; 3) $1 + 5 = 6$; 4) $3 + 0 = 3$.

2. Сиз қуйидаги даъвони қандай тушунаси: «Бутун номанфий сонларнинг йиғиндисини мавжуд ва ягона»?

3. Ўқувчиларга қуйидагича топшириқ берилди: «Қуйидагича ечиладиган иккита масала тузинг: $16 + 4 = 20$ ». Бу шарт бўлича учта масала тузиш мумкинми? Бешта масала тузиш мумкинми? Буни қандай назарий қондага асосан қилиш мумкин?

4. 1 сонини иккита бутун номанфий соннинг йиғиндисини кўринишида икки хил усул билан ёзинг.

5. 2 сонини неча хил усул билан иккита бутун номанфий соннинг йиғиндисини кўринишида ёзиш мумкин?

6. Йиғиндида 3 сонини ҳосил қилиш учун қандай иккита сонни қўшиш мумкин? Мумкин бўлган барча ҳолларни ёзинг.

7. 6 та дафтарни икки ўқувчи орасида қандай тақсимлаш мумкин?

8. 6 та дафтарни икки ўқувчи орасида ҳар бир ўқувчи ҳеч бўлмаганда битта дафтар оладиган қилиб қандай тақсимлаш мумкин? Бу масала 7-масаладан қандай фарқ қилади?

9. Бир нечта қўшилувчининг йиғиндисини таърифидан фойдаланиб, қуйидаги ифодаларнинг қийматларини топинг:

1) $13 + 6 + 18 + 34 + 29$; 2) $15 + 28 + 4 + 17 + 36 + 1$.

10. Нима учун қуйида келтирилган масалалар қўшиш билан ечилишини тушунтиринг:

1) Ҳовлида 4 та ўрдак ва 6 та ғоз юрибди. Ҳовлида ҳаммаси бўлиб нечта парранда юрибди?

2) Пакетга 3 та нок ва 8 та олма солинди. Пакетга нечта ҳўл мева солинди?

¹ Математика ўқитиш методикасида содда масалалар деб битта амал ёрдамида ечиладиган текстли масалаларга айтилади.

Аввалги пунктда баён этилган бутун номанфий сонларни қўшишга доир ёндашиш қўшишнинг маълум қондалари — ўрин алмаштириш ва группалаш қондаларини асослашга имкон беради.

Дастлаб ўрин алмаштириш қонунини исботлаймиз, яъни ихтиёрий бутун номанфий a ва b сонлар учун $a + b = b + a$ тенгликнинг бажарилишини исботлаймиз.

a A тўпلامдаги элементлар сони, b B тўпلامдаги элементлар сони ва $A \cap B = \emptyset$ бўлсин. У ҳолда бутун номанфий сонлар йиғиндисининг таърифига кўра $a + b$ A ва B тўпلامлар бирлашмасидаги элементлар сони бўлади: $a + b = n(A \cup B)$. Тўпلامлар бирлашмасининг ўрин алмаштириш хоссасига кўра $A \cup B$ тўплам $B \cup A$ тўпламга тенг ва демак, $n(A \cup B) = n(B \cup A)$. Йиғиндининг таърифига кўра $n(B \cup A) = b + a$, шунинг учун ихтиёрий бутун номанфий a ва b сонлар учун $a + b = b + a$.

Энди группалаш қондасини исботлаймиз, яъни ихтиёрий бутун номанфий a , b ва c сонлар учун $(a + b) + c = a + (b + c)$ тенгликнинг бажарилишини исботлаймиз.

$a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$ бўлсин, бунда $A \cap B = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$. У ҳолда икки сон йиғиндисининг таърифига кўра $(a + b) + c = n(A \cup B) + n(C) = n((A \cup B) \cup C)$ деб ёзиш мумкин.

Тўпلامларнинг бирлашмаси группалаш қонунига бўйсунгани учун $n((A \cup B) \cup C) = n(A \cup (B \cup C))$ бўлади. Бундан икки сон йиғиндисининг таърифига кўра $n(A \cup (B \cup C)) = n(A) + n(B \cup C) = a + (b + c)$ га эга бўламиз. Демак, ихтиёрий бутун номанфий a , b ва c сонлар учун $(a + b) + c = a + (b + c)$ бўлади.

Қўшишнинг группалаш қонунининг қўлланилиши қандай? У учта қўшилувчининг йиғиндисини қандай топиш мумкинлигини тушунтиради: бунинг учун биринчи қўшилувчи билан иккинчи қўшилувчинин қўшиш ва ҳосил бўлган сонга учинчи қўшилувчинин қўшиш етарли ёки биринчи қўшилувчинин иккинчи ва учинчи қўшилувчилар йиғиндисига қўшиш етарли. Группалаш қонуни қўшилувчилар ўрнини алмаштиришни кўзда тутмаслигини эслатиб ўтамиз.

Қўшишнинг ўрин алмаштириш қонуни ҳам, группалаш қонуни ҳам ихтиёрий сондаги қўшилувчилар учун умумлаштирилиши мумкин. Бунда ўрин алмаштириш қонуни қўшилувчилар ўрин ҳар қандай алмаштирилганда ҳам йиғинди ўзгармаслигини, группалаш қонуни эса қўшилувчиларни ҳар қандай группалаганда ҳам (уларнинг тартибини ўзгартирмаган ҳолда) йиғинди ўзгармаслигини англатади.

Қўшишнинг ўрин алмаштириш ва группалаш қонунларидан бир нечта қўшилувчининг йиғиндисини қўшилувчилар ўринларини ихтиёрий усулда алмаштириш билан ёки қўшилувчиларнинг ихтиёрий группасини қавсга олиш билан ўзгармаслигини келиб чиқади.

Қўшиш қонунларидан фойдаланиб, $109 + 36 + 191 + 64 + 27$ ифоданинг қийматини ҳисоблаймиз.

Ўрин алмаштириш қонунига асосан 36 ва 191 қўшилувчиларнинг ўринларини алмаштирамиз. У ҳолда $109 + 36 + 191 + 64 + 27 = 109 + 191 + 36 + 64 + 27$.

Группалаш қонунидан фойдаланиб, қўшилувчиларни группалаймиз, сўнгра қавс ичидаги йиғиндиларни топамиз: $109 + 191 + 36 + 64 + 27 = (109 + 191) + (36 + 64) + 27 = 300 + 100 + 27$.

300 ва 100 сонларини қавс ичига олиш билан группалаш қонунини яна бир марта қўлланамиз: $300 + 100 + 27 = (300 + 100) + 27$.

Ҳисоблашни бажарамиз: $(300 + 100) + 27 = 400 + 27 = 427$.

Бошланғич синф ўқувчилари қўшишнинг ўрин алмаштириш хоссаси билан биринчи ўнликдаги сонларни ўрганишда танишадилар. Дастлаб у бир хонали сонларни қўшиш жадвалини тузишда қўлланилади, кейин эса турли-туман ҳисоблашларни такомиллаштириш учун қўлланилади.

Бошланғич математика курсида қўшишнинг группалаш қонуни ошкор кўринишда ўрганилмайди, лекин ҳар доим қўлланилади. Жумладан, у сонларни қисмлар бўйича қўшишнинг асосий усулидир: $3 + 2 = 3 + (1 + 1) = (3 + 1) + 1 = 4 + 1 = 5$. Бундан ташқари, сонни йиғиндига қўшиш, йиғиндини сонга қўшиш, йиғиндини йиғиндига қўшиш ҳолларида группалаш қонуни ўрин алмаштириш билан бирга қўлланилади. Масалан, $2 + 1$ йиғиндига 4 сонини қўшиш қўйидаги усуллар билан берилади:

$$1) 4 + (2 + 1) = 4 + 3 = 7;$$

$$2) 4 + (2 + 1) = 6 + 1 = 7;$$

$$3) 4 + (2 + 1) = 5 + 2 = 7.$$

Бу усулларни таҳлил қиламиз: 1) ҳолда ҳисоблашлар амалларнинг кўрсатилган тартибига мос равишда бажарилган; 2) ҳолда қўшишнинг группалаш хоссаси қўлланилган. Сўнгги ҳолдаги ҳисоблаш эса қўшишнинг ўрин алмаштириш ва группалаш қонунларига суянади, бунда оралиқ алмаштиришлар тушириб қолдирилган. Улар бундай. Дастлаб ўрин алмаштириш қонунига асосан 1 ва 2 қўшилувчиларнинг ўринларини алмаштирдик: $4 + (2 + 1) = 4 + (1 + 2)$. Кейин группалаш қонунидан фойдаландик: $4 + (1 + 2) = (4 + 1) + 2$. Ва, ниҳоят, ҳисобларни амаллар тартиби бўйича бажардик: $(4 + 1) + 2 = 5 + 2 = 7$.

Машқлар

1. $(4 + 5) + 6$ ифодани қўшиш қонунларидан фойдаланиб, $5 + (4 + 6)$ кўринишга алмаштиринг. Алмаштиришлардаги ҳар бир қадамни асосланг.

2. $(7 + 2) + (3 + 8)$ ифодани қўшиш қонунларидан фойдаланиб, $(7 + 3) + (2 + 8)$ кўринишга алмаштиринг.

3. Қўйидаги ифодаларни қисқа усуллар билан ҳисобланг ва бунда қўшишнинг қандай қонунларидан фойдаланилганлигини тушунтиринг:

- 1) $(30 + 7) + (10 + 4)$;
- 2) $(16 + 9) + 21 + 14$;
- 3) $1809 + 393 + 678 + 191 + 1607$.

4. Йигиндининг қийматини икки усул билан топинг: аввал бир нечта қўшилувчининг йиғиндисини таърифидан фойдаланинг, кейин эса қўшиш қондаларидан фойдаланинг:

- 1) $273 + 1227 + 154 + 446$;
- 2) $372 + 4356 + 22 + 544$;
- 3) $871 + 2475 + 89 + 325$.

5. Бошланғич синфларнинг математика дарсликларидаги «Қўшилувчининг ўринларини алмаштиринг» темасининг мазмунини таҳлил қилинг. Бу ерда қўшишнинг ўрин алмаштириш хоссаси қандай назарий асосда қаралади?

6. Қуйидагича мулоҳаза қўшишнинг ўрин алмаштириш қондасининг исботи бўла оладими:

« $2+1=1+2$, $3+7=7+3$, $15+2=2+15$, демак, қўшилувчилар ўринларини алмаштириш билан йиғинди ўзгармайди?»

7. Масалани турли усуллар билан ечинг:

1) Қолхозда 8 та юк машинаси ва 2 та енгил машина бор эди. Қолхоз яна 2 та машина сотиб олди. Қолхозда ҳаммаси бўлиб нечта машина бўлди?

2) Болалар боғчаси тарбияланувчиларида 20 та қизил ва 10 та яшил копток бор эди. Уларга яна 8 та копток совга қилишди. Тарбияланувчилардаги коптоклар нечта бўлди?

50. «Тенг» ва «кичик» муносабатлари

Сонларни таққослаш қандай назарий асосда тўз беришини аниқлаймиз. Иккита бутун номанфий a ва b сон берилган бўлсин. Назарий-тўплам нуқтани назардан улар чекли A ва B тўпламлар элементлари сонини ифодалайди: $a = n(A)$, $b = n(B)$. Агар бу тўпламлар тенг қувватли бўлса, у ҳолда уларга айнан бир сон мос келади, яъни $a = b$. Таърифга ўтамиз:

Агар a ва b сонлар тенг қувватли тўпламлар билан аниқланса, у ҳолда улар тенг бўлади:

$$a = b \Leftrightarrow A \sim B, \text{ бу ерда } n(A) = a, n(B) = b.$$

Агар A ва B тўпламлар тенг қувватли бўлмаса, у ҳолда улар билан аниқланадиган сонлар турлича бўлади.

Агар A тўплам B тўпламнинг ўз қисм тўпламига тенг қувватли бўлса ва $n(A) = a$, $n(B) = b$ бўлса, a сон b сондан кичик дейилади ва $a < b$ каби ёзилади. Худди шу вазиятда b сон a сондан катта дейилади ва $b > a$ каби ёзилади.

$$a < b \Leftrightarrow A \sim B, \text{ бу ерда } B_1 \subset B \text{ ва } B_1 \neq B, B_1 \neq \emptyset$$



91-расм

Бошланғич мактабда $2 = 2$, $3 = 3$, $2 < 3$, $3 < 4$ ва ҳ.к. ларни тушунтиришда «тенг» ва «кичик» муносабатларининг келтирилган таърифларидан келиб чиқилади. Масалан, $3 = 3$ ёзувни киритишда квадрат ва доираларнинг иккита тенг қувватли тўпламлари қаралади (91-расм). $3 < 4$ муносабатини ўрганишда бундай мулоҳаза киритилади: учта пушти ва тўртта кўк доирача оламиз ва ҳар бир пушти

доирачани кўк доирачанинг устига қўямиз, устига доирача қўйилмаган кўк доирача қолганини кўрамиз, демак пушти доирачалар кўк доирачалардан кам, шунинг учун $3 < 4$ каби ёзиш мумкин.

Агар a ва b сонлар мос равишда A ва B тўпламлар (доирачалар, квадратлар, таёқчалар ва ҳ.к.) билан аниқланса, у ҳолда B тўпламдан ўзининг A тўпламга тенг қувватли қисм тўпламини ажратиш амалда жуда хилма-хил усуллар билан юз беради: устига қўйиш, ёнма-ён қўйиш, жуфтликлар ҳосил қилиш ва ҳ.к. Бунинг бўлиши мумкин, чунки $a < b$ муносабат (шунингдек $a = b$ муносабат ҳам) $n(A) = a$, $n(B) = b$ бўлувчи A ва B тўпламларни танлашга боғлиқ эмас, фақат A тўплам B тўпламнинг ўз қисм тўпламига (тенглик ҳолида эса A тўплам B тўпламга) тенг қувватли бўлиши муҳимдир.

«Кичик» муносабати таърифига баён этилган ёндашиш қўлланишда чегараланишга эга, у 20 ичидаги сонларни тақсимлаш учун қўлланилиши мумкин, чунки бу предметларнинг иккита группасини таққослаш билан боғлиқ.

Бутун нонанфий сонларни яна қандай таққослаш мумкин? Юқорида берилган таъриф маъносида $a < b$ бўлсин. У ҳолда $a = n(A)$, $b = n(B)$ ва $A \sim B_1$ бу ерда B_1 B тўпламнинг ўз қисм тўплами (92-расм). $B_1 \subset B$ бўлгани учун B тўплами B_1 тўплам ва унинг тўлдирувчиси $B \setminus B_1$ тўпламнинг бирлашмаси кўринишида тасвирлаш мумкин. Бу тўлдирувчи тўплами B_1 билан белгилаймиз, яъни $B/B_1 = B'_1$. У ҳолда $B = B_1 \cup B'_1$ ва демак, $n(B) = n(B_1 \cup B'_1)$. B_1 ва B'_1 тўпламлар кесишмаслиги сабабли йиғиндининг таърифига кўра $n(B) = n(B_1) + n(B'_1)$ (*). Лекин шартга кўра $B_1 \sim A$, демак, $n(B_1) = n(A)$. Агар B'_1 тўпламдаги элементлар сонини c билан белгиласак, у ҳолда (*) тенгликни $b = a + c$ кўринишда ёзиш мумкин, яъни $a < b$ эканидан $b = a + c$ келиб чиқади. Тескари даъвонинг ҳам ўринли эканига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

«Кичик» муносабатининг бошқача таърифига келдик.

$a + c = b$ бўладиган c сон мавжуд бўлганда ва фақат шу ҳолда a сон b сондан кичик бўлади.



$A \sim B_1$

Бу таърифдан фойдаланиб, $3 < 7$ эканини қандай тушунтириш мумкин? $3 < 7$, чунки $3 + 4 = 7$ бўладиган бутун нонанфий 4 сон мавжуд.

92-расм

«Кичик» муносабатининг қўшиш орқали таърифлашнинг бундай усулидан бошланғич математика курсида ҳам фойдаланилади. Ушбу ёзувлар жуфтлари ҳам шундан далолат беради: $5 + 1 = 6$, $6 > 5$; $7 + 1 = 8$, $7 < 8$.

Сонларни таққослашнинг яна бир усулини кўриб чиқамиз.

$a < b$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий x натурал сон ҳақида, агар $x \leq a$ бўлса, $x < b$ бўлади дейиш мумкин. Бу деган сўз, $a < b$ бўлганда натурал қаторнинг N_a кесмаси N_b кесманинг ўз қисм тўплами бўлади. Тескари даъво ҳам ўринли.

Шундай қилиб, «кичик» муносабатининг яна битта таърифига эга бўламиз:

Натурал қаторнинг N_a кесмаси шу қаторнинг N_b кесмасининг ўз қисм тўплами бўлганда ва фақат шу ҳолда a сони b сонидан кичик бўлади:

$$a < b \Leftrightarrow N_a \subset N_b \text{ ва } N_a \neq N_b$$

Масалан, $3 < 7$ тенгсизликнинг ўринлигини шу нуқтан назрдан $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ экани билан тушунтириш мумкин.

«Кичик» тушунчасининг мазкур талқини сонларни уларнинг натурал қатордаги ўрнини билишга асосланган ҳолда таққослашга имкон беради.

Сонларни таққослашнинг бу усули ҳам бошланғич математикани ўқитишда қўлланилади. Саноқда олдин келадиган сон ундан кейин келадиган сондан ҳар доим кичик бўлади.

Машқлар

1. Нима учун: 1) $3 < 6$, 2) $0 < 5$ бўлишини учта усул билан тушунтиринг.

2. «Кичик» муносабатининг қўшиш орқали таърифидан фойдаланиб, ихтиёрий a , b , c натурал сонлар учун қуйидаги даъво ўринли бўлишини исботланг: «Агар $a < b$ бўлса, у ҳолда $a + c < b + c$ ».

3. Нима учун «кичик» муносабати бутун номанфий сонлар тўпламини тартиблаштиради, «бевосита кейин келиш» муносабати эса тартиблаштирмайди?

4. Бошланғич синфлар математика дарсликларидан «кичик» («катта») муносабати назарий тўплам нуқтан назаридан қараладиган иккита топшириққа доир намуна келтиринг.

51. Айириш

Биринчи синф ўқувчилари ечадиган ушбу масалани қарайлик:

Мактаб ҳовлисига 8 туп дарахт — олма ва нок ўтқазилди. Олмалар 3 туп. Мактаб ҳовлисига неча туп нок ўтқазилган?

Масаланинг саволига жавоб бериш учун 8 дан 3 ни айириш керак: $8 - 3 = 5$. Бироқ бу ерда нима учун бошқа амалдан эмас,



93-расм

сонларни айиришдан фойдаланилганлигини қандай тушунтириш керак? Мактаб ҳовлисига ўтқазилган ҳар бир дарахтни доира билан

тасвирлаш орқали масала шартини кўргазмали намоиш эта-миз (93-расм).

Ўтқазилган дарахтлардан 3 таси олма дарахти — расмда уларни олмаларни тасвирловчи доиралар устига чизиш билан ажратамиз. У ҳолда қолган дарахтлар ноклар бўлади. Улар 8 дан 3 ни айирса, нечта бўлса, ўшанча, яъни 5 та.

Кўриниб турибдики, берилган масаланинг ечими берилган тўпладан қисм тўпламни ажратиш ва бу қисм тўпламнинг тўлдирувчисидagi элементлар сонини топиш билан узвий боғланган, яъни сонларни айириш қисм тўпламни тўлдириш операцияси билан боғлиқ экан.

Таъриф. Бутун номанфий a ва b сонларнинг айирмаси деб $n(A) = a$, $n(B) = b$ ва $B \subset A$ шартлар бажарилганда B тўплам-нинг A тўпламгача тўлдирувчи тўпламининг элементлари сонига айтилади:

$$a - b = n(A \setminus B), \text{ бу ерда } a = n(A), b = n(B), B \subset A.$$

Мисол. Берилган таърифдан фойдаланиб, $7 - 4 = 3$ бўлишини тушунтирамиз. 7 бирор A тўпламнинг элементлари сони, 4 A тўпламнинг қисм тўплами бўлган B тўпламнинг элементлари сони. Масалан, $A = \{x, y, z, t, p, r, s\}$, $B = \{x, y, z, t\}$ тўпламларни олайлик. B тўпламнинг A тўпламгача тўлдирувчисини топамиз: $A \setminus B = \{p, r, s\}$. $n(A \setminus B) = 3$ га эга бўламиз. Демак, $7 - 4 = 3$.

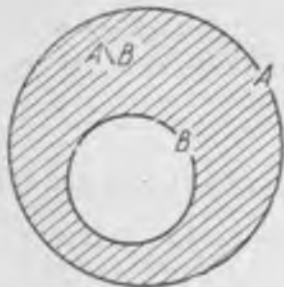
$n(A) = 7$, $n(B) = 4$ ва $B \subset A$ бўладиган A ва B тўпламлар сифатида қаралганлардан фарқ қиладиган тўпламларни танлаш мумкин эканлиги аниқ, чунки $a - b$ айирма $n(A) = a$, $n(B) = b$ ва $B \subset A$ шартларни қаноатлантирувчи A ва B тўпламларнинг танланишига боғлиқ эмас.

Бироқ бутун номанфий сонларнинг айирмаси ҳар донм ҳам мавжуд бўладими?

$B \subset A$ эканидан $n(B) \leq n(A)$ бўлиши келиб чиқади. Демак, $a = n(A)$, $b = n(B)$ ва $B \subset A$ шартларни қаноатлантирувчи бутун номанфий a ва b сонларнинг $a - b$ айирмаси $b \leq a$ бўлганда ва фақат шу ҳолда мавжуд бўлади.

$a - b$ айирмани топишда қўлланиладиган амал айириш амали, a — камроювчи, b — айирилувчи деб аталади.

Кўп ҳолларда айириш амали тўғри ба-жарилганлигини текшириш учун биз қў-



94-расм

шишга мурожаат қиламиз. Нима учун? Шубҳасиз бунга қўшиш ва айириш амаллари орасида боғланиш мавжудлиги сабаб бўлади.

$a = n(A)$, $b = n(B)$ ва $B \subset A$ бўладиган бутун номанфий a ва b сонлар берилган бўлсин ва бу сонларнинг айирмаси B тўпламнинг A тўпламгача тўлдирувчисидagi элементлар сони бўлсин, яъни $a - b = n(A \setminus B)$.

Эйлер доираларида A , B , $A \setminus B$ тўпламлар 94-расмда кўрсатилганидек тасвирланади. $A = B \cup (A \setminus B)$ экани маълум, бундан $n(A) = n(B \cup (A \setminus B))$. $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$ бўлгани учун биз $n(A) = n(B \cup (A \setminus B)) = n(B) + n(A \setminus B) = b + (a - b)$ га эга бўламиз. Демак, $a = b + (a - b)$ га эга бўламиз, яъни $a - b$ айирма шундай сонки, унинг b сон билан йиғиндиси a га тенг бўлади.

Урнатилган факт айирмага бошқача таъриф бериш имконини беради.

Таъриф. Бутун номанфий a ва b сонларнинг айирмаси деб шундай бутун номанфий c сонга айтиладики, унинг b сон билан йиғиндиси a сонга тенг бўлади.

Биз бир тўпламнинг иккинчи тўпламгача тўлдирувчисидagi элементлар сони сифатидаги бутун номанфий сонлар айирмасининг таърифидан унинг йиғинди орқали таърифи келиб чиқшини кўрсатдик. Тескари даъвони ҳам исботлаш мумкин.

Шундай қилиб, $a - b = c \Leftrightarrow a = b + c$.

Айириш амали қўшишга тескари амал деб айтилади.

Айирманинг иккинчи таърифидан келиб чиқиб, қуйидаги теоремаларни исботлаймиз:

Теорема. Бутун номанфий a ва b сонларнинг айирмаси $b \leq a$ бўлганда ва фақат шунда мавжуд бўлади.

Исботи. Агар $a = b$ бўлса, у ҳолда $a - b = 0$ бўлади ва демак, $a - b$ айирма мавжуд бўлади.

Агар $b < a$ бўлса, у ҳолда «кичик» муносабати таърифига кўра шундай натурал сон мавжуд бўладики, бунда $a = b + c$ бўлади. У ҳолда айирманинг таърифига кўра $c = a - b$, яъни $a - b$ айирма мавжуд бўлади.

Агар $a - b$ айирма мавжуд бўлса, у ҳолда айирманинг таърифига кўра шундай бутун номанфий c сон топиладики, $a = b + c$ бўлади. Агар $c = 0$ бўлса, у ҳолда $a = b$ бўлади; агар $c > 0$ бўлса, у ҳолда «кичик» муносабатининг таърифига кўра $b < a$ бўлади. Демак, $b \leq a$.

Теорема. Агар бутун номанфий a ва b сонларнинг айирмаси мавжуд бўлса, у ҳолда у ягонадир.

Исботи. $a - b$ айирманинг иккита қиймати мавжуд бўлсин деб фараз қилайлик: $a - b = c_1$ ва $a - b = c_2$. У ҳолда айирманинг таърифига кўра $a = b + c_1$ ва $a = b + c_2$ га эга бўламиз. Бундан $b + c_1 = b + c_2$ ва демак, $c_1 = c_2$ экани келиб чиқади.

Бошланғич математика курсида дастлаб бутун номанфий сонларнинг айирмаси берилган тўпламнинг қисм тўпламини ажратиш ва янги тўпламни — ажратилган қисм тўпламнинг тўлдирувчисини ҳосил қилиш билан боғлиқ бўлган амалий

машқлар асосида қаралади. Бунда назарий-тўплам терминологияси ва символикаси дан фойдаланилмайди. Айиришнинг назарий тўплам маъносининг бош мезони содда масалаларни ечишдир.

Битта шундай масалани ечишнинг мазмуни пунктнинг бошида таҳлил қилинган эди.

Айиришнинг қўшиш билан боғланиш «Номаълум қўшилувчи қандай топилади?» темасини ўрганишда ўрнатилади. Айириш тушунчасининг қўшишга тескари амал сифатидаги таърифи ошкор кўринишда берилмайди, лекин таъкидлаб ўтилади: «айириш қўшиш билан боғланган: 40 сонидан 16 сонини айириш деб шундай сонни топишга айтиладики, уни 16 га қўшганда йиғиндида 40 сони ҳосил бўлади. Бу 24 сонидир. Демак, $40 - 16 = 24$ ».

Машқлар

1. Қуйидаги тенгликларнинг назарий-тўплам талқинини беришг: 1) $7 - 5 = 2$; 2) $3 - 3 = 0$; 3) $4 - 0 = 4$.

2. Бошланғич мактаблар учун математика дарслигида бундай қонда келтирилган: «Айиришни текшириш учун айирмага айирлувчи қўшилади. Агар ечим тўғри бўлса, у ҳолда камаювчи ҳосил бўлади». Бу қонданинг назарий асосланиши қандай?

3. Бошланғич синфлар учун математика дарсликларида ажаришда бутун номанфий сонлар айирмасининг мавжудлиги тартидан фойдаланиладиган иккита масалага доир намуналар елтиринг.

4. Нима учун қуйида келтирилган масалалар айириш билан чилишини тушунтиринг:

1) Қўл бўйида 9 туп тол бор эди. 4 та тол кесиб олинди. Қўл бўйида неча туп тол қолди?

2) Вали ва Лола 9 та уй расмини чизишди. Лола 4 та уй расмини чизди. Вали неча уй расмини чизган?

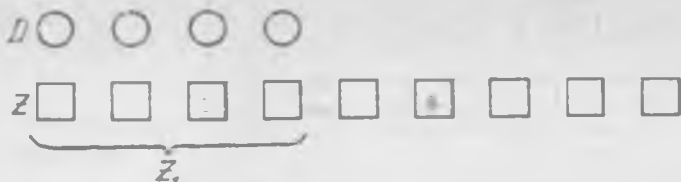
5. Ечими $12 - 8 = 4$ тенглик кўринишида ёзиладиган 3 та масала тузинг. Бунини қандай назарий қонда асосида бажариш мумкин?

52. «... та кўп» ва «... та кам» муносабатлари

Амалий фаолиятда масалалар ечиш жараёнида кўпинча нафақат a сонининг b сонидан кўплиги (ёки камлиги), балки a сонининг b сонидан неча кўплиги (ёки камлиги) ҳам аниқланади.

«... та кам» ва «... та кўп» муносабатларининг маъноси қандай?

a ва b $a = n(A)$, $b = n(B)$ бўлган бутун номанфий сонлар ва $a < b$ экани аниқланган бўлсин. Демак, B тўпламда унинг A тўпламга тенг қувватли B_1 қисм тўпламини ажратиш мумкин ва $B \setminus B_1$ тўплам бўш эмас. $n(B \setminus B_1) = c$ ($c \neq 0$) бўлсин. У ҳолда B тўпламда 4 тўпламда қанча элемент бўлса, шунча ва яна c та элемент бў-



95- расм

лади. Бундай ҳолда a сони b сонидан c та кам ёки b сони a сонидан c та кўп дейилади.

$B_1 \subset B$ да $c = n(B \setminus B_1)$ бўлгани учун $c = b - a$ бўлади. Демак, бир сон иккинчи сондан неча та кам ёки кўп эканини билиш учун катта сондан кичик сонни айириш керак.

Масалан, қуйидаги масалани қарайлик: «Мактаб олдига 4 туп олма ва 9 туп олча ўтқазилди. Неча туп кўп олча ўтқазилди?»

Ифодаланган қоидага кўра саволга айириш ёрдамида жавоб топилади: $9 - 4 = 5$ (туп). Бироқ тушунмовчилик вужудга келади: 9 туп олчадан 4 туп олмани айириш мумкинми? Гап шундаки, мазкур ҳолда 9 туп олчадан 4 туп олча айирилади. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун олмаларни доирачалар билан, олчаларни эса квадратчалар билан тасвирлаймиз (95-расм).

Масаланинг саволига жавоб бериш учун олчалар тўпламидан олмалар тўпламига тенг қувватли бўлган Z_1 қисм тўпламни ажратамиз (расмда бу тўплам фигурали қавс билан кўрсатилган). У ҳолда қолган олчалар Z_1 тўпламнинг Z тўпламгача тўлдирувчисини ҳосил қилади ва уларнинг сони 9 ва 4 сонлари айирмасига тенг.

«... та кўп» ва «... та кам» муносабатлари бошқа турдаги масалаларда ҳам учрайди.

Масалан, бундай масалани қарайлик: «Мактаб олдига 4 туп олма ва улардан 5 туп кўп олча ўтқазилади. Неча туп олча ўтқазилган?»

Масалада дарахтларнинг иккита тўплами: олмалар тўплами ва олчалар тўплами ҳақида гап бормокда. Уларни D ва Z билан белгилаймиз. $n(D) = 4$ экани маълум. Z тўпламда D тўпламдагидан 5 та элемент кўп эканини билган ҳолда ундаги элементлар сонини топиш керак. Охириги жумла $n(Z) - n(D) = 5$ эканини англатади, бундан $n(Z) = 5 + n(D) = 5 + 4 = 9$. 95-расмдан фойдаланиб, янада батафсил тушунтириш мумкин.

Z тўпламда D тўпламдагидан 5 та элемент кўп бўлгани учун бу Z тўпламда D тўпламда қанча элемент бўлса, шунча ва яна 5 та элемент бор деган маънони англатади. Бошқача айтганда, Z тўплами $Z_1 \sim D$ ва $n(Z_2) = 5$ бўладиган иккита Z_1 ва Z_2 тўпламларнинг бирлашмаси сифатида қараш мумкин. Z_1 ва Z_2 тўпламлар умумий элементга эга бўлмагани учун $n(Z) = n(Z_1 \cup Z_2) = n(Z_1) + n(Z_2) = 4 + 5 = 9$ бўлади.

машқлар асосида қаралади. Бунда назарий-тўплам терминологияси ва символикасидан фойдаланилмайди. Айиришнинг назарий тўплам маъносининг бош мезони содда масалаларни ечишдир.

Ўшундай масалани ечишнинг мазмунини пунктнинг бошида таҳлил қилинган эди.

Айиришнинг қўшиш билан боғланиши «Номатлум қўшилувчи қандай топилади?» темасини ўрганишда ўрнатилади. Айириш тушунчасининг қўшишга тескари амал сифатидаги таърифи ошкор кўринишда берилмайди, лекин таъкидлаб ўтилади: «айириш қўшиш билан боғланган: 40 сонидан 16 сонини айириш деб шундай сонни топишга айтиладики, уни 16 га қўшганда йиғиндида 40 сони ҳосил бўлади. Бу 24 сонидир. Демак, $40 - 16 = 24$ ».

Машқлар

1. Қуйидаги тенгликларнинг назарий-тўплам талқинини бериш: 1) $7 - 5 = 2$; 2) $3 - 3 = 0$; 3) $4 - 0 = 4$.

2. Бошланғич мактаблар учун математика дарслигида бундай қонда келтирилган: «Айиришни текшириш учун айирмага айрилувчи қўшилади. Агар ечим тўғри бўлса, у ҳолда камаювчи ҳосил бўлади». Бу қонданинг назарий асосланиши қандай?

3. Бошланғич синфлар учун математика дарсликларидан бажаришда бутун номанфий сонлар айирмасининг мавжудлиги шартидан фойдаланиладиган иккита масалага доир намуналар келтиринг.

4. Нима учун қуйида келтирилган масалалар айириш билан ечилишини тушунтиринг:

1) Қўл бўйида 9 туп тол бор эди. 4 та тол кесиб олинди. Қўл бўйида неча туп тол қолди?

2) Вали ва Лола 9 та уй расминини чизишди. Лола 4 та уй расминини чизди. Вали неча уй расминини чизган?

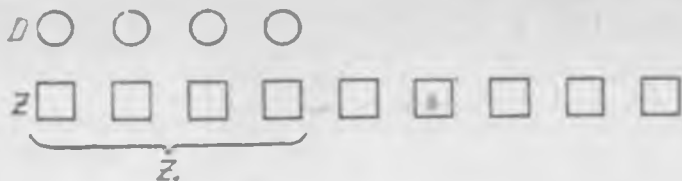
5. Ечими $12 - 8 = 4$ тенглик кўринишида ёзиладиган 3 та масала тузнинг. Буни қандай назарий қонда асосида бажариш мумкин?

52. «... та кўп» ва «... та кам» муносабатлари

Амалий фаолиятда масалалар ечиш жараёнида кўпинча нафақат a сонининг b сонидан кўплиги (ёки камлиги), балки a сонининг b сонидан неча кўплиги (ёки камлиги) ҳам аниқланади.

«... та кам» ва «... та кўп» муносабатларининг маъноси қандай?

a ва b $a = n(A)$, $b = n(B)$ бўлган бутун номанфий сонлар ва $a < b$ экани аниқланган бўлсин. Демак, B тўпламда унинг A тўпламга тенг қувватли B_1 қисм тўпламини ажратиш мумкин ва $B \setminus B_1$ тўплам бўш эмас. $n(B \setminus B_1) = c$ ($c \neq 0$) бўлсин. У ҳолда B тўпламда A тўпламда қанча элемент бўлса, шунча ва яна c та элемент бў-



95- расм

лади. Бундай ҳолда a сони b сонидан c та кам ёки b сони a сонидан c та кўп дейилади.

$B_1 \subset B$ да $c = n(B \setminus B_1)$ бўлгани учун $c = b - a$ бўлади. Демак, бир сон иккинчи сондан неча та кам ёки кўп эканини билиш учун катта сондан кичик сонни айириш керак.

Масалан, қуйидаги масалани қарайлик: «Мактаб олдида 4 туп олма ва 9 туп олча ўтқазилди. Неча туп кўп олча ўтқазилди?»

Ифодаланган қоидага кўра саволга айириш ёрдамида жавоб топилади: $9 - 4 = 5$ (туп). Бироқ тушунмовчилик вужудга келади: 9 туп олчадан 4 туп олмани айириш мумкинми? Гап шундаки, мазкур ҳолда 9 туп олчадан 4 туп олча айирилади. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун олмаларни доирачалар билан, олчаларни эса квадратчалар билан тасвирлаймиз (95-расм).

Масаланинг саволига жавоб бериш учун олчалар тўпламидан олмалар тўпламига тенг қувватли бўлган Z_1 қисм тўпламни ажратамиз (расмда бу тўплам фигурали қавс билан кўрсатилган). У ҳолда қолган олчалар Z_1 тўпламнинг Z тўпламгача тўлдирувчисини ҳосил қилади ва уларнинг сони 9 ва 4 сонлари айирмасига тенг.

«... та кўп» ва «... та кам» муносабатлари бошқа турдаги масалаларда ҳам учрайди.

Масалан, бундай масалани қарайлик: «Мактаб олдида 4 туп олма ва улардан 5 туп кўп олча ўтқазилади. Неча туп олча ўтқазилган?»

Масалада дарахтларнинг иккита тўплами: олмалар тўплами ва олчалар тўплами ҳақида гап бормоқда. Уларни D ва Z билан белгилаймиз. $n(D) = 4$ экани маълум. Z тўпламда D тўпламдагидан 5 та элемент кўп эканини билган ҳолда ундаги элементлар сонини топиш керак. Охириги жумла $n(Z) - n(D) = 5$ эканини англатди, бундан $n(Z) = 5 + n(D) = 5 + 4 = 9$. 95-расмдан фойдаланиб, янада батафсил тушунтириш мумкин.

Z тўпламда D тўпламдагидан 5 та элемент кўп бўлгани учун бу Z тўпламда D тўпламда қанча элемент бўлса, шунча ва яна 5 та элемент бор деган маънони англатади. Бошқача айтганда, Z тўпламни $Z_1 \sim D$ ва $n(Z_2) = 5$ бўладиган иккита Z_1 ва Z_2 тўпламларнинг бирлашмаси сифатида қараш мумкин. Z_1 ва Z_2 тўпламлар умумий элементга эга бўлмагани учун $n(Z) = n(Z_1 \cup Z_2) = n(Z_1) + n(Z_2) = 4 + 5 = 9$ бўлади.



96- расм

Энди қуйидаги масалага мурожаат этамиз: «Мактаб олдида 9 туп олча ва ундан 3 туп кам олма ўтқазилди. Неча туп олма ўтқазилди?»

Бу ерда ҳам олдинги масаладаги каби дарахтларнинг иккита тўплами: олчалар тўплами (Z) ва олмалар тўплами (D) ҳақида гап бормоқда, бироқ $n(Z) = 9$ экани маълум, D тўпланда Z тўпландагидан 3 та элемент кам эканини билган ҳолда D тўпландаги элементлар сонини топиш керак. Охириги жумла $n(Z) - n(D) = 3$ эканини англатади, бундан $n(D) = n(Z) - 3 = 9 - 3 = 6$.

96-расмдан фойдаланиб, бу масалани қуйидагича ечиш мумкин: олмалар олчалардан учта кам бўлгани учун олчалар олмалардан 3 та кўп бўлади, шунинг учун Z тўпландан учта элементга эга бўлган қисм тўплани чиқариб ташласак, D тўпламга тенг қувватли тўплам ҳосил бўлади: $n(D) = 9 - 3 = 6$.

Табиики, бошланғич мактабда бу пунктда келтирилган масалани бошқача асослаш билан ечилади, бироқ бу билан унинг моҳияти ўзгармайди.

Шуни таъкидлаймизки, «5 сони 2 дан 3 та кўп» жумлани « $>$ » белгидан фойдаланиб қисқача ёзиш мумкин эмас, чунки «... та кўп» муносабат учун (шунингдек, «... та кам» муносабат учун ҳам) махсус белги йўқ. « $>$ » белги «кўп» (катта) муносабатини « $<$ » белги эса «кам» (кичик) муносабатини белгилаш учун хизмат қилади.

Машқлар

1. Қуйида келтирилган масалалар нима учун қўшиш ёрдамида ечилишини тушунтиринг:

1) Қаримда 7 та, Салимда эса ундан 3 та кўп марка бор. Салимда неча марка бор?

2) Боғда 8 туп олма дарахти бор. Улар ноклардан 2 туп кам. Боғда неча туп нок дарахти бор?

2. Қуйидаги масалалар нима учун айириш ёрдамида ечилишини тушунтиринг:

1) Раъно 9 та бодринг терди, Лола эса ундан 4 та кам бодринг терди. Лола неча бодринг терган?

2) Мактаб олдида 4 туп олма ва 9 туп олча дарахти ўтқазилди. Неча кам олма дарахти ўтқазилган?

3) Нилуфарда 6 та, Қаримда эса 4 та дафтар бор. Нилуфарда Қаримдагидан неча кўп дафтар бор?

3. «... та кам» муносабати қараладиган ва ечилиши $10 - 2 = 8$ тенглик кўринишида ёзиладиган иккита содда масала тузинг.

4. «... та кўп» муносабати қараладиган ва қўшиш ёрдамида ечиладиган иккита содда масала тузинг.

53. Йиғиндидан сонни ва сондан йиғиндини айириш қондалари

Йиғиндидан сонни ва сондан йиғиндини айиришнинг маълум қондасини асослаймиз.

Йиғиндидан сонни айириш қондаси. *Йиғиндидан сонни айириш учун йиғиндидаги қўшилувчилардан бириндан шу сонни айириш ва ҳосил бўлган натижага иккинчи қўшилувчини қўшиш етарли.*

Бу қондани символлардан фойдаланиб ёзамиз:

Агар a, b, c — бутун ноланғий сонлар бўлса, у ҳолда:

а) $a > c$ бўлганда $(a + b) - c = (a - c) + b$ бўлади;

б) $b > c$ бўлганда $(a + b) - c = a + (b - c)$ бўлади;

в) $a > c$ ва $b > c$ бўлганда юқоридаги формулаларнинг ихтиёрий биттасидан фойдаланиш мумкин.

$a > c$ бўлсин, у ҳолда $a - c$ айирма мавжуд бўлади. Уни p орқали белгилаймиз: $a - c = p$. Бундан $a = p + c$ чиқади. $p + c$ йиғиндини $(a + b) - c$ ифодадаги a нинг ўрнига қўямиз ва уни шакл алмаштирамиз: $(a + b) - c = (p + c + b) - c = p + b + c - c = p + b$.

Бироқ p ҳарф орқали $a - c$ айирма белгиланган эди, демак, исботланиши талаб этилган $(a + b) - c = (a - c) + b$ ифодага эга бўламиз.

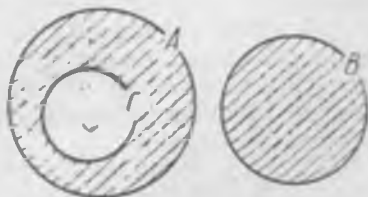
Бошқа ҳоллар учун ҳам шунга ўхшаш мулоҳаза юритилади.

Эйлер доиралари ёрдамида берилган қонда («а» ҳол) ни кўргазмали намойиш этамиз. $n(A) = a$, $n(B) = b$, $n(C) = c$ ва $A \cap B = \emptyset$, $C \subset A$ бўладиган учта чекли A, B ва C тўплам оламиз. У ҳолда $(a + b) - c$ $(A \cup B) \setminus C$ тўплам элементлари сони, $(a - c) + b$ эса $(A \setminus C) \cup B$ тўплам элементлари сони бўлади. Эйлер доираларида $(A \cup B) \setminus C$ тўплам 97-расмда кўрсатилгандек штрихланган соҳа билан тасвирланади.

$(A \setminus C) \cup B$ тўплам ҳам худди шундай соҳа билан тасвирланишига осон ишонч ҳосил қилиш мумкин. Шундай қилиб, берилган A, B ва C тўпламлар учун $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$ бўлади. Демак, $n((A \cup B) \setminus C) = n((A \setminus C) \cup B)$ ва $(a + b) - c = (a - c) + b$.

«б» ҳолни ҳам шунга ўхшаш кўргазмали намойиш қилиш мумкин.

Сондан йиғиндини айириш қондаси. *Сондан сонлар йиғиндисини айириш учун бу сондан қўшилувчиларнинг бирини, кетидан иккинчисини кетма-кет айириш етарли, яъни агар a, b, c — бутун ноланғий сонлар бўлса, у ҳолда $a > b + c$ бўлганда $a - (b + c) = (a - b) - c$ га эга бўламиз.*



97- расм

Бу қонданинг асослангани ва унинг назарий-тўплам тасвири йиғиндидан сонни айлариш қондаси учун бажарилгани каби бажарилади.

Келтирилган қондалар бошланғич мактабда конкрет мисолларда қаралади, асослаш учун кўргазмалар тасвирлар намоён этилади. Бу қондалар ҳисоблашларни ихчам бажариш имконини беради. Масалан, сондан йиғиндини айлариш қондаси сонни бўлаклаб айлариш усулига асос бўлади:

$$5 - 2 = 5 - (1 + 1) = (5 - 1) - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Келтирилган қондаларнинг маъноси арифметик масалаларни турли усуллар билан ечишда яхши очилади. Масалан, «Эрталаб 20 та катта ва 8 та кичкина балиқчилар қайиғи денгизга жўнади. 6 та қайиқ қайтди. Балиқчилар билан яна неча қайиқ қайтгани керак?» Масала учта усул билан ечилиши мумкин:

I усул. 1. $20 + 8 = 28$

2. $28 - 6 = 22$

II усул. 1. $20 - 6 = 14$

2. $14 + 8 = 22$

III усул. 1. $8 - 6 = 2$

2. $20 + 2 = 22$

Машқлар

1. Сондан йиғиндини айлариш қондасини исботланг ва уни Эйлери доиралари ёрдамида намоён қилинг.

2. Ушбу қондани исботланг: икки сон айирмасидан учинчи сонни айлариш учун камайувчидан қолган иккита соннинг йиғиндисини айлариш етарли.

3. Ифоданинг қийматини энг ихчам усул билан топинг:

1) $(3748 + 10392) - 8392$; 3) $763 + 946 - 263$;

2) $7273 - (396 + 1173)$; 4) $568 - 229 - 169$.

4. Қуйида келтирилган масалаларни турли усуллар билан ечинг ва ечилиши асосланг:

1) Бир банкада 10 та, иккинчисида 6 та тузланган бодринг бор эди. Тушликда 4 та бодринг ейилди. Ҳаммаси бўлиб қанча бодринг қолди?

2) Гаражда 20 та машина турган эди, аввал 7 та машина, кейин 3 та машина жўнаб кетди. Гаражда неча машина қолди?

5. Қуйида келтирилган иккита масалани ечинг ва уларнинг ечилиши нима билан фарқ қилишини тушунтиринг:

1) Бир бочкада 40 челақ сув бор. Гулларга қуйиш учун эрталаб 12 челақ, кечқурун 10 челақ сув сарфланди. Бочкада неча челақ сув қолди?

2) Бир бочкада 40 челақ, иккинчисида эса 12 челақ сув бор эди. Гулларга қуйиш учун 10 челақ сув сарфланди. Бочкаларда неча челақ сув қолди?

54. Кўпайтириш

Бутун номанфий сонлар кўпайтмаси тушунчаси турлича таърифланиши мумкин. Дастлаб йиғинди тушунчасига асосланган ёндашишни кўриб чиқамиз.

Таъриф. Бутун номанфий a ва b сонларнинг кўпайтмаси деб қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи бутун номанфий $a \cdot b$ сонга айтилади:

$$1) b > 1 \text{ бўлганда } a \cdot b = \underbrace{a + a + \dots + a}_{b \text{ та қўшилувчи}}$$

$$2) b = 1 \text{ бўлганда } a \cdot 1 = a;$$

$$3) b = 0 \text{ бўлганда } a \cdot 0 = 0.$$

Бу таърифнинг назарий-тўплам жиҳатдан маъноси қуйидагича: Агар $A_1, A_2, \dots, A_b$ тўпламларнинг ҳар бири a тадан элементга эга бўлса ва улардан ҳеч бир икkitаси кесишмаса, у ҳолда уларнинг сирлашмаси $a \cdot b$ та элементга эга бўлади. Демак, $a \cdot b$ кўпайтма—бу ҳар бири a тадан элементга эга бўлган, жуфт-жуфти билан кесишмайдиган b та тўпламнинг кесишмасидаги элементлар сонидир. $a \cdot 1 = a$ ва $a \cdot 0 = 0$ тенгликлар шартли қабул қилинган.

a ва b сонларнинг кўпайтмасини топишга ёрдам берадиган амал кўпайтириш амали дейилади; кўпайтирилаётган сонлар кўпайтувчилар деб аталади.

Ихтиёрий бутун номанфий сонларнинг кўпайтмаси мавжуд ва у ягонадир.

Берилган таъриф билан ўқувчилар бошланғич синфларда танишадилар. Унинг маъноси содда масалаларни ечишда очиладн.

Масалан, қуйидаги масалани қарайлик: «Ҳар бир болалар пальтосига 4 та тугма қадаш керак. Шундай 6 та пальтога нечта тугма қадаш керак бўлади?»

Нима учун у кўпайтириш билан ечилади? Чунки унда ҳар бирида 4 тадан элемент бўлган 6 та тўпламдан ташкил топган бирлашмадаги элементлар сонини аниқлаш талаб этилади. Таърифга кўра бу сон кўпайтириш билан топилади: $4 \cdot 6 = 24$ (тугма).

Бутун номанфий сонлар кўпайтмасининг бошқача таърифи ҳам бор. У тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси билан боғлиқ.

$A = \{x, y, z\}$ ва $B = \{n, t, r, s\}$ тўпламлар берилган бўлсин. Уларнинг Декарт кўпайтмасини топамиз. Бу кўпайтмани тўғри тўрт-бурчак шаклидаги жадвал кўринишида ёзамиз:

$$\begin{array}{l} (x, n), (x, t), (x, r), (x, s), \\ (y, n), (y, t), (y, r), (y, s), \\ (z, n), (z, t), (z, r), (z, s). \end{array}$$

Жадвалнинг ҳар бир сатридаги барча жуфтликлар бир хил биринчи компоненталарга эга, ҳар бир устундаги жуфтликлар эса бир хил иккинчи компоненталарга эга. Бунда ҳеч қандай икkitи сатр ақалли битта бир жуфтликка ҳам эга эмас. Бундан $A \times B$ Декарт

кўпайтмадаги элементлар сони $3 + 3 + 3 + 3 = 12$ га тенг экани келиб чиқади. Иккинчи томондан $n(A) = 3$, $n(B) = 4$ ва $3 \cdot 4 = 12$. Беришган A ва B тўпламларнинг Декарт кўпайтмасидаги элементлар сони $n(A) \cdot n(B)$ кўпайтмага тенглигини кўриб чиқамиз.

Умуман, агар A ва B — чекли тўпламлар бўлса, у ҳолда

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B).$$

Шундай қилиб, бутун номанфий a ва b сонларнинг кўпайтмасини $n(A) = a$, $n(B) = b$ бўладиган A ва B тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси элементлари сони сифатида қараш мумкин:

$$a \cdot b = n(A \times B), \text{ бунда } n(A) = a, n(B) = b.$$

Биринчи ҳолда ҳам, иккинчи ҳолда ҳам биз икки сон кўпайтмасини аниқладик. Бир нечта кўпайтувчининг кўпайтмасини қандай аниқлаш керак?

Иккита кўпайтувчининг кўпайтмаси аниқланган ва n та кўпайтувчининг кўпайтмаси ҳам аниқланган бўлсин. У ҳолда $n + 1$ та кўпайтувчидан иборат кўпайтма, яъни $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1}$ кўпайтма $(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n) \cdot a_{n+1}$ га тенг.

Масалан, $2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9$ кўпайтмани топиш учун бу таърифга кўра биз қуйидаги алмаштиришларни кетма-кет бажаришимиз керак:

$$2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9] = (2 \cdot 7 \cdot 5) \cdot 9 = ((2 \cdot 7) \cdot 5) \cdot 9 = (14 \cdot 5) \cdot 9 = 70 \cdot 9 = 630.$$

Машқлар

1) Кўпайтмани йиғинди орқали таърифлашда 1 га ва 0 га кўпайтириш ҳоллари алоҳида келишиб олинади. Кўпайтманинг Декарт кўпайтма орқали таърифида нима учун бундай келишиб олишлик йўқ?

2. $3 \cdot 2 = 6$, $1 \cdot 4 = 4$, $0 \cdot 2 = 0$, $4 \cdot 1 = 4$, $2 \cdot 0 = 0$ да нима учун кўпайтманинг:

1) йиғинди; 2) Декарт кўпайтма орқали таърифидан фойдаланилшини тушунтиринг.

3. Ушбу даъвони қандай тушуниш керак: «Бутун номанфий сонларнинг кўпайтмаси мавжуд ва у ягонадир?» Унинг ўринлилиги қаердан келиб чиқади?

4. Бир нечта кўпайтувчининг кўпайтмаси таърифидан фойдаланиб, ушбу кўпайтмаларни топинг:

1) $7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$; 2) $4 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14$.

5. Нима учун қуйида келтирилган масалалар кўпайтириш билан ечилишини тушунтиринг:

1) 3 банкага 8 тадан бодринг жойланди. Бу банкларда ҳаммаси бўлиб нечта бодринг бор?

2) Арчани безатиш учун бешта боладан ҳар бири 4 тадан ўйинчоқ ясади. Болалар ҳаммаси бўлиб нечта ўйинчоқ ясаган?

Кўпайтириш қонунларини кўпайтманинг тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси орқали таърифидан келиб чиққан ҳолда исботлаймиз.

1. Урин алмаштириш қонуни: **ихтиёрий бутун номанфий a ва b сонлар учун $a \cdot b = b \cdot a$ тенглик ўринли.**

$a = n(A)$, $b = n(B)$ бўлсин. У ҳолда кўпайтманинг таърифига кўра $a \cdot b = n(A \times B)$. Бироқ $A \times B$ ва $B \times A$ тўпламлар тенг қувватли: $A \times B$ тўпламдаги ҳар бир (a, b) жуфтликка $B \times A$ тўпламдан ягона (b, a) жуфтликни мос қўйиш мумкин ва аксинча. Демак, $n(A \times B) = n(B \times A)$ ва шунинг учун $a \cdot b = n(A \times B) = n(B \times A) = b \cdot a$.

2. Группалаш қонуни: **ихтиёрий бутун номанфий a , b , c сонлар учун $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ тенглик ўринли.**

$a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$ бўлсин. У ҳолда кўпайтманинг таърифига кўра $(a \cdot b) \cdot c = n((A \times B) \times C)$, $a \cdot (b \cdot c) = n(A \times (B \times C))$. $(A \times B) \times C$ ва $A \times (B \times C)$ тўпламлар турлича: биринчиси $((a, b), c)$ кўринишидаги, иккинчиси эса $(a, (b, c))$ кўринишидаги жуфтликлардан ташкил топган, бу ерда $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$. Бироқ $(A \times B) \times C$ ва $A \times (B \times C)$ тўпламлар тенг қувватли, чунки бир тўпламнинг иккинчисига ўзаро бир қийматли аксланиши мавжуд. Шунинг учун $n((A \times B) \times C) = n(A \times (B \times C))$ ва демак, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

3. Кўпайтиришнинг қўшишга нисбатан тақсимот қонуни: **ихтиёрий бутун номанфий a , b , c сонлар учун $(a + b) \cdot c = ac + bc$ тенглик ўринли.**

Бу қонун ушбу тенгликдан келтириб чиқарилади:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C). \quad (*)$$

$a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$ ва $A \cap B = \emptyset$ бўлсин. У ҳолда кўпайтманинг таърифига кўра қуйидагига эга бўламиз: $(a + b) \cdot c = n((A \cup B) \times C)$. Бундан $(*)$ тенгликка асосан $n((A \cup B) \times C) = n((A \times C) \cup (B \times C))$ га, кейин эса йиғинди ва кўпайтманинг таърифларига кўра $n((A \times C) \cup (B \times C)) = n(A \times C) + n(B \times C) = ac + bc$ га эга бўламиз.

4. Кўпайтиришнинг айиришга нисбатан тақсимот қонуни: **ихтиёрий бутун номанфий a , b , c ($a \geq b$) сонлар учун $(a - b) \cdot c = ac - bc$ тенглик ўринли.**

Бу қонун $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$ тенгликдан келтирилиб чиқарилади ва юқоридagi қонунга ўхшаш исботланади.

Кўпайтиришнинг ўрин алмаштириш ва группалаш қонунларини ихтиёрий сондаги кўпайтувчилар учун кенгайтириш мумкин. Қўшишдаги каби бу қонунлар кўпинча биргаликда қўлланилади, яъни, агар бир нечта кўпайтувчининг ўринлари ихтиёрий усул билан алмаштирилса, ёки, агар уларнинг ихтиёрий группаси қавсга олинса, у ҳолда бу кўпайтувчиларнинг кўпайтмаси ўзгармайди.

Тақсимот қонунлари кўпайтириш билан қўшиш ва айириш орасида алоқа ўрнатади. Бу қонунлар асосида $(a + b)c$ ва

($a-b$)с типдаги ифодаларда қавсларни очиш, шунингдек, агар ифода $ac-bc$ ёки $ac+bc$ кўринишида бўлса, кўпайтувчининг қавсдан ташқарига чиқариш юз беради.

Ҳисоблашларда кўпайтириш қонунлари қандай қўлланилишини аниқлаймиз. Масалан, $125 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 8$ ифоданинг қийматини топамиз.

15 ва 6 кўпайтувчиларнинг ўринларини алмаштирамиз — буни кўпайтиришнинг ўрин алмаштириш қонунига асосан бажариш мумкин, натижада $125 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 8$ га эга бўламиз.

Бу кўпайтмада иккитадан кўпайтувчилик группалар ажратамиз — буни кўпайтиришнинг группалаш қонунига кўра қилиш мумкин: $(125 \cdot 6) \cdot (15 \cdot 8)$.

Қавс ичидаги сонларни кўпайтирамиз: $750 \cdot 120$.

Бу кўпайтмани топиш учун 750 ни иккита — 700 ва 50 сонлари йиғиндиси кўринишида ифодалаймиз: $(700+50) \cdot 120$.

Ҳар бир кўпайтувчини 120 га кўпайтирамиз — буни кўпайтиришнинг қўшишга нисбатан тақсимот қонунига кўра қилиш мумкин: $700 \cdot 120 + 50 \cdot 120 = 84\,000 + 6\,000 = 90\,000$.

$125 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 8$ ифоданинг қийматини бошқа усул билан ҳам топиш мумкин: $125 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 8 = 125 \cdot (15 \cdot 6) \cdot 8 = 125 \cdot 90 \cdot 8 = 125 \cdot 8 \cdot 90 = (125 \times 8) \cdot 90 = 1000 \cdot 90 = 90\,000$.

Бу ҳолда алмаштиришларни бажаришда қуйидагилардан фойдаланилди:

кўпайтиришнинг группалаш қонуни — унинг асосида $15 \cdot 6$ кўпайтувчилар группаси ажратилиб, кейинчалик $125 \cdot 8$ бажарилган эди;

кўпайтиришнинг ўрин алмаштириш қонуни — унинг асосида 90 ва 8 кўпайтувчиларнинг ўринлари алмаштирилган эди.

Бошланғич математика курсида кўпайтиришнинг ўрин алмаштириш хоссаси ўрганилади, у бундай ифодаланади: «Кўпайтувчиларнинг ўринлари алмашиши билан кўпайтма ўзгармайди» — ва бир хонали сонларни кўпайтириш жадвалини тузишда кенг фойдаланилади. Группалаш қонуни бошланғич мактабда ошкор кўринишда қаралмайди, бироқ сонни кўпайтмага кўпайтиришда ўрин алмаштириш қонуни билан бирга қўлланилади. Бу қуйидагича юз беради: ўқувчиларга $3 \cdot (5 \cdot 2)$ ифоданинг қийматини топишнинг турлича усуллари қараб чиқиш ва ҳосил бўлган натижаларни таққослаш таклиф этилади.

Қуйидаги ҳоллар келтирилади:

- 1) $3 \cdot (5 \cdot 2) = 3 \cdot 10 = 30$;
- 2) $3 \cdot (5 \cdot 2) = (3 \cdot 5) \cdot 2 = 15 \cdot 2 = 30$;
- 3) $3 \cdot (5 \cdot 2) = (3 \cdot 2) \cdot 5 = 6 \cdot 5 = 30$.

Улардан биринчиси амалларни бажариш тартиби қондасига, иккинчиси кўпайтиришнинг группалаш қонунига, учинчиси кўпайтиришнинг ўрин алмаштириш ва группалаш қонунларига асосланган.

Кўпайтиришнинг қўшишга нисбатан тақсимот қонуни мактабда конкрет мисолларда қаралади ва сонни йиғиндига ва

йиғиндини сонга кўпайтириш қондалари номи билан аталади. Бу икки қондани қараш методик мулоҳазалар билан амалга оширилади.

Машқлар

1. 1) Кўпайтиришнинг ўрин алмаштириш қонуни;
2) кўпайтиришнинг группалаш қонуни;
3) кўпайтиришнинг қўшишга нисбатан тақсимот қонуни асосида қандай ифода алмаштиришлар бажариш мумкин?

2. Кўпайтиришнинг ўрин алмаштириш ва группалаш қонунларидан фойдаланиб, $(6 \cdot 7) \cdot 5$ ифодани $(6 \cdot 5) \cdot 7$ ифода кўринишига келтиринг. Алмаштиришлардаги ҳар бир қадамни асосланг.

3. Тақсимот қонунларидан фойдаланиб, қуйидаги ифодаларнинг қийматларини топинг:

- 1) $9 \cdot 13 + 9 \cdot 87$; 3) $17 \cdot 12 - 17 \cdot 7$;
2) $5 \cdot (12 + 44)$; 4) $297 \cdot 8$.

4. Ифодаларнинг қийматларини энг содда усуллар билан топинг, бунда алмаштиришлардаги ҳар бир қадамни тушунтиринг:

- 1) $4 \cdot 17 \cdot 25$; 2) $(8 \cdot 379) \cdot 125$; 3) $24 \cdot 19 \cdot 25 \cdot 5$;
4) $(40 \cdot 7 \cdot 3) \cdot 25$; 5) $126 \cdot 24 + 126 \cdot 6 + 126 \cdot 10$; 6) $61 \cdot 101$.

5. Ихтиёрий a, b, c натурал сонлар учун ушбу даъво ўринли эканини исботланг: агар $a < b$ бўлса, у ҳолда $ac < bc$ бўлади.

6. Кўпайтиришни бажармай туриб, $842 \cdot 58 < 842 \cdot 61$ дейиш мумкин. Нима учун?

7. (*) лар ўрнига «>», «<» ёки «=» белгиларини шундай қўйингки, натижада рост фикр ҳосил бўлсин:

- 1) $3 \cdot 29 + 7 \cdot 29 \cdot 10 \cdot 29$; 3) $7 \cdot 43 + 9 \cdot 43 \cdot 15 \cdot 43$;
2) $8 \cdot 31 - 3 \cdot 31 \cdot 6 \cdot 31$; 4) $3 \cdot 17 + 9 \cdot 17 \cdot 13 \cdot 17$.

8. Бошланғич синфлар учун математика дарсликлари бўйича «Кўпайтувчиларнинг ўринларини алмаштириш» дарси материаллари билан танишиб чиқинг. Мулоҳазаларнинг қандай усуллари билан қуйидаги хулосага эга бўлинади: «Кўпайтувчиларнинг ўринлари алмашиниши билан кўпайтма ўзгармайди»?

9. Қуйидаги мулоҳазалар бутун номанфий сонларни кўпайтиришнинг ўрин алмаштириш қонунининг исботи бўла оладими:

- $2 \cdot 3 = 6$ ва $3 \cdot 2 = 6$;
 $4 \cdot 9 = 36$ ва $9 \cdot 4 = 36$;
 $5 \cdot 17 = 85$ ва $17 \cdot 5 = 85$.

Демак, ихтиёрий бутун номанфий a ва b сонлар учун $ab = ba$ тенглик ўринли бўладими?

10. Масалаларни турли усуллар билан ечинг ва усулларни ташлашни асосланг:

1) Иккита боланинг ҳар бирига 3 тадан яшил ва 4 тадан қизил доирача тарқатилди. Бу болаларга ҳаммаси бўлиб нечта доирача тарқатилган?

2) Ишчи қутиларга шиша бокаллар жойлади. У ҳар бир қутига 3 та яшил ва 3 та сариқ бокал жойлади. У 16 та қутига бокаллар жойлади. Ҳаммаси бўлиб у нечта бокал жойлаган?

56. Бўлиш

Кичик ёшдаги мактаб ўқувчилари бўлиш амалини ўрганишга кириша бошлаганда ечадиган бир масалани қарайлик: «8 та апельсинни ҳар бирига 2 тадан қилиб ликобчаларга қўйиб чиқишди, 2 тадан қилиб неча марта апельсин қўйишди? Нечта ликобча керак бўлди?»

Масаланинг саволига жавоб бўлиш ёрдамида топилади: $8 : 2 = 4$.

Бу масаланинг ечилишини таҳлил қиламиз. Масалада 8 та элементга эга тўплам қаралмоқда. У ҳар бирида 2 тадан элемент бўлган қисм тўпламларга, яъни тенг қувватли қисм тўпламларга ажратилмоқда (98-расм). Бундан ташқари, улар жуфт-жуфти билан кесишмайди. Масалада нечта шундай қисм тўплам ҳосил бўлиши сўралапти. Шундай қилиб, жавобда ҳосил қилинган 4 сони — бу 8 та элементдан иборат тўплам бўлинган икки элементли қисм тўпламлар сонидир.

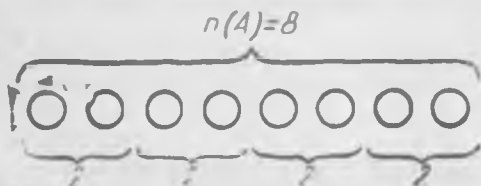
Энди бошқа мисолга эътибор берайлик: «12 та қаламни 3 ўқувчига баравардан тарқатишди. Ҳар бир ўқувчи нечтадан қалам олди?»

У ҳам бўлиш билан ечилади: $12 : 3 = 4$ (қалам). Лекин бу ерда 4 сони бошқа маънода — 12 та элементдан иборат тўплам бўлинган тенг қувватли кесишмайдиган ҳар бир учта қисм тўпламдаги элементлар сони сифатида қатнашмоқда (99-расм).

Умумий кўринишда бутун номанфий a соннинг натурал b сонга бўлинмаси қуйидагича таърифланади:

Таъриф. $a = n(A)$ ва A тўплам жуфт-жуфти билан кесишмайдиган тенг қувватли қисм тўпламларга ажратилган бўлсин.

Агар b A тўпلامини бўлишдаги қисм тўпламлар сони бўлса, у ҳолда a ва b сонларнинг бўлинмаси деб ҳар бир қисм тўпламдаги элементлар сонига айтилади.



98- расм



99- расм

Агар b A тўплами бўлишдаги ҳар бир қисм тўплам элементлари сони бўлса, у ҳолда a ва b сонларнинг бўлинмаси деб бу бўлинмадаги қисм тўпламлар сонига айтилади.

$a:b$ бўлинмани топишда фойдаланиладиган амал бўлиш деб, a сони бўлинувчи, b сони бўлувчи деб аталади.

Бўлиш амалининг тўғри бажарилганини тешириш учун биз кўпинча кўпайтиришга мурожаат қиламиз. Нима учун? Чунки бўлиш ва кўпайтириш амаллари ўзаро боғлиқ экани шубҳасиз. Бироқ бу боғланиш қандай?

$a = n(A)$ тўплам ва A тўплам b та жуфт-жуфти билан кесишмайдиган тенг қувватли $A_1, A_2, \dots, A_b$ қисм тўпламларга бўлинган бўлсин. У ҳолда $c = a:b$ ҳар бир шундай қисм тўпламдаги элементлар сони бўлади, яъни $c = a:b = n(A_1) = n(A_2) = \dots = n(A_b)$.

Шартга кўра $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_b$ бўлгани учун $n(A) = n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_b)$ бўлади. Лекин $A_1, A_2, \dots, A_b$ қисм тўпламлар жуфт-жуфти билан кесишмайди, демак, йиғиндининг таърифига кўра $n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_b) = n(A_1) + n(A_2) + \dots + n(A_b) = c + c + \dots + c$.

b та қўшилувчи

Кўпайтманинг таърифига кўра ҳар бири c га тенг бўлган b та қўшилувчининг йиғиндиси $c \cdot b$ кўпайтмага тенг. Шундай қилиб, $a = c \cdot b$ экани аниқланди, яъни a ва b сонларнинг бўлинмаси шундай c сонки, u билан b соннинг кўпайтмаси a га тенг бўлади. $c = a:b$ бўлинма A тўпламнинг бўлинишидаги қисм тўпламлар сони бўлганда ҳам худди шундай хулосага келамиз.

Шундай қилиб, бўлинманинг иккинчи таърифига эга бўламиз:

Таъриф. Бутун номанфий a сони билан b натурал соннинг бўлинмаси деб шундай бутун номанфий $c = a:b$ сонга айтиладики, унинг b сон билан кўпайтмаси a га тенг бўлади.

Тескари боғланишнинг мавжудлигини ҳам кўрсатиш мумкин, яъни бўлинманинг иккинчи таърифидан биринчи таърифи келиб чиқишини кўрсатиш мумкин:

$$a:b = c \Leftrightarrow a = c \cdot b$$

Демак, иккинчи ҳолда бўлинма кўпайтма орқали таърифланди. Шунинг учун бўлиш кўпайтиришга тескари амал деб айтилади.

a ва b натурал сонларнинг бўлинмаси ҳар доим ҳам мавжуд бўладими? Бу саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

Теорема. *Иккита a ва b натурал соннинг бўлинмаси мавжуд бўлиши учун $b \leq a$ бўлиши зарур.*

Исботи. a ва b натурал сонларнинг бўлинмаси мавжуд бўлсин, яъни $a = c \cdot b$ бўладиган c натурал сон мавжуд бўлсин. Ихтиёрий c натурал сон учун $1 \leq c$ даъво ўринли. Бу тенгсизликнинг иккала қисмини b натурал сонга кўпайтирамиз, $b \leq c \cdot b$ га эга бўламиз. $c \cdot b = a$ бўлгани учун $b \leq a$ бўлади. Теорема исботланди.

$a = 0$ ва b натурал соннинг бўлинмаси нимага тенг? Таърифга кўра бу $c \cdot b = 0$ шартни қаноатлантирувчи a сонидир. $b \neq 0$ бўлгани

учун $c \cdot b = 0$ тенглик $c = 0$ бўлганда бажарилади. Демак, $b \in N$ да $0 : b = 0$ бўлади.

Теорема. Агар a ва b натурал сонларнинг бўлинмаси мавжуд бўлса, у ягонадир.

Бу теореманинг исботи айирманинг ягоналиги ҳақидаги теореманинг исботи кабидир.

Энди бутун номанфий сонни нолга бўлиш мумкин эмаслиги ҳақидаги масалани кўриб чиқамиз.

$a \neq 0$ ва $b = 0$ сонлар берилган бўлсин. a ва b сонларнинг бўлинмаси мавжуд деб фараз қиламиз. У ҳолда бўлинманинг таърифига кўра $a = c \cdot 0$ бўладиган бутун номанфий c сони мавжуд бўлади, бундан $a = 0$. Шартга зид хулосага келдик. Демак, $a \neq 0$ ва $b = 0$ сонларнинг бўлинмаси мавжуд эмас.

Агар $a = 0$ ва $b = 0$ бўлса, у ҳолда бундай a ва b сонларнинг бўлинмаси мавжуд деган жумладан c нинг ихтиёрий қийматида ўринли бўладиган $0 = c \cdot 0$ тенглик келиб чиқади, яъни $a = 0$ ва $b = 0$ сонларнинг бўлинмаси ҳар қандай сон бўлиши мумкин. Шунинг учун математикада нолини нолга бўлиш ҳам мумкин эмас деб ҳисобланади.

Бошланғич математика курсида бўлиш ҳақидаги дастлабки тасаввурлар тўпламни жуфт-жуфти билан кесишмайдиган тенг қувватли қисм тўпламларга ажратиш билан боғлиқ бўлган, лекин мос терминология ва символикалар киритилмайдиган амалий машқлар асосида шаклланади. Бу бўлиш тушунчаси, очишнинг бош воситаси содда масалаларни ечишдир. Шундай иккита масалани ечишнинг моҳияти пунктнинг бошида кўриб ўтилди.

Бўлишнинг кўпайтиришга тескари амал сифатидаги таърифни ошкор кўринишда берилмайди. Бўлиш билан кўпайтириш орасидаги ўзаро боғланиш «Номаълум кўпайтувчини топиш» темасини ўрганиш билан ўрнатилади, бунда асосан бўлинманинг назарий-тўплам баёнида ўринли бўлган иккита маъносининг умумлашиши юз беради.

Машқлар

1. Қуйидаги тенгликларнинг назарий-тўплам талқинини беринг:
1) $6 : 3 = 2$; 2) $4 : 4 = 1$; 3) $3 : 1 = 3$.

2. Бошланғич мактабларнинг математика дарслигида қуйидаги қонда келтирилган: «Бўлишни кўпайтириш билан текшириш мумкин.

$$78 : 3 = 26.$$

Текшириш учун ҳосил бўлган бўлинмани бўлувчига кўпайтирамиз: $26 \cdot 3 = 78$. Бўлинувчи ҳосил бўлди».

Бу қонданинг назарий асосланиши қандай?

3. Натурал сонлар бўлинмасининг мавжуд бўлишининг зарурий шартини ифодаланг. У етарли шарт бўладими?

4. Нима учун қўпида келтирилган масалалар бўлиш ердамида ечилишини тушунтиринг:

1) Она 12 та олмани болаларига 4 тадан қилиб бўлиб берди. Нечта бола олма олган?

2) 8 та сабзи 4 та қуёнга баравардан бўлиб берилди. Ҳар бир қуёнга нечтадан сабзи берилган?

5. Агар бўлинувчи 52 марта, бўлувчи 13 марта орттирилса, бўлинма қандай ўзгаради?

6. Қуйидаги мулоҳазалардаги хатони топинг: $35 + 10 - 45 = 42 + 12 - 54$ — бу тўғри тенглик. Тенгликнинг чап ва ўнг қисмларида кўпайтувчиларни қавсдан ташқарига чиқарамиз. Бунда $5 \times (7 + 2 - 9) = 6 \cdot (7 + 2 - 9)$ га эга бўламиз. Бу тенгликнинг иккала қисмини $7 + 2 - 9$ ифодага бўламиз. Натижада $5 = 6$ га эга бўламиз».

57. «... марта катта» ва «... марта кичик» муносабатлари

Масалалар ечишда ва амалий фаолиятда кўпинча бундай савол туғилади: «Бир сон иккинчи сондан неча марта катта ёки кичик?» «...марта катта» ва «...марта кичик» муносабатлари билан дастлабки танишиш бошланғич мактабда юз беради. Бу муносабатларнинг маъносини аниқлаштирамиз.

6 та элементи бўлган A тўплам ва 2 та элементи бўлган B тўплам берилган бўлсин. A тўпланда B тўпламга тенг қувватли қисм тўпламлар ажратамиз (100-расм). Улар 3 та экан. Бундай ҳолда 6 сони 2 сонидан 3 марта катта, 2 сони эса 6 сонидан 3 марта кичик деб айтилади.

Умуман, агар $a = n(A)$, $b = n(B)$, $a > b$ бўладиган a ва b сонлар берилган ва A тўпламни B тўпламга тенг қувватли c та қисм тўпламга ажратиш мумкин бўлса, a сони b сонидан c марта катта, b сони эса a сонидан c марта кичик деб айтилади.

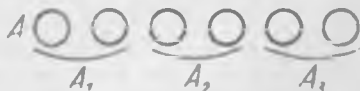
Аммо бу c сонининг ўзи нимани ифодалайди? Назарий-тўплам нуқтаи назардан бу a ва b сонларининг бўлинмасидир. Бундан қуйидаги қондани ҳосил қиламиз:

Бир сон иккинчи сондан неча марта катта ёки кичик эканини билиш учун катта сонни кичик сонга бўлиш зарур.

Масалан, ушбу масалани қарайлик: «3 туп олма ва 12 туп олча ўтқазилди. Олчалардан неча марта кам олма ўтқазилди?»

Юқорндаги қондага кўра саволга бўлиш ёрдамида жавоб топилади: $12 : 3 = 4$ (марта). Бажа-рилган амалнинг маъноси 101-расмда ёрқин намоиш этилган. «... марта кўп» ва «... марта кам» муносабатларни бошқа кўринишдаги масалаларда ҳам учрайди.

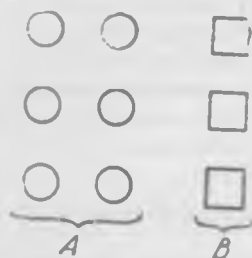
Масала. Лолада 6 та дафтар, Каримда эса ундан 2 марта кам дафтар бор. Каримда неча дафтар бор?



100- расм



101- расм



102- расм

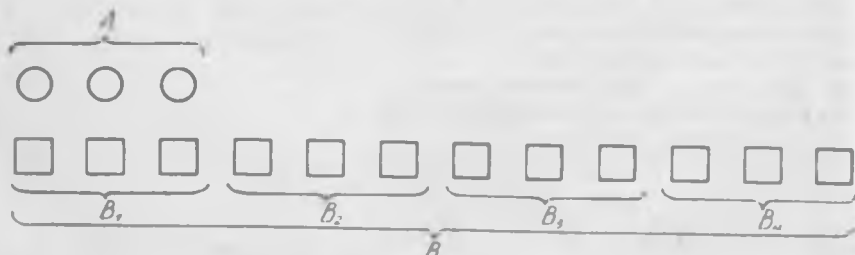
Масалада иккита тўплам: Лоладаги дафтарлар тўплами A , Каримдаги дафтарлар тўплами B ҳақида гап бормоқда. $n(A)=6$ экани маълум. $n(B)$ сони 6 дан 2 марта кам эканини билган ҳолда шу $n(B)$ сонни топиш талаб этилади. Бу шартдан келиб чиқиб, A тўпلامни тенг қувватли иккита қисм тўплам кўринишида тасвирлаш мумкин (102- расм), у ҳолда B тўпламда A тўпламнинг ҳар бир қисм тўпламида нечта элемент бўлса, шунча элемент бўлади, бу сон бўлиш билан топилади:

$6:2=3$. Демак, $n(B)=3$, яъни Каримда 3 та дафтар бор экан.

Масала. Лолада 3 та дафтар, Каримда эса ундан 4 марта кўп дафтар бор. Каримда нечта дафтар бор?

Бу масалада ҳам олдинги масаладаги каби иккита тўплам: Лоладаги дафтарлар тўплами A ва Каримдаги дафтарлар тўплами B қаралади. $n(B)=3$ экани маълум. B тўпламдаги элементлар сони A тўпламдаги элементлар сонидан 4 марта кўп эканини билган ҳолда $n(B)$ ни топиш талаб этилади. Бу B тўплам A тўпламга тенг қувватли кесишмайдиган тўртта B_1, B_2, B_3, B_4 қисм тўпламдан иборат эканини англатади (103- расм) ва демак, $n(B_1)=n(B_2)=n(B_3)=n(B_4)=n(A)$. Бироқ у ҳолда B тўпламдаги элементлар сонини қўшиш билан топиш мумкин: $n(B)=n(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4)=n(B_1)+n(B_2)+n(B_3)+n(B_4)=3+3+3+3$. Қўшишни кўпайтириш билан алмаштириб, ушбуни ҳосил қиламиз: $3+3+3+3=3 \cdot 4=12$. Демак, Каримда 12 та дафтар бор экан.

« a сони b дан c марта катта» жумлани « $>$ » белгидан фойдаланиб, қисқа ёзиш мумкин эмаслигини эслатиб ўтамиз, чунки «... марта катта» муносабатини ёзиш учун («... марта кичик» муносабати учун ҳам) махсус белги йўқ.



103- расм

Машқлар

1. Жумлаларнинг маъносини тушунтиринг: 1) 10 сони 5 дан 2 марта катта; 2) 2 сони 8 дан 4 марта кичик.

2. Қуйида келтирилган масалаларда қаралаётган муносабатларни айтинг, бу масалаларни ечинг, амалларнинг танланишини асосланг:

1) Арчани безаш учун ўқувчи 3 та юлдузча, юлдузчалардан 2 марта кўп байроқча қирқди. Ўқувчи неча байроқча қирққан?

2) Боғда 4 туп олма дарахти бор, улар олчалардан 3 марта кам. Боғда неча туп олча дарахти бор?

3) Валида 8 та қизил доирача, улардан 2 марта кам кўк доирача бор эди. Валида неча кўк доирача бор эди?

4) Ҳовлида 4 та ўрдак ва 8 та ғоз юрган эди. Ғозлар ўрдаклардан неча марта кўп эди? Ўрдаклар ғозлардан неча марта кам эди?

5) Қутида 8 та рангли қалам бор. Улар қора қаламлардан 2 марта кўп. Қутида неча қора қалам бор?

3. «... марта катта» муносабати қараладиган ва ечилиши $15:3=5$ тенглик кўринишига эга бўлган иккита содда масала тузнг.

4. Масалани ечинг, амалларнинг танланишини асосланг:

1) Магазин 9 та қайиқ, қайиқлардан 3 марта кам мотоцикл ва қайиқлардан 5 марта кўп велосипед сотди. Магазин неча қайиқ, мотоцикл ва велосипед сотди?

2) Китоб 72 бетли. Лола бу китобда неча бет бўлса, ўшандан 9 марта кам бет ўқиди. У яна неча бет ўқиши керак?

3) Нилуфар 9 ёшда, унинг отаси Нилуфардан 5 марта катта. Нилуфар ўз отасидан неча марта ёш?

58. Йиғиндини сонга ва сонни кўпайтмага бўлиш қондалари

Натурал сонларни бўлишнинг баъзи хоссалари билан танишамиз. Бу қондаларни танлаш бошланғич математика курси мазмуни билан аниқланган.

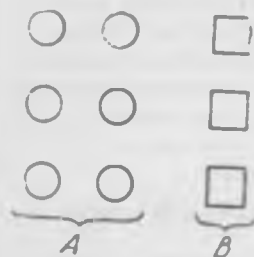
Йиғиндини сонга бўлиш қондаси. *Агар a ва b сонлар c сонга бўлинса, у ҳолда уларнинг $a + b$ йиғиндисига ҳам c га бўлинади; $a + b$ йиғиндини c га бўлганда ҳосил бўладиган бўлинма a ни c га ва b ни c га бўлганда ҳосил бўладиган бўлинмалар йиғиндисига тенг*, яъни $(a + b) : c = a : c + b : c$.

Исботи. a сони c га бўлингани учун $a = c \cdot m$ бўладиган $m = a : c$ натурал сон мавжуд. Шунга ўхшаш $b = c \cdot n$ бўладиган $n = b : c$ натурал сон мавжуд. У ҳолда $a + b = c \cdot m + c \cdot n = c \cdot (m + n)$. Бундан $a + b$ йиғиндининг c га бўлиниши ва $a + b$ ни c га бўлганда ҳосил бўладиган бўлинма $m + n$ га тенг бўлиши, яъни $a : c + b : c$ экани келиб чиқади.

Исбот қилинган қондани назарий-тўплам нуқтан назардан талқин қилиш мумкин.



101- расм



102- расм

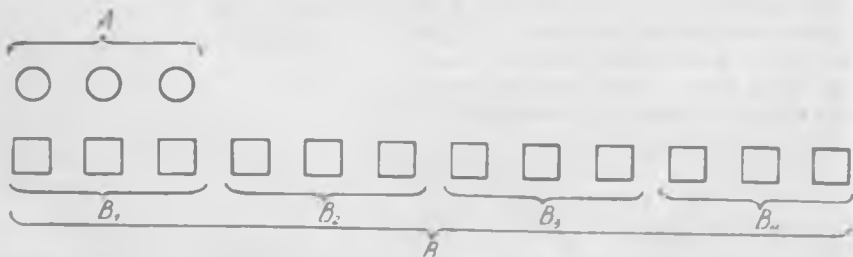
Масалада иккита тўплам: Лоладаги дафтарлар тўплами A , Каримдаги дафтарлар тўплами B ҳақида гап бормоқда. $n(A)=6$ экани маълум. $n(B)$ сони 6 дан 2 марта кам эканини билган ҳолда шу $n(B)$ сонни топиш талаб этилади. Бу шартдан келиб чиқиб, A тўпلامини тенг қувватли иккита қисм тўплам кўринишида тасвирлаш мумкин (102- расм), у ҳолда B тўпламда A тўпламнинг ҳар бир қисм тўпلاميда нечта элемент бўлса, шунча элемент бўлади, бу сон бўлиш билан топилади:

$6 : 2 = 3$. Демак, $n(B) = 3$, яъни Каримда 3 та дафтар бор экан.

Масала. Лолада 3 та дафтар, Каримда эса ундан 4 марта кўп дафтар бор. Каримда нечта дафтар бор?

Бу масалада ҳам олдинги масаладаги каби иккита тўплам: Лоладаги дафтарлар тўплами A ва Каримдаги дафтарлар тўплами B қаралади. $n(B) = 3$ экани маълум. B тўпламдаги элементлар сони A тўпламдаги элементлар сонидан 4 марта кўп эканини билган ҳолда $n(B)$ ни топиш талаб этилади. Бу B тўплам A тўпламга тенг қувватли кесишмайдиган тўртта B_1, B_2, B_3, B_4 қисм тўпламдан иборат эканини англатади (103- расм) ва демак, $n(B_1)=n(B_2)=n(B_3)=n(B_4)=n(A)$. Бироқ у ҳолда B тўпламдаги элементлар сонини қўшиш билан топиш мумкин: $n(B) = n(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4) = n(B_1) + n(B_2) + n(B_3) + n(B_4) = 3 + 3 + 3 + 3$. Қўшишни кўпайтириш билан алмаштириб, ушбуни ҳосил қиламиз: $3 + 3 + 3 + 3 = 3 \cdot 4 = 12$. Демак, Каримда 12 та дафтар бор экан.

« a сони b дан c марта катта» жумлани « $>$ » белгидан фойдаланиб, қисқа ёзиш мумкин эмаслигини эслатиб ўтамиз, чунки «... марта катта» муносабатини ёзиш учун («... марта кичик» муносабати учун ҳам) махсус белги йўқ.



103- расм

Машқлар

1. Жумлаларнинг маъносини тушунтиринг: 1) 10 сони 5 дан 2 марта катта; 2) 2 сони 8 дан 4 марта кичик.

2. Қуйида келтирилган масалаларда қаралаётган муносабатларни айтинг, бу масалаларни ечинг, амалларнинг танланишини асосланг:

1) Арчани безаш учун ўқувчи 3 та юлдузча, юлдузчалардан 2 марта кўп байроқча қирқди. Ўқувчи нечта байроқча қирққан?

2) Боғда 4 туп олма дарахти бор, улар олчалардан 3 марта кам. Боғда неча туп олча дарахти бор?

3) Валида 8 та қизил доирача, улардан 2 марта кам кўк доирача бор эди. Валида нечта кўк доирача бор эди?

4) Ҳовлида 4 та ўрдак ва 8 та ғоз юрган эди. Ғозлар ўрдаклардан неча марта кўп эди? Ўрдаклар ғозлардан неча марта кам эди?

5) Қутида 8 та рангли қалам бор. Улар қора қаламлардан 2 марта кўп. Қутида нечта қора қалам бор?

3. «... марта катта» муносабати қараладиган ва ечилиши $15 : 3 = 5$ тенглик кўринишига эга бўлган иккита содда масала тузинг.

4. Масалани ечинг, амалларнинг танланишини асосланг:

1) Магазин 9 та қайиқ, қайиқлардан 3 марта кам мотоцикл ва қайиқлардан 5 марта кўп велосипед сотди. Магазин нечта қайиқ, мотоцикл ва велосипед сотди?

2) Китоб 72 бетли. Лола бу китобда неча бет бўлса, ўшандан 9 марта кам бет ўқиди. У яна неча бет ўқиши керак?

3) Нилуфар 9 ёшда, унинг отаси Нилуфардан 5 марта катта. Нилуфар ўз отасидан неча марта ёш?

58. Йиғиндини сонга ва сонни кўпайтмага бўлиш қоидалари

Натурал сонларни бўлишнинг баъзи хоссалари билан танишамиз. Бу қоидаларни танлаш бошланғич математика курси мазмуни билан аниқланган.

Йиғиндини сонга бўлиш қоидаси. *Агар a ва b сонлар c сонга бўлинса, у ҳолда уларнинг $a + b$ йиғиндисига c га бўлинади; $a + b$ йиғиндини c га бўлганда ҳосил бўладиган бўлинма a ни c га ва b ни c га бўлганда ҳосил бўладиган бўлинмалар йиғиндисига тенг*, яъни $(a + b) : c = a : c + b : c$.

Исботи. a сони c га бўлингани учун $a = c \cdot m$ бўладиган $m = a : c$ натурал сон мавжуд. Шунга ўхшаш $b = c \cdot n$ бўладиган $n = b : c$ натурал сон мавжуд. У ҳолда $a + b = c \cdot m + c \cdot n = c \cdot (m + n)$. Бундан $a + b$ йиғиндининг c га бўлиниши ва $a + b$ ни c га бўлганда ҳосил бўладиган бўлинма $m + n$ га тенг бўлиши, яъни $a : c + b : c$ экани келиб чиқади.

Исбот қилинган қондани назарий-тўплам нуқтан назардан талқин қилиш мумкин.



$$6 : 2 = 3$$



$$4 : 2 = 2$$



$$10 : 2 = 5$$

104- расм

$a = n(A)$, $b = n(B)$, бунда $A \cap B = \emptyset$ бўлсин. Агар A ва B тўпламларнинг ҳар бирини c та тенг қувватли қисм тўпламларга ажратиш мумкин бўлса, у ҳолда бу тўпламлар бирлашмаларини ҳам шундай ажратиш мумкин (104- расм).

Бунда, агар A тўпламини ажратишдаги ҳар бир қисм тўплам $a : c$ элементга эга бўлса, B тўпламининг ҳар бир қисм тўплами $b : c$ элементга эга бўлса, у ҳолда $A \cup B$ тўпламининг ҳар бир қисм тўпламида $a : c + b : c$ элемент мавжуд бўлади. Бу эса $(a + b) : c = a : c + b : c$ эканини англатади.

Сонни кўпайтмага бўлиш қондаси. *Агар a натурал сон b ва c натурал сонларга бўлинса, у ҳолда a сонни b ва c сонлар кўпайтмасига бўлиш учун a сонни $b(c)$ га бўлиш ва ҳосил бўлган бўлинмани $c(b)$ га бўлиш етарли:*

$$a : (b \cdot c) = (a : b) : c = (a : c) : b.$$

Исботи. $(a : b) : c = x$ деб фараз қилайлик. У ҳолда бўлинманинг таърифига кўра $a : b = c \cdot x$ бўлади, бундан шунга ўхшаш $a = b \cdot (c \cdot x)$ бўлади. Кўпайтиришнинг группалаш қонунига асосан $a = (b \cdot c) \cdot x$ бўлади. Ҳосил бўлган тенглик $a : (b \cdot c) = x$ эканини билдиради. Шундай қилиб, $a : (b \cdot c) = (a : b) : c$.

Сонни икки соннинг бўлинмасига кўпайтириш қондаси. *Сонни икки соннинг бўлинмасига кўпайтириш учун бу сонни бўлинувчига кўпайтириш ва ҳосил бўлган кўпайтмани бўлувчига бўлиш етарли, яъни $a \cdot (b : c) = (a \cdot b) : c$.*

Бу қонданинг исботи аввалги қонданинг исботига ўхшаш.

Ифодаланган қондаларни қўлланиш ифодани соддалаштириш имконини беради.

Масалан, $(720 + 600) : 24$ ифоданинг қийматини топиш учун 720 ва 600 қўшилувчиларни 24 га бўлиш ва ҳосил бўлган бўлинмаларни қўшиш етарли:

$$(720 + 600) : 24 = 720 : 24 + 600 : 24 = 30 + 25 = 55.$$

1440 : (12 · 15) ифоданинг қийматини аввал 1440 ни 12 га бўлиб, кейин ҳосил бўлган бўлинмани 15 га бўлиб топиш мумкин:

$$1440 : (12 \cdot 15) = (1440 : 12) : 15 = 120 : 15 = 8.$$

Кўрсатиб ўтилган қоида бoshланғич математика курсида конкрет мисолларда қаралади. $6 + 4$ йиғиндини 2 сонига бўлиш қоидаси билан дастлабки танишишда кўргазмалли материал намойиш этилади. Кейинчалик бу қондадан ҳисоблашларни ихчам бажариш учун фойдаланилади. Сонни кўпайтмага бўлиш қоидаси ноль билан тугаган сонларга бўлишда кенг қўлланилади.

Машқлар

1. Йиғиндини сонга бўлиш қоидасини қўлланиб, ифоданинг қийматини топинг:

- а) $(720 + 600) : 12$, в) $(675 + 225) : 25$,
б) $(770 + 140) : 35$, г) $(120 + 36 + 186) : 6$.

2. Ўқувчиларга қуйидаги топшириқ тавсия этилади:

Мисолларнинг ечилишини қараб чиқ ва тушунтир:

$36 : 2 = (20 + 16) : 2 =$	$65 : 5 = (50 + 15) : 5 =$
$= 20 : 2 + 16 : 2 =$	$= 50 : 5 + 15 : 5 =$
$= 10 + 8 = 18$	$= 10 + 3 = 13.$

Бу топшириқни бажарниг ва бу ерда йиғиндини сонга бўлиш қоидаидан фойдаланишнинг маъноси нимадан иборат эканини тушунтиринг.

3. Масалани турли усуллар билан ечинг:

«14 та қиз бола ва 12 та ўғил бола тортишмачоқ ўйнашди. Улар иккита командага бўлинишди. Ҳар бир командада неча киши бўлган?»

4. Ҳамма шакл алмаштиришларни асосланг:

- 1) $420 : 14 = 420 : (7 \cdot 2) = (420 : 7) : 2 = 60 : 2 = 30$;
2) $7200 : 900 = 7200 : (9 \cdot 100) = (7200 : 100) : 9 = 72 : 9 = 8$.

5. Сонни кўпайтмага бўлиш қоидаидан фойдаланиб, ифоданинг қийматини топинг: 1) $600 : 24$; 2) $630 : 42$; 3) $280 : 35$; 4) $5400 : 900$.

6. Ҳисоблашларни бажармасдан ифодаларни таққосланг:

- 1) $560 : (7 \cdot 4)$ ва $560 : 7 : 4$;
2) $240 : (3 \cdot 5)$ ва $240 : 3 : 5$;
3) $32 \cdot (10 \cdot 2)$ ва $32 \cdot 10 + 32 \cdot 2$;
4) $56 \cdot 10 \cdot 4$ ва $56 \cdot 14$;
5) $12 \cdot (60 : 15)$ ва $12 \cdot 60 : 15$.

7. Қуйидаги мулоҳазалардаги хатони топинг:

« $16 : 16 = 25 : 25$ — бу тўғри тенглик. Умумий кўпайтувчини қавсдан ташқарига чиқаргандан сўнг $16 : (1 : 1) = 25 (1 : 1)$ га эга бўламиз. $1 : 1 = 1$ эканини билган ҳолда $16 = 25$ га эга бўламиз».

59. Қолдиқли бўлиш

37 сони 8 га бўлинмайди. Лекин $37 = 8 \cdot 4 + 5$ бўладиган 4 ва 5 сонлари мавжуд. 37 сонини 8 га бўлиш қолдиқли бўлиш билан бажарилади, бунда тўлиқмас 4 бўлинма ва 5 қолдиқ топилди деб айтилади.

Таъриф. Бутун номанфий a сонни b натурал сонга қолдиқли бўлиш деб $a = bq + r$ ва $0 \leq r < b$ бўладиган бутун номанфий q ва r сонларни топишга айтилади.

Қолдиқнинг берилган таърифидан келиб чиқадиган ўзига хос хусусиятига эътибор берайлик. Қолдиқ b бўлувчидан кичик натурал сондир. Шунинг учун бутун номанфий сонларни b га бўлганда ҳаммаси бўлиб b та турлича қолдиқ ҳосил бўлиши мумкин: $0, 1, 2, 3, \dots, b-1$. Масалан, бутун номанфий сонларни 5 га қолдиқли бўлганда қуйидаги қолдиқлар ҳосил бўлиши мумкин: $0, 1, 2, 3, 4$.

Агар $a < b$ бўлса, у ҳолда a ни b га қолдиқли бўлганда тўлиқмас бўлинма $q=0$, қолдиқ $r=a$ бўлади, яъни $a = 0 \cdot b + a$.

a ни b га қолдиқли бўлишни ҳар донм ҳам бажариш мумкинми? Бу саволга биз исботсиз қабул қиладиган ушбу теорема жавоб беради.

Теорема. *Ихтиёрый бутун номанфий a сони ва b натурал сон учун $a = b \cdot q + r$, бунда $0 \leq r < b$, бўладиган бутун номанфий q ва r сонлар мавжуд. Бу ҳоссага эга бўлган бутун номанфий сонлар жуфти (q, r) ягона-дир.*

Қолдиқли бўлишнинг назарий-тўплам маъноси қандай эканини аниқтаймиз.

$a = n(A)$ ва A тўплам $A_1, A_2, \dots, A_q, X$ тўпламларга ажратилган бўлиб, бунда $A_1, A_2, \dots, A_q$ тўпламлар тенг қувватли ва b тадан элементни ўз ичига олган, X тўплам эса $A_1, A_2, \dots, A_q$ тўпламларнинг ҳар биридаги элементлардан кам элементларга эга бўлсин, масалан, $n(X) = r$. У ҳолда $a = bq + r$ бўлади, бунда $0 \leq r < b$. Шундай қилиб, тўлиқмас бўлинма q — бу A тўпламни ажратишдаги (ҳар бирида b тадан элемент бўлган) тенг қувватли қисм тўпламлар сони, қолдиқ r — X тўпламдаги элементлар сони.

Бошланғич мактабда қолдиқли бўлиш билан танишиш 9 та боладан 4 та жуфт тузиш ва битта бола жуфтсиз қолиш вазиятини қараб чиқишда юз беради, яъни тўлиқмас бўлинма ва қолдиқ билан танишиш, моҳиятига кўра, назарий-тўплам асосида юз беради. Қолдиқли бўлишнинг қуйидагича ёзилишидан фойдаланилади:

$$9 : 2 = 4 \text{ (1 қолдиқ).}$$

Агар бўлишда қолдиқ қолса, у ҳолда қолдиқ бўлувчидан ҳар донм кичик бўлиши таъкидлаб ўтилади.

Қолдиқли бўлишнинг муҳимлигини шундан ибратки, у куп хонали сонларни бўлиш алгоритмига асос бўлади.

Машқлар

1. 1) 42 ни 5 га; 2) 82 ни 9 га; 3) 677 ни 42 га; 4) 105 ни 82 га қолдиқли бўлишни бажаринг.

2. Бутун номанфий сонларни: 1) 3 га; 2) 8 га; 3) 35 га бўлишда қандай қолдиқлар ҳосил бўлади?

3. Агар a ни 7 га бўлганда: 1) 0; 2) 3; 3) 6 қолдиқ ҳосил бўлса, a сони қандай сон бўлади?

4. Шундай a ва b сонларни топингки, a ни b га қолдиқли бўлганда бўлинмада 17 ва қолдиқда 17 ҳосил бўлсин. a ва b сонларнинг бундай жуфтлиги ягонами?

5. 228 ни бирор b сонга бўлганда бўлинмада 8 сони, қолдиқда эса 4 ҳосил бўлди. 228 сони қандай сонга бўлинган?

6. 5 дан 23 гача натурал сонлар тўпламини 4 га бўлганда бир хил қолдиқ берувчи синфларга ажратинг. Нечта синф ҳосил бўлади?

7. Бутун номанфий сонлар тўплами 6 га бўлганда ҳосил бўладиган қолдиқларга боғлиқ равишда қандай синфларга ажралади? Ҳар бир синфнинг иккитадан вакилини айтинг.

8. a ва b сонларни 8 га бўлганда айнан бир хил 7 сони ҳосил бўлди. Қуйидаги сонларни 8 га бўлганда қандай қолдиқлар ҳосил бўлади: 1) $a + b$; 2) $a - b$; 3) $a \cdot b$?

9. «7 га бўлганда қолдиқда 1 ҳосил бўладиган учта сон ва 8 га бўлганда қолдиқда 5 ҳосил бўладиган учта сон ёз» деган масалани ўқувчи танлаш усули билан ечди. Кўрсатилган типдаги турли сонларни ҳосил қилиш учун формула ёзинг.

10. Бошланғич синфлар учун математика дарсликларидан шундай топшириқлар намуналарини келтирингки, уларни бажаришда ўқувчи қолдиқли бўлишни бажарсин.

60. Бутун номанфий сонлар тўпламининг хоссалари

Бутун номанфий сонлар тўплами қатор хоссаларга эга. Хусусан, у **тартибланган** ва **чексиздир**.

Бутун номанфий сонлар тўпламини «кичик» муносабати ёрдамида тартиблантириш мумкин эканини исботлаймиз. Бунинг учун бу муносабат транзитив ва антисимметрик эканини кўрсатамиз, бунинг устига «кичик» муносабатининг йиғинди орқали таърифидан келиб чиқамиз.

Теорема. Агар $a < b$ ва $b < c$ бўлса, у ҳолда $a < c$ бўлади.

Исботи. $a < b$ ва $b < c$ бўлгани учун «кичик» муносабатининг таърифига кўра $b = a + x$ ва $c = b + y$ бўладиган x ва y натурал сонлар топилади. Лекин у ҳолда $c = (a + x) + y$ бўлади ва қўшишнинг группалаш қонунига асосан $c = a + (x + y)$ га эга бўламиз. $x + y$ бутун номанфий сон бўлгани учун «кичик» муносабатининг таърифига кўра $a < c$ бўлади.

Теорема. Агар $a < b$ бўлса, у ҳолда $b < a$ бўлиши **номумкин**.

Исботи. Ҳеч қандай бутун номанфий a сон учун $a < a$ тенгсизликнинг бажарилмаслигига ишониш қийин эмас. Агарда $a < a$ бўлганда эди, у ҳолда $a = a + c$ бўладиган натурал c сони топилар эди, лекин йиғиндининг ягоналигига кўра бунинг бўлиши мумкин

эмас. Энди иккала $a < b$ ва $b < a$ тенгсизликлар бажарилади деб фараз қилайлик. У ҳолда «кичик» муносабатининг транзитивлик хоссасига кўра $a < a$ тенгсизликка эга бўламиз, бунинг эса бўлиши мумкин эмас.

Бутун номанфий сонлар учун «кичик» муносабати транзитив ва антисимметрик бўлгани учун у тартиб муносабати бўлади, бутун номанфий сонлар тўплами эса тартибланган тўплам бўлади.

«Кичик» муносабатининг кўриб ўтилган хоссаларидан ихтиёрий бутун номанфий a ва b сонлар учун $a < b$, $a = b$, $b > a$ муносабатлардан фақат биттаси бажарилиши келиб чиқади.

Бу тўпламнинг элементларини ихтиёрий сондан аввал кичиги келадиган қилиб жойлаштириб, бутун номанфий сонлар қаторини ҳосил қиламиз: 0, 1, 2, 3, 4, ... Бу қатор чексиздир.

a та элементга эга бўлган бирор A тўпламни оламиз. Агар унга A тўпламнинг ҳамма элементларидан фарқ қиладиган яна битта элемент қўшиб қўйилса, у ҳолда элементи $a+1$ та бўлган янги B тўплам ҳосил бўлади. $a+1$ сонни a сондан бевосита кейин келувчи сон деб айтамыз. У ҳолда ҳар бир бутун номанфий сон учун ундан бевосита кейин келувчи ягона натурал сонни кўрсатиш мумкин. Аксинча: ҳар бир бутун номанфий сон биттадан ортиқ бўлмаган бутун номанфий сондан бевосита кейин келади, ноль ҳеч қандай бутун номанфий сондан бевосита кейин келмайди. 0 сонидан бошлаб тартиб билан бевосита бир-биридан кейин келувчи натурал сонларга ўта бориб, биз бутун номанфий сонлар тўпламини ҳосил қиламиз.

«Бевосита кейин келиш» муносабати бутун номанфий сонларни қўшиш ва кўпайтириш билан узвий боғланган. Ҳақиқатан ҳам, агар $a + b$ йиғинди маълум бўлса, $a + (b + 1)$ йиғиндини топиш осон: $a + (b + 1) = (a + b) + 1$, яъни у $a + b$ йиғиндидан бевосита кейин келувчи сонга тенг. Масалан, агар $4 + 2 = 6$ экани маълум бўлса, у ҳолда $4 + 3$ йиғиндини топиш учун 6 га 1 ни қўшиш етарли: $4 + 3 = 4 + (2 + 1) = (4 + 2) + 1 = 6 + 1 = 7$.

«Бевосита кейин келиш» муносабатидан кўпайтириш учун ҳам шунга ўхшаш фойдаланилади: агар $7 \cdot 5 = 35$ экани маълум бўлса, $7 \cdot 6$ кўпайтмани топиш осон. Бунинг учун 35 га 7 ни қўшиш етарли, чунки $7 \cdot 6 = 7 \cdot (5 + 1) = 7 \cdot 5 + 7 = 35 + 7$ бўлади.

Бутун номанфий сонлар тўпламининг яна битта хоссасини айтиб ўтамыз. a —бирор бутун номанфий сон ва $a + 1$ a дан бевосита кейин келувчи сон бўлсин. У ҳолда ҳеч қандай бутун номанфий a сон учун $a < x < a + 1$ бўладиган x натурал сон кўрсатиш мумкин эмас. Бу хосса натурал сонлар тўпламининг дискретлик хоссаси, a ва $a + 1$ сонларнинг ўзи эса қўшни сонлар деб аталади.

Биринчи ўнликдаги сонларни ўрганишнинг ўзидасқ натурал қаторнинг ҳар бир сонини қандай ҳосил қилиш мумкинлигини аниқланади. Бунда «кейин келади», «олдин келади» ва 1 ни қўшиш ҳамда 1 ни айириш тушунчаларидан фойдаланилади, яъни ўқувчилар натурал қатор сонларининг хоссаларини кўришлари учун шароит яратилади: ихтиёрий сонни санақда ундан

олдин келувчи сонга 1 ни қўшиш билан ҳосил қилиш мумкин, ихтиёрый сон ундан олдин келувчи сондан 1 та кўп ва ҳ. к.

Машқлар

1. Биринчи синф ўқувчиларига 1, 2, □, 4, 5 қаторда тушириб қолдирилган ўринларни тўлдириш тавсия этилади. Ўқувчи ўз жавобини қандай тушунтириши лозим? У натурал қаторнинг қандай хоссаларидан фойдаланади?

2. 1-синф ўқувчисига бундай топшириқ берилади: 7 сонининг қўшниларини айт. Ўқувчи ўз жавобини асослаб бериши учун натурал қаторнинг қандай хоссаларидан фойдаланиши лозим?

3. Ўқувчи $5+3=8$ эканини ҳисоблади. У $6+3$ йиғиндини қандай топиши мумкин?

4. Иккинчи синф ўқувчиларига бундай топшириқ берилди: $4 \cdot 7=28$ эканини билган ҳолда $4 \cdot 8$ ва $4 \cdot 9$ ни топ. Ўқувчи буни қандай бажариши мумкин?

9-§. НАТУРАЛ СОННИНГ МАЪНОСИ ВА СОНЛАР — КАТТАЛИКЛАРНИ ЎЛЧАШ НАТИЖАЛАРИ УСТИДА АМАЛЛАР МАЪНОСИ

Кишига амалий фаолиятида на фақат буюмлар саноғини олиб боришга, балки турли катталиклар — узунлик, масса, вақт ва бошқаларни ўлчашга тўғри келади. Шунинг учун натурал сонларнинг вужудга келишида саноққа бўлган эҳтиёжгина эмас, катталикларни ўлчаш масаласи ҳам сабаб бўлди.

Агар натурал сон катталикларни ўлчаш натижасида пайдо бўлган бўлса, унинг қандай маънога эга эканлигини аниқлаймиз. Натурал сонга бундай ёндашиш билан боғлиқ бўлган ҳамма назарий далилларни битта катталик — кесма узунлиги миқсолида қараймиз.

61. Кесмаларни таққослаш. Кесмалар устида амаллар

a ва b кесмалар берилган бўлсин. Бу кесмаларга тенг кесмаларни боши O нуқтада бўлган бирор нурга қўямиз. $OA=a$ ва $OB=b$ кесмаларни ҳосил қиламиз. Учта ҳол бўлиши мумкин.

1. A ва B нуқталар устма-уст тушади (105-расм). У ҳолда OA ва OB — битта кесма, a ва b кесмалар эса унга тенг, демак, $a=b$.

2. B нуқта OA кесма ичида ётади (106-расм). У ҳолда OB кесма OA кесмадан кичик (ёки OA кесма OB кесмадан катта) дейилади ва бундай ёзилади: $OB < OA$ ($OA > OB$) ёки $b < a$ ($a > b$).

3. A нуқта OB кесма ичида ётади (107-расм). У ҳолда OA кесма



105- расм



106- расм



107- расм



108- расм



109- расм

OB кесмадан кичик дейилади ва бундай ёзилади: $OA < OB$ ёки $a < b$ ($b > a$).

Кесмалар устида турли амаллар бажарилади.

Таъриф. Агар a кесма $a_1, a_2, \dots, a_n$ кесмаларнинг бирлашмаси бўлиб, кесмалардан бирортаси ҳам ички умумий нуқтага эга бўлмаса (бир-бири билан устма-уст тушмаса) ва бир кесма иккинчи кесманинг охирига бирин-кетин туташса, a кесма бу кесмаларнинг йигиндиси дейилади.

Бундай ёзилади: $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Масалан, 108-расмда тасвирланган a кесмани a_1, a_2, a_3, a_4 кесмаларнинг йигиндиси дейиш мумкин.

Таъриф. a ва b кесмаларнинг $a - b$ айирмаси деб шундай c кесмага айтиладики, унинг учун $b + c = a$ тенглик ўринли бўлади.

a ва b кесмаларнинг айирмаси бундай топилади. a кесмага тенг AB кесма ясалади ва унда b кесмага тенг AC кесма ажратилади. У ҳолда CB кесма a ва b кесмаларнинг $a - b$ айирмаси бўлади (109-расм).

Равшанки, a ва b кесмаларнинг айирмаси мавжуд бўлиши учун b кесма a кесмадан кичик бўлиши зарур ва етарлидир.

Кесмалар устида амаллар қатор хоссаларга эга. Улардан баъзиларини исботсиз келтирамиз.

1. Ҳар қандай a ва b кесмалар учун $a + b = b + a$ тенглик ўринли, яъни кесмаларни қўшиш ўрин алмаштириш қонунига бўйсунди.

2. Ҳар қандай a, b, c кесмалар учун $(a + b) + c = a + (b + c)$ тенглик ўринли, яъни кесмаларни қўшиш группалаш қонунига бўйсунди.

3. Ҳар қандай a ва b кесмалар учун $a + b \neq a$.

4. Ҳар қандай a, b ва c кесмалар учун $a < b$ бўлса, у ҳолда $a + c < b + c$ бўлади.

Машқлар

1. Тўғри тўртбурчак чизинг ва унинг диагоналарини ўтказинг. Унинг томонлари ва диагоналарини таққослаш керак. Сиз буни қандай бажарасиз?

2. Тўртбурчак чизинг. Унинг томонларини ўсиб бориш тартибда кўрсатиш керак. Сиз буни қандай бажарасиз?

3. Шундай a ва b кесмалар чизингки, $a < b$ бўлсин. Улар йигиндисини ва айирмасини ясанг.

4. Турли томонли учбурчак чизинг. Унинг қайси томони энг катта эканлигини аниқланг. Унга, учидан бошлаб, унинг бошқа икки томонини кетма-кет қўйинг. Хулоса чиқаринг.

5. A , B ва C нуқталар битта тўғри чизиқда ётади ва $AB > BC$. $AC > BC$ дейиш мумкинми?

6. Кесмалар тўпламида «кичик» муносабати транзитив эканлигини исботланг.

7. Кесмаларни қўшиш ўрин алмаштириш қонунига бўйсунганини исботланг.

62. Натурал сон кесма узунлигининг қиймати сифатида

Кесмалар узунликлари қандай ўлчанишини эслайлик. Энг аввал кесмалар тўламиндан бирорта e кесма танлаб олинади ва у бирлик кесма ёки узунлик бирлиги деб аталади. Сўнгра берилган a кесма бирлик e кесма билан таққосланади. Агар a кесма e бирлик кесмага тенг n та кесма йиғиндиси бўлса, бундай ёзилади: $a = e + e + \dots + e = ne$ ва n натурал сон a кесма узунлигининг n та қўшилувчи

e узунлик бирлигидаги сон қиймати дейилади.

Масалан, 110-расмда тасвирланган a кесма узунлигининг e узунлик бирлигидаги сон қиймати 8 сони бўлади. Бундай ёзиш мумкин: $a = 8e$.

Агар узунлик бирлиги сифатида бошқа кесма олинса, у ҳолда, a кесма узунлигининг сон қиймати ўзгаради. Масалан, агар узунлик бирлиги сифатида e_1 кесма танлаб олинса (110-расм), a кесма узунлигининг сон қиймати $4 : a = 4e_1$ га тенг бўлади.

Шуни эслатиб ўтиш муҳимки, ҳар қандай натурал сон n учун узунлиги шу сон билан ифодаланадиган кесма мавжуд бўлади. Бундай кесма яшаш учун e узунлик бирлигини биринкетин n марта қўйиш етарлидир.

Шундай қилиб, a кесма узунлигининг сон қиймати сифатидаги натурал сон a кесма танлаб олинган e бирлик кесмаларнинг нечтасидан иборатлигини кўрсатади. Танлаб олинган e узунлик бирлигида бу сон ягонадир.

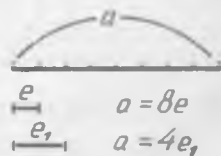
Бундай сонлар учун «тенг» ва «кичик» муносабатларни қандай маънога эга эканлигини аниқлаймиз.

n натурал сон a кесма узунлигининг сон қиймати, m натурал сон b кесма узунлигининг сон қиймати бўлиб, бу сонлар битта e узунлик бирлигида ҳосил қилинган бўлсин. У ҳолда:

агар a ва b кесмалар тенг бўлса, улар узунликларининг сон қиймати тенг бўлади, яъни $n = m$; тескари тасдиқ ҳам ўринли:

агар a кесма b кесмадан кичик бўлса, a кесма узунлигининг сон қиймати b кесма узунлигининг сон қийматидан кичик бўлади, яъни $n < m$; тескари тасдиқ ҳам ўринли.

Кесмалар ва улар узунликларининг сон қиймати орасида ўрнатилган ўзаро боғланиш



110-расм

кесмалар узунликларини таққослашни уларнинг тегишли сон қийматларини таққослашга келтиради ва аксинча.

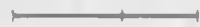
Масалан, $5 \text{ см} > 3 \text{ см}$, чунки $5 > 3$.

Биз натурал сон кесмалар узунликларини ўлчаш натижалари сифатида нимани билдиришини аниқладик. Натурал соннинг маъносини, сонлар орасидаги муносабатларни юз, масса, баҳо, вақт каби бошқа катталикларни ўлчаш билан боғлиқ равишда шунга ўхшаш талқин қилиш мумкин.

Машқлар

1. Битта тўғри чизиқда учта тенг MP , PZ ва ZQ кесма ясанг. MP кесма узунлик бирлиги бўлсин. Бу тўғри чизиқда ҳосил бўлган кесмалар узунликлари нимага тенг бўлади? Агар узунлик бирлиги қилиб MZ ; MQ кесма олинса, уларнинг узунликлари нимага тенг бўлади?

2. Икки кесмани бирор узунлик бирлигида ўлчаб, улардан бири иккинчисидан 2 марта узунлиги аниқланди. Шундан кейин узунлик бирлиги 10 марта камайтирилди. Бу кесмалар узунликларини таққослаш натижаси ўзгарадими?



111-расм

3. «Чизмада нечта кесма тасвирланган» (111-расм) деган масалани ечишда ўқувчи қандай тушунчадан ошқормас тарзда фойдаланган?

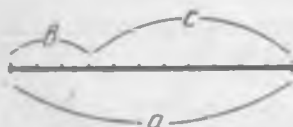
63. Катталикларнинг қийматлари бўлган сонларни қўшиш ва айиришнинг маъноси

Агар натурал сонлар кесмаларнинг узунликларини ўлчаш натижасида ҳосил бўлган бўлса, бу сонларни қўшиш ва айириш қандай маънога эга бўлишини аниқлаймиз.

1. Қўшиш. Масалан, 3 ва 8 сонлари b ва c кесмалар узунликларини e бирлик ёрдамида ўлчаш натижалари бўлсин, яъни $b = 3e$, $c = 8e$. Маълумки, $3 + 8 = 11$. Аммо 11 сони қайси кесма узунлигини ўлчаш натижаси бўлади? Равшанки, бу $a = b + c$ кесма узунлигининг қийматидир (112-расм).

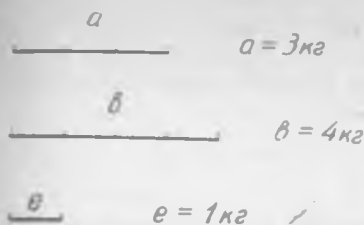
Мулоҳазани умумий кўринишда юритамиз.

a кесма b ва c кесмалар йиғиндиси ҳамда $b = me$, $c = ne$ бўлсин, бунда m ва n — натурал сонлар. У ҳолда b кесма m та бўлакка, c кесма n та шундай бўлакка бўлинади, бу бўлақларнинг ҳар бири бирлик кесма e га тенг. Шундай қилиб, бутун a кесма $m + n$ та шундай бўлакка бўлинади. Демак, $a = (m + n)e$.

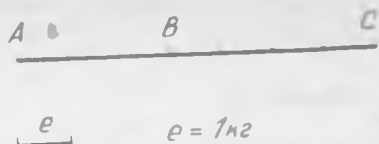


112-расм

Шундай қилиб, m ва n натурал сонлар йиғиндисини узунликлари m ва n натурал сонлар билан ифодаланадиган b ва c кесмалардан тузилган a кесма узунлигининг қиймати сифатида қараш мумкин экан.



113-расм



114-расм

2. Айириш. Агар a кесма b ва c кесмалардан иборат бўлиб, a ва b кесмаларнинг узунликлари m ва n натурал сонлар билан ифодаланса (бир хил узунлик бирлигида), c кесма узунлигининг қиймати a ва b кесмалар узунликлари қийматларининг айирмасига тенг: $c = (m - n)e$, яъни натурал сонларнинг $m - n$ айирмасини узунликлари мос равишда m ва n натурал сонлар билан ифодаланган a ва b кесмалар айирмаси бўлган c кесма узунлигининг қиймати сифатида қараш мумкин экан.

Агар $a = 9e$ кесма b ва c кесмалардан иборат бўлса, $c = (9 - 4)e = 5e$ бўлади, бунда $b = 4e$.

Шунинг эслатамизки, натурал сонларни қўшиш ва айиришга бундай ёндашиш на фақат кесмалар узунликларини ўлчаш билан, балки бошқа катталикларни ўлчаш билан ҳам боғлиқ.

Бошланғич синфлар учун математика дарсликларида турли катталиклар ва улар устида амаллар қараладиган масалалар кўп. Катталикларнинг қийматлари бўлган натурал сонларни қўшиш ва айиришнинг маъносини аниқлаш бундай масалаларни ечишда амалларни танлашни асослашга имкон беради.

Масалан, қуйидаги масалани қарайлик: Боғдан 3 кг олча ва 4 кг олма теришди. Ҳаммаси бўлиб неча килограмм мева теришган?

Масала қўшиш амали билан ечилади. Нима учун?

Терилган олчалар массасини a кесма кўринишида, терилган олмалар массасини b кесма кўринишида тасвирлаймиз (113-расм). У ҳолда терилган ҳамма мевалар массасини a га тенг AB кесмадан ва b га тенг BC кесмадан тузилган AC кесма ёрдамида тасвирлаш мумкин. AC кесма узунлигининг сон қиймати AB ва BC кесмалар сон қийматларининг йиғиндисига тенг бўлгани учун терилган мевалар массасини қўшиш амали билан топамиз: $3 + 4 = 7$ (кг).

Ушбу масалани ечишда ҳам амал танлаш худди шунга ўхшаш асосланилади: «Болалар кўйлагига 2 м, катталар кўйлагига ундан 1 м ортиқ газлама кетади. Катталар кўйлагига неча метр газлама кетади?»

Болалар кўйлагига кетган газламани a кесма кўринишида тасвирлаймиз, унда катталар кўйлагига кетган газламани b га тенг AB кесма ва 1 м ни тасвирловчи BC кесма ёрдамида тасвирлаймиз (114-

расм). АС кесма узунлигининг қиймати қўшилувчи кесмалар узунликлари қийматларининг йиғиндисига тенг бўлгани учун катталар қўйлагига кетган газлама миқдорини қўшиш амали билан топамиз: $2 + 1 = 3$ (м).

Машқлар

1. Учбурчак ясанг. Унинг периметри қандай топилади? Бунинча хил усул билан топиш мумкин?

2. Тўғри тўртбурчакка диагональ ўтказилган. Тўғри тўртбурчакнинг периметри ва диагоналини ўтказиш натижасида ҳосил бўлган учбурчаклардан бирининг периметри маълум. Диагональ узунлигини топа оласизми?

3. Учбурчак исталган икки томонининг йиғиндиси 10 см га тенг. Унинг периметрини ҳисобланг.

4. Тўртбурчакка диагональ ўтказилган. Диагоналнинг узунлиги ва ҳосил бўлган иккита учбурчакнинг периметрлари маълум. Берилган тўртбурчакнинг периметрини топа оласизми?

5. Қуйида келтирилган масалалар нима учун қўшиш билан ечилишини тушунтиринг:

1) Тешкулча 6 тийин, бир стакан сут 4 тийин туради. Битта тешкулча ва 1 стакан сут бирга қанча туради?

2) Бир бўлак лентадан аввал 8 м, кейин яна 2 м қирқиб олинди. Неча метр лента қирқиб олинган?

3) Синглиси 7 ёшда, акаси синглисидан 2 ёш катта. Акаси неча ёшда?

6. Қуйидаги масалалар нима учун айриш амали билан ечилишини тушунтиринг:

1) Битта тешкулча ва бир стакан сут учун 10 тийин тўланди. Тешкулча 6 тийин туради. Сут қанча туради?

2) Ҳознинг массаси 7 кг, қуён ундан 3 кг енгил. Қуённинг массасини топ.

3) Столнинг баландлиги 7 дм, стулнинг баландлиги 4 дм. Стол стулдан неча дециметр баланд?

4) Сирожиддин 7 ёшда, у синглисидан 3 ёш катта. Синглиси неча ёшда?

7. Қуйидаги масалаларни турли усуллар билан ечинг, уни асосланг:

1) Бир идишда 4 л сут, иккинчисида 3 л сут бор. Тушликда 2 л сут ичилди. Неча литр сут қолди?

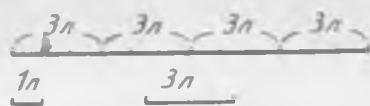
2) 18 м узунликдаги сим ўрамидан аввал 7 м, кейин 5 м сим қирқиб олинди. Ўрамда неча метр сим қолди?

64. Катталикларнинг қийматлари бўлган сонларни кўпайтириш ва бўлишнинг маъноси

II синф ўқувчилари учун масала қарайлик: «Ошхонада ҳар бирида 3 л шарбат бўлган 4 та банка бор. Бу банкларда ҳаммаси бўлиб қанча шарбат бор?»



115- расм



116- расм

Нима учун бу масала кўпайтириш амали билан ечилади: $3 \cdot 4 = 12$ (л)?

Масалага берилган расм масалани ечишга ёрдам беради: 4 та банкада ҳаммаси бўлиб қанча шарбат борлигини билиш учун $3л + 3л + 3л + 3л$ йиғиндини топиш етарли. 3 л ёзув 3·1 кўпайтма бўлгани учун топилган ифодани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин: $(3 + 3 + 3 + 3) \cdot 1$. Тўртта бир хил қўшилувчининг йиғиндисини 3·4 кўпайтма билан алмаштириб, $(3 + 3 + 3 + 3) \cdot 1 л = (3 \cdot 4) \cdot 1 л = 12 \times 1 л = 12 л$ ни ҳосил қиламиз.

Мазкур масалани ечишнинг бошқа усули ҳам бор. Аввало шуни айтишимиз керакки, бу масалада шарбат эгаллаган ҳажмнинг икки бирлиги — банка ва литр ҳақида гапирилмоқда. Аввал шарбат банкалар билан ўлчанган, кейин уни янги бирлик — литр билан ўлчаш керак, бунда шу нарса маълумки, эски бирликда (банкада) учта янги бирлик (3 литр) бор. Демак, $4 \cdot 1 б. = 4 \cdot (3 л) = 4 \cdot (3 \cdot 1 л) = (4 \cdot 3) \cdot 1 л = 12 л$. Буларнинг ҳаммаси 115-расмда тасвирланган.

Шундай қилиб, натурал сонларни кўпайтириш катталикнинг янги, янада майдороқ бирлигини тасвирлайди.

Бу тасдиқни сонларга — кесмалар узунликларининг қийматларига қўллаб, умумий кўринишда исботлаймиз, яъни a кесма e га тенг m та кесмадан, e кесманинг ўзи e_1 га тенг n та кесмадан иборат бўлса, a кесма узунлигининг сон қиймати узунликнинг e_1 бирлигида $m \cdot n$ га тенг бўлади.

Ҳақиқатан, a кесманинг e_1 кесмага тенг бўлаклари сони $\underbrace{n + n + \dots + n}_{m \text{ та қўшилувчи}}$

билан ифодаланади, шунинг учун у $n \cdot m$ га тенг.

Демак, $a = (m \cdot n) e_1$.

Шундай қилиб, натурал сонларни кўпайтириш узунликнинг янги бирлигига ўтишни ифодалайди: агар m натурал сон a кесма узунлигининг e узунлик бирлигидаги қиймати, n натурал сон e кесма узунлигининг e_1 узунлик бирлигидаги қиймати бўлса, $m \cdot n$ кўпайтма a кесма узунлигининг e_1 узунлик бирлигидаги қийматидир.

Энди катталнкларнинг қийматлари бўлган натурал сонларни бўлиш қандай маънога эга эканлигини аниқлаймиз.

Масала қараймиз: «Бир банканинг сифми 3 л. 12 л мева шарбатини қуйиш учун нечта банка керак бўлади?»

Масалани ечиш учун 12 л ни кесма билан тасвирлаймиз ва унда 3 л ни тасвирловчи кесма неча марта жойлашишини аниқлаймиз (116-расм). Топамиз: $12 л : 3 л = 4$ (б).

Бу масаланинг ечилишини бошқача асослаш мумкин. Масалада шарбат эгаллаган ҳажмнинг икки бирлиги — литр ва банка қарал-

$$\frac{e}{a} = \frac{e_1}{12e}; \quad a = (12:2)e, = 6e,$$

117-расм

моқда. Масалада ўлчаш натижасини банклар билан, яъни янги бирликда (шарбат ҳажми литр билан ўлчанганда) ифодалаш талаб қилинмоқда, шу билан бирга янги бирликда (банкада) 3 та эски бирлик (3л) бор, шунинг учун $1 \text{ л} = 1 \text{ б.} : 3$.

$$12 \text{ л} = 12 \cdot (16. : 3) = (12 : 3) \cdot 1 \text{ б.} = 4 \cdot 1 \text{ б.} = 4 \text{ б.}$$

Кўриб турибмизки, натурал сонларни бўлиш катталигининг янги бирлигига ўтиш билан боғлиқ экан. Буни умумий ҳолда кўрсатамиз.

a кесма e га тенг m та кесмадан, e_1 кесма e га тенг n та кесмадан иборат бўлсин. e_1 узунлик бирлигида a кесма узунлигини ифодалайдиган сонни қандай топишни аниқлаймиз.

$$e_1 = ne \text{ бўлгани учун } e = e_1 : n. \text{ У ҳолда } a = me = m \cdot (e_1 : n) = (m : n) e_1.$$

Шундай қилиб, кесмалар узунликларининг қиймати бўлган натурал сонларни бўлиш узунлигининг янги (янада йирикроқ) бирлигига ўтишни тасвирлайди: агар m натурал сон a кесма узунлигининг e узунлик бирлигидаги қиймати, n натурал сон e кесма узунлигининг e_1 узунлик бирлигидаги қиймати бўлса, $m : n$ бўлинма a кесма узунлигининг e_1 узунлик бирлигидаги қийматидир.

Масалан, агар $a = 12e$ ва $e_1 = 2e$ бўлса, a кесма узунлигининг e_1 узунлик бирлигидаги қиймати $6e_1$ га тенг бўлади:

$$a = 12e = 12 \cdot (e_1 : 2) = (12 : 2) e_1 = 6 e_1.$$

Бундай вазият 117-расмда тасвирланган.

Бошланғич синфлар учун математика дарсларида турли катталиклар қараладиган кўпайтириш ҳамда бўлиш билан ечиладиган содда масалалар кўп. Буларнинг ҳаммаси одатда кўргазмалилик асосида бажарилади. Бунда кўпайтириш бир хил қўшилувчиларни қўшиш амали сифатида талқин қилинади, бўлиш эса кўпайтиришга тескари амал сифатида қаралади.

Машқлар

1. Қуйидагилар бажарилганда кесма узунлигининг қиймати қандай ўзгаради:

- 1) узунлик бирлиги 4 марта камайтирилса;
- 2) узунлик бирлиги 5 марта орттирилса?

2. Қуйида келтирилган масалалар нима учун кўпайтириш билан ечилишини тушунтиринг:

- 1) Буфетга ҳар бирида 9 кг апельсин бўлган 3 яшнқ апельсин келтирилди. Неча килограмм апельсин келтирилган?
- 2) Бир метри 4 сўм бўлган 3 м газлама қанча туради?
- 3) Ўғли 8 ёшда. Отаси ўғлидан 4 марта катта. Отаси неча ёшда?

4) Синглиси 8 ёшда, у акасидан 2 марта кичик. Акаси неча ёшда?

9. Қуйида келтирилган масалаларнинг ҳар бири нима учун бўлиш билан ечилишини тушунтиринг:

1) 10 тийинга иккита бир хил конверт сотиб олинди. Битта конверт қанча туради?

2) Шойи кўйлак 27 сўм туради, туфли эса 3 марта арзон. Туфли қанча туради?

3) Болалар пальтосига 2 м мовут кетади. 12 м мовутдан шундай пальтоллардан неча тикиш мумкин?

4) Ошхонада 80 кг картошка ва 8 кг сабзи ишлатилди. Картошка сабзига қараганда неча марта кўп ишлатилди?

5) Стол 24 сўм туради, у табуреткадан 6 марта қиммат. Табуретка қанча туради?

4. Масалаларни турли усуллар билан ечинг ва танлаган усулингизни асосланг:

1) Меҳнат дарси учун ҳар бири 10 тийиндан 4 та оқ ип ва шу нархда 6 та қора ип сотиб олинди. Бу иплар учун қанча пул туланган?

2) Бир бичувчида 15 м, иккинчисида 12 м газлама бор эди. Улар битта кўйлакка 3 м газлама сарфлаб ҳамма газламадан кўйлаklar бичдилар. Улар ҳаммаси бўлиб неча кўйлак бичганлар?

3) Бир сизгирдан бир суткада ўртача 14 кг сут соғиб олинади. 10 та шундай сизгирдан 7 суткада неча килограмм сут соғиб олиш мумкин?

10-§. БУТУН НОМАНФИЙ СОНЛАРНИНГ ЁЗУВИ ВА УЛАР УСТИДА АМАЛЛАР АЛГОРИТМИ

65. Сонларнинг ўнли саноқ системасидаги ёзуви

Ҳозирги кунда ҳар бир қадамда сонлар билан мулоқатда бўлишга тўғри келади. Шунинг учун биз ҳар қандай сонни тўғри айтишимиз ва ёзишимиз, шунингдек, сонлар устида амаллар бажаришимиз керак. Одатдагидек, биз буни муваффақиятли бажармоқдамиз. Бизга ҳозирги кунда ҳамма ерда ишлатиладиган ва ўнли саноқ системаси номи билан юритиладиган сонларни ёзиш усули ёрдам бермоқда.

Умуман, саноқ системаси деб сонларни айтиш ва ёзиш ҳамда улар устида амаллар бажаришда ишлатиладиган тилга айтилади.

Маълумки, ўнли саноқ системасида сонларни ёзиш учун 10 та белги (рақам)дан фойдаланилади: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Улардан чекли кетма-кетликлар ҳосил қилиниб, бу кетма-кетликлар сонларнинг қисқача ёзувидир. Масалан, 5457 кетма-кетлик 5 минг + 4 юз + 5 ўн + 7 бир сонининг қисқача ёзувидир. Бу йигиндини бундай кўринишда ёзиш қабул қилинган: $5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 7$.

Таъриф. x натурал соннинг ўнли ёзуви деб бу сонни $x =$

$= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$ кўринишда ёзишга ай-
тилади, бу ерда $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ коэффициентлар 0, 1, 2, 3,
4, 5, 6, 7, 8, 9 қийматларни қабул қилади ва $a_n \neq 0$.

$a_k \cdot 10^k + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$ йигиндини қисқача
 $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ каби ёзиш қабул қилинган.

1, 10, 10^2 , 10^3 , ..., 10^n кўринишдаги сонлар мос равишда,
биринчи, иккинчи, ..., $n+1$ -хона бирликлари дейилади, шу
билан бирга битта хонанинг 10 та бирлиги кейинги юқори хонанинг
битта бирлигини ташкил қилади, яъни қўшни хоналар нисбати 10
га — саноқ системасининг асосига тенг.

Сонлар ёзувидаги дастлабки учта хона битта группага бир-
лаштирилади ва биринчи синф ёки **бирлар синфи** дейилади.
Биринчи синфга бирлар, ўнлар, юзлар киради.

Сонлар ёзувидаги тўртинчи, бешинчи ва олтинчи хоналар
иккинчи синф — **минглар синфини** ташкил қилади. Унга бир
минглар, ўн минглар ва юз минглар киради.

Кейинги учинчи хона — **миллионлар синфи** бўлади, бу синф
ҳам учта хонадан иборат: еттинчи, саккизинчи ва тўққизинчи
хоналардан, яъни бир миллионлар, ўн миллионлар ва юз мил-
лионлардан иборат.

Навбатдаги учта хона ҳам янги синфни ҳосил қилади ва χ к.
Бирлар, минглар, миллионлар ва ҳоказо синфларнинг ажрати-
лиши сонларни ёзишга ва ўқишга қулайликлар яратади.

Ўнли саноқ системасида ҳамма сонларни $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} +$
 $+ \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$ (бунда $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ коэффициентлар
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 қийматларни қабул қилади ва $a_n \neq 0$)
кўринишдагина ёзмасдан уларнинг ҳаммасига ном, исм бериш мум-
кин. Бу қуйидагича амалга оширилади: биринчи ўнта соннинг номи
бор. Сўнгра бу сонлардан ўнли ёзув таърифига мос равишда ва оз-
гина сўз қўшиш натижасида кейинги сонларнинг номи келиб чиқа-
ди. Масалан, иккинчи ўнликлардаги сонлар (улар $1 \cdot 10 + a_0$ кўри-
нишда ёзилади) ўн билан биринчи ўнликдаги сонлар номининг қў-
шилишидан тузилади:

ўн бир, ўн икки ва χ к.

Йигирма сўзи иккита ўнни билдиради.

Учинчи ўнликдаги сонлар номи (улар $2 \cdot 10 + a_0$ кўринишдаги
сонлар) йигирма сўзига биринчи ўнликдаги сонлар номини қў-
шиш натижасида ҳосил бўлади: йигирма бир, йигирма икки
ва χ к.

Ҳисобни шундай давом эттириб, тўртинчи, бешинчи, олтин-
чи, еттинчи, саккизинчи, тўққизинчи ва ўнинчи ўнликларни ҳо-
сил қиламиз.

Навбатдаги ўнликлар мос равишда қуйидагича аталади: ўт-
тиз, қирқ, эллик, олтмиш, етмиш, саксон, тўқсон.

Юз сўзи ўнта ўнни билдиради.

Юздан катта сонлар номи (яъни $1 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$ кўринишдаги
сонлар) юз ва биринчи ҳамда кейинги ўнликлардаги сонлар номидан
тузилади ва биринчи юзликни англатиш учун улар олдида бир сўзи

ёзилади: бир юз бир, бир юз икки, . . . , бир юз йигирма ва ҳ. к. Бу юзликни кейинги юзликкача тўлдириб, иккита юзликка эга бўламиз, у икки юз дейилади. Икки юздан катта сонларни ҳосил қилиш учун икки юз сонига биринчи ва кейинги ўнликдаги сонлар қўшиб айтилади. Ҳар бир юзликдан кейин янги юзлик ҳосил бўлади: уч юз, тўрт юз, беш юз ва ҳоказо, ўнта юз махсус ном билан «минг» деб юритилади.

Мингдан кейинги сонлар мингга биттадан қўшиб бориш натижасида ҳосил бўлади, бу ерда ҳам биринчи минглик олдига бир сўзи қўйилади (бир минг бир, бир минг икки ва ҳ. к.). Натижада икки минг, уч минг ва ҳоказо сонлар ҳосил бўлади. Мингта минг сони махсус ном билан «миллион» деб аталади. Яна санашни давом эттириб, мингта миллионни ҳосил қиламиз. Мингта миллион сони махсус ном билан «миллиард» деб аталади. Ҳисоблашларда миллион 10^6 , миллиард 10^9 , биллион 10^{12} кўринишда ёзилади. Шунга ўхшаш ундан ҳам катта сонларни ёзиш мумкин.

Шундай қилиб, миллиард ичидаги ҳамма натурал сонларни айтиш учун ҳаммаси бўлиб 22 та турли сўз ишлатилади: бир, икки, уч, тўрт, беш, олти, етти, саккиз, тўққиз, ўн, йигирма, ўттиз, қирқ, эллик, олтмиш, етмиш, саксон, тўқсон, юз, минг, миллион, миллиард.

Натурал соннинг ўнли ёзуви сонларни таққослашнинг яна бир усулини беради.

Агар ўнли санок системасида ёзилган, яъни

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

$$y = b_m \cdot 10^m + b_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + b_1 \cdot 10 + b_0$$

бўлган x ва y сонлар натурал сонлар бўлиб, қуйидаги шартлардан бири бажарилса, x сони y дан кичик бўлади:

1) $n < m$ (x сондаги хоналар сони y сондаги хоналар сонидан кичик):

2) $n = m$, аммо $a_n < b_m$;

3) $n = m$, $a_n = b_m$, . . . , $a_k = b_k$, аммо $a_{k-1} < b_{k-1}$.

Бу тасдиқни исботсиз қабул қиламиз. Улардан фойдаланиб, сонларни осон таққослаш мумкин. Масалан, а) $3456 < 12349$, чунки 3456 соннинг ёзувидаги рақамлар 12349 соннинг ёзувидаги рақамлардан кам; б) $3456 < 4579$, бунда рақамлар сони бир хил, аммо 3456 сондаги минглар хонасидаги рақам 4579 сондаги минглар хонасидаги рақамдан кичик; в) $3456 < 3476$, бунда рақамлар сони бир хил, минглар ва юзлар хонасидаги рақамлар бир хил, аммо 3456 сондаги ўнлар хонасидаги рақам 3476 сондаги ўнлар хонасидаги рақамдан кичик.

Сонларнинг айтилиши ва ёзилиши ҳақидаги масалалар бошланғич синфларда «Номерлаш» номли темаларда қаралади. Номерлаш ҳақида гапирилганда у ерда фақат сонларнинг айтилиш ва ёзилиш усулларига эътибор берилади. Шунинг учун

«номерлаш» ва «саноқ системаси» терминлари айнан бир хил эмас — саноқ системасини ўрганиш кўп хонали сонлар устида амаллар қарашни ҳам ўз ичига олади.

Бошланғич математика курсида (ўрта синфлар математика курсида ҳам) натурал сонни хона қўшилувчиларнинг йиғиндисини кўрнинишида ёзиш унинг ўнли ёзуви деб ҳисобланади. Масалан, $5000 + 400 + 50 + 7$ йиғинди 5457 соннинг ўнли ёзувидир. Сонни бундай йиғинди кўрнинишида ёзиш уни ўқиш учун қулай: беш минг тўрт юз эллик етти.

Машқлар

1. Қандай йиғинди соннинг ўнли ёзуви бўлади:

1) 7452; 2) 772; 3) 20 308; 4) 245 300?

2. Қандай сонлар қуйидаги йиғиндилар билан берилган:

1) $2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 9$; 3) $3 \cdot 10^4 + 10^3 + 4 \cdot 10 + 6$;

2) $7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10$; 4) $10^4 + 10^2$?

3. Масалаларни ечинг:

1) Қайси сонда 3 та юз минг, 2 та ўн минг ва 5 та минг бор? 6 та ўн минг ва 8 та минг бор? 5 та юз минг ва 9 та минг бор? 8 та минг, 7 та юз ва 5 та ўн бор? 4 та юз ва 6 та бир бор?

2) Минглар синфининг 356 бирлиги; биринчи синфнинг 300 бирлиги; иккинчи синфнинг 25 бирлиги ва биринчи синфнинг 180 бирлиги; иккинчи синфнинг бир бирлиги ва биринчи синфнинг 6 бирлиги; иккинчи синфнинг 50 бирлиги ва биринчи синфнинг 50 бирлигидан иборат сонни айт ва ёз.

3) Қуйидаги сонларни рақамлар билан ёз ва бу сонларда қайси синф ва қайси хонанинг бирликлари йўқлигини айт: уч юз йиғирма беш миллион; беш юз миллион икки юз беш минг; эллик миллион бир юз олтимиш тўққиз; ўттиз миллион қирқ.

4) 6952, 5200, 7805, 9036 сонларни хона қўшилувчилари йиғиндисини кўрнинишида ёз.

5) Сонларни таққосла:

325 174 ва 32 500 184; 3 001 257 ва 3 100 257

418 000 035 ва 418 035; 8 060 060 ва 8 006 006.

6) Ўнликлар сони бирликлар сонидан 3 марта кам бўлган ҳамма икки хонали сонларни ёз.

4. 3 га каррали бўлган энг кичик уч хонали сонни шундай ёзингки, унинг биринчи рақами 8 ва ҳамма рақамлари турли бўлсин. Шу шартларни қаноатлантирувчи энг катта уч хонали сон мавжудми?

5. Шундай беш хонали сонни топингки, унинг ҳар бир кейинги рақами олдинги рақамидан битта ортиқ, рақамлари йиғиндисини эса 30 га тенг бўлсин.

6. 9 га бўлинадиган сон ҳосил бўлиши учун 10 нинг ўнг ва чап томонларига қандай рақамни ёзиш керак?

7. Икки хонали сон рақамларининг йиғиндиси 9 га тенг, шу билан бирга унинг ўнлар рақами бирлар рақамдан 2 марта катта. Шу сонни топинг.

8. Икки соннинг йиғиндиси 715 га тенг. Улардан бири ноль билан тугайди. Агар ноль ўчириб ташланса, иккинчи сон ҳосил бўлади. Шу сонларни топинг.

9. Икки натурал соннинг йиғиндиси 352 га тенг. Агар улардан кичигининг ўнг томонига ноль ёзилса, катта сон ҳосил бўлади. Шу сонларни топинг.

66. Бутун номанфий сонларни ёзиш усулларининг пайдо бўлиши ва ривожланиши

Кишилар қачондан бери сонлар ёзувининг ўнли системасидан фойдаланиб келмоқдалар? Тарихчиларнинг фикрича ўнли система ҳозирги эрanning тахминан VI асрида Ҳиндистонда вужудга келган. Ҳиндлардан арабларга ўтган, Европага эса X—XIII асрларда тарқаган.

Ўнли саноқ системаси вужудга келмасдан олдин кишилар сонларни қандай ёзганлар?

Сон тушунчаси жуда қадим замонларда вужудга келган. Ўша вақтнинг ўзидаёқ сонларни ёзишга зарурият туғилади. Ёзув пайдо бўлмасдан олдин кишилар сонларни айта билганлар, ҳисоб-китоб юритганлар. Бунда уларга турли қуроллар ва энг аввало қўл ҳамда оёқдаги бармоқлар ёрдам берган. Шунингдек, кертикли ёғоч таёқчалар, тугунли ип ва арқонлар каби ҳисоб-китоб асбобларидан фойдаланилган. Кертик ва тугунлар ёрдамида сонларни «ёзиш» унча қулай бўлмаган албатта, чунки катта сонларни ёзиш учун анчагина кертик ва тугунлар ясашга тўғри келган, бу эса ёзувнигина қийинлаштирмасдан, балки сонларни таққослашга, сонлар устида амаллар бажаришга ҳам қийинчиликлар туғдирган. Шунинг учун сонларни ёзишнинг бошқача, тежамлироқ усули вужудга келган: ҳисобни бир хил сондаги элементлардан иборат бўлган группалар билан олиб борилган. Бунга қўл ва оёқ бармоқлари ёрдамида ҳисоб-китобнинг ривожланиши имкон яратди. Кишининг бармоқ билан ҳисобга ўтиши турли саноқ системасини вужудга келтирди: бешли система, ўнли, йигирмали система ва бошқалар.

Умуман, саноқ системасининг энг қадимги системаси иккили системадир. Бу система киши ҳисобни бармоқлари билан эмас, қўллари ёрдамида, яъни қуйи хонанинг бирлиги битта қўл, юқори хонанинг бирлиги икки қўл бўлганда вужудга келган. Бу система излари ҳозиргача сақланиб келган — у жуфтлаб ҳисоблашда ўз аксини топган.

Иқтисодий эҳтиёжнинг ўсиб бориши натижасида инсоният аста-секин ҳисоблаш усулларини вужудга келтира бошлади. Бу жараён тартибсиз ва узоқ давом этди. У қадим замонларда, кишиларда биринчи математик тушунчалар, жумладан на-

турал сонлар тушунчаси ва ҳисоб шакллани бошлаганда вужудга кела бошлади.

Уларнинг кейинги ривожидан бундан тахминан беш минг йил аввал қадимги давлатлар — Вавилон, Миср, Хитой ва бошқаларнинг шаклланиш даврига тўғри келади. Бу даврда сонлар ёзувининг янги усуллари яратилди.

Қадимги Вавилонда олтмиштадан группалаб ҳисоблаганлар, яъни у ерда олтмишли саноқ системасидан фойдаланилган. Масалан, вавилонлик математик 137 сонини бундай тасвирлаган: $137 = 2 \cdot 60 + 17$. Албатта бу сон белгилар — учбурчаклар ва поналар билан ёзилган. Гап шундаки, қадимги вавилонликлар ёзиш учун лойли табличкалардан учбурчакли поналар босиб чиқарганлар. Кейин бу табличкаларни қуритганлар ва оловга тутиб куйдирганлар.

Сонларни ёзиш учун поналарнинг ҳолатларидан фойдаланилган: вертикал ҳолат — учи билан пастга ва горизонтал ҳолат — учи билан чапга қаратилган. Бунда ▼ белги бир ва олтмишни, ◀ белги — ўнликни билдирган. Бошқа сонлар бу белгилар ва қўшиш амали билан тасвирланган. Масалан, 5 сони бундай тасвирланган: ▼▼▼▼▼

137 сони бундай: ▼▼▼▼▼◀▼▼▼▼. Охирги ёзув соннинг олтмишли системадаги ёзувидир: $60 + 60 + 10 + 7 = 2 \cdot 60 + 17$.

Бироқ қадимги Вавилонда пайдо бўлган сонлар ёзуви камчиликларга эга эди: унда катта сонларни белгилаш қийин эди: саноқ системасининг асосини — 60 сонини белгилаш учун махсус белги йўқ эди, бу эса баъзи ёзувларни турлича ўқишга олиб келар эди.

Нима учун вавилонликлар ўзларининг саноқ системасининг асоси қилиб 60 сонини олишган? Бу саволга жавоб бериш қийин. Фақат шуни айтишимиз мумкинки, қадимги вавилонликлар турли соҳаларда — математика ва астрономияда етарлича катта билим запасига эга эдилар. Олтмишли саноқ системасининг вужудга келишида айланани 360 та тенг бўлакка бўлиш, шу билан бирга йилни 360 кунга бўлиш асос қилиб олинган, деган тахмин мавжуд.

Бу саноқ системасининг қолдиқлари шу кунгача сақланиб келган: айланани 360° га бўлишга яна бурчакларни градус, минут ва секундлар билан ўлчашни киритиш мумкин.

Қадимги мисрликлар ўнталаб ҳисоблаганлар. Уларда махсус белгилар фақат хоналарни — бирлар, ўнлар, юзлар, минглар ва бошқаларни белгилаш учун ишлатилган. Бирдан тўққизгача бўлган сонлар таёқчалар ёрдамида ёзилган (118-расм).

1 — I, 10 — П, 100 — С, 1000 — К

118-расм

Масалан, 122 сонини мисрликлар бундай ёзишган: СПННН

1314 сонини эса бундай: КСССНННН

Ёзувлар асосан папирусларда бўёқлар билан бажарилган. Баъзан ёзиш учун тош, дарахт, тери, холст, сопол синиги (парчаси) дан фойдаланилган. Текст қатор қилиб ўнгдан чапга ёки ўстун қилиб юқоридан пастга қараб ёзилган.

Миср папирусларининг айримлари бизнинг кунгача етиб келган. Улардан бири — «Москва математик папируси» деб номлангани Москвада А. С. Пушкин номидаги тасвирий санъат Давлат музейида сақланади ва бизнинг эрамызгача 2000—1800 йиллар деб санаси кўрсатилган.

Шуниси қизиқки, мисрликлар кўпайтириш амалини иккилантириш усули билан бажарганлар. Масалан, 15 ни 17 га кўпайтириш учун қуйидаги амалларни бажариш керак бўлган:

$$15 \cdot (1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 15 \cdot 1 + 15 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 15 \cdot 1 + 30 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \\ = 15 + 60 \cdot 2 \cdot 2 = 15 + 120 \cdot 2 = 15 + 240 = 255.$$

Бўлиш амали кўпайтиришга тескари амал деб қаралган, яъни шундай сон танланганки уни бўлувчига кўпайтирганда бўлинувчи ҳосил бўлган.

Умуман қадимги мисрликлар ва вавилонликлар етарлича катта ҳажмдаги математик билимга эга эдилар, лекин буларнинг ҳаммаси асосан тажриба характерида эди. Аслини олганда умумлашмалар ва исботлар йўқ эди, яъни математика фани эндигина дунёга келмоқда эди.

Унинг кейинги ривожланишига қадимги Греция олимларидан Фалес (бизнинг эрамызгача 624—547 й.), Пифагор (бизнинг эрамызгача тахминан 580—500 й.), Демокрит (бизнинг эрамызгача тахминан 460—370 й.), Платон (бизнинг эрамызгача тахминан 427—347 й.), Евклид (бизнинг эрамызгача тахминан 300 й.), Архимед (бизнинг эрамызгача тахминан 287—212 й.), Эратосфен (бизнинг эрамызгача тахминан 276—194 й.) ва бошқалар катта ҳисса қўшдилар. Бу сон ҳақидаги таълимотнинг тарихи ва ривожланишидаги бутун бир даврдир¹.

Шунинг эслатиб ўтамизки, Қадимги Грецияда сонлар ёзувининг яна битта системаси — алфавит системаси пайдо бўлган. Унда сонлар грек алфавитининг ҳарфлари билан тасвирланган. Алфавитнинг дастлабки 9 та ҳарфи 1 дан 9 гача сонларни, кейинги 9 таси — ўнларни (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90) ва охириги 9 таси юзларни (100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900) тасвирлаган. Сонларни сўзлардан ажратиш учун сонлар устига [чизиқча тортилган. Масалан, 543] сони бу системада бундай ёзилган: $\phi\mu\gamma$ (ϕ —500, μ —40, γ —3). Мингдан катта сонларни ёзиш учун қўшимча белгилашлар киритилган.

¹Қуйидаги адабиётларга қаранг: Болгарский Б. В. Очерки по истории математики. — Минск. 1974; Берман Г. Н. Число и наука о нём. — М., 1960; Деппман И. Я. Мир чисел. — М., 1975.

Икки минг йилдан сал илгари Фарбий Европадаги барча мамлакатлар ва Осиёнинг кўпгина мамлакатлари қадимги римликларга бўйсунган. Босқинчилик урушлари шунга олиб келдики, Рим империясида математика ривожланмасдан, ундан фақат амалий мақсадлар учун фойдаланилган. Қадимги Римдан қолган унча кўп бўлмаган нарсалардан бири сонларни ёзишнинг яна битта усулидир. Рим санок системасида ҳам Қадимги Миср системасидagi каби белгили сонлар бор:

бир — I	эллик — L
беш — V	юз — C
ўн — X	беш юз — D
минг — M	

Қолган ҳамма сонлар шу белгили сонларга қўшиш ва улардан айириш орқали ҳосил қилинади. Кичик белгили сонга тегишли белги катта белгили сонга тегишли белгидан олдин турган бўлса, айириш бажарилади. Масалан, IV—тўрт ($5-1=4$), XC—тўқсон ($100-10=90$), XL—қирқ ($50-10=40$).

Бир неча сонни римча номерлаш билан ёзамиз.

165—бу юз (C) плус олтинчи, яъни эллик плус ўн (LX), плус беш (V). Демак, 165 сони бундай ёзилади: CLXV.

374—бу уч юз (CCC) плус етмиш, яъни эллик плус ўндан 2 марта (LXX), плус тўрт (IV). Демак, 374 сони бундай ёзилади: CCCLXXIV.

Тўрт, беш ва олти хонали сонлар m ҳарфи (лотинча mille—минг сўзидан олинган) ёрдамида ёзилади, унинг чап томонига минглар, ўнг томонига юзлар, ўнлар, бирлар ёзилади. Масалан, XXIX_mDCXXXV ёзув 29 635 соннинг, CXXXVII_mDCCXLV ёзув 137 745 соннинг ёзувидир.

V—XII асрларда шарқ мамлакатларидан Ҳиндистон ва Яқин Шарқда математика сезиларли даражада ривожланди.

Ҳиндистон ва Хитойда математика Мисрдагидек бундан 5 минг йил аввал пайдо бўлган. Тарихчи олимлар Ҳиндистон фани билан Греция фани бир-бирнга боғлиқ эканлигини таъкидлайдилар. Грецияда асосан геометрия ривожланган бўлса, Ҳиндистонда эса арифметика, алгебра, ва тригонометрия маълум натижаларга эришган. Айниқса, ҳинд олимларининг арифметикага қўшган ҳиссалари муҳимдир, улар ҳозирги кунда бутун инсоният қўллаётган сонларни ўқиш ва ёзиш усулини, яъни ўнли санок системасини кашф қилдилар. Бу янги эранинг VI асрига тўғри келади. Бу кашфиёт нимадан иборат? Ахир кишилар қадим замонлардан бери сонларни ёзадиларку?

Гап шундаки, ҳинд математиклари ўйлаб топган сонларни бундай ёзишда ҳар бир рақамнинг ёзувидаги қиймати унинг ўрнига, позициясига боғлиқ. Масалан, 703 сонидаги 7 рақами 7 юзликни, 72 сонидаги ўша 7 рақами 7 ўнликни, 7230 сонидаги 7 рақами эса 7 мингликни билдиради. Бундан ўнта рақам ёрдамида ҳар қандай сонни ёзиш мумкин экан деган хулоса чиқади. Шунинг учун ўнли санок системаси **позицион система**

дейилади. Ундан ташқари, Ҳиндистонда биринчи марта хона бирлиги йўқлигини билдириш учун нолдан фойдаланилди, бу эса сонлар ёзувини такомиллаштириш ва ҳисоблашларни осонлаштиришда катта роль ўйнайди.

Тўғри, нолнинг бизга одат бўлган ёзуви бирданига пайдо бўлмади. Аввал, агар сонда бирорта хона бўлмаса, ҳиндлар шу хона рақамини айтиш ўрнига «бўш» сўзини айтирдилар, ёзишда эса бўш ўринга нуқта қўярдилар. Кейинчалик нуқталар ўринга донрача чизадиган бўлдилар, бу донрача «бўш»ни англатувчи «сунья» сўзидан олинган.

«Сунья» сўзининг арабчага таржимаси «сифр» сўзига айланади, бу эса бизнинг тилда рақам (русча цифра)ни англатади.

Сонлар ёзувидаги ўнта 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 белгининг ҳаммаси рақамлар дейилади. Бироқ бундан 200 йил аввал битта белги — 0 гина рақам дейилар эди.

Соннинг ўнли саноқ системасида ёзилишидаги рақамларини ҳам қадимги Ҳиндистон математиклари ўйлаб топган. Тўғри, уларнинг дастлабки ёзилиши ҳозирги ёзилишидан анча фарқ қилади. Рақамларнинг ҳозирги формаси китоб босиб чиқариш кашф қилингандан кейин — XV асрда қарор топди.

Нима учун Ҳиндистонда кашф қилинган рақамлар кўпинча араб рақамлари дейилади? Гап шундаки, VII асрда Арабистон ярим оролида вужудга келган араблар ҳокимияти (давлати) ривожланишнинг юқори табақасида турган анчагина давлатларни икки юз йилга яқин ўзига бўйсундирган эди. Араб халифалигига, масалан, Шимолий Ҳиндистон, Миср, Урта Осиё, Месопотамия, Персия, Закавказье, Шимолий Африка ва бошқа давлатлар кирар эди. Бу катта мамлакатнинг пойтахти (маркази) Бағдод шаҳри эди, бу шаҳар араб маданиятининг маркази бўлиб қолди. Араблар фаннинг муҳимлигини тушунар эдилар ва ўзлари босиб олган мамлакатларнинг, жумладан Греция, Ҳиндистон, Урта Осиё олимларининг асарларини (ишларини) ўз тилларига таржима қилар, ўрганар ва тўплар эдилар.

Бироқ араб математиклари қадимги буюк олимларнинг асарларини сақлабгина қолмасдан, математикани ривожлантиришга катта ҳисса ҳам қўшдилар.

IX асрнинг буюк олимларидан бири ўзбек (хоразм) математиги Муҳаммад ибн Мусо ал-Хоразмийдир. Унинг «Китоб ал-жабр» номли китоби фанга алгебра номини берди. Бу китобда арифметик масала ва тенгламаларнинг ечилиш қондалари баён қилинган.

Ал-Хоразмий ўзининг бошқа китобида Ҳиндистонда кашф қилинган ҳинд арифметикасини, яъни ўнли саноқ системасини ёритди. Уч юз йил кейин, яъни XII асрда у латин тилига таржима қилинди ва бу китоб бутун Европа халқи учун арифметикадан биринчи дарслик бўлиб қолди.

Натижада Европа мамлакатларида Араб давлатида яшаган муаллиф ёзган китоб бўйича ўнли санок системаси ўрганилгани учун ўнли системадаги ҳинд рақамлари араб рақамлари дейила бошланди. Бу эса нотўғридир.

XII асрдан бошлаб Ғарбий Европада узоқ давом этган турғунликдан сўнг математикага қизқиш уйғонди, бунга савдо-сотиқнинг кенгайиши сабаб бўлди.

Европада ўнли санок системасининг тарқалишига Леонардо Фибоначчининг 1202 йилда нашр қилинган «Книга абака» китоби ёрдам берди. XIII асрдан бошлаб ўнли система жорий қилинди ва у XVI асрга келиб Ғарбий Европа мамлакатларида тўла фойдалана бошланди.

Машқлар

1. Ўнли санок системасида ёзинг: XXVII, XXI, XLIV, LXII, LXXVIII, XCV, CDXXIII, MCDVII, MCDXIX, MDCCCLXXI.

2. Рим санок системасида ёзинг: 24, 49, 117, 204, 468, 1243, 1905, 1941, 1986, 2000.

67. Қадимги Русда сонларнинг ёзилиши ҳақида

Рус халқининг авлоди славянлардир. Славянларда ҳам, бошқа халқлар қатори, дастлабки математик тасаввурлар амалий фаолиятда вужудга келди. Ҳисобни ва ўлчашни билмасдан савдо-сотиқни юритиш мумкин эмасди. Славянлар греклар, араблар ва бошқа халқлар билан савдо-сотиқ қилганлар. Қадимги Рус давлати энг гуллаган ва равнақ топган X асрда славянларда ёзув пайдо бўлди.

Славян алфавитининг асоси ўрта аср греклари — византийларга тақлид қилинади. Шунинг учун славянча номерлар ўзининг ғояси бўйича грекча номерлаш билан бир хил, яъни сонлар устига махсус белги — титло қўйилган ҳарфлар билан белгиланади (119-р. ғ. м.).

Славянча номерлаш позицион эмас, чунки соннинг ёзилишидаги ҳарфларнинг қиймати унинг тутган ўрнига қараб ўзгармаган. Бу номерлашдан фойдаланиб, катта сонларни ҳам ёзиш мумкин бўлган.

Ундан ташқари, сонлар ёзилишининг бу системаси худди ҳозиргидек, арифметик амалларни устун қилиб бажаришга имкон берган.

Муғул bosқинчиларининг 300 йил давом этган зулми рус маданияти ва фаннга даҳшатли зарба бўлди. Бу даврда Ғарбий Европа фани олдинга қараб катта қадам қўйган эди, улар араб ва ҳинд математикасининг ўнли санок системаси ва бошқа ютуқларини эгаллаган эдилар. Рус фани жаҳонда яна муносиб ўринни олиши учун бир неча юз йиллар керак бўлди.

А̃	В̃	Г̃	Д̃	Е̃	З̃	З̃	И̃	Ѧ̃
аз	веди	глаголь	добро	есть	зело	земля	иже	фита
1	2	3	4	5	6	7	8	9
І̃	К̃	Л̃	М̃	Н̃	Ѧ̃	О̃	П̃	Ч̃
и	како	люди	мыслете	наш	кси	он	покой	червь
10	20	30	40	50	60	70	80	90
Р̃	С̃	Т̃	У̃	Ѧ̃	Х̃	Ѧ̃	Ѧ̃	Ц̃
рцы	слово	твердо	ук	фест	хер	пси	о	цы
100	200	300	400	500	600	700	800	900

119- расм

XVI аср охирида, Иван Грозний подшолиги даврида, Русда биринчи босма математик китоблар пайдо бўлди, бу китоблардан мақсад турли амалий масалаларни ечишда ҳисоблашни осонлаштиришдан иборат эди. Уларда сонлар славянча саноқ системасида ёзилган эди.

Рус фанининг ривожланишида Леонтий Филиппович Магницкий томонидан ёзилган «Арифметика сиречь наука числительная» китоби муҳим роль ўйнади. Бу китоб Петр I даврида 1703 йилда славян тилида нашр қилинди, аммо ундаги ҳамма ҳисоблашлар ўнли саноқ системасида бажарилган эди. Бу китоб узоқ вақт барча илм кишилари учун энг зарур китоб бўлиб қолди, чунки бу китобда на фақат математикага оид материаллар, балки астрономия, навигация ва бошқа фанларнинг баъзи бир бўлимларни ҳақнда маълумотлар бор эди.

Леонтий Филиппович Магницкий (1669—1739) биринчи рус педагог-математиги эди. У илгариги Твер губернасида қарашли крепостной ҳуқуқ билан боғланмаган катта бир қишлоқдаги Осташков патриархидан эди. Тарихчилар у деҳқон оиласидан бўлиб, отасининг фамилияси Телятин бўлган дейишади. Магницкий деган фамилия эса у билимни ўзига магнит сингари тортгани учун унинг билимини юксак қадрлаган Петр I қарорига кўра берилган.

М. Ф. Магницкий китоби Россияда ўнли саноқ системасининг тарқалишига ёрдам берди, унинг илмий ғояларининг ривожига катта таъсир кўрсатди.

Амалда натурал сонларни қўшиш қандай бажарилишини аниқлаймиз.

Агар a ва b сонлар бир хонали сон бўлса, уларнинг йиғиндисини топиш учун $n(A) = a$, $n(B) = b$ ва $A \cap B = \emptyset$ бўлган A ва B тўпламларнинг бирлашмасидаги элементлар сонини ҳисоблаш етарли. Лекин, бундай сонларни қўшишда ҳар гал тўпламларга ва ҳисобга мурожаат қилмаслик учун иккита бир хонали сонни қўшишда ҳосил бўладиган ҳамма йиғиндилар эсда сақланади.

Бундай йиғиндиларнинг ҳаммаси махсус жадвалга ёзилади, бу жадвал бир хонали сонларни қўшиш жадвали дейилади.

Агар a ва b сонлари кўп хонали бўлса, у ҳолда қўшиш амалининг маъноси бу ерда ҳам сақланади. Аммо йиғиндини $n(A) = a$, $n(B) = b$ бўлган кесишмайдиган A ва B тўпламлар бирлашмасидаги элементлар сонини ҳисоблаш билан топиш кўпинча мумкин бўлмай қолади.

Маълумки, кўп хонали сонлар «устун» қилиб қўшилади. Аммо сонларни қўшишнинг бу қонда асосида ётадиган назарий ўрни қандай?

273 + 3526 йиғиндини қараймиз. Қўшилувчиларни коэффициентли ўннинг даражалари йиғиндисини кўринишида ёзамиз: $273 + 3526 = (2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 3) + (3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 6)$. Бу ифодада қавсларни очиб, қўшилувчилар ўрнини шундай алмаштирамизки, бирлар бирлар олдида, ўнлар ўнлар олдида ва ҳоказо бўлсин ва яна қавс ичига оламиз. Буларнинг ҳаммасини қўшишнинг тегишли қонунлари асосида бажариш мумкин. Ҳақиқатан, группалаш қонунини ифодаларни қавсларсиз ёзишга имкон беради: $2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 3 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 6$. Ўрин алмаштириш қонунига кўра қўшилувчилар ўрнини алмаштирамиз: $3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 3 + 6$. Группалаш қонунига кўра группалаймиз: $3 \cdot 10^3 + (2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^2) + (7 \cdot 10 + 2 \cdot 10) + (3 + 6)$. Биринчи қавсдан 10^2 ни, иккинчисидан 10 ни қавсдан ташқарига чиқарамиз. Буни қўшишга нисбатан кўпайтиришнинг тақсимот қонунини қўллаб бажариш мумкин: $3 \cdot 10^3 + (2 + 5) \cdot 10^2 + (7 + 2) \cdot 10 + (3 + 6)$. Кўриб турибмизки, 273 ва 3526 сонларини қўшиш тегишли хоналар рақамлари билан тасвирланган бир хонали сонларни қўшишга келтирилди. Бу йиғиндини қўшиш жадвалидан топамиз: $3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 9$. Ҳосил қилинган ифода 3799 сонининг ўнли ёзувидир.

Умуман, сонларни «устун» қилиб қўшишнинг маълум қондаси:

сонларни ўнли саноқ системасида ёзишга;
қўшишнинг ўрин алмаштириш ва группалаш қонунларига;
қўшишга нисбатан кўпайтиришнинг тақсимот қонунига;
бир хонали сонларни қўшиш жадвалига асосланади.

Бир хонали сонлар йиғиндисини 10 га тенг ёки ундан катта бўлган ҳолларда ҳам қўшиш қондаси асосида ўша назарий далиллар ётишини кўрсатамиз. Масалан, $248 + 936$ йиғиндини қарайлик.

Қўшилувчиларни коэффициентли ўннинг даражалари йиғиндиси кўринишида ёзамиз:

$$(2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 8) + (9 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 6).$$

Қўшил ш қонунлари, қўшишга нисбатан кўпайтиришнинг тақсимот қонунидан фойдаланиб, берилган ифодани бундай кўринишга келтирамиз:

$$(2+9) \cdot 10^2 + (4+3) \cdot 10 + (8+6).$$

Кўриб турибмизки, бу ҳолда ҳам берилган сонларни қўшиш бир хонали сонларни қўшишга келтирилди, аммо $2+9$, $8+6$ йиғиндилар 10 сонидан катта, шунинг учун ҳосил бўлган ифода бирор соннинг ўнли ёзуви бўлмайди. Шундай қилиш керакки, 10 нинг даражалари олдидаги коэффициентлар 10 дан кичик бўлсин. Бунинг учун бир қатор алмаштиришлар бажарамиз. Аввал $8+6$ йиғиндини $10+4$ кўринишда ёзамиз:

$$(2+9) \cdot 10^2 + (4+3) \cdot 10 + (10+4).$$

Энди қўшиш ва кўпайтириш қонунларидан фойдаланиб, топилган ифодани қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$(2+9) \cdot 10^2 + (4+3+1) \cdot 10 + 4.$$

Охириги алмаштиришнинг моҳияти равшан: бирларни қўшишда ҳосил бўлган ўнли берилган сонлардаги ўнликларга қўшдик.

Ва ниҳоят, $2+9$ йиғиндини $1 \cdot 10 + 1$ кўринишда ёзиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$(1 \cdot 10 + 1) \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 4, \text{ бундан} \\ 1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 4.$$

Ҳосил бўлган ифода 1184 сонининг ўнли ёзувидир. Демак, $248 + 936 = 1184$.

Ўнли санок системасида ёзилган кўп хонали сонларни қўшиш алгоритми умумий кўринишда мана бундай ифодаланadi:

1. Иккинчи қўшилувчини тегишли хоналар бир-бирининг остига тушадиган қилиб биринчи қўшилувчининг остига ёзамиз.

2. Бирлар хонасидаги рақамлар қўшилади. Агар йиғинди 10 дан кичик бўлса, уни жавобдаги бирлар хонасига ёзамиз ва кейинги хонага (ўнлар хонасига) ўтамиз.

3. Агар бирлар рақамларининг йиғиндиси 10 дан катта ёки 10 га тенг бўлса, уни $10 + c_0$ бунда c_0 — бир хонали сон, кўринишда ёзамиз: c_0 ни жавобдаги бирлар хонасига ёзамиз ва биринчи қўшилувчидаги ўнлар рақамига 1 ни қўшамиз, кейин ўнлар хонасига ўтамиз.

4. Ўнлар билан юқоридаги амалларни бажарамиз, кейин юзлар билан ва ҳоказо. Юқори хона рақамлари қўшилгандан кейин бу жараёни тўхтатамиз.

Бошланғич математика курсида кўп хонали сонларни қўшиш қондаси, асосан, уч хонали сонларни ёзма қўшишни ўрганишда

ифодалангани. Бу қонда ва «устун» қилиб қўшишнинг ёзувидан олдин қуйидаги аниқ ҳолни тушунтирамиз:

$$246 + 123 = (200 + 40 + 6) + (100 + 20 + 3) = (200 + 100) + (40 + 20) + (6 + 3) = 300 + 60 + 9 = 369.$$

Бажарилган алмаштиришларнинг ҳар бир қадамининг асослаймиз.

246 ва 123 сонлари аввал хона қўшилувчиларининг йиғиндисини кўринишида ёзилади (яъни, аслида сонларни ўнли санок системасида ёзиш усули қўлланилади). Кейинги босқич — юзларга юзлар, ўнларга ўнлар, бирларга бирлар қўшилади. Бунини қўшишнинг ўрин алмаштириш ва группалаш қонунларининг натижаси бўлган йиғиндининг йиғиндига қўшиш қондасига асосланиб бажариш мумкин. Сўнгра қавслардаги йиғиндилар топилади. Қўшилувчилар яхлит сонлар бўлгани учун, яъни ноль билан тугагани учун ёки бир хонали сонлар бўлгани учун, охириги қавсдаги каби, улар бир хонали сонларни қўшиш жадвалига таянган ҳолда қўшилади. $300 + 60 + 9$ ифода хона қўшилувчиларининг йиғиндисидир (яъни соннинг ўнли ёзувидир), шунинг учун уни 369 кўринишида ёзиш мумкин.

Шундай қилиб, 246 ва 123 сонларини қўшиш бирлар, ўнлар ва юзларни хоналаб қўшишга келтирилди, буни «устун» қилиб ёзиш қулай:

$$\begin{array}{r} 246 \\ + 123 \\ \hline 369 \end{array}$$

Машқлар

1. 237 ва 526 сонларини қўшиш орқали кўп хонали сонларни қўшиш алгоритмин асосида қандай назарий далиллар ётишини кўрсатинг.

2. Бошланғич мактабда уч хонали сонларни қўшиш алгоритмининг ўрганиш даврида қўшишнинг $231 + 342$, $425 + 135$, $237 + 526$, $529 + 299$ ҳолларини бирин-кетин қаралади. Бу ҳолларнинг ҳар бири қўшишнинг ўзига хос қандай хусусиятига эга?

3. Қуйидаги масалалар нима учун қўшиш билан ечилишини тушунтиринг ва уларни ечинг:

1) Колхозда 115 та от, 327 та қўй ва 276 та сигир бор. Колхозда ҳаммаси бўлиб қанча мол бор?

2) Икки шаҳардан бир-бирига қараб икки поезд йўлга чиқди. Улардан бири учрашгунча 266 км, иккинчиси 187 км йўл босди. Шаҳарлар орасидаги масофани топинг.

3) Магазин бир кунда 308 та катак дафтар сотди. Бу сотилган бир чиизиқли дафтарлардан 153 та кам. Магазин нечта бир чиизиқли дафтар сотган?

4. Ифоданинг қийматини оғзаки ҳисобланг. Ҳисоблаш усулиниги асосланг:

1) $2746 + 7254 + 9876$;

2) $7238 + 8978 + 2762$;

- 3) $(4729 + 8473) + 5271$;
- 4) $4232 + 7419 + 5768 + 2591$;
- 5) $(357 + 768 + 589) + (332 + 211 + 643)$.
5. Қайси йиғинди катта: $4096 + 5267 + 2307 + 625$ ми ёки $3805 + 6341 + 1911 + 216$ ми?

6. Масала ечимини сонли ифода кўринишида ёзинг, сўнгра унинг қийматини топинг:

1) Бир мактабга 298 та парта келтирилди, иккинчисига ундан 123 та ортиқ парта келтирилди. Иккала мактабга нечта парта келтирилди?

2) Санаторийда июнь ойида 158 киши, июль ойида ундан 36 та ортиқ киши, август ойида июлдагидан 217 та ортиқ киши дам олди. Уч ойда ҳаммаси бўлиб неча киши дам олган?

3) Икки шаҳардан бир-бирига қараб икки поезд йўлга чиқди. Улардан бири учрашгунча 227 км, иккинчиси ундан 64 км кам йўл юрди. Шаҳарлар орасидаги масофани топинг.

69. Унли саноқ системасида кўп хонали сонларни айириш

Бир хонали b сонни бир хонали сондан ёки 18 дан катта бўлмаган икки хонали сондан айириш шундай c сонни топишга келтириладики, унинг учун $a = b + c$ бажарилади. Бу айириш бир хонали сонларни қўшиш жадвалига таянади.

Агар a ва b сонлари кўп хонали бўлиб, $b < a$ бўлса, у ҳолда айириш амалининг маъноси 20 ичида айириш каби қолади, аммо айрма бошқача топилади.

Маълумки, кўп хонали сонлар «устун» қилиб айирилади. Бу алгоритмнинг назарий асослари нимадан иборатлигини топамиз.

769—547 айирмани қараймиз. Берилган сонларни коэффициентли ўннинг даражалари йиғиндиси кўринишида ёзамиз: $769 - 547 = (7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 9) - (5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 7)$. $7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 9$ йиғиндидан $5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 7$ йиғиндини айириш учун шу йиғиндидан ҳар бир қўшилувчини бирин-кетин айириш кифоя, бу бундай ёзилади: $(7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 9) - 5 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10 - 7$.

Энди $7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 9$ йиғиндидан $5 \cdot 10^2$, $4 \cdot 10$, 7 сонларни айирамиз. Йиғиндидан сонни айириш учун шу сонни бирорта қўшилувчидан айириш етарли. Шунинг учун $5 \cdot 10^2$ сонни $7 \cdot 10^2$ қўшилувчидан, $4 \cdot 10$ сонни $6 \cdot 10$ қўшилувчидан, 7 сонини 9 қўшилувчидан айирамиз:

$$(7 \cdot 10^2 - 5 \cdot 10^2) + (6 \cdot 10 - 4 \cdot 10) + (9 - 7).$$

Айиришга нисбатан кўпайтиришнинг тақсимот хоссасига асосан 10^2 ва 10 ни қавсдан ташқарига чиқарамиз:

$$(7 - 5) \cdot 10^2 + (6 - 4) \cdot 10 + (9 - 7).$$

Кўриб турибмизки, 769 ва 547 сонларининг айирмаси тегишли хона рақамлари билан тасвирланган бир хонали сонларни айиришга келтирилди. $7 - 5$, $6 - 4$, $9 - 7$ айирмаларни қўшиш жадвалидан топамиз:

$$2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 + 2.$$

Ҳосил қилинган ифода 222 сонининг ўнли ёзувидир. Демак,
 $769 - 547 = 222$.

Умуман, «устун» қилиб айириш қондаси:
сонларни ўнли саноқ системасида ёзиш усулига;
йиғиндидан сонни ва сондан йиғиндини айириш қондала-
рига;

айиришга нисбатан кўпайтиришнинг тақсимот қонунига;
бир хонали сонларни қўшиш жадвалига асосланади.
Камаювчининг бирор хонасидаги бир хонали сон айрилув-
чининг ўша хонасидаги бир хонали сондан кичик бўлган ҳолда
ҳам айириш қондасининг асосида ўша назарий далиллар ёти-
шини кўрсатамиз. Масалан, $540 - 126$ айирмани топамиз.

Берилган сонларни коэффицентли ўннинг даражалари йиғиндисини
кўринишида ёзамиз: $(5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 0) - (1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 6)$.

0 дан 6 ни айириб бўлмайди, демак, биринчи ҳолдагидек
айириб бўлмайди. Шунинг учун 540 сонидан битта ўнликни
оламиз ва уни 10 birlik кўринишида ёзамиз:

$$(5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10 + 10) - (1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 6).$$

Энди сондан йиғиндини ва йиғиндидан сонни айириш қондала-
дан фойдалансак, қуйидаги ифодага келамиз:

$$(5 \cdot 10^2 - 1 \cdot 10^2) + (3 \cdot 10 - 2 \cdot 10) + (10 - 6).$$

Айиришга нисбатан кўпайтиришнинг тақсимот қонунини
қўллаб ва қўшиш жадвалидан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил
қиламиз:

$$(5 - 1) \cdot 10^2 + (3 - 2) \cdot 10 + (10 - 6) = 4 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 4 = 414.$$

Ўнли саноқ системасида ёзилган кўп хонали сонларни айи-
риш алгоритми умумий кўринишда қуйидагича ифодаланади:

$$x = a_n \cdot 10^n + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

$$y = b_k \cdot 10^k + \dots + b_1 \cdot 10 + b_0$$

сонлари берилган бўлсин.

1. Айрилувчини мос хоналар бир-бирининг остида бўладиган
қилиб камаювчининг остига ёзамиз.

2. Агар айрилувчининг бирлар хонасидаги рақам камаюв-
чининг тегишли рақамидан катта бўлмаса, уни камаювчининг
рақамидан айирамиз, сўнгра кейинги хонага ўтамиз.

3. Агар айрилувчининг бирлар рақами камаювчининг бир-
лар рақамидан катта, яъни $a_0 < b_0$ бўлиб, камаювчининг ўнлар
рақами нолдан фарқли бўлса, камаювчининг ўнлар рақамини
битта камайтирамиз, шу вақтнинг ўзида бирлар рақами 10 та
ортади, шундан кейин $10 + a_0$ сонидан b_0 ни айирамиз ва нати-
жани айирманинг бирлар хонасига ёзамиз, сўнгра кейинги хо-
нага ўтамиз.

4. Агар айрилувчининг бирлар рақами камаювчининг бир-
лар рақамидан катта бўлиб, камаювчининг ўнлар, юзлар ва

бошқа хонасидаги рақамлар нолга тенг бўлса, камаювчининг нолдан фарқли биринчи (бирлар хонасидан кейинги) рақамини олиб, уни битта камайтирамиз, кичик хоналардаги барча рақамларни ўнлар хонасигача 9 га орттирамиз, бирлар хонасидаги рақамни эса 10 га орттирамиз ва $10 + a_0$ дан b_0 ни айирарамиз. Натижани айирманинг бирлар хонасига ёзамиз ва кейинги хонага ўтаемиз.

5. Кейинги хонада бу жараённи такрорлаймиз.

6. Камаювчининг катта хонасидан айириш бажарилгандан кейин айириш жараёни тугалланади.

Бошлангич математика курсида кўп хонали сонларни айириш қондаси уч хонали сонларни ёзма айиришни ўрганишда ифодаланади. Бу қонда ва «устун» қилиб айиришнинг ёзуvidан олдин аниқ ҳолни тушунтирамиз:

$$485 - 231 = (400 + 80 + 5) - (200 + 30 + 1) = (400 - 200) + (80 - 30) + (5 - 1) = 200 + 50 + 4 = 254.$$

Бажарилган алмаштиришнинг ҳар бир қадамини асослаймиз.

485 ва 231 сонлари аввал хона қўшилувчиларининг йиғиндиси кўринишида ёзилади (яъни сонни ўнли саноқ системасида тасвирлашдан фойдаланилади). Сўнгра биринчи соннинг юзликларидан иккинчи соннинг юзликлари, ўнликларидан ўнликлари, бирликларидан бирликлари айирилади, бу сондан йиғиндини ва йиғиндидан сонни айириш қондасига асосан бажарилади. Ҳақиқатан:

а) сондан йиғиндини айириш қондасига асосан:

$$(400 + 80 + 5) - 200 - 30 - 1;$$

б) йиғиндидан сонни айириш қондасига асосан:

$$(400 - 200) + (80 - 30) + (5 - 1).$$

Қавслардаги айирмалар бир хонали сонларни қўшиш жадвалига таяниб топилади.

$200 + 50 + 4$ ифода хона қўшилувчиларининг йиғиндисидир, шунинг учун уни 254 деб ёзиш мумкин.

Шундай қилиб, 485 дан 231 ни айириш бирлар, ўнлар ва юзларни хоналар бўйича айиришга келтирилди, бу эса берилган сонларни «устун» қилиб ёзиб айириш учун қулайдир:

$$\begin{array}{r} 485 \\ - 231 \\ \hline 254 \end{array}$$

Машқлар

1. 875 сонидан 528 сонини айириш орқали кўп хонали сонларни айириш алгоритми асосида қандай назарий далиллар ётишни кўрсатинг.

2. Бошланғич мактабда уч хонали сонларни айириш алгоритмини ўрганш даврида айиришнинг $563-321$, $540-236$, $875-528$, $826-351$, $725-256$ ҳоллари бири-кетини қаралади. Бу ҳолларнинг ҳар бири айиришнинг ўзига хос қандай хусусиятига эга?

3. Қуйидаги масалалар нима учун айириш билан ечилишини тушунтиринг ва уларни ечинг:

1) Бир-биридан 986 км масофада бўлган икки шаҳардан бир-бирига қараб икки поезд йўлга чиқди. Улардан бири учрашгунча 425 км йўл юрди. Иккинчи поезд учрашгунча неча километр йўл юрган?

2) Биринчи участкадан 380 т буғдой, иккинчисидан унга қараганда 127 т кам буғдой ўриб олинди. Иккинчи участкадан неча тонна буғдой ўриб олинган?

4. Ифоданинг қийматини оғзаки ҳисобланг, ҳисоблаш усулинигизни асосланг:

1) $7549 - (1020 + 2549)$;

2) $(9547 + 2395) - 7547$;

3) $(3949 + 5027 + 4843) - (2027 + 3843)$.

5. Ҳисоблашнинг энг рационал усулини топинг:

1) $8034 + 472 - (34 + 472)$;

2) $1743 - 295 + (257 + 295)$.

6. Ифодаларни таққосланг:

1) $6387 - 1486 - 821$ ва $6387 - (1486 + 831)$;

2) $5247 - (4524 - 2805)$ ва $5247 - 4524 - 2805$.

7. Масала ечимини сонли ифода кўринишида ёзинг, кейин унинг қийматини топинг:

1) Гул магазинига 465 туп гул кўчати келтирилди. Эрталаб 43 туп, кундузи 122 туп кўчат сотилди. Неча туп кўчат қолди?

2) Почта ташувчи эрталаб 350 та хат, кундузи ундан 35 та кам, кечқурун кундузгидан 112 та кам хат тарқатди. Почта ташувчи кечқурун неча хат тарқатган?

3) Элеваторга биринчи кун 897 т, иккинчи кун ундан 135 т ортиқ, учинчи кун иккинчи кундагидан 76 т кам буғдой келтирилди. Элеваторга учинчи кун неча тонна буғдой келтирилган?

4) Бир майдондан 9000 кг, иккинчи майдондан унга қараганда 1320 кг кам картошка териб олинди. Иккала майдондан териб олинган картошканинг бир қисми олиб кетилгандан кейин биринчи майдонда 2360 кг, иккинчисида 2100 кг картошка қолди. Қайси майдондан кўп картошка олиб кетилди ва қанча кўп?

5) Ораларидаги масофа 846 км бўлган икки шаҳардан бир-бирига қараб икки поезд йўлга чиқди. Агар поездлардан бири 324 км, иккинчиси 286 км ўтган бўлса, улар орасидаги масофа қанча бўлади?

8. Масалаларни арифметик усулда ечинг:

1) Бир кутубхонада 6844 та китоб бор, бу иккинчи кутубхонадагидан 959 та кам, учинчи кутубхонада эса биринчи ва

иккинчи кутубхоналардаги китоблардан 2348 та кам китоб бор. Учала кутубхонада нечта китоб бор?

2) Бир заводда 7216 та ишчи бор, бу иккинчи заводдагидан 1867 та ортиқ, учинчи заводда биринчи ва иккинчи заводлардагидан 874 та ортиқ ишчи бор. Учала заводда қанча ишчи бор?

70. Унли санок системасида кўп хонали сонларни кўпайтириш

Агар a ва b сонлари бир хонали бўлса, уларнинг кўпайтмасини топиш учун $n(A) = a$, $n(B) = b$ бўлган A ва B тўпламларнинг декарт кўпайтмасидаги элементлар сонини ҳисоблаш етарли. Аммо бундай сонларни кўпайтиришда ҳар гал тўплам ва ҳисоблашларга мурожаат қилмаслик учун иккита бир хонали сонни кўпайтиришда ҳосил бўлган ҳамма кўпайтмалар эсда сақланади.

Ҳамма бундай кўпайтмалар махсус жадвалга ёзилади, бу жадвал бир хонали сонларни кўпайтириш жадвали дейилади.

Агар a ва b сонлари кўп хонали бўлса, маълумки, улар «устун» қилиб кўпайтирилади. Бу кўпайтиришнинг назарий асослари нимадан иборатлигини аниқлаймиз.

Масалан, 426 ни 123 сонига кўпайтирамиз.

×	426	Кўриб турибмизки, натижани ҳосил қилиш учун 426 сонини 3 га, 2 га, 1 га, яъни кўп хонали сонни бир хонали сонга кўпайтирдик, аммо 2 га кўпайтирганда натижани бошқача ёздик, яъни 852 сонининг бирларини 1278 сонининг унларн тагига ёздик, сабаби, биз аслида иккита ўнликка кўпайтирдик, учинчи қўшилувчи 426 эса битта юзликка кўпайтиришнинг натижасидир. Ундан ташқари биз кўп хонали сонлар йиғиндисини ҳам топдик.
	312	
	1278	
+	852	
	426	
	52398	

Шундай қилиб, кўп хонали сонни кўп хонали сонга кўпайтириш учун:

кўп хонали сонни бир хонали сонга кўпайтиришни;

кўп хонали сонни 10 нинг даражасига кўпайтиришни;

кўп хонали сонларни қўшишни билиш керак экан.

Кўп хонали сонларни ўрганганимиз учун кўп хонали сонни бир хонали сонга ва ўннинг даражасига кўпайтиришнинг назарий асослари нимадан иборатлигини аниқлаймиз.

426 ни 3 га кўпайтириш жараёнини қараймиз. Унли санок системасида сонларни ёзиш қондасига кўра 426 сонини бундай кўринишда ёзиш мумкин:

$$4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 6, \text{ у ҳолда } 426 \cdot 3 = (4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 6) \cdot 3.$$

Қўшишга нисбатан кўпайтиришнинг тақсимот қонунига асосан охирги ёзувда қавсларни очиб, ўзгартириб ёзамиз:

$$(4 \cdot 10^2) \cdot 3 + (2 \cdot 10) \cdot 3 + 6 \cdot 3.$$

Кўпайтиришнинг ўрин алмаштириш ва группалаш қонунлари бу йиғиндидаги қўшилувчиларни бундай ёзишга имкон беради: $(4 \cdot 3) + 10^2 + (2 \cdot 3) \cdot 10 + 6 \cdot 3$.

Қавс ичидаги кўпайтмалар бир хонали сонларни кўпайтириш жадвалидан топилади: $12 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 18$.

Кўриб турибмизки, кўп хонали сонни бир хонали сонга кўпайтириш бир хонали сонларни кўпайтиришга келтирилди.

Аммо ҳосил бўлган ифода соннинг ўнли ёзуви эмас — 10 нинг даражалари олдидаги коэффицентлар 10 дан кичик бўлиши керак. Шунинг учун 12 ни $10+2$ кўрнишда, 18 ни $10+8$ кўрнишда ёзамиз:

$$(10+2) \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + (10+8).$$

Қавсларни очамиз: $10^3 + 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 10 + 8$.

Қўшннинг группалаш қонуни ва қўшишга нисбатан кўпайтиришнинг тақсимот қонунидан фойдаланамиз: $1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + (6+1) \times 10 + 8$. $6+1$ йиғинди бир хонали сонлар йиғиндисидир ва у қўшиш жадвалидан осонгина топилади: $1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 8$.

Ҳосил бўлган ифода 1278 сонининг ўнли ёзувидир. Шундай қилиб, $426 \cdot 3 = 1278$.

Умуман, $x = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ сонни бир хонали сон y га кўпайтириш алгоритмининг бундай ифодалаш мумкин:

1. Иккинчи сонни биринчи соннинг остига ёзамиз.

2. Бирлар хонасидаги рақамларни y сонига кўпайтирамиз. Агар кўпайтма 10 дан кичик бўлса, уни жавобдаги бирлар хонасига ёзамиз ва кейин ўнлар хонасига ўтамиз.

3. Агар бирлар хонасидаги рақамларнинг y сонига кўпайтмаси 10 дан катта ёки 10 га тенг бўлса, уни $10 \cdot q_1 + c_0$ кўринишда ёзамиз. Бунда c_0 — бир хонали сон: c_0 ни жавобдаги бирлар хонасига ёзамиз ва q_1 ни кейинги хонага ўтказишни эсда сақлаймиз.

4. Ўнлар хонасидаги рақамни y сонига кўпайтирамиз, чиққан кўпайтмага q_1 ни қўшамиз ва 2-ҳамда 3-пунктлардаги жараёни такрорлаймиз.

5. Юқори хона рақамлари кўпайтирилгандан кейин кўпайтириш жараёни тугалланади.

Маълумки, x сонни 10^k кўринишдаги сонга кўпайтириш берилган соннинг ўнли ёзувига ўнг томондан k та нолни қўшиб ёзишга келтирилади. Ҳақиқатан, агар $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$ бўлса, у ҳолда $x \cdot 10^k = (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0) \cdot 10^k$. Қўшишга нисбатан кўпайтиришнинг тақсимот қонунини ва кўпайтиришнинг бошқа қонунларини қўллаб,

$$a_n \cdot 10^{n+k} + a_{n-1} \cdot 10^{n+k-1} + \dots + a_1 \cdot 10^{k+1} + a_0 \cdot 10^k$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ифода $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \underbrace{0 \dots 0}_{k \text{ та ноль}}$ соннинг ўнли

ёзувидир, чунки

$$a_n \cdot 10^{n+k} + a_{n-1} \cdot 10^{n+k-1} + \dots + a_0 \cdot 10^k = a_n \cdot 10^{n+k} + a_{n-1} \times 10^{n+k-1} + \dots + a_0 \cdot 10^k + 0 \cdot 10^{k-1} + \dots + 0.$$

$$\text{Масалан, } 534 \cdot 10^3 = (5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 4) \cdot 10^3 = 5 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 = 534000.$$

Энди кўп хонали сонни кўп хонали сонга кўпайтириш алгоритмини қараймиз. Юқорида қаралган мисолга, яъни $426 \cdot 123$ кўпайтмага қайтамиз. 123 сонини коэффициентли ўннинг даражаларини йиғиндиси кўринишида ёзамиз: $123 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3$ ва $426 \cdot (1 \times 10^2 + 2 \cdot 10 + 3)$ кўпайтмани ёзамиз. Бу кўпайтма қўшишга нисбатан кўпайтиришнинг тақсимот қонунига кўра $426 \cdot (1 \cdot 10^2) + 426 \cdot (2 \times 10) + 426 \cdot 3$ га тенг. Бундан кўпайтиришнинг группалаш қонунига асосан:

$$(426 \cdot 1) \cdot 10^2 + (426 \cdot 2) \cdot 10 + 426 \cdot 3.$$

Шундай қилиб, кўп хонали сонни кўп хонали сонга кўпайтириш кўп хонали сонни бир хонали сонга кўпайтиришга келтирилди.

Умуман, $x = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ сонни $y = b_k b_{k-1} \dots b_1 b_0$ сонга кўпайтириш алгоритминини бундай ифодалаш мумкин:

1. x кўпайтувчинини ёзамиз ва унинг остига иккинчи кўпайтувчи y ни ёзамиз.

2. x сонни y соннинг кичик хонаси b_0 га кўпайтирамиз ва $x b_0$ кўпайтмани y соннинг остига ёзамиз.

3. x сонни y соннинг кейинги хонаси b_1 га кўпайтирамиз ва $x b_1$ кўпайтмани бир хона чапга суриб ёзамиз. Бу $x b_1$ ни 10 га кўпайтиришга мос келади.

4. Бу жараёни $x b_k$ ни ҳисоблагунча давом эттирамиз.

5. Топилган $k+1$ та кўпайтмани қўшамиз.

Бошланғич математика курсида кўпайтиришни ўрганиш бир неча босқичда олиб борилади, унга бир хонали сонларни кўпайтириш жадвали; ноль билан тугайдиган икки хонали сонларни кўпайтириш; кўп хонали сонларни бир хонали, икки хонали ва уч хонали сонларга кўпайтириш киради.

«Устун» қилиб кўпайтириш алгоритминини ўрганиш уч хонали сонни бир хонали сонга кўпайтиришдан бошланади. Ундан олдин қуйидаги кўпайтма тушунтирилади:

$$426 \cdot 3 = (400 + 20 + 6) \cdot 3 = 400 \cdot 3 + 20 \cdot 3 + 6 \cdot 3 = 1200 + 60 + 18 = 1278.$$

Булар уч хонали сонни бир хонали сонга кўпайтириш:

сонни ўнли саноқ системасида ёзишга (мактабда бу нарса сонни хона қўшилувчилари йиғиндиси кўринишида ёзиш билан боғлиқ);

қўшишга нисбатан кўпайтиришнинг тақсимот қонунига (мактаб терминида йиғиндини сонга кўпайтириш қондаси);

яхлит сонларни бир хонали сонга кўпайтириш, яъни бир хонали сонларни кўпайтириш жадвалига;

кўп хонали сонларни қўшишга асосланишини кўрсатади.

Сўнгра мисоллар орқали кўп хонали сонни кўп хонали сонга кўпайтириш кўп хонали сонни бир хонали сонга кўпайтириш ва кўп хонали сонларни қўшишга келтирилади. Мисол, $46 \cdot 38 = 46 \cdot (30 + 8) = 46 \cdot 30 + 46 \cdot 8$.

1. 397 сонини 6 га кўпайтириш орқали уч хонали сонни бир хонали сонга кўпайтириш алгоритми асосида қандай назарий далиллар ётишини кўрсатинг.

2. $96 \cdot 77$ ни бундай ўзгартириш мумкин: $96 \cdot 77 = 96 \cdot (70 + 7) = 96 \cdot 70 + 96 \cdot 7$. $96 \cdot 7$ ва $96 \cdot 70$ кўпайтмалар қандай топилади?

3. 524 ни 168 га кўпайтириш кўп хонали сонни бир хонали сонга кўпайтиришга ва кўп хонали сонларни қўшишга келтирилишини кўрсатинг, сўнгра бу сонлар кўпайтмасини «устун» қилиб ёзиш усули билан топинг.

4. Қуйидаги масалалар нима учун кўпайтириш амали билан ечилишини тушунтиринг ва уларни ечинг:

1) Ер Қуёш атрофида айланганда бир суткада тахминан 2505624 км ўтади. Ер 365 кунда қанча йўл ўтади?

2) Ер диаметри тахминан 12 740 км га тенг. Ой Ердан унинг диаметрига қараганда 30 марта узоқ масофада жойлашган. Ердан Ойгача бўлган масофа қанча?

5. Масалалар ечимини сонли ифода кўринишида ёзинг, кейин унинг қийматини топинг:

1) Тикув фабрикаси дастлабки 6 кунда кунига 485 тадан кўйлак тикди. Фабрика шу 6 кунда нечта кўйлак тиккан?

2) Элеваторга 472 т сули, ундан 236 т ортнқ жавдар, сули ва жавдар бирга қанча бўлса, шундан 4 марта кўп буғдой келтирилди. Элеваторга қанча буғдой келтирилган?

3) Бир участкага 30 т, иккинчисига ундан 3 т кўп буғдой сепилди. Биринчи участкадан экилганига қараганда 21 марта кўп, иккинчи участкадан экилганига қараганда 24 марта кўп буғдой ўриб олинди. Иккала участкадан қанча буғдой ўриб олинган?

4) Колхоз фермасида 326 бош сигир ва 118 бош бузоқ бор. Колхоз ҳар бир сигирга 5 т 40 кг дан, ҳар бир бузоққа 2 т 80 кг дан силос тайёрлади. Колхоз сигир ва бузоқлар учун ҳаммаси бўлиб қанча силос тайёрлаган?

6. Ифоданинг қийматини рационал усул билан ҳисобланг:

1) $(420 - 394) \cdot 405 - 25 \cdot 405 \cdot 300$;

2) $105 \cdot 209 - (963 - 859) \cdot 209 \cdot 400$;

3) $1987 \cdot 19861986 - 1986 \cdot 19871987$.

7. 13·11, 27·11, 35·11, 43·11, 54·11 кўпайтмалар қийматини топинг ва қуйидаги қондани асосланг: икки хонали (рақамлар йиғиндиси 10 дан кичик) сонни 11 га кўпайтириш учун икки сон рақамлари орасига унинг рақамлари йиғиндисини ёзиш ки-фоя.

8. 29·11, 37·11, 47·11, 85·11, 97·11 ларни ҳисобланг ва ушбу қондани асосланг: икки хонали (рақамлари йиғиндиси 10 га тенг ёки 10 дан катта) сонни 11 га кўпайтириш учун битта ор-тирилган ўнлар рақами билан бирлар рақами орасига унинг рақамлари йиғиндисидан 10 ни айириш натижасини ёзиш ки-фоя.

71. Унли саноқ системасида кўп хонали сонларни бўлиш

Сонларни бўлиш техникаси ҳақида сўз борар экан, бу жараён қолдиқли бўлиш амали каби қаралади. Таърифни эслайлик: бутун номанфий a сонни b натурал сонга қолдиқли бўлиш деб $a = bq + r$ ва $0 \leq r < b$ бўладиган бутун номанфий q ва r сонларни топишга айтилади. q сони эса тўлиқсиз бўлинма дейилади.

Бир хонали ва икки хонали (89 дан катта бўлмаган) сонларни бир хонали сонга бўлганда бир хонали сонларни кўпайтириш жадвалидан фойдаланилади.

Масалан, 54 ни 9 га бўлиш керак бўлсин. 9-устунда (9-сатрда) 54 сонини топамиз. У 6-сатрда (6-устунда) жойлашган. Демак, $54 : 9 = 6$.

Энди 51 ни 9 га бўламиз. 9-устунда 51 сони йўқ. Шунинг учун бу устунда 51 дан кичик энг яқин 45 сонини оламиз. 45 сони 5-сатрда бўлгани учун тўлиқсиз бўлинма 5 га тенг. Қолдиқни топиш учун 51 дан 45 ни айирамиз: $51 - 45 = 6$. Шундай қилиб, $51 = 9 \cdot 5 + 6$ ёки мактаб символикаси билан ёзсак: $51 : 9 = 5$ (қолд. 6).

Энди кўп хонали сонни бир хонали сонга бўлиш қандай амалга оширилишини аниқлаймиз. 238 ни 4 га бўлиш керак бўлсин. Бу дегани шундай тўлиқсиз бўлинма q ва r қолдиқни топиш керакки, улар учун $238 = 4q + r$, $0 \leq r < 4$ бўлсин.

Шуни айтиш керакки, 238 ва 4 сонларининг тўлиқсиз бўлинмаси q га бўлган талабни қуйидагича ёзиш мумкин: $4q \leq 238 < 4(q+1)$.

Аввал q сонининг ёзувида нечта рақам бўлишини аниқлаймиз. q бир хонали сон бўлмайди, чунки 4 сонининг бир хонали сонга кўпайтмаси плюс қолдиқ 238 га тенг эмас. Агар q сони икки хонали бўлса, яъни агар $10 < q < 100$ бўлса, у ҳолда 238 сони 40 ва 400 сонлари орасида бўлади, бу эса тўғри. Демак, 238 ва 4 сонларининг бўлинмаси икки хонали сон.

Бўлинманинг унлар рақамини топиш учун бўлинувчи 4 ни кетма-кет 20 га, 30 га, 40 га ва ҳоказо кўпайтирамиз. $4 \cdot 50 = 200$, $4 \cdot 60 = 240$ ва $200 < 238 < 240$ бўлгани учун тўлиқсиз бўлинма 50 ва 60 сонлари орасида бўлади, яъни $q = 50 + q_0$. У ҳолда 238 сони ҳақида бундай дейиш мумкин: $4 \cdot (50 + q_0) \leq 238 < 4 \cdot (50 + q_0 + 1)$. Бундан $240 + 4q_0 \leq 238 < 200 + 4(q_0 + 1)$ ва $4q_0 \leq 238 < 4 \cdot (q_0 + 1)$. Берилган тенгсизликни қаноатлантирувчи q_0 сонини (бўлинманинг бирлар рақамини) кўпайтириш жадвалидан фойдаланиб топиш мумкин. $q_0 = 9$ ҳосил бўлади, ва демак, тўлиқсиз бўлинма $q = 50 + 9 = 59$. Қолдиқ айириш билан топилади: $238 - 4 \cdot 59 = 2$.

Шундай қилиб, 238 ни 4 га бўлганда тўлиқсиз бўлинма 59 ва 2 қолдиқ ҳосил бўлади: $238 = 4 \cdot 59 + 2$.

Бўлишнинг ифодаланган бу жараёни бурчак қилиб бўлиш деб номланадиган бўлиш асосида ётади:

$$\begin{array}{r}
 238 \mid 4 \\
 \hline
 20 59 \\
 \hline
 38 \\
 - 36 \\
 \hline
 2
 \end{array}$$

Кўп хонали сонни кўп хонали сонга бўлиш ҳам худди шундай бажарилади. Масалан, 5658 ни 46 га бўлайлик. Бу бўлишни бажариш шундай бутун номанфий q ва r сонларни топиш демакки, унинг учун $5658 = 46q + r$, $0 \leq r < 46$ бажарилсин. Бундан $46 \cdot q \leq 5658 < 46(q+1)$.

q бўлинмадаги рақамлар сонини аниқлаймиз. Шубҳасиз, q бўлинма 100 ва 1000 сонлари орасида ётади (у уч хонали), чунки $4600 < 5658 < 46000$.

Бўлинманинг юзлар рақамини топиш учун бўлинувчи 46 ни кетма-кет 100 га, 200 га, 300 га ва ҳоказо кўпайтирамиз. $46 \cdot 100 = 4600$, $46 \cdot 200 = 9200$ ва $4600 < 5658 < 9200$ бўлгани учун тулиқсиз бўлинма 100 ва 200 сонлари орасида ётади, яъни $q = 100 + q_1$, бу ерда q_1 —икки хонали сон. У ҳолда қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлади:

$$46 \cdot (100 + q_1) \leq 5658 < 46 \cdot (100 + q_1 + 1).$$

Қавсларни очиб ва 4600 сонини айириб, ушбу тенгсизликка келамиз:

$$46q_1 \leq 1058 < 46 \cdot (q_1 + 1).$$

q_1 сони икки хонали. Шунинг учун бўлинмадаги ўнлар рақамини топиш учун бўлинувчи 46 ни кетма-кет 10 га, 20 га, 30 га ва ҳоказо кўпайтирамиз. $46 \cdot 20 = 920$, $46 \cdot 30 = 1380$ ва $920 < 1058 < 1380$ бўлгани учун $20 < q_1 < 30$ ва q_1 сонини $q_1 = 20 + q_0$ кўринишда ёзиш мумкин. У ҳолда 1058 сони ҳақида қуйидагиларни айтиш мумкин:

$$46 \cdot (20 + q_0) \leq 1058 < 46 \cdot (20 + q_0 + 1), \text{ яъни}$$

$$46 \cdot 20 + 46 \cdot q_0 \leq 1058 < 46 \cdot 20 + 46 \cdot (q_0 + 1),$$

$$46q_0 \leq 138 < 46 \cdot (q_0 + 1).$$

Охирги тенгсизликни қаноатлантирувчи q_0 сонини (бўлинманинг бирлар рақамини) 46 ни кетма-кет 1 га, 2 га, 3 га, 4 га, 5 га, 6 га, 7 га, 8 га, 9 га кўпайтириб, танлаб топамиз. $46 \cdot 3 = 138$ ни, яъни қолдиқ нолга тенг бўлган ҳолни топамиз. Демак, $5658 : 46 = 123$.

Бу мулоҳазалар бурчак қилиб бўлиш асосида ётади.

$$\begin{array}{r}
 5658 \mid 46 \\
 \hline
 46 123 \\
 \hline
 105 \\
 - 92 \\
 \hline
 138 \\
 - 138 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Кўп хонали сонларни бўлиш ҳақида тўла тасаввурга эга бўлиш учун бўлинмада ноллар пайдо бўлган ҳолни қараймиз. Масалан, 7549 ни 37 га бўламиз, яъни шундай q ва r сонларни топамизки, улар учун $7549 = 37 \cdot q + r$, $0 \leq r < 37$ ва $37q \leq 7549 < 37(q+1)$ ба-
жарилсин.

7549 ва 37 сонларининг бўлинмаси q 100 ва 1000 сонлари ора-
сида ётади (у уч хонали сон), чунки $3300 < 7549 < 37000$.

37 ни 100 га, 200 га ва ҳоказо кўпайтириб, $37 \cdot 200 \leq 7549 < 37 \cdot 300$ эканлигини аниқлаймиз. Демак, $q = 200 + q_1$, бунда q_1 —
икки хонали сон ва $37 \cdot (200 + q_1) \leq 7549 < 37 \cdot (200 + q_1 + 1)$.

Шакл алмаштиришлардан кейин

$$37q_1 \leq 149 < 37 \cdot (q_1 + 1)$$

тенгсизликка келамиз. q_1 сони икки хонали бўлгани учун унинг
ёзувидаги ўнлар рақами 37 ни 10 га, 20 га, 30 га ва ҳоказо кўпай-
тириш билан топилади. Бироқ бизнинг ҳолда бу сонларнинг бирор-
таси ҳам тенгсизликни қаноатлантирмас экан. Демак, q_1 сонидagi
ўнлар рақами 0 га тенг экан, яъни $q_1 = 0 + q_0$. Тўлиқсиз бўлинма
 q қуйидаги кўринишга эга:

$q = 200 + 0 + q_0$, бунда q_0 — бирлар сони ва $q_0 = q_1$.

Охириги тенгсизликдан: $q_1 = 4$. Демак, изланаётган бўлинма
 $200 + 0 + 4 = 204$ сони экан, қолдиқ эса 1 га тенг, чунки $7549 —$
 $— 37 \cdot 204 = 1$.

Бу ҳисоблашлар бурчак қилиб бўлиш кўринишидa ёзилади:

$$\begin{array}{r} 7549 \quad | \quad 37 \\ \underline{74} \quad \quad 204 \\ \quad 149 \\ \underline{\quad 148} \\ \quad \quad 1 \end{array}$$

Бутун номанфий a сонни b натурал сонга бўлишнинг турли
усулларининг умумлашмаси қуйидаги бурчак қилиб бўлиш алгорит-
ми ҳисобланади:

I. Агар $a = b$ бўлса, бўлинма $q = 1$, қолдиқ $r = 0$ бўлади.

II. Агар $a > b$ бўлиб, a ва b сонлардаги хоналар сони бир хил
бўлса, b ни кетма-кет 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 га кўпайтириб, бў-
линма танлаб олинади, чунки $a < 10b$.

III. Агар $a > b$ бўлиб, a сондаги хоналар сони b сондаги хона-
лар сонидан катта бўлса, a бўлинувчини ёзиб, унинг ўнг томонига
 b бўлувчини ёзамиз ва ораларига бурчак белгисини қўйиб, бўлинма
ҳамда қолдиқни ушбу кетма-кетликда қидирамиз:

1) b сонда нечта хона бўлса, a сонда шунча катта хоналарни
ёки, агар зарур бўлса, битта ортиқ хонани шундай ажратамизки,
улар b дан катта ёки унга тенг d_1 сонни ҳосил қилсин. b ни кет-
ма-кет 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 га кўпайтириб, d_1 ва b сонлар-
нинг q_1 бўлинмасини танлаб топамиз. q_1 ни бурчак остига (b дан
пастга) ёзамиз.

2) b ни q_1 га кўпайтириб, кўпайтмани a сонининг остига шундай ёзамизки, bq_1 соннинг қуйи хонаси ажратилган d_1 соннинг қуйи хонаси остига ёзилсин.

3) b_1 нинг остига чизиқча чизамиз ва айирмани топамиз:

$$r_1 = d_1 - bq_1.$$

4) r_1 айирмани bq_1 соннинг остига ёзамиз. r_1 нинг ўнг томонига a бўлинувчининг фойдаланилмаган хоналаридан юқори хонасини ёзамиз ва чиққан d_2 сонни b сон билан таққослаймиз.

5) Агар чиққан d_2 сон b дан катта ёки унга тенг бўлса, у ҳолда d_2 га нисбатан I ёки II пунктлардагидек иш тутамиз. q_2 бўлимининг q_1 дан кейин ёзамиз.

6) Агар чиққан d_2 сон b дан кичик бўлса, биринчи чиққан d_2 сон b дан катта ёки унга тенг бўлиши учун кейинги хоналардан қанча зарур бўлса яна шунча ёзамиз. Бу ҳолда q_1 дан кейин шунча ноль ёзамиз. Кейин d_3 га нисбатан I ёки II пунктлардагидек иш тутамиз. q_2 бўлилма ноллардан кейин ёзилади. Агар a соннинг кичик хоналаридан фойдаланганда $d_3 < b$ бўлса, d_3 ва b сонларнинг бўлимаси нолга тенг бўлади ва бу нолни бўлимининг охириг хонасига ёзамиз, қолдиқ $r = d_3$ бўлади.

Бўлиш кўпгина математик малакалар билан, жумладан, кўп хонали сонларни кўпайтириш ва бўлиш малакаси билан боғлиқ бўлгани учун у бошланғич синфларда аста-секин ўрганилади. Ўқувчилар аввал жадвалли бўлишни ва ноль билан тугайдиган сонларни бўлишни ўрганадилар, сўнгра икки хонали сонни бир хонали ва икки хонали сонга бўлишни (йиғиндини сонга бўлиш қондасига ва кўпайтириш жадвалига таяниб), кейинроқ қолдиқли бўлишни, ва ниҳоят, кўп хонали сонни бир хонали, икки хонали ва уч хонали сонга бўлишни ўрганадилар.

Машқлар

1. 867 ни 3 га бўлиш мисолида уч хонали сонни бир хонали сонга бўлиш алгоритми асосида қандай назарий далиллар ётишини кўрсатинг.

2. Бўлишни бажармай, қуйидаги сонлар бўлинимасидаги рақамлар сонини аниқланг:

1) 368 ва 7; 2) 4368 ва 39; 3) 83622 ва 27874; 4) 2184 ва 318.

3. 1) $a=1899$, $b=6$; 2) $a=432$, $b=4$; 3) $a=1242$, $b=54$; 4) $a=1254$, $b=38$ бўлса, a ни b га бўлиш жараёнини асосланг.

4. Ҳисобламасдан, қуйидаги мисолларда бўлиш нотўғри бажарилганини қандай аниқлаш мумкин:

1) $51\,054 : 127 = 42$; 2) $405\,945 : 135 = 307$?

5. Бурчак қилиб бўлинг:

1) $11\,455 : 145$; 2) $261\,960 : 740$; 3) $105\,754 : 253$; 4) $213\,664 : 352$.

6. Бўш жойларни тўлдилинг:

1) $1986 : 1986 = \underline{\hspace{2cm}}$, чунки $\underline{\hspace{2cm}}$;

- 2) $1986 : 1 = \underline{\hspace{2cm}}$, чунки $\underline{\hspace{2cm}}$;
 3) $0 : 1986 = \underline{\hspace{2cm}}$, чунки $\underline{\hspace{2cm}}$;
 4) 1986 нинг 0 га бўлинмасы $\underline{\hspace{2cm}}$, чунки $\underline{\hspace{2cm}}$.

7. Нима учун ушбу масалалар бўлиш амали билан бажарилишини тушунтиринг ва уларни ечинг:

1) 2600 та лимон саватчаларга 100 тадан қилиб жойланди. Нечта саватча керак бўлди?

2) Бизнинг мамлакатимиз ғарбдан шарққа қараб тахминан 10 000 км масофага чўзилган. Тезлиги 50 км/соат бўлган поездда; тезлиги 1000 км/соат бўлган самолётда бу масофани ўтиш учун қанча вақт керак бўлади?

8. Ифодаларнинг қийматини топинг:

- 1) $8919 : 9 = 114\,240 : 21$;
 2) $1190 - 35\,360 : 34 + 271$;
 3) $8631 - (99 - 44\,352 : 63)$;
 4) $48\,600 \cdot (5045 - 2040) : 243 - (86\,043 : 43 + 504) \cdot 200$;
 5) $4880 \cdot (546 + 534) : 122 - 6390 \cdot (8004 - 6924) : 213$.

9. Масала ечимини сонли ифода кўринишида ёзинг, кейин унинг қийматини топинг:

1) Тикув цехида 320 м газламадан аёллар пальтоси ва 120 м газламадан эркаклар пальтоси тикилди. Ҳар бир аёллар пальтосига 4 м, эркаклар пальтосига 3 м газлама кетди. Қайси бири кўп тикилган: аёллар пальтосими ёки эркаклар пальтосими ва қанча кўп?

2) Пионерлар дарё бўйлаб катерда саёҳат қилишди ва ҳаммаси бўлиб 66 км йўл босишди. Улар 2 соат 18 км/соат тезликда, қолган йўлни 15 км/соат тезликда сузишди. Пионерлар ҳаммаси бўлиб қанча вақт йўлда бўлганлар?

3) Шаҳардан колхоз ва совхозларга дон ўримиға юборилган 7600 та машина автоколонналарга бўлинди: 3000 та машина ҳар бир колоннаға 125 тадан, қолган машиналар ҳар бир колоннаға 200 тадан қилиб бўлинди. Колхоз ва совхозларға ҳаммаси бўлиб нечта колонна юборилган?

10. Биринчи ифоданинг қийматини топинг, кейин ундан иккинчи ифоданинг қийматини топишда фойдаланинг:

- 1) $45\,120 : (376 \cdot 12)$; 2) $241 \cdot (1264 : 8)$,
 $45\,120 : (376 \cdot 3)$; $241 \cdot (1264 : 4)$.

11. Ифодаларнинг қийматини икки усул билан топинг:

- 1) $(297 + 405 + 567) : 27$; 3) $56 \cdot (378 : 14)$;
 2) $(240 \cdot 23) : 48$; 4) $15\,120 : (14 \cdot 5 \cdot 18)$.

72. Сонларнинг ўнли системадан фарқли позицион саноқ системасидаги ёзуви

Олдинги пунктларда биз асоси 10 бўлган саноқ системасининг хусусиятларини ўргандик. Бу системада ҳар қандай сон ушбу кўп-ҳад кўринишида ёзилишини биламиз: $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots +$

$+a_1 \cdot 10 + a_0$, бунда $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ коэффициентлар 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 қийматларини қабул қилади ва $a_n \neq 0$.

Ўнли саноқ системаси позициондир — айти бир белги (рақам) нинг қиймати бу белгининг шу соннинг ёзувида тутган ўринга (позициясига) боғлиқ.

Маълумки, инсоният тарихида бошқа позицион саноқ системалари ҳам мавжуд бўлган. Уларнинг фарқи бу системаларда сонларни белгилаш учун турли символлардан (белгилардан) фойдаланиш бўлиб қолмай, балки бу системаларнинг асослари турлича эканлигида ҳамдир. Масалан, вавилон саноқ системаси олтишли бўлган. Улардан бошқа позицион саноқ системалар ҳам маълум: ўн иккили система, бу системадан ҳозирги кунда биз предметлар сонини дюжиналаб (12 талаб) санашда, суткани ҳар бири 12 соатдан бўлган иккита бўлакка бўлишда, йилни 12 ойга бўлишда фойдаланамиз; йигирмали система, бу системадан майя қабиласидаги ҳиндлар фойдаланишган.

Умуман, позицион саноқ системасининг асоси иккидан катта ёки иккига тенг исталган p натурал сон бўлиши мумкин. Агар $p=2$ бўлса, система иккили, $p=3$ бўлса, учли, $p=8$ бўлса, саккизли, $p=10$ бўлса, ўнли система дейилади.

Сон p асосли системада қандай ёзилади?

Ўнли системада сонни ёзиш учун 10 та белгидан фойдаланилади: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Равшанки, иккили системада сонни 2 та белги, масалан, 0, 1 белгилар ёрдамида; саккизли системада 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 белгилар ёрдамида ёзиш мумкин. Умуман, p асосли саноқ системасида сонни ёзиш учун p та белгидан фойдаланиш керак: 0, 1, 2, 3, ..., $p-1$.

Шуни эслатамизки, p асосли саноқ системасида сонларни ёзиш учун ўнли саноқ системасида фойдаланилган белгилардан фойдаланишни тавсия этиш мумкин, аммо бошқа белгилардан ҳам фойдаланиш мумкин, фақат уларнинг сони p га тенг бўлиши керак.

Таъриф. p асосли саноқ системасида x натурал соннинг ёзуви деб унинг $x = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0$ кўринишидаги ёзувига айтилади, бунда $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ лар 0, 1, 2, ..., $p-1$ қийматларни қабул қилади ва $a_n \neq 0$.

Ҳар қандай x натурал сонни бундай ягона кўринишда ёзиш фактини исботсиз қабул қиламиз.

x сонининг $x = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0$ кўринишини қисқача ушбу кўринишда ёзиш қабул қилинган: $x = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$.

Масалан, учли системада, яъни $p=3$ да $2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 1$ йиғинди $x=2101$, кўринишда қисқача ёзиш мумкин бўлган бирор x сонининг ёзувидир.

Бу сон қуйидагича ўқилади: «Икки, бир, ноль, бир учли саноқ системасида».

Сонларни ёзишда турли белгилардан фойдаланиш нуқтаи-назаридан иккили саноқ системаси тежамлироқдир — унда сонларни ёзиш

учун фақат иккита белги — 0 ва 1 керак. Бу системада соннинг қисқа ёзуви ноль ва бирлардан тўзилган чекли кетма-кетликдан иборат. Масалан, $1011_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 10 + 1, 10001_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1$.

Иккили санок системасида ҳар қандай сонни ёзишда қўлланиладиган бу иккита рақам ёрдамида радиоэлектрон элементларнинг иккита турғун ҳолатини тасвирлаш мумкин. Масалан, электрон лампа ток ўтказиши ёки ўтказмаслиги мумкин. Радиоэлектрон элементларнинг бу хоссаси мана шу иккили санок системаси ҳисоблаш машиналари учун энг қулай бўлишига сабабчи бўлди. Бу системадан фойдаланишнинг иккинчи сабаби (биз уни яқинда кўрамиз) иккили системада ёзилган сонлар устида арифметик амалларни машинада бажаришнинг осонлигидадир.

p асосли санок системасида ($p \neq 10$) ёзилган сонларни таққослаш ўнли системадагидек бажарилади. Масалан, $2101_3 < 2102_3$, чунки бу сонларда хоналар сони бир хил ва юқори хонадаги учта рақам бир хил бўлиб, биринчи сондаги кичик хона рақами иккинчи сондаги ўша хона рақамидан кичик.

Иккили ва бошқа системаларда ҳисоблашларни бажарадиган ЭХМ ларнинг қўлланилиши туфайли соннинг ўнли системадаги ёзувидан бошқа системадаги ёзувига ўтиш масаласи ва аксинча масала туғилади, чунки бирор масалани ечишда ЭХМ дан фойдаланаётган математик ҳисоблашларни ўнли санок системасида олиб боради.

1. Соннинг p асосли системадаги ёзувидан ўнли системадаги ёзувига ўтиш. x сони p асосли санок системасида ёзилган бўлсин: $x = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$. Уни ушбу $a_n \cdot p^n + a_{n-1} \times p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0$ [кўпхад кўринишда ёзиш мумкин, бунда $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ ва p сонлар ёзуви ўнли системада берилган. Бу сонлар устида ўнли системада қабул қилинган қондалар бўйича амаллар бажариб, x сонининг ўнли ёзувини ҳосил қиламиз. Масалан, 346_{10} сонининг ўнли ёзувини топиш учун уни $3 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 6$ йиғинди кўринишида ёзамиз ва қийматларини топамиз: $3 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 6 = 226$. Демак, $346_{10} = 226_{10}$.

2. Соннинг ўнли системадаги ёзувидан p асосли системадаги ёзувига ўтиш. x сони ўнли системада ёзилган бўлсин. Уни p асосли системада ёзиш деган сўз $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ ларнинг $x = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0$ бўладиган қийматини топиш демакдир, бунда $1 \leq a_n < p, 0 \leq a_{n-1} < p, \dots, 0 \leq a_0 < p$.

Диққатимизни ушбу қонуниятга қаратамиз. $x = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \times p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0$ сонини $x = p \cdot (a_n \cdot p^{n-1} + a_{n-1} \cdot p^{n-2} + \dots + a_1) + a_0$ кўринишда ёзиш мумкин. $0 \leq a_0 < p$ бўлгани учун x сонининг охириги ёзувини x сонини p қолдиқли бўлишдаги ёзув деб қараш мумкин, бунда a_0 — қолдиқ, $a_n \cdot p^{n-1} + a_{n-1} \cdot p^{n-2} + \dots + a_1$ — тўлиқсиз бўлинма. Худди шунингдек, a_1 ни ҳосил бўлган бўлинмани p га бўлганда чиққан қолдиқ деб қараш мумкин ва ҳоказо.

Бу қонуният соннинг ўнли ёзувидан p асосли системадаги ёзувига ўтиш жараёнига асос бўлади.

x сонини p га ўнли системада бўлиш қондаси бўйича қолдиқли бўламиз. Бўлишда чиққан қолдиқ соннинг p асосли системадаги ёзувининг охириги рақами бўлади.

Чиққан бўлинмани яна p га қолдиқли бўламиз. Янги қолдиқ x сонининг p асосли системасидаги ёзувининг охиригидан битта олдинги рақами бўлади. Бўлиш жараёнини давом эттириб, x сонининг p асосли системадаги ёзувининг ҳамма рақамларини топамиз.

Масалан, 89 сонининг учли санок системасидаги ёзувини топайлик, яъни 89 сонини $a_n \cdot 3^n + a_{n-1} \cdot 3^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 3 + a_0$ кўринишда ёзамиз, бунда $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ лар 0, 1, 2 қийматларини қабул қилади.

89 ни 3 га бўламиз: $89 = 29 \cdot 3 + 2$. Бўлиш натижасида $a_0 = 2$ эканлиги топилди, бироқ 3 сони олдидаги коэффициент 2 дан катта; шунинг учун 29 ни 3 га бўламиз: $29 = 9 \cdot 3 + 2$, яъни $89 = (9 \cdot 3 + 2) \times 3 + 2 = 9 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2$. Бу бўлишда $a_1 = 2$ ни топдик, бироқ 3^2 даража олдидаги коэффициент 2 дан катта, шунинг учун 9 ни 3 га бўламиз: $9 = 3 \cdot 3 + 0$, яъни

$$89 = (3 \cdot 3 + 0) \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2 = 3 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2.$$

Бу босқичда $a_2 = 0$ эканини аниқладик, аммо 3^2 даража олдидаги коэффициент 2 дан катта, шунинг учун 3 ни 3 га бўламиз: $3 = 1 \times 3 + 0$, яъни $89 = (1 \cdot 3 + 0) \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2 = 1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2$. Охириги бўлишни бажариб, биз $a_3 = 0$ эканинигина топмасдан, катта хона рақами $a_4 = 1$ ни ҳам аниқладик. Шунинг учун бўлиш жараёни тугалланди. $1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2$ кўпхад 10022, сонининг ёзувидир. Демак, $89_{10} = 10022_3$.

Кўрсатилган бу жараённи бурчак қилиб бўлишни бажариб ҳам олиб бориш мумкин:

$$\begin{array}{r|l} 89 & 3 \\ \hline 6 & 29 \\ \hline 29 & 9 \\ \hline 27 & 2 \\ \hline 2 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 29 & 3 \\ \hline 27 & 9 \\ \hline 2 & 9 \\ \hline 0 & 3 \\ \hline 0 & 3 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ \hline 9 & 3 \\ \hline 0 & 3 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 3 & 3 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \quad 89_{10} = 10022_3.$$

Бундай бўлиш натижасини ёза бориб, катта хона рақами кетма-кет бўлишдаги охириги бўлинма эканлигини эса тутиш лозим.

Бошланғич математика курсида ўнли системадан фарқли позицион санок системаси қаралмайди. Бу система ҳақида билим бошланғич синф ўқитувчисига ўнли система хусусиятларини янада яхшироқ ўзлаштиришга ёрдам бериши керак. Ўнли

системадан фарқли системада сонлар билан амаллар бажарганда биз ўнли санок системасини эндиgina ўрганаётган қуйи синф ўқувчиси аҳволига тушиб қоламиз.

Машқлар

1. 1) Бешли санок системасида; 2) саккизли санок системасида сонларни ёзиш учун қандай ва нечта рақамлардан фойдаланиш мумкин?

2. Сонни коэффицентли асос даражаларининг йиғиндиси кўринишида ёзинг: 1) 1201_3 2) 43020_5 ; 3) 70652_8 .

3. Қуйидаги сонлар ёзувининг қайсилари соннинг саккизли санок системасидаги ёзуви бўлади:

1) 734; 2) 1109; 3) 1101; 4) 36 927?

4. Қуйидаги кўпхадлар орқали қандай сонлар ёзилганини аниқланг:

1) $2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 0$;

2) $4 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2$;

3) $1 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 6$;

4) $1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^3 + 1$.

5. Нима учун 2101_3 сонини бундай ўқиш мумкин эмас: «Икки минг бир юз бир»?

6. Сонларни ўнли санок системасида ёзинг: 15_6 ; 247_8 ; 102_3 ; 110_2 ; 451_5 .

7. Сонларни иккили санок системасида ёзинг: 9, 29, 129, 2.

8. Сонларни учли санок системасида ёзинг: 16_8 , 34_5 , 12_3 . 3.

9. Сонларни таққосланг:

1) 21012_3 ва 21100_3 ; 2) 210_3 ва 344_5 ; 3) 14_{10} ва 1110_2 .

10. p_{10} сони p асосли ($p \neq 10$) санок системасида қандай ёзилади?

73. Ўнли системадан фарқли позицион санок системасида сонлар устида амаллар

p ($p \neq 10$) асосли санок системасида сонлар устида амаллар ўнли санок системасидаги қондалар билан бажарилади. Энг аввал бир хонали сонларни қўшиш ва кўпайтириш учун тегишли жадваллар тузилади. Улардан бир хонали сонларни айириш ва бўлишда, шунингдек, кўп хонали сонлар билан амаллар бажаришда фойдаланилади.

Мисол учун учли санок системасида бир хонали сонларни қўшиш жадвалини тузамиз. Унда бир хонали сонлар — 0, 1, 2. 3 сони 10_3 каби ёзилади. 4_{10} сони 11_3 кўринишда ёзилади, чунки $4_{10} = 1 \cdot 3 + 1 = 11_3$. Худди шундай усул билан бошқа сонларнинг учли системадаги ёзувини топамиз. Қўшиш жадвалини сатр ва устун кесишган жойда йиғинди турадиган қилиб тузиш қулай.

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

Бу жадвалдан фойдаланиб, учли саноқ системасида ҳар қандай сонни қўшиш мумкин. Масалан, $122_3 + 122_3 = 2121_3$, чунки «устун» қилиб қўшсак:

$$\begin{array}{r} + 1221 \\ 122 \\ \hline 2120 \end{array}$$

Худди шу жадвалдан учли саноқ системасида сонларни айиришда фойдаланиш мумкин:

$$\begin{array}{r} - 2110 \\ 212 \\ \hline 1121 \end{array}$$

Учли саноқ системасида бир хонали сонларни кўпайтириш жадвали қуйидагича:

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Бу жадваллар ва кўпайтириш жадвалларига асосланиб, кўп хонали сонлар кўпайтирилади. Масалан, $122 \cdot 22$ кўпайтмани топайлик:

$$\begin{array}{r} \times 122 \\ 22 \\ \hline + 1021 \\ 1021 \\ \hline 12001 \end{array}$$

Шуни қайд қиламизки, ҳосил бўлган тўлиқсиз кўпайтмалар учли саноқ системасида қўшилади.

Бу жадвалга таяниб, учли саноқ системасида ёзилган сонлар бўлинадилар, масалан:

ниш аломатларигина эмас, сонларнинг бошқа муҳим хоссалари ҳам ихтиро қилинди.

Бу бўлиниш аломатларини қараш учун бўлинувчанлик муносабати тушунчасини аниқлаштириш зарур.

Таъриф. Бутун номанфий a сон ва b натурал сон берилган бўлсин. Агар a ни b га қолдиқли бўлганда қолдиқ нолга тенг бўлса, b сони a сонининг бўлувчиси дейилади.

Таърифдан келиб чиқади: агар b сони a нинг бўлувчиси бўлса, шундай бутун номанфий сон q мавжуд бўлдики, унинг учун $a = bq$ бўлади.

Масалан, 8 сони 32 нинг бўлувчиси, чунки шундай бутун номанфий $q=4$ сон мавжудки, унинг учун $32=8 \cdot 4$ бўлади.

«Берилган соннинг бўлувчиси» терминини «бўлувчи» терминидан ажрата билиш керак. Масалан, агар 18 ни 5 га бўлганда 5 сони бўлувчи дейилади, лекин бу сон 18 нинг бўлувчиси эмас. Агар 18 ни 6 га бўлсак, бунда «бўлувчи» ва «берилган соннинг бўлувчиси» терминлари битта нарсани англатади.

b сони a сонининг бўлувчиси бўлганда a сони b га каррали ёки a сони b га бўлинади дейилади ва $a : b$ каби ёзилади.

$a : b$ ёзув бўлинувчанлик муносабати ёзувидир, бу ёзув a ва b сонлари устида бажағиладиган амални кўрсатмайди, яъни $a : b = c$ деб ёзиб бўлмайди.

Берилган соннинг бўлувчиси шу сондан катта бўлмагани учун унинг бўлувчилари тўплами чекли. Масалан, 36 сонининг ҳамма бўлувчиларини айтайлик. Улар чекли тўпламни ҳосил қилади: $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$.

Бўлувчилар сонига қараб натурал сонлар орасида туб ва мураккаб сонлар фарқ қилинади.

Таъриф. Бўлувчилари сони иккита — бир ва шу соннинг ўзи бўлган натурал сон туб сон дейилади.

Масалан, 17 сони туб сон, чунки унинг фақат иккита бўлувчиси бор: 1 ва 17.

Таъриф. Бўлувчиларининг сони иккитадан ортиқ бўлган натурал сон мураккаб сон дейилади.

Масалан, 4 сони мураккаб сон, унинг учта бўлувчиси бор: 1, 2 ва 4.

1 сони туб сон ҳам эмас, мураккаб сон ҳам эмас, чунки унинг биттагина бўлувчиси бор.

Берилган сонга каррали сонлар чексиз кўп. Масалан, 4 га каррали сонлар чексиз қаторни ҳосил қилади: 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, ... Бу қатордаги ҳамма сонлар 4 га каррали бўлгани учун улар $x=4q$ формула ёрдамида ҳосил қилиниши мумкин, бунда q 0, 1, 2, 3 қийматларни қабул қилади.

Машқлар

1. Нима учун 15 сони: 1) 60 нинг бўлувчиси; 2) 3 сонига каррали эканини тушунтиринг.

2. 2, 3, 5 сонларидан қайсилари: 1) 230; 2) 225; 3) 450 сонларининг бўлувчилари бўлади?

3. 804, 75, 144, 150 сонларидан қайсилари: 1) 2; 2) 3; 3) 5; 4) 9 сонларига каррали?

4. 3 га каррали бўлган бешта сон айтинг. 3 га каррали бўлган бошқа сонларни қандай формула ёрдамида топиш мумкин?

5. а) 24; б) 38; в) 13; г) 1 сонларининг олувчиларни тўпламини ёзинг.

6. Ҳар қандай натурал a соннинг олувчилари тўплами чекли тўплам эканлигини исботланг.

7. Бутун номанфий сонлар тўплами 2 га бўлишда қолган қолдиққа қараб икки синфга бўлинади. Бу синфларнинг ҳар бири қандай сонлардан тузилган? Ҳар бир синфдан иккитадан сон ёзинг. Жуфт сонларни қандай формула ёрдамида ҳосил қилиш мумкин? Тоқ сонларни-чи?

8. Нима учун 19 сони туб сон, 12 сони эса мураккаб сон эканини тушунтиринг.

9. q нинг қандай қийматларида 11 q ифоданинг қиймати туб сон бўлади?

10. 60 сонининг ҳамма туб олувчиларини айтинг.

11. Қуйидаги тасдиқлардан тўғрисини кўрсатинг:

1) Натурал сонлар тўплами туб сонлар ва мураккаб сонлар синфига бўлинади. 2) Натурал сонлар тўплами туб сонлар, мураккаб сонлар ва 1 сонидан иборат.

75. Бўлинувчанлик муносабатининг хоссалари

Бўлинувчанлик муносабати қатор хоссаларга эга: рефлексив, антисимметрик ва транзитив. Бу хоссаларни ифодалаймиз. Бунда ва келгусида таърифларни ва бутун номанфий сонлар устида бажариладиган арифметик амаллар қонунларини маълум деб ҳисоблаймиз.

Теорема. Бўлинувчанлик муносабати рефлексивдир, яъни ҳар қандай натурал сон ўз-ўзига бўлинади.

Исботи. Ҳар қандай натурал a сон учун $a=a \cdot 1$ тенглик ўринли. Бу дегани, шундай $q=1$ сон мавжудки, унинг учун $a=a \cdot 1$, бундан бўлинувчанлик муносабати таърифига кўра $a:a$.

Исбот қилинган бу теоремадан ҳар қандай бутун номанфий соннинг 1 га бўлиниши келиб чиқади.

Теорема. Бўлинувчанлик муносабати антисимметриkdir, яъни $a:b$ даги турли a ва b сонлар учун $b:a$ эмаслиги келиб чиқади.

Исботи. $b:a$ бўлсин. b сони a га бўлиниши учун $b>a$ бўлиши зарур. Шартга кўра $a:b$, ва демак, $a>b \cdot b>a$ ва $a>b$ тенгсизликлар $a=b$ бўлгандагина тўғри. Зидликка келдик. Демак, бизнинг фаразимиз нотўғри, яъни бўлинувчанлик муносабати антисимметрик.

Теорема. Бўлинувчанлик муносабати транзитивдир, яъни $a:b$ ва $b:c$ дан $a:c$ келиб чиқади.



120- расм

Исботи. $a:b$ бўлгани учун шундай бутун номанфий q сони мавжудки, унинг учун $a=b \cdot q$ бўлади. $b:c$ бўлгани учун шундай бутун номанфий t сони мавжудки, унинг учун $b=c \cdot t$ бўлади. Биринчи тенгликда b ўрнига $c \cdot t$ купайтмани қўямиз: $a=(c \cdot t) \cdot q$ бўлади, бундан $a=(c \cdot t) \cdot q=c \cdot (t \cdot q)=c \cdot p$. p — бутун номанфий сон бўлгани учун $a=c \cdot p$ тенглик $a:c$ ни билдиради. Теорема исботланди.

Келгусида бўлинувчанлик масалаларининг ўрганиш ва масалалар ечиш учун қуйидагиларни аниқлаштириш зарур.

Масалан, агар сон 4 га бўлинса, у $4q$ кўринишга эга бўлади, бу ерда q — бутун номанфий сон. Агар сон 4 га бўлинмаса, у қандай кўринишга эга бўлади?

Маълумки, агар сон 4 га бутун сон марта бўлинмаса, у ҳолда уни 4 га қолдиқли бўлиш мумкин, бунда қолган қолдиқ 4 дан кичик бўлиши керак, яъни 1, 2 ёки 3 сонлари бўлиши керак. Унда 4 га бўлганда қолдиқда 1 қоладиган сонлар $4q$ — 1 кўринишда; 4 га бўлганда қолдиқда 2 қоладиган сонлар $4q-2$ кўринишда; 4 га бўлганда қолдиқда 3 қоладиган сонлар $4q-3$ кўринишда бўлади. $4q$, $4q-1$, $4q-2$, $4q-3$ кўринишдаги сонлар жуфт-жуфти билан ўзаро кесишмайдиган, уларнинг бирлашмаси эса бутун номанфий сонлар тўплами билан устма-уст тушадиган тўплamlар ҳосил қилади (120-расм).

Машқлар

1. Символлардан фойдаланиб, бўлинувчанлик муносабатининг хоссаларини ёзинг.

2. $X=\{12, 9, 6, 3, 18\}$ тўплaмда « x сони y сонининг бўлувчиси» муносабати графини ясанг. Бу граф қандай хусусиятларга эга? Агар « x y га каррaли» муносабати юқоридаги тўплaмда берилган бўлса, унинг графи юқоридаги графдан нимаси билан фарқ қилади?

3. $a:6$ ва $6:2$ маълум. a сонининг 2 га бўлиниши ҳақида қандай хулоса чиқариш мумкин?

4. a ни 3 га бўлганда қандай қолдиқ қолиши мумкин? 3 га бўлинмайдиган сонлар қандай кўринишга эга?

5. A тўплaм $3q$ кўринишдаги бутун номанфий сонлар тўплами, B тўплaм $3q+1$ кўринишдаги бутун номанфий сонлар тўплами, C тўплaм $3q+2$ кўринишдаги бутун номанфий сонлар тўплами. $A \cup B \cup C = Z_0$ деб айтиш мумкинми?

6. Бутун номанфий сонлар тўплaмидан 7 га каррaли сонлар қисм тўплами ажратилди. 7 га каррaли бўлмаган сонлар қисм тўплaмининг бирор бир усул билан синфларга бўлинг. Z_0 тўплaмининг бўлганда нечта синф ҳосил бўлади?

76. Бутун номанфий сонларнинг йиғиндиси, айирмаси ва кўпайтмасининг бўлинувчанлиги

Амалда кўпинча қуйидаги савод туғилади: ҳисобламасдан йиғинди (айирма, кўпайтма) берилган сонга бўлинадими ёки йўқми эканлигини қандай аниқлаш мумкин? Бунга бериладиган жавоб қуйидаги теоремаларни билишни талаб қилади.

Йиғиндининг бўлинувчанлиги ҳақида теорема.
Агар ҳар бир қўшилувчи натурал сон n га бўлинса, у ҳолда улар йиғиндиси ҳам шу сонга бўлинади.

Исботи. a ва b сонлари n га бўлинсин. Унда $a+b$ ҳам n га бўлинишини исбот қиламиз. $a:n$ бўлгани учун шундай бутун номанфий сон q мавжудки, унинг учун $a=nq$ бўлади. $b:n$ бўлгани учун шундай бутун номанфий p сони мавжудки, унинг учун $b=np$ бўлади. $a+b$ йиғиндида a ўрнига nq кўпайтмани, b ўрнига np кўпайтмани қўямиз. $a+b=nq+np$ ҳосил бўлади. Умумий кўпайтувчи n ни қавсдан ташқарига чиқарамиз ва қавс ичида ҳосил бўлган бутун номанфий $q+p$ сонни t ҳарфи билан белгилаймиз. $a+b=nq+np=n(q+p)=nt$. Биз $a+b$ йиғиндини n сони билан бутун номанфий сон t нинг кўпайтмаси кўринишида тасвирладик. Бундан $a+b$ соннинг n га бўлиниши келиб чиқади.

Биз теорема исботини икки қўшилувчи учун келтирдик. Уни m та қўшилувчининг йиғиндиси учун ҳам исботлаш мумкин.

Мисол. Ҳисобламасдан $114+348+908$ йиғинди 2 га бўлинади дейиш мумкин, чунки бу йиғиндидаги ҳар бир қўшилувчи 2 га бўлинади.

Айирманинг бўлинувчанлиги ҳақида теорема.
Агар a ва b сонлари n га бўлинса ва $a>b$ бўлса, у ҳолда $a-b$ айирма n га бўлинади.

Бу теореманинг исботи йиғиндининг бўлинувчанлиги ҳақидаги теоремага ўхшаш исботланади.

Кўпайтманинг бўлинувчанлиги ҳақида теорема.
Агар кўпайтманинг кўпайтувчиларидан бири натурал сон n га бўлинса, у ҳолда бутун кўпайтма ҳам n га бўлинади.

Исботи. Биз исботни иккита бутун номанфий a ва b кўпайтувчилардан тузилган кўпайтма учун келтирамиз. Кўпайтувчилардан бири, масалан, a n га бўлинсин. $a:n$ бўлгани учун шундай бутун номанфий q сони мавжудки, унинг учун $a=nq$ бўлади. Бу тенгликнинг иккала қисмини b га кўпайтирамиз: $a \cdot b = (nq) \cdot b$. Бундан $a \cdot b = n(q \cdot b)$, аммо $q \cdot b$ — бутун номанфий сон, демак $ab:n$.

Кўпайтувчилари сони m та бўлган кўпайтма учун ҳам теорема худди шундай исботланади.

Масалан, $24 \cdot 976 \cdot 305$ кўпайтма 12 га бўлинади, чунки 24 кўпайтувчи 12 га бўлинади.

Бўлишга доир масалалар ечишда кўпинча қўлланиладиган ҳамда кўпайтма ва йиғиндининг бўлинувчанлиги билан боғлиқ бўлган яна иккита теоремани қараймиз.

Теорема. Агар ab кўпайтмада a кўпайтувчи натурал сон m га, b кўпайтувчи натурал сон n га бўлинса, у ҳолда ab кўпайтма mn кўпайтмага бўлинади.

Бу теореманинг исботи кўпайтманинг бўлинувчанлиги ҳақидаги теореманинг исботига ўхшаш.

Масалан, $24 \cdot 36$ кўпайтма $108 = 12 \cdot 9$ га бўлинади, чунки 24 сони 12 га, 36 сони 9 га бўлинади.

Теорема. Агар mn йиғиндида қўшилувчилардан бири m га бўлинмаса, қолган қўшилувчилар эса m га бўлинса, у ҳолда бутун mn йиғинди m га бўлинмайди.

Исботи. $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n + c$ бўлсин ва $a_1 : m, a_2 : m, \dots, a_n : m$, аммо $c : m$ экани маълум бўлсин. У ҳолда $s : m$ бўлишини исботлаймиз.

Тескарисини фараз қиламиз, яъни $s : m$ бўлсин. s йиғиндини ушбу кўринишга келтирамиз: $c = s - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$. Фаразга кўра $s : m$, йиғиндининг бўлинувчанлиги ҳақидаги теоремага кўра $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) : m$ бўлгани учун айирманинг бўлинувчанлиги ҳақидаги теоремага асосан $s : m$ бўлади. Берилганга нисбатан зиддиятликка келдик. Шундай қилиб, $s : m$ экан.

Масалан, $34 + 125 + 376 + 1024$ йиғинди 2 га бўлинмайди, чунки $34 : 2, 376 : 2, 1024 : 2$, аммо $125 : 2$.

Қаралган теоремалар сонлар бўлинувчанлиги билан боғлиқ бўлган масалалар ечимининг асосидир.

Масала. Ихтиёрий иккита кетма-кет натурал соннинг кўпайтмаси 2 га бўлинишини исботланг.

Ечиш. Масала шартларини белги (символ) лардан фойдаланиб ёзамиз. Агар битта натурал сонни n ҳарфи билан белгиласак, ундан кейинги сонни $n+1$ билан белгилаймиз. Демак, биз $n(n+1) : 2$ нинг ҳар қандай натурал сон учун тўғрилигини исботлашимиз керак.

Маълумки, бутун номанфий сонлар тўпламини иккита синфга — жуфт сонлар (яъни $2q$ кўринишидаги сонлар) ва тоқ сонлар (яъни $2q+1$ кўринишидаги сонлар) га бўлиш мумкин.

Агар $n = 2q$ бўлса, у ҳолда $n(n+1) = 2q(2q+1)$. $2q(2q+1)$ кўпайтмада 2 га бўлинадиган кўпайтувчи бўлгани учун кўпайтманинг бўлинувчанлиги ҳақидаги теоремага кўра бутун кўпайтма 2 га бўлинади. Демак, $n(n+1) : 2$.

Агар $n = 2q+1$ бўлса, у ҳолда $n(n+1) = (2q+1) \cdot (2q+2)$. Бу кўпайтмада 2 га бўлинадиган $2q+2$ кўпайтувчи бор бўлгани учун (йиғиндининг ҳар бир қўшилувчиси 2 га бўлинади) бутун кўпайтма ҳам 2 га бўлинади. Демак, бу ҳолда ҳам $n(n+1) : 2$.

Шундай қилиб, $n(n+1) : 2$ даъво ҳамма жуфт ва тоқ натурал сонлар учун ўринли, демак, у ҳар қандай натурал сон учун ўринли.

Тўғри, бу даъвонинг исботини осонроқ усул билан келтириш мумкин эди, унда кетма-кет иккита натурал соннинг биттаси албатта жуфт бўлиши фактидан фойдаланилади, аммо юқорида келтирилган

исботнинг аҳамияти шундаки, у сонларнинг бўлинувчанлиги ҳақида-
ги даъво исботнинг бирорта усули намунасидир. Бу усул — тўлиқ
индукциядир, унда даъвонинг тўғрилиги унинг хусусий ҳолларда
тўғрилигидан келтириб чиқарилади.

Машқлар

1. Йиғиндининг бўлинувчанлиги ҳақидаги теорема исботида бун-
дай алмаштириш бор: $a+b=nq+pr=n(q+p)$. Тушунтиринг: 1) қан-
дай назарий далил асосида n ни қавсдан ташқарига чиқариш мум-
кин бўлади; 2) нима учун $q+p$ йиғинди бутун номанфий сон бўлади?

2. Йиғиндининг бўлинувчанлиги ҳақидаги теоремани 1) учта қў-
шилувчи учун; 2) m та қўшилувчи учун исботланг.

3. Бутун номанфий сонлар айирмасининг натурал сонга бўлинув-
чанлиги ҳақидаги теоремани исботланг.

4. 1) Агар $a:m$ ва $b:n$ бўлса, у ҳолда $ab:mn$; 2) агар $a:m$
ва $b:m$ бўлса, у ҳолда $ab:m^2$ бўлишини исботланг.

5. a нинг n га ва b нинг n га каррали эмаслиги маълум. Қуйи-
дагилар тўғрими: 1) $a+b$ йиғинди n га каррали эмас; 2) $a \cdot b$ кўпайтма
 n га каррали эмас?

6. 1) $180+144$; 2) $720+308$; 3) $103+370$ ифодаларнинг қий-
мати 3 га бўлинишини қўшиш амалини бажармасдан аниқланг.

7. 1) $535-413$; 2) $1215-470$; 3) $20147-1307$ ифодаларнинг
қиймати 5 га бўлинишини айтириш амалини бажармасдан аниқ-
ланг.

8. $75 \cdot 32 \cdot 27$ кўпайтмани ҳисобламасдан унинг 5 га, 8 га, 9 га,
10 га, 18 га, 48 га бўлинишини аниқланг.

9. Агар икки хонали сонга шу сондаги рақамлар билан, ле-
кин тескари тартибда ёзилган сон қўшилса, у ҳолда йиғинди
11 га каррали бўлади. Шунини исботланг.

10. Қуйидаги фикрларни исботланг ёки инкор этинг: 1) Ик-
кита натурал соннинг йиғиндиси жуфт сон бўлиши учун ҳар
бир қўшилувчи жуфт сон бўлиши зарур. 2) Иккита натурал
соннинг йиғиндиси жуфт сон бўлишидан иккала қўшилувчи-
нинг ҳам жуфт сон бўлиши келиб чиқади. 3) a ва b сонларнинг
тоқ сон бўлишидан уларнинг $a+b$ йиғиндиси жуфт сон бўлиши
келиб чиқади. 4) Иккита натурал соннинг йиғиндиси тоқ сон
бўлиши учун улардан бири жуфт сон, иккинчиси тоқ сон бўли-
ши етарли.

11. a — жуфт натурал сон, b — тоқ натурал сон ва $a > b$.
 a ва b сонларининг айирмаси қандай сон бўлади? Исботланг.

12. 1) Иккита кетма-кет жуфт соннинг; 2) иккита кетма-кет
тоқ соннинг йиғиндиси 4 га карралими?

13. Учта кетма-кет натурал соннинг кўпайтмаси 3 га бўли-
нишини тўлиқ индукция усули билан исботланг.

14. Тоқ натурал соннинг квадратини 8 га бўлганда 1 қол-
диқ қолишини исботланг.

15. Иккита кетма-кет натурал сонлар квадратларининг йиғиндисини 4 га бўлганда 1 қолдиқ қолишини исботланг.

16. Иккита кетма-кет жуфт соннинг кўпайтмаси 8 га бўлинишини исботланг.

77. Ўнли санок системасида сонларнинг бўлиниш аломатлари

Сизга 2 га, 3 га, 4 га, 5 га ва ҳоказо бўлиниш аломатлари маълум. Уларнинг ҳаммаси ўнли санок системасида ёзилган сонларга мўлжалланган. Бизнинг вазифамиз — юқорида келтирилган бўлинувчанлик муносабатларининг таърифи ва сонларнинг ўнли санок системасида ёзилиш усулларига таяниб, бу аломатларни асослашдир.

2 га бўлиниш аломати. ***x сони 2 га бўлиниши учун унинг ўнли ёзуви 0, 2, 4, 6, 8 рақамларидан бири билан тугаши зарур ва етарлидир.***

Исботи. x сони ўнли санок системасида ёзилган бўлсин, яъни $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$ (1), бунда $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ лар 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 қийматларни қабул қилади ва $a_n \neq 0$ ҳамда a_0 0, 2, 4, 6, 8 қийматларни қабул қилади. У ҳолда $x : 2$ бўлишини исботлаймиз.

$10 : 2$ бўлгани учун $10^2 : 2, 10^3 : 2, \dots, 10^n : 2$ ва демак, $(a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10) : 2$. Шартга кўра a_0 ҳам 2 га бўлинади, шунинг учун x ни ҳар бири 2 га бўлинадиган икки қўшилувчининг йиғиндиси сифатида қараш мумкин. Демак, йиғиндининг бўлинувчанлиги ҳақидаги теоремага кўра x соннинг ўзи ҳам 2 га бўлинади.

Энди тескарисини исботлаймиз: агар x сон 2 га бўлинса, унинг ўнли ёзуви 0, 2, 4, 6, 8 рақамларидан бири билан тугайди.

(1) тенгликни $a_0 = x - (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10)$ кўринишда ёзамиз. У ҳолда айирманинг бўлинувчанлиги ҳақидаги теоремага кўра $a_0 : 2$, чунки $x : 2$ ва $(a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10) : 2$. Бир хонали сон 2 га бўлиниши учун у 0, 2, 4, 6, 8 қийматларни қабул қилиши керак.

5 га бўлиниш аломати. ***x сони 5 га бўлиниши учун унинг ўнли ёзуви 0 ёки 5 рақами билан тугаши зарур ва етарлидир.***

Бу аломатнинг исботи 2 га бўлиниш аломатининг исботига ўхшайди.

4 га бўлиниш аломати. ***x сони 4 га бўлиниши учун x соннинг ўнли ёзувидаги охириги иккита рақамидан ҳосил бўлган икки хонали соннинг 4 га бўлиниши зарур ва етарлидир.***

Исботи. x сони ўнли санок системасида ёзилган бўлсин, яъни $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, бунда $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ лар 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 қийматларни қабул қилади ва

охирги иккита рақам 4 га бўлинадиган сонни ташкил қилади. У ҳолда $x : 4$ бўлишини исботлаймиз.

$100 : 4$ бўлгани учун $(a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2) : 4$. Шартга кўра $a_1 \cdot 10 + a_0$ (бу икки хонали соннинг ёзувидир) ҳам 4 га бўлинади. Шунинг учун x ни ҳар бири 4 га бўлинадиган икки қўшилувчининг йиғиндиси деб қараш мумкин. Демак, йиғиндининг бўлинувчанлиги ҳақидаги теоремага кўра x сонининг ўзи ҳам 4 га бўлинади.

Тескарисини исбот қиламиз, яъни агар x сони 4 га бўлинса, унинг ўнли ёзувидаги охирги иккита рақамдан ҳосил бўлган икки хонали сон ҳам 4 га бўлинади.

(1) тенгликни қуйидагича ёзамиз: $a_1 \cdot 10 + a_0 = x - (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2)$. $x : 4$ ва $(a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2) : 4$ бўлгани учун айирманинг бўлинувчанлиги ҳақидаги теоремага кўра $(a_1 \cdot 10 + a_0) : 4$. Аммо $a_1 \cdot 10 + a_0$ ёзув x сонининг охирги иккита рақамидан ҳосил бўлган икки хонали соннинг ёзувидир.

9 га бўлиниш аломати. **x сони 9 га бўлиниши учун унинг ўнли ёзувидаги рақамлари йиғиндиси 9 га бўлиниши зарур ва етарлидир.**

Исботи. Аввал $10^n - 1$ кўринишдаги сонлар 9 га бўлинишини исботлаймиз. Ҳақиқатан, $10^n - 1 = (9 \cdot 10^{n-1} + 10^{n-1}) - 1 = (9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + 10^{n-2}) - 1 = (9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + \dots + 10) - 1 = 9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + \dots + 9$. Ҳосил бўлган йиғиндининг ҳар бир қўшилувчиси 9 га бўлинади, демак, $10^n - 1$ сони ҳам 9 га бўлинади.

x сони ўнли санок системасида ёзилган бўлсин, яъни $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$, бунда $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ лар 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 қийматларни қабул қилади ва $(a_n + a_{n-1} + \dots + a_0) : 9$. У ҳолда $x : 9$ бўлишини исботлаймиз.

$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_0$ йиғиндига $a_n + a_{n-1} + \dots + a_0$ ифодани қўшиб ва айириб, натижани бундай кўринишда ёзамиз: $x = (a_n \cdot 10^n - a_n) + (a_{n-1} \cdot 10^{n-1} - a_{n-1}) + \dots + (a_1 \cdot 10 - a_1) + (a_0 - a_0) + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) = a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \dots + a_1(10 - 1) + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_0)$.

Охирги йиғиндида ҳар бир қўшилувчи 9 га бўлинади:

$$\begin{aligned} a_n \cdot (10^n - 1) : 9, \text{ чунки } (10^n - 1) : 9, \\ a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) : 9, \text{ чунки } (10^{n-1} - 1) : 9, \\ \dots \dots \dots a_1(10 - 1) : 9, \text{ чунки } (10 - 1) : 9. \end{aligned}$$

Шартга кўра $(a_n + a_{n-1} + \dots + a_0) : 9$. Демак, $x : 9$.

Тескарисини исботлаймиз: яъни агар x сони 9 га бўлинса, унинг ўнли ёзувидаги рақамлар йиғиндиси 9 га бўлинади.

(1) тенгликни қуйидагича ёзамиз: $a_n + a_{n-1} + \dots + a_0 = x - (a_n \cdot (10^n - 1) + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + \dots + a_1(10 - 1))$. $x : 9$ ва $(a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \dots + a_1(10 - 1)) : 9$.

$-1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \dots + a_1(10 - 1) : 9$ бўлгани учун айирманинг бўлинувчанлиги ҳақидаги теоремага кўра $(a_n + a_{n-1} + \dots + a_0) : 9$. Аммо $a_n + a_{n-1} + \dots + a_0$ ифода x сонининг ўнли ёзувидаги рақамлар йиғиндисидир.

3 га бўлиниш аломати. x сони 3 га бўлиниши учун унинг ўнли ёзувидаги рақамлар йиғиндиси 3 га бўлиниши зарур ва етарлидир.

Бу аломатнинг исботи 9 га бўлиниш аломатининг исботига ўхшашдир.

Бошланғич математика курсида бутун номанфий сонларнинг бўлиниши махсус ўрганилмайди. Аммо йиғиндини сонга ва сонни кўпайтмага бўлиш қоидаларидан фойдаланиш қуйидаги саволга жавоб беришни тақозо қилади: бир сон иккинчи сонга бўлинадими ёки йўқми? Бу саволга жавоб беришда бошланғич синф ўқувчилари бўлиниш аломатларига эмас, балки кўпайтириш жадвалига амал қиладилар. Шунинг учун математика дарсликларида фақат жадвалдан фойдаланиб ечиладиган топшириқлар берилади. Масалан, $(62 + 18) : 8$, $(36 + 27) : 9$, $(40 + 16) : 7$ ифодаalar орасидан ҳар бир қўшилувчиси кўрсатилган сонга бўлинадиган ифодани танлаш учун ўқувчи 36 ҳам, 27 ҳам 9 га бўлинишини, 62 ва 18 сонлари эса 8 га бўлинмаслигини яхши билиши керак. Худди шунингдек, $720 : (9 \cdot 5)$ ифоданинг қийматини $(720 : 9) : 5$ усул билан топиш учун ўқувчи 720 нинг 9 га, 80 нинг 5 га бўлинишини билиши керак, яъни жадвалдан ташқари яна бўлишнинг айрим ҳолларини ҳам билиши керак.

Машқлар

1. 1) Ҳам 5 га, ҳам 9 га бўлинадиган беш хонали сон ёзинг;
- 2) 3 га бўлинадиган, лекин 9 га бўлинмайдиган уч хонали сон ёзинг;
- 3) 2 га бўлинадиган, лекин 4 га бўлинмайдиган тўрт хонали сон ёзинг;
- 4) ҳам 4 га, ҳам 5 га бўлинадиган беш хонали сон ёзинг.
2. 5 га, 25 га ва 3 га бўлиниш аломатларини исботланг.
3. Соннинг ёзуви 5 рақами билан тугамайди. Бу сон 5 га бўлинадими?
4. $10^{26} + 8$ сони 9 га бўлинадими?
5. Қуйидаги сонларнинг қайсыларини 9га кўринишда ифодалаш мумкин: 1) 333; 2) 8021; 3) 10800?
6. Қўшиш амалини бажармасдан ифоданинг қиймати 4 га бўлиниш-бўлинмаслигини аниқланг:
 - 1) $284 + 1440 + 113$; 3) $284 + 1441 + 113$;
 - 2) $284 + 1440 + 792224$; 4) $284 + 1441 + 113 + 164$.
7. Айириш амалини бажармасдан: 1) $360 - 144$; 2) $946 - 540$; 3) $30240 - 9720$; 4) $321 - 248$ айирма 9 га бўлиниш-бўлинмаслигини аниқланг.

8. Қандай ҳолда (7- машққа қ.) айирма 4 га бўлинади? 5 га бўлинади?

9. 9 сони 2043·402 кўпайтманинг бўлувчиси эканлигини исботланг.

10. Ҳар қандай тўрт хонали сон ва шу сон рақамлари билан, лекин тескари тартибда ёзилган тўрт хонали соннинг айирмаси 9 га бўлинишини исботланг.

11. Агар a сонини 5 га бўлганда 3 қолдиқ қолса $a^2 + 1$ сони 5 га бўлинади. Шунини исботланг.

12. Бошланғич синфларнинг математика дарсликларидан бажарилиш соннинг берилган сонга бўлинишини текширишни талаб қилинадиган топшириқларга мисоллар келтиринг.

78. Энг катта умумий бўлувчи ва энг кичик умумий каррали

12 ва 8 сонларини оламиз ва уларнинг бўлувчиларини ёзамиз.

12 сони 1, 2, 3, 4, 6, 12 га бўлинади.

8 сони 1, 2, 4, 8 га бўлинади.

12 ва 8 сонларининг умумий бўлувчилари бор. Булар 1, 2 ва 4 сонларидир. Уларнинг орасида энг каттаси 4. У 12 ва 8 сонларининг энг катта умумий бўлувчиси дейилади.

Бу тушунчаларга таърифлар берамиз.

Таъриф. a ва b натурал сонларнинг умумий бўлувчиси деб берилган сонларнинг ҳар бирининг бўлувчиси бўлган ҳар қандай натурал сонга айтилади.

Таъриф. a ва b натурал сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси деб берилган сонлар умумий бўлувчиларининг энг каттасига айтилади.

a ва b сонларининг энг катта умумий бўлувчиси $D(a, b)$ каби белгиланади. Масалан, $D(12, 8) = 4$.

Энг катта умумий бўлувчининг баъзи хоссаларини исботсиз келтирамиз.

1. a ва b натурал сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси ҳар доим мавжуд ва у яғонадир.

2. a ва b сонларининг энг катта умумий бўлувчиси берилган сонларнинг кичигидан катта эмас, яъни, агар $a < b$ бўлса, $D(a, b) \leq a$.

3. a ва b натурал сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси шу сонлар умумий бўлувчиларининг исталганига бўлинади.

Масалан, 12 ва 8 сонларининг умумий бўлувчилари 1, 2, 4 сонларидир. 4 сони — 12 ва 8 сонларининг энг катта умумий бўлувчиси. Кўриб турибмизки, у 1 га ҳам, 2 га ҳам бўлинади.

Яна ўша 12 ва 8 сонларини оламиз ва шу сонларга каррали бир нечта сон ёзамиз. 12 га каррали сонлар: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, ...; 8 га каррали сонлар: 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 72, ...

12 ва 8 сонларининг умумий карралилари бор. Улар 24, 48, 72, ... сонлари. Улар орасида энг кичик сон 24. У 12 ва 8 сонларининг энг кичик умумий карралиси дейилади. Бу тушунчаларга таърифлар берамиз.

Таъриф. a ва b натурал сонларнинг умумий карралиси деб берилган сонларнинг ҳар бирига каррали бўлган ҳар қандай натурал сонга айтилади.

Таъриф. a ва b натурал сонларнинг энг кичик умумий карралиси деб берилган сонлар умумий карралиларининг энг кичигига айтилади.

a ва b сонларининг энг кичик умумий карралиси $K(a, b)$ каби белгиланади. Масалан, $K(12, 8) = 24$.

Икки соннинг энг кичик умумий карралисининг баъзи хоссаларини исботсиз келтирамиз.

1. a ва b натурал сонларнинг энг кичик умумий карралиси ҳар доим мавжуд ва у яғонадир.

2. a ва b сонларининг энг кичик умумий карралиси берилган сонларнинг каттасидан кичик эмас, яъни, агар $a > b$ бўлса, $K(a, b) \geq a$.

3. a ва b натурал сонларнинг ихтиёрий умумий карралиси шу сонларнинг энг кичик умумий карралисига бўлинади.

Масалан, 12 ва 8 сонларининг умумий карралилари уларнинг энг кичик умумий карралиси 24 га бўлинади: $48 : 24, 72 : 24$ ва χ к.

a ва b сонларининг энг кичик умумий карралиси ва уларнинг энг катта умумий бўлувчиси ўзаро боғланган.

Юқорида биз $K(12, 8) = 24, D(12, 8) = 4$ дедик. 12 ва 8 сонларининг энг кичик умумий карралисини уларнинг энг катта умумий бўлувчисига кўпайтирамиз: $K(12, 8) \cdot D(12, 8) = 24 \cdot 4 = 96$. Энди берилган сонларнинг кўпайтмасини топамиз: $12 \cdot 8 = 96$. Бу икки кўпайтманинг бир хил бўлиши тасодиғми?

Маълум бўлишичэ, ҳар қандай a ва b натурал сонлар учун қуйидаги тасдиқ ўринли экан: a ва b сонларининг энг кичик умумий карралиси билан энг катта умумий бўлувчисининг кўпайтмаси a ва b сонларининг кўпайтмасига тенг, яъни $K(a, b) \cdot D(a, b) = ab$ тенглик ўринли.

Бу тенглик a ва b сонларининг энг катта умумий бўлувчисини билган ҳолда уларнинг энг кичик умумий карралисини топишга ёрдам беради:

$$K(a, b) = \frac{ab}{D(a, b)}.$$

Хусусан, агар a ва b сонларининг энг катта умумий бўлувчиси 1 га тенг бўлса, у ҳолда шу сонларнинг энг кичик умумий карралиси ab кўпайтмага тенг бўлади.

Масалан, агар $a = 17, b = 5$ бўлса, улар 1 дан бошқа умумий бўлувчига эга бўлмайди, демак, $D(17, 5) = 1$. У ҳолда $K(17, 5) = 17 \cdot 5 = 85$.

Машқлар

1. 36 ва 24 сонларининг ҳар бирининг бўлувчиларини ёзинг ва уларнинг умумий бўлувчисини кўрсатинг. Бу сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси нимага тенг?

2. 36 га каррали олтита сон ва 24 га каррали олтита сон айтинг. Улар орасидан умумий карралиларни кўрсатинг. 36 ва 24 сонларининг энг кичик умумий карралиси нимага тенг?

3. Қуйидаги тенгликлар тўғрими: 1) $D(32, 8)=8$; 2) $K(32, 8)=32$?

4. Уқувчи қуйидагиларни топди: $D(136, 225)=17$, $K(136, 225)=2040$. Чиққан натижалар тўғрилигини қандай текшириш мумкин?

5. Агар: 1) $D(315, 385)=35$; 2) $D(47, 105)=1$ маълум бўлса, a ва b сонларининг энг кичик умумий карралисини топинг.

79. Мураккаб сонларга бўлиниш аломатлари

Юқорида кўрсатилган бўлиниш аломатлари сонларнинг 2 га, 3 га, 4 га, 5 га, 9 га ва 25 га бўлинишини аниқлашга ёрдам беради. Бўлишни бажармасдан соннинг 6 га, 12 га, 30 га бўлиниш-бўлинмаслигини қандай билиш мумкин? Қуйидагича фараз қилиш мумкин: масалан, агар сон 2 га ҳам, 3 га ҳам бўлинса, у 6 га бўлинади. Лекин бу фараз исботни талаб қилади.

6 га бўлиниш аломати. ***x сони 6 га бўлиниши учун у 2 га ҳам, 3 га ҳам бўлиниши зарур ва етарлидир.***

Исботи. x сони 6 га бўлинсин. У ҳолда $x:6$ ва $6:2$ дан $x:2$ бўлиши, $x:6$ ва $6:3$ дан $x:3$ бўлиши келиб чиқади. Биз соннинг 6 га бўлиниши учун унинг 2 га ҳам, 3 га ҳам бўлиниши зарур эканлигини исботладик.

Бу шартнинг етарлилигини исботлаймиз. $x:2$ ва $x:3$ бўлгани учун x сони 2 ва 3 нинг умумий карралисидир. Аммо соннинг ис-талган умумий карралиси уларнинг энг кичик карралисига бўлинади, демак, $x:K(2, 3)$. $D(2, 3)=1$ бўлгани учун $K(2, 3)=2 \cdot 3=6$. Демак, $x:6$.

12 га бўлиниш аломати. ***x сони 12 га бўлиниши учун у 3 га ҳам, 4 га ҳам бўлиниши зарур ва етарлидир.***

Бу аломатнинг исботи олдинги аломатнинг исботига ўхшашидир.

15 га бўлиниш аломати. ***x сони 15 га бўлиниши учун у 3 га ҳам, 5 га ҳам бўлиниши зарур ва етарлидир.***

* Мураккаб сонга бўлиниш аломатлари рўйхатини давом эттириш мумкин. Уларнинг умумлашмаси қуйидаги теоремадир:

Теорема. ***Натурал сон мураккаб сон $n=bc$ га бўлиниши учун у сон b га ҳам, c га ҳам бўлиниши зарур ва етарлидир, бунда b ва c сонлар шундайки, улар учун $D(b, c)=1$.***

Бу теореманинг исботи 6 га бўлиниш аломатининг исботи каби бажарилади.

Шуни эслатамизки, бу теоремани кўп марта қўлланиш мумкин. Масалан, 60 га бўлиниш аломатини қарайлик.

Сон 60 га бўлиниши учун унинг 4 га ҳам, 15 га ҳам бўлиниши зарур ва етарлидир.

Аммо ўз навбатида сон ҳам 3 га, ҳам 5 га бўлинганда ва фақат шунда 15 га бўлинади. Шунинг учун 60 га бўлиниш аломатини бошқача ифодалаш мумкин:

Сон 60 га бўлиниши учун унинг 4 га ҳам, 3 га ҳам, 5 га ҳам бўлиниши зарур ва етарлидир.

Ма с а л а. 1548 ва 942 сонлари 18 га бўлинадими?

Е ч и ш. Аввал 18 га бўлиниш аломатини ифодалаймиз:

Сон 18 га бўлиниши учун унинг 2 га ҳам, 9 га ҳам бўлиниши зарур ва етарлидир.

Нима учун 2 ва 9 сонлари танланди? Биринчидан, $2 \cdot 9 = 18$, иккинчидан $D(2,9) = 1$, яъни 2 ва 9 сонлари мураккаб сонга бўлувчанлик ҳақидаги теоремани қаноатлантиради.

18 сонини 3·6 кўпайтмага келтириш ярамайди, чунки $D(3,6) \neq 1$.

2 га ва 9 га бўлиниш аломатларидан фойдаланиб, $1548 : 2$ ва $1548 : 9$ деймиз. Демак, $1548 : 18$.

$942 : 2$, аммо бу сон 9 га бўлинмайди. Демак, 942 сони 18 га бўлинмайди.

Машқлар

1. 1032, 2964, 5604, 8910 ва 7008 сонларидан қайсилари 12 га каррали?

2. 15 га бўлинадиган учта тўрт хонали сон ёзинг.

3. 20 га бўлиниш аломатини ифодаланг ва 20 га бўлинадиган учта беш хонали сон ёзинг.

4. 1) 22530; 2) 53420 сонларидан қайсиларини 30 q кўринишда ёзиш мумкинлигини аниқланг, бунда q — натурал сон (30 га бўлишни бажарманг).

5. A — 7 га ва 3 га каррали натурал сонлар тўплами, B — 21 га каррали натурал сонлар тўплами. $A = B$ эканини исботланг.

6. 14, 35, 70 сонларидан қайсилари 840 нинг бўлувчилари бўлади? (Берилган сонга бўлишни бажарманг.)

7. n нинг ҳар қандай натурал қийматида 11 n ифоданинг қиймати: 1) 11 га каррали; 2) 7 га каррали эмас. Шу тўғрими?

8. Кўпайтирмасдан ва бурчак қилиб бўлмасдан, қуйидаги кўпайтмаларнинг қайсиларни 70 га бўлинишини аниқланг:

1) 105·20; 2) 42·12·5; 3) 85·33·4.

9. 15 нинг ўнг томониغا ва чап томонига биттадан шундай рақамни ёзингки, ҳосил бўлган сон 15 га бўлинсин.

10. Исталган натурал соннинг кубин билан шу соннинг айирмасин 6 га бўлинишини исботланг.

80. Сонларни туб кўпайтувчиларга ажратиш (ёйиш) усули билан уларнинг энг катта умумий бўлувчиси ва энг кичик умумий карралисини топиш

Сонни туб сонлар кўпайтмаси кўрнинишида ифодалаш бу сонни туб кўпайтувчиларга ажратиш (ёйиш) дейилади.

Масалан, $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$ ёзув 110 сони 2, 5, 11 туб кўпайтувчиларга ажратилганини билдиради.

Умуман, ҳар қандай мураккаб сонни туб кўпайтувчиларга ажратиш мумкин. Қандай усулда ажратилса ҳам бир хил ёйилма ҳосил бўлади (агар кўпайтувчилар тартиби ҳисобга олинмаса). Шунинг учун 110 сонини $2 \cdot 5 \cdot 11$ кўпайтма ёки $5 \cdot 2 \cdot 11$ кўпайтма кўрнинишида ёзиш 110 сонини туб кўпайтувчиларга ажратишнинг бир хил ёйилмасидир.

Сонларни туб кўпайтувчиларга ажратишда 2 га, 3 га, 5 га ва ҳоказо, бўлиниш аломатлари қўлланилади. Сонларни туб кўпайтувчиларга ажратиб ёзиш усулини эслайлик. Масалан, 720 сонини туб кўпайтувчиларга ажратайлик. 720 сони 2 га бўлинади. Демак, 2 сони 720 нинг ёйилмасидаги туб кўпайтувчилардан бири экан. 720 ни 2 га бўламиз. 2 сонини тенглик белгисидан ўнг томонга ёзамиз, 360 бўлиниши 720 сони остига ёзамиз. 360 ни 2 га бўламиз, 180 чиқади. 180 ни 2 га бўламиз, 90 чиқади, 90 ни 2 га бўламиз, 45 чиқади, 45 ни 5 га бўламиз, 15 чиқади, 15 ни 3 га бўламиз, 5 чиқади. 5 сони туб сон, уни 5 га бўламиз, 1 чиқади. Кўпайтувчиларга ажратиш тугади.

$$\begin{array}{r} 720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \\ 360 \\ 180 \\ 90 \\ 45 \\ 15 \\ 5 \\ 1 \end{array}$$

Бир хил кўпайтувчилар кўпайтмасини даража қилиб ёзиш қабул қилинган. $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. 720 сонининг бундай ёзилишининг каноник кўрниниши дейилади.

Сонларни туб кўпайтувчиларга ажратиш уларнинг энг катта умумий бўлувчисини ва энг кичик умумий карралисини топишда қўлланилади.

Масалан, 3600 ва 288 сонларининг энг катта умумий бўлувчиси ва энг кичик умумий карралисини топилайлик.

Бу сонларнинг ҳар бирини каноник кўрнинишида ёзамиз.

$$3600 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2; 288 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^5 \cdot 3^2$$

1800	144
900	72
450	36
225	18
75	9
25	3
5	1
1	

3600 ва 288 сонларининг энг катта умумий бўлувчисининг туб кўпайтувчиларга ёйилмасига берилган сонлар ёйилмасидаги барча умумий туб кўпайтувчилар кириши ва бу туб кўпайтувчиларнинг ҳар бири берилган сонларнинг ёйилмаларидаги энг кичик кўрсаткичи билан олиниси керак. Шунинг учун 3600 ва 288 сонларининг энг катта умумий бўлувчисининг ёйилмасига 2^4 ва 3^2 кўпайтувчилар киради. Демак, $D(3600, 288) = 2^4 \cdot 3^2 = 144$.

3600 ва 288 сонларининг энг кичик умумий карралисининг туб кўпайтувчиларга ёйилмасига берилган сонлар ёйилмасининг ҳеч бўлмаганда биттасида бўлган ҳамма туб кўпайтувчилар кириши ва бу туб кўпайтувчиларнинг ҳар бири шу ёйилмалардаги энг катта даражаси билан олиниси керак. Шунинг учун 3600 ва 288 сонларнинг энг кичик умумий карралисининг ёйилмасига 2^5 , 3^2 , 5^2 кўпайтувчилар киради. Демак, $K(3600, 288) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 7200$.

Умуман, берилган сонларнинг энг катта умумий бўлувчисини топиш учун:

1) берилган ҳар бир сонни каноник кўринишда ёзамиз;

2) берилган ҳамма сонларнинг умумий туб кўпайтувчилари кўпайтмасини ҳосил қиламиз, бунда туб кўпайтувчиларнинг ҳар бирини берилган сонлар ёйилмасига кирган энг кичик кўрсаткичи билан оламиз;

3) бу кўпайтманинг қийматини топамиз — у бу берилган сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси бўлади.

Берилган сонларнинг энг кичик умумий карралисини топиш учун:

1) берилган ҳар бир сонни каноник кўринишда ёзамиз;

2) берилган сонлар ёйилмасидаги ҳамма туб кўпайтувчилар кўпайтмасини ҳосил қиламиз, бунда ҳар бир кўпайтувчинини берилган сонлар ёйилмасига кирган энг катта кўрсаткичи билан оламиз;

3) бу кўпайтманинг қийматини топамиз — у берилган сонларнинг энг кичик умумий карралиси бўлади.

Бир нечта мисол қараймиз.

1-мисол. 60, 252, 264 сонларининг энг катта умумий бўлувчисини ва энг кичик умумий карралисини топамиз.

Ҳар бир сонни каноник кўринишда ёзамиз: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $264 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11$.

Берилган сонларнинг энг катта умумий бўлувчисини топиш учун берилган ёйилмалардаги умумий туб кўпайтувчилар кўпайтмасини ҳосил қиламиз, бунда ҳар бир кўпайтувчининг берилган сонларнинг ёйилмасига кирган энг кичик кўрсаткичи билан оламиз: $D(60, 252, 264) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

Берилган сонларнинг энг кичик умумий карралисини топиш учун берилган сонларнинг ёйилмасидаги ҳамма кўпайтувчилар кўпайтмасини ҳосил қиламиз, бунда ҳар бир кўпайтувчининг берилган сонлар ёйилмасига кирган энг катта кўрсаткичи билан оламиз: $K(60, 252, 264) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 27\,720$.

2-мисол. 48 ва 245 сонларининг энг катта умумий бўлувчисини ва энг кичик умумий карралисини топамиз. Ҳар бир сонни каноник кўринишда ёзамиз: $48 = 2^4 \cdot 3$, $245 = 5 \cdot 7^2$.

Берилган сонлар ёйилмасида умумий кўпайтувчилар бўлмагани учун $D(48, 245) = 1$, $K(48, 245) = 48 \cdot 245 = 10\,760$.

Машқлар

1. 124, 588, 2700, 3780 сонларини туб кўпайтувчиларга ажратинг.

2 Қандай сон қуйидаги ёйилмага эга:

1) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$; 2) $2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$?

3. 1) 175 ва 245; 2) 540 ва 558; 3) 120, 80 ва 280; 4) 675 ва 154 сонларининг энг катта умумий бўлувчисини ва энг кичик умумий карралисини топинг.

4. Ҳамма бир хонали жуфт сонларнинг энг кичик умумий карралисини топинг.

5. Бири 600 га тенг бўлган икки соннинг энг катта умумий бўлувчиси 120 га тенг. Шу сонларнинг энг кичик умумий карралиси 4800 га тенг. Иккинчи сонни топинг.

6. Темир йўл станциясидан учта поезд бирин-кетин ўтади: бирида 418 пассажир, иккинчисида 494 пассажир, учинчисида 456 пассажир бор. Агар ҳар бир вагонда баравардан пассажирлар бўлиб, уларнинг сони бўлиши мумкин бўлган ҳолларнинг энг каттасига тенг бўлса, ҳар бир поезд неча вагонли?

81. Евклид алгоритми

Сонларни туб кўпайтувчиларга ажратиш усули билан уларнинг энг катта умумий бўлувчисини топиш баъзан қатор қийинчиликларга олиб келади. Масалан, 6815 сонини туб кўпайтувчиларга ажратишда биринчи бўлувчи 5 ни топиб, 1363 сонини ҳосил қиламиз, бу соннинг энг кичик бўлувчиси 29 га тенг. Аммо 29 ни топиш учун 1363 сонининг 2 га, 3 га, 5 га, 7 га, 11 га, 13 га, 17 га, 19 га, 23 га, 29 га бўлинишини бўлинмаслигини текширишимиз керак, бунда 1363 сони фақат 29 гагина бутун сон марта бўлинади.

Берилган сонларнинг энг катта умумий бўлувчисини кам қийинчиликлар билан топиш усули мавжуд.

Аммо аввал икки сон умумий бўлувчисининг битта муҳим хоссасига диққатингизни жалб қиламиз. Масалан, 525 ва 231 сонларини оламиз ва 525 ни 231 га қолдиқли бўламиз: $525 = 231 \cdot 2 + 63$.

525 ва 231 сонларининг умумий бўлувчилари тўпламини A орқали, 231 ва 63 сонларининг умумий бўлувчилари тўпламини B орқали белгилаймиз ва $A = B$ ни исботлаймиз.

Аввал 525 ва 231 сонларининг ихтиёрий умумий бўлувчиси 231 ва 63 сонларининг умумий бўлувчиси эканлигини исботлаймиз. Ҳақиқатан, агар $525 : d$ ва $231 : d$ бўлса, айирманинг бўлинувчанлиги ҳақидаги теоремага кўра $63 : d$ ни ҳосил қиламиз. Агар $525 = 231 \times \times 2 + 63$ тенгликни $63 = 525 - 231 \cdot 2$ кўринишда ёзсак, бунга осон ишонч ҳосил қилиш мумкин. Шундай қилиб, 525 ва 231 сонларининг ихтиёрий умумий бўлувчиси 231 ва 63 сонларининг умумий бўлувчиси бўлади, яъни $A \subset B$.

Аксинча, агар t 231 ва 63 сонларининг умумий бўлувчиси, яъни $231 : t$ ва $63 : t$ бўлса, йиғиндининг бўлинувчанлиги ҳақидаги теоремага кўра $525 : t$ бўлади. Демак, 231 ва 63 сонларининг ихтиёрий умумий бўлувчиси 525 ва 231 сонларининг ҳам умумий бўлувчиси бўлар экан, яъни $B \subset A$.

Тенг тўпламлар таърифига кўра $A = B$. Аммо агар берилган сонлар жуфтининг умумий бўлувчилари тўплами бир хил бўлса, уларнинг энг катта умумий бўлувчиси ҳам тенг бўлади, яъни

$$D(525, 231) = D(231, 63).$$

Умуман, агар a ва b — натурал сонлар ҳамда $a = bq + r$ бўлса, $D(a, b) = D(b, r)$ бўлади, бунда $r < b$.

Бу теореманинг исботи юқорида келтирилган хусусий ҳолнинг исботи кабидир.

Бу хоссанинг муҳимлиги нимада? Бу хосса a ва b сонларининг энг катта умумий бўлувчисини топишда бу сонларни кичик сонларга алмаштиришга имкон яратади, бу эса ҳисоблашларни осонлаштиради. Бундай алмаштиришни бир неча бор бажариш мумкин. Масалан, 525 ни 231 га қолдиқли бўлиб, қолдиқда 63 ни ҳосил қиламиз. Демак, $D(525, 231) = D(231, 63)$. 231 ни 63 га қолдиқли бўламиз: $231 = 63 \cdot 3 + 42$, яъни $D(231, 63) = D(63, 42)$. 63 ни 42 га қолдиқли бўламиз: $63 = 42 \cdot 1 + 21$. Демак, $D(63, 42) = D(42, 21)$. 42 ни 21 га қолдиқли бўлганда қолдиқда 0 ҳосил қиламиз, яъни $D(42, 21) = D(21, 0)$. 21 билан 0 нинг энг катта умумий бўлувчиси 21 га тенг. Демак, 21 сони 525 ва 231 сонларининг энг катта умумий бўлувчиси бўлади, чунки $D(525, 231) = D(231, 63) = D(63, 42) = D(42, 21) = D(21, 0) = 21$.

Биз бажарган ҳисоблашлар кўпинча бундай ёзилади:

$$\begin{array}{r}
 525 \overline{) 231} \\
 \underline{462} \\
 63 \\
 231 \overline{) 63} \\
 \underline{189} \\
 63 \\
 42 \overline{) 42} \\
 \underline{42} \\
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 525 = 231 \cdot 2 + 63 \\
 231 = 63 \cdot 3 + 42 \\
 63 = 42 \cdot 1 + 21 \\
 42 = 21 \cdot 2 + 0
 \end{array}$$

$$D(525, 231) = 21.$$

Энг катта умумий бўлувчини топишнинг кўрилган 'усули қолдиқли бўлишга асосланган. Бу усулни биринчи марта қадимги грек математиги Евклид (эрамизгача III аср) яратган ва шунинг учун у Евклид алгоритми номи билан юритилади.

Евклид алгоритмини умумий кўринишда бундай ифодалаш мумкин:

a ва b — натурал сонлар ҳамда $a > b$ бўлсин. a сони b сонига қолдиқли бўлинади, кейин b сони қолган қолдиққа қолдиқли бўлинади, сўнгра биринчи қолдиқ иккинчи қолдиққа қолдиқли бўлинади ва ҳоказо, у ҳолда охири нолдан фарқли қолган қолдиқ a ва b сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси бўлади.

Машқлар

1. $D(576, 252) = D(252, 72)$ ни исботланг.
2. Евклид алгоритми ёрдамида қуйидаги сонларнинг энг катта умумий бўлувчисини топинг:
 - 1) 375 ва 645;
 - 2) 960 ва 1200;
 - 3) 12 345 ва 7565;
 - 4) 36 354 ва 30 295.
3. $D(6025, 1728) = 1$ эканини исботланг.
4. $D(6855, 10005)$ $D(1679, 2231)$ дан неча марта катта?
5. 4565 ва 960 сонларининг энг катта умумий бўлувчисини Евклид алгоритми ёрдамида ҳисоблаб, уларнинг энг кичик умумий карралисини топинг.

III Б О Б

СОН ТУШУНЧАСИНИ КЕНГАЙТИРИШ

Саккиз йиллик мактаб математика курсидан маълумки, натурал сонлар ва нолдан ташқари каср сонлар, бутун сонлар, рационал сонлар, иррационал сонлар, ҳақиқий сонлар мавжуд. Сонларнинг турли тўпламлари орасидаги ўзаро боғланишлар-

Масалан, $\frac{14}{4}$ ва $\frac{28}{8}$ касрлар e узунлик бирлигида битта кесма-
нинг узунлигини ифодалайди, демак, $\frac{14}{4} = \frac{28}{8}$.

Берилган касрларнинг тенглиги ёки тенг эмаслигини аниқлашда
фойдаланиладиган атомат мавжуд.

$\frac{m}{n}$ ва $\frac{p}{q}$ касрлар тенг бўлиши учун $mq = pr$ бўлиши
зарур ва етарлидир.

1. $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Rightarrow mq = pr$ ни кўрсатамиз. Ҳар қандай q натурал
сон учун $\frac{m}{n} = \frac{mq}{nq}$, ҳар қандай n натурал сон учун $\frac{p}{q} = \frac{pn}{qn}$
бўлгани учун $\frac{m}{n}$ ва $\frac{p}{q}$ касрларнинг тенглигидан $\frac{mq}{nq} = \frac{pn}{nq}$
тенглик келиб чиқади, бундан ўз навбатида $mq = pr$ тенглик келиб
чиқади.

2. $mq = pr \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ ни кўрсатамиз. $mq = pr$ тўғри тенглик-
нинг иккала қисмини nq натурал сонга бўлсак, $\frac{mq}{nq} = \frac{pr}{nq}$ тўғри
тенгликни ҳосил қиламиз. Аммо $\frac{mq}{nq} = \frac{m}{n}$, $\frac{pr}{nq} = \frac{p}{q}$. Демак,
 $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$.

Мисол. $\frac{17}{19}$ ва $\frac{23}{27}$ касрларнинг тенг ёки тенг эмаслигини
аниқлаймиз. Бунинг учун $17 \cdot 27$ ва $19 \cdot 23$ кўпайтмаларини таққослай-
миз: $17 \cdot 27 = 459$, $19 \cdot 23 = 437$. $459 \neq 437$ бўлгани учун $\frac{17}{19} \neq \frac{23}{27}$.

Юқорида қаралган фактлардан касрнинг асосий хоссаси келиб
чиқади: **агар берилган касрнинг сурат ва махражи бир
хил натурал сонга кўпайтирилса ёки бўлинса, берил-
ган касрга тенг каср ҳосил бўлади.** Касрларни қисқартириш
ва касрларни бир хил махражга келтириш шу хоссага асосланган.

**Касрларни қисқартириш — берилган касрни унга
тенг, лекин сурат ва махражи ундан кичик бўлган
касрга алмаштиришдир.**

Агар касрнинг сурат ва махражи бир пайтда фақат 1 га бўлин-
са, каср қисқармас каср дейилади. Масалан, $\frac{5}{17}$ — қисқармас каср.

Касрни қисқартириш натижасида одатда унга тенг қисқармас
каср ҳосил бўлиши керак.

Мисол. $\frac{48}{80}$ касрни қисқартирамиз. Унга тенг қисқармас каср-
ни ҳосил қилиш учун берилган касрнинг сурат ва махражини улар-
нинг энг катта умумий бўлувчисига бўлиш керак. Уни топамиз:

$D(48, 80) = 16$. 48 ни 16 га ва 80 ни 16 га бўлиб, $\frac{48}{80} = \frac{3}{5}$ ни ҳосил қиламиз. $\frac{3}{5}$ каср қисқармас каср.

Касрларни умумий махражга келтириш касрларни уларга тенг, лекин бир хил махражли касрларга алмаштиришдир.

$\frac{m}{n}$ ва $\frac{p}{q}$ икки касрнинг умумий махражи n ва q сонларнинг умумий карралиси, энг кичик умумий махраж эса уларнинг энг кичик умумий карралиси $K(n, q)$ бўлади.

Мисол. $\frac{8}{15}$ ва $\frac{4}{35}$ касрларни энг кичик умумий махражга келтирамиз.

15 ва 35 сонларини туб кўпайтувчиларга ажратамиз: $15 = 3 \cdot 5$, $35 = 5 \cdot 7$. У ҳолда $K(15, 35) = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ бўлади. $105 = 15 \cdot 7 = 35 \cdot 3$ бўлгани учун $\frac{8}{15} = \frac{8 \cdot 7}{15 \cdot 7} = \frac{56}{105}$, $\frac{4}{35} = \frac{4 \cdot 3}{35 \cdot 3} = \frac{12}{105}$.

Машқлар¹

1. Қесмани ўлчаш жараёнида: 1) $\frac{7}{3}$; 2) $\frac{13}{4}$; 3) $\frac{2}{5}$ касрлар қандай пайдо бўлиши мумкинлигини кўрсатинг.



123- расм

Г 2. 123-расмда келтирилган OX ва OY кесмаларнинг узунликларини аниқланг.

3. 1) $\frac{5}{6}$; 2) $\frac{11}{3}$ касрларга тенг учта каср айтинг.

4. $\frac{275}{980}$ ва $\frac{45469}{41033}$ касрларни қисқартиринг.

5. Ҳар қандай k натурал сонда $\frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}$ тенглик ўринли экани маълум. Шунга ўхшаш $\frac{a+k}{b+k} = \frac{a}{b}$ дейиш мумкинми?

6. $\frac{17}{24}$, $\frac{13}{136}$ ва $\frac{17}{208}$ касрларни умумий махражга келтиринг.

83. Мусбат рационал сон тушунчаси

Олдинги пунктда биз битта кесмага чексиз кўп тенг касрларни мос келтириш мумкин эканини аниқладик, бу касрлар кесма узунлигини танлаб олинган e бирликда ифодалайди. Аммо кесма узунлиги ягона сон билан берилиши керак. Шунинг учун битта соннинг



121-расм

ни Эйлер доиралари ёрдамида кўргазмани тасвирлаш мумкин (121-расм).

Сон тушунчасининг кенгайиши жараёнидаги дастлабки тўплам натурал сонлар тўплами N бўлади. Жуда қадим замонларда пайдо бўлган натурал сон тушунчаси кўп асрлар давомида кенгайди ва умумлаштирилди. Катталикларни (миқдорларни) янада аннқроқ ўлчашга бўлган талаб мусбат каср сонлар тушунчасига олиб келди. Манфий сонлар тушунчасининг пайдо бўлиши тенгламаларни ечиш ва назарий

изланишлар билан боғлиқ. Ноль аввал соннинг йўқлигини билдирган бўлса, манфий сонларнинг киритилиши билан бутун сонлар тўплами Z да ҳамда рационал сонлар тўплами Q да тенг ҳуқуқли сонга айланди.

Бизнинг эрамизгача V асрда Пифагор мактабида мусбат рационал сонлар кесмалар узунликларини аниқ ўлчаш учун етарли эмаслиги аниқланган ва кейинроқ бу муаммо ҳал қилингандан кейин иррационал сонлар пайдо бўлди, XVI асрда эса ўнли касрларнинг киритилиши билан ҳақиқий сонларга қадам қўйилди. Ҳақиқий соннинг қатъий таърифи, ҳақиқий сонлар тўплами хоссаларининг асосланиши XIX асрда берилди.

Ҳақиқий сонлар тушунчаси сонлар қаторининг охиригисини эмас. Сон тушунчасининг кенгайиши жараёнини давом эттириш мумкин ва у давом этади — бунни физика, математика ва бошқа фанларнинг ривожланиши тақозо этади.

Ўқувчиларнинг каср сонлар билан дастлабки танишуви бошланғич синфларда бошланади. Кейинчалик ўрта синфларда каср тушунчаси аниқлаштирилади ва кенгайтирилади. Шунинг учун бошланғич синф ўқитувчиси каср ва рационал сонлар таърифини, рационал сонлар устида амаллар бажариш қонда-сини ва бу амаллар қонунларини билиш зарур, шунингдек, рационал ва ҳақиқий сонлар тўпламлари билан натурал сонлар тўпламининг ўзаро боғлиқлигини кўра билиши керак. Бу бошланғич ва ўрта синфларда математикани кетма-кет ўрганиш учун зарурдир.

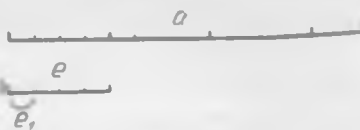
12- §. МУСБАТ РАЦИОНАЛ СОНЛАР

82. Каср тушунчаси

Касрларнинг пайдо бўлиш тарихи катталикларни ўлчаш билан боғлиқ. Масалан, кесма узунлигини ўлчашда касрлар қандай пайдо бўлишини аниқлаймиз. Бунда 9- § даги 62- пункт

да аниқланган тушунчаларга таяна-
 миз.

a кесма оламиз. Унинг узунлигини
 топиш учун кесма узунлигининг бирли-
 ги сифатида e ни оламиз (122-расм).
 Ўлчада a кесманинг узунлиги 3 e дан
 катта, лекин 4 e дан кичиклиги топилди.



122-расм

Шунинг учун уни натурал сон (билан e узунлик бирлигида) ифода-
 лаб бўлмайди. Аммо e кесмани ҳар бири e_1 га тенг бўлган тўртта
 тенг қисмга бўлсак, a кесманинг узунлиги 4 e_1 бўлади. Агар даст-
 лабки узунлик бирлиги e га қайтсак, унда a кесма e кесманинг
 тўртдан бир қисмига тенг кесмаларнинг 14 тасидан иборат деймиз,
 яъни a кесманинг узунлиги ҳақида гапирар эканмиз, иккита нату-
 рал сон — 14 ва 4 сонлари устида амаллар бажаришга мажбур бў-
 ламиз. Бундай вазиятда кесма узунлигини $\frac{14}{4} e$ кўринишда ёзиш-
 га, $\frac{14}{4}$ белгини эса каср деб айтишга келишиб оламиз.

Каср тушунчаси умумий кўринишда бундай таърифланади: a кес-
 ма ва e бирлик кесма берилган бўлсин, бунда e кесма ҳар бири
 e_1 га тенг бўлган n та кесма йиғиндиси. Агар a кесма ҳар бири
 e_1 га тенг m та кесмадан тузилган бўлса, унинг узунлиги $\frac{m}{n} e$
 кўринишда бўлиши мумкин. $\frac{m}{n}$ белги каср дейилади, унда m ва
 n — натурал сонлар. Бу белги бундай ўқилади: « n дан m ».

122-расмга қайтамыз. Танлаб олинган e_1 кесма e кесманинг тўрт-
 дан бир қисмидир. Равшанки, a кесмага бутун сон марта қўйилади-
 ган e кесманинг бундай улушини танлаш ягона вариант эмас. e
 кесманинг саккиздан бир қисмини топиш мумкин, унда a кесма 28
 та шундай кесмадан иборат бўлиб, унинг узунлиги $\frac{28}{8} e$ га тенг
 бўлади. e кесманинг ўн олтидан бир қисмини олиш мумкин, унда a
 кесма 56 та шундай кесмадан иборат бўлиб, унинг узунлиги $\frac{56}{16} e$
 бўлади. Бу жараёни чексиз давом эттирсак, a кесманинг узун-
 лиги турли касрларнинг чексиз тўплами билан ифодаланиши мумкин:
 $\frac{14}{4}, \frac{28}{8}, \frac{56}{16}, \dots$

Умуман, агар e узунлик бирлигида a кесманинг узунлиги $\frac{m}{n}$
 каср билан ифодаланса, у ихтиёрий $\frac{mk}{nk}$ каср билан ифодаланиши
 мумкин, бунда k — натурал сон.

Таъриф. e узунлик бирлигида битта кесманинг узунлигини
 ифодаловчи касрлар тенг касрлар дейилади.

Агар $\frac{m}{n}$ ва $\frac{r}{q}$ касрлар тенг бўлса, бундай ёзилади: $\frac{m}{n} = \frac{r}{q}$

турли ёзувини тенг касрлар, соннинг ўзини эса мусбат рационал сон дейилади.

Умуман, мусбат рационал сон — бу тенг касрлар тўпламидир, бу тўплагга тегишли ҳар бир каср шу соннинг ёзувидир.

Масалан, $\left\{ \frac{4}{3}, \frac{8}{6}, \frac{12}{9}, \frac{16}{12}, \dots \right\}$ тўплаг бирор мусбат рационал сондир, $\frac{4}{3}, \frac{8}{6}, \frac{12}{9}$ ва ҳ. к. касрлар эса шу соннинг турли ёзувидир.

$\left\{ \frac{2}{7}, \frac{4}{14}, \frac{6}{21}, \frac{8}{28}, \dots \right\}$ тўплаг бошқа мусбат рационал сонни аниқлайди.

Юқорида берилган таърифга кўра, биз $\frac{m}{n}$ ёзувга қараб, $\frac{m}{n}$ — бу каср ёки $\frac{m}{n}$ каср кўринишида ёзилган мусбат рационал сон деймиз. Кўпинча қисқача бундай дейилади: «Мусбат рационал сон $\frac{m}{n}$ берилган». Бу дегани мусбат рационал сон ва каср тушунчаси айнан бир хил дегани эмас. Булар турли тушунчалардир, лекин жумла қисқа бўлиши учунгина шундай дейилади.

$\frac{5}{9}$ ёзув нимани англатади? Жавоблар бундай бўлиши мумкин: «Бу каср», «Бу мусбат рационал соннинг ёзуви».

$\frac{5}{9}$ — мусбат рационал сон дейиш мумкинми? Мумкин, фақат гапни қисқартириш мақсадида шундай дейиш мумкин.

Бирор мусбат рационал соннинг барча ёзувлари орасидан қисқармас каср ажратилади, яъни сураат ва махражининг энг кичик умумий бўлувчиси 1 га тенг бўлган каср ажратиб олинади. Масалан, рационал сонни аниқловчи $\left\{ \frac{2}{7}, \frac{4}{14}, \frac{6}{21}, \frac{8}{28}, \dots \right\}$ касрлар орасида $\frac{2}{7}$ каср қисқармас касрдир.

Умуман, ҳар қандай мусбат рационал сон учун шу соннинг ёзуви бўлган битта ва фақат битта қисқармас каср мавжуд.

Мусбат рационал сон тушунчасини таърифлашда биз кесмалар узунликларини ўлчашдан фойдаландик. Кесма узунлигини ягона сон билан аниқ белгилаш (ифодалаш) зарурлиги мусбат рационал соннинг пайдо бўлишига олиб келди.

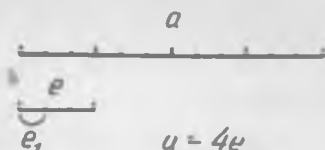
Энди тескари масалани қараймиз.

$\frac{m}{n}$ бирор рационал соннинг ёзуви бўлсин. Узунлиги шу сон билан ифодаланадиган кесма топиладими?

$\frac{m}{n}$ каср билан белгиланган ҳар қандай мусбат рационал сон учун узунлиги танлаб олинган узунлик бирлигида ифодаланадиган кесма мавжудлиги исботланди.



124- расм



125- расм

$$a = 4e$$

$$a = \frac{4 \cdot 3}{3} e$$

Мисол. Узунлиги $\frac{13}{4}$ сон билан ифодаланган кесмани ясаймиз. Бунинг учун: 1) узунлик бирлиги e ни танлаб оламиз; 2) e кесмани тўртта тенг қисмга бўламиз; 3) Ox нурда ҳар бири e кесманинг тўртдан бир қисмига тенг 13 та кесма ажратамиз.

Натижада узунлиги $\frac{13}{4}$ сон билан ифодаланган OA кесма ҳосил қиламиз (124-расм).

Мусбат рационал сонлар тўплами Q_+ билан белгиланади. Барча натурал сонлар шу тўпланда ётишини, яъни $N \subset Q_+$ ни кўрсатамиз.

a кесманинг узунлиги e узунлик бирлигида натурал сон m билан ифодалансин. Масалан, 125-расмда у 4 сони билан тасвирланган.

e кесмани n та тенг қисмга бўламиз. Унда e кесманинг n -улуши a кесмага $m \cdot n$ марта қўйилади, яъни a кесманинг узунлиги $\frac{m \cdot n}{n}$ кўринишдаги касрлар билан ифодаланади (масалан, 125-расмда

a кесманинг узунлиги $\frac{4 \cdot 3}{3}$ каср билан ифодаланган). Аммо бу касрлар тўплами мусбат рационал сондир. Демак, a кесманинг узунлиги бир томондан m натурал сон билан, иккинчи томондан мусбат рационал сон $\frac{m \cdot n}{n}$ билан ифодаланади. Лекин булар битта соннинг ўзи

бўлиши керак. Шунинг учун $\frac{m \cdot n}{n}$ кўринишдаги касрларни m натурал соннинг ёзувидир дейиш мақсадга мувофиқдир. Биз ҳар қандай m натурал сонни $\frac{m \cdot n}{n}$ каср кўринишида ёзиш мумкинлигини кўрсатдик, демак, $N \subset Q_+$.

Мисол. Натурал сон 7 ни $\frac{7}{1}, \frac{14}{2}, \frac{21}{3}, \frac{28}{4}, \frac{35}{5}, \dots$ каср кўринишида ёзамиз.

Шундай қилиб, барча натурал сонлар мусбат рационал сонлар тўпланда ётар экан (126-расм). Натурал сонлар тўпла-



126- расм

мини мусбат рационал сонлар тўпламига тўлдирувчи сонлар каср сонлар дейлади.

Машқлар

1. Қуйидаги фикрлар тўғрими:

- 1) $\frac{3}{8}$ каср бирор рационал соннинг ёзувидир; 2) $\frac{17}{5}$ — каср;
3) $\frac{17}{5}$ — мусбат рационал сон?

2. Рационал сонлар $\frac{m}{n}$ ва $\frac{p}{q}$ касрлар билан берилган.

Қандай шартлар бажарилганда бу рационал сонлар тенг бўлади?

3. 1) $\frac{171717}{252525} = \frac{17171}{2525} = \frac{17}{25}$; 2) $\frac{313131}{757575} = \frac{3131}{7575} = \frac{31}{75}$ бўли-

шни исботланг.

4. a нинг ҳар қандай қийматида қуйидаги касрларнинг қисқармас каср эканлигини исботланг:

1) $\frac{2a+1}{a}$; 2) $\frac{2a+3a+7+a^3}{5a}$

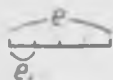
5. Тўғри қисқармас каср ҳосил бўлиши учун $*$ ўрнига қандай рақамларни қўйиш керак: 1) $\frac{285}{2*7}$; 2) $\frac{378}{3*9}$?

6. $\frac{a}{b}$ — қисқармас каср. $\frac{a}{b+ab}$ каср қисқармас каср бўладими?

7. Бирлик кесма танлаб олинг ва узунлиги: 1) $\frac{11}{3}$; 2) $\frac{2}{7}$ каср билан ифодаланадиган кесма ясанг.

84. Қўшиш ва айириш

a, b, c кесмалар берилган бўлиб, $c = a + b$ ва танлаб олинган узунлик бирлиги e да $a = \frac{6}{4}e$, $b = \frac{7}{4}e$ бўлсин (127-расм). У ҳолда $c = a + b = \frac{6}{4}e + \frac{7}{4}e = 6e_1 + 7e_1 = (6 + 7)e_1 = 13e_1 =$



127-расм

$= \frac{13}{4}e$, яъни c кесма узунлиги $\frac{13}{4}$ сони билан ифодаланadi, бу сонни $\frac{6}{4}$ ва $\frac{7}{4}$ сонларининг йиғиндиси сифатида қараш мақсадга мувофиқдир.

Таъриф. Агар a ва b мусбат рационал сонлар $\frac{m}{n}$ ва $\frac{p}{n}$ касрлар

билан ифодаланган бўлса, у ҳолда a ва b сонларнинг йиғиндиси деб $\frac{m+p}{n}$ каср билан ифодаланган сонга айтилади:

$$\boxed{\frac{m}{n} + \frac{p}{n} = \frac{m+p}{n}} \quad (1)$$

Агар a ва b мусбат рационал сонлар турли махражли касрлар билан ифодаланган бўлса, бу касрлар одатда энг кичик умумий махражга келтирилади ва (1) қонда бўйича қўшилади. Масалан,

$$\frac{5}{12} + \frac{2}{15} = \frac{25}{60} + \frac{8}{60} = \frac{25+8}{60} = \frac{33}{60} = \frac{11}{20}.$$

Ҳар қандай иккита мусбат соннинг йиғиндиси мавжуд ва у ягонадир. Бунини исботсиз қабул қиламиз.

Мусбат рационал сонларни қўшишнинг қаралган қондалари бу сонларни қўшиш амалда натурал сонларни қўшишга келтирилади, деб ҳисоблашга имкон яратади.

Мусбат рационал сонларни қўшиш ўрин алмаштириш ва группалаш қонунларига бўйсунди:

ҳар қандай $a, b \in Q_+$ учун $a + b = b + a$;

ҳар қандай $a, b, c \in Q_+$ учун $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Мусбат рационал сонларни қўшиш учун ўрин алмаштириш қонуни ўринли эканини исботлаймиз. a ва b сонлар бир хил махражли касрлар билан ифодаланган бўлсин: $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{p}{n}$. У ҳолда йиғиндининг таърифига кўра $a + b = \frac{m}{n} + \frac{p}{n} = \frac{m+p}{n}$.

Аммо $\frac{m+p}{n}$ касрнинг суратида натурал сонлар қўшилмоқда, улар учун, илгари исботланганига кўра, ўрин алмаштириш қонуни ўринли, яъни,

$$\frac{m+p}{n} = \frac{p+m}{n}.$$

Сўнгра, яна рационал сонларни қўшиш қондасини қўллаб,

$$\frac{p+m}{n} = \frac{p}{n} + \frac{m}{n} = b + a$$

ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, мусбат рационал сонларни қўшишнинг ўрин алмаштириш қонуни бу сонларни қўшиш таърифидан ва натурал сонларни қўшишнинг ўрин алмаштириш қонунидан келиб чиқади, дейиш мумкин экан.

Группалаш қонуни ҳам шундай исботланади.

Рационал сонларни қўшиш таърифидан $3\frac{1}{4}$, $12\frac{5}{7}$ кўринишдаги ўзгичаларнинг маъносини аниқлаштиришга имкон яратилади.

Тўғри ва нотўғри касрлар фарқ қилинади. Агар $\frac{m}{n}$ касрнинг сурати махражидан кичик бўлса, бу каср тўғри, агар сурати махражидан катта ёки унга тенг бўлса, каср нотўғри каср дейилади.

$\frac{m}{n}$ — нотўғри каср бўлсин. У ҳолда $m \geq n$. Агар m n га каррали бўлса, бу ҳолда $\frac{m}{n}$ каср натурал соннинг ёзуви бўлади. Масалан, агар $\frac{15}{3}$ каср берилган бўлса, у ҳолда $\frac{15}{3} = 5$. Агар m сони n га каррали бўлмаса, m ни n га қолдиқли бўламиз: $m = nq + r$, бунда $r < n$. $\frac{m}{n}$ касрда m ўрнига $nq + r$ ни қўямиз ва (1) қондани қўллаймиз:

$$\frac{m}{n} = \frac{nq + r}{n} = \frac{nq}{n} + \frac{r}{n} = q + \frac{r}{n}.$$

$r < n$ бўлгани учун $\frac{r}{n}$ каср тўғри. Демак $\frac{m}{n}$ каср q натурал сон ва $\frac{r}{n}$ тўғри касрнинг йиғиндиси кўринишида ифодаланган бўлиб қолди. Бу амал нотўғри касрдан бутун қисмини ажратиб дейилади. Масалан, $\frac{13}{4} = \frac{4 \cdot 3 + 1}{4} = \frac{4 \cdot 3}{4} + \frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{4}$. Натурал сон билан тўғри касрнинг йиғиндисини қўшиш белгисиз ёзиш қабул қилинган, яъни $3 + \frac{1}{4}$ ўрнига $3\frac{1}{4}$ деб ёзилади ва бу ёзув аралаш сон дейилади.

Тескари даъво ҳам тўғри: ҳар қандай аралаш сонни нотўғри каср кўринишида ёзиш мумкин. Масалан:

$$3\frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4} = \frac{12 + 1}{4} = \frac{13}{4},$$

$$\text{яъни } 3\frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 4 + 1}{4} = \frac{13}{4}.$$

Мусбат рационал сонларни айиришни қараймиз.

Таъриф. a ва b мусбат рационал сонларнинг айирмаси деб шундай c мусбат рационал сонга айтиладики, унинг учун $a = b + c$ ўринли.

Айирма тушунчаси таърифланди. Амалда бир мусбат рационал сондан иккинчи мусбат рационал сон қандай айирилади?

$a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{p}{n}$ бўлиб, $a - b$ айирма $\frac{x}{n}$ каср билан ифодаланган бўлсин. x ни топамиз. Айирма таърифига кўра $\frac{m}{n} = \frac{p}{n} + \frac{x}{n}$, (1) қондага кўра: $\frac{p}{n} + \frac{x}{n} = \frac{p+x}{n}$. Шундай қилиб, $m = p + x$,

аммо m , p ва x — натурал сонлар. Бу сонлар учун юқоридаги ёзув $x = m - p$ ни англатади. Қуйидаги қондага келдик:

$$\boxed{\frac{m}{n} - \frac{p}{n} = \frac{m-p}{n}}. \quad (2)$$

Машқлар

1. Аввал касрларни қисқартириб (агар мумкин бўлса), кейин қўшинг: 1) $\frac{15}{120} + \frac{17}{68} + \frac{39}{78}$; 2) $3\frac{11}{12} + 5\frac{3}{15} + 1\frac{2}{9}$; 3) $1\frac{4}{40} + 5\frac{4}{5} + \frac{10}{30}$.

2. Қўшиниш қонунларини қўллаб, энг рационал усул билан ҳисобланг: 1) $\frac{2}{15} + 1\frac{5}{13} + 3\frac{1}{5} + 4\frac{3}{26}$; 2) $3\frac{4}{9} + 3\frac{1}{14} + 5 + 2\frac{6}{14} + 3\frac{5}{9}$; 3) $5\frac{15}{24} + 3\frac{22}{33} + 1\frac{32}{48} + 1\frac{7}{24} + \frac{2}{3}$.

3. Айирмани топинг: 1) $10\frac{59}{63} - 8\frac{37}{45}$; 2) $105\frac{2}{17} - 3\frac{1}{13}$.

4. $24\frac{5}{24}$ ва $22\frac{5}{6}$ сонлари йиғиндисини $7\frac{7}{15}$ та камайтиринг.

Буни неча усул билан бажариш мумкин?

5. $\frac{79}{97}$ ва $\frac{67}{85}$ сонларидан қайси бири 1 га яқин?

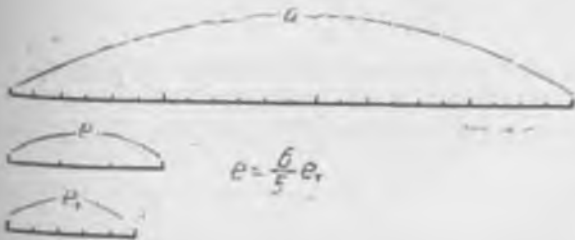
6. Ифоданинг қийматини топинг:

$$1) 2\frac{7}{15} - 1\frac{1}{12} + \left(2\frac{7}{90} - \left(1\frac{1}{2} - \frac{8}{45} \right) \right);$$

$$2) \left(24 - 3\frac{7}{36} \right) - \left(21\frac{5}{12} - \frac{11}{18} \right).$$

85. Кўпайтириш ва бўлиш

128-расмда $a = \frac{11}{3}e$, $e = \frac{6}{5}e_1$ бўлган a , e ва e_1 кесмалар берилган. Берилган a кесма узунлигининг қиймати e_1 узунлик бирли-



$$e = \frac{6}{5}e_1$$

$$a = \frac{11}{3}e$$

$$a = \frac{66}{15}e_1$$

128-расм

гида қандай бўлишини билиш [керак. $3a = 11e$, $5e = 6e_1$ бўлгани учун биринчи тенгликни 5 га, иккинчисини 11 га кўпайтириб, $5 \cdot 3a = 11 \cdot 5e$ ва $11 \cdot 5e = 6 \cdot 11e_1$ ни ҳосил қиламиз, бундан $5 \cdot 3a = 6 \cdot 11e_1$ ёки $15a = 66e_1$. Охириги тенглик $a = \frac{66}{15}e_1$, яъни a кес-
манинг узунлиги e_1 узунлик бирлигида $\frac{66}{15}$ сони билан ифодалани-
шини, бу сонни $\frac{11}{3}$ ва $\frac{6}{5}$ сонларнинг кўпайтмаси деб қараш мақ-
садга мувофиқ эканини англатади.

Таъриф. Агар мусбат рационал сонлар $\frac{m}{n}$ ва $\frac{p}{q}$ касрлар би-
лан ифодаланган бўлса, у ҳолда уларнинг кўпайтмаси $\frac{mp}{nq}$ каср би-
лан ифодаланган сон бўлади:

$$\boxed{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}} \quad (3)$$

Мусбат рационал сонларни кўпайтириш қўшишга нисбатан ўрин алмаштириш, группалаш ва тақсимот қонунларига бўйсунди. Улар қўшиш қонунлари қандай исботланган бўлса, худди шундай исбот-
ланади.

Таъриф. Икки a ва b мусбат рационал соннинг бўлинмаси деб шундай c сонга айтиладики, унинг учун $a = bc$ бўлади.

Биз a ва b сонларининг бўлинмаси таърифини бердик. Агар $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{p}{q}$ бўлса, бўлинма қандай топилади? $c = \frac{mq}{np}$ сон шу бўлинма эканлигини кўрсатамиз. Бўлинма таърифига кўра $a = bc = \frac{p}{q} \cdot \frac{mq}{np}$. Мусбат рационал сонларни кўпайтиришнинг (3) қонда-
сини ва кўпайтириш қонуниларини қўллаб, шакл алмаштиришлар ба-
жарамиз:

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{mq}{np} = \frac{p(mq)}{q(np)} = \frac{(pq)m}{(pq)n}$$

Чиққан касрни pq натурал сонга қисқартирамиз:

$$\frac{(pq)m}{(pq)n} = \frac{m}{n}$$

Шундай қилиб, икки мусбат рационал соннинг бўлинмаси

$$\boxed{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}} \quad (4)$$

формула бўйича топилади.

Ҳосил бўлган формула ихтиёрий мусбат рационал сонлар учун бўлинма мавжудлигини кўрсатади, яъни натурал сонлар тўпламида

ҳар доим ҳам бажариб бўлавермайдиган бўлиш амалларини Q_+ гу-
ламда ҳар доим бажариб бўлади.

Шуни эслатамизки, $\frac{m}{n}$ каср ёзувидаги чизик белгисини бўлиш
амалининг белгиси деб қараш мумкин. Ҳақиқатан, иккита m ва n
натурал сонни оламиз ва (4) қонда бўйича уларнинг бўлинмасини
топамиз:

$$m : n = \frac{m}{1} : \frac{n}{1} = \frac{m \cdot 1}{n \cdot 1} = \frac{m}{n}.$$

Аксинча, агар $\frac{m}{n}$ каср берилган бўлса, $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot 1}{n \cdot 1} = \frac{m}{1} : \frac{n}{1} = m : n$.

$\frac{m}{n} = m : n$ бўлгани учун ҳар қандай мусбат рационал сонни
икки натурал соннинг бўлинмаси деб қараш мумкин. Шуни айтиш
керакки, «рационал сон» термини латинча *ratio* сўздан келиб чиққан
бўлиб, таржимаси «нисбат» (бўлинма) ни англатади.

Машқлар

1. Символ (белги) лардан фойдаланиб, мусбат рационал сонлар-
ни кўпайтириш қонунларини ёзинг ва уларни исботланг.

2. Кўпайтириш қонунларидан фойдаланиб, ҳисобланг: 1) $\frac{3}{5} \times$
 $\times 3 \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3}$; 2) $\frac{4}{7} \cdot 6 \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8}$; 3) $\frac{5}{8} \cdot \frac{17}{18} \cdot 1 \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{7}$;
4) $\left(4 \frac{2}{3} + 3 \frac{3}{10}\right) \cdot \frac{5}{11}$.

3. Амалларни бажаринг: 1) $8 \frac{6}{57} : 12 \frac{3}{19}$; 2) $\left(4 \frac{1}{2} \cdot 5 \frac{2}{3}\right) :$
 $: 6 \frac{3}{4}$; 3) $4 \frac{1}{4} : \left(11 \frac{1}{3} \cdot 5 \frac{1}{4}\right)$.

4. Компоненталар ва амаллар натижалари орасидаги боғланиш-
дан фойдаланиб, тенгламани ечинг: 1) $5 \cdot \left(\frac{3}{4}x - 20\right) = 8$;
2) $\left(4 \frac{1}{2} - 2x\right) \cdot 3 \frac{2}{3} = \frac{11}{15}$; 3) $\left(10 \frac{2}{5} + x\right) : 1 \frac{1}{7} = 9 \frac{1}{3}$; 4) $\frac{4}{9} :$
 $: \left(3 \frac{2}{3} - 5x\right) = \frac{1}{6}$.

5. Арифметик усулда ечинг:

1) Бир қиз 324 бетли китобни 4 кунда ўқиб тугатди. У бирин-
чи кун бутун китобнинг $\frac{2}{9}$ қисмини, иккинчи куни қолганининг
 $\frac{3}{7}$ қисмини ўқиди, учинчи куни ҳам иккинчи кундагича ўқиди. Бу
қиз тўртинчи кун неча бет ўқиган?

2) Уй икки хонали. Бир хонанинг бўйи $5\frac{1}{4}$ м, иккинчисининг бўйи унинг $\frac{2}{3}$ қисмига тенг. Ҳар бир хонанинг эни $3\frac{1}{5}$ м дан. Бу хоналарнинг юзи бутун уй юзининг $\frac{7}{10}$ қисмига тенг. Уйнинг юзи нимага тенг?

3) Туристлар группаси турбазадан кўлгача бўлган йўлни 4 кунда босиб ўтишни мўлжаллади. Биринчи кун улар бутун йўлнинг $\frac{1}{4}$ қисмини, иккинчи кун қолганининг $\frac{3}{7}$ қисмини, учинчи ва тўртинчи кунлари 12 км дан ўтишни мўлжалладилар. Турбазадан кўлгача бўлган бутун йўлнинг узунлигини топинг.

6. Қуйидаги масалаларни турли усуллар билан ечинг:

1) *A* шаҳардан *B* шаҳаргача бўлган йўл узунликлари тенг бўлган иккита участкадан иборат. Автобус биринчи участкада 55 км/соат, иккинчисида 65 км/соат тезликда юриб, бутун йўлга 6 соат вақт сарфлади. Автобус йўлнинг ҳар бир участкасини ўтиш учун қанча вақт сарфлаган?

2) *A* дан *B* гача бўлган бутун йўлни юк машинаси ўргача 48 км/соат тезлик билан 4 соату 15 минутда ўтади. Агар енгил машинанинг ўртача тезлиги 84 км/соат бўлса, у шу йўлни қанча вақтда ўтади?

86. Мусбат рационал сонлар тўпламининг тартибланганлиги

Агар рационал сонлар тенг касрлар билан ифодаланган бўлса, улар тенг бўлади. Масалан, агар *a* рационал сон $\frac{3}{4}$ ($a = \frac{3}{4}$) каср билан, *b* рационал сон $\frac{6}{8}$ ($b = \frac{6}{8}$) каср билан ифодаланган бўлса, у ҳолда $a = b$ бўлади, чунки $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.

a ва *b* рационал сонлардан қайси бири кичик (катта) эканлигини қандай билиш мумкин?

Таъриф. *a* ва *b* — мусбат рационал сонлар бўлсин. Агар шундай *c* рационал сон мавжуд бўлсаки, унда $a + c = b$ бўлса, *a* сон *b* сондан кичик ($a < b$) бўлади.

Бундай ҳолда *b* сони *a* дан катта ($b > a$) деб ҳам айтилади.

Бу таъриф мусбат рационал сонлар тўпламида айирма мавжуд бўлишининг зарур ва етарли шартини ифодалашга имкон яратади.

***a* ва *b* мусбат рационал сонларнинг айирмаси мавжуд бўлиши учун $b < a$ бўлиши зарур ва етарлидир.**

Бу шартнинг исботи натурал сонлар тўпламида айирма мавжуд бўлиши ҳақидаги теореманинг исботига ўхшайди.

«Кичик» муносабатининг келтириб чиқарилган таърифидан бу муносабатни ўргатишнинг амалий усуллари чиқариш мумкин.

1. Агар $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{p}{n}$ бўлса, $m < p$ бўлганда ва фақат шунда $a < b$ бўлади.

Масалан, агар $a = \frac{3}{14}$; $b = \frac{9}{14}$ бўлса, $a < b$ бўлади, чунки $3 < 9$.

2. Агар $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{p}{q}$ бўлса, $m q < n p$ бўлганда ва фақат шунда $a < b$ бўлади.

Ҳақиқатан, $\frac{m}{n}$ ва $\frac{p}{q}$ касрларини умумий махражга келтирамиз:
 $\frac{m}{n} = \frac{mq}{nq}$, $\frac{p}{q} = \frac{pn}{qn}$. Натижада берилган касрларни таққослаш уларнинг суратларини таққослашга келтирилди: агар $m q > n p$ бўлса, $a > b$; агар $m q < n p$ бўлса, $a < b$.

Масалан, агар $a = \frac{7}{8}$, $b = \frac{11}{13}$ бўлса, $b < a$, чунки $7 \cdot 13 = 91$, $8 \cdot 11 = 88$ ва $8 \cdot 11 < 7 \cdot 13$.

Бундай аниқланган «кичик» муносабати транзитив ва антисимметрик эканлигини, яъни «кичик» муносабати мусбат рационал сонлар тўпламида тартиб муносабати эканини, бу тўпلامнинг ўзи тартибланган тўплам эканини кўрсатиш мумкин.

Шуни эслатиб ўтамизки, мусбат рационал сонлар тўпламидаги тартиб муносабати натурал сонлар тўпламидаги тартиб муносабатидан фарqli хоссаларга эга. Маълумки, N тўпلامда энг кичик сон — бир бор ва N тўплам дискрет — натурал сонлар орасида бошқа натурал сонлар йўқ. **Мусбат рационал сонлар тўпламида:**

1) **энг кичик сон йўқ;**

2) **ихтиёрый иккита мусбат рационал соннинг орасида Q_+ тўпلامнинг чексиз кўп сони бор.**

Q_+ тўпلامда энг кичик сон йўқлигини исботлаймиз. Фараз қиламиз, $\frac{m}{n}$ сон мусбат рационал сонлар тўпламида энг кичик сон.

$\frac{m}{n+1}$ сонни ҳосил қиламиз. $\frac{m}{n+1} < \frac{m}{n}$ ($mn < mn + m$) эканига ишонч ҳосил қилиш осон, яъни $\frac{m}{n}$ дан кичик мусбат рационал сон топилади. Демак, фаразимиз нотўғри экан. Мусбат рационал сонлар тўпламида энг кичик сон йўқ.

Иккинчи хоссани мисолда кўрсатамиз. $\frac{1}{3}$ ва $\frac{2}{3}$ рационал сонларни оламиз. $\frac{1}{3}$ дан катта ва $\frac{2}{3}$ дан кичик рационал сон мавжудми? Мавжуд. Бунинг учун берилган сонларнинг ўрта арифметикини топиш етарли $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) : 2 = \frac{1}{2}$. Шундай қилиб, $\frac{1}{3} < \frac{1}{2} <$

$< \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$ билан $\frac{2}{3}$ нинг орасида ётадиган сон яна топиладими?
 Ҳа. Уни топиш учун $\frac{1}{3}$ ва $\frac{1}{2}$ сонларнинг ўрта арифметигини топиш етарли: $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) : 2 = \frac{5}{12}$. Шундай қилиб, $\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$. Бу жараёни давом эттириш мумкин: Q_+ тўпламда олинган ихтиёрий икки сон орасида шу тўпламда ётадиган чексиз кўп сон бор. Q_+ тўпламнинг бу хоссаси зичлик хоссаси дейилади.

Машқлар

1. Турли усуллар билан сонларнинг қайси бири катта эканлигини аниқланг:

1) $\frac{19}{34}$ ёки $\frac{28}{51}$; 2) $\frac{39}{8513}$ ёки $\frac{26}{5675}$; 3) $\frac{37}{99}$ ёки $\frac{3737}{9999}$.

2. $20\frac{5}{7}$, $42\frac{5}{6}$ ва $2\frac{20}{21}$ сонларнинг йиғиндиси каттами ёки $125\frac{5}{14}$ ва $51\frac{5}{18}$ сонлар айирмаси каттами ва қанча катта?

3. Ҳисобламасдан, ифодалар қийматини таққосланг:

1) $315 \cdot \frac{5}{7}$ ва $317 \cdot \frac{3}{4}$; 2) $\frac{17}{3} \cdot 12\frac{4}{7}$ ва $\frac{15}{4} \cdot 12\frac{4}{7}$.

4. Ҳисобламасдан ифодаларни таққосланг:

1) $34\frac{1}{3} \left(8\frac{2}{3} + 2\frac{3}{4}\right)$ ва $34\frac{1}{3} \left(8\frac{2}{3} + 2\frac{1}{4}\right)$;

2) $82\frac{19}{17} \left(13\frac{51}{52} + 17\frac{1}{6}\right)$ ва $\left(13\frac{51}{52} + 17\frac{1}{7}\right) 82\frac{19}{17}$.

5. Ҳисобламасдан, ифодаларни қийматларининг ўсиб бориши тартибда жойлаштиринг:

$7\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$; $8\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{7}$; $\frac{5}{6} \cdot 7\frac{1}{2}$; $\frac{6}{7} \cdot 8\frac{2}{3}$; $8\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}$.

6. $\frac{3}{11}$ ва $\frac{4}{11}$ сонлари орасида жойлашган учта рационал сонни айтинг.

7. Агар a, b, c, d — натурал сонлар, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ бўлса, у ҳолда $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ бўлишини исботланг.

8. Қуйидаги масалаларни турли усуллар билан ечинг:

1) Шаҳарда учта ўрта мактаб бор. Биринчи мактабдаги ўқувчилар сони учала мактабдаги ўқувчилар сонининг $\frac{3}{10}$ қисмига тенг, иккинчи мактабдаги ўқувчилар сони биринчи мактабдагидан $1\frac{1}{2}$

марта кўп, учинчи мактабдаги ўқувчилар сони иккинчи мактабдагидан 420 ўқувчи кам. Учала мактабда ҳаммаси бўлиб қанча ўқувчи бор?

2) Ораларидаги масофа 25 км бўлган икки пунктдан бир вақтда бир-бирига қараб икки пиёда йўлга чиқди. Улардан бири соатига иккинчисига қараганда $\frac{3}{4}$ км ортиқ юрди. Агар йўлга чиққанларидан 2 соат кейин улар орасидаги масофа $7\frac{1}{2}$ км бўлган бўлса, ҳар бир пиёда қандай тезлик билан юрган?

87. Мусбат рационал сонларнинг ўнли каср кўринишидаги ёзуви

Биз илгари кўрганимиздек, каср сонларнинг пайдо бўлиш манбаларидан бири катталикларни ўлчашдир, аниқроғи, катталикларнинг бирлигидан иккинчи бирлигига ўтишдир, касрнинг махражи берилган катталик бирлиги неча улушга бўлишини кўрсатади.

Киши амалий фаолиятда ўнли саноқ системасидан фойдалангани учун катталикларнинг янги бирликларини берилганларни 10, 100, 1000 ва ҳоказо марта камайтириш билан ҳосил қилади. Масалан, 1 дм = 10 см = 100 мм; 1 км = 1000 м = 10 000 дм; 1 кг = 1000 г ва ҳ. к. Шунинг учун амалда махражи 10 нинг даражаларни бўлган касрлар муҳим аҳамиятга эга. Бундай касрни ўнли каср кўринишида ёзиш мумкин. Масалан, $\frac{341}{10^3} = 3,41$, $\frac{4}{10^3} = 0,004$.

Ўнли касрлардан фарқли равишда $\frac{m}{n}$ кўринишдаги касрлар оддий касрлар дейилади.

Соннинг ўнли каср кўринишидаги ёзувининг маъносини аниқлаймиз. $\frac{4362}{10^3}$ касрни оламиз ва қуйидаги шакл алмаштиришлар бажарамиз:

$$\frac{4362}{10^3} = \frac{4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 2}{10^3} = 4 \cdot 10 + 3 + \frac{6}{10} + \frac{2}{10^3}.$$

$4 \cdot 10 + 3$ йиғинди 43 сонининг ёзувидир, $\frac{6}{10} + \frac{2}{10^3}$ йиғинди эса $\frac{4362}{10^3}$ сони каср қисмининг ёзувидир. Бундай каср қисмини махражсиз ёзиш қабул қилинган, бунда каср қисми бутун қисмидан вергул билан ажратилади: $\frac{4362}{10^3} = 43,62$.

Сизга маълумки, ўнли касрларни таққослаш ва улар устида амаллар бажариш аслида натурал сонларни таққослаш ва улар устида амаллар бажаришга келтирилади. Масалан, $0,3472 < 0,3480$, чунки сонларнинг ўнли ва юзли улушлари тенг бўлгани билан, биринчи соннинг мингли улуши иккинчи сонникидан кичик ($7 < 8$).

Ўнли касрларни таққослаш ва улар устида амаллар бажариш осон бўлгани учун қуйидаги савол келиб чиқади: $\frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{N}$) кўринишдаги ҳар қандай касрни ҳам ўнли каср кўринишида ёзиш мумкинми?

Масалан, $\frac{8}{25}$ ва $\frac{3}{7}$ касрларни олайлик, $\frac{8}{25}$ каср $\frac{32}{100}$ касрга тенг, демак, $\frac{8}{25} = 0,32$. Аммо $\frac{3}{7}$ каср учун махражи 10 нинг даражаси бўлган унга тенг касрни топиб бўлмайди. Нима учун? Бунга қуйидаги теорема жавоб беради (биз уни исботсиз қабул қиламиз):

$\frac{m}{n}$ қисқармас каср ўнли касрга тенг бўлиши учун бу каср махражининг туб кўпайтувчиларга ёйилмасида фақат 2 ёки 5 сонлари бўлиши зарур ва етарлидир.

Масалан, $\frac{19}{80}$ касрни ўнли каср кўринишида ёзиш мумкин, чунки у қисқармас ва махражининг туб кўпайтувчиларга ёйилмаси 2 ва 5 сонларидангина иборат: $80 = 2^4 \cdot 5$.

$\frac{11}{15}$ касрни ўнли каср кўринишида ёзиб бўлмайди, унинг махражининг туб кўпайтувчиларга ёйилмасида 3 сони бор: $15 = 3 \cdot 5$.

Ўнли касрлар орасида 0,01 каср ажралиб туради ва ундан кўп фойдаланилади. У процент деб аталади ва 1% деб белгиланади. Амалда катталикларнинг қисмлари процентлар билан ифодаланади. Масалан, товарнинг нархи 20% арзонлаштирилди, шакарқамишда 15% шакар бор дейилади. Бунинг билган ҳолда 10 т шакарқамишда қанча шакар борлигини топиш мумкин. Бунинг учун 0,15 касрни 10 га кўпайтириш керак: $0,15 \cdot 10 \text{ т} = 1,5 \text{ т}$. Демак, 10 т нинг 15% и 1,5 т ни ташкил қилар экан.

Машқлар

1. Ўқувчига $\frac{195}{260}$ касрни ўнли каср кўринишида ёзиш мумкин ёки мумкин эмаслигини аниқлаш топширилди. У бу касрнинг махражини туб кўпайтувчиларга ажратди: $260 = 2^3 \cdot 5 \cdot 13$ ва қуйидаги хулосага келди: $\frac{195}{260}$ касрни ўнли каср кўринишида ёзиш мумкин эмас. Ўқитувчи ўқувчининг жавобини нотўғри деб топди. Нима учун?

2. $\frac{21}{28}$, $\frac{192}{375}$, $\frac{15}{24}$, $\frac{13}{20}$ касрлардан қайсыларини ўнли каср кўринишида ёзиш мумкин?

3. Сонлар ёзуви берилган: 0,40; $\frac{500}{100}$; 0,4; $\frac{6}{3}$; 5; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{5}$; 0,6; $\frac{12}{20}$. Нечта турли сон ёзилган? Бу сонларнинг нечтаси каср сон?

4. Қуйидаги ифодалар қийматини энг рационал усул билан топинг ва уни асосланг:

1) $8,3 + 3,85 + 9,7 + 5,15 + 2,25 + 0,125$;

2) $8,7 \cdot 7 + 7 \cdot 7,3$.

5. Энг рационал усул билан ҳисобланг:

1)
$$\frac{6,75^3 + 0,125 \cdot 67,5}{5,9^4 - (1,03 + 1,89726 : 0,618)^2}$$
;

2)
$$\frac{3,05^3 - 2,55^3}{0,35 \cdot 388 - 28,8 \cdot (20,56 - 14,501 : 0,85)}$$
;

3)
$$\frac{(81,624 : 4,8 - 4,505)^2 + 125 \cdot 0,75}{((0,44^2 : 0,88 + 3,53)^2 - 2,75^2) : 0,52}$$
.

6. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $(60,3 - 53,235 : 3,9) \cdot 1,4 + 10,2 \cdot 12$;

2) $15,85 - 3,4 \cdot (50 - (1,530 + 0,4)) + 3,57 : 1,7$.

7. Компоненталар ва амаллар натижалари орасидаги боғланишдан фойдаланиб, тенгламани ечинг:

1) $(x \cdot 100 - 0,7357) : 0,01 - 15,88 = 0,55$;

2) $14 : ((0,4x + 0,16) : x) + 5 = 12$.

8. Жумлалар қандай маънога эга:

1). Касаба союз аъзосининг аъзолик бадали иш ҳақининг 1% ини ташкил қилади.

2) Меҳнат унумдорлиги 7% ошди.

3) Радиоаппаратура нархи 18% камайди.

9. Қуйидаги масалаларни ечинг:

1) Цистернада 936 л бензин бор эди. Бу бензиннинг 12,5% и бўш бочкага қуйилгандан кейин цистерна ҳажмининг 32,5% ида бензин қолди. Бочканинг ҳажмини топинг.

2) Пол юзининг 72% ини бўяш учун 4,5 кг бўёқ кетди. Полнинг қолган юзини бўяш учун қанча бўёқ кетади?

3) Завод 225 т металл эритиб, I квартал планини бажарди, II квартал планини 3,2% ошириб бажарди, III кварталда II кварталдагидан 6,3 т ортиқ металл топширди. Агар ҳар бир квартал плани бир хил бўлса, завод III квартал планини неча процент ошириб бажарган?

4) Тўғри тўртбурчак шаклидаги пластинанинг бўйи 20% камай тирилди, эни эса 20% оширилди. Пластина юзи ўзгардим? Агар ўзгарган бўлса, қандай ўзгарди?

10. Амалларни бажаринг:

1) $17 \frac{1}{2} - 8,25 \cdot \frac{10}{11} \cdot (11 \frac{2}{3} : 2 \frac{2}{9} + 3,5)$;

2) $((1,72 : 0,8 + 0,7) \cdot 0,8) \cdot ((7 - 3,5 \cdot 1 \frac{5}{8}) : 3 \frac{1}{2}) - 0,152$;

3) $(6 \frac{9}{35} - 5 \frac{5}{25}) \cdot 7 - 12,505 : 4,1 + 1,25 \cdot 0,32 (36,096 : 1,2 - -29,88) - 3,58$.

$\frac{6}{7}$ касрни оламиз. Унинг махражи 7 сони бўлгани учун ўнли каср кўринишида ёзиб бўлмайди. Бунда чекли ўнли каср кўзда тутилади. Демак, 6 ни 7 га бўлиш жараёни чексиз бўлади, акс ҳолда $\frac{6}{7}$ сонини чекли ўнли каср кўринишида ёзиш мумкин бўлар эди. Шунинг учун $\frac{6}{7}$ каср чексиз ўнли касрга тенг деб ҳисобланади. Ундан ташқари 6 ни 7 га бўлганда бўлинмада] рақамлар группаси такрорланиши кўзга ташланади: $\frac{6}{7} = 0,857142857142857142 \dots$. Соннинг ўнли ёзувида вергулдан кейин бундай кетма-кет такрорланадиган рақамлар группаси давр дейилади, ёзувида давр қатнашган чексиз ўнли каср эса даврий каср дейилади. Даврни кичик қавс ичида бир марта ёзиш қабул қилинган: $\frac{6}{7} = 0, (857142)$.

Икки хил даврий касрлар фарқ қилинади.

Соф даврий касрлар — уларда давр вергулдан кейин дарҳол бошланади ва аралаш даврий касрлар — уларда вергул ва давр орасида бошқа ўнли хоналар бор. Масалан, $0, (857142)$ — соф даврий каср, $3,27 (346)$ — аралаш даврий каср.

Қисқармас каср махражининг туб кўпайтувчиларга ёйилмасида 2 ва 5 дан фарқли бошқа кўпайтувчи бўлган ҳолда ҳар доим $\frac{m}{n}$ каср даврий ўнли каср кўринишида ифодаланадими? Бунга қуйидаги теорема жавоб беради:

Агар $\frac{m}{n}$ каср қисқармас ва махражнинг ёйилмасида

2 ва 5 дан фарқли бошқа туб кўпайтувчи бўлса, $\frac{m}{n}$ каср чексиз даврий ўнли каср кўринишида ифодаланади.

Исботи. Махраж ёйилмасида 2 ва 5 дан фарқли бошқа туб кўпайтувчи бўлгани учун m ни n га бўлиш жараёни чексиздир. Ундан ташқари m ни n га бўлганда n дан кичик қолдиқлар, яъни 1, 2, . . . , $n-1$ сонлар қолади. Турли қолдиқлар тўплами чекли бўлгани учун, қайсидир қадамдан кейин бирор қолдиқ такрорланади, бу эса бўлинма хоналарининг такрорланишига олиб келади. Демак, $\frac{m}{n}$ сонини ифодатовчи чексиз ўнли каср албатта даврий бўлар экан.

Исботланган теоремадан хулоса келиб чиқади: **ихтиёрый мусбат рационал сонни чекли ўнли каср орқали ёки чексиз даврий ўнли каср орқали ифодалаш мумкин.**

Агар чекли ўнли касрни даври 0 га тенг чексиз каср деб ҳисоблаш шартлашилса, бу хулосани қисқача айтиш мумкин. Масалан, $7,82 = 7,82(0)$. Бундай шартлашиш **ихтиёрый мусбат рационал сонни чексиз даврий ўнли каср орқали ёзиш мум-**

кин дейишга имкон беради. Тескари тасдиқ ҳам тўғри: ихтиёрый мусбат чексиз даврий ўнли каср бирор мусбат рационал сонни ифодалайди.

$\frac{m}{n}$ мусбат рационал сонни чексиз даврий ўнли каср кўринишида ёзиш учун сура t m ни махраж n га бўлиш керак. Энди тескари масала қараймиз: чексиз даврий ўнли касрни оддий каср кўринишида қандай ёзиш мумкин?

Чексиз даврий ўнли каср $0, (28)$ берилган бўлсин, яъни $0,282828 \dots$. Унга мос рационал сонни a орқали белгилаймиз, у ҳолда $a = 0,282828 \dots$. Бу тенгликнинг иккала томонини 100 га кўпайтирамиз:

$$100a = 28,2828 \dots \text{ ёки}$$

$$100a = 28 + 0,2828 \dots = 28 + a.$$

$$100a = 28 + a \text{ тенгламани ечамиз: } a = \frac{28}{99}. \text{ Бу каср қисқармас.}$$

Умуман, соф даврий чексиз ўнли каср шундай оддий касрга тенгки, унинг сура t и даврга тенг, махражи эса каср даврида неч t а рақам бўлса, шунча тўққиздан иборат.

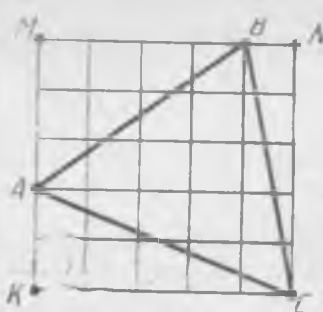
Аралаш даврий каср $0,8(61)$, яъни $0,86161 \dots$ берилган бўлсин. Унга мос рационал сонни a орқали белгилаймиз, у ҳолда $a = 0,86161 \dots$. Бу тенгликнинг иккала қисмини 10 га кўпайтириб, $10a = 8,6161 \dots$ соф даврий касрни ҳосил қиламиз. Кейинги ўзгартиришлар юқоридагидек бажарилади. $x = 8,6161 \dots$ деймиз. Бу тенгликнинг иккала қисмини 100 га кўпайтирамиз: $100x = 861,6161 \dots$ ёки $100x = 861 + 0,6161 \dots$. Иккала қисмга 8 ни қўшамиз: $100 + 8 = 861 + 8,6161 \dots$. $8,6161 \dots = x$ бўлгани учун $100 + 8 = 861 + x$ тенгламани ҳосил қиламиз, бундан $x = \frac{861 - 8}{99}$.

x нинг бу қийматини $10a = 8,6161 \dots$ тенгликка қўямиз:

$$10a = \frac{861 - 8}{99}, \text{ бундан } a = \frac{867 - 8}{990} = \frac{853}{990}.$$

Умуман, бутун қисми 0 бўлган аралаш даврий каср шундай оддий касрга тенгки, унинг сура t и иккинчи давргача ёзилган сондан биринчи давргача ёзилган соннинг айирмасидан, махражи эса даврда неч t а рақам бўлса, шунча тўққиздан ва биринчи давргача неч t а рақам бўлса, шунча нолдан иборат.

Шуни айтиш керакки, чексиз даврий ўнли касрни оддий касрга айлантирадиган бу қондалар унча тўғри эмас; уларни келтириб чиқаришда чексиз касрлар устидаги амаллар чекли ўнли касрлар учун аниқланган қондалар бўйича бажарилган.



131- расм

айтганда, чексиз даврий ўнли каср кўри-
нишида ифодалаб бўлмайдиган касрлар-
нинг мавжудлигини исботлайди.

Шундай қилиб, кесмалар узунликла-
рини ўнли ўлчашда чексиз даврий бўл-
маган ўнли касрлар ҳосил бўлади, у ян-
ги сонлар — мусбат иррационал сонлар-
нинг ёзувидир. Кўпинча сон тушунчаси
билан унинг ёзуви бир деб ҳисоблангани
учун чексиз даврий бўлмаган ўнли каср-
лар иррационал сонлар деб айтилади.

Биз кесмалар узунликларини ўнли
ўлчаш жараёнида иррационал сон тушун-

часига келдик. Бироқ баъзан бир рационал сонлардан илдиз чи-
қаришда иррационал сонларни ҳосил қилиш мумкин. Масалан,
 $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{19}$ — иррационал сонлар. Шунингдек, $\lg 5$, $\sin 31^\circ$, $\pi =$
 $= 3,14\dots$ ва $e = 2,7828\dots$ сонлари ҳам иррационалдир.

Мусбат иррационал сонлар тўплами I_+ билан белгиланади.

Машқлар

1. Агар кесма узунлиги: 1) 3,46; 2) 3,(7); 3) 3,12311223...
каср билан берилган бўлса, шу кесма узунлигини ўнли ўлчаш жа-
раёни тавсифланг.

2. Квадрати 3 га тенг бўлган мусбат рационал сон мавжуд эмас-
лигини исботланг.

3. 131-расмда тасвирланган ABC учбурчак тенг томонлими?

4. Узунлик бирлигининг еттидан бир қисми AB кесмада 13 мар-
та жойлашади. Бу кесма узунлиги чекли каср билан ифодаланадими
ёки чексиз каср билан ифодаланадими? Даврий каср биланми ёки
даврий бўлмаган каср биланми?

5. Рационал сон q билан иррационал сон α нинг йиғиндиси ҳар
доим иррационал сон бўлишини исботланг.

Кўрсатма. Тескарисидан исботланг.

6. 1) $6\sqrt{2}$ ва $0,5\sqrt{162}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ ва $6\sqrt{\frac{1}{2}}$ ифодаларнинг
қийматларини таққосланг.

7. Ифодаларни соддалаштиринг: 1) $10\sqrt{3} - \sqrt{48} - \sqrt{75}$; 2)
 $(5\sqrt{2} - \sqrt{18}) \cdot \sqrt{2}$; 3) $(3 - \sqrt{2})^2 - \sqrt{32}$; 4) $(\sqrt{3} - 2)^2 + \sqrt{27}$.

90. Мусбат ҳақиқий сонлар ўстида амаллар

Мусбат рационал сонлар тўплами Q_+ билан мусбат иррационал
сонлар тўплами I_+ нинг бирлашмаси мусбат ҳақиқий сонлар тўпла-
ми дейилади ва R_+ билан белгиланади.

Шундай қилиб, $R_+ = Q_+ \cup I_+$. Бу
тўпламлар 132-расмда Эйлер доиралари
ёрдамида тасвирланган.

Ҳар қандай мусбат ҳақиқий сонни
чексиз даврий (агар у рационал бўлса)
ёки даврий бўлмаган (агар у иррацио-
нал бўлса) ўнли каср кўринишида ёзиш
мумкин.

Маълумки, мусбат рационал сонлар
устида бажариладиган амаллар аслини
олганда натурал сонлар устида бажари-
ладиган амалларга келтирилади. Чексиз
ўнли касрлар билан берилган ҳақиқий
сонлар устида амаллар қандай бажарилади? Улар устида бажарилади-
ган амалларни рационал сонлар устида бажариладиган амалларга
келтириш мумкинми? Мумкин, бироқ бунинг учун ҳақиқий соннинг
ками билан ва ортиғи билан олинган тақрибий қийматлари тушун-
часини киритиш керак.

$a = n, n_1 n_2 \dots n_k \dots$ бирор ҳақиқий сон бўлсин. a сонининг
 $\frac{1}{10^k}$ гача аниқликда кам билан олинган тақрибий қиймати $a_k =$
 $= n, n_1 n_2 \dots n_k$ сони бўлади (агар a сонининг бутун қисмини ва
вергулдан кейин дастлабки k та рақами олиниб, қолганлари ташлаб
юбсрилса, a сонининг $\frac{1}{10^k}$ гача аниқликда кам билан олинган тақ-
рибий қиймати ҳосил бўлади). $a = n, n_1 n_2 \dots n_k \dots$ сонининг $\frac{1}{10^k}$
гача аниқликда ортиғи билан олинган тақрибий қиймати $a'_k =$
 $= n, n_1 n_2 \dots n_k + \frac{1}{10^k}$ сони бўлади (агар $n, n_1 n_2 \dots n_k$ ёзувда охириги
рақам битта орттирилса, a сонининг $\frac{1}{10^k}$ гача аниқликда ортиғи би-
лан олинган тақрибий қиймати ҳосил бўлади).

Ҳар қандай a ҳақиқий сон учун $a_k \leq a < a'_k$ тенгсизлик ўринли.

Масалан, $\sqrt{3} = 1,73205 \dots$ сонининг $0,001 \left(\frac{1}{10^3}\right)$ гача аниқлик-
да кам билан олинган ўнли яқинлашиши 1,732 сони бўлади, орти-
ғи билан олинган ўнли яқинлашиши 1,733 сони бўлади.

Кўриб турибмизки, ҳақиқий соннинг ўнли яқинлашиши чекли
ўнли касрлар бўлар экан. Мусбат ҳақиқий сонлар устида амаллар
таърифида шунга асосланилади.

a ва b — ҳақиқий сонлар, a_k ва b_k — ҳақиқий сонларнинг кам
билан олинган тақрибий қийматлари, a'_k ва b'_k — ҳақиқий сонларнинг
ортиғи билан олинган тақрибий қийматлари бўлсин.

Таъриф. a ва b мусбат ҳақиқий сонларнинг йиғиндиси деб
 $a_k + b_k \leq a + b < a'_k + b'_k$ тенгсизлиكنи қаноатлантирувчи $a + b$
сонга айтилади.



132- расм

Машқлар

1. Нима учун $\frac{17}{19}$ ва $\frac{8}{33}$ касрларни чекли ўнли касрлар кўринишида ёзиб бўлмаслигини тушунтиринг.

2. $\frac{10}{11}$ сонини чексиз ўнли каср кўринишида ёзинг ва нима учун бу каср даврий каср эканлигини тушунтиринг.

3. Қуйидаги оддий касрларни чексиз ўнли касрлар кўринишида ёзинг: 1) $\frac{8}{33}$; 2) $\frac{137}{18}$; 3) $\frac{127}{28}$.

4. Оддий каср кўринишида ёзинг:

1) 0,(43); 2) 0,(301); 3) 5,7(27); 4) 6,31(3); 5) 15,43(29).

5. 0,27(9) = 0,28(0) эканини исботланг.

6. Қуйидаги тенгликларнинг қайси бири тўғри эканини аниқланг:

1) $\frac{66}{33} = 2,(6)$; 2) $\frac{56}{11} = 5,(09)$; 3) $20,8 + \frac{7}{11} = 20,8(63)$. (1)

7. Сонларни ўсиб бориш тартибида жойлаштиринг:

1) 0,125; 2,(7); 0,1(25); 2,78; 2) 1,(5); 0,(12); 2,778; 2,(778).

13-§. ҲАҚИҚИЙ СОНЛАР

89. Мусбат иррационал сон тушунчаси

Маълумки, агар мусбат раціонал сонлар ўнли каср кўринишида берилган бўлса, улар устида амаллар бажариш қулай. Шунинг учун бу катталикларни ўлчаш натижаларини ҳам, жумладан кесмалар узунликларини ўнли каср кўринишида ёзиш мақсадга мувофиқдир.

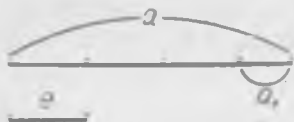
Буни қандай бажариш мумкин?

a — узунлиги ўлчаниши керак бўлган кесма, e кесма — узунлик бирлиги бўлсин. a кесма ҳар бири e_1 га тенг n та кесмадан ва e дан қисқа a_1 кесмадан иборат бўлсин (129-расм), яъни $ne < a < (n+1)e$. n ва $n+1$ сонлари a кесма узунлигининг e узунлик бирлигидagi биргача аниқликда камин билан ва ортиғи билан олинган тақрибий қийматлари бўлади.

Жавобни катта аниқликда олиш учун e кесманинг ўндан бир қисми — e_1 кесмани оламин ва уни a_1 кесмага жойлаштирамиз. Бунда икки ҳол юз бериши мумкин:

1) e_1 кесма a_1 кесмага тўла n_1 марта жойлашади. Унда a кесманинг узунлиги чекли ўнли каср билан ифодаланади:

$a = \left(n + \frac{n_1}{10}\right)e = n,n_1e$. Масалан: $a = 3,4e$.



129-расм

2) a_1 кесма ҳар бири e_1 га тенг n_1 та кесмадан ва e_1 дан қисқа a_2 кесмадан иборат бўлади. У ҳолда $n,n_1e < a < n,n_1'e$, бу ерда n,n_1 ва n,n_1' лар a кесма узунлигининг 0,1 гача аниқликда камин билан ва ортиғи билан олинган тақрибий қийматлари бўлади.

Равшанки, 2) ҳолда a кесма узунлигини ўнли ўлчаш жараёнини давом эттириш мумкин, бунда янги бирлик кесма $e_2 = \frac{e}{100}$ олинади.

Амалда a кесма узунлигини ўнли ўлчаш жараёни бирор босқичда тугайди. Демак, бу вазиятда кесма узунлигини ўлчаш натижаси e натурал сон, ёки чекли ўнли каср бўлади.

Агар кесма узунлигини ўнли ўлчаш жараёнини идеалдагидек олсак (математикада қилингандек), икки ҳол юз бериши мумкин:

1) Ўлчаш жараёни бирор k -қадамда тугайди. У ҳолда a кесманинг узунлиги $n, n_1, n_2, \dots, n_k$ кўринишдаги чекли ўнли каср билан ифодаланади.

2) Кесма узунлигини ўлчаш жараёни чексиз бўлади, у қуйидагича белгиланади: $n, n_1, n_2, \dots, n_k$. Бу каср чексиз ўнли каср дейилади.

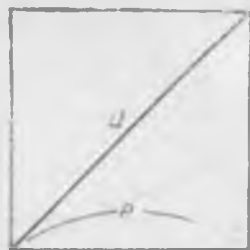
Бундай ҳолларнинг юз беришига қандай ишонч ҳосил қилиш мумкин? Бунинг учун, масалан, узунлиги $5\frac{2}{3}$ рационал сон билан ифодаланган кесма узунлигини ўнли ўлчаш етарлидир. Агар бундай кесма узунлигини ўнли ўлчаш натижасида чекли ўнли каср ҳосил бўлса, бу $5\frac{2}{3}$ сонни чекли ўнли каср кўринишида ёзиш мумкинлигини англатади, бу эса мумкин эмас: $5\frac{2}{3} = 5,666 \dots$

Шундай қилиб, кесмалар узунликларини ўнли ўлчаш жараёнида чексиз ўнли каср ҳосил бўлиши мумкин экан. Бу каср ҳар доим ҳам даврий бўладими? Бу саволнинг жавоби салбий: узунликларини танлаб олинган узунлик бирлигида чексиз даврий ўнли каср билан (яъни мусбат рациснал сон билан) ифодалаб бўлмайдиган кесмалар мавжуд.

Узунлик бирлиги қилиб квадрат томони олинганда бу квадрат диагонаlining узунлиги мусбат рационал сон билан ифодаланмаслигини кўрсатамиз.

Тескарисини фараз қиламиз, яъни томони e бўлган квадрат диагонаlining a узунлиги (130-расм) бирор қисқармас каср билан ифодалансин: $\frac{m}{n} : a = \frac{m}{n} e$. Пифагор теоремасига кўра $e^2 + e^2 = \left(\frac{m}{n} e\right)^2$ ёки $2e^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 e^2$ ёки $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Бундан $m^2 = 2n^2$, яъни m — жуфт сон, масалан, $m = 2k$. У ҳолда $4k^2 = 2n^2$ ёки $2k^2 = n^2$. Демак, n — жуфт сон, масалан, $n = 2p$. Бундан $\frac{m}{n}$ касрнинг сурати ҳам, маҳражи ҳам жуфт сонлар эканлигини ҳосил қилдик. Бу эса $\frac{m}{n}$ касрнинг қисқармас каср эканлигига зид.

Бу зидлик узунликларини мусбат рационал сон билан ифодалаб бўлмайдиган кесмаларнинг мавжудлигини исботлайди ёки, бошқача



130- расм

Масалан, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ йнғиндини 0,001 гача аниқликда топайлиқ. Бу сонларнинг 0,0001 гача аниқликда ўнли яқинлашишини оламинз.

$$1,4142 \leq \sqrt{2} < 1,4143,$$

$$1,7320 \leq \sqrt{3} < 1,7321.$$

У ҳолда $3,1462 \leq \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3,1464$, $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3,146 \dots$ 0,001 гача аниқликда $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ йнғинди 3,146 га тенг.

Таъриф. a ва b мусбат ҳақиқий сонларнинг кўпайтмаси деб $a \cdot b$ шартни қаноатлантирувчи $a \cdot b$ сонга айтилади.

Масалан, 0,1 гача аниқликда $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ кўпайтмани топайлиқ. Берилган сонларнинг 0,01 гача аниқликда ўнли яқинлашишларини оламинз:

$$1,41 \leq \sqrt{2} < 1,42,$$

$$1,73 \leq \sqrt{3} < 1,74.$$

У ҳолда $2,4393 \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} < 2,4708$, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 2,4 \dots$ 0,1 гача аниқликда $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ кўпайтма 2,4 га тенг.

Ҳар қандай мусбат ҳақиқий сон учун қуйидаги тенгликлар бажарилади:

$$1) a + b = b + a;$$

$$4) (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$$

$$2) (a + b) + c = a + (b + c); \quad 5) (a + b) \cdot c = ac + bc.$$

$$3) a \cdot b = b \cdot a;$$

Машқлар

1. 4,7 ва 4,8 сонлари $\sqrt{23}$ сонининг 0,1 гача аниқликда мос равишда ками билан ва ортиғи билан олинган ўнли яқинлашиш эканлигини исботланг.

2. 1) $3,6 \leq 3\frac{5}{7} \leq 3,7$; 2) $7,26 \leq 7\frac{3}{11} \leq 7,27$ тенгсизлик тўғрими? Текширинг.

3. 0,001 гача аниқликда каддирг итдзтир жидвдидан олинган $\sqrt{21}$ ўнли яқинлашиш 4,583 га тенг. Яхлитлаш ками билан олинганми ёки ортиғи билан олинганми? Текширинг.

4. Архимед айлана узунлигининг диаметрига нисбати $3\frac{10}{71}$ дан катта, $3\frac{1}{7}$ дан кичик эканлигини аниқлади. Бу касрларнинг: а) 0,01;

б) 0,001 гача аниқликда олинган ўнли яқинлашишларини топинг.

5. $a = 3,6272\dots$, $b = 5,2814\dots$ эканлиги маълум. $a + b$ йнғиндининг дастлабки учта ўнли рақамини топинг.

6. $x = 0,35\dots$, $y = 0,82\dots$ эканлиги маълум. $x \cdot y$ кўпайтманинг биринчи ўнли рақамини топинг.

7. Текширинг: 1) $20,8 + \frac{7}{11} = 21,4(36)$; 2) $220 - \frac{7}{11} = 219,36$.

91. Манфий сонлар

OX координата тўғри чизигини оламиз. Мусбат ҳақиқий сонларни тасвирловчи ҳамма нуқталар O нуқтадан ўнгга жойлашади. Масалан, A нуқта ҳақиқий сон 4 га, B нуқта 5,5 сонига, C нуқта $\sqrt{2}$ сонига мос келади (133-расм).



133- расм

O нуқтадан берилган йўналишга қарама-қарши йўналишда 4 марта бирлик кесма қўямиз. Саноқ бошига нисбатан A нуқтага симметрик A' нуқта ҳосил қиламиз. A' нуқтанинг координатасини — 4 билан белгилаймиз, яъни $A'(-4)$. Шунга ўхшаш ўша расмдаги B нуқтага симметрик B' нуқтанинг координатаси — 5,5 сони, C нуқтага симметрик C' нуқтанинг координатаси — $\sqrt{2}$ сони бўлади. 4 ва —4, 5,5 ва —5,5, $\sqrt{2}$ ва — $\sqrt{2}$ сонлари қарама-қарши сонлар дейилади. Координата тўғри чизигида берилган йўналишда жойлашган сонлар мусбат сонлар, координата тўғри чизигида берилган йўналишга қарама-қарши йўналишда жойлашган сонлар манфий сонлар дейилади. 0 сони мусбат ҳам, манфий ҳам эмас.

Манфий ҳақиқий сонлар тўпламининг мусбат ҳақиқий сонлар тўплами ва ноль билан бирлашмаси ҳақиқий сонлар тўплами бўлади, у R ҳарфи билан белгиланади.

Ҳақиқий сонлар тўплами R билан координата тўғри чизиги нуқталарининг тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд: ҳар бир ҳақиқий сонга координата тўғри чизигида ягона нуқта мос келади ва координата тўғри чизигининг ҳар бир нуқтаси ягона ҳақиқий сонга мос келади.

Саноқ бошидан координатаси x сони бўлган нуқтагача масофа соннинг модули дейилади ва $|x|$ каби белгиланади. Шундай қилиб,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса,} \\ -x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Масалан, $|-7| = 7$, $|5,5| = 5,5$, $|0| = 0$.

«Кичик» ва «катта» муносабатларни таърифлаб, ҳақиқий сонлар таққосланади: агар a сони координата тўғри чизигида b сонидан

чада жойлашган бўлса, a сони b сонидан кичик дейилади ($a < b$); агар a сони координата тўғри чизигида b сонидан ўнгга жойлашган бўлса, a сони b сонидан катта дейилади ($a > b$). Бу таърифдан ҳар қандай мусбат сон нолдан катта, ҳар қандай манфий сон нолдан кичик эканлиги келиб чиқади. Ундан ташқари, «кичик» ва «катта» таърифларидан қуйидаги даъвои ҳосил қилиш мумкин: a — $-b$ айирма манфий сон бўлганда ва фақат шунда $a < b$ бўлади; a — $-b$ айирма мусбат сон бўлганда ва фақат шунда $a > b$ бўлади.

Берилган ҳар қандай a ва b ҳақиқий сонлар учун $a < b$, $a > b$, $a = b$ ҳолатларнинг биттаси ва фақат биттаси ўринли.

Ҳақиқий сонлар устида амаллар қуйидаги қондалар асосида бажарилади:

Икки ҳақиқий соннинг йиғиндиси деб қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи сонга айтилади:

1) икки мусбат соннинг йиғиндиси мусбат сон бўлиб, мусбат ҳақиқий сонлар тўпламида таърифланган қондалар бўйича топилади;

2) икки манфий соннинг йиғиндиси манфий сондир; йиғиндининг модулини топиш учун қўшилувчилар модулларини қўшиш керак;

3) турли ишорали икки сон йиғиндиси модули катта бўлган қўшилувчи қандай ишорали бўлса, ўша ишорали сонга тенг; йиғиндининг модулини топиш учун катта модулдан кичик модулни айириш керак.

Икки ҳақиқий соннинг кўпайтмаси деб қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи сонга айтилади:

1) икки мусбат соннинг кўпайтмаси мусбат сон бўлиб, мусбат ҳақиқий сонлар тўпламида таърифланган қондалар бўйича топилади;

2) икки манфий соннинг кўпайтмаси мусбат сондир; турли ишорали икки соннинг кўпайтмаси манфий сондир; кўпайтманинги модулини топиш учун бу сонлар модулларини кўпайтириш керак.

Ҳақиқий сонларни айириш ва бўлиш мос равишда қўшиш ва кўпайтиришга тескари амаллар сифатида таърифланади. Ҳақиқий сонлар тўпламида ҳар доим айириш амалини, шунингдек, бўлиш амалини (нолга бўлишдан ташқари) бажариб бўлади.

Машқлар

1. Нурда (134-расм) $a+3$ ва $a-5$ сонларини тасвирланг.

$a-5 \quad a \quad a+3$

134-расм

2. Қуйидаги фикрни исботланг ёки инкор қилинг:

1) 35 сонидан катта ҳар қандай сон мусбат.

2) 19 дан кичик ҳар қандай сон мусбат.

3) 19 дан кичик мусбат сон мавжуд.

4) Ҳар доим ҳар қандай мусбат сондан кичик бутун мусбат сонни кўрсатиш мумкин.

5) Бирор манфий сондан кичик ҳар қандай сон манфий сондир.

6) Нолдан катта бўлмаган ҳар қандай сон манфий сондир.

3. Қандай шартда қуйидаги жумла чин фикр бўлади:

«Агар a сонининг модули b сонининг модулидан катта бўлса, a сони b сонидан катта бўлади?»

4. Агар:

1) $x = 2$; 2) $|x - 1| = 2$; 3) $|x| \leq 5$; 4) $|x| > 2$; 5) $|x - 1| < 3$
 бўлса, x координатални нуқта координата тўғри чизигининг қаериди
 ётади?

5. Модулнинг геометрик тушунчасидан фойдаланиб:

- 1) $|x - 3| = 2$ тенгламани;
- 2) $|x - 2| < 3$ тенгсизликни;
- 3) $|x - 1| > 3$ тенгсизликни ечинг.

IV Б О Б

ТЕНГЛАМАЛАР. ТЕНГСИЗЛИКЛАР. ФУНКЦИЯЛАР

14-§. СОНЛИ ТЕНГЛИКЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

92. Математика тилининг алфавити ҳақида

Математикани ўрганар эканмиз, ўзбекча жумлалар билан бир қаторда математик белги (символ)лардан тузилган жумлалардан, яъни соф математик тилдаги жумлалардан фойдаланамиз. Масалан, $2x + 3 = 5$, $2x + 7 > 5x$ — математик белгилар ёрдамида ёзилган жумлалардир.

Аммо, маълумки, ҳар қандай жумла сўзлардан, сўзлар эса бирор алфавитдаги ҳарфлардан иборат. Демак, математика тилининг алфавити бўлиши керак. Математика алфавити ҳақида тушунча ҳосил қилиш учун математикада қандай белгилар (символлар) учраганини эслайлик. Масалан, ўнли саноқ системасида сонларни ёзиш учун ўнта рақам (белги) дан фойдаланилади: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ўзгарувчиларни, тўплам ва улар элементларини белгилаш учун латин алфавитининг ҳарфларидан фойдаланилади: $a, b, c, \dots, z, A, B, C, \dots, Z$. Амалларни ёзиш учун $+, -, \cdot, :, \sqrt{}, \cap, \cup$ ва бошқа белгилардан фойдаланилади. Жумла тузиш учун (сонлар, тўпламлар ва улар элементлари орасига) муносабат белгилари керак: $=, >, <, \parallel, \perp, \vdots$ ва бошқалар. Ундан ташқари, қавс (катта ва кичик қавслар), вергуллар қўлланилади.

Қайд қилинган ҳамма белгилар математик қонун, қонда, исботларни аниқ, қисқа ва бир маъноли (қийматли) тушуниш билан боғлиқ заруратдан вужудга келган сунъий тил — математика тилининг алфавитига кирази.

Математика алфавитидаги белгилардан маълум қондалар бўйича сўзлар ва жумлалар тузилади. Математикадаги сўз ўзбекчадагидек тушунилади, яъни сўз маънога эга бўлган шу тил алфавити ҳарфларининг чекли кетма-кетлигидир. Масалан, $7 - 8 + 8$ — 8 маънога эга эмас, демак, уни сўз деб бўлмайди.

Шуни эслатиб ўтиш керакки, биз математика тилига формал ёндашиш билан танишдик. Математик белгилар (символлар) кўпгина таниқли олимларнинг иштирокида асрлар давомида вужудга келган. Масалан, номаълум катталикларни (миқдорларни) Диофант (III аср) ҳарфлар билан белгиланган, Виет (XVI аср) алгебрада латин алфавитининг бош ҳарфларини кенг қўллаган. Бу алфавитнинг кичик ҳарфларини белгилаш учун

бажарилгандан кейин пайдо бўлади. Кўпайтириш ва бўлиш билан танишилгандан кейин кўпайтириш ва бўлиш белгилари қатнашган сонли ифодалар қаралади. Ўқувчилар сонли ифодаларнинг қийматларини топадилар, баъзан тексти масалалар ечимини сонли ифода кўринишида ёзадилар, берилган ифодалар бўйича масалалар тузадилар. Бундай топшириқларни бажаришда ўқувчилар қийматини бутун номанфий сонлар тўламида топиб бўлмайдиган ифодаларга дуч келадилар. Масалан, 6—7 ифода ҳақида гапирганда, унинг қийматини топиш мумкин эмас, чунки кичик сондан катта сонни айлариб бўлмайдиган дейдилар.

Ҳарфли ифодалар билан ишлаш ҳарфлар ўрнига уларнинг қийматларини қўйиш ва ҳосил бўлган сонли ифоданинг қийматини ҳисоблашга келтирилади.

Машқлар

1. Қуйидаги ёзувлар орасидан сонли ифодаларни кўрсатинг:

- 1) $42:5$; 2) 3^2 ; 3) 27 ; 4) $32 + -14 \cdot 2$; 5) $7\sqrt{16-3}$; 6) $\sqrt{\sqrt{2}}$;
7) $27-4 = 20+3$; 8) $13-5 < 7$.

2. Қуйидаги ёзувларнинг қайсылари ўзгарувчили ифода бўлади:

- 1) $\frac{b}{3} + 8$; 2) $\frac{2,3+ac}{5}$; 3) $21 - (4+y)$; 4) $0,49 + 2^2$; 5) $x + 2y < 7$; 6) $32 : y + 3^2$

3. Сонли ифоданинг қийматини ҳисобланг:

- 1) $((36:2-14) \cdot (42:2-14) + 20):2$;
2) $(72:12 - (18-15)):(24:3 - 2 \cdot 4)$;
3) $(16,583:7,21 + 54,68 \cdot 853,2 + 28,82 \cdot 0,1):1,6 - 1,02$;
4) $(5,05:\frac{1}{40} - 2,8 \cdot \frac{5}{6}) \cdot 3 + 16 \cdot 0,1875$;
5) $(1,75 \cdot \frac{2}{5} + 1,75:1\frac{1}{8}) \cdot 1\frac{5}{7}:(\frac{17}{40} - 0,325):\frac{1}{5} \cdot 0,4$;
6) $(-2,09:1,1 + 4,5):(-\frac{5}{8}) - 4,32 - 3,68$.

4. Жадвални тўлдилинг:

Ўзгарувчили ифода	Ўзгарувчининг қиймати	Сонли ифода	Ифоданинг қиймати
$\frac{a}{8} - (\frac{2}{a})^3$	$a = 4$		
$\frac{b-4}{2(b-3)} + \frac{2}{3}$	$b = 6$		

5. Ўзгарувчининг қандай қийматларида ифода маънога эга эмаслигини аниқланг:

- 1) $\frac{64}{3+y}$; 2) $\frac{25}{7-b}$; 3) $\sqrt{a+3}$; 4) $\frac{8}{\sqrt{y-4}}$.

8. Маълумки ифода узининг энг охириги амали буйича номланади. Амаллар тартибинг кўрсатниг ва охириги амал буйича ҳар бир ифоданинг номини ёзинг:

Ифода	Ифоданинг номи
$(12 \cdot 5 + 3 : (2 + 7)) \cdot 18$	
$(23 - 7 \cdot 6 - 4 + 15) : (17 - 6)$	
$21 + (35 \cdot 3 \cdot 8 - 14,5)$	
$19 - 8 : 4 + 5$	

7. Рационал усул билан ифоданинг қийматини топинг:

$$\frac{2a - 2b}{ax - bx + ay - by}, \text{ бунда } a=3,2, b=1,7, x=2,7, y=-0,7.$$

8. Ифоданинг қийматини топинг:

$$(3b - 3a)^2 \cdot \frac{1}{3a^2 - 3b^2}, \text{ бунда } a=7 \text{ ва } b=3.$$

9. Масала ечимини ифода кўринишида ёзинг, сўнгра унинг қийматини топинг:

1) Турбазага биринчи кун 150 турист, иккинчи кун 170 турист келди. Саёҳатга чиқиш учун 200 турист 20 кишидан иборат группаларга, қолганлари 15 кишидан иборат группаларга бўлинишди. Нечта группа ҳосил бўлди?

2) Тикувчилик устахонасида 5 кунда 2000 та мактаб фартуклари тикилди. Агар устахонада кунига 50 та фартук ортиқ тикилса, 8 кунда нечта фартук тикилади?

10. Бошланғич синфлар учун математика дарсликларидан уқувчиларга:

1) сонли ифоданинг қийматини ҳисоблашга;

2) ифодада қатнашган ҳарфларнинг қийматлари берилганда ифоданинг қийматини топишга;

3) берилган ифода бўйича масала тузиш тавсия этиладиган топшириқларга доир иккитадан мисол келтиринг.

Бу топшириқларни бажаринг.

94. Сонли тенгликлар ва тенгсизликлар

a ва b — иккита сонли ифода бўлсин. Уларни тенглик белгиси билан бирлаштирамиз. $a=b$ деган жумлани ҳосил қиламиз, бу жумла сонли тенглик дейилади.

Масалан, $3+2$ ва $6-1$ сонли ифодаларни оламиз ва уларни тенглик белгиси билан бирлаштирамиз. $3+2=6-1$ сонли тенглик ҳосил бўлади. Бу жумла рост. Агар $3+2$ ва $7-3$ сонли ифодаларни тенглик белгиси билан бирлаштирадик, $3+2=7-3$ сонли тенгликни ҳосил қиламиз, бу жумла ёлғон. Шундай қи-

Р. Декарт (XVII аср) киритган. Тенглик (=) белгиси биринчи марта инглиз олими Р. Рекорд (XVI аср) ишларида қўлланилди, XVIII асрдагина бу белгини ҳамма ишлатадиган бўлди. Тенгсизлик (<, >) белгилари XVII аср бошларида пайдо бўлди, уларни инглиз математиги Гарнот киритди. „=“, „>“, „<“ белгиларининг пайдо бўлганига ҳали унча кўп вақт бўлмаган бўлса-да, тенглик ва тенгсизлик тушунчалари қадим замонларда вужудга келган.

Машқлар

1. Қуйидаги ёзувларнинг қайсиларини математик тилдаги сўзлар дейиш мумкинлигини аниқланг:

1) $2 + 3 \cdot 4$;	4) $\sqrt{16} - 12 : 4$;
2) $7 + 12 -$;	5) $a^2 - 2ab \cdot 7$;
3) $(17 + 3) \cdot 2a - 18 : 2$;	6) $\sqrt{16} - : ab \cdot 2c$.

2. Қуйидаги ёзувлар орасидан жумлаларни кўрсатинг:

1) $2 < 3$;	4) $(2a - 7b) - 8$;
2) $x^3 - 3x + 4 = 0$;	5) $x \parallel y$;
3) $5y \cdot y - 3x + =$;	6) $172 : 4$.

3. Математика алфавитидаги белгилардан иккита сўз ва иккита жумла тузинг.

4. Бошланғич математика курсида учрайдиган символик ёзувларга мисоллар келтиринг ва уларнинг маъносини тушунтиринг.

93. Сонли ифодалар ва ўзгарувчи ифодалар

Маълумки, $3+7$, $24:8$, $3 \cdot 2 - 4$, $(25+3) \cdot 2 - 17$ ёзувлар сонли ифодалар дейилади. Улар сонлардан, амал белгиларидан ва қавслардан тузилган. Шунингдек, ҳар бир сон ҳам сонли ифода ҳисобланади.

Ифодада кўрсатилган ҳар бир амални кетма-кет бажариш натижасида ҳосил бўлган сон сонли ифоданинг қиймати дейилади.

Масалан, $3 \cdot 2 - 4$ сонли ифоданинг қиймати 2 га тенг.

Сонли қийматга эга бўлмаган ифодалар ҳам мавжуд. Бундай ифодалар ҳақида гапирилганда, улар маънога эга эмас дейилади. Масалан, $8 : (4-4)$ ифода маънога эга эмас, чунки унинг қийматини топиб бўлмайди; $4-4=0$, нолга эса бўлиш мумкин эмас. $\sqrt{-9}$ ифода ҳам ҳақиқий сонлар тўпламида сонли қийматга эга эмас, чунки квадратини -9 га тенг бўлган ҳақиқий сон мавжуд эмас. Натурал сонлар тўпламида $7-9$ ифода ҳам қийматга эга эмас.

$2a+3$ ёзувини қараймиз. Бу ёзув математика тилининг алфавитидаги белгилардан: 2 ва 3 рақамларидан, қўшиш белгиси «+» дан ва a ҳарфидан тузилган. Агар a ҳарфи ўрнига сонлар қўйилса, турли сонли ифодалар ҳосил бўлади:

$$a = 3 \text{ да } 2 \cdot 3 + 3;$$

$$a = 7 \text{ да } 2 \cdot 7 + 3;$$

$$a = -4 \text{ да } 2 \cdot (-4) + 3.$$

$2a + 3$ ёзувда a ҳарфи ўзгарувчи, $2a + 3$ ёзувнинг ўзи ўзгарувчи ифода дейилади.

Ўзгарувчини латин алфавитининг истаган ҳарфи билан белгилаш мумкин. Бошланғич мактабда ўзгарувчини белгилаш учун ҳарфлардан ташқари $\square$ белги ҳам қўлланилади. Масалан, $2 \cdot \square + 3$.

Шундай қилиб, ўзгарувчи — бу белги (символ), уни сонлар билан алмаштириш мумкин.

Ифодада ўзгарувчининг ўрнига қўйиш мумкин бўлган сонлар ўзгарувчининг қийматлари, бундай сонлар тўплами эса берилган ифоданинг аниқланиш соҳаси дейилади.

«Қўйиш мумкин бўлган» сўзи нимани англатади?

Гап шундаки, ифодада ўзгарувчининг ўрнига унинг шундай қийматларини қўйиш мумкинки, натижада маънога эга бўлган сонли ифода ҳосил бўлсин.

Бир неча мисол қараймиз.

1. $3 - 4y$ ифодада y ўзгарувчи ҳар қандай ҳақиқий қийматларни қабул қилиши мумкин, чунки y нинг ҳар қандай қийматида маънога эга бўлган сонли ифода ҳосил бўлади. Бундай ҳолда $3 - 4y$ ифоданинг аниқланиш соҳаси ҳақиқий сонлар тўплами R бўлади дейиш мумкин.

2. Агар $\frac{4}{x-3}$ ифодада x ўрнига 3 сони қўйилса, маънога эга бўлмаган сонли ифода ҳосил бўлади. Аммо x ўзгарувчининг бошқа ҳамма ҳақиқий қийматларида маънога эга бўлган сонли ифода ҳосил бўлади. Шунинг учун $\frac{4}{x-3}$ ифоданинг аниқланиш соҳаси 3 сонидан бошқа ҳамма ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат бўлади, яъни $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$ тўплам бўлади.

3. $\sqrt{x-2}$ ифода x нинг $x-2 \geq 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳақиқий қийматларида сонли ифодага айланади, яъни бу ифоданинг аниқланиш соҳаси $[2, +\infty)$ тўплам бўлади.

Математикада битта, иккита, учта ва ҳоказо ўзгарувчи қатнашган ифодалар қаралади. Юқорида қаралган ҳамма ифодалар бир ўзгарувчи ифодалардир. $3x + 7y$ ифодада иккита ўзгарувчи қатнашган, $5x - (2y - 7z)$ ёзув уч ўзгарувчи ифодадир.

Яна бир марта шуни таъкидлаймизки, сонли ифодалар сонлардан, амал белгиларидан ва қавслардан тузилади, ўзгарувчи ифодаларда эса ҳарфлар ҳам қатнашади. Буни сўз билан айтганда, сонли ифодалар ҳам, ўзгарувчи ифодалар ҳам сўз бўлиб, улардан математик жумлалар тузиш мумкин.

Бошланғич синфларда ўқувчилар дастлаб $2+3$, $7-4$ кўринишдаги ёзувлар билан танишади, уларни мос ҳолда йиғинди ва айирма деб айтади. Сўнгра мураккаброқ кўринишдаги сонли ифодалар пайдо бўлади, аммо «математик ифода» ва «ифоданинг қиймати» терминлари юз ичида ҳисоблашлар

бажарилгандан кейин пайдо бўлади. Кўпайтириш ва бўлиш билан танишилгандан кейин кўпайтириш ва бўлиш белгилари қатнашган сонли ифодалар қаралади. Ўқувчилар сонли ифодаларнинг қийматларини топадилар, баъзан текстли масалалар ечимини сонли ифода кўрнишида ёзадилар, берилган ифодалар бўйича масалалар тузадилар. Бундай топширқларни бажаришда ўқувчилар қийматини бутун номанфий сонлар тўпламида топиб бўлмайдиган ифодаларга дуч келадилар. Масалан, 6—7 ифода ҳақида гапирганда, унинг қийматини топиш мумкин эмас, чунки кичик сондан катта сонни айириб бўлмайди дейдилар.

Ҳарfli ифодалар билан ишлаш ҳарфлар ўрнига уларнинг қийматларини қўйиш ва ҳосил бўлган сонли ифоданинг қийматини ҳисоблашга келтирилади.

Машқлар

1. Қуйидаги ёзувлар орасидан сонли ифодаларни кўрсатинг:

- 1) $42 : 5$; 2) 3^2 ; 3) 27 ; 4) $32 + -14 \cdot 2$; 5) $7\sqrt{16-3}$; 6) $\sqrt{\sqrt{2}}$; 7) $27 - 4 = 20 + 3$; 8) $13 - 5 < 7$.

2. Қуйидаги ёзувларнинг қайсилари ўзгарувчили ифода бўлади:

- 1) $\frac{b}{3} + 8$; 2) $\frac{2,3+ac}{5}$; 3) $21 - (4 + y)$; 4) $0,49 + 2^3$; 5) $x + 2y < 7$; 6) $32 : y + 3^2$

3. Сонли ифоданинг қийматини ҳисобланг:

- 1) $((36 : 2 - 14) \cdot (42 \cdot 2 - 14) + 20) : 2$;
 2) $(72 : 12 - (18 - 15)) : (24 : 3 - 2 \cdot 4)$;
 3) $(16,583 : 7,21 + 54,68 \cdot 853,2 + 28,82 \cdot 0,1) : 1,6 - 1,02$;
 4) $(5,05 : \frac{1}{40} - 2,8 \cdot \frac{5}{6}) \cdot 3 + 16 \cdot 0,1875$;
 5) $(1,75 \cdot \frac{2}{5} + 1,75 : 1 \frac{1}{8}) \cdot 1 \frac{5}{7} : ((\frac{17}{40} - 0,325) : \frac{1}{5} \cdot 0,4)$;
 6) $(-2,09 : 1,1 + 4,5) : (-\frac{5}{8}) - 4,32 - 3,68$.

4. Жадвални тўлдиринг:

Ўзгарувчили ифода	Ўзгарувчининг қиймати	Сонли ифода	Ифоданинг қиймати
$\frac{a}{8} - (\frac{2}{a})^3$	$a = 4$		
$\frac{b-4}{2(b-3)} + \frac{2}{3}$	$b = 6$		

5. Ўзгарувчининг қандай қийматларида ифода маънога эга эмаслигини аниқланг:

- 1) $\frac{64}{3+y}$; 2) $\frac{25}{7-b}$; 3) $\sqrt{a+3}$; 4) $\frac{8}{\sqrt{y-4}}$.

6. Маълумки, ифода ўзининг энг охирги амали бўйича номланади. Амаллар тартибини кўрсатинг ва охирги амал бўйича ҳар бир ифоданинг номини ёзинг:

Ифода	Ифоданинг номи
$(12 \cdot 5 + 3 : (2 + 7)) \cdot 18$	
$(23 - 7 \cdot 6 - 4 + 15) : (17 - 6)$	
$21 + (35 \cdot 3 \cdot 8 - 14,5)$	
$19 - 8 : 4 + 5$	

7. Рационал усул билан ифоданинг қийматини топинг:

$$\frac{2a - 2b}{ax - bx + ay - by}, \text{ бунда } a=3,2, b=1,7, x=2,7, y=-0,7.$$

8. Ифоданинг қийматини топинг:

$$(3b - 3a)^2 \cdot \frac{1}{3a^2 - 3b^2}, \text{ бунда } a=7 \text{ ва } b=3.$$

9. Масала ечимини ифода кўрнишида ёзинг, сўнгра унинг қийматини топинг:

1) Турбазага биринчи кун 150 турист, иккинчи кун 170 турист келди. Саёҳатга чиқиш учун 200 турист 20 кишидан иборат гуруппаларга, қолганлари 15 кишидан иборат гуруппаларга бўлинишди. Нечта гуруппа ҳосил бўлди?

2) Тикувчилик устахонасида 5 кунда 2000 та мактаб фартуклари тикилди. Агар устахонада кунига 50 та фартук ортиқ тикилса, 8 кунда нечта фартук тикилади?

10. Бошланғич синфлар учун математика дарсликларидан ўқувчиларга:

1) сонли ифоданинг қийматини ҳисоблашга;

2) ифодада қатнашган ҳарфларнинг қийматлари берилганда ифоданинг қийматини топишга;

3) берилган ифода бўйича масала тузиш тавсия этиладиган топшириқларга доир иккитадан мисол келтиринг.

Бу топшириқларни бажаринг.

94. Сонли тенгликлар ва тенгсизликлар

a ва b — иккита сонли ифода бўлсин. Уларни тенглик белгиси билан бирлаштирамиз. $a=b$ деган жумлани ҳосил қиламиз, бу жумла сонли тенглик дейилади.

Масалан, $3+2$ ва $6-1$ сонли ифодаларни оламиз ва уларни тенглик белгиси билан бирлаштирамиз. $3+2=6-1$ сонли тенглик ҳосил бўлади. Бу жумла рост. Агар $3+2$ ва $7-3$ сонли ифодаларни тенглик белгиси билан бирлаштирадик, $3+2=7-3$ сонли тенгликни ҳосил қиламиз, бу жумла ёлғон. Шундай қи-

либ, мантиқий нуқтан назардан сонли тенглик бу рост ёки ёлғон бўлган фикрлардир.

Агар тенгликнинг чап ва ўнг қисмларидаги сонли ифодаларнинг қийматлари бир хил бўлса, сонли тенглик рост бўлади. Рост сонли тенгликларнинг баъзи хоссаларини эслатиб ўтамиз.

1) Агар $a=b$ рост сонли тенгликнинг иккала қисмига маънога эга бўлган бир хил сонли ифода c қўшилса, яна рост сонли тенглик $a+c=b+c$ ҳосил бўлади.

$$a=b \Rightarrow a+c=b+c.$$

2) Агар $a=b$ рост сонли тенгликнинг иккала қисми маънога эга бўлган бир хил сонли ифода c га кўпайтирилса, яна рост сонли тенглик $ac=bc$ ҳосил бўлади.

$$a=b \Rightarrow ac=bc.$$

a ва b — иккита сонли ифода бўлсин. Уларни $>$ (ёки $<$) белгиси билан бирлаштирамиз. $a>b$ (ёки $a<b$) жумла ҳосил бўлади, бу жумла сонли тенгсизлик дейилади.

Масалан, агар $6+2$ ва $13-7$ ифодаларни $>$ белгиси билан бирлаштирилса, сонли тенгсизлик $6+2>13-7$ ҳосил бўлади. Бу жумла рост. Агар шу ифодаларни $<$ белгиси билан бирлаштирилса, ёлғон тенгсизлик $6+2<13-7$ ҳосил бўлади. Шундай қилиб, мантиқий нуқтан назардан сонли тенгсизлик — бу рост ёки ёлғон мулоҳазадир.

Рост сонли тенгсизликларнинг баъзи хоссаларини эслатиб ўтамиз:

1) Агар $a>b$ рост сонли тенгсизликнинг иккала қисмига маънога эга бир хил сонли ифода c қўшилса, яна рост сонли тенгсизлик $a+c>b+c$ ҳосил бўлади.

2) Агар $a>b$ рост сонли тенгсизликнинг иккала қисми маънога эга ва мусбат қийматлар қабул қиладиган бир хил c сонли ифодага кўпайтирилса, яна рост сонли тенгсизлик $ac>bc$ ҳосил бўлади.

3) Агар $a>b$ рост сонли тенгсизликнинг иккала қисми маънога эга ва манфий қийматлар қабул қиладиган бир хил c сонли ифодага кўпайтирилса, рост сонли тенгсизлик, яъни $ac<bc$ тенгсизлик ҳосил қилиш учун тенгсизлик белгисини қарама-қаршисига ўзгартириш зарур.

Машқлар

1. Қуйидаги сонли тенглик ва тенгсизликларнинг қайсылари рост эканлигини аниқланг:

1) $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$;

2) $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$;

3) $\left(\frac{1}{14} - \frac{2}{7}\right) : (-3) - 6\frac{1}{13} : \left(-6\frac{1}{13}\right) > \left(7 - 8\frac{4}{5}\right) \cdot 2\frac{7}{9} - 15 : \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{4}\right)$;

4) $1,0905 : 0,025 - 6,84 \cdot 3,07 + 2,38 : 100 < 4,8 : (0,04 \cdot 0,006)$.

2. $a > b$ тенгсизлик: 1) рост; 2) ёлгон бўладиган шартларни ифодаланг.

3. $5 > 3$ тенгсизлик берилган. Унинг иккала қисмини 7 га; 0,1 га; 2,6 га; $\frac{3}{4}$ га кўпайтиринг. Ҳосил қилинган натижалар асосида ҳар қандай мусбат a сони учун $5a > 3a$ тенгсизлик рост дейиш мумкинми?

4. Бир саватда 68 та олма бор, иккинчисиде 9 та кам олма бор. Ҳар бир саватга яна 10 тадан олма солинди. Қайси саватда олма кўп бўлди ва қанча кўп бўлди?

5. Маълумки, $x > y$ — рост тенгсизлик. Қуйидаги тенгсизликлар рост бўладими:

- 1) $2x > 2y$; 3) $2x - 7 < 2y - 7$;
2) $-\frac{x}{3} < -\frac{y}{3}$; 4) $-2x - 7 < -2y - 7$?

6. Маълумки, $a < b$ — рост тенгсизлик. Қуйидаги тенгсизликларда $*$ ўрнига $>$ ёки $<$ белгисини шундай қўйингки, натижада рост тенгсизлик ҳосил бўлсин:

- а) $-3,7a * -3,7b$; г) $-\frac{a}{3} * -\frac{b}{3}$;
б) $0,12a * 0,12b$; д) $-2(a + 5) * -2(b + 5)$;
в) $\frac{a}{7} * \frac{b}{7}$; е) $\frac{2}{7}(a - 1) * \frac{2}{7}(b - 1)$.

7. Агар ўқувчиларга қуйидаги топшириқлар тавсия этилса, бошланғич математика курсида сонли тенглик ва сонли тенгсизлик тушунчаларни қандай талқин этилади:

1) $9 \cdot 3$, $30 - 6$, $3 \cdot 9$, $30 - 3$ ифодалардан фойдаланиб, иккита тўғри тенглик ва иккита тўғри тенгсизлик ёз;

2) Қавсларни шундай қўйки, натижада $4 + 2 \cdot 3 = 18$, $31 - 10 - 3 = 24$, $54 - 12 + 8 = 34$ тенгликлар тўғри бўлсин;

3) Амал белгиларини шундай қўйки, натижада тўғри тенглик ҳосил бўлсин: $3 * 6 * 2 = 9$, $9 * 3 * 6 = 18$?

95. Ифодаларни айнан шакл олماштириш

Ўзгарувчили икки ифода оламиз: $5(x + 2)$ ва $5x + 10$. Бу ифодаларнинг аниқланиш соҳаси ҳақиқий сонлар тўплами R бўлади. Сонли ифодаларнинг x ўзгарувчини унинг R даги қийматлари билан алмаштириш натижасида ҳосил бўладиган қийматларини таққослаймиз. x нинг 0 га, -2 га, -4 га тенг қийматларида берилган ифодаларнинг мос қийматлари тенг (бир хил) эканлигини кўрамиз.

x	$5(x + 2)$	$5x + 10$
0	10	10
-2	0	0
-4	-10	-10

Берилган ифодаларнинг мос қийматлари x нинг R тўпламдан олинган ҳар қандай қийматларида тенг бўлишини умумий кўринишда кўрсатиш мумкин. Ҳақиқатан, $5(x+2)$ ифодада қавсларни очиб, $5x+10$ ифодани ҳосил қилиш мумкин. Бу ҳар қандай ҳақиқий сон учун ўринли бўлган кўпайтиришнинг қўшишга нисбатан тақсимот қонунига асосланган.

$5(x+2)$ ва $5x+10$ ифодалар ҳақиқий сонлар тўпламида айнан тенг дейилади.

Айнан тенг ифодаларга таъриф берамиз.

Таъриф. Агар ўзгарувчиларнинг ифодаларнинг аниқланиш соҳасидан олинган ҳар қандай қийматида икки ифоданинг мос қийматлари тенг бўлса, бу икки ифода айнан тенг дейилади.

Ўзгарувчининг ҳар қандай қийматида тўғри бўлган тенглик айният дейилади. Тўғри сонли тенгликлар ҳам айният ҳисобланади. Масалан, илгари қаралган ҳамма ҳақиқий сонларни кўпайтириш ва қўшиш қонунлари, йиғиндидан сонни айириш, сондан йиғиндини айириш қоидалари, йиғиндини сонга бўлиш қоидаси ва бошқалар айният ҳисобланади. Ноль ва бирлар билан бажариладиган амаллар қоидалари ҳам айният ҳисобланади: $a+0=0+a=a$, $a\cdot 0=0\cdot a=0$, $a\cdot 1=1\cdot a=a$, $a:1=a$. Бу ва бошқа умумий қоидаларга таяниб, амалда берилган ифодани айнан шакл алмаштиришни берилган ифодадан унга айнан тенг бўлган бошқа ифодага кетма-кет ўтиш деб тушуниб, ифодаларнинг айнанлиги аниқланади.

Айнан шакл алмаштиришларга мисоллар келтираемиз.

1. $ax - bx + ab - b^2$ ифодани кўпайтувчиларга ажратамиз. Берилган ифоданинг ҳадларини иккитадан қилиб (биринчиси билан иккинчисини, учинчиси билан тўртинчисини) группалаймиз — бундай айнан шакл алмаштириш ҳақиқий сонларни қўшишнинг группалаш қонунига асосланади: $ax - bx + ab - b^2 = (ax - bx) + (ab - b^2)$.

Ҳосил бўлган ифодада ҳар бир қавс ичидан умумий кўпайтувчини ташқарига чиқарамиз — бу айнан шакл алмаштириш кўпайтиришнинг қўшишга нисбатан тақсимот қонунига асосланади:

$$(ax - bx) + (ab - b^2) = x(a - b) + b(a - b).$$

Ҳосил бўлган ифодада қўшилувчилар умумий кўпайтувчига эга, уни қавсдан ташқарига чиқарамиз — бу айнан шакл алмаштиришдир:

$$x(a - b) + b(a - b) = (a - b)(x + b).$$

Шундай қилиб, $ax - bx + ab - b^2 = (a - b)(x + b)$.

2. $\frac{1-2x}{2x-3} - \frac{1-5x}{3-2x}$ ифодани соддалаштираемиз.

Касрларнинг махражлари бир хил бўлиши учун иккинчи касрнинг сурат ва махражини — 1 га кўпайтираемиз — бу айнан шакл алмаштиришдир (агар касрнинг сурат ва махражи бир хил сонга кўпайтирилса, берилган касрга тенг каср ҳосил бўлади):

$$\frac{1-2x}{2x-3} - \frac{1-5x}{3-2x} = \frac{1-2x}{2x-3} - \frac{5x-1}{2x-3}.$$

Энди бир хил махражли касрларни айириш қондасидан фойдаланамиз — бу айнан шакл алмаштиришдир:

$$\frac{1-2x}{2x-3} - \frac{5x-1}{2x-3} = \frac{1-2x-5x+1}{2x-3}.$$

Ҳосил бўлган каср суратида ўхшаш ҳадларни ихчамлаймиз:

$$\frac{1-2x-5x+1}{2x-3} = \frac{2-7x}{2x-3}.$$

Шундай қилиб, $\frac{1-2x}{2x-3} - \frac{1-5x}{3-2x} = \frac{2-7x}{2x-3}.$

Бошланғич математика курсида фақат сонли ифодаларнигина шакл алмаштирилади. Буларга қўшиш ва кўпайтиришнинг ўрин алмаштириш хоссаси ҳамда йиғиндини сонга қўшиш, сонни йиғиндига қўшиш, йиғиндидан сонни айириш ва бошқа қондалар назарий асос бўлади. Масалан, $4 \cdot (5 + 10)$ ифоданинг қийматини бундай топиш мумкин: $4 \cdot (5 + 10) = 4 \cdot 5 + 4 \cdot 10 = 20 + 40 = 60$. Бунда берилган ифодадан унга айнан тенг $4 \cdot 5 + 4 \cdot 10$ ифодага ўтиш сонни йиғиндига кўпайтириш қондаси асосида бажарилади (аслида эса кўпайтиришнинг қўшишга нисбатан тақсимот қонуни асосида бажарилади), сўнгра натурал сонларни кўпайтириш ва қўшиш қондалари қўлланилади.

Машқлар

1. x^4 ва $7x^2 - 6x$ ифодалар: 1) $\{-3, 0, 1, 2, -1\}$; 2) $\{-3, 1, 2\}$ тўпلامда айнан тенг бўладими?

2. $3(4y + 2) = 6 + 12y$ тенглик: 1) $\{-1, 2, 3\}$; 2) R тўпلامда айният бўладими?

3. Қуйидаги тенгликларнинг қайсылари ҳақиқий сонлар тўпلاميда айният бўлади:

1) $3p + 5m = 5m + 3p$; 3) $x - y = y - x$;
2) $b \cdot 7 = 7 \cdot b$; 4) $m(3 + t) = 3m + mt$?

4. Қуйидаги ифодаларни шакл алмаштиришдаги ҳар бир қадамни асосланг:

1) $5(1 - 2x) + 10x = 5 - 10x + 10x = 5$;

2) $(a + 1)(a + 3) = a^2 + a + 3a + 3 = a^2 + 4a + 3 = a(a + 4) + 3$.

5. Ифодани айнан шакл алмаштириш ёрдамида соддалаштиринг:

1) $3(x + 4) - 3x$;

4) $\frac{3-2m}{m-7n} + \frac{4-2m}{m^2-49n^2}$;

2) $6(2ab - 3) + 2a(6b - 5)$;

5) $\frac{x-y}{(x+y)^2} \cdot \left(\frac{x}{x-y} - \frac{x^2+y^2}{y^2-x^2} - \frac{x}{x+y} \right)$.

3) $\frac{x^2-5x}{x+2} + \frac{x^2-25}{x^2-4}$;

6. Энг рационал усул билан ифоданинг қийматини топинг:

1) $\frac{518^2 - 482^2}{360}$; 3) $(\sqrt{3} + \sqrt{75})^2$;

2) $\frac{87^2 - 39^2}{19^2 - 37^2}$; 4) $(\sqrt{5} + \sqrt{45})^2$.

7. Ҳар қандай натурал n да $(n+7)^2 - n^2$ ифоданинг қиймати 7 га бўлинишини исботланг.

8. $a^2 - 12a + 37$ ифода ҳар қандай ҳақиқий a қийматда мусбат қиймат қабул қилишини исботланг.

9. $n^2 - 77n + 122$ ифоданинг қийматини $n = 78$ бўлганда рационал усул билан ҳисобланг.

10. Шундай қоидаларни ёзингки, бу қоидалар асосида бошланғич синфларда сонли ифодаларни айнан шакл алмаштириш бажариладиган бўлсин ва бу қоидалар қўлланиладиган мисоллар келтиринг.

11. Бошланғич синф ўқувчилари қуйидаги топшириқни бажаришди: «Бир устунга жавобида 8, иккинчи устунга жавобида 12, учинчи устунга жавобида 36 чиқадиган мисолларни ёз: $6 \cdot 2$, $9 \cdot 4$, $24 : 3$, $45 - 9$, $2 \cdot 4$, $20 - 8$, $32 : 4$, $6 \cdot 6$, $4 \cdot 3$, $60 - 24$, $48 : 8$ ».

1) Бир устунга ёзилган ифодалар қандай аталади?

2) Бу вазиятда берилган сонли ифодалар тўплами синфларга бўлинди, дейиш мумкинми? Ҳар бир устундаги ифодалар қандай муносабат билан боғланган?

15-§. ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

96. Бир ўзгарувчили тенгламалар

Ўзгарувчили иккита ифода оламиз: $4x$ ва $5x + 2$. Уларни тенглик белгиси билан бирлаштириб, $4x = 5x + 2$ жумлани ҳосил қиламиз. Унда ўзгарувчи бор, унга ўзгарувчининг қийматини қўйсак, фикрга айланади. Масалан, $x=1$ да $4x=5x+2$ жумла $4 \cdot 1 = 5 \cdot 1 + 2$ ёлгон сонли тенгликка айланади, $x = -2$ да $4 \cdot (-2) = 5 \cdot (-2) + 2$ рост сонли тенгликка айланади. Шунинг учун $4x = 5x + 2$ жумла фикрий формадир. У ўзгарувчили тенглик ёки бир ўзгарувчили тенглама дейилади.

Бир ўзгарувчили тенглама тушунчасини умумий кўринишда бундай таърифлаш мумкин:

Таъриф. $f(x)$ ва $g(x)$ x ўзгарувчили ифодалар ва уларнинг аниқланиш соҳаси X бўлсин. У ҳолда $f(x) = g(x)$ кўринишдаги фикрий форма бир ўзгарувчили тенглама дейилади.

x ўзгарувчининг тенгламани тўғри сонли тенгликка айлантирадиган X тўпладан олинган қиймати тенгламанинг ечими (ёки илди-зи) дейилади. Берилган тенгламанинг ечимлари тўпламини топиш бу тенгламани ечиш демакдир.

Бир ўзгарувчили тенгламаларга бир неча ми сол келтирамиз.

1) $4x = 5x + 2$, $x \in R$. Бу тенглама $x = -2$ дагина тўғри сонли тенгликка айланади. Демак, унинг ечимлари тўплами $\{-2\}$.

2) $(x-1)(x+2) = 0$, $x \in R$. Бир ўзгарувчили бу тенглама $x = 1$ ва $x = -2$ да тўғри сонли тенгликка айланади. Демак, берилган тенгламанинг ечимлари тўплами $\{-2; 1\}$.

3) $(3x+1) \cdot 2 = 6x+2$, $x \in R$. Агар чап қисмдаги ифодада қавслар очилса, берилган тенглама $6x+2=6x+2$ кўринишни олади. Ҳо-

сил бўлган ёзув бундай тенглама x ўзгарувчининг ҳар қандай ҳақиқий қийматида чин фикрга айланишини билдиради. Бундай ҳолда берилган тенгламанинг ечимлар тўплами ҳақиқий сонлар тўплами дейилади.

4) $(3x + 1) \cdot 2 = 6x + 1$, $x \in R$. Берилган тенглама x нинг ҳеч бир ҳақиқий қийматида тўғри сонли тенгликка айланмаслигига осон ишонч ҳосил қилиш мумкин: чап қисмда шакл алмаштиришдан кейин $6x + 2$ га эга бўламиз, ўнг қисмда эса $6x + 1$, аммо $1 \neq 2$. Бундай ҳолда берилган тенглама ечимга эга эмас ёки унинг ечимлар тўплами бўш тўплам дейилади.

Бошланғич математика курсида энг содда кўринишдаги тенгламалар қаралади: $x + a = b$, $a - x = b$, $x - a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$ ва бошқалар, бунда a , b —бутун номанфий сонлар, x —ўзгарувчи. Тенглама ва унинг ечимлари тушунчаси контекст орқали ошқоқмас таърифланади ва «бундай тенгламаларни ечиш жараёнида болаларда секин-аста тенгламаларни ҳарф билан белгиланган номаълум сонни ўз ичига олган тенглик сифатида тушуниш шакллана бориши керак. Улар ҳар доим, биз тенгламаларда учратганимиз каби, масала номаълумнинг тенглик тўғри бўладиган қийматини топиш билан боғлиқ бўлишини тушунишлари керак»¹.

Машқлар

1. Агар $x - 0,5(x - 12) = 13 - 0,25x$ тенглама ҳақиқий сонлар тўламида берилган бўлса, — 4 сони шу тенгламанинг илдизи бўладими? Текширинг.

2. $2x^4 + 4x^2 - 6 = 0$ тенглама натурал сонлар тўламида қаралмоқда. Нима учун $x = 1$ берилган тенгламанинг илдизи, $x = 2$ ва $x = -1$ лар унинг илдизлари эмаслигини тушунтиринг.

3. Нуқталар ўрнига, чин фикр ҳосил бўлиши учун ё «зарур» ёки «етарли», ёки «зарур ва етарли» сўзларини қўйинг:

1) a сони $f(x) = g(x)$ тенгламанинг илдизи бўлиши учун a сони тенгламанинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлиши

2) a сони $f(x) = g(x)$ тенгламанинг илдизи бўлиши учун x ўрнига a ни қўйганда тенглама тўғри сонли тенгликка айланиши

3) a сони $f(x) = g(x)$ тенгламанинг илдизи бўлиши учун a сони тенгламанинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлиши ва x ўрнига a ни қўйганда тенглама тўғри сонли тенгликка айланиши

4. Қуйидаги фикрлар чинми:

1) $(x - 3)(x + 5)(x - 1)$ кўпайтма нолга тенг бўлиши учун $x = 3$ бўлиши зарур.

2) $(x - 3)(x + 5)(x - 1)$ кўпайтма нолга тенг бўлиши учун $x = 1$ бўлиши етарли.

5. 1) 3 сони $f(x) \cdot g(x) = 0$ тенгламанинг илдизи;

2) 7 сони $f(x) \cdot g(x) = 0$ тенгламанинг илдизи эмас;

¹Моро М.И., Пышкало А.М. Методика обучения математике в 1 — классах — М., 1978. — 98-бет.

3. — $2x$ ифодани тенгламанинг ўнг қисмига ўтказамиз: $6 = x + 2x$.

4. Тенгламанинг ўнг қисмида ўхшаш ҳадларни ихчамладик: $6 = 3x$.

5. Тенгламанинг иккала қисмини 3 га бўлдик: $x = 2$.

1-теореманинг натижасидан фойдаландик (ёки 1-теоремага кўра тенгламанинг иккала қисмига барча ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган $2x$ ифодани қўшдик), олдинги тенгламага ва, демак, берилган тенгламага тенг кучли тенглама ҳосил бўлди.

Айнан шакл алмаштиришни бажардик, олдинги тенгламага ва, демак, берилган тенгламага тенг кучли тенглама ҳосил бўлди.

2-теореманинг натижасидан фойдаландик (ёки 2-теоремага кўра тенгламанинг иккала қисмини $\frac{1}{3}$ га кўпайтирдик), олдинги тенгламага ва, демак, берилган тенгламага тенг кучли тенглама ҳосил бўлди.

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг ечимлар тўплами битта 2 сонидан иборат экан, яъни {2}.

Энди $x(x - 1) = 2x$, $x \in R$ тенгламани оламиз. Ўқувчилар уни баъзан бундай ечадилар: иккала қисмини x га бўлиб, $x - 1 = 2$ тенгламани ҳосил қиладилар, бунда $x = 3$ ни топадилар ва берилган тенгламанинг ечимлар тўплами {3} деган хулосага келадилар.

Аммо берилган тенглама тўғри ечиладими? x нинг $x(x - 1) = 2x$ тенгламани тўғри сонли тенгликка айлантирадиган ҳамма ҳақиқий қийматлари топилдими?

$x = 0$ да берилган тенглама тўғри сонли тенгликка айланишини кўриш осон: $0 \cdot (0 - 1) = 2 \cdot 0$. Демак, 0 — берилган тенгламанинг илдиэи. Нима учун тенгламани ечиш жараёнида бу илдиэ йўқолган?

Гап шундаки, $x - 1 = 2$ тенглама ҳақиқий сонлар тўпламида $2(x - 1) = 2x$ тенгламага тенг кучли эмас, чунки бу тенглама берилган тенгламани барча ҳақиқий сонлар учун аниқланмаган $\frac{1}{x}$ ифодага кўпайтириш билан ҳосил қилинган (хусусан, $x = 0$ да у маънога эга эмас), яъни биз 2-теореманинг шартини бажармадик, бу эса илдиэнинг йўқолишига сабаб бўлди.

$x(x - 1) = 2x$ тенгламани қандай тўғри ечиш мумкин? Ечишнинг мумкин бўлган вариантларидан бирини келтирамиз.

Ечиш йўли

Қўлланилган назарий қондалар

1. $2x$ ифодани ўнг қисмдан чап қисмга ўтказамиз:

$$x(x - 1) - 2x = 0.$$

1-теореманинг натижасидан фойдаландик, берилган тенгламага тенг кучли тенглама ҳосил бўлди.

2. Тенгламанинг чап қисмида x ни қавсдан ташқарига чиқарамиз ва ўхшаш ҳадларни ихчамлаймиз: $x(x-3)=0$.

3. Икки кўпайтувчидан ҳеч бўлмаганда бири ноль бўлгандагина кўпайтма нолга тенг бўлади, шунинг учун $x=0$ ёки $x-3=0$.

4. 3 сонини иккинчи тенгламанинг ўнг қисмига ўтказиб, $x=0$ ёки $x=3$ ни ҳосил қиламиз.

Айнан шакл алмаштиришларни бажардик, улар тенгламанинг тенг кучлилигини бузмади.

Бир неча кўпайтувчи кўпайтмасининг нолга тенг бўлишлик шартидан фойдаландик, берилган тенгламага тенг кучли бўлган тенгламалар тўпламини ҳосил қилдик.

1-теореманинг натижасидан фойдаландик, $x-3=0$ тенгламага тенг кучли тенглама ҳосил бўлди.

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг ечимлар тўплами икки сон -0 ва 3 дан иборат, яъни $\{0, 3\}$.

Шуни эслатиб ўтамизки, 1 ва 2-теоремалар шартининг бажарилмаслиги тенгламанинг на фақат илдиэларининг йўқолишига, балки бегона (чет) илдиэларнинг ҳосил бўлишига олиб келади.

Қандай илдиэлар бегона илдиэлар дейилади?

Иккига тенглама берилган бўлсин: $f_1(x) = g_1(x)$ (1) ва $f_2(x) = g_2(x)$ (2). Агар (1) тенгламанинг барча илдиэлари (2) тенгламанинг илдиэлари бўлса, у ҳолда (2) тенглама (1) тенгламадан келиб чиққан ёки (2) тенглама (1) тенгламанинг натижаси дейиш мумкин. Агар (2) тенгламада (1) тенгламани қаноатлантирмайдиган илдиэлар бўлса, улар (1) тенглама учун бегона илдиэлар бўлади. Масалан,

$\frac{5x-15}{(x+2)(x-3)} = 0$ тенгламани ечишда биз тенгламанинг иккала қисми $(x+2)(x-3)$ га кўпайтириб, махраждан қутуламиз ва $5x-15=0$ тенгламани ҳосил қиламиз, бундан $x=3$. Аммо $x=3$ да $\frac{5x-15}{(x+2)(x-3)}$ касрнинг махражи нолга айланади ва шунинг учун $x=3$ берилган тенгламанинг илдиэи бўла олмайди, яъни $x=3$ берилган тенглама учун бегона илдиэи бўлади.

Умуман, агар тенгламани ечишда уни натижа билан алмаштирилса (тенг кучли тенглама билан эмас), у ҳолда натижа тенгламанинг ҳамма илдиэларини топиш керак ва уларни берилган тенгламага қўйиб текшириш керак. Бегона илдиэлар ташлаб юборилади.

Шуни эслатиб ўтиш керакки, бегона илдиэларни ҳосил қилиш уларни йўқотишга қараганда унчалик «хавфли» эмас. Шунинг учун тенгламаларни ечишда тенг кучлилиқ ҳақидаги теоремаларни тўғри қўлланиш зарур.

Бешинчи математика курсида тенгламаларни ечишда компоненталар ва амаллар натижалари орасидаги боғланиш назарий асос бўлади. Масалан, $(x-9):24=3$ тенгламани ечиш қуйидагича асосланади. Номажлум сон бўлинувчи бўлгани са-

3) 2 сонли $\frac{f(x) \cdot g(x)}{h(x)} = 0$ тенгламанинг илдизи бўладиган шартларни ифодаланг.

6. Бошланғич синфларда ечиладиган турли кўринишдаги тенгламаларни айтинг.

97. Тенгламаларнинг тенг кучлилиги

Берилган тенгламани ечиш учун одатда уни ўзидан анча содда бўлган бошқа тенгламаларга кетма-кет шакл алмаштирилади. Бу шакл алмаштириш жараёни ечими маълум усул билан топиладиган тенглама ҳосил бўлгунча давом эттирилади. Аммо бу ечимлар берилган тенгламанинг ечими бўлиши учун шакл алмаштириш жараёнида илдизлар тўплами бир хил бўлган тенгламалар ҳосил бўлиши зарур. Бундай тенгламалар тенг кучли тенгламалар дейилади.

Таъриф. Агар икки тенгламанинг ечимлар тўплами тенг бўлса, бу икки тенглама тенг кучли дейилади.

Масалан, $(x+1)^2=9$ ва $(x-2)(x+4)=0$ тенгламалар ҳақиқий сонлар тўпламида тенг кучли, чунки биринчи тенгламанинг ечимлар тўплами $\{-4, 2\}$, иккинчи тенгламанинг ечимлар тўплами $\{2, -4\}$ га тенг.

Энди қандай шакл алмаштиришлар берилган тенгламага тенг кучли тенгламаларни ҳосил қилишга имкон беришини аниқлаймиз. Бундай шакл алмаштиришлар қуйидаги теоремаларда ўз аксини топди.

1-теорема. $f(x) = g(x)$ тенглама X тўпламда берилган ва $h(x)$ шу тўпламда аниқланган ифода бўлсин. У ҳолда $f(x) = g(x)$ (1) ва $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$ (2) тенгламалар X тўпламда тенг кучли бўлади.

Бу теоремани бошқача таърифлаш мумкин: агар аниқланиш соҳаси X бўлган тенгламанинг иккала қисмига шу X тўпламда аниқланган ўзгарувчи бир хил ифода қўшилса, берилган тенгламага тенг кучли бўлган янги тенглама ҳосил бўлади.

Исботи. (1) тенгламанинг ечимлар тўламини T_1 билан, (2) тенгламанинг ечимлар тўламини T_2 билан белгилаймиз. Агар $T_1 = T_2$ бўлса, (1) ва (2) тенгламалар тенг кучли бўлади. Аммо бунга ишонч ҳосил қилиш учун T_1 даги истаган илдиз (2) тенгламанинг илдизи бўлишини, ва аксинча, T_2 даги истаган илдиз (1) тенглама илдизи бўлишини кўрсатишимиз зарур.

a сонли (1) тенгламанинг илдизи бўлсин. У ҳолда $a \in T_1$ ва $\bar{a}$ (1) тенгламага қўйилганда уни $f(a) = g(a)$ тўғри сонли тенгликка, $h(a)$ ифодани сонли ифода $h(a)$ га айлантиради. $f(a) = g(a)$ тўғри тенгликнинг иккала қисмига $h(a)$ сонли ифодани қўшамиз. Тўғри сонли тенгликнинг хоссасига кўра тўғри сонли тенглик ҳосил бўлади:

$$f(a) + h(a) = g(a) + h(a).$$

Бу тенгликдан кўрилиб турибдики, a сонли (2) тенгламанинг ҳам илдизи экан.

Шундай қилиб, (1) тенгламанинг ҳар бир илдизи (2) тенгламанинг ҳам илдизи бўлиши исботланади, яъни $T_1 \subset T_2$.

Энди $b \in (2)$ тенгламанинг илдизи бўлсин. У ҳолда $b \in T_2$ ва у тенгламага қўйилганда уни $f(b) + h(b) = g(b) + h(b)$ тўғри сонли тенгликка айлантиради.

Бу тенгликнинг иккала қисмига $h(b)$ сонли ифодани қўшамиз. $f(b) = g(b)$ тўғри сонли тенглик ҳосил бўлади, бундан b сонининг (1) тенгламанинг илдизи экани кўриниб турибди.

Шундай қилиб, (2) тенгламанинг ҳар бир илдизи (1) тенгламанинг ҳам илдизи бўлиши исботланди, яъни $T_2 \subset T_1$.

$T_1 \subset T_2$ ва $T_2 \subset T_1$ бўлгани учун тенг тўпламлар таърифига кўра $T_1 = T_2$, демак, (1) ва (2) тенгламалар X тўпламда тенг кучли.

Тенгламаларни ечишда кўпинча бу теореманинг ўзи эмас, балки ундан келиб чиққан натижалар қўлланилади:

1. Агар тенгламанинг иккала қисмига айти бир хил сон қўшилса, берилган тенгламага тенг кучли тенглама ҳосил бўлади.

2. Агар тенгламанинг бирорта қўшилувчисини (сонли ифодани ёки ўзгарувчили ифодани) бир қисмидан иккинчи қисмига ишорасини қарама-қаршисига ўзгартириб ўтказилса, берилган тенгламага тенг кучли тенглама ҳосил бўлади.

2-теорема. $f(x) = g(x)$ тенглама X тўпламда берилган ҳамда $h(x)$ шу тўпламда аниқланган ва X тўпламдаги x нинг ҳеч бир қийматида нолга айланмайди-ган ифода бўлсин. У ҳолда $f(x) = g(x)$ ва $f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$ тенгламалар X тўпламда тенг кучли бўлади.

Бу теореманинг исботи 1-теореманинг исботи кабилдир.

2-теоремадан тенгламаларни ечишда кўп қўлланиладиган натижа келиб чиқади.

Агар тенгламанинг иккала қисми нолдан фарқли айти бир сонга кўпайтирилса (ёки бўлинса), берилган тенгламага тенг кучли тенглама ҳосил бўлади.

$1 - \frac{x}{3} = \frac{x}{6}$, $x \in R$ тенгламани ечамиз ва уни ечишда қандай назарий қондалар қўлланилганини аниқлаймиз.

Ечиш йўли

Қўлланилган назарий қондалар

1. Тенгламанинг чап ва ўнг қисмида турган ифодаларни умумий махражга келтирамиз:

$$\frac{6-2x}{6} = \frac{x}{6}$$

2. Умумий махражни ташлаб юборамиз: $6 - 2x = x$.

Тенгламанинг чап қисмидаги ифодани айнан шакл алмаштирдик, берилган тенгламага тенг кучли тенглама ҳосил бўлди.

Тенгламанинг иккала қисмини 6 га кўпайтирдик (2-теорема), олдинги тенгламага, демак, берилган тенгламага тенг кучли тенглама ҳосил бўлди.

бабли бўлинувчини топиш учун бўлувчини бўлинмага кўпайтириш керак: $x \cdot 9 = 24 \cdot 3$ ёки $x \cdot 9 = 72$. Номалум кўпайтувчини топиш учун кўпайтмани маълум кўпайтувчига бўлиш керак: $x = 72 : 9$ ёки $x = 8$. Демак, берилган тенгламанинг ечими 8 сони экан.

Машқлар

1. Қуйидаги тенгламалар жуфтларидан қайсилари ҳақиқий сонлар тўпламида тенг кучли эканлигини аниқланг:

1) $3 + 7x = -4$ ва $2(3 + 7x) = -8$;

2) $3 + 7x = -4$ ва $6 + 7x = -1$;

3) $3 + 7x = -4$ ва $x + 2 = 0$.

2. Тенгламаларнинг тенг кучлилиги муносабатининг хоссаларини айтинг. Улардан қайсилари тенгламаларни ечиш жараёнида қўлланилади?

3. Ўқувчи $5x + 15 = 3x + 9$ тенгламани қуйидагича ечди: $5x + 15 = 3x + 9$; $5(x + 3) = 3(x + 3)$; $5 = 3$, ва шундай деди: тенглама илдизларга эга эмас, чунки унинг ечими ёлгон сонли тенгликка олиб келади. Ўқувчи ҳақми?

4. $\frac{2}{2-x} - \frac{1}{2} = \frac{4}{(2-x)x}$ тенгтмани ечинг ва кандай шакл

алмаштиришда $x = 2$ бегона илдиэ хосил бўлишини аниқланг.

5. Тенгламаларни ечинг (уларнинг ҳаммаси ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган) ва уни ечишда қандай назарий қондалар қўлланилганини тушунтиринг:

$$1) \frac{7x+4}{2} - x = \frac{3x-5}{2}; \quad 2) x - \frac{3x-2}{5} = 3 - \frac{2x-5}{3};$$

$$3) (2 - x)^2 - x(x + 1,5) = 4.$$

6. Компонентлар ва амаллар натижалари орасидаги ўзаро боғланишдан фойдаланиб, тенгламаларни ечинг:

$$1) (x + 70) \cdot 4 = 328; \quad 3) (85 \cdot x + 765) : 170 = 98;$$

2) $560 : (x + 9) = 56$; 4) $(x - 13581) : 709 = 36$.

7. 1) Тенгламаларнинг тенг кучлилиги ҳақидаги теоремалар ва айнан шакл алмаштириш қондаларидан;

2) компоненталар ва амаллар натижалари орасидаги ўзаро боғланишдан фойдаланиб, $((x+2) \cdot 81 - 3530) \cdot 21 = 714$ тенгламани ечинг. Ечимнинг ёзилиш усуллари таққосланг.

8. Тенгламани турли усуллар билан ечинг:

$$1) (x-1)^2 + 3(x-1) = 0; \quad 2) (x+1)(x-2) + (x-2)(x+4) = 6(2x+5).$$

9. x нинг қандай қийматларида $2x + 3(x + 2)$ ва $\frac{2}{3}(8x - 3)$

ифодаларнинг қийматлари тенг бўлади?

10. Масалаларни алгебранк ва арифметик усулларда
ечинг:

1) Биринчи токчада иккинчи токчадагидан 16 та китоб ор-

тиқ. Агар иккала токчадан 3 тадан китоб олинса, биринчи токчадаги китоблар иккинчисидагидан бир ярим марта кўп бўлади. Ҳар бир токчада нечтадан китоб бўлган?

2) Икки боғламда 30 та дафтар бор. Биринчи боғламдан иккинчисига 2 та дафтар олиб қўйилгандан кейин биринчи боғламдаги дафтарлар иккинчисидагидан 2 марта кўп бўлди. Ҳар бир боғламда нечтадан дафтар бўлган?

3) Турбазадан пионерлар лагеригача бўлган 16 км йўлни велосипедчи 1 соату 10 минутда босиб ўтди. У дастлабки 40 минутда бир хил тезликда юрди, қолган вақтда ундан 3 км/соат кам тезликда юрди. Велосипедчининг дастлабки тезлигини топинг.

98. Бир ўзгарувчи тенгсизликлар. Тенгсизликларнинг тенг кучлилиги

$2x + 7 > 10 - x$, $x^2 + 7x < 2$, $(x + 2)(2x - 3) > 0$ кўринишдаги жумлалар бир ўзгарувчи тенгсизликлар дейилади.

Таъриф. $f(x)$ ва $g(x)$ x ўзгарувчи ва аниқланиш соҳаси X бўлган иккита ифода бўлсин. У ҳолда $f(x) > g(x)$ ёки $f(x) < g(x)$ кўринишдаги тенгсизлик бир ўзгарувчи тенгсизлик дейилади.

X тўпладан олинган x ўзгарувчининг тенгсизлиكنи тўғри сонли тенгсизликка айлантирадиган қиймати тенгсизлиكنинг ечими дейилади. Берилган тенгсизлиكنинг ечимлари тўплаганини топиш бу тенгсизлиكنи ечиш демакдир.

Мактаб математика курсида бир ўзгарувчи турли тенгсизликлар қаралади. Бизни асосан биринчи даражали тенгсизликларгина қизиқтиради. Бундай тенгсизликларни ечиш асосида, тенгламаларни ечишдаги каби, тенг кучлилиқ тушунчаси ва тенгсизликларнинг тенг кучлилиги ҳақидаги теоремалар ётади.

Таъриф. Агар икки тенгсизлиكنинг ечимлари тўплами тенг бўлса, улар тенг кучли тенгсизликлар дейилади.

Масалан, $2x + 7 > 0$ ва $2x > 3$ тенгсизликлар тенг кучли, чунки уларнинг ечимлари тўплами тенг ва $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ оралиқдан иборат.

Тенгсизликларнинг тенг кучлилиги ҳақидаги теоремалар ва улардан келиб чиқадиган натижалар ўзининг моҳияти бўйича тенгламаларнинг тенг кучлилиги ҳақидаги мос теоремаларга ўхшаш, уларнинг исботи эса тенгламаларнинг тенг кучлилиги ҳақидаги 1-теорема исботига ўхшаш исботланади.

3-теорема. $f(x) > g(x)$ тенгсизлик X тўпламда берилган ва $h(x)$ ўша тўпламда аниқланган ифода бўлсин. У ҳолда $f(x) > g(x)$ ва $f(x) + h(x) > g(x) + h(x)$ тенгсизликлар X тўпламда тенг кучли бўлади.

Бу теоремадан тенгсизликларни ечишда кўп қўлланиладиган натижалар келиб чиқади:

1) Агар $f(x) > g(x)$ тенгсизликнинг иккала қисмига ани бир ҳақиқий сон d қўшилса, берилган тенгсизликка тенг кучли $f(x) + d > g(x) + d$ тенгсизлик ҳосил бўлади.

2) Агар бирор қўшилувчи (сонли ифода ёки ўзгарувчи ифода) тенгсизликнинг бир қисмидан иккинчи қисмига ишорасини қарама-қаршисига ўзгартириб ўтказилса, берилган тенгсизликка тенг кучли тенгсизлик ҳосил бўлади.

4-теорема. $f(x) > g(x)$ тенгсизлик X тўпламда берилган, $h(x)$ ўша тўпламда аниқланган ифода ва X тўпламдан олинган барча x учун $h(x) > 0$ бўлсин. У ҳолда $f(x) > g(x)$ ва $f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x)$ тенгсизликлар X тўпламда тенг кучли бўлади.

Бу теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади: агар $f(x) > g(x)$ тенгсизликнинг иккала қисми ани бир мусбат ҳақиқий сон d га кўпайтирилса, берилган тенгсизликка тенг кучли $f(x) \cdot d > g(x) \cdot d$ тенгсизлик ҳосил бўлади.

5-теорема. $f(x) > g(x)$ тенгсизлик X тўпламда берилган, $h(x)$ ўша тўпламда аниқланган ифода ва X тўпламдан олинган барча x учун $h(x) < 0$ бўлсин. У ҳолда $f(x) > g(x)$ ва $f(x) \cdot h(x) < g(x) \cdot h(x)$ тенгсизликлар X тўпламда тенг кучли бўлади.

Бу теоремадан натижа келиб чиқади:

Агар $f(x) > g(x)$ тенгсизликнинг иккала қисми ани бир минфий ҳақиқий сон d га кўпайтирилса ва тенгсизлик белгиси қарама-қаршисига алмаштирилса, берилган тенгсизликка тенг кучли $f(x) \cdot d < g(x) \cdot d$ тенгсизлик ҳосил бўлади.

$5x - 5 < 2x - 16$, $x \in \mathbb{R}$ тенгсизликни ечамиз ва уни ечишда қандай назарий қоидалар қўлланилганини аниқлаймиз.

Ечиш йўли

Қўлланилган назарий қоидалар

1. $2x$ ифодани чап қисмга, -5 ни ўнг қисмга ўтказамиз: $5x - 5 < 2x - 16 + 5$.

2. Тенгсизликнинг чап ва ўнг қисмларидаги ўхшаш ҳадларни ихчамлаймиз:

$$3x < 21.$$

3. Тенгсизликнинг иккала қисмини 3 га бўламиз:

$$x < 7.$$



135-расм

3-теореманинг 2-натижасидан фойдаландик, берилган тенгсизликка тенг кучли тенгсизлик ҳосил бўлди.

Тенгсизликнинг ўнг ва чап қисмларида айнан шакл алмаштиришлар бажардик, улар тенгсизликнинг тенг кучлилигини бузмади.

4-теореманинг натижасидан фойдаландик, берилган тенгсизликка тенг кучли тенгсизлик ҳосил бўлади.

$x < 7$ тенгсизликнинг ечими $(-\infty, 7)$ оралиқ бўлади. Шундай қилиб, $5x - 5 < 2x - 16$ тенгсизликнинг ечимлари тўплами $(-\infty, 7)$ сонлар тўплами бўлади (135-расм).

Энди $-12 - 7x < 3x + 8$, $x \in \mathbb{R}$ тенгсизликни ечамиз.

Ечиш йўли

Қўлланилган назарий қоидалар

1. $3x$ ифодани чап қисмга, -12 ни ўнг қисмга ўтказамиз: $-3x < 8 + 12$.

2. Чап ва ўнг қисмда ўхшаш ҳадларни ихчамлаймиз: $-10x < 20$.

3. Тенгсизликнинг иккала қисмини -10 га бўламиз: $x > -2$.

$x > -2$ тенгсизликнинг ечими $(-2, \infty)$ оралиқ бўлади. Шундай қилиб, $-12 - 7x < 3x + 8$ тенгсизликнинг ечимлари тўплами $(-2, \infty)$ сонлар тўплами бўлади (136-расм).



136-расм

3-теореманинг 2-натижасидан фойдаландик, берилган тенгсизликка тенг кучли тенгсизлик ҳосил бўлди.

Тенгсизликнинг чап ва ўнг қисмларида айнан шакл алмаштиришларни бажардик, берилган тенгсизликка тенг кучли тенгсизлик ҳосил бўлди.

5-теореманинг натижасидан фойдаландик, берилган тенгсизликка тенг кучли тенгсизлик ҳосил бўлди.

Машқлар

1. 3 сони ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган $6(2x + 7) < 15(x + 2)$ тенгсизликнинг ечими бўладими? 4,25 сон-чи?

2. Қуйидаги тенгсизликлар жуфти ҳақиқий сонлар тўпламида тенг кучли бўладими:

1) $-17x < -51$ ва $x > 3$;

2) $\frac{3x-1}{4} > 0$ ва $3x-1 > 0$;

3) $6-5x > -4$ ва $x < 2$?

3. Қуйидаги фикрларнинг қайсилари чин:

1) $-7x < -28 \Rightarrow x > 4$;

2) $\frac{x}{3} < 10 \Rightarrow x < 30$;

3) $x < 6 \Rightarrow x < 5$;

4) $x < 6 \Rightarrow x < 20$?

4. Қайси бири катта: $3a$ ми ёки $10a$ ми? $0,1b$ ми ёки $100b$ ми?

5. $3(x-2) - 4(x+1) < 2(x-3) - 2$ тенгсизликни ечинг ва уни ечишда қандай назарий қоидалар қўлланилганини тушунти-
ринг.

қийматларидан иборат деб ҳисобланилади. Масалан, $y = \sqrt{x+2}$ функция берилган бўлса, унинг аниқланиш соҳаси x нинг $\sqrt{x+2}$ ифода маънога эга бўлган қийматлари тўплами бўлади, яъни $[-2, \infty)$ тўплам бўлади.

Бошланғич математика курсида функция тушунчасининг пропедевтикаси ўзгарувчилар орасида турли функционал боғланишлар қараладиган машқларни бажаришда амалга ошади. Бунда албатта на тегишли термин, на белги (символ) бўлмасдан, диққат ўзаро боғланиш, муносабатга қаратилади.

Бошланғич синф ўқувчиларининг функция тушунчасини ўрганишларига ёрдам берадиган топшириққа доир бир нечта мисоллар келтирамиз:

1. $39 + a$. Агар a 0, 6, 15, 31, 46, 52 қийматларни қабул қилса, йиғиндининг қийматини топ.

Бу топшириқни бажаришда $39 + a$ йиғиндининг қиймати a ўзгарувчининг қийматларига ўзаро боғланиши аниқланади. Бу боғланиш — аниқланиш соҳаси $\{0, 6, 15, 31, 46, 52\}$ бўлган функциядир.

2. Жадвални тўлдир:

b	7	9	16	28
$16 + b$				

Бу топшириқ ўз моҳиятига кўра 1-топшириққа ўхшаш, аммо бошқа кўринишда берилган.

3. Жавоби 12 бўлган бир хонали сонларни қўшишга доир мумкин бўлган мисоллар туз.

Машқни бажаришда жадвал тузиш мумкин:

	3	4	5	6	7	8	9
12	9	8	7	6	5	4	3

Жадвал ёрдамида иккинчи қўшилувчи қийматининг биринчи қўшилувчи қийматига функционал боғланиши аниқланади. 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 сонлари бу функциянинг аниқланиш соҳасини ҳосил қилади.

4. Агар бир квадрат томонининг узунлиги 1 см, иккинчисиники 2 см, учинчисиники 3 см бўлса, квадратлар юзларини топ.

Бу масалани ечишда квадрат томони узунлиги билан юзи орасидаги боғланиш аниқланади. Бу боғланиш — функция, чунки квадрат томони узунлигининг ҳар бир қийматига квадрат юзининг ягона қиймати мос келади:

агар томон узунлиги 1 см бўлса, у ҳолда квадратнинг юзи 1 см^2 га тенг;

агар томон узунлиги 2 см бўлса, у ҳолда квадратнинг юзи 4 см^2 га тенг;

агар томон узунлиги 3 см бўлса, у ҳолда квадратнинг юзи 9 см^2 га тенг.

Бошланғич синф ўқувчилари текстли масалалар ечишда турли хил функционал боғланишлар билан учрашадилар. Масалан, «80 сўмга 20 м газмол сотиб олинди. Шундай 10 м газмол қанча туради?» деган масалада сотиб олинган газмол миқдори билан унинг нархи орасида боғланиш қаралади (бир метр газмолнинг баҳоси ўзгармас бўлганда). Бу боғланиш — функциядир.

Машқлар

1. Омборда 400 т кўмир бор эди. Ҳар куни шу кўмирнинг 50 тоннаси ишлатилди. Омбордаги кўмир миқдори (y т) билан кунлар сони (x кун) орасидаги боғланишни ифодаловчи формула ёзинг ва бу формула функцияни беришини исботланг. Бу функциянинг аниқланиш соҳасини кўрсатинг.

2. R радиусли айлананинг узунлиги $C=2\pi R$ формула билан ҳисобланади. Бу формула қандай ўзгарувчилар орасидаги функционал боғланишни беради? Берилган функциянинг аниқланиш соҳаси қандай?

3. Квадратнинг юзи унинг диагонали узунлигига функционал боғлиқми?

4. [6, 20] оралиқдан олинган ҳар бир n натурал сонга шу сонни 4 га бўлишдан чиққан қолдиқ мос қўйилди. Бу мосликни жадвал ёрдамида ифодаланг ва нима учун бу мослик функция эканлигини ҳамда унинг аниқланиш соҳасини аниқланг.

5. 1) $y = 5x^2 - 4$; 2) $y = \frac{3}{x+5}$; 3) $y = \sqrt{1-x}$;

4) $y = \frac{\sqrt{1-x}}{x}$ формула билан берилган функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

6. Бошланғич синфлар математика дарсликларидан бажарилишида функция тушунчасининг пропедевтикаси амалга ошиши мумкин бўлган учта топшириққа мисоллар келтиринг.

7. Бошланғич синфлар математика дарсликларидан олинган қуйидаги машқлардан қайсилари функция тушунчасининг пропедевтикаси учун қўлланилиши мумкин ва нима учун:

1) Жадвални тўлдир:

c	1	3	4	6
$10 \cdot c$				

2) $7 \cdot d = 35$ тенгламани еч.

6. $2(x + 1) + 5 > 3 - (1 - 2x)$ тенгсизлиkning ечими ҳар қандай ҳақиқий сон бўлишини исботланг.

7. $3(2 - x) - 2 > 5 - 3x$ тенгсизлиkning ечими бўлган ҳақиқий сон мавжуд эмаслигини исботланг.

8. a нинг ҳар қандай ҳақиқий қийматида $3a(a + 6)$ ифоданинг қиймати $(3a + 6)(a + 4)$ ифоданинг қийматидан кичик эканлигини исботланг.

9. Тўғри тўртбурчак шаклидаги участканинг узунлиги энидан 5 марта ортиқ, эни эса 4 м дан ортиқ. Участканинг юзи 80 м^2 дан ортиқ эканини исботланг.

10. Учбурчакнинг бир томони 18 см, иккинчи томони 23 см. Қуйидагиларни аниқланг:

1) учинчи томон энг камида неча сантиметр бўлади;

2) учинчи томон энг кўпи билан неча сантиметр бўлади?

11. Учбурчакнинг бир томони 5 м, иккинчи томони 8 м. Агар учбурчакнинг периметри: 1) 22 м дан кам; 2) 17 м дан кўп бўлса, учинчи томон қандай натурал қийматларни қабул қилиши мумкин?

16- §. ФУНКЦИЯЛАР

Кўпгина математик тушунчалар табиатдаги мавжуд объектларнинг хоссаларидан уларни абстрактлаштириш натижасида вужудга келганлигини бир неча бор гапирганмиз. Аммо бу тушунчалар воқелиkning айрим томонларини акс эттириб, бу билан уни билишга ёрдам беради.

Ҳодиса ва жисмлар орасидаги ўзаро боғланишни акслантирувчи тушунчалардан бири функция тушунчасидир. Бу математика тушунчасининг энг муҳим, етакчи соҳаси — математик анализнинг дастлабки тушунчасидир. Мактабда, умуман математикада асосий эътибор сонли функцияларга қаратилади. Бунга сабаб, математиканинг табиий фанлар, жумладан, физика билан узвий боғлиқлигидир. Бунда функция аппарати хосса ва ҳодисалар миқдорини ва уларнинг ўзаро боғланишларини баён қилувчи восита ролини бажаради.

Функция тушунчасининг муҳимлиги ва мураккаблиги бошланғич математика курсидан (мактаб математикасининг бир қисми сифатида) ўқувчиларини шу тушунчани, яъни пропедевтикани ўзлаштиришга аста-секин ва систематик равишда тайёрлашни талаб қилади. Шу муносабат билан бу курсда ўқитувчига ишнинг моҳиятини тушунган ҳолда бошланғич синфларда функция тушунчаси пропедевтикасини тўғри амалга ошириш ва ўқувчиларга пропорционал катталиклар қатнашган масалалар ечишни ўргатишга ёрдам берадиган қатор масалалар қаралади.

Бошланғич синф ўқувчилари қуйидагича масалани ечадилар: «Бир килограмм апельсин 2 сўм туради, 3 кг апельсин қанча туради? 4 кг-чи? 6 кг-чи?» Масаланинг мазмунини таҳлил қиламиз. Масалада сотиб олинган апельсинлар массаси ҳақида, уларнинг нархи ва бир килограммининг баҳоси ҳақида гапирилмоқда. Агар сотиб олинган апельсинлар массасини x билан, уларнинг нархини y билан белгиласак, улар орасидаги боғланиш $y=2x$ формула орқали ифодаланади. Бу формула бўйича x нинг ҳар бир қиймати учун y нинг унга мос қийматини топиш мумкин. y нинг x га боғлиқлиги функция дейилади. У шундайки, унда x ўзгарувчининг ҳар бир қийматига y ўзгарувчининг ягона қиймати мос келади.

Таъриф. x ўзгарувчининг ҳар бир қийматига y ўзгарувчининг ягона қиймати мос келса, y ўзгарувчининг x ўзгарувчига боғлиқлиги функция дейилади.

x ўзгарувчи эркин ўзгарувчи ёки аргумент, y ўзгарувчи эса эрксиз ўзгарувчи дейилади. Шунингдек, y ўзгарувчи x ўзгарувчининг функцияси ҳам дейилади. y нинг x нинг берилган қийматига мос қиймати функциянинг қиймати дейилади.

Функцияни бериш учун X сонли тўплами (y функциянинг аниқланиш соҳаси дейилади) ва шундай усулни (қондани) бериш керакки, бу усул ёрдамида X тўпландаги ҳар бир x сон учун y нинг мос сон қийматини — функциянинг қийматини топиш мумкин бўлсин.

Функцияни f , g , h ва бошқа ҳарфлар билан белгилаш қабул қилинган. Агар f функция бўлса, x аргументга мос y ўзгарувчининг қиймати $f(x)$ билан белгиланади, яъни $y=f(x)$.

Кўпинча функциялар формулалар орқали ифодаланади, бу формулалар аргументнинг берилган қиймати бўйича функциянинг мос қийматини қандай топишни кўрсатади. Масалан, агар квадрат томонининг узунлиги x дм га тенг бўлиб, юзи y дм² бўлса, $y=x^2$ формула аниқланиш соҳаси мусбат ҳақиқий сонлар тўплами бўлган функцияни беради.

Агар y тийинга 3 тийиндан x та дафтар сотиб олинган бўлса, $y=3x$ формула аниқланиш соҳаси бутун номанфий сонлар тўплами бўлган функцияни беради.

Баъзан функциялар бундай берилади:

$$y = \begin{cases} 3x-1, & \text{бунда } x \geq 0; \\ 2x, & \text{бунда } x < 0, \end{cases}$$

яъни x нинг ҳар хил қийматларида функция турли формулалар билан берилади.

Функцияни формула орқали ифодалаганда кўпинча унинг аниқланиш соҳаси кўрсатилмайди. Бундай ҳолда функциянинг аниқланиш соҳаси ўзгарувчининг бу формула маънога эга бўлган барча

3) Қуйидагн сонларнинг ҳар бирини 3 марта орттир: 7, 5, 9, 4, 8, 6.

4) 15, 16, 17, 18 сонларидан $c+24 > 40$ тенгсизлик тўғри бўладиган c нинг қийматларини ёзиб ол?

100. Функциянинг графиги

Функциянинг график тасвири на фақат функционал боғла нишни аёний тасаввур қилишга, балки функциянинг хоссаларини ўрганишни осонлаштиришга ҳам имкон беради. Шунинг учун агар функция формула билан берилган бўлса ҳам, кўпинча координата текислигидаги функциянинг графигига мурожаат қилинади.

Таъриф. X тўпламда берилган f функциянинг графиги деб X тўпламдан олинган барча x лар учун координата текислигининг x ва $f(x)$ координаталарга эга нуқталари тўпламига айтилади.

Формула билан берилган қатор функциялар графиклари қандай кўринишда бўлишини эслаймиз.

1. $y = x$ функциянинг аниқланиш соҳаси ҳақиқий сонлар тўлами бўлган шартда шу функциянинг графигини ясаймиз.

x нинг ҳар қандай қийматида ординатанинг қиймати ҳам x бўлгани учун берилган функциянинг координата текислиги абсцисса ва ординатаси ўзаро тенг бўлган нуқталар тўпламидан иборат. Бундай нуқталар тўплами биринчи ва учинчи координата бурчакларининг биссектрисасидир. Бу тўғри чизик $y = x$ функциянинг графиги бўлади (137-расм).

2. $y = 3$ функциянинг аниқланиш соҳасини ҳақиқий сонлар тўлами деб олиб, унинг графигини ясаймиз.

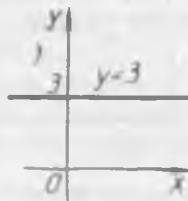
x нинг ҳар қандай қийматида y нинг қиймати 3 га тенг бўлгани учун берилган функциянинг графиги координата текислигидаги абсциссаси x ҳақиқий сон, ординатаси 3 бўлган нуқталар тўлами бўлади. Бундай нуқталар тўлами абсцисса ўқиға параллел тўғри чизик бўлади (138-расм).

3. $y = x^2$ функциянинг аниқланиш соҳасини ҳақиқий сонлар тўлами деб олиб, унинг графигини ясаймиз.

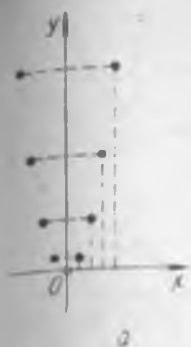
x ва y нинг баъзи бир мос қийматларининг жадвалини тузамиз.



137- расм



138- расм



139- расм



140- расм



141- расм

x	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4
y	0	1	1	4	4	9	9	16	16

x ва y нинг топилган ҳар бир қийматларни жуфтини координата текислигида нуқта билан тасвирлаймиз (139-расм). x фақат бутун қийматлар эмас, балки ҳар қандай ҳақиқий қийматлар қабул қилгани учун ҳосил қилинган нуқталарни силлиқ чизик билан туташтириш керак (139-расм). Бу чизик парабола дейилади.

Ўзгарувчилар орасидаги боғланишни таҳлил қилиш учун ўсувчи ва камаювчи функциялар моҳиятини тушуниш муҳимдир.

Таъриф. Агар X тўпладан олинган ҳар қандай x_1 ва x_2 учун $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ шарт бажарилса, f функция X оралиқда ўсувчи дейилади.

X оралиқда ўсувчи бўлган функция графигининг хусусияти: X оралиқ бўйлаб Ox ўқ бўйича чапдан ўнгга ҳаракатланганда графигининг ординатаси ортади (140-расм).

Таъриф. Агар X тўпладан олинган ҳар қандай x_1 ва x_2 учун $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ шарт бажарилса, f функция X оралиқда камаювчи дейилади.

X оралиқда камаювчи бўлган функция графигининг хусусияти: X оралиқ бўйлаб Ox бўйича чапдан ўнгга ҳаракатланганда графигининг ординатаси камаяди (141-расм).

Машқлар

1. Сутка давомида ҳавонинг ҳароратини ўлчаб, қуйидаги жадвал ҳосил қилинди:



142- расм

x_t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$y^{\circ}\text{C}$	1	0	-2	-3	-2	0	1	2	3	3,5	4	3,5	2

Бу боғланишнинг графигини ясанг. $У$ функция бўладими?

2. $X_1 = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3\}$ тўплагга тегишли ҳар бир сонга унинг модули мос қўйилган. Бу боғланиш функция эканлигини исботланг ва унинг графигини ясанг.

3. $y = x$ функциянинг аниқланиш соҳаси: 1) $[-2, 2]$, 2) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ тўплаг бўлса, унинг графигини ясанг.

4. $y = 2x^3$ функциянинг аниқланиш соҳаси: 1) R ; 2) $[-3, 2]$; 3) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ тўплаг бўлса, унинг графигини ясанг.

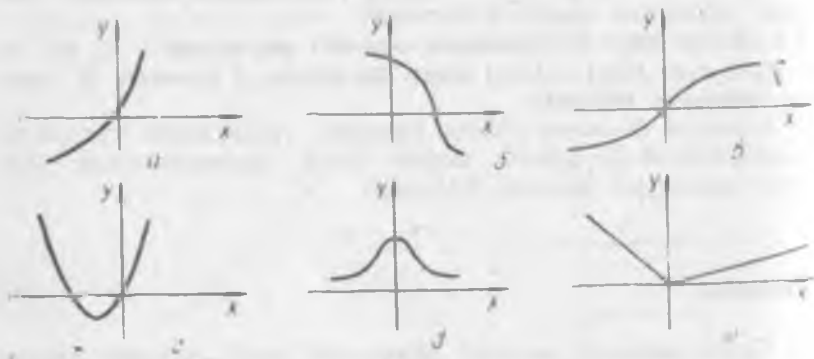
5. $y = 4x^2 - 4$ функциянинг графиги $A(-0,5; -3)$ нуқтадан ўтишини ва $B(1, -4)$ нуқтадан ўтмаслигини исботланг.

6. $y = 102x$ функциянинг ҳамма нуқталари биринчи ва учинчи координата бурчақларида ётишини исботланг.

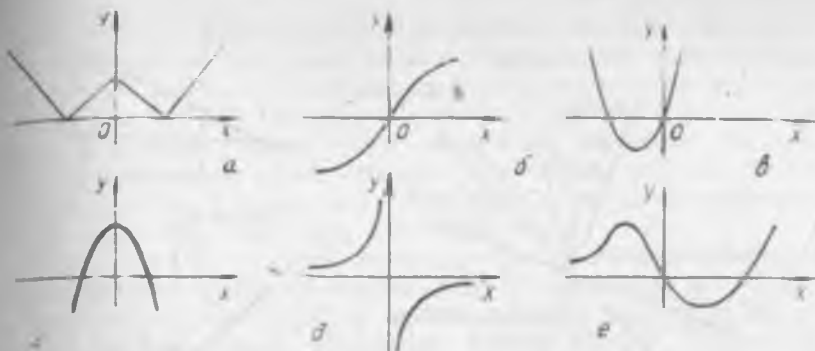
7. Графиклари 142-расмда тасвирланган функциялар табиатан нимаси билан ўхшаш?

8. 143-расмдаги графиклар синфларга ажратилган: $\{a, в\}$, $\{б, е\}$, $\{г, д\}$.

Бу ажратишнинг асосида тегишли функцияларнинг қандай хоссалари ётади?



143- расм



144- расм

9. 144-расмда тасвирланган графикларни шундай учта синфга ажратингки, а), б), в) графиклар турли синфларда бўлсин. Бу ажратишнинг асосида сиз берилган функцияларнинг қандай хоссаларидан фойдаландингиз?

10. Бошланғич синфларда бажариладиган қуйидаги машқлар функция ва унинг хоссалари ҳақидаги қандай тасаввурни шакллантиришга ёрдам беради:

1) Жадвални тўлдир:

b	7	9	16	28
$16 + b$				

Қўшилувчи қандай ўзгаради, йиғинди қандай ўзгаради?

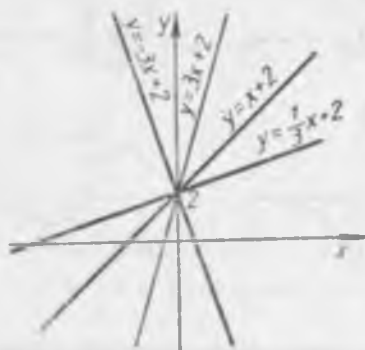
2) 7 та бир хил яшикда 42 кг помидор бор, c та шундай яшикда неча килограмм помидор бор? Масала бўйича ифода туз ва $c=6$, $c=8$, $c=9$, $c=10$ бўлганда унинг қийматини топ.

3) Боғда 112 туп олма ва x туп олча бор. Қуйидаги ифодалар нимани англатишини тушунтир: $112 + x$, $112 - x$, $x - 112$?

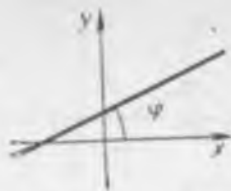
101. Чизикли функция

Агар ўқувчи 4 тийиндан x та қалам ва 13 тийинга дафтар сотиб олган бўлса, сотиб олинган нарсалар нархи (y тийин) бундай аниқланиши мумкин: $y = 4x + 13$. Сотиб олинган қаламлар миқдори билан бутун хариднинг қиймати функция бўлади, чунки x нинг ҳар бир қийматига y нинг ягона қиймати мос келади. Бундай функция чизикли функция дейилади.

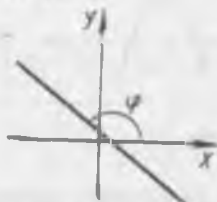
Таъриф. $y = kx + b$ кўринишдаги формула билан бериш мумкин бўлган функция чизикли функция дейилади, бунда x — эркин ўзгарувчи, k ва b — берилган ҳақиқий сонлар.



145- расм



146- расм

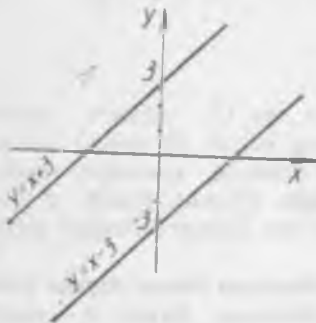


147- расм

Агар, хусусан, $k = 0$ бўлса, $y = b$ кўринишдаги функция ҳосил бўлади, у ўзгармас функция дейилади.

Чизиқли функциянинг аниқланиш соҳаси ҳақиқий сонлар тўпламидир. $y = kx + b$ чизиқли функциянинг графиги тўғри чизиқдир. Бу тўғри чизиқнинг текисликдаги ҳолатини k ва b коэффициентлар аниқлайди. Бунни кўрсатамиз.

Дастлаб $y = \frac{1}{3}x + 2$, $y = x + 2$, $y = 3x + 2$, $y = -3x + 2$ формула билан берилган функциялар графикларини қараймиз (145-расм). Бу тенгламаларда k коэффициент турли қийматлар қабул қилади, b коэффициент — ўзгармас. Агар Ox ўқ билан чизиқли функция графиги орасидаги бурчакни φ орқали белгиллаб, уни соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда ўлчасак, бу бурчакнинг катталиги k коэффициентга боғлиқлигини кўрамиз. Агар $k > 0$ бўлса, φ бурчак ўткир (146-расм); агар $k < 0$ бўлса, φ бурчак ўтмас (147-расм) бўлади. Ундан ташқари 145-расмдан кўриниб турибдики, k соннинг модули қанча катта бўлса, $y = kx + b$ тўғри чизиқнинг графиги Oy ўққа шунчалик яқин бўлади.



148- расм

k коэффициент φ бурчак билан боғлиқ бўлгани учун k коэффициент бурчак коэффициенти дейилади.

Энди $y = x + 3$ ва $y = x - 3$ формулалар билан берилган функцияларни қараймиз (148-расм). Уларда k коэффициент бир хил, b коэффициент эса турли қийматлар қабул қилади. 148-расмда ясалган тўғри чизиқларни таққослаб, b ўзгарганда график ўзига параллел ҳолда силжишини кўрамиз. Агар $x = 0$ бўлса, $y = b$, яъни $(0, b)$

нуқта $y = kx + b$ функция графигига тегишли, демак, b коэффициент тўғри чизиқнинг Oy ўқда ажратган кесма узунлигининг қиймати бўлади. $y = x + 3$ ва $y = x - 3$ функциялар ушун бу кесма 3 бирликка тенг.

Агар яна бир бор 145-расмга мурожаат қилсак, $k > 0$ да $y = kx + b$ функция ўзининг бутун аниқланиш соҳасида ўсишини, $k < 0$ да камайишини кўриш мумкин. Ҳақиқатан, $x_1 < x_2$ бўлсин. У ҳолда $y_1 = kx_1 + b$, $y_2 = kx_2 + b$ бўлади. y_1 ва y_2 ни таққослаймиз: $y_2 - y_1 = (kx_2 + b) - (kx_1 + b) = k(x_2 - x_1)$.

Шартга кўра $x_2 - x_1 > 0$, демак, $y_2 - y_1$ айирманинг ишораси k коэффициентнинг ишорасига боғлиқ. Агар $k > 0$ бўлса, $y_2 - y_1 > 0$ ва, демак, $x_1 < x_2$ дан $y_1 < y_2$ келиб чиқади, яъни $y = kx + b$, функция ҳақиқий сонлар тўпламида ўсувчи бўлади. Агар $k < 0$ бўлса, $y_2 - y_1 < 0$, бундан $y_1 > y_2$, ва, демак, $x_1 < x_2$ дан $y_1 > y_2$ келиб чиқади, яъни $y = kx + b$ функция ҳақиқий сонлар тўпламида камаювчи бўлади.

Машқлар

1. $y = 2x - 3$ функциянинг аниқланиш соҳаси: 1) R . 2) $[-3; 2]$; 3) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ деган шартда унинг графигини ясанг.

2. $y = 2x + b$ функциянинг графиги (1, 4) нуқтадан ўтиши маълум. $У(3, 8)$ нуқтадан ўтадим?

3. Агар функция: 1) $x - 2y = -3$; 2) $2x - 3y = 10$; 3) $x - 3y = 0$ формула билан берилган бўлса, k ва b коэффициентларни топинг.

4. Деталлар солинган яшик массасининг (y нинг) деталлар сонига (x га) боғланиши $y = 0,3x + 1,5$ формула билан ифодаланади. Қўйидаги қийматларда деталлар солинган яшик массасини ҳисобланг:

x	10	15	20	23
y				

Бу боғланишнинг графиги қандай бўлади?

5. Туристлар дам олиш жойигача 12 км юришди. Кейин 2,5 км/соат тезликда x соат юришди. Ҳаракат вақти (x) билан бутун ўтган йўл (y) орасидаги боғланишни ифодаловчи формула тузинг. Бу формула қандай функцияни ифодалайди? Агар туристлар ўтган бутун йўл 25 км дан ортиқ бўлмаса, бу функциянинг аниқланиш соҳаси қандай?

6. Телеграмма нархининг (y нинг) ундаги сўз сонига (x га) боғланиши $y = 5x + 20$ формула билан ифодаланади. x нинг қўйидаги қийматларида телеграмма нархини ҳисобланг:

x (сўз)	10	16	25	30
y (тийин)				

Агар телеграмма нархи 1 сўм 20 тийиндан ортиқ бўлмаса, берилган боғланишнинг аниқланиш соҳаси қандай?

7. Шаҳардан 20 км масофадаги пунктдан 5 км/соат тезликда пиёда шаҳарга қараб йўлга чиқди. Пиёда t соатдан кейин шаҳардан қандай масофада (s км) бўлади? t қандай қийматлар қабул қилиши мумкин?

102. Тўғри пропорционаллик

Агар t — пиёданинг ҳаракат вақти (соат билан), s — пиёда ўтган йўл (километр билан) бўлса ва u 4 км/соат тезликда текис ҳаракат қилса, t нинг ҳар бир қийматига $s = 4t$ формуладан келиб чиқади-ган s нинг ягона қиймати мос келади. Демак, $s = 4t$ формула функцияни ифодалайди.

Яна битта мисол қараймиз. Агар бир пакет сутнинг баҳоси 16 тийин бўлса, x та пакетнинг y нархи (тийин билан) бундай ҳисобланади: $y = 16x$. x нинг ҳар бир қийматига y нинг ягона қиймати мос келгани учун $y = 16x$ формула функцияни беради.

Қўриб ўтилган мисолларда биз тўғри пропорционаллик деб ата-лувчи функциялар билан иш кўрдик.

Таъриф. $y = kx$ кўринишдаги формула ёрдамида берилиши мумкин бўлган функция тўғри пропорционаллик дейилади, бунда x — эркин ўзгарувчи, k — нолга тенг бўлмаган ҳақиқий сон.

$y = kx$ формулада k сони пропорционаллик коэффициенти дейилади; y ўзгарувчи эса x ўзгарувчига пропорционал дейилади.

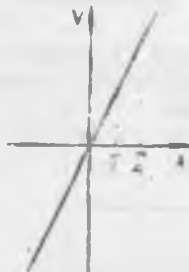
$y = kx$ функциянинг аниқланиш соҳаси ҳақиқий сонлар тўплами бўлади.

Тўғри пропорционаллик $y = kx + b$ чизиқли функциянинг $b = 0$ бўлгандаги хусусий ҳолидир. Шунинг учун:

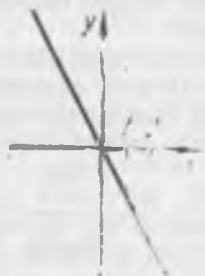
1) тўғри пропорционалликнинг графиги координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқ бўлади;

2) $k > 0$ бўлганда $y = kx$ функция ўзини бутун аниқланиш соҳасида ўсади, $k < 0$ бўлганда камаяди.

Масалан, $y = 2x$ тўғри пропорционаллик ҳақиқий сонлар тўпламида ўсувчи функциядир: агар x нинг қийматлари ўсса, функциянинг қийматлари ҳам ўсади (149-расм). $y = -3x$ функция ҳақиқий сонлар тўпламида камаювчи: агар x нинг қийматлари ўсса, функциянинг қийматлари камаяди (150-расм).



149- расм.



150- расм

Аммо тўғри пропорционаллик чизиqli функцияда бўлмаган хос-сага ҳам эга: агар f функция—тўғри пропорционаллик ва $(x_1, y_1), (x_2, y_2) — x$ ва y нинг мос жуфт қийматлари бўлса, $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ бўлади, бунда $x_2 \neq 0$. Бошқача айтганда, агар $y = kx$ бўлса, x ўзгарувчининг икки қийматининг нисбати y нинг уларга мос қийматларининг нис-батига тенг.

Ҳақиқатан, агар f —тўғри пропорционаллик бўлса, у $y = kx$ формула билан берилиши мумкин, у ҳолда x_1 ва x_2 нинг турли қийматлари учун $y = kx_1$ ва $y_2 = kx_2$ га эга бўламиз. $x_2 \neq 0$ ва $k \neq 0$ бўлгани учун $y_2 \neq 0$, демак, $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$.

Агар x ва y ўзгарувчиларнинг қийматлари мусбат сонлар бўл-са, тўғри пропорционалликнинг исботланган хоссасини бундай таъ-рифлаш мумкин:

x ўзгарувчи қийматларининг бир неча марта ўсиши (камайиши) билан у ўзгарувчининг унга мос қиймат-лари ҳам шунча марта ўсади (камаяди).

Бошланғич синфларда тўғри пропорционаллик алоҳида ўр-ганилмайди, аммо текстли масалаларни ечишда ўқувчилар катталиклар (миқдорлар) орасидаги турли боғланишлар билан учрашадилар. Жумладан, тўғри пропорционаллик билан учра-шадилар. Бундай масалаларга мисоллар келтирамиз.

1) 1 метр полотно 4 сўм туради. 2 м полотно қанча туради? 3 м-чи? 5 м-чи? 8 м-чи?

Бу масалада нархнинг сотиб олинган полотно миқдорига боғлиқлиги қаралади, 1 м полотно баҳоси ўзгармас. Бу боғ-ланиш $y = 4x$ формула билан ифодаланиши мумкин бўлгани учун, бунда x —сотиб олинган полотно миқдори, y —унинг нархи. тўғри пропорционалликка эга бўлади. Пропорционаллик коэффиценти 4 масала шартида берилган, шунингдек, x нинг қабул қиладиган қийматлари ҳам берилган.

2) 24 м узунликдаги газламадан устахонада 8 та бир хил костюм тикилди. 20 та шундай костюмга қанча газлама керак бўлади?

Масалада сарфланган газламанинг тикилган костюмларга боғланиши қаралади.

Бу боғланиш тўғри пропорционаллик, шунинг учун у $y = 3x$ формула билан берилиши мумкин, бунда 3—битта костюмга сарфланган газлама миқдори. x —тикилган костюмлар сони, y —бу костюмларни тикиш учун сарфланган газлама миқдори. x ва y ўзгарувчиларнинг мос қийматларини билган ҳолда про-порционаллик коэффиценти топилади: $24 : 8 = 3$ (м).

Машқлар

1. Қуйида жадвал усулида берилган функциялар орасидан тўғри пропорционалликни кўрсатинг:

1)	x	2	4	6	8	10
	y	14	28	42	56	70

2)	x	1	2	3	4	5
	y	0,2	0,4	0,6	0,8	1

3)	x	2	4	6	8	10
	y	4	16	36	64	100

4)	x	1	2	3	4	5
	y	-3	$-\frac{2}{3}$	-9	$-\frac{4}{3}$	-15

2. $y = -2x$ ва $y = 10x$ функцияларнинг графикларини ясанг ва улардан биринчиси ҳақиқий сонлар тўпламида камаювчи, иккинчиси ўша тўпланда ўсувчи эканини кўрсатинг.

3. Масалада берилган катталиклар орасида қандай боғланиш мавжуд эканини аниқланг ва масалани ечинг:

1) Битта банканинг сифими 3 л. 6 л шарбатни қуйиш учун нечта шундай банка керак бўлади? 9 литрни қуйиш учун-чи? 12 литрни қуйиш учун-чи? 15 литрни қуйиш учун-чи?

2) Магазинда биринчи кун 32 сўмга 8 та бир хил портфель сотилди. Иккинчи кун 6 та шундай портфель сотилди. Магазинга иккинчи кун сотилган портфеллардан неча сўм тушди?

3) 24 кг сутдан 3 кг қаймоқли сут, 20 кг қаймоқли сутдан 4 кг сариёғ, 12 кг сариёқдан 9 кг эритилган сариёғ олинади. 2400 кг сутдан неча килограмм эритилган сариёғ олинади?

4) Тўғри тўртбурчакнинг томонлари 6 см ва x см. Бу тўғри тўртбурчакнинг юзи y см². Бу тўғри тўртбурчак юзининг томон узунлигига боғланишини ифодаловчи формула ёзинг. $x \leq 8$ деган шартда бу боғланишнинг графигини ясанг.

5) Битта қаламнинг массаси 1,5 г. x та қаламнинг массасини y (грамм) орқали белгиланг ва $x \leq 4$ деган шартда бу боғланишнинг графигини ясанг.

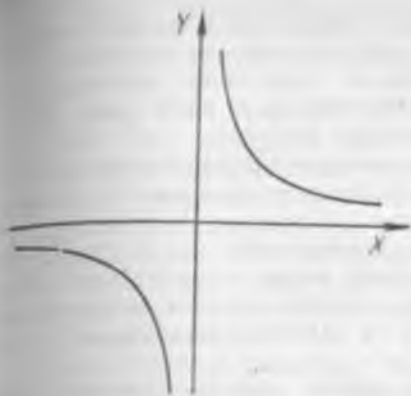
103. Тескари пропорционаллик

Агар s км — туристнинг ўтиши керак бўлган масофа, t соат — ҳаракат вақти, v км/соат — унинг тезлиги бўлса, тезликнинг ҳар бир қийматига вақтнинг ягона қиймати мос келади. Демак, $t = \frac{s}{v}$ формула функцияни беради. У тескари пропорционаллик дейилади.

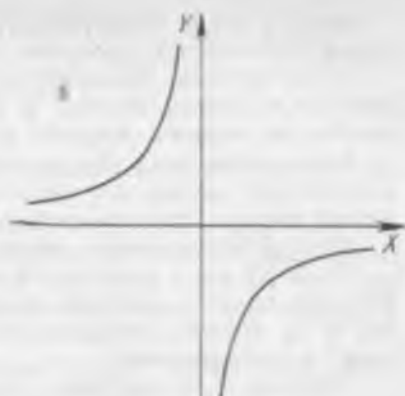
Таъриф. $y = \frac{k}{x}$ кўринишдаги формула билан бериш мумкин бўлган функция тескари пропорционаллик дейилади, бунда x — эркин ўзгарувчи. k — нолга тенг бўлмаган сон.

y ўзгарувчи ҳақида y x ўзгарувчига тескари пропорционал дейилади.

$y = \frac{k}{x}$ функциянинг аниқланиш соҳаси нолдан фарқли ҳақиқий сонлар тўпламидир.



151-расм



152-расм

Тескари пропорционалликнинг графиги **гиперболадир**. $k > 0$ бўлганда унинг шохчалари (тармоқлари) биринчи ва учинчи чоракларда ётади (151-расм); $k < 0$ бўлганда иккинчи ва тўртинчи чоракларда ётади (152-расм). Гиперболани ясаш учун $y = \frac{k}{x}$ функция қийматларининг жадвалини тузиш керак. Масалан, $y = \frac{6}{x}$ функция учун, бунда x —нолдан фарқли ҳақиқий сон, қийматлар жадвали бундай бўлади:

x	1	2	3	6	12
y	6	3	2	1	$\frac{1}{2}$

x нинг манфий қийматларида функциянинг графиги координаталар бошига нисбатан симметрик ясалади. Агар f функция тескари пропорционаллик бўлиб, (x_1, y_1) , (x_2, y_2) — x ва y нинг мос қийматлари жуфти бўлса, бунда $x_2 \neq 0$, $y_1 \neq 0$, у ҳолда $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ бўлади. Бошқача айтганда, агар $y = \frac{k}{x}$ бўлса, x ўзгарувчининг иккита қийматининг нисбати y нинг мос қийматлари нисбатининг тескарисига тенг.

Ҳақиқатан, агар f — тескари пропорционаллик бўлса, у $y = \frac{k}{x}$ формула билан ифодаланиши мумкин, у ҳолда ҳам x_1 ва x_2 нинг турли қийматлари учун $y_1 = \frac{k}{x_1}$, $y_2 = \frac{k}{x_2}$ бўлади. $x_2 \neq 0$ ва $k \neq 0$, $y_1 \neq 0$ бўлгани учун $\frac{y_2}{y_1} = \frac{k}{x_2} : \frac{k}{x_1} = \frac{kx_1}{kx_2} = \frac{x_1}{x_2}$ бўлади.

Шундай қилиб, $\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_1}{x_2}$.

Агар x ва y ўзгарувчиларнинг қийматлари мусбат сонлар бўлса, исботланган хоссани бундай таърифлаш мумкин:

x ўзгарувчи қийматларининг бир неча марта ўсиши (қамлйиши) билан y ўзгарувчининг унга мос қийматлари шунча марта камаяди (ўсибди).

Бошланғич синф ўқувчилари тескари пропорционаллик билан асосан масалалар ечишда танишадилар, аммо бу боғланишни махсус ўрганмайдилар.

Бундай масалаларга мисоллар келтираамиз.

1) 24 кг унни пакетларга жойлаш керак. Агар бу унни 3 та бир хил пакетга солинса, 1 пакет уннинг массаси қанча бўлади? 4 та пакетга жойланса-чи? 6 та пакетга жойланса-чи? 8 та пакетга жойланса-чи?

Масалада 3 та катталики: ҳамма уннинг массаси, пакетлар сони ва 1 пакетдаги уннинг массаси қаралмоқда. Биринчи катталик бир хил қиймат 24 ни қабул қилади. Қолган иккитаси тескари пропорционал боғланган, чунки бу боғланишни $y = \frac{24}{x}$ формула билан

ифодалаш мумкин, бунда x —пакетлар сони, y —битта пакетдаги уннинг массаси. Буни билган ҳолда агар унни 3 та пакетга солинса, битта пакетда $24 : 3 = 8$ (кг) ун бўлишини, 4 та пакетга солинса, битта пакетда $24 : 4 = 6$ кг ун бўлишини топиш мумкин ва ҳоказо.

2) Участкадан ҳар бирида 50 кг дан 40 қоп картошка териб олинди. Бу картошкalar ҳар бирига 20 кг дан қилиб яшикларга жойланди. Нечта яшик керак бўлди?

Масалада ҳамма териб олинган картошка массаси, идишдаги картошка массаси ва бу идишлар сони орасидаги боғланиш қаралади. Биринчи катталик ўзгармас, уннинг қиймати кўпайтириш билан топилади: $50 \cdot 4 = 200$ (кг), қолган иккитаси тескари пропорционал боғланишда топилади, бу боғланиш $y = \frac{200}{x}$ формула билан ифодаланиши мумкин,

бунда x —битта идишдаги картошканинг массаси, y —идишлар сони.

Машқлар

1. Жадвал усулида берилган қуйидаги функциялар орасидан тескари пропорционалликни кўрсатинг:

1)

x	1	2	4	10	40
y	20	10	5	2	$\frac{1}{2}$

2)

x	2	3	6	8	12
y	12	8	4	3	1

3)

x	1	3	4	6	8
y	-1	-5	-7	-11	-15

4)

x	-2	-4	-3	6	12
y	6	3	4	-2	-1

2. $y = \frac{12}{x}$ функциянинг аниқланиш соҳаси:

- 1) ҳақиқий сонлар тўплами;
- 2) $(0, \infty)$;
- 3) $[1, 6]$; 4) $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

бўлганда унинг графигини ясанг.

3. Масалада берилган катталиклар орасида қандай боғланиш мавжудлигини аниқланг ва уни ечинг.

1) Тажрибага ажратилган жўякдан 24 кг помидор териб олинди. Бу помидорларни 1 кг дан қилиб пакетларга солиш керак. Қанча пакет керак бўлади? Ҳар пакетга 3 кг дан солинганда-чи? 4 кг дан солинганда-чи? 6 кг дан солинганда-чи? 8 кг дан солинганда-чи? 6 кг дан солинганда-чи?

2) Велосипедчи 12 км/соат тезликда 2 соат юрди. Агар пиёда 4 км/соат тезликда юрса, бу масофани неча соатда ўтади?

3) Иккита дурадгор баравардан стул тузатди. Биринчи дурадгор кунига 10 тадан стул тузатиб, 6 кун ишлади, иккинчиси 5 кун ишлади. Иккинчи дурадгор бир кунда неча стул тузатган?

4. Асоси x см бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзи 8 см² га тенг. Бу тўғри тўртбурчакнинг баландлиги қандай? Тўғри тўртбурчакнинг юзи ўзгармас бўлганда унинг асоси ва баландлиги орасидаги боғланиш функция бўлишини кўрсатинг ҳамда унинг тўғри тўртбурчакнинг асоси 0,5 см дан ортиқ бўлмагандаги графигини ясанг.

5. «Бўш жойни шундай тўлдирингки, $24 : 3 > 24 : \square$ ёзув тўғри бўлсин» деган топшириқни ўқувчи бундай бажарди: 24 ва 3 сонларининг бўлинмаси 24 ва $\square$ номаълум соннинг бўлинмасидан катта бўлиши учун иккинчи бўлувчи биринчисидан кичик бўлиши керак, масалан, 2.

Ўқувчи қандай хосса ва қандай функциядан ошкормас ҳолда фойдаланган?

В БО Б

КАТТАЛИКЛАР ВА УЛАРНИ ЎЛЧАШ

Бизни ўраб турган борлиқнинг энг муҳим хусусиятларидан бири унинг тинимсиз ва турли-туман ўзгаришидир. Об-ҳаво, одам ёши, кишиларнинг яшаш шароити, ҳайвонлар ва ўсимликлар дунёси ўзгаради. Бу жараёнларни илмий асослаш учун уларнинг маълум хоссаларини, масалан, вақт, масса, тезликни билиш керак. Бу хоссалар катталиклардир. Сиз уларни математика, физика, химия, биология курсларида ўргангансиз. Уларнинг баъзилари билан бизнинг курсда ҳам учрашгансиз. Аммо буларнинг ҳаммаси бошланғич синф ўқитувчилари учун етарли эмас — бошланғич мактабда катталикларга ва уларни ўлчашга қаратилган бундай катта эътибор чуқур тайёргарликни талаб қилади. Мазкур боб ана шунга қаратилган.

104. Катталик тушунчаси

Узунлик, юз, масса, тезлик, нарх — катталиклардир. Улар билан дастлабки танишиш бошланғич мактабда юз беради, бунда катталик сон билан бир қаторда етакчи тушунча бўлади. Катталиклар — бу аниқ объект ёки ҳодисаларнинг махсус хоссаларидир. Масалан, буюмларнинг оралиққа эга бўлиш хоссаси узунлик дейилади. Аниқ объектларнинг оралиқлари ҳақида гапирганимизда бу сўзни ишлатамиз. Шунинг учун аниқ объектларнинг узунликлари ҳақида гапирилганда бу катталиклар бир жинсли дейилади. Умуман, бир жинсли катталиклар бирор тулпам объектларининг айни бир хоссасини ифодалайди. Турли жинсли катталиклар объектларнинг турли хоссаларини ифодалайди. Масалан, узунлик ва юз — турли жинсли катталиклардир.

Узунлик, юз, масса ва бошқа катталиклар қатор хоссаларга эга.

1. Ҳар қандай бир жинсли икки катталик таққосланадиган: улар ё тенг, ёки бири иккинчисидан кичик. Бошқача айтганда, бир жинсли катталиклар учун «тенг», «кичик» ва «катта» муносабатлари ўринли ҳамда ихтиёрий a ва b катталиклар учун $a < b$, $a = b$, $a > b$ муносабатлардан биттаси ва фақат биттаси тўғри.

Масалан, тўғри бурчакли учбурчак гипотенузасининг узунлиги шу учбурчакнинг исталган катети узунлигидан катта, олманинг массаси тарвуз массасидан кичик, тўғри тўртбурчакнинг қарама-қарши томонлари узунликлари тенг деймиз.

2. Бир жинсли катталикларни қўшиш мумкин, қўшиш натижасида ўша жинсли катталик ҳосил бўлади. Бошқача айтганда, ҳар қандай a ва b катталиклар учун $a + b$ катталик бир қийматли аниқланади, у a ва b катталикларнинг йиғиндисиди дейилади.

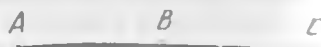
Масалан, агар a — AB кесманинг узунлиги, b — BC кесманинг узунлиги (153-расм) бўлса, у ҳолда AC кесманинг узунлиги AB ва BC кесмалар узунликларининг йиғиндисига тенг.

3. Катталик ҳақиқий сонга кўпайтирилади, натижада ўша жинсли катталик ҳосил бўлади. Бошқача айтганда, ҳар қандай a катталик ва ҳар қандай x номанфий ҳақиқий сон учун ягона $b = x \cdot a$ катталик мавжуд; b катталик a катталикни x сонга кўпайтмаси дейилади.

Масалан, AB кесманинг a узунлигини $x = 2$ га кўпайтирилса, янги AC кесманинг $2a$ узунлигини ҳосил қиламиз (154-расм).



153-расм



154-расм

4. Бир жинсли катталиклар *айирилади*, бунда катталиклар айирмаси йиғинди орқали аниқланади: a ва b катталикларнинг айирмаси деб шундай c катталикка айтиладики, унинг учун $a = b + c$ ўринли бўлади.

Масалан, a — AC кесманинг узунлиги, b — AB кесманинг узунлиги бўлса, BC кесманинг узунлиги AC ва AB кесмалар узунликларининг айирмасига тенг бўлади.

5. Вир жинсли катталиклар *булинади*, бунда бўлинма катталикларни сонга кўпайтмаси орқали аниқланади: a ва b катталикларнинг бўлинмаси деб шундай x номанфий ҳақиқий сонга айтиладики, унинг учун $a = x \cdot b$ ўринли бўлади. Кўпинча бу x сон a ва b катталикларнинг нисбати дейилади ва $\frac{a}{b} = x$ кўринишда ёзилади.

Масалан, AC кесма узунлигининг AB кесма узунлигига нисбати 2 га тенг (154- расм).

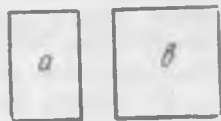
Машқлар

1. Икки бўлак сим бор. Ўлчамасдан уларнинг узунликларини қандай таққослаш мумкин?

2. Иккита ҳар хил банкага сув қуйилган. Ўлчамасдан сув ҳажмларини қандай таққослаш мумкин?

3. Икки жисмнинг массасини аниқлашдан уларнинг массаларини қандай таққослаш мумкин?

4. 155-расмда a ва b юзга эга бўлган иккита тўғри тўртбурчак тасвирланган. Юзи: 1) $a + b$; 2) $5a$; 3) $\frac{1}{2}b$; 4) $b - a$ га тенг бўлган тўғри тўртбурчак ясанг.



155- расм

105. Катталикларни ўлчаш тушунчаси

Катталикларни бевосита таққослаш билан уларнинг тенглигини ёки тенг эмаслигини аниқлашимиз мумкин. Текширишда аниқроқ натижага эга бўлиш учун, масалан, бир жисм массаси иккинчи жисм массасидан қанча катталигини билиш учун катталикларни ўлчаш зарур. Ўлчаш берилган катталикни бирлик сифатида олинган шу турдаги бошқа катталик билан таққослашдан иборат. Таққослаш жараёни қаралаётган катталикларнинг турига боғлиқ: узунлик учун бошқа катталик, юз учун ундан бошқа, масса учун яна бошқа ва ҳ. к. Аммо бу жараён қандай бўлишидан қатъи назар, ўлчаш натижасида катталик танлаб олинган бирлик бўйича маълум сонли қиймат қабул қилади.

Умуман, *агар a катталик берилган ва e катталик бирлиги танлаб олинган бўлса, у ҳолда a катталикни ўлчаш натижасида шундай x ҳақиқий сон топила-*

дики, унинг учун $a = x \cdot e$ булади. Бу x сон a катталикнинг e катталик бирлигидаги сонли қиймати дейилади.

Охирги жумлани символик равишда бундай ёзиш мумкин: $x = m_e(a)$.

Таърифга кўра ҳар қандай катталикни бирор сон билан шу катталик бирлигининг кўпайтмаси кўрнинишида ёзиш мумкин. Масалан, $7 \text{ кг} = 7 \cdot 1 \text{ кг}$, $12 \text{ см} = 12 \cdot 1 \text{ см}$, $3 \text{ соат} = 3 \cdot 1 \text{ соат}$.

Бундан ва катталикни сонга кўпайтириш таърифидан фойдаланиб, катталикнинг бир бирлигидан бошқа бирлигига ўтиш жараёнини асослаш мумкин. Масалан, $\frac{5}{12}$ соатни минутларда ифодалаш керак

бўлсин. $\frac{5}{12} \text{ соат} = \frac{5}{12} \cdot 1 \text{ соат}$ ва $1 \text{ соат} = 60 \text{ минут}$ бўлгани учун $\frac{5}{12} \text{ соат} = \frac{5}{12} \cdot 60 \text{ минут} = \left(\frac{5}{12} \cdot 60\right) \text{ минут} = 25 \text{ минут}$.

Битта сонли қиймат билан тўла аниқланадиган катталиклар скаляр катталиклар дейилади. Бунга узунлик, юз, ҳажм, масса мисол бўла олади.

Математикада скаляр катталиклардан ташқари вектор катталиклар ҳам қаралади. Вектор катталикни таърифлаш учун унинг сонли қийматининг эмас, йўналишини ҳам кўрсатиш зарур. Куч, тезланиш, электр майдонининг кучланганлиги ва бошқалар вектор катталиклардир.

Бу курсда биз фақат сонли қиймати мусбат бўлган скаляр катталикларни, яъни мусбат скаляр катталикларни қараймиз.

Катталикларни ўлчаш уларни таққослашни сонларни таққослашга, катталиклар устида бажариладиган амалларни сонлар устида бажариладиган мос амаллар билан таққослашга келтиришга имкон беради.

1. Агар a ва b катталиклар e катталик бирлигида ўлчанган бўлса, a ва b катталиклар орасидаги муносабат уларнинг сонли қийматлари орасидаги муносабат каби бўлади, ва аксинча:

$$a = b \Leftrightarrow m_e(a) = m_e(b),$$

$$a < b \Leftrightarrow m_e(a) < m_e(b),$$

$$a > b \Leftrightarrow m_e(a) > m_e(b).$$

Масалан, агар икки жисм массаси $a = 5 \text{ кг}$, $b = 3 \text{ кг}$ бўлса, у ҳолда a нинг массаси b нинг массасидан катта дейиш мумкин, чунки $5 > 3$.

2. Агар a ва b катталиклар e катталик бирлигида ўлчанган бўлса, у ҳолда $a + b$ йиғиндининг сонли қийматини топиш учун a ва b катталикларнинг сонли қийматларини қўшиш кифоя:

$$a + b = c \Leftrightarrow m_e(a + b) = m_e(a) + m_e(b).$$

Масалан, $a = 15 \text{ кг}$, $b = 12 \text{ кг}$ бўлса, $a + b = 15 \text{ кг} + 12 \text{ кг} = (15 + 12) \text{ кг} = 27 \text{ кг}$.

3. Агар a ва b катталиклар шундай бўлсаки, унда $b = x \cdot a$ бўлса (бунда x —мусбат ҳақиқий сон, a катталик e катталик бирлигида ўл-

чанган), у ҳолда b катталикнинг сонли қийматини e бирлигида топиш учун x сонини $m_e(a)$ сонига кўпайтириш етарли:

$$b = xa \Leftrightarrow m_e(b) = x \cdot m_e(a).$$

Масалан, агар b нинг массаси a нинг массасидан 3 марта катта, яъни $b = 3a$ ва $a = 3$ кг бўлса, у ҳолда $b = 3a = 3 \cdot (3 \text{ кг}) = (3 \cdot 3) \text{ кг} = 9 \text{ кг}$ бўлади.

Машқлар

1. 1) 8 см 79 мм ни сантиметрларда; 2) 8 минут 12 секундни минутларда; 3) 125 кг 300 г ни тонналарда ифодаланг.

2. Катталикларни таққосланг:

1) 56 мин ва $\frac{7}{10}$ соат; 3) 1,5 см ва $\frac{3}{20}$ дм; 3) $\frac{3}{50}$ м ва $\frac{4}{5}$ дм.

3. Қуйидаги масалаларни ечинг ва ечиш жараёнида катталиклар устида қандай амаллар бажарилганини тушунтиринг:

1) Учта деталга ишлов бериш учун $\frac{4}{3}$ соат кетди. Биринчи деталга 0,25 соат, иккинчи деталга $\frac{2}{3}$ соат кетди. Учинчи деталга ишлов бериш учун қанча вақт кетди?

2) Китоб альбомдан 78 тийин арзон. Агар битта китоб 68 тийин турса, 2 та шундай альбом қанча туради?

3) Нефть базасида 12680 т бензин бор эди. Базадан биринчи кун 834 т, иккинчи кун биринчи кундагидан 2 марта кам, учинчи кун иккинчи кундагидан 229 т ортиқ бензин олиб кетилди. Базада неча тонна бензин қолди?

4) Узунлиги 24 см, эни узунлигидан 3 марта кам, баландлиги 11 см бўлган тўғри бурчакли параллелепипед шаклидаги ёғоч ғўладан қирраси 6 см бўлган куб қирқиб олинди. Қолган қисмининг ҳажминини топинг.

106. Катталикларнинг ўлчов бирликлари системасининг ривожланиш тарихидан

Кишилар илгаридан ҳар хил катталикларни ўлчаш, шу билан бирга иложи борица аниқроқ ўлчаш зарурлигини тушунганлар. Аниқ ўлчашларнинг асоси бўлиб катталикларнинг қулай ва тушунарли бирликлари ҳамда бу бирликларнинг аниқ эталонлари (намуналари) хизмат қилади. Ўз навбатида эталонларнинг аниқлиги мамлакат фан, техника ва саноати ривожланишининг даражасини аксантиради, унинг илмий-техник потенциални ҳақида гапирди.

Катталиклар ўлчов бирликларининг ривожланиши тарихида бир қанча даврни кўрсатиш мумкин.

Энг қадимги давр бўлиб узунлик бирлиги киши танасининг қисмлари билан ўлчанган давр ҳисобланади. Масалан, бу давр-

да узунлик ўлчов бирлиги сифатида кафт (бош бармоқсиз тўртта бармоқ кенглиги), тирсак (тирсак узунлиги), фут (оёқ таги (кафти) нинг узунлиги), дюйм (катта бармоқнинг бир бўғини узунлиги) ва бошқалар ишлатилган. Бу даврда юз бирлиги сифатида қудуқ (битта қудуқ суви билан суғориладиган майдон, қўш ёки плуг (қўш ёки плуг билан бир кунда ишлов берилган ўртача майдон) ва бошқалар олинган.

XIV—XVI асрларда савдо-сотиқнинг ривожланиши билан катталикни ўлчашнинг объектив бирликлари вужудга кела бошлади. Масалан, Англияда дюйм (учта арпа доначасининг узунлиги), фут (ёнма-ён қўйилган 64 та арпа доначасининг кенглиги). Масса бирлиги сифатида гран (бошоқ массаси) ва карат (дуккакли ўсимлик турларидан бири уруғининг массаси) қабул қилинган.

Катталиклар бирликлари ривожланишининг кейинги даврида бир-бири билан ўзаро боғланган бирликлар киритилди. Масалан, Россияда узунлик бирлиги қилиб миля, чақирим (верста), саржин ва газ (аршин) киритилди. 3 газ 1 саржинга тенг, 500 саржин 1 чақиримга тенг, 7 чақирим 1 миляга тенг.

Бирок катталиклар бирликлари орасидаги боғланиш ихтиёрий бўлган. На фақат мамлакатлар, балки битта мамлакат ичидаги турли областлар ҳам ўзининг узунлик, юз, масса бирликларига эга бўлган. Айниқса Францияда катталик бирликлари турлича бўлган, у ерда ҳар бир феодал ўз ҳукмронлик доирасида ўзининг ўлчовларига эга бўлган. Катталиклар бирликларининг турлича бўлиши саноатнинг ривожланишига тўсқинлик қилган, илмий прогрессга ва савдо-сотиқ алоқасининг ривожланишига халақит берган.

Оқибатда XVIII аср охирида, Буюк француз революцияси даврида Францияда бирликларнинг янги системаси — Халқаро системанинг асоси бўлган система вужудга келди. Бу системада узунликнинг асосий бирлиги қилиб метр¹ — Париждан ўтадиган Ер меридиани узунлигининг 40 миллиондан бир қисми қабул қилинди.

Метрдан ташқари: ар — томонининг узунлиги 10 м га тенг бўлган квадратнинг юзи; литр — қиррасининг узунлиги 0,1 м бўлган куб ҳажмига тенг суюқлик ва сачровчи жисмлар ҳажми; грамм — қиррасининг узунлиги 0,01 м бўлган куб ичидаги тоза сув массаси каби бирликлар ўрнатилди.

Шунингдек олд қўшимча ёрдамида ҳосил бўладиган ўнли каррали ва улушли бирликлар: мириа (10^4), кило (10^3), гекто (10^2), дека (10^1), деци (10^{-1}), санти (10^{-2}), милли (10^{-3}) киритилди.

Масса бирлиги бўлмиш килограмм 4°C ҳароратдаги 1 дм³ сувнинг массаси сифатида аниқланган.

Катталикларнинг ҳамма бирликлари узунлик бирлиги метр

¹«Метр» сўзи грекча metron сўзидан келиб чиққан бўлиб, «ўлчов» ни билдирди.

билан яқиндан боғланган учун катталикларнинг янги системаси ўлчовларнинг метрик системаси номини олди.

Қабул қилинган таърифларга мос равишда метр ва килограммнинг платина эталони тайёрланди: метрни охирларида штрихлар қўйилган чизғич, килограммни цилиндрик тарози тоши ифодалайди. Бу эталонлар Франциянинг миллий архивига сақлаш учун берилди, шунинг учун улар «архив метр» ва «архив килограмм» деган ном олдилар.

Ўлчовларнинг метрик системасининг яратилиши катта илмий ютуқ¹ бўлди — тарихда биринчи марта табиатдан олинган ва ўнли саноқ системаси билан узвий боғланган намунага асосланиб яратилган изчил система ташкил қилган ўлчовлар пайдо бўлди.

Аммо тез орада бу системага ўзгартиришлар киритишга тўғри келди. Бунга меридиан узунлигининг етарлича аниқ ҳисобланмаганлиги сабаб бўлди. Ундан ташқари, фан ва техниканинг ривожланишига қараб, бу катталикнинг қийматига аниқликлар киритилиши аниқ бўлди. Шунинг учун табиатдан олинган узунлик бирлигидан воз кечишга тўғри келди. Архив метрнинг охирларидаги штрихлар орасидаги масофа метр деб, архив килограммнинг массаси килограмм деб олинди.

Ўлчовларнинг метрик системаси дарров тан олинмади. Ҳатто 100 йилдан кейин (1875 йилда) 17 та давлатгина «ўлчашларнинг халқаро бирлигини таъминлаш ва ўлчовларнинг метрик системасини такомиллаштириш учун» метрик конвенциясига қўл қўйган эди. Ҳозирги вақтда бу конвенцияга 60 та давлат қўл қўйган.

Россияда ўлчовларнинг метрик системаси 1899 йилдан бошлаб лойиҳаси машҳур рус олими Д. И. Менделеев томонидан ишлаб чиқилган махсус қонун билан бир вақтда қўллана бошланди. Совет давлатининг махсус қарори билан ўлчовларнинг метрик системасига аввал РСФСР (1918 йилда), кейин бутун давлат (1928 йилда) ўтиши қонунлаштирилди.

XVIII асрда барпо қилинган ўлчовларнинг метрик системаси ўша даврдаги фан ва ўлчов техникасининг ривожланиш даражасига жавоб берар эди ва, албатта, турғун бўла олмасди. 1921 йилда катталикларнинг бирлик системасини такомиллаштириш бўйича ҳамкорликни мустаҳкамлаш мақсадида ўлчов ва оғирликларнинг халқаро бирлиги ташкил қилинди. Бу бюрога ўлчов ва оғирликларнинг халқаро комитети раҳбарлик қилади. Қонун чиқарувчи орган бўлиб, ўлчов ва оғирликларнинг Бош конференцияси ҳисобланади, бу конференция 6 йилда бир марта ўтказилади.

XX асрда фан ва саноатнинг гуркираб ривожланиши шунга олиб келдики, 50-йилларга келиб ўлчовларнинг метрик системасини тўлдирувчи ва ривожлантирувчи турли хил бирликлар

¹Ўлчовларнинг метрик системасини яратишда ўша даврнинг машҳур олимлари — Ж. Лагранж, П. Лаплас, Т. Монж, Ж. Борда ва бошқалар иштирок этинди.

системаси вужудга келди. Катталикларнинг ягона универсал бирлик системасини барпо қилиш муаммоси тугилди. Бу муаммони ҳал қилишда ўлчов ва оғирликларнинг халқаро комитети катта иш олиб борди. 1960 йилда ўлчов ва оғирликларнинг XI Бош конференцияси халқаро бирликлар система (СИ)¹ ни киритиши билан, бу муаммо ҳал қилинди.

Машқлар

1. Маълумки, 1967 йилда мамлакатимизда 9 млрд. пуд галла йиғиштириб олинди. Бу неча тонна?

(Пуд — Россияда қадим замонлардан маълум бўлган масса бирлиги; 1 пуд = 16 кг 380 г.)

2. СССРнинг Олмос фондида сақланаётган ноёб қимматбаҳо зўнат — буюмлар орасида массаси 189,62 карат бўлган «Орлов» ва массаси 88,7 карат бўлган «Шох» каби қадимги тошлар бор. Бу тошларнинг граммлардаги массаси қанча?

(Карат — қимматбаҳо тош ва дурларни ўлчашда фойдаланиладиган масса бирлиги; 1 карат = $2 \cdot 10^{-4}$ кг.)

3. Велосипед, машина шиналарининг кенглиги ва ички диаметри дюйм билан ўлчанади. «БелАЗ» автомашинаси шинасининг кенглиги ва диаметри 18,0—32 дюймга тенг. Бу шинанинг кенглиги ва диаметри сантиметрларда қанча бўлади?

(Дюйм — кўп мамлакатларда қўлланиладиган узунлик бирлиги; 1 дюйм = 2 см 5,4 мм. Андерсон эртагндаги қаҳрамон — Дюймовочканинг бўйи 1 дюймга тенг).

4. 100 ярдни 9,1 секундда чопиб ўтган спортчи тез юрганми ёки 100 метрни 9,0 секундда чопиб ўтган спортчи тез юрганми?

(Ярд — инглизча узунлик бирлиги; 1 ярд = 91,44 см.)

5. Ҳамма мамлакатнинг денгизчилари кема сузиб ўтган масофани миля билан ўлчайдилар. Бир денгиз миляси 1852 м га тенг. 320 миляга тенг масофани километрлар билан ифодаланг.

107. Бирликларнинг халқаро системаси

Бирликларнинг халқаро системаси (СИ) фан, техника, халқ хўжалиги ва таълим беришнинг ҳамма соҳаси учун ягона универсал амалий бирликлар системасидир. Бутун дунё учун ягона ҳисобланган бундай системага бўлган талаб юқори бўлгани учун у қисқа вақт ичида кенг халқ оммаси орасида тан олинди ва бутун дунёга тарқалди.

Бу системада етти асосий бирлик (метр, килограмм, секунд, ампер, кельвин, моль ва кандела) ва 2 та қўшимча бирлик (радиан ва стерадиан) бор.

¹Халқаро бирликлар системасининг қисқача номи SI. Унинг русча талқини — СИ, бу «интернационал система» ни англатади, яъни «халқаро» сўзи алоҳида бундай ўқилади; «с-н», «си» эмас.

Маълумки, узунлик бирлиги метр ва масса бирлиги килограмм ўлчовларнинг метрик системасига ҳам кирган. Улар янги системага қандай ўзгаришлар билан киритилган? Метрнинг янги таърифи киритилган — у ясси электромагнит тўлқинининг вакуумда (ҳавосиз бўшлиқда) секунднинг $\frac{1}{299\,792\,458}$ қисмида ўтган йўли сифатида қаралади.

Метрнинг бундай таърифланишига ўлчашларнинг аниқлигига бўлган талабнинг ошганлиги, шунингдек, табиатда мавжуд бўлган ва ҳар қандай шароитда ҳам ўзгаришсиз қоладиган катталиқ бирлигига эга бўлишга интилишдир.

Масса бирлиги килограммнинг таърифи ўзгармади, килограмм — 1889 йилда платина ва иридий аралашмасидан тайёрланган цилиндр массаси. Бу эталон Франциянинг Севре деган шаҳарида Ўлчов ва оғирликларнинг халқаро бюросида сақланади.

Халқаро системанинг учинчи асосий бирлиги вақт бирлиги секунддир. У метрга қараганда анча илгари келиб чиққан.

1960 йилгача секундни Қуёш суткасининг $\frac{1}{86\,400}$ қисмига тенг деб олинган, яъни секунд Ернинг ўз ўқи атрофида айланиши бўйича таърифланган. Бу нарса вақтнинг турли бирликлари орасидаги одатдаги муносабатларни сақлаш мақсадида қилинган эди. Бундай таърифлашда бир суткада 86 400 секунд бўлади, бу 1440 минут ёки 24 соатни ташкил қилади.

1960 йилда Ўлчов ва оғирликларнинг Бош кенференцияси Ернинг Қуёш атрофида орбита бўйлаб ҳаракатига асосланиб, вақтнинг бирлигига ўтиш ҳақида қарор қабул қилди. Секунд йилнинг $\frac{1}{31\,556\,925,9747}$

қисми сифатида олинди. Бунда ўртача Қуёш кунларининг ўзгарувчан эканлиги ҳисобга олинди ва унинг аниқлиги анчагина орттирилди. Аммо бу ҳам олимларни қаноатлантирмади. 1967 йилда секундни қуйидагича таърифлашди: «Секунд цезий-133 атоми асосий ҳолатининг икки ўта нозик сатҳлари орасидаги ўтишга мос бўлган нурланиш давридан 9 192 631 770 марта катта вақтга тенг». Ҳозирги пайтда секунд янада аниқроқ топилган.

Умуман, фан ва техниканинг ривожланиши мунтазам равишда катталиқлар бирликларининг таърифига тузатишлар киритиб туради.

Амалда ҳамма узунликларни метр билан, массаларни килограмм билан, вақтни секунд билан ўлчаш ноқулай. Шунинг учун асосий бирликлардан уларга қаррали ва улушли бўлган янги бирликлар ҳосил қилинади. Қаррали бирликлар асосий бирликлардан 10 , 10^2 , 10^3 , 10^6 , 10^9 , 10^{12} , 10^{15} , 10^{18} марта катта, улушли бирликлар асосий бирликларнинг 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} , 10^{-6} , 10^{-9} , 10^{-12} , 10^{-15} , 10^{-18} қисмига тенг. Бирликларнинг янги номлари «метр», «грамм», «секунд» лардан ва 1-жадвалда¹ кўрсатилган олд қўшимчаларни қўшиш ёрдамида ҳосил қилинади:

¹ Жадвалда узунлик, масса ва вақт каби катталиқларнинг қаррали ва улушли бирликларини ҳосил қиладиган олд қўшимчаларгина келтирилган.

Олд қўшимча-лар	Олд қўшимча-ларнинг белги-ланиши	Қўпайтувчи	Олд қўшимча-лар	Олд қўшимча-ларнинг белги-ланиши	Қўпайтувчи
мега	М	10^6	сантн	с	10^{-2}
кило	к	10^3	милли	м	10^{-3}
гекто	г	10^2	микро	мк	10^{-6}
дека	да	10	нано	н	10^{-9}
деци	д	10^{-1}			

Масалан, километр — каррали бирлик, $1 \text{ км} = 10^3 \cdot 1 \text{ м} = 1000 \text{ м}$; миллиметр — улушли бирлик, $1 \text{ мм} = 10^{-3} \cdot 1 \text{ м} = 0,0001 \text{ м}$.

Умуман, узунлик учун каррали бирлик километр (км), улушли бирликлар — сантиметр (см), миллиметр, (мм), микрометр (мкм), нанометр (нм); масса учун каррали бирлик мегаграмм (мг), улушли бирликлар — грамм (г), миллиграмм (мг), микрограмм (мкг); вақт учун каррали бирлик килосекунд (кс), улушли бирликлар — миллисекунд (мс), микросекунд (мкс), наносекунд (нс).

Узунлик, масса ва вақт орқали аниқланадиган катталиклар ҳосилавий катталиклар дейилади. Уларнинг бирликлари асосийси билан мос тушиши керак.

Баъзи бир ҳосилавий катталикларни ва уларнинг бирликларини айтиб ўтамиз.

1. Юз. Юзнинг бирликлари — квадрат метр (м^2), квадрат километр (км^2), квадрат дециметр (дм^2), квадрат сантиметр (см^2), квадрат миллиметр (мм^2).

2. Ҳажм, сифим. Ҳажм бирликлари — куб метр (м^3), куб дециметр (дм^3), куб сантиметр (см^3), куб миллиметр (мм^3), литр (л), гектолитр (гл), миллилитр (мл).

СИ да литр куб дециметрнинг ўзига хос бошқача номи сифатида қаралади, яъни $1 \text{ л} = 1 \text{ дм}^3$.

3. Тезлик. Тезлик бирликлари — секундига метр (м/с), соатига километр (км/соат), секундига сантиметр (см/с).

Мамлакатимизда қўлланиладиган катталиклар бирликлари, улар номлари (аталиши), белгиланиши ва қўлланиш қоидалари Давлат стандартни (ГОСТ) томонидан тайинланади. Шунга асосан, бирликларнинг Халқаро системаси қўлланилади, шунингдек, СИ даги бирликлар билан бир қаторда фойдаланишга рухсат этилган системадагидан ташқари бирликлар группаси мавжуд. Хусусан, масса учун тонна (т) бирлигини; вақт учун минут (мин), соат, сутка, ҳафта, ой, йил, аср; юз учун гектар (га); температура учун Цельсий градуси ($^{\circ}\text{С}$) бирликларини ишлатишга рухсат берилган.

Шуни эслатамизки, масса учун центнер, юз учун ар бирликлар ГОСТ га биноан қўлланилмайди.

Диққатни катталикларнинг бирликлари билан боғлиқ бўлган терминларнинг тўғри қўлланилишига қаратиш керак. Бу қои-

даларни ҳам ГОСТ тасдиқлаган. Масалан, «катталик бирлиги» термини ўрнига «катталикни ўлчаш бирлиги» терминини қўлланиш мумкин эмас, чунки «ўлчаш» термини катталик термини орқали аниқланади ва катталик бирлиги терминига «ўлчаш» сузи қўшилса, таърифларда хато тушунчага эга бўлинади. Демак, бундай айтиш ва ёзиш керак: «Метр — узунлик бирлиги», «Грамм — масса бирлиги», «Соат — вақт бирлиги».

Машқлар

1. Тўғри тўртбурчакнинг бўйи 35 см, эни 0,3 м. Тўғри тўртбурчакнинг юзини квадрат дециметрларда топинг.

2. Бир йилда 210 ўқув куни, ҳар бир ўқув кунида 45 минутдан 4 та дарс бор десак, учинчи синфни тугатган ўқувчи ҳаммаси бўлиб неча соат мактабда бўлган?

3. 20 ёшга тўлган киши неча секунд яшаган? Бир йил 365 сутка.

4. 1) $3,2 \text{ м}^2$ ни квадрат дециметрларда; 2) $4,1 \text{ м}^3$ ни куб сантиметрларда; 3) $8,6 \text{ км/с}$ ни соатига километрларда ифодаланг.

5. Агар вертолёт 180 секундда 8730 м учса, унинг тезлиги қандай? Вертолёт 1 соатда неча километр учади?

6. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг битта қирраси 44 см га тенг, иккинчиси учинчисидан 25% узун. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми $22\,000 \text{ см}^3$ га тенг. Ҳар бир ёқнинг юзини топинг.

7. Металл бак ички ўлчамлари $2,5 \times 1,8 \times 1,4 \text{ м}$ бўлган тўғри бурчакли параллелепипед шаклида. Бу бакка неча литр сув сиғади.

8. Ҳовузга $9 \cdot 10^5 \text{ л}$ сув сиғади. Ҳовузнинг сигимини куб метрларда ифодаланг.

9. Дунёда ҳар йили ерни суғориш ва бошқа эҳтнёжлар учун дарёлардан $36\,000 \text{ км}^3$ сув олинади. Бу сув ҳажминини литр билан ифодаланг.

10. Автобус 250 км йўлга 95 л бензин сарфлади. Бир километр йўлга қанча бензин сарфланган? Бу сарфни қандай birlikларда ўлчаш мумкин?

11. Ёруғлик тезлиги $3 \cdot 10^5 \text{ км/с}$. Ёруғлик 5 минутда қандай масофани ўтади?

12. Товуш ҳавода 342 м/с тезликда тарқалади. Агар одам билан овчи орасидаги масофа 2,4 км бўлса, одам ўқ овозини ўқ отилгандан неча секунддан кейин эшитади?

18-§. узунлик, юз, масса, вақт

108. Кесма узунлиги ва уни ўлчаш

Таъриф. Кесма узунлиги деб ҳар бир кесма учун қуйидагича аниқланган мусбат катталикка айтилади:

1) тенг кесмалар тенг узунликка эга;

2) агар кесма чекли сондаги кесмалардан иборат бўлса, унинг узунлиги бу кесмалар узунликларининг йиғиндисига тенг бўлади.

Кесмалар узунликларини ўлчаш жараёнини қараймиз. Кесмалар тупламидан бирорта e кесма танлаб олинади ва у узунлик бирлиги учун қабул қилинади. a кесмада унинг охирларидан бирдан бириккетин e га тенг кесмалар қўйилади. Агар e га тенг кесмалар n марта қўйилган бўлса ва охиргисининг учи a кесма учи билан устма-уст тушган бўлса, a кесма узунлигининг қиймати n натурал сон дейилади ва бундай ёзилади: $a = ne$. Агар e га тенг кесмалар n марта қўйилган бўлиб ва яна e кесмадан кичик кесма ортиб қолган бўлса, бу кесмага $e_1 = \frac{1}{10}e$ га тенг кесмалар қўйилади. Агар улар

роппа-роса n марта қўйилган бўлса, $a = n$, n_1e бўлади ва a кесма узунлигининг қиймати чекли ўнли каср бўлади. Агар e_1 кесма n_1 марта қўйилиб, яна e_1 дан кичик кесма ортиб қолса, унга $e_2 = \frac{1}{100}e$ га тенг кесмалар қўйилади. Агар бу жараёни чексиз марта давом эттирсак, a кесма узунлигининг қиймати чексиз ўнли каср бўлади.

Шундай қилиб, танлаб олинган бирликда ҳар қандай кесманинг узунлиги мусбат ҳақиқий сон билан ифодаланади.

Тескариси ҳам тўғри: агар мусбат ҳақиқий сон $n, n_1, n_2 \dots$ берилган бўлса, унинг тақрибий қийматини маълум аниқликда олиб ва бу сон ёзувидаги яшашларни бажарсак, узунлигининг сон қиймати $n, n_1, n_2 \dots$ каср бўлган кесма ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, биз кесмалар узунликларининг асосий хоссаларидан бирини исботладик.

1. Танлаб олинган узунлик бирлигида ҳар қандай кесманинг узунлиги мусбат ҳақиқий сон билан ифодаланади ва ҳар бир мусбат ҳақиқий сон учун узунлиги шу сон билан ифодаланадиган кесма мавжуд.

Шуни эслатамики, ўлчаш натижасида чексиз ўнли каср ҳосил бўлган ҳолларда, ҳар қанча аниқ бўлиши мумкин бўлсада, бари бир кесма узунлигининг қиймати тақрибий бўлади ва уни оддий каср кўринишида ёзиш мумкин.

Кесмалар узунликларининг маълум бўлган яна қатор хоссаларини исботлаймиз. Бунда узунликлар бир хил узунлик бирлиги билан ўлчанади деб ҳисоблаймиз.

2. Агар иккита кесма тенг бўлса, улар узунликларининг сон қийматлари ҳам тенг бўлади, ва аксинча: агар иккита кесма узунлигининг сон қийматлари тенг бўлса, кесмаларнинг ўзлари ҳам тенг бўлади:

$$a = b \leftrightarrow m_e(a) = m_e(b).$$

Ҳақиқатан, агар кесмалар тенг бўлса, улар узунликларини ўлчашда e га тенг бирлик кесмани ва унинг улушини бир хил сон марта қўямиз, демак, тенг кесмалар узунликларининг қиймати бир хил бўлади.

Аксинча: агар иккита кесма узунликларининг сон қиймат-

лари тенг бўлса, улар тенг кесмаларни яшаш жараёнини тавсифлайди.

3. Агар берилган кесма бир нечта кесманинг йиғиндисига бўлса, унинг узунлигининг сон қиймати бу кесмалар узунликлари сон қийматларининг йиғиндисига тенг бўлади ва, аксинча: агар кесма узунлигининг сон қиймати бир нечта кесма узунликларининг сон қийматлари йиғиндисига тенг бўлса, кесманинг ўзи бу кесмалар йиғиндисига тенг бўлади:

$$c = a + b \leftrightarrow m_e(c) = m_e(a) + m_e(b).$$

a ва b — кесмалар узунликлари, $\frac{p}{n}$ ва $\frac{q}{n}$ — уларнинг сон қийматлари, яъни $a = \frac{p}{n}e$, $b = \frac{q}{n}e$ бўлсин. $a + b$ йиғиндининг қийматини ҳосил қилиш учун $\frac{1}{n}e$ га тенг p та кесма қўямиз, кейин яна шундай кесмалардан q тасини қўямиз. Натнжада берилган кесмалар йиғиндисининг узунлиги $\frac{p}{n} + \frac{q}{n}$ сон билан ифодаланишини топамиз:

$$a + b = p \cdot \frac{1}{n}e + q \cdot \frac{1}{n}e = \frac{p}{n}e + \frac{q}{n}e = \left(\frac{p}{n} + \frac{q}{n}\right)e.$$

Аксинча: $\frac{p}{n} + \frac{q}{n}$ йиғинди $\frac{1}{n}e$ кесмани $p + q$ марта қўйишни билдиради, яъни $(p + q) \frac{1}{n}e = p \cdot \frac{1}{n}e + q \cdot \frac{1}{n}e = \frac{p}{n}e + \frac{q}{n}e = a + b$ кесмани ҳосил қиламиз. Демак, агар кесмалар узунликларининг сон қийматлари қўшилса, уларга мос кесмалар ҳам қўшилар экан.

4. Агар a ва b кесмалар узунликлари $b = xa$ муносабатни қаноатлантирса (бунда x — мусбат ҳақиқий сон ва a кесма e бирликда ўлчанган), b кесма узунлигининг сон қийматини e бирликда топиш учун x сонни e бирликда ўлчанган a кесманинг сон қийматиغا кўпайтириш етарли.

$$b = xa \leftrightarrow m_e(b) = x \cdot m_e(a).$$

$b = xa$ ва $a = \frac{p}{n}e$ бўлсин. У ҳолда $b = x \cdot \frac{p}{n}e = \left(x \cdot \frac{p}{n}\right)e$, яъни $m_e(b) = x \cdot m_e(a)$.

$x \cdot \frac{p}{n}$ кўпайтма e кесмани $x \cdot \frac{p}{n}$ марта қўйиш кераклигини билдиради, яъни $\left(x \cdot \frac{p}{n}\right)e = x \cdot \frac{p}{n}e = xa = b$.

5. Узунлик бирлигини алмаштирганда янги узунлик бирлиги эски узунлик бирлигидан неча марта кичик (катта) бўлса, узунликнинг сон қиймати шунча марта ортади (камаяди).

Иккита узунлик бирлиги e ва e_1 мавжуд бўлсин ва $e_1 = ke$, яъни-янги узунлик бирлиги эскисидан k марта катта бўлсин. Агар a кесма узунлиги e бирликда $\frac{p}{n}$ қийматга эга бўлса, яъни $a = \frac{p}{n}e$ бўлса, шу a кесма узунлигининг e_1 бирликдаги сон қиймат k марта камаяди: $a = \frac{p}{n}e = \frac{p}{n} \cdot \frac{1}{k}e_1 = \frac{p}{nk}e_1$, $\frac{p}{nk}$ сон эса $\frac{p}{n}$ сондан k марта кичик.

Кесмалар узунликларининг исботланган хоссатариidan яна қуйидагилар келиб чиқади:

6. $a > b \Leftrightarrow m_e(a) > m_e(b)$.

7. $c = a - b \Leftrightarrow m_e(c) = m_e(a) - m_e(b)$.

8. $x = a : b \Leftrightarrow x = m_e(a) : m_e(b)$.

Бу хоссалар икки кесмани таққослашни ва улар устида бажариладиган амалларни бу кесмалар узунликларининг мос сон қийматларини таққослашга ва улар устида амаллар бажаришга келтиришга имкон беради. Масалан, $12\text{ м} < 12,3\text{ м}$, чунки $12 < 12,3$; $7,8\text{ см} + 3,2\text{ см} = (7,8 + 3,2)\text{ см} = 11\text{ см}$; $17 \cdot 3\text{ дм} = (17 \cdot 3)\text{ дм} = 51\text{ дм}$.

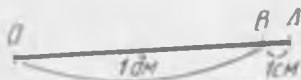
Бошланғич математика курсида кесмалар узунликлари ўлчанади, берилган узунликдаги кесмалар ясалади, кесмалар узунликлари таққосланади, улар устида амаллар бажарилади.

Кесмалар узунликларини таққослашда, узунликларни қўшишда, айиришда ва бошқа амаллар бажаришда мазкур пунктда баён қилинган назарий қонун ошкормас ҳолда қўлланилади.

Масалан, «Бирининг узунлиги 1 дм, иккинчиси ундан 1 см узун бўлган иккита кесма чиз» деган топшириқни бажаришда ўқувчи ҳар қандай мусбат сон учун узунлиги шу сон билан ифодаланадиган кесма мавжудлигидан ошкормас ҳолда фойдаланади. Узунлиги 1 дм бўлган кесмалар чексиз кўп (шунинг учун ҳар бир ўқувчи «ўзининг» кесмасини чизиши мумкин), лекин улар ҳаммаси ўзаро тенг.

Ундан 1 см узун бўлган иккинчи кесмани турлича чизиш мумкин. Масалан, OA нурда аввал узунлиги 1 дм бўлган OB кесмани ажратиб, сўнгра B нуқтадан узунлиги 1 см бўлган BA кесмани ажратиш мумкин (156-расм). Ёки аввал 1 дм + 1 см = 10 см + 1 см = (10 + 1) см = 11 см йиғиндини топиб, кейин узунлиги 11 см бўлган кесмани яшаш мумкин.

«Бирининг узунлиги 6 см, иккинчиси ундан 2 марта узун бўлган иккита кесма чиз. Иккинчи кесма узунлиги нимага тенг?» деган топшириқни бажариш узунликни сонга кўпайтириш билан боғлиқ. Топшириқ турли усулда бажарилиши мумкин.



156- расм



157- расм

I усул. Узунлиги 6 см бўлган кесма ясалади, сўнгра OA нурда узунлиги 6 см бўлган иккита кесма бирин-кетин қўйилади (157-расм). Ҳосил бўлган OA кесма изланаётган кесма бўлади, унинг узунлиги $2 \cdot 6 \text{ см} = 12 \text{ см}$ га тенг.

II усул. Иккинчи кесма узунлиги топилади: $2 \cdot 6 \text{ см} = (2 \cdot 6) \text{ см} = 12 \text{ см}$. Сўнгра бирининг узунлиги 6 см, иккинчисининг узунлиги 12 см бўлган иккита кесма ясалади.

«12 см узунликдаги кесмани тенг иккига бўл» деган топшириқ узунликни натурал сонга бўлишни назарда тутати. Биз бундай амални кўрсатмадик, чунки узунликни натурал сон n га бўлиш уни $\frac{1}{n}$ қасрга кўпайтириш билан бир хил. Шунинг учун 12 см ни иккига бўлиш 12 см ни $\frac{1}{2}$ га кўпайтириш билан бир хил:

$$\frac{1}{2} \cdot 12 \text{ см} = \left(\frac{1}{2} \cdot 12 \right) \text{ см} = (12 : 2) \text{ см}.$$

Умуман, узунликни натурал сонга бўлиш узунлиkning сон қийматини берилган натурал сонга бўлишга келтирилади.

Машқлар

1. A пунктдан B пунктгача 6 км, B пунктдан C пунктгача 8 км эканлиги маълум. A дан C гача бўлган масофа қанча бўлиши мумкин?

2. 1) $AC = 15 \text{ см}$, $AB = 8 \text{ см}$, $BC = 7 \text{ см}$;

2) $AC = 8 \text{ см}$, $AB = 25 \text{ см}$, $BC = 40 \text{ см}$;

3) $AC = 24 \text{ см}$, $AB = 30 \text{ см}$, $BC = 40 \text{ см}$ бўладиган A , B ва C нуқталар мавжудми?

3. Тўғри чизиқда A , B , C ва D нуқталарни шундай белгилангки, A дан B гача масофа 2 см га, B дан C гача 1,5 см га, C дан D гача 1 см га тенг бўлсин. Агар бирлик кесма учун: 1) CD кесма; 2) AB кесма; 3) BC кесма; 4) AD кесма олинса, AB , AD , BC ва CD кесмалар узунликларини топинг.

4. Уйдан мактабгача бўлган масофа 400 м, уйдан вокзалгача 0,9 км. Уйдан вокзалгача бўлган масофа уйдан мактабгача бўлган масофадан неча марта узун?

5. Стол узунлиги аввал сантиметрлар билан, кейин дециметрлар билан ўлчанди. Биринчи ўлчанганда иккинчисига қараганда 108 та сон ортиқ чиқди. Столнинг узунлиги нимага тенг?

6. e_1 узунлик бирлигида ўлчанган кесма узунлигининг сон қиймати 6 га, e_2 узунлик бирлигида ўлчанганда 4 га тенг бўлди. e_1 ва e_2 узунлик бирликлари ўзаро қандай нисбатда?

7. Узунлиги 4,6 e бўлган кесма ясанг. Агар e узунлик бирлиги: 1) 3 марта ортирилса; 2) 1,5 марта камайтирилса, бу кесма узунлигининг сон қиймати нимага тенг бўлади?

8. Бошланғич синф ўқувчилари қуйидаги масалаларни ечишда узунликлар устида қандай амаллар бажарадилар:

1) Томони 5 см бўлган квадрат чиз. Бу квадрат томонлари узунликларининг йиғиндисини топ.

2) Квадрат ҳамма томонлари узунликларининг йиғиндисини 28 см. Бу квадрат томонининг узунлиги нимага тенг?

3) Болалар чойшабига 2 м полотно, кўрпа гилофига икки марта ортиқ полотно кетади. Битта чойшаб ва битта кўрпа гилофидан иборат 8 та комплектга неча метр полотно кетади?

4) Бир бўлакда 24 м, иккинчисидан ундан 8 м кам газмол бор. Бу газмолларнинг ҳаммасидан ҳар бирига 4 м дан сарфлаб бир нечта қўйлак тикилди. Нечта қўйлак тикилган?

5) Саёҳатчи уч кунда 3220 км йўл юрди. У биринчи кун ҳамма йўлнинг тўртдан бир қисмини, иккинчи кун 1920 км, учинчи кун қолган йўлни ўтди. Саёҳатчи учинчи кун неча километр йўл юрган?

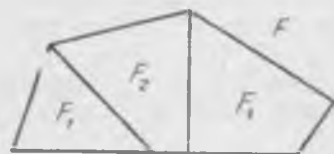
6) 6 см узунликдаги кесма бир неча марта орттирилди ва 18 см узунликдаги кесма ҳосил бўлди. Кесма неча марта орттирилган?

109. Фигуранинг юзи ва уни ўлчаш

Ҳар бир киши фигуранинг юзи ҳақида тушунчага эга: биз хонанинг юзи, ер участкасининг юзи, бўяш керак бўлган сирт юзи ва бошқалар ҳақида гапиримиз. Бунда биз агар ер участкалари бир хил бўлса, уларнинг юзлари тенглигини; катта участканинг юзи катта бўлишини; уйнинг юзи ундаги хоналар юзларининг йиғиндисига тенглигини биламиз.

Юз ҳақидаги одатдаги бундай тасаввур геометрияда фигуранинг юзи ҳақида гапирилганда уни таърифлашда қўлланилади. Аммо геометрик фигуралар турлича тузилган, шунинг учун юз ҳақида гапирилганда фигуралар алоҳида синфлари фарқ қилинади. Масалан, кўпбурчак ва чегараланган қавариқ фигуралар юзи ёки доира юзи, ёки айланиш жисмларининг сиртлари юзи қаралади. Биз фақат кўпбурчак ва чегараланган ясси қавариқ фигуралар юзлари ҳақида гапиримиз. Бундай фигура бошқа фигуралардан тузилган бўлиши мумкин. Масалан, 158-расмда тасвирланган F фигура F_1 , F_2 ва F_3 фигуралардан тузилган. Фигура F_1 , F_2 , ..., F_n фигуралардан тузилган (иборат) дейилганда, бу фигура F_1 , F_2 , ..., F_n фигураларнинг бирлашмасидан иборатлиги ва берилган ҳар қандай иккита фигура умумий ички нуқтага эга эмаслиги кўзда тутилади.

Таъриф. Фигуранинг юзи деб ҳар бир фигура учун қуйидагича аниқланган номанфий катталиikka айтилади:



158-расм



159-расм

1) тенг фигуралар тенг юзларга эга;

2) агар фигура чекли сондаги фигуралардан тузилган бўлса, унинг юзи бу фигуралар юзларининг йиғиндисига тенг бўлади.

Агар бу таърифни кесма узунлигининг таърифи билан таққосласак, юз ҳам узунлик тавсифланган хоссалар билан тавсифланганини, бироқ улар турли тўпламларда: узунлик — кесмалар тўпламида, юз — ясси фигуралар тўпламида берилганини кўрамиз.

F фигуранинг юзини $S(F)$ билан белгилашни шартлашнинг олами.

Фигуранинг юзини ўлчаш учун юз бирлигига эга бўлиш керак. Одатда юз бирлиги учун томони бирлик кесма e га, яъни узунлик бирлиги учун танлаб олинган кесмага тенг бўлган квадрат юзи олинади. Томони e бўлган квадратнинг юзи e^2 билан белгиланади. Масалан, бирлик квадрат томонининг узунлиги m бўлса, унинг юзи m^2 бўлади.

Юзни ўлчаш берилган фигура юзини бирлик квадрат юзи e^2 билан таққослашдан иборат. Бу таққослашнинг натижаси $S(F) = xe^2$ ни қаноатлантирувчи x сондан иборат. x сон танлаб олинган бирликда юзнинг сон қиймати дейилади.

Масалан, агар юз бирлиги см^2 бўлса, у ҳолда 159-расмда келтирилган фигуранинг юзи 5 см^2 га тенг бўлади.

Фигураларнинг юзларини ўлчашнинг баъзи бир усулларини қараб чиқамиз.

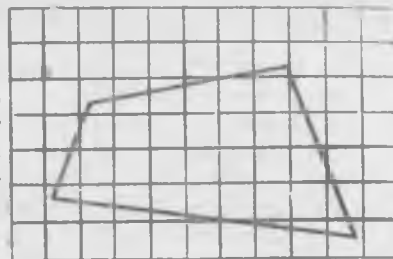
Бевосита юзни аниқлайдиган усуллардан бири юзни палетка ёрдамида ўлчашдир (палетка — шаффоф материалга чизилган квадратлар тўри).

Юзни ўлчанаётган F фигура устига томони e бўлган квадратлар тўри қўйилган бўлсин (160-расм). У ҳолда бу фигурага нисбатан квадратларнинг икки турини кўрсатиш мумкин:

1) бутунлай F фигура ичида ётадиган квадратлар;
2) бир қисми F фигура ичида, бир қисми унинг ташқарисида ётадиган ва фигура контури ўтадиган квадратлар.

Биринчи тур квадратлар m та, иккинчи тур квадратлар n та бўлсин. У ҳолда, равшанки, F фигуранинг юзи $me^2 < S(F) < (m+n)e^2$ шартни қаноатлантиради. m ва $m+n$ сонлар ўлчанаётган юзнинг тақрибий сон қийматлари бўлади: m — ками билан олинган, $m+n$ — орттиги билан олинган тақрибий қиймати.

Кўриб турибмизки, бундай палетка ёрдамида F фигуранинг юзини катта аниқликда ўлчай олмас эканмиз. Аниқроқ натижа олиш учун палетка квадратларини майдароқ қилиш керак, бунинг учун дастлабки квадратларни майдароқ квадратларга бўлиш керак. Маса-



160-расм

лан, томонн $e_1 = \frac{1}{10} e$ бўлган квадратлар тўрини ясаш мумкин. На-
тижада F фигура юзининг каттароқ аниқликдаги бошқа тақрибий
қийматини ҳосил қиламиз.

Бу жараёни давом эттириш мумкин. Савол туғилади: ўл-
чашнинг ками билан олинган ҳар қандай тақрибий қийматидан
катта ва ортиғи билан олинган ҳар қандай тақрибий қиймати-
дан кичик бўлган ҳамда ўлчанаётган юзнинг аниқ сон қийма-
ти бўла оладиган ҳақиқий сон мавжудми? Математикада юзнинг
танлаб олинган бирлигида ҳар қандай юз учун бундай соннинг
мавжудлиги ва унинг ягоналиги, юз таърифида кўрсатилган 1
ва 2 хоссаларни қаноатлантириши исботланган.

Палетка ёрдамида фигураларнинг юзини ўлчаш усули қўл-
ланишда чегараланган, у узундан-узоқ ишдир, шунинг учун
унча катта бўлмаган фигураларнинг юзигина палетка ёрдамида
топилади. Шу сабабли математикада палетканинг пайдо бўли-
ши билан бирга фигурага тегишли бўлган томонлар, баланд-
ликлар ва бошқа кесмаларни ўлчаш билан юзни топишнинг
бошқа воентали йўллари қидирила бошланди. Масалан, тўғри
тўртбурчак юзининг сон қийматини топиш учун унинг томон-
лари узунликларининг сон қийматлари кўпайтирилади.

Бу юз таърифи ва уни ўлчаш моҳиятидан юзларни таққос-
лашнинг ва улар устида амаллар бажаришнинг маълум қои-
далари келиб чиқади. Улардан баъзиларини кўриб чиқа-
миз.

**1. Агар фигуралар тенг бўлса, у ҳолда улар юзлари-
нинг сон қийматлари тенг бўлади (бир хил юз бирли-
гида).**

Юзлари тенг бўлган фигуралар тенг юзли (тенгдош) фигу-
ралар дейлади. Масалан 161-расмдаги тўғри тўртбурчак ва
учбурчак тенг юзли фигуралардир.

**2. Агар F фигура $F_1, F_2, \dots, F_n$ фигуралардан тузил-
ган бўлса, F фигура юзининг сон қиймати $F_1, F_2, \dots, F_n$
фигуралар юзлари сон қийматлари йиғиндисига тенг
бўлади (бир хил юз бирлигида).**

Масалан, 162-расмда тасвирланган F фигуранинг юзини топайлик.



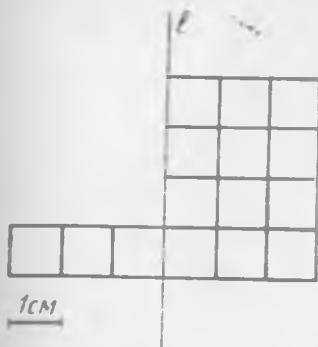
$$S(F_1) = 8 \text{ см}^2$$

$$S(F_2) = 8 \text{ см}^2$$

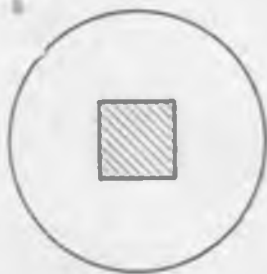
161- расм

Бу фигурани иккита F_1 ва F_2 тўғри
тўртбурчакдан тузилган деб қараш
мумкин (1 тўғри чизиқ F фигурани
бундай шаклларга ажратган). У
ҳолда $S(F) = S(F_1) + S(F_2) = 3 \text{ см} \times$
 $\times 1 \text{ см} + 3 \text{ см} \cdot 4 \text{ см} = 3 \text{ см}^2 + 12 \text{ см}^2 =$
 $= (3 + 12) \text{ см}^2 = 15 \text{ см}^2.$

**3. Юз бирлигини алмаш-
тирганда янги бирлик эски
бирликдан қанча кичик (кат-
та) бўлса, юзнинг сон қий-
мати шунча марта ортади
(камаяди).**



162- расм



163- расм

Масалан, 5 см^2 ни квадрат дециметрларда ифодалайлик. Маълумки, $1 \text{ см}^2 = 0,01 \text{ дм}^2$ ва демак, $5 \text{ см}^2 = 5 \cdot 1 \text{ см}^2 = 5 \cdot (0,01 \text{ дм}^2) = (5 \cdot 0,01) \text{ дм}^2 = 0,05 \text{ дм}^2$.

Бошланғич синфларда ўқувчилар фигураларнинг юзларини ҳақидаги дастлабки тушунчалар билан танишадилар. Фигуранинг юзи ҳақидаги тасаввур фигураларни таққослаш асосида вужудга келади: квадрат доира ичида ётгани учун (163- расм) унинг юзи доиранинг юзидан кичик, доиранинг юзи квадратнинг юзидан катта.

Ўқувчилар фигуралар юзларини палетка ёрдамида ўлчаш билан танишадилар (палетка — томони 1 см бўлган квадратлар тури). Ўқувчилар палеткани фигура устига қўйиб:

- 1) фигура ичида бутунлай ётадиган квадратлар сонини;
- 2) фигура контури ўтадиган квадратлар сонини аниқлайдилар.

Агар биринчи квадратлар 26 та, иккинчи квадратлар 18 та бўлса фигура контури ўтадиган квадратлар сони, яъни 18 сони 2 га бўлинади ва фигура ичида бутунлай ётадиган квадратлар сонига қўшилади. Натижада берилган фигура юзининг сон қиймати ҳосил бўлади: $26 + 18 : 2 \approx 26 + 9 = 35$. Демак, $S(F) = 35 \text{ см}^2$.

Нима учун ҳисоблаш шундай амалга оширилади?

mF фигура ичида бутунлай ётган квадратлар сони, nF фигура контури ўтадиган квадратлар сони бўлсин. У ҳолда $me^2 < S(F) < (m+n)e^2$.

F фигура юзининг тақрибий қийматини топиш учун юзнинг ками ва ортиғи билан олинган сон қийматларини қўшиш ва бу йиғиндини тенг 2 га бўлиш етарли: $S(F) \approx \frac{m + (m+n)}{2} e^2$. Шакл алмаш-

тиришлардан кейин топамиз: $S(F) \approx \frac{m + (m+n)}{2} e^2 = \frac{2m+n}{2} e^2 = (m + \frac{n}{2}) e^2$.

Охирги ифода F фигура юзининг тақрибий қиймати F фигуранинг ичида бутунлай ётадиган квадратлар сони билан шу фигура контури ўтадиган квадратлар сони ярмининг йиғиндисига тенглигини бил-

диради. Биз мактабда ўрганиладиган фигура юзининг тақрибий қий-
матини палетка ёрдамида топиш қондасига келдик.

Бошланғич синф ўқувчилари тўғри тўртбурчак юзининг сон
қийматини дастлаб бу тўғри тўртбурчак ичида ётадиган бирлик
квадратлар сонини санаш билан ёки палетка ёрдамида бево-
сита топадилар, кейин воситали усул билан тўғри тўртбурчак
томонлари узунликларининг сон қийматларини кўпайтириш би-
лан топадилар.

Машқлар

1. Агар F_1 фигура F_2 фигура ичида ётса, $S(F_1) \leq S(F_2)$ бўлиши-
ни исботланг. Исботлашда таърифда фойдаланган фигура юзининг
хоссаларидан фойдаланинг.

2. 164-расмда $F=F_1$, $P=P_1$ ва $S(F)=3 \text{ см}^2$, $S(P)=2 \text{ см}^2$. Юз
хоссасидан фойдаланиб, $S(H)=5 \text{ см}^2$ ни исботланг.

3. F фигуранинг юзи F_1 ва F_2 фигуралар юзларининг йиғиндисига
тенг. Бу, F фигура F_1 ва F_2 фигуралардан тузилган дегани
эмасми?

4. Иккита учбурчакнинг юзлари тенг. Бундан уларнинг тенгли-
ги келиб чиқадими?

5. F_1 фигуранинг юзи F_2 фигуранинг юзидан катта. Бундан F_2
фигура бутунлай F_1 фигура ичида ётиши келиб чиқадими?

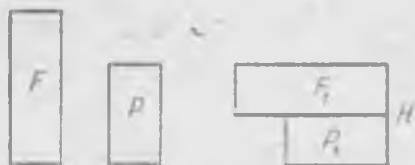
6. F фигурага палетка қўйилди ва F фигура ичида 28 та бир-
лик квадратлардан тузилган фигура ётиши, F фигуранинг ўзи 35 та
бирлик квадратдан тузилган фигура ичида ётиши ҳисобланди. Бе-
рилган F фигуранинг сон қиймати 27, 3 га тенг бўлиши мумкинми?
29, 6 га-чи? 32, 8 га-чи? 35, 4 га-чи?

7. Палетка квадратлари томонларининг узунликларини: 1) 1 см;
2) 0,5 см деб олиб, палетка қўйилган фигуралар юзларини топинг
(165-расм).

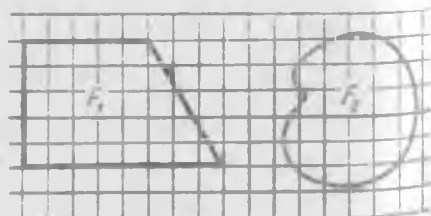
8. Миллиметрли қоғозга радиуси 3 см бўлган доира чизинг ва
квадратлар томонларининг узунликларини: 1) 1 см; 2) 0,5 см; 3) 0,1 см
деб олиб, бу доира юзини қўш тенгсизлик ёрдамида баҳоланг. $\pi =$
 $=3,14$ деб олиб, $S=\pi r^2$ формула бўйича бу доира юзини топинг.

9. Қуйидаги фикрлар ичидан чин бўлганларини кўрсатинг:

1) Битта фигура юзининг сон қийматлари турлича бўлиши мум-
кин.



164-расм



165-расм

2) Тенг бўлмаган фигуралар юзларининг сон қийматлари тенг бўлиши мумкин.

3) Тенг юзли фигуралар тенг.

10. Бир квадрат дециметрда 100 квадрат сантиметр бор эканини исботланг.

11. $S(F) = 34,78 \text{ см}^2$ экани маълум. Агар квадрат дециметрларда ҳисобласак, унинг юзининг сон қиймати қандай бўлади?

12. Ошхонанинг юзи 9 м^2 . Ошхона полига ётқизиш учун томони 3 дм бўлган квадрат шаклидаги линолеум плиткалардан нечта керак бўлади?

13. Тўғри тўртбурчакнинг юзи 12 см^2 га тенг, унинг томонлари узунликлари натурал сонлар билан ифодаланган. Бу шарт бўйича нечта турли тўғри тўртбурчак ясаш мумкин?

14. Тўғри тўртбурчакнинг тенг бўлмаган иккита томони узунликлари иррационал сон билан ифодаланади. Бундан бу тўғри тўртбурчак юзининг сон қиймати ҳам иррационал сон бўлиши келиб чиқадими?

15. Томонларининг узунликлари иррационал сон билан ифодаланадиган тўғри тўртбурчак томонларининг узунликлари рационал сон билан ифодаланадиган тўғри тўртбурчакка тенгдош (тенг юзли) бўлиши мумкинми?

16. Агар тўғри тўртбурчакнинг асоси 2 марта орттирилиб, баландлиги 2 марта камайтирилса, тўғри тўртбурчакнинг юзи ўзгармаслигини исботланг.

Агар тўғри тўртбурчакнинг асоси 20% орттирилиб, баландлиги 20% камайтирилса, юқоридаги хулоса тўғри бўладими?

17. Қуйида келтирилган масалаларни ечинг ва бунда юзлар устида қандай амаллар бажарилганини тушунтиринг:

1) Тўғри тўртбурчакнинг юзи квадратнинг юзидан 3 марта катта. Тўғри тўртбурчакнинг бўйи 96 см. Агар квадратнинг томони 48 см бўлса, тўғри тўртбурчакнинг эни нимага тенг?

2) Тўғри тўртбурчак шаклидаги иккита ер участкасининг умумий юзи (майдони) $7,4 \text{ га}$ га тенг. Биринчи участканинг узунлиги 250 м, иккинчисининг узунлиги 150 м. Агар биринчи участканинг эни иккинчи участканинг энидан 40 м ортиқ бўлса, ҳар бир участканинг юзини топинг.

3) Агар тўғри тўртбурчакнинг бўйи 2 дм орттирилиб, эни 5 дм камайтирилса, юзи тўғри тўртбурчакнинг юзидан 50 дм^2 кам бўлган квадрат ҳосил бўлади. Квадратнинг юзини аниқланг.

4) Хона битта деворининг юзи 14 м^2 90 дм^2 га тенг, қўшни деворнинг юзи 9 м^2 80 дм^2 га тенг. Хонада юзи 3 м^2 50 дм^2 бўлган дераза ва юзи 2 м^2 20 дм^2 бўлган эшик бор. Ундан ташқари деворнинг ўндан бир қисмига гул қоғоз ёпиштирилмайди. Гулқоғозлар қанча ерга ёпиштирилади?

Масса — асосий физик катталиклардан биридир. Жисмнинг массаси тушунчаси оғирлик — куч тушунчаси билан чамбарчас боғланган. Бу куч билан жисм Ерга тортилади. Шунинг учун жисмнинг оғирлиги жисмнинг ўзигагина боғлиқ эмас. Масалан, у турли кенгликларда турлича: қутбада жисм экватордагига қараганда 0,5% оғир. Бироқ ўзининг бундай ўзгарувчанлигига қарамай у қуйидаги хусусиятга эга: ҳар қандай шаронзда ҳам икки жисм оғирлигининг нисбати бир хилдир. Жисмнинг оғирлигини бошқа жисм оғирлиги билан таққослаб ўлчашда жисмнинг янги хоссаси келиб чиқади, бу хосса масса деб аталади.

Фараз қилайлик, рычагли тарозининг бир палласига бирорта a жисм, иккинчи палласига b жисм қўйилган бўлсин. Бунда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1) тарозининг иккинчи палласи тушиб, биринчиси шундай кўтариладикки, улар баравар бўлиб қоладилар, бу ҳолда тарозилар мувозанатда, a ва b жисмлар бир хил массага эга дейилади;

2) тарозининг иккинчи палласи биринчи палласидан баландлигича қолди; бу ҳолда a жисмнинг массаси b жисмнинг массасидан катта дейилади;

3) тарозининг иккинчи палласи тушди, биринчи палласи кўтарилди ва иккинчисидан баланд бўлди; бу ҳолда a жисмнинг массаси b жисмнинг массасидан кичик дейилади.

Шуни эслатамизки, агар жисм экваторда рычагли тарозидида ўлчанса, кейин жисм ва тарози тошлари қутбга олиб бориб, ўлчанса, ўша натижани беради, чунки жисм ҳам, тарози тошлари ҳам ўз оғирликларини бир хил ўзгартиради. Шундай қилиб, жисмнинг массаси ўзгармайди, у қаерда бўлмасин, унинг массаси доим бир хил бўлади.

Математик нуқтаи назардан масса — қуйидаги хоссаларга эга бўлган мусбат катталик:

1) тарозидида бир-бирини мувозанатловчи жисмларнинг массаси бир хил;

2) жисмлар бир-бирлари билан бирлаштирилса, массалар қўшилади: биргаликда олинган бир нечта жисмнинг массаси улар массаларининг йиғиндисига тенг.

Агар массага берилган таърифни узунлик ва юз учун берилган таърифлар билан солиштирсак, масса узунлик ва юз эга бўлган хоссаларга эга бўлишини, бироқ у физик жисмлар тўпламида берилганини кўраимиз.

Массалар тарозилар ёрдамида бундай ўлчанади: массаси бирлик сифатида қабул қилинадиган e жисм танлаб олинади. Бу массанинг улушларини ҳам олиш мумкин деб фараз қилинади. Масалан, агар масса бирлиги учун килограмм олинса, у ҳолда ўлчаш жараёнида унинг улушидан, масалан, грамдан фойдаланиш мумкин: $1 \text{ г} = \frac{1}{1000} \text{ кг}$.

Тарозининг бир палласига массаси ўлчанаётган жисм қўйилади, иккинчи палласига масса бирлиги қилиб олинган жисмлар, яъни тарози тошлари қўйилади. Бу тошлар тарози паллалари мувозанатга келгунча қўйилади. Ўлчаш натижасида берилган жисмнинг массанинг қабул қилинган бирлигидаги сон қиймати ҳосил қилинади. Масалан, агар жисмнинг массаси 5 кг 350 г бўлса, 5350 сонини берилган жисм массасининг тақрибий қиймати деб қараш керак (масса бирлиги — грамм бўлганда).

Ўзунлик учун ифодаланган ҳамма даъволар массанинг сон қийматлари учун ҳам ўринли, яъни массаларни таққослаш, улар устида амаллар бажариш массаларнинг сон қийматларини таққослашга ва улар устида амаллар бажаришга келтирилади (массанинг бир хил бирлигида).

Массанинг асосий бирлиги — килограмм. Бу асосий birlikдан массанинг бошқа birlikлари: грамм, тонна ва бошқалар ҳосил бўлади.

Машқлар

1. 1) 3 кг 720 г ни килограммларда; 2) 21 кг 530 г ни граммларда ифодаланг.

2. Ернинг массаси $5,976 \cdot 10^{24}$ кг га тенг. Бу массани тонналарда ифодаланг.

3. Массаларни таққосланг:

1) $2\frac{1}{7}$ кг ва 2 кг 140 г; 2) 750 г ва $\frac{5}{8}$ кг.

4. Массаларни қўшинг:

1) $17\frac{2}{5}$ кг + 2 кг 600 г; 2) 630 г + $1\frac{1}{2}$ кг.

5. Тарозининг бир палласига бир бўлак совун, иккинчи палласига шундай бўлакнинг $\frac{3}{4}$ қисмини ва яна 50 г қўйилди. Тарози мувозанатда бўлди. Совун бўлагининг массаси қанча?

6. 9 кг гуруч ва 200 г ли ҳамда 50 г ли тошлар бор. Қандай қилиб уч марта тортишда 2 кг гуручни олиш мумкин?

7. Қўйидаги масалаларни арифметик усулда ечинг ва уларни ечишда массалар устида қандай амаллар бажарилганини тушунтиринг:

1) Босмахонага 12 т қоғоз келтирилди. Биринчи кун 3 т, иккинчи кун қолганининг учдан бир қисми ишлатилди. Икки кунда қанча қоғоз ишлатилган?

2) 6 кг 500 г бўёқ сотиб олинди. Деразаларни бўяш учун бутун бўёқнинг бешдан бир қисми, хонани бўяш учун ундан икки марта кўп, ошхонани бўяш учун хонани бўяшга кетгандан 800 г кам бўёқ кетди. Қанча бўёқ ортиб қолди?

8. Алгебраик усулда ечинг:

1) Синф уч кунда 150 кг макулатура тўплади. Биринчи кун иккинчи кундагидан 10 кг ортиқ, учинчи кун биринчи кун тўплан-

гагининг $\frac{2}{3}$ қисмича макулатура тўпланди. Ҳар қайси кунда қап-чадан макулатура тўпланган?

2) Уч кунда 1400 кг картошка сотилди. Биринчи кун иккинчи кундагидан 100 кг кам, учинчи кун биринчи кундагининг $\frac{3}{5}$ қисмича картошка сотилди. Ҳар қайси кун қапчадан картошка сотилган?

111. Вақт оралиқлари ва уларни ўлчаш

Вақт тушунчаси узунлик ва масса тушунчаларига нисбатан анча мураккабдир. Кундалик ҳаётда вақт бир воқеани иккинчи воқеадан ажратиб туради. Математика ва физикада вақт скаляр катталики (миқдор) сифатида қаралади, чунки вақт оралиқлари узунлик, юз, массалар хоссаларига ўхшаш хоссаларга эга.

Вақт оралиқларини таққослаш мумкин. Масалан, бир хил йўлга пиёда велосипедчига қараганда кўпроқ вақт сарфлайди.

Вақт оралиқларини қўшиш мумкин. Масалан, институтда битта лекция ўқиш учун кетган вақт мактабдаги икки дарсга кетган вақтга тенг.

Вақт оралиқларини айириш, мусбат ҳақиқий сонга кўпайтириш мумкин.

Вақт оралиқлари ўлчанади. Аммо вақтни ўлчаш жараёни узунликни ўлчашдан фарқ қилади. Узунликни ўлчаш учун чизгични бир нуқтадан иккинчи нуқтага суриш билан ундан бир неча марта фойдаланиш мумкин. Бирлик сифатида қабул қилинган вақт оралиғидан бир мартагина фойдаланиш мумкин. Шунинг учун вақт бирлиги мунтазам равишда такрорланувчи жараён бўлиши керак. Халқаро системада бундай бирлик қилиб секунд олинган. Секунд билан бир қаторда вақтнинг бошқа бирликлари: минут, соат, сутка, йил, ҳафта, ой, аср ишлатилади. Йил ва сутка бирликлари табнатдан олинган, соат, минут, секунд бирликларини кишилар ўйлаб топган. Йил—Ернинг Қуёш атрофида айланиш вақти. Сутка Ернинг ўз ўқи атрофида айланиш вақти. Йил тахминан $365 \frac{1}{4}$ суткага тенг. Лекин, кишиларнинг бир йилги ҳаёти суткаларнинг бутун сонларидан тузилган. Шунинг учун ҳар йилга 6 соатдан қўшиш ўрнига ҳар туртинчи йилга бутун сутка қўшилади. Бу йил 366 кундан иборат бўлиб, кабиса йили дейилади.

Бизнинг эрамызгача 46 йилда Рим императори Юлий Цезарь ўша пайтда жуда чалкашиб кетган календарни тартибга солиш мақсадида йиллар шундай навбат билан келадиган календарни киритди. Шунинг учун бу янги календарь юлиан календари дейилади. Шу календарга асосан янги йил 1 январдан бошланади ва 12 ойдан иборат. Бу календарда вавилонлик астрономлар яратган вақт ўлчовларидан ҳафта ҳам сақланиб қолган.

Ой вақтнинг унча аниқ бўлмаган бирлигидир, у 31 кундан, 30 кундан ва 28 кундан (кабиса йили 29 кундан) иборат. Аммо бу бирлик қадим замонлардан бери мавжуд ва у ойнинг Ер атрофида айланиши билан боғлиқ. Ой тахминан 29,5 суткада Ерни тўла бир марта айланиб чиқади ва бир йилда тахминан 12 марта айланади. Мана шу маълумотлар қадимги календарни тузишга асос бўлди, кўп аср давомида мукаммаллаштириш натижасида бу — ҳозирги календарь вужудга келди.

Юлиан календарига қайтайлик. Христиан черкови томонидан қабул қилинган бу календарь барча Европа халқлари орасида тарқалди ва ундан 16 асрдан кўпроқ вақт фойдаланилди.

Бироқ кишилар аста-секин календарь бўйича ўлчашлар натижаси Қуёш бўйича ўлчаш натижаси билан бир хил эмаслигини тушуна бошладилар. Масалан, 21 март — баҳорги тенг кунлик XVI асрда календарь бўйича 11 мартга тўғри келди. 10 кунлик фарқ қаердан келиб чиқди? Юлиан календарини бўйича бир йил Қуёш календарига қараганда 11 минут 14 секунд ортиқча. Шунинг учун 400 йил ичида 3 суткадан ортиқ вақт йиғилб қолди. Кейинчалик бу фарқ келиб чиқмаслиги учун 1582 йилда католик черков папаси Григорий XIII номи билан аталган григориан календаридида кабиса йиллари сони камайтирилди. Юлиан календарини бўйича сони 4 га бўлинадиган ҳамма йиллар кабиса йили эди. Григориан календаридида эса булар ичидан «асрий» 400 га бўлинмайдиганлари кабиса йилидан олиб ташланди: масалан, 1600 йил — кабиса, 1700, 1800 ва 1900 йиллар кабиса эмас, улар 365 суткадан иборат. Келгусига қараб, 2000 йил — кабиса йили, 2100, 2200, 2300 кабиса йили эмас деймиз.

Бу календарь Европа мамлакатларида қабул қилинган эди. Россияда Улуғ Октябрь социалистик революциясигача православие черкови бу реформадан воз кечган эди. Бу ерда юлиан календарини бўйича яшар эдилар, бу эса анча ноқулайликлар келтириб чиқарарди. Масалан, Россияга юборилган телеграмма юборилганидан 13 кун олдин келар эди. Рус олимлари чор ҳукуматига эски календарини ўзгартириш тўғрисида бир неча бор гапирган эдилар, лекин фақат Совет ҳукуматининг декретига мувофиқ 1918 йил 14 февралдан бошлаб янгича календарь киритилди. Бу декретга мувофиқ 1918 йил февраль ойн 13 кунга қисқартирилган эди. 31 январдан кейин бирданига 14 февраль бошланди. Шу йилдан бери янги календарь бўйича яшаймиз.

Шуни эслатамизки, агар юлиан календарини бўйича йил Қуёш йилидан $11\frac{1}{4}$ минут узун бўлса, григориан календарини бўйича фақат 26 секунд узун. Ортиқча бир кун бизнинг эраимизнинг 50-асридагина келиб чиқади.

Григориан календарини дунёнинг ҳамма мамлакатлари ҳам қабул қилмаган. Масалан, Миср ва Шарқнинг бошқа мамлакатлари бошқа календарь — ой календаридан фойдаланадилар. Бу календарь бўйича бир йил 12 ойга тенг ва Қуёш календарини

дан 11 кун қисқа. Ундан ташқари, агар григориан календари бўйича 1986 йил бўлса, масалан Эронда 1406 йил. Нима учун?

Ҳисоб олиб бориш учун санок боши керак. Вақтнинг боши ҳам охири ҳам йўқ. У тўхтамасдан ўтиб кетаверади. Шу сабабли ҳисобни билиш учун санок бошини ўрнатиш керак. Сутка бошини, йил бошини турлича ўрнатиш мумкин. Масалан, қадимги мисрликлар йил ҳисобини фараонларнинг давлатни бошқариш йиллари бўйича, хитойликлар императорнинг подшолик қилган йиллари ва императорлар династияси бўйича, римликлар Рим шаҳрига асос солинганидан ва бирор императорнинг подшолигининг биринчи йилидан, бошқа халқлар афсонавий «дунёнинг яратилши» йилидан ҳисоблаганлар.

Қадимги Русда йил баҳордан, март ойидан, яъни дала ишларига тушиш билан бошланган. Кейин христиан динининг киритилиши билан юлиан календари қабул қилиниб, йил ҳисоби «дунёнинг яратилиши» билан бошланган ва йил боши қилиб 1 сентябрь ҳисобланган. Бундай йил ҳисоби Россияда XVIII асргача олиб борилган. Петр I нинг қарори билан Рус давлати бошқа йил ҳисобига ўтди: йил боши 1 январь бўлди. Шу муносабат билан қарор қабул қилинган 7208 йил 1700 йил бўлди. Бу йил ҳисобини ҳозирги вақтда кўпгина давлатлар қабул қилган ва у бизнинг эра деб аталади.

Сутканинг ҳозиргидек 24 соатга бўлиниши ҳам қадимги даврдан келиб чиққан, у Қадимги Мисрда киритилган эди. Минут ва секунд Қадимги Вавилонда келиб чиққан, 1 соат 60 минутлигига, 1 минут 60 секундлигига эса вавилонлик олимлар яратган олтмишли санок системасининг таъсири бор деб фараз қилинади.

Машқлар

1. Ой Ер атрофини тўла бир марта 29 сутка 12 соат 44 минут 3 секундда айланиб ўтади. Бу вақт оралигини секундларда ифодаланг.

2. Уйнинг қурилиши 12 мартда бошланган бўлиб, ўша йилнинг 7 декабрида тугатилди. Уй неча кунда қурилган?

3. Атоқли грек математиги Архимед бизнинг эрамызгача 212 йилда вафот этган. Архимед ўлганидан бери неча аср ва неча йил ўтган?

4. 1956 йилда юлиан календари (эски стиль) нинг киритилганига 2000 йил ва григориан календари (янги стиль) нинг киритилганига 374 йил бўлди. Эски стиль қайси йил ва янги стиль қайси йил киритилган?

5. Амалларни бажаринг:

1) 5 йил 7 ой 8 кун билан 3 йил 2 ой 4 кунни қўшинг;

2) 5 соат 36 секунддан 45 минут 40 секундни айиринг;

3) 7 соат 48 минут 56 секундни 18 га кўпайтиринг;

4) 9 ҳафта 21 соат 52 минутни 1 ҳафта 23 соат 44 минутга бўлинг.

6. Арифметик ва алгебраик усуллар билан ечинг:

1) Машинистка қўлёзмани 8 кунда босиб тугатиши керак эди. Бироқ у ишни 6 кунда тугатди, чунки ҳар куни мўлжалдагидан 6 бет ортиқ босди. Қўлёзма неча бетли?

2) Велосипедчи совхоздан устахонагача 12 км/соат тезликда борди, қайтишда эса 15 км/соат тезликда қайтди. Шунинг учун қайтишга боришдагидан 18 минут кам вақт сарфлади. Совхоздан устахонагача неча километр?

112. Катталиклар орасидаги боғланишлар

Турли сонли қийматлар қабул қилувчи катталиклар тушунчаси бизни ўраб турган борлиқнинг ўзгарувчанлигининг аксидир. Аммо реал дунёдаги мумкин бўлган ҳамма ўзгаришлар бир-бирига боғлиқдир. Бу боғланишларни катталиклар орасидаги боғланишларни ўрганиш ёрдамида ўрганиш амалий масалаларни ечиш учун математикани қўлланиш усули, билимларни математикалаштириш усули бўлади.

Катталиклар орасидаги боғланишлар турличадир. Уларни турли фан ўрганади. Биз асосан ўқувчилар бошланғич математика курсида учрашадиган боғланишлар ҳақида гапирамиз.

Тўғри чизиқли текис ҳаракат билан боғлиқ бўлган катталикларни қараймиз: вақт, тезлик ва масофа. Ҳисмининг тўғри чизиқли текис ҳаракати натижасида ўтган йўли (s) билан вақт (t) ва тезлик (v) орасидаги боғланиш $s = v \cdot t$ формула билан ифодаланиши мумкин.

Агар ҳаракатда тезлик бир хил қийматлар қабул қилса, у ҳолда ўтилган масофанинг вақтга боғлиқлиги тўғри пропорционал бўлади, чунки у $y = kx$ кўринишдаги формула билан ифодаланади. Бу ерда x ўзгарувчи — ҳаракат вақти, y ўзгарувчи — ўтилган масофа, k коэффициент — ҳаракат тезлиги. Вақт билан ўтилган масофа орасидаги тўғри пропорционал боғланиш қуйидаги хоссага эга: ҳаракат вақти неча марта ортса (камайса), ўтилган масофа шунча марта ортади (камаяди).

Тўғри чизиқли текис ҳаракатдаги масофанинг вақтга боғлиқлиги (ўзгармас тезликда) чизиқли бўлиши мумкин, яъни $y = kx + b$ формула билан ифодаланиши мумкин, бунда k ва b — бирор берилган сонлар.

Мисол сифатида бундай масалани қараймиз: «Турнстлар бир кунда 18 км пиёда, қолган йўлни 45 км/соат тезликда автобусда ўтишди. Агар турнстлар автобусда 2 соат; 3 соат; 4 соат юришган бўлса, улар бир кунда қанча йўл босганлар?»

Агар турнстлар автобусда 2 соат юришган бўлса, улар бир кунда ҳаммаси бўлиб $s = 18 \text{ км} + 45 \text{ км/соат} \cdot 2 \text{ соат} = 18 \text{ км} + 90 \text{ км} = 108 \text{ км}$ йўл босишган.

Агар улар автобусда 3 соат юришган бўлса, улар бир кунда ҳаммаси бўлиб $s = 18 \text{ км} + 45 \text{ км/соат} \cdot 3 \text{ соат} = 153 \text{ км}$ йўл босишган. Улар 4 соатда $s = 18 \text{ км} + 45 \text{ км/соат} \cdot 4 \text{ соат} = 198 \text{ км}$ йўл босишган.

Куриб турибмизки, вақт билан ўтилган масофа орасидаги боғланиш чизиқли экан, чунки у $s = v \cdot t + s_0$ формула билан ифодаланиши мумкин, бу ерда $s_0 = 18$ км, $v = 45$ км/соат.

Агар s , v ва t катталиклар орасида иккита катталик—тезлик ва вақт турли қийматлар қабул қилиб, масофа ўзгармас бўлса, у ҳолда тезлик ва ҳаракат вақти орасидаги боғланиш тескари пропорционал бўлади, чунки у $y = \frac{k}{x}$ формула билан ифодаланиши мумкин, бунда x ўзгарувчи — ҳаракат тезлиги, y ўзгарувчи — ҳаракат вақти (ёки аксинча), k ўзгармас — жисм ўтиши керак бўлган масофа.

Ҳаракат тезлиги ва вақти орасидаги тескари пропорционал боғланиш қуйидаги хоссага эга: ҳаракат тезлиги неча марта ортса (камайса), ҳаракатга сарфланган вақт шунча марта камаяди (ортади).

Текстли масалада берилган катталиклар орасидаги боғланишни билиш уни ечишнинг турли усулларини топишга ёрдам беради. Қуйидаги масалани қараймиз: «Икки шаҳардан бирибига қараб икки мотоциклчи йўлга чиқди. Бир мотоциклчи 90 км/соат тезлик билан ҳаракатланиб, учрашгунча 180 км йўл босди. Агар иккинчи мотоциклчи 45 км/соат тезлик билан ҳаракатланган бўлса, у учрашгунча қанча масофани ўтган?»

Масалада мотоциклчилар ҳаракати тўғрисида гап бормоқда. У учта катталик билан тавсифланмоқда: тезлик, вақт ва масофа. Масала шартига кўра ҳаракат вақтининг қийматлари бир хил, тезлик ва масофа турли қийматлар қабул қилади. Бу катталиклар (тезлик ва масофа) орасидаги боғланиш $s = t \cdot v$ формула билан ифодаланиши мумкин, демак, s ва v катталиклар тескари пропорционалдир.

Масала икки хил арифметик усул билан ечилиши мумкин.

I усул. t коэффицентни топишга — мотоциклчиларнинг ҳаракат вақтини топишга келтирилади. Буни ва иккинчи мотоциклчининг ҳаракат тезлигини билган ҳолда у ўтган масофани ҳам топиш қийин эмас. Мотоциклчиларнинг ҳаракат вақтини топиш учун биринчи мотоциклчи ўтган масофани ҳаракат тезлигига бўламиз: $180 \text{ км} : 90 \text{ км/соат} = 2 \text{ соат}$. Иккинчи мотоциклчининг тезлигини унинг ҳаракат вақтига кўпайтириб, у ўтган масофани топамиз: $45 \text{ км/соат} \cdot 2 \text{ соат} = 90 \text{ км}$.

Бу масалани ечишнинг *II усули* тўғри пропорционаллик хоссасига асосланган: иккинчи мотоциклчининг ҳаракат тезлиги биринчи мотоциклчининг ҳаракат тезлигидан неча марта кичиклигини топамиз: $90 \text{ км/соат} : 45 \text{ км/соат} = 2 \text{ марта}$. Демак, иккинчи мотоциклчи ўтган масофа ҳам биринчи мотоциклчи ўтган масофадан 2 марта кичик экан:

$$180 \text{ км} : 2 = 90 \text{ км}.$$

Яна бундай масалани қараймиз: «Машиннанинг тезлиги 60 км/соат, велосипедчининг тезлиги ундан 5 марта кичик. Ве-

лосипедчи ўз қишлоғидан темир йўл станциясигача 2 соат юрди. Бу йўлни машинада қанча вақтда ўтиш мумкин?»

Масалада учта катталики: тезлик, вақт ва масофа ҳақида гапирилмоқда. Уларнинг иккитаси — тезлик ва вақт — турли қийматлар қабул қилади, учинчи катталик — масофа — ўзгармас. Тезлик ва вақт орасидаги боғланиш тескари пропорционал, чунки $y \propto \frac{1}{v}$ формула билан ифодаланиши мумкин.

Бу масалани ечишнинг I усули s коэффициентни топишга, яъни қишлоқдан темир йўл станциясигача бўлган масофани топишга келтирилади. Бу масофани ва машинанинг ҳаракат вақтини билган ҳолда унинг ҳаракат вақтини ҳам топиш мумкин.

Аввал велосипедчининг тезлигини топамиз: $60 \text{ км/соат} : 5 = 12 \text{ км/соат}$, сўнгра қишлоқдан станциягача бўлган масофани топамиз: $12 \text{ км/соат} \cdot 2 \text{ соат} = 24 \text{ км}$, ва ниҳоят, машина 24 км ни ўтиш учун сарфлаган вақтни топамиз: $24 \text{ км} : 60 \text{ км/соат} = \frac{2}{5} \text{ соат} = \frac{2}{5} \cdot 60 \text{ минут} = 24 \text{ минут}$.

Бошқача ҳам иш тутиш мумкин: машинанинг ҳаракат тезлигини бошқа бирликда — км/мин да оламиз. $1 \text{ км/соат} = \frac{1}{60} \text{ км/минут}$ бўлгани учун $60 \text{ км/соат} = 60 \cdot \frac{1}{60} \text{ км/минут} = 1 \text{ км/минут}$. Демак, $24 \text{ км} : 1 \text{ км/мин} = 24 \text{ мин}$.

Бу масалани ечишнинг II усули тескари пропорционаллик хоссасига асосланган: машинанинг тезлиги велосипедчининг тезлигидан 5 марта ортиқ бўлгани сабабли машина учун 5 марта кам вақт керак бўлади, яъни $2 \text{ соат} = 2 \cdot 60 \text{ мин} = 120 \text{ мин}$ ва $120 \text{ мин} : 5 = 24 \text{ мин}$.

Шунга ўхшаш боғланишлар бошланғич синфларда қараладиган бошқа катталиклар орасида ҳам мавжуд. Масалан,

- а) буюмнинг баҳоси, миқдори ва нархи орасида;
- б) иш ҳажми, иш вақти ва унумдорлиги орасида;
- в) газмол миқдори, буюм миқдори ва битта буюмга сарфланган газмол миқдори орасида.

Машқлар

1. Қуйидаги масалаларда қандай катталиклар қаралаётганини, улар орасида қандай боғланишлар борлигини аниқланг ва уни турли арифметик усуллар билан ечинг:

1) Бир хил вақт ичида «Метеор» теплоходи 216 км , пароход 72 км йўл босди. Агар пароходнинг тезлиги 24 км/соат бўлса, «Метеор» нинг тезлиги нимага тенг?

2) 10 тийинга иккита бир хил конверт сотиб олинди. 6 та шундай конверт қанча туради?

3) 20 м газламадан 5 та кўйлак тикилди. Агар битта кофтага кўйлакка қараганда 2 марта кам газлама кетса, 5 та кўйлакка кетган газламадан неча кофта тикиш мумкин?

4) 12 кг мураббо 6 та банкага баравардан солинди. 24 кг мураббони солиш учун шундай банкалардан неча керак бўлади?

5) Ишчи 10 соатда 30 та деталь тайёрлаши керак эди. Ишчи вақтни тежаб 15 минутда битта деталь тайёрлади. Ишчи тежалган вақт ҳисобига неча ортиқча деталь тайёрлаган?

2. Масалаларни арифметик ва алгебраик усуллар билан ечинг:

1) А шаҳардан В шаҳарга қараб юк машина йўлга чиқди, 2 соатдан кейин В шаҳардан А шаҳарга қараб енгил машина йўлга чиқди. Юк машинасининг ўртача тезлиги 42 км/соат, енгил машинаники 65 км/соат. Агар А ва В шаҳарлар орасидаги масофа 619 км бўлса, машиналар В шаҳардан қандай масофада учрашади?

2) Болалар боғчаси учун килограми 72 тийиндан олма ва килограмми 80 тийиндан нок сотиб олинди. Ҳаммасига 16 сўм 56 тийин тўланди. Олмалар учун нокларга қараганда 2 сўм 16 тийин ортиқ тўланди. Қанча олма ва қанча нок сотиб олинган?

3) Китоб, ручка ва чизғич учун 1 сўм 55 тийин тўланди. Агар ручка чизғичдан 30 тийин қиммат, китоб ручкадан 65 тийин қиммат турса, ҳар бири қанчадан туради?

3. Тенглама тузиш усули билан ечинг:

1) Ишчилар бригадаси 360 та деталь ясаши керак эди. Ҳар куни мўлжаллагидан 4 та деталь ортиқ ясаб, бригада ишнинг планлагидан бир кун олдин бажарди. Бригада топшириқни бажаришга неча кун сарфлаган?

2) Икки бригада 780 тадан деталь ясаши керак эди. Биринчи бригада ҳар куни иккинчи бригадани 9 та деталь ортиқ ясади ва топшириқни иккинчисидан 6 кун илгари бажарди. Ҳар бир бригада топшириқни бажариш учун неча кун ишлаган?

3) 240 км узунликдаги йўлда поезд мўлжаллагидан кам тезликда юриди ва шунинг учун белгиланган жойга 20 минут кечикиб келди. Поезд қандай тезликда юриши керак эди?

4) Велосипедчи қишлоқдан 30 км масофа нарида жойлашган шаҳарга қараб жўнади. Қайтишда ўша йўлдан юриб, тезлигини 2 км/соат камайтирди ва шунинг учун қайтишга 30 минут ортиқ вақт сарфлади. Велосипедчи қишлоқдан шаҳарга боришда қанча вақт сарфлаган?

ҚУШИМЧА МАШҚЛАР

1 бобга доир

1. Ўқувчилар қуйидаги топшириқларни бажаришда аслида фикрий форманинг чинлик тўпламини топишларини кўрсатинг:

а) Тенгламани еч: $x - 9 = 18$.

б) Қайси сонлар тушиб қолган: $\square + 79 = 79$, $100 - \square = 0$, $98 : \square = 98$, $67 \cdot \square = 0$, $\square : 4 = 1$, $\square : 2 = 7$?

в) Тенгликлар тўғри бўладиган сонларни қўй: $\square \cdot \square = 28$, $\square \cdot \square = 64$.

г) Ёзувларга қара ва ҳар бир устундаги иккинчи мисолни биринчи мисол билан солиштириб, бўш жойларни тўлдир:

$$\begin{array}{r} 36 = 9 \cdot \square \\ 38 = 9 \cdot \square + \square \end{array} \quad \begin{array}{r} 48 = 6 \cdot \square \\ 52 = 6 \cdot \square + \square \end{array}$$

д) Қайси бир хонали икки сонни кўпайтирганда 24, 12, 32, 49 сонлари ҳосил бўлади?

е) 2, 64, 16, 32, 3, 48, 4 сонлари қатнашган бўлишга доир мисоллар туз. Намуна: $64 : 2 = 32$.

2. Қуйидаги фикрларни исботланг ёки рад қилинг:

а) Периметри 24 см, ён томони 10 см бўлган тенг ёнли учбурчак мавжуд.

б) Периметри 24 см, ён томони 5,5 см бўлган тенг ёнли учбурчак мавжуд.

в) Диагонали 11 см га, томонларидан бири 13 см га тенг бўлган тўғри тўртбурчак мавжуд.

г) Диагоналлари 14 см ва 20 см, томонларидан бири 18 см бўлган параллелограмм мавжуд.

3. Қуйидаги фикрларнинг чинлик қийматларини аниқланг:

а) Ҳар қандай a ва b сонлар учун $(a - b)^2 = a^2 - b^2$ тенглик тўғри.

б) Шундай ҳақиқий сон a ва b мавжудки, улар учун $(a - b)^3 = a^3 - b^3$ тенглик тўғри.

в) Ҳар қандай ҳақиқий a ва b сонлар учун $(a + b)^{-2} = a^{-2} + b^{-2}$ тенглик ўринали.

г) a ва b нинг баъзи қийматлари учун $(a + b)^{-2} = a^{-2} + b^{-2}$ тенглик бажарилмайди.

д) x нинг баъзи бир қийматларида $\sqrt{(20 + x)^4} = -x - 20$ тенглик тўғри.

е) y нинг шундай қийматлари мавжудки, улар учун $\sqrt{(1 - y)^4} = y - 1$ тенглик тўғри.

4. 3-топшириқдаги ёлгон фикрлар учун инкорлар ясанг.

5. Қуйидаги фикрларнинг қайсилари чин эканини аниқланг ва «келиб чиқади» сўзидан фойдаланиб, уларни қайта ифодаланг:

- а) 6 га каррали ҳар бир сон 3 га каррали.
 б) Ҳар қандай туб сон тоқ сондир.
 в) Ҳамма иррационал сонлар ҳақиқий сонлардир.
 г) Бурчакларни тўғри бўлган ҳар қандай тўртбурчак тўғри тўртбурчакдир.
 6. Қуйида келтирилган даъволардан қайси жуфтларни тўғрисида бири иккинчиси учун зарур (етарли, зарур ва етарли) дейиш мумкин:

$$A - «x > 3», B - «x^2 > 9», C - «|x| > 3?»$$

7. B ва C жумлаларининг ҳар бири учун улардан қайси бири A жумла учун зарур шарт, қайси бири етарли шарт эканлигини аниқланг:

- а) $A - «x$ элемент X ва Y тўпламларининг кесинимасига тегишли»,
 $B - «x$ элемент X тўпламга тегишли»,
 $C - «x$ элемент X ва Y тўпламларининг бирлашмасига тегишли».
 б) $A - «x$ элемент X тўпламга тегишли»,
 $B - «x$ элемент X ва Y тўпламларининг кесинимасига тегишли»,
 $C - «x$ элемент X ва Y тўпламларининг бирлашмасига тегишли».
 в) $A - «n : 18», B - «n : 2», C - «n : 9»$.
 г) $A - «n : 6», B - «n : 12», C - «n : 3»$.
 д) $A - «PQTS$ тўртбурчак ромб»,
 $B - «PQTS$ тўртбурчакнинг ҳамма томонлари тенг»,
 $C - «PQTS$ тўртбурчак — квадрат».

8. Нуқталар ўрнига «зарур», ёки «етарли», ёки «зарур ва етарли» сўзларини шундай қўйингки, ҳосил бўлган фикрлар чин бўлсин:

- а) $a = b$ бўлиши учун $|a| = |b|$ бўлиши...
 б) $a : n$ ва $b : n$ бўлиши учун $(a + b) : n$ бўлиши...
 в) $x \in A \cup B$ бўлиши учун $x \in A$ бўлиши...
 г) $x \in A \cap B$ бўлиши учун $x \in A$ бўлиши...
 д) $\frac{x^2 - 9}{5x}$ каср нолга тенг бўлиши учун $x = 3$ бўлиши...

9. Қуйидаги ҳар бир теорема учун тескари теоремани, қарама-қарши теоремани ва қарама-қаршисига тескари теоремани ифодаланг ва уларнинг чинлик қийматини аниқланг:

- а) Агар сон 9 га бўлинса, унинг ёзувидаги рақамлар йиғиндисин ҳам 9 га бўлинади.
 б) Агар сон 12 га бўлинса, у сон 3 га ҳам, 4 га ҳам бўлинади.
 в) Ҳар қандай икки натурал соннинг кўпайтмаси натурал сондир.
 г) Сон 25 га бўлиниши учун унинг ёзуви иккита ноль билан тугаши етарли.
 д) Ҳар қандай тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари кесилиш нуқтасида тенг иккига бўлинади.
 е) Бурчаклар қўшни бўлиши учун уларнинг йиғиндисин 180° га тенг бўлиши зарур.

10. Диагоналлари ўзаро перпендикуляр ва бири иккинчисининг тенг иккига бўладиган тўртбурчакни ромб дейиш мумкинми?

11. MAP бурчак берилган, унинг биссектрисаси ўтказилган. Биссектрисасига тегишли B нуқтадан унга перпендикуляр тўғри чизик ўтказилган. Бу тўғри чизик бурчакдан тенг ёнли учбурчак ажратганини исботланг. Бу исботни мантиқан таҳлил қилинг.

12. Айлана ясанг ҳамда унинг AB ва CD диаметрларини ўтказинг. AD ва BC ватарлар ўзаро тенглигини исботланг. Бу исботни мантиқан таҳлил қилинг.

13. a ва b нинг $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$ тенгсизлик бажариладиган қийматлари мавжудлигини исботланг.

14. Қуйидаги топшириқларни бажаришда ўқувчиларнинг мулоҳазаларни қандай бўлиши керак:

- а) $28 \cdot 3 = 3 \cdot 28$, $36 \cdot 2 = 30 \cdot 2 + 6 \cdot 2$ тенгсизликларнинг тўғрилигини исботла.
 б) Ёзувларга қара ва қуйидаги мисолларнинг ечимларини тушунтир:

$$5 \cdot 14 = 14 \cdot 5 = 70; 3 \cdot 26 = 26 \cdot 3 = 78.$$

15. Қуйидаги топшириқларни бажаришда ўқувчилар аслида элементнинг тўпламга тегишлилик муносабатини аниқлашларини кўрсатинг; бу тўплам элементларининг характеристик хоссаларини кўрсатинг:

- а) 5 га бўлганда қолдиқда 2 чиқадиган сонни ёз.
 б) $\square \cdot \square = 64$, $\square \cdot \square = 26$ бўладиган сонларни топ ва тўртта мисол туз.
 16. Қайси тўплам:

а) натурал сонлар тўплами ва ҳақиқий сонлар тўпламининг кесинимаси бўлади;

б) ҳақиқий сонлар тўплами ва рационал сонлар тўпламининг кесинимаси бўлади?

17. Қайси тўплам:

а) натурал сонлар тўпламини бутун сонлар тўпламигача тўлдирувчи тўплам бўлади;

б) бутун сонлар тўпламини рационал сонлар тўпламигача тўлдирувчи тўплам бўлади;

в) рационал сонлар тўпламини ҳақиқий сонлар тўпламигача тўлдирувчи тўплам бўлади?

18. Агар: а) A — бурчаги 30° бўлган учбурчаклар тўплами, B — ўтмас бурчакли учбурчаклар тўплами, C — тенг ёнли учбурчаклар тўплами; б) A — 7 га каррали натурал сонлар тўплами, B — 35 га каррали натурал сонлар тўплами, C — 42 га каррали натурал сонлар тўплами бўлса, A , B ва C тўпламлар орасидаги муносабатни Эйлер доиралари ёрдамида тасвирланг.

19. Агар: а) A — икки хонали сонлар тўплами, B — 3 га каррали икки хонали сонлар тўплами;

б) $A - 2 \leq x \leq 5$ тенгсизлигининг натурал ечимлари тўплами, $B - 1 < x < 6$ тенгсизлигининг натурал ечимлари тўплами;

в) $A - 4$ га каррали натурал сонлар тўплами, $B - 12$ га каррали натурал сонлар тўплами;

г) $A - x > -6$ тенгсизлигининг ҳақиқий ечимлари тўплами, $B - |x| < 3$ тенгсизлигининг ҳақиқий ечимлари тўплами;

д) $A - x^2 = y^2$ тенгламани қаноатлантирувчи ҳақиқий сонлар жуфтларининг тўплами, $B - x = y$ тенгламани қаноатлантирувчи ҳақиқий сонлар жуфтларининг тўплами;

е) $A - x^2 = y^2$ тенгликни қаноатлантирувчи ҳақиқий сонлар жуфтларининг тўплами, $B - x = y$ тенгламани қаноатлантирувчи ҳақиқий сонлар жуфтларининг тўплами бўлса, A ва B тўпламлар орасидаги муносабатлар ($A = B$, $A \subset B$, $B \subset A$) ни аниқланг.

20. Ўқувчилар қуйидаги масалаларни ечишда аслида қайси тўпламлардан ва улар орасидаги қайси муносабатлардан фойдаланганлар:

а) 1 дан 28 гача бўлган сонлар қаторидан 3 га қолдиқсиз бўлинадиганларини тартиб билан ёзиб чиқ.

б) Ҳар бир бир хонали сонни 7 га кўпайтир ва чиққан кўпайтмаларни ёз.

в) 40 дан 60 гача бўлган қайси сонлар 7 га, 8 га қолдиқсиз бўлинади?

г) 56, 64, 72, 40 сонларининг ҳар бирини 8 марта камайтир. Берилган сонларнинг ҳар бирини 8 марта орттир.

д) 0 дан 50 гача бўлган сонлар ичидан 3 га, 4 га, 7 га қолдиқсиз бўлинадиганларини тартиб билан ёз. Улардан қайсылари 6 га, 12 га қолдиқсиз бўлинади?

е) 27, 45, 38, 62, 53, 72, 81, 48 сонлари ичидан 5 га бўлганда қолдиқда 4 чиқадиغان сонларни ёз.

21. Ўқувчилар қуйидаги масалаларни ечишда қандай мантиқий амалларни бажарадилар:

а) Қолдиқли бўлишга доир берилган мисоллар ичидан хато бўлинган мисолларни топ ва уларни тўғрилаб еч:

$$37 : 4 = 8 \text{ (қолд. 5)}$$

$$48 : 7 = 6 \text{ (қолд. 6)}$$

$$82 : 9 = 9 \text{ (қолд. 1)}$$

$$58 : 6 = 8 \text{ (қолд. 10)}$$

б) Ёш табиатшунослар 18 та жўякни ўтадилар. Улар ҳар кун 9 та жўякни ўтадилар. Ёш табиатшунослар ҳамма жўякларни неча кунда ўтаганлар?

22. Кўпайтириш қондасидан фойдаланиб, комбинаторли масалаларни ечинг:

а) 6 та откриткадан 3 тасини танилаб олиш керак. Буни неча хил усул билан бажариш мумкин?

б) Конференцияга 10 та номзотдан 3 тасини танилаб олиш керак. Буни неча хил усул билан бажариш мумкин?

в) 6 кишилик рўйхатни неча хил усул билан тузиш мумкин?

г) 1, 2, 3, 4, 5 рақамларидан фойдаланиб, нечта турли беш хонали сон ёзиш мумкин? Улардан нечаси 3 ёки 5 рақами билан бошланади?

23. 100 та ўқувчи-спортчидан 9 таси чанғи ва конькида югуриш билан шуғулланади, улардан биттаси ҳам гимнастика билан шуғулланмайди; 6 киши чанғи ва гимнастика билан шуғулланади, лекин уларнинг биттаси ҳам конькида учмайди; 19 киши фақат чанғи билан, 20 киши фақат коньки билан, 30 киши фақат гимнастика билан шуғулланади; 5 киши фақат коньки ва гимнастика билан шуғулланади. Неча киши чанғи билан, неча киши коньки билан, неча киши гимнастика билан шуғулланади? Неча киши спортнинг ҳамма тури билан шуғулланади?

24. Синфда 28 ўқувчи бор: уларнинг 4 таси аълочи, 14 таси спортчи, 18 таси бадий тўгаракка қатнашади, икки ўқувчи ҳам аълочи, ҳам спортчи, 10 ўқувчи бадий тўгарак қатнашчиси, бир ўқувчи ҳам спортчи, ҳам аълочи, ҳам бадий тўгарак қатнашчиси. Қанча ўқувчи аълочи ҳам эмас, спортчи ҳам эмас, бадий тўгаракка ҳам қатнашмайди?

25. Ҳисоботда турли учта тилни ўрганувчи 100 ўқувчидан учта тилни 5 ўқув-

чи, немис ва испан тилини 10 ўқувчи, немис ва француз тилини 20 ўқувчи, француз ва испан тилини 8 ўқувчи, испан тилини 30 ўқувчи, немис тилини 23 ўқувчи, француз тилини 50 ўқувчи билиши айтилди. Ҳисобот қониқарсиз деб топилди. Нима учун?

26. 70 киши учта тилдан ақалли биттасини билади, шулардан 10 киши фақат инглиз тилини, 16 киши фақат немис тилини, 18 киши фақат француз тилини билади, учта тилни билувчилар сони фақат француз ва немис тилини биладиганлардан 2 киши кам, фақат инглиз ва француз тилини биладиганлардан 4 киши кам ва фақат инглиз ва немис тилини биладиганлардан 4 киши кам. Неча киши учала тилни билади?

27. 0 дан 999 гача бўлган бутун сонлар тўпламида қуйидаги муносабатлар берилган:

P — «ёзувидаги рақамларни сони бир хил».

Q — «ёзувидаги рақамлар бир хил».

M — «ёзуви бир хил рақамлар билан тугайди».

T — «10 дан катта».

Берилган муносабатлардан қайсыларни эквивалентлик муносабати бўлади? Жавобни асосланг. Эквивалентлик муносабати учун берилган тўпламнинг бўлиниш синфларини кўрсатинг. Бу сонлар тўпламида бирор тартиб муносабатини беринг.

28. Агар қуйида берилган P , Q , T ва M муносабатлар $X = \{35, 37, 42, 46, 15, 26, 5, 11, 17, 21\}$ тўпламда берилган бўлса, ва:

P — «ёзуви бир хил рақам билан тугаса».

Q — «катта бўлса».

T — «5 га бўлганда бир хил қолдиқ қолса».

M — «ёзувида бир хил рақамлар бўлса», уларни икки синфга — эквивалентлик ва тартиб муносабатларига ажратиш мумкинми?

Жавобни асосланг. Эквивалентлик муносабати учун X тўпламнинг бўлиниш синфларини кўрсатинг.

29. Агар T , P , Q ва M муносабатлар $X = \{24, 4, 12, 13, 15, 26, 72, 78, 81, 97, 39, 80\}$ тўпламда берилган ва:

T — «6 марта катта бўлса».

P — «6 га бўлганда бир хил қолдиқ қолса».

Q — «ёзуви бир хил рақам билан тугаса».

M — «ёзувида бир хил рақамлар бўлса», бу муносабатларни неча синфга бўлиш мумкин?

Эквивалентлик муносабати учун X тўпламнинг бўлиниш синфларини кўрсатинг.

30. Агар:

а) A — 9 га қаррали натурал сонлар тўплами, B — 18 га қаррали натурал сонлар тўплами;

б) A — 5 га қаррали натурал сонлар тўплами, B — натурал сонлар квадратлари тўплами бўлса, A тўплами B тўпламга тенг қувватли дейиш мумкинми?

31. Агар:

а) $f: x \rightarrow 3x + 1$; б) $f: x \rightarrow 5 - x^2$; в) $f: x \rightarrow \frac{12}{x}$ бўлса, $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ва $Y = Z$ тўплamlар орасидаги f мослиқнинг графини ва графигини ясанг.

11 бобга доир

1. Масалаларни ечишда танланган амалларни асосланг:

а) Кутубхонада битта тоқчада 32 та китоб, иккинчисда 40 та китоб бор. 20 та китоб болаларга берилган. Бу тоқчаларда нечта китоб қолди?

б) Ҳовлида 6 та қиз ва 5 та ўғил бола ўйнамоқда эди. 2 та ўғил бола уйига кетди. Ҳовлида нечта бола қолди?

в) Болалар 10 та қизил ва 6 та сариқ байроқча ясадилар. Уларни 8 тадан қилиб ипга боғладилар. Нечта боғлам ҳосил бўлди?

г) Бир бидонда 48 л сут, иккинчида ҳам шунча сут бор эди. 67 л сут сотилди. Неча литр сут қолди?

д) Малика 3 тийиндан 5 та дафтар ва 48 тийинга китоб сотиб олди. У ҳаммаси бўлиб қанча пул тулади?

е) Болалар 45 кг олма тердилар. Улар 18 кг олмани яшикка, қолганини баравардан 3 та пакетга солишди. Ҳар бир пакетда қанчадан олма бўлди?

2.

Қўшилувчи	3	5	7	9	11
Қўшилувчи	5	5	5	5	5
Йиғинди	8	10	12	14	16

жадвални тўлдириб, ўқувчи қуйидаги хулосаларга келди:

а) Агар биринчи қўшилувчи 2 та орттирилиб, иккинчиси ўзгаришсиз қолдирса, йиғинди 3 та ортади.

б) Йиғинди ҳар доим ҳар бир қўшилувчидан кичик.

Ўқувчи мулоҳазанинг қандай усулидан фойдаланган? У чиқарган хулосалар тўғрими?

3.

Камаювчи	12	10	8	6	4
Айрилувчи	3	3	3	3	3
Айирма	9	7	5	3	1

жадвални тўлдириб, ўқувчи қуйидаги хулосаларга келди:

а) Агар камаювчи 2 та камайтирилиб, айрилувчи ўзгаришсиз қолдирилса, айирма 2 га камаяди.

б) Айирма ҳар доим камаювчидан кичик.

Ўқувчи мулоҳазанинг қандай усулидан фойдаланган? У чиқарган хулосалар тўғрими?

4. Қуйидаги топшириқларни бажаришда ўқувчи юритган мулоҳазани келтиринг:

«Нима учун қуйидаги ёзувлар тўғрилигини тушунтир: $7 + 9 = 9 + 7$, $1 + 14 = 14 + 1$, $6 + 3 + 7 = 6 + (3 + 7)$, $8 + 1 + 9 = 8 + (1 + 9)$ ».

5. Ҳамма рақамлари турлича бўлган энг катта ва энг кичик ўн хонали сон ёзинг.

6. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ ёзувда юлдузчалар ўрнига амал белгиларини қўйинг ва қавсларни шундай қўйингки, ҳосил бўлган ифоданинг қиймати 100 га тенг бўлсин.

7. 50 сонини иккита жуфт натурал соннинг йиғиндиси ҳуринишида неча усул билан ёзиш мумкин? Қўшилувчилар тартиби билан фарқ қилувчи ифодаларни бир хил деб олинг.

8. Ўнликлар рақами бирликлар рақамидан катта бўлган нечта икки хонали сон мавжуд?

9. Рақамлари ўсиб бориш тартибда келиб, 100 дан кичик бўлган нечта бутун мусбат сон мавжуд?

10. а) $26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 + 51 \cdot 52 \cdot 53 \cdot 54$ йиғинди;

б) $41 \cdot 43 \cdot 45 \cdot 47 - 37 \cdot 39 \cdot 41 \cdot 42$ айирма;

в) 7 дан 81 гача бўлган (81 ҳам кирадими) ҳамма натурал сонлар жўпайтмаси;

г) ҳамма уч хонали сонлар йиғиндиси қандай рақам билан тугайди?

11. Энг рационал усул билан ҳисобланг:

а) $109 \cdot 91 - 107 \cdot 93$;

б) $1002 \cdot 998 - 1003 \cdot 997$;

в) $5554 \cdot 5558 - 5552 \cdot 5556$;

г) $44 \cdot 443 \cdot 44 \cdot 448 \cdot 44 \cdot 447 - 44 \cdot 445 \cdot 44 \cdot 440 \cdot 44 \cdot 447$.

12. Ўқувчи қўйидаги масалани ечишда бўлинувчанликнинг қандай хоссасидан фойдаланади: «48, 72, 96 сонларининг ҳар бирини 3 га, 4 га бўлиш учун уларни қандай икки қўшилувчининг йиғиндиси билан алмаштириш қулай?»

13. а) $9^8 - 3^8$ сонининг 8 га; б) $8^6 + 2^{11}$ сонининг 17 га бўлинишини исботланг.

14. $1513^a - 1512^a$ ифоданинг қиймати қандай (губ ёки мураккаб) сон бўлади?

15. $3^8 \cdot 5^4$ сонининг нечта турли бўлувчилари бор?

16. Қўйидаги масалаларда қандай катталиклар, улар орасидаги қандай муносабатлар ва қандай амаллар қаралишини аниқланг ҳамда масалаларни ечинг:

а) Битта сабзавот базасида иккинчисига қараганда 2 марта кўп картошқа бор эди. Биринчи базадан 210 т картошқа олиб кетилгандан, иккинчи базага 80 т картошқа келтирилгандан кейин биринчи базада иккинчи базага қараганда 100 т картошқа кам қолди. Ҳар бир базада неча тоннадан картошқа бўлган?

б) Икки бакда 140 л сув бор эди. Биринчи бакдан 26 л, иккинчи бакдан 60 л сув олингандан кейин биринчи бакда иккинчисидан 2 марта кўп сув қолди. Дастлаб ҳар бир бакда қанчадан сув бўлган?

в) А ва В туристик базалар орасидаги масофа 46 км. А турбазадан В турбазага қараб 5 км/соат тезликда туристлар группаси йўлга чиқди. 2 соатдан кейин В турбазадан биринчи группага қараб 4 км/соат тезликда иккинчи группа йўлга чиқди. Иккинчи группа йўлга чиққанидан неча соат кейин биринчи группа билан учрашади?

III бобга доир

1. Шундай x натурал сонлар тўпламини топингки: а) $\frac{2x+1}{11}$ тўғри каср,

б) $\frac{5x-1}{14}$ нотўғри каср бўлсин.

2. Фикрларнинг чинлик қийматларини топинг:

а) $-\frac{6}{11} > -\frac{5}{9}$

б) $0,15^3 > 0,15$.

в) x ўзгарувчининг ҳар қандай натурал қийматларида $\frac{24}{x}$ каср натурал соннинг ёзувидир.

г) x нинг шундай бутун қийматлари мавжудки, улар учун $\frac{18}{x}$ каср бутун соннинг ёзувидир.

д) Шундай иккита каср мавжудки, уларнинг кўпайтмаси улар айирмасига тенг.

3. $0,45$ ва $-\frac{5}{12}$ сонлари берилган. Шундай рационал сон топингки, у берилган сонларнинг бирдан катта, иккинчисидан кичик бўлсин.

4. $\frac{1}{60}$ ва $\frac{3}{190}$ сонлари орасида жойлашган рационал сон мавжудлигини исботланг.

5. Ушбу

а) $-5 - 1\frac{1}{8}$ ва $-5 - 1\frac{3}{8}$;

б) $\frac{14}{85} \cdot \frac{17}{101}$ ва $\frac{13}{85} \cdot \frac{18}{101}$

ифодаларнинг қийматларини таққослашнинг энг рационал усулини топинг.

6. Сонни чексиз ўли каср кўрinishида ёзинг; нима учун бу каср даврий эканлигини тушунтиринг:

а) $-\frac{5}{6}$; б) $\frac{8}{33}$; в) $-\frac{18}{11}$

7. Ифодани шакл алмаштиринг ва ҳисоблаш учун икки ифоданинг (берилган ва шакл алмаштириш натижасида ҳосил бўлган ифодаларнинг) энг қулайини танлаб, унинг қийматини топинг:

1) $a^3 + ab$, бунда $a = 1,71$, $b = 1,29$;

2) $\frac{x^2 + x + 1}{x}$, бунда $x = 0,5$;

3) $\frac{3x^2 - xy}{9x^3 - y^3}$, бунда $x = -8$, $y = 25$.

8. Компоненталар ва амаллар натижалари орасидаги боғланишдан фойдаланиб, тенгламани ечинг:

а) $\left(3\frac{1}{4} - \frac{\left(6\frac{9}{16} - 2\frac{1}{2}x \right) \cdot 0,53}{0,75} \right) : 6\frac{2}{3} = \frac{4}{15}$;

б) $12 - \left(30 - 19\frac{1}{2} : \left(2\frac{3}{4} - \frac{3}{5}x \right) \right) \cdot \frac{23}{55} = 3$;

$$в) (2,37 - \left(5,1 + 35,1 - \frac{0,0016}{0,0075 + x}\right) \cdot 0,059) : 0,125 = 0,08;$$

$$г) 66,6 : \left(5 + 3,2 : \frac{0,8 - 0,4x}{0,5}\right) - 7,15 = 0,25.$$

9. Масалаларни алгебранг усулда ечинг:

а) Биринчи касрнинг сурати махражидан 4 та ортиқ. Агар бу касрнинг сурати 4 та камайтирилиб, махражи 2 та орттирилса, биринчи касрдан 1 та кам каср ҳосил бўлади. Биринчи касрни топинг.

б) Биринчи касрнинг махражи суратидан 2 та кам. Агар бу касрнинг сурати 1 та камайтирилиб, махражи 2 та орттирилса, биринчи касрдан 1 та кам каср ҳосил бўлади. Иккинчи касрни топинг.

в) Жамила ва Нигорага туфли, шапка ва шарф сотиб олишди. Ҳаммаси бўлиб 75 сўм тўлашди. Нигора учун сотиб олинган ҳар бир буюм Жамила учун сотиб олинган шундай буюмдан 1,5 марта қиммат. Нигоранинг туфлиси унинг шапкасидан 10 марта қиммат ва Жамиланинг шапкаси ҳамда шарфидан 3 марта қиммат. Сотиб олинган ҳар бир буюм қанча туради?

10. Масалани арифметик ва алгебранг усуллар билан ечинг:

а) Учта цехда 1800 ишчи иштайди. Биринчи цехдаги ишчилар иккинчи цехдаги ишчилардан 1,2 марта кўп, учинчи цехдаги ишчилар биринчи цехдаги ишчилардан 100 киши ортиқ. Ҳар бир цехда қанчадан ишчи бор?

б) Сув остида сузиш учун ластлар, маска ва трубка сотиб олинди. Ластлар маскадан 2 сўм қиммат ва трубкадан 4 марта қиммат. Агар ҳамма харид учун 8 сўм 80 тийин тўланган бўлса, ҳар бир буюм қанча туради?

IV бобга доир

1. Ифоданинг қийматини топинг:

$$а) \frac{382 + 498 \cdot 381}{382 \cdot 498 - 116};$$

$$б) 8 \sqrt{2\frac{3}{4} - \sqrt{44}} + 14 \sqrt{\frac{11}{49}};$$

$$в) \frac{\sqrt{21} - \sqrt{14}}{3\sqrt{7}(\sqrt{3} - \sqrt{2})};$$

$$г) \sqrt{1300} - 4\sqrt{52} - 4\sqrt{3\frac{1}{4}}.$$

2) Бешта шундай кетма-кет бутун сонни топингки, дастлабки учтаси квадратларининг йиғиндиси кейинги икkitаси квадратларининг йиғиндисига тенг бўлсин.

3. Шундай учта кетма-кет жуфт сонни топингки, дастлабки икkitаси квадратларининг йиғиндиси учинчисининг квадратиغا тенг бўлсин.

4. Келтирилган ифодалар айнан тенглигини исботланг. Уларнинг қайси бири ўзгарувчининг кўрсатилган қийматларида ҳисоблаш учун қулай?

а) $x^2 \cdot y^2 - y^4$ ва $(x + y)(x - y)y^2$, бунда $x = 8, y = 2$;

б) $(p^2 + q^2)(p + q)(p - q)$ ва $p^4 - q^4$, бунда $p = \frac{3}{4}; q = \frac{1}{4}$;

в) $\frac{(a - b)^2}{2a} + b$ ва $\frac{a}{2} + \frac{b^2}{2a}$, бунда $a = 50, b = 67$.

5. Тенгламаларни ечинг ва бажарилган шакл алмаштиришдаги ҳар бир қадамин асосланг:

а) $\frac{3}{4x - 1} - \frac{8}{5x + 6} = 0$;

в) $\frac{8}{x - 2} - \frac{7}{3x + 1} = 0$;

г) $\frac{6}{3x + 1} - \frac{5}{2 + 3x} = 0$;

г) $\frac{12}{x^2 - 25} + \frac{x + 1}{x - 5} = 1$.

6. Ушбу

а) $a + b$; в) $\sqrt{1 - x^4}$; д) $\frac{-\sqrt{x} - \sqrt{y}}{-5}$;

б) $-a - b$; г) $\frac{-x - y}{-5}$; е) $\sqrt{x} + \sqrt{y}$

ифодалар берилган. Ўзгарувчиларнинг кўрсатилган ифодалар: 1) мусбат қийматлар; 2) манфий қийматлар қабул қиладиган қийматларини топиш мумкинми?

7. Мулоҳаза туғрими: «Ҳар қандай $a \geq 0$ учун $\sqrt{a} < a$ тенгсизлик ўринли?»

8. $a < b$ ва $b > c$ экани маълум. Бу шартларда, a, b ва c сонларни $a < c$ қўшимча шарт бажариладиган қилиб танлаш мумкинми?

9. $a > b$ ва $b \leq c$ эканлиги маълум. Қўшимча: а) $a > c$; б) $a = c$ шарт бажариладиган қилиб a, b ва c сонларни танлаш мумкинми?

10. x нинг ҳамма ҳақиқий қийматларида:

а) $x + 1 > x$; б) $x^2 > x$; в) $x + x > x$ тенгсизлик ўринли бўладими?

11. x нинг $\frac{1}{x^2 + 1} < 1$ тенгсизлик ёлгон бўладиган қийматлари мавжудми?

12. а) $a < -2$ тенгсизликдан $-9a - 10 > 8$ тенгсизлик келиб чиқишини исботланг.

б) $x > 3$ тенгсизликдан $-11(x - 2) < -11$ тенгсизлик келиб чиқишини исботланг.

в) $8 - 5x > -7$ тенгсизликдан $x < 3$ тенгсизлик келиб чиқишини исботланг.

13. Қуйидаги тенгсизликлар ҳақиқий сонлар тўпламида тенг кучли эканини исботланг:

а) $3a - 5 < 7$ ва $-5a > -20$;

б) $(m + 2)^2 \geq 0$ ва $m^2 \geq -4(m + 1)$.

14. Берилган тенгсизлиkning ечимлар тўпламини топинг ва бунда бажарилган шакл алмаштиришнинг ҳар бир қадамини асосланг:

а) $-3(x + 1) - 2(x - 1) > -(2x + 1)$;

б) $\frac{y + 1}{3} - \frac{y + 2}{6} < \frac{y + 3}{2}$.

15. Агар:

$$a) f(x) = \sqrt{(x+3)(5+x)},$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{x+3}{5+x}};$$

$$b) f(x) = \sqrt{(x-2)(x^2+4)},$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x^2+4}}$$

бўлса, $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг аниқланиш соҳаси устма-уст тушадими?

16. Агар:

$$a) f(x) = \frac{5x}{x^2-5};$$

$$b) f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{x^2-1};$$

$$c) f(x) = \sqrt[3]{18-6x};$$

$$d) f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{4-x}$$

бўлса, $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

17. f функция — тўғри пропорционаллик. Пропорционаллик коэффициентини топинг ва жадвалини тўлдиринг:

x	-7		-2,5	26		0,5	
y		-2	7,5		126		12,51

18. f функция — тескари пропорционаллик. Пропорционаллик коэффициентини топинг ва жадвалини тўлдиринг:

x	-3	-2	-1,5	2	4,5	
y			-6			9

19. Тўғри тўртбурчакнинг томонлари 6 см ва x см. Бу тўғри тўртбурчак юзининг (y см²) томонлари узунликларига боғлиқлигини ифодаловчи формулани ёзинг. У функцияни ифодалайдими? Тсмон узунлиги 4 см дан ортиқ бўлмаганда бу боғланишнинг графигини ясанг.

20. Сотиб олинган ҳамма қаламлар учун 12 тийин тўланди. Қаламлар сонининг (x дона) улар баҳси (y тий.) га боғлиқлигини ифодаловчи формулани ёзинг. У функцияни ифодалашини кўрсатинг. Бу функциянинг графигини ясанг.

21. Битта қаламининг баҳси 3 тийин. Қаламлар нархининг (y тий.) сотиб олинган қаламлар сони (x дона) га боғлиқлигини кўрсатувчи формулани ёзинг ва у функцияни ифодалашини кўрсатинг. $x \geq 6$ шартда унинг графигини ясанг.

22. Тўғри тўртбурчакнинг юзи 10 см². Бу тўғри тўртбурчак баландлиги (y см) нинг асос узунлиги (x см) га боғлиқлигини кўрсатувчи формулани ёзинг. У функцияни ифодалайдими? Тўғри тўртбурчакнинг асоси 10 см дан ортиқ эмас деб бу боғланишнинг графигини ясанг.

23. Масалада берилган катталиклар орасида қандай боғланиш борлигини аниқланг ва уни икки усул билан ечинг. Ечиш усулларини асосланг:

а) Учта бир хил яшикда 21 кг апельсин бор. 10 та шундай яшикда неча килограмм апельсин бор?

б) 15 м газмол учун 45 сўм туланди. 24 сўмга шундай газмолдан неча метр сотиб олиш мумкин?

в) Тикувчи ҳар 10 м чипдан 3 та куйлак тикди. У 50 м чипдан неча куйлак тикиши мумкин?

г) Магазин биринчи кун 8 та бир хил портфель сотди ва кассага 64 сўм пул тушди. Иккинчи кун шундай портфеллардан 6 таси сотилди. Магазинга иккинчи кун қанча пул тушган?

д) Икки дурадгор баравардан стул тузатди. Биринчи дурадгор 6 кун ишлаб, ҳар кун 10 тадан стул тузатди. Иккинчи дурадгор эса 5 кун ишлади. Иккинчи дурадгор ҳар кун нечадан стул тузатган?

24. Қуйида келтирилган масалалардан қайсыларини бошланғич синф ўқувчилари икки усул билан еча оладилар:

а) 12 кг мураббони баравардан 6 та банкага солишди. 24 кг мураббони солиш учун шундай банкалардан неча керак бўлади?

б) Иккита бир хил яшикда 32 кг олма бор. 4 та шундай яшикда неча килограмм олма бор? 5 та яшикда-чи?

в) 4 та чойшабга 12 м полотно кетади. 30 м полотнодан неча шундай чойшаб чиқади?

V бобга доир

1. Тенг таркибли иккита тўғри тўртбурчакдан: а) бу тўғри тўртбурчакларнинг тенглиги; б) уларнинг тенгдошлиги келиб чиқадими?

2. Тенг таркиблигидан уларнинг тенглиги келиб чиқадиган кўпбурчаклар мавжудми?

3. а) Биттадан томонлари тенг бўлган иккита тенг бўлмаган тўғри тўртбурчак; б) иккитадан томони мос равишда тенг бўлган иккита тенг бўлмаган учбурчак тенгдош бўладими?

4. Трапеция ўзининг диагоналлари билан тўртта учбурчакка ажратилган. Ён томонга ёпишган учбурчаклар тенгдошлигини исботланг.

5. Агар квадратнинг диагонали n марта орттирилса, унинг юзи қандай ўзгаради?

6. Тўғри тўртбурчакнинг периметри 28 см, қўшни томонлари айирмаси 2 см. Тўғри тўртбурчак диагонаlining узунлигини ва юзини аниқланг.

7. Юзи берилган квадратнинг юзидан 2 марта катта бўлган квадратни қандай яшаш мумкин?

8. Квадрат ва диагонали берилган квадрат диагонаliga тенг бўлган ихтиёрий тўғри тўртбурчак берилган. Бу фигуралардан қайси бирининг юзи катта? Нима учун?

9. Маълумки, ромбнинг юзи унинг диагоналлари кўпайтмасининг ярмига тенг. Шунга ўхшаш мулоҳаза юритиб, ўқувчи бу қондадан фойдаланиб, диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлган трапециянинг юзини, шунингдек, диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлган ихтиёрий тўртбурчак юзини ҳисоблаш мумкинлигини айтиди. Бу тахминлар тўғрими?

10. Агар берилган тўғри тўртбурчаклардан бирининг томонлари тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари, иккинчи тўртбурчакнинг томонлари гипотенуза ва унга туширилган баландлик бўлса, бу тўғри тўртбурчаклар тенгдош бўладими?

11. Қуйидаги масалада қандай катталиклар қаралаётганини, улар қандай муносабатда эканини ва улар устида қандай амаллар бажарилишини аниқланг, масалани ечинг:

а) Бсғ ва полиз тўғри тўртбурчак шаклида, улардан ҳар бирининг юзи 1500 м². Бсғнинг кенглиги полизнинг кенглигидан 5 м ортиқ, боғнинг узунлиги эса полизнинг узунлигидан 10 м кам. Боғнинг ва полизнинг ўлчамларини топинг.

б) Бино қурилиши учун маълум муддатда 4500 м³ тупроқ қазиниш керак. Қурувчилар кунлик нормани 45 м³ ошириб бажардилар ва муддатидан 4 кун олдин тоғшириқнинг 96 % ини бажардилар. Ишнинг муддатини аниқланг.

в) Турист саёҳатга чиққанда йўлга 72 сўм сарфлашини ҳисоблади. 5 кун сарф ҳисобдагидек бўлди, сўнгра кунига ўртача мўлжалдидан 1 сўм ортиқ сарфлай бошлади ва йўлда 1 кун ушланиб қолиб, бутун саёҳатга мўлжалдагидан 23 сўм ортиқ сарфлаб уйига қайтди. Саёҳат неча кун давом этган?

г) Иккита машинистка ёзиш учун қўл ёзма олишди. 2 соат бирга ишлагандан кейин машинисткалардан бири бошқа иш олди ва иккинчиси бир ўзи ишни 1 соат 20 минутдан кейин тугаллади. Агар бу ишга иккинчи машинистканинг бир ўзи биринчи машинистканинг бир ўзидан 1 соат 10 минут кўп вақт сарфласа, ҳар бир машинистка бу ишни ёлғиз ўзи неча соатда тугаллайди?

д) Мотошкiclчи мълум вақт ичида 90 км йўл босишни мўлжаллади. У 54 км йўл босгандан кейин шлагбаум олдида 5 минут тўхтаб турди. Ҳаракатини давом эттириб, тезлигини 6 км/соатга оширди ва белгиланган жойга муддатида етиб келди. Мотошкiclчининг дастлабки тезлигини топинг.

БУТУН НОМАНФИЙ СОНЛАР

Қўшиш ва қўпайтириш қонунлари

Ихтиёрий a ва b сонлар учун $a + b = b + a$

Ихтиёрий a , b ва c сонлар учун $(a + b) + c = a + (b + c)$

Ихтиёрий a ва b сонлар учун $a \cdot b = b \cdot a$

Ихтиёрий a , b ва c сонлар учун $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Ихтиёрий a , b ва c сонлар учун $(a + b)c = ac + bc$

Айириш ва бўлиш қоидалари

Сонни йигиндидан айириш қондаси

$$(a + b) - c = \begin{cases} (a - c) + b, & \text{агар } a \geq c \text{ бўлса;} \\ a + (b - c), & \text{агар } b \geq c \text{ бўлса} \end{cases}$$

Йигиндини сондан айириш қондаси

агар $a \geq b + c$ бўлса, $a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b$

Қўпайтмани сонга бўлиш қондаси

$$(a \cdot b) : c = \begin{cases} (a : c) \cdot b, & \text{агар } a : c \text{ бўлса;} \\ a \cdot (b : c), & \text{агар } b : c \text{ бўлса} \end{cases}$$

Сонни кўпайтмага бўлиш қондаси

агар $a : bc$, $a : b$ ва $a : c$ бўлса, $a : (b \cdot c) = (a : b) : c = (a : c) : b$

Йигиндини сонга бўлиш қондаси

агар $a : b$ ва $b : c$ бўлса, $(a + b) : c = a : c + b : c$

$3 = n(A)$, бунда $A = \{\bigcirc, \bigcirc, \bigcirc\}$,

ёки $A = \{\square, \square, \square\}$, ёки $A = \{\triangle, \triangle, \triangle\}$ ва ҳ. к.

$2 = n(B)$, бунда $B = \{\bigcirc, \bigcirc\}$,

ёки $B = \{\square, \square\}$, ёки $B = \{\triangle, \triangle\}$ ва ҳ. к.

$0 = n(\emptyset)$, бунда $\emptyset$ — бўш тўплам

$2 < 3$, чунки

{	а) 3 та элементга эга бўлган тўпламда 2 та элементли қисм тўплам ажратиш мумкин; б) санокда 2 сони 3 сонидан олдин айтилади; в) шундай 1 сони мавжудки, унинг учун $2 + 1 = 3$ бўлади.

$3 + 2 = 5$,
чунки

{ агар $3 = n(A)$, $2 = n(B)$ ва $A \cap B = \emptyset$ бўлса, у ҳолда A ва B тўпламларнинг бирлашмасида 5 та элемент бўлади.

$5 - 2 = 3$,
чунки

{ а) агар $5 = n(A)$, $2 = n(B)$ ва $B \subset A$ бўлса, у ҳолда B тўпламнинг A гача тулдирувчисида 3 та элемент бўлади;
б) $3 + 2 = 5$.

$3 \cdot 2 = 6$, чунки

а) $3 \cdot 2 = 3 + 3$;

б) агар $3 = n(A)$, $2 = n(B)$ бўлса, у ҳолда A ва B тўпламларнинг Декарт кў-
пайтмаларида 6 та элемент бўлади.

$6 : 3 = 2$, чунки

а) агар $6 = n(A)$ ва A учта элементли қисм тўпламларга ажратилган бўлса, у ҳолда бундай қисм тўпламлар иккита бўлади;

б) агар $6 = n(A)$ ва A элементлари сонинг бўлган учта қисм тўпламга ажратилган бўлса, у ҳолда ҳар бир қисм тў-
ламда иккитадан элемент бўлади;

в) $2 \cdot 3 = 6$.

МУНДАРИЖА

Сўз боши	3
I боб. Математиканинг умумий тушунчалари	5
1- §. Математик тушунчалар	5
1. Кириш	5
2. Тушунчанинг ҳажми (кўлами) ва мазмуни	7
3. Тушунчалар таърифи	9
4. Тушунчалар таърифига қўйиладиган талаблар	12
2- §. Математик жумлалар	17
5. Содда ва мураккаб жумлалар	17
6. Фикрлар. «Ва», «ёки», «эмас» (майди) сўзларининг маъноси	18
7. Фикрий формалар	21
8. «Барча» ва «баъзи» сўзларининг маъноси	22
9. Қавнторларни ўз ичига олган фикрларнинг инкорларини яшаш қонда- лари	25
10. Жумлалар орасидаги келиб чиқишлик ва тенг кучлиликл муноса- батлари	27
11. Зарур ва етарли шартлар	28
12. Теореманинг структураси. Теоремаларнинг турлари	31
3- §. Математик исботлар	33
13. Дедуктив мулоҳазалар	33
14. Дедуктив мулоҳазаларнинг энг содда схемалари	36
15. Тўлиқсиз индукция	39
16. Фикрларнинг қинлигини исботлаш усуллари	41
4- §. Текстли мисоллар ва уларни ечиш	45
17. Текстли масала тушунчаси	45
18. Текстли масалаларни ечиш усуллари	47
19. Арифметик усулларда масалалар ечиш бўсқичлари. Масала мазму- нини таҳлил қилиш усуллари	51
20. Масалани ечиш планини излаш усуллари ва уни бўжариш	55
21. Масала ечинини текшириш усуллари	60
22. Масалаларни алгебранг усуллар билан ечиш	62

$3 \cdot 2 = 6$, чунки

- а) $3 \cdot 2 = 3 + 3$;
- б) агар $3 = n(A)$, $2 = n(B)$ бўлса, у ҳолда A ва B тўпламларнинг Декарт кўпайтмаларида 6 та элемент бўлади.

$6 : 3 = 2$, чунки

- а) агар $6 = n(A)$ ва A учта элементли қисм тўпламларга ажратилган бўлса, у ҳолда бундай қисм тўпламлар иккита бўлади;
- б) агар $6 = n(A)$ ва A элементлари сони тенг бўлган учта қисм тўпламга ажратилган бўлса, у ҳолда ҳар бир қисм тўпламда иккитадан элемент бўлади;
- в) $2 \cdot 3 = 6$.

МУНДАРИЖА

Сўз боши	3
I б о б. Математиканинг умумий тушунчалари	5
1- §. Математик тушунчалар	5
1. Кириш	5
2. Тушунчанинг ҳажми (кўлами) ва мазмуни	7
3. Тушунчалар таърифи	9
4. Тушунчалар таърифига қўйиладиган талаблар	12
2- §. Математик жумлалар	17
5. Содда ва мураккаб жумлалар	17
6. Фикрлар. «Ва», «ёки», «эмас» (майди) сўзларининг маъноси	18
7. Фикрий формалар	21
8. «Барча» ва «баъзи» сўзларининг маъноси	22
9. Кванторларни ўз ичига олган фикрларнинг инкорларини яшаш қоида- лари	25
10. Жумлалар орасидаги келиб чиқишлик ва тенг кучлиликл муноса- батлари	27
11. Зарур ва етарли шартлар	28
12. Теореманинг структураси. Теоремаларнинг турлари	31
3- §. Математик исботлар	33
13. Дедуктив мулоҳазалар	33
14. Дедуктив мулоҳазаларнинг энг содда схемалари	36
15. Тўлиқсиз индукция	39
16. Фикрларнинг чинлигини исботлаш усуллари	41
4- §. Текстли мисоллар ва уларни ечиш	45
17. Текстли масала тушунчаси	45
18. Текстли масалаларни ечиш усуллари	47
19. Арифметик усулларда масалалар ечиш бўлжичлари. Масала мазму- нини таҳлил қилиш усуллари	51
20. Масалани ечиш планини излаш усуллари ва уни бажариш	55
21. Масала ечимини текшириш усуллари	60
22. Масалаларни алгебраик усуллар билан ечиш	62
	331

5- §. Тўпламлар ва улар устида амаллар	64
23. Тўплам ва тўплам элементлари тушунчалари	64
24. Тўпламларнинг берилиш усуллари	66
25. Тўпламлар орасидаги муносабатлар	69
26. Тўплам ва тушунча	72
27. Тўпламлар кесишмаси	74
28. Тўпламларнинг бирлашмаси	78
29. Тўпламлар кесишмаси ва бирлашмаси қонунлари	79
30. Қисм тўпламнинг тўлдирувчиси	82
31. Тўпламларни сифларга ажратиш тушунчаси	85
32. Чекли тўпламлар устида операциялар билан боғлиқ бўлган баъзи масалалар	89
33. Тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси	92
34. Иккита сонли тўпламнинг Декарт кўпайтмасини координата текислигида тасвирлаш	96
35. Чекли тўпламларни Декарт кўпайтириш билан боғлиқ баъзи масалалар	100
6- §. Муносабат ва мослик	103
36. Муносабат тушунчаси	103
37. Муносабатларнинг берилиш усуллари	107
38. Муносабатларнинг хоссалари	109
39. Эквивалентлик муносабати	113
40. Тартиб муносабати	116
41. Мослик тушунчаси	117
42. Берилган мосликка тескари мослик	122
43. Ҳазор бир қийматли мослик	125
44. Тенг қувватли тўпламлар	127
II боб Бутун номанфий сонлар	129
7- §. Сон тушунчаси	129
45. Натурал сон ва ноль тушунчасининг вужудга келиши тарихи ҳақида	129
46. Тартиблӣ ва миқдорий натурал сонлар	131
47. Миқдорлӣ натурал сон ва нолнинг назарий тўплам маъноси	132
8- §. Бутун номанфий сонлар устида амаллар тушунчаси	134
48. Қўшиш	134
49. Қўшиш қонунлари	137
50. «Тенг» ва «кичик» муносабатлари	139
51. Айириш	141
52. « . . . та кўп» ва « . . . та кам» муносабатлари	144
53. Йигиндидан сонни ва сондан йигиндини айириш қоидалари	147
54. Кўпайтириш	149
55. Кўпайтириш қонунлари	151
56. Бўлиш	154

57. « . . . марта катта» ва « . . . марта кичик» муносабатлари . . .	157
58. Йиғиндинин сонга ва сонин кўпайтмага бўлиш қондалари	159
59. Қолдиқли бўлиш	161
60. Бутун номанфий сонлар тўпламининг хоссалари	163
9- §. Натурал соннинг маъноси ва сонлар — катталикларни ўлчаш нати- жалари устида амаллар маъноси	165
61. Кесмаларни таққослаш. Кесмалар устида амаллар	165
62. Натурал сон кесма узунлигининг қиймати сифатида	167
63. Катталикларнинг қийматлари бўлган сонларни қўшиш ва айириш- нинг маъноси	168
64. Катталикларнинг қийматлари бўлган сонларни кўпайтириш ва бўлиш маъноси	170
10- §. Бутун номанфий сонларнинг ёзуви ва улар устида амаллар алгорит- ми	173
65. Сонларнинг ўнли саноқ системасидаги ёзуви	173
66. Бутун номанфий сонларни ёзиш усулларининг пайдо бўлиши ва ривожланиши	177
67. Қадимги Русда сонларнинг ёзилиши ҳақида	182
68. Ўнли саноқ системасида кўп хонали сонларни қўшиш	184
69. Ўнли саноқ системасида кўп хонали сонларни айириш	187
70. Ўнли саноқ системасида кўп хонали сонларни кўпайтириш	191
71. Ўнли саноқ системасида кўп хонали сонларни бўлиш	195
72. Сонларнинг ўнли системадан фарқли позицион саноқ системасидаги ёзуви	199
73. Ўнли системадан фарқли позицион саноқ системасида сонлар устида амаллар	203
11- §. Бутун номанфий сонларнинг бўлинувчанлиги	205
74. Бўлинувчанлик муносабати тушунчаси	205
75. Бўлинувчанлик муносабатининг хоссалари	207
76. Бутун номанфий сонларнинг йиғиндиси, айирмаси ва кўпайтмасининг бўлинувчанлиги	209
77. Ўнли саноқ системасида сонларнинг бўлиниш аломатлари	212
78. Энг катта умумий бўлувчи ва энг кичик умумий каррали	215
79. Мураккаб сонларга бўлиниш аломатлари	217
80. Сонларни туб кўпайтувчиларга ажратиш (ёйиш) усули билан уларнинг энг катта умумий бўлувчиси ва энг кичик умумий карралисини топиш	219
81. Евклид алгоритми	221
III боб. Сон тушунчасини кенгайтириш	223
12- §. Мусбат рационал сонлар	224
82. Каср тушунчаси	224
83. Мусбат рационал сон тушунчаси	227
84. Қўшиш ва айириш	230
	333

85. Қўпайтириш ва бўлиш	233
86. Мусбат рационал сонлар тўпламининг тартибланганлиги	236
87. Мусбат рационал сонларнинг ўнли каср кўринишидаги ёзуви	239
88. Чексиз даврий ўнли касрлар	242
13- §. Ҳақиқий сонлар	244
89. Мусбат иррационал сон тушунчаси	244
90. Мусбат ҳақиқий сонлар устида амаллар	246
91. Манфий сонлар	249
IV боб. Тенгламалар. Тенгсизликлар. Функциялар	251
14- §. Сонли тенгликлар ва тенгсизликлар	251
92. Математика тилининг алфавити ҳақида	251
93. Сонли ифодалар ва ўзгарувчи ифодалар	252
94. Сонли тенгликлар ва тенгсизликлар	255
95. Ифодаларни айнан шакл алмаштириш	257
15- §. Тенгламалар ва тенгсизликлар	260
96. Бир ўзгарувчи тенгламалар	260
97. Тенгламаларнинг тенг кучлилиги	262
98. Бир ўзгарувчи тенгсизликлар. Тенгсизликларнинг тенг кучлилиги	267
16- §. Функциялар	270
99. Функция тушунчаси	271
100. Функциянинг графиги	274
101. Чизиқли функция	277
102. Тўғри пропорционаллик	280
103. Тесқари пропорционаллик	282
V боб. Катталиклар ва уларни ўлчаш	285
17- §. Катталик ва уни ўлчаш тушунчаси	286
104. Катталик тушунчаси	286
105. Катталикларни ўлчаш тушунчаси	287
106. Катталикларнинг ўлчов бирликлари системасининг ривожланиши тарихидан	289
107. Бирликларнинг халқаро системаси	292
18- §. Узунлик, юз, масса, вақт	295
108. Кесма узунлиги ва уни ўлчаш	295
109. Ғиғуранинг юзи ва уни ўлчаш	300
110. Жисмнинг массаси ва уни ўлчаш	306
111. Вақт оралиқлари ва уларни ўлчаш	308
112. Катталиклар орасидаги боғланишлар	311
Қўшимча маълумотлар	315
Илова	328

Стойлова Л. П., Пышкало А. М.

Бошланғич математика курси асослари:
Педагогика билан юрти ўқувчилари учун:—
Т.: Ўқитувчи, 1991.—336 б.

Стойлова Л. П., Пышкало А. М. Основы началь-
ного курса математики: Учеб. пособие для учащихся
педагогических училищ.

ББК 22.1

На узбекском языке

СТОЙЛОВА ЛЮБОВЬ ПЕТРОВНА,
ПЫШКАЛО АНАТОЛИЙ МИХАЙЛОВИЧ

ОСНОВЫ НАЧАЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие для учащихся педагогических училищ по специаль-
ности № 2001

Ташкент «Ўқитувчи» 1991

Таржимонлар: Н. Ғошпов, С. Бекбоева

Муҳаррирлар: Х. Алимов, С. Бекбоева, Н. Ғошпов

Расмлар муҳаррири С. Солиқ

Тех. муҳаррирлар: Т. Грешникова, Э. Вильданова

Мусахҳат Д. Умарова

ИБ № 5154

Теришга берилди 18.05.90. Босишга рухсат этилди 15.03.91. Фор-
мат 60×90/16. Тип. қоғози № 2. Кегль 10 шпонсиз. Литературная
гарнитураси. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 21,0.
Шартли кр-отт. 21,21. Нашр. л. 21,22. Тиражи 18000. Зак. № 2345.
Баҳоси 3 с 50 т.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент. Навоий кўчаси, 30. Шартнома
09-303-89.

ЎзССР Матбуот давлат комитетининг Тошполиграфкомбинати. Тош-
кент, Навоий кўчаси, 30. 1991.

Тошполиграфкомбинат Государственного комитета УзССР по печати.
Ташкент, ул. Навои, 30.

1991 йилда «Ўқитувчи» нашриёти умумий таълим мактаблари ўқитувчилари ва ўқувчилари учун қуйидаги математика адабиётларини нашр этади

ҚАРИМОВ Т. Мактабда тенглама ва тенгсизликлар.

ТУРДАЛИЕВ С., ТАТИДЗЕ Х. Математикадан контрол ишлар, 5—6- синфлар.

РИХСИЕВ Б. ва бошқ. Математикадан олимпиада масалалари.

ПЕТРАКОВ И. Математика тўғараклари, 9—11- синфлар.

МОРО М. ва бошқ. Математик ўйинлар, 1- синф.

МАДАЛИЕВА М. Саҳнада математика.

АҲМЕДОВ С., АҲМЕДОВА Н. Ўрта мактабда арифметика ўқитиш тарихидан.

05. Қўл
06. Катталих
рихидан . .
07. Бирлик
§. Узи

