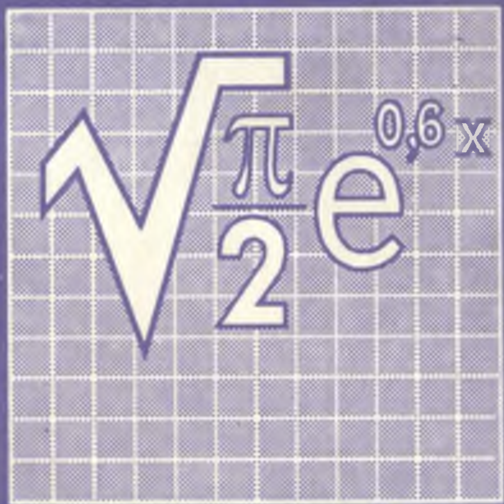
ҲИСОБЛАШ УСУЛЛАРИДАН МАШҚЛАР ВА ЛАБОРАТОРИЯ ИШЛАРИ

А.Абдуҳамидов, С.Худойназаров



А. У. АБДУЛҲАМИДОВ, С. Х. ХУДОЙНАЗАРОВ

ҲИСОБЛАШ УСУЛЛАРИДАН МАШҚЛАР ВА ЛАБОРАТОРИЯ ИШЛАРИ

Ўзбекистон Республикаси ФА мухбир аъзоси,
проф. Т. АЗЛАРОВ таҳририда

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги олий ўқув юртлари талабалари учун ўқув қўлланма сифатида тавсия этган

ТОШКЕНТ — «ЎЗБЕКИСТОН» — 1995

Тақризчилар: физика-математика фанлари докторлари, профессорлар Н. МУҲИДДИНОВ, М. ИСРОИЛОВ

Муҳаррир — Н. Ғоипов

Абдулҳамидов А. У., Худойназаров С.
А 15 Ҳисоблаш усулларидан машқлар ва лаборатория ишлари: Олий ўқув юртлари талабалари учун ўқув қўлланма / Т. Азларов таҳририда.— Т.: Ўзбекистон, 1995.—223 б.

I. Автордош.

ISBN 5-640-01779-1

Ушбу қўлланма университетлар, педагогика институтлари ва олий техника ўқув юртларининг «Ҳисоблаш усуллари» курси материалини ўз ичига олади.
Китоб университетлар, педагогика институтлари ва олий техника ўқув юртлари талабаларига мўлжалланган.

22.19я73

А $\frac{1602120000-51}{М 351 (04)-95}$ 95

«ЎЗБЕКИСТОН» нашриёти, 1995 й.

СЎЗ БОШИ

Ушбу масалалар тўплами университетларнинг «математика» ихтисоси бўйича «Ҳисоблаш усуллари ва ҳисоблашлардан практикум» курси дастури асосида тайёрланди. Китобни ёзишда ҳозирги вақтда амалда қўлланилаётган қатор дарсликлар ва қўлланмалардан фойдаланилди, қўлланманинг I—VII боблари профессор М. И. Исроиловнинг «Ҳисоблаш методлари, I қисм» (Тошкент, «Ўқитувчи», 1988) ўқув қўлланмасига мувофиқлаштирилди.

Қўлланма ўн бир бобдан иборат бўлиб, ҳар қайси бобнинг бошида ҳисоблашлар учун зарур назарий маълумот ва типик машқларни ечиш усуллари, услубий кўрсатмалар берилган, сўнг мавзуга доир машқлар, лаборатория иши вариантлари келтирилган. Китобнинг охирида боблар бўйича машқларнинг жавоблари ва уларни ечиш учун кўрсатмалар келтирилган. Мураккаб ҳисоблашларни ЭҲМ ёки микрокалькулятор (асосан, уларнинг программаланадиган турлари) ёрдами билан бажариш кўзда тутилади.

Ўзларининг қимматли маслаҳатлари, фикр-мулоҳазалари билан ушбу қўлланманинг такомилига ҳиссаларини қўшган Ўзбекистон Фанлар академиясининг мухбир аъзоси проф. Т. А. Азларовга, проф. М. И. Исроилов, проф. Ш. Ё. Ёрмухамедов, проф. Н. Муҳиддиновга ўз миннатдорчилигимизни изҳор этамиз.

«Ҳисоблаш усулларидан машқлар ва лаборатория ишлари» қўлланмаси ўзбек тилида ёзилган илк тажриба сифатида нуқсонлардан холи бўлмаслиги табиийдир. Шунинг учун ҳам биз қўлланма ҳақидаги барча танқидий фикр ва мулоҳазаларни зўр мамнуният билан қабул қилишга тайёрмиз.

Муаллифлар

1-боб. МАСАЛАЛАРНИ СОНЛИ ЕЧИШ ЖАРАЁНИДА ВУЖУДГА КЕЛАДИГАН ХАТО

Миқдорнинг аниқ қиймати (аниқ сон) a билан унинг тақрибий қиймати (тақрибий сон) a^* орасидаги $a - a^*$ фарқ шу тақрибий соннинг *ҳақиқий хатоси*, $\Delta a^* = |a - a^*|$ эса унинг *абсолют (мутлақ) хатоси* дейилади. Агар a соннинг ўзи номаълум бўлса (масалан, ўлчаб топилган катталик қиймати ҳар вақт у ёки бу даражада четланишга эга бўлса), Δa^* ҳам ноаниқ бўлади. Лекин, кўпинча, Δa^* қабул қилиши мумкин бўлган чегара қийматини кўрсатиш мумкин. Унга тақрибий соннинг $\Delta(a^*)$ *лимит (чегаравий) абсолют хатоси* дейилади: $|a - a^*| \leqslant \Delta(a^*)$, ёки бундан $a^* - \Delta(a^*) \leqslant a \leqslant a^* + \Delta(a^*)$ ёки қисқароқ $a = a^* \pm \Delta(a^*)$. Бу ёзувлардаги $a^* - \Delta(a^*)$ га номаълум a қабул қилиши мумкин бўлган қийматларнинг *қуйи чегараси*, $a^* + \Delta(a^*)$ га эса унинг *юқори чегараси* дейилади. Тақрибий соннинг нисбий хатоси: $\delta a^* = \frac{\Delta a^*}{|a^*|}$, лимит нисбий хато: $\delta(a^*) = \frac{\Delta(a^*)}{|a^*|}$ (исмсиз сон ёки % да ёзилади). Нисбий хато ёрдамида a аниқ сон $a = a^*(1 + \delta(a^*))$ кўринишда ифодаланади.

Агар ечилиши талаб қилинадиган масала математик жиҳатдан тақрибий таърифланган, сонли маълумотлар тақрибий берилган бўлса, ҳисоблаш натижалари ҳам тақрибий бўлиб, улар йўқотилмас (систематик) хатога эга бўлади. Масалани ечишда тақрибий усулнинг қўлланилишидан услуб хатоси, сонларни яхлитлашдан ҳисоблаш хатоси (яхлитлаш хатоси) вужудга келади. Йўқотилмас, услуб ва ҳисоблаш хатоларининг йиғиндиси тўлиқ хатони ифодалайди.

Сонларни яхлитлашнинг содда қоидаси: сонни бирор хонанинг 1 бирлигигача аниқлик билан яхлитлаш учун шу хонадан ўнг томонда турган барча рақамлар ўчирилиб, ноллар билан алмаштирилади. Натижада вужудга келадиган абсолют хато ўчирилмай сақланган рақам хонасининг 1 бирлигидан ошмайди.

1-мисол. $\pi = 3{,}14159\ \ldots$ сони 0,0001 гача аниқлик билан яхлитланса, $\pi = 3{,}14159$ тақрибий сон ҳосил бўлади.

Юқори хонанинг 1 бирлигигача тўлдириш қоидаси: сонни бирор хона бирлигининг ярмисигача аниқлик билан яхлитлаш учун: а) шу хонадан ўнг томонда турган барча рақамлар ўчирилади; б) агар чапдан биринчи ўчирилган рақам 5 ва ундан катта бўлса, сақланган рақамга 1 қўшилади, 4 ва ундан кичик бўлса, сақланадиган рақам ўзгартирилмайди. Натижада вужудга келадиган хато сақланган рақам хонаси 1 бирлигининг ярмидан ошмайди.

2-мисол. $\pi = 3{,}14159\ \ldots$ сони 0,00005 гача аниқлик билан яхлитланганда, $\pi \approx 3{,}1416$ сони ҳосил бўлади.

Қийматли $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_m$ рақамлари m та бўлган n хонали $a^* = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k \ldots a_m} \cdot q^{n-m}$ тақрибий сон берилган бўлсин, бунда q — саноқ системасининг асоси. Агар шу соннинг абсолют хатоси $\Delta(a^*) \leqslant \omega q^{n-k+1}$ $(0{,}5 \leqslant \omega \leqslant 1)$ бўлса, у ҳолда a_k рақам ва ундан чап томонда турган рақамлар ишончли рақамлар, ўнг томонда турган рақамлар эса ишончсиз рақамлар деб аталади. Тақрибий сон шундай ёзиладики, унинг охирги қийматли рақами ҳар доим ишончли бўлса, ишончсиз рақамлар ташланади.

3-мисол. 0,307 тақрибий сони ёзилишига кўра 10^{-3} гача (яъни учта қийматли рақамгача) аникликка эга. Шу сон 10^{-4} гача аниқлик билан берилганда, уни 0,3070 кўринишда, 10^{-2} гача аниқлик билан берилганда эса охирги «7» рақами ишончсиз бўлиб қоларди ва шунга кўра сон 0,31 кўринишда ёзилган бўларди.

Функциянинг йўқотилмас хатоси. Аргументларнинг $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ тақрибий қийматлари ва $\Delta(x_1^*), \Delta(x_2^*), \ldots, \Delta(x_n^*)$ абсолют хатолар бўйича $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ функциянинг y^* тақрибий қийматини ва $\Delta(y^*)$ абсолют хатони топиш керак бўлсин. Масала функциянинг $y^* - \Delta(y^*) \leqslant y \leqslant y^* + \Delta(y^*)$ ўзгариш соҳасини топишга келади. Агар қаралаётган $|x_i - x_i^*| \leqslant \Delta(x_i^*)$ $(i = \overline{1, n})$ соҳада f функция узлуксиз дифференциалланувчи бўлиб, хусусий ҳосилалари секин ўзгарса ва аргументнинг $\delta(x_1^*), \delta(x_2^*), \ldots, \delta(x_n^*)$ нисбий хатолари етарлича кичик бўлса, функция хатоси қуйидаги формулалар бўйича ҳисобланиши мумкин:

$$\Delta(y^*) = \sum_{i=1}^{n} |f_{x_i}(x^*)| \cdot \Delta(x_i^*), \qquad (1)$$

$$\delta(y^*) = \frac{\Delta(y^*)}{|f(x^*)|}, \quad \delta(y^*) = \sum_{i=1}^{n} |\{\ln f(x^*)\}'_{x_i}| \cdot \Delta(x_i^*), \qquad (2)$$

$$\delta(y^*) = \sum_{i=1}^{n} |x_i^* \{\ln f(x^*)\}'_{x_i}| \cdot \delta(x_i^*).$$

Хусусан, n та мусбат тақрибий сонлар $u = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ йиғиндисининг абсолют ва нисбий хатолари:

$$\Delta(u^*) = \sum_{i=1}^{n} \Delta(x_i^*), \quad \delta(u^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^*}{u^*} \delta(x_i^*), \qquad (3)$$

$u = x_1 - x_2$ айирма учун (бунда $x_1 > x_2 > 0$):

$$\Delta(u^*) = \Delta(x_1^*) + \Delta(x_2^*), \quad \delta(u^*) = \frac{x_1^* \cdot \delta(x_1^*) + x_2^* \cdot \delta(x_2^*)}{u^*}. \qquad (4)$$

Бир хил аниқликка эга бўлган $n > 10$ та тақрибий сон йиғиндисининг абсолют хатосини ҳисоблаш учун одатдаги $n \cdot \Delta$ эмас, балки эҳтимолий хусусиятга эга бўлган $\Delta \cdot \sqrt{3n}$ Чеботарев қоидасидан (хатонинг имконли чегарасини ҳисоблашдан) фойдаланадилар.

4-мисол. Хатоси $\Delta x \leqslant 0,5 \cdot 10^{-k}$ бўлган $n = 16$ та тақрибий сон йиғиндисининг Δ чегаравий хатосини ((3) формула бўйича) ва ε имконли хатосини ((3′) формула бўйича) топамиз:

$$\Delta = 16 \cdot \Delta x = 16 \cdot 0,5 \cdot 10^{-k} = 8 \cdot 10^{-k},$$

$$\varepsilon = \sqrt{3 \cdot 16} \cdot 0,5 \cdot 10^{-k} = 2\sqrt{3} \cdot 10^{-k} \approx 3,48 \cdot 10^{-k}.$$

Агар камаювчи ва айирилувчи тақрибий сонлар бир-бирларига яқин бўлсалар, уларнинг айирмаси кичик, аниқлиги паст бўлиши, натижада айирмада ишончли рақамлари кам бўлиши мумкин. Бунинг олдини олиш учун бошқа формулалардан фойдаланиш, ёки компоненталарни аниқроқ қилиб олиш керак бўлади.

5-мисол. $a = (5,7 \pm 0,08) - (5,6 \pm 0,06)$ ни ҳисоблайлик. $5,7 - 5,6 = 0,1$, $\Delta = 0,08 + 0,06 = 0,14$, яъни айирма 0,1 га тенг бўлгани ҳолда, унинг абсолют хатоси ўзидан ҳам катта (0,14) бўлмоқда. Жавоб қониқарсиз. Компоненталар аниқроқ олиниши керак. Масалан, уларнинг абсолют

хатоси $\pm$ 0,025 га тенг бўлганда, айирманинг хатоси $\Delta =$
$= 0,05$ бўлиб, унда битта қийматли рақам, хато $\pm$ 0,0001
бўлганда, айирма хатоси $\Delta = 0,0002$ бўлиб, унда учта қий-
матли рақам мавжуд бўларди ($a \approx 0,100$).

$u = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n (x_i > 0)$ тақрибий сонлар кўпайтмасининг хатоси:

$$\Delta(u^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{u^*}{x_i^*} \Delta(x_i^*), \quad \delta(u^*) = \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i^*). \qquad (5)$$

$u = \frac{x_1}{x_2} (x_1, x_2 > 0)$ бўлинманинг хатоси:

$$\Delta(u^*) = \frac{1}{(x_2^*)^2} [x_2^* \cdot \Delta(x_1^*) + x_1^* \cdot \Delta(x_2^*)], \quad \delta(u^*) = \delta(x_1^*) + \delta(x_2^*). \qquad (6)$$

Аргументи тақрибий қийматга эга бўлган $y = \ln x$ логарифм тақрибий қийматининг хатоси:

$$\Delta(y^*) = \frac{\Delta(x^*)}{x^*} = \delta(x^*); \qquad (7)$$

$y = \lg x = M \ln x$ ўнли логарифм учун: $\Delta(\ln x^*) = M\delta(x^*) =$
$= 0,4343\,\delta(x^*)$, бунда $M = \lg e \approx 0,4343$ — ўтиш модули.

Ишончли рақамларни санаш қоидалари. Тақрибий сонларни қўшиш ва айиришда тақрибий компоненталарнинг қайси бирида ўнли рақамлар сони энг кам бўлса, топилган натижада ҳам ўшанча ўнли рақам қолдирилади. Кўпайтириш ва бўлишда тақрибий компоненталарнинг қайси бирида энг кам ишончли рақам бўлса, натижада ҳам ўшанча ишончли рақам қолдирилади.

6-мисол. $a \approx 25$. $b \approx 160$, $c \approx 0,80$, $x = ab/c$ ни ҳисоблаймиз. a сони иккита, b учта, c иккита ишончли рақамга эга. Натижа иккита ишончли рақам билан олиниши керак:

$$x \approx (25 \cdot 160)/0,80 = 5000 = 50 \cdot 10^2.$$

МАШҚЛАР

1. 17,00675 аниқ сонни 0,1 гача, 1 гача, $0,5 \cdot 10^{-3}$ гача аниқлик билан яхлитлаш хатосини топинг.

2. Ўлчаш натижасида деталнинг узунлиги 36,0 см экани аниқланган. Топилган қийматнинг нисбий хатоси 0,8% дан ошмайди. Деталь узунлигининг чегаравий қийматларини топинг.

3. Икки кесмадан бирининг узунлиги 1 м $\pm$ 1 мм, ик-

кинчисининг узунлиги 20 см $\pm$ 0,5 мм. Қайси кесманинг узунлиги аниқроқ топилган ва нима учун?

4. 34,5867 тақрибий соннинг нисбий хатоси $\pm 0,1\%$. Ишончсиз рақамларини аниқланг, сонни яхлитлаб, хатосини топинг.

5. Натурал логарифмнинг $e = 2,71828183\ \ldots$ асосини: а) еттита ишончли рақамгача аниқлик билан ёзинг; б) $0,5 \cdot 10^{-3}$ гача аниқлик билан яхлитланг. Натижаларнинг абсолют ва нисбий хатоларини топинг.

6. Нисбий хатоси 0,02% дан ошмаслиги учун $\sqrt{34}$, $\sqrt[3]{128}$, $\ln 56$ ни нечта ўнли ишора билан олиш керак?

7. (1) ва (2) формулалардан фойдаланиб, a^x $(a>0,\ a\neq 1)$, x^k (k — ҳақиқий сон), $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ (x — радианларда) функцияларнинг абсолют ва нисбий хатоларини топиш учун формулалар чиқаринг. Ихтиёрий k ва $x = 1,2 \pm 0,01n$ $(n = 1, 2, \ldots, 10)$ учун 2^x, x^k, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ нинг қийматини топинг.

8. Берилган: $a = 35 \pm 0,1$, $b = 2,34 \pm 0,02$, $c = 0,55(1 \pm 3\%)$. Қуйидагилар топилсин: 1) $x = 2a - b$; 2) $y = a + 5b$; 3) $t = ac$; 4) $u = c/b$; 5) $v = \sqrt{ac}$; 6) $z = \lg b$.

9. Радиуси $2,4 \pm 0,2$ см, ясовчиси $56 \pm 0,8$ см бўлган цилиндрнинг асос юзи, ён сирти ва ҳажмини топинг.

10. Ушбу $x = \frac{(a+b)c}{k-e}$ ифоданинг сон қийматини топинг, бунда $a = 50$, $34,6 < b < 34,7$, $19 < c < 20$, $3,2 < k < 3,3$, $e = 12$.

11. 10-мисол $a = 50$, $b \approx 46,00$, $c \approx 21$, $k \approx 4,842$, $e \approx 1,87$ да ечилсин.

12. Цилиндр асосининг радиуси $R \approx 4$ м, баландлиги $H \approx 70$ дм. S ён сирти ва V ҳажмини топинг. S ни 0,01 $м^2$ гача аниқлик билан топиш учун R ва H қандай аниқликда олиниши керак? V ни 0,1 $м^3$ гача аниқлик билан топиш учун-чи?

13. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ оралиқ учун $y = \lg \sin x$, $y = \lg \operatorname{tg} x$, $y = 10^x$ функциялар тақрибий қийматлари бўйича аргументнинг тақрибий қийматлари хатосини аниқлаш формулаларини чиқаринг.

14. Ушбу $y = \lg \operatorname{tg} x$ функция қийматларининг тўрт хонали жадвалидан фойдаланиб, аргументнинг $x \approx 60°$ қиймати топилган. Бу қийматнинг абсолют хато катталиги баҳолансин.

15. Ушбу $\lg \sin x$ ва $\lg \operatorname{tg} x$ функциялар учун тўрт хонали жадваллардан фойдаланилиб, аргументнинг 30°, 42°30′, 70° қийматлари топилган. Бу қийматларнинг абсолют ва нисбий хатолари баҳолансин.

16. 10^x қийматлари (антилогарифмлар)нинг беш хонали жадвалидан $x \approx 5$ аниқланган. Бу топилган қийматнинг абсолют ва нисбий хатосини ҳисобланг.

17. Айлана узунлиги, доира юзи, конус ва цилиндрнинг ён сирти учун хатони ҳисоблаш формулаларини чиқаринг.

18. Ишончли рақамларни санаш қоидаларидан фойдаланиб, тақрибий сонлар устида амалларни бажаринг: 1) $418,66781 + 12,4266 + 6,102 + 3,902$; 2) $\frac{1}{7} + \frac{1}{6} - \frac{2}{9} + \frac{1}{11}$ (сурат ва махражда аниқ сонлар турибди); 3) $17,906 - 6,5408$; 4) $37,523 + 0,60 - 6,5408$; 5) $\sqrt{12} - \sqrt{8} + \sqrt{14}$; 6) $0,2\sqrt{200} - 5\sqrt{7,08} + 0,4\sqrt{60} + 7\sqrt{10}$ (илдиз ишоралари олдида турган сонлар аниқ); 7) $78,064 \cdot 16$; 8) $0,5442 : 9$; 9) $7\sqrt{17} \cdot 2\sqrt{8}$; 10) $4,964 \cdot 24,5 \cdot 4\sqrt{66}$; 11) $67,142 : 13$; 12) $45 : 66,42$; 13) $45,8 : 6\sqrt{19}$; 14) $14 : 0,67 \cdot 5 - 0,18 : 2,4$.

19. Ушбу $a = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$ формуладан фойдаланиб, Ойнинг Ер атрофида ҳаракатидаги марказдан қочма кучининг тезланишини ҳисобланг, бунда R км билан, T сутка билан ифода қилинган бўлиб, $\pi = 3,14159\ \ldots$ $R \approx 60,27r$, $r \approx 6371$ км, $T \approx 27,32$ сутка.

20. Ушбу $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$ чексиз қаторлардан фойдаланиб, $\sin 0,8$ ва $\cos 0,3$ ларни тўртта ишончли рақамгача аниқлик билан топинг.

21. $x^2 - 2x + \lg 2 = 0$ тенглама илдизларини тўртта ишончли рақам билан олиш учун озод ҳад нечта ишончли рақамга эга бўлиши керак?

1- ЛАБОРАТОРИЯ ИШИ

1. x аргументнинг Δx абсолют ёки δx нисбий хато қийматлари маълум. $y = f(x)$ функция эга бўлиши мумкин бўлган $\Delta(y)$ ва $\delta(y)$ хато чегараларини ҳисобланг:

Вариант	Δx	δx	$f(x)$	Вариант	Δx	δx	$f(x)$
1		1,2%	$-(x+1)^3-2$	14	0,002		$\sqrt{\operatorname{tg} x}$
2		1,4%	$(x^2+1)/(x-1)$	15	0,003		$\sqrt{2^x}$
3	0,001		$\sqrt{x^2-4}$	16		1%	$\cos^3 2x$
4	0,002		$-\sqrt{10-x^3}$	17		1%	$\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$
5		1%	$\log_{1/3}(x+1)$	18		2%	$\cos^2 3x$
6	0,002		$1/(1+x^3)$	19	0,002		4^{3x^2}
7		2%	$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$	20	0,002		$\sin^3 2x$
8	0,001		$-2+\cos^2 x$	21		1%	$4^{\operatorname{tg}^2 x}$
9		1,5%	$2\operatorname{tg}\sqrt{x}$	22		2%	$\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{6-x}$
10	0,001		$\lg\cos x$	23		1%	$x^2-4x-45$
11	0,001		$\operatorname{arctg} x^2$	24	0,002		$\log_2 x^3$
12		1%	$2^{\operatorname{tg} x}$	25		2%	$\log_3(x+1)$
13	0,002		$\sqrt{\cos x}$				

2. $f(x)$ функция қийматини 4 та ишончли рақамгача аниқлик билан олиш учун x аргумент нечта ишончли рақам билан олиниши кераклигини топинг:

Вариант	$f(x)$	Вариант	$f(x)$
1	$x^2 \sin x$	14	$\sqrt{x}\cos x$
2	$x^2 \ln x$	15	$\sqrt{x}\sin x$
3	$e^x \sin x$	16	$\sqrt{x}\operatorname{tg} x$
4	$e^x \cos x$	17	$\sqrt{x}\operatorname{ctg} x$
5	$e^x \operatorname{tg} x$	18	$x/\sin x$
6	$e^x \cdot \operatorname{ctg} x$	19	$x/\cos x$
7	$\ln\operatorname{tg} x$	20	$x/\operatorname{tg} x$
8	$\ln\operatorname{ctg} x$	21	$x/\operatorname{ctg} x$
9	$\ln\sin x$	22	$\sin^2 x$
10	$\ln\cos x$	23	$\cos^3 x$
11	$x^3\operatorname{tg} x$	24	$\operatorname{tg}^2 x$
12	$x^3\operatorname{ctg} x$	25	$\operatorname{ctg}^3 x$
13	$x^2\sin x$		

-боб. ТЕНГЛАМАЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ

Илдизларни ажратиш. Ушбу

$$f(x)=0 \tag{1}$$

тенгламани тақрибий ечиш учун олдин унинг илдизи мавжуд бўлган етарлича кичик оралиқ аниқланади (илдиз ажратилади). Қуйидаги фикрлар илдиз ётган оралиқни ажратишга ёрдам беради:

1) Агар $f(x)$ узлуксиз функция $[a, b]$ оралиқнинг четки a ва b нуқталарида ҳар хил ишорали қийматларни қабул қилса, яъни

$$f(a)\,f(b)<0 \tag{2}$$

шарт бажарилса, у ҳолда (1) тенглама шу оралиқда ҳеч бўлмаса битта ҳақиқий илдизга эга бўлади. Агар, бундан ташқари, $f(x)$ шу оралиқда монотон бўлса, яъни унда $f'(x)$ ҳосила мавжуд ва ишораси ўзгармаса, шу оралиқда $f(x)$ фақат битта илдизга эга бўлади. (2) тенгсизлик бажарилмаган тақдирда (1) тенглама $[a, b]$ оралиқда ё илдизга эга эмас, ё жуфт сондаги илдизларга эга (бунга каррали илдизлар ҳам киради).

2) Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аналитик (яъни шу оралиқдаги ҳар қайси нуқта атрофида яқинлашувчи даражали қаторга ёйилса) ва (2) шарт бажарилса, (1) тенглама шу оралиқда тоқ сондаги илдизларга эга бўлади.

3) Ушбу

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0 \tag{3}$$

алгебраик тенглама учун $A=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\frac{a_k}{a_0}\right|$, $A_1=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}\left|\frac{a_k}{a_n}\right|$ бўлсин. У ҳолда (3) тенгламанинг барча илдизлари $r=\frac{1}{1+A_1}<|x|<1+A=R$ ҳалқа ичида ётади, r ва R сонлари тенгламанинг x^+ мусбат, $-R$ ва $-r$ сонлари эса x^- манфий илдизларининг қуйи ва юқори чегараси бўлади.

4) Лагранж теоремаси: $P(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^{n-i}=0$ тенгламанинг чапдан биринчи манфий коэффициенти a_k ва барча манфий коэффициентлари ичида абсолют қиймат бўйича энг каттаси B бўлсин. У ҳолда бу тенглама мусбат илдизининг юқори чегараси

$$R = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} \qquad (4)$$

бўлади.

5) **Ньютон теоремаси:** бирор $x = c > 0$ да $P(x)$ кўпҳад ва унинг барча $P'(x)$, $P''(x)$, . . . , $P^{(n)}(x)$ ҳосилалари номанфий бўлсин. У ҳолда $P(x) = 0$ тенглама мусбат илдизларининг юқори чегараси $x^+ \leqslant R = c$ бўлади.

6) $K(x) = a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_n$, $L(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $M(x) = a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_0$ кўпҳадлар x^+ мусбат илдизларининг юқори чегараси мос тартибда R_1, R_2, R_3 бўлсин. У ҳолда (3) тенглама учун $\frac{1}{R_2} \leqslant x^+ \leqslant R$ ва $-R_1 \leqslant x^- \leqslant -\frac{1}{R_3}$ ўринли бўлади.

7) Ҳар қандай ҳақиқий коэффициентли тоқ даражали тенглама ҳеч бўлмаганда битта ҳақиқий илдизга эгадир.

8) **Декарт теоремаси:** (3) тенглама коэффициентлари кетма-кетлигида ишора алмашиниши сони қанча бўлса (бунда нолга тенг коэффициентлар эътиборга олинмайди), тенгламанинг шунча мусбат илдизи мавжуд ёки мусбат илдизлар сони ишора алмашишлар сонидан жуфт сонга кам.

9) **Штурм теоремаси:** (3) тенглама каррали илдизга эга бўлмасин. $P_1(x)$ орқали $P'(x)$ ҳосилани, $P_2(x)$ орқали $P(x)$ ни $P_1(x)$ га бўлишдан қоладиган қолдиқнинг тескари ишора билан олинганини, $P_3(x)$ орқали $P_1(x)$ ни $P_2(x)$ га бўлишдан қоладиган қолдиқнинг тескари ишора билан олинганини ва ш. у. белгилайлик ва бу жараённи то қолдиқда $P_k(x) = P_k = \mathrm{const}$ ўзгармас сон ҳосил бўлгунича давом эттирайлик. $P(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, . . . , $P_{k-1}(x)$, P_k Штурм кетма-кетлигига эга бўламиз. $P(x)$ нинг илдизларидан фарқ қилувчи $x = a$ сонини олиб, унда $P(a)$, $P_1(a)$, $P_2(a)$, . . . , P_k қийматлар кетма-кетлигида ишора алмашинишини аниқлаймиз. У A га тенг бўлсин. Худди шу каби $x = b$ да кетма-кетликдаги ишора алмашиши B бўлсин. У ҳолда $P(x) = 0$ тенгламанинг $(a;\ b)$ интервалдаги барча ҳақиқий илдизлари сони $A - B$ та бўлади.

1-мисол. $P(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8 = 0$ тенглама ҳақиқий илдизлари ётган чегара топилсин.

Ечиш. $a_0 = 1$, $a_n = -8$; 3-мулоҳаза бўйича $A = 8$, $A_1 = 1$, $r = 0{,}5$, $R = 9$. Тенгламанинг илдизлари $(-9;\ -0{,}5)$ ва $(0{,}5;\ 9)$ интервалларда ётади. Лагранж ёки Ньютон теоремаларига асосланиб, бу натижани аниқроқ баҳолаш мумкин. Ньютон теоремаси бўйича: $P'(x) = 4x^3 - 10x + 8$, $P''(x) = 12x^2 - 10$, $P'''(x) = 24x$, $P^{IV}(x) = 24$. Ихтиёрий $c = 2$ сонини оламиз. Унда $P > 0$, $P' > 0$, $P'' > 0$, $P''' > 0$, $P^{IV} > 0$. Демак, $c = 2$ — мусбат илдизларнинг юқори чегараси. Шунингдек, $K(x) = 0$ тенглама мусбат илдизларининг юқори чегараси $R_1 = 3$ бўлганидан 7-мулоҳаза бўйича $P(x) = 0$ тенглама манфий илдизларининг қуйи чегараси $-R_1 = -3$. Илдизлар $(-3;\ 2)$ оралиқда, аниқроғи эса олдин топилган натижа ҳам эътиборга олинса $(-3;\ -0{,}5)$, $(0{,}5;\ 2)$ интервалларда ётиши маълум бўлади. Энди илдизлар сонини аниқлайлик. $P(x)$ кўпҳад коэффициентлари кетма-кетлигида ишора уч марта алмашмоқда: $+ - + -$. Декарт теоремаси бўйича тенглама учта ёки битта мусбат илдизга эга. Манфий илдизлар сонини билиш мақсадида тенгламадаги x ни $-x$ га алмаштирамиз: $P(-x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8$. Бунда ишора бир марта алмашади: $+ - - -$. Бунга қараганда $P(-x)$ битта мусбат (демак, $P(x)$ битта манфий) илдизга эга. Шундай қилиб, $(-3;\ -0{,}5)$ оралиқда берилган тенгламанинг битта манфий илдизи, $(0{,}5;\ 2)$ оралиқда эса битта ёки учта мусбат илдизи мавжуд. Зарур бўлса Штурм теоремасига мурожаат қилиш мумкин. Чунки у илдизларни ажратиш масаласини тўлароқ ҳал қилишга имкон беради:

$$P(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8, \quad P_1(x) = P'(x) = 4x^3 - 10x + 8,$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 10x^2 + 16x - 16 & 2x^3 - 5x + 4 \\ \cline{2-2} -\ 2x^4 - 5x^2 + 4x & x \\ \cline{1-1} -5x^2 + 12x - 16, & \end{array}$$

бундан $P_2(x) = 5x^2 - 12x + 16$.

$$\begin{array}{r|l} 10x^3 - 25x + 20 & 5x^2 - 12x + 16 \\ \cline{2-2} -\ 10x^3 - 24x^2 + 32x & 2x + 4{,}8 \\ \cline{1-1} 24x^2 - 57x + 20 & \\ -\ 24x^2 - 57{,}6x + 76{,}8 & \\ \cline{1-1} 0{,}6x - 56{,}8 & \end{array}$$

ёки $3x - 284$, бундан $P_3(x) = 3x + 284$.

Шу каби $15x^2 - 36x + 48$ ни $-3x + 284$ га бўлганда қолдиқда $133054\frac{2}{3}$ қолади, бундан $P_4(x) = -133054\frac{2}{3}$. Энди ихтиёрий -3, $-2{,}9$, 0, $1{,}5$ ва 2 сонларини олиб, уларда

Штурм функциялари кетма-кетлигида ишора қандай алмашинишини кузатамиз (жадвалга қаранг):

x	-3	$-2{,}9$	0	1,5	2
$\operatorname{sign}P(x)$	+	—	—	—	+
$\operatorname{sign}P_1(x)$	—	—	+	+	+
$\operatorname{sign}P_2(x)$	+	+	+	+	+
$\operatorname{sign}P_3(x)$	+	+	+	+	+
$\operatorname{sign}P_4(x)$	—	—	—	—	—
Ишора алмашинишлар сони	3	2	2	2	1

Жадвал устунларини солиштириб, $(-3;\ -2{,}9)$ интервалда тенгламанинг битта (манфий) илдизи, $(1{,}5;\ 2)$ интервалда битта (мусбат) илдизи борлигини аниқлаймиз.

Хорнер схемасини кетма-кет қўллаш йўли билан $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ кўпҳад ва унинг $P_n^1(x)$, $P_n''(x)$, ... ҳосилаларининг $x=\eta$ нуқтадаги қийматларини топиш: $P_n(x) = (x-\eta)\, Q_{n-1}(x) + R_1$, бунда $Q_{n-1}(x) = b_0^{(0)} x^{n-1} + b_1^{(0)} x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}^{(0)}$ — бўлинма, R^1 — қолдиқ, $Q_{n-1}(x) = (x-\eta)\, Q_{n-2}(x) + R_2$ ва ҳоказо, $(j+1)$ — қадамда $Q_{n-j}(x)$ ни $(x-\eta)$ га бўлганда $Q_{n-j}(x) = (x-\eta)\, Q_{n-j-1}(x) + b_{n-j}^{(j)}$ ҳосил бўлсин. Натижада $P_n(x)$, $Q_{n-1}(x)$, $Q_{n-2}(x)$, ..., $Q_1(x)$, $Q_0(x)$ кўпҳадлар коэффициентларидан тузилган учбурчак матрица ҳосил бўлади:

$$\begin{array}{cccccc}
a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
b_0^{(0)} & b_1^{(0)} & \ldots & b_{n-2}^{(0)} & b_{n-1}^{(0)} & b_n^{(0)} \\
b_0^{(1)} & b_1^{(1)} & \ldots & b_{n-2}^{(1)} & b_{n-1}^{(0)} & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & b_0^{(n-1)} & b_1^{(n-1)} & & \\
 & & b_0^{(n)}, & & &
\end{array} \tag{5}$$

бунда

$$b_0^{(j)} = b_0^{(j-1)},\ b_i^{(j)} = b_i^{(j-1)} + b_{i-1}^{(j)}\,\eta\,(i = \overline{1, n-j},\ j = \overline{0; n}),$$
$$b_i^{(-1)} = a_i\ (i = \overline{0, n}). \tag{6}$$

Кўпҳад ва ҳосила қийматлари қуйидаги муносабатлардан аниқланади:

$$P_n(\eta) = b_n^{(0)},\ P_n^{1}(\eta) = b_{n-1}^{(1)} \cdot 1!,\ \ldots,\ P_n^{(n)}(\eta) = b_0^{(n)}\, n! \tag{7}$$

2-мисол. $P_4(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8$ кўпҳад ва унинг ҳосилаларининг $x = 2$ нуқтадаги қийматларини топамиз. Бунинг учун (6) формулалардан фойдаланиб, (5) матрицани тузамиз ва (7) муносабатлар бўйича $P(x)$ ва ҳосилаларнинг $x = 2$ даги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$x = 2 \quad \begin{array}{rrrrr}
1 & 0 & -5 & 8 & -8 \\
1 & 2 & -1 & 6 & 4 \\
1 & 4 & 7 & 20 & \\
1 & 6 & 19 & & \\
1 & 8 & & & \\
1 & & & &
\end{array} \qquad \begin{array}{l}
P_4(2) = 0! \cdot 4 = 4, \\
P^{\mathrm{I}}(2) = 1! \cdot 20 = 20, \\
P_4^{\mathrm{II}}(2) = 2! \cdot 19 = 38, \\
P_4^{\mathrm{III}}(2) = 3! \cdot 8 = 48, \\
P_4^{\mathrm{IV}}(2) = 4! \cdot 1 = 24.
\end{array}$$

Илдизларни топиш. Кесмани тенг иккига бўлиш усули. $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз ва $f(a)+f(b) < 0$ шарт бажарилсин. $f(x) = 0$ тенгламанинг шу оралиқда ётган ξ илдизини ε аниқликда топиш учун оралиқ тенг иккига бўлинади ва $c = (a+b)/2$ ўрта нуқта топилади. Агар $f(c) = 0$ (ёки $|f(c)| \leqslant \varepsilon$) бўлса, $\xi = c$ (ёки $\xi \approx c$) бўлади ва масала ҳал. Агар $f(c) \neq 0$ (ёки $|f(c)| > \varepsilon$) бўлса, $[a, c]$ ва $[c, b]$ оралиқлардан қайсисининг чекка нуқталарида $f(x)$ функция қарама-қарши ишорага эга бўлса, илдиз шу оралиқда ётади. Унинг чекка нуқталарини a_1, b_1 билан белгилаймиз. Янги кесманинг c_1 ўрта нуқтаси ξ нинг $\varepsilon_1 \leqslant (b_1 - a_1)/2$ ёки $\varepsilon_1 \leqslant f(c_1)$ аниқликдаги $x_1 = c_1$ биринчи яқинлашишидан иборат. Энди $[a_1 b_1]$ кесма тенг иккига бўлинади, $c_2 = (a_2 + b_2)/2$ ва $f(c_2)$ топилади ва ҳоказо. n- қадамда топилган кесма узунлиги $b_n - a_n = (b-a)/2^n$ бўлади. Ушбу $\varepsilon_n = |x_n - \xi|$ белгилашни киритайлик. У ҳолда $\varepsilon_{n+1} \leqslant 0{,}5\, \varepsilon_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ бўлади. Бунга қараганда кесмани тенг иккига бўлиш усули биринчи тартибли тезлик билан яқинлаштирувчи услублар синфига киради.

Оддий итерация усули. $f(x) = 0$ тенглама унга тенг кучли бўлган $x = \varphi(x)$ кўринишга келтирилади; x_0 бошланғич x қиймат (яқинлашиш) танланади; кейинги x_{n+1} яқинлашишлар ушбу рекуррент формула бўйича изланади:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n),\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{8}$$

$n \to \infty$ да $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашишининг етарли шарти: Агар $\varphi(x)$ функция $S = \{x: |x - x_0| < \delta\}$ оралиқда $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant q\,|x_1 - x_2|$ $(x_1,\ x_2 \in S,\ 0 < q < 1)$ Липшиц шартини қаноатлантирса ва $|\varphi(x_0) - x_0| \leqslant (1-q)\delta$ тенгсизлик бажарилса, $x = \varphi(x)$ тенглама S оралиқда ягона

ξ ечимга эга бўлади ва (8) кетма-кетлик ξ га яқинлашади. Агар $\varphi(x)$ функция S оралиқда $\varphi'(x)$ узлуксиз ҳосилага эга бўлса, етарлилик шарти

$$|\varphi'(x)| \leqslant q < 1 \qquad (9)$$

тенгсизлиги билан берилиши мумкин. Агар S оралиқда $\varphi'(x) > 0$ бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик монотон ўзгаради, $\varphi'(x) < 0$ бўлса — тебранади. Итерация жараёнининг ечимга интилиши тезлиги (услубнинг хатоси):

$$|x_n - \xi| \leqslant \frac{q^n}{1-q} |x_0 - \varphi(x_0)|. \qquad (10)$$

Бунга қараганда оддий итерация услуби ҳам биринчи тартибли тезлик билан яқинлаштирувчи услублар синфига киради.

3-мисол. Ушбу $x^4 - 5x^2 + 8x - 8 = 0$ тенгламанинг илдизлари итерация услуби қўлланилиб, $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-3}$ аниқликда топилсин.

Ечиш. Тенглама илдизлари (—3; —2,9) ва (1,5; 2) оралиқларда ётади (1-мисол). Тенгламани турлича $x = \varphi(x)$ каноник кўринишда ёзиш мумкин: $x = -x^4 + 5x^2 - 7x + 8$, $x = (-x^4 + 5x^2 + 8)/8$, $x = \sqrt{(x^4 + 8x - 8)/5}$ ва ҳоказо. Уларнинг ичидан биз қараётган оралиқларда (9) шарт бажариладиганини олишимиз керак. Жумладан, (—3; — 2,9) оралиқда $|(-x^4 + 5x^2 + 8)/8)'| > 1$, яъни итерация жараёни узоқлашади, (1,5; 2) да эса оралиқнинг чап қисмидагина $|\varphi'(x)| < 1$ шарт бажарилади. Усулнинг қўлланиш мумкин бўлган чегараларини аёнлаштириш мақсадида $q = 0,75$ бўлсин деб оламиз ва $|\varphi'(x)| = \left|\frac{-2x^3 + 5x}{4}\right| \leqslant 0,75$ тенгсизлигини тузамиз. Унинг ечими [—1,8229; —1], [—0,8229; 0, 8] ва [1; 1,8229]лардан иборат. Бу оралиқлар ва илдизлар ётган оралиқларнинг умумий қисми [1,5; 1,8229] бўлади ва шу оралиққа нисбатан итерация усулини қўллаймиз. Бошланғич яқинлашиш $x_0 = 1,7$ бўлсин. ε аниқликка эришиш учун зарур бўладиган итерация қадамлари сони n ни (10) муносабатдан фойдаланиб аниқлаймиз: $\frac{\varphi(1,7) - 1,7}{1 - 0,75} \cdot 0,75^n \leqslant 0,5 \cdot 10^{-3}$ ёки $0,75^n \leqslant \frac{0,5 \cdot 10^3}{0,0622} \cdot 0,25 \approx 0,002$, бундан $n \geqslant 22$. Ҳисоблашларни (8) муносабат бўйича ЭҲМ да бажариб, натижада $x_{22} = 1,7444102163572999$ ни оламиз, ёки кўрсатилган аниқликкача яхлитланса: $x \approx 1,744$.

Вестгейн усули. Умуман $\varphi(x)$ ни итерация жараёнини

яқинлаштирувчи қилиб танлаш енгил иш эмас. Шу жиҳатдан Вестгейн усули қулайроқ: у $\varphi'(x)$ нинг ихтиёрий қийматида қўлланилиши мумкин, $|\varphi'(x)| < 1$ да эса Вестгейн жараёни оддий итерация жараёнига нисбатан тезроқ яқинлашади. Бу усулни қўллашда олдин оддий итерация бўйича $x_1 = \varphi(x_0)$ топилади, сўнг $z_0 = x_0$, $z_1 = x_1$ деб олинади. Кейинги яқинлашишлар $x_{n+1} = \varphi(z_n)$ формула бўйича кетма-кет топилади, бунда $z_n = qz_{n-1} + (1-q)x_n$ ёки

$$z_n = x_n - q(x_n - z_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (11)$$

ва ҳар қадамда q нинг қиймати ҳисоблаб турилади:

$$q \approx (x_{n+1} - x_n)/((x_{n+1} - x_n) + (z_{n-1} - z_n)). \qquad (12)$$

4-мисол. Вестгейн усули қўлланилиб, $x^4 - 5x^2 + 8x - 8 = 0$ тенгламанинг илдизлари $\varepsilon = 0,005$ аниқликда топилсин.

Ечиш. $x = (-x^4 + 5x^2 + 8)/8$ ва $x_0 = 1,7$ бўлсин. x_1 ни оддий итерация бўйича топамиз. Қолган ҳисоблашлар (11), (12) муносабатлар бўйича бажарилади (жадвалга қаранг):

4-мисол **Вестгейн усули**

n	$x_{n+1} = \varphi(z_n)$	ε	q	$z_n = x_n - q(x_n - z_{n-1})$
0	1,7			1,7
1	1,7622375			1,7622375
2	1,73554241		0,30110195	1,7434977
3	1,7448291	0,0094	0,33416474	1,7443842
4	1,7444106	—0,000642		

4-қадамда $|\varepsilon| < 0,005$ бўлмоқда. $x \approx 1,7444$.

Ньютон усули (уринмалар усули). $f(x)$ — узлуксиз дифференциалланувчи функция ва $f(a) f(b) < 0$ бўлсин, яъни $f(x) = 0$ тенгламанинг илдизи $\xi \in (a, b)$ бўлсин. x_0 бошланғич қиймат сифатида (a, b) оралиқнинг $f(x) f''(x) > 0$ бажариладиган чеккаси олинади. Кейинги яқинлашишлар:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n), \; f(x_n') \neq 0, \; n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (13)$$

Агар $f''(x)$ ҳосила узлуксиз ва $f'(\xi) \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\xi - x_{n+1} = \frac{-f''(\xi_n)(\xi - x_n)^2}{2f'(x_n)}$ $(\xi_n \in [\xi, x_n])$ га эга бўламиз, яъни

Ньютон усули квадратик яқинлашувчи усул. Усулнинг яқинлашиш шартлари (Л. Канторович теоремаси): $f(x)$ функция $\{|x-x_0| \leqslant \delta\} = S$ кесмада аниқланган ва икки марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлиб, қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $f'(x_0) \neq 0$, $|(f'(x_0))^{-1}| \leqslant B$;
2) $|f(x_0)/f'(x_0)| \leqslant \eta$;
3) $|f''(x) \leqslant K$, $\forall x \in S$;
4) $h = BK\eta \leqslant 1/2$, $a(h) = ((1-\sqrt{1-2h})/h) \leqslant \delta$.

У ҳолда S кесмада $f(x)=0$ тенгламанинг ечими мавжуд, унга $\{x_n\}_0^\infty$ кетма-кетлик яқинлашади ва $|\xi - x_n| \leqslant (2h)^{2^{n-1}}\eta/2^{n-1}$, $n = 1,2,\ldots$ баҳолаш ўринли. Агар булардан ташқари $h \leqslant 1/2$ бўлса, у ҳолда $f(x) = 0$ тенглама $|x - x_0| \leqslant \delta < t^{**} = ((1+\sqrt{1-2h})\eta)/h$ оралиқда ягона ечимга эга бўлади.

$f'(x_n)$ ларни ҳисоблаш қийин бўлган ҳолларда Ньютон усулининг

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_0) \quad (n = 0,1,2,\ldots) \tag{14}$$

модификациясидан фойдаланилади. ξ илдиз p-каррали бўлган тақдирда

$$x_{n+1} = x_n - p\,f(x_n)/f'(x_n) \tag{15}$$

усул қўлланилади. Агар x_0 бошланғич яқинлашиш ноқулай танланганидан $|f(x_n)|$ кетма-кетликнинг монотон камайиши кузатилмаса,

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n f(x_n)/f'(x_n), \; n = 0,1,2,\ldots \tag{16}$$

модификацияланган усулдан фойдаланиш мумкин, бунда $\alpha_n (0 < \alpha_n \leqslant 1)$ кўпайтувчи $|f(x_{n+1})| < |f(x_n)|$ тенгсизлик бажариладиган қилиб танланади. Кўпинча α_n ни танлашда оралиқни тенг иккига бўлиш усулидан фойдаланадилар: $\alpha_n^{(0)} = 1$, $\alpha_n^{(1)} = 1/2$, $\alpha_n^{(2)} = 1/2^2, \ldots, \alpha_n^{(t)} = 1/2^t$. Жумладан, $\alpha_n = \alpha_n^{(s)}$ да юқорида кўрсатилган тенгсизлик бажарилсин. У ҳолда кейинги ҳисоблашлар (16) формула бўйича бажарилади.

Ватарлар усули. (13) формуладаги ҳосиланинг ўрнига $(f(x_n) - f(x'))/(x_n - x')$ нисбат қўйилиши билан ҳосил қилинади:

$$x_{n+1} = x_n - (x_n - x')f(x_n)/(f(x_n) - f(x')). \tag{17}$$

Бунда x_0 бошланғич яқинлашиш сифатида (a, b) оралиқнинг $f(x)f''(x) < 0$ бажариладиган четкаси олинади, иккинчи учи эса жойидан қўзғалмайди (уни x' билан белгилаймиз).

5-мисол. Ньютон ва ватарлар усуллари қўлланилиб, $x^4 - 5x^2 + 8x - 8 = 0$ тенглама ечилсин.

Ечиш. 1) Тенгламанинг илдизлари $(-3; -2{,}9)$ ва $(1{,}5; 2)$ оралиқларда ётгани аниқланган эди (1-мисол). Биринчи оралиқни қарайлик. Бошланғич яқинлашиш сифатида $x_0 = -3$ ни олиш мумкин, чунки $f(-3)f''(-3) > 0$. Ҳисоблашларни (13) Ньютон формуласи бўйича бажарамиз:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n), \quad f(x_n) = x_n(x_n(x_n^2 - 5) + 8) - 8,$$
$$f'(x_n) = 2x_n(2x_n^2 - 5) + 8$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\varepsilon = \lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	−3	4	−70	
1	−2,9428571	0,1577676	−64,5168	0,0024454
2	−2,9404117	0,0002809	−64,287328	0,00044
3	−2,9404073	−0,0000045		

Бу ўринга келиб $f(x) < 0$ бўлиб қолдики, бу ξ устидан «сакраб» ўтилганини ($f(x)$ графиги Ox ўқини кесиб ўтганини) билдиради. Лекин бунга усул «айбли» эмас, балки микрокалькуляторнинг техник имконияти етишмай қолгани сабабдир: у еттитагача ўнли рақамларни кўрсата олиши туфайли, x_3 нинг 10^{-8} ва кейинги хона рақамларини яхлитлаб ташлаган. Биз ҳисоблашларни давом эттириш мақсадида $x_3 = -2{,}9404074$ деб оламиз:

3	−2,9404074	0,0000016	−64,286922	0
4	−2,9404074			

Демак, $-2{,}9404074 < \xi < -2{,}9404073$, ёки $\xi \approx -2{,}940407$.

2) $f(-2{,}9)f''(-2{,}9) < 0$, $x_0 = -2{,}9$. (17) ватарлар усули формуласи бўйича:

$x' = -3$ — қўзғалмас нуқта $\quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{(x_n - x') \cdot f(x_n)}{f(x_n) - f(x')}$

n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon = \lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	−2,9	−2,5219	
1	−2,9386682	−0,1116625	−0,0386682
2	−2,9403338	−0,0047267	−0,0016656
3	−2,9404042	−0,0002041	−0,0000704
4	−2,9404072	−0,0000107	−0,000003
5	−2,9404074	−0,0000016	−0,0000002

$\xi = -2{,}940407.$

3) Ньютон ва ватарлар усуллари биргаликда қўлланилганида ватарнинг чап учи вазифасини x_n лар бажариб боради:

n	Ньютон усули			Ватарлар усули	
	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\overline{x}_n$	$f(\overline{x}_n)$
0	—3	4	—70	—2,9	—2,5219
1	—2,9428571	0,1577676	—64,5168	—2,9403338	—0,0047267
2	—2,9404117	0,0002809	—64,287328	—2,9404073	—0,000 045
3	—2,9404073			—2,9404073	

$\xi = -2{,}9404073.$

МАШҚЛАР

1. Ушбу $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ тенгламанинг барча илдизлари (модуль бўйича) $\frac{|a_n|}{b + |a_n|} < |x| < 1 + \frac{c}{|a_0|}$ ҳалқа ичида ётишини исботланг, бунда $b = \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|\}$, $c = \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}$.

2. $x^n - x^{n-1} - \ldots - x - 1 = 0$ $(n \geqslant 2)$ тенглама ягона $\xi < 2$ мусбат илдизга эга бўлишини исботланг.

3. Мусбат коэффициентли $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ кўпҳаднинг барча илдизлари $m < |x| < M$ қўш тенгсизликни қаноатлантиришини кўрсатинг, бунда:

$$m = \min_{1 < k < n} \frac{a_k}{a_{k-1}}, \quad M = \max_{1 < k < n} \frac{a_k}{a_{k-1}}.$$

4. Мусбат коэффициентли $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ кўпҳад учун қуйидагиларнинг ўринли бўлишини кўрсатинг:

а) агар $a_0 > a_1 > \ldots > a_n$ бўлса, у ҳолда $P(x)$ нинг барча илдизлари $|x| \leqslant 1$ бирлик доирадан ташқарида ётади;

б) агар $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ бўлса, у ҳолда $P(x)$ нинг барча илдизлари $|x| \leqslant 1$ бирлик доира ичида ётади.

5. $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$ кўпҳаднинг барча илдизлари модуллари бўйича

$$\rho + \max_{1 < k \leqslant n} \left| \frac{a_k}{a_0 \rho^{n-1}} \right|, \quad \forall \rho > 0$$

дан ортмаслигини кўрсатинг.

6. Ҳақиқий коэффициентли $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$ $(a_0 > 0)$ кўпҳаднинг ҳақиқий илдизлари:

$$\rho + \sqrt[k]{\max_{i} \left| \frac{a_j}{a_0 \rho^{j-1}} \right|}$$

дан ортмаслигини кўрсатинг, бунда ρ — ихтиёрий мусбат сон, k — биринчи манфий коэффициентнинг номери, a_j — манфий коэффициентлар.

7. $P(x)$ кўпҳадни $(x - \alpha)(\alpha > 0)$ икки ҳадга бўлганда Хорнер схемасидаги b_i лар номанфий, b_0 эса мусбат бўлсин: $b_0 = a_0 > 0$, $b_i \geqslant 0\,(i = \overline{1, n})$. У ҳолда $P(x)$ нинг барча илдизлари α дан кичик бўлишини кўрсатинг.

8. Тенгламаларнинг ҳақиқий илдизлари ётган чегараларни кўрсатинг ва ҳақиқий илдизлари сонини топинг:

а) $x^4 - 35x^3 + 380x^2 - 1350x + 1000 = 0$; б) $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$; в) $x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 21x^2 - 10x - 24 = 0$; г) $x^5 + 4x^4 - 10x^3 - 65x^2 - 86x - 24 = 0$; д) $x^6 - 6x - 1 = 0$.

9. $f(x) = \sqrt{7 - \sqrt{x^2 - 4x + 4}} - x + 3 = 0$ тенгламанинг тақрибий илдизи $\overline{x} = 4{,}9$. Шу илдиз хатоси баҳолансин.

10. Ғиёсиддин Жамшид ал-Коший (Мирзо Улуғбек илмий мактаби намояндаларидан бири, Самарқандда яшаб ижод этган, 1430 йилда вафот этган) $x^3 - kx + m = 0$ кўринишдаги тенгламани ечиш учун уни

$$x = \frac{m + x^3}{k}$$

кўринишга келтириб, ўзи тузган кетма-кет яқинлашишлар усулини қўллаган. Ал-Қоший томонидан $k = 45$, $m = 0{,}785039343364006$ да $x = \sin 1^{\circ} = 0{,}017452406437283571$ топилгани маълум. Усулнинг қисқача моҳияти:

бошланғич яқинлашиш $x_0 = 0$, биринчи яқинлашиш $x_1 = m/k$ бўлсин, $j = 1, 2, \ldots$ учун қолган ҳисоблашлар ушбу рекуррент формулалар бўйича бажарилади:

$$q_j = (x_j^3 - x_{j-1}^3)/k, \quad x_{j+1} = x_1 + q_1 + q_2 + \ldots + q_j.$$

(ҳисоблашлар то $q_i \leqslant \varepsilon$ бўлганга қадар давом эттирилади, бунда ε олдиндан тайинланган хато катталиги.)

Ал-Коший усулини таҳлил қилинг, $\sin 1^0$ қийматини шу усулни қўллаб ва бевосита ЭҲМ ёки микрокалькулятор ёрдами билан топиб, Ал-Коший топган натижа билан солиштиринг. Ал-Коший усулидан фойдаланиб, қуйидаги тенгламаларни ПМК ёки ЭҲМ да ечинг:

а) $x^3 - 3x + 1,888 = 0$;

б) $x^3 - 3x + 0,1046719131717587 = 0$ (Қозизода Румий тенгламаси);

в) $x^3 + 5,8x + 1,9170038 = 0$.

11. Қуйида берилган тенгламаларнинг ҳақиқий илдизларидан бирортаси тенг иккига бўлиш, оддий итерация, Вегстейн, Ньютон ва модификацияланган Ньютон, ватарлар усулларини қўлланиб топилсин:

1) $x - \frac{1}{(x+1)^2} = 0$; 2) $x - (x+1)^3 = 0$; 3) $x = 4 + \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$; 4) $x - 2 - \sqrt[4]{x} = 0$; 5) $x - \frac{1}{10}e^{-x} = 0$; 6) $4 - 3x - \operatorname{tg} x = 0$; 7) $x^2 = \sin x - 0,5$; 8) $x^3 = \sin x$; 9) $x - \arcsin \frac{x+1}{4}$; 10) $x - 1 = \frac{\sin x}{10}$; 11) $x^2 = \ln(x+1)$; 12) $\ln x = 4 - x$; 13) $x^2 = e^x + 2$; 14) $2^x = 4x$; 15) $x - 1 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$; 16) $x^3 - x - 1 = 0$; 17) $x^3 - 1,5x^2 + 0,58x - 0,057 = 0$; 18) $x^3 - 7x - 5 = 0$; 19) $x^3 + 9x^2 + 11x - 21 = 0$; 20) $x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0$; 21) $x^3 + 7x^2 + 4x - 2 = 0$; 22) $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$; 23) $2x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 2 = 0$; 24) $2x^4 - 9x^3 - 2x^2 + 4x - 1 = 0$; 25) $0,1e^x - \sin^2 x + 0,5 = 0$, $x \in [-5\pi, 5\pi]$; 26) $3x - \cos x - 1 = 0$; 27) $e^x - 6x - 3 = 0$; 28) $1,4^x - x = 0$; 29) $2x - 1,3^x = 0$; 30) $(x-1)^3 + 0,5e^x = 0$; 31) $\sqrt{x+1} - 1/x = 0$; 32) $(x-1)^2 - 0,5e^x = 0$; 33) $5x - e^x = 0$; 34) $3x - e^{0,5x} = 0$; 35) $4\cos(2x - 45°) + 12\sin^2(2x - 45°) - 11 = 0$; 36) $4\sin(3x - 35°) + 7\cos^2(2x - 37°) - 6,715589 = 0$.

12. Ньютон усулидан фойдаланиб, а) n-даражали $x = \sqrt[n]{a}$ $(a > 0)$ илдизни ҳисоблаш; б) $x = 1/a$ $(a > 0)$ тескари миқдорни ҳисоблаш; в) $x = 1/\sqrt{a}$ $(a > 0)$ квадрат илдизнинг тескари қийматини ҳисоблаш; г) $x = \sqrt{1+a^2}$ $(a > 0)$; д) $x = 1/\sqrt{a(a+1)}$ $(a > 0)$ қийматларини тақрибий ҳисоблаш учун рекуррент формула тузинг ва ундан фойдаланиб кўрсатилган функцияларнинг $a = -2,3 + 0,002k$ $(k = \overline{0;20})$ даги қийматлари жадвалини тузинг.

13. n-каррали x^* илдиз бўлган ҳол ($f(x^*) = 0$, $f'(x^*) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(x^*) = 0$, $f^{(n)}(x^*) \neq 0$) учун Ньютон усулининг яқинлашиш тартибини аниқланг.

14. $x_{n+1} = x_n - (f'(x_0))^{-1} f(x_n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ Ньютон модификацияланган усулининг яқинлашиш тартибини аниқланг.

2-а ЛАБОРАТОРИЯ ИШИ

1. Коэффициентлари 1-жадвалда кўрсатилган $P(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ кўпҳаднинг $P(4,82)$ қиймати Хорнер схемасидан фойдаланиб топилсин:

1-жадвал

Вариант	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
1	8,54	11,2	3,82	0,44	−0,48
2	10,36	12,69	0,79	14,39	−0,94
3	−12,78	14,35	17,1	−1,34	−1,72
4	15,65	17,58	21,7	−2,78	1,54
5	−11,2	5,08	−3,7	−3,65	4,09
6	−10,75	−30,2	−4,47	0,63	−3,17
7	−3,79	−4,74	32,8	9,75	−4,72
8	−4,8	−2,54	−3,12	7,07	−3,11
9	−37,6	2,58	−3,89	5,82	−6,64
10	−4,77	−31,58	−3,46	4,17	56,33
11	−3,41	−4,73	3,73	−0,8	−2,01
12	−34,1	50,2	−5,87	−7,02	4,43
13	12,04	−3,51	−2,54	8,91	4,72
14	1,09	−2,63	−3,81	−0,82	6,88
15	−23,2	35,03	−4,73	−5,95	0,76
16	2,89	9,85	14,15	5,38	7,24
17	4,45	2,91	−3,79	−6,75	−2,38
18	−4,79	5,38	−2,86	7,31	4,55
19	8,34	7,73	−9,29	−4,53	5,79
20	−0,6	6,73	11,24	−3,45	−3,51
21	5,7	4,97	−4,07	12,3	−5,96
22	3,6	21,3	−3,18	4,47	−6,04
23	−3,86	12,4	4,8	5,14	−4,23
24	−4,81	3,67	−4,55	6,82	−3,66
25	−3,97	4,33	−5,31	6,16	−4,21

2. Итерация усулидан фойдаланиб, $y = \sqrt[n]{x^m}$ функциянинг $x = a + bk$ даги қийматлари 10^{-4} гача аниқлик билан топилсин (n, m, a, b, k қийматлари 2-жадвалдан олинсин):

2-жадвал

Вариант	n	m	a	b	k	Вариант	n	m	a	b	k
1	3	4	3,3	2,7	0;15	14	9	10	2,7	−0,79	5;25
2	5	3	−2,1	5,4	0;16	15	10	3	24	−3,07	6;20
3	5	4	−3,5	0,7	0;20	16	3	5	−3,2	4	0;15
4	4	3	−5,4	6,2	0;15	17	5	4	21	7,5	0;12
5	6	5	−3,6	−2,5	0;15	18	5	6	−4,5	3,2	0;12
6	7	2	−4,1	−5,9	0;16	19	4	5	−3,5	9,6	0;15
7	7	3	−4,8	−32	0;15	20	6	5	−4,3	−4,8	0;18
8	7	4	−4,01	−4,7	0;15	21	7	3	−5,9	12,2	0;20
9	7	5	−3,4	−4,8	0;20	22	7	4	−3,4	16,5	0;18
10	7	8	4,6	−6,9	0;18	23	7	5	−6,1	−3,5	0;16
11	9	2	21	−5,4	0;15	24	7	6	−4,3	−7,03	0;16
12	9	4	−3,79	−4,6	0;15	25	7	9	−3,6	−5,8	0;18
13	9	7	−16	−0,8	3;18						

3. $f(x) = 0$ тенгламанинг (3-жадвал) ҳақиқий илдизлар сони аниқлансин ва улар ётган чегаралар ажратилсин, оралиқни тенг иккига бўлиш, оддий итерация, Вестгейн, Ньютон ва ватарлар усуллари қўлланилганида неча қадамдан сўнг шу илдизларни $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$ аниқликда топиш мумкинлиги ҳисоблансин ва улар шундай аниқликда топилсин:

3-жадвал

Вар.	$f(x) = 0$	Вар.	$f(x = 0)$
1	$x^3-1,5x^2+0,58x-0,057=0$	14	$x^5-5x^4-4x^3+20x^2-5x+25=0$
2	$x^3-2,5x^2-x+2=0$	15	$x^3-0,4x+0,08=0$
3	$x^3+x^2-4x-4=0$	16	$x^4+x^3-6x^2+20x-16=0$
4	$x^4-4x^3+5,5x^2-3x+0,3=0$	17	$x^5+11x^4+101x^3+11x^2+10=0$
5	$x^4-7,99x^3-24,10x^2+47,81x+80,21=0$	18	$x^4+47,89x^3+797,3x^2+5349x+12300=0$
6	$x^4+2,83x^3-4,5x^2-64x-20=0$	19	$x^4+10x^3-1=0$
7	$x^5-3x^3-14x-8=0$	20	$x^5+1,1x-1=0$
8	$x^5-x-0,2=0$	21	$x^4-4x^3-40x^2-56x-20=0$
9	$x^5+3,2x^2-0,2163923=0$	22	$x^3+7,05x^2-x-101,76=0$
10	$x^4-31,2x+25,8944=0$	23	$x^4+7,18x^3+8,244539=0$
11	$x^3-0,83x^2+5,2x-81,2868=0$	24	$x^4+3x^3-x+6=0$
12	$x^4-0,79x-59,67=0$	25	$x^5-x^3+1,51593=0$
13	$x^5-8,2x+2077,8273=0$		

2-ЛАБОРАТОРИЯ ИШИ

$f(x) = 0$ трансцендент тенгламанинг $[a, b]$ оралиқда ётган илдизлари оралиқни тенг иккига бўлиш усули, оддий итерация ёки Вестгейн усули, Ньютон усули ёки унинг модификацияларидан бири ёки ватарлар усули қўлланилиб, ε аниқликда топилсин:

Вариант	$f(x) = 0$	$[a, b]$	ε
1	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{0,6x} + \frac{x}{0,36 + x^3} = 0$	$[-1;\ 1]$	$1 \cdot 10^{-5}$
2	$e^{0,724x+0,1} - 2,831x = 0$	$[0;\ 1]$	$1 \cdot 10^{-5}$
3	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{0,8x} - \frac{x}{0,64 + x^x} = 0$	$[-1;\ 0]$	$1 \cdot 10^{-5}$
4	$e^{0,866x+0,3} - 5,34x = 0$	$[0;\ 1]$	$1 \cdot 10^{-5}$
5	$x^3 + \sin x - 12x + 1 = 0$	$[0;\ 1]$	$1 \cdot 10^{-5}$
6	$x - \operatorname{tg} x + 0,268254 = 0$	$(0;\ \pi/2)$	$1 \cdot 10^{-6}$
7	$0,6x - \ln x - 1,2712108 = 0$	$[0;\ 1]$	$1 \cdot 10^{-8}$
8	$x^3 + 4\sin x + 3,847569 = 0$	$[-1;\ 0]$	$1 \cdot 10^{-6}$
9	$e^x - 6x + 0,8177154 = 0$	$[0;\ 1]$	$1 \cdot 10^{-8}$
10	$x - \sin x - 0,0090795 = 0$	$[0;\ 1]$	$1 \cdot 10^{-8}$
11	$x^2 + 4\sin x - 1,6280819 = 0$	$[0;\ 1]$	$1 \cdot 10^{-8}$

давоми

Вариант	$f(x) = 0$	$[a, b]$	ε
12	$1{,}5x - 2\sin x + 0{,}15432 = 0$	$[0;\ 1]$	$1\cdot10^{-4}$
13	$3x - \cos x - 0{,}21134 = 0$	$[0;\ 1]$	$1\cdot10^{-4}$
14	$1{,}4^x - x - 2{,}16765 = 0$	$[-2;\ -1]$	$1\cdot10^{-4}$
15	$1{,}7^x + x - 3{,}892647 = 0$	$[1;\ 2]$	$1\cdot10^{-4}$
16	$0{,}1e^x - \sin^2 x + 0{,}5 = 0$	$\left[-\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$	$1\cdot10^{-4}$
17	$2x - 1{,}3^x = 0$	$[0;\ 10]$	$1\cdot10^{-4}$
18	$(x-1)^3 + 0{,}7e^x - 0{,}645669 = 0$	$[0;\ 1]$	$1\cdot10^{-4}$
19	$4x - 0{,}5e^x - 3{,}1399 = 0$	$[1;\ 2]$	$1\cdot10^{-4}$
20	$4x + 0{,}8e^x - 7{,}4561 = 0$	$]1;\ 2]$	$1\cdot10^{-4}$
21	$3{,}4x - 0{,}6e^x + 0{,}05284 = 0$	$[0;\ 1]$	$1\cdot10^{-4}$
22	$-0{,}8x + 0{,}7e^x - 0{,}95453 = 0$	$[-1;0]$	$1\cdot10^{-4}$
23	$3x + \lg x - 6{,}30103 = 0$	$[1;\ 3]$	$1\cdot10^{-4}$
24	$1{,}5\sin(x-0{,}6) + x - 2{,}047 = 0$	$\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$	$1\cdot10^{-4}$
25	$x^3 - 2{,}8e^x + 2{,}5713 = 0$	$[-2;\ -1]$	$1\cdot10^{-4}$

3-боб. ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИ ЕЧИШ

Ушбу боб

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots\ + a_{1n}x_n = a_{1,n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots\ + a_{2n}x_n = a_{2,n+1} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ \dots\ a_{nn}x_n = a_{n,n+1} \end{cases} \qquad (1)$$

кўринишидаги чизиқли тенгламалар системасини ечишга бағишланади.

Гауссинг номаълумларни чиқариш (компакт) усули. Тўғри юриш (берилган системани унга тенг кучли учбурчак матрицали системага келтириш ва номаълумларни йўқотиш): 1) система коэффициентларини жадвалнинг I қисмига тўлдирамиз;

2) ҳар қайси сатр коэффициентлари йиғиндисини $\sum$ контрол устунига ёзамиз, масалан, $a_{16} = \sum_{j=1}^{5} a_{1j}$, $a_{26} = \sum_{j=1}^{5} a_{2j}$;

3) $i = 1$ биринчи сатр коэффициентларини $a_{11} \neq 0$ га бўлиб, $b_{1j} = a_{1j}/a_{11}$ натижаларни I нинг (в) сатрига ёзамиз; $j = \overline{2;6}$;

4) контрол: (в) сатр элементлари йиғиндиси $1 + \sum b_{1j}$ ($\sum$ устунида) b_{16} га тенг бўлиши керак: $b_{16} = 1 + \sum b_{1j}$;

5) жадвалнинг II қисми: $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j}$ ($i = 2, 3, 4,\ j = \overline{2;6}$) коэффициентларни ҳисоблаймиз ва уларни жадвалга киритамиз;

6) контрол: $\sum$ устун элементлари уларга мос сатр элементлари йиғиндисига тенг бўлиши керак: $a_{i6}^{(1)} = \sum_{j=2}^{5} a_{ij}^{(1)}$ ($i = 2.3,4$);

7) II нинг $i = 2$ сатр элементларини $a_{22}^{(1)}$ га бўлиб, ($b^{(1)}$) сатрга ёзамиз;

8) контрол (4-банддаги каби): $b_{26}^{(1)} = 1 + \sum_{j=3}^{5} b_{2j}^{(1)}$;

9) III қисм: $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} \cdot b_{2j}^{(1)}$ ($i = 3,4;\ j = 3, 4, 5$);

10) контрол (6-банддаги каби): $a_{i6}^{(2)} = \sum_{j=3}^{5} a_{ij}^{(2)}$ ($i = 3, 4$);

11) $b_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(2)}/a_{33}^{(2)}$ ва контрол (4—б.): $b_{36}^{(2)} = 1 + \sum_{j=3}^{5} b_{3j}^{(2)}$;

12) IV қисм: $a_{4j}^{(3)} = a_{4j}^{(2)} - a_{43}^{(2)} \cdot b_{3j}^{(2)}$ ($j = \overline{4;6}$) ва контрол: $b_{46}^{(3)} = 1 + \sum_{j=4}^{5} b_{4j}^{(3)}$.

Тескари юриш (x_4, x_3, x_2, x_1 номаълумларни топиш):

1) I′ қисмга 1 ларни ёзамиз;

2) $x_4 = a_{45}^{(3)}/a_{44}^{(3)}$;

3) ($b^{(2)}$) сатрдан: $x_3 = b_{35}^{(2)} - b_{34}^{(2)} \cdot x_4$,

($b^{(1)}$) сатрдан: $x_2 = b_{25}^{(1)} - b_{24}^{(1)} \cdot x_4 - b_{23}^{(1)} \cdot x_3$,

(b) сатрдан $x_1 = b_{15} - b_{14} \cdot x_4 - b_{13} \cdot x_3 - b_{12} \cdot x_2$;

4) контрол: $\sum$ устуни элементлари, яъни $\bar{x}_i$ лар уларга мос x_i ($i = 4, 3, 2, 1$) лардан 1 та ортиқ бўлишлари керак; бунда $\bar{x}_4 = a_{46}^{(3)}/a_{44}^{(3)}$, $\bar{x}_3 = b_{36}^{(2)} - b_{34}^{(2)} \cdot \bar{x}_4$, $\bar{x}_2 = b_{26}^{(1)} - b_{24}^{(1)} \cdot \bar{x}_4 - b_{23}^{(1)} \cdot \bar{x}_3$, $\bar{x}_1 = b_{15} - b_{14} \cdot \bar{x}_4 - b_{13} \cdot \bar{x}_3 - b_{12} \cdot \bar{x}_2$

Гаусс схемаси

Қисм	i	$a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3}\ a_{i4}$	Озод ҳад a_{i5}	Контрол $\sum$	Контрол $\sum'$
I	1 2 3 4	$a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}$ $a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24}$ $a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ a_{34}$ $a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ a_{44}$	a_{15} a_{25} a_{35} a_{45}	$\Sigma a_{1j}(=a_{16})$ $\Sigma a_{2j}(=a_{26})$ $\Sigma a_{3j}(=a_{36})$ $\Sigma a_{4j}(=a_{46})$	
	(в)	$1\ \ b_{12}\ b_{13}\ b_{14}$	b_{15}	$b_{16} = a_{16}/a_{11}$	$1+\Sigma b_{1j}\ \ i=\overline{2;5}$

Қисм	i	a_{i1} a_{i2} a_{i3} a_{i4}	Озод ҳад a_{i5}	Контрол Σ	Σ'
II	2	$a_{22}^{(1)}$ $a_{23}^{(1)}$ $a_{24}^{(1)}$	$a_{25}^{(1)}$	$a_{26}^{(1)}$	$\sum a_{2j}^{(1)}$
	3	$a_{32}^{(1)}$ $a_{33}^{(1)}$ $a_{34}^{(1)}$	$a_{35}^{(1)}$	$a_{36}^{(1)}$	$\sum a_{3j}^{(1)}$ $j=\overline{2,5}$
	4	$a_{42}^{(1)}$ $a_{43}^{(1)}$ $a_{44}^{(1)}$	$a_{45}^{(1)}$	$a_{46}^{(1)}$	$\sum a_{4j}^{(1)}$
	$(\text{в}^{(1)})$	1 $b_{23}^{(1)}$ $b_{24}^{(1)}$	$b_{25}^{(1)}$	$b_{26}^{(1)}=b_{26}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$	$1+\sum b_{2j}^{(1)}, j=\overline{3;5}$
III	3	$a_{33}^{(2)}$ $a_{34}^{(2)}$	$a_{35}^{(2)}$	$a_{36}^{(2)}$	$\sum a_{3j}^{(2)}$ $j=\overline{3,5}$
	4	$a_{43}^{(2)}$ $a_{44}^{(2)}$	$a_{45}^{(2)}$	$a_{46}^{(2)}$	$\sum a_{4j}^{(2)}$
	$(\text{в}^{(2)})$	1 $b_{34}^{(2)}$	$b_{35}^{(2)}$	$b_{36}^{(2)}=-a_{36}^{(2)}/a_{33}^{(2)}$	$1+\Sigma b_{3j}, j=\overline{4,5}$
IV	4	$a_{44}^{(3)}$	$a_{45}^{(3)}$	$a_{46}^{(3)}$	$\sum a_{4j}^{(3)}$ $j=4,5$
I′		1	x_4	$\bar{x}_4$	
		1	x_3	$\bar{x}_3$	
		1	x_2	$\bar{x}_2$	
		1	x_1	$\bar{x}_1$	

Гаусс схемасидан фойдаланиб $A\vec{x}=\vec{b}$ $(A=[a_{ij}]^n$, $\vec{b}=(b_1, \ldots, b_n)^{\mathrm{T}}$, $\vec{x}=(x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $\det A\neq 0)$ система детерминантини топиш:

$$\det A = a_{11}\cdot a_{22}^{(1)}\cdot \ldots \cdot a_{nn}^{(n-1)} \qquad (2)$$

$A^{-1}=[x_{ij}]^n$ тескари матрицани топиш учун $A\cdot A^{-1}=E$ муносабатдан ҳосил бўладиган $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_{kj}=\delta_{ij}$ чизиқли тенгламалар системалари (Гаусс схемасида биргаликда) ечилади, $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$, $i, j=\overline{1;n}$.

1-мисол.

$$\begin{cases} 2x_1+4{,}2x_2+1{,}6x_3-3x_4=3{,}2,\\ -0{,}4x_1+3x_2-2{,}4x_3=-1{,}6,\\ 1{,}6x_1-0{,}8x_2+x_3-x_4=-1,\\ x_1-2x_2-x_3+1{,}5x_4=0 \end{cases}$$

система ечилсин, A^{-1} тескари матрица ва $\det A$ топилсин. Ҳисоблашларни вергулдан кейин иккита ўнли ишора билан бажаринг.

Гаусс схемаси

1-мисол

a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	Контрол Σ	Σ'
2	4,2	1,6	−3	3,2	1	0	0	0	9	
−0,4	3	−2,4	0	−1,6	0	1	0	0	−0,4	
1,6	−0,8	1	−1	−1	0	0	1	0	0,8	
1	−2	−1	1,5	0	0	0	0	1	0,5	
1	2,1	0,8	−1,5	1,6	0,5	0	0	0	4,5	4,5
	3,84	−2,08	−0,6	−0,96	0,2	1	0	0	1,4	1,4
	−4,16	−0,28	1,4	−3,56	−0,8	0	1	0	−6,4	−6,4
	−4,1	−1,8	3	1,6	−0,5	0	0	1	−4	−4
	1	−0,54	−0,16	−0,25	0,05	0,26	0	0	0,36	0,36
		−2,53	0,73	−4,6	−0,59	1,08	1	0	−4,90	−4,91
		−4,01	2,34	−2,63	−0,3	1,07	0	1	−2,52	−2,53
		1	0,29	1,82	0,23	−0,43	−0,4	0	1,94	1,93
			1,18	4,68	0,62	−0,65	−1,6	1	5,25	5,23
			1	3,97	0,53	−0,55	−1,36	0,85	4,45	4,44
			1	3,97	0,53	−0,55	−1,36	0,85	4,45	4,44
		1		2,98	0,38	−0,59	−0,79	0,25	3,21	3,22
	1			1,99	0,34	−0,15	−0,64	0,27	2,79	2,81
1				1,01	0,28	−0,04	−0,06	0,51	2,68	2,73

x_i лар A^{-1} матрица

Жавоб: $x_4 \approx 3{,}97$, $x_3 \approx 2{,}98$, $x_2 \approx 1{,}99$, $x_1 \approx 1{,}01$, $\det A = 2 \cdot 3{,}84\,(-2{,}53) \cdot 1{,}18 = -22{,}93$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}28 & -0{,}04 & -0{,}06 & 0{,}51 \\ 0{,}34 & -0{,}15 & -0{,}64 & 0{,}27 \\ 0{,}38 & -0{,}59 & -0{,}79 & 0{,}25 \\ 0{,}53 & -0{,}55 & -1{,}36 & 0{,}85 \end{pmatrix}.$$

Квадрат илдизлар усулини қўллаб симметрик матрицали $A\vec{x} = \vec{b}$ ($\det A \neq 0$) чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечишда A матрица $A = T^*DT$ кўринишга келтирилади, бунда T^* матрица T га қўшма,

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & t_{nn} \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{vmatrix} d_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ldots & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & d_{nn} \end{vmatrix},$$

d_{ii} элементлар $+1$ га ёки -1 га тенг, $d_{11} = \operatorname{sign} a_{11}$, $t_{11} = \sqrt{|a_{11}|}$,

$$t_{1j} = \frac{a_{1j}}{d_{11} \cdot \bar{t}_{11}}, \quad j = \overline{2, n}, \quad t_{ii} = \sqrt{\left| a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} d_{kk} |t_{ki}|^2 \right|},$$

$$t_{ij} = 0, \; i < j, \tag{3}$$

$$t_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} \bar{t}_{kj}\, t_{ki}\, d_{kk}}{t_{ii}\, d_{ii}},$$

$i < j$, $\bar{t}_{ki}$ ва t_{ki} — ўзаро қўшма комплекс сонлар, $d_{ii} = \operatorname{sign}\left(a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} |t_{ki}|^2 d_{kk}\right)$, $i > 1$.

A — ҳақиқий матрица ва унинг бош минорлари мусбат бўлган ҳолда $D = E$ бўлиб, (3) формулалар қуйидаги кўринишга келади:

$$t_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad t_{1j} = \frac{a_{1j}}{t_{11}}, \quad j = \overline{2, n}, \quad t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2},$$

$$t_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} t_{ki}\, t_{kj}}{t_{ii}}, \quad i < j, \; E \text{ — бирлик матрица} \tag{3'}$$

Берилган $A\vec{x} = \vec{b}$ система унга эквивалент иккита учбурчак матрицали $T^*D\vec{y} = \vec{b}$, $T\vec{x} = \vec{y}$ системаларга алмаштирилади, улардан аввал y лар, сўнг x лар аниқланади:

$$y_1 = \frac{b_1}{t_{11}\, d_{11}}, \quad y_k = \frac{b_k - \sum\limits_{s=1}^{k-1} \bar{t}_{sk}\, y_s\, d_s}{t_{kk}\, d_{kk}}, \quad k = \overline{2, n}, \tag{4}$$

$$x_n = \frac{y_n}{t_{nn}}, \quad y_k = \frac{x_k - \sum\limits_{s=k+1}^{n} t_{ks}\, x_s}{t_{kk}}, \quad k = n-1, \; n-2, \ldots, 1, \tag{5}$$

(r) устуннинг (жадвалга қаранг) r элементлари

$$r_1 = \frac{\Sigma_1}{t_{11}\, d_{11}}, \tag{6}$$

$$r_k = \frac{\Sigma_k - \sum\limits_{s=1}^{k-1} \bar{t}_{ks}\, r_s\, d_{ss}}{t_{kk}\, d_{kk}} \tag{6}$$

формулалар бўйича ҳисобланади. Бу қийматлар номаълум x_i лар олдидаги коэффициентлар ва озод ҳадлар йиғиндисига тенг бўлиши керак. Охирги контрол: (5) формулаларда y_i лар r_i ларга алмаштирилиб, $\bar{x}_i$ лар топилади, $\bar{x}_i = x_i + 1$ бўлиши керак.

Квадрат илдизлар усули

	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	Озод ҳадлар	Контрол Σ	Контрол (r)
I	a_{11} a_{21} a_{31} a_{41}	a_{12} a_{22} a_{32} a_{42}	a_{13} a_{23} a_{33} a_{43}	a_{14} a_{24} a_{34} a_{44}	b_1 b_2 b_3 b_4	$\Sigma a_{1j} + b_1$ $\Sigma a_{2j} + b_2$ $\Sigma a_{3j} + b_3$ $\Sigma a_{1j} + b_1$	$= \Sigma_1$ $= \Sigma_2$ $= \Sigma_3$ $= \Sigma_4$
II	t_{11}	t_{12} t_{22}	t_{13} t_{23} t_{33}	t_{14} t_{24} t_{34} t_{44}	y_1 y_2 y_3 y_5	$\Sigma t_{1j} + y_1$ $\Sigma t_{2j} + y_2$ $\Sigma t_{3j} + y_3$ $\Sigma t_{44} + y_4$	r_1 r_2 r_3 r_4
III	x_1 $\bar{x}_1$	x_2 $\bar{x}_2$	x_3 $\bar{x}_3$	x_4 $\bar{x}_4$			

	Номаълумлар олдидаги коэффициент				Озод ҳад	Контрол Σ	
	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_{i4}			
I	2 —3 4 1	—3 5 —1 2	4 —1 1 3	1 2 3 2	11 — 6 1 1	15 — 3 8 9	
	t_{i1}	t_{i2}	t_{i3}	t_{i4}	y	Σ	(r)
II	1,414214	—2,121330 0,707079	2,828427 7,071384 7,550131 i	0,707107 4,949952 4,503632 i 1,649037 i	7,778175 14,849933 15,689721 i 1,723508 i	10,596613 27,577916 28,743484 i 3,372545 i	10,606598 27,57838 28,743515 i 3,368317 i
x_i	—1,477422	—2,187103	1,587086	1,085160			
x	—0,475204	—1,184438	2,588619	2,042596			

2-мисол. Симметрик матрицали ушбу

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 11, \\ -3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = -6, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

системани квадрат илдизлар усули билан ечамиз. (32-бетга қаранг).

Оралиқ ҳисоблашлардан намуналар:

$$y_2 = \frac{b_2 - t_{12}y_1}{t_{22}} = \frac{-6-(-2,121330)\cdot 7,778175}{0,707079} = 14,849933;$$

$$r_2 = \frac{\Sigma_2 - t_{12}r_1}{t_{12}} = \frac{-3-(-2,121330)\cdot 10,606598}{0,707079} = 27,57838;$$

$$x_3 = \frac{y_3 - t_{34}\ x_4}{t_{33}} = \frac{16,689721i - 4,503632i \cdot 1,045160}{7,550131i} = 1,587086,$$

$$\overline{x}_3 = \frac{r_3 - t_{34}\overline{x}_4}{t_{33}} = \frac{28,743515i - 4,503632i \cdot 2,042526}{7,550131i} = 2,588619.$$

$x_1 = -1,477419.$ $x_2 = -2,167096,$ $x_4 = 1,045161.$

Текшириш (x_i лар учун топилган қийматлар берилган системага қўйилади):

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 10,999969 & (\text{четланиш } 0,0003\,\%) \\ -3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = -6,000015 & (\quad » \quad 0,00025\,\%) \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0,999981 & (\quad » \quad 0,002\,\%) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0,999952 & (\quad » \quad 0,005\,\%) \end{cases}$$

Итерация усули. Қўлланилишида $A\vec{x} = \vec{b}$ чизиқли тенгламалар системаси (бунда A — махсусмас матрица) $\vec{x} = B\vec{x} + \vec{c}$ кўринишга келтирилади. Яқинлашишлар

$$\vec{x}^{(k+1)} = B\vec{x}^{(k)} + \vec{c}^{(k)} \quad (k = 0,1,2,\ \ldots) \tag{7}$$

рекуррент формулалар бўйича изланади. Ихтиёрий $\vec{x}^{(0)}$ бошланғич яқинлашишда (7) оддий итерация усулининг яқинлашиши учун қуйидаги шартлардан бирининг бажарилиши етарли:

1) $\|B\|_{\mathrm{I}} < 1$, бунда $\|B\|_{\mathrm{I}} = \max\limits_{1<i<n} \sum\limits_{j=1}^{n} |b_{ij}|$, $B = [b_{ij}]_1^n$,

ёки

2) $\|B\|_{\mathrm{II}} < 1$, $\|B\|_{\mathrm{II}} = \max\limits_{1<j<n} \sum\limits_{i=1}^{n} |b_{ij}|$.

Итерация усулининг хатосини баҳолаш:

$$\|\vec{x}-\vec{x}^{(k)}\| \leqslant \frac{\|B\|^{k+1}}{1-\|B\|}\|\vec{c}\|. \qquad (8)$$

Зейдель усули. $A\vec{x}=\vec{b}$ система A матрицасини $A=C+D$ кўринишга келтирамиз, бунда

$$C=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad D=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & \kappa_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Натижада система $C\vec{x}=-D\vec{x}+\vec{b}$ кўринишга келади ва $C\vec{x}^{(k+1)}=-D\vec{x}^{(k)}+\vec{b}$ итерациялар билан ечилади. Ҳисоблашлар схемаси:

$$\begin{cases} x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \dots,\ x_n^{(0)} \text{ — бошланғич яқинлашиш;} \\ x_1^{(k+1)}=\dfrac{b_1}{a_{11}}-\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{a_{1j}}{a_{11}}x_j^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)}=\dfrac{b_2}{a_{22}}-\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k+1)}-\sum\limits_{j=3}^{n}\dfrac{a_{2j}}{a_{22}}x_j^{(k)}, \\ x_i^{(k+1)}=\dfrac{b_i}{a_{ii}}-\sum\limits_{j=1}^{i-1}\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(k+1)}-\sum\limits_{j=i+1}^{n}\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(k)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)}=\dfrac{b_n}{a_{nn}}-\sum\limits_{a=1}^{n-1}\dfrac{a_{nj}}{a_{nn}}x_j^{(k+1)}. \end{cases}$$

Зейдель усулининг яқинлашиш шарти:

$$\max_i \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1 \text{ ёки } \max_i \sum_{i=1,\, i\neq j}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1. \qquad (10)$$

3-мисол. Оддий итерация ва Зейдель усуллари қўлланилиб,

$$\begin{cases} \text{(а)}\ 2x_1+3{,}5x_2-4{,}5x_3+x_4=3, \\ \text{(б)}\ x_1-2{,}5x_2-4{,}5x_3+x_4=2, \\ \text{(в)}\ 10x_1-7x_2-x_3-8x_4=2, \\ \text{(г)}\ 10x_1+2x_2-x_3+2x_4=-4 \end{cases}$$

система $\varepsilon=0{,}5\cdot10^{-6}$ аниқликда ечилсин.

Ечиш. Системани x_i ларга нисбатан ечиб,

$$\begin{cases} x_1=-1{,}75x_2+2{,}25x_3-0{,}5x_4+1{,}5, \\ x_2=0{,}4x_1-1{,}8x_3+0{,}4x_4+1{,}8, \\ x_3=10x_1-7x_2-8x_4-2, \\ x_4=-5x_1-x_2+0{,}5x_3-2 \end{cases}$$

кўринишга келтирайлик. Лекин бу системага нисбатан итерация жараёни, Зейдель жараёни ҳам яқинлашмайди. Чунки $\|B\|_{\text{I}}=\max\{4{,}5;\ 2{,}6;\ 25;\ 6{,}5\}=25>1$, $\|B\|_{\text{II}}=\max\{15{,}4;\ 9{,}75;\ 4{,}55;\ 8{,}9\}=15{,}4>1$. Берилган система устида шундай айний алмаштиришлар бажарамизки, натижада ҳосил бўладиган янги системада $|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$ $(i=1,2,\dots,n)$ бўлсин.

Чунончи:

$$\begin{cases} \text{(г)}\ 10x_1+2x_2-x_3+2x_4=-4, \\ \text{(а)}-\text{(б)}\ x_1+6x_2=1, \\ \text{(а)}+\text{(б)}\ 3x_1+x_2-9x_3+2x_4=5 \\ \text{(г)}-\text{(а)}+\text{(б)}-\text{(в)}\ x_1-3x_2-10x_4=7 \end{cases}$$

$$\text{ёки} \begin{cases} x_1=-0{,}4-0{,}2x_2+0{,}1x_3-0{,}2x_4 \\ x_2=\dfrac{1}{6}(1-x_1), \\ x_3=(-5+3x_1+x_2+2x_4)/9, \\ x_4=-0{,}7+0{,}1x_1-0{,}3x_2. \end{cases}$$

Бу холда $\|B\|_{\text{I}}=\max\{0{,}5;\ 0{,}17;\ 0{,}67;\ 0{,}4\}=0{,}67<1$, $\|B\|_{\text{II}}=0{,}61<1$. $\vec{x}^{(0)}=(0{,}4;\ 1;\ -5/9;\ -0{,}7)$ бўлсин. Ҳисоблашларни то $\vec{x}^{(k)}$ ва $\vec{x}^{(k+1)}$ яқинлашишлар 10^{-6} гача устма-уст тушгунча давом эттирамиз:

3-мисол — **Оддий итерация усули**

к	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	−0,4	1	−0,5555555	−0.7
1	−0,3155555	0,16	−0,6444444	−0,68
2	−0,3604444	0,2311111	−0,7940740	−0,7795555
3	−0,3697185	0,2258666	−0,8232592	−0,8053777
4	−0,3664237	0,2287703	−0,8326716	−0,8047318
...	....	....	....	....
18	−0,36773199	0,22795533	−0,8317289	−0,80515979
19	−0,36773200	0,22795533	−0,8317289	−0,80515980

Натижа: $x_1=-0{,}367732$, $x_2=0{,}227955$, $x_3=-0{,}831729$, $x_4=-0{,}805160$.

к	$x_1^{(к)}$	$x_2^{(к)}$	$x_3^{(к)}$	$x_4^{(к)}$
0	−0,4	1	−0,5555555	−0,7
1	−0,51555555	0,25259258	−0,85489712	−0,8273333
2	−0,37054156	0,2284236	−0,83754086	−0,80558124
3	−0,36832256	0,22805376	−0,83200848	−0,80524839
4	−0,36776192	0,22796031	−0,83175803	−0,80516428
5	−0,367735	0,22795583	−0,83173086	−0,80516025
6	−0,36773221	0,22795536	−0,83172907	−0,80515983
7	−0,36773201	0,22795533	−0,83172893	−0,8051598

Натижа: $x_1 = -0,367732$, $x_2 = 0,227955$, $x_3 = -0,831729$. $x_4 = -0,805160$.

МАШҚЛАР

ЭҲМ учун стандарт программалардан фойдаланиб Гаусс усули ва итерация усуллари ёрдамида $A\vec{x} = \vec{b}$ чизиқли тенгламалар системалари ечилсин. Симметрик матрицали система ҳолида квадрат илдизлар усулидан ҳам фойдаланилсин. Гаусс усули қўлланилганида det A ва A^{-1} тескари матрица ҳам топилсин. Итерация усуллари ва Зейдель усули қўлланилишидан олдин $\varepsilon = 10^{-3}$ аниқликка эришиш учун зарур бўладиган итерация қадамлари сони ҳисоблансин.

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 14, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 8, \\ 4x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 39; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 18, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 26, \\ x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x_3 + 5 = 3x_1, \\ x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 10, \\ 6x_2 - 5x_1 + 2 = 0; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 7 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 1 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_2 - 2 = 0, \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 14, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 10, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 12; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 10, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 19, \\ 2x_1 + 8x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 31, \\ 4x_1 + x_2 - 12x_3 - 3x_4 = 40; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x_1 + x_2 x_3 + x_4 = 36, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 24, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 12, \\ x_1 - x_3 - x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2,8x_1 + 3,4x_2 + 1,4x_3 = 2,2, \\ 3,6x_1 - 1,8x_2 + 2,9x_3 = 1,8, \\ 4,2x_1 + 5,2x_2 - 1,7x_3 = 0,9; \end{cases}$

12) $\begin{cases} 2,7x_1 + 3,8x_2 + 2,9x_3 = 1,7, \\ 3,1x_1 + 3,4x_2 + 2,8x_3 = 2.1, \\ 5,2x_1 - 1,7x_2 + 2,3x_3 = 3,8; \end{cases}$

13) $\begin{cases} 4,1x_1 + 3,2x_2 + 2,9x_3 = 1,2, \\ 2,9x_1 + 3,1x_2 + 3,1x_3 = 3,1, \\ 8,5x_1 + 4,8x_2 + 5,8x_3 = 6,6; \end{cases}$

14) $\begin{cases} 10,1x_1 + 5,6x_2 + 7,3x_3 = 10,8, \\ 4,8x_1 + 6,1x_2 + 3,8x_3 = 7,7, \\ 5,1x_1 + 6,7x_2 + 2,2x_3 = 6,8; \end{cases}$

15) $\begin{cases} 4,3x_1 + 3,1x_2 + 3,8x_3 = 1,8, \\ 5,1x_1 + 4,7x_2 + 5,8x_3 = 6,7, \\ 3,7x_1 + 3,8x_2 - 2,1x_3 = 4,3; \end{cases}$

16) $\begin{cases} 8,6x_1 + 6,8x_2 + 5,7x_3 = 2,01, \\ 4,8x_1 + 5,1x_2 + 3,7x_3 = 10,7, \\ 3,9x_1 - 3,1x_2 + 4,8x_3 = -8,8; \end{cases}$

17) $\begin{cases} -4,2x_1 + 3,5x_2 + 4,8x_3 = 7,6, \\ 0,6x_1 + 3,4x_2 + 1,7x_3 = -0,34, \\ 1,7x_1 + 2,4x_2 - 2,5x_3 = 5,4; \end{cases}$

18) $\begin{cases} 5,4x_1 - 3,3x_2 + 6,4x_3 = -4,5 \\ 5,3x_1 - 2,7x_2 - 2,3x_3 = 2,8, \\ 5,6x_1 - 3,4x_2 + 5,6x_3 = 1,7; \end{cases}$

19) $\begin{cases} 4,6x_1 + 2,7x_2 - 5,7x_3 = 4,8, \\ 3,7x_1 - 4,6x_2 + 2,9x_3 = 1,4, \\ 2,5x_1 + 5,5x_2 + 4,3x_3 = 2,6; \end{cases}$

20) $\begin{cases} 6,8x_1 - 3,7x_2 - 1,7x_3 = 2,9, \\ 4,4x_1 - 3,6x_2 - 7.7x_3 = -34 \\ -1,8x_1 + 1,3x_2 + 3,5x_5 - 2,2; \end{cases}$

21)
$$A = \begin{bmatrix} 34,21 + \alpha & -3,42 & 3,57 \\ 3,31 & 31,49 + \alpha & 2,52 \\ 3,49 & 5,67 & 32,37 - \alpha \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$\alpha = 0,15n$, $n = \overline{0;15}$, $b = (-0,4;\ 3,23;\ \alpha;\ 6,89)^1$.

3-ЛАБОРАТОРИЯ ИШИ

Ҳар қайси вариантда $A\vec{x} = \vec{b}$ чизиқли тенгламалар системаси берилган (1,2 ёки 3-мисол, n нинг қиймати кўрсатилган).

Топшириқ: 1) Гаусс усули қўлланилиб, система илдизлари $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-5}$ аниқликда топилсин; 2) det.4 ҳам шу ε аниқлик билан ҳисоблансин; 3) A^{-1} тескари матрица тузилсин; 4) шу система оддий итерация ва Зейдель усуллари билан ҳам ечилсин.

1-мисол.

$$A_n = \begin{bmatrix} a_1 & 2 & -3 & \dots & (-1)^n n \\ -1 & a_2 & -3 & \dots & (-1)^n n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 2 & -3 & \dots & a_n \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ \dots \\ 1/n \end{bmatrix}, \quad a_k = 1/k$$

2-мисол.

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & 3/2 & 4/3 & \dots & n/(n-1) \\ -a_1 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_n = \begin{bmatrix} n \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_k = 21/k, \ \varepsilon = 0{,}5 \times \times 10^{-3}$$

3-мисол.

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -n+1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \dots \\ n \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = 0{,}5 \times \times 10^{-5},$$

Вариант №	Мисол		Вириант №	Мисол	
	№	n		№	n
1	1	11	14	1	16
2	2	1001	15	2	1010
3	3	101	16	3	110
4	1	12	17	1	17
5	2	1002	18	2	1011
6	3	102	19	3	111
7	1	13	20	1	18
8	2	1003	21	2	1012
9	3	103	22	3	112
10	1	14	23	1	19
11	2	1004	24	2	1013
12	3	104	25	3	113
13	1	15			

4-боб. ЧИЗИҚЛИ БЎЛМАГАН ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАЛАРИНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ

Оддий итерация усули. Берилган ушбу

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

тенгламалар системаси

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \tag{2}$$

каноник шаклга келтирилади. Сўнг $\vec{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ бошланғич яқинлашишлар танланади, кейинги яқинлашишлар эса

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \end{cases} \tag{3}$$

формулалар бўйича изланади. Агар φ_i $(i = \overline{1, n})$ функциялар $\max\limits_i |\vec{x} - \vec{x}^{(0)}| \leqslant \delta$ соҳада аниқланган, узлуксиз дифференциалланувчи ва

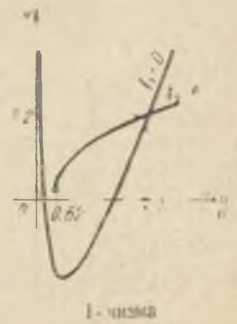
$$q_m = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\max_{\|\vec{x} - \vec{x}^{(0)}\| < \delta} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right| \right) < 1 \tag{4}$$

тенгсизликларни қаноатлантирса, ҳамда $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ бошланғич яқинлашишлар учун $|x_i^{(0)} - \varphi_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})| \leqslant \eta$ $(i = \overline{1, n})$, $\frac{\eta}{1 - q_m} \leqslant \delta$ шартлар бажарилса, (2) тенгламалар системаси шу соҳада ягона $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ечимга эга бўлади ва (3) кетма-кетликлар бу ечимга интилади ва интилиш тезлиги

$$|\xi_i - x_i^{(k)}| \leqslant \frac{\eta}{1 - q_m} q_m^n \quad (i = \overline{1, n}) \tag{5}$$

тенгсизликлар билан баҳоланади. q нинг қиймати m масофада (кубик масофада, нормада) ҳисобланади. У s (октаэдрик) ёки l (сферик) масофада ҳам берилиши мумкин ([7], 53—54-бетлар).

4-мисол. ([7], 55-бет). $f_1(x, y) = 2x^2 - x(y + 5) + 1 = 0$, $f_2(x, y) = x + 3\lg x - y^2 = 0$ системанинг мусбат илдизлари $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$ аниқликда топилсин.



1-чизма

Ечиш. Системанинг илдизларини график ёрдамида тақрибан аниқлаймиз. ЭҲМ қуйидаги натижани беради (1-чизма), программа ва чизмадан кўринишича шу илдиз $3,4 < x < 3,6$, $2,1 < y < 2,3$ тўғри тўртбурчак ичида ётади. (x_0, y_0) бошланғич яқинлашиш сифатида (3,5; 2,2) нуқтани оламиз. Системани каноник шаклга келтирамиз:

$$x = \sqrt{0,5\,(x\,(y+5)-1)} = \varphi_1\,(x, y),$$

$$y = \sqrt{x + 3\lg x} = \varphi_2\,(x, y).$$

Энди $\{|x-3,5| \leqslant 0,1,\ |y-2,2| \leqslant 0,1\}$ соҳада (4) шартнинг бажарилишини текширамиз ($M = 0,43429$ — ўтиш модули):

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \frac{y+5}{4\sqrt{0,5\,(x\,(y+5)-1)}},\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = \frac{x}{4\sqrt{0,5\,(x\,(y+5)-1)}},$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = \frac{1+\frac{3M}{x}}{2\sqrt{x+3\lg x}},\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = 0;\ \max_{x,\,y}\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| = \frac{(2,3+5)\sqrt{2}}{4\sqrt{3,4\ (2,1+5)-1}} <$$

$$< 0,54,\ \max_{x,\,y}\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| = \frac{3,6\sqrt{2}}{4\sqrt{3,4\,(2,1+5)-1}} < 0,27,$$

$$\max_{x,\,y}\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| = \frac{1+\frac{3M}{3,4}}{2\sqrt{3,4+3\lg 3,4}} < 0,27,\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = 0;$$

$$\max\left(\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right|\right) < 0,81,\ \max\left(\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right|\right) < 0,27.$$

Демак, $q = 0,81 < 1$. Итерация жараёни яқинлашади. Кетма-кет яқинлашишларни $x_{k+1} = \sqrt{0,5\ (x_k\,(y_k+5)-1)}$ ва $y_{k+1} = \sqrt{x_k + 3\lg x_k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ формулалар бўйича ҳисоблаймиз:

4-мисол

Оддий итерация

k	x	y	k	x	y
0	3,5	2,2	4	3,48580	2,26084
1	3,47851	2,26544	5	3,48639	2,26113
2	3,48374	2,25891	6	3,48677	2,26131
3	3,48483	2,26050			

Жавоб: $x = 3,4866 \pm 0,2\cdot 10^{-4}$, $y = 2,2612 \pm 0,1\cdot 10^{-4}$.

Ньютон усули. Ушбу

$$f_i\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\ (i = \overline{1, n})\ \text{ёки}\ \vec{f}\ (\vec{x}) = \vec{0} \qquad (6)$$

чизиқли бўлмаган тенглама ечимининг бирор $\vec{x}^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)})$ яқинлашиши топилган бўлсин. Аниқ ечим $\vec{x} = \vec{x}^{(m)} + \vec{\varepsilon}^{(m)}$ кўринишда ёзилиши мумкин, бунда $\vec{\varepsilon}^{(m)} = (\varepsilon_1^{(m)}, \varepsilon_2^{(m)}, \ldots, \varepsilon_n^{(m)})$ тузатма (тақрибий илдиз хатоси). Агар $\vec{f}\ (\vec{x})$ функция $\vec{x}$ ва $\vec{x}^{(m)}$ ни ўз ичига олган бирор қавариқ соҳада узлуксиз дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда $\vec{f}\ (\vec{x}^{(m)} + \vec{\varepsilon}^{(m)}) = \vec{0}$ тенгламани $\vec{\varepsilon}$ вектор даражалари бўйича ёйиб (ва бунда чизиқли ҳадлар билан чегараланиб), $\vec{f}\,(\vec{x}^{(m)}) + \vec{f}^1\,(\vec{x}^{(m)})\ \vec{\varepsilon}^{(m)} = \vec{0}$ чизиқли тенгламани оламиз, ундаги $\vec{f}'\ (\vec{x}^{(m)})$ ҳосила $f_1, \ldots, f_n$ функциялар системасининг $I\,(\vec{x}^{(n)})$ Якоби матрицасини ташкил қилади (қаранг: [5]):

$$I\ (\vec{x}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

$I\,(\vec{x}^{(m)})$ матрица хосмас деб фараз қилинган ҳолда $(\vec{\varepsilon}^{(m)} = -I^{-1}\ (\vec{x}^{(m)})\ \vec{f}\ (\vec{x}^{(m)})$, ниҳоят, $\vec{\varepsilon}^{(m)} = \vec{x}^{(m+1)} - \vec{x}^{(m)}$ бўлгани учун ушбу

$$\vec{x}^{(m+1)} = \vec{x}^{(m)} - I^{-1}\ (\vec{x}^{(m)})\ \vec{f}\ (\vec{x}^{(m)})\ \ (m = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (7)$$

рекуррент формулаҳи ҳосил қиламиз. $\vec{x}^{(0)}$ бошланғич яқинлашиш сифатида изланаётган илдизнинг бирор дағал қиймати олиниши мумкин.

Хусусан, иккинчи тартибли $\begin{cases} f\,(x, y) = 0, \\ g\,(x, y) = 0 \end{cases}$ системани Ньютон усули бўйича ечиш учун $x_{n+1} = x_n - A_n/I_n$, $y_{n+1} = y_n - B_n/I_n$ формулалардан фойдаланамиз, бунда

$$A_n = \begin{vmatrix} f(x_n, y_n) & f'_y(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) & g'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}, \quad B_n = \begin{vmatrix} f'_x(x_n, y_n) & f(x_n, y_n) \\ g'_x(x_n, y_n) & g(x_n, y_n) \end{vmatrix},$$

$$I_n = \begin{vmatrix} f'_x(x_n, x_n) & f'_y(x_n, y_n) \\ g'_x(x_n, y_n) & g'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

5-мисол.

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2y^2 - 2x^3 - 5y^3 - 2,401 = 0, \\ g(x, y) = x^4 - 8y + 3,474 = 0 \end{cases}$$

система ечими $\varepsilon = 10^{-2}$ аниқликда топилсин.

Ечиш. $f'_x = 2xy^2 - 6x^2$, $f'_y = 2x^2y - 15y^2$, $g'_x = 4x^3$, $g'_y = -8$. Бошланғич яқинлашиш сифатида (0,8; 0,5) ни оламиз. Кейинги ҳисоблашлар натижалари қуйидаги жадвалда жойлаштирилган:

5-мисол — Ньютон усули

n	x_n y_n	f_n g_n	f'_x f'_y	g'_x g'_y	A_n B_n	I_n
0	0,8 0,5	−0,0259999 −0,1164001	−3,44 −3,11	2,0479997 −8	−0,154004 0,4536699	33,889279
1	0,8045443 0,4866136	0,0228683 0,0000794	−3,502729 −2,921927	2,0830985 −8	−0,1827144 −0,04791504	34,108493
2	0,81090116 0,48801898	0,017864 0,0022413	−3,5591124 −2,9306218	2,1328662 −8	−0,1363436 −0,0460786	34,723523
3	0,81482765 0,49069052	0,0000608 0,0013111				

МАШҚЛАР

1. Қуйидаги чизиқли бўлмаган тенгламалар системалари итерация усулини қўллаб, $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-3}$ аниқликда ечилсин:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \ x > 0, \ x > 0, \\ \sin(x + y) - 1,6x = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1, \\ \mathrm{tg}(xy + 0,1) = x^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ \cos(x + y) - 1,2x = 0,2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 0,9x^2 + 2y^2 = 1, \\ \mathrm{tg}(xy + 0,3) = x^2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 0,8x^2 + 2y^2 = 1, \\ \mathrm{ctg}\, xy = x^2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ \sin(x + y) - 1,5x = 0,1; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 0,9x^2 + 2y^2 = 1, \\ \mathrm{tg}(xy + 0,2) = x^2; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 0,8x^2 + 2y^2 = 1, \\ \mathrm{tg}(xy + 0,4) = x^2; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ \sin(x + y) = y - 0,1; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 0,5x^2 + 2y^2 = 1, \\ \mathrm{tg}(xy + 0,1) = x^2; \end{cases}$

11) $\begin{cases} 0,9x^2 + 2y^2 = 1, \\ \mathrm{tg}\, xy = x^2; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ \cos(x + y) - 1,2x = 0. \end{cases}$

2. Қуйидаги системалар Ньютон усули қўлланилиб, $\varepsilon = 0,001$ аниқлик билан ечилсин:

1) $\begin{cases} x^7 - 5x^2y^4 + 11,321303 = 0, \\ y^5 - 3x^4y - 3,642436 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (xy)^3 - 3x^3 - 6y^3 + 17,25 = 0, \\ x^4 - 9y - 2,5 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x^2 - xy - y^2 + 4x - 3y + \\ + 1,52 = 0, \\ y\cos y + x - 1,234829 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sin(0,7x + y^2) + x^2 - \\ - y^2 - 0,8060918 = 0, \\ 25x^2 - y^2 - 9,615 = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} e^{xy} - x^2 + y = 1,7676106, \\ (x + 0,5)^3 + y^2 = 3,234; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \sin(x + 2y) - xy = \\ = -0,70201589, \\ x^2 - y^2 = -0,5376; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \sin(x - y) + 2,3x = 4,9256629, \\ x^2 + y^2 = 5,5864188; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 5x - 6y + 20\lg x + 16 = 0, \\ 2x + y - 10\lg y - \\ - 0,834224 = 0; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \sin(x - 2,2y) - xy + \\ + 4,6754632 = 0, \\ \dfrac{x^3}{1,75} - y^2 + 1,7142858 = 0; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} \mathrm{tg}(y - x) + xy = -9,1310061 \\ x^2 + y^2 = 18,32. \end{cases}$

3. $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ векторнинг $\|\vec{x}\| = \max\limits_i |x_i|$, $\|\vec{x}\|_2 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$, $\|\vec{x}\|_3 = \|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2^2| + \ldots + |x_n|^2}$ нормаси қуйидаги тенгсизликларни қаноатлантиришини кўрсатинг:

а) $\|\vec{x}\|_1 \leqslant \|\vec{x}\|_2 \leqslant n\|\vec{x}\|_1$, б) $\|\vec{x}\|_1 \leqslant \|x\|_3 \leqslant \sqrt{n}\,\|\vec{x}\|_1$,

в) $n^{-\frac{1}{2}}\|\vec{x}\|_2 \leqslant \|\vec{x}\|_3 \leqslant \|\vec{x}\|_2$.

4. $d_k > 0$, $k = \overline{1,n}$ бўлсин. 1) $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (d_k |\vec{x}_k|)$, 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} d_k |\vec{x}_k|$,

3) $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} d_k\, |x_k|^2}$ лар x векторнинг нормаси бўлиши исботлансин.

5. 1) $M(A) = n \max\limits_{\substack{1<i\\ j<n}} |a_{ij}|$ сони A матрицанинг нормаси бўлиши, 2) $\max\limits_{\substack{1<i\\ j<n}} |a_{ij}|$ сони A матрицанинг нормаси бўлолмаслиги, 3) $M(A)$ норма $\vec{x}$ векторнинг $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_3$ нормалари билан мослангани исботлансин.

6. $N(A) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$ сони А матрицанинг нормаси бўлиши исботлансин.

7. 1) $\|A_1\| = \max\limits_{1<i<n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ норманинг $\|\vec{x}\|_1$ нормага бўйсуниши, 2) $\|A\|_2 = \max\limits_{1<i<n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ норманинг $\|\vec{x}\|_2$ нормага бўйсуниши исботлансин.

8. Қуйидаги тенгсизликлар исботлансин:

1) $n^{-1}M(A) \leqslant \|A\|_k \leqslant M(A)$ $(k=1, 2, 3)$; 2) $n^{-1}M(A) \leqslant N(A) \leqslant M(A)$ 3) $n^{-1/2}N(A) \leqslant \|A\|_3 \leqslant N(A)$; 4) $n^{-1/2}N(A) \leqslant \|A\|_k \leqslant n^{1/2}N(A)$ $(k=1; 2)$; 5) $n^{-1/2}\|A\|_3 \leqslant \|A\|_k \leqslant n^{1/2}\|A\|_3$ $(k=1; 2)$; 6) $n^{-1}\|A\|_1 \leqslant \|A\|_2 \leqslant n\, \|A\|_1$.

4-ЛАБОРАТОРИЯ ИШИ

Вариантда кўрсатилган чизиқли бўлмаган тенгламалар системаси ҳам оддий итерация усули ҳамда Ньютон усули билан $\varepsilon = 0{,}001$ аниқликда ечилсин (мисол № ва параметрлар жадвалда кўрсатилган):

1-мисол. $\begin{cases} \sin(x+\alpha) + \beta y = \gamma, \\ ax + b\cos(y+c) = d. \end{cases}$ 2-мисол. $\begin{cases} \cos(x+\alpha) + \beta y = \gamma. \\ ax + b\cos(y+c) = d. \end{cases}$

3-мисол. $\begin{cases} \operatorname{tg}(x+\alpha) + \beta y = \gamma, \\ ax + b\sin(y+c) = d. \end{cases}$ 4-мисол. $\begin{cases} \sin(x+\alpha) + \beta\gamma = \alpha, \\ ax + b\sin(y+c) = d. \end{cases}$

Вар.	Мисол №	α	β	γ	a	b	c	d	Вар.	Мисол №	α	β	γ	a	b	c	d
1	1	1	—1	1,2	2	1	0	2	14	4	—1	1	1,5	1	—1	1	1
2	2	—1	1	0,5	1	—1	0	3	15	4	1	—1	1	2	1	0	2
3	1	0	2	2	1	1	—1	0,7	16	2	—1	1	0,8	1	—1	0	1
4	3	0	1	1,5	2	—1	—0,5	1	17	3	1	1	2	—1	1	0	2
5	1	0,5	—1	1	1	1	—2	0	18	4	0,5	—1	—1	1	—1	0	0,8
6	3	0,5	1	0,8	—2	1	0	1,6	19	2	1	0,7	1	0,3	—1	1	1,2
7	4	—1	1	1,3	1	—1	1	0,8	20	3	1,2	—1	3	1	—1	0,8	1,3
8	1	0	1	—0,4	2	—1	1	0	21	4	0,4	—1	1	—1	1	0,2	1,2
9	1	0	—2	1	—1	1	0,5	2	22	2	—0,4	1	—1	0,5	—1	0,3	1
10	1	2	—1	1,5	1	1	—2	0,5	23	3	0,5	1	2	1	1	0	0,7
11	1	1	—1	1,2	2	1	0	2	24	4	1	—1	0,8	0,3	1	0	2
12	2	—1	1	0,5	1	—1	0	3	25	2	0	1	1,2	0,8	2	0,3	1,2
13	3	0	2	2	1	1	—1	0,7									

5-боб. МАТРИЦАЛАРНИНГ ХОС СОН ВА ХОС ВЕКТОРЛАРИНИ ҲИСОБЛАШ

Нолдан фарқли $\vec{x}$ вектор учун

$$A\vec{x} = \lambda \vec{x} \tag{1}$$

тенглик бажарилсин. Ундаги λ сони A квадрат матрицанинг хос сони ёки характеристик сони, $\vec{x}$ вектор A матрицанинг λ га мос хос вектори (умуман, $a\,\vec{x}$ ҳам A нинг хос вектори, бунда a-ихтиёрий сон). A матрицанинг барча хос сонлари тўплами A матрицанинг спектри, хос сонлар модулларининг максимуми A матрицанинг $\rho(A)$ спектрал радиуси,

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

A матрицанинг асрий ёки характеристик тенгламаси, (2) тенгламанинг чап қисмидан иборат

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-1)^n(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - - p_2\lambda^{n-2} - \dots - p_n) \tag{3}$$

n- даражали кўпҳад A матрицанинг характеристик кўпҳади,

$$P(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \ldots - p_n \qquad (4)$$

эса A матрицанинг хос кўпҳадидир. Хос сонлар ва хос векторларни топиш учун: 1) $P(\lambda)$ тузилади, 2) $P(\lambda) = 0$ тенгламадан барча λ_i $(i = \overline{1,n})$ хос сонлар топилади, 3) ушбу

$$(A - \lambda_i E)\,\vec{x} = \vec{0} \qquad (5)$$

бир жинсли тенгламалар системасидан $\vec{x}$ хос векторлар аниқланади.

(4) кўпҳаднинг p_i коэффициентлари A матрицанинг $(-1)^{i-1}$ ишора билан олинган i- тартибли диагонал минорлар йиғиндисига тенг:

$$p_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{jj},\quad p_2 = -\sum_{j<k} \begin{vmatrix} a_{jj} & a_{jk} \\ a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix},$$

$$p_3 = \sum_{j<k<l} \begin{vmatrix} a_{jj} & a_{jk} & a_{jl} \\ a_{kj} & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{lj} & a_{lk} & a_{ll} \end{vmatrix},\ \ldots,\ p_n = (-1)^{n-1}\det A.$$

Бу тенгликлардан кам фойдаланадилар: n нинг катта қийматларида ҳисоблашлар оғирлашади. Амалда эса аниқ (тўғри) усуллар ва итерацион усуллардан фойдаланилади. Аниқ усуллар қўлланилганда олдин p_i коэффициентлар топилади, сўнг $P(\lambda)$ кўпҳад тузилиб, унинг илдизлари (λ_i лар) ва кейин $\vec{x}$ лар аниқланади. Итерацион усуллардан характеристик кўпҳад тузиб ўтирилмай, тўғридан-тўғри хос сонлар ва хос векторлар бир вақтнинг ўзида топилади. Аниқ усуллар хос сонларнинг ҳаммасини топишга (муаммони тўлиқ ҳал қилишга), итерацион усуллар эса битта ёки бир нечта хос сон ва хос векторни топишга (муаммони қисман ҳал қилишга) имкон беради. Ҳисоблашларда

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \mathrm{tr}A,$$
$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \det A \qquad (6)$$

тенгликлардан кенг фойдаланадилар.

А.Н. Крилов усули. 1) Нолдан фарқли ихтиёрий $\vec{c}^{(0)} = (c_{01}, c_{02}, \ldots, c_{0n})'$ вектор танланади, қолган $\vec{c}^{(i)}$ $(i = \overline{1,n})$ векторлар $\vec{c}^{(i)} = A^i \vec{c}^{(0)}$ ёки $\vec{c}^{(i)} = A\vec{c}^{(i-1)}$ муносабат бўйича аниқланади;

2) Ушбу

$$\begin{cases} p_1c_{n-1,1} + p_2c_{n-2,1} + \ldots + p_nc_{01} = c_{n1}, \\ p_1c_{n-1,2} + p_2c_{n-2,2} + \ldots + p_nc_{02} = c_{n2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_1c_{n-1,n} + p_2c_{n-2,n} + \ldots + p_nc_{0n} = c_{nn} \end{cases} \qquad (7)$$

система тузилади ва ундан p_i лар аниқланади; 3) (3) характеристик кўпҳад тузилади ва ундан λ_i хос сонлар аниқланади; 4) хос векторлар аниқланади:

$$\vec{x}^{(i)} = \beta_{i1}\vec{c}^{(0)} + \beta_{i2}\vec{c}^{(1)} + \ldots + \beta_{im}\vec{c}^{(m-1)},\quad m \leqslant n, \qquad (8)$$

бунда

$$\begin{cases} \beta_{im} = 1, \\ \beta_{i,m-1} = \lambda_i - p_1, \\ \beta_{i,m-2} = \lambda_i^2 - p_1\lambda_i - p_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_{i1} = \lambda_i^{m-1} - p_1\lambda_i^{m-2} - \ldots - p_{m-1}. \end{cases} \qquad (9)$$

1-мисол ([7], 166-бет). Ушбу

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 30 & -48 \\ 3 & 14 & -24 \\ 3 & 15 & -25 \end{bmatrix}$$

матрицанинг хос сонлари ва хос векторларини топамиз.

Ечиш. 1) $c^{(0)} = (1, 0, 0)'$ бўлсин. (6) муносабатга асосан:

$$\vec{c}^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 & 30 & -48 \\ 3 & 14 & -24 \\ 3 & 15 & -25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\vec{c}^{(2)} = A\vec{c}^{(1)} = \begin{bmatrix} -29 \\ -15 \\ -15 \end{bmatrix},\quad \vec{c}^{(3)} = A\vec{c}^{(2)} = \begin{bmatrix} 125 \\ 63 \\ 63 \end{bmatrix}.$$

2) (7) система:

$$\begin{cases} -29p_1 + 5p_2 + p_3 = 125, \\ -15p_1 + 3p_2 = 63, \\ -15p_1 + 3p_2 = 63. \end{cases}$$

Иккинчи ва учинчи тенгламаларнинг бир хил бўлаётгани олдинги $\vec{c}^{(0)}, \vec{c}^{(1)}, \vec{c}^{(2)}$ векторлар чизиқли боғланганлигини билдиради. Системани шу векторларнинг чизиқли комбинациясида тузамиз: $\begin{cases} 5p_1 + p_2 = -29, \\ 3p_1 = -15, \end{cases}$ бундан $p_1 = -5$, $p_2 = -4$; $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 4$, $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -1$; (6) муносабатга кўра $\lambda_3 = 5 + 14 - 25 + 4 + 1 = -1$. λ_1 ва λ_2 га мос бўлган $\vec{x}^{(1)}$ ва $\vec{x}^{(2)}$ хос векторларни топамиз ($\vec{x}^{(3)}$ ни топиш учун $\vec{c}^{(0)}$ бошқача танланиши керак). $m = 2$ бўлганидан $\beta_{12} = 1$, $\beta_{11} = \lambda_1 - p_1 = -4 + 5 = 1$, $\beta_{22} = 1$, $\beta_{21} = \lambda_2 - p_1 = -1 + 5 = 4$, шунга кўра $\vec{x}^{(1)} = \beta_{11}\vec{c}^{(0)} + \beta_{12}\vec{c}^{(1)} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}$, $\vec{x}^{(2)} = \beta_{21}\vec{c}^{(0)} + \beta_{22}\vec{c}^{(1)} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Леверье усули. Қуйидаги

$$s_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = SpA,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$s_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \ldots + \lambda_n^k = SpA^k, \tag{10}$$

$$A^k = A^{k-1}A, \ k = \overline{0,n}, \ k \leq n,$$

муносабатлардан фойдаланилиб, $\det(\lambda E - A) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_n$ кўпҳаднинг p_k коэффициентлари кетма-кет топилади:

$$p_k = -\frac{1}{k}(s_k + p_1 s_{k-1} + p_2 s_{k-2} + \ldots + p_{k-1}s_1), \quad k = \overline{1,n}.$$

2-мисол. $A = \begin{bmatrix} 5 & 30 & -48 \\ 3 & 14 & -24 \\ 3 & 15 & -25 \end{bmatrix}$ матрицанинг (1-мисол) характеристик полиноми тузилсин ва λ_i хос сонлари топилсин.

Ечиш. $s_1 = SpA = 5 + 14 - 25 = -6$,

$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} -29 & -150 & 240 \\ -15 & -74 & 120 \\ -15 & -75 & 121 \end{bmatrix}$, $s_2 = SpA^2 = -29 - 74 + 121 = 18$,

$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 125 & 630 & -1008 \\ 63 & 314 & -504 \\ 63 & 315 & -505 \end{bmatrix}$, $s_3 = SpA^3 = 125 + 314 - 505 = 66$,

$$p_1 = -\frac{1}{1}s_1 = 6, \ p_2 = -\frac{1}{2}(s_2 + p_1 c_1) =$$

$$= -\frac{1}{2}(18 + 6 \cdot (-6)) = 9,$$

$$p_3 = -\frac{1}{3}(s_3 + p_1 s_2 + p_2 s_1) = -\frac{1}{3}(-66 + 6 \cdot 18 + 9 \cdot (-6)) = 4,$$

$\det(\lambda E - A) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda + 4 = 0$, бундан $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = -1$.

А. М. Данилевский усули. Бу усулнинг моҳияти берилган A матрица устида кетма-кет ўхшаш алмаштиришлар бажариб, уни Фробениуснинг

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

нормал шаклига келтиришдан иборат. P нинг биринчи сатр элементлари A матрица характеристик кўпҳадининг p_i коэффициентларини ташкил этади: $D(\lambda) = \det(P - \lambda E) = (-1)^n(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - P_2\lambda^{n-2} - \ldots - p_n) = (-1)^n P(\lambda)$.

1-қадам. A матрицада $a_{n,n-1} \neq 0$ бўлсин. A ни ўнг томондан

$$M_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{a_{n1}}{a_{n,n-1}} & -\frac{a_{n2}}{a_{n,n-1}} & \ldots & -\frac{a_{n,n-2}}{a_{n,n-1}} & \frac{1}{a_{n,n-1}} & -\frac{a_{nn}}{a_{n,n-1}} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

матрицага кўпайтирамиз:

$$AM_{n-1}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Энди AM_{n-1} ни чап томондан

$$M_{n-1}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

матрицага кўпайтирамиз:

$$A^{(1)}=M_{n-1}^{-1}\,AM_{n-1}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1,n-1}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2,n-1}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1}^{(1)} & a_{n-1,2}^{(1)} & \dots & a_{n-1,n-1}^{(1)} & a_{n-1,n}^{(1)} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$A^{(1)}$ нинг n-сатри изланаётган P матрицанинг n-сатри билан бир хил. AM_{n-1} ва $A^{(1)}$ матрицалар элементларини ҳисоблаш формулалари:

$$b_{ij}=a_{ij}-a_{i,n-1}\frac{a_{nj}}{a_{n,n-1}}\qquad (j=\overline{1,n};\ j\neq n-1),$$

$$b_{n,n-1}=\frac{a_{i,n-1}}{a_{n,n-1}}\qquad (i=\overline{1,n}), \tag{12}$$

$$a_{ij}^{(1)}=b_{ij}\,(1\leqslant i\leqslant n-2, 1\leqslant j\leqslant n),\ a_{n-1,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{nk}b_{kj}$$

$$(1\leqslant j\leqslant n).$$

2-қадам. $A^{(1)}$ матрицада $a_{n-1,n-2}^{(1)}\neq 0$ бўлсин. Ҳисоблашлар биринчи қадамдагига ўхшаш. Энди $A^{(1)}$ устида ўхшаш алмаштиришлар бажарилади ва у n ва $(n-1)$- сатрлари Фробениус шаклида бўлган янги $A^{(2)}$ матрицага айлантирилади:

$$A^{(2)}=M_{n-2}^{-1}\,A^{(1)}M_{n-2}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & \dots\, a_{1,n-2}^{(2)} & a_{1,n-1}^{(2)} & a_{1n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-2,1}^{(2)} & \dots\, a_{n-2,n-2}^{(2)} & a_{n-2,n-1}^{(2)} & a_{n-2,n} \\ 0 & \dots\, 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots\, 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Бунда

$$M_{n-2}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n-1,1}^{(1)}}{a_{n-1,n-2}^{1}} & -\frac{a_{n-1,2}^{(1)}}{a_{n-1,n-2}^{(1)}} & \dots & -\frac{a_{n-1,n-3}^{(1)}}{a_{n-1,n-2}^{(1)}} & -\frac{1}{a_{n-1,n-2}^{(1)}} & -\frac{a_{n-1,n-1}^{(1)}}{a_{n-1,n-2}^{(1)}} & -\frac{a_{n-1,n}^{(1)}}{a_{n-1,n-2}^{(1)}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{n-2}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1}^{(1)} & a_{n-1,2}^{(1)} & \dots & a_{n-1,n-1}^{(1)} & a_{n-1,n}^{(1)} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ҳисоб формулалари:

$$b_{ij}^{(1)}=a_{ij}^{(1)}-a_{i,n-2}^{(1)}\cdot\frac{a_{n-1,j}^{(1)}}{a_{n-1,n-2}^{(1)}}\quad (j=\overline{1,n};\ j\neq n-2),$$

$$b_{i,n-2}^{(2)}=\frac{a_{i,n-2}^{(2)}}{a_{n-1,n-2}^{(2)}},\quad a_{ij}^{(2)}=b_{ij}^{(1)}\ (i=\overline{1,\ n}-3).$$

$$a^{(2)}_{n-2,\,j} = \sum_{k=1}^{n} a^{(1)}_{n-1,k}\, b^{(1)}_{kj} \qquad (12')$$

Агар $a^{(2)}_{n-2,\,n-3} \neq 0$ бўлса, учинчи қадам, ..., $a^{(n-2)}_{21} \neq \neq 0$ бўлганда $(n-1)$-қадам бажарилади. Натижада A матрица

$$A^{(n-1)} = M_1^{-1} M_2^{-1} \ldots M_{n-1}^{-1} A M_{n-1} M_{n-2} \ldots M_1 = P =$$

$$= \begin{bmatrix} a^{(n-1)}_{11} & a^{(n-1)}_{12} & \ldots & a^{(n-1)}_{1,\,n-1} & a^{(n-1)}_{1n} \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \ldots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Фробениус каноник шаклига келади.

Усул қўлланилиши учун навбати билан $a_{n,\,n-1} \neq 0$, $a^{(1)}_{n-1,\,n-2} \neq 0, \ldots, a^{(n-2)}_{21} \neq 0$ бўлиши шарт. Шарт бажарилмай қолса (норегуляр ҳол), у ҳолда алмаштиришлар қуйидагича давом эттирилади: $(n-k)$-қадамда ҳосил қилинган $A^{(n-k)}$ матрицада $a^{(n-k)}_{k,\,k-1} = 0$ бўлсин. 1) Агар шу элементдан чапда бирор $a^{(n-k)}_{ki} \neq 0$ $(i < k-1)$ бўлса, $(k-1)$- устун i-устун билан, $(k-1)$- сатр ҳам i- сатр билан алмаштирилади ва Данилевский усулидаги $(n-k+1)$-қадамга ўтилади. Бу алмаштиришлар $A^{(n-k)}$ матрицани чап ва ўнг томондан u матрицага кўпайтиришдан иборат $(A^{(n-k)}U)$, бунда:

$$U = \begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 1 & & \vdots & & \vdots & & & \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots & & & \\ & & & 1 & & \vdots & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 1 & \ldots & \ldots & \\ & & & \vdots & & \vdots & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & 1 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \\ & & & \vdots & & \vdots & 1 & & \\ & & & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ (i) \\ \\ (k-1) \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

(column labels above the matrix: (i) over the fourth column, $(k-1)$ over the sixth column)

Данилевский усули | Текшириш Гаусс усулидагига ўхшаш

Сатр	M^{-1}	$A,\ A(i)$			Контроль: $\Sigma,\ i=\overline{1,\,n}$	Контроль: Σ'
1 2 3		a_{11} a_{21} a_{31}	a_{12} a_{22} $\boxed{a_{32}}$	a_{13} a_{23} a_{33}	$a_{14} = \sum_i a_{1i}$ $a_{24} = \sum a_{2i}$ $a_{34} = \sum a_{3i}$	
1	M_2 / M_2^{-1}	$m_{21} = \frac{-a_{31}}{a_{32}}$	$m_{22} = \frac{1}{a_{32}}$ | -1	$m_{23} = \frac{-a_{33}}{a_{32}}$	$m_{24} = \frac{-a_{34}}{a_{32}}$	$m_{21} + m_{23} - 1$
4 5 6	a_{31} a_{32} a_{33}	$a^{(1)}_{11} = a_{11} + a_{12} m_{21}$ $a^{(1)}_{21} = a_{21} + a_{22} m_{21}$ $a^{(1)}_{31} = a_{31} + a_{32} m_{21}$	$a^{(1)}_{12} = a_{12} m_{22}$ $a^{(1)}_{22} = a_{22} m_{22}$ $a^{(1)}_{32} = a_{32} m_{22}$	$a^{(1)}_{13} = a_{13} + a_{12} m_{23}$ $a^{(1)}_{23} = a_{23} + a_{22} m_{23}$ $a^{(1)}_{33} = a_{33} + a_{32} m_{23}$	$a^{(1)}_{14} = \sum a^{(1)}_{1i}$ $a^{(1)}_{24} = \sum a^{(1)}_{2i}$ $a^{(1)}_{34} = \sum a^{(1)}_{3i}$	$a^{(1)}_{15} = a_{14} + a_{12} m_{24}$ $a^{(1)}_{25} = a_{24} + a_{22} m_{24}$ $a^{(1)}_{35} = a_{34} + a_{32} m_{24}$
5'		$\overline{a}^{(1)}_{21} = a^{(1)}_{11} a_{31} + a^{(1)}_{21} a_{32} + a^{(1)}_{33}$	$\overline{a}^{(1)}_{22} = a^{(1)}_{12} a_{31} + a^{(1)}_{22} a_{32} + a^{(1)}_{32} a_{33}$	$\overline{a}^{(1)}_{23} = a^{(1)}_{13} a_{31} + a^{(1)}_{23} a_{32} + a^{(1)}_{33} a_{33}$	$\overline{a}^{(1)}_{24} = a^{(1)}_{14} a_{31} + a^{(1)}_{24} a_{32} + a^{(1)}_{34} a_{33}$	$a^{(1)}_{i4} = a^{(1)}_{i2} + a^{(1)}_{i5},\ i = \overline{1,3}$

Сатр	M^{-1}	$A, A^{(1)}$			Σ	Σ'
11	M_1 / M_1^{-1}	$m_{11} = \frac{1}{\bar{a}_{21}^{(1)}}$ | -1	$m_{12} = \frac{-\bar{a}_{22}^{(1)}}{\bar{a}_{21}^{(1)}}$	$m_{13} = \frac{-\bar{a}_{23}^{(1)}}{\bar{a}_{21}^{(1)}}$	$m_{14} = \frac{-\bar{a}_{24}^{(1)}}{\bar{a}_{21}^{(1)}}$	$-1 + m_{12} + m_{13}$
7	$\bar{a}_{21}^{(1)}$	$a_{11}^{(2)} = a_{11}^{(1)} m_{11}$	$a_{12}^{(2)} = a_{12}^{(1)} + a_{n}^{(1)} m_{12}$	$a_{13}^{(2)} = a_{13}^{(1)} + a_{11}^{(1)} m_{13}$	$a_{14}^{(2)} = \sum_{1}^{3} a_{1i}^{(2)}$	$a_{15}^{(2)} = a_{14}^{(1)} + a_{11}^{(1)} m_{14}$
8	$\bar{a}_{22}^{(1)}$	$a_{21}^{(2)} = a_{21}^{(1)} m_{11}$	$a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} + a_{21}^{(1)} m_{12}$	$a_{23}^{(2)} = a_{23}^{(1)} + a_{21}^{(1)} m_{13}$	$a_{24}^{(2)} = \sum a_{2i}^{(2)}$	$a_{25}^{(2)} = a_{24}^{(1)} + a_{21}^{(1)} m_{14}$
9	$a_{23}^{(1)}$	$a_{31}^{(2)} = a_{31}^{(1)} m_{11}$	$a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} + a_{31}^{(1)} m_{12}$	$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} + a_{31}^{(1)} m_{13}$	$a_{34}^{(2)} = \sum a_{3i}^{(2)}$	$a_{35}^{(2)} = a_{34}^{(1)} + a_{31}^{(1)} m_{14}$
7'		$\bar{a}_{11}^{(2)} = a_{11}^{(2)} \bar{a}_{21}^{(1)} + a_{21}^{(2)} \bar{a}_{22}^{(1)} + a_{31}^{(2)} \bar{a}_{23}^{(1)} = p_1$	$\bar{a}_{12}^{(2)} = a_{12}^{(2)} \bar{a}_{21}^{(1)} + a_{22}^{(2)} \bar{a}_{22}^{(1)} + a_{32}^{(2)} \bar{a}_{23}^{(1)} = p_2$	$\bar{a}_{13}^{(2)} = a_{13}^{(2)} \bar{a}_{21}^{(1)} + a_{23}^{(2)} \bar{a}_{22}^{(1)} + a_{33}^{(2)} \bar{a}_{23}^{(1)} = p_3$		$a_{i4}^{(2)} = a_{i5}^{(2)} + a_{i1}^{(2)}$, $i = \overline{1,3}$

2) Агар ўша $a_{k,k-1}^{(n-k)} = 0$ элементдан чапда жойлашган барча элементлар ҳам нолга тенг бўлса, яъни:

$$A^{(n-k)} = \left[\begin{array}{ccc|ccccc} a_{n}^{(n-k)} & \dots & a_{1,k-1}^{(n-k)} & a_{1k}^{(n-k)} & \dots & a_{1,n-1}^{(n-k)} & a_{1n}^{(n-k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1,1}^{(n-k)} & \dots & a_{k-1,k-1}^{(n-k)} & a_{k-1,k}^{(n-k)} & \dots & a_{k-1,k-1}^{(n-k)} & a_{k-1,n}^{(n-k)} \\ \hline & & & a_{kk}^{(n-k)} & \dots & a_{n-1}^{(n-k)} & a_{kn}^{(n-k)} \\ & O & & 1 & \dots & 0 \dots & 0 \\ & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & 0 & \dots & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & P^{(n-k)} \end{array}\right]$$

бўлса, Лаплас теоремаси бўйича $\det(A^{(n-k)} - \lambda E) = \det(B - \lambda E_{k-1}) \det(P^{(n-k)} - \lambda E_{n-k+1})$ топилади, бунда $\det(P^{(n-k)} - \lambda E_{n-k+1})$ бевосита ҳисобланади, B матрицага нисбатан эса Данилевский усули қўлланилади (53-бетга қаранг).

A матрицанинг ҳар бир λ хос сонга мос $\vec{x}$ хос вектори $\vec{x} = S\vec{y}$ муносабат ёрдамида аниқланади, бунда $\vec{y}$ вектор P Фробениус матрицасининг хос вектори, $S = M_{n-1} M_{n-2} \dots M_1$, $P = S^{-1} AS$, $\vec{y}$ вектор $P\vec{y} = \lambda\vec{y}$, дан яъни:

$$\left|\begin{array}{r} p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots + p_n y_n = \lambda y_1 \\ y_1 = \lambda y_2, \\ \dots\dots \\ y_{n-1} = \lambda y_n \end{array}\right| \qquad (13)$$

системадан аниқланади. Хусусан, $y_n = 1$ деб қабул қилинса, $\vec{y} = (\lambda^{n-1}, \dots, \lambda_1)$ бўлади.

3-мисол. 1-мисолда кўрсатилган

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 30 & -48 \\ 3 & 14 & -24 \\ 3 & 15 & -25 \end{bmatrix}$$

матрицанинг хос сонлари ва хос векторлари топилсин.

Ечиш.

3-мисол **Данилевский усули**

Сатр	M^{-1}	A, $A^{(1)}$ матрицалар			Σ	Σ'
1		5	30	—48	13	
2		3	14	—24	—7	
3		3	$\boxed{15}$	—25	—7	
I	M_2 / M_1^{-1}	—0,2	0,066667 —1	1,666667	0,466667	0,466667
4	3	—1	2,00001	2,00001	3,00002	1,00001
5	15	0,2	0,933338	—0,666662	0,466676	—0,466662
6	—25	0	1,000005	0,000005	1,000010	0,00005
5′		$\boxed{0}$	—5,000025	—3,9999	16,0002	

Етакчи элемент $\boxed{a_{21}^{(1)}} = 0$. Етакчилик ролини алмаштириш учун унинг чап томонида элемент ҳам йўқ (2 — нерегуляр ҳол). Ҳисоблашлар узилади. Шу жойгача

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & 2{,}00001 & 2{,}00001 \\ \boxed{0} & -5{,}000025 & -3{,}9999 \\ 0 & 1{,}000005 & 0{,}000005 \end{bmatrix}$$ га эга бўлган эдик, ёки

матрица элементларини бирларгача яхлитласак,

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{c|cc} -1 & 2 & 2 \\ \hline 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & P^{(1)} \end{array}\right], \text{ ёки } P = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 4$, бундан $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \mathrm{tr}\,A - (\lambda_1 + \lambda_2) = (-1 - 5) - (-4 - 1) = -1$. Иккинчи нерегуляр ҳолда хос векторларни Данилевский усули бўйича топиб бўлмайди, бошқа усулларга мурожаат қилишга тўғри келади.

Модуль бўйича энг катта бўлган битта ёки бир нечта хос сонларни топиш учун итерация усули. Ихтиёрий $\vec{y}^{(0)} = (y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})'$ нол бўлмаган бошланғич векторни оламиз

ва векторларнинг $\vec{y}^{(0)}$, $\vec{y}^{(k)} = A\vec{y}^{(k-1)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ рекуррент кетма-кетлигини тузамиз. А матрицанинг модуль бўйича энг катта хос сони (у каррали бўлган ҳолда ҳам)

$$\lambda_1 \approx y_i^{(k+1)}/y_i^{(k)} \qquad (14)$$

бўлади. Унга мос $\vec{x}^{(1)}$ нинг қиймати нормаллаштириб олинади: $\vec{x}^{(1)} = A^k\vec{y}^{(0)} = \left(\frac{y_1^{(k)}}{\sqrt{(\vec{y}^{(0)}, \vec{y}^{(0)})}}, \ldots, \frac{y_n^{(k)}}{\sqrt{(\vec{y}^{(0)}, \vec{y}^{(0)})}}\right)$

Агар итерациялар кетма-кетлигида мос компонентларнинг нисбатлари тартибсиз ўзгарса, ишоралар алмашиши рўй берса, бу ҳол комплекс хос сонларнинг мавжудлигидан дарак беради. Иккинчи хос сон ва хос вектор $\lambda_2 \approx (y_i^{(k+1)} - \lambda_1 y_i^{(k)})/(y_i^{(k)} - \lambda_1 y_i^{(k-1)})$, $\vec{x}^{(2)} \approx \vec{y}^{(k+1)} - \lambda_1 \vec{y}^{(k)}$ муносабатлардан топилади.

4-мисол. $A = \begin{bmatrix} 5 & 30 & -48 \\ 3 & 14 & -24 \\ 3 & 15 & -25 \end{bmatrix}$ матрицанинг хос сонлари ва уларга мос хос векторлари итерация усули қўлланилиб топилсин, $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$.

Ечиш. $\vec{y}^{(0)} = (1,0,0)$ бўлсин. $\vec{y}^{(l)} = A\vec{y}^{(l-1)}$ векторлар кетма-кетлигини тузамиз (жадвал) ва энг катта хос ва унга мос хос векторни топамиз:

4-мисол **Итерация усули**

A \ $\vec{y}^{(k)}$	5 3 3 / $(y_1^{(k)}$,	30 14 15 / $y_2^{(k)}$,	—48 —24 —25 / $y_3^{(k)})'$	$y_1^{(k+1)}/y_1^{(k)}$	$y_2^{(k+1)}/y_2^{(k)}$	$y_3^{(k+1)}/y_3^{(k)}$
$\vec{y}^{(0)}$	1	0	0			
$\vec{y}^{(1)}$	5	3	3	5		
$\vec{y}^{(2)}$	—29	—15	—15	—5,8	—5	—5
$\vec{y}^{(3)}$	125	63	63	—4,3103	—4,2	—4,2
$\vec{y}^{(4)}$	—509	—255	—255	—4,072	—4,0476	—4,0476
$\vec{y}^{(5)}$	2045	1023	1023	—4,0177	—4,0118	—4,0118

A	5 3 3	30 14 15	—48 —24 —25	$y_1^{(k+1)}/y_1^{(k)}$	$y_2^{(k+1)}/y_2^{(k)}$	$y_3^{(k+1)}/y_3^{(k)}$
$\vec{y}^{(k)}$	$(y_1^{(k)}$,	$y_2^{(k)}$	$y_3^{(k)})'$			
$\vec{y}^{(6)}$	—8189	—4095	—4095	—4,0044	—4,0029	—4,0029
$\vec{y}^{(7)}$	32765	16383	16383	—4,0011	—4,0007	—4,0007
$\vec{y}^{(8)}$	—131069	—66335	—65535	—4,0003	—4,0002	—4,0002
$\vec{y}^{(9)}$	524285	262143	262143	—4,00007	—4,00005	—4,00005

$\vec{x}^{(1)} \approx \vec{y}^{(9)} = (524285;\ 262143;\ 262143)'$, $\lambda_1 = -4$ ёки $\vec{x}^{(1)} \approx (0{,}8165;\ 0{,}4082;\ 0.4082)'$.

4-мисол λ_1 ни ҳисоблаш

$y_i^{(9)}$	$\lambda_1 y_i^{(8)}$	$y_i^{(9)} - \lambda_1 y_i^{(8)}$	$y_i^{(8)}$	$\lambda_1 y_i^{(7)}$	$y_i^{(8)} - \lambda_1 y_i^{(7)}$	λ_2
524285	524276	9	—131069	—131060	—9	—1
262143	262140	3	—65535	—65532	—3	—1
262143	262140	3	—65535	—65532	—3	—1

$$\lambda_2 = -1,\ \vec{x}^{(2)} \approx \vec{y}^{(9)} - \lambda_1 \vec{y}^{(8)} = (9;\ 3;\ 3)',\ \lambda_3 = 5 + 14 - 25 - (-4) - (-1) = -1.$$

$\vec{x}^{(3)}$ ни топиш учун $\vec{y}^{(0)}$ бошланғич вектор бошқача танланиши лозим.

Итерация усули қўлланилиб мусбат аниқланган симметрик матрицанинг хос сонлари ва хос векторларини излашда характеристик кўпҳад илдизларининг ҳақиқий ва мусбат бўлиши, хос векторлар ҳақиқий бўлиши ва ортогоналлик шартини (яъни $(\vec{x}^{(i)}, \vec{x}^{(j)}) = \sum_{k=1}^{n} x_k^{(i)} x_k^{(j)} = 0,\ i \neq j$ бўлиш шартини) қаноатлантириши эътиборга олинади. $\vec{x}^{(1)}$ биринчи хос векторни топиш мақсадида $A\vec{x}^{(1)} = \lambda_1 \vec{x}^{(1)}$ га асосланиб, ушбу система тузилади:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1) x_1^{(1)} + a_{12} x_2^{(1)} + \ldots + a_{1n} x_n^{(1)} = 0, \\ a_{21} x_1^{(1)} + (a_{22} - \lambda_1) x_2^{(1)} + \ldots + a_{2n} x_n^{(1)} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} x_1^{(1)} + a_{n2} x_2^{(1)} + \ldots + (a_{nn} - \lambda_1) x_n^{(1)} = 0 \end{cases} \quad \text{ёки}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{1}{\lambda_1}(a_{11} x_1^{(1)} + a_{12} x_2^{(1)} + \ldots a_{1n} x_n^{(1)}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1}^{(1)} = \dfrac{1}{\lambda_1}(a_{n-1,1} x_1^{(1)} + a_{n-1,2} x_2^{(1)} + \ldots + a_{n-1,n} x_n^{(1)}), \end{cases} \tag{14}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{x_n^{(1)}}(a_{n1} x_1^{(1)} + a_{nn} x_n^{(1)})$$

Хос компонентларнинг ҳаммасини бирор сонга кўпайтириш ёки бўлиш мумкин. Шунга кўра $x_n^{(1)} = 1$ деб оламиз. Система n та λ_1, $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)}$ номаълумли n та тенгламадан иборат бўлиб қолади. Бу номаълумлар системадан итерация йўли билан топилади. Энди λ_2 ва $\vec{x}^{(2)}$ ни топиш мақсадида юқорида кўрсатилганига ўхшаш равишда $\lambda_2 x_i^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(2)}$ $(\overline{i=n})$ система тузилади ва $(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}) = \sum_{j=1}^{n-1} x_j^{(1,m)} / x_j^{(2)} + x_n^{(2)} = 0$ ортогоналлик шартидан фойдаланган ҳолда компоненталарнинг бирортаси, масалан $x_n^{(2)}$ ни бошқалари орқали ифодаланади. Худди шу $x_n^{(2)}$ компонента системага қўйилади. Натижада:

$$\begin{cases} x_i^{(2)} = \dfrac{1}{\lambda_2} \sum\limits_{j=1}^{n-1} a_{ij}^{(1)} x_j^{(2)}\ (i = \overline{1, n-2}), \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{x_{n-1}^{(2)}} \sum\limits_{j=1}^{n-1} a_{n-1,j}^{(1)} x_j^{(2)},\ a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{in} x_j^{(1,m)},\ m = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{15}$$

Бу $(n-1)$-тартибли системадан иборат. Унга $x_{n-1}^{(2)} = 1$ қўйилаб, қолган λ_2, $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}, \ldots, x_{n-2}^{(2)}$ номаълумлар итерация йўли билан аниқланади. Шунга ўхшаш қолган хос сон ва хос векторлар изланади.

5-мисол. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ матрицанинг хос сонлари ва хос векторлари $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ аниқлик билан топилсин.

Ечиш. Матрица симметрик ва мусбат аниқланган (Сильвестр шартлари бажарилади): $D_1 = 3 > 0$, $D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 12 > 0$, $D_3 = \det A = 93 > 0$. (14) системани тузамиз:

$$\begin{cases} 3x_1^{(i)} + 2x_2^{(i)} + 2x_3^{(i)} = \lambda_i\, x_1^{(i)}, \\ 2x_1^{(i)} = 6x_2^{(i)} + x_3^{(i)} = \lambda_i \cdot x_2^{(i)}, \\ 2x_1^{(i)} + x_2^{(i)} + 8x_3^{(i)} = \lambda_i\, x_3^{(i)}, \end{cases} \tag{16}$$

бунга $i = 1, x_3^{(1)} = 1$ қўйилса,

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{1}{\lambda_1}\,(3x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} + 2), \\ x_2^{(1)} = \dfrac{1}{\lambda_1}\,(2x_1^{(1)} + 6x_2^{(1)} + 1), \\ \lambda_1 = 2x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + 8. \end{cases} \tag{16'}$$

Бошланғич яқинлашиш сифатида $x_1^{(1,0)} = 1$, $x_2^{(1,0)} = 1$ ни олайлик. $\lambda_1^{(0)} = 11$ бўлади. $\|B\|_1 = \max\limits_{1 \le i \le n}\left(\frac{5}{11}, \frac{8}{11}\right) = \frac{8}{11} < 1$, итерация жараёни яқинлашади.

5- мисол **Итерация усули**

k	$x_1^{(1,k)}$	$x_2^{(1,k)}$	$\lambda_1^{(k)}$	k	$x_1^{(1,k)}$	$x_2^{(1,k)}$	$\lambda_1^{(k)}$
0	1	1	11	8	0,48111	0,56434	9,52657
1	0,63636	0,81818	10,09091	9	0,47992	0,56141	9,52126
2	0,54955	0,71171	9,81081	10	0,47920	0,55962	9,51802
3	0,51699	0,64922	9,68320	11	0,47876	0,55853	9,51605
4	0,50081	0,61233	9,61394	12	0,47849	0,55787	9,51485
5	0,49169	0,59035	9,58733	13	0,47832	0,55747	9,51412
6	0,48631	0,57715	9,54976	14	0,47822	0,55721	9,51367
7	0,48307	0,56918	9,53632	15	0,47816	0,55707	9,51340

$\vec{x}^{(1)} = (0{,}478;\ 0{,}557;\ 1)'$, $\lambda_1 = 9{,}513$.

λ_2 ва $\vec{x}^{(2)}$ ни топиш мақсадида (16) системага $i = 2$ ни қўямиз. $\vec{x}^{(1)}$ ва $\vec{x}^{(2)}$ векторларнинг ортогоналлигидан: $0{,}478\, x_1^{(2)} + 0{,}557\, x_2^{(2)} + 1 \cdot x_3^{(2)} = 0$, ёки $x_3^{(2)} = -0{,}478\, x_1^{(2)} - 0{,}577\, x_2^{(2)}$. Агар $x_2^{(2)} = 1$ деб олсак,

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{\lambda_2}(2{,}044\, x_1^{(2)} + 0{,}886), \quad \lambda_2 = 1{,}522\, x^{(2)} + 5{,}443. \tag{16''}$$

Бошланғич яқинлашиш сифатида $x_1^{(2,0)} = 1$ ни олайлик, $\lambda_2^{(0)} = 6{,}965$ бўлади. $\vec{x}^{(2)}$ ва λ_2 ни итерация усулини қўллаб, (16″) системадан топамиз:

5- мисол (давоми) **Итерация усули**

k	$x_1^{(2,k)}$	$x_2^{(2,k)}$	$\lambda_2^{(k)}$	k	$x_1^{(2,k)}$	$x_2^{(2,k)}$	$\lambda_2^{(k)}$
0	1	1	6,965				
1	0,42067	1	6,08327	6	0,23613	1	5,80239
2	0,28699	1	5,87980	7	0,23588	1	5,80201
3	0,25045	1	5,82419	8	0,23580	1	5,80189
4	0,24002	1	5,80831	9	0,23578	1	5,80186
5	0,23701	1	5,80372	10	0,23578	1	5,80185

$x_3^{(2)} = -0{,}478 \cdot 0{,}23578 - 0{,}557 \cdot 1 = -0{,}66970$. Шундай қилиб, $\vec{x}^{(2)} = (0{,}236;\ 1;\ -0{,}670)'$, $\lambda_2 = 5{,}802$.

Учинчи $\vec{x}^{(3)}$ хос векторни аниқлашда $(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(3)}) = 0$ ва $(\vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)}) = 0$ ортогоналлик хусусиятлардан фойдаланамиз: $0{,}478\, x_1^{(3)} + 0{,}557\, x_2^{(3)} + x_3^{(3)} = 0{,}0236\, x_1^{(3)} + x_2^{(3)} - 0{,}670\, x_3^{(3)} = 0$. Бу системага $x_3^{(3)} = 1$ ни қўямиз. Натижада $\vec{x}^{(3)} = (-3{,}962;\ 1{,}605;\ 1)$, сўнг (16) системанинг охирги тенгламасидан $i = 3$ да $\lambda_3 = 1{,}690$ ни аниқлаймиз.

МАШҚЛАР

Матрицаларнинг хос сонлари ва хос векторлари детерминантларни тўғридан-тўғри ҳисоблаш усули билан топилсин:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. 2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$.

3. $A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 10 \\ -2 & -1 & -6 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$. 4. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$.

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 7 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. 6. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Матрицаларнинг хос сонлари ва хос векторлари Крилов, Леверрье, Данилевский усуллари қўлланилиб топилсин:

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1{,}2 & 2{,}5 & 3 \\ 1{,}2 & 1 & 2 & 1 \\ 2{,}5 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1{,}2 \end{bmatrix}$. 8. $A = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 2{,}5 & 3{,}5 & 4{,}5 \\ 2{,}5 & 3 & 2{,}1 & 3{,}1 \\ 3{,}5 & 2{,}1 & 4 & 1 \\ 4{,}5 & 3{,}1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

9. $A=\begin{bmatrix} 1,12 & 0,32 & 0,21 & 0,11 \\ 0,32 & 2,12 & 3,12 & -0,8 \\ 0,18 & 0,24 & 4 & 0,26 \\ 0,24 & 0,56 & 0,6 & -6 \end{bmatrix}$.

10. $A=\begin{bmatrix} 0,5 & 1 & -2 & 0,4 \\ 2 & 0,6 & 3 & -0,6 \\ 0,8 & 0,7 & 2 & -0,2 \\ 1,2 & 0,5 & 2,2 & 6 \end{bmatrix}$. 11. $A=\begin{bmatrix} 1,75 & 1,72 & 3,32 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0,25 & -3 & 6 \end{bmatrix}$.

12. $A=\begin{bmatrix} 2 & 0,5 & 1,3 & -1 \\ 0,4 & 3 & 0,6 & 0,8 \\ 0,5 & 0,7 & 4 & 0,9 \\ 0,8 & 0,9 & 1,2 & 5 \end{bmatrix}$.

13. $A=\begin{bmatrix} -3,2 & 2,2 & 2,4 & 3,5 \\ -1,3 & 2,3 & 3 & 0,2 \\ 6,22 & 0,14 & 2 & -2,45 \\ 6 & 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

14. $A=\begin{bmatrix} 2,00 & 0,34 & 0,22 & 0,25 \\ 1,56 & 2 & 0,43 & 0,18 \\ 0,34 & 5 & -0,26 & 0,65 \\ 3 & 0,16 & 4 & -5 \end{bmatrix}$.

Итерациялар усули қўлланилиб матрицаларнинг модуль бўйича энг катта хос сони ва унга мос хос вектори топилсин:

15. $A=\begin{bmatrix} 3,8 & 1 & 1,8 \\ 1 & 3,4 & 1,8 \\ 1,8 & 1,8 & 3,9 \end{bmatrix}$. 16. $A=\begin{bmatrix} 4,2 & 1 & 2,3 \\ 1 & 4,4 & 2 \\ 2,3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

17. $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. 18. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

19. $A=\begin{bmatrix} 0,3 & 0,9 & 0,1 \\ 0,9 & 2,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 1 \end{bmatrix}$. 20. $A=\begin{bmatrix} 2,4 & 1 & 1,1 \\ 1 & 3,2 & 1,2 \\ 1,1 & 1,2 & 3,6 \end{bmatrix}$.

21. Агар барча $\vec{x}$ хос векторлар учун $(A\vec{x}, \vec{x}) > 0$ бўлса, у ҳолда $\vec{x}$ га боғлиқ бўлмаган шундай доимий $\delta > 0$ сон мавжудки, барча $\vec{x}$ ларда $(A\vec{x}, \vec{x}) \geqslant \delta(\vec{x}, \vec{x})$ бўлади. Исбот қилинг.

22. Агар A ва B бир хил тартибли квадрат матрица бўлса, у ҳолда $M=\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}$ матрицанинг характеристик кўпҳади $A+B$ ва $A-B$ матрицалар характеристик кўпҳадларининг кўпайтмасига тенглигини исбот қилинг.

23. Ихтиёрий A матрица ва α сон учун A ва $A-\alpha E$ матрицалар бир хил хос векторга эга бўлишини кўрсатинг.

5- ЛАБОРАТОРИЯ ИШИ

1) Матрицаларнинг хос сонлари ва хос векторлари топилсин. Ҳисоблашлар ЭҲМ да бажарилсин, $\varepsilon = 0,5\cdot10^{-5}$:

$$A=\begin{bmatrix} 1,25+\alpha & 1,2 & 0,48 & 0,12 \\ 1,2 & 2,1+\beta & 0,3 & 0,18 \\ 0,48 & 0,3 & 2,4+\alpha & 0,16 \\ 0,12 & 0,18 & 0,16 & 3,2+\beta \end{bmatrix}$$

2) Матрицаларнинг модуль бўйича энг катта хос сони ва унга мос хос вектори топилсин:

$$B=\begin{bmatrix} 2,1+\gamma & -1 & 0,3 & 0,5 \\ -1 & 2,2+\gamma & 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,4 & 2,3+\gamma & 0,7 \\ 0,5 & 0,6 & 0,7 & 2,4+\gamma \end{bmatrix}$$

Вар.№	α	β	γ	Вар.№	α	β	γ	Вар.№	α	β	γ
1	0,8	0,1	0,2	9	1,4	0,2	0,5	17	1,4	0,6	0,88
2	0,9	0,2	0,6	10	1,4	0,4	0,68	18	1,5	0,42	0,76
3	0,8	0,3	0,3	11	1,4	0,5	0,58	19	1,6	2	2
4	0,9	0,1	0,9	12	1,5	0,2	0,66	20	1,8	3	2,2
5	1,1	0,2	0,22	13	1,5	0,3	0,7	21	1,8	4	2,1
6	1,2	0,1	0,32	14	1,24	0,4	0,73	22	2,2	2	2,4
7	1,3	0,2	0,8	15	1,36	0,5	0,78	24	2,3	1	2,3
8	1,3	0,1	0,4	16	1,38	0,6	0,8	25	2,4	1	2,5

Бирор $y=f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда $y_k=f(x_k)(k=\overline{0;n})$ жадвал қийматлари билан берилган бўлсин ва уни шу оралиқда интерполяцияловчи

$$y=P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} c_i x^i \qquad (1)$$

кўпҳадни тузиш талаб қилинсин. Унинг c_i коэффициентлари

$$\sum_{i=0}^{n} c_i x_k^i = y_k \quad (k=\overline{0;\ n}) \qquad (2)$$

тенгламалар системасидан аниқланиши мумкин. Лекин бунинг учун одатда бевосита махсус формулалардан (масалан, $L_n(x)$ Лагранж, $N(x)$ Ньютон формулаларидан) фойдаланилади.

Лагранж интерполяцион кўпҳади ушбу кўринишга эга бўлади:

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)}\cdot y_j, \qquad (3)$$

ёки $\omega(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)=(x-x_0)\ \ldots,\ (x-x_n)$, $\omega'(x)=\sum_{k=0}^{n}\prod_{i\neq k}(x-x_i)$ белгилашлар киритилса:

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{\omega(x)}{\omega'(x_j)(x-x_j)}\,y_j \qquad (3')$$

Агар $x_1-x_0=x_2-x_1=\ldots=x_n-x_{n-1}=h=\mathrm{const}$ бўлса, у ҳолда x_0 дан x гача қадамлар сони $t=\frac{x-x_0}{h}$, x_0 дан x_j гача қадамлар сони $j=\frac{x_j-x_0}{h}$, у ҳолда $x-x_j=h(t-j)$, $\omega(x)=h^{n+1}t(t-1)\ \ldots(t-n)$, $\omega'(x_j)=(-1)^{n-j}j!\,(n-j)!h^n$ бўлади. Натижада:

$$L_n(x)=t(t-1)\ \ldots\ (t-n)\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n-j}y_j}{(t-j)\,j!\,(n-j)!} \qquad (3'')$$

$L_n(x)$ формуланинг хатоси:

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{M_{(n+1)}}{(n+1)!}\,|\omega(x)|, \qquad (4)$$

бунда $M_{n+1}=\max\limits_{[a,\,b]}|f^{(n+1)}(\xi)|$, $\xi\in[a,b]$.

Кўрсатилган $y=f(x)$ функциянинг x нуқтадаги қийматини топиш талаб қилинганида Эйткен схемасидан («чиллики» кўпайтиришдан) фойдаланиш ҳисоблашларни енгиллаштиради:

$$\begin{array}{llllll}
x_0-x & y_0 & & & & \\
x_1-x & y_1 & L_{(01)}(x) & & & \\
x_2-x & y_2 & L_{(12)}(x) & L_{(012)}(x) & & \\
x_3-x & y_3 & L_{(23)}(x) & L_{(123)}(x) & L_{(0123)}(x) & \\
\ldots & & & & & \\
x_n-x & y_n & L_{(n-1,n)}(x) & L_{(n-2,n-1,n)}(x) & L_{(n-3,n-2,n-1,n)}(x) & L_{(n-4,\ldots,n)}(x)\ldots
\end{array}$$

Бундаги ҳар қайси $L_{(0,1\ldots k)}(x)$ белги $x_0, x_1, \ldots, x_k$ тугунлар бўйича тузилган $L_n(x)$ Лагранж интерполяцион кўпҳадининг x нуқтадаги қийматини ифодалайди ва улар қуйидаги формулалар бўйича топилади:

$$L_{(01)}(x)=\frac{(x_1-x)y_0-(x_0-x)y_1}{x_1-x_0},$$

$$L_{(12)}(x)=\frac{(x_2-x)\,y_1-(x_1-x)y_2}{x_2-x_1},$$

. . . .

$$L_{(01k)}(x)=\frac{(x_1-x)\ L_{(0k)}(x)-(x_0-x)L_{(1k)}(x)}{x_1-x_0}=$$

$$=\frac{(x_k-x)L_{(0,1)}(x)-(x_1-x)\ L_{(0k)}(x)}{x_k-x_1},$$

ва ш. к.

1-мисол. Ушбу $f(x)=\sqrt{x}$ функциянинг $f(100)=10$, $f(121)=11$, $f(144)=12$ қийматлари маълум. Лагранж интерполяцион формуласидан фойдаланиб $f(115)$ қийматини қандай аниқликда топиш мумкин? $f(115)$ топилсин.

Ечиш. 1) $f'''=\frac{3}{8}\,x^{-5/2}$, $M_3=\frac{3}{8}\cdot 100^{-5/2}=\frac{3}{8}\cdot 10^{-5}$,

$$|R_3(x)|\leqslant\frac{3}{8}\cdot 10^{-5}\cdot\frac{1}{3!}\,|(115-100)(115-121)(115-144)|\approx$$

$$\approx 1{,}6\ 10^{-3}.$$

2)

i	$x_i - x$	y_i	$L_{(i,\ i+1)}$	$L_{(i,\ i+1,\ i+2)}$
0	—15	10		
1	6	11	10,714285	
2	29	12	10,73913	10,7178

$f(115) \approx 10{,}72$.

$x_i \in [a,\ b]$ тугунлар шундай танланиши керакки, $\max\limits_{[a,\ b]} |\omega(x)| = \min\limits_{[x_0,\ \ldots,\ x_n]} \max\limits_{[a,\ b]} |\omega(x)|$ бўлсин, яъни интерполяциялаш хатоси энг минимал бўладиган бўлсин. $[-1;\ 1]$ кесмада бундай оптимал тугунлар $T_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n} \cos((n+1) \arccos x)$ Чебишев 1-жинс кўпҳадининг

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)} \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n) \qquad (5)$$

илдизларидан иборатдир. Ихтиёрий $[a,\ b]$ кесма учун оптимал тугунлар

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)} \quad (k = \overline{0,\ n}) \qquad (6)$$

формула бўйича изланади.

Бўлинган айирмалар. x_i, x_j тугунлар билан берилган биринчи тартибли бўлинган айирма:

$$f(x_i,\ x_j) = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}.$$

x_i, x_j, x_m тугунлар бўйича тузилган иккинчи тартибли бўлинган айирма:

$$f(x_i,\ x_j,\ x_m) = \frac{f(x_j,\ x_m) - f(x_i,\ x_j)}{x_m - x_i},$$

умуман, $(k-1)$-тартибли бўлинган айирма:

$$f(x_0,\ \ldots,\ x_k) = \frac{f(x_1,\ \ldots,\ x_k) - f(x_0,\ \ldots,\ x_{k-1})}{x_k - x_0}.$$

Ҳисоблашларда қуйидаги муносабатдан ҳам фойдаланилади:

$$f(x_0,\ \ldots,\ x_k) = \frac{f^{k+1}(\xi)}{(k+1)!},\quad x_0 \leqslant \xi \leqslant x_k.$$

Ньютоннинг бўлинган айирмали интерполяцион кўпҳади қуйидаги кўринишда тузилади:

$$N_n(x) = f(x_0) + f(x_0,\ x_1)(x - x_0) + \ldots +$$
$$+ f(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)(x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}), \qquad (7)$$

$$R_n(x) = f(x,\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n). \quad (8)$$

Формулани тузиш жараёнида Эйткен схемасидан фойдаланиш мумкин.

2-мисол. $y = f(x)$ функциянинг қуйидаги жадвалда берилган қийматлари бўйича $N_n(x)$ Ньютон формуласи тузилсин ва $f(3{,}7608)$ қиймати топилсин.

x	0	2,5069	5,0154	7,5270
y	0,3989423	0,3988169	0,3984408	0,3978138

Ечиш. Бўлинган айирмалар жадвалини тузамиз:

x_n	f_n	$f(x_n,\ x_{n+1})$	$f(x_n,\ x_{n+1},\ x_{n+2})$	$f(x_n,\ x_{n+1},\ x_{n+2},\ x_{n+3})$
0	0,3989423	$-5 \cdot 10^{-5}$	$-1{,}99 \cdot 10^{-5}$	0
2,5069	0,3988169	$-14{,}99 \cdot 10^{-5}$	$-1{,}99 \cdot 10^{-5}$	
5,0154	0,3984408	$-24{,}96 \cdot 10^{-5}$		
7,5270	0,3978138			

$$N(x) = 0{,}3989423 - 0{,}0000500\,x - 0{,}0000199\,x(x - 2{,}5069),$$

$$f(3{,}7608) \approx N(3{,}7608) = 0{,}39903658 \approx 0{,}399037.$$

3-мисол. $S(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ чекли қатор йиғилсин.

Ечиш.

3-мисол **Бўлинган айирмалар**

n	$S(n)$	$S(n,\ n+1)$	$S(n,\ n+1,\ n+2)$	$S(n,\ n+1,\ n+2,\ n+3)$	$S(n,\ \ldots,\ n+4)$
1	1	5—1= =4	(9 — 4)/(3 — 1) = 2,5	(3,5—2,5)/(4—1)= = 1/3	0
2	5	9	(16 — 9)/(4—2) = 3,5	1/3	0
3	14	16	(25—16)/(5—3) = 4,5	1/3	
4	30	25	(36—25)/(6—4) = 5,5		
5	55	36			
6	91				

$S(n)$ учинчи даражали кўпҳад экан. (17) формула бўйича:

$$S(n) = S(1) + S(1;\ 2)(n-1) + S(1,\ 2,\ 3)\cdot(n-1)(n-2) + S(1,\ 2,\ 3,\ 4)\ (n-1)(n-2)\ (n-3) = 1 + 4(n-1) + 2{,}5\,(n-1)(n-2) + \frac{1}{3}(n-1)(n-2)(n-2) = 1 + 4n - 4 + 2{,}5\,n - 7;\ 5n + 5 + \frac{1}{3}n^3 - 2n^2 + \frac{11}{3}n - 2 = \frac{1}{3}n^3 + 0{,}5\,n^2 + \frac{n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Чекли айирмалар: $f_{i+1} - f_i = \Delta f_i = \nabla f_{i+1} = \delta f_{i+1/2} = f_{i+1/2}$, умуман,

$$\Delta^k f_i = \Delta(\Delta^{k-1} f_i) = \Delta^{k-1}(\Delta f_i) = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i,$$

$$\nabla^k f_i = \ldots = \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1},\ \delta^k f_i = \ldots = \delta^{k-1} f_{i+1/2} - \delta^{k-1} f_{i-1/2},$$

$$f_i^k = f_{i+1/2}^{k-1} - f_{i-1/2}^{k-1}.$$

Айирмалар жадвали

x	f	f^1	f^2	f^3	f^4
x_0	f_0				
		$f'_{1/2}$			
x_1	f_1		f_1^2		
		$f'_{3/2}$		$f_{3/2}^3$	
x_2	f_2		f_2^2		f_2^4
		$f'_{5/2}$		$f_{5/2}^3$	
x_3	f_3		f_3^2		
		$f'_{7/2}$			
x_4	f_4				

Бўлинган айирма ва чекли айирма орасидаги муносабат:

$$f(x_i,\ \ldots,\ x_{i+k}) = \frac{f_{i+k/2}^k}{h^k\, k!} = \frac{\Delta^k f_i}{h^k\, k!},\ k = 0, 1,\ \ldots \qquad (9)$$

Агар (7) — (8) Ньютон бўлинган айирмали интерполяцион кўпҳадида бўлинган айирмалар чекли айирмалар билан алмаштирилса, $x_i = x_0 + ih\ (h = \text{const},\ i = 0, 1,\ \ldots,\ n)$ тугунлар бўйича Ньютон 1-формуласи олинади:

$$N_1(x) = f_0 + tf'_{1/2} + \frac{t(t-1)}{2} f_1^2 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} f_{3/2}^3 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-(n-1))}{n!} f_{n/2}^n, \qquad (7')$$

Қолдиқ ҳади:

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} t(t-1)\ \ldots\ (t-n) \qquad (8')$$

Ньютон 2-интерполяцион формуласи ($x_i = x + ih$, $h = \text{const}$, $i = \overline{0, n}$):

$$N_{II}(x) = f_0 + f_{-1/2}^1 + f_{-1}^2 \frac{t(t+1)}{2!} + \ldots + f_{-n/2}^n \frac{t(t+1)\ldots(t+(n-1))}{n!}, \qquad (7'')$$

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} t(t+1)\ \ldots\ (t+n) \qquad (8'')$$

Гаусс формулалари: 1) жами $2n+1$ та x_0, $x_0\ h$, $x_0 - h$, $\ldots$, $x_0 + n$, $x_0 - nh$ тугун бўйича

$$G_1(x) = f_0 + f_{1/2}t + f_0^2 \frac{t(t-1)}{2} + f_{1/2}^3 \frac{t(t-1)}{3!} + \ldots + f_{1/2}^{2n-1} \frac{t-(t^2-1)\ldots(t^2-(n-1)^2)}{(2n-1)!} + f_0^{2n}\cdot\frac{t(t^2-1)\ldots(t^2-(n-1)^2)(t+n)}{(2n)!} \qquad (9)$$

$$R_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\xi)\, h^{2n+1}}{2n+1)!} t(t^2-1)\ \ldots,\ (t^2-n^2). \qquad (10)$$

2) x_0, $x_0 - h$, $x_0 + h$, $\ldots$, $x_0 - nh$, $x_0 + nh$ тугунлар бўйича

$$G_{II}(x) = f_0 + f'_{1/2}t + f'_0 \frac{t(t+1)}{2!} + f_{-1/2}^3 \frac{t(t^2-1)}{3!} + \ldots + f_{-1/2}^{2n-1} \frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)\ldots(t^2-(n-1)^2)}{(2n-1)!} + f_0^{2n} \frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)\ldots(t^2-(n-1)^2)(t+n)}{(2n)!} \qquad (9')$$

$$R_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} h^{2n+1} t(t^2-1)(t^2-2^2)\ \ldots\ (t^2-n^2). \qquad (10')$$

Стирлинг формуласи:

$$S(x) = f_0 + \mu f'_0 t + f_0^2 \frac{t^2}{2} + \ldots + \mu f_0^{2n-1} \frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)\ldots(t^2-(n-1)^2)}{(2n-1)!} + f_0^{2n} \frac{t(t^2-1)\ldots(t^2-(n-1)^2)}{(2n)!}. \qquad (11)$$

бунда $\mu f_0^{2n-1} = 0{,}5\,(f_{1/2}^{2n-1} + f_{-1/2}^{2n-1})$. Қолдиқ ҳади:

$$R_{2n}(x) = \frac{h^{2n+1} f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}\, t\,(t^2-1)(t^2-2^2)\,\ldots\,(t^2-n^2). \quad (12)$$

Бессел формуласи: агар $\frac{1}{2}\,(f_0^{2n} + f_1^{2n}) = \mu f_{1/2}^{2n}$ деб қўйилса, ушбу кўринишга келади:

$$B(x) = \mu f_{1/2} + f_{1/2}^{1}\left(t - \frac{1}{2}\right) + \mu f_{1/2}^{2}\,\frac{t\,(t-1)}{2!} + \ldots +$$

$$+ \mu f_{1/2}^{2n}\,\frac{t\,(t^2-1)\,\ldots\,(t^2-(n-1)^2\,(t-n)}{(2n)!} +$$

$$+ f_{1/2}^{2n+1}\,\frac{t\,(t^2-1)\,\ldots\,(t^2-(n-1)^2)\,(t-n)\left(t-\frac{1}{2}\right)}{(2n+1)!}, \quad (13)$$

$$R_{2n+2}(x) = \frac{h^{2n+2} f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\, t\,(t^2-1)\,\ldots\,(t^2 -$$

$$- n^2)\,(t-(n+1)) \quad (14)$$

Стирлинг ва Бессел формулалари Гаусс формулаларидан келтириб чиқарилади. $|t| \leqslant 0{,}25$ бўлган ҳолда Стирлинг, $0{,}25 \leqslant t \leqslant 0{,}75$ да эса Бессел формуласидан фойдаланиш маъқул. Ньютон формулалари бўйича жадвалнинг боши ва охиридаги, Бессел ва Стирлинг формулалари бўйича эса жадвалнинг ўртасидаги қийматларга асосланиб интерполяцион кўпҳад тузиш мумкин.

Математик жадвал тузишда h қадамни шундай танлайдиларки, натижада интерполяциялаш хатоси тайинланган ε қийматдан ортмасин. Масалан, $0 \leqslant t \leqslant 1$ да $y_3(t) = t\,(t-1)\left(t - \frac{1}{2}\right)$ ва $y_4(t) = t\,(t^2-1)\,(t-2)$ кўпҳадларнинг қолдиқ ҳадлари

$$R(x) = \frac{M_3 h^3}{72\sqrt{3}} + \frac{3\,M_4 h^4}{128} \leqslant \varepsilon \quad (15)$$

бўлиши керак, бунда $\max y_3(t) = \frac{1}{12\sqrt{3}}$, $\max y_4(t) = \frac{9}{128}$.

4-мисол. Бессел формуласи қўлланилиб, $f(x) = e^x$ функциянинг $[2;\ 3]$ да ётган қийматлари жадвалини $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$ аниқликда тузиш учун h қадам қандай катталик билан олиниши керак?

Ечиш. (25) дан фойдаланамиз. $f^{\mathrm{III}}(x) = f^{\mathrm{IV}}(x) = e^x$,

$$M_3 = M_4 = \max_{[2;\,3]} e^x = e^3 = 20{,}085535,\ R(x) \approx 20{,}20\left(\frac{h^3}{72\sqrt{3}} + \frac{3h^4}{128}\right) \leqslant$$

$\leqslant 0{,}5 \cdot 10^{-5}$, бундан $h \approx 0{,}03$.

Экстраполяциялаш бир-икки қадамгача чегараларда бажарилади. Шу мақсадда жадвал бошида $N_{\mathrm{I}}(x)$ формуладан, жадвалнинг охирида $N_{\mathrm{II}}(x)$ формуладан фойдаланиш мумкин.

Икки аргументли $z = f(x, y)$ функцияни (x_i, y_k) нуқталар тўпламида **интерполяциялаш.** Дастлаб бирор $y_m = \mathrm{const}$ жадвал қийматида $f(x, y_m)$ функция x бўйича интерполяцияланади. Натижада y нинг кўрсатилган қиймати бўйича z нинг $\Delta^i z$ чекли айирмалар жадвали тузилади. Шундан сўнг z функция y бўйича интерполяция қилинади. Уч ва ундан ортиқ ўзгарувчили функциялар ҳам шунга ўхшаш тартибда интерполяция қилинади. Маълум бир $P(x, y)$ интерполяцион кўпҳад тузилиши талаб қилинган ҳолда x ва y га нисбатан шу турдаги формулалар алоҳида-алоҳида тузилиб, бири иккинчисига қўйилади.

5-мисол. $z = f(x, y)$ функциянинг қўш жадвали берилган. $z = f(0{,}5;\ 0{,}03)$ ҳисоблансин.

y \ x	0,4	0,7	1,0
0,00	2,500	1,429	1,000
0,05	2,487	1,419	0,995
0,10	2,456	1,400	0,981

Ечиш. 1) y нинг ҳар қайси жадвал қийматига мос равишда z нинг чекли айирмалар жадвалини тузамиз ($h = 0{,}3$):

$y = 0{,}00$

x	z	Δz	$\Delta^2 z$
0,4	2,500	−1,071	0,642
0,7	1,429	−0,429	
1,0	1,000		

$y = 0{,}05$

x	z	Δz	$\Delta^2 z$
0,4	2,487	−1,068	0,644
0,7	1,419	−0,424	
1,0	0,995		

$y = 0{,}10$

x	z	Δz	$\Delta^2 z$
0,4	2,456	−1,056	0,637
0,7	1,400	−0,419	
1,0	0,981		

2) $x_0 = 0{,}4$ бошланғич тугун бўлсин. У ҳолда:

$$t = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0,5 - 0,4}{0,3} = \frac{1}{3}.$$

3) Қолган ҳисоблашларни $N_1(x)$ бўйича бажарамиз:

$$f(0,5;\ 0,00) = 2,500 - \frac{1}{3} \cdot 1,071 + \frac{1/3 \cdot (-2/3)}{3} \cdot 0,642 = 2,072,$$

$$f(0,5;\ 0,05) = 2,487 - \frac{1}{3} \cdot 1,068 - \frac{1}{9} \cdot 0,642 = 2,069,$$

$$f(0,5;\ 0,10) = 2,456 - \frac{1}{3} \cdot 1,056 - \frac{1}{9} \cdot 0,637 = 2,033,$$

$x = 0,5$

y	z	Δz	$\Delta^2 z$
0,00	2,072	−0,003	−0,033
0,05	2,069	−0,036	
0,10	2,033		

$y_0 = 0,00$ дан $y = 0,03$ гача оралиқ учун $p = (0,03 - 0)/0,05 = 0,6$. У ҳолда:

$$f(0,5;\ 0,03) = 2,072 + 0,6 \cdot (-0,003) + \frac{0,6\,(0,6 - 1)}{2!} \cdot (-0,033) = 2,074.$$

Тескари интерполяциялашда итерация усули қўлланилиши мумкин. Бунинг учун, масалан, $y = f(x) \approx N_1(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t-1) \ldots (t - n + 1)$ кўпҳад $t = \varphi(t)$ кўринишига келтирилади: $t = \frac{y - y_0}{\Delta y_0} - \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,\Delta y_0} t(t-1) - \ldots$, бунда $t_0 = \frac{y - y_0}{\Delta y_0}$ — бошланғич яқинлашиш.

6-мисол. Ушбу $y = \lg x$ функциянинг қуйидаги қийматлар жадвали бўйича x нинг $y = 1,35$ га мос қиймати топилсин:

x	20	25	30
y	1,3010	1,3979	1,4771

Ечиш.

x	y	$\Delta y \cdot 10^{-4}$	$\Delta^2 y \cdot 10^{-4}$
20	1,3010	969	−177
25	1,3979	792	
30	1,4771		

$$y_0 = 1,3010,\ t_0 = (y - y_0)/\Delta y_0 = (1,35 - 1,3010)/0,0969 = 0,506,$$

$$t_1 = 0,506 + \frac{177}{2 \cdot 969} \cdot 0,506\,(0,506 - 1) = 0,506 - 0,023 = 0,483,$$

$$t_2 = 0,506 + \frac{177}{2 \cdot 969} \cdot 0,483\,(0,483 - 1) = 0,506 - 0,023 = 0,483,$$

$$t = 0,483,\ x = x_0 + th = 20 + 0,483 \cdot 5 = 22,42.$$

Ҳар хил узоқлашган тугунлар ҳолида $L_n(x)$, бўлинган айирмали $N(x)$ ва бошқа формулалар қўлланилади. Бунинг учун формуладаги x ва y жойлари алмаштирилади.

7-мисол. Ушбу $f(x) = x^2 + \ln x = 0$ тенгламанинг $[0,5;\ 1]$ оралиқда ётган илдизи топилсин.

Ечиш. $f(0,5) < 0$, $f(1) > 0$. Қадам $h = 0,05$.

7-мисол **$f(x)$ қийматлар жадвали**

x	x^2	$\ln x$	$f(x)$	x	x^2	$\ln x$	$f(x)$
0,50	0,25	−0,6932	−0,4432	0,80	0,64	−0,1232	0,4169
0,55	0,3025	−0,5979	−0,2954	0,85	0,7225	−0,1625	0,5600
0,60	0,36	−0,5108	−0,1508	0,90	0,81	−0,1054	0,7046
0,65	9,4225	−0,4308	−0,6683	0,95	0,9025	−0,0513	0,8512
0,70	0,49	−0,3567	,0,1333	1,00	1,0000	0,0000	1,0000
7,75	0,5625	−0,2877	0,2748				

$f(0,65) \cdot f(0,70) < 0$ бўлмоқда. $x_0 = 0,65$, $x_1 = 0,70$ деб оламиз. Шундай x^* ни топамизки, унда $y^* = 0$ бўлсин.

7-мисол **Тенгламани Эйткен схемаси билан ечиш**

i	y_i $y_i - 0$	x_i	$L_{(i-1,\,i)}$	$L_{(i-2,\,i-1,\,i)}$	$L_{(i-3,\ldots,i)}$	$L_{(i-4,\ldots,i)}$	$L_{(i-5,\ldots,i)}$
0	−0,0083	0,65					
1	0,1333	0,7	0,652931				
2	0,2748	0,75	0,652898	0,652930			
3	0,4169	0,8	0,653308	0,652705	0,652925		
4	0,5600	0,85	0,654333	0,652320	0,652644	0,652921	
5	0,7046	0,9	0,656362	0,651391	0,653861	0,652561	0,652915
6	0,8512	0,95	0,659686	0,649970	0,652755	0,654387	0,651984
7	1,0000	1	0,663978	0,649448	0,650635	0,654[illegible]71	0,654431

i	$L_{(i-6,\ldots,i)}$	$L_{(i-7,\ldots,i)}$
6	0,652906	
7	0,651608	0,652895

$y^* \approx 0,6529,\ \varepsilon = -5,0 \cdot 10^{-5}.$

Берилган $f(x)$ функцияни сонли дифференциаллаш масаласи $f(x)$ силлиқ ўзгарувчан бўлган чегараларда $f^{(m)}(x) \approx \approx P_n^m(x)\,(m \leqslant n)$ тақрибий тенгликдан фойдаланишга асосланади, $P_n(x)$ — интерполяцион кўпҳад.

8-мисол. Бирор $y = f(x)$ функциянинг ушбу

$\Delta y,\ \Delta^2 y,\ \Delta^3 y \times 10^{-4}$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
50	1,6990	414	−36	5
55	1,7404	378	−31	
60	1,7782	347		
65	1,8129			

қийматлар жадвалига асосланиб, $f'(50)$ топилсин.

Ечиш.

$$N(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^2 - q}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{3}\Delta^3 y_0 +, \ldots,$$

$$q = \frac{x - x_0}{h}, \quad dq = \frac{1}{h}dx, \ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq}\frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}\frac{dy}{dq},$$

$$y'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2q - 1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2 - 6q + 2}{6}\Delta^3 y_0 + \ldots\right],$$

$$R_n'(x) = \frac{(-1)^n}{h}\frac{\Delta^{n+1} y_0}{n+1}, \qquad q = \frac{50 - 50}{h} = 0,$$

$$y'(50) = \frac{1}{5}\left(0{,}0414 + \frac{(-1)}{2}\cdot(-0{,}0036) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\cdot 0{,}0005\right) \approx 0{,}0087.$$

Сонли дифференциаллашда интерполяция қадамини кичрайтириш формуладаги кейинги ҳадларни ташлашдан вужудга келадиган хатони (кесим хатосини) камайтиради, лекин яхлитлаш хатосини оширади. Шунга кўра, умуман, дифференциаллашнинг сонли усуллари формулаларнинг яқинлашишини таъминлай олмайди.

Сплайнлар ёрдамида функцияларни яқинлаштириш. $[a, b]$ оралиқ $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = \overline{1; n},\ x_0 = a,\ x_n = b)$ қисмларга ажратилган бўлсин. Бирор узлуксиз $f(x) \in C[a, b]$ функция учун m-тартибли интерполяцион полиноминал сплайн деб, ушбу шартларни қаноатлантирувчи $S_m(x)$ функцияга айтилади:

1) $[a, b]$ оралиқнинг ҳар бир $[x_{i-1}, x_i]$ қисмида y m-

— даражали $S_m(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$ кўпҳаддан иборат; 2) $[a, b]$ оралиқ бўйича $m - 1$-тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга; 3) x_k тугунларда $S_m(x_k) = f(x_k)\ (k = \overline{0, n})$.

$m = 1$ бўлган ҳолда $S_1(x)$ нинг графиги синиқ чизиқдан иборат. Агар $n \to \infty$ да $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - x_{i-1}| \to 0$ бўлса, у ҳолда $S_1(x)$ сплайн $f(x) \in C[a, b]$ функцияга текис яқинлашади. Текис яқинлашиш хусусияти $S_2(x)$ квадратик сплайн ва $S_3(x)$ кубик сплайнлар учун ҳам ўринли бўлиб, яқинлашиш тезлиги сплайннинг тартибига ва $f(x)$ нинг силлиқлигига мувофиқ равишда ортади.

Сплайнни тузиш учун $a_0, \ldots, a_n$ коэффициентлар аниқланиши керак. Чизиқли $S_1(x) = a_0 + a_1 x$ сплайннинг a_0, a_1 коэффициентларини топиш учун $f(x_{i-1})$ ва $f(x_i)$ қийматлар етарли. 3) шартга асосланиб ушбу

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_{i-1} = f(x_{i-1})\ (i = \overline{1; n}), \\ a_0 + a_1 x_i = f(x_i) \end{cases}$$

системани тузамиз ва ундан a_0, a_1 ларни аниқлаймиз. $m \geqslant 2$ бўлган ҳолда $S_m(x)$ нинг ягона бўлишини таъминлаш учун яна $m - 1$ та қўшимча шарт қўйилиши керак. Одатда бундай шартлар $f(x)$ нинг яқинлашиш хусусиятлари, сплайн икки қўшни бўлагининг туташган нуқталарида силлиқ бўлишлари ва бошқа талабларга кўра, шунингдек, четки a ва b нуқталарда турли чегаравий шартлар билан қўйилади.

1-масала. Ушбу $s(x)\,(s(x) \in S_1)$ функциялар қуйидаги

$$s(x_i) = f(x_i), \ i = \overline{0, n}, \quad J_1(s) = \int_0^1 (s'(x))^2 dx < \infty$$

шартларни қаноатлантирсин. Бу функциялар орасидан шундай $s_1(x)$ функцияни топиш талаб қилинадики, унга кўра $\inf\limits_{s \in S_1} J_1(s)$ олинадиган бўлсин. Биздан x_i нуқталарда $S_1(x)$ оиланинг бирор маънода $f(x)$ билан бир хил қийматга эга бўлган ва нисбатан силлиқ функцияларидан бирини, яъни энг кичик $\| s' \|_{L_2}$ нормали функцияни топиш талаб этилади. Маълумки, $J = \int\limits_a^b F(s(x), s'(x))\,dx$ аниқ интегрални максимум ва минимумга эриштирадиган ҳар қандай $s(x)$ функция $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial s'}\right) - \frac{\partial F}{\partial s} = 0$ Эйлер тенгламасини қаноатлантириши керак. Бизда бу тенглама $s''(x) = 0$ кўринишида. Шунга кўра изланаётган $s_1(x)$ функция ҳар бир $[x_{i-1}, x_i]$ оралиқда чизиқлидир. Демак, $s_1(x)$ биринчи тартибли $S_1(x)$ сплайндан иборат.

2-масала. $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = \overline{1, n},\ x_0 = a,\ x_n = b)$ қисмларга ажратилган $[a, b]$ оралиқда жадвал кўринишида берилган $f(x)$ функцияни интерполяцияловчи шундай $S_2(x)$ квадратик сплайн тузилсинки, у учун юқорида кўрсатилган 1) — 3) шартлар ва қўшимча 4) шарт бажарилсин, яъни:

1) ҳар қайси $[x_{i-1}, x_i]$ оралиқда сплайн бўлаги $s(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ кўринишидаги кўпҳаддан иборат; 2) $S_2(x) \in C'[a, b]$; 3) $S_2(x_k) = f_k$; 4) $x_0 = a$ да $s'(a) = A$, ҳар қайси x_i $(i = \overline{1; n-1})$ нуқтада $s'(x-0) = s'(x+0)$ тенглик ўринли бўлсин.

Ечиш: Сплайннинг $[x_0, x_1]$ оралиқдаги бўлагини топиш учун кўрсатилган шартлардан фойдаланиб ушбу системани тузамиз:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = f_0, \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = f_1, \\ a_1 + 2a_2x_0 = A. \end{cases}$$

Системани ечиб, топилган a_0, a_1 ва a_2 коэффициентлар бўйича изланаётган $s(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ни тузамиз.

Тўрнинг қолган ҳар қайси $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = \overline{2; n})$ қисми учун

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_{i-1} + a_2x_{i-1}^2 = f(x_{i-1}), \\ a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 = f(x_i), \\ s'(x_i - 0) = s'(x_i + 0) \end{cases}$$

кўринишидаги система тузилади ва изланаётган $s(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ кўпҳад олинади, бунда $s'(x) = a_1 + 2a_2x$.

9-мисол. Бирор $f(x)$ функция $f'(0{,}78) = -2{,}5$ ва

x	0,78	1,56	2,34	3,12	3,81
y	2,5	1,2	1,12	2,25	4,28

жадвал билан берилган. Уни интерполяцияловчи иккинчи тартибли сплайн тузилсин.

Ечиш: $[0{,}78;\ 1{,}56]$ оралиқ учун:

$$\begin{cases} a_0 + 0{,}78\,a_1 + 0{,}78^2\,a_2 = 2{,}5, \\ a_0 + 1{,}56\,a_1 + 1{,}56^2\,a_2 = 1{,}2, \\ a_1 + 2\cdot 0{,}78\,a_2 = -2{,}5. \end{cases}$$

Системани ечиб, $a_2 = 1{,}069$, $a_1 = -4{,}168$, $a_0 = 5{,}1$ ни топамиз. Изланаётган учҳад $s(x) = 5{,}1 - 4{,}168\,x + 1{,}069\,x^2$ бўлади.

$[1{,}56;\ 2{,}34]$ оралиқ учун: олдинги оралиқ учун топилган муносабатдан фойдаланиб, $s'(1{,}56) = -4{,}168 + 2{,}136 \cdot 1{,}56 = -0{,}83$ ни аниқлаймиз. Сўнг қуйидаги системани тузамиз:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2\cdot 1{,}56 = -0{,}833, & (4)\text{ шартга мувофиқ} \\ a_0 + 1{,}56a_1 + 1{,}56^2a_2 = 1{,}2, \\ a_0 + 2{,}34a_1 + 2{,}34^2a_2 = 1{,}12. \end{cases}$$

Бу системадан $a_2 = 0{,}936$, $a_1 = -3{,}755$, $a_0 = 4{,}781$ аниқланади. Бу оралиқ учун изланаётган кўпҳад $s(x) = 4{,}781 - 3{,}755\,x + 0{,}936\,x^2$ бўлади. $[2{,}34;\ 3{,}12]$ оралиқ учун:

$$s'(2{,}34) = -3{,}755 + 2\cdot 0.936\cdot 2{,}34 = 0{,}625,$$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2\cdot 2{,}34 = 0{,}625, \\ a_0 + a_1\cdot 2{,}34 + a_2\cdot 2{,}34^2 = 1{,}12, \\ a_0 + a_1\cdot 3{,}12 + a_2\cdot 3{,}12^2 = 2{,}25. \end{cases}$$

Бундан $a_2 = 1{,}056$, $a_1 = -4{,}317$, $a_0 = 5{,}44$ ва $s(x) = 5{,}44 - 4{,}317\,x + 1{,}056\,x^2$.

$[3{,}12;\ 3{,}81]$ оралиқ учун:

$$s'(3{,}12) = -4{,}317 + 2\cdot 1{,}056\cdot 3{,}12 = 2{,}27244 \approx 2{,}272,$$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2\cdot 3{,}12 = 2{,}272, \\ a_0 + a_1\cdot 3{,}12 + a_2\cdot 3{,}12^2 = 2{,}25, \\ a_0 + a_1\cdot 3{,}81 + a_2\cdot 3{,}81^2 = 4{,}28. \end{cases}$$

Бундан $a_2 = 0{,}971$, $a_1 = -3{,}787$, $a_0 = 4{,}614$ ва $s(x) = 4{,}614 - 3{,}787\,x + 0{,}971x^2$.

Шундай қилиб, тузилиши талаб этилаётган $S_3(x)$ сплайн кетма-кет жойлашган $[x_{i-1}, x_i]$ оралиқлар учун топилган $s(x)$ учҳадлар мажмуасидан иборат.

3-масала. Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $S(x)$ интерполяцион кубик сплайн тузилсин:

1) ҳар қайси $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = \overline{1; n})$ оралиқда $S_3(x) \in H_3(P)$, бунда $H_3(P)$ — даражаси $m = 3$ дан катта бўлмаган кўпҳадлар тўплами;

2) $S_3(x) \in C^2[a, b]$;

3) Тўрнинг $x_k (k = \overline{0; n})$ тугунларида $S_3(x_k) = f_k$;

4) $S_3''(a) = S_3''(b) = 0$.

Ечиш. Изланаётган $S_3(x)$ сплайн ҳар қайси $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = \overline{1; n})$ ораликда $m = 3$-даражали $s(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ кўринишдаги кўпҳаддан иборат. Ҳар қайси кўпҳаднинг тўртта a_0, a_1, a_2, a_3 коэффициенти аниқланиши керак. Шу мақсадда 3) шарт бўйича иккита тенглама, $x_i (i = \overline{0; n})$ нуқталарда сплайн эгри чизиқлари эгрилигининг нолга тенг бўлиш ёки $s'(x_i - 0) = s'(x_i + 0)$ бўлиш шарти ва 4) қўшимча шарт бўйича яна икки тенглама, жами тўрт тенгламали система тузамиз. Шундан сўнг масала юқорида (2-масалада) кўрсатилганича ҳал қилиниши мумкин. Лекин биз [1] нинг 295—298-бетларида берилган умумий кўрсатмадан фойдаланамиз. $S_3(x)$ сплайн ва унинг ҳосиласи қуйидаги кўринишда изланади:

$$S_3(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x_i - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(f_{i-1} - \frac{M_{i-1} h_i^2}{6}\right)\frac{x_i - x}{h_i} + \left(f_i - \frac{M_i h_i^2}{6}\right)\frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad (16)$$

$$S'(x) = -M_{i-1}\frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{M_i - M_{i-1}}{6} h_i, \quad (17)$$

бунда $h_i = x_i - x_{i-1}$, $M_i = S_3''(x_i)$, $M_0 = M_n = 0$. Номаълум M_{n-1}, M_{n-2}, . . . , M_1 катталик қийматларини ҳисоблаш алгоритми:

$$i = \overline{1; n-1}: \quad l_i = h_i/6, \quad b_i = (h_i + h_{i+1}) / 3,$$

$$c_i = h_{i+1}/6, \quad d_i = (f_{i+1} - f_i) / h_{i+1} - (f_i - f_{i-1}) / h_i,$$

$$q_0 = 0, \ P_i = l_i q_{i-1} + b_i, \ q_i = -c_i / p_i,$$

$$u_0 = 0, \quad u_i = (d_i - l_i u_{i-1}) / p_i;$$

$$k = \overline{1; n-2}: \quad M_{n-1} = u_{n-1}, \ M_k = q_k M_{k+1} + u_k$$

Агар $f(x) \in C^k[a, b]$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$ бўлса, у ҳолда сплайннинг $r(x) = f(x) - S(x)$ хатоси:

$$\max_{a \le x \le b} |r^{(p)}(x)| \le c h^{k-p} \ (k \ge p),$$

бунда c тўрга боғлиқ бўлмаган ўзгарувчи, $h = \max\limits_{1 \le x \le n} h_i$.

10-мисол. $f(x)$ функция

x_i	0,78	1,56	2,34	3,12	3,81
f_i	2,5	1,2	1,12	2,25	4,28

жадвал билан берилган ва $f''(0,78) = f''(3,81) = 0$. Уни интерполяцияловчи учинчи даражали $S_3(x)$ сплайн тузилсин ва функциянинг $x = 1$; 2; 3; 3,5 нуқталардаги қиймати ҳисоблансин.

Ечиш: 1) Ҳисоблаш натижаларини кетма-кет жадвалга ёзамиз:

10-мисол **Интерполяцион кубик сплайн**

i	x_i	f_i	h_i	l_i	b_i	c_i	d_i	p_i	q_i	u_i	M_i
0	0,78	2,5							0	0	0
1	1,56	1,2	0,78	0,13	0,52	0,13	1,5641	0,52	−0,25	3,0079	2,4332
2	2,34	1,12	0,78	0,13	0,52	0,13	1,5513	0,4875	−0,2667	2,9492	2,2991
3	3,12	2,25	0,78	0,13	0,49	0,115	1,4933	0,4553	−0,2526	2,4376	2,4376
4	3,81	4,28	0,69	0,115							0

2) $i = 1$, $[0,78; 1,56]$ оралиқ учун (16) муносабат бўйича:

$$S_3(x) = M_0\frac{(x_1 - x)^3}{6h_1} + M_1\frac{(x - x_0)^3}{6h_1} + \left(f_0 - \frac{M_0 h_1^2}{6}\right)\frac{x_1 - x}{h_1} + \left(f_1 - \frac{M_1 h_1^2}{6}\right)\frac{x - x_0}{h_1} = 0 + 2,4332\frac{(x - 0,78)^3}{6 \cdot 0,78} +$$

$$+ (2,5 - 0)\frac{1,56 - x}{0,78} + \left(1,2 - \frac{2,4332 \cdot 0,78^2}{6}\right) \cdot \frac{x - 0,78}{0,78} =$$

$$= 0,51989708x^3 - 1,2165592x^2 - 1,0340559x + 3,8 \approx$$

$$\approx 0,52x^3 - 1,217x^2 - 1,034x + 3,8; \ S_3(1) \approx 2,049.$$

$i = 2$, $[1,56; 2,34]$ оралиқ учун:

$$S_3(x) = M_1\frac{(x_2 - x)^3}{6h_2} + M_2\frac{(x - x_1)^3}{6h_2} + \left(f_1 - \frac{M_1 h_2^2}{6}\right)\frac{x_2 - x}{h_2} -$$

$$-\left(f_2-\frac{M_2\ h_2^2}{6}\right)\frac{x-x_1}{h_2}= \ \dots \approx -0{,}030x^3+1{,}350x^2-$$
$$-5{,}042\,x+6{,}681;\ \ S_3(2)\approx 1{,}76.$$

$i=3$, $[2{,}34;\ 3{,}12]$ оралиқ учун:

$$S_3(x)= \ \dots \approx 0{,}30\,x^3+0{,}942x^2-4{,}360x+5{,}775;$$
$$S_3(3)\approx 1{,}98.$$

$i=4$, $[3{,}12;\ 3{,}71]$ оралиқ учун:

$$S_3(x)= \ \dots \approx -0{,}589\,x^3+6{,}730\,x^2-22{,}473\,x+24{,}773,$$
$$S_3(3{,}5)\approx 3{,}29.$$

Умумий ҳолда сплайн даражалари турлича (лекин m, дан ортиқ бўлмаган даражали) кўпҳадлардан иборат бўлаклардан тузилган бўлиши мумкин.

11- м и с о л. x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш жадвал тарзида берилган:

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
35	?	41	437	47	999	53	1425	59	2301	65	3766
36	?	42	584	48	864	54	1500	60	2575	66	4039
37	324	43	727	49	913	55	1642	61	2720	67	4659
38	381	44	822	50	1016	56	1789	62	2701	68	5015
39	331	45	845	51	1098	57	2039	63	3221	69	5835
40	425	42	922	52	1224	58	2009	64	3018	70	?

Учинчи даражали сплайн-функция тузилсин.

Е ч и ш. Таянч нукталарини (сплайн бўлаклари туташадиган интерполяцион тугунларини) танлаймиз. Улар (37; 324), (42; 584), (55; 1642), (69; 5835) бўлсин. 1) [37; 42] оралиқдаги сплайн бўлагини $y-y_1=f'(x_1)(x-x_1)$ тўғри чизиқ кўринишида тасвирлаймиз, бизда $x_1=42$, $y_1=584$, $f'(42)=\frac{584-324}{42-37}=52$. Натижада $y-584=52(x-42)$, ёки $y=52x-1600$;

2) [42; 55] оралиқдаги бўлак учун

$$f(x)=A+B(x-x_1)+C(x-x_1)^2+D(x-x_1)^3 \qquad (18)$$

учинчи даражали кўпҳадни танлаймиз. Сплайннинг ҳар икки қўшни бўлаги ўзлари туташадиган нуқтада бир хил қияликка ва y'' нинг бир хил қийматига эга бўлсин. Бу шаргга кўра $x_1=42$ нуқтада: $f(42)=584=A$, $f'(42)=52=B$, $f''(42)=2C+6D\cdot(42-42)=0$ ва бундан $C=0$, $D=(f(x_2)-A-B(x_2-x_1)-C(x_2-x_1)^2)/(x_2-x_1)^3=(1642-584-52(55-42)-0)/(55-42)^3=0{,}1738734$. Иккинчи бўлак:

$$y=584+52(x-42)+0{,}1738734(x-42)^3; \qquad (19)$$

3) [55; 69] оралиқ учун учинчи даражали $f(x)=K+L(x-x_2)+M(x-x_2)^2+N(x-x_2)^3$ кўпҳадни тузамиз. $x=55$ нуқтада бу чизиқ ва (19) чизиқ бир хил $f'(55)$ ва $f''(55)$ қийматларга эга бўлиши кераклиги шартидан фойдаланиб, қуйидагиларни топамиз:

$$f(55)=1642,\ f'(55)=52+3\cdot 0{,}1738734(55-42)^2=$$
$$=140{,}15381,\ \ f''(55)=2\cdot3\cdot0{,}1738734(55-42)=13{,}562125,$$
$$f(55)=K=1642,\quad f'(x)=L+2M(x-55)+3N(x-55)^2,$$
$$f'(55)=L=140{,}15381,\ f''(x)=2M+2\cdot3N(x-55),$$
$$f''(55)=2M=13{,}562125,\ M=6{,}7810625.$$

N ни топишда (69; 5835) нуқта координаталаридан ҳам фойдаланамиз: $5835=1645+140{,}15381(69-55)+6{,}7810625(69-55)^2+N(69-55)^3$, бундан $N=0{,}3286291$ ва натижада $f(x)=1642+140{,}15381(x-55)+6{,}781063(x-55)^2+0{,}3286291(x-53)^3$;

4) Функциянинг $x=35$, 36 ва 70 даги қийматларини топиш учун сплайннинг биринчи бўлаги (тўғри чизиқ кесмаси) ва охирги бўлаги (эгри чизиқ кесмаси) экстраполяция қилинади.

9- м и с о л **Ҳосил қилинган сплайн қийматлари жадвали**

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
35	220	41	532	47	866	53	1387	59	2332	65	4050
36	272	42	584	48	934	54	1508	60	2533	66	4442
37	324	43	636	49	1008	55	1642	61	2798	67	4868
38	376	44	689	50	1089	56	1789	62	2798	68	5332
39	428	45	745	51	1179	57	1952	63	3365	69	5835
40	480	46	803	52	1278	58	2132	64	3692	70	6379

Масаланинг шартида берилган маълумотлар ва бу жадвал маълумотларини солиштириб, сплайн берилган қийматларни бир қадар силлиқлаганини кўрамиз.

МАШҚЛАР

1. Бирор $y=f(x)$ функциянинг $x_i(i=\overline{1,m})$ нуқталардаги $f(x_i)$ қийматлари берилган. Лагранж интерполяцион формуласидан фойдаланиб, $f(x_i)$ қийматлар ҳисоблансин;

1) $x_i = 0{,}41 + 0{,}05\,(i - 1)$, $i = \overline{1;5}$, $f(x_i) = 1{,}5068$; $1{,}5841$; $1{,}6820$; $1{,}8220$; $1{,}9155$. $x_j = 0{,}43$; $0{,}54$; $0{,}57$; $0{,}62$;

2) $x_i = 11{,}2 + 0{,}8\,(i - 1)$, $i = \overline{1;6}$, $f(x_i) = 6{,}403$; $6{,}782$; $7{,}211$; $7{,}746$; $8{,}062$; $8{,}485$; $x_j = 11{,}5$; $12{,}5$; $13{,}0$; $15{,}3$;

3) $x_i = 50 + 6\,(i - 1)$, $i = \overline{1;5}$, $f(x_i) = 0{,}0488$; $0{,}0531$; $0{,}0581$; $0{,}0644$; $0{,}0681$; $x_j = 53$; 60; 70; 75;

4) $x_i = 4{,}1 + 0{,}3(i - 1)$, $i = \overline{1;7}$, $f(x_i) = 166{,}53$; $175{,}06$; $185{,}89$; $201{,}38$; $211{,}70$; $227{,}05$; $231{,}77$; $x_i = 4{,}2$; $5{,}2$; $5{,}5$; $6{,}0$;

5) $x_i = 110 + 50\,i$, $i = \overline{0;5}$, $f(x_i) = 111{,}63$; $117{,}35$; $124{,}61$; $134{,}98$; $141{,}91$; $152{,}20$; $x_j = 170$; 230; 340; 370;

6) $x_i = 3{,}1 + 0{,}5i$, $i = \overline{0;4}$, $f(x_i) = 1{,}3634$; $1{,}4333$; $1{,}5068$; $1{,}5841$; $1{,}6653$; $x_j = 3{,}3$; $4{,}3$; $4{,}8$; $5{,}3$;

7) $x_i = 0{,}51 + 0{,}1i$, $i = \overline{0;7}$, $f(x_i) = 0{,}4882$; $0{,}5312$; $0{,}5728$; $0{,}6131$; $0{,}6518$; $0{,}6889$; $0{,}7112$; $0{,}7481$; $x_j = 0{,}65$; $0{,}85$; $0{,}95$; $1{,}22$;

8) $x_i = 41 + 5(i - 1)$, $i = \overline{1;6}$, $f(x_i) = 64{,}83$; $67{,}82$; $71{,}41$; $78{,}10$; $81{,}24$; $84{,}76$; $x_j = 49$; 53; 64; 67;

9) $x_i = 1100 + 10\,(i - 1)$, $i = 1;5$, $f(x_i) = 11163$; 11735; 12337; 12969; 13634; $x_i = 1115$; 1125; 1135; 1145;

10) $x_i = 31 + 5\,(i - 1)$, $i = 1;7$, $f(x_i) = 55{,}68$; $60{,}00$; $64{,}81$; $70{,}71$; $74{,}16$; $78{,}74$; $81{,}16$; $x_j = 33{,}00$; $40{,}00$; $53{,}00$; $60{,}00$.

2. Жадвалларда кўрсатилган қийматларни қабул қилувчи ва даражаси энг паст бўлган кўпҳадлар тузилсин:

а)

x	y
350	0,0534522
353	0,0532246
359	0,0527780

б)

x	y
55	0,018181818
53	0,018867925
49	0,020000000

в)

x	y
9	0,3333333
11	0,3015113
14	0,2672612

г)

x	y
89	9,4339811
92	9,5916630
96	9,7979590

д)

x	y
70	4,1212853
71	4,1408177
74	4,1983367

е)

x	y
61	0,016393443
63	0,015873016
66	0,015151515

3. Юқорида (2-мисолда) келтирилган жадваллар бўйича y нинг қуйида берилган қийматларига мос x аргумент қийматлари топилсин:

а) $y = 351$, $y = 358$; б) $y = 54$, $y = 50$; в) $y = 10$, $y = 13$; г) $y = 9{,}4868330$, $y = 9{,}7467943$; д) $y = 4{,}1601676$, $y = 4{,}1793392$; е) $y = 0{,}016129032$, $y = 0{,}015384615$.

4. Тескари интерполяциялашдан фойдаланиб, тенгламаларнинг $[a,b]$ оралиқда ётган илдизлари ε аниқликда топилсин:

а) $x^2 - \lg(x + 2) = 0$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $a = 0{,}5$, $b = 1$;

б) $x^2 + \ln x - 4 = 0$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $a = 1{,}5$, $b = 2$;

в) $\lg(5 - x) + 2\lg\sqrt{3 - x} - 1 = 0$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $a = 1$, $b = 2$;

г) $\lg(x + 1{,}5) + \lg x = 0$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $a = 0{,}1$, $b = 1$;

д) $x^3 - 5x + 3 = 0$, $\varepsilon = 0{,}01$, $[0;\ 1{,}5]$;

е) $x^3 + 4x + 3 = 0$, $\varepsilon = 0{,}001$, $[-0{,}8;\ 1]$;

ж) $2 + 7x - x^3 = 0$, $[-3;\ 3]$;

з) $x^6 + x^2 - 1 = 0$, $\varepsilon = 0{,}001$, $[0;\ 1]$;

и) $x^3 + 3x - 1 = 0$, $\varepsilon = 0{,}0001$, $[0;\ 1]$;

й) $\cos x - \cos 2x - \sin 3x = 0$, $\varepsilon = 0{,}0001$, $[0{,}25;\ 1]$;

к) $2\sin^3 x + 3\sin^2 x - 2\sin x = 0$, $\varepsilon = 0{,}0001$, $[0{,}2;\ 1]$;

л) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x - 1{,}75 = 0$, $\varepsilon = 0{,}0001$, $[0;\ 1]$.

5. Қуйидаги чекли қаторлар йиғилсин ($n = 1, 2, \ldots$):

а) $S(n) = 1^3 + 3^3 + \ldots + n^3$;

б) $K(n) = 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \ldots + n(n + 1)(n + 2)$;

в) $L(n) = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n + 1)}$;

г) $M(n) = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n - 2)(3n + 1)}$;

д) $N(n) = \frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{n^2}{(2n - 1)(2n + 1)}$;

е) $P(n) = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n!$

6. Қуйида $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ ва $l(x)$ функцияларнинг қийматлар жадваллари келтирилган:

x_i	$f(x_i)$	$g(x_i)$	$h(x_i)$	$l(x_i)$
0	—1	—3	—0,2	—1
0,1	—0,7949957	—2,6550704	—0,1966625	—0,899999
0,2	—0,5799279	—2,249523	—0,1826312	—0,799936
0,4	—0,118757	—1,2112264	—0,1302229	—0,595904
0,55	0,2559402	—0,1773886	—0,0673978	—0,4223193
0,63	0,4667554	0,4869273	—0,0254242	—0,3074765
0,7	0,6579704	1,1441596	0,0162497	—0,182351
0,84	1,0610102	2,7087839	0,1138244	0,191298
0,9	1,2429301	3,4979546	0,1616117	0,4314407
1,0	1,5597528	4,9999995	0,24948971	1

Лагранж ва Ньютон формулаларидан фойдаланиб топилсин:

а) $x = 0,12;\ 0,45;\ 0,67;\ 0,93;\ -0,9;\ 1,1$ ларга мос f, g, h, l функцияларнинг ва уларнинг биринчи тартибли ҳосилаларининг қийматлари;

б) $f = -0,8;\ 0$, $g = -1,2;\ 0$, $h = -0,15;\ 0$ ва $l = -0,3;\ 0$ га мос бўлган x нинг қийматлари.

7. 1-мисол Ньютон, Гаусс, Стирлинг ва Бессель формулаларидан фойдаланиб ҳал қилинсин. Шу билан бирга кўрсатилган x нуқталарда y' ва y'' ҳосилаларнинг қийматлари топилсин ва хато баҳолансин.

8. $f(x)$ функция жадвал тарзида берилган:

x	0	1,5	3
$f(x)$	1,8	2,4	3,5

Функцияни интерполяцияловчи а) биринчи тартибли, б) квадратик сплайнлар тузилсин.

9. $f(x)$ функцияни интерполяциялаш учун тоқ сонли тугунларга эга бўлган текис Δ тўрда параболик сплайн тузилсин, $S_2'(a) = 0$.

10. x_i, $i = \overline{0,n}$, $x_i - x_{i-1} = h_i$, $x_0 = a$, $x_n = b$ тўрда қуйидаги қўшимча шартлар билан кубик сплайн тузилсин;

1) $S_3'(a) = 0$, $S_3'(b) = 1$; 2) $S_3'(a) = S_3'(b)$, $S_3''(a) = S_3''(b)$ 3) $S_3''(a) = A$, $S_3''(b) = B$.

11. $f(x)$ функция жадвал тарзида ва қўшимча шартлар билан берилган. Учинчи тартибли $S_3(f, x, \Delta_i)$ сплайн тузилсин ва функциянинг кўрсатилган x нуқтадаги қиймати топилсин, $M_i = S_3''(x_i)$:

1)

i	1	2	3	4	5	6
x_i	0,10	0,14	0,20	0,25	0,28	0,30
$f(x_i)$	1,0068	1,0314	1,1016	1,1205	1,1630	1,1782

$$2M_1 + M = 2,8674,\ M_5 + 2M_6 = 2,84;\ x = 0,22;$$

2)

i	1	2	3	4	5	6
x_i	0,18	0,22	0,25	0,28	0,34	0,35
$f(x_i)$	1,3216	1,3396	1,3870	1,4204	1,4484	1,4602

$$2M_1 + 0,2M_2 = 2,7189,\ 0,3M_5 + M_6 = 1,0074,\ x=0,26;$$

3)

i	1	2	3	4	5	6
x_i	0,1	0,14	0,16	0,20	0,25	0,28
$f(x_i)$	0,0996	0,1280	0,1604	0,1816	0,2102	0,2308

$$2M_1 + M_2 = -0,3605,\quad 0,3M_5 + M_6 = -0,4580,\quad x = 0,15;$$

4)

i	1	2	3	4	5	6
x_i	0,2	0,24	0,26	0,32	0,35	0,39
$f(x_i)$	1,0052	1,0170	1,0252	1,0318	1,0454	1,0528

$$2M_1 + M_2 = 3,0076,\ 0,5M_5 + M_6 = 3,7605,\ x = 0,28;$$

5)

i	1	2	3	4	5	6
x_i	0,2	0,24	0,27	0,30	0,32	0,38
$f(x_i)$	1,1214	1,1712	1,2100	1,2485	1,2670	1,3613

$$2M_1 + 0,3M_2 = 2,2680,\ 0,4M_5 + 2M_6 = 3,0782,\ x=0,26.$$

12. $z = f(x, y)$ функция қўш жадвал тарзида берилган. $z = f(x_j, y_j)$ қийматлар топилсин:

1)

$y \backslash x$	0,3	0,6	0,9
0,00	0,09	0,36	0,81
0,05	0,1075	0,3925	0,8575
0,10	0,13	0,43	0,91

$x_j = 0,5$, $y_j = 0,08$;

2)

$y \backslash x$	1,2	1,6	2,0
1,0	—0,872	0,216	3
1,5	—2,672	—2,104	0
2,0	—4,472	—4,504	—3

$x_j = 1,5$, $y_j = 1,6$.

6-ЛАБОРАТОРИЯ ИШИ

$y=f(x)$ функциянинг қийматлар жадвали берилган (масалан, $f(5{,}51)=23{,}84$):

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	23,76	23,84	23,93	24,02	24,11	24,19	24,28	24,37	24,45	24,54
5,6	24,63	24,72	24,81	24,89	24,98	25,07	25,16	25,25	25,34	25,41
5,9	27,34	27,43	27,53	27,62	27,72	27,81	27,90	27,99	28,09	28,18
6,3	31,17	31,27	31,37	31,47	31,57	31,67	31,77	31,87	31,97	32,07
6,6	34,21	34,32	34,42	34,52	34,63	34,73	34,84	34,94	35,05	35,15
6,9	37,39	37,50	37,61	37,72	37,83	37,94	38,05	38,16	38,26	38,37
7,1	39,59	39,70	39,82	39,93	40,04	40,15	40,26	40,38	40,49	40,60
7,5	44,18	44,30	44,41	44,53	44,65	44,77	44,89	45,01	45,13	45,25
1,6	4,953	5,003	5,053	5,104	5,155	5,207	5,259	5,312	5,366	5,420
1,8	6,050	6,110	6,172	6,234	6,297	6,360	6,424	6,488	6,556	6,619
2,0	7,389	7,463	7,538	7,614	7,691	7,768	7,846	7,928	8,005	8,085
2,3	9,974	10,07	10,18	10,28	10,38	10,49	10,59	10,70	10,81	10,91
2,4	11,02	11,13	11,25	11,36	11,47	11,59	11,71	11,82	11,94	12,06
3,0	1,099	1,102	1,105	1,109	1,112	1,115	1,118	1,122	1,125	1,128
3,1	1,131	1,135	1,138	1,141	1,144	1,147	1,150	1,154	1,157	1,160
3,2	1,163	1,166	1,169	1,173	1,176	1,179	1,182	1,185	1,188	1,191
3,3	1,194	1,197	1,200	1,203	1,206	1,209	1,212	1,215	1,218	1,221
3,6	1,281	1,284	1,287	1,289	1,292	1,295	1,298	1,300	1,303	1,306
3,7	1,308	1,311	1,314	1,316	1,319	1,322	1,324	1,327	1,330	1,332
3,8	1,335	1,338	1,340	1,343	1,346	1,348	1,351	1,353	1,356	1,358
3,9	1,361	1,364	1,366	1,369	1,371	1,374	1,376	1,379	1,381	1,384
4,0	1,386	1,389	1,391	1,394	1,396	1,399	1,401	1,404	1,406	1,409
2,8	16,45	16,61	16,78	16,95	17,12	17,29	17,46	17,64	17,81	17,99
2,9	18,27	18,36	18,54	18,73	18,92	19,11	19,30	19,49	19,69	19,89
3,0	20,09	20,29	20,49	20,70	20,91	21,16	21,33	21,54	21,76	21,98

Топшириқ: 1) $[a, b]$ ораликда жадвал қийматларини қабул қилувчи энг паст даражали интерполяцион кўпҳад тузилсин; 2) жадвал қийматлари икки марта зичлансин; 3) ҳар қайси y_j қийматга мос x_j қиймат ва ҳар қайси x_k га мос y_k қиймат топилсин; 4) x_i интерполяция тугунларида $f'(x)$ ҳосила қабул қиладиған қийматлар топилсин; 5) ҳисоблаш хатолари баҳолансин.

Ҳисоблашлар албатта Лагранж ва Ньютон формулалари ва ихтиёрий учинчи интерполяцион формула билан такрор бажарилсин ва топилган натижалар таққослансин:

Вариант №	$[a, b]$	y_j	x_k
1	5,5;5,59	23,8; 23,9; 24,0; 24,5	5,49; 5,543; 5,576
2	5,6;5,69	24,7; 24,85; 25,1; 25,38	5,595;5,623;5,684
3	5,9;5,99	27,4; 27,65; 27,8; 28,0	5,89; 5,914;5,985
4	6,3;6,39	31,2; 31,5; 31,65; 31,9	6,29;6,315; 6,384
5	6,6;6,69	34,3; 34,45; 34,9; 35,1	6,59; 6,643;6,685
6	6,9;6,99	37,4; 37,65; 37,97; 38,3	6,89; 6,933;6,975
7	7,1;7,19	39,6; 39,90; 40,13; 40,5	7,08; 7,124;7,185
8	7,5;7,59	44,23; 44,6; 44,93; 45,2	7,49; 7,523;7,585
9	1,6;1,69	4,98; 5,085; 5,300; 5,414	1,59; 1,608;1,687
10	1,8;1,89	6,047; 6,35; 6,494; 6,587	1,79; 1,809;1,877
11	2,0;2,09	7,45; 7,764; 7,923; 8,05	1,99; 2,013;2,085
12	2,3;2,39	10,00; 10,45; 10,68; 10,87	2,29; 2,304; 2,388
13	2,4;2,49	11,10; 11,55; 11,78; 11,96	2,493;2,446;2,487
14	3,0;3,09	1,097; 1,104; 1,11; 1,126	2,988;3,015;3,087
15	3,1;3,19	1,129; 1,1313; 1,148; 1,149	3,09; 3,132; 3,186
16	3,2;3,29	1,16; 1,165; 1,18; 1,190	3,19; 3,208;3,287
17	3,3;3,39	1,19; 1,196; 1,208; 1,22	3,28; 3,306;3,375
18	3,6;3,69	1,28; 1,283; 1,29; 1,304	3,58 3,612; 3,687
19	3,7;3,79	1,307; 1,313; 1,32; 1,329	3,69; 3,707; 3,746
20	3,8;3,89	1,333; 1,336; 1,35; 1,357	3,78; 3,803;3,886
21	3,9;3,99	1,359; 1,362; 1,370; 1,380	3,88; 3,905;3,987
22	4,0;4,09	1,384; 1,390; 1,400; 1,405	3,98; 4,016;4,088
23	2,8;2,89	16,43; 16,50; 16,98; 17,90	2,79: 2,805;2,887
24	2,9;2,99	18,15; 18,20; 18,95; 19,80	2,89; 2,907;2,967
25	3,0;3,09	20,06; 20,32; 21,22; 21,90	2,98; 3,013;3,078

7-боб. ИНТЕГРАЛЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШ

Квадратур формула. Берилган $I=\int_a^b f(x)\,dx$ интегрални чекли йиғиндига алмаштириш орқали ҳосил қилинади. Хусусан, $L_n(x)$ Лагранж интерполяцион формуласидан фойдаланиб, қуйидаги кўринишдаги формула олиниши мумкин:

$$I=\int_a^b f(x)\,dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k), \tag{1}$$

$$A_k=\int_a^b\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\,dx, \tag{2}$$

бунда $x_k(k=0,1,\ .\ .\ .\ ,)$ — квадратур формуланинг тугунлари, A_k — коэффициентлари, $\sum\limits_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$—квадратур йиғинди.

$L_n(x) = x^m$ $(m = \overline{0;\ n})$ бўлган ҳолда A_k коэффициентларни топиш учун $I = \int\limits_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$ ифодага кетма-кет $m = 0, 1, \ldots, n$ қўйилиб, ушбу

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x_k^0 = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k = I_0, \\ \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x_k = I_1, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x_k^m = I_n \end{cases} \qquad (3)$$

система тузилади. Бу системанинг детерминанти $D = \prod\limits_{k>j}(x_k - x_j) \neq 0$ Вандермонд детерминантидан иборатлигини кўриш қийин эмас.

1-мисол. Ушбу $I = \int\limits_0^2 f(x)\,dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$ кўринишдаги квадратур формула тузилсин. Бунда: $x_0 = 0{,}2$, $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 0{,}8$.

Ечиш. Биз $L_n(x) = x^m$ $(m = 0, 1, 2)$ дан фойдаланайлик:

$$I_0 = \int\limits_0^2 x^0 dx = 2, \quad I_1 = \int\limits_0^2 x dx = 2, \quad I_2 = \int\limits_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}.$$

(3) системани тузамиз:

$$\begin{cases} 0{,}2^0 \cdot A_0 + 0{,}5^0 \cdot A_1 + 0{,}8^0 \cdot A_2 = 2, \\ 0{,}2 A_0 + 0{,}5 A_1 + 0{,}8 A_2 = 2, \\ 0{,}2^2 A_0 + 0{,}5^2 A_1 + 0{,}8^2 A_2 = 8/3. \end{cases}$$

Бундан $A_0 = 4{,}814814$, $A_1 = -10{,}962962$, $A_2 = 8{,}1481476$ аниқланади. Натижада:

$$\int\limits_0^2 f(x)\,dx = 4{,}814814\, f(0{,}2) - 10{,}962962\, f(0{,}5) + $$
$$+ 8{,}1481476\, f(0{,}8).$$

$[a,\ b]$ оралиқда олинган бирор $\rho(x)$ вазн функцияси ёрдами билан A_k коэффициентларни ҳисоблашда қулай бўлган

$$I = \int\limits_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum\limits_{k=1}^{n} A_k f(x_k), \qquad (1')$$

$$A_k = \int\limits_a^b \rho(x) \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}\, dx \qquad (2')$$

кўринишдаги муносабатларни тузиш мумкин. Хусусан, $[-1;\ 1]$ оралиқда $f(x)$ функцияни $P_m(x)$ кўпҳад билан яқинлаштиришда $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ олинади.

Ньютон-Котес формулалари интеграллаш $[a,\ b]$ чекли оралиғида тенг h қадам билан узоқлашган $x_k = a + kh$, $k = \overline{0, n}$ тугунлар ва доимий вазн функцияси билан олинган квадратура формулаларидан иборат бўлиб, улар қуйидаги кўринишда берилиши мумкин:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx (b - a) \sum\limits_{k=0}^{n} B_k f(a + kh), \qquad (4)$$

бунда B_k — Котес коэффициентлари:

$$B_k = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!\,(n-k)} \int\limits_0^n \prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (t - j)\,dt, \qquad (5)$$

$$t = (x - a)/h.$$

$n = 1$ да $B_0 = B_1 = \frac{1}{2}$.

$n = 2$ да $B_0 = B_2 = \frac{1}{6}$, $B_1 = \frac{4}{6}$,

$n = 3$ да $B_0 = B_3 = \frac{1}{8}$, $B_1 = B_2 = \frac{3}{8}$.

$n = 4$ да $B_0 = B_4 = \frac{7}{90}$, $B_1 = B_3 = \frac{32}{90}$, $B_2 = \frac{12}{90}$,

$n = 5$ да $B_0 = B_5 = \frac{19}{288}$, $B_1 = B_4 = \frac{75}{288}$, $B_2 = B_3 = \frac{50}{288}$.

Трапециялар формуласи (4) формуланинг $n = 1$ бўлгандаги хусусий ҳолидан иборат:

$$J = \int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)),$$

қолдиқ ҳади: (6)

$$R(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)\ (a \leq \xi \leq b).$$

$[a, b]$ оралиқ тенг n бўлакка бўлинган умумий ҳолда:

$$J = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}(y_0 + y_n + 2(y_1 + \ldots + y_{n-1})),$$

бунда $y_i = f(x_i)$

$$R(f) = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(\xi)\ (a \leq \xi \leq b). \qquad (6')$$

Симпсон формуласи. (4) формуланинг $n = 2$ бўлгандаги хусусий ҳолидан иборат ($x_2 = x_0 + 2h$):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)), \qquad (7)$$

қолдиқ ҳади:

$$R(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{IV}(\xi)\ (a \leq \xi \leq b).$$

$2n + 1$ та тугун учун умумлашган Симпсон формуласи:

$$J = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots +$$

$$+ y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})]. \qquad (7')$$

$$R(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{IV}(\xi)\ (a \leq \xi \leq b),\ y_i = f(x_i).$$

2-мисол. Қандай n ларда $J = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin 2x}{4x}\right) dx$ интеграл қийматини умумлашган трапециялар ва Симпсон формулалари ёрдамида $0{,}5 \cdot 10^{-6}$ аниқликда топиш мумкин? Берилган интеграл қийматини $n = 5$ учун шу формулалар билан топинг ва аниқлигини баҳоланг.

Ечиш. 1) Интеграл остидаги $v(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sin 2x}{4x}$ функциянинг иккинчи ва тўртинчи тартибли ҳосилаларини баҳолашимиз керак бўлади. Маълумки,

$$\int_0^1 \cos^2 ux\,du = \left(\frac{u}{2} + \frac{1}{4x}\sin 2xu\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4x}\sin 2x = v(x),$$

$$|(\cos^2 ux)'| = |-2\cos ux \cdot \sin ux \cdot u| = u \sin 2ux,$$

$$|(\cos^2 ux)''| = 2u^2 \cos 2ux,$$

$$|(\cos^2 ux)''| = 4u^3 \sin 2ux,$$

$$|(\cos^2 ux)^{IV}| = 8u^4 \cos 2ux.$$

ва

$$\left|\frac{d^2v}{dx^2}\right| = 2\int_0^1 u^2 \cos 2ux\,du \leq 2\int_0^1 u^2\,du = 2 \cdot \frac{u^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$$\left|\frac{d^4v}{dx^4}\right| = 8\int_0^1 u^4 \cos 2ux\,du \leq 8\int_0^1 u^4\,du = \frac{8}{5}.$$

Қолдиқ ҳадлар учун (6′) ва (7′) формулаларга кўра n қуйидаги тенгсизликларни қаноатлантириши керак:

а) умумлашган трапециялар формуласи қўлланилганида

$$\frac{1}{12n^3} \cdot \frac{2}{3} \leq 0{,}5 \cdot 10^{-6},$$

бундан $n \geq 48$, яъни J ни $0{,}5 \cdot 10^{-6}$ аниқликда топиш учун камида $n+1 = 49$ та тугун олиниши керак;

б) умумлашган Симпсон формуласи қўлланилганида

$$\frac{1}{2880n^4} \cdot \frac{8}{5} \leq 0{,}5 \cdot 10^{-6},$$

бундан $n \geq 6$ аниқланади, яъни интеграл J ни $0{,}5 \cdot 10^{-6}$ аниқликда топиш учун камида $2n + 1 = 13$ та тугун олиниши керак.

2) Энди интегрални ҳисоблашга ўтамиз. Бунда $n = 5$ деб олиниши керак:

а) трапециялар формуласидан фойдаланамиз. У изланаётган қийматни $0{,}2 \cdot 10^{-4}$ аниқликда бера олади ($R(f)$ учун (6′) формулага $n = 5$ ни қўйинг ва ҳисоблашларни бажаринг). [0; 1] оралиқни $n = 5$ та тенг қисмга ажратамиз ($h = 0{,}2$, $x_i = 0 + ih$, $i = \overline{0; 5}$). y_i ординаталарни ҳисоблаймиз ($y_i = v(x_i)$):

x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
y_i	1	0,986773	0,948347	0,888350	0,812366	0,727324

(6′) формула бўйича:

$$J = \frac{1}{10}\,(y_0 + y_5 + 2\,(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)) =$$

$$= 0{,}8998999 \approx 0{,}8999.$$

б) (7′) формула бўйича ҳисоблашлар бажарилганида $[0;\ 1]$ оралиқни узунлиги $h = (1-0)/(2\cdot 5)$ га тенг бўлган 10 та оралиқчаларга бўламиз ва уларнинг учларига мос y_i, $i = \overline{0;\ 10}$ ординаталарни ҳисоблаймиз:
$y_0 = 1$, $y_1 = 0{,}9966733$, $y_2 = 0{,}98677291$ (юқоридаги жадвалга қаранг), $y_3 = 970535$, $y_4 = 0{,}948347$, $y_5 = 0{,}920735$, $y_6 = 0{,}888350$, $y_7 = 0{,}851946$, $y_8 = 0{,}812366$, $y_9 = 0{,}770513$, $y_{10} = 0{,}727324$.

Ниҳоят, (7′) умумлашган Симпсон формулалари бўйича олдин $R(f) = 1\cdot 10^{-6}$ ни, сўнг шунга мувофиқ яхлитлашларни ҳам бажариб, $J \approx 0{,}90135376 \approx 0{,}901254$ ни топамиз.

Симпсон кубатур формуласи $R\{a \leqslant x \leqslant A;\ b \leqslant y \leqslant B\}$ соҳа бўйича $J = \iint\limits_{(R)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^A dx \int\limits_b^B f(x,\ y)\,dy$ интегрални топишда қўлланилади, бунда $f(x, y)$ функция кўрсатилган соҳа ичида ва унинг чегарасида узлуксиз.

Хусусан, Ox ва Oy ўқлари бўйича қадам $h = \frac{A-a}{2}$, $k = \frac{B-b}{2}$ бўлган ҳолда Симпсон кубатур формуласининг кўриниши:

$$J = \frac{hk}{9}\,\{[f(x_0, y_0) + f(x_2, y_0) + f(x_0, y_2) + f(x_2,\ y_2) +$$
$$+ 4\,[x_1, y_0) + f(x_0, y_1) + f(x_1,\ y_2) + f(x_2, y_1)] +$$
$$+ 16\,f(x_1, y_1)\}. \tag{8}$$

Умумлашган формулада эса қадам $h = \frac{A-a}{2n}$, $k = \frac{B-b}{2m}$ бўлиб, $x_i = x_0 + ih$ $(x_0 = a,\ i = \overline{0;\ 2n})$ ва $y_j = y_0 + jk$ $(y_0 = b,$

$j = \overline{0;\ 2m})$ тугунларга мос $f(x_i,\ y_j) = f_{ij}$ қийматлар учун ушбу кўринишда ёзилади:

$$\iint\limits_{(R)} f(x, y)\,dx\,dy = \frac{hk}{9} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} [(f_{2i,\,2j} + f_{2i+2,\,2j} + f_{2i+2,\,2j+2} +$$
$$+ f_{2i,\,2j+2}) + (4\,f_{2i+1,\,2j} + f_{2i+2,2j} + f_{2i+2,2j} + f_{2i+2,2j+2} +$$
$$+ f_{2i,\,2j+1}) + 16\,f_{2i+1,\,2j+1}] \tag{8′}$$

3- мисол. $J = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1,5} \left(10 - \frac{x^2+y^2}{8}\right) dx\,dy$ қўш интеграл топилсин.

Ечиш: $h = (1-0)/2 = 0{,}5$, $k = (1{,}5-0)/2 = 0{,}75$;

y \ x	0	0,5	1
0	10	9,9688	9,875
0,75	9,9297	9,8984	9,8046
1,5	9,7188	9,6875	9,5938

(8) формула бўйича:

$$J = \frac{0{,}5\ 0{,}75}{9}\,((10 + 9{,}875 + 9{,}5938 + 9{,}7188) + 4(9{,}9688 +$$
$$+ 9{,}8046 + 9{,}6875 + 9{,}9297) + 16\cdot 9{,}8984) = 14{,}797.$$

Гаусс квадратур формуласи. Гаусс типидаги квадратур формулалар

$$\int\limits_a^b \rho(x)\,f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k\,f(x_k) \tag{9}$$

кўринишида берилади ва улар тугунларнинг танланишига ҳамда $f(x)$ функциянинг юқори даражали силлиқ бўлишига қараб алгебраик юқори даражали аниқликка эга бўлади. Одатда $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ коэффициентларни ва $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ тугунларни шундай танлайдиларки, натижада (9) тақрибий тенглик даражаси мумкин бўлгунча юқори барча кўпҳадлар учун аниқ бўлсин. (9) формула даражаси $2n-1$ дан ортмайдиган барча кўпҳадларни аниқ интеграллаши учун у интерполяцион бўлиши ва $\omega_n(x)$ кўпҳад $[a, b]$ оралиқда $\rho(x)$

вазн билан даражаси n дан кичик бўлган барча $Q(x)$ кўпҳадларга ортогонал бўлиши керак:

$$\int_a^b \rho(x)\,\omega_n(x)\,Q(x)\,dx = 0,$$

бунда $\rho(x) \geqslant 0$, $\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ \dots\ (x - x_n)$.

(9) формуланинг қолдиқ ҳади:

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b \rho(x)\,\omega_n^2(x)\,dx,\ \xi \in [a,b]. \qquad (10)$$

Гаусс туридаги формулаларнинг барча A_k коэффициентлари мусбатдир. Одатда Гаусс квадратур формуласи номи билан (9) формуланинг $\rho(x) = 1$ бўлган хусусий ҳоли аталади, унда $[a, b]$ оралиқ чекли бўлиб, маълум чизиқли алмаштиришлар билан $[-1;\ 1]$ га келтирилади:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k), \qquad (11)$$

$$R_n(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)}{[(2n)!]^3\,(2n+1)}\ f^{(2n)}(\xi),\ \xi \in [-1;\ 1], \qquad (12)$$

x_k тугунлар чап қисми $L_n(x)$ Лежандр кўпҳадидан иборат бўлган ушбу тенгламанинг илдизларидан ташкил топади:

$$\frac{1}{2^n \cdot n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,[(x^2 - 1)^n] = 0. \qquad (13)$$

Хусусан, $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = x$, $L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, $L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ ва ҳоказо. A_k коэффициентлар қуйидаги формула бўйича аниқланади:

$$A_k = \frac{2}{(1 - x_k^2)\left[L_n'(x_k)\right]^2}\ (k = \overline{1;\ n}). \qquad (14)$$

Формуланинг $n = 1 - 6$ учун тугунлари, коэффициентлари, қолдиқ ҳадлари:

$n = 1$ учун $x_1 = 0$, $A_1 = 2$, $R_1 = \frac{1}{3} f''(\xi)$,

$n = 2$ учун $x_1 = -x_2 = -0{,}5773502692$, $A_1 = A_2 = 1$, $R_2 = \frac{1}{135} f^{IV}(\xi)$,

$n = 3$ учун $x_1 = -x_3 = -0{,}774596692$, $x_2 = 0$, $A_1 = A_3 = \frac{5}{9}$, $A_2 = \frac{8}{9}$, $R_3 = \frac{1}{15750} f^{(6)}(\xi)$,

$n = 4$ учун $x_1 = -x_4 = -0{,}8611363116$, $x_2 = -x_3 = -0{,}3399810436$, $A_1 = A_4 = 0{,}3478548451$, $A_2 = A_3 = 0{,}6521451549$, $R_4 = \frac{1}{3472875} f^{(8)}(\xi)$;

$n = 5$ да: $x_1 = x_5 = -0{,}9061798456$, $x_2 = -x_4 = -0{,}5384693101$, $x_3 = 0$, $A_1 = A_5 = 0{,}2369268851$, $A_2 = A_4 = 0{,}478628705$, $A_3 = 0{,}5688888899$, $R_5 = \frac{1}{1237732650} f^{(10)}(\xi)$;

$n = 6$ да: $x_1 = -x_6 = -0{,}9324695142$, $x_2 = -x_5 = -0{,}6612093865$, $x_3 = -x_4 = -0{,}2386191861$, $A_1 = A_6 = 0{,}1713244924$, $A_2 = A_5 = 0{,}3607615730$, $A_3 = A_4 = 0{,}4679139346$,

$$R_6 = \frac{1}{648984486150}\ f^{(12)}(\xi).$$

$\int_a^b f(t)\,dt$ интегрални ҳисоблашда (11) формуладан фойдаланиш учун $t = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$ алмаштириш киритилади:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right)dx = \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} A_k f(t_k) + \overset{*}{R}_n(f),$$

$t_k = \frac{b-a}{2}x_k + \frac{b+a}{2}$, x_k — Гаусс квадратур формуласининг $[-1;\ 1]$ оралиқдаги тугунлари, A_k — уларга мос коэффициентлар, $\overset{*}{R}_n = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1} R_n$.

4-мисол. Ушбу $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ интегрални Гаусс формуласи ёрдамида ҳисоблаб топинг.

Ечиш: 1) $x = \frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2} = \frac{1}{2}(t+1)$ алмаштириш киритамиз: $J = \frac{b-a}{2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{1+\frac{1}{8}(t+1)^3} = 4\int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{8+(t+1)^3}$;

2) $n=4$ бўлсин. У ҳолда: $J = 4\Big[0{,}347855\Big(\frac{1}{8+(-0{,}861136+1)^3} + \frac{1}{8+(0{,}861136+1)^3}\Big) + 0{,}652145\Big(\frac{1}{8+(0{,}339981+1)^3} + \frac{1}{8+(0{,}339981+1)^3}\Big)\Big] = 0{,}835624$. Интегралнинг аниқ қиймати 0,835598.

Ушбу

$$\int\limits_a^b (b-x)^\alpha (x-a)^\beta f(x)\,dx \ (\rho(x)=(b-x)^\alpha (x-a)^\beta,\ \alpha>-1,\ \beta>-1)$$

кўринишдаги интегралларни ҳисоблашда Гаусс типидаги квадратур формулалардан фойдаланиш учун интеграллаш оралиғи чизиқли алмаштиришлар йўли билан $[-1; 1]$ стандарт оралиққа келтирилади. Натижада:

$$J = \int\limits_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \tag{15}$$

Бунда тугунлар вазифасини n-даражали

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}] \tag{16}$$

Якоби кўпҳадларининг илдизлари бажаради,

$$A_k = 2^{\alpha+\beta+1}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}\cdot\frac{1}{(1-x_k^2)\,[P_n'^{(\alpha+\beta)}(x_k)]^2}, \tag{17}$$

бунда $\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\,dt \ (z>0)$ — Эйлернинг иккинчи жинс интеграли, $\alpha=\beta=0$ бўлганда (16) Якоби кўпҳадлари Лежандр кўпҳадларига, (15) формула (11) Гаусс формуласига айланади.

Мелер формуласи ((15) квадратур формуланинг хусусий кўринишларидан бири):

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)\,dx \approx \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k), \tag{18}$$

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi,\ \rho(x) = (1-x^2)^{-1/2},\ R_n(f) = \frac{\pi}{(2n)!\,2^{2n-1}} f^{(2n)}(\xi),\quad -1 \leqslant \xi \leqslant 1. \tag{19}$$

5-мисол. Ушбу $J = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,(1+x^2)}$, $n=5$, интеграл ҳисоблансин.

Ечиш: $x = \pm 1$ нуқтада интеграл чексизликка айланади. Агар бунда $\rho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ деб қабул қилинса, Мелер квадратур формуласидан фойдаланиш мумкин бўлади:

$$J \approx \frac{\pi}{5}\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{1+x_k^2},\ x_k = \cos\frac{2k-1}{10}\pi = \frac{\pi}{5}\Big(\frac{1}{1+\cos^2\frac{\pi}{10}} + \frac{1}{1+\cos^2\frac{3\pi}{10}} + \frac{1}{1+\cos^2\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{1+\cos^2\frac{7\pi}{10}} + \frac{1}{1+\cos^2\frac{9\pi}{10}}\Big) = \frac{\pi}{5}(0{,}52506982+0{,}74322282+1+$$
$$+0{,}74322282+0{,}52506985) = 2{,}496241.$$

Чебишев квадратур формуласи қуйидаги кўринишда берилади:

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k),\ n = 1(1)\,7. \tag{20}$$

Формуланинг тугунлари:

$n=1$, $x_1 = 0$;

$n=2$, $-x_1 = x_2 = 0{,}577350269$;

$n=3,\ -x_1 = x_3 = 0{,}7071067812,\ x_2 = 0;$

$n=4,\ -x_1 = x_4 = 0{,}7946544723,\ -x_2 = x_3 = 0{,}1875924741;$

$n=5,\ -x_1 = x_5 = 0{,}8324974870,\ -x_2 = x_4 = 0{,}3745414096,\ x_3 = 0;$

$n=6,\ -x_1 = x_6 = 0{,}8662468181,\ -x_2 = x_5 = 0{,}4225186538,\ -x_3 = x_4 = 0{,}2666354015;$

$n=7,\ -x_1 = x_7 = 0{,}8838617008,\ -x_2 = x_6 = 0{,}5296567753,\ -x_3 = x_5 = 0{,}3239118105,\ x_4 = 0;$

$n=9,\ -x_1 = x_9 = 0{,}9115893077,\ -x_2 = x_8 = 0{,}6010186554,\ -x_3 = x_7 = 0{,}5287617831,\ -x_4 = x_6 = 0{,}1679061842,\ x_5 = 0.$

6-мисол. Ушбу $J = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3}$ интеграл ҳисоблансин.

Ечиш: $n = 7$ бўлсин. $t = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2} = \frac{x+1}{2}$ алмаштириш киритиб, интеграллаш оралиғини $[-1;\ 1]$ га келтирамиз. Бизда $dt = 0{,}5\,dx$, $1 + t^3 = (8 + (x+1)^3)/8$, $t = 0$ да $x = -1$, $t = 1$ да $x = 1$ ва

$$J = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{8 + (x+1)^3},$$

(20) формуладан фойдаланамиз:

$$J = \frac{2}{7}\sum_{k=1}^{7}\frac{1}{8 + (x_k + 1)^3} = \ldots = 0{,}835637,$$ x_k тугунлар қиймати юқорида келтирилган жадвалдан олинади.

Эйлер—Маклорен формуласи қуйидагидан иборат:

$$\int_a^b f(x)\,dx = T_n + \Delta + R_{2k}(f), \qquad (21)$$

бунда $h = (b-a)/n$, $\Delta = -\sum_{j=1}^{k-1}\frac{h^{2j}B_{2j}}{(2j)!}[f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a)]$ — трапециялар катта формуласига тузатма, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$.

$$R_{2k}(f) = \frac{h^{2k+1}}{(2k)!}\int_0^1 \varphi_{2k}(\tau)\sum_{j=0}^{n-1} f^{(2k)}(a + jh + h\tau)\,d\tau; \qquad (22)$$

$$T_n = h\left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(a + jh)\right];$$

Бернулли сонлари: $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_{2k+1} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_8 = -\frac{1}{30}$, $B_{10} = \frac{5}{66}$, $B_{12} = -\frac{691}{2730}$, $B_{14} = -\frac{7}{6}$, $B_{16} = -\frac{3616}{510}, \ldots$

Бернулли кўпҳадлари: $B_0(x) = 1$, $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$, $B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$, $B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$, $B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$, $B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}$.

$\varphi_n(x) = B_n(x) - B_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — Бернулли кўпҳадларидан фақат озод ҳад билан фарқ қиладиган функция. $x = 0$ ва $x = 1$ да бу функция ($\varphi_1(x)$ дан ташқари) нолга айланади. (0;1) оралиқда $\varphi_2(x)$, $\varphi_4(x)$, $\varphi_6(x)$, ... кўпҳадлар доимий, $\varphi_{2k}(x)$ кўпҳад $(-1)^k$ ишорага эга, $x = 0{,}5$ да $\varphi_3(x)$, $\varphi_5(x)$, $\varphi_7(x)$, ... нолга айланади. $\varphi_{2k+1}(x)$ кўпҳад $(0;\ 0{,}5)$ оралиқда $(-1)^{k-1}$ ишорага, $(0{,}5;\ 1)$ оралиқда $(-1)^k$ ишорага эга.

7-мисол (қаранг: (7), 352-б). Эйлер — Маклорен формуласи ёрдамида

$$J = \int_1^2 \left(\cos x - \frac{1}{x^2} + \operatorname{sh} x\right) dx$$

интеграл $1\cdot 10^{-4}$ гача аниқлик билан ҳисоблансин.

Ечиш: $n = 5$ бўлсин. У ҳолда $h = (2-1)/5 = 0{,}2$, $x_i = 1 + 0{,}2\,i$ $(i = \overline{0;\ 5})$,

$f(x_0) = f(1) = 0{,}71550, \quad f(x,1) = f(1{,}2) = 1{,}17738, \quad f(x_2) = f(1{,}4) = 1{,}56407, \; f(x_3) = f(1{,}6) = 1{,}95577, \; f(x_4) = f(1{,}8) =$

$$= 2{,}40636, \; f(x_5) = f(2) = 2{,}96077,$$

$$T_5 = 0{,}2\left[\frac{f(x_0) + f(x_5)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_4)\right] = 1{,}788342.$$

Учинчи тартибли ҳосила билан чегараланамиз:

$$f'(x) = -\sin x + \frac{2}{x^3} + \operatorname{ch} x, \quad f''(x) = \ldots, \; f'''(x) = \sin x + \frac{4}{x^4} + \operatorname{ch} x, \quad f'(1) = 2{,}70161, \quad f'(2) = 3{,}10290, \quad f'''(1) =$$

$$= 26{,}38455, \; f'''(2) = 5{,}42150,$$

$$\Delta = -\frac{0{,}2^2 \cdot 1/6}{2!}(3{,}10290 - 2{,}70161) - \frac{0{,}2^4(-1/30)}{4!}(5{,}42150 - 26{,}38455) = -0{,}0013842178. \; J = 1{,}78696.$$

Ушбу

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \qquad (23)$$

кўринишдаги квадратур формулада тугунлар вазифасини Чебишев—Эрмит

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

кўпҳадининг илдизлари ўтайди, формулада

$$A_k = \frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{[H_n'(x_k)]^2}, \; R_n(f) = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n \, (2n)!} f^{(2n)}(\xi). \qquad (24)$$

(23) формула тугунлари ва коэффициентлари:

$n = 1$: $x_1 = 0$, $A_1 = 1{,}7724538509$;

$n = 2$: $-x_1 = x_2 = 0{,}7071067812$, $A_1 = A_2 = 0{,}8862269255$;

$n = 3$: $-x_1 = x_3 = 1{,}2247448714$, $A_1 = A_3 = 0{,}2954089752$, $A_2 = 1{,}1816359006$; $x_2 = 0$;

$n = 4$: $-x_1 = x_4 = 1{,}6506801239$, $-x_2 = x_3 = 0{,}5246476233$, $A_1 = A_4 = 0{,}08131283545$, $A_2 = A_3 = 0{,}8040140900$;

$n = 5$: $-x_1 = x_5 = 2{,}0201828708$, $-x_2 = x_4 = 0{,}9585724646$, $x_3 = 0$, $A_1 = A_5 = 0{,}01995324206$, $A_2 = A_4 = 0{,}3936193232$, $A_3 = 0{,}9453087205$;

$n = 6$: $-x_1 = x_6 = 2{,}3506049737$, $-x_2 = x_5 = 1{,}3358490740$, $-x_3 = x_4 = 0{,}436077119$, $A_1 = A_6 = 0{,}004530009906$, $A_2 = A_5 = 0{,}1570673203$, $A_3 = A_4 = 0{,}7246295952$.

$$H_0(x) = 1, \; H_1(x) = 2x, \; H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

$H_n(x)$ кўпҳад $(-\infty; +\infty)$ оралиқда $\rho(x) = e^{-x^2}$ вазн билан ортогонал система ташкил қилади.

8-мисол. Ушбу $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{5+x}\,dx$ интеграл ҳисоблансин ($n = 10$).

Ечиш. (23) формула бўйича:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{5+x}\,dx \approx \sum_{k=1}^{10} A_k \cdot \frac{1}{5+x_k}.$$

$n = 5$ учун x_k ва A_k қийматларини юқорида келтирилган жадвалдан оламиз. $A_2 = A_4$ ва $A_1 = A_5$, шунга кўра:

$$J \approx A_3 \cdot \frac{1}{5+x_3} + A_2\left(\frac{1}{5+x_2} + \frac{1}{5+x_4}\right) + A_1\left(\frac{1}{5+x_1} + \frac{1}{5+x_5}\right) =$$

$$= 0{,}9453087 \cdot \frac{1}{5} + 0{,}3936193\left(\frac{1}{5-0{,}9585724} + \frac{1}{5+0{,}9585724}\right) + 0{,}0199532\left(\frac{1}{5-2{,}0201829} + \frac{1}{5+2{,}0201829}\right) = 0{,}3620556.$$

Ушбу

$$\int_{0}^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \qquad (25)$$

кўринишдаги квадратур формулада тугунлар сифатида n-даражали

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^{x} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{\alpha+n} e^{-x}\right)$$

Лагерр кўпҳадининг илдизлари олинади. Формулада:

$$A_k = \frac{n!\,\Gamma(\alpha+n+1)}{x_k\,[L'^{(\alpha)}_n(x_k)]^2}, \quad R_n(f) = \frac{n!\,\Gamma(\alpha+n+1)}{(2n)!}\, f^{(2n)}(\xi). \qquad (26)$$

(25) квадратура формуласи тугунлари ва коэффициентлари ($n = 1\,(1)\,6$ учун; $\alpha = 0$):

$n = 1$: $x_1 = 1$, $A_1 = 1$;

$n = 2$: $x_1 = 0{,}5857864376$, $x_2 = 3{,}4142135624$, $A_1 = 0{,}8535533906$, $A = 0{,}1464466094$;

$n = 3$: $x_1 = 0{,}4157745568$, $x_2 = 2{,}2942803603$, $x_3 = 6{,}2899450829$, $A_1 = 0{,}7110930059$, $A_2 = 0{,}2785177336$, $A_3 = 0{,}0103892565$;

$n = 4$: $x_1 = 0{,}3225476896$, $x_2 = 1{,}7457611012$, $x_3 = 4{,}5366202969$, $x_4 = 9{,}3950709123$, $A_1 = 0{,}6031541043$, $A_2 = 0{,}3574186924$, $A_3 = 0{,}0388879085$, $A_4 = 0{,}0005392947$;

$n = 5$: $x_1 = 0{,}2635603197$, $x_2 = 1{,}4134030591$, $x_3 = 3{,}5964257710$, $x_4 = 7{,}0858100059$, $x_5 = 12{,}6408008443$, $A_1 = 0{,}5217556106$, $A_2 = 0{,}3986668111$, $A_3 = 0{,}0759424497$, $A_4 = 0{,}0036117558$, $A_5 = 0{,}0000233700$;

$n = 6$: $x_1 = 0{,}2228466042$, $x_2 = 1{,}8889321017$, $x_3 = 2{,}9927363261$, $x_4 = 5{,}7751435691$, $x_5 = 9{,}8374674184$, $x_6 = 15{,}9828739806$, $A_1 = 0{,}4589646740$, $A_2 = 0{,}4170008308$, $A_3 = 0{,}1133733821$, $A_4 = 0{,}0103991974$, $A_5 = 0{,}0002610172$, $A_6 = 0{,}0000008985$.

Бир неча Лагерр кўпҳади ($\alpha = 0$ да): $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = -x + 1$, $L_2(x) = x^2 - 4x + 2$, $L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$, $L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 74$.

9-мисол. Ушбу $J = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$ интеграл ҳисоблансин, $\varepsilon = 10^{-3}$.

Ечиш. (25) формулада $f(x) = (1 + \sqrt{x})^{-1}$. $n = 4$ бўлсин. x_k, A_k ($k = 1; 4$) қийматларини юқорида келтирилган жадвалдан оламиз:

$$J = 0.60315 \cdot \frac{1}{1+\sqrt{0{,}32255}} + 0{,}35742 \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1{,}74578}} + 0{,}038891 \cdot \frac{1}{1+\sqrt{4{,}53662}} + 0{,}00539 \cdot \frac{1}{1+\sqrt{9{,}39507}} = 0{,}5524 \approx 0{,}552.$$

Вазн функциясини ажратиш усули. Агар $I = \int_a^b f(x)\,dx$ интеграл остидаги $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқнинг бир ёки бир неча нуқтасида чексизликка айланса, у шундай $f(x) = \rho(x)\,\varphi(x)$ кўринишида ёзиладики, бунда $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ да чегараланган ва етарлича узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин, $\rho(x) > 0$ — вазн функцияси.

10-мисол. Ушбу $\int_{-1}^{1} \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$ интеграл ҳисоблансин.

Ечиш. Бу ерда $x = \pm 1$ да интеграл остидаги функция чексизликка айланади, $\rho(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ деб олиб, Мелер (21) формуласидан фойдаланамиз, $n = 5$ бўлсин. У ҳолда: $J \approx \frac{\pi}{5} \sum_{k=1}^{5} e^{2x_k}$ $\left(x_k = \cos\frac{2k-1}{10}\pi\right)$, $J \approx \frac{\pi}{5}(7{,}3890557 + 3{,}2399907 + 1 + 3{,}2086429 + 0{,}14925292) = 7{,}1615267$.

Аддитив усул (Л. В. Канторович таклиф қилган). Интеграл остидаги функция $f(x) = (x-c)^\alpha \varphi(x)$ ($c \in [a, b]$, $\alpha > -1$) кўринишига эга бўлиб, $[a, b]$ оралиқда $\varphi(x)$ нинг k—тартибгача ҳосилалари мавжуд. У ҳолда $f(x)$ функция $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ кўринишида ёзилади, бунда

$$f_1(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\varphi^{(j)}(c)}{j!}(x-c)^{j+\alpha}, \quad f_2(x) = (x-c)^\alpha\Big[\varphi(x) - \varphi(c) - \sum_{j=1}^{k} \frac{\varphi^{(j)}(c)}{j!}(x-c)^j\Big].$$

$f_1(x)$ даражали функция бўлиб, у осон интегралланади. Квадрат қавс ичидаги ифода ва унинг k-тартибли ҳосиласи

$x=c$ да нолга айланади. Демак, $f_2(x)$ функция $x=c$ да махсусликка эга эмас ва шу нуқтада унинг $k+[\alpha]$ тартибли ҳосиласи узлуксиз. Шунга кўра $\int\limits_a^b f_2(x)\,dx$ га нисбатан бирор квадратур формула қўлланилиши мумкин.

11-мисол. Ушбу $J=\int\limits_2^4[(t^2-2)(t^2-4)]^{-1/2}\,dt$ интеграл ҳисоблансин.

Ечиш: Интеграл остидаги функция $x=2$ нуқтада $[(2^2-2)(t-2)(2+2)]^{-1/2}=[8(t-2)]^{-1/2}$ кўринишдаги махсусликка эга. Махсуслигини ажратган ҳолда функцияни $f(t)=[(t^2-2)(t^2-1)(t^2-4)]^{-1/2}-[8(t-2)]^{-1/2}$ кўринишида ёзамиз. Бу ҳолда $\lim\limits_{t\to2}f(t)=0$. Интегрални $J=J_1+J_2$ кўринишига келтириб ечамиз. Бунда $J_1=\int\limits_2^4 f(t)\,dt$ бирор квадратур формула билан ҳисобланади:

11-мисолга $\qquad n=10 \qquad$ **Трапециялар формуласи**

n	t	$f(t)$	n	t	$f(t)$	n	t	$f(t)$
1	2,2	−0,14312695	5	3,0	−0,18452254	9	3,8	−0,17577466
2	2,4	−0,1702855	6	3,2	−0,18329041	2	$\Sigma=$	−3,1628694
3	2,6	−0,18054165	7	3,4	−0,18117931	0	$t\to2$	0
4	2,8	−0,18411678	8	3,6	−0,17859699	10	4	−0,17284832

$J_1=-0{,}333572.$

$J_2=\int\limits_2^4[8(t-2)]^{-1/2}\,dt$ ни бевосита ҳисоблаймиз:

$$J_2=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{t-2}\,\right]_2^4=1-0=1;$$

Шундай қилиб, $I=I_1+I_2=-0{,}333572+1=0{,}666428.$

Л. А. Люстерник ва В. А. Диткин кубатур формуласининг кўриниши:

$$\iint\limits_\Omega f(x,y)\,dxdy\approx\pi\left[\frac{1}{4}f(0)+\frac{1}{8}\sum_{i=0}^{5}f(P_i)\right] \qquad (27)$$

Агар Ω — маркази координаталар бошида жойлашган бирлик доира бўлса, P_i нуқталар $P_i=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\varphi_i=\frac{\pi}{3}i$ $(i=\overline{0;5})$ қутб координаталарида берилади; Ω — бирлик доира ичига чизилган мунтазам олтибурчак бўлган ҳолда:

$$\iint\limits_\Omega f(x,y)\,dxdy\approx\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{43}{65}f(0)+\frac{125}{336}\sum_{i=0}^{5}f(P_i)\right] \qquad (28)$$

бунда $P_i=\left(\sqrt{\frac{14}{15}},\ \varphi_i=\frac{\pi}{3}i,\ i=\overline{0;5}\right)$; агар Ω — квадрат $(-1\leqslant x\leqslant1,\ -1\leqslant y\leqslant1)$ бўлса,

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}f(x,y)\,dxdy\approx\frac{8}{7}f(0,0)+\frac{20}{63}\left[f\left(\sqrt{\frac{14}{15}},0\right)+f\left(-\sqrt{\frac{14}{15}},0\right)\right]+\frac{5}{9}\left[f\left(\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}},-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+f\left(\sqrt{\frac{1}{3}},-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]. \qquad (29)$$

(27) — (29) формулалардан Ω ихтиёрий радиусли доира, ихтиёрий радиусли доира ичига чизилган мунтазам олтибурчак, эллипс, тўғри тўртбурчак бўлган ҳолда ҳам фойдаланиш мумкин. Фақат ўзгарувчилар мос тартибда алмаштирилиши керак. Агар Ω ихтиёрий шаклга эга бўлса, у юқорида кўрсатилган турдаги соҳалар йиғиндисига келтирилади.

12-мисол. Ушбу $I=\iint\sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$ интеграл ҳисоблансин. $\Omega: x^2+y^2\leqslant 2x.$

Ечиш. $x^2+y^2-2x+1\leqslant1$, $(x-1)^2+y^2\leqslant1$, ёки $x_1=x+1$, $y_1=y$ алмаштириш бажарилса, $I=\iint\limits_{\Omega_1}\sqrt{1+(x_1+1)^2+y_1^2}\,dx_1\,dy_1$, $\Omega: x_1^2+y_1^2\leqslant1$ — бирлик доира. (27) формуладан фойдаланамиз. Қулайлик учун интеграл остидаги функцияни қутб координаталарида ёзамиз

$x_1 = \rho \cos \varphi, \quad y_1 = \rho \sin \varphi, \quad f(x_1, \ y_1) = \sqrt{2 + 2\rho \cos \varphi + \rho^2},$

$\rho = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \varphi_i = \frac{\pi}{3} i, \ i = \overline{0;5},$

$$I \approx \pi \left[\frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{8} \sum_{i=0}^{5} \sqrt{\frac{8}{3} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} \cos \frac{\pi}{3} i}\right] =$$

$$= 4{,}85838.$$

Монте — Қарло усули. Бу усул m-каррали $I = \int\limits_{\Omega}\int \ldots \int f(x_1, \ldots, x_m)\, dx_1, \ldots, dx_m$ интегрални ҳисоблашда қўлланилади, бунда Ω соҳа m-ўлчовли $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = \overline{1, m})$ бирлик кубда ётади. Тасодифий сонларнинг $[0; 1]$ оралиқда текис тақсимланган m та кетма-кетлигини оламиз:

$$x_1^{(1)}, \ x_2^{(1)}, \ \ldots, \ x_n^{(1)}, \ \ldots,$$
$$x_1^{(2)}, \ x_2^{(2)}, \ \ldots, \ x_n^{(2)}, \ \ldots,$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$x_1^{(m)}, \ x_2^{(m)}, \ \ldots, \ x_n^{(m)}, \ \ldots .$$

Исталган $P_i\ (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ \ldots, \ x_i^{(m)})$ $(i = 1, 2, \ \ldots)$ нуқталар m-ўлчовли бирлик кубда текис тақсимланган тасодифий нуқталар сифатида қаралиши мумкин.

Жами N та тасодифий нуқтадан n таси Ω соҳага, қолган $N - n$ таси Ω дан ташқарига тушган бўлсин. N нинг етарлича катта қийматида

$$I \approx \frac{V_\Omega}{n} \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \qquad (30)$$

ўринли бўлади (V_Ω — интеграллаш соҳасининг m-ўлчовли ҳажми). V_Ω ни ҳисоблаш қийин бўлса, $V_\Omega \approx n/N$ деб олиниши мумкин. У ҳолда $I \approx \frac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)$.

13-мисол. Монте — Қарло усули қўлланилиб, $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 - y^2}\, dx\, dy$ интеграл ҳисоблансин, Ω—учлари $O\ (0;\ 0)$, $A\ (1;\ 0)$, $B\ (1;\ 1)$ нуқталарда жойлашган учбурчак.

Ечиш: Ω соҳа $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y \leqslant x$ лар билан чегараланган тўғри бурчакли учбурчак бўлиб, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ бирлик квадратга қарашли. RND функциянинг ЭҲМ хотирасига

олдиндан киритилган қийматлари (тасодифий сонлар) жадвалидан фойдаланамиз:

[0; 1] оралиқда текис тақсимланган тасодифий сонлар

0,57705	0,05926	0,00188	0,52906	0,05758
0,71618	0,66289	0,55709	0,09461	0,00336
0,73710	0,35483	0,86977	0,99602	0,88222
0,70131	0,09393	0,31303	0,69962	0,98585
0,16961	0,30304	0,11578	0,31311	0,52103
0,53324	0,55186	0,93045	0,27004	0,91827
0,43166	0,64093	0,93011	0,65339	0,07069
0,26275	0,20514	0,42844	0,93382	0,13928

Жадвалда кетма-кет келувчи ва Ω га қарашли бўлган ҳар икки сонни $P\ (x,\ y)$ тасодифий нуқтанинг координаталари сифатида қабул қиламиз. Уларни учта ўнли ишорагача яхлитлаб олайлик. Масалан, $x_1 = 0{,}577$, $y_1 = 0{,}716$. Бундай сонлар жуфти $N = 20$ та бўлиб (қуйидаги жадвалга қаранг), улардан n та жуфти $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y \leqslant x$ шартни қаноатлантирсин (жадвалнинг $y \leqslant x$ графасига + қўямиз):

13-мисолга **Монте — Карло усули**

x	y	$y<x$	$f(x_1\ y)$	x	y	$y<x$	$f(x_1\ y)$
0,577	0,716	—		0,930	0,428	+	0,82566094
0,737	0,701	+	0,22752582	0,529	0,095	+	0,52039984
0,170	0,533	—		0,996	0,700	+	0,70853087
0,432	0,263	+	0,34271708	0,313	0,270	+	0,15833192
0,059	0,663	—		0,653	0,934	—	
0,355	0,094	+	0,34232878	0,058	0,003	+	0,057922361
0,303	0,552	—		0,882	0,986	—	
0,640	0,205	+	0,60627963	0,521	0,918	—	
0,902	0,557	—		0,071	0,139	—	
0,870	0,323	+	0,80781866		$n=10$		4,5975159
0,116	0,930	—					

Интеграллаш соҳаси (учбурчак) нинг юзи: $V_\Omega = 0{,}5 \cdot 1 \cdot 1 = 0{,}5$.

(30) формула бўйича: $I \approx \frac{1}{2 \cdot 10} \cdot 4{,}597159 = 0{,}22987579 \approx$ $\approx 0{,}230$.

МАШҚЛАР

1. $\int\limits_{a}^{b} \rho(x) f(x)\, dx \approx \sum\limits_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ интерполяцион квадра-

тур формула коэффициентлари учун $\sum_{k=1}^{n} A_k = \int_a^b \rho(x)\,dx$ тенглик ўринли бўлишини кўрсатинг.

2. 1-мисолда $\rho(x) = 1$, $n = 2$, $x_1 = a$, $x_2 = b$ бўлган ҳол учун интерполяцион квадратур формула тузилсин.

3. 1-мисолда $\rho(x) = 1$, $n = 3$, $x_1 = a$, $x_2 = \frac{a+b}{2}$, $x_3 = b$. Интерполяцион квадратур формула тузилсин.

4. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, 2-масалада чиқариладиган квадратур формуланинг қолдиқ ҳади топилсин.

5. 3-масалада тузиладиган квадратур формуланинг қолдиқ ҳади топилсин.

6. Трапециялар квадратур формуласи умумий интерполяцион квадратур формулага асосланиб чиқарилсин.

7. Жисмнинг Ox ўқига перпендикуляр бўлган кесимининг $S = S(x)$ юзи $S(x) = Ax^2 + Bx + C$ ($a \leqslant x \leqslant b$, A, B, C — доимий сонлар) қонун бўйича ўзгаради. Шу жисмнинг ҳажми $V = \frac{b-a}{6}\left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b)\right]$ га тенглигини, яъни Симпсон формуласи билан ифодаланишини кўрсатинг.

8. Қуйидаги квадратур формулаларни келтириб чиқаринг:

$$\text{а)}\ \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, f(x)\,dx = \frac{\pi}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \sin^2\frac{k\pi}{n+1}\, f\left(\cos\frac{k\pi}{n+1}\right) + R_n,$$

$$R_n = \frac{\pi}{2^n}\,\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!},\quad -1 \leqslant \xi \leqslant 1;$$

$$\text{б)}\ \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, f(x)\,dx = \frac{4\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} \sin^2\frac{k\pi}{n+1} \times$$

$$\times f\left(\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right) + R_n,$$

$$R_n = \frac{\pi}{2^{2n}(2n)!}\, f^{(2n)}(\xi),\quad -1 \leqslant \xi \leqslant 1.$$

9. Учинчи даражали кўпҳадни аниқ интеграллайдиган

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx C_0 f(0) + C_1 f(1) + C_2 f'(0) + C_3 f'(1) + C_4 f(0.5)$$

кўринишидаги квадратур формулани тузинг.

10. Учинчи даражали кўпҳадни аниқ интегралловчи

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\,\sin\frac{\pi}{2}x\,dx = C_1 f(-1) + C_0 f(0) + C_1 f(1)$$

кўринишидаги квадратур формулани тузинг.

11. Ушбу $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ нинг қийматини трапециялар формуласидан фойдаланиб $1\cdot 10^{-3}$ аниқликда топиш учун нечта тугун олиниши етарли. Интегрални ҳисобланг.

12 — 43-машқларда берилган интеграллар трапециялар ва Симпсон формулалари ёрдамида топилсин ва хато баҳолансин:

12. $\int_1^2 \frac{xdx}{(x+3)^2}$, $n = 10$. 13. $\int_0^3 \frac{xdx}{(3x+1)^3}$, $n = 10$. 14. $\int_1^2 \frac{x^2dx}{(5x+1)^2}$, $n = 10$. 15. $\int_0^1 \frac{x^3dx}{(3x+2)^2}$, $n = 10$. 16. $\int_1^3 \frac{x^3dx}{(2x+3)^4}$, $n = 10$.

17. $\int_1^3 \frac{dx}{x(4x-1)^3}$, $n = 10$. 18. $\int_0^3 \frac{dx}{3x^2+x+4}$, $n = 10$.

19. $\int_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^3}$, $n = 10$. 20. $\int_1^{2,8} \frac{dx}{x(3,2^3+x^3)}$, $n = 8$.

21. $\int_{-0,2}^{2,4} \frac{x^3dx}{2,81^4+x^2}$, $n = 8$. 22. $\int_2^{2,5} \frac{dx}{(9x+2)\sqrt{9,8x+4}}$, $n = 10$.

23. $\int_{-1,2}^{2,5} \sqrt{2x+3}\,\sqrt{(0,8x+4)^3}\,dx$, $n = 10$. 24. $\int_{-0,2}^{0,3} \sqrt{1-x^2}\,x^3dx$, $n = 10$. 25. $\int_{-0,5}^{1} \sqrt{(3-x^2)^2}\,xdx$, $n = 15$. 26. $\int_{-1}^{1} \frac{x^3dx}{\sqrt{3,61-x^2}}$, $n = 8$. 27. $\int_1^{1,5} \frac{dx}{x\sqrt{3,61-x^2}}$, $n = 10$. 28. $\int_{1,2}^{2,2} \frac{dx}{x\sqrt{x^5+2,25}}$, $n = 10$.

29. $\int\limits_{1,2}^{2,2} \frac{dx}{x\sqrt{x^5-2,25}}$, $n=10$. 30. $\int\limits_{0,7}^{2,2} \sqrt[5]{5,2x-3,08}\, dx$, $n=10$.

31. $\int\limits_{0,3}^{1,9} \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{2,1^3-x^3}}$, $n=8$. 32. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin 0,92\, x\, dx$, $n=6$.

33. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^2 0,8x dx$, $n=6$. 34. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin 0,6x}$, $n=6$.

35. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^2 0,8\, x\, dx$, $n=6$. 36. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin 0,32x \sin 0,8x dx$, $n=8$.

37. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^3 0,7x dx}{\cos^3 0,7x}$, $n=8$. 38 $\int\limits_{0,2}^{\pi/3} \mathrm{ctg}^3 2x dx$, $n=8$. 39. $\int\limits_{0,2}^{\pi/3} \frac{\mathrm{ctg}^3 0,3x dx}{\sin^3 0,3x}$, $n=12$. 40. $\int\limits_{0}^{1} e^{x^2}\, dx$, $n=10$. 41. $\int\limits_{0}^{1} e^{x^2} dx$, $n=10$.

42. $\int\limits_{0}^{2} e^{0,6x} \sin 0,8x dx$, $n=10$. 43. $\int\limits_{0}^{\pi/2} e^{0,6x} \cos x dx$, $n=10$.

44 — 59 - машқларда берилган интеграллар трапециялар ёки Симпсон формуласи ёрдами билан ε аниқликда ҳисоблансин.

44. $\int\limits_{1}^{2} \frac{xdx}{(x+3)^2}$, $\varepsilon=0,5\cdot 10^{-4}$. 45. $\int\limits_{0}^{3} \frac{xdx}{(3x+1)^3}$, $\varepsilon=0,5\cdot 10^{-4}$.

46. $\int\limits_{0}^{1/3} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\varepsilon=0,5\cdot 10^{-3}$. 47. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1-x+x^2}$, $\varepsilon=0,5\cdot 10^{-3}$.

48. $\int\limits_{0}^{1} x \ln(1+x)\, dx$, $\varepsilon=0,5\cdot 10^{-3}$. 49. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\, dx$, $\varepsilon=0,5\cdot 10^{-3}$. 50. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+e^{0,3x}}$, $\varepsilon=0,5\cdot 10^{-4}$. 51. $\int\limits_{0,5}^{1,5} \sin \ln x dx$, $\varepsilon=0,5\cdot 10^{-4}$. 52. $\int\limits_{0,5}^{1,5} \cos \ln x dx$, $\varepsilon=0,5\cdot 10^{-4}$. 53. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \ln \cos x dx$,

$\varepsilon=0,5\cdot 10^{-3}$. 54. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sqrt{1-0,5\sin^2 x}\, dx$, $\varepsilon=0,5\cdot 10^{-3}$.

55. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}}$, $\varepsilon=0,5\cdot 10^{-3}$. 56. $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{\arcsin x dx}{x}$, $\varepsilon=0,5\times 10^{-3}$. 57. $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{\mathrm{arctg} x dx}{x}$, $\varepsilon=0,5\cdot 10^{-3}$. 58. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\mathrm{arctg} x dx}{1+x}$, $\varepsilon=0,5\cdot 10^{-3}$. 59. $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{(\mathrm{arctg} x)^2\, dx}{x}$, $\varepsilon=0,5\cdot 10^{-3}$.

60 — 65- масалаларда функцияларнинг кўрсатилган x_i лардаги $F(x_i)$ қийматларини $1\cdot 10^{-6}$ аниқликда топиш ва графикларини ясаш талаб қилинади (ҳисоблашлар ЭҲМ да бажарилсин):

60. $F(x) = \int\limits_{0}^{x} \frac{\sin t}{t}\, dt$ (интеграл синус), $x = 0 \left(\frac{\pi}{36}\right) \frac{\pi}{2}$, $x = 0\ (0,1)\ 10$.

61. $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$ (Френель функцияси), $x = 0\ (0,1)\ 10$.

62. $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$ (Лаплас функцияси), $x = 0\ (0,1)\ 4$.

63. $F(x) = -\int\limits_{0}^{x} \ln\cos t dt$ (Лобачевский функцияси), $x = 0 \left(\frac{\pi}{36}\right) \frac{\pi}{3}$.

64. $F(x) = \int\limits_{0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 t}}$ (1 - жинс эллиптик интеграл), $x=0 \left(\frac{\pi}{36}\right) \frac{\pi}{2}$, $\alpha^2 = 0,1\ (0,1)\ 0,5$.

65. $F(x)=\int\limits_0^x \sqrt{1-\alpha^2\sin^2 t}\,dt$ (2-жинс эллиптик интеграл), $x=0\left(\frac{\pi}{36}\right)\frac{\pi}{2}$, $\alpha^2=0{,}1\ (0{,}1)\ 0{,}5$.

66. $y=\ln(1-x^3)$ $(0\leqslant x\leqslant 0{,}5)$ эгри чизиқ ёйининг узунлиги 10^{-6} гача аниқликда топилсин.

67. Ярим ўқлари: 1) $a=10$, $b=6$; 2) $a=1$, $b=0{,}5$ бўлган эллипс ёйининг узунлиги 10^{-2} аниқликда топилсин.

68. $y=\sin x$ синусоиданинг $0\leqslant x\leqslant\pi$ оралиқдаги узунлиги 10^{-2} аниқликда топилсин.

66. $\rho\varphi=1\left(\frac{3}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{4}{3}\right)$ гиперболик спирал ёйининг узунлиги 10^{-3} аниқликда топилсин.

70. $y=(x^2+2x)e^{-x}$ чизиқ ва абсциссалар ўқи билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзи топилсин.

71. $y=\operatorname{tg}x$, $y=\frac{2}{3}\cos x$ чизиқлар ва ординаталар ўқи билан чегараланган эгри чизиқли учбурчакнинг юзи $0{,}5\cdot10^{-5}$ аниқликда топилсин.

72. 1) $x^4+y^4=31{,}36x^2$; 2) $x^4+y^4=x^3$ чизиқ билан чегараланган шаклнинг абсциссалар ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўладиган жисмнинг ҳажми топилсин $(\varepsilon=10^{-3})$.

73. $y=2x-x^2$ парабола ва абсциссалар ўқи билан чегараланган шаклнинг ординаталар ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўладиган жисм ҳажми топилсин $(\varepsilon=10^{-3})$.

74. Томони 7,8 га тенг бўлган мунтазам олтибурчак томонларидан бири атрофида айланади. Ҳосил бўладиган жисмнинг ҳажми топилсин $(\varepsilon=10^{-2})$.

75. Жисмнинг тезлиги $v=\sqrt{1+t}$ м/с формула билан берилади. Дастлабки 10 с ичида жисм ўтган масофани топинг $(\varepsilon=10^{-1}$ м).

76. $x^3+y^3-3xy=0$ Декарт япроғи юзини 10^{-1} аниқликда топинг.

77 — 100-машқларда келтирилган интеграллар Гаусс туридаги формулалар ёрдамида топилсин ва топилган натижадаги хато қиймати баҳолансин:

77. $\int\limits_1^2 \frac{x\,dx}{(x+3)^2}$, $n=9$.

78. $\int\limits_0^3 \frac{x\,dx}{(3x+1)^3}$, $n=10$.

79. $\int\limits_1^2 \frac{x^2dx}{(5x+1)^2}$, $n=12$.

80. $\int\limits_1^3 \frac{x^3dx}{(2x+3)^4}$, $n=10$.

81. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$, $n=3$.

82. $\int\limits_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx$, $n=10$.

83. $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$, $n=14$.

84. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)}$, $n=10$.

85. $\int\limits_{-0,2}^{0,3} \sqrt{1-x^2}\,x^3dx$, $n=11$.

86. $\int\limits_{-0,5}^{1} \sqrt{(3-x)^3}\,x\,dx$, $n=10$.

87. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2dx}{\sqrt{3{,}61-x_2}}$, $n=10$.

88. $\int\limits_1^{1,5} \frac{dx}{x\sqrt{3{,}61-x^2}}$, $n=10$.

89. $\int\limits_0^2 e^{0,6x}\sin 0{,}8x\,dx$, $n=8$.

90. $\int\limits_0^{\pi/2} e^{0,6x}\cos x\,dx$, $n=8$.

91. $\int\limits_0^1 x\ln(1+x)\,dx$, $n=10$.

92. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$, $n=8$.

93. $\int\limits_{0,0}^{1,5} \cos\ln x\,dx$, $n=10$.

94. $\int\limits_{0,5}^{1,5} \sin\ln x\,dx$, $n=10$.

95. $\int\limits_0^1 \frac{\lg(1+x)}{1+x^2}\,dx$, $n=5$.

96. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)\,dx}{1+x^2}$, $n=4$.

97. $\int\limits_0^{1/2} \frac{\arcsin x\,dx}{x}$, $n=10$.

98. $\int\limits_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg}x}{x}\,dx$, $n=10$.

99. $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}x}{1+x}\,dx$, $n=10$.

100. $\int\limits_0^{\pi/4} \ln\cos x\,dx$, $n=8$.

101 — 114-машқларда келтирилган интеграллар Гаусс туридаги формулалар ёрдами билан ε аниқликда топилсин (ҳисоблашларда ЭҲМ дан фойдаланилсин):

101. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{1+x^2}\,dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

102. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+x)e^{-x^2}}{2+x}\,dx$, $\varepsilon=10^{-4}$.

103. $\int\limits_0^{1/3} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx,\ \varepsilon=0{,}5\cdot10^{-3}$. 104. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx,$

$\varepsilon = 0{,}5\cdot 10^{-3}$.

105. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(e^{0,4x}+1{,}5)},\ \varepsilon = 10^{-5}$. 106. $\int\limits_0^1 \sqrt{x}\,\sin x^2dx,$

$\varepsilon = 10^{-8}$.

107. $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,e^{-x}\,dx,\ \ \varepsilon = 10^{-6}$. 108. $\int\limits_0^1 \sqrt{x}\,e^{x^2}\,dx,$

$\varepsilon = 10^{-4}$.

109. $\int\limits_0^1 \sqrt{x}\,e^{-x^2}dx,\ \varepsilon = 10^{-4}$. 110. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\sin x^2dx,\ \varepsilon=10^{-3}$.

111. $\int\limits_{-1}^1 \frac{x\arcsin x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx.\ \varepsilon = 0{,}5\cdot10^{-8}$. 112. $\int\limits_{-1}^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$

$\varepsilon = 10^{-5}$.

113. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}},\ \ \varepsilon = 10^{-5}$. 114. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^2(1-x)^2}},\ \varepsilon=10^{-5}$.

115—138-машқларда берилган хосмас интеграллар ε гача аниқликда ҳисоблансин:

а) Чексиз чегарали интеграллар:

115. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4},\ \ \varepsilon = 1\cdot10^{-3}$. 116. $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^8}}\,dx,$

$\varepsilon = 1\cdot10^{-6}$.

117. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)},\ \varepsilon = 0{,}5\cdot10^{-6}$. 118. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^8)}\,dx,$

$\varepsilon = 1\cdot10^{-2}$.

119. $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx,\ \varepsilon = 0{,}5\cdot10^{-1}$. 120. $\int\limits_0^{+\infty} x^3e^{-x^2}\,dx,$

$\varepsilon = 0{,}5\cdot10^{-1}$.

121. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-3x}\cos 0{,}8x\,dx,\ \varepsilon=1\cdot10^{-6}$. 122. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}x}{x^2}\,dx,$

$\varepsilon = 1\cdot10^{-6}$.

123. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2},\ \varepsilon = 1\cdot10^{-6}$. 124. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx,\ \varepsilon=1\cdot10^{-6}$.

б) $[a, b]$ интеграллаш оралиғи чекли бўлиб, унда $f(x)$ функция фақат битта нуқта атрофида чегараланмаган:

125. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \varepsilon = 1\cdot10^{-6}$. 126. $\int\limits_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}},\ \varepsilon = 1\cdot10^{-6}$.

127. $\int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2x},\ \varepsilon = 1\cdot10^{-6}$. 128. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}},\ \ \varepsilon = 1\cdot10^{-6}$.

129. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}},\ \varepsilon = 1\cdot10^{-6}$. 130. $\int\limits_{-9}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}\,dx}{x^3},$

$\varepsilon = 1\cdot10^{-5}$.

131. $\int\limits_0^1 \ln x\cdot\ln(1+x)\,dx,\ \varepsilon=10^{-4}$. 132. $\int\limits_0^1 (1-x)^{-1}\ln x dx,$

$\varepsilon = 10^{-3}$.

133. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\ln xdx}{(1+x^2)^3},\ \ \varepsilon = 10^{-4}$. 134. $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin xdx,\ \varepsilon = 10^{-3}$.

135. $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ \ \varepsilon = 10^{-3}$. 136. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(25+x^2)(1+x^2)},$

$\varepsilon = 10^{-4}$.

137. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{3x}+1},\ \varepsilon = 10^{-2}$. 138. $\int\limits_0^1 \frac{x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}}{1+x^2}dx,\ \varepsilon=10^{-4}$.

139 — 142-машқларда кўрсатилган функцияларнинг олтита ўнли ишорали жадваллари тузилсин ва графиклари ясалсин (ЭҲМ дан фойдаланинг):

139. $F(x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{\ln t}$ (интеграл логарифм), $x=0\ (0{,}01)\ 0{,}5$.

140. $F(x) = -\int\limits_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt$ (Эйлер дилогарифми), $x = 0\ (0{,}01)\ 1$.

141. $F(x) = -\int\limits_0^x \ln\cos t\, dt$ (Лобачевский функцияси), $x = 0 \left(\frac{\pi}{36}\right) \frac{\pi}{2}$.

142. $F(x) = \int\limits_0^x \ln \frac{1+t}{1-t} \frac{dt}{t}$, $x = 0\ (0{,}01)\ 1$.

143 — 145- машқларда берилган каррали интеграллар, трапециялар, Симпсон ва Гаусс формулаларини такрор қўлланиш усулидан фойдаланиб ҳисоблансин (бунда n_x ва n_y лар x ва y бўйича олинган тугунлар сони):

143. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}\, dy$, $n_x = n_y = 8$.

144. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{y\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$, $n_x = n_y = 6$.

145. $\int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} x \sin(x+y)\, dx dy$.

146 — 148- машқларда берилган каррали интеграллар Люстерник — Диткин кубатур формуласи қўлланилиб ҳисоблансин:

146. $I = \iint\limits_{\Omega} (x^2 + 4y^2 + 9)\, dxdy$, $\Omega: x^2 + y^2 \leqslant 4$.

147. $I = \iint\limits_{\Omega} (x + xy - x^2 - y^2)\, dxdy$, $\Omega: 0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

148. $I = \iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 - 4x - 4y + 10)\, dxdy$, $\Omega: x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$ (эллипс билан чегараланган соҳа, чегараси билан).

149 — 152- машқларда берилган каррали интеграллар Монте — Карло усули қўлланилиб ҳисоблансин:

149. $\iint\limits_{\Omega} e^{\frac{x}{y}}\, dxdy$, Ω — парабола ($y^2 = x$) ва $x = 0$, $y = 1$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли учбурчак.

150. $I = \iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} + 2)\ dxdy$, $\Omega: 0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$ кесмалар билан чегараланган квадрат.

151. $I = \iiint\limits_{\Omega} (x + y - z + 10)\, dxdydz$, $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 < 3$.

152. $I = \iiint\limits_{\Omega} (x + y + z)\, dxdydz$, $\Omega: x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$, $z \geqslant 1$, $x \leqslant 3$, $y \leqslant 3$, $z \leqslant 3$.

7-ЛАБОРАТОРИЯ ИШИ

1-топшириқ: Ушбу $I = \int\limits_a^b \frac{xe^{mx}\, dx}{(1+mx)^2}$, $m = 0{,}6 + 0{,}1k$ интеграл трапециялар ва Симпсон квадратура формулалари қўлланилиб, ε аниқликда ҳисоблансин:

Вар.	a	b	k	ε	Вар.	a	b	k	ε
1	0,1	2,1	−3	10^{-3}	16	0,3	1,8	−5	10^{-4}
2	0,2	1,7	−8	10^{-2}	17	−0,4	1,6	−12	10^{-4}
3	0,3	2,2	−10	10^{-2}	18	−0,3	2,7	10	10^{-3}
4	0,1	3	8	10^{-3}	19	−1	1,2	2,4	10^{-4}
5	0,4	2,4	0,2	10^{-3}	20	0,2	2,4	−8	10^{-3}
6	0,5	2,3	0	10^{-4}	21	0,3	2,6	−9	10^{-2}
7	0,5	2,1	−4	10^{-2}	22	0,4	3,2	3,4	10^{-2}
8	0,2	1,8	−10	10^{-3}	23	0,3	3	−8	10^{-3}
9	0,3	2,2	3	10^{-3}	24	−0,2	2,1	−10	10^{-3}
10	0,4	1,9	1	10^{-2}	25	0,1	2,8	−14	10^{-4}
11	0,[illegible]	1,6	−2	10^{-4}	26	−0,1	1,9	−5	10^{-4}
12	−0,2	1,8	10	10^{-3}	27	0,4	2,2	10	10^{-3}
13	1	2,8	8	10^{-3}	28	0,3	2,3	8	10^{-3}
14	0,4	3,2	10	10^{-2}	29	0,1	2,6	8	10^{-3}
15	0,3	3,2	−5	10^{-3}	30	−0,2	2	4,4	10^{-4}

2-топшириқ: Қуйидаги беш интегралдан вариантларда кўрсатилган учтаси Гаусс типидаги квадратур формулалардан фойдаланиб, тўртта ишончли рақамгача аниқликда ечилсин (n — тугунлар сони):

$$I_1 = \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{1+\cos^2\alpha x}, \quad I_2 = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} f(x)\,dx,$$

$$I_3 = \int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x} q(x)\,dx,$$

$$I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{a+x} e^{-x^2}\,dx \quad (a = 1,0 + 0,25k),$$

$$I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+bx^4}} \quad (b = 0,2 + 0,1m).$$

Вар №	I_1				I_2	I_3		I_4	I_5
	a_1	b_1	α	n	$f(x)$	α	$q(x)$	k	m
1	0,1	2,1	−0,3	6	x^3	1	$\sin 3x$		
2	0,3	3,2	0,7	5	$1/x$	0	$\cos^4 x$		
3	1,8	2,8	1,1	5	$1/x^2$	1	$\mathrm{cso}4x$		
4	0,4	2,2	0,8	5	$1/x^3$	0	$\ln x$		
5	−0,8	2,1	4	6	x	1	$1/(1-3x)^2$		
6	0,3	1,8	3,2	6	x^4				
7	0,2	1,7	0,9	6	$1-x^2$			1	
8	0,4	1,9	2,1	6	$x^2/(1-x^2)$			2	
9	−0,4	1,5	−2,2	6	$x^3/(1-x^2)$			3	
10	+0,4	1,3	2,2	5	$1/(x(1-x^2))$			4	
11	0,3	2,2	−1	5	$1/(x^2(1-x^2))$			5	
12	0,2	1,8	−4,2	5	$1/(x^3(1-x^2))$			6	
13	0,5	2,4	2,2	5	$x^2(1-x^2)$			7	
14	−0,9	1,7	1,4	6	$x/(1-x^2)$			8	
15	−0,5	1,9	1,8	5	$x^3(1-x^2)$			9	
16	−0,7	2,4	2,2	6	$(1-x^2)^2$			10	
17	0,8	2,8	2,8	5	$x(1-x^2)^2$				0
18	0,4	3,2	3,0	5	$x^2(1-x^2)^2$				1
19	0,4	3,6	2,4	5	$x^3(1-x^2)^2$				2
20	0,3	2,4	2,6	5	$(1+x^3)^{-1}$				3
21	0,7	2,8	2,8	5	$(1+x^2)^{-1}$				4
22	−0,2	2,4	2,6	6	$(1+x^3)^{-2}$				5
23	0,1	2,2	2,4	6	$(1+x^2)^{-1/3}$				6
24	0,2	2,5	3,2	6	$(1+x^2)^{-3}$				7
25	0,2	2,6	−4	5	e^{3x}				8
26	0,5	2,9	−0,8	5	$(1+x^2)^{-4}$				9
27	0,4	3,2	3,1	5	$(1+x^2)^{-5}$				10
28	0,3	2,8	2	5	$(1+x^2)^{-2/3}$				11
29	−0,5	2,2	2,2	5	$(1+x^2)^{-3/4}$				12
30	−0,8	2,4	3,2	5	$\ln^2 x$				13
									14

8-боб. ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН КОШИ МАСАЛАСИНИ СОНЛИ ЕЧИШ УСУЛЛАР

Кетма-кет дифференциаллаш усули. Агар

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), & (1)\\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-)} & (2)\end{cases}$$

бошланғич масалада кўрсатилган тенглама учун Коши теоремаси шартлари бажарилса, яъни f функция $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ бошланғич нуқта атрофида аналитик бўлса, изланаётган $y = y(x)$ ечим $x = x_0$ атрофида Тейлор қатори кўринишида берилади:

$$y(x) = y_0 + \frac{y_0'}{i!}(x-x_0) + \ldots + \frac{y_0^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n + \ldots =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_0^{(n)}}{i!}(x-x_0)^i \qquad (3)$$

(3) тенгликда $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ коэффициентларгина (бошланғич шарт қийматлари) маълум. Қолган $y_0^{(n)}, y_0^{(n+1)}, \ldots$ коэффициентларни аниқлаш учун берилган тенглама дифференциалланиб, ҳосил қилинган тенгликда $y^{(n)}$ ҳосила ўрнига унинг f ифодаси қўйилади: $y^{(n+1)} = f_1(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$; энди бу тенглик дифференциалланади ва яна $y^{(n)}$ ўрнига f қўйилади: $y^{(n+2)} = f_2(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ ва ҳоказо; ҳосил қилинган $y^{(n)}, y^{(n+1)}, y^{(n+2)}, \ldots$ тенгликларга (2) бошланғич шартлар қўйилиб, $y_0^{(n)}, y_0^{(n+1)}, \ldots$ ҳисобланади. Агар $|x-x_0|$ катталик (3) қаторнинг яқинлашиш радиусидан ошмаса, $n \to +\infty$ да $y(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{y^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$ тақрибий ечим хатоси нолга интилади.

1-мисол. Ушбу $y'' = xyy'$, $y'(0) = y(0) = 1$ бошланғич масала ечими даражали қатор кўринишида топилсин. Ечимнинг $y(-0,5)$ қийматини $\varepsilon = 0,001$ аниқликда ҳисоблаш учун қатор неча ҳад билан олиниши керак?

Ечиш: Қуйидагиларга эга бўламиз:

1) $y''(0) = 0 \cdot y(0) \cdot y'(0) = 0$; 2) $y''' = yy' + xyy'' + x(y')^2$, $y'''(0) = 1$; 3) $y^{(4)} = 2(y')^2 + 2yy'' + xy'y'' + xyy''' + 2xy'$, $y^{(4)}(0) = 2$; 4) шу тартибда $y^{(5)}(0) = 3, \ldots, y^{(n)}(0) = n-2, \ldots$; 5) изланаётган ечим;

$$y = 1 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{3x^5}{5!} + \ldots;$$

6) бу қатор $x = -0,5$ нуқтада $\frac{x^3}{3!}$ ҳадидан бошлаб ишораси алмашинувчи сонли қатордан иборат, унинг ҳадлари абсолют қиймат бўйича монотон камаяди:

$$\left|\frac{nx^{n+2}}{(n+2)!} : \frac{(n+1)x^{n+3}}{(n+3)!}\right| = \left|\frac{n(n+3)}{(n+1)x}\right| > 1, \ |x| = 0,5,$$

ҳамда $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{nx^{n+2}}{(n+2)!}\right| = 0$. Бундай қаторда олдинги n та ҳадини қолдириш билан чегараланилса, қолдиқ: $|R_n| = |S - S_n| < |a_{n+1}| = \frac{(n+1)|x^{n+3}|}{(n+3)!}$, $|x| = 0,5$. Биз $|R_n| < \varepsilon$ бўлиш шартидан фойдалгнамиз:

$n = 1$ да $|R_1| = \frac{2 \cdot 0,5^4}{4!} = 0,0052 > 0,001$ га, $n = 2$ да эса $|R_2| = 0,0004 < 0,001$ га эга буламиз. Бунга қараганда $y(-0,5)$ қийматини 0,001 гача аниқликда олиш учун $y(x)$ қаторида олдинги $1 + x$ га яна иккита ҳад қўшилиши кифоя қилади:

$$y(x) \approx 1 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!}.$$

2-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} y'(x) = y \cos x - z \sin x, \\ z'(x) = y \sin x + z \cos x, \end{cases}$$

$$x_0 = 0, \ y_0 = y(0) = 1, \ z_0 = z(0) = 0$$

бошланғич масала ечилсин ва $[0; 0,2]$ оралиқда $h = 0,05$ қадамда $1 \cdot 10^{-3}$ аниқликдги ечим қийматлари жадвали тузилсин.

Ечиш: Ечимни

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 + \frac{y_0'}{1!}x + \frac{y_0''}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y_0^{(k)}}{k!}x^k + \ldots \\ z(x) &= z_0 + \frac{z_0'}{1!}x + \frac{z_0''}{2!}x^2 + \ldots + \frac{z_0^{(k)}}{k!}x^k + \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

даражали қаторлар кўринишида излаймиз. Номаълум y_0', z_0', y_0'', ... қийматларни қуйидагича аниқлаймиз:

1) берилган системага $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $z_0 = 0$ бошланғич қийматларни қўйсак, $y_0' = 1$, $z_0' = 0$ ҳосил бўлади;

2) системани x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\begin{cases} y''(x) = -(y + z')\sin x - (z - y')\cos x, \\ z''(x) = -(z - y')\sin x + (y + z')\sin x \end{cases} \tag{5}$$

ва бу ифодаларга маълум қийматларни қўйиб, $y_0'' = 1$, $z_0'' = 1$ ни топамиз. Энди (5) системани дифференциаллаймиз ва шу тартибда кетма-кет дифференциаллашлар ва $y'''(x)$, $z'''(x)$, $y^{IV}(x)$, ... ифодаларига маълум қийматларни қўйиш йўли билан $y_0''' = -0$, $z_0''' = 3$, $y_0^{IV} = -6$, $z^{IV} = 5$, $y_0^{(5)} = -23$, $z^{(5)} = -5$, ... қийматларни аниқлаймиз.

3) топилган қийматлар (4) тенгликларга қўйилса, изланаётган ечим ифодалари олинади:

$$y(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{23}{120}x^5 + \ldots, \tag{6}$$

$$z(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{5}{120}x^5 + \ldots; \tag{7}$$

4) ечимнинг $[0; 0,2]$ оралиқдаги қийматларини $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-3}$ аниқликда олиш учун ҳар қайси $y(x)$ ва $z(x)$ функцияларни қаторларга ёйиб, уларда қанчадан ҳад қолдирилиши кифоя қилади? Изланаётган n сони $|R_n(x)| < \varepsilon$ тенгсизлик бўйича аниқланиши мумкин, бунда $R_n(x)$ — қаторнинг қолдиқ ҳади. Қаторларнинг маълум хоссаларидан (хусусан, Вейерштрасс теоремасидан) фойдаланайлик. $y(x)$ ва $z(x)$ қаторлари учун

$$a = 1 + 0,2 + 0,2^2 + 0,2^3 + \ldots \tag{8}$$

қатор мажоранта вазифасини бажара олади. $y(x)$ ва $z(x)$ қаторларнинг қолдиқ ҳадлари a нинг мос қолдиқ ҳадидан кичик. a қатор қолдиқ ҳади $\frac{0,2^{n+1}}{1-0,2}$ га тенг. У ҳолда $|R_n(x)| < \frac{0,2^n}{4} < 1 \cdot 10^{-3}$. Бундан $n > 3$ бўлишини аниқлаймиз. Демак, ечим тўртинчи даражали кўпҳадлар кўринишида олиниши мумкин:

$$y(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4, \quad z(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{24}x^4.$$

5) y ва z нинг талаб қилинаётган қийматларини (7) формула бўйича ҳисоблаймиз. Бунда оралиқ ҳисоблашлар $1 \cdot 10^{-6}$ аниқликда бажарилиши мумкин. Охирги натижа $1 \cdot 10^{-4}$ аниқликда яхлитланади:

x	0	0,05	0,10	0,15	0,2
y	1	1,0518	1,1050	1,1611	1,2196
z	0	0,0251	0,0505	0,0767	0,1044

Аниқмас коэффициентлар усули. Агар бошланғич шартлар билан берилган $\varphi_0(x)\, y^{(n)}(x) + \varphi_1(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + \varphi_n(x)\, y(x) = f(x)$, $\varphi_0(x) \neq 0$ чизиқли дифференциал тенгламанинг $\varphi_i(x)$ ўзгарувчан коэффициентлари ва $f(x)$ функция бирор соҳада $x - x_0$ нинг даражалари бўйича яқинлашувчи қаторларга ёйилса, изланаётган $y(x)$ ечим шу соҳада яқинлашувчи $y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots$ даражали қатор кўринишида тасвирланади. Номаълум a_i коэффициентларни аниқмас коэффициентлар усули бўйича топиш мумкин. Масалан,

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = r(x), \quad x_0 = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y_0'(0) = y_0' \tag{9}$$

бошланғич масалани ечиш талаб қилиниб, $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ коэффициентлар $x_0 = 0$ нуқта атрофида аналитик функциялардан иборат бўлсин:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n \tag{10}$$

Ечим $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ даражали қатор кўринишида изланади. c_i коэффициентларни топиш учун бу тенгликни икки марта дифференциаллаб, (9) тенгламага қўямиз:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, c_n x^{n-2},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n \tag{11}$$

(11) тенгламадаги кўпайтиришлар бажарилиб, ўхшаш ҳадлар

коэффициентлари тенглаштирилса, қуйидаги система ҳосил бўлади:

$$\begin{array}{l|l} x^0 & 2c_2 + c_1 p_0 + c_0 q_0 = r_0, \\ x^1 & 3\cdot 2c_3 + 2c_2 p_0 + c_1 p_1 + c_2 q_0 + c_0 q_1 = r_1, \\ x^2 & 4\cdot 3c_4 + 3c_3 p_0 + 2c_2 p_1 + c_1 p_2 + c_2 q_0 + c_1 q_1 + c_0 q_2 = r_2, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n & (n+2)(n+1)\, c_{n+2} + Q(c_{n+1}, c_n, \ldots, c_1, c_0) = r_n, \end{array} \tag{12}$$

бунда Q ифода $c_0, c_1, \ldots, c_{n+1}$ аргументларнинг чизиқли функцияси. c_0 ва c_1 бошланғич шартлар бўйича аниқланади: $c_0 = y(0) = y_0$, $c_1 = y'(0) = y_0'$. Қолган c_i коэффициентлар (12) системадан топилади.

3-мисол. Ушбу $y'' + y' + x^2 y = \dfrac{x}{1-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ бошланғич масала ечилсин.

Ечиш: $p(x) = 1$, $q(x) = x^2$, $r(x) = \dfrac{x}{1-x} = x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$, бундан $|x| < R = 1$. Ечимни $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$ кўринишида излаймиз. Бу ифоданинг ҳосилаларини тузамиз:

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \ldots + n c_n x^{n-1} + \ldots,$$

$$y'' = 2c_2 + 3\cdot 2c_3 x + 4\cdot 3c_4 x^2 + \ldots + n(n-1)\, c_n x^{n-2} + \ldots.$$

y, y', y'', $z(x)$ қаторларни берилган тенгламага қўямиз ва аниқмас коэффициентлар усулидан фойдаланиб, ушбу системани ҳосил қиламиз:

$$\left|\begin{array}{l} c_1 + 2c_2 = 0, \\ 2c_2 + 3\cdot 2c_3 = 1, \\ c_0 + 3c_3 + 4\cdot 3c_4 = 1, \\ c_1 + 4c_4 + 5\cdot 4c_5 = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

$c_0 = y(0) = 0$, $c_1 = y'(0) = 1$. Қолган коэффициентларни системадан бирма-бир аниқлаймиз: $c_2 = -\dfrac{1}{2}$, $c_3 = \dfrac{1}{3}$, $c_4 = 0$, $c_5 = 0$, $\ldots$.

Натижада: $y \approx x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3$. Ечим хатосини баҳолаш мақсадида y, y', y'' ифодаларни берилган тенгламага қўямиз ва тенгликнинг иккала томонидаги ифодалар фарқи ε ни аниқлаймиз:

$$\varepsilon = (-1 + 2x) + (1 - x + x^2) + \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^5\right) - \frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^5 - \left(x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{1-x}\right) = x^4\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{1-x}\right), \quad |x| < 1.$$

Хусусан, $x = 0{,}3$ учун ечим қиймати ва хато катталиги қуйидагича бўлади: $y\,(0{,}3) \approx 0{,}3 - \frac{1}{2}\,0{,}09 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}027 = 0{,}3047 \approx 0{,}30,\ \varepsilon = 0{,}015.$

Итерация усули. Ушбу

$$y' = f\,(x,\ y),\ y\,(x_0) = y_0 \tag{13}$$

Коши масаласини ечиш талаб қилинсин. Агар бунда Пикар теоремаси шартлари бажарилган бўлса, чунончи, $f\,(x,\ y)$ функция бирор $R\,\{\,|x - x_0| \leqslant a, |\ y - y_0| \leqslant b\}$ соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлиб, унга нисбатан $|f\,(x, y_1) - f\,(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|$ Липшиц шарти бажарилган бўлса, у ҳолда изланаётган $y = y\,(x)$ интеграл чизиқ $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$ оралиқда $y - y_0 = -M\,(x - x_0)$ ва $y - y_0 = M\,(x - x_0)$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчакда ётади, бунда $h = \min\left(a,\ \frac{b}{M}\right)$, $M = \max|f\,(x,\ y)|$.

(13) муносабатларни $\int\limits_{x_0}^{x} y'\ dx = y\,(x) - y\,(x_0)$ ёки $y\,(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\,(x,\ y)\,dx$ кўринишида қайтадан ёзамиз. Кейинги тенглик бўйича $y = y\,(x)$ ечимга яқинлашувчи $y = y^{[n]}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, функциялар кетма-кетлиги аниқланади:

$$y^{[n]}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\,(x,\ y^{[n-1]}\,(x))\,dx,\quad \varepsilon_n(x) \leqslant L^n\ M\ \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)\,!}.$$

Бошланғич яқинлашиш $y^{[0]}\,(x)$ сифатида ихтиёрий функция жумладан, $y = y_0$ бошланғич қиймат олиниши мумкин.

Итерация усули бўйича $\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}\,(x,\ \vec{y})$ $(\vec{y}\,(x_0) = \vec{y}_0)$ системани ечиш учун дастлаб бу система интеграл шаклда қайтадан ёзилади:

$$\vec{y} = \vec{y}_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}\,(x,\ \vec{y})\,dx,\ \ \vec{y}^{[0]} = \vec{y}_0,\ \text{бунда}\ \vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}.$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}\,dx = \begin{bmatrix} \int\limits_{x_0}^{x} f_1\ dx \\ \cdots\cdots \\ \int\limits_{x_0}^{x} f_n\,dx \end{bmatrix}.$$

Яқинлашишлар $\vec{y}^{[i]} = \vec{y}_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}\,(x,\ \vec{y}^{[i-1]})\ dx$ формула бўйича топилади.

Усулни n-тартибли дифференциал тенгламага нисбатан қўллаш учун бу тенглама система кўринишига келтирилиши керак.

4-мисол. Ушбу $y' = x + y$, $y\,(0) = 2$ масала ечимининг $R\,\{0 \leqslant x - x_0 \leqslant 1,\ |y - y_0| \leqslant 1\}$ соҳада $0{,}3\cdot 10^{-3}$ аниқликдаги қийматини берувчи яқинлашиши топилсин.

Ечиш. Равшанки, $f\,(x,\ y) = x + y$ функция R соҳада аниқланган ва узлуксиз. R соҳа чегаралари $0 \leqslant x - 0 \leqslant 1$, $|y - 2| \leqslant 1$ дан ёки $0 \leqslant x \leqslant 1, 1 \leqslant y \leqslant 2$ дан иборат. Қуйидагиларни топамиз:

$M = \max|f\,(x, y)| = \max|x + y| = 3$, $L = \max|f'_y\,(x, y)| = \max|1| = 1$, $h = \min\left(1;\ \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$, $\varepsilon_{\max} = \max\limits_{(0;\ 1/3)} |y - y^{[n]}| \leqslant 3\cdot 1^n \cdot \frac{3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n\,!} < 0{,}3\cdot 10^{-3}$, $3^n\cdot n\,! > 1\cdot 10^4$, $n \geqslant 5$. Демак, изланаётган яқинлашиш камида $n = 5$-тартибли бўлиши керак. Уни топамиз: $y^{[0]} = y\,(0) = 2$, $y^{[1]} = 2 + \int\limits_{0}^{x}(x + 2)\,dx = 2 + 2x + \frac{x^2}{2!}$, $y^{[3]} = 2 + \int\limits_{0}^{x}(x + y^{[1]})\,dx = 2 + 2x + 3\cdot\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}, \ldots, y^{[5]} = 2 + 2x + 3\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right) + \frac{x^6}{6!}$.

Рунге — Кутта усуллари. Юқорида биз Коши масаласини ечишда қўлланиладиган аналитик усуллардан айримларини кўрсатиб ўтдик. Энди усулларнинг бошқа тури — Рунге — Кутта усуллари гуруҳи ҳақида маълумот берамиз. Бу усуллар қўлланилганида $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ Коши масаласи $y(x)$ хусусий ечимининг h қадам билан тенг узоқликда ётган x_{j+1} $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ нуқталарга мос y_{j+1} тақрибий қийматлари

$$y_{j+1} = y_j + \Delta y_j \tag{14}$$

формула бўйича изланади, бунда Δy_j орттирма $K_i(h) = hf(\xi_i, \eta_i)$ миқдорларнинг ушбу чизиқли комбинацияларидан иборат:

$$\Delta y_j = \sum_{i=1}^{q} p_i K_i(h), \tag{15}$$

бунда

$$\xi_i = x_0 + \alpha_i h, \; \eta_i = y_0 + \sum_{m=1}^{i-1} \beta_{im} K_m(h), \; \alpha_1 = 0,$$

$$K_1(h) = hf(x, y),$$

$$K_2(h) = hf(x + \alpha_2 h, \; y + \beta_{21} K_1(h),$$

$$K_3(h) = hf(x + \alpha_3 h, \; y + \beta_{31} K_1(h) + \beta_{32} K_2(h)),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K_q(h) = hf(x + \alpha_q h, \; y + \beta_{q1} K_1(h) + \ldots + \beta_{q,q-1} K_{q-1}(h)).$$

(14) формула қўлланилганда вужудга келадиган $\varepsilon(x)$ хато Рунге қоидаси бўйича баҳоланиши мумкин. Унга мувофиқ x нинг ҳар қайси қийматига мос $y(x)$ қиймати h ва H қадамлар билан кетма-кет ҳисобланади, сўнг қуйидаги формуладан фойдаланилади (унда $H = kh$):

$$\varepsilon(x) \leqslant \frac{|y_h(x) - y_H(x)|}{|h^s - H^s|} \cdot h^s, \tag{16}$$

бунда s — (14) формуланинг бир қадамда h га нисбатан аниқлик тартиби (ёки даражаси), унинг учун $\Delta y_i \approx y(x_{i+1}) - y(x_i)$ тақрибий тенглик хатоси h^{s+1} тартибли катталикка эга; k — бирор сон.

Усулнинг хусусий кўринишлари:

1) $q = 1$ бўлган ҳол (**Эйлер усули**):

$$y_{j+1} = y_j + hf_j, \quad f_j = f(x_j, y_j). \tag{17}$$

Бу усул қўлланилаётган оралиқда h қадам k марта кичрайтирилса, оралиқ бўйича умумий хато ҳам k марта кичраяди $(s = 1)$. Агар $H = 2h$ қилиб олинса, у ҳолда (16) бўйича

$$\varepsilon(x) \leqslant |y_h(x) - y_H(x)|$$

га эга бўламиз.

2) $q = 2$ бўлган ҳол (Эйлер усулининг аниқлиги яхшиланган модификациялари):

$$y_{j+1} = y_j + p_1 K_1(h) + p_2 K_2(h), \tag{18}$$

бунда $K_1(h) = hf(x_j, y_j)$, $K_2(h) = hf(x_j + \alpha_2 h, \; y_j + \beta_{21} K_1(h))$.

Хусусан, $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $\alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{2}$ бўлганда,

$$y_{j+1} = y_j + hf_{j+\frac{1}{2}} \tag{19}$$

га эга бўламиз. Бу формула қўлланилаётган оралиқда h қадам m марта кичрайтирилса, шу оралиқ бўйича усулнинг жамғарилган хатоси m^2 марта камаяди $(s = 2)$.

Ниҳоят, $q = 4$ бўлган (Рунге — Кутта усули номи билан аталидиган) ҳолда:

$$\Delta y = \frac{1}{6}(K_1(h) + 2K_2(h) + 2K_4(h) + K_4(h)), \tag{20}$$

бунда

$$K_1(h) = hf(x, y), \; K_2(h) = hf\left(x + \frac{h}{2}, \; y + \frac{K_1(h)}{2}\right),$$

$$K_3(h) = hf\left(x + \frac{h}{2}, \; y + \frac{1}{2} K_2(h)\right),$$

$$K_4(h) = hf(x + h, \; y + K_3(h)).$$

Бошланғич шартлар билан берилган

$$\begin{cases} y'(x) = f_1(x, y, z), \; y(x_0) = y_0, \\ z'(x) = f_2(x, y, z), \; z(x_0) = z_0 \end{cases}$$

система (20) формулага асосланиб ечилади:

$$K_{1y}^{(j)} = hf_1(x_j, y_j, z_j) \qquad K_{1z}^{(j)} = hf_2(x_j, y_j, z_j)$$

$$K_{2y}^{(j)} = hf_1\left(x_j + \frac{h}{2}, \; y_j + \frac{K_{1y}^{(j)}}{2}, \; z_j + \frac{K_{1z}^{(j)}}{2}\right) \qquad K_{2z}^{(j)} = hf_2\left(x_j + \frac{h}{2}, \; y_j + \frac{K_{1z}^{(j)}}{2}, \; z_j + \frac{K_{1z}^{(j)}}{2}\right)$$

$$K_{3y}^{(j)} = hf_1\left(x_j + \frac{h}{2},\ y_j + \frac{K_{2y}^{(j)}}{2},\ z_j + \frac{K_{2z}^{(j)}}{2}\right) \qquad K_{3z}^{(j)} = hf_2\left(x_j + \frac{h}{2},\ y_j + \frac{K_{2y}^{(j)}}{2},\ z_j + \frac{K_{2z}^{(j)}}{2}\right) \tag{21}$$

$$K_{4y}^{(j)} = hf_1(x_j + h,\ y_j + K_{3y}^{(j)},\ z_j + K_{3z}^{(j)}) \qquad K_{4z}^{(j)} = hf_2(x_j + h,\ y_j + K_{3y}^{(j)},\ z_z + K_{3z}^{(j)})$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}(K_{1y}^{(j)} + 2K_{2y}^{(j)} + 2K_{3y}^{(j)} + K_{4y}^{(j)}) \qquad z_{j+1} = z_j + \frac{1}{6}(K_{1z}^{(j)} + 2K_{2z}^{(j)} + 2K_{3z}^{(j)} + K_{4z}^{(j)})$$

Юқори тартибли дифференциал тенгламаларни ечиш учун дастлаб улар эквивалент тенгламалар системасига келтирилиши керак. Жумладан, $y'' = f(x, y, y')$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0$ бошланғич масаладаги тенглама $y' = z$, $z' = f(x, y, z)$ тенгламалар системасига келтирилади. Рунге—Кутта усуллари бўйича $y(x)$ ечим учун $h_1 = h$ қадам билан y_i қиймат, $h_2 = 2h$ қадам билан Y_i қиймат аниқланган бўлсин. У ҳолда топилган натижанинг абсолют хатоси $E_i = \frac{|Y_i - y_i|}{(2h)^4 - h^4} \cdot h^4 = \frac{1}{15}|Y_j - y_j|$ бўлади (Рунге қоидаси).

5-мисол. (20) формуладан фойдаланиб, $h = 0{,}2$ қадам билан $y' = \frac{y - x}{y + x}$, $y(0) = 1$ бошланғич масаланинг [0; 1] оралиқдаги ечим қийматлари топилсин.

Ечиш:

5-мисолга $h = 0{,}2$ **Рунге — Кутта усули**

i	x_j	y_j	$K = 0{,}2\frac{y-x}{y+x}$	pK $p = 1, 2, 2, 1$	Ҳисоблашлардан намуналар
0	0	1	0,1	0,2	$K_1^{[0]} = 0{,}2 \cdot \frac{1-0}{1+0} = 0{,}2$
	0,1	1,1	0,1667	0,3334	$x + \frac{h}{2} = 0 + 0{,}1 = 0{,}1$
	0,1	1,0833	0,1662	0,3324	$y_0 + \frac{K_2^{[0]}}{2} = 1 + \frac{0{,}1667}{2} = 1{,}0833$
	0,2	1,1662	0,1414	0,1414	$y_0 + K_3^{[0]} = 1 + 0{,}1622 = 1{,}1662$
				0,1678	$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(0{,}2 + 0{,}3334 + 0{,}3324 + 0{,}1414) = 0{,}1678$

i	x_j	y_j	$K = 0{,}2\frac{y-x}{y+x}$	PK $p = 1, 2, 2, 1$	Ҳисоблашлардан намуналар
1	0,2	1,1678	0,1415	0,1415	$K_1^{[1]} = 0{,}2 \cdot \frac{1{,}1678 - 0{,}2}{1{,}1678 + 0{,}2} = 0{,}1415$
	0,3	1,2386	0,1220	0,2440	$y_1 + \frac{K_1^{[1]}}{2} = 1{,}1678 + 0{,}0708 = 1{,}2386$
	0,3	1,2288	0,1215	0,2430	$y_1 + \frac{K_2^{[1]}}{2} = 1{,}1678 + \frac{1{,}1220}{2} = 1{,}2288$
	0,4	1,2893	0,1053	0,1053	$y_1 + K_3^{[1]} = 1{,}1678 + 0{,}1215 = 1{,}2893$
				0,1223	$\Delta y_1 = \frac{1}{6}(0{,}1415 + 0{,}2440 + 0{,}2430 + 0{,}1053) = 0{,}1223$
2	0,4	1,2901	0,1053	0,1053	$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1{,}1678 + 0{,}1223 = 1{,}2901$
	0,5	1,3428	0,0915	0,1829	
	0,5	1,3359	0,0906	0,1812	
	0,6	1,3812	0,0789	0,0789	
				0,0913	$\Delta y_2 = \frac{1}{6}(0{,}1053 + 0{,}1829 + 0{,}1812 + 0{,}0789) = 0{,}0913$
3	0,6	1,3815	0,0790	0,0790	
	0,7	1,421	0,0680	0,1360	
	0,7	1,4155	0,0676	0,1352	
	0,8	1,4491	0,0556	0,0556	
				0,0678	$\Delta y_3 = \frac{1}{6}(0{,}0790 + 0{,}1360 + 0{,}1352 + 0{,}0556) = 0{,}0678$
4	0,8	1,4493	0,0577	0,0577	
	0,9	1,4782	0,0486	0,0972	
	0,9	1,4736	0,0483	0,0966	
	1,0	1,4976	0,0398	0,0398	
				0,0486	$\Delta y_4 = 0{,}0486$
5	1,0	1,4979			

Натижа: $y = (0) = 1$, $y(0{,}2) = 1{,}1678$, $y(0{,}4) = 1{,}2901$, $y(0{,}6) = 1{,}3815$, $y(0{,}8) = 1{,}4493$, $y(1) = 1{,}4979$. Ечим қийматларининг қандай аниқликка эга эканини билиш мақса дида ҳисоблашларни $h = 0{,}4$ қадам билан такрор бажарамиз ва уларни янги натижалар билан солиштирамиз:

5-мисолга $h = 0{,}4$ **Рунге — Кутта усули**

i	x_i	y_i	$K = 0{,}4(y-x)/(y+x)$	pK, $p = 1, 2, 2, 1$
0	1	1	0,4	0,4
	0,2	1,2	0,2857	0,5714
	0,2	1,1427	0,2809	0,5618
	0,4	1,2809	0,2091	0,2091
				$\sum / 6 = 0{,}2904$
1	0,4	1,2904	0,2107	0,2107
	0,6	1,3958	0,1640	0,3280
	0,6	1,4778	0,1694	0,3388
	0,8	1,6472	0,1384	0,1384
				$\sum / 6 = 0{,}1593$
2	0,8	1,4497		

$y(0{,}4)$ ва $y(0{,}8)$ нинг олдин ва ҳозир топилган қийматлари $1 \cdot 10^{-4}$ разряд рақамлари билан фарқ қилмоқда. Шунга кўра, умуман, $y(x)$ учун топилган қийматларнинг чегаравий абсолют хатолари $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ га тенгдир.

6-мисол. $y(2) = 1$ ва $y'(2) = 0$ бошланғич шартлар билан берилган $y'' = \frac{y - xy'}{1 - x}$ дифференциал тенглама ечимининг [2; 3] оралиқдаги қийматлари жадвали $h = 0{,}2$ қадам билан тузилсин.

Ечиш: $y' = z$ (белгилаш), $z(2) = 0$, $z' = \frac{y - xz}{1 - x}$ системани ҳосил қиламиз ва (21) схемадан фойдаланиб, ҳисоблашларни y ва z га нисбатан параллел бажарамиз:

6-мисолга $i = \overline{1; 4}$, $p = 1, 2, 2, 1$ **Рунге — Кутта усули**

i	x_i	y_i	z_i	K_{iy}	K_{iz}	pK_{iy}	pK_{iz}
0	2	1	1	0	—0,2	0	—0,2
	2,1	1	—0,1	—0,02	—0,22	—0,04	—0,44
	2,1	0,99	—0,11	—0,022	—0,222	—0,044	—0,444
	2,2	0,978	—0,222	—0,0444	—0,2444	—0,0444	—0,2444
						—0,0214	—0,2214

давоми

j	x_i	y_i	z_i	K_{iy}	K_{iz}	pK_{iy}	pK_{iz}
1	2,2	0,9786	—0,2214	—0,0443	—0,2443	—0,0443	—0,2443
	2,3	0,9564	—0,3436	—0,0687	—0,2688	—0,1374	—0,5376
	2,3	0,9442	—0,3558	—0,0712	—0,2712	—0,1424	—0,5424
	2,4	0,9074	—0,4926	—0,0985	—0,2985	—0,0985	—0,2985
						—0,0705	—0,2705
2	2,4	0,9081	—0,4919	—0,0984	—0,2984	—0,0984	—0,2984
	2,5	0,8589	—0,6411	—0,1282	—0,3282	—0,2564	—0,6564
	2,5	0,8440	—0,6560	—0,1312	—0,3312	—0,2624	—0,6624
	2,6	0,7769	—0,8231	—0,1646	—0,3646	—0,1646	—0,3646
						—0,1903	—0,3303
3	2,6	0,7778	—0,8222	—0,1644	—0,3644	—0,1644	—0,3644
	2,7	0,6956	—1,0044	—0,2009	—0,4009	—0,4018	—0,8018
	2,7	0,6773	—1,0227	—0,2045	—0,4045	—0,4090	—0,8090
	2,8	0,5733	—1,2267	—0,2453	—0,4453	—0,2453	—0,4453
						—0,2034	—0,4034
4	2,8	0,5744	—1,2256	—0,2451	—0,4451	—0,2451	—0,4451
	2,9	0,4519	—1,4482	—0,2896	—0,4896	—0,5792	—0,9792
	2,9	0,4296	—1,4704	—0,2941	—0,4941	—0,5882	—0,9882
	3	0,2803	—1,7197	—0,3939	—0,5439	—0,3939	—0,5439
						—0,2928	
5	3	0,2816					

Агар ҳисоблашлар $h = 0{,}4$ қадам билан бажарилса, натижада $y(2{,}4) = 0{,}8414$, $z(2{,}4) = -0{,}5651$ қийматлар ҳосил бўлади. Умумий хато қатталигини Рунге қоидаси бўйича баҳолаймиз:

$$E_y = \frac{1}{15} \cdot |0{,}9081 - 0{,}8414| = 0{,}0044 \leqslant 0{,}5 \cdot 10^{-2},$$

$$E_z = \frac{1}{15} |-0{,}5651 + 0{,}4919| = 0{,}00488 \leqslant 0{,}5 \cdot 10^{-2}.$$

Чекли — айирмали усуллар. Адамс усулининг турли вариантлари $y_j - y_{j-1} = h \sum\limits_{i=0}^{m} b_{-i} f_{j-i}$, $y_0 = y(x_0)$, $x_j - x_{j-1} = h$ муносабатда b_{-i} $(i = \overline{0, m})$ коэффициентларни турлича танлаш орқали олинади.

Адамснинг экстраполяция формуласи $(b_0 = 0)$[1]

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{24}(55 f_j - 59 f_{j-1} + 37 f_{j-2} - 9 f_{j-3} + \ldots) \quad (22)$$

ёки

$$y_{i+1} = y_j + \eta_j + \frac{1}{2}\Delta\eta_{j-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{j-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\eta_{j-3}, \quad (23)$$

бунда $\eta_i = hf(x_i, y_i)$, $\Delta^k\eta_{j-k}$ — k-тартибли чекли айирма.

Адамснинг интерполяция формуласи $\left(b_0 = \frac{9}{24}\right)$:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{24}(9f_{j+1} + 19f_j - 5f_{j-1} + f_{j-2} + \ldots) \quad (24)$$

ёки

$$y_{j+1} = y_j + \eta_{j+1} + \frac{1}{2}\Delta\eta_j - \frac{1}{12}\Delta^2\eta_{j-1} + \frac{1}{24}\Delta^3\eta_{j-2},$$

$$\eta_i = hf(x_i, y_i) \quad (25)$$

Ҳисоблаш $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ лардаи иборат бошланғич кесмани (жадвалнинг кириш қисмини) аниқлашдан бошланади. Бунда y_0 бошланғич шарт сифатида берилган, қолган қийматлар бирор қадамли усул билан аниқланади. Шу мақсадда Рунге — Кутта усули қўлланилганида h қадам кейинги ҳисоблашлардагига нисбатан кичик олиниши керак. Сўнг экстраполяция формуласи, кетидан коррекция (тузатиш) мақсадида интерполяция формуласи қўлланилади.

7-мисол. Адамс усули қўлланилиб, $y' = \frac{1}{y^2 - x}$, $y(1) = 0$ дифференциал тенглама ечимининг $x = 1$, 1; 1,2; . . . ; 2 нуқталардаги қийматлари $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$ аниқликда топилсин.

Ечиш: 1) y_0, y_1, y_2, y_3 бошланғич кесмани Рунге — Кутта усули бўйича аниқлаймиз (жадвалларда x ва y дан ташқари қолган қийматлар 10^6 марта ошириб олинган):

7-мисолга **Бошланғич кесмани аниқлаш Рунге- Кутта усули**

i	x_j	y_j	$f = \frac{1}{y_j^2 - x_j}$	$K = 0{,}1\,f$	pK, $p = 1, 2, 2, 1$	Изоҳ
0	1	0	—100000	—10000	—10000	
	1,05	—0,05	—954654	—95465	—190931	$y(1{,}05) = y(1) + \frac{K_1}{2}$
	1,05	—0,047733	—954445	—95445	—190890	$y = (1{,}05) = y(1) + \frac{K_2}{2}$
	1,1	—0,095445	—916683	—91668	—91668	$y(1{,}1) = y(1) + K_3$
			$\Delta y_0 = (\sum pK)/6 = -0{,}095582$			

i	x_j	y_j	$f = \frac{1}{y_j^2 - x_j}$	$K = 0{,}1\,f$	pK, $p = 1, 2, 2, 1$	Изоҳ
1	1,1	—0,095582	—916705	—91671	—91671	$y(1{,}1) = y(1) + \Delta y_0$
	1,15	—0,141418	—884955	—88496	—176991	
	1,15	—0,139830	—884605	—88461	—176921	
	1,2	—0,184043	—857540	—85754	—85754	
				$\Delta y_1 = -0{,}088556$		
2	1,2	—0,184138	—857565	—85757	—85757	
	1,25	—0,227018	—834402	—83440	—166880	
	1,25	—0,225858	—834037	—83404	—166807	
	1,3	—0,267542	—814053	—81405	—81405	
				$\Delta y_2 = -0{,}083475$		
3	1,3	—0,267613				

2) (23) ва (25) формулалардан фойдаланамиз. Оралиқ натижалар қуйидаги жадвалга киритиб борилади. Бошланғич кесма маълумотлари остидан синиқ чизиқ ўтказилган, интерполяция бўйича топилган қийматлар рамкалар ичига ёзилган; $y_j = y_{j-1} + \Delta y_{j-1}$, бунда Δy қиймати (23) ва (25) бўйича топилади:

7-мисолга $\times 10^{-6}$ $h = 0{,}1$ **Адамс усули**

i	x_j	y_j	Δy	$\eta = 0{,}1\,f$	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$
0	1	0	—95582	—100000	8330	—2416	850
1	1,1	—95582	—88556	—91670	5914	—1566	468
2	1,2	—184138	—83475	—85756	4348	—1098	261
3	1,3	—267613	—79570	—81408	3250	—837	161
4	1,4	—347183	—76815	—78158	2413	—676	95
4	1,4	—347185					
5	1,5	—423998	—74789	—75745	1737	—581	46
5	1,5	—425816					
6	1,6	—498787	—73361	—74008	1156	—535	9
6	1,6	—498969					
7	1,7	—572148	—72480	—72852	621	—526	—34
7	1,7	—572164					
8	1,8	—644628	—72126	—72230	95	—560	

j	x_j	y_j	Δy	$\eta=0{,}1\,j$	$\Delta \eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$
8	1,8	—644645					
9	1,9	—716754	—72304	—72136	—465		
9	1,9	—716786					
10	2	—789058		—72601			
10	2	—789106					

Жавоб:

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$y(x)$	0	—0,09558	—0,18414	—0,26761	—0,34718	—0,42400

1,6	1,7	1,8	1,9	2
—0,49880	—0,57215	—0,64463	—0,71676	—0,78906

Милн усулининг моҳияти изланаётган $y(x)$ ечим қийматини олдин тақрибий баҳолаш (прогноз), сўнг бу қийматни тузатишдан (коррекция қилишдан) иборат. Ҳисоблашлар жараёнида $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ бошланғич масала $y(x)$ хусусий ечимининг y_{j-4}, y_{j-3}, y_{j-2}, y_{j-1} қийматлар бўйича y_j қийматни топиш талаб қилинади. Бунинг учун: 1) y_0, y_1, y_2, y_3 қийматлар (бошланғич кесма) аниқланади, бунда y_0 берилган, y_1, y_2, y_3 лар Рунге — Кутта ёки бирор бошқа бир қадамли усул билан топилиши керак; 2) y нинг 1-яқинлашиши ушбу

$$y_j = y_{j-4} + \frac{4h}{3}(2y'_{j-3} - y'_{j-2} + 2y'_{j-1}) \qquad (26)$$

(олдиндан айтиш) формуласи бўйича топилади:

$$y_4^{[1]} = y_0 + \frac{4h}{3}(2y'_1 - y'_2 + 2y'_3);$$

3) $y'_j = f(x_j, y_j^{[1]})$ муносабат бўйича $(y_4^{[1]})' = f(x_4, y_4^{[1]})$ ҳисобланади;

4) y_4 нинг 2-яқинлашиши

$$y_j = y_{j-2} + \frac{h}{3}(y'_{j-2} + 4y'_{j-1} + y'_j) \qquad (27)$$

коррекция формуласи бўйича топилади:

$$y_4^{[2]} = y_2 + \frac{h}{3}(y'_2 + 4y'_3 + (y_4^{[1]})');$$

5) $y_4^{[2]}$ тақрибий қиймат хатоси ҳисобланади:

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{29}\left|y_4^{[2]} - y_4^{[1]}\right|.$$

Агар бунда ε қиймати тайинланган чегарадан ортиқ бўлса, y_4 кичрайтирилган h қадам билан такрор ҳисобланади; 6) энди $y_5^{[1]}$ яқинлашиш, сўнг $y_5^{[2]}$ яқинлашиш ва ε_5 аниқланади ва ҳоказо.

8-мисол. Милн усули қўлланилиб, $x' = 2x + 5z$, $y' = -(1 - \sin t)x - y + 3z$, $z' = -x + 2z$ дифференциал тенгламалар системасининг $x(0) = x_0 = 2$, $y(0) = y_0 = 1$, $z(0) = z_0 = 1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимининг $0 \leqslant t \leqslant 0{,}5$ оралиқдаги қийматлари $h \leqslant \Delta t \leqslant 0{,}1$ қадам билан топилсин.

Ечиш. 1) Бошланғич кесмани Рунге — Кутта усули билан топамиз (асосий жадвал); 2) $j = 0, 1, 2, 3$ учун топилган қийматлар $\vec{A}$ вектор координаталарини ташкил этсин:

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Бу қийматларни берилган системага қўйиб, $\vec{A}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ қийматларни аниқлаймиз; 3) y' тенглама қийматларини ҳисоблаш учун алоҳида 2-ёрдамчи жадвал тузамиз. Жадвалнинг $j = 1, 2, 3$-сатрларини тўлдирамиз; 4) 1-ёрдамчи жадвалнинг $j = 4$ устунларининг $2\vec{A}'_{j-3}$ дан $\vec{A}_{jI}$ гача турган еттита сатр катакларини тўлдирамиз. Бунда $\vec{A}_{jI} = \vec{A}_{j-4} + \frac{0{,}4}{3}(2\vec{A}'_{j-3} - \vec{A}'_{j-2} + 2\vec{A}'_{j-1})$; 5) $j = 4$ устунларининг қолган катакларини тўлдирамиз, бунда $\vec{A}_{jII} = \vec{A}_{j-2} + \frac{0{,}1}{3}(\vec{A}'_{j-2} + 4\vec{A}'_{j-1} + \vec{A}'_{jI})$. Топилган $\vec{A}_{jI}$, яъни $x_4 = 2{,}23152$, $y_4 = 1{,}07268$, $z_4 = 0{,}92106$ ва $\vec{A}_{jII}$ ($x_4 = 2{,}23153$, $y_4 = 1{,}07270$, $z_4 = 0{,}92106$ қийматларни асосий жадвалга ўтказамиз; 6) берилган тенгламага x_4, y_4, z_4 ни қўйиб, x'_4, y'_4 (2-ёрдамчи жадвалнинг $j = 4$ сатри) ва z'_4 ни топамиз ва уларни асосий жадвалга киритамиз; 7) ҳисоблашларни $j = 5$ га нисбатан 4), 5), 6) бандларда кўрсатилган тартибда бажарамиз; 8) $\varepsilon = \left|\frac{\vec{A}_{\rm I} - \vec{A}_{\rm II}}{29}\right|$ текшириш формуласи ёрдамида коррекциядан кейинги хато катталигини баҳолаймиз (асосий жадвал).

8-мисолга **Асосий жадвал** (3) — (6) **устунлар** $\times 10^{-5}$

j	t	$\vec{A}_{\rm I}$	$\vec{A}'_{\rm I}$	$\vec{A} = \vec{A}_{\rm II}$	$\vec{A}' = \vec{A}'_{\rm II}$	$\varepsilon = \left\lvert\frac{\vec{A}_{\rm I} - \vec{A}_{\rm II}}{29}\right\rvert$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0	0			$x_0 = 200000$ $y_0 = 100000$ $z_0 = 100000$	100000 0 0	
1	0,1			$x_1 = 208984$ $y_1 = 100497$ $z_1 = 99500$	79532 9882 —9984	
2	0,2			$x_2 = 215880$ $y_2 = 101953$ $z_2 = 98006$	58270 19074 —19868	
3	0,3			$x_3 = 220619$ $y_3 = 104266$ $z_3 = 95533$	36424 26911 —28553	
4	0,4	223152 107268 92106	14226 32798 —38940	$x_4 = 223153$ $y_4 = 107270$ $z_4 = 92106$	14224 32795 —38941	0 0 0
5	0,5	223458 110740 87758	—8126 36209 —47942	$x_5 = 223459$ $y_5 = 110742$ $z_5 = 87758$		0 0 0

8-мисолга **1-ёрдамчи жадвал** (2)—(7) **устунларни** $\times 10^{-5}$

α	$j=4$			$j=5$		
	$\alpha x'$	$\alpha y'$	$\alpha z'$	$\alpha x'$	$\alpha y'$	$\alpha z'$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
$2\vec{A}'_{j-3}$	159064	19764	—19968	116540	38148	—39736
$-\vec{A}'_{j-2}$	—58277	—19074	19868	—36427	—26911	29553
$2\vec{A}'_{j-1}$	72854	53822	—59106	28448	76827	—88063

давоми

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
$\Sigma_{\rm I}$	173648	54512	—59206	108561	88064	—98246
$\frac{0,4}{3}\Sigma_{\rm I}$	23152	7268	—7894	14474	10243	67647
$\vec{A}_{j-4}$	200000	100000	100000	208984	100497	99500
$\vec{A}_{j\rm I}$	223152	107268	92106	223458	110740	86401
$\vec{A}_{j-2}$	58270	19074	—19868	36427	26911	—29553
$4\vec{A}'_{j-1}$	145708	107644	—118213	56896	131180	—155760
$\vec{A}'_{j\rm I}$	14226	32798	—38940	—8126	36209	—47942
$\Sigma_{\rm II}$	218204	159516	—177020	85197	194300	—233255
$\frac{0,1}{3}\Sigma_{\rm II}$	7273	5317	—5900	2840	6476	—7775
$\vec{A}_{j-2}$	215880	101953	98006	220619	104266	95533
$\vec{A}_{j\rm II}$	223153	107270	92106	223459	110742	87758

8-мисолга **2-ёрдамчи жадвал** $\sin t \approx t - t^3/6 + t^5/120$

j	t	$t^3/6$	$t^5/120$	$\sin t$	$1 - \sin t$	$(1 - \sin t)\,x$	y'
1	0,1	0,000167	0,000000	0,099833	0,90017	1,88120	0,09882
2	0,2	0,001333	0,000003	0,198669	0,80133	1,72992	0,19074
3	0,3	0,0045	0,000020	0,295520	0,70448	1,55422	0,26911
4	0,4	0,010667	0,000085	0,389418	0,61058	1,36252	0,32798
5	0,5	0,020833	0,000260	0,479427	0,52057	1,16326	0,36209

Адамс — Штермер усули. Бу усул $y'' = f(x, y, y')$ кўринишдаги тенглама билан берилган бошланғич масалани ечишда қўлланилади. Бунинг учун олдин тенглама $y' = z$ алмаштириш орқали $\begin{cases} y' = z, \\ z' = f(x, y, z) \end{cases}$ система кўринишига келтирилади. Сўнг тенгламалардан биринчиси Адамс экстраполяция формуласи, иккинчиси эса Штермер формуласи қўлланилиб ечилади:

$$z_{n+1} = z_n + h\left[f_n + \frac{1}{2}\nabla f_n + \frac{5}{12}\nabla^2 f_n + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{8}\nabla^3 f_n + \frac{25}{720}\nabla^4 f_n\right]$$

(Адамс экстраполяцион формуласи),

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + h^2 \left[f_n + \frac{1}{12} \nabla^2 f_n + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{12} \nabla^3 f_n + \frac{19}{240} \nabla^4 f_n \right]$$

(Штермер формуласи).

Тўрлар усули. Бирор $D = [a, b]$ оралиқда берилган оддий дифференциал тенглама ёки дифференциал тенгламалар системасини ва шу оралиқнинг учларидан бирига қўйилган қўшимча шартни (Коши масаласини) қаноатлантирувчи $u(x)$ функцияни топиш талаб қилинсин. Биз бу масалани L дифференциал оператор ёрдамида қуйидаги символик тенглик кўринишида ёзамиз:

$$Lu = f, \tag{28}$$

бунда f — берилган ўнг қисм. Қўйилаётган масалани ечишда кўпинча тўрлар усули (айирмали усул) қўлланилади. $[a, b]$ оралиқдаги тўр деб, шу оралиқда кетма-кет олинган нуқталарнинг (тугунларнинг) ихтиёрий чекли тўпламига айтилади. Шундай қилиб, тўрда ушбу шарт бажарилган бўлади:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b.$$

Тугунлар орасидаги масофага тўр қадами дейилади. Барча қадамлар тенг бўлган ҳолда текис (текис тақсимланган) тўрга, акс ҳолда текис тақсимланмаган тўрга эга бўламиз. Максимал қадамни h орқали белгилайлик. Бу ҳолда тўрни D_h орқали белгилаймиз. Тўр тугунларида аниқланган $f(x)$ функцияга тўр функцияси дейилади.

Қаралаётган $[a, b]$ оралиқда аниқланган, узлуксиз ва етарлича силлиқликка эга бўлган бирор $u(x)$ функция ҳосилаларини тақрибий ҳисоблаш масаласи устида тўхталамиз. Ушбу

$$u_{\bar{x},i} = (u_i - u_{i-1})/h, \quad u_{x,i} = (u_{i+1} - u_i)/h,$$

$$u_{\overset{\circ}{x},i} = (u_{i+1} - u_{i-1})/(2h), \quad u_i = u(x_i)$$

айирмали нисбатларга мос тартибда $u(x)$ функциянинг $x = x_i$ нуқтадаги чап, ўнг ва марказий айирмали ҳосилалари дейилади. Дифференциал ифодани айирмали ифода билан алмаштиришда вужудга келадиган хатони топиш у қадар қийин эмас. Жумладан, $x = x_i$ нуқтага нисбатан чап айирмали ҳосилани

$$u_{\bar{x},i} = \frac{u(x) - u(x-h)}{h}$$

кўринишида ёзсак, Тейлор формуласи ёрдамида қуйидагига эга бўламиз:

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2} u''(\xi), \quad \xi \in (x-h, x),$$

бундан

$$u_{\bar{x},i} = u'(x_i) - \frac{h}{2} u''(\xi_i).$$

Бунга қараганда аппроксимация хатоси $u_{\bar{x},i} - u'(x_i) = O(h)$ дан ёки $h \to 0$ даги $O(h)$ катталикдан иборат, яъни биз h га нисбатан биринчи тартибли аппроксимацияга эга бўламиз. Шу каби қолган айирмали нисбатлар учун қуйидагилар ўринли:

$$u_{x,i} = u'(x_i) + \frac{h}{2} u''(\xi_i^{(1)}), \quad \text{ёки } u_{x,i} = u'_i + O(h).$$

$$\text{бунда } \xi_i^{(1)} \in (x_i, x_{i+1}),$$

$$u_{\overset{\circ}{x},i} = u'(x_i) + \frac{h^2}{6} u'''(\xi_i^{(2)}), \quad \text{ёки } u_{\overset{\circ}{x},i} = u'_i + O(h^2),$$

$$\text{бунда } \xi_i^{(2)} \in (x_{i-1}, x_{i+1}).$$

$x_i \in D_h$ нуқтада $u''(x)$ иккинчи тартибли ҳосилани

$$u_{\bar{x}x,i} = \frac{1}{h}(u_{x,i} - u_{\bar{x},i}) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

иккинчи айирмали ҳосила орқали тақрибий алмаштириш мумкин. Тейлор формуласининг ёйилмаси бу алмаштириш хатоси учун қуйидаги ифодани беради:

$$u_{\bar{x}x,i} - u''(x_i) = \frac{h^2}{12} u^{\mathrm{IV}}(\xi_i).$$

яъни иккинчи тартибли аппроксимация ўринли. Ҳақиқатан,

$$u_{i+1} = u(x_i + h) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) + \frac{h^3}{6} u'''(x_i) +$$

$$+ \frac{h^4}{24} u^{\mathrm{IV}}(x_i) + \frac{h^5}{120} u^{\mathrm{V}}(x_i) + \frac{h^6}{720} u^{\mathrm{VI}}(x_i) + \ldots,$$

$$u_{i-1} = u(x_i - h) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) -$$

$$-\frac{h^3}{2}u'''(x_i)+\frac{h^4}{24}u^{IV}(x_i)-\frac{h^5}{120}u^{V}(x_i)+\frac{h^6}{720}u^{VI}(x_i)-\ldots,$$

$$2u_1=-2u(x_i),$$

$$u_{i+1}+u_{i-1}-2u_i=h^2u''(x)+\frac{h^4}{12}u^{IV}(x)+\frac{h^6}{120}u^{VI}(x)+\ldots$$

ёки бундан:

$$u_{\bar{x}x,i}=u''(x_i)=\frac{h^2}{12}u^{IV}(x)+0(h^4).$$

Энди (қаранг: (14), 260-бет) ўзгарувчан $k(x)$ коэффициентли

$$Lu=\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) \tag{29}$$

дифференциал ифодани ушбу

$$L_hu=(au_{\bar{x}})_{x,i}=\frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{u_{i+1}-u_i}{h}-a_i\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right) \tag{30}$$

айирмали нисбат билан алмаштириш устида тўхталамиз, бунда $a=a(x)$ функция D_h тўрда аниқланган. Қандай шартларда $(au_{\bar{x}})_{x,i}$ нисбат x_i нуқтада $(ku')'$ дифференциал ифодани h бўйича иккинчи тартиб билан аппроксимация қилишини билиш мақсадида ушбу

$$u_{x,i}=\frac{u_{i+1}-u_i}{h}=u'_i+\frac{h}{2}u''_i+\frac{h^2}{6}u'''_i+0(h^3),$$

$$u_{\bar{x},i}=\frac{u_i-u_{i-1}}{h}=u'_i-\frac{h}{2}u''_i+\frac{h^2}{6}u'''_i+0(h^3)$$

ёйилмаларни (30) муносабатга қўямиз $(u'_i=u'(x_i))$. Натижада:

$$L_hu=\frac{a_{i+1}-a_i}{h}u'_i+\frac{a_{i+1}+a_i}{2}u''_i+$$

$$+\frac{h(a_{i+1}-a_i)}{6}u'''_i+0(h^2).$$

Иккинчи томондан:

$$Lu=(ku')'=ku''+k'u'.$$

У ҳолда:

$$L_hu-Lu=\left(\frac{a_{i+1}-a_i}{h}-k'_i\right)u'_i-\left(\frac{a_{i+1}-a_i}{h}-k_i\right)u''_i-$$

$$-\frac{h(a_{i+1}-a_i)}{6}u'''-0(h^2).$$

Бунга қараганда $L_hu-Lu=0(h^2)$ бўлиши учун ушбу

$$\frac{a_{i+1}-a_i}{h}=k'(x_i)-0(h^2),\quad \frac{a_{i+1}+a_i}{2}=k_i+0(h^2) \tag{31}$$

шартларнинг бажарилиши етарли. Уларнинг чиқарилишида биз $u^{IV}(x)$ ҳосила узлуксиз ва $k(x)$ эса дифференциалланувчи функция деб фараз қилдик.

9-мисол. $a_i=\frac{k(x_i)+k(x_{i+1})}{2}$ функция учун (30) айирмали нисбат (29) дифференциал ифодани иккинчи тартиб билан аппроксимация қилишини кўрсатамиз.

Бунинг учун берилган a_i да (31) шартларнинг бажарилишини билиш етарли. Қуйидагиларга эга бўламиз:

$$L_hu-Lu=\left[\frac{(k_i+k_{i+1})-(k_i+k_{i-1})}{2h}u'_i+\right.$$

$$+\frac{(k_i+k_{i+1})-(k_i+k_{i-1})}{4}u''_i+$$

$$\left.-\frac{(h(k_i+k_{i+1}-k_i-k_{i-1})}{12}u'''_i-0(h^2)\right]-(k_iu''_i+k'_iu_i)=$$

$$=\left(\frac{k_{i+1}-k_{i-1}}{2h}-k'_i\right)u'_i+\left(\frac{k_{i+1}+2k_i+k_{i-1}}{4}-k_i\right)u''_i+$$

$$+\frac{h(k_{i+1}-k_{i-1})}{12}u_i^{IV}+0(h^2).$$

Иккинчи тартибли аппроксимацияга эга бўлишимиз учун

$$\frac{k_{i+1}-k_{i-1}}{2h}=k'_i+0(h^2)$$

ва

$$\frac{k_{i+1}+2k_i+k_{i-1}}{4}=k_i+0(h^2)$$

бўлиши керак. Бу муносабатлардан биринчисининг ўринли экани юқорида (139-бет) кўрсатилган эди. Иккинчиси учун қуйидагиларни оламиз:

$$\frac{k_{i+1}+2k_i+k_{i-1}}{4}=\frac{k_i+hk'_i+\frac{h^2}{2}k''(\xi_i)+2k_i+k_i-hk'_i+\frac{h^2}{2}k''(\xi_i)}{4}=$$

$$=k_i+0(h^2).$$

10- м и с о л. Ушбу

$$\begin{cases} u''(x)+\lambda u(x)=0,\ x\in[a,\ b],\ (x)\ \lambda_k=\left(\dfrac{\pi k}{b-a}\right)^2, \\ u(a)=0,\ u'(a)=\dfrac{\pi k}{b-a},\quad k=1,\ 2,\ \dots \end{cases} \qquad (32)$$

дифференциал масала $D_h=\{x_i=a+ih,\ \ i=\overline{0,N}\}$ текис тўрда

$$\begin{cases} \dfrac{y_{j-1}-2y_j+y_{j+1}}{x^2}+\lambda^{(h)}y_j=0,\ \ j=1,2,\ \dots,\ N-1, \\ y_0=0,\ y_1=\dfrac{\pi kh}{b-a},\ hN=b-a,\ y_j=y(x_j),\ x_j=a+jh \end{cases} \qquad (33)$$

айирмали схема билан аппроксимацияланган. Кўрсатилган дифференциал ва айирмали масалаларнинг хос қийматлари бўйича ечимлари топилсин ва аппроксимация хатоси баҳолансин.

Е ч и ш: 1) Берилган (32) тенгламада λ ни доимий фараз қилайлик. $u=e^{rx}$ алмаштириш киритсак, $r^2+\lambda r=0$ характеристик тенглама ҳосил бўлади. Унинг дискриминанти манфий. Маълум алмаштиришлардан сўнг, бошланғич масаланинг ечими олинади:

$$u=\sin\left(\frac{\pi k}{b-a}(x-a)\right)\ \text{ёки}\ u_k=\sin\frac{\pi k(x-a)}{b-a},$$

$$k=1,2,\ \dots,\ N-1.$$

2) (33) тенгламалар системасини

$$-1\cdot y_{j-1}+2\cdot y_j-1\cdot y_{j+1}=\lambda^{(h)}h^2y_j$$

кўринишга келтирайлик, ёки

$$Ay=\lambda^{(h)}y,$$

бунда A $N-1$-тартибли симметрик матрица:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

A матрица $N-1$ та $\lambda_k^{(h)}$, $k=\overline{1,\ N-1}$ ҳақиқий хос қийматга эга. Уларни топиш мақсадида (33) айирмали тенгламани

$$y_{j-1}-(2-\mu)y_j+y_{j+1}=0,\ \ \mu=h^2\lambda^{(h)} \qquad (34)$$

кўринишида қайтадан ёзамиз ва унга мос

$$q^2-(2-\mu)q+1=0$$

характеристик тенгламани ечамиз. Бу тенгламанинг дискриминанти манфий. Унинг илдизлари:

$$q_{1,2}=\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\pm\sqrt{\left(1-\frac{\mu}{2}\right)^2-1},$$

$$1-\frac{\mu}{2}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi kh}{b-a}\right)^2<1,$$

Бу қўшма комплекс сонларнинг модули ва аргументини топайлик:

$$\rho=\sqrt{\left(1-\frac{\mu}{2}\right)^2+\left(\sqrt{1-\left(1-\frac{\mu}{2}\right)^2}\right)^2}=1,$$

$$\mathrm{tg}\ \varphi=\frac{\sqrt{1-\left(1-\frac{\mu}{2}\right)^2}}{1-\frac{\mu}{2}}.$$

Кейинги тенгликка ва масаланинг шартларига қараганда

$$\cos\varphi=1-0{,}5\ \mu,$$

бундан

$$\mu=2(1-\cos\varphi)=4\sin^2\frac{\varphi}{2}=4\sin^2\frac{\pi k}{2N},\ \ k=\overline{1,\ N-1}$$

ва (33) масаланинг хос сонлари учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$\lambda_k^{(h)}=\frac{2}{h^2}\sin^2\frac{\pi k}{2N},\quad k=1,2,\ \dots,\ N-1,\ hN=b-a.$$

(34) тенгламанинг умумий ечими ушбу

$$y_i=C_1q_1^i+C_2q_2^i$$

кўринишда изланади, унда $C_1=-C_2$ бўлишини аниқлаш қийин эмас. Умумий ечим изланаётган y_j хос функцияларни беради:

$$y_j=C_1(q_1^j-q_2^j)=C_1(\cos\varphi+i\sin\varphi-\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$

$$=C_1\cdot 2i\sin\varphi,$$

ёки $C = -0{,}5\,i$ деб қуйилса, энг охири қуйидаги олинади:

$$y_i = \sin\varphi = \sin\frac{\pi k j}{N},\ k,\ j = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Хос функциялар j га боглиқ булмаган ихтиёрий доимийгача аниқликда топилганини курамиз.

МАШҚЛАР

1—8 машқларда бошланғич масалалар келтирилган. Уларнинг ечими кетма-кет дифференциаллаш ва аниқмас коэффициентлар усуллари қулланилиб, даражали қатор куринишида топилсин:

1. $y' = y^2 + x^2$, $y(0) = 0{,}5$. Ечим 0,001 гача аниқликка эга булиши учун изланаётган қатор нечта ҳади билан олиниши керак? $y(0{,}2)$ ҳисоблансин.

2. $y'' + yy' - 2 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$; $y(x)$ ечимни ифодаловчи қаторнинг дастлабки турт ҳади топилсин; $y(0{,}5)$ қиймат ва $\int\limits_0^x y(x)\,dx$ интеграл 0,001 гача аниқлик билан топилсин.

3. $y'' = yy' - x^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$; ечим дастлабки олтита ҳади билан даражали қатор куринишида топилсин.

4. $y'' + y' + x^2 y = \frac{x}{1-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ $(0 \leqslant x \leqslant 0{,}2,\ h = 0{,}05,\ \varepsilon = 1\cdot 10^{-4})$.

5. $y'' - xy' - 2y = e^{-x^2}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0{,}5$; $y(x)$ ва $y'(x)$ нинг $0 \leqslant x \leqslant 0{,}15$ оралиқдаги қийматлари $h = 0{,}05$ қадам билан 0,00001 аниқликда топилсин.

6. $xy'' + 2y' + xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $(0 \leqslant x \leqslant 0{,}2$ $h = 0{,}05,\ \varepsilon = 1\cdot 10^{-4})$.

7. $\begin{cases} y' = xy + z \\ z' = y - z \end{cases}$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$ $(0 \leqslant x \leqslant 0{,}2,\ h = 0{,}05,\ \varepsilon = 1\cdot 10^{-4})$.

8. $\begin{cases} y' = x + z^2 \\ z' = yx \end{cases}$, $y(0) = 1$, $z(0) = -1$ $(0 \leqslant x \leqslant 0{,}2,\ h = 0{,}05,\ \varepsilon = 1\cdot 10^{-4})$.

9—14-машқларда итерация усули қулланилиб, курсатилган бошланғич масалалар ечими учун бошланғич иккиуч яқинлашиш топилсин:

9. $y' = y^2 + x^2$, $y(0) = 0$. **10.** $y' = y^2 + xy + x^2$, $y(0) = 1$. **11.** $y' = xy + \sqrt{x}$, $y(0) = 0$.

12. $y' = y\sin x + x$, $y(0) = 0$. **13.** $y' = xy^3 - 1$, $y(0) = 0$; $y(1)$ нинг қиймати $1\cdot 10^{-2}$ гача аниқликда топилсин.

14. $y' = y + x$, $y(0) = 1$; $y(1)$ учун бошланғич бешта яқинлашиши топилсин ва уларнинг аниқлиги баҳолансин.

15—24-машқларда Рунге—Кутта усулларидан бири қулланилиб, бошланғич шартлар билан берилган дифференциал тенгламалар ва дифференциал тенгламалар системалари ечимининг $[a, b]$ оралиқдаги қийматлар жадвали $h = 0{,}1$ қадам билан тузилсин:

15. $y' = 0{,}5xy$, $y(0) = 1$, $[0; 1]$. **16.** $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$, $[0; 1]$. **17.** $y' = 1 + xy^2$, $y(0) = 0$, $[0; 1]$. **18.** $y' = \frac{y}{x+1} - y^2$, $y(0) = 1$, $[0; 1]$. **19.** $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 0$, $[0; 1]$. **20.** $y' = x + \sqrt{y}$, $y(0{,}5) = 0{,}7240$, $[0{,}5; 1{,}5]$. **21.** $y' = e^x - y^2$, $y(0) = 0$, $[0; 0{,}4]$. **22.** $y' = x\ln y - y\ln x$, $y(1) = 1$, $[1; 1{,}6]$.

23. $\begin{cases} y' = -xz, & y(0) = 0,\ z(0) = 1, \\ z' = \frac{y}{x}, & [0; 1]. \end{cases}$

24. $\begin{cases} y' = (z - y)x, \\ z' = (z + y)x, \end{cases}$ $y(0) = z(0) = 1$, $[0; 1]$.

24—32-машқларда Адамс усули қулланилиб, дифференциал тенгламалар ва системаларнинг $[x_0, x_n]$ оралиқдаги ечим қийматлари жадвали $1\cdot 10^{-4}$ аниқлик билан тузилсин. Бошланғич кесмани топишда Рунге—Кутта усулидан фойдаланилсин:

24. $y' = 2x - y$, $y(0) = 1$, $[0; 0{,}5]$, $h = 0{,}05$.

25. $y' = -(x + 2y)$, $y(0) = 1$, $[0; 1]$, $h = 0{,}1$.

26. $y' = 2y^2 - 3$, $y(0) = 1$, $[0; 0{,}5]$, $h = 0{,}05$.

27. $\begin{cases} y' = -2x + y, \\ z' = x + 2y - 3z, \end{cases}$ $y(0) = 2$, $z(0) = -2$, $[0;05]$, $h = 0{,}05$.

28. $y' = (xy^2 - 1)y$, $y(0) = 1$, $h = 0{,}1$.

29. $y' = y_2 e^x + 2y$, $y(0) = 1$, $[0]\ I$, $h = 0{,}1$.

30. $y' = \frac{1}{y^2 - x^2}$, $y(1) = 0$, $[1; 2]$, $h = 0{,}1$.

31. $y' = \frac{\sin bt}{a^2 + y^2}$, $a = 1{,}0 + 0{,}2n$, $b = 1{,}0 + 0{,}3k$,
$n, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

32. $\begin{cases} x' = \ln(b + \sqrt{a^2t^2 + y^2}), & x(0) = 1, \ y(0) = 0{,}5, \\ y' = \sqrt{a^2t^2 + x^2} & a = 2{,}0 + 0{,}5n, \end{cases}$

$n = \overline{0;3}$, $b = 2{,}0 + 0{,}5k$,
$k = \overline{0;5}$, $h = 0{,}1$.

33 — 34-машқларда Милн усули қўлланилиб, дифференциал тенгламаларнинг $[a, b]$ оралиқдаги ечимлари 10^{-4} гача аниқлик билан топилсин:

33. $y' = -y\left(\frac{1}{2x} + \frac{2y}{\alpha}\right)\ln x$, $y(1) = 1$, $[1; 3]$, $\alpha = 0{,}5 + 0{,}25k$, $k = \overline{0; 20}$.

34. $y = \frac{1}{\alpha \sin x} - y \operatorname{tg} x$, $y(0) = 1$, $\alpha = 0{,}4 + 0{,}02k$, $k = \overline{0, 20}$, $[0; 1]$,

35. Ўзгарувчан $k(x)$ коэффициентли

$$\begin{cases} k(x)\, u''(x) + k'(x)\, u'(x) = f(x), \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ u(0) = 1, \\ u'(0) = 2 \end{cases}$$

дифференциал масала ушбу

$$\frac{1}{h}\left(a_{j+1}\frac{y_{j+1} - y_j}{h} - a_j\frac{y_j - y_{j-1}}{h}\right) = f(x_j), \ j = \overline{1; N-1},$$

$$y_0 = 1, \ D_h = \{x_j = jh, \ j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\},$$

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = 2, \ h = 1/N, \ a_j = k(x_j - 0{,}5h)$$

айирмали масала билан аппроксимация қилинган. Аппроксимация тартибини аниқланг.

36. 35-масала $a_j = \sqrt{k(x_j)\, k(x_{j-1})}$ функция учун ечилсин.

37. Ушбу

$$\begin{cases} u'(x) + 2u = 0, \ x \in [0; 1], \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

дифференциал масаланинг $[u]_h$ аниқ ва уни аппроксимацияловчи

$$\begin{cases} \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} + 2y_j = 0, \ j = \overline{1; N-1}, \ h = 1/N, \\ y_0 = 1, \ y_1 = 1 - 2h \end{cases}$$

айирмали масаланинг $y^{(h)}$ ечими топилсин ва шу ечимлар бўйича $\| [u]_h - y^{(h)} \|_{U_h}$ баҳолансин, бунда $\| \cdot \| = \max(|u_j - y_j|)$.

8-ЛАБОРАТОРИЯ ИШИ

1-топшириқ: Ушбу $y' = \frac{\alpha}{x^2 + y^2 + \beta}$, $y(0) = 0$ бошланғич масала хусусий ечимининг $[0; 0{,}5]$ оралиқдаги қийматлари $h = 0{,}1$ қадам билан $1 \cdot 10^{-5}$ аниқликда топилсин:

1-жадвал

Вариант №	α	β	Вариант №	α	β	Вариант №	α	β
1	1,0	2,6	9	1,8	1,4	17	2,6	1,8
2	1,4	2,2	10	1,4	1,0	18	2,2	1,4
3	1,8	2,6	11	1,0	2,4	19	1,8	1,0
4	2,2	1,0	12	1,4	1,8	20	1,4	3,0
5	2,6	3,0	13	1,8	3,0	21	1,5	2,8
6	3,0	2,6	14	2,2	2,6	22	2,7	1,4
7	2,6	2,2	15	2,6	1,4	23	2,0	1,8
8	2,2	1,8	16	3,0	2,2	24	2,4	2,0
						25	2,5	1,9

2-топшириқ: Ушбу

$$\begin{cases} y' = \cos(\mu y) + z, \\ z' = \sqrt{x^2 + \gamma z^2} + y \end{cases} \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0{,}5$$

бошланғич масала хусусий ечимининг $[0; 0{,}3]$ оралиқдаги қийматлари $h = 0{,}1$ қадам билан топилсин ва уларнинг аниқлиги Рунге қоидаси бўйича баҳолансин:

2-жадвал

Вариант №	μ	γ	Вариант №	μ	γ	Вариант №	μ	γ
1	2,0	3,5	10	2,5	3,5	18	2,0	2,0
2	2,5	3,0	11	2,0	3,0	19	2,5	4,5
3	3,0	2,5	12	2,0	4,5	20	3,0	3,0
4	3,5	2,0	13	2,5	4,5	21	3,2	2,0
5	2,0	4,0	14	2,0	2,5	22	3,3	1,8
6	2,5	2,5	15	2,5	2,0	23	2,4	1,8
7	3,0	2,0	16	3,0	3,5	24	2,2	2,4
8	3,5	4,5	17	3,5	3,0	25	2,4	3,0
9	3,0	4,0						

3-топширик: Қуйидаги бошланғич масалалар ечилсин ($h = 0{,}1$, $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$):

Вариант
№

1. $x^2y'' - 6y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$, $[1; 2]$.

2. $x^2y'' - 12y = 0$, $y(2) = 11$, $y'(2) = 9{,}6$, $[2; 3]$.

3 — 8. $x^2y'' + xy' - y = mx^2$, $y(1) = 3$, $y'(1) = 1{,}8$, $[1; 1{,}5]$, $m = \overline{1; 6}$.

9 — 13. $xy'' + (x + k)y' + ly = 0$, $[1; 1{,}5]$:

Вар. №	k	l	$y(1)$	$y'(1)$
9	0	1	0,367879	0
10	0	—1	1	1
11	1	1	0,367879	—0,367879
12	2	1	1	—1
13	2	2	0,367879	—0,367879

14. $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$, $[0; 0{,}5]$.

15. $x^3y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $[0; 0{,}5]$.

16. $x^2y'' - xy' + y = 3x^3$, $y(1) = 1{,}75$, $y'(1) = 4{,}25$ $[1; 1{,}5]$.

17. $y'' + \frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2}y = 8x$, $y(1)$, $y'(1) = 0{,}8$, $[1; 1{,}5]$.

18. $y'' - 3y' = x^2 + 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $[0; 1]$.

19. $xy'' + y' + xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $[0; 0{,}5]$.

20. $x^2(x + 1)y'' - 2y = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = -1$, $[1; 2]$.

21. $y'' + \frac{y'}{x} + y = 0$, $y(1) = 0{,}77$, $y'(1) = -0{,}44$, $[1; 1{,}7]$.

22. $y'' - 3y' + 2y = x^2 + 3x$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 6$, $[0; 0{,}5]$.

23. $y'' - 3y' = x^2 + 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$, $[0; 05]$.

24. $y'' + y \operatorname{ch} x = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $[0; 0{,}5]$.

25. $x'' + \frac{y'}{x} + y = 0$, $y(1) = 0{,}77$, $y'(1) = -0{,}44$, $[1; 1{,}5]$

9-боб. ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ

Икки нуқтали чегаравий масала. $[a, b]$ оралиқнинг ичида

$$F(x, u, u', \ldots, u^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

тенгламани, оралиқнинг чекка нуқталарида

$$\varphi_i\,[u(a),\ u'(a),\ \ldots,\ u^{(n-1)}(a)] = 0,\ i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$\psi_j\,[u(b),\ u'(b),\ \ldots,\ u^{(n-1)}(b)] = 0,\ j = N+1, N+2, \ldots, n \tag{2}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $u = u(x)$ функцияни топиш талаб қилинади. Агар (1) — (2) тенгламалар $u(x)$, $u'(x)$, ..., $u^{(n)}(x)$ ларга нисбатан чизиқли бўлса, биз чизиқли чегаравий масалага эга бўламиз. Кейинги мулоҳазаларда биз қисқалик учун асосан ушбу $n = 2$ бўлган ҳол билан чегараланамиз:

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \tag{3}$$

$$\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = A,\ \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = B, \tag{4}$$

бунда $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ функциялар берилган ва улар $[a, b]$ оралиқда узлуксиз, α_0, α_1, β_0, β_1, A, B — ўзгармас сонлар. $A = B = 0$ бўлган ҳолда (4) шартлар бир жинсли шартлар дейилади. Масала ягона $u(x)$ ечимга эга бўлиши ва $u(x)$ нинг етарлича юқори тартибли ҳосилалари мавжуд бўлиши учун $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$ шартларнинг бажарилиши зарурдир.

Чекли айирмалар усули. $[a, b]$ оралиқда олинган $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_i = x_0 + ih$, $h = (a - b)/n$, $i = \overline{1; n-1}$ тугунларда (3) тенгламанинг коэффициентлари $p(x_i) = p_i$, $q(x_i) = q_i$, $f(x_i) = f_i$ қийматларни қабул қилсин. Агар u', u'' ҳосилалар мос равишда $\frac{y_{i+1} - y_i}{h}$, $\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$ каби айирмали нисбатлар билан алмаштирилса, натижада (3), (4) ифодалар $n + 1$ номаълумли $n + 1$ та чизиқли алгебраик тенгламалар системасига келади:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} + q_i y_i = f_i,\ i = \overline{1; n-1}, \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = A,\ \beta_0 y_1 + \beta_1 \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \end{cases} \tag{5}$$

Системани ечиб, $u(x_i) \approx y(x_i)$ қийматлар жадвалига эга бўламиз.

1-мисол. Чекли айирмалар усули қўлланилиб, ушбу

$$u'' - x^3 u' = 4, \quad u(1) = 0, \quad u(1,4) = 0,2492$$

чегаравий масала ечимининг $u(1,1)$, $u(1,2)$ ва $u(1,3)$ қийматлари топилсин.

Ечиш: u'', u' ҳосилаларни айирмали ҳосилалар билан алмаштириб, қуйидагиларни оламиз:

$$\frac{y_{i+1}\, 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - x_i^3 \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = 4,$$

ёки

$$2y_{i+1} - 4y_i + 2y_{i-1} - x_i^3 h y_{i-1} + x_i^3 h y_{i-1} = 8h^2,$$

ёки

$$(2 + x_i^3 h)\, y_{i-1} - 4y_i + (2 - x_i^3 h)\, y_{i+1} = 8h^2. \qquad (6)$$

Бизда $h = 0,1$. Уни ва $x_1 = 1,1$, $x_2 = 1,2$, $x_3 = 1,3$, $y_0 = 0$, $y_4 = 0,2492$ ларни (6) тенгламага қўйиб, ушбу системани тузамиз:

$$\begin{cases} (2 + 1,1^3 \cdot 0,1)\, y_0 - 4y_1 + (2 - 1,1^3 \cdot 0,1)\, y_2 = 8 \cdot 0,1^2, \\ (2 + 1,2^3 \cdot 0,1)\, y_1 - 4y_2 + (2 - 1,2^3 \cdot 0,1)\, y_3 = 8 \cdot 0,1^2, \\ (2 + 1,3^3 \cdot 0,1)\, y_2 - 4y_3 + (2 - 1,3^3 \cdot 0,1)\, y_4 = 8 \cdot 0,1^2. \end{cases}$$

Системани ечиб, $y_1 = -0,0093$, $y_2 = 0,0216$, $y_3 = 0,1029$ ларни топамиз. Улар $u(x)$ ечимнинг изланаётган қийматларини $1 \cdot 10^{-4}$ аниқликда ифодалайди.

Агар (3) масалада изланаётган $u = u(x)$ функциянинг етарлича силлиқликка эгалиги маълум бўлса, у ҳолда $u'(a)$ ҳосилани $\frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h}$ орқали, $u'(b)$ ни эса $\frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h}$ орқали алмаштириш аниқроқ натижа беради. Алмаштиришларда дифференциаллаш ва интеграллаш ҳисобининг формулаларига чекли айирмали аналоглар ҳам қўлланилади. Жумладан,

а) $(vw)' = v'w + vw'$ формуланинг аналоглари:

$$(PH)_{\bar{x},\, i} = P_i H_{\bar{x},\, i} + H_{i-1} P_{\bar{x},\, i}, \qquad (7)$$

$$(PH)_{x,\, i} = P_i H_{x,\, i} + P_{x,\, i} H_{i+1}, \qquad (8)$$

б) $\int\limits_a^b v(x)\, w'(x)\, dx = \int\limits_a^b w(x)\, v'(x)\, dx + v(b)\, w(b) - v(a)\, w(a)$

формуланинг аналоги:

$$(P, H_x) = -(H, P_{\bar{x}}) + P_N H_N - P_0 H_0. \qquad (9)$$

n нинг катта қийматларида (5) системани ечиш оғирлашади. Бу ҳолда (3) — (4) чегаравий масалани ечишни иккита Коши масаласини ечишга келтириш маъқул. Ушбу отишув усулининг моҳияти ҳам шундан иборат.

Отишув усули. Берилган масалада $\alpha_0 \neq 0$ фараз қилинади ва ечим $u = Cv + w$ кўринишда изланади, бунда v ушбу

$$\begin{cases} v'' + p(x)\, v + q(x)\, v = 0, \\ v(a) = \alpha_1, \quad v'(a) = -\alpha_0. \end{cases} \qquad (10)$$

Коши масаласининг ечими, w эса

$$\begin{cases} w'' + p(x)\, w' + q(x)\, w = f(x), \\ w(a) = \dfrac{A}{\alpha_0}, \quad w'(a) = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

Коши масаласининг ечимидан иборат. C доимий (4) чегаравий шартларга асосланиб ушбу формула бўйича топилади:

$$C = \frac{B - [\beta_0 w(b) + \beta_1 w'(b)]}{\beta_0 v(b) + \beta_1 v'(b)}. \qquad (12)$$

(10) Коши масаласини ушбу айирмали масалага алмаштирамиз:

$$\begin{cases} \dfrac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} + p_i \dfrac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} + q_i v_i = 0, \\ v_0 = \alpha_1, \quad \dfrac{-v_2 + 4v_1 - 3v_0}{2h} = -\alpha_0. \end{cases} \qquad (13)$$

(13) системадан қуйидагиларни оламиз:

$$v_0 = \alpha_1, \quad v_1 = \frac{\alpha_1 (1 + p_1 h) - \alpha_0 h \left(1 + \frac{p_1}{2} h\right)}{1 + p_1 h + \frac{q_1}{2} h^2},$$

$$v_{i+1} = \frac{(2 - q_i h^2)\, v_i - \left(1 - \frac{p_i}{2} h\right) v_{i-1}}{1 + \frac{p_i}{2} h}, \quad i = \overline{1,\ n-1},$$

$$v(b) = v_n, \quad v'(b) = \frac{3v_n - 4v_{n-1} + v_{n-2}}{2h}.$$

Шу тартибда (11) дифференциал масала ҳам алмаштирилади:

$$\begin{cases} \dfrac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{h^2} + p_i \dfrac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} + q_i w_i = f_i, \quad i = \overline{1;\, n-1}, \\ w_0 = \dfrac{A}{\alpha_0}, \quad \dfrac{-w_2 + 4w_1 - 3w_0}{2h} = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Бу системадан қуйидагилар олинади:

$$w_0 = \frac{A}{\alpha_0}, \quad w_1 = \frac{\frac{1}{2} f_1 h^2 + \frac{A}{\alpha_0}(1 + p_1 h)}{1 + p_1 h + \frac{q_1}{2} h^2},$$

$$w_{i+1} = \frac{(2 - q_i h^2) w_i - \left(1 - \frac{p_i}{2} h\right) w_{i-1} + f_i h^2}{1 + \frac{p_i}{2} h}, \quad i = \overline{1;\, n-1},$$

$$w(b) = w_n, \quad w'(b) = \frac{3w_n - 4w_{n-1} + w_{n-2}}{2h}.$$

Энди (12) бўйича C аниқланади, ва ниҳоят:

$$w_i = Cv_i + w_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Ҳайдаш усули. Моҳиятига кўра ҳайдаш усули номаълумларни кетма-кет чиқариш усулининг вариантларидан бири ҳисобланади. Шунга кўра ундан айирмали схемаси таркибида уч диагонал матрицали чизиқли алгебраик тенгламалар системаси бўлган чегаравий масалаларни ечишда фойдаланиш осон (уч диагонал матрицали айирмали схема ҳақида 8-бобда келтирилган 10-мисолга қаранг).

(3) — (4) чегаравий масала бўйича ушбу

$$\begin{cases} \dfrac{y_{j+2} - 2y_{j+1} + y_j}{h^2} + p_j \dfrac{y_{j+1} - y_j}{h} + q_j y_j = f_j, \quad j = \overline{0;\, N-2}, & (15) \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = A, \quad \beta_0 y_N + \beta_1 \dfrac{y_N - y_{N-1}}{h} = B & (16) \end{cases}$$

айирмали масала тузилган бўлсин. Бу масала икки босқичда ҳал қилинади.

1-босқич. Тўғри ҳайдаш (юриш):

1) (15) тенглама

$$y_{j+2} + m_j y_{j+1} + k_j y_j = h^2 f_j, \quad h\text{-қадам} \tag{17}$$

кўринишга келтирилади ва $j = \overline{0;\, N-2}$ учун m_j, k_j коэффициентлар ва $h^2 f_j$ ўнг қисм ифодаси қийматлари аниқланиб, жадвалга киритилади (2-мисол, жадвалнинг (1) — (5) устунлари, қуйига қаранг), бунда

$$m_j = -2 + hp_j, \quad k_j = 1 - hp_j + h^2 q_j, \quad j = \overline{0;\, N-2}. \tag{18}$$

2) (17) системанинг ушбу

$$y_2 + m_0 y_1 + k_0 y_0 = h^2 f_0$$

биринчи ($j = 0$ ҳолидаги) тенгламасига (16) биринчи чегаравий шарт бўйича олинадиган

$$y_0 = \frac{\alpha_1 y_1 - hA}{\alpha_1 - h\alpha_0}$$

ифода қўйилиши натижасида

$$y_1 = \frac{\alpha_1 - h\alpha_0}{m_0(\alpha_1 - h\alpha_0) + k_0\alpha_1}\left(\frac{k_0 h A}{\alpha_1 - h\alpha_1} + h^2 f_0 - y_2\right)$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан ушбу ифода қийматлари топилади:

$$c_0 = \frac{\alpha_1 - h\alpha_0}{m_0(\alpha_1 - h\alpha_0) + k_0\alpha_1}, \quad d_0 = \frac{k_0 h A}{\alpha_1 - h\alpha_0} + h^2 f_0.$$

c_0 ва d_0 қийматларини жадвалга киритамиз ((6), (7) устунлар).

Шу каби алмаштиришлар $j = \overline{1,\, N-2}$ учун ушбу рекуррент формулаларни беради:

$$y_{j+1} = c_j (d_j - y_{j+2}), \tag{19}$$

$$c_j = \frac{1}{m_j - k_j c_{j-1}}, \quad d_j = f_j h^2 - k_j c_{j-1} d_{j-1}. \tag{20}$$

c_j ва d_j қийматлари ҳам жадвалга жойлаштирилади.

2-босқич. Тескари ҳайдаш (юриш):

1) Олдин y_N аниқланади. Шу мақсадда (16) иккинчи чегаравий шарт ва (19) системанинг $j = N - 2$ бўлган ҳолдаги $y_{N-1} = c_{N-2}(d_{N-2} - y_N)$ тенгламаси бўйича ҳосил қилинадиган ушбу

$$y_N = \frac{\beta_1 c_{N-2} d_{N-2} + Bh}{\beta_1 (1 + c_{N-2}) + \beta_0 h}. \tag{21}$$

y_N қиймати ((8) устуннинг пастдан энг охирги катаги) жадвалга киритилади.

2) жадвалга олдин киритилган c_j, d_j ва y_j қийматлардан фойдаланиб (19) рекуррент формула бўйича кетма-кет y_{N-1}, y_{N-2}, . . . , y_1 лар ва биринчи чегаравий шарт (16) бўйича y_0 аниқланади.

2-мисол. $y'' - 2xy' - 2y = -4x$, $y(0) - y'(0) = 0$, $y(1) = 3{,}71828$ чегаравий масаланинг $x_i = 0{,}1i$ $(i = \overline{1;10})$ нуқталардаги ечими ҳайдаш усули қўлланилиб топилсин.

Ечиш: Масалани тўр масалага келтирамиз:

$$\frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} - 2x_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - 2y_i = -4x_i,$$

ёки

$$\begin{cases} y_{i+1} - 2(1 - x_i h) y_{i+1} + (1 + 2x_i h - 2h^2) y_i = -4x_i h^2, \\ y_0 - \dfrac{y_1 - y_0}{h} = 0, \quad y_{10} = 3{,}71828, \quad h = 0{,}1, \end{cases}$$

бунда $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -1$, $A = 0$, $\beta_0 = 1$, $\beta = 0$, $B = 3{,}71828$, $m_i = -2(1 + 0{,}1x_i)$, $k_i = 0{,}98 + 0{,}2x_i$, $f_i = -4x_i$, $x_i = 0{,}1i$ $i = \overline{0;10}$.

Тўгри юриш: жадвалга $i = \overline{0;8}$ учун x_i, m_i, k_i, $f_i h^2$ қийматларини киритамиз. Ҳисоблаш схемаси: $x_i = x_{i-1} + 0{,}1$: $m_i = m_{i-1} - 0{,}02$; $k_i = k_{i-1} + 0{,}02$; $f_i h^2 = f_{i-1} h^2 - 0{,}004$ (жадвалнинг 1 — 5-устунлари); c_0 ва d_0 ларни ҳисоблаймиз:

$$c_0 = \frac{\alpha_1 - \alpha_0 h}{m_0(\alpha_1 - \alpha_0 h) + k_0 \alpha_1} = \frac{-1{,}1}{-2(-1{,}1) - 0{,}98} = -0{,}90164,$$

$$d_0 = \frac{k_0 Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 h} + f_0 h^2 = 0.$$

Қолган d_i, c_i $(i = \overline{1;8})$ қийматларни ҳисоблаш схемаси (6 — 7-устунлар):

$$\boxed{\begin{aligned} d_i &= f_i h^2 - k_i c_{i-1} d_{i-1} \\ c_i &= 1/(m_i - k_i c_{i-1}) \end{aligned}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} d_{i-1} &:= d_i \\ c_{i-1} &:= c_i \\ i &:= i + 1 \end{aligned}}$$

2-мисолга

Ҳайдаш усули

i	x_i	m_i	k_i	$f_i h^2$	Тўғри юриш d_i	Тўғри юриш c_i	Тескари юриш y_i	Контроль $y(x)$ аниқ қиймати
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
0	0,0	−2	0,98	0	0	−0,90164	1,11785	1,00000
1	0,1	−2,02	1	−0,004	−0,004	−0,89413	1,22963	1,11005
2	0,2	−2,04	1,02	−0,008	−0,01165	−0,88653	1,36377	1,24081
3	0,3	−2,06	1,04	−0,012	−0,02274	−0,87873	1,52125	1,39417
4	0,4	−2,08	1,06	−0,016	−0,03718	−0,87067	1,70431	1,57351
5	0,5	−2,10	1,08	−0,720	−0,05496	−0,86231	1,91678	1,78403
6	0,6	−2,12	1,10	−0,024	−0,07613	−0,85364	2,16432	2,03333
7	0,7	−2,14	1,12	−0,028	−0,10079	−0,84465	2,45494	2,33232
8	0,8	−2,16	1,14	−0,032	−0,12905	−0,83535	2,79972	2,79648
9	0,9						3,21387	3,14791
10	1						3,71828	3,71828

Тескари юриш: $y_{10} = \dfrac{\beta_1 c_8 d_8 + Bh}{\beta_1(1 + c_8) + \beta_0 h} = \dfrac{Bh}{\beta_0 h} = B = 3{,}71828.$

Қолган y_i $(i = 9, 8, \ldots, 1)$ қийматлар $y_i = c_{i-1}(d_{i-1} - y_{i+1})$ бўйича, y_0 эса $y_0 - \dfrac{y_1 - y_0}{0{,}1} = 0$ бошлангич шартдан фойдаланиб топилади: $y_0 = 1{,}11785$ (8-устун). Контрол мақсадида (9) устунда аниқ ечим $y = x + e^{x^2}$ нинг қийматлари келтирилган.

Итерация усули иккинчи тартибли чизиқли бўлмаган

$$\begin{cases} u'' = f(x, u, u'). & (22) \\ \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = A, \quad \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = B & (23) \end{cases}$$

чегаравий масалани ечишда қўлланилади.

$[a, b]$ оралиқда h қадам билан тенг узоқлашган $x_0 = a$, $x_j = x_0 + jh$ $(j = \overline{1; N-1})$ тугунлар системасини оламиз. (22), (23) чегаравий масала $N + 1$ та номаълумли $N + 1$ та чизиқли бўлмаган тенгламадан иборат

$$\begin{cases} \dfrac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} = f\left(x_j, y_j, \dfrac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h}\right), \quad j = \overline{1; N-1}, \\ \Gamma_0[y] = \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = A, \\ \Gamma_n[y] = \beta_0 y_N + \beta_1 \dfrac{y_N - y_{N-1}}{h} = B \end{cases} \qquad (24)$$

айирмали масалага келтирилади. (24) система итерация усули бўйича ушбу формулалар ёрдамида ечилади:

$$y_{j+1}^{[r+1]} - 2y_j^{[r+1]} + y_{j-1}^{[r+1]} = h^2 f\left(x_i,\ y_j^{[r]},\ \frac{y_{j+1}^{[r]} - y_{j-1}^{[r]}}{2h}\right),$$

$$j = \overline{1;\ N-1}, \tag{25}$$

$$\Gamma_0[y^{[r+1]}] = A,\ \Gamma_N[y^{[r+1]}] = B,\ r \text{ — яқинлашиш номери.}$$

Изланаётган яқинлашишлар қуйидагича ошкор ифодаланиши мумкин:

$$y_j^{[r+1]} = \frac{h}{\Delta}[A\beta_0(b-a) + A\beta_1 + \alpha_1 B] + \frac{j}{\Delta}(\alpha_0 B - A\beta_0) +$$

$$+ h^2 \sum_{i=1}^{N-1} g_{ij} f_i^{[r]}, \tag{26}$$

бунда a, b, $A, B, \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ лар берилган, Δ ва g_{ij} лар қуйидаги формулалар бўйича ҳисобланади:

$$\Delta = \frac{1}{h}[\alpha_0\beta_0(b-a) + \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0] \tag{27}$$

$$g_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}\left(i\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{h}\right)\left(j\beta_0 - \beta_0 N - \frac{\beta}{h}\right), & i \leqslant j, \\ \frac{1}{\Delta}\left(j\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{h}\right)\left(i\beta_0 - \beta_0 N - \frac{\beta_1}{h}\right), & i > j. \end{cases} \tag{28}$$

3-мисол. $y'' = 2 + y^2$, $y(0) = y(1) = 0$ чегаравий масаланинг $x_k = 0{,}1\,k$ $(k = \overline{1;\ 9})$ нуқталардаги ечим қийматлари итерация методи қўлланилиб топилсин.

Ечиш: $n = (b-a)/h = (1-0)/0{,}1 = 10$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $A = 0$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0$, $B = 0$ $f(x, y) = 2 + y^2$, (27) ва (28) муносабатлар бўйича:

$$\Delta = \frac{1}{0{,}1}[1\cdot 1\cdot(1-0) + 1\cdot 0 + 0\cdot 1] = 10,$$

$$g_{ik} = \begin{cases} 0{,}1i\,(k-10), & i \leqslant k, \\ 0{,}1k\,(i-10), & i \geqslant k, \end{cases}$$

$$y^{[r+1]} = 0{,}01 \sum_{i=1}^{9} g_{ik} f_i^{[r]}.$$

g_{ik} коэффициентлар: $i = 1$ бўлса, $g_{ik} = 0{,}1\,(k-10)$ бўлади, масалан, $g_{11} = -0{,}9$, $g_{12} = -0{,}8$, $g_{13} = -0{,}7$, $\ldots$, $g_{19} = -0{,}1$;

$$i = 2 \text{ бўлса, } g_{2k} = \begin{cases} 0{,}2\,(k-10), & 2 \leqslant k \leqslant 9, \\ -0{,}8, & k = 1; \end{cases}$$

$$i = 3 \text{ бўлса, } g_{3k} = \begin{cases} 0{,}3\,(k-10), & 3 \leqslant k \leqslant 9, \\ -0{,}7\,k, & k = 1;\ 2; \end{cases}$$

. . . .

$$i = 8 \text{ бўлса, } g_{ik} = \begin{cases} 0{,}8\,(k-10), & k = 8;\ 9, \\ -0{,}2\,k, & 1 \leqslant k \leqslant 7; \end{cases}$$

$$i = 9 \text{ бўлса, } g_{9k} = \begin{cases} -0{,}9, & k = 9, \\ -0{,}1\,k, & 1 \leqslant k \leqslant 8. \end{cases}$$

Бошланғич яқинлашиш сифатида чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ва [0; 1] оралиқда узлуксиз бўлган бирор функцияни, чунончи $y^{[0]}(x) = x(x-1)$ функцияни оламиз (бу $y''(x) = 2$ тенгламанинг ечимидан иборат). $x_k = 0{,}1\,k$, $y_k^{[0]} = x_k(x_k - 1)$ $(k = \overline{1;\ 9})$, $f_k^{[0]} = 2 + (y_k^{[0]})^2$ қийматларни ҳисоблаймиз (жадвалга қ.). Кейинги яқинлашишлар (26) муносабат бўйича (r га кетма-кет $r = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots$ қийматларни қўйиш йўли билан) ҳисоблаб топилади:

$r = 0$ да $y_k^{[1]} = 0{,}01\,(g_{1k} f_1^{[0]} + g_{2k} f_2^{[0]} + \ldots + g_{9k} f_9^{[0]})$, хусусан, $k = 1$ да $y_1^{[1]} = -0{,}01\,((0{,}9 + 0{,}1)\cdot 2{,}0081 + (0{,}8 + 0{,}2)\cdot 2{,}0256 + (0{,}7 + 0{,}3)\,2{,}0441 + (0{,}6 + 0{,}4)\cdot 2{,}0576 + 0{,}5\cdot 2{,}0625) = -0{,}916665$, $k = 2$ да $y_2^{[1]} = -0{,}01\,((0{,}8 + 0{,}2)\cdot 2{,}0081 + (1{,}6 + 0{,}4)\cdot 2{,}0256 + (1{,}4 + 0{,}6)\cdot 2{,}0441 + (1{,}2 + 0{,}8)\cdot 2{,}0576 + 1\cdot 2{,}0625) = -0{,}163252$, $r = 1$ да $y_k^{[2]} = 0{,}01\,(g_{1k} f_1^{[1]} + g_{2k} f_2^{[1]} + g_{3k} f_3^{[1]} + \ldots + g_{8k} f_8^{[1]} + g_{9k} f_9^{[1]})$, хусусан, $k = 1$ да $y_2^{[2]} = 0{,}01 \sum_{i=1}^{9} g_{i1} f_i^{[1]} =$
$-0{,}1((0{,}8 + 0{,}2)\cdot 2{,}0084028 + (1{,}6 + 0{,}4)\cdot 2{,}0266512 + (1{,}4 + 0{,}6)\cdot 2{,}0460452 + (1{,}2 + 0{,}8)\cdot 2{,}0602555 + 1{,}0\cdot 2{,}064247) = -0{,}16339732$ ва ҳоказо.

3-мисолга **Итерация усули**

	k	1	2	3	4	5
r	x_k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	$y_k^{[0]}$	−0,09	−0,16	−0,21	−0,24	−0,25
	$f_k^{[0]}$	2,0081	2,0256	2,0441	2,0576	2,0625

	k	1	2	3	4	5
1	$y_k^{[1]}$ $f_k^{[1]}$	—0,0916665 2,0084028	—0,163252 2,0266512	—0,2145815 2,0460452	—0,24547 2,0602555	—0,2557825 2,0654247
2	$y_k^{[2]}$ $f_k^{[2]}$	—0,0917404	—0,1633973	—0,214787	—0,245358	—0,255844

	k	6	7	8	9
r	x_k	0,6	0,7	0,8	0,9
0	$y_k^{[0]}$ $f_k^{[0]}$	—0,24 2,0576	—0,21 2,0441	—0,16 2,0256	—0,09 2,0081
1	$y_k^{[1]}$ $f_k^{[1]}$	—0,24547 2,0602555	—0,2145815 2,0460452	—0,163252 2,0266512	—0,0916665 2,0084020
2	$y_k^{[2]}$ $f_k^{[2]}$	—0,245358	—0,214787	—0,163397	—0,091748

Изланаётган ечим қийматининг $x_k\,(k = 1;\ 9)$ нуқталардаги $y_k^{[1]}$ ва $y_k^{[2]}$ яқинлашишлари $1 \cdot 10^{-3}$ гача аниқликда уст-ма-уст тушаётганини кўрамиз. Бундан ҳам аниқроқ натижа олишга зарурият бўлса, кўрсатилган йўл билан $y_k^{[3]}$, $y_k^{[4]}$, ... яқинлашишлар ҳисобланиши керак бўлади.

Галеркин усули (3), (4) чегаравий масала ечимини аналитик кўринишда (функциялар йиғиндиси кўринишида) олишга имкон беради.

Ушбу

$$\begin{cases} L\,[y] = f\,(x), & L\,[y] \equiv y'' + p\,(x)\,y' + q\,(x)\,y, \\ \Gamma_a\,[y] = \alpha_0\,y\,(a) + \alpha_1\,y'\,(a), & \Gamma_b\,[y] = \beta_0\,y\,(b) + \beta_1 y'\,(b) \end{cases} \tag{29}$$

чегаравий масалани ечиш талаб этилсин. $[a, b]$ ораликда

$$u_0\,(x),\ u_1\,(x),\ \ldots,\ u_n\,(x),\ \ldots \tag{30}$$

базис функциялар системаси берилган ва улар ушбу шартларни қаноатлантирсинлар:

1) (30) система ортогонал, яъни

$$\int_a^b u_i\,(x)\,u_j\,(x)\,dx = 0, \quad i \neq j, \quad \int_a^b u_i^2\,(x)\,dx \neq 0; \tag{31}$$

2) (30) тўплам тўла системани ташкил этади, яъни барча $u_i\,(x)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ функцияларга ортогонал бўладиган нолдан фарқли бошқа функция мавжуд эмас;

2) чекли сондаги $u_i\,(x)$ $(i = \overline{0; n})$ базис функциялар системаси шундай танланадики, $u_0\,(x)$ функция бир жинсли бўлмаган

$$\Gamma_a\,[u_0] = A, \quad \Gamma_B[u_0] = B \tag{32}$$

чегаравий шартларни, $u_i\,(x)$ $(i = \overline{1; n})$ функциялар эса

$$\Gamma_a[u_i] = \Gamma_b\,[u_i] = 0\,(i = \overline{1; n}) \tag{32'}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирсинлар.

(29) чегаравий масаланинг изланаётган ечими

$$y\,(x) = u_0\,(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i\,u_i\,(x) \tag{33}$$

кўринишда топилади. c_i коэффициентлар шундай танланиши керакки, R боғланмаслик квадратидан олинган

$$\int_a^b R^2\,(x, c_1\ c_2, \ldots, c_n)\,dx \tag{34}$$

интегралнинг қиймати энг кичик бўлсин, бунда

$$R\,(x, c_1, \ldots, c_n) = L[u_0] + \sum_{i=1}^{n} c_i L\,[u_i] - f\,(x).$$

Ортогоналлик шартини

$$\int_a^b u_k\,(x)\,R\,(x, c_1, \ldots, c_n)\,dx = 0\,(k = \overline{1; n}),$$

ёки

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \int_a^b u_k\,(x)\,L\,[u_i]\,dx = \int_a^b u_k\,(x)\,\{f\,(x) - L[u_0]\}\,dx,$$

ёки

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\,a_{ik} = b_k \tag{35}$$

система кўринишида ёзамиз, бунда

$$a_{ik} = \int_a^b u_k(x)\, L[u_i]\, dx, \quad b_k = \int_a^b u_k(x)\{f(x) - L[u_0]\}\, dx. \qquad (36)$$

(35) системадан c_i қийматлар аниқлаб олинади.

4-мисол. $y'' + 2xy' - 2y = 2x^2$, $y'(0) = -2$, $y(1) + y'(1) = 0$ чегаравий масала Галеркин усули қўлланилиб ечилсин.

Ечиш. $u_0(x)$, $u_1(x)$, ... функциялар системасини 1, x, x^2, ... функциялар комбинациялари кўринишида танлаймиз. Бунда $u_0(x)$ функция (32) шартларни қаноатлантирсин, яъни $u_0'(0) = -2$, $u_0(1) + u_0'(1) = 0$ бўлсин, қолган $u_k(x)$ лар (32') шартларни қаноатлантирсин. $u_0(x)$ ни $u_0(x) = b + cx$ кўринишида излаймиз. $u_0'(x) = c$, иккинчи томондан шартга кўра $c = -2$; $u_0(1) + u_0'(1) = 0$, ёки $(b + c \cdot 1) + c = 0$, бундан $b = 4$. Шундай қилиб, $u_0(x) = 4 - 2x$. (32') га кўра $\Gamma_0[u_k] = 0$, $\Gamma_1[u_k] = 0$, ёки $u_k'(0) = 0$, $u_k(1) + u_k'(1) = 0$. $u_k(x)$ функцияларни $u_k(x) = b_k + x^{k+1}$ кўринишида излаймиз. $u_k'(0) = (k+1)x^k = 0$. Бунга қараганда $\Gamma_0[u_k] = 0$ шарт бажарилмоқда. Иккинчи шарт $\Gamma_1[u_k] = 0$ дан фойдаланиб, b_k ни топамиз: $(b_k + 1^{k+1}) + (k+1) \cdot 1^k = 0$, бундан $b_k = -(k+2)$. Биз $k = 1; 2$ бўлган ҳоллар билан чегараланамиз. $u_0(x) = 4 - 2x$, $u_1(x) = -3 + x^2$. $u_2(x) = -4 + x^3$ базис функциялар системаси ҳосил бўлади. Ечимни $y(x) = u_0(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$ кўринишида излаймиз:

$$L[u_0] = (4-2x) + 2x(4-2x)' - 2(4-2x) = -8,$$

$$L[u_1] = (x^2-3)'' + 2x(x^2-3)' - 2(x^2-3) = 2x^2+8,$$

$$L[u_2] = (x^3-4)'' + 2x(x^3-4)' - 2(x^3-4) = 4x^3+6x+8,$$

(36) бўйича:

$$a_{11} = \int_0^1 u_1(x)\, L[u_1]\, dx = \int_0^1 (x^2-3)(2x^2+8)\, dx = -22{,}93333,$$

$$a_{12} = \int_0^1 u_2(x)\, L[u_1]\, dx = \int_0^1 (x^3-4)(2x^2+8)\, dx = -32{,}33333,$$

$$a_{21} = \int_0^1 u_1(x)\, L[u_2]\, dx = \int_0^1 (x^2-3)(4x^3+6x+8)dx = -31{,}16667,$$

$$a_{22} = \int_0^1 u_2(x)\, L[u_2]\, dx = \int_0^1 (x^2-4)(4x^3+6x+8)\, dx = -44{,}22857,$$

$$b_1 = \int_0^1 u_1(x)\{f(x) - L[u_0]\}\, dx = \int_0^1 (x^2-3)(2x^2+8)dx = -22{,}93333,$$

$$b_2 = \int_0^1 u_2(x)\{f(x) - L[u_0]\}dx = \int_0^1 (x^3-4)(2x^2+8)dx = -32{,}33333.$$

(35) системани тузамиз:

$$\begin{cases} c_1 a_{11} + c_2 a_{21} = b_1, \\ c_1 a_{12} + c_2 a_{22} = b_2 \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} -22{,}93333\, c_1 - 31{,}16667\, c_2 = -22{,}93333, \\ -32{,}33333\, c_1 - 44{,}22857\, c_2 = -32{,}33333, \end{cases}$$

бундан $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ аниқланади. Изланаётган ечим:

$$y(x) = u_0(x) + 1 \cdot u_1(x) + 0 \cdot u_2(x) = x^2 - 2x + 1.$$

Коллокация усулида (29) чегаравий масала ечими

$$y(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x) \qquad (37)$$

кўринишида изланади. Бунда $u_i(x)$ $(i = \overline{0; n})$ чизиқли боғланмаган функциялар (32), (32') шартларни қаноатлантиради.

$$R(x, c_1, \ldots, c_n) = L[y] - f(x) = L[u_0] - f(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i L[u_i] \qquad (38)$$

фарқ шундай олинадики, y $[a, b]$ оралиқдаги коллокация нуқталари деб аталувчи $x_1, x_2, \ldots, x_n$ нуқталар системасида нолга айлансин. Бу нуқталарнинг сони (33) ифодадаги номаълум коэффициентлар сонига тенг бўлиши керак. $c_1, c_2, \ldots, c_n$ коэффициентлар

$$\begin{cases} R(x_1, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0, \\ R(x_2, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R(x_n, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0 \end{cases} \qquad (39)$$

системадан аниқланади.

Коллокация усули чизиқли бўлмаган дифференциал тенгламаларни ечишда ҳам қўлланиши мумкин. Жумладан, $y'' = f(x, y, y')$ тенгламанинг ечими чизиқли чегаравий шартни қаноатлантирсин. Бу ҳолда боғланмаганлик (фарқ) $R(x) = y'' - f(x, y, y')$, (39) эса $c_1, c_2, \ldots, c_n$ номаълумларга нисбатан чизиқли бўлмаган тенгламалар системасидан иборат бўлади.

5-мисол. Коллокация усули қўлланилиб, $y'' + (1 + x^2)y + 1 = 0$ тенгламанинг $y(-1) = y(1) = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Ечиш: Тенгламага ва чегаравий шартларга қараганда изланаётган ечим жуфт функция бўлиши керак. Базис функциялар сифатида $u_0(x) = 0$, $u_1(x) = 1 - x^2$, $u_2(x) = x^2(1 - x^2)$ кўпҳадларни оламиз. Ечимни $y = c_1(1 - x^2) + c_2x^2(1 - x^2) = (1 - x^2)(c_1 + c_2x^2)$ кўринишида излаймиз. Коллокация нуқталари $x_0 = 0$, $x_1 = 0,5$ бўлсин. Бизда $f(x) = -1$, $L[y] = (1 - x^2)(c_1 + c_2x^2)'' + (1 - x^4)(c_1 + c_2x^2) = -(1 + x^4)c_1 + (2 - 11x^2 - x^6)c_2$. Боғланмаганлик: $R(x) = L[y] - f(x) = 1 - (1 + x^4)c_1 + (2 - 11x^2 - x^6)c_2$. Бунга $x_0 = 0$, $x_1 = 0,5$ қийматларни қўйиб, $1 - c_1 + 2c_2 = 0$, $1 - \frac{17}{16}c_1 - \frac{49}{64}c_2 = 0$ системани тузамиз. Бундан $c_1 = 0,957$, $c_2 = -0,022$ олинади. Изланаётган ечим: $y \approx 0,957(1 - x^2) - 0,022x^2(1 - x^2)$.

МАШҚЛАР

1—7-чегаравий масалаларнинг x_k нуқталардаги ечим қийматлари чекли айирмалар усуллари (чизиқли алгебраик тенгламалар системасига келтириш усули, ҳайдаш усули, отишув усули) қўлланилиб топилсин:

1. $y''(x) = \frac{2}{x}y'(x) - \frac{4}{x^2+2}y(x) = 8$, $y'(0,5) = 0,5$, $y(1) + y'(1) = 1$, $x_k = 0,1k$, $k = \overline{5; 10}$, $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-2}$.

2. $y''(x) + y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = \frac{x+1}{x}$, $y(0,5) = -0,5\ln 2$, $y(1) = 0$, $x_k = 0,1k$, $k = \overline{5; 10}$, $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-2}$.

3. $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-1,5k}$, $y(0) = 3$, $y(1) = 0,89252$, $x_k = 0,2k$, $k = \overline{1; 4}$, $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-3}$.

4. $y'' - 4y' + 4y = f(x)$, $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-3}$, бунда:

1) $f(x) = 1$, $y(0) = 2,25$, $y(1) = 0,25$, $x_k = 0,1k$, $k = \overline{1; 9}$;

2) $f(x) = e^{-x}$, $y(0) = 1\frac{1}{9}$, $y(1, 2) = 24,284451$, $x_k = 0,1k$, $k = \overline{1; 11}$,

3) $f(x) = 3e^{2x}$, $y(-1) = 0,203003$, $y(0) = 1$, $x_k = 0,2k$, $k = \overline{1; 4}$;

4) $f(x) = 2(\sin 2x + x)$, $y(0) = 1,75$, $y(1) = 15,6741$, $x_k = 0,1k$, $k = \overline{1; 9}$;

5) $f(x) = \sin x \cos 2x$, $y(0) = 1\frac{11}{169}$, $y(1) = 109,20221$, $x_k = 0,1k$, $k = \overline{1; 9}$.

5. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$, $y'(0) = 3,2$, $y(1) = 3,7168365$, $x_k = 0,1k$, $k = \overline{1; 9}$.

6. $y'' + y = -\sin 2x$, $y(\pi) = 1$, $y(1,5\pi) = \frac{1}{3}$, $x_k = \frac{\pi}{20}$, $k = \overline{1; 9}$.

7. Тенгламаларнинг [0; 1] оралиқда $y(0) = y(1) = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечим қийматлари топилсин ($x_i = 0,1i$, $i = \overline{1; 9}$, $\alpha = 1 + 0,4k$, $k = \overline{0; 3}$, $\beta = 2,5 + 0,5n$, $n = \overline{0; 5}$):

1) $y'' + (\alpha + x^3)y' + (1 - x^2)y = e^{1-\beta}x^2$;

2) $y'' + x^2y' + (\alpha - x)y = \frac{x}{x^2 + \beta}$;

3) $y'' + y'\sin\alpha x + y = \frac{1}{\beta + \sin^2\alpha x}$;

4) $y'' + \dfrac{y'}{\sqrt{x^2+\beta}} + \alpha y = x.$

8—10- масалаларда чегара қийматлари билан берилган иккинчи тартибли чизиқли бўлмаган дифференциал тенгламаларнинг $[a, b]$ оралиқнинг x_k нуқталардаги ечим қийматлари итерация усули қўлланилиб топилсин (h — қадам, ε — талаб қилинган аниқлик):

8. $xy'' + x(y')^2 - y' = 0$, $y(2) = 2$, $y(4) = 3{,}386294$, $h = 0{,}2$, $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-4}$.

9. $2y'' = 3y^2$, $y(-2) = 1$, $y(0) = 0{,}25$, $h = 0{,}2$, $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-3}$.

10. $8y'' + 9y'^4 = 0$, $y(0) = -1$, $y(7) = 2$, $h = 1$, $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-3}$.

11—15- чегаравий масалалар аналитик усуллар (Галеркин, коллокация усуллари) қўлланилиб ечилсин:

11. $2y'' + 5y' = f(x)$, бунда:

1) $f(x) = 5x^2 - 2x - 1$, $y(0) = 2$, $y'(1) = -0{,}1252125$;

2) $f(x) = e^x$, $y(0) + y'(0) = -0{,}21428571$, $y(1) = 1{,}470411$;

3) $f(x) = 29\cos x$, $y'(0) = 2{,}5$, $y(1) + y'(1) = 8{,}3880768$.

12. $y''(x) + \dfrac{0{,}5\alpha}{x\alpha+1} y'(x) - \sqrt{\alpha x + 1}\, y(x) = 2(\alpha x + 1)$, $y'(0) = -\alpha$, $y(1) = -2\sqrt{\alpha+1}$, $\alpha = 0{,}3m$, $m = 1; 10$.

13. $y''(x) + xy'(x) - 2y(x) = 2(\alpha^2 - 1)$, $y(0) = 1$, $y(1) + y'(1) = 3\alpha^1 + 1$, $\alpha = 0{,}5m$, $m = \overline{1; 10}$.

14. $y'' - 2xy' + 2y = f(x)$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 1$, бунда:
1) $f(x) = x$; 2) $f(x) = 3x^2 + x - 1$; 3) $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + x$;
4) $f(x) = 0{,}5(5x^3 - 3x^2 - 0{,}5x + 1)$.

15. $y'' - y' = f(x)$, бунда:

1) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$, $y(0) = 3{,}3862943$, $y(1) = 1{,}5534866$;

2) $f(x) = e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$ $y(-1) = 1{,}5841668$, $y(0) = 2{,}2853981$;

3) $f(x) = e^{2x}\cos e^x$, $y(0) = 1{,}4596977$, $y(1) = 4{,}6300157$.

9- ЛАБОРАТОРИЯ ИШИ

1- топшириқ: Чегаравий масалаларнинг $x_k \in [a, b]$, $k = \overline{0{:}10}$, нуқталардаги ечим қийматлари чекли-айирмали усуллардан бири қўлланилиб, $1 \cdot 10^{-3}$ аниқликда топилсин:

Вариант:

1. $y'' + xy' + y = x + 1$, $y(0{,}5) + 2y'(0{,}5) = 1$, $y'(0{,}8) = 1{,}2$.
2. $y'' + 0{,}5xy' + (1 + 2\pi^2 x^2) y = 4x$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1{,}367$.
3. $y'' + (x - 1) y' + 3{,}125y = 4x$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1{,}367$.
4. $y'' + 2xy' + 2y = \dfrac{2(5-2x)}{(2-x)^3}$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1{,}367$.
5. $y'' + (1 + x^3) y' + (1 - x^2) y = e^{-2{,}5x^2}$, $y(0) = y(1) = 0$.
6. $y'' + x^2 y' + (1 - x) y = \dfrac{x}{x^2 + 2{,}5}$, $y(0) = y(1) = 0$.
7. $(x^2 + 1) y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y(0) = -1$, $y(1) = 1$.
8. $y'' + y'\sin x + y = \dfrac{1}{2{,}5 + \sin^2 x}$, $y(0) = y(1) = 0$.
9. $x^2(x + 1) y'' - 2y = 0$, $y(1) = 2$, $y(2) = 1{,}5$.
10. $y'' + \dfrac{y'}{\sqrt{x^2 + 2{,}5}} + y = x$, $y(0) = y(1) = 0$.
11. $y'' - 2(1 + \mathrm{tg}^2 x) y = 0$, $y(0) = 0$, $y(0{,}785) = 3{,}4938$
12. $(x^2 + 1) y'' + 5xy' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0{,}3534$.
13. $y'' + x^2 y' + (1{,}4 - x) y = \dfrac{x}{x^5 + 3}$, $y(0) = y(1) = 0$.
14. $y'' - xy' + xy = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1{,}083$.
15. $(x^2 + 1) y'' + 5xy' + 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = 0{,}3534$.
16. $xy'' + y' - xy = 0$, $y(1) = 1{,}266059$, $y(2) = 2{,}277778$
17. $xy'' + 2y' + xy = 0$, $y(1) = 0{,}841471$, $y(2) = 0{,}841471$.
18. $2x^2 y'' + (3x - 2x^2) y' - (x + 1) y = 0$, $y(1) = 2{,}718182$, $y(2) = 3{,}69453$.
19. $9x^2 y'' - (x^2 - 2) y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1{,}033586$.

Эркин тебранишлар тенгламаси: $y'' + ay' + by^1 = 0$.

Вариант	a	b	Чегаравий шарт:
20	2	0,5	$y(0)=2,\ y(2)=1{,}602618$
21	2	1	$y(-1)=0,\ y(0)=1$
22	0	$\pi^2/4$	$y(0)=y(1)=1$

23. $3x^2y''-x^2y'+(x-2)y=0,\ y(1)=2{,}5,\ y(2)=2{,}5.$

24. $y''+(x^4+1)y=0,\ y(1)=0{,}3149857,\ y(2)=-0{,}4446632.$

25. $(x^3+1)y''-y=0,\ y(0)=0,\ y(1)=1.$

2-топширик. Чегаравий масалаларнинг ечими Галеркин ва коллокация усуллари қўлланилиб топилсин.

Вариант:

1. $y''-y'\cos x+y\sin x=\cos x,\quad y(-\pi)=y(\pi)=2.$
2. $y''+x^2y'-xy=e^x,\ y(0)=y(1)=0.$
3. $y''-y'\cos x+y\sin x=\sin x,\quad y(-\pi)=y(\pi)=2.$
4. $y''+x^2y'-xy=e^{x^2},\ y(0)=y(1)=0.$
5. $y''-y'\cos x+y\sin x=\cos 2x,\ y(-\pi)=y(\pi)=2.$
6. $y''+x^2y'-xy=\sin x,\ y(0)=y(1)=0.$
7. $y''-y'\cos x+y\sin x=\sin 2x,\ y(-\pi)=y(\pi)=2.$
8. $y''+x^2y'-xy=\cos x,\ y(0)=y(1)=0.$
9. $y''-2xy'+2y=3x^2+x-1,\ y(0)=0,\ y'(1)=1.$
10. $y''+y'-\frac{y}{x}=x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{8},\ y(0)=0,\ y'(1)=1.$
11. $y''-2xy'+2y=5x^3,\ y(0),\ y'(1)=1.$
12. $y''+x^2y'-xy=\operatorname{tg} x,\ y(0)=y(1)=0.$
13. $y''-2xy'+2y=5x^3-3x^2+x,\ y(0)=0,\ y'(1)=1.$
14. $y''-2xy'+2y=0{,}5(x^3-3x^2-0{,}5x+1),\ y(0)=0,\ y'(1)=1.$
15. $y''-xy'-y=1,\ y(0)=1,\ y'(1)=1{,}297443.$
16. $y''-\frac{2x}{x^2+1}y'+\frac{2y}{x^2+1}=0,\ y(0)=-1,\ y'(1)=3.$
17. $x^2y''-xy'+y=4x^3,\ y(1)=2,\ y(e)=25{,}5221.$
18. $(1+x^2)y''+2xy'-2y=4x^2+2,\ y(1)=1,\ y(2)=4.$

19. $y''-(1+x^2)y=0,\ y(0)=-2,\ y'(1)=\frac{7}{12}.$
20. $y''-2y=4x^2e^{x^2},\ y(0)=3,\ y(1)=7{,}07465.$

$y''+a^2y=\operatorname{ctg} ax$ учун:

Вариант	a	Чегаравий шарт
21	1	$y(\pi/4)=0{,}5328401,\ y(\pi/2)=1.$
22	π	$y(0{,}6)=0{,}6728232,\ y(0{,}8)=-0{,}154815.$
23	2	$y(\pi/6)=1{,}247097,\ y(\pi/3)=0{,}4849537.$
24	$\pi/2$	$y(1)=1,\ y(1{,}5)=0{,}2525837.$
25	$\pi/6$	$y(1)=-1{,}03745,\ y(2)=0{,}18623.$

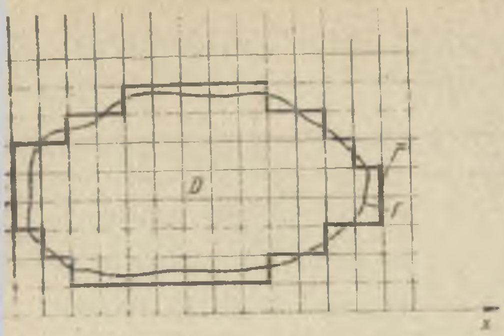
10-боб. ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар кўпинча сонли усуллар (чунончи, тўрлар усули) ва аналитик усуллар (чунончи, акад. В. Г. Галеркин усули) қўлланилиб ечилади. Биз ушбу бобда асосан тўрлар усуллари (айирмали усуллар) устида тўхталамиз.

Айирмали схемалар, уларни қуриш ва дифференциал масалани аппроксимациялаш. Тўрлар усули ёки чекли айирмалар усулининг моҳияти ҳосилаларни чекли—айирмали ифодалар орқали алмаштириш йўли билан дифференциал тенгламани чекли — айирмали (алгебраик) тенгламага келтиришдан иборат. Масалан, бирор кўрсатилган Γ контур билан чегараланган D соҳанинг ичида ушбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad (1)$$

Лаплас тенгламасини, Γ чегарада эса маълум шартларни қаноатлантирувчи $u(x, y)$ функцияни топиш талаб этилсин (2- чизма). Шу мақсадда XOY текислигида ўзаро перпендикуляр $x=x_0+ih$ ва $y=y_0+kl$ $(i,k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$ тўғри чизиқлар оилаларини D соҳани қоплайдиган қилиб чизайлик. Ҳосил бўлган тўрдан Γ эгри чизиқли контурни яхши аппроксимацияловчи $\overline{\Gamma}$ тўрли контур ажратилади. $\overline{\Gamma}$ контур $\overline{D}$ тўрли соҳани чегаралайди. $\overline{D}$ соҳанинг ҳар қайси (x_i, y_k), $i, k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ нуқтаси учун айирмали тенглама ечимининг u_{ik} қиймати топилиши керак. Бу қийматлар (1)



2- чизма

дифференциал тенгламанинг тақрибий ечим қийматларидан иборатдир. $\overline{\Gamma}$ контур шундай ясаладики, берилган эгри чизиқли Γ контур $\overline{\Gamma}$ билан чегараланган тўрнинг икки қўшни ички тугуни оралиғидан эмас, балки битта чегара ва битта ички тугун орасидан ўтадиган бўлсин.

(1) тенгламага ушбу

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (2)$$

рмали тенглама мувофиқ келади, бунда:

$$u_{xx} = \frac{\frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} - \frac{u(x, y) - u(x-h, y)}{h}}{h} =$$

$$= \frac{1}{h^2} [u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)],$$

$$u_{xx} = \frac{1}{h^2} [u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}]. \qquad (3)$$

$$u_{yy} = \frac{1}{l^2} [u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1}].$$

Дирихле масаласи (биринчи чегаравий масала) учун тўр ули. Шундай $u = u(x, y)$ функция топилиши керакки, D соҳанинг ичида

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \qquad (4)$$

уассон тенгламасини, Γ чегарада

$$u \,|\, \Gamma = \varphi(x, y) \qquad (5)$$

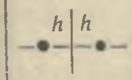
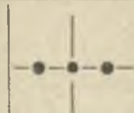
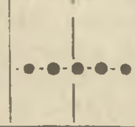
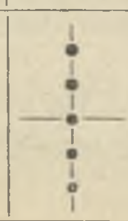
артни қаноатлантирсин, бунда $\varphi(x, y)$ — берилган узлуксиз ункция.

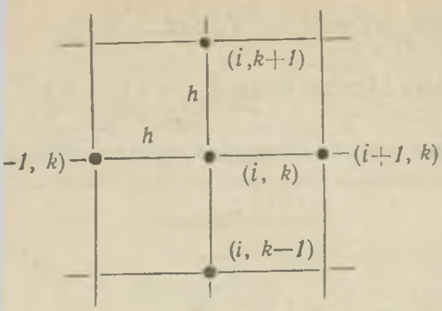
Ox ва Oy ўқлари бўйича h ва l қадам билан тўр қуразз. (4) тенгламадаги иккинчи тартибли ҳосилаларни мос ирмали ифодалар билан алмаштирсак, ушбу

$$\frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2} + \frac{u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1}}{l^2} = f_{ik} \qquad (6)$$

айирмали тенглама ҳосил бўлади, бунда $f_{ik} = f(x_i, y_k)$ $(i, k = 0, \pm 1, \ldots)$.

Хусусий ҳосилаларни чекли айирмалар орқали ифодалаш:

№	Ҳосила	Схема	Тақрибий формула
1	$\frac{\partial u}{\partial x}$		$\frac{\partial u_{ik}}{\partial x} = \frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2h}$
2			$\frac{\partial u_{ik}}{\partial x} = \frac{u_{i+1,k+1} - u_{i-1,k+1} + u_{i+1,k-1} - u_{i-1,k-1}}{4h}$
3	$\frac{\partial u}{\partial y}$		$\frac{\partial u_{ik}}{\partial y} = \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2l}$
4			$\frac{\partial u_{ik}}{\partial y} = \frac{u_{i+1,k+1} + u_{i-1,k+1} - u_{i+1,k-1} + u_{i-1,k-1}}{4l}$
5	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$		$\frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2}$
6			$\frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x^2} = \frac{1}{12h^2}(-u_{i+2,k} + 16u_{i+1,k} - 30u_{ik} + 16u_{i-1,k} - u_{i-2,k})$
7	$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$		$\frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4hl}(u_{i+1,k+1} - u_{i+1,k-1} - u_{i-1,k+1} + u_{i-1,k-1})$
8	$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$		$\frac{\partial^4 u_{ik}}{\partial y^4} = \frac{1}{l^4}(u_{i,k+2} - 4u_{i,k+1} + 6u_{i,k} - 4u_{i,k-1} + u_{i,k-2})$



3- чизма

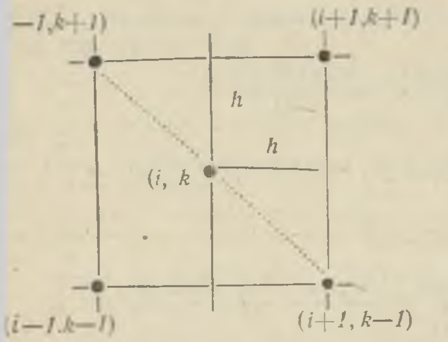
$\bar{G}$ соҳанинг барча тугунлари учун u_{ik} функциянинг қийматларини ҳисоблашда тугунлар нечта бўлса, шунча тенгламадан иборат система тузилиши керак.

Квадрат тўрли (яъни $l = k$ бўлган) соҳада (6) тенглама соддалашади:

$$u_{i+1,k}+u_{i-1,k}+u_{i,k+1}+u_{i,k-1}-4u_{ik}=h^2 f_{ik} \qquad (7)$$

ёки Лаплас тенгламаси учун:

$$u_{ik}=\frac{1}{4}(u_{i+1,k}+u_{i-1,k}+u_{i,k-1}+u_{i,k+1}) \qquad (8)$$



4- чизма

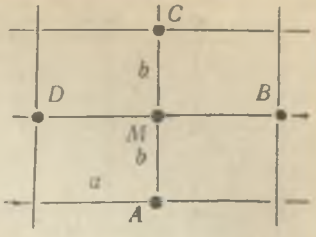
(3- чизма; тугунлар ўз индекслари билан ишоралаган), ёки 4- чизмада кўрсатилган схемадан фойдаланилса, Лаплас ва Пуассон тенгламалари учун чекли — айирмали тенгламалар қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} u_{ik}=\dfrac{1}{4}\left(u_{i-1,k-1}+u_{i+1,k-1}+u_{i-1,k+1}+u_{i+1,k+1}\right), \\ u_{ik}=\dfrac{1}{4}\left(u_{i-1,k-1}+u_{i+1,k-1}+u_{i-1,k+1}+u_{i+1,k+1}\right)+ \\ +\dfrac{h^2}{2} f_{ik}. \end{cases} \qquad (9)$$

Лаплас тенгламасини чекли — айирмали тенглама билан алмаштириш хатоси $|R_{ik}| \leqslant \frac{h^2}{6} M_4$ тенгсизлик билан баҳоланади, бунда $M_4 \max\left\{\left|\frac{\partial^4 4}{\partial x^4}\right|, \left|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right|\right\}$.

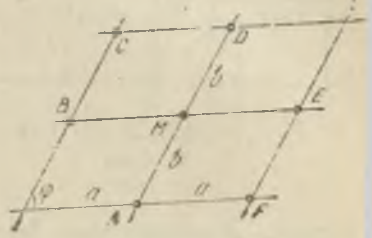
Агар тўр ячейкалари тўғри тўртбурчак шаклида бўлса (яъни тўғри тўртбурчакли тўр, 5- чизма), $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)$ Пуассон тенгламасини ечиш учун

$$u_M=\frac{a^2(u_A+u_C)+b^2(u_B+u_D)-a^2b^2 f_M}{2(a^2+b^2)}$$



5- чизма

айирмали тенгламани оламиз. Квадрат ($a = b$) бўлган ҳол учун бу тенглама соддалашиб, (9) муносабатларнинг иккинчиси ҳосил бўлади. Параллелограмм тўр учун (6- чизма):



6- чизма

$$u_M=\frac{\lambda_1 s_1+\lambda_2 s_2+\lambda_3 s_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}-\frac{f_M\sin^2\varphi}{2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}, \quad \lambda_1=\frac{-\cos\varphi}{ab}+\frac{1}{b^2},$$

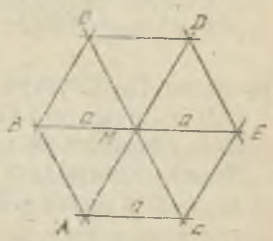
$$\lambda_2=\frac{1}{a^2}-\frac{\cos\varphi}{ab}, \quad \lambda_3=\frac{\cos\varphi}{ab}, \quad s_1=\frac{u_A+u_D}{2},$$

$$s_2=\frac{u_B+u_E}{2}, \quad s_3=\frac{u_C-u_F}{2}.$$

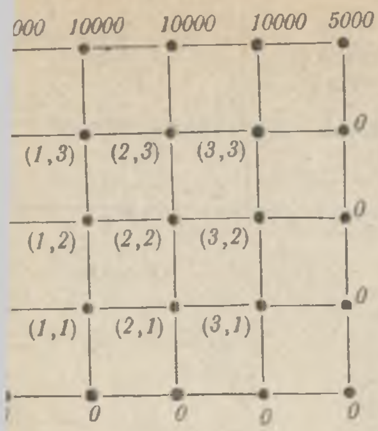
$\varphi=\frac{\pi}{2}$ да тўғри тўртбурчакли тўрга, $a=b$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$ да тенг томонли учбурчакли тўрга ўтилади (7- чизма). Кейинги ҳолда:

$$u_M=\frac{s_1+s_2+s_3}{3}-\frac{f_M a^2}{4}=$$

$$=\frac{u_A+u_B+u_C+u_D+u_E+u_F}{6}-\frac{f_M a^2}{4}.$$



7- чизма



8- чизма

1- мисол. Текис пластинка томони 1 га тенг квадрат шаклида бўлиб, ташқи муҳитдан изоляцияланган, чекка нуқталари эса 8- чизмада кўрсатилганидек доимий катталикдаги температура билан иситилади. Пластинканинг ички нуқталарида температура қандай тақсимланиши аниқлансин.

Ечиш: Температура тақсимотини $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=$ $=0$ Лаплас тенгламасининг $u=u\,(x,\ y)$ ечими ради. Координаталар бошини $A\ (0;\,0)$ нуқтага жойлашрайлик. Тўққизта $(1;\ 1),\ (2;\ 1),\ \ldots,\ (3;\ 3)$ ички нуқтардаги (тугунлардаги) $u_{11},\ \ u_{21}\ ,\ \ldots,\ u_{33}$ қийматларни пишимиз керак. Чегаравий қийматлар симметрик ($u_{11}=$ $u_{31},\ u_{12}=u_{32},\ \ u_{13}=u_{33}$) бўлганидан, тўққизта эмас, бал- олти тугун учун (9) чекли — айирмали тенгламадан ибоіт система тузамиз:

$$
\begin{aligned}
&0+u_{21}+u_{12}+0=4u_{11},\\
&u_{11}+0+u_{31}+u_{22}=4u_{21},\\
&0+u_{11}+u_{22}+u_{13}=4u_{13},\\
&u_{12}+u_{21}+u_{32}+u_{23}=4u_{22},\\
&0+u_{12}+u_{23}+10000=4u_{13},\\
&u_{12}+u_{22}+u_{33}+10000=4u_{23},
\end{aligned}
\qquad \text{ёки} \qquad
\left|\begin{aligned}
&u_{21}+u_{12}=4u_{11},\\
&2u_{11}+u_{22}=4u_{21},\\
&u_{11}+u_{22}+u_{13}=4u_{12},\\
&u_{21}+2u_{12}+u_{23}=4u_{22},\\
&u_{12}+u_{23}+10000=4u_{13},\\
&u_{12}+u_{22}+u_{13}+10000=4u_{23}.
\end{aligned}\right.
$$

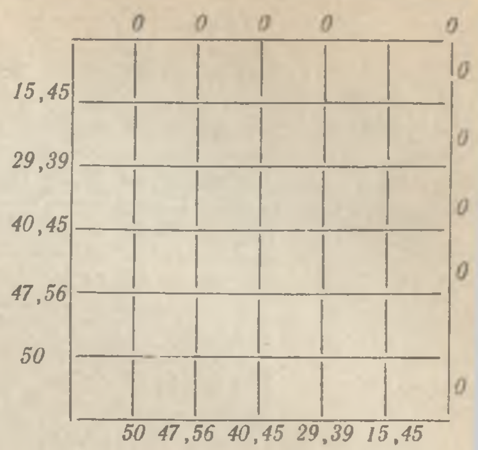
Системани Гаусс усули билан ечиб, $u_{11}=u_{31}=714$, $u_{21}=$ $=982$, $u_{12}=u_{32}=1875$, $u_{22}=2500$, $u_{13}=u_{33}=4286$, $u_{23}=$ $=5268$ қийматларни топамиз.

Чекли — айирмали тенгламалар системасини итерация усули билан ечиш (Либман ўрталаш жараёни): $u_{ij}^{[0]}$ бошланғич яқинлашиш танланади; турли соҳанинг ички нуқталари учун $u_{ij}^{[k]}$ яқинлашишлар ушбу формула бўйича топилади:

$$
u_{ij}^{[k+1]}=\frac{1}{4}[u_{i+1,j}^{[k]}+u_{i-1,j}^{[k]}+u_{i,j+1}^{[k]}+u_{i,j-1}^{[k]}],\quad k=0,1,2,\ \ldots \qquad (10)
$$

Бошланғич яқинлашишни топиш йўллари: 1) ички тугунларга мос бошланғич яқинлашишни топиш учун чегарадаги қийматларга асосланган интерполяциядан фойдаланиш; 2) чекли айирмали тенгламаларни каттароқ қадам бўйича тузиш. Лаплас тенгламаси тақрибий ечимининг хатоси Рунге принципидан фойдаланиб баҳоланиши мумкин.

2- мисол. Чегаравий шартлар квадратда (9- чизма) берилган Лаплас тенгламаси ечилсин.



9- чизма

	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
15,45						0,00
29,39						0,00
40,45						0,00
47,56						0,00
50,00						0,00
	50,00	47,56	40,45	29,39	15,45	

10- чизма

Ечиш: Масалани ечиш учун 10- чизмада тасвирланганидек ҳисоблаш андазаси ясалади (ҳар қайси тугун квадратга алмаштирилган). Итерация жараёнида чегаравий қийматлар ўзгармай қолади. Шунга кўра кейинги андазалар бу қийматларсиз, 5×5 кўринишидаги квадратлар шаклида тасвирланади. Андазаларни тўлдириш тартиби:

1) Бошланғич яқинлашишларни аниқлаш: ички тугунлардаги чегаравий қийматларни интерполяциялаймиз.

1-андаза

12,88	10,30	7,72	5,15	2,31
24,54	19,69	14,85	10,00	5,15
34,05	27,65	21,25	14,85	7,72
40,92	35,29	27,65	19,69	10,30
45,46	40,92	34,05	24,54	12,88

2-андаза

12,57	10,07	7,58	5,08	2,58
24,00	19,34	14,66	10,00	
33,39	27,32	21,25		
40,34	34,28			
45,46				

u (x, y) функция 5-устун бўйича (пастдан юқорига томон) 15,45 дан 0,00 гача чизиқли камаяди, деб қабул қилинса, u_{i5} нинг бошланғич қийматлари сифатида $u_{i5}^{[0]} = \frac{15,45}{6}(6-i)$ $(i = \overline{1;5})$ қийматлар олиниши мумкин: $u_{15}^{[0]} = 12,88$, $u_{25}^{[0]} = 10,30$, $u_{35}^{[0]} = 7,72$, $u_{45}^{[0]} = 5,15$, $u_{55}^{[0]} = 2,31$. Бунда $u_{5i}^{[0]} = u_{i5}^{[0]}$ бўлганидан, ўнг томондаги 5-устун ва юқоридан биринчи сатр катакларини симметрик тўлдирамиз (1-андаза). Энди юқоридан иккинчи сатр (ва ўнгдан иккинчи устун) элементларини ҳисоблашда u (x, y) функция 29,39 дан 5,15 гача чизиқли камаювчи деб олинади ва $u_{i4}^{[0]} = \frac{29,39-5,15}{5}(6-i)+5,15$ $(i=\overline{2;5})$ муносабатдан фойдаланилади. Шу тартибда 1-андазанинг қолган катаклари тўлдирилади; 2) 1-андазани асосий андазанинг (10-чизма) ўртасига (бўш катаклар устига) жойлаштирамиз ва (10) формуладан фойдаланиб, 1-яқинлашишларни бирма-бир ҳисоблаймиз. Жумладан,

$$u_{15}^{[1]} = \frac{1}{4}\left(u_{25}^{[0]} + u_{05}^{[0]} + u_{16}^{[0]} + u_{14}^{[0]}\right) = \frac{1}{4}(10,30+15,45+0,00+24,54) = 12,57,$$

$$u_{14}^{[1]} = \frac{1}{4}\left(u_{24}^{[0]} + u_{04}^{[0]} + u_{15}^{[0]} + u_{13}^{[0]}\right) = \frac{1}{4}(19,69 + 29,39 + 34,05 + 12,88) = 24,00.$$

Натижаларни 2-андазага ёзамиз (қийматлар симметрик бўлганидан, андазанинг фақат ярми тўлдирилган). Ҳисоблашлар кетма-кет келувчи иккита итерация (иккита андаза қийматлари) бир-биридан тайинланган ε қадар (масалан, 0,05 гача аниқликда) фарқ қилганида тўхтатилади. Қуйида намуна учун яна икки андаза келтирилган:

11-андаза

11,89	9,18	6,94	4,60	2,32
22,84	17,81	13,42	9,06	
32,07	25,58	19,58		
39,24	32,47			
44,64				

16-андаза

11,78	9,00	6,64	4,43	2,22
22,66	17,51	13,06	8,78	
32,86	25,22	19,18		
39,05	32,16			
44,54				

16-андаза қийматлари 2-мисолда берилган чегаравий масаланинг ечимларидан иборат.

Параболик тур тенгламалар учун тўрлар усули. Ушбу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1$$

тенгламани,

$$u(x, 0) = f(x) \quad (0 < x < s) \qquad (1$$

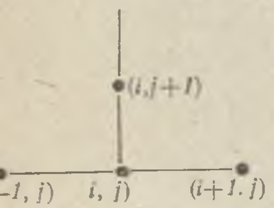
бошланғич шартни ва

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(s, t) = \psi(t) \qquad (1$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $u(x, t)$ функцияни топиш талаб қилинади (иссиқлик ўтказувчанлик учун аралаш масала). Бунинг учун $\tau = a^2 t$ алмаштириш орқали (11) тенглама $\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ кўринишга келтирилади. Шунга кўра кейинги мулоҳазаларда $a = 1$ деб қабул қилиниши мумкин.

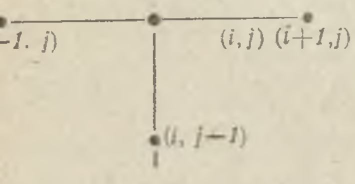
11- чизма

Айтайликки, $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant s$ ярим текисликда иккита $x = ih$, $t = jl$ $(i, j = 0, 1, 2, \ldots)$ параллел тўғри чизиқлар оиласи қурилган бўлсин (11- чизма).



12- чизма

Биз $x_i = ih$, $t_j = jl$, $u(x_i, t_j) = u_{ij}$ белгилашларни киритамиз ва ҳар қайси (x_i, t_j) ички тугун учун ҳосилаларни мос айирмалар билан алмаштирамиз:



13- чизма

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}, \tag{14}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{l}$$

ва

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij} \approx \frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{l}. \tag{14'}$$

$a = 1$ бўлган ҳолда (11) тенглама қуйидагича алмаштирилиши мумкин:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{l} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}, \tag{15}$$

$$\frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{l} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} \tag{15'}$$

ёки $\sigma = l/h^2$ белгилаш киритилса:

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\sigma)\, u_{ij} + \sigma\, (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) \ (16) \ \text{(12-чизма}$$

$$(1 + 2\sigma)\, u_{ij} - \sigma\, (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} = 0 \ (17) \ \text{(13- чизма}$$

Кейин σ шундай танланиши лозимки, натижада айирмал тенглама турғун ва хатоси энг кичик бўлсин. (17) тенглам ҳар қандай σ да, (16) тенглама эса $0 < \sigma \leqslant 0{,}5$ да турғу дир. $\sigma = 1/2$ ва $\sigma = 1/6$ да (16) тенглама $u_{i,j+1} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{2}$, $u_{i,j+1} = \frac{1}{6}(u_{i-1,j} + 4u_{ij} + u_{i+1,j})$ кўриниш га келади. Бу тенгламалар ва (17) тенглама $0 \leqslant x \leqslant$ $0 \leqslant t \leqslant T$ соҳада мос равишда

$$|u - \bar{u}| \leqslant \frac{2}{3} M_1 h^2, \quad |u - \bar{u}| \leqslant \frac{T}{135} M_4 h^4,$$

$$|u - \bar{u}| \leqslant T\left(\frac{l}{2} + \frac{h^2}{12}\right) M_1$$

хатога эга бўлади, бунда

$$M_1 = \max\ \{|f^{(4)}(x)|,\ |\varphi'(t)|,\ |\psi''(t)|\},\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant s,$$

$$M_2 = \max\ \{|f^{(6)}(x)|,\ |\varphi^{(4)}(t)|,\ |\psi^{(4)}(t)|\},\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant s$$

Бир жинсли бўлмаган параболик тенглама учун арала масала тўрлар усули билан ечилганида $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,$ дифференциал тенглама $u_{i,j+1} = (1 - 2\sigma)\, u_{ij} + \sigma\, (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + lF_{ij}$, ёки $\sigma = 1/2$ ва $\sigma = 1/6$ бўлганда

$$u_{i,j+1} = 0{,}5\ (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + lF_{ij}, \tag{16}$$

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}(u_{i-1,j} + 4u_{ij} + u_{i+1,j}) + lF_{ij} \tag{17}$$

айирмали тенгламага алмаштирилади. Кейинги икки айир мали тенгламанинг хатоси қуйидагича баҳоланади:

$$|\bar{u} - u| \leqslant \frac{1}{4}\left(M_2 + \frac{1}{3} M_4\right) h^2, \quad |\bar{u} - u| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3} M_3 + \frac{1}{5} M_5\right) h^4,$$

бунда

$$M_2 = \max\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}\ M_3 = \max\left\{\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right\},\ M_4 = \max\left\{\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right\},$$

$$M_5 = \max \left\{ \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right\},$$

3-мисол. $\sigma = 0{,}5$ бўлган ҳол учун (16) тенгламадан йдаланиб, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u\,(x,\ 0) = \sin \pi x\ (0 \leqslant x \leqslant 1$, $u\,(0,\ t) = u\,(1;\ t) = 0$, $(0 \leqslant t \leqslant 0{,}025)$ масала ечилсин.

Ечиш: x аргумент бўйича қадам $x = 0{,}1$ бўлсин. $\sigma = \frac{l}{h^2} = 0{,}5$. Шунга кўра t аргумент бўйича қадам $l = 0{,}5h^2 = 0{,}005$ бўлади. Чегара қийматлари симметрик. Шу сабабли двалга $x = 0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ \ldots;\ 0{,}5$ га мос қийматларни ки-амиз. Ҳисоблашлар $u_{i,j+1} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{2}$ формула бўйича карилади. Ҳисоблашлардан намуналар:

0 учун $u_{11} = 0{,}5\,(u_{20} + u_{00}) = 0{,}5\,(0{,}5878 + 0) = 0{,}2939$,
$u_{21} = 0{,}5\,(u_{30} + u_{10}) = 0{,}5\,(0{,}8090 + 0{,}3090) = 0{,}5590$.

исолга

Тўрлар усули

	$t \backslash x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
	0	0	0,3090	0,5878	0,8090	0,9511	1,0000
	0,005	0	0,2939	0,5590	0,7699	0,9045	0,9511
	0,010	0	0,3795	0,5316	0,7318	0,8602	0,9045
	0,015	0	0,2658	0,5056	0,6959	0,8182	0,8602
	0,020	0	0,2528	0,4808	0,6619	0,7780	0,8182
	0,025	0	0,2404	0,4574	0,6294	0,7400	0,7780
$t)$	0,025	0	0,2414	0,4593	0,6321	0,7431	0,7813
$u\vert$	0,025	0	0,0010	0,0019	0,0027	0,0031	0,0033

Иссиқлик ўтказиш тенгламаси учун ҳайдаш усули. Бу а $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant t \leqslant T$ ярим текисликда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{18}$$

ламанинг $u\,(x,\ 0) = f\,(x)$, $u\,(0,\ t) = \varphi\,(t)$, $u\,(0,\ t) = \psi\,(t)$, ланғич ва чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечи-и топиш талаб қилинади. Бунинг учун x ва t аргумент-бўйича h ва l қадамлар танланади, ҳосилалар ҳар қайси тугунга мос равишда чекли айирмали ифодалар билан алмаштирилади ва $f\,(x)$, $\varphi\,(t)$, $\psi\,(t)$ функцияларнинг чегара-вий нуқталарда қийматлари ҳисобланади. $s = h^2/l$ алмаштириш киритиб, ушбу системага эга бўламиз:

$$u_{i-1,j+1} - (2 + s)\,u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} + su_{ij} = 0, \tag{19}$$

$$(i = \overline{1;n},\ j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

$$u_{i0} = f\,(x_i), \tag{20}$$

$$u_{0j} = \varphi\,(t_j), \tag{21}$$

$$u_{nj} = \psi\,(t_j). \tag{22}$$

Бу системани ечиш учун дастлаб (19) тенглама

$$u_{i,j+1} = a_{i,j+1}\,(b_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}) \tag{23}$$

кўринишига келтирилади, бунда $a_{i,j+1}$, $b_{i,j+1}$ сонлар

$$a_{1,j+1} = 1/(2 + s),\ b_{1,j+1} = \varphi\,(t_{j+1}) + u_{1j}s \tag{24}$$

$$a_{i,j+1} = 1/(2 + s - a_{i-1,j+1}),\ b_{i,j+1} = a_{i-1,j+1}\,b_{i-1,j+1} + {} + su_{ij}\ (i = \overline{2;n}) \tag{25}$$

формулалар бўйича топилади. Сўнг (22) чегаравий шартла бўйича $u_{n,j+1} = \psi\,(t_{j+1})$, (23) формула бўйича $u_{i,j+1}$ кетма-ке аниқланади (бунда $i = n - 1,\ n - 2,\ \ldots,\ 1$). Масалани ечи тартиби:

Тўғри юриш: (21) чегаравий шартлар ва (24), (25) фор-мулалар бўйича $a_{1,j+1}$, $b_{1,j+1}$, $a_{i,j+1}$, $b_{i,j+1}$ $(i = \overline{2;n})$ сонла топилади.

Тескари юриш: (22) чегаравий шартлардан $u_{n,j+1} = \psi\,(t_{j+1})$ аниқланади. Сўнг (23) формула бўйича қуйидагилар ҳисоб-ланади:

$$\begin{aligned} u_{n-1,j+1} &= (u_{n,j+1} + b_{n-1,j+1})\,a_{n-1,j+1}, \\ u_{n-2,j+1} &= (u_{n-1,j+1} + b_{n-2,j+1})\,a_{n-2,j+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{1,j+1} &= (u_{2,j+1} + b_{1,j+1})\,a_{1,j+1}. \end{aligned} \tag{26}$$

4-мисол. Ҳайдаш усули қўлланилиб, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенг-ламани ва $u\,(x,\ 0) = 4x\,(1 - x)$, $u\,(0,\ t) = u\,(1,\ t) = 0$ шарт-ларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Ечиш: Айтайлик, $h = 0{,}1$, $l = 0{,}01$ бўлсин. Унд

$/l = 1$ бўлади. $u\ (x,\ t)$ функциянинг $t = 0{,}01$ қатлам-қийматини аниқлаймиз.

ғри юриш: Жадвал тузиб, унинг u_{i0}-сатрига $f\ (x_i)$ 10) бошланғич қийматларни тўлдирамиз ва $j = 0$ учун 25) формулалар бўйича қуйидагиларни ҳисоблаймиз:

$$1/3,\quad b_{11} = u_{10} = 0{,}36,\quad a_{21} = 1/(3 - a_{11}) = 3/8 = 0{,}375,$$

$$a_{11}b_{11} + u_{20} = 0{,}12 + 0{,}64 = 0{,}76,\quad a_{31} = 1/(3 - a_{21}) =$$

$$= 1/2{,}625 = 0{,}381,\quad b_{31} = a_{21}b_{21} + u_{30} = 0{,}375 \times$$

$$\times\, 0{,}760 + 0{,}84 = 1{,}125.$$

олга **Ҳайдаш усули**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	10
0	0,360	0,640	0,840	0,960	1,000	0,960	0,840	0,640	0
	0,333	0,375	0,381	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	
	0,360	0,760	1,125	1,389	1,530	1,544	1,430	1,186	
0	0,310	0,572	0,764	0,882	0,921	0,882	0,764	0,571	0

скари юриш: Чегаравий шартлардан $u_{10,1} = 0$, (26) лалар бўйича эса $u_{i1}\ (i = 9{,}8,\ \ldots,\ 1)$ қийматларни лаймиз. Жумладан, $j = 0$ да:

$$u_{91} = (u_{10.1} + b_{91})\ a_{91} = 0{,}813 \cdot 0{,}382 = 0{,}310,$$

$$= (u_{91} + b_{81})\ a_{81} = (0{,}310 + 1{,}186) \cdot 0{,}382 = 0{,}571,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= (u_{21} + b_{11})\ a_{11} = (0{,}572 + 0{,}360) \cdot 0{,}333 = 0{,}310.$$

перболик тур тенгламалар учун тўрлар усули. Тор иши учун аралаш масалада

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{27}$$

аманинг

$$u\ (x,\ 0) = f\ (x),\quad u_t\ (x,\ 0) = \varphi\ (x),\quad 0 \leqslant x \leqslant s, \tag{28}$$

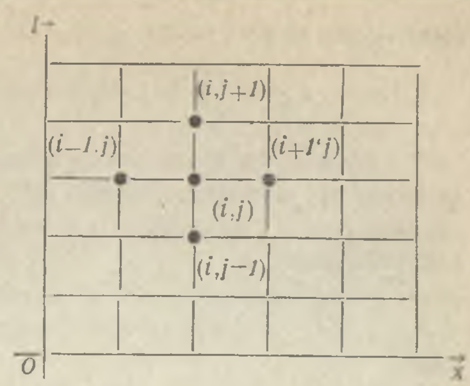
нғич ҳамда

$$u\ (0,\ t) = \varphi\ (t),\quad u\,(s,\ t) = \psi\ (t) \tag{29}$$

вий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш талинади. Бунинг учун янги $\tau = at$ ўзгарувчи киритиш (27) тенглама

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{30}$$

кўринишга келтирилади (бошқа сўз билан айтганда $a = 1$ деб олинади). Энди $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant s$ (14- чизма) ярим текисликда $x = ih$, $t = jl$ $(i,\ j = \overline{0;\ n})$ параллел тўғри чизиқлар оиласини қурамиз ва (30) тенгламани чекли айирмали тенглама билан алмаштирамиз:



14- чизма

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{l^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} \tag{31}$$

Агар $\alpha = l/h$ белгилаш киритилса, бу тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$u_{i,j+1} = 2u_{ij} - u_{i,j-1} + \alpha^2\ (u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}). \tag{32}$$

(32) тенглама $\alpha \leqslant 1$ да турғунликка эга, у $\alpha = 1$ да қуйидаги кўринишга келади:

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} = u_{i-1,j} - u_{i,j-1}. \tag{33}$$

(33) тенглама хатоси қуйидагича баҳоланади:

$$|\overline{u} - u| \leqslant \frac{h^2}{12}\ [M_4 h + 2M_2)\ T + T^2\ M_4], \tag{34}$$

бунда $\overline{u}$ — аниқ ечим, $M_k = \max\left\{\left|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|,\ \left|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|\right\}$.

(32) тенгламани тузишда 14-чизмада кўрсатилган тугунлардан фойдаланилган. Бунга қараганда $u\ (x,\ t)$ функциянинг t_{j+1} қатламдаги қийматини ҳисоблаш учун ундан олдинги икки қатламдаги қийматларини билиш зарур. Шу мақсадда қуйидаги усуллардан фойдаланилади.

1- у с у л: (28) бошланғич шартда $u'_t\ (x,\ 0)$ ҳосила $\frac{u_{i1} - u_{i0}}{l} = \Phi\ (x_i) = \Phi_i$ айирмали ифода билан алмаштирилади. Натижада $j = 0$, $j = 1$ қатламларда $u\ (x,\ t)$ функциянинг қийматлари учун ушбу

$$u_{i0} = f_i,\quad u_{i1} = f_i + l\Phi_i \tag{35}$$

улалар ҳосил бўлади. Хато қуйидагича баҳоланади:

$$|\widehat{u}_{i1}-u_{i1}| \leqslant \frac{\alpha h}{2} M_2, \; M_2 = \max \left\{ \left| \frac{\partial u^2}{\partial t^2} \right|, \left| \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \right| \right\}. \qquad (36)$$

усул: $u_t(x, 0)$ ҳосила $(u_{i1} - u_{i,-1})/(2l)$ айирмали ифолан алмаштирилади, бунда $u_{i,-1}$ ифода $u(x, t)$ функинг $j = -1$ қатламдаги қиймати. (28) бошланғич шартфойдаланиб, $u_{i0} = f_i$, $(u_{i1} - u_{i,-1})/(2l) = \Phi_i$ га эга бўла- $j = 0$ қатлам учун (33) тенгламани ёзамиз: $u_{i1} = u_{i+1,0} +$ $_{-1,0} - u_{i,-1}$. Кейинги икки тенгламадан $u_{i,-1}$ ни чиказ:

$$u_{i0} = f_i, \; u_{i1} = 0{,}5\,(f_{i+1} + f_{i-1}) + l\,\Phi_i. \qquad (37)$$

Хато:

$$_{i1} - u_{i1}| \leqslant \frac{h^4}{12} M_4 + \frac{h^3}{6} M_3, \; M_k = \max \left\{ \left| \frac{\partial^k u}{\partial t^a} \right|, \left| \frac{\partial^k u}{\partial x^l} \right| \right\},$$

$$k = 3{,}4.$$

исолни ечишда бу усулдан фойдаланилган.

5-мисол. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x, 0) = 0{,}2x(1 - x)\sin \pi x$, $(x, 0) = 0$, $u(0, t) = u(1, t) = 0$ масала тўрлар усули қўллиб ечилсин.

Ечиш: $h = l = 0{,}05$ қадам билан квадрат тўр ясаймиз. ланғич шартдан фойдаланиб,

$$u_{i0} = f_i, \; u_{i1} = 0{,}5\,(f_{i+1} + f_{i-1}) \; (i = \overline{0;10}) \qquad (38)$$

емани тузамиз. Жадвални тўлдириш тартиби:

1) $u_{i0} = f(x_i)$ қийматларни ҳисоблаб, биринчи сатрга ёза- . Масалада берилган маълумотлар симметрик бўлганидан двални $0 \leqslant x \leqslant 0{,}5$ учун тўлдириш етарли. Биринчи устга чегара қийматлари ёзилади.

2) Биринчи сатрдаги u_{i0} қийматлардан фойдаланиб, (38) мула бўйича u_{i1} ни ҳисоблаймиз ва иккинчи сатрга ёза-

3) (33) формула бўйича $j = 1$ учун u_{ij} қийматларини ҳилаймиз:

$$u_{12} = u_{21} + u_{01} - u_{10} = 0{,}0065 + 0 - 0{,}0015 = 0{,}0050,$$

$$_{22} = u_{31} + u_{11} - u_{20} = 0{,}0122 + 0.0028 - 0{,}0056 = 0{,}0094,$$

. . . .

$$u_{10,2} = u_{11,1} + u_{91} - u_{10,0} = 0{,}0478 + 0{,}0478 - 0{,}0500 = = 0{,}456.$$

Шу тартибда $j = 2,3, \ldots, 10$ учун ҳисоблашлар бажарилади. Солиштириш мақсадида энг охирги сатрда ечимнинг аниқ қийматлари келтирилган.

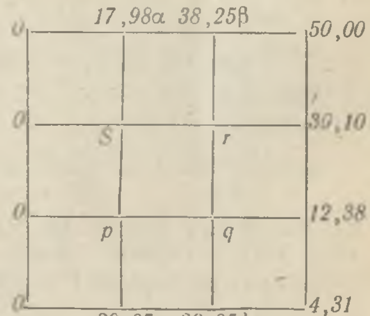
5-мисолга $\qquad$ u_{ij} қийматлари $\times 10^{-4}$ $\qquad$ **Турлар усули**

$t_i \backslash x_i$	, 0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0	0	15	56	116	186	265	340	405	457	489	500
0,05	0	28	65	122	190	264	335	398	447	478	489
0,10	0	50	94	139	198	260	322	377	419	447	456
0,15	0	66	124	170	209	256	302	343	377	397	405
0,20	0	74	142	194	228	251	277	302	321	335	338
0,25	0	76	144	200	236	249	251	255	260	262	265
0,30	0	70	134	186	221	236	227	209	196	190	186
0,35	0	58	112	155	186	199	194	168	139	120	115
0,40	0	42	79	112	133	144	140	124	92	64	54
0,45	0	21	42	57	70	74	74	64	42	26	13
0,50	0	—1	—1	0	—2	0	—2	—1	—2	—2	—2
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

МАШҚЛАР

1. Ўзгармас куч таъсири остида квадрат пластинканинг деформацияланиши $\Delta u = -1$ Пуассон тенгламасига келади, чегара қийматлари нолга тенг. Тенглама тўрлар усули қўлланилиб ечилсин.

2. Тўрлар усули қўлланилиб, Лаплас тенгламасининг p, q, r, s нуқталардаги ечими топилсин, чегара шартлари 15- чизмада кўрсатилган (квадрат тўр), $\alpha = 0{,}9 + 0{,}1k$ ($k = 0,1,2$), $\beta = 1{,}01 + 0{,}01\,n$ ($n = 0,1,2,3,4$).



15- чизма

3. Учлари $A(0;\,0)$, $B(0;\,1)$, $C(1;\,1)$, $D(1;\,0)$ нуқталарда жойлашган квадрат учун Лаплас тенгламасининг ечимини топинг. Чегара шартлари жадвалда келтирилган. Ечим қийматларини $h = 0{,}25$ қадам билан ҳисобланг.

ıқ учун

$u\|_{AB}$	$u\|_{BC}$	$u\|_{CD}$	$u\|_{AD}$
$30y$	$30(1-x)$	0	0
$30y$	$30\cos\frac{\pi x}{2}$	$30\cos\frac{\pi y}{2}$	0
$50y(1-y^2)$	0	0	$50\sin\pi x$
$20y$	20	$20y^2$	$50x(1-x)$
0	$50x(1-x)$	$50y(1-y^2)$	$50x(1-x)$
$30\sin\pi y$	$20x$	$20y$	$30x(1-x)$

$x = 0{,}1\,m\ (m = 0, 1, \ldots, 10)$, $t = 0{,}02$ тўрда $\frac{\partial u}{\partial t} =$

$+ \alpha(x^2 - 2t)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 0{,}02)$ тенгламанинг

$) = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = \alpha t (0 \leqslant t \leqslant 0{,}02)$ ıарни қаноатлантирувчи ечими топилсин, $\alpha = 0{,}5k$, $\overline{6}$, $h = 0{,}1$, $l = 0{,}02$.

$x = 0{,}1m\ (m = 0, 1, \ldots, 10)$, $t = 0{,}02$ тўр учун $\frac{\partial u}{\partial t} =$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 0{,}02)$, $u(0,t) = e^{\alpha t}$, $u(1,t) =$

$^{t-1)}$ $(0 \leqslant t \leqslant 0{,}02)$, $u(x, 0) = e^{-\alpha x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, $\alpha = 2 +$ $3k$, $k = -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4$ масаланинг ечими ıсин $(h = 0{,}1)$.

$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 2(1 + \alpha)$, $u(x, 0) = x^2$, $u(0; y) =$ ^{2}, $(0 \leqslant x,\ y \leqslant 1)$, $u|_\Gamma = (1 - \alpha)x^2 + \alpha$ Пуассон тенгла- учун чегаравий масала (x_m, y_n), $x_m = 0{,}2m$, $y_n = 0{,}2n$ ечилсин, бунда Γ — айлананинг бир қисми, $x \geqslant 0$ ва) да $x^2 + y^2 = 1$; $a = 0{,}3k$ $(k = \overline{1; 10})$.

БОРАТОРИЯ ИШИ

топшириқ: Учлари $A(0; 0)$, $B(0; 1)$, $C(1; 1)$ $D(1; 0)$ ларда жойлашган квадрат учун Лаплас тенгламаси ан усули қўлланиб ечилсин. Қадам $h = 0{,}125$, чегара- шартлар жадвалда берилган, $\varepsilon = 0{,}01$.

Вариант	$u\|_{AB}$	$u\|_{BC}$	$u\|_{CD}$	$u\|_{AD}$
1	$24y$	$24(1-x^2)$	0	0
2	$24y$	$24\cos\frac{\pi x}{2}$	$24\cos\frac{\pi y}{2}$	0
3	$48y(1-y^2)$	0	0	$48\sin\pi x$
4	$20y$	20	$20y^2$	$48x(1-x)$
5	0	$48x(1-x)$	$48y(1-y^2)$	$48x(1-x)$
6	$24\sin\pi y$	20	$16y$	$24x(1-x)$
7	$24(1-y)$	$16\sqrt{x}$	$16y$	$24x(1-x)$
8	$24(1-y)$	$20\sqrt{x}$	$20y$	$24(1-x)$
9	$48\sin\pi y$	$30\sqrt{x}$	$30y^2$	$48\sin\pi x$
10	$30y^2$	30	30	$30\sin\frac{\pi x}{2}$
11	$24y^2(1-y)$	$42\sin\pi x$	0	$8x^2(1-x)$
12	$18y$	$18(1-x^2)$	$27\sqrt{y}(1-y)$	0
13	$20(1-y^2)$	$20x$	20	20
14	$30y^2$	30	$30y$	$15x(1-x)$
15	$30y$	$30(1-x^2)$	0	0
16	$20y$	$20\cos(\pi x/2)$	$20\cos(\pi y/2)$	$30x^2$
17	$28y(1-y^2)$	0	0	$28\sin\pi x$
18	$48\sin\pi y$	$24\sqrt{x}$	$24y^2$	$48\sin\pi x$
19	$32y^2$	32	40	$32\sin\pi x/2$
20	$30\sin\pi y$	$10x$	$10y$	$30x(1-x)$
21	$30\sqrt{y}$	$30(1-x)$	$20y(1-y)$	0
22	$48y$	$48(1-x)$	40	$\begin{cases} 64(1-x), & 0{,}5 < x \leqslant 1, \\ 64x, & 0 \leqslant x \leqslant 0{,}5 \end{cases}$
23	$40y^2(1-y)$	$68\sin\pi x$	0	$12x^2(1-x)$
24	$50y^2$	50	$50y$	$50x(1-x)$
25	$10\sqrt{y}$	$10(1-x)$	$20y(1-y)$	0

2-топшириқ: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x, 0) = f(x)$, $u(0, t) = \varphi(t)$, $u(1, t) = \psi(t)\ (0 \leqslant t \leqslant T)$ чегаравий масала ечилсин, x бўйича қадам $h = 0{,}1$:

а) $f(x) = (ax^2 + b)\sin\pi x$, $\varphi(t) = 0$, $T = 0{,}02$ учун:

Вариант	a	b
1	1,1	1,2
2	1,3	1,1
3	1,5	1,3
4	1,3	1,4

б) $f(x) = e^{-bx}\sin ax$, $\varphi(t) = 0$, $\psi(t) = e^{-b}\sin a$, $T = 0{,}02$ учун:

Вариант	a	b
5	$\pi/12$	0,1
6	$\pi/4$	0,2
7	$\pi/3$	0,3
8	$\pi/6$	0,4

в) $\varphi(t) = \psi(t) = 0$ ва $f(x)$ нинг ушбу қийматлари учун:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$f(x)$	0	0,0266	$0{,}0372-\alpha$	0,0388	0,0418	$0{,}0402+2\alpha$	0,0816

Вариант	α	Вариант	α
9	0,01	11	0,005
10	0,007	12	0,006

г) $f(x) = (ax^2 + b)e^{-1}$, $\varphi(t) = b$, $\psi(t) = (a+b)e^{-1}$, $T = 0{,}01$

Вариант	a	b	Вариант	a	b	Вариант	a	b
13	1,1	2,1	15	1,5	2,3	17	1,2	2,5
14	1,3	2,2	16	1,4	2,4	18	1,6	2,6

д) $f(x) = e^{-\alpha x}$, $\varphi(t) = e^{\alpha t}$, $\psi(t) = e^{\alpha(t-1)}$, $T = 0{,}02$.

Вариант	α	Вариант	α	Вариант	α	Вариант	α
19	0,8	22	1,7	25	2,9	28	2,8
20	1,1	23	2,3	26	3,2	29	1,5
21	1,4	24	2,6	27	3,0	30	1,8

3-топшириқ: Ушбу $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенгламанинг $0 \leqslant t \leqslant 0{,}5$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ текисликдаги ечими $h = 0{,}1$ қадам билан топилсин. Бошланғич ва чегара шартлар вариантларда кўрсатилган.

Вариант:

1. $u(x,0) = (1{,}2x^2 + 1{,}1)\sin \pi x$, $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$.
2. $u(x,0) = (1{,}1x^2 + 1)\sin \pi x$, $u_t(x,0) = u(0,t) = 0$, $u = (1,t) = 1$.
3. $u(x,0) = (1{,}3x^2 + 1{,}1)\sin \pi x$, $u_t(x,0) = u(0,t) = u(1,t) = 0$.
4. $u(x,0) = (1{,}4x^2 + 1{,}1)\sin \pi x$, $u_t(x,0) = u(0,t) = u(1,t) = 0$.
5. $u(x,0) = (1{,}5x^2 + 1{,}1)\sin \pi x$, $u_t(x,0) = u(0,t) = u(1,t) = 0$.
6. $h = l = 0{,}1$ квадрат тўрда, $u(x,0) = (1{,}5x^2 + 1{,}2)\sin \pi x$ $u_t(x,0) = 0{,}1x$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$.
7. $h = l = 0{,}1$ квадрат тўрда, $u(x,0) = (1{,}5x^2 + 0{,}9)e^{-x}$, $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 2{,}4e^{-1}$.
8. $u(x,0) = x(x+1)$, $u_t(x,0) = \cos x$, $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 2(t+1)$.
9. $u(x,0) = x^2 - 0{,}5x - 0{,}5$, $u_t(x,0) = \sin(x+0{,}2)$, $u(0,t) = t - 0{,}5$, $u(1,t) = 3t$.
10. $u(x,0) = -3x^2 + 3x$, $u_t(x,0) = \cos(x + 0{,}5)$ $u(0,t) = 2t$, $u(1,t) = 0$.
11. $u(x,0) = 0{,}5(x^2 + 1)$, $u_t(x,0) = x\sin 2x$, $u(0,t) = 0{,}5 + 3t$, $u(1,t) = 1$.
12. $u(x,0) = x\cos \pi x$, $u_t(x,0) = (x+1)^2$, $u(0,t) = 2t$, $u(1,t) = 0$.
13. $u(x,0) = (x+1)\sin \pi x$, $u_t(x,0) = x^2 + x$, $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0{,}5t$.
14. $u(x,0) = 0{,}5x(x+1)$, $u_t(x,0) = x\sin x$, $u(0,t) = 2t^2$, $u(1,t) = 1$.
15. $u(x,0) = (x+1)\cos\frac{\pi x}{2}$, $u_t(x,0) = 1 - x^2$, $u(0,t) = 0{,}5t$, $u(1,t) = 2$.
16. $u(x,0) = (1 - x^2)\sin \pi x$, $u_t(x,0) = 2x + 0{,}8$, $u(0,t) = 1 + 0{,}5t$, $u(1,t) = 0$.
17. $u(x,0) = (x + 0{,}5)^2$, $u_t(x,0) = (x+1)\cos x$, $u(0,t) = 0{,}5(0{,}5 + t)$, $u(1,t) = 3$.
18. $u(x,0) = x(2x - 0{,}5)$, $u_t(x,0) = \sin 2x$, $u(0,t) = t^2$, $u(1,t) = 1{,}8$.

19. $u(x,\ 0)=(x+0{,}6)(x+0{,}5)$, $u_t(x,\ 0)=\sin(x+0{,}3)$, $u(0,t)=0{,}5$, $u(1,\ t)=3-2t$.

20. $u(x,\ 0)=(2-x)\cos\pi x$, $u_t(x,\ 0)=(x+0{,}8)^2$, $u(0,\ t)=0{,}5\,t$, $u(1,\ t)=0$.

21. $u(x,\ 0)=(x+0{,}6)\sin\frac{\pi x}{2}$, $u_t(x,\ 0)=0{,}3(x^2+1)$, $u(0,t)=0{,}5$, $u(1,\ t)=1{,}2\,t$.

22. $u(x,\ 0)=(x+0{,}1)(0{,}5x+1)$, $u_t(x,\ 0)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$, $u(0,\ t)=2$, $u(1,\ t)=4{,}5-3t$.

23. $u(x,\ 0)=(x+0{,}2)\cos\frac{\pi x}{2}$, $u_t(x,\ 0)=1+x^2$, $u(0,\ t)=0{,}4t$, $u(1,t)=1{,}2$.

24. $u(x,\ 0)=(x^2+1)(1-x)$, $u_t(x,\ 0)=1-\cos x$, $u(0,t)=1$, $u(1,t)=0{,}5t$.

25. $u(x,\ 0)=(x^2+0{,}6)\sin\pi x$, $u_t(x,\ 0)=(x+0{,}3)^2$, $u(0,t)=0{,}5$, $u(1,t)=2t-1$.

-боб. ИНТЕГРАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ

Интеграл тенглама деб, номаълум $y(x)$ функция инте-
ал ишораси остида бўлган

$$y(x)=C(x)+\int\limits_{A(x)}^{B(x)}F(x,\ t,\ y(t))\,dt \qquad (1)$$

ринишдаги тенгламага айтилади, бунда $F(x,t,y)$, $A(x)$,
$x)$, $C(x)$ функциялар берилган.

Оддий дифференциал тенгламалар учун Коши масаласи-
ечишни мос интеграл тенгламани ечишга олиб келиш
мкин. Хусусан,

$$\begin{cases} y'=f(x,y),\ f\in C(D),\ (x_0,\ y_0)\in D,\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

шланғич масаланинг x_0 нуқтани ўз ичига олган бирор
$b]$ оралиқдаги $y=y(x)$ ечими

$$y(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(t,\ y(t))\,dt$$

теграл тенгламанинг ҳам ечимидан иборат ва, аксинча,

шу интеграл тенгламанинг $[a,b]$ оралиқда узлуксиз бўлган ечими берилган бошланғич масаланинг ечимидан иборат, бунда $C(D)$ орқали D соҳада узлуксиз бўлган функциялар синфи белгиланган.

Эллиптик тенгламаларга (хусусан, $\Delta u=0$ Лаплас ва $\Delta u=c$ Пуассон тенгламаларга) доир чегаравий масалаларни ечиш ҳам интеграл тенгламага келтирилиши мумкин. Бундай мисолларни кўплаб келтириш мумкин.

Фредгольм ва Вольтерра чизиқли интеграл тенгламалари. Бирор $K(x,t)$ функция $(x,\ t)$ ўзгарувчилар текислигидаги

$$\Omega=\{(x,t);\ a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant t\leqslant b\}$$

квадратда аниқланган бўлсин. Ушбу

$$y(x)=\int\limits_a^b K(x,\ t)\,y(t)dt+f(x) \qquad (1)$$

кўринишдаги тенгламага *Фредгольм чизиқли иккинчи жинс интеграл тенгламаси*,

$$\int\limits_a^b K(x,\ t)\,y(t)\,dt=f(x) \qquad (2)$$

тенгламага эса *Фредгольм чизиқли биринчи жинс интеграл тенгламаси* дейилади, бунда $f(x)$ ва $K(x,\ t)$ функциялар берилган, $f(x)$ — тенгламанинг озод ҳади, $K(x,\ t)$ — ядроси. Улар учун ушбу

$$\int\limits_a^b\int\limits_a^b|K(x,\ t)|^2\,dxdt<\infty, \qquad (3)$$

$$\int\limits_a^b|f(x)|^2\,dx<\infty \qquad (4)$$

тенгсизликларнинг бажарилиши шарт.

Кўп ҳолларда (1) тенгламага λ сонли параметрни киритиб, λ га боғлиқ бўладиган интеграл тенгламалар оиласини ҳосил қиладилар:

$$y(x)=f(x)+\lambda\int\limits_a^b K(x,\ t)\,y(t)\,dt \qquad (5)$$

(Фредгольм параметрли иккинчи жинс интеграл тенгламаси).

Агар $K(x,\ t)$ ядро ушбу

$$K(x,\ t)=\begin{cases}K(x,t),\ a\leqslant t\leqslant x,\\ 0,\ x<t\leqslant b\end{cases}$$

ахсус кўринишга эга бўлса, у ҳолда (1) ва (2) тенглама-ар

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x, t)\, y(t) dt + f(x), \tag{6}$$

$$\int_a^x K(x, t)\, y(t)\, dt = f(x) \tag{7}$$

ўринишга келади. Бу ҳолда улар мос тартибда *Вольтерра ккинчи жинс ва биринчи жинс интеграл тенгламалари* еб аталади. Бунда $K(x, t)$ функция Вольтерра интеграл енгламасининг ядроси.

Ушбу

$$\int_a^x \frac{y(t)\, dt}{(x-t)^\alpha} = f(x), \quad 0 < \alpha < 1, \quad \alpha = \mathrm{const} \tag{8}$$

Абель тенгламаси Вольтерра биринчи жинс тенгламасининг хусусий ҳолидан иборат.

1-мисол. Қуйидагилардан қайси бири Фредгольм тенгламасидан иборат?

а) $y(x) = \int_1^\infty e^{-xt}\, y(t)\, dt = f(x),$ (*)

б) $y(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\, y(t)\, dt = f(x).$ (**)

Ечиш: (3) тенгсизликдан фойдаланамиз:

а) $$\int_1^\infty \int_1^\infty |K(x, t)|^2\, dxdt = \int_1^\infty dx \int_1^\infty e^{-2xt}\, dt = \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{1}{xe^{2x}} dx < \frac{1}{2} \int_1^\infty dx = \infty.$$

Демак, (*) тенглама — Фредгольм тенгламаси.

б) $$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-2xt}\, dxdt = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dx}{x} = \infty.$$

Бунга қараганда (**) тенглама Фредгольм тенгламаси эмас.

Интеграл тенгламаларнинг ечими деб, шу тенгламаларга қўйилганда уларни $x \in (a, b)$ бўйича айниятга айлантирувчи $y(x)$ функцияга айтилади.

2-мисол. $y(x) = 0{,}99984$ ифода $y(x) = e^x - x - \int_0^1 x(e^{xt} - 1)\, y(t)\, dt$ интеграл тенгламани тақрибан қаноатлантиришини текширинг.

Ечиш: $$y(x) = e^x - x - x \int_0^1 (e^{xt} - 1) \cdot 0{,}99984\, dt = e^x - x - 0{,}99984\, x\left(\int_0^1 e^{xt} dt - \int_0^1 dt\right) = e^x - x - 0{,}99984\, x\left(\left(\frac{1}{x} e^{xt}\right)\Big|_0^1 - t\Big|_0^1\right) = 0{,}00016\,(e^x - x) + 0{,}99984 \approx 0{,}99984,$$ $\Delta = 0{,}00016\, |e^x - x|$. Тенгламанинг аниқ ечими $y(x) = 1$ дир.

$(0; +\infty)$ интервалда (6) Вольтерра тенгламаси янги $H(x, t)$,

$$K(x, t) = H(x, t)\, U(x - t) = \begin{cases} H(x, t), & t < x \text{ ларда} \\ 0, & t \geqslant x \text{ ларда} \end{cases}$$

ядро киритиш йўли билан (1) Фредгольм тенгламасига келтирилиши мумкин. Шунингдек, (7) Вольтерра тенгламаси

$$H(x, t) = \frac{\dfrac{\partial K(x, t)}{\partial x}}{K(x, x)}, \qquad \bar{f}(x) = \frac{\dfrac{df(x)}{dx}}{K(x, x)}$$

дифференциаллашлар орқали (6) кўринишга келтирилади.

Агар берилган интеграл тенглама чегараланмаган ядрога эга бўлса, маълум алмаштиришлар орқали уни чегараланган ядроли тенгламага келтириш мумкин.

3-мисол. $f(x) = \int_0^x \frac{y(t)}{(x - t)^\alpha} dt$ $(0 < \alpha < 1)$ тенглама (Абелнинг умумлашган тенгламаси) чегараланмаган ядрога эга бўлсин. Унинг ечими мавжуд, у қуйидагича топилиши мумкин.

Тенгламадаги x ни s га алмаштирамиз, сўнг ҳосил бўлган тенгликнинг иккала қисмини $\frac{ds}{(x - s)^{1-\alpha}}$ га кўпайтирамиз ва s бўйича 0 дан x гача интеграллаймиз:

$$\int_0^x \frac{f(s)\, ds}{(x-s)^{1-\alpha}} = \int_0^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}} \int_0^s \frac{y(t)}{(s-t)^\alpha}\, dt,$$

ёки ўнг қисмда интеграллаш тартибини ўзгартирсак:

$$\int_0^x y(t)\,dt \int_0^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^{\alpha}} = \int_0^x \frac{f(s)ds}{(x-s)^{1-\alpha}},$$

...г $s = t + y(x-t)$ алмаштиришни киритсак,

$$\int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^{\alpha}} = \int_0^1 \frac{dy}{y^{\alpha}(1-y)^{1-\alpha}} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi},$$

...ҳолда

$$\int_0^x y(t)dt = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^x \frac{f(s)ds}{(x-s)^{1-\alpha}},$$

$$y(t) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}\,ds\right].$$

...$x)$ $(i = \overline{1, n})$ узлуксиз коэффициентли

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) + a_1(x)\,y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)\,y(x) = F(x), \\ y(0) = C_0,\ y'(0) = C_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0) = C_{n-1} \end{cases}$$

...иқли дифференциал тенглама учун Коши масаласини ...ш (7) кўринишдаги интеграл тенгламани ечишга (ва ак-...на) келтирилиши мумкин. Масалан,

$$\begin{cases} y''(x) + a_1(x)\,y'(x) + a_2(x)\,y(x) = F(x), \\ y(0) = C_0,\ y'(0) = C_1 \end{cases}$$

...гликларга $y''(x) = \varphi(x)$ (ва бундан $y' = \int_0^x \varphi(t)\,dt + C_1$,

$\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt + C_1x + C_0$ лар топилиб), $K(x, t) = -[a_1(x) +$ ...$_2(x)(x-t)]$, $f(x) = F(x) - C_1a_1(x) - C_1xa_2(x) - C_0a_2(x)$ ...аштиришлар киритилса, натижада

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt$$

...ьтерра тенгламаси олинади. Энди бундан $\varphi(x)$ аниқла-... y нинг ифодасига қўйилади ва шу билан бошланғич ...ла ечими (у ягона) ҳосил қилинади.

...Фредгольмнинг 2-жинс интеграл тенгламаларини тақри-...ечиш усуллари:

1. $K(x, t)$ ядрони ажралган ядрога алмаштириш усули. Агар (1) турдаги интеграл тенгламанинг $L(x, t)$ ядроси

$$L(x, t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\,\beta_i(t) \tag{9}$$

кўринишида тасвирланиши мумкин бўлса, унга ажраладиган ядро дейилади. Бунда $\alpha_i(x)$ ва $\beta_i(t)$ $(i = \overline{1; n})$ лар $[a, b]$ оралиқда узлуксиз ва чизиқли боғланмаган функциялар. Ажралган ядроли тенглама ечимини излаш у қадар мураккаб эмас. Шунга кўра ихтиёрий $K(x, t)$ ядроли

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\,y(t)\,dt \tag{1}$$

тенглама ядросини $L(x, t)$ ажралган ядрога тақрибан алмаштирадилар ва янги

$$\bar{y}(x) = f_1(x) + \lambda \int_a^b L(x, t)\,\bar{y}(t)\,dt \tag{10}$$

тенгламанинг $\bar{y}(x)$ ечимини берилган (1) тенглама ечими деб қабул қиладилар. (1) тенглама ечими

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i\,\alpha_i(x) \tag{11}$$

кўринишида изланади, бунда

$$c_i = \int_a^b \beta_i(t)\,y(t)\,dt. \tag{12}$$

(11) ифодани (12) га қўямиз. Натижада:

$$c_i = \int_a^b \beta_i(t)\,f(t)\,dt + \lambda\int_a^b \beta_i(t) \sum_{j=1}^{n} c_j\,\alpha_j(t) \quad (i = \overline{1; n})$$

ёки

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j A_{ij} = f_i \quad (i = \overline{1; n}), \tag{13}$$

бунда

$$f_i = \int_a^b \beta_i(t)\,f(t)\,dt, \quad A_{ij} = \int_a^b \alpha_j(t)\,\beta_i(t)\,dt.$$

Энди (13) тенгламалар системасидан c_i лар аниқланиб,) га қўйилиши керак.

Одатда ажралган ядро сифатида $K(x, t)$ функция Тейлор торининг олдинги бир неча ҳадини олиш билан чегараланилар.

(1) ва (10) муносабатларга асосланиб, изланаётган $y(x)$ топилган $\bar{y}(x)$ тақрибий ечим орасидаги $\delta = |y(x) - \bar{y}(x)|$ фарқ катталигини қуйидагича баҳолаш мумкин:

$$|\delta| < \frac{N|\lambda|(1+|\lambda|R_k^2)h}{1-|\lambda|h(1+|\lambda|R_k)} + \eta, \qquad (14)$$

нда N миқдор $|f(x)|$ нинг юқори чегараси,

$$h > \int_a^b |K(x, t) - L(x, t)|\,dt, \quad \eta > |f(x) - f_1(x)|.$$

$_K$ ва R_L лар K ва L ядроларнинг резольвенталари. Резольвенталар ушбу муносабатлар бўйича топилади:

$$R_L(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)}, \quad R_K > \int_a^b |R_L(x, t; \lambda)|\,dt.$$

$_{ik} = \int_a^b \alpha_k(x)\beta_i(x)\,dx$ ва

$$D(x, t, \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1(x) & \dots & \alpha_n(x) \\ \beta(t) & 1-\lambda a_{11} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_n(t) & -\lambda a_{n1} & \dots & 1-\lambda_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(λ) нинг илдизлари $L(x, t)$ ядронинг хос қийматларидан борат.

Узлуксиз функцияларнинг $C(0; 1)$ фазосида қуйидаги нормалар киритилади:

$$\|K\|_{C[0,1]} = \max_{a<x,\, t<b}|K(x, t)|, \quad \|f\| = \max_{a<x<b}|f(x)|.$$

$\{a \leqslant x,\ t \leqslant b\}$ соҳада квадрат билан жамланадиган функциялар тўпламида эса норма қуйидагича аниқланади:

$$\|K\| = \left(\int_a^b\int_a^b K^2(x, t)\,dxdt\right)^{1/2}, \quad \|f\| = \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{1/2}.$$

Киритилган норма тушунчасидан фойдаланиб, $\lambda = 1$ бўлган ҳолда δ ни ((14) тенгсизлик) қуйидагича баҳолаш мумкин:

$$\|\delta\| \leqslant \|\Lambda\|(1 + \|R_K\|)(1 + \|R_L\|)\|f\|, \qquad (15)$$

бунда $\Lambda(x, t)$ ифода

$$\Lambda(x, t) = K(x, t) - L(x, t)$$

муносабат бўйича аниқланади, унда $L(x, t)$ — ажралган ядро, $\|\Lambda\| \geqslant \|K\| - \|L\|$ (норманинг хоссаси). R_K ва R_L резольвенталар нормалари қуйидагича баҳоланади:

$$\|R_K\| \leqslant \frac{\|K\|}{1 - \|\lambda\|\cdot\|K\|}, \quad \|R_L\| \leqslant \frac{\|L\|}{1 - \|\lambda\|\cdot\|L\|}.$$

4-мисол. $y(x) = \sin x + \int_0^1 (1 - x\cos xt)\,y(t)\,dt$ интеграл тенглама унинг ядросини ажралган ядрога алмаштириш билан ечилсин.

Ечиш: $K(x, t) = 1 - x\cos xt = 1 - x\left(1 - \frac{x^2t^2}{2!} + \frac{x^4t^4}{4!} - \dots\right)$

Ажралган $L(x, t)$ ядро сифатида қаторнинг дастлабки учта ҳадини оламиз: $L(x, t) = 1 - x + \frac{x^3t^2}{2}$. Натижада янги

$$\bar{y}(x) = \sin x + \int_0^1 \left(1 - x + \frac{x^3t^2}{2}\right)\bar{y}(t)\,dt$$

тенгламага эга бўламиз ва унинг ўнг томонини қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\tilde{y}(x) = \sin x + c_1(1 - x) + c_2x^3, \qquad (16)$$

бунда

$$c_1 = \int_0^1 \bar{y}(t)\,dt, \quad c_2 = 0{,}5\int_0^1 t^2\bar{y}(t)\,dt. \qquad (17)$$

(16) ни (17) тенгликларга қўямиз:

$$\begin{cases} c_1 = 1 - \cos 1 + 0{,}5c_1 + 0{,}25c_2, \\ c_2 = \frac{1}{24}c_1 + \frac{1}{12}c_2 + \sin 1 - 1 + \frac{1}{2}\cos 1. \end{cases}$$

...емадан $c_1 = 1{,}0031$, $c_2 = 0{,}1674$ аниқланади. Изланаёт... ечим

$$\tilde{y}(x) = 1{,}0031(1 - x) + 0{,}1674\, x^3 + \sin 1.$$

$\|\lambda\| = \|y - \tilde{y}\|$ ни (15) муносабатдан фойдаланиб ба...ймиз. $[a, b]$ да квадрати интегралланувчи функциялар ... қуйидагиларга эга бўламиз (навбатлашувчи ишорали ...р учун Лейбниц теоремасидан фойдаланган ҳолда):

$$\Lambda(x) = K(x) - L(x) = \left(1 - x + \frac{x^3t^2}{2} - \frac{x^5t^4}{4!} + \ldots\right) -$$

$$\left(1 - x + \frac{x^3t^2}{2}\right) = -\frac{x^5t^4}{4!} + \ldots = \left(\begin{matrix}\text{Лейбниц}\\ \text{теоремаси}\\ \text{бўйича}\end{matrix}\right) = -\frac{x^5t^4}{24^2},$$

$$\|\Lambda(x)\| \leqslant \sqrt{\int_a^b\int_a^b \Lambda^2(x, t)\, dx\, dt} = \sqrt{\int_0^1\int_0^1 \frac{x^{10}t^8}{24^2}\, dx\, dt} =$$

$$= \frac{1}{72\sqrt{11}} < \frac{1}{238},$$

$$\|K\| \leqslant \sqrt{\int_0^1\int_0^1 (1 - x\cos xt)^2\, dx\, dt} < \frac{3}{5},$$

$$\|L\| \leqslant \sqrt{\int_0^1\int_0^1 \left(1 - x + \frac{x^3t^2}{2}\right)^2 dx\, dt} < \frac{3}{5},$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 \sin^2 x\, dx} = \frac{\sqrt{2 - \sin 2}}{2} < \frac{3}{5}.$$

Резольвенталар нормаларини баҳолаймиз:

$$\|R_k\| \leqslant \frac{\|K\|}{1 - |\lambda| \cdot \|K\|} = \frac{\frac{3}{5}}{1 - 1 \cdot \frac{3}{5}} = \frac{3}{2},$$

$$\|R_L\| \leqslant \frac{\|L\|}{1 - |\lambda| \cdot \|L\|} = \ldots = \frac{3}{2}.$$

Натижада:

$$\|\delta\| > \frac{1}{238}\left(1 + \frac{3}{2}\right)\left(1 + \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} = 0{,}01575\ldots < 0{,}016.$$

2. Кетма-кет яқинлашишлар усули. Кетма-кет яқинлашишлар

$$y^{[n]}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\, y^{[n-1]}(t)\, dt \tag{18}$$

рекуррент формула бўйича тузилади; $y^{[0]}(x)$ бошланғич яқинлашиш ихтиёрий танланади. (18) кетма-кетликнинг (1) тенглама ечими $y(x)$ га яқинлашиш шарти:

$$|\lambda| < \frac{1}{B}, \quad B = \sqrt{\int_a^b\int_a^b K^2(x, t)\, dx\, dt}, \tag{19}$$

n — яқинлашиш хатоси:

$$|y(x) - y^{[n]}(x)| \leqslant F \cdot C_1 \cdot B^{-1} \cdot \frac{|\lambda B|^n}{1 - |\lambda B|} + YC_1B^{-1}|\lambda B|^n, \tag{20}$$

бунда

$$F = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx}, \quad Y = \sqrt{\int_a^b y_0^2(x)\, dx},$$

$$C_1 = \sqrt{\max_{a<x<b} \int_a^b K^2(x, t)\, dt}.$$

5-мисол. Кетма-кет яқинлашишлар усули қўлланилиб,

$$y(x) = 1 + \int_0^1 xt^2 y(t)\, dt$$

тенглама ечилсин.

Ечиш: Бизда $\lambda = 1$, $K(x, t) = xt^2$. (19) шартнинг бажарилишини текширамиз:

$$\int_0^1\int_0^1 (xt^2)^2\, dx dt = \ldots = \frac{1}{15}, \quad B = \sqrt{\frac{1}{15}}, \quad |\lambda| < \frac{1}{B}.$$

Демак, итерация усули қўлланилиши мумкин. Уни қўллаймиз.

$y^{[0]} = 1$ бўлсин. У ҳолда:

$$y^{[1]} = 1 + \int_0^1 xt^2\, dt = 1 + x \cdot \frac{1}{3} \approx 1 + 0{,}3333x,$$

$$y^{[2]} = 1 + \int_0^1 xt^2\left(1 + \frac{t}{3}\right) dt = \ldots 1 + \frac{5x}{12} \approx 1 + 0{,}41666x,$$

$\ldots = 1 + \int_0^1 xt^2\left(1 + \frac{5t}{12}\right) dt = \ldots = 1 + \frac{7x}{16} \approx 1 + 0{,}4375x,$

$\ldots = 1 + \int_0^1 xt^2\left(1 + \frac{7t}{16}\right) dt = \ldots = 1 + \frac{85}{192}x \approx$

$\ldots + 0{,}4427x,$

$\ldots \approx 1 + 0{,}444x.$

…шинчи яқинлашиш хатосини баҳолаймиз:

$$F = \sqrt{\int_0^1 1^2 \cdot dx} = 1, \; Y = \sqrt{\int_0^1 1^2 \cdot dx} = 1,$$

$$C_1 = \sqrt{\max_{0 < x \leqslant 1} \int_0^1 x^2 t^4\, dt} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\ldots| \leqslant 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{15} \cdot \left|1 \cdot \frac{1}{\sqrt{15}}\right|^5 \left(\frac{1}{1 - \left|1 \cdot \frac{1}{\sqrt{15}}\right|} + 1\right) =$$

$$= \ldots \approx 4{,}667 \cdot 10^{-3}.$$

Квадратуралар усулининг моҳияти аниқ интегрални … квадратур формула ёрдамида чекли йиғиндига алмаш…дан иборат. (6) ва (7) тенгламалар учун

$$\tilde{y}_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} \tilde{y}_j = f_i \quad (i = \overline{1;\, n}), \tag{21}$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} \tilde{y}_j = f_i \quad (i = \overline{1;\, n}) \tag{22}$$

…га бўламиз, бунда $\tilde{y}_i \approx y(x_i)$, $K_{ij} = K(x_i;\, x_j)$, $f_i = \ldots$ …$_i$).

…лар мос равишда (21) ёки (22) чизиқли алгебраик …амалар системаларидан аниқланиб олинади. Хусусан, (1) …ама ечими

$$\tilde{y}(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K(x,\, x_j)\, \tilde{y}_j \tag{23}$$

…ишда изланади, A_j коэффициентлар ва x_j абсциссалар …ки (22) да қайси квадратур формула олинганига қараб …нади:

1) Трапециялар формуласи учун $h = (b - a)/n$, $A_0 = A_n = h/2$, $A_j = h\ (j = \overline{1;\, n-1})$, $x_j = a + jh\ (j = \overline{0;\, n})$; бу ҳолда квадратура қолдиғи:

$$R_n(Ky) = -\frac{(b-a)^3}{12(n-1)^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(Ky)\right]_{\xi = p,\ a < p < b};$$

2) Симпсон формуласи учун $n = 2m$, $h = (b - a)/(2m)$, $A_0 = A_{2m} = h/3$, $A_1 = A_3 = \ldots = A_{2m+1} = 4h/3$, $A_2 = A_4 = \ldots = A_{2(m-1)} = 2h/3$, $x_j = a + jh\ (j = \overline{0;\, 2m})$;

$$R_n(Ky) = -\frac{1}{90} \cdot \frac{(b-a)^5}{(2m)^4}\left[\frac{\partial^5}{\partial \xi^5}(Ky)\right]_{\xi = p} \quad a \leqslant p \leqslant b;$$

3) Гаусс формулалари учун $A_j = (b - a) A_j^{(n)}$, $x_j = a + (b - a) x_j^{(n)}$, бунда $x_j^{(n)}$ — Гаусс абсциссалари, $A_j^{(n)}$ — (0; 1) интервал учун Гаусс коэффициентлари:

$$R_n(Ky) = -\frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{[(2n)!]^3(2n+1)}\left[\frac{\partial^{2n+1}}{\partial \xi^{2n+1}}(Ky)\right]_{\xi = p} \quad a \leqslant p \leqslant b.$$

6-мисол. Симпсон квадратур формуласидан фойдаланиб,

$$y(x) + \int_0^{0{,}5} \frac{1}{5 + \cos(x + t)}\, y(t)\, dt = \sin \pi x$$

тенглама ечилсин.

Ечиш: $n = 2$ бўлсин. У ҳолда $m = 1$, $h = \frac{0{,}5}{2} = \frac{1}{4}$, $A_0 = A_{10} = \frac{h}{3} = \frac{1}{12}$, $A_1 = A_3 = \ldots = A_9 = \frac{1}{3}$, $A_2 = A_4 = \ldots = A_8 = \frac{1}{6}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}25$, $x_2 = 0{,}5$,

$$y(x) = \sin \pi x - \frac{1}{12}\left(\frac{y_0}{5 + \cos(x + 0)} + \frac{y_2}{5 + \cos(x + 0{,}5)} + \frac{4y_1}{5 + \cos(x + 0{,}25)}\right) = \sin \pi x - \frac{1}{12}\left(\frac{y_0}{5 + \cos x} + \frac{y_2}{5 + \cos(x + 0{,}5)} + \frac{4y_1}{5 + \cos(x + 0{,}25)}\right).$$

Тенгликка $x = 0;\ 0{,}25;\ 0{,}5$ лар кетма-кет қўйилиб, соддалаштиришлар бажарилса,

$38889y_0 + 0,014178164y_1 + 0,058156214y_2 = 0,$
$3961225y_0 + 0,014539053y_1 + 1,056712656y_2 =$
$70710675,$
$4178164y_0 + 1,015041297y_1 + 0,058156214y_2 = 1$

а ҳосил бўлади. Системадан $y_0 \approx -0,000004$, $y_1 \approx$
96, $y_2 \approx 0,834$ лар аниқланади ва $y(x)$ учун юқорида
ган тенгликка қўйилади.
қрибий ечим хатосини баҳолаш учун $R(Ky)$ ни ҳисоб-
ерак бўлади. Лекин ҳисоблашларни ЭҲМ да бажариш
дида қуйидагича йўл тутиш мумкин:
тиёрий олинган $n = p$ ва $n = p + q$ $(p,\ q \in Z^{+})$ учун
муносабат бўйича иккита тенгламалар системаси тузила-
бу системалардан $\tilde{y}_1(p), \ldots, \tilde{y}_p(p)$ ва $\tilde{y}_1(p+q), \ldots,$
$p+q)$ қийматлар аниқланади, сўнг (23) бўйича $n = p$
$= p + q$ учун $\tilde{y}_p(x)$ ва $\tilde{y}_{p+q}(p+q)$ тақрибий ечим қий-
ри топилади. Агар ушбу

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b |\tilde{y}_{p+q}(x) - \tilde{y}_p(x)|\,dx < \varepsilon;\ \varepsilon > 0,$$

$$\max_{a<x<b} |\tilde{y}_{p+q}(x) - \tilde{y}_p(x)| < \varepsilon,\ \varepsilon > 0$$

шартдан бирортаси бажарилса, у ҳолда ҳисоблашлар
илади ва $y(x) \approx \tilde{y}_{p+q}(x)$ қабул қилинади.

ольтерра тенгламаларини тақрибий ечиш:
ар $K(x,\ t)$ ядро $R\{a \leqslant t \leqslant x \leqslant b\}$ соҳада, $f(x)$ эса
оралиқда узлуксиз бўлса, ихтиёрий x да

$$y(x) = f(x) + \lambda\int_a^x K(x,\ t)\,y(t)\,dt \qquad (6)$$

ама ягона $y(x)$ ечимга эга бўлади.
ечим ушбу

$$y(x) \approx \tilde{y}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k \varphi_k(x) \qquad (24)$$

ишда изланади. Ундаги $\varphi_k(x)$ ифода

$$\varphi_0(x) = f(x),\quad \varphi_{k+1}(x) = \int_a^x K(x,\ t)\,\varphi_k(t)\,dt \qquad (25)$$

рент формула бўйича аниқланади. Агар

$$N = \max_{a<x<b} |f(x)|,\quad M = \max_{K} |K(x,\ t)|$$

бўлса, у ҳолда

$$|\varphi_k(x)| \leqslant \frac{M^k (b-a)^k N}{k!}.$$

Тақрибий ечим хатоси қуйидагича баҳоланади:

$$|y(x) - \tilde{y}_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda^k \varphi_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\lambda|^k M^k (b-a)^k N}{k!}$$

ёки

$$|y(x) - \tilde{y}_n(x)| \leqslant \frac{L^{n+1} N}{(n+1)!}\,\frac{1}{1 - \frac{L}{n+2}}\quad (L = |\lambda| \cdot M(b-a)).$$

(25) бўйича ҳисоблашларни бажаришда тугунлари тенг узоқлашган квадратур формулалардан фойдаланиш мумкин:

а) умумлашган трапециялар формуласи қўлланилганида

$$h = (b-a)/m,\ x_k = a + kh,\ K(x_i,\ x_j) = K_{ij},\ \varphi_n(x_k) = \varphi_{nk},$$

$$\varphi_{n+1,\,k} = \frac{h}{2}\,[K_{k0}\varphi_{n0} + 2(K_{k-1}\varphi_{n1} + K_{k2}\varphi_{n2} + \ldots +$$
$$+ K_{k,\,k-1}\varphi_{n,\,k-1} + K_{nk}\varphi_{kk})]\ \ (k = \overline{0;\ m}),$$
$$\tilde{y}_{nk} = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \varphi_{ik},\quad (k = \overline{0;\ m}); \qquad (26)$$

б) умумлашган Симпсон формуласи қўлланилганида

$$h = (b-a)/(2m),\ x_k = a + kh,$$
$$\varphi_{n+1,\,2k} = \frac{h}{3}\,\{K_{2k,\,0}\tilde{\varphi}_{n0} + 4(K_{2k,\,1}\tilde{\varphi}_{n1} + K_{2k,3}\tilde{\varphi}_{n3} + \ldots +$$
$$+ K_{2k,\,2k-1}\tilde{\varphi}_{n,\,2k-1}) + 2(K_{2k,\,2}\tilde{\varphi}_{n,\,2} + K_{2k,4}\tilde{\varphi}_{n,\,4} + \ldots +$$
$$+ K_{2k,\,2k-2}\tilde{\varphi}_{n,\,2k-2}) + K_{2k,\,2k}\tilde{\varphi}_{n,\,2k}] \qquad (27)$$
$$(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ k = \overline{1;\ m}).$$

k тоқ бўлган ҳолда $\tilde{\varphi}_{n+1,\,k}$ қийматларини интерполяция йўли билан топишга тўғри келади.

(б) Вольтерра иккинчи жинс тенгламасини тақрибий ечишнинг яна бир усули тенглама таркибидаги интегрални бирор квадратур формула ёрдамида чекли йиғинди орқали

фодалашдир. Масалан, шу мақсадда умумлашган трапеция-
ıр формуласи қўлланилганида аввал $[a, b]$ оралиқ $x_k = a +$ kh $(k = \overline{0; n},\ a = x_0,\ b = x_n)$ нуқталар ёрдамида n қисм- ажратилади. $\tilde{y}_k$ $(k = \overline{0; n})$ тақрибий қийматларни эса ушбу ормула бўйича кетма-кет аниқлаш мумкин:

$$\tilde{y}_k = \frac{1}{1 - \frac{\lambda h}{3} K_{kk}} \{f_k + \frac{\lambda h}{2} K_{k0} \tilde{y}_0 + h\lambda \sum_{i=1}^{k-1} K_{ki} y_i\}. \qquad (28)$$

7-мисол. Интеграл тенгламанинг ечими топилсин:

$$y(x) = e^x + \int_0^x e^{x-t} y(t)\, dt.$$

Ечиш: *Биринчи усул.* Ечимни

$$y(x) \approx \tilde{y}_4(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) + y_4(x)$$

ўринишида излаймиз, бунда

$$y_0(x) = f(x) = e^x,\ y_k(x) = \int_0^x K(x, t)\, y_{k-1}(t)\, dt.$$

$$y_1(x) = \int_0^x e^{x-t},\ e^t\, dt = \ldots = xe^x,$$

$$y_2(x) = \int_0^x e^{x-t},\ t\, e^t\, dt = \ldots = \frac{1}{2} x^2 e^x,$$

$$y_3(x) = \int_0^x e^{x-t} \cdot \frac{1}{2} t^2 e^t\, dt = \ldots = \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 e^x,$$

$$y_4(x) = \int_0^x e^{x-t} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} t^3 e^t\, dt = \ldots = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 e^t,$$

$$y(x) \approx e^x \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right).$$

Тенгламанинг аниқ ечими $y = e^{2x}$. Таққослаш мақсадида ниқ ва тақрибий ечимларнинг $x = 0$ ва $x = 1$ даги қиймат- рини келтирамиз:

$$y(0) = 1,\ y(1) = 7{,}3890557,\ \tilde{y}(0) = 1,\ \tilde{y}(1) = 7{,}3620131.$$

Иккинчи усул. Тенгламадаги интегрални умумлашган трапеция формуласи ёрдамида алмаштиришдан фойдаланиб ечимнинг

$$x_i = 0;\ 0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}6;\ 0{,}8;\ 1$$

нуқталардаги қийматини ҳисоблаймиз ($h = 0{,}2$, $K = e^{x-t}$, $f = e^x$).

7-мисолга $K_{ij} = K(x_i, x_j)$, $f_i = e^{x_i}$ қийматлари жадвали

i	x_i	$K_{0,i}$	$K_{1,i}$	$K_{2,i}$	$K_{3,i}$	$K_{4,i}$	$K_{5,i}$	f_i
0	0	1,00000	1,22140	1,49182	1,82212	2,22554	2,71828	1
1	0,2	0,81873	1,00000	1,22140	1,49182	1,82212	2,22554	1,22140
2	0,4	0,67032	0,81873	1,00000	1,22140	1,49182	1,82212	1,49182
3	0,6	0,54881	0,67032	6,81873	1,00000	1,22140	1,49182	1,82212
4	0,8	0,44933	0,54881	0,67032	0,81873	1,00000	1,22140	2,22554
5	1	0,36788	0,44933	0,54881	0,67032	0,81873	1,00000	2,71828

28) формула бўйича:

$$y(0) \approx \tilde{y}_0 = f_0 = 1{,}0000,$$

$$y(0{,}2) \approx \tilde{y}_1 = \frac{1}{1 - \frac{h}{2} K_{11}} \left[f_1 + \frac{\lambda h}{2} K_{10} \tilde{y}_0\right] \approx 1{,}4928,$$

$$y(0{,}4) \approx \tilde{y}_2 = \frac{1}{1 - \frac{h}{2} K_{22}} \left[f_2 + \frac{\lambda h}{2} K_{20} \tilde{y}_0 + h\lambda K_{21} \tilde{y}_1\right] \approx$$

$$\approx 2{,}2285,$$

$$y(0{,}6) \approx \tilde{y}_3 = \frac{1}{1 - \frac{h}{2} K_{33}} \left[f_3 + \frac{\lambda h}{2} K_{30} \tilde{y}_0 + h\lambda (K_{31} \tilde{y}_1 +\right.$$

$$\left. + K_{32} \tilde{y}_2)\right] \approx 3{,}32679,$$

$$y(0{,}8) \approx \tilde{y}_4 = \frac{1}{1 - \frac{h}{2} K_{44}} \left[f_4 + \frac{\lambda h}{2} K_{40} \tilde{y}_0 +\right.$$

$$\left. + h\lambda (K_{41} \tilde{y}_1 + K_{42} \tilde{y}_2 + K_{43} \tilde{y}_3)\right] \approx 4{,}96632,$$

$$y(1) \approx \tilde{y}_5 = \frac{1}{1 - \frac{h}{2} K_{55}} \left[f_5 + \frac{\lambda h}{2} K_{50} \tilde{y} +\right.$$

$$\left. + h\lambda (K_{51} \tilde{y}_1 + K_{52} \tilde{y}_2 + K_{53} \tilde{y}_3 + K_{54} \tilde{y}_4)\right] \approx 7{,}41386.$$

Таққослаш мақсадида аниқ ечим қийматларини ва тақри- ечим қийматлари хатосини кўрсатамиз:

$$y\ (0) = 1,\ \varepsilon_0 = 0,$$
$$y\ (0{,}2) = 1{,}4918,\ \varepsilon_1 = 0{,}001,$$
$$y\ (0{,}4) = 2{,}2255,\ \varepsilon_2 = 0{,}0029,$$
$$y\ (0{,}6) = 3{,}3201,\ \varepsilon_3 = 0{,}0067,$$
$$y\ (0{,}8) = 4{,}953,\ \varepsilon_4 = 0{,}01,$$
$$y\ (1) = 7{,}389,\ \varepsilon_5 = 0{,}025.$$

ШҚЛАР

1 — 3- машқларни ечишда ядрони Тейлор қаторининг алги учта ҳади йиғиндисидан иборат бўлган ажралган яд- а алмаштиришдан фойдаланилсин:

1. $y\ (x) = e^x - x - \int\limits_0^1 x\,(e^{xt} - 1)\ y\ (t)\ dt.$

2. $y\ (x) = -0{,}1\int\limits_0^1 \sin\frac{xy}{p}\ y\ (t)\ dt = 1+x^2,\ \lambda = \frac{1}{p},\ p = \overline{5;10}.$

3. $y\ (x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x + \int\limits_0^1 (1 - \cos xt^2)\ xy\ (t)\ dt.$

4 — 6- машқларни ечишда кетма-кет яқинлашишлар усули- н фойдаланилсин:

4. $y\ (x) = 1 + \int\limits_0^1 xt^2\ y\ (t)\ dt.$

5. $y\ (x) = \frac{5}{6}\ x + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 xty\ (t)\ dt.$

6. $y\ (x) = x^2 + \int\limits_0^1 xt^2\ y\ (t)\ dt.$

7 — 13- машқларни ечишда кўрсатилган квадратур фор- лалардан фойдаланилсин:

7. $y\ (x) + \int\limits_0^1 \frac{y\ (t)}{1 + x^2 + t^2}\ dt = 1{,}5 - \alpha\, x^2$ (трапециялар фор- ласи, $n = 4$), $\alpha = 1; 5$.

8. $y\ (x) - 0{,}3\int\limits_0^1 \frac{1}{\ln\,(\alpha - xt)}\ y\ (t)\ dt = 1 + e^x$ (трапециялар формуласи, $\alpha = \overline{2;10}$, $n = 4$).

9. $y\ (x) - \int\limits_0^{0{,}96} \frac{(1 + \alpha\, x + t)\ y\ (t)}{2 + x^2 + t^2}\ dt = e^{-x}$ (Симпсон формуласи, $n = 4$, $\alpha = \overline{1;10}$).

10. $y\ (x) - \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{\beta + y}\ y\ (t)\, dt = \frac{1}{1 + x},\quad \beta = \overline{1;10}$ (Симпсон формуласи, $n = 6$).

11. $y\ (x) - \int\limits_0^1 \frac{1 + x + t}{2 + tx}\ dt = 1 - \gamma\, x^2,\ \lambda = \overline{1;10}$ (Гаусс типидаги формулалардан бири, $n = 4$).

12. $y\ (x) + \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \cos\left(\frac{x}{\gamma + t}\right)\cdot y\ (t)\ dt = e^x,\ \gamma = \overline{1;10}$ (Гаусс формулалари, $n = 4$).

13. $y\ (x) - \frac{1}{8}\int\limits_0^1 \frac{x - t}{10t + \gamma}\ y\ (t)\ dt = \frac{1}{1 + x^2},\ \gamma = \overline{10;15}$ (Гаусс формулаларидан бири).

14 — 16- машқларда келтирилган интеграл тенгламаларни ечишда ҳар хил усуллардан фойдаланилсин:

14. $y\ (x) = a + \int\limits_0^x xt^\alpha\ y\ (t)\ dt,\ \alpha = \overline{0;10},\ a = \overline{1;10},$

15. $y\ (x) = e^{-\alpha} + \int\limits_0^x e^{x+\beta t}\ y\ (t)\ dt,\ \alpha = \overline{0;10},\ \beta = \overline{1;10},$

16. $y\ (x) = x^\alpha + \int\limits_0^x xt^\beta\ y\ (t)\ dt,\ \alpha = \overline{0;10},\ \beta = \overline{1;10}.$

11-ЛАБОРАТОРИЯ ИШИ

а) Интеграл тенглама вариантда кўрсатилган квадратур формула қўлланилиб $1\cdot 10^{-3}$ гача аниқликда ечилсин:

$$1.\ y(x) + \int_0^{0,5} \frac{(1+t)\, y(t)}{2+\sin \beta\pi(x+t)}\, dt = 1 + \alpha \sin \pi x,$$

$$2.\ y(x) - \int_0^{0,8} \frac{y(t)}{1+\gamma e^{-xt}}\, dt = \delta\, \mathrm{ch} x;$$

б) Интеграл тенгламани ечишда ядрони Тейлор қаторининг дастлабки уч ҳади йиғиндисига алмаштириш усулидан фойдаланинг:

$$3.\ y(x) - \int_0^{1} \frac{\cos(\eta\, xt)}{t}\, y(t)\, dt = f(x),\ \eta = 0,5 + 0,1\cdot k.$$

$$4.\ y(x) - \int_0^{1} (1+t)\,(e^{\mu xt} - 1)\, y(t)\, dt = f(x),\ \mu = 0,3 + 0,2m;\ \mu = -0,2 + 0,3\,i.$$

Вар.	Мисол №	Квадр. формуласи / $f(x)$	α	β	γ	δ	k	m	i
1	1	трапеция	1	0,3					
	3	$f(x) = x^2$					2		
2	2	трапеция			0,2	1			
	4	$f(x) = x^3$						1	
3	1	Симпсон	2	0,5					
	4	$f(x) = \sqrt{x}$							1
4	2	Симпсон			0,5	1			
	3	$f(x)=1/\sqrt{x}$					2		
5	1	Гаусс	3	0,1					
	3	$f(x)=(1-x)$					2		
6	2	Гаусс			0,2	0,3			
	4	$f(x) = e^{-x}$						2	
7	1	Симпсон	1	0,2					
	4	$f(x) = x^4$						1	

Вар.	Мисол. №	Квадр.форму. / $f(x)$	α	β	γ	δ	k	m	i
8	2	Симпсон			0,1	0,2			
	3	$f(x) = e^{-2x}$					3		
9	1	трапеция	2	0,4					
	3	$f(x) = \sqrt[3]{x}$					1		
10	2	Гаусс			0,1	0,3			
	4	$f(x) = (1+x)$							2
11	1	Гаусс	2	0,3					
	3	$f(x) = e^{-x}$					1		
12	2	трапеция			1	0,2			
	4	$f(x)=1+2x$							2
13	1	Симпсон	3	0,2					
	3	$f(x)=-\sqrt{x}$					2		
14	2	Гаусс			0,8	1			
	4	$f(x) = 1/x^2$							1
15	1	трапеция	1	0,4					
	4	$f(x) = x^2$						2	
16	2	Симпсон			2	0,2			
	3	$f(x) = 1/x^3$					3		
17	1	Гаусс	2	2					
	4	$f(x) = 2\sqrt{x}$							1
18	2	трапеция			0,7	0,3			
	3	$f(x)=1/2\sqrt{x}$						1	
19	1	Симпсон	1	0,1					
	4	$f(x)=1-\sqrt{x}$							1
20	2	Гаусс			1	3			
	3	$f(x)=1+\sqrt{x}$					1		
21	1	трапеция	2	0,2					
	4	$f(x) = 2x^2$						1	
22	2	Симпсон			2	2			
	3	$f(x) = 2x^2$					2		
23	1	Гаусс	3	0,3					
	4	$f(x) = 3x^2$							2

...	Мисол. №	Квадр.форму. / $f(x)$	α	β	γ	δ	k	m	i
	2	трапеция			3	1			
	3	$f(x)=3x^3$					3		
	1	Симпсон	1	0,2					
	4	$f(x)=1/x^3$						2	

МАШҚЛАРНИНГ ЖАВОБЛАРИ ВА КЎРСАТМАЛАР

1-боб

1. 17,0; 17; 17,007; $|\Delta| = 0{,}00675$; 0,00675; 0,00025. 2. **Кўрсатма:** $\frac{\Delta(l)}{l} = \delta(l)$, $\Delta(l) = 36{,}0 \cdot 0{,}8\% = 36{,}0 \cdot 0{,}008 = 0{,}288$ см, lҚЧ $= l - \Delta(l)$, lЮЧ $= l + \Delta(l)$, $35{,}7 < l < 36{,}3$ (см). 3. Иккинчи кесма. 4. $\Delta(a*) = 0{,}034 \leqslant \omega \cdot 10^{-1}$ $(0{,}5 \leqslant \omega \leqslant 1)$. Шунга кўра 8, 6, 7 рақамлари ишончсиз. $a^* = 34{,}6$, $\Delta a^* = 1{,}33 \cdot 10^{-2}$. 5. 2,718282; 2,718; $\Delta = -2{,}818 \cdot 10^{-4}$; $-1{,}037 \cdot 10^{-2}\%$. 6. **Кўрсатма:** илдиз учун $\Delta(a^*) = \alpha a^{\alpha-1} \cdot \Delta(a)$ ва $\delta(a^{\alpha}) \approx \alpha \cdot \delta(a)$ лардан фойдаланинг.

7.

y	Δ	δ
$\sin x$	$\cos x \cdot \Delta x$	$\mathrm{ctg}\, x \cdot \Delta x$
$\cos x$	$\sin x \cdot \Delta x$	$\mathrm{tg}\, x \cdot \Delta x$
$\mathrm{tg}\, x$	$\sec^2 x \cdot \Delta x$	$2\csc 2x \cdot \Delta x$
$\mathrm{ctg}\, x$	$\csc^2 x \cdot \Delta x$	$2\csc 2x \cdot \Delta x$
a^x $(a>0,\ a \neq 1)$	$a^x \ln a \cdot \Delta x$	$\Delta x \cdot \ln a$

Кўрсатма: $x = 1{,}2 \pm 0{,}04$ учун $\Delta(\sin x) = \cos x \cdot \Delta x = \cos 1{,}2 \cdot 0{,}04 \approx 0{,}0145$. $\sin x$ нинг қиймати иккита қийматли рақам билан олиниши мумкин: $\sin 1{,}2 \approx 0{,}93$. 8. 1) $x = 67{,}66 \pm 0{,}22 \approx 68$; 3) $t = 19{,}25 \pm 0{,}6325 \approx 19$. 13. **Кўрсатма:** Жумладан, $y = \lg \mathrm{tg}\, x$ учун қуйидагини оламиз:

$$y = \frac{\lg e}{\mathrm{tg}\, x} \times \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{2M}{\sin 2x} dx,$$ бунда $M = \lg e \approx 0{,}4343$. Бундан

$dx \approx 1{,}15 \sin 2x dy$, $\Delta x \approx 1{,}15 \sin 2x \cdot \Delta y$ (рад.). Шу каби $\Delta x \approx 2{,}30\, \mathrm{tg}\, x \cdot \Delta y$ (рад.). $\Delta x \approx 0{,}4343 \cdot 10^{-x} \cdot \Delta y$. 14. $\Delta x \approx 1{,}15 \sin 2x \cdot \Delta y$, бунда $\sin 2x = \sin 120° = \sqrt{3}/2$, $\Delta y = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$ (тўрт хонали жадвалнинг аниқлиги). У ҳолда:

$x \approx 1{,}15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-5}$ рад $\approx 0{,}5 \cdot 10^{-5}$. **15. Кўрсатма:** $y = f(x)$ функция учун аргументнинг Δx^* абсолют хатосини $\Delta x^* = \frac{1}{|f'(x^*)|} \cdot \Delta y$ $(f'(x^*) \neq 0)$ формула бўйича ҳисоблаш мумкин. Логарифмларнинг тўрт хонали жадвалларида сонларнинг ўнли логарифмлари $\Delta y = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$ гача аниқликда олинади. $x = \frac{\pi}{6} \pm \Delta x$ бўлсин. $y = \lg\sin x$ бўйича $(\lg\sin x)' = 0{,}4343\,\mathrm{ctg}\,x$, $\left(\lg\sin\frac{\pi}{6}\right)' = 0{,}75223$, $\Delta x^* = \frac{1}{0{,}75223} \cdot 0{,}5 \times 10^{-5} = 6{,}6 \cdot 10^{-6}$. **20.** $\frac{x}{1!} = 0{,}8$; $-\frac{x^3}{3!} = -0{,}8 \cdot \frac{x^2}{6} = -8{,}5333328 \cdot 10^{-2}$, $\frac{x^5}{5!} = \frac{x^3}{3!} \cdot \frac{x^2}{4 \cdot 5} = 0{,}00273067$, $-\frac{x^7}{7!} = -0{,}000041610157$, $\frac{x^9}{9!} = \frac{x^7}{7!} \cdot \frac{x^2}{8 \cdot 9} = 0{,}0000003699$. Натижалар қўшилса, $\sin 0{,}8 \approx 0{,}7173561 \approx 0{,}7174$. **21.** Тўртта... масалага берилган кўрсатмадан фойдаланинг.

...боб

1. **Кўрсатма.** $|x| > 1$ фараз қилинса, $|P(x)| \geqslant |a_0 x^n| - (|a_1 x^{n-1}|) \ldots + \ldots + |a_n|) \geqslant |a_0|\,|x|^n - c\,(|x|^{n-1} + |x|^{n-2} + \ldots)$. Геометрик прогрессия ҳадларини йиғиб, маълум алмаштиришлардан сўнг $|P(x)| > \left(|a_0| - \frac{c}{|x|-1}\right)|x|^n$ олинади. Энди ...нинг қандай қийматларида $|P(x)| = 0$ (ёки $P(x) = 0$) бўлиши... текширинг. Натижа $|x| < 1 + \frac{1}{|a_0|}$ га олиб келиши ке... . Сўнг $x = \frac{1}{y}$ алмаштириш киритинг ва олдин чиқарилган ...осадан фойдаланинг. 2. **Кўрсатма.** Мусбат илдизлар ...ини билишда Декарт теоремасидан фойдаланинг, сўнг ...дизнинг юқори чегараси R ни аниқланг. **9.** $\Delta \leqslant 0{,}1$. **10.** q_i ...мат x_{i+1} ва x_i яқинлашишлар ўртасидаги фарқни кўрса...и. $q_1 > q_2 > \ldots > q_i > \ldots$ Ҳақиқатан ҳам, $q_1 = \frac{x_{i-1}^3 - x_{i-2}^3}{k = 45} =$

$$= \frac{(x_{i-1} - x_{i-2})(x_{i-1}^2 + x_{i-1}x_{i-2} + x_{i-2}^2)}{45} =$$

$= q_{i-1}\frac{x_{i-1}^2 + x_{i-1}x_{i-2} + x_{i-2}^2}{45}$. Лекин $x = \sin 1^\circ$, $-1 \leqslant x \leqslant$ ... Шунга кўра $\max(x_{i-1}^2 + x_{i-1}x_{i-2} + x_{i-2}^2) = 3$, $q_i \leqslant \frac{1}{15}q_{i-\ldots}$ Мисол учун, $q_1 = 1{,}1798426 \cdot 10^{-7}$, $q_2 = 2{,}3955555 \cdot 10^{-1\ldots}$ $q_2/q_1 \approx 2 \cdot 10^{-5}$. Умуман, ал-Коший жараёни $-\sqrt{\frac{k}{3}} \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{k}{3}}$ да яқинлашади: $|\varphi'(x)| = \left|\left(-\frac{x^3+m}{k}\right)'\right| = \frac{3x^2}{k} \leqslant 1 \Rightarrow |x| \leqslant \sqrt{\frac{k}{3}}$. «Электроника. 32 ВТЦ 101» мон...тори ёрдамида x учун олинган яқинлашишлар: $x_1 = 0{,}017445318747716$, $x_2 = 0{,}0174523978056$, $x_3 = 0{,}017452406337352$, ..., $x_{11} = 0{,}017452406437352$, ... Мисолларнинг жавоблари: а) 0,79998; б) 0,0349048287256...; в) $-0{,}324617$. **11.** 1) 0,46557, $\varepsilon = 8 \cdot 10^{-7}$; 2) $-2{,}324$..., $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-4}$; 3) $-0{,}987$; 4) $3{,}290161 < \xi < 3{,}290191$...; 5) $0{,}091064455 < \xi < 0{,}091308595$; 6) $0{,}90693973 < x < 0{,}90724103$ (рад.); 7) 1,195 (рад.), $|\varepsilon| = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$; 8) $\pm 0{,}9286265$ (рад.); 9) 0,34218504 (рад.); 10) 1,0885978(рад...); 11) 0,8436547; 12) 2,9262711; 13) $-1{,}491645$; 14) **Кўрсатм...** $x_n = \frac{1}{4} \cdot 2^{x_{n-1}}$ рекуррент муносабатдан фойдаланинг. $f(0)f(1) < 0$. Бошланғич яқинлашишни (0; 1) оралиқдан танлаб, М...нинг RgO регистрига киритинг. Программадан фрагме... П → X ∅ 2Fx^y 4 ÷ С/П X→П ∅ БП∅∅. Натижа: $x = 0{,}30990712$; 15) 1,4898239; 16) $1{,}3247145 < \xi < 1{,}32471\ldots$; 17) **Кўрсатма.** Ҳисоблашларда $f(x) = x\,(x\,(x - 1{,}5) + 0{,}58) - 0{,}057$ деб олинг. $0{,}9553376 < \xi < 0{,}95535285$; 25) $1{,}1123196 < \xi_1 < 1{,}1123892$, $1{,}6067378 < \xi_2 < 1{,}6068426$ (рад); 3... $0{,}21330566 < \xi < 0{,}21333007$; 35) $-7{,}5^\circ$; 36) 12°. 1... а) $x_{k+1} = \frac{a + (n-1)\,x_k^n}{n x_k^{n-1}}$. **13.** Биринчи тартибли. **14.** Биринчи тартибли.

3-боб

1. 1) $x_3 = -1$, $x_2 = 2$, $x_1 = -3$, $\det A = 5$,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0{,}8 & 0{,}6 \\ 1 & -0{,}6 & -0{,}2 \\ 1 & -0{,}2 & -0{,}4 \end{bmatrix};$$

2) $x_4 = -1$, $x_3 = 2$, $x_2 =$ ... $x_1 = 1$, $\det A = 117$,

$$^{-1} = \begin{bmatrix} 0,05128 & 0,15385 & 0,17949 & 0,15384 \\ 0,11111 & 0 & 0,22222 & -0,33334 \\ 0,00855 & -0,30770 & -0,13675 & 0,35898 \\ -0,24786 & -0,07693 & -0,03419 & 0,58974 \end{bmatrix};$$

$x_3 = 3,85446$, $\det A = 426$,
$x_2 = 2,18075$,
$x_1 = 0,95070$,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,09859 & 0,04225 & -0,00704 \\ -0,02817 & 0,17840 & -0,2582 \\ -0,04225 & -0,06573 & 0,12207 \end{bmatrix};$$

) $x_3 = 0,637596$, $\det A = 65,496$,
$x_2 = 0,28655$,
$x_1 = 0,189263$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0,143825 & 0,199015 & 0,163063 \\ 0,247243 & -0,162453 & -0,025650 \\ 0,401245 & -0,004273 & -0,263533 \end{bmatrix}.$$

боб

2. 1) $x = 1,03817$, $y = -0,88734$; 2) $x = 2$, $y = 1,5$; $x = 0,8$, $y = 1,2$; 4) $x = 2,3$, $y = 1,9$; 5) $x = 0,9$, $y = 0,7$; $x = 0,32$, $y = -0,8$; 7) $x = 1$, $y = 2,1415926$; 8) $x = 1$, $= 3,5$; 9) $x = 2$, $y = 2$.

5. 1) $M(A) = n \max\limits_{\substack{i<1\\ j>n}} |a_{ij}|$ функционал (бунда n — нату- сон) A матрицанинг нормаси бўлади. Ҳақиқатан, 0, $|a_{ij}| \geqslant 0$ бўлганидан $M(A) \geqslant 0$ (норма бўлиш- г 1-шарти, [7], 114-бет). Ихтиёрий α сони учун $(\alpha A) = n\max\limits_{i>1, j<n} |\alpha a_{ij}| = |\alpha| \cdot M(A)$ (2-шарти). $M(A) =$ $\max\limits_{<n} |a_{ij}|$, $M(B) = n\max\limits_{i>1, j<n} |b_{ij}|$ (бир турли A ва B матри- р бўлган ҳолда) $M(A+B) = n\max\limits_{i>1, j<n} |a_{ij} + b_{ij}| \leqslant$ $(\max\limits_{i>1, j<n} |a_{ij}| + \max\limits_{i>1, j<n} |b_{ij}|) = M(A) + M(B)$ (3-шарти). $\cdot [b_{kl}]$ матрицалар кўпайтмаси маънога эга бўлган тақдир- жумладан, бир турли квадрат матрицалар ҳолида) $M(AB) =$ $\max |a_{ij} b_{kl}| \leqslant n\max\limits_{\substack{i>1\\ j<n}} |a_{ij}| \cdot n\max\limits_{\substack{k>1\\ l<n}} |b_{kl}| = M(A)\, M(B)$ бў- (4-шарт); 2) $\max\limits_{1<i, j>n} |a_{ij}|$ функционал норма эмас. Ҳақи-

қатан, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ва $\|A\| = \max |a_{ij}| = 1$ бўлсин деб фара қилайлик. У ҳолда $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\|A^2\| = \max\ |(A^2_{ij})| = 2$ натижада $\|A^2\| > \|A\| \cdot \|A\|$ бўлиб, матрица нормаси бўлишнин 4-шарти бажарилмайди ([7], 114-бет); 3) Матрица нормас нинг вектор нормаси билан мосланганлиги таърифи ва те ремадан фойдаланинг ([7], 115-бет).

5-боб.

$$1.\ D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 3 \\ 1 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ёки $D(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0$.
Тенгламанинг илдизларини ажратамиз. $D'(\lambda) = -3\lambda^2 + 2\lambda$ $+ 4 = 0$ тенглама илдизлари $-0,8685$ ва $1,5352$; ишорал жадвали:

λ	$-\infty$	$-0,8685$	$1,5352$	$+\infty$
$\operatorname{sign} D(\lambda)$	+	−	+	−

$D(\lambda)$ учта ҳақиқий илдизга эга. 2-§ да қаралган усулл дан бирортасидан фойдаланиб илдизлардан бирини, масал λ_2 ни топамиз. $\lambda_2 \approx 0,4707$. λ_1 ва λ_3 ни топиш мақсади $D(\lambda)$ кўпҳадни $\lambda - \lambda_2$ икки ҳадга бўлишда ҳосил бўладиг квадрат тенгламани ечамиз: $\lambda - 0,5293\lambda - 4,2491 = 0$, λ_1 $\approx -1,8136$, $\lambda_3 \approx 2,3429$. Ҳар қайси λ га мос хос вект $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$ тенгликдан топилади. Жумладан λ_1 бўйи

$$\begin{cases} 2,8136\, x_1^{(1)} + 4x_2^{(1)} + x_3^{(1)} = 0, \\ -x_1^{(1)} + 2,8136\, x_2^{(1)} + 3x_3^{(1)} = 0, \\ x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} + 0,8136\, x_3^{(1)} = 0 \end{cases}$$
бир жинсли тенгламалар с темаси олинади.

Уни ечамиз: $\begin{cases} 2,8136\, x_1^{(1)} + 4x_2^{(1)} = -x_3^{(1)} \\ -x_1^{(1)} + 2,8136\, x_2^{(1)} = -3x_3^{(1)} \end{cases}$; $x_3^{(1)} = 1$ бўлс

У ҳолда системадан: $x_1^{(1)} = 0,7709$, $x_2^{(1)} = -0,7923$. Шун қилиб, $\vec{x}^{(1)} = (0,7709;\ -0,7923;\ 1)'$. Шу тартибда λ_2 $= 0,4707$ ва $\lambda_3 = 2,3429$ лар бўйича тузилган бир жин тенгламалар системаларидан $\vec{x}^{(2)} = (1;\ -0,2256;\ 0,3731)'$. $\vec{x}^{(3)}$ $= (1;\ 0,2842;\ 0,2061)'$ аниқланади. 2. $D(\lambda) = -\lambda^3 + 21$

2. 3. $\lambda_1 \approx 2,103$, $\lambda_2 \approx 10,083$, $\lambda_3 = -5,187$. **6.** $\lambda_1 =$ -0,414, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=2,414$. **7.** Леверрье усули қуйидагилар-беради: $s_1 = \mathrm{Sp}\, A = 4,2$, $s_2 = \mathrm{Sp}\, A^2 = 49,82$, $s_3 = \mathrm{Sp}\, A^3 =$ 52,068, $s_4 = \mathrm{Sp}\, A^4 = 1841,3858$, $p_1 = -4,2$ $p_2 = -$ 22,214, $p_3 = 153,4916$, $p_4 = 1175,8341$, $\det(\lambda E - A) =$ $- 4,2\lambda^3 - 122,214\lambda^2 + 153,491\lambda + 1175,8341$. **17.** $\lambda \approx$,46, $\vec{x}^{(1)} = (0,90;\ 0,42;\ 0,12)'$. **18.** $\lambda_1 \approx 3,61804$, $\vec{x}^{(1)} =$),37; $-0,60$; 0,60; $-0,37)'$. **21.** **Кўрсатма**: Хос сон-инг экстремал хоссасидан фойдаланинг.

об

. 1) $f(0,43) = 1,5412$, $f(0,54) = 1,76415$, $f(0,57) =$ 8491; 2) $f(11,5) = 6,589$, $f(12,5) = 7,021$, $f(13,0) =$ 348; 3) $f(53) = 0,05107$; $f(60) = 0,05622$; 4) $f(4,2) =$ 2,571, $f(5,2) = 208,447$, $f(5,5) = 220,782$; 5) $f(170) =$ 18,399, $f(230) = 128,801$, $f(340) = 146,047$; 6) $f(3,3) =$ 3909, $f(4,3) = 1,5372$, $f(4,8) = 1,6161$; 7) $f(0,65) =$ 5475, $f(0,85) = 0,6285$, $f(0,95) = 0,6673$; 8) $f(49) =$),343, $f(53) = 74,084$, $f(64) = 81,999$; 9) $f(1115) =$ 2032,3, $f(1125) = 12649,1$, $f(1135) = 13297,1$; 10) ,00) = 58,803, $f(40,00) = 60,425$, $f(53,00) = 81,594$.) 0,660; е) $-0,674$; ж) $-2,49$; з) 0,826; и) 0,3222; й) 54; к) 0,5236; л) 0,3491. **5.** а) $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$; б) $\frac{1}{4}\, n(n+$ $)\cdot(n+2)(n+3)$; в) $\frac{n}{n+1}$; г) $\frac{n}{3n+1}$, $d)$ $\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$; е) $(n+$ $!-1$. **12.** 1) 0,2964; 2) $-2,825$.

об.

. **Кўрсатма**: (3) кўринишдаги система тузилсин. *Жав.*: $(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$. **3.** $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}[f(a)+$ $\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)]$. **4.** **Кўрсатма**: $R(f) = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}\times$ $a)+f(b)]$, $f(x) \in C^{(2)}$ ёки $R(h) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx - \frac{h}{2}[f(x_0) +$ $x_0 + h)]$. Кейинги ифодани кетма-кет икки марта диф-циаллаш, алмаштиришларда $R(0) = 0$, $R'(0) = 0$ ни орга олиш, сўнг h бўйича интеграллаш ва ўрта қий-қақидаги теоремадан фойдаланиш керак. Натижада: $R=$

$= -\frac{h^3}{12} f''(\xi)$, $\xi \in (x_0, x_n)$. **5.** $R(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{IV}(\xi)$, $\xi \in [a, b]$. **7.** **Кўрсатма.** $S(x)$ — иккинчи даражали кўпҳад. Шунга кўра $n = 2$ учун Ньютон—Котес ((4)—(5)) формулалари-дан фойдаланинг. **9.** **Кўрсатма.** (3) кўринишида система тузинг ёки бирор, жумладан (24) Эйлер—Маклорен форму-ласидан фойдаланинг. Кейинги ҳолда $n = 2$, $f = 1$ олиниши мумкин. Шунга мувофиқ, $\int_0^1 f(x)\,dx \approx 0,5((f(0) + f(1))/2 +$ $+ f(0,5)) - 0,02083333(f'(1) - f'(0))$. **11.** **Кўрсатма.** $R_n(x) \leqslant \varepsilon$; $\varepsilon = 0,5\cdot 10^{-2}$ дан фойдаланинг. **12.** 0,5731435. **13** $-0,010555555$. **14.** 0,030907892. **15.** 0,09426583. **16** $-0,09106854$. **17.** 0,00967. **18.** 0,31497152. **19.** 0,001432817 **20.** 0,02651105. **21.** 0,1066587. **22.** 0,1225652 **23.** $-0,1102893$. **24.** $-0,00156856$. **25.** 1,376826. **2** 0,3853359. **27.** 0,28538158. **28.** 0,21996378. **29.** 0,2788418 **30.** 1,9687099. **31.** 0,6549504. **32.** 0,9507247. **33.** 1,125133 **35.** 0,96908105. **36.** 0,27454882. **37.** 0,93811371. **3** 0,9156059. **39.** 63917,483. **40.** 1,462681, $|R_{10}| < 0,12\cdot 10^{-}$ **41.** 0,74627. **42.** 2,8687724. **43.** 1,4458326. **46.** 0,33 **47.** 1,209. **48.** 0,251. **49.** 0,272. **50.** $-1,8479$. **51.** $-0,041$ **52.** 0,9525. **53.** $-0,086$. **54.** 1,351. **55.** 1,686. **56.** 0,50 **57.** 0,488. **58.** 1,089. **59.** 0,116. **66.** 0,598612. **67.** 1) 51,0 2) 4,84. **68.** 3,82. **69.** 0,822. **70.** 4. **71.** 0,189492. **7** 1) 367,809; 2) 0,617. **73.** 8,378. **74.** **Кўрсатма**: Гульд теоремасидан фойдаланинг. $V = 6708,82$. **75.** 23,7 м. **76.** 1, **81.** 0,836582. **82.** 1,463243. **84.** 1,570796. **91.** 0,24998 **95.** 0,272198. **96.** 0,272203. **102.** 0,9559. **111.** 0,000124 **Кўрсатма.** Бўлаклаб интеграллаш усулидан фойдалан интегрални $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ кўринишига келтири сўнг Мелер квадратур формуласидан фойдаланинг. **115.** J $= \int_0^c + \int_c^{+\infty}$ бўлсин. $1 + x^4 \geqslant x^4$ дан $\int_c^{+\infty} \leqslant \int_c^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = \frac{1}{3c^3} \leqslant$ Бундан $c \geqslant \sqrt[3]{\frac{2}{3\cdot 10^{-3}}} = 8,7358\ldots \approx 9$. $c = 10$ да J $\approx \int_0^{10} \frac{dx}{1+x^4}$ бўлади. *Жав.*: $J \approx 1,111$. **116.** **Кўрсатм** Функция $[0;\ 1]$ оралиқда ягона $x = 1$ махсусликка эга. $f(x$

$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x)^{-1/2} \cdot x^2 (1+x)^{-1/2} = (1-x)^{-1/2} \varphi(x)$ ($c =$
$\in [0; 1]$, $\alpha = -1/2 > -1$), $[0; 1]$ да $\varphi(x)$ мавжуд. Канторович-
махсусликни ажратиш усули қўлланилиши мумкин.
— узилиш нуқтаси. $g(x)$ ни $x-1$ нинг даражалари бўйи-
Тейлор қаторига ёямиз: $g(x) = g(1) + g'(1)(x-1) +$
$\frac{''(1)}{2!}(x-1)^2 + g_1(x)$. Бу ифодага $g(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $g'(1) =$
$\frac{7}{\sqrt{2}}$, $g''(1) = \frac{19}{16\sqrt{2}}$ қийматларни қўйиб, $J = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 (1-x)^{-\frac{1}{2}} \times$

$$+ \frac{7}{4}(x-1) + \frac{19}{32}(x-1)^2 \Big] dx + \int_0^1 (1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot g_1(x)\, dx =$$

$+ J_2$ ни оламиз. Бунда $J_1 = \frac{1}{32\sqrt{2}} \left(-5 \int_0^1 \sqrt{1-x}\, dx + \right.$

$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\, dx + 19 \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x}\, dx \Big)$. Бирор квадратур
уладан фойдаланамиз. Натижада: $J_1 \approx 0{,}757305$. $J_2 =$

$$-x)^{-\frac{1}{2}} \left\{ x^2 (1+x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \frac{7}{4}(x-1) + \frac{19}{32}(x-1)^2 \right] \right\} dx$$

, $\int$ ишораси остидаги функция $x = 1$ нуқта атрофи-
луксиз (нолга тенг). J_2 ни ҳисоблаймиз. $J_2 = 0{,}028003$.
ай қилиб, $J = 0{,}757305 + 0{,}028003 = 0{,}785398$.
0,306853. **118.** 0,5. **119.** 0,5. **120.** 0,5. **121.** 0,311203.
,131972. **123.** 1,570796. **124.** 1,285398. **125.** 1,570796.
2,666667. **127.** 1. **128.** 2. **129.** 0,604600. **130.** —0,73576.
—0,2088. **132.** —1,645. **133.** —0,1250. **134.** —1,089.
1,234. **136.** 0,0524. **137.** 0,231. **138.** 3,1416. **146.**
$< J < 100\pi$. **147.** $-8 < J < \frac{2}{3}$. **148.** $4\pi < J < 22\pi$.
,5. **150.** $4 > J > 8(5 - 2\sqrt{2})$. **151.** $28\pi\sqrt{3} < J < 52\pi\sqrt{3}$.
$24 < J < 72$.

5

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x^3}{3!} + \frac{27}{4} \frac{x^4}{4!} + \ldots,$$

ҳад, $y(0{,}2) = 0{,}57$. 2. $y(x) = x^2 - 0{,}1x^5 + 0{,}01250\, x^8 -$
$159\, x^{11} + \ldots$; 0,96951; 0,318. 3. $y(x) = 1 + x + 0{,}5x^2 +$
$3333\, x^3 + 0{,}25\, x^4 + 0{,}116666\, x^5$; 4. $y(x) = x - 0{,}5\, x^2 +$

$+ 0{,}333333\, x^3 + 0{,}016666x^6 + 0{,}013492x^7$. **5.** $y(x) = 1 +$
$+ 0{,}5\, x - 0{,}25x^4 + 0{,}25\, x^6$. **6.** $y(x) = 1 - 0{,}16666x^2 -$
$-0{,}833333\, x^4$. **7.** $y(x) = x - 0{,}5x^2 + 0{,}6666667\, x^3 - 0{,}25x^4$,
$z(x) = 1 - x + x^2 - 0{,}5x^3 + 0{,}2917\, x^4$. **8.** $y(x) = 1 + x + 0{,}5x^2 -$
$- 0{,}33333\, x^3 - 0{,}166667\, x^4$, $z(x) = -1 + 0{,}5\, x^2 + 0{,}3333x^3 +$
$+ 0{,}125\, x^4$. **9.** $y^{[1]}(x) = 0{,}33333\, x^3$, $y^{[2]}(x) = 0{,}3333x^3 +$
$+ 0{,}015873x^7$, $y^{[3]}(x) = 0{,}3333\, x^3 + 0{,}015873\, x^7 + 0{,}000962x^{11} +$
$+ 0{,}000017x^{15}$. 10. $y^{[2]} = 1 + x + 1{,}5x^2 + 1{,}3333x^3 + 0{,}541667x^4 +$
$+ 0{,}25x^5$. **11.** $y^{[1]} = 0{,}66667\, x^{3/2}$, $y^{[2]} = 0{,}6667x^{3/2} +$
$+ 0{,}190476x^{7/2}$, $y^{[3]} = 0{,}66667x^{3/2} + 0{,}190476x^{7/2} + 0{,}034632x^{11/2}$.
12. $y^{[2]} = 0{,}5x^2 + x\sin x - 0{,}5\, x^2 \cos x + \cos x$.

15.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	. . .	1
y	1	1,005000	1,010025	1,025175	1,045679	. . .	1,241794

18.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y	1	0,99091	0,97530	0,95520	0,93219	0,90754	0,88188	0,85598	0,83006	0,80502

19. $y(1) = 0{,}3181$. **20.** $y(1{,}5) = 3{,}0042$. **21.** $y(0{,}4) = 0{,}4647$. **22.** $y(1{,}6) = 0{,}8032$.

23.

x	0,4	0,6	0,8	1,0
y	—0,07841	—0,17202	—0,29507	—0,44005
z	0,96040	0,91200	0,84629	0,76520

24.

x	0,4	0,6	0,8	1,0
y	1,0064	1,0826	1,1042	1,2606
z	1,1667	1,3965	1,7662	2,3460

35. $0(h^2)$. **36.** $0(h^2)$. **37.** $\|[u]_h - u^{(h)}\|_{U_h} \leqslant ch^2$.

9-боб.

1.

x	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	—3,94	—3,87	—3,76	—3,59	—3,34	—3,00

2.

x	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	−0,35	−0,31	−0,25	−0,18	−0,09	0,0

3.

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y	3,0	2,371	1,366	1,464	1,145	0,893

4. 1)

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
y	2,25	2,45	2,64	2,80	2,92	2,97	2,91	2,68	2,23

0,9	1,0
1,46	0,25

6.

x	π	$21\pi/20$	$22\pi/20$	$23\pi/20$
y	1	1,143	1,250	1,312

$4\pi/20$	$25\pi/20$	$26\pi/20$	$27\pi/20$	$28\pi/20$	$29\pi/20$	$1,5\pi$
1,322	1,276	1,74	1,021	0,822	0,589	0,333

8.

x	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4
y	2,0000	2,1906	2,3646	2,5247	2,6729	2,8109	2,9400	3,0613

,6	3,8	4,0
756	3,2837	3,3863

9.

x	−2	−1,8	−1,6	−1,4	−1,2	−1,0
y	1	0,826	0,694	0,592	0,510	0,444

),8	−0,6	−0,4	−0,2	0,0
391	0,346	0,309	0,277	0,25

10.

x	0,0	1,0	2,0
y	−1	−0,413	0,080

0	4,0	5,0	6,0	7,0
520	0,924	1,302	1,659	2

11. 1) $y(x) = 1 + e^{-\frac{5}{12}x} +$

$\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x$; 2) $y(x) = 1 + e^{2,5x} + \frac{1}{7}e^x$;

3) $y(x) = 1 + e^{-2,5x} + 5\sin x - 2\cos x$.

15. 1) $y(x) = e^x(x+1) - (e^x+1)\ln(e^x+1) + 1$;

2) $y(x) = 0,5\,e^x[\arcsin e^x + e^x\sqrt{1-e^{2x}} + 1] + 0,3333 \times \sqrt{(1-e^{2x})^3} + 1$; 3) $y(x) = e^x - \cos e^x + 1$.

10-боб.

1. Кўрсатма. Изланаётган $u(x, y)$ функция симметрик, $f(x, y)$ функция эса ўзгармас, чегара шартлар нолга тенг, Шунга кўра чекли—айирмали тенгламани квадратнинг (1; 1), (2; 1), (1; 2) (2; 2) тугунларга эга бўлган тўртдан бир қисми бўйича тузиш етарли. *Жавоб:* $u_{11} = 0,0429$, $u_{12} = u_{21} = 0,0547$, $u_{22} = 0,0703$. **4. Кўрсатма.** $\sigma = 0,5$ учун (1 ′) формуладан фойдаланинг. Масаланинг аниқ ечими $u(x, t) = \alpha x^2 t$. **5. Кўрсатма.** $\tau = \frac{1}{\alpha} t$ алмаштириш киритинг. Масаланинг аниқ ечими: $u(x, t) = e^{\alpha(t-x)}$. **6.** Масаланинг аниқ ечими: $u(x, y) = x^2 + \alpha y^2$.

11-боб.

3. Аниқ ечими: $y(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x + \left(\frac{58}{9} - \frac{11}{3}\sin 1° - \frac{52}{15}\cos 1°\right)x^3$. **4.** $y^{[n]}(x) = 1 + \frac{4}{9}x$, $y^{[0]}(x) = 1$. **5.** $y^{[0]}(x) = 0$, $y^{[n]}(x) = \left(1 - \frac{5}{6^n}\right)x$. **14.** $a = 1$, $\alpha = 2$ да $y(x) \approx 1 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{21}x^8 + \frac{1}{11 \cdot 21}x^{12}$.

АДАБИЁТ

1. Бахвалов Н. С. **Численные методы, т. I,** —М.: Наука, 1973.
2. Березин И. С., Жидков Н. П. **Методы вычислений, т. I.** 3-нашри. М.: Наука, 1966.
3. Воробьева Г. Н., Данилова А. Н. **Практикум по численным методам,** 2-нашри, М,: Высшая школа, 1990.
4. Гончаров В. Л. **Теория интерполирования и приближения функций,** 2-қайта ишланган нашри. М.: Гсстехиздат, 1954.
5. Демидович Б. П., Марон И. А. **Основы вычислителтной математики.** — М.: Наука, 1970.
6. Демидович Б. П. Марон И. А., Шувалова Э. З. **Численные методы анализа** —М.: 1967.
7. Исроилов М. И. **Ҳисоблаш методлари,** 1-қисм,— Тошкент: Ўқитувчи, 1988.
8. Қобулов В. Қ. **Функционал анализ ва ҳисоблаш математикаси.**— Тошкент: Ўқитувчи, 1976.
9. Копченова Н. В., Марон И. А. **Вычислительная математика в примерах и задачах.** — М.: Наука, 1972.
10. Марчук Г. И. **Методы вычислительной математики** — М.: Наука, 1977.
11. Мысовских И. П., **Лекции по методам вычислений.** — М.: Физматгиз, 1962.
12. Никольский С. М. **Квадратурные формулы,** 2.е изд. — М., Наука, 1972.
13. Самарский А. А., Гулин А. В. **Численные методы** — М.: Наука, 1989.
14. Соболев С. Л. **Введение в теорию кубатурных формул.** — М.: Наука, 1974.
15. Хемминг Р. В. **Численные методы**—М: Наука, 1972.

МУНДАРИЖА

АБДУХАҚИМ АБДУХАМИДОВ,
САЙФУЛЛА ХУДОЙНАЗАРОВИЧ ХУДОЙНАЗАРОВ

УПРАЖНЕНИЯ И ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ
ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ МЕТОДАМ

На узбекском языке

Издательство «Ўзбекистон» — 1995, 700129, Ташкент, Навои, 30.

Кичик муҳаррир Ш. Соибназарова
Бадиий муҳаррир Ж. Гурова
Техник муҳаррир Н. Сорокина, А. Горшкова
Мусаҳҳиҳ Ў. Абдуқодирова

Теришга берилди 22.09.94. Босишга рухсат этилди 20.04.95. Бичими $84 \times 108^1/_{32}$. «Литературная» гарнитурада юқори босма усулида босилди. Шартли бос. т. 11,76. Нашр т.11,41. Нусхаси 5000. Буюртма № 595. Баҳоси шартнома асосида.

«Ўзбекистон» нашриёти, 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Нашр № 130 — 94.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитаси ижарадаги Тошкент матбаа комбинатида босилди. 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30.