Е.С. КОЧЕТКОВ
Е.С. КОЧЕТКОВА

Алгебра и элементарные функции

ЧАСТЬ 1

Е. С. КОЧЕТКОВ
Е. С. КОЧЕТКОВА

Алгебра и элементарные функции

Учебное пособие
для учащихся 9 класса
средней школы

Под редакцией доктора физико-математических наук
О. Н. ГОЛОВИНА

Утверждено Министерством просвещения РСФСР

ИЗДАНИЕ 3-е

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
МОСКВА 1968

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

I

Изучение алгебры и элементарных функций мы начинаем с рассмотрения линейных уравнений и неравенств. Эта тема знакома нам еще по курсу VIII класса. Прежде чем изучить ее более глубоко, вспомним некоторые уже известные нам понятия.

Тождества §1

В математике часто приходится иметь дело с равенствами, то есть с такими записями, в которых два выражения соединены знаком = (знаком равенства).

Прежде всего обратимся к числам. Если a и b — числа, то равенство

$$a = b$$

означает, что a и b — это просто одно и то же число. Наоборот, если a и b — разные числа, то пишут

$$a \neq b.$$

Например, $2 = 2$, $2 + 3 = 5$, $2 - 3 = -1$, но

$$7 \neq 6, \quad 7 + 3 \neq 0, \quad 3 - 7 \neq 4.$$

Труднее обстоит дело, когда равенство содержит какие-нибудь буквы, которыми обычно мы обозначаем неизвестные величины. Рассмотрим, например, такие равенства:

$$a + 4 = 5, \qquad (1)$$

$$a^2 + 1 = -3, \qquad (2)$$

$$1 + \sqrt{a} = a, \qquad (3)$$

$$a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1), \qquad (4)$$

$$\frac{1}{a^2-1} = \frac{1}{a+1} \cdot \frac{1}{a-1}, \qquad (5)$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b. \qquad (6)$$

Каждая часть равенства (1) *имеет смысл* при любых значениях a. Это означает, что какое бы числовое значение мы ни придали букве a, левая и правая части равенства (1) тоже примут некоторые числовые значения.

Аналогичным свойством обладают также равенства (2) и (4). А вот с равенствами (3), (5) и (6) дело обстоит иначе.

Правая часть равенства (3) определена при любых значениях a, а левая — лишь при неотрицательных значениях a. (Вспомните: извлекать квадратные корни можно лишь из положительных чисел и нуля.) Поэтому если равенство (3) рассматривать в целом, то следует сказать, что оно определено для всех неотрицательных значений a. Левая и правая части равенства (5) определены лишь при $a \neq 1$ и $a \neq -1$. Если же $a = 1$ или $a = -1$, то в знаменателях дробей получаются нули, а делить на нуль нельзя. Поэтому равенство (5) определено при всех значениях a, отличных от 1 и -1. Правая часть равенства (6) определена при любых значениях a и b, а левая лишь при $a \neq b$. Поэтому в целом равенство (6) имеет смысл для любых не равных друг другу чисел a и b.

Значения букв, входящих в равенство, при которых имеют смысл и левая и правая части этого равенства, называются допустимыми значениями этих букв.

Так, допустимыми значениями a в равенствах (1), (2) и (4) будут все числа, в равенстве (3) — все неотрицательные числа, в равенстве (5) — все числа, кроме 1 и -1. В равенстве (6) допустимые значения a и b складываются из всевозможных пар не равных друг другу чисел.

Если равенство содержит более одной буквы, то, говоря о допустимых значениях этих букв, мы должны иметь в виду одновременно каждую из этих букв. Например, можно сказать, что пары чисел (1, 2) и (—5, 6) являются допустимыми, а пара (3, 3) — не допустимой для букв a и b в равенстве (6).

Однако не следует говорить, что значение 1 является допустимым для буквы a, так же как не следует говорить и то, что это значение не является допустимым для a. Ведь все зависит еще и от того, какое значение принимает при этом буква b. Если не только a, но и b равно 1, то равенство (6) теряет смысл; если же $b \neq 1$, то при $a = 1$ это равенство определено

Хотя в равенстве (1) допустимым является любое число, левая и правая части этого равенства принимают одинаковые числовые значения лишь при $a = 1$. При всех же остальных значениях a левая часть этого равенства принимает числовые значения, отличные от 5. Обе части равенства (2) не могут принять одинаковые числовые значения ни при каком значении a. Ведь выражение $a^2 + 1$ принимает только положительные значения, а число -3 является отрицательным. Прямо противоположным свойством обладает равенство (4). Какое бы значение мы ни придали букве a, левая и правая части этого равенства примут одинаковые числовые значения. О равенстве (5) этого сказать нельзя. При $a = 1$ и $a = -1$ это равенство вообще теряет смысл, а в таком случае нельзя говорить о том, одинаковые или неодинаковые числовые значения принимают его отдельные части. Но числа 1 и —1 не входят в область допустимых значений a. Поэтому можно сказать, что обе части равенства (5) принимают одинаковые числовые значения при любом **д о п у с т и м о м** значении a. Аналогично можно сказать и про равенство (6). Обе его части принимают одинаковые числовые значения при любых **д о п у с т и м ы х** значениях a и b.

Равенство, обе части которого принимают одинаковые числовые значения при любых допустимых значениях входящих в него букв, называется тождеством.

К тождествам относятся, например, равенства (4), (5) и (6). Что же касается равенств (1), (2) и (3), то их отнести к тождествам, очевидно, нельзя.

Представляется вполне естественным потребовать, чтобы понятие тождества удовлетворяло следующему важному свойству, называемому свойством *транзитивности*:

если равенства $A = B$ и $B = C$ являются тождествами, то и равенство $A = C$ является тождеством.

Можно, однако, показать, что введенное нами определение тождества этому требованию удовлетворяет не всегда. Действительно, равенства

$$|a| = (\sqrt{a})^2, \tag{7}$$

$$(\sqrt{a})^2 = a \tag{8}$$

в смысле нашего определения являются тождествами. Каждое из них имеет допустимыми значениями все неотрицательные значения a. Однако равенство

$$|a| = a \tag{9}$$

имеет допустимыми значениями уже **в с е** значения a (положительные, отрицательные и нуль), а справедливо оно лишь для неотрицательных значений a. Следовательно, в смысле введенного нами определения равенство (9) не является тождеством.

Выяснение того, когда такие неприятности могут возникнуть и когда они не возникают, выходит за пределы нашей программы и потому не может быть здесь проведено. Для избежания же этих неприятностей поступают таким образом. Вместо того чтобы говорить о тождествах как равенствах, справедливых для **в с е х** допустимых значений входящей в них буквы a, говорят о тождествах, имеющих место для какого-то **з а д а н н о г о** множества значений a. Тогда если равенства $A = B$ и $B = C$ являются тождествами на одном и том же множестве значений a, то для тех же значений a будет тождеством и равенство $A = C$.

Упражнения

Для каждого из данных равенств (№ 1—10) выяснить, при каких значениях входящих в них букв определены:

а) левая часть равенства;

б) правая часть равенства;

в) равенство в целом.

1. $\sqrt{a} = 4 + a$.
2. $\sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}$.
3. $\frac{1}{b^2+2} = \frac{1}{b^2-9}$.
4. $\frac{1}{c^2-c} = 3$.
5. $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} = \frac{1+2a}{a^2-a}$.
6. $\frac{\sqrt{b}}{b-1} = 5\frac{2}{3}$.

7. $\frac{1}{a^2+1} = b.$

8. $ab = \frac{1}{a^2+b^2}.$

9. $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a^2-a+1} = \frac{a^2+2}{a^3+1}.$

10. $\frac{1}{2-b} + \frac{1}{b^2+2b+4} = \frac{b^2+b+6}{8-b^3}.$

11. Покажите, что равенство $2 - a = 3a - 4$ не является тождеством.

12. Можно ли сказать, что равенства:

а) $\frac{1}{a^3-b^3} = \frac{1}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$;

б) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;

в) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$

— выполняются при л ю б ы х значениях входящих в них букв? Являются ли эти равенства тождествами?

Уравнения § 2

В предыдущем параграфе все равенства, содержащие букву, мы разбили на два класса. К одному классу были отнесены тождества, то есть такие равенства, обе части которых принимают одинаковые числовые значения при любых допустимых значениях буквы. Примером таких равенств могут служить равенства:

$$a^2 - 1 = (a+1)(a-1), \quad \frac{1}{a^2-1} = \frac{1}{a+1} \cdot \frac{1}{a-1}.$$

К другому классу мы отнесли все те равенства, обе части которых принимают разные числовые значения хотя бы при одном допустимом значении буквы. К ним относятся, например, равенства:

$$a + 4 = 5, \quad a^2 + 1 = -3.$$

Однако к изучению равенств можно подойти и по-другому. Практика часто ставит перед нами задачу выяснить, п р и к а к и х допустимых значениях буквы (или нескольких букв) обе части того или иного равенства принимают одинаковые числовые значения. На равенство в этом случае мы смотрим как на *уравнение* относительно указанной неизвестной величины.

Так, если равенство

$$a + 4 = 5 \qquad (1)$$

рассматривать как уравнение относительно величины a, то легко сообразить, что обе его части принимают одинаковые числовые значения только при $a = 1$. Действительно, если $a = 1$, то $a + 4 = 5$; если же $a \neq 1$, то $a + 4 \neq 5$. Число 1 называется *корнем* уравнения (1).

Вообще, *корнем уравнения относительно одной неизвестной величины называется каждое числовое значение этой величины,* *при котором обе части уравнения принимают одинаковые числовые значения.*

То же самое определение иначе формулируют следующим образом: корнем уравнения относительно одной неизвестной величины называется такое значение этой величины, при котором уравнение обращается в числовое равенство (или которое *удовлетворяет* данному уравнению).

Выше мы привели уравнение ($a + 4 = 5$), которое имеет лишь один корень. Существуют уравнения, которые имеют более одного корня. Например, уравнение $a^2 = 1$ имеет два корня: 1 и —1; уравнение $a + 2 = 2 + a$ имеет бесконечно много корней: каждое число является его корнем. (В этом случае уравнение является тождеством.) Наконец, можно указать и такие уравнения, которые совсем не имеют корней. Примером может служить хотя бы уравнение $a^2 + 1 = -3$.

Решить уравнение — это значит:

1) *выяснить, имеет ли оно корни, и*

2) *если имеет, то найти каждый из них.*

Отметим (хотя это и несущественно), что в равенствах, рассматриваемых как уравнения, неизвестные величины обычно обозначаются не начальными буквами латинского алфавита (a, b, c, . . .), а конечными буквами (x, y, z). Например, вместо $a + 4 = 5$ пишут $x + 4 = 5$; вместо $a^2 + 1 = -3$ пишут $x^2 + 1 = -3$ и т.д.

Два уравнения относительно одной и той же неизвестной называются эквивалентными (или равносильными), если каждый корень первого уравнения является вместе с тем и корнем второго уравнения, а каждый корень второго уравнения является вместе с тем и корнем первого уравнения.

Эквивалентными будут, например, уравнения $x + 4 = 5$ и $x - 1 = 0$, каждое из которых имеет единственный корень 1. Эквивалентными являются и уравнения $x^2 = 4$ и $2x^2 = 8$. Каждое из них имеет два корня: 2 и —2.

Уравнения, не имеющие корней, считаются также эквивалентными (например, $x^2 = -1$ и $x^2 + 1 = -3$).

Для решения уравнений оказываются важными следующие свойства эквивалентных уравнений, которые мы напоминаем учащимся без доказательства:

1. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то получится уравнение, эквивалентное данному.

2. Если какое-нибудь слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, поменяв при этом его знак на противоположный, то получится уравнение, эквивалентное данному.

Например, в уравнении

$$2x - 1 = 5 - x$$

-1 можно перенести из левой части в правую, а $-x$, наоборот, из правой части в левую. В результате получим

$$2x + x = 5 + 1,$$

или

$$3x = 6.$$

Очевидно, что единственным корнем этого (а следовательно, и исходного) уравнения служит число 2.

Упражнения

13. Эквивалентны ли уравнения:

а) $25x^2 = 0$ и $5x = 0$;
б) $9x^2 = 25$ и $3x = 5$;
в) $(2x - 1)^2 = 1$ и $2x - 1 = 1$;
г) $x^2 = -3$ и $x-1 = 3$;
д) $x^2 + 1 = 0$ и $x^2 + 2 = 0$?

14*. Сколько корней имеет следующее уравнение относительно неизвестной величины x:

$$(x - 1)^2 + (x - a)^2 = 0,$$

где a — некоторое заданное число?

Линейные функции и их графики § 3

Рассмотрим равенство

$$y = 2x + 1. \qquad (1)$$

Каждому значению буквы x это равенство ставит в соответствие вполне определенное значение буквы y. Если, например, $x = 0$, то $y = 2 \cdot 0+1 = 1$; если $x = 10$, то $y = 2 \cdot 10+1 = 21$; при $x = -\frac{1}{2}$ $y=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$ и т. д. Обратимся еще к одному равенству:

$$y = x^2. \qquad (2)$$

Каждому значению x это равенство, как и равенство (1), ставит в соответствие вполне определенное значение y. Если, например, $x = 2$, то $y = 4$; при $x = -3$ $y = 9$ и т. д. Равенства (1) и (2) связывают между собой две величины x и y так, что каждому значению одной из них (x) ставится в соответствие вполне определенное значение другой величины (y).

Если каждому значению величины x соответствует вполне определенное значение величины y, то эта величина y называется функцией от x. Величина x при этом называется аргументом функции y.

Таким образом, формулы (1) и (2) определяют две различные функции аргумента x.

Функция аргумента x, имеющая вид

$$y = ax + b, \qquad (3)$$

где a и b — некоторые заданные числа, называется *линейной*. Примером линейной функции может служить любая из функций:

$$y = x + 2 \quad (a = 1,\ b = 2);$$
$$y = -10 \quad (a = 0,\ b = -10);$$
$$y = -3x \quad (a = -3,\ b = 0);$$
$$y = 0 \quad (a = b = 0).$$

Как известно из курса VIII класса, ***графиком функции*** $\boldsymbol{y = ax + b}$ ***является прямая линия.*** Поэтому-то данная функция и называется линейной.

Напомним, как строится график линейной функции $y = ax + b$.

1. **График функции** $\boldsymbol{y = b}$. При $a = 0$ линейная функция $y = ax + b$ имеет вид $y = b$. Ее графиком служит прямая, параллельная оси x и пересекающая ось y в точке с ординатой b. На рисунке 1 вы видите график функции $y = 2$ $(b > 0)$, а на рисунке 2 — график функции $y = -1$ $(b < 0)$.

Если не только a, но и b равно нулю, то функция $y = ax + b$ имеет вид $y = 0$. В этом случае ее график совпадает с осью x (рис. 3).

2. **График функции** $\boldsymbol{y = ax}$. При $b = 0$ линейная функция $y = ax + b$ имеет вид $y = ax$.

Если $a \neq 0$, то графиком ее является прямая, проходящая через начало координат и наклоненная к оси x под углом φ, тангенс которого равен a (рис. 4). Для построения прямой $y = ax$ достаточно найти какую-нибудь одну ее точку, отличную от начала координат. Полагая, например, в равенстве $y = ax$ $x = 1$, получим $y = a$. Следовательно, точка M с координатами $(1;\ a)$ лежит на нашей прямой (рис. 4). Проводя теперь прямую через начало координат и точку M, получаем искомую прямую $y = ax$.

На рисунке 5 для примера начерчена прямая $y = 2x$ $(a > 0)$, а

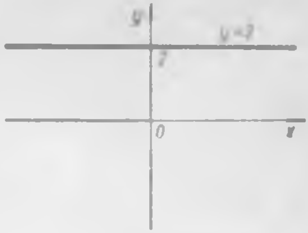


Рис. 1.

Рис. 2.

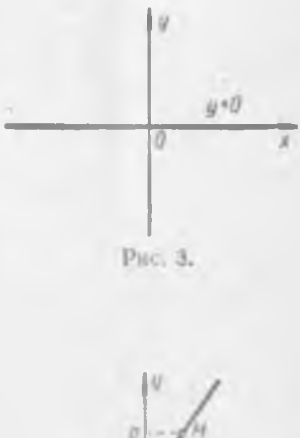


Рис. 3.

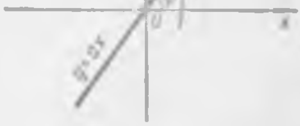


Рис. 4.

на рисунке 6 — прямая $y = -x$ $(a < 0)$.

3. **График функции $y = ax + b$.** Пусть $b > 0$. Тогда прямая $y = ax + b$ получается посредством параллельного сдвига прямой $y = ax$ на b единиц вверх. В качестве примера на рисунке 7 показано построение прямой $y = \frac{x}{2} + 3$.

Если $b < 0$, то прямая $y = ax + b$ получается посредством параллельного сдвига прямой $y = ax$ на $-b$ единиц вниз. В качестве примера на рисунке 8 показано построение прямой $y = \frac{x}{2} - 3$.

Прямую $y = ax + b$ можно построить и другим способом. Любая прямая полностью определяется двумя своими точками. Поэтому для построения графика функции $y = ax + b$ достаточно найти какие-нибудь две его точки, а затем провести через них прямую линию. Поясним это на примере функции $y = -2x + 3$. При $x = 0$ $y = 3$, а при $x = 1$ $y = 1$. Поэтому две точки: M с координатами (0; 3) и N с координатами (1, 1) — лежат на нашей прямой. Отметив эти точки на плоскости координат и соединив их прямой линией (рис. 9), получим график функции $y = -2x + 3$. Вместо точек M и N можно было бы взять, конечно, и другие две точки. Например, в качестве значений x мы могли бы выбрать не 0 и 1, как выше, а -1 и 2,5. Тогда для y мы получили бы соответственно значения 5 и -2. Вместо точек M и N мы имели бы точки P с координатами $(-1; 5)$ и Q с координатами $(2{,}5; -2)$. Эти две точки, так же как и точки M и N, полностью определяют искомую прямую $y = -2x + 3$.

Рис. 5.

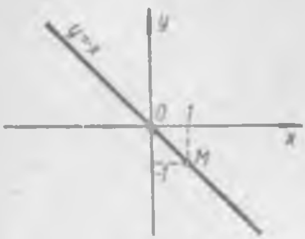


Рис. 6.

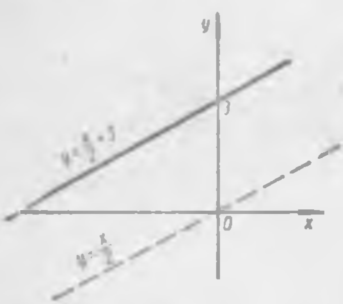


Рис. 7.

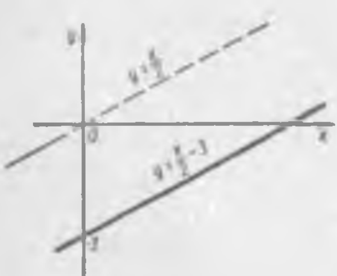


Рис. 8.

Упражнения

15. На одном и том же рисунке построить графики функций:

а) $y=-4$; г) $y=2$;
б) $y=-2$; д) $y=4$.
в) $y=0$;

Пересекаются ли эти графики с осями координат? Если пересекаются, то укажите координаты точек пересечения.

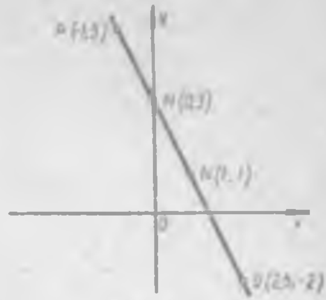


Рис. 9.

16. На одном и том же рисунке построить графики функций:

а) $y=\frac{x}{4}$; б) $y=\frac{x}{2}$; в) $y=x$;

г) $y=2x$; д) $y=4x$.

17. На одном и том же рисунке построить графики функций:

а) $y=-\frac{x}{4}$; б) $y=-\frac{x}{2}$;

в) $y=-x$; г) $y=-2x$; д) $y=-4x$.

Построить графики данных функций (№ 18—21) и определить координаты точек пересечения этих графиков с осями координат.

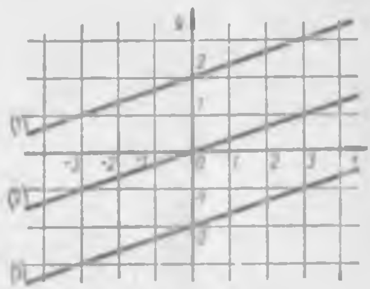


Рис. 10.

18. $y=3+x$. 20. $y=-4-x$.
19. $y=2x-2$. 21. $y=0,5\,(1-3x)$.

22. Построить график функции

$$y=2x-4;$$

используя этот график, выяснить:

а) при каких значениях x $y=0$;

б) при каких значениях x значения y отрицательны и при каких — положительны;

в) при каких значениях x величины x и y имеют одинаковые знаки;

г) при каких значениях x величины x и y имеют разные знаки.

23. Написать уравнения прямых, представленных на рисунках 10 и 11.

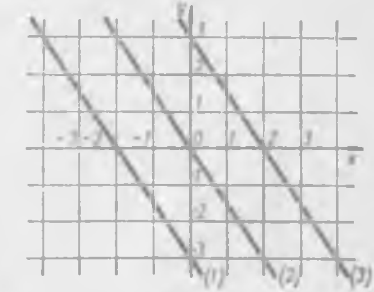


Рис. 11.

24. Какие из известных вам физических законов описываются с помощью линейных функций?

25. Как построить график функции $y = -(ax + b)$, если задан график функции $y = ax + b$?

Линейные уравнения § 4

Уравнение называется линейным, если левая и правая части его представляют собой линейные функции относительно неизвестной величины.

К таким уравнениям относится, например, любое из уравнений:

$$2x - 1 = 3x - 5; \quad 4x = 6 - 7x; \quad 8x - 9 = 0.$$

Общий вид линейного уравнения таков:

$$ax + b = cx + d, \tag{1}$$

где a, b, c и d — заданные числа, а x — неизвестная величина.

Если в уравнении (1) коэффициенты a и c отличны друг от друга, то уравнение называется также *уравнением 1-й степени*. Так, каждое из приведенных выше линейных уравнений является вместе с тем и уравнением 1-й степени. Уравнение $0 \cdot x = 1$ (это тоже уравнение!) является линейным, но не является уравнением 1-й степени. Очевидно, что каждое уравнение 1-й степени можно назвать и линейным уравнением. Однако не каждое линейное уравнение будет уравнением 1-й степени.

Как же решаются линейные уравнения?

Перенося cx из правой части уравнения (1) в левую, а b из левой части в правую, получим эквивалентное уравнение $(a - c)x = d - b$. Таким образом, всякое линейное уравнение эквивалентно уравнению вида

$$mx = n, \tag{2}$$

где m и n — некоторые заданные числа, а x — неизвестная величина.

Если $m \neq 0$, то уравнение (2) имеет, очевидно, один корень

$$x = \frac{n}{m}.$$

Если $m = 0$, а $n \neq 0$, то уравнение (2) обращается в

$$0 \cdot x = n.$$

Такое равенство не может выполняться ни при каких значениях x. Следовательно, в этом случае уравнение (2) не имеет корней.

Наконец, при $m = n = 0$ уравнение (2) принимает вид $0 \cdot x = 0$.

Это равенство верно при любых значениях x. Поэтому в данном случае уравнение (2) имеет бесконечное множество корней: любое число является его корнем.

Примеры.

1) Решить относительно x уравнение

$$ax - 1 = x + 2.$$

Перенося x в левую, а -1 в правую часть и приводя подобные члены, получаем

$$(a - 1)x = 3.$$

Если $a \neq 1$, то уравнение имеет единственный корень $x = \frac{3}{a-1}$.

Если же $a = 1$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x = 3$. Такое уравнение не имеет корней.

Ответ. При $a \neq 1$ данное уравнение имеет единственный корень $x = \frac{3}{a-1}$, а при $a = 1$ — корней не имеет.

2) Решить относительно x уравнение

$$a - x = 1 - a^2x.$$

Перенося a^2x в левую, а a в правую часть и приводя подобные члены, получаем

$$(a^2 - 1)x = 1 - a.$$

Если $a^2 - 1 \neq 0$, то есть $a \neq 1$ и $a \neq -1$, то

$$x = \frac{1-a}{a^2-1} = -\frac{1}{a+1}.$$

Если $a = 1$, то рассматриваемое уравнение сводится к такому:

$$0 \cdot x = 0.$$

В этом случае любое число является его корнем.

Наконец, при $a = -1$ получаем

$$0 \cdot x = 2.$$

Такое равенство не выполняется ни при каких значениях x.

Ответ. Если $a \neq 1$ и $a \neq -1$, то данное уравнение имеет единственный корень $x = -\frac{1}{a+1}$; при $a = 1$ его корнем является любое число, а при $a = -1$ уравнение вовсе не имеет корней.

Упражнения

Данные уравнения (№ 26—35) решить относительно x:

26. $3x + 1 = a$.
27. $5 + x = ax$.
28. $4 = ax$.
29. $x = a^2x$.
30. $ax - a^2 = 4 - 2x$.
31. $a + x = a^2x - 1$.
32. $ax - b = 1 + x$.
33. $x = b - a^2x$.
34. $ax - b^2 = 7$.
35. $3 - a^2x = x - b$.

36. Может ли уравнение $mx = n$ иметь:

а) ровно один корень;

б) ровно два различных корня;

в) ровно 1 000 000 различных корней;

г) бесконечно много различных корней?

37. Может ли уравнение $ax = 1 + b^2$ иметь бесконечно много различных корней?

38. Может ли уравнение $(a - 1)x = a^2 - 3a + 2$ не иметь корней?

39. Отцу 45 лет, а его сыну 15. Через сколько лет отец будет старше сына:

а) в два раза;

б) в четыре раза?

Как можно истолковать отрицательный корень уравнения, полученный при решении задачи 39б?

40. Из пунктов A и B отправляются навстречу друг другу одновременно два пешехода. Первый идет со скоростью v_1 *км/ч*, а второй — со скоростью v_2 *км/ч* ($v_1 \neq v_2$). Спустя некоторое время они одновременно изменяют свои скорости: первый пешеход идет со скоростью v_2 *км/ч*, а второй — со скоростью v_1 *км/ч*. Встреча пешеходов происходит через час после того, как они изменили свои скорости, в пункте, равноудаленном от A и B. Какое время находились пешеходы в пути?

41. Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля в $p\%$ и $q\%$ ($p \neq q$). Сколько нужно взять лома того и другого сорта, чтобы получить 100 тонн стали с содержанием никеля в $r\%$?

Графический способ решения уравнения $mx = n$ — § 5

Уравнение вида $mx = n$, к которому сводится любое линейное уравнение, может быть легко решено графически. На одном и том же рисунке построим графики двух функций: $y = mx$ и $y = n$. Если эти графики пересекутся, то абсцисса точки пересечения и даст нам корень уравнения $mx = n$.

Если же эти графики не пересекутся, то это будет означать, что уравнение не имеет корней.

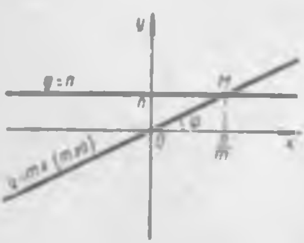


Рис 12.

Рассмотрим отдельно три случая.

1. $m \neq 0$. В этом случае графиком функции $y = mx$ будет прямая, наклоненная к оси x под некоторым углом φ (рис. 12). Графиком функции $y = n$ является прямая, параллельная оси x. Такие две прямые пересекаются и притом лишь в одной точке (на рис. 12 — точка M). Абсцисса точки пересечения, $\frac{n}{m}$, и есть корень уравнения $mx = n$.

2. $m=0$, $n \neq 0$. В этом случае прямая $y=mx$ сливается с осью x, а прямая $y=n$ параллельна оси x (рис. 13). Прямые $y=mx$ и $y=n$ оказываются параллельными; точки пересечения таких прямых не существует. Поэтому не существует и корней уравнения $mx=n$.

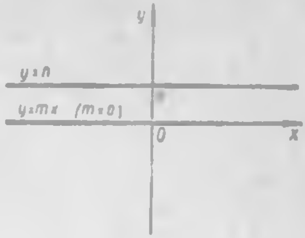


Рис. 13.

3. $m=n=0$. В этом случае прямые $y=mx$ и $y=n$ совпадают, сливаясь с осью x (рис. 14). О таких прямых можно сказать, что они пересекаются в каждой точке оси x. Поэтому в данном случае любое число является корнем уравнения $mx=n$.

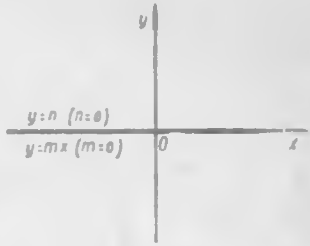


Рис. 14.

Упражнения

Решить графически данные уравнения:

42. $2x=4$.
43. $3x=0$.
44. $4x=-4$.
45. $0{,}5x=1{,}5$.
46. $-0{,}8x=0$.
47. $-2x=-7$.
48. $3-x=2x-3$.
49. $x=2x+2$.

Уравнения, сводящиеся к линейным — § 6

К решению линейных уравнений сводится решение и некоторых других уравнений.

Поясним это на примере уравнения

$$\frac{m+x}{n+x}=\frac{m}{n}, \qquad (1)$$

где m и n — заданные числа, а x — неизвестная величина. Это уравнение нельзя назвать линейным, поскольку его левая часть не является линейной функцией относительно x. Но такое уравнение легко сводится к линейному. Прежде всего заметим, что $n \neq 0$, иначе правая часть данного уравнения не имела бы смысла. Теперь воспользуемся свойством пропорций: если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $ad=bc$. Применяя это свойство пропорций к равенству (1), получаем

$$(m+x)n=(n+x)m,$$

откуда

$$mn+nx=nm+mx,$$

или

$$(n - m)x = 0. \qquad (2)$$

Итак, исходя из нелинейного уравнения (1), мы пришли к линейному уравнению (2). Из него получаем: если $m \neq n$, то $x = 0$; если же $m = n$, то x — любое число.

Не будем торопиться с ответом. Переход от уравнения (1) к уравнению (2) фактически свелся к тому, что обе части уравнения (1) мы умножили на выражение $n(n + x)$. Но в таком случае уравнение (2) может оказаться и неэквивалентным уравнению (1). Очевидно, что потерять корней при переходе от (1) к (2) мы не могли (докажите это!). Но как знать, может быть, мы получили посторонние корни? Вот почему теперь необходимо сделать проверку полученных корней.

Сначала проверим корень $x = 0$, который получен из уравнения (2) в предположении, что $m \neq n$. Если в уравнении (1) положить $x = 0$, то получим $\frac{m}{n} = \frac{m}{n}$. Следовательно, при $m \neq n$ и $n \neq 0$ $x = 0$ — действительно корень уравнения (1). Теперь проверим, будет ли любое число при $m = n \neq 0$ корнем уравнения (1). При $m = n$ это уравнение принимает вид

$$\frac{n + x}{n + x} = 1. \qquad (3)$$

Любое число, кроме $-n$, удовлетворяет уравнению (3) и, следовательно, является его корнем. Но $x = -n$ нельзя считать корнем этого уравнения, поскольку при $x = -n$ левая часть равенства (3) не определена. Таким образом, при $m = n \neq 0$ корнем уравнения (1) является не любое число, как это было для уравнения (2), а лишь любое число, отличное от $-n$.

Теперь можно дать ответ: если $n \neq 0$ и $m \neq n$, то уравнение (1) имеет единственный корень $x = 0$; если же $m = n \neq 0$, то корнем его является любое число, кроме $-n$.

Упражнения

Данные уравнения (№ 50—58) решить относительно x, считая a, b, m и n заданными:

50. $\frac{x}{x-3} = \frac{3}{x-3}$.

53. $\frac{a}{x-2} = \frac{x+1}{x^2-4}$.

51. $\frac{2}{x-3} = \frac{x+5}{x^2-9}$.

54*. $\frac{a}{1-bx} = \frac{b}{1-ax}$.

52. $\frac{x-5}{x+7} = \frac{a-x}{x+7}$.

55*. $a = \frac{1-bx}{1+bx}$.

56. $\frac{4(x^2-b)}{2bx-b-2x+1} = \frac{2x}{b-1} - \frac{2x}{2x-1}$.

57. $\frac{3a}{x-a}-\frac{a}{x-2a}=\frac{a}{x-a}-\frac{2a}{x-2a}$.

58*. $\frac{m}{x-m}-\frac{n}{x-n}=\frac{m^2-n^2}{x^2-(m+n)x+mn}$.

59. Уравнение

$$\frac{ax-b}{ax+b}=1$$

решить:

а) относительно a; б) относительно b; в) относительно x.

Уравнения, содержащие неизвестное под знаком абсолютной величины § 7

Абсолютная величина числа a (обозначается $|a|$) определяется следующим образом:

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{если } a>0; \\ -a, & \text{если } a<0; \\ 0, & \text{если } a=0. \end{cases}$$

Например, $|10|=10$; $\left|-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}$; $|-100|=100$ и т. д.

Каждому значению x соответствует вполне определенное значение $|x|$. Поэтому равенство $y=|x|$ определяет y как некоторую функцию аргумента x. График этой функции приведен на рисунке 15 (стр. 18). При $x>0$ $|x|=x$, а при $x<0$ $|x|=-x$; поэтому линия $y=|x|$ при $x>0$ совпадает с прямой $y=x$ (биссектриса 1-го координатного угла), а при $x<0$ — с прямой $y=-x$ (биссектриса 2-го координатного угла).

Некоторые уравнения содержат неизвестное под знаком абсолютной величины. К таким относятся, например, уравнения $|x-1|=2$, $|6-2x|=3x+1$ и т. д. Решение их основано на том, что ***если абсолютная величина некоторого числа x равна положительному числу a, то само это число x равно либо a, либо $-a$.*** Так, если $|x|=10$, то либо $x=10$, либо $x=-10$.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Решить уравнение $|x-1|=2$.

Разность $x-1$ должна быть равна либо $+2$, либо -2. Если $x-1=2$, то $x=3$; если же $x-1=-2$, то $x=-1$. Проверка показывает, что оба эти значения удовлетворяют данному уравнению.

Ответ. Данное уравнение имеет два корня: $x_1=3$, $x_2=-1$.

2. Решить уравнение $|6-2x|=3x+1$.

Имеем: либо $6-2x=3x+1$, либо $6-2x=-(3x+1)$. В первом случае $x=1$, а во втором $x=-7$.

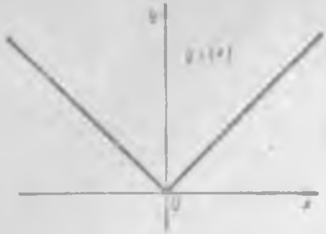


Рис. 15.

Рис. 16.

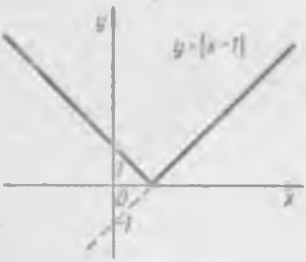


Рис. 17.

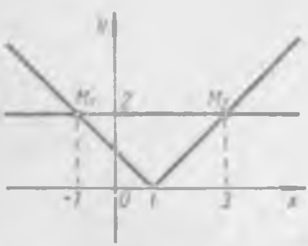


Рис. 18.

Проверка. При $x=1$ $|6-2x|=|4|=4$, $3x+1=4$; следовательно, $x=1$ — корень данного уравнения. При $x=-7$ $|6-2x|=|20|=20$, $3x+1=-20$; так как $20 \neq -20$, то $x=-7$ не есть корень данного уравнения.

Ответ. Данное уравнение имеет один корень: $x=1$.

Подобные уравнения можно решать и графически. Решим, например, графически уравнение $|x-1|=2$. Для этого нужно прежде всего построить график функции $y=|x-1|$. Это можно сделать следующим образом. Сначала построим график функции $y=x-1$ (рис. 16). Ту часть этого графика, которая лежит выше оси x, оставим без изменения. Для нее $x-1>0$ и потому $|x-1|=x-1$.

Ту же часть графика, которая лежит ниже оси x, отобразим симметрично относительно этой оси. Ведь для этой части $x-1<0$ и потому $|x-1|=-(x-1)$. Полученная в результате линия (рис. 17 — сплошная линия) и будет графиком функции $y=|x-1|$. Эта линия пересекается с прямой $y=2$ (рис. 18) в двух точках: M_1 с абсциссой -1 и M_2 с абсциссой 3.

Поэтому уравнение $|x-1|=2$ имеет два корня: $x_1=-1$, $x_2=3$.

Упражнения

Решить уравнения:

60. $1-|x|=0{,}5$.
61. $1+|x|=a$.
62. $|1-x|=0{,}5$.
63. $|1-x|=a$.
64. $|x+3|=3+2x$.
65. $|7x-1|=21-9x$.
66. $|5-x|=|x+4|$.
67. $|1-3x|=|3-2x|$.

68. Покажите, что график функции $y = |x - a|$ $(a > 0)$ получается посредством параллельного сдвига графика функции $y = |x|$ на a единиц длины вправо.

Как строится график функции $y = |x + a|$ $(a > 0)$?

69. Используя результат задачи 68, построить графики следующих функций:

а) $y = |x - 2|$; б) $y = |x + 3|$.

70. Как построить график функции $y = |ax + b|$, если задан график функции $y = ax + b$?

71. Может ли график функции $y = ax + b$ совпасть с графиком функции $y = |ax + b|$?

72. Решить графически уравнения:

а) $|2 + x| = 3$; б) $x = |2 - x|$; в) $|2x - 3| = 3 - x$.

73. Исходя из геометрических соображений, выяснить, всегда ли имеют корни следующие уравнения:

а) $x = |ax + b|$; в) $|ax + b| = c$;

б) $|2x + b| = 3$; г) $|ax + b| = |cx + d|$.

74. Как построить график функции $y = a|x| + b$, если задан график функции $y = ax + b$?

Метод интервалов § 8

При решении некоторых уравнений, содержащих неизвестное под знаком абсолютной величины, часто используют так называемый *метод интервалов*. Продемонстрируем этот метод на примере уравнения

$$|x + 1| + |x - 2| = 3. \qquad (1)$$

Это уравнение содержит две абсолютные величины: $|x+1|$ и $|x-2|$. Первая из них обращается в нуль при $x = -1$, а вторая — при $x = 2$. На числовой прямой отметим две точки: A с абсциссой -1 и B с абсциссой 2 (рис. 19). Тем самым числовая прямая разобьется на три интервала. Первый

Рис. 19.

(бесконечный) интервал включает в себя все точки, лежащие левее A. Второй (конечный) интервал содержит в себе точки A и B, а также все точки, лежащие между ними. Третий (бесконечный) интервал состоит из всех точек, лежащих правее B. В любом из этих трех интервалов каждое из выражений $|x+1|$ и $|x-2|$ легко записывается без знака абсолютной величины. Так,

$$|x+1| = \begin{cases} -x-1 & \text{в первом интервале;} \\ x+1 & \text{во втором и в третьем интервалах.} \end{cases}$$

Аналогично,

$$|x-2| = \begin{cases} -x+2 & \text{в первом и во втором интервалах;} \\ x-2 & \text{в третьем интервале.} \end{cases}$$

Поэтому левая часть уравнения (1) представляется следующим образом:
в первом интервале $(-x-1)+(-x+2)=-2x+1$;
во втором интервале $(x+1)+(-x+2)=3$;
в третьем интервале $(x+1)+(x-2)=2x-1$.
Теперь нетрудно найти все корни уравнения (1). Сразу же замечаем, что любое число из второго интервала

$$-1 < x < 2$$

является корнем: ведь при любом значении x из этого интервала левая и правая части уравнений (1) принимают одно и то же числовое значение 3.

Обратимся к первому интервалу. Если в нем имеются корни, то они должны, очевидно, совпадать с корнями уравнения

$$-2x+1=3.$$

Это уравнение имеет единственный корень $x=-1$, который мы уже получили раньше и который, кстати, не попадает в первый интервал. (Значение $x=-1$ принадлежит второму интервалу.) Таким образом, в первом интервале уравнение (1) не имеет корней.

Аналогично можно установить, что уравнение (1) не имеет корней и в третьем интервале. Предлагаем учащимся убедиться в этом самостоятельно.

Итак, уравнение (1) имеет бесконечное множество корней. Каждое число, заключенное в интервале

$$-1 < x < 2,$$

является его корнем. Никаких других корней это уравнение не имеет.

Упражнения

Решить уравнения:

75. $|x-1|+|x+1|=2$.
76. $|5-2x|+|x+3|=2-3x$.
77. $|x|+|x+2|+|2-x|=x+1$.
78. $|1-x|-|x+3|=|x+2|$.

Неравенства § 9

Если числа a и b равны между собой, то $a-b=0$. Если же числа a и b не равны между собой, то разность $a-b$ либо положительна, либо отрицательна.

Если разность $a-b$ положительна, то говорят, что *число a больше числа b*; записывается это таким образом:

$$a > b. \tag{1}$$

Если разность $a-b$ отрицательна, то говорят, что *число a меньше числа b*; записывается это таким образом:

$$a < b. \tag{2}$$

Например, $5 > 3$, поскольку разность $5 - 3 = 2$ положительна; $-7 < -6$, так как разность $(-7) - (-6) = -1$ отрицательна.

Записи (1) и (2) называются *числовыми неравенствами*, а знаки $>$ и $<$, участвующие в них, — *знаками неравенства*.

Числовые неравенства допускают простую геометрическую интерпретацию. Будем изображать числа точками числовой прямой. Пусть числу a соответствует точка A, а числу b — точка B. Тогда, если $a > b$, то точка A будет лежать правее точки B (рис. 20, *а*). Если же $a < b$, то точка A будет лежать левее точки B (рис. 20, *б*).

До сих пор мы говорили лишь о таких неравенствах, обе части которых представляют собой вполне определенные ч и с л а. (Правда, для общности рассуждений мы обозначали эти числа буквами.) Однако в математике часто приходится иметь дело и с такими неравенствами, отдельные члены которых, выраженные с помощью букв, могут принимать различные числовые значения, например,

$$\sqrt{a} > a, \tag{3}$$

$$\frac{1}{a} > 3, \tag{4}$$

$$a - 1 < a, \tag{5}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} < 0{,}5. \tag{6}$$

Допустимыми значениями букв, входящих в неравенство, называются такие значения этих букв, при которых обе части неравенства имеют смысл.

Очевидно, что допустимыми значениями a в неравенстве (3) служат все положительные числа и нуль, в неравенстве (4) — все числа, кроме нуля, в неравенстве (5) — все числа. Для неравенства (6) допустимые значения a и b складываются из всевозможных пар неотрицательных чисел.

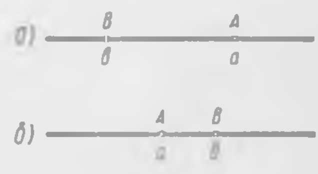


Рис. 20.

Рассмотрим подробнее неравенство (3). Оно, как мы уже говорили, определено для всех неотрицательных значений a. Однако не каждое из указанных чисел удовлетворяет этому неравенству. Действительно, при $a = 0{,}25$ $\sqrt{a} = 0{,}5$. Поскольку $0{,}5 > 0{,}25$, то число $a = 0{,}25$ удовлетворяет неравенству (3). А вот число 4 ему уже не удовлетворяет, поскольку $\sqrt{4} < 4$. Таким образом, неравенству, содержащему букву, могут удовлетворять одни допустимые значения этой буквы и не удовлетворять другие допустимые значения этой буквы.

Неравенство, которому удовлетворяют все допустимые значения входящих в него букв, называется тождественным неравенством.

Примером такого неравенства может служить хотя бы неравенство (5). При любом значении a $a - 1 < a$. Неравенство (4) нельзя отнести к тождественным неравенствам; ему не удовлетворяет, например, значение $a = 1$: $\frac{1}{1} < 3$.

Упражнения

79. Найти допустимые значения букв, входящих в неравенства:

а) $\frac{\sqrt{a}}{a} > 5$; в) $\frac{1}{\sqrt{|a|}} < a$; д) $|x| > x$;

б) $\sqrt{b} < \frac{1}{1-b}$; г) $\sqrt{|b|} < \frac{3b}{b^2+1}$; е) $\frac{1}{a^2+b^2} > \frac{1}{a^2+b^2+1}$.

80. Можно ли сказать, что неравенствам

$$\sqrt{a} + 5 > 1 \quad \text{и} \quad \frac{a^2-1}{a+1} < a$$

удовлетворяют любые значения входящих в них букв? Являются ли эти неравенства тождественными?

Основные свойства числовых неравенств § 10

1. ***Если $a > b$, то $b < a$, и, наоборот, если $a < b$, то $b > a$.***

Доказательство. Пусть $a > b$. По определению это означает, что число $(a - b)$ положительно. Если мы перед ним поставим знак минус, то полученное число $-(a - b)$ будет, очевидно, отрицательным. Поэтому $-(a - b) < 0$, или $b - a < 0$. А это (опять же по определению) и означает, что $b < a$.

Обратное утверждение предлагаем учащимся доказать самостоятельно.

Доказанное свойство неравенств допускает простую геометрическую интерпретацию: если точка A лежит на числовой прямой правее точки B, то точка B лежит левее точки A, и наоборот (см. рис. 20).

2. ***Если $a > b$, а $b > c$, то $a > c$.***

Геометрически это свойство состоит в следующем. Пусть точка A (соответствующая числу a) лежит правее точки B (соответствующей числу b), а точка B, в свою очередь, лежит правее точки C (соответствующей числу c). Тогда точка A и подавно будет лежать правее точки C (рис. 21).

Приведем алгебраическое доказательство этого свойства неравенств.

Пусть $a > b$, а $b > c$. Это означает, что числа $(a-b)$ и $(b-c)$ положительны. Сумма двух положительных чисел, очевидно,

Рис. 21.

положительна. Поэтому $(a - b) + (b - c) > 0$, или $a - c > 0$. Но это и означает, что $a > c$.

3. ***Если $a > b$, то для любого числа c $a+c > b+c$, $a - c > b - c$.*** Иными словами, ***если к обеим частям числового неравенства прибавить или от обеих частей отнять одно и то же число, то неравенство не нарушится.***

Доказательство. Пусть $a>b$. Это означает, что $a-b>0$. Но $a-b=(a+c) - (b+c)$. Поэтому $(a+c)-(b+c)>0$. А по определению это и означает, что $a+c > b + c$. Аналогично показывается, что $a - c > b - c$.

Например, если к обеим частям неравенства $5 > 4$ прибавить $1\frac{1}{2}$, то получим $6\frac{1}{2} > 5\frac{1}{2}$. Отнимая от обеих частей данного неравенства число 5, получим $0 > -1$.

Следствие. ***Любое слагаемое одной части числового неравенства можно перенести в другую часть неравенства, поменяв знак этого слагаемого на противоположный.***

Пусть, например, $a + b > c$. Требуется доказать, что $a>c-b$. Для доказательства от обеих частей данного неравенства достаточно отнять число b.

4. ***Пусть $a > b$. Если $c > 0$, то $ac > bc$. Если же $c < 0$, то $ac < bc$.***

Иными словами, ***если обе части числового неравенства умножить на положительное число, то неравенство не нарушится: если обе части неравенства умножить на отрицательное число, то знак неравенства изменится на противоположный***

Короче это свойство формулируется таким образом:

Неравенство сохраняется при почленном умножении на положительное число и изменяет знак на противоположный при почленном умножении на отрицательное число.

Например, умножив неравенство $5 > 1$ почленно на 7, получим $35 > 7$. Почленное умножение того же неравенства на -7 дает $-35 < -7$.

Доказательство 4-го свойства.

Пусть $a > b$. Это означает, что число $a - b$ положительно. Произведение двух положительных чисел $a - b$ и c, очевидно, также положительно, т. е. $(a-b)c>0$, или $ac-bc > 0$. Поэтому $ac > bc$.

Точно так же рассматривается случай, когда число c отрицательно. Произведение положительного числа $a - b$ на отрицательное число c, очевидно, отрицательно, т. е. $c(a-b) < 0$; поэтому $ac-bc < 0$, откуда $ac < bc$.

Следствие. ***Знак неравенства сохраняется при почленном делении на положительное число и изменяется на противоположный при почленном делении на отрицательное число.***

Это вытекает из того, что деление на число $c \neq 0$ равносильно умножению на число $\frac{1}{c}$.

Упражнения

81. Можно ли неравенство $2 > 1$ умножить почленно на:

а) $a^2 + 1$; б) $|a|$; в) a; г) $1 - 2a + a^2$,

так чтобы знак неравенства сохранился?

82. Всегда ли $5x$ больше $4x$, а $-y$ меньше y?

83. Каким может быть число x, если известно, что $-x > 7$?

84. Расположить в порядке возрастания числа:

а) a^2, $5a^2$, $2a^2$; б) a, $5a$, $2a$; в) a, a^2, a^3.

85. Расположить в порядке убывания числа

$$a - b,\ a - 2b,\ a - 3b.$$

86. Дать геометрическую интерпретацию третьему свойству числовых неравенств.

Почленное сложение и вычитание неравенств § 11

Про два неравенства, имеющие одинаковые знаки неравенства (оба знак $>$ или оба знак $<$), говорят, что они *одинакового смысла.* Например, неравенства $a > b$ и $3 > 2$ — одинакового смысла, так как оба они имеют один и тот же знак $>$; неравенства $a < b$ и $a < c$ также одинакового смысла, поскольку имеют один и тот же знак $<$.

Если одно из неравенств имеет знак $>$, а другое знак $<$, то такие неравенства называются неравенствами *противоположного смысла*. Например, $16 > 0$ и $5 < a$ — неравенства противоположного смысла.

Теорема 1. ***Неравенства одинакового смысла можно почленно складывать.***

Доказательство. Пусть $a>b$ и $c>d$. Докажем, что $a+c>b+d$.

Так как $a>b$ и $c>d$, то числа $(a-b)$ и $(c-d)$ положительны. Сумма двух положительных чисел также положительна: $(a-b)+(c-d)>0$. Но $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$.

Поэтому число $(a+c)-(b+d)$ положительно. А это и означает, что $a+c>b+d$.

Случай, когда складываются неравенства $a<b$ и $c<d$, предлагаем учащимся рассмотреть самостоятельно.

Примеры:

$$+\begin{cases} 0 > -100 \\ 65 > 64 \end{cases} \qquad +\begin{cases} 14 < 15 \\ -20 < -15 \end{cases}$$
$$65 > -36 \qquad\qquad -6 < 0.$$

Теорема 2. ***Два неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать, оставляя знак того неравенства, из которого мы вычитаем.***

Например:

$$-\begin{cases} 2 > 0 \\ -3 < 6 \end{cases} \qquad -\begin{cases} 10 < 15 \\ 3 > 2 \end{cases}$$
$$5 > -6 \qquad\qquad 7 < 13.$$

Доказательство. Пусть $a>b$ и $c<d$. Покажем, что $a-c>b-d$.

Почленное умножение неравенства $c<d$ на -1 дает $-c>-d$. Сложив это неравенство с данным неравенством $a>b$, получим $a-c>b-d$.

Случай, когда $a<b$ и $c>d$, предлагаем учащимся рассмотреть самостоятельно.

Замечание. Неравенства одинакового смысла почленно вычитать, вообще говоря, нельзя. Например, если бы мы из неравенства $2>0$ вычли почленно неравенство $0>-5$, то пришли бы к противоречию: 2 больше 5.

Упражнения

Доказать неравенства:

87. $\sqrt{5}+\sqrt{10}>5$.
88. $\sqrt{7}+\sqrt{15}<7$.
89. $\sqrt{21}-\sqrt{5}>\sqrt{20}-\sqrt{6}$.
90. $\sqrt{37}-\sqrt{14}>6-\sqrt{15}$.
91. $\sqrt{101}-\sqrt{35}>4$.
92. $-16<\sqrt{17}-\sqrt{390}$.

Теорема. ***Неравенства одинакового смысла с положительными частями можно почленно умножать.***

Доказательство. Пусть $a>b$ и $c>d$, причем числа a, b, c и d положительны. Докажем, что $ac>bd$.

Умножив неравенство $a>b$ почленно на положительное число c, получим $ac>bc$. Умножив затем неравенство $c>d$ почленно на положительное число b, получим $bc>bd$. Теперь имеем: $ac>bc$, а $bc>bd$. Но тогда по второму основному свойству неравенств (§ 10) должно быть $ac>bd$.

Аналогично может быть рассмотрен случай, когда $a<b$ и $c<d$.

Примеры:

$$\cdot\begin{cases} 2>1 \\ 6>4 \end{cases} \quad\quad \cdot\begin{cases} 5>3 \\ 100>10 \end{cases} \quad\quad \cdot\begin{cases} 1<7 \\ 9<10 \end{cases}$$
$$\overline{\;12>4\;} \quad\quad \overline{\;500>30\;} \quad\quad \overline{\;9<70\;}$$

Следствие 1. ***Если $a>b$, причем числа a и b положительны, то для любого натурального n***

$$a^n>b^n.$$

Действительно, умножая почленно неравенство $a>b$ само на себя, получим $a^2>b^2$. Умножая затем почленно полученное неравенство на исходное неравенство $a>b$, получим $a^3>b^3$ и т. д.

Следствие 2. ***Если числа a и b положительны и***

$$a^n>b^n \tag{1}$$

(n — натуральное число), то $a>b$.

Действительно, возможен один из трех случаев: $a=b$, $a<b$ и $a>b$. Если $a=b$, то $a^n=b^n$. При $a<b$ мы имели бы: $b>a$ и потому по следствию 1 $b^n>a^n$. И то и другое противоречит неравенству (1). Остается признать, что $a>b$.

Пример. Определить, какое число больше: $\sqrt{5}+\sqrt{6}$ или $\sqrt{3}+\sqrt{8}$.

Возвысим оба числа в квадрат:

$$(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2=5+2\sqrt{30}+6=11+2\sqrt{30};$$

$$(\sqrt{3}+\sqrt{8})^2=3+2\sqrt{24}+8=11+2\sqrt{24}.$$

Квадрат первого числа больше квадрата второго числа. Так как эти числа положительны, то по следствию 2

$$\sqrt{5}+\sqrt{6}>\sqrt{3}+\sqrt{8}.$$

Упражнения

93. Любые ли два неравенства одинакового смысла можно почленно умножить? (Рассмотрите пример: $3 > -10$ и $-2 > -7$).

94. а) Всегда ли из $a > b$ вытекает, что $a^n > b^n$? Ответ пояснить примерами.

б) Следует ли из $a^n < b^n$, что $a < b$? Ответ пояснить примерами.

В задачах № 95—102 сравнить данные числа, то есть выяснить, какое из них больше и какое меньше:

95. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ и $\sqrt{7}$.

96. $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ и $\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

97. $\sqrt{11}-\sqrt{10}$ и $\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

98. $\sqrt{8-\sqrt{15}}$ и $\frac{1}{2}(\sqrt{30}-\sqrt{2})$.

99*. $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[3]{26}$.

100. $(1+\sqrt{5})^{100}$ и 3^{100}.

101. $(\sqrt{7}+\sqrt{2})^{9}$ и 4^{9}.

102. $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^{51}$ и $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^{51}$.

Двойные неравенства § 13

В дальнейшем нам иногда придется иметь дело с *двойными неравенствами*. Так называются неравенства вида

$$a' < a < a''.$$

По существу эта формула объединяет в себе два неравенства: $a' < a$ и $a < a''$. Этим и объясняется название «двойное неравенство».

Двойные неравенства обладают всеми теми свойствами, о которых мы говорили в § 10—12, когда рассматривали обычные неравенства. Например, к каждой части двойного неравенства можно прибавить любое число k:

$$a' + k < a + k < a'' + k. \quad (1)$$

Каждую часть двойного неравенства можно умножить на любое положительное число k:

$$ka' < ka < ka''. \quad (2)$$

Каждую часть двойного неравенства можно умножить и на любое отрицательное число l, поменяв при этом знаки неравенства на противоположные:

$$la' > la > la''. \quad (3)$$

Упражнения

103. В каких пределах заключено число a, если:

а) $-1{,}2 < 3a < 6$; б) $-1{,}2 < -3a < 6$?

Теорема. ***Неравенства одинакового смысла с положительными частями можно почленно умножать.***

Доказательство. Пусть $a>b$ и $c>d$, причем числа a, b, c и d положительны. Докажем, что $ac>bd$.

Умножив неравенство $a>b$ почленно на положительное число c, получим $ac>bc$. Умножив затем неравенство $c>d$ почленно на положительное число b, получим $bc>bd$. Теперь имеем: $ac>bc$, а $bc>bd$. Но тогда по второму основному свойству неравенств (§ 10) должно быть $ac>bd$.

Аналогично может быть рассмотрен случай, когда $a<b$ и $c<d$.

Примеры:

$$\cdot\begin{cases} 2>1 \\ 6>4 \end{cases} \qquad \cdot\begin{cases} 5>3 \\ 100>10 \end{cases} \qquad \cdot\begin{cases} 1<7 \\ 9<10 \end{cases}$$
$$12>4 \qquad\qquad 500>30 \qquad\qquad 9<70$$

Следствие 1. ***Если $a>b$, причем числа a и b положительны, то для любого натурального n***

$$a^n>b^n.$$

Действительно, умножая почленно неравенство $a>b$ само на себя, получим $a^2>b^2$. Умножая затем почленно полученное неравенство на исходное неравенство $a>b$, получим $a^3>b^3$ и т. д.

Следствие 2. ***Если числа a и b положительны и***

$$a^n>b^n \tag{1}$$

(n — натуральное число), то $a>b$.

Действительно, возможен один из трех случаев: $a=b$, $a<b$ и $a>b$. Если $a=b$, то $a^n=b^n$. При $a<b$ мы имели бы: $b>a$ и потому по следствию 1 $b^n>a^n$. И то и другое противоречит неравенству (1). Остается признать, что $a>b$.

Пример. Определить, какое число больше: $\sqrt{5}+\sqrt{6}$ или $\sqrt{3}+\sqrt{8}$.

Возвысим оба числа в квадрат:

$$(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2=5+2\sqrt{30}+6=11+2\sqrt{30};$$

$$(\sqrt{3}+\sqrt{8})^2=3+2\sqrt{24}+8=11+2\sqrt{24}.$$

Квадрат первого числа больше квадрата второго числа. Так как эти числа положительны, то по следствию 2

$$\sqrt{5}+\sqrt{6}>\sqrt{3}+\sqrt{8}.$$

Упражнения

93. Любые ли два неравенства одинакового смысла можно почленно умножить? (Рассмотрите пример: $3 > -10$ и $-2 > -7$).

94. а) Всегда ли из $a > b$ вытекает, что $a^n > b^n$? Ответ пояснить примерами.

б) Следует ли из $a^n < b^n$, что $a < b$? Ответ пояснить примерами.

В задачах № 95—102 сравнить данные числа, то есть выяснить, какое из них больше и какое меньше:

95. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ и $\sqrt{7}$.

96. $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ и $\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

97. $\sqrt{11}-\sqrt{10}$ и $\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

98. $\sqrt{8-\sqrt{15}}$ и $\frac{1}{2}(\sqrt{30}-\sqrt{2})$.

99*. $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[3]{26}$.

100. $(1+\sqrt{5})^{100}$ и 3^{100}.

101. $(\sqrt{7}+\sqrt{2})^9$ и 4^9.

102. $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^{51}$ и $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^{51}$.

Двойные неравенства § 13

В дальнейшем нам иногда придется иметь дело с *двойными неравенствами*. Так называются неравенства вида

$$a' < a < a''.$$

По существу эта формула объединяет в себе два неравенства: $a' < a$ и $a < a''$. Этим и объясняется название «двойное неравенство».

Двойные неравенства обладают всеми теми свойствами, о которых мы говорили в § 10—12, когда рассматривали обычные неравенства. Например, к каждой части двойного неравенства можно прибавить любое число k:

$$a' + k < a + k < a'' + k. \qquad (1)$$

Каждую часть двойного неравенства можно умножить на любое положительное число k:

$$ka' < ka < ka''. \qquad (2)$$

Каждую часть двойного неравенства можно умножить и на любое отрицательное число l, поменяв при этом знаки неравенства на противоположные:

$$la' > la > la''. \qquad (3)$$

Упражнения

103. В каких пределах заключено число a, если:

а) $-1{,}2 < 3a < 6$; б) $-1{,}2 < -3a < 6$?

104. В каких пределах заключена сумма $a + b$, если

$$1{,}1 < a < 1{,}2, \text{ а } 5{,}5 < b < 5{,}6?$$

105. В каких пределах заключена сумма $2a + 3b$, если

$$1{,}98 < a < 1{,}99, \text{ а } 0{,}55 < b < 0{,}56?$$

106. В каких пределах заключена разность $a - b$, если

$$0{,}1 < a < 0{,}2, \text{ а } -0{,}2 < b < -0{,}1?$$

107. В каких пределах заключено произведение ab, если

а) $0{,}6 < a < 0{,}7, \quad 2{,}3 < b < 2{,}4;$

б) $\frac{1}{6} < a < \frac{1}{5}, \quad -3\frac{1}{7} < b < -3\frac{1}{8}$?

Строгие и нестрогие неравенства § 14

Когда хотят записать, что число a не меньше числа b (другими словами, a больше или равно b), то используют знак $\geqslant$ и пишут $a \geqslant b$. Например, $a^2 + 1 \geqslant 1$, $|x| \geqslant 0$ и т. д. Если нужно записать, что число a не больше числа b (другими словами, a меньше или равно b), то используют знак $\leqslant$ и пишут $a \leqslant b$. Например, $1 \leqslant 1 + a^2$, $-|x| \leqslant 0$ и т. д.

Соотношения $a \geqslant b$ и $a \leqslant b$ так же, как и соотношения $a > b$ и $a < b$, называются *неравенствами*. Неравенства, содержащие знак $>$ или знак $<$, называются *строгими*, а неравенства, содержащие знак $\geqslant$ или знак $\leqslant$, — *нестрогими*. Например, неравенства $\pi < 4$ и $2\pi > 6$ — строгие, а неравенства $17 \geqslant 17$ и $3 \leqslant 4$ — нестрогие.

Все выведенные выше свойства строгих числовых неравенств (§ 10—13) легко распространяются и на нестрогие неравенства. Например, если $a \geqslant b$, то $b \leqslant a$; если $a \geqslant b$, то $a + c \geqslant b + c$ и т. д.

Упражнения

108. Можно ли писать так: $3 \geqslant 3$; $5 \geqslant 4$; $a^2 + b^2 > a^2$; $a^2 + b^2 \geqslant a^2$?

109. а) Могут ли одновременно выполняться неравенства $a < b$ и $a > b$?

б) Могут ли одновременно выполняться неравенства $a \leqslant b$ и $a \geqslant b$?

110. Доказать, что если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$.

Доказать неравенство, содержащее некоторые буквы,— это значит показать, что ему удовлетворяют любые допустимые или специально указанные значения этих букв.

Существуют различные способы доказательства неравенств. Проиллюстрируем некоторые из них на конкретных примерах.

Пример 1. Доказать, что любые положительные числа a и b удовлетворяют неравенству

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, \tag{1}$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $a = b$.

1-й способ. Рассмотрим разность

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}.$$

Ее можно привести к виду:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}.$$

Но $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$. Поэтому $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geqslant 0$. А это и означает, что $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. Знак равенства в формуле (1) имеет место тогда и только тогда, когда $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$, т. е. при $a = b$.

2-й способ. Предположим, что данное неравенство верно. Тогда, умножив обе его части на 2, получим:

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}.$$

Перенесем $2\sqrt{ab}$ в левую часть:

$$a + b - 2\sqrt{ab} \geqslant 0.$$

Наконец, перепишем полученное неравенство в виде

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0. \tag{2}$$

Последнее неравенство, очевидно, верно для любых положительных чисел a и b, причем равенство в нем достигается тогда и только тогда, когда $a = b$. Таким образом, данное неравенство мы свели к очевидному неравенству. Теперь, производя все рассуждения в обратном порядке, мы докажем данное неравенство.

Для любых положительных чисел a и b имеем:

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0,$$

или

$$a - 2\sqrt{ab} + b > 0.$$

Знак равенства при этом имеет место тогда и только тогда, когда $a = b$. Перенося $-2\sqrt{ab}$ в правую часть, получаем $a + b > 2\sqrt{ab}$, откуда $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

Сразу трудно было догадаться, что при доказательстве неравенства (1) нужно исходить из очевидного неравенства (2). Вот почему предварительно нам пришлось сделать допущение, что неравенство (1) верно, и получить при этом допущении неравенство (2).

П р и м е р 2. Доказать, что если произведение положительных чисел x и y равно 1, то $(1+x)(1+y) \geqslant 4$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая в только что доказанном неравенстве

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

$a = 1$, $b = x$, получим $\frac{1+x}{2} > \sqrt{x}$, или $1 + x > 2\sqrt{x}$. Аналогично показывается, что $1 + y > 2\sqrt{y}$. Почленное умножение полученных неравенств дает:

$$(1+x)(1+y) > 2\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{y},$$

или

$$(1+x)(1+y) > 4\sqrt{xy}.$$

Но по условию $xy = 1$. Поэтому

$$(1+x)(1+y) \geqslant 4.$$

Упражнения

Доказать неравенства (№ 111—117):

111. $(x+y)^2 \geqslant 4xy$.

112. $x^3 + y^3 > x^2y + xy^2$ $(x > 0,\ y > 0)$.

113. $(a+b+c)^2 \geqslant a(b+c-a) + b(a+c-b) + c(a+b-c)$.

114. $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ $(a > 0,\ b > 0)$.

115. $\frac{2a}{1+a^2} < 1$.

116. $a^2 + \frac{1}{a^2} > 2$.

117. $\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$ $(a > 0,\ b > 0)$.

118. Самолет летит из Москвы в Киев и возвращается обратно В какую погоду этот рейс будет совершен быстрее: в безветрен-

ную или при ветре, дующем с постоянной силой в направлении Москва — Киев?

119. Доказать, что полупериметр треугольника больше каждой из его сторон.

120*. Доказать неравенство

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}.$$

Теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом § 16

Средним арифметическим любых n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется число

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Средним геометрическим n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется число

$$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}.$$

Например, для чисел 2 и 8 средним арифметическим будет число $\frac{2+8}{2}=5$, а средним геометрическим — число $\sqrt{2\cdot 8}=4$. Среднее арифметическое чисел 10, 10 и 80 равно

$$\frac{10+10+80}{3}=33\frac{1}{3},$$

а среднее геометрическое

$$\sqrt[3]{10\cdot 10\cdot 80}=\sqrt[3]{8000}=20.$$

Для чисел 5, 5 и 5 средним арифметическим будет число $\frac{5+5+5}{3}=5$, а средним геометрическим $\sqrt[3]{5\cdot 5\cdot 5}=5$.

Заметим, что во всех трех случаях среднее арифметическое оказалось не меньше их среднего геометрического, причем равными они получились лишь в третьем примере, где все рассматриваемые числа равны друг другу. И это не случайно. Имеет место следующая общая теорема.

Теорема. ***Среднее арифметическое n положительных чисел не меньше их среднего геометрического:***

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}.$$

Знак равенства в этой формуле имеет место тогда и только тогда, когда все n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны между собой.

В предыдущем параграфе было показано, что для любых двух положительных чисел a и b справедливо неравенство

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab},$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $a = b$. Тем самым была доказана теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух положительных чисел. В общем случае доказательство этой теоремы довольно громоздко и поэтому здесь не приводится.

Неравенство

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab},$$

верное для любых положительных чисел a и b, было известно еще в древние времена. Рисунок 22 приведен нами для геометрической интерпретации этого неравенства. На рисунке

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB}, \quad CO = AO = \frac{AD + DB}{2}.$$

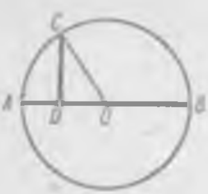


Рис. 22.

Обобщение данного неравенства на случай произвольного числа положительных чисел (теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом) было получено французским математиком Коши (1789—1857). С именем этого выдающегося ученого связаны и некоторые другие замечательные неравенства, изучение которых, однако, выходит за пределы нашей программы.

Пример 1. Доказать, что для любых чисел a, b и c, имеющих одинаковые знаки,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 3.$$

Действительно, по теореме о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{3} \geqslant \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}},$$

откуда и вытекает требуемое соотношение.

Пример 2. Доказать, что для произвольного положительного числа a справедливо неравенство

$$99a + 1 \geqslant 100 \sqrt[100]{a^{99}},$$

причем знак равенства имеет место только при $a = 1$.

Применяя теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом к 100 числам $\underbrace{a, a, \ldots, a, 1}_{100}$, получаем

$$\frac{99a + 1}{100} \geqslant \sqrt[100]{a^{99} \cdot 1},$$

откуда вытекает требуемое соотношение. Знак равенства имеет место лишь в том случае, когда все 100 чисел равны между собой, то есть при $a = 1$.

Из теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом вытекает следующее важное следствие.

Следствие. ***Если произведение n положительных чисел равно 1, то их сумма не меньше n.*** Другими словами, если положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ удовлетворяют условию

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1,$$

то

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n. \tag{1}$$

Действительно,

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

откуда и получается неравенство (1).

На практике соотношение (1) особенно часто используется при $n = 2$. ***Сумма двух взаимно обратных положительных чисел не меньше 2:***

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2 \quad (a > 0).$$

Упражнения

Доказать неравенства (№ 121—129):

121. $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqslant 4 \quad (a > 0,\ b > 0)$.

122. $\sqrt{(a + \alpha)(b + \beta)} \leqslant \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \quad (a > 0,\ b > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0)$.

123. $\sqrt[n+1]{ab^n} \leqslant \frac{a + bn}{n + 1}$.

124. $2a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2a(b + c)$.

125. $(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8abc \ (a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$.

126. $\sqrt{ab} \geqslant \frac{2ab}{a + b} \ (a > 0,\ b > 0)$.

127. $a + b + c \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} \quad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$.

128. $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$.

129. $(a + 1)(b + 1)(a + c)(b + c) \geqslant 16abc \ (a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$.

130. Доказать, что если сумма положительных чисел a и b равна 1, то:

а) $a^2 + b^2 \geqslant \frac{1}{2}$; б) $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}$.

131. Какое наименьшее значение может принять сумма $a^2 + b^2$, если $a + b = 2$, причем числа a и b положительные?

2 Заказ 196

132*. Доказать, что при любом натуральном значении n

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Теоремы о постоянной сумме и постоянном произведении § 17

Из теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом вытекают две важные теоремы, которые очень часто используются при решении практических задач.

Теорема о постоянной сумме. *Если сумма двух положительных величин постоянна, то их произведение будет наибольшим тогда и только тогда, когда эти величины примут равные значения.*

Например, если сумма двух положительных величин a и b равна 10, то возможны случаи: $a=1$, $b=9$; $a=2$, $b=8$; $a=3{,}5$, $b=6{,}5$; $a=4{,}1$, $b=5{,}9$; $a=5$, $b=5$ и т. д. Этим случаям соответствуют следующие значения произведения ab: 9; 16; 22,75; 24,19; 25. Наибольшее произведение (25) будет при $a=b=5$.

Доказательство теоремы. Пусть сумма двух положительных величин a и b равна c. Тогда по теореме о среднем арифметическом и среднем геометрическом получаем:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \quad \text{или} \quad \sqrt{ab} \leq \frac{c}{2}.$$

При этом, если $a=b$, то $\sqrt{ab}=\frac{c}{2}$; если же $a\neq b$, то $\sqrt{ab}<\frac{c}{2}$.

Следовательно, $\sqrt{ab}$ будет наибольшим при $a=b$. Но тогда, очевидно, и подкоренное выражение ab будет наибольшим при $a=b$.

Задача. *Какой наибольший по площади прямоугольный участок можно огородить забором длины l?*

Решение. Пусть длина участка равна x, а ширина y. Тогда площадь его будет равна xy. По условию задачи $2x+2y=l$, или $x+y=\frac{l}{2}$. Так как сумма $x+y$ постоянна, то произведение xy будет наибольшим при $x=y$. Следовательно, если мы хотим забором длины l огородить наибольший по площади прямоугольный участок, то должны огораживать участок, имеющий форму квадрата. Сторона такого квадрата равна $\frac{l}{4}$, а площадь $\frac{l^2}{16}$.

Теорема о постоянном произведении. *Если произведение двух положительных величин постоянно, то их сумма будет наименьшей тогда и только тогда, когда эти величины примут равные значения.*

Например, если произведение двух положительных величин a и b равно 16, то возможны случаи: $a=1$, $b=16$; $a=2$, $b=8$; $a=4$, $b=4$; $a=5$, $b=\frac{16}{5}$ и т. д. Этим случаям соответствуют суммы $a+b$: 17; 10; 8; $8\frac{1}{5}$ и т. д. Наименьшая сумма (8) будет при $a=b=4$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы о постоянной сумме. Предлагаем учащимся провести его самостоятельно.

Задача. *Какую наименьшую длину должен иметь забор, чтобы им можно было огородить прямоугольный участок, площадь которого равна S?*

Решение. Пусть длина прямоугольного участка равна x, а ширина y. Тогда длина забора будет равна $2(x+y)$. Площадь участка равна $xy=S$.

Так как произведение xy постоянно, то сумма $x+y$ будет наименьшей при $x=y=\sqrt{S}$. Следовательно, наименьшая длина забора равна $2(\sqrt{S}+\sqrt{S})=4\sqrt{S}$.

Упражнения

133. При каких положительных значениях a данные выражения принимают наибольшие числовые значения:

а) $a(8-a)$; б) $(1+2a)(3-2a)$; в)* $a\sqrt{10-a^2}$?

134. При каких положительных значениях a данные выражения принимают наименьшие числовые значения:

а) $a+\frac{1}{a}$; б) $2a+\frac{8}{a}$; в)* $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}$?

135. В круг радиуса R вписать прямоугольник наибольшей площади.

136. Из круглой балки данного диаметра d требуется вырезать балку прямоугольного поперечного сечения так, чтобы количество отходов было наименьшим. Найти площадь этого сечения.

137. Окно имеет форму прямоугольника. Какова должна быть длина и ширина этого окна, чтобы оно при данном периметре p пропускало наибольшее количество света?

Указание. Количество пропускаемого света тем больше, чем больше площадь окна.

138. Решить уравнения:

а) $x+\frac{1}{x}=2$; б) $x+\frac{1}{x}=1{,}5$; в) $x+\frac{1}{x}=-2$.

139.* Одна бригада увеличивала производительность труда ежемесячно на 2%. Другая бригада в течение первого полугодия увеличивала производительность труда ежемесячно на 1%, а в течение второго полугодия — ежемесячно на 3%. Какая из этих бригад добилась большего увеличения производительности труда за год?

Приближенные значения числа. Свойство абсолютной величины суммы § 18

На практике мы почти никогда не знаем точных значений величин. Никакие весы, как бы точны они ни были, не показывают вес абсолютно точно; любой термометр показывает температуру с той или иной ошибкой; никакой амперметр не может дать точных показаний тока и т. д. К тому же наш глаз не в состоянии абсолютно правильно прочитать показания измерительных приборов. Поэтому, вместо того чтобы иметь дело с истинными значениями величин, мы вынуждены оперировать с их приближенными значениями.

Тот факт, что a' есть приближенное значение числа a, записывается следующим образом:

$$a \approx a'.$$

Если a' есть приближенное значение величины a, то разность $\Delta = a - a'$ называется *погрешностью приближения**. Например,

* Δ — греческая буква; читается: дельта.

На следующей странице встречается еще одна греческая буква ε (читается: эпсилон).

если число 3,756 заменить его приближенным значением 3,7, то погрешность будет равна: $\Delta = 3{,}756 - 3{,}7 = 0{,}056$. Если в качестве приближенного значения взять 3,8, то погрешность будет равна: $\Delta = 3{,}756 - 3{,}8 = -0{,}044$.

На практике чаще всего пользуются не погрешностью приближения Δ, а абсолютной величиной этой погрешности $|\Delta|$. В дальнейшем эту абсолютную величину погрешности мы будем называть просто *абсолютной погрешностью*. Считают, что одно приближение лучше другого, если абсолютная погрешность первого приближения меньше абсолютной погрешности второго приближения. Например, приближение 3,8 для числа 3,756 лучше, чем приближение 3,7, поскольку для первого приближения $|\Delta| = |-0{,}044| = 0{,}044$, а для второго $|\Delta| = |0{,}056| = 0{,}056$.

Число a' называется приближенным значением числа a с точностью до ε, если абсолютная погрешность этого приближения меньше, чем ε:

$$|a - a'| < \varepsilon.$$

Например, 3,6 есть приближенное значение числа 3,671 с точностью до 0,1, поскольку $|3{,}671 - 3{,}6| = |0{,}071| = 0{,}071 < 0{,}1$. Аналогично, $-\frac{3}{2}$ можно рассматривать как приближенное значение числа $-\frac{8}{5}$ с точностью до $\frac{1}{5}$, поскольку

$$\left|-\frac{8}{5} - \left(-\frac{3}{2}\right)\right| = \left|-\frac{16-15}{10}\right| = \left|-\frac{1}{10}\right| = \frac{1}{10} < \frac{1}{5}.$$

Если $a' \leqslant a$, то a' называется приближенным значением числа *a с недостатком*. Если же $a' > a$, то a' называется приближенным значением числа *a с избытком*. Например, 3,6 есть приближенное значение числа 3,671 с недостатком, поскольку $3{,}6 < 3{,}671$, а $-\frac{3}{2}$ есть приближенное значение числа $-\frac{8}{5}$ с избытком, так как $-\frac{3}{2} > -\frac{8}{5}$.

Если мы вместо чисел a и b сложим их приближенные значения a' и b', то результат $a' + b'$ будет приближенным значением суммы $a + b$. Возникает вопрос: как оценить точность этого результата, если известна точность приближения каждого слагаемого? Решение этой и подобных ей задач основано на следующем свойстве абсолютной величины:

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|.$$

Абсолютная величина суммы любых двух чисел не превышает суммы их абсолютных величин.

Доказательство. Если числа a и b положительны, то и сумма их положительна. В этом случае $|a| = a$, $|b| = b$, $|a+b| = a+b$ и, следовательно, $|a+b| = |a|+|b|$. Если числа a и b отрицательны, то и сумма их отрицательна. В этом случае $|a| = -a$, $|b| = -b$, $|a+b| = -(a+b)$; поэтому $|a+b|$ также равняется $|a|+|b|$.

Пусть, наконец, одно из чисел a и b положительно, а другое — отрицательно. Тогда если $|a| > |b|$, то $|a+b| = |a| - |b|$; если же $|a| \leqslant |b|$, то $|a+b| = |b| - |a|$. В любом из этих случаев разность двух положительных чисел $|a|$ и $|b|$ будет меньше их суммы. Таким образом, если одно из чисел a и b положительно, а другое отрицательно, то

$$|a+b| < |a| + |b|.$$

Осталось рассмотреть лишь случай, когда одно из чисел a и b, а может быть и оба, равны нулю. Учащиеся без особого труда могут сделать это самостоятельно.

Пример. $|1-20| \leqslant |1| + |-20|$.

Действительно,

$$|1-20| = |-19| = 19,$$
$$|1| + |-20| = 1 + 20 = 21,$$
$$19 \leqslant 21.$$

Упражнения

140. С какой точностью можно измерять длины с помощью обыкновенной линейки?

141. С какой точностью показывают время часы?

142. Знаете ли вы, с какой точностью можно измерять вес тела на современных электрических весах?

143. а) В каких пределах заключено число a, если его приближенное значение с точностью до 0,01 равно 0,99?

б) В каких пределах заключено число a, если его приближенное значение с недостатком с точностью до 0,01 равно 0,99?

в) В каких пределах заключено число a, если его приближенное значение с избытком с точностью до 0,01 равно 0,99?

144. Какое приближение числа $\pi \approx 3{,}14$ лучше: 3,1 или 3,2?

145. Можно ли приближенное значение некоторого числа с точностью до 0,01 считать приближенным значением того же числа с точностью до 0,1? А наоборот?

146. На числовой прямой задано положение точки, соответствующей числу a. Указать на этой прямой:

а) положение всех точек, которые соответствуют приближенным значениям числа a с недостатком с точностью до 0,1;

б) положение всех точек, которые соответствуют приближенным значениям числа a с избытком с точностью до 0,1;

в) положение всех точек, которые соответствуют приближенным значениям числа a с точностью до 0,1.

147. В каком случае абсолютная величина суммы двух чисел: а) меньше суммы абсолютных величин этих чисел; б) равна сумме абсолютных величин этих чисел?

148. Доказать неравенства:

а) $|a-b| \leq |a|+|b|$; б)* $|a-b| \geq ||a|-|b||$.

Когда в этих формулах имеет место знак равенства?

Приближенное сложение и умножение на число § 19

Пусть a' есть приближенное значение числа a с точностью до ε_1, а b' — приближенное значение числа b с точностью до ε_2. Тогда сумма $a'+b'$ будет приближенным значением числа $a+b$. Какова же точность такого приближения? Чтобы выяснить этот вопрос, воспользуемся свойством абсолютной величины суммы. Имеем:

$$|(a+b)-(a'+b')| = |(a-a')+(b-b')| \leq |a-a'|+|b-b'|.$$

По условию $|a-a'| < \varepsilon_1$, а $|b-b'| < \varepsilon_2$. Следовательно,

$$|(a+b)-(a'+b')| < \varepsilon_1+\varepsilon_2.$$

Но в таком случае можно сказать, что $a+b \approx a'+b'$ с точностью до $\varepsilon_1+\varepsilon_2$. Итак, мы доказали теорему.

Теорема 1. ***Если $a \approx a'$ с точностью до ε_1, а $b \approx b'$ с точностью до ε_2, то $a+b \approx a'+b'$ с точностью до $\varepsilon_1+\varepsilon_2$.***

Примеры. 1) С какой точностью можно найти сумму двух чисел, если одно из них известно с точностью до 0,1, а другое — с точностью до 0,2?

Теорема 1 в данном случае гарантирует точность $0,1+0,2=$ $=0,3$.

2) Сумму $\sqrt{10}+\sqrt{12}$ нужно найти с точностью до 0,1. Будем извлекать корни из 10 и 12 по известному алгоритму:

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{l}{\sqrt{10} = 3,16\ \ldots} \\
\multicolumn{2}{l}{\ \ 9} \\
\hline
61 & 100 \\
1 & \ \ 61 \\
\hline
626 & 3900 \\
6 & 3756 \\
\hline
 & \ \ 144
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{l}{\sqrt{12} = 3,46\ \ldots} \\
\multicolumn{2}{l}{\ \ 9} \\
\hline
64 & 300 \\
4 & 256 \\
\hline
686 & 4400 \\
6 & 4116 \\
\hline
 & \ \ 284
\end{array}$$

Двух десятичных знаков вполне достаточно. В этом случае каждое из слагаемых мы находим с точностью до 0,01. Поэтому по теореме 1 сумма $\sqrt{10}+\sqrt{12} \approx 3,16+3,46=6,62$ будет найдена с точностью до $0,01 + 0,01 = 0,02 < 0,1$. Согласно требованию задачи окончательно запишем: $\sqrt{10} + \sqrt{12} \approx 6,6$. Ограничиться при извлечении корней лишь одним десятичным знаком было бы нехорошо. В этом случае мы нашли бы приближенные значения слагаемых с точностью до 0,1. Но тогда у нас не было бы уверенности в том, что сумма $\sqrt{10} + \sqrt{12} \approx$ $\approx 3,1 + 3,4 = 6,5$ будет найдена с точностью до 0,1. Ведь теорема 1 гарантировала бы лишь точность $0,1 + 0,1 = 0,2$, которая нас не устраивает.

Теорема 2. ***Если a' — приближенное значение числа a с точностью до ε, то ka' есть приближенное значение числа ka с точностью до $|k|\varepsilon$.***

Например, с точностью до 0,1 $\sqrt{10} \approx 3,1$. Поэтому $5\sqrt{10} \approx$ $\approx 5 \cdot 3,1 = 15,5$ с точностью до $5 \cdot 0,1 = 0,5$. Аналогично $-7\sqrt{10} \approx$ $\approx -7 \cdot 3,1 = -21,7$ с точностью до $|-7| \cdot 0,1 = 7 \cdot 0,1 = 0,7$.

Доказательство теоремы 2. Если a' есть приближенное значение a с точностью до ε, то $|a - a'| < \varepsilon$. Поэтому $|ka - ka'| = |k(a - a')| = |k| \cdot |a - a'| < |k| \cdot \varepsilon$, что и требовалось доказать.

В заключение рассмотрим следующий пример. Пусть с точностью до 0,1 $a \approx a' = 2,7$; $b \approx b' = 3,6$. Требуется найти приближенное значение выражения $5a - 3b$ и определить точность этого приближения.

Имеем:

$$5a - 3b \approx 5a' - 3b' = 5 \cdot 2,7 - 3 \cdot 3,6 = 13,5 - 10,8 = 2,7.$$

Точность этого результата можно оценить, используя свойство абсолютной величины суммы:

$$|(5a - 3b) - (5a' - 3b')| = |(5a - 5a') - (3b - 3b')| <$$
$$< |5a - 5a'| + |3b - 3b'| = |5(a - a')| + |3(b - b')| =$$
$$= 5|a - a'| + 3|b - b'| < 5 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,1 = 0,8.$$

Итак, $5a - 3b \approx 2,7$ с точностью до 0,8.

Упражнения

149. Вычислить с точностью до 0,1:

а) $\sqrt{2} + \sqrt{17}$; б) $\sqrt{12} + \frac{2}{7}$; в) $5\sqrt{3}$; г) $\frac{387}{546} - \frac{1}{75}$.

150. Известно, что с точностью до 0,01 $a \approx -3,05$; $b \approx 3,01$. Найти приближенные значения выражений:

а) $2a + 7b$; б) $3a - 5b$; в) $-a - 4b$.

Определить точность полученных приближений.

151. Числа a и b заданы с одинаковой точностью ε. Каким должно быть ε, чтобы с точностью до 0,001 можно было бы найти:

а) $a + b$; б) $a - b$; в) $a - 10b$?

До сих пор мы рассматривали тождественные неравенства, то есть такие неравенства, которые выполняются (обращаются в числовые неравенства) при всех допустимых или специально указанных значениях входящих в них букв. К таким относятся, например, неравенства:

$$a + 1 > a, \quad a^2 > 0, \quad \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

Теперь мы переходим к изучению неравенств, которые выполняются не при всех, а лишь при некоторых (а может быть, и ни при каких!) допустимых значениях букв. Примером такого неравенства может служить неравенство

$$2x > 0.$$

Оно выполняется при любых положительных значениях x, хотя допустимыми значениями x являются все числа, в том числе и отрицательные.

Решить неравенство, содержащее неизвестную величину, — это значит найти все те значения этой неизвестной величины, при которых данное неравенство выполняется.

Подобно решению уравнений, решение неравенств обычно проводится путем сведения их к более простым, *эквивалентным* (или равносильным) неравенствам.

Два неравенства, содержащие одну и ту же неизвестную величину, называются эквивалентными (или равносильными), *если они выполняются при одних и тех же значениях этой величины.*

Примером эквивалентных неравенств могут служить неравенства $2x > 0$ и $-3x < 0$, справедливые при всех положительных значениях x. Неравенства $x>0$ и $x^2>0$ не эквивалентны, поскольку первое из них верно только при положительных значениях x, а второе — как при положительных, так и при отрицательных значениях x.

Неравенства, каждое из которых не выполняется ни при каких значениях неизвестной величины, также считаются эквивалентными. Примером таких неравенств могут служить неравенства

$$x^2 < -1 \quad \text{и} \quad -(5x^4 + 3) > 0.$$

Эквивалентные неравенства обладают рядом важных свойств, которые мы приводим без доказательства.

Свойство 1. ***Если к обеим частям неравенства прибавить или из обеих частей вычесть число или выражение, определенное для всех значений неизвестной величины, то получится неравенство, эквивалентное данному.***

Примеры. 1) Если к обеим частям неравенства $x > 2 - x$ прибавить число -2, то в результате получится неравенство $x - 2 > -x$. Это неравенство, как утверждает свойство 1, должно быть эквивалентно данному неравенству $x > 2 - x$.

2) Прибавим к каждой части неравенства $\frac{1}{x} < 1$ выражение $\frac{1}{x^2+1}$. В результате получим $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2+1} < 1 + \frac{1}{x^2+1}$. Выражение $\frac{1}{x^2+1}$ определено при всех значениях x. Следовательно, полученное неравенство эквивалентно данному неравенству $\frac{1}{x} < 1$.

Существенным условием в 1-м свойстве эквивалентных неравенств является то, что выражение, которое мы прибавляем к каждой части исходного неравенства, должно быть определено для всех значений неизвестной величины. Если это условие не выполнено, то данное и полученное из него неравенства могут оказаться неэквивалентными. Поясним это на следующем примере. Прибавив к обеим частям неравенства $x > 0$ выражение $\frac{1}{x-1}$, мы получим неравенство $x + \frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-1}$. Исходное неравенство верно при всех положительных значениях x и, в частности, при $x = 1$. Полученное же неравенство при $x = 1$ не имеет смысла. Поэтому при $x = 1$ оно выполняться не может. Таким образом, рассматриваемые два неравенства не эквивалентны.

Из первого свойства эквивалентных неравенств вытекает важное для дальнейшего следствие. ***Любое слагаемое, определенное для всех значений неизвестной величины, можно перенести из одной части неравенства в другую, поменяв знак этого слагаемого на противоположный.***

Действительно, пусть дано неравенство

$$P(x) + Q(x) > R(x), \tag{1}$$

где $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ представляют собой некоторые выражения, зависящие от x, причем $Q(x)$ определено для любых значений x. Нам нужно доказать, что такое неравенство эквивалентно неравенству

$$P(x) > R(x) - Q(x). \tag{2}$$

Доказательство этого факта очень простое: неравенство (2) получается, если из обеих частей неравенства (1) отнять $Q(x)$.

Пример. Пусть дано неравенство $3x + 1 < 2 - x$. Перенеся $-x$ из правой части в левую, а 1, наоборот, из левой части в правую, получим:

$$3x + x < 2 - 1,$$

или

$$4x < 1.$$

Последнее неравенство выполняется, очевидно, при всех значениях x, меньших $\frac{1}{4}$. При этих же значениях x должно, следовательно, выполняться и данное неравенство $3x + 1 < 2 - x$.

Вообще можно доказать, что переносить из одной части неравенства в другую можно любое слагаемое.

Например, слагаемое $\frac{1}{x-1}$ в неравенстве

$$x + \frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-1}$$

можно перенести из левой части в правую. В результате такого преобразования получится неравенство

$$x > \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1},$$

эквивалентное данному (оба неравенства выполняются при всех положительных значениях x, кроме 1). А вот такое простое преобразование, как приведение подобных членов, требует большей осторожности. Так, если бы мы в правой части последнего неравенства привели подобные члены, то получили бы неравенство

$$x > 0,$$

которое не эквивалентно исходному неравенству.

Свойство 2. ***Если обе части неравенства умножить на положительное число или выражение, принимающее только положительные значения и определенное для всех значений неизвестной величины, то получится неравенство, эквивалентное данному.***

Примеры. 1) Если обе части неравенства $x > 2 - x$ умножить на положительное число 3, то получится неравенство $3x > 6 - 3x$, эквивалентное данному.

2) Выражение $x^2 + 1$ принимает только положительные значения и определено для всех значений x. Поэтому неравенство $x < 1$ эквивалентно неравенству

$$x(x^2 + 1) < x^2 + 1,$$

или

$$x^3 + x < x^2 + 1.$$

Следует особо подчеркнуть, что то выражение, на которое мы умножаем обе части исходного неравенства, должно удовлетворять двум требованиям:

а) оно обязано принимать только положительные значения и

б) быть определенным для всех значений неизвестной величины.

Если хотя бы одно из этих требований не удовлетворяется, то исходное и полученное из него неравенства могут оказаться неэквивалентными. Поясним это на следующих примерах.

1) Неравенство $x > 0$ выполняется только для положительных значений x. Умножив его почленно на x, мы получим неравенство $x^2 > 0$. Оно верно как для положительных, так и для отрицательных значений x. Несоответствие этого результата со свойством 2 легко объяснить. Ведь выражение x, на которое мы умножили обе части исходного неравенства $x > 0$, принимает как положительные, так и отрицательные значения. А на этот случай свойство 2 не дает никаких гарантий.

2) Умножив неравенство $x > 0$ на выражение $\frac{1}{(x-1)^2}$, мы получим неравенство $\frac{x}{(x-1)^2} > 0$. Предлагаем учащимся самостоятельно показать, что это неравенство не эквивалентно данному, и объяснить, почему 2-е свойство эквивалентных неравенств здесь не применимо.

Свойство 3. ***Если обе части неравенства умножить на отрицательное число или выражение, которое определено для всех значений неизвестной величины и принимает только отрицательные значения, а знак неравенства изменить на противоположный ($>$ на $<$; $<$ на $>$), то получится неравенство, эквивалентное данному.***

Это свойство вполне аналогично 2-му свойству. Поэтому подробно останавливаться на нем мы не будем.

Упражнения

152. Эквивалентны ли неравенства:

а) $x^2 > x - 1$ и $x^2 + 1 > x$;

б) $2x \leqslant 0$ и $2x + \frac{6}{x} \leqslant \frac{6}{x}$;

в) $x - 1 > 0$ и $(x - 1) + \frac{1}{4-x} > \frac{1}{4-x}$;

г) $3x + 1 > 0$ и $(3x + 1) + (x - 4) > x - 4$?

153. Эквивалентны ли неравенства:

а) $2x > 3$ и $6 \cdot 2x > 6 \cdot 3$;

б) $2x > 3$ и $-6 \cdot 2x < -6 \cdot 3$;

в) $2x > 3$ и $2x(x^2 + 1) > 3(x^2 + 1)$;

г) $2x > 3$ и $2x^3 > 3x^2$;

д) $2x > 3$ и $2x^2 > 3x$;

е) $2x > 3$ и $\frac{2x}{4-x^2} > \frac{3}{4-x^2}$;

ж) $2x > 3$ и $\frac{2x}{x-4} > \frac{3}{x-4}$;

з) $2x > 3$ и $\frac{2x}{\sqrt{x}} > \frac{3}{\sqrt{x}}$?

Так называются неравенства, левая и правая части которых представляют собой линейные функции относительно неизвестной величины. К ним относятся, например, неравенства

$$2x - 1 > -x + 3; \quad 7x \leqslant 0;$$
$$5 > 4 - 6x; \quad 9 - x < x + 5$$

и т. д. Для определенности мы рассмотрим лишь неравенства, содержащие знак $>$. Линейное неравенство, содержащее знак $>$, имеет вид:

$$ax + b > cx + d. \tag{1}$$

Если в неравенстве (1) $a \neq c$, то такое неравенство называется также *неравенством 1-й степени*. Очевидно, что всякое неравенство 1-й степени является вместе с тем и линейным неравенством. Обратное утверждение неверно. Например, неравенство $0 \cdot x > -2$ является линейным, но не является неравенством 1-й степени.

Перенося cx из правой части неравенства (1) в левую, а b из левой части в правую, получим:

$$(a - c)x > d - b.$$

Таким образом, любое линейное неравенство сводится к эквивалентному неравенству вида

$$mx > n, \tag{2}$$

где m и n — некоторые заданные числа, а x — неизвестная величина.

Если $m > 0$, то, деля обе части неравенства (2) на m, получим $x > \frac{n}{m}$. Это соотношение и определяет множество всех тех значений величины x, при которых выполняется неравенство (2). Геометрически это множество изображается в виде той части

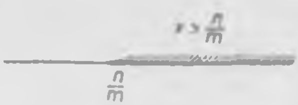


Рис. 23.

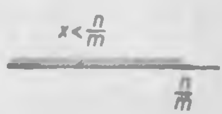


Рис. 24.

числовой прямой, которая лежит справа от точки с абсциссой $\frac{n}{m}$ (рис. 23). Сама точка $\frac{n}{m}$ в это' множество не включается. На рисунке это отмечено стрелочкой, обращенной к точке с абсциссой $\frac{n}{m}$.

Если $m < 0$, то, деля обе части неравенства (2) на m и меняя при этом знак неравенства на противоположный, получаем

$$x < \frac{n}{m}.$$

Это соотношение определяет множество всех тех значений величины x, при которых в данном случае выполняется неравенство (2). Геометрически это множество изображается в виде той части числовой прямой, которая расположена слева от точки с абсциссой $\frac{n}{m}$ (рис. 24). Сама точка $x = \frac{n}{m}$ в это множество не включается. На рисунке это отмечено стрелочкой, обращенной к точке с абсциссой $\frac{n}{m}$.

Теперь предположим, что $m = 0$. Тогда неравенство (2) принимает вид:

$$0 \cdot x > n.$$

Если число n отрицательное, то это неравенство выполняется при всех значениях x. В противном же случае оно не имеет решений.

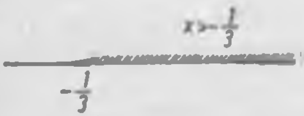


Рис. 25.

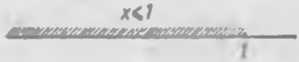


Рис. 26.

Мы рассмотрели линейные неравенства, содержащие знак $>$. Неравенства, содержащие знаки $\geqslant$, $<$ и $\leqslant$, решаются аналогично. Рассмотрим несколько примеров.

1. Решить неравенство

$$x + 4 > -2x + 3.$$

Перенося $-2x$ в левую, а 4 в правую часть, получаем $3x > -1$, откуда $x > -\frac{1}{3}$.

На числовой прямой (рис. 25) отмечены все те значения x, которые удовлетворяют данному неравенству.

2. Решить неравенство

$$3 - 7x \geqslant x - 5.$$

Перенося x в левую, а 3 в правую часть, получим $-8x \geqslant -8$. Разделим обе части этого неравенства на -8. Поскольку это число отрицательно, то знак неравенства при этом нужно изменить на противоположный. В результате получим $x \leqslant 1$. Множество всех таких значений x отмечено на рисунке 26 (точка $x = 1$ включается в это множество).

Упражнения

Решить данные неравенства (№ 154—165) и отметить полученные результаты на числовой прямой:

154. $7x - 6 < x + 12$.
155. $1 - 2x > 4 - 5x$.
156. $1 - x > 2x + 3$.
157. $-\frac{2}{3-x} > 0$.
158. $9 - 7x > -1 - 17x$.
159. $\frac{ax+b}{a-b} > \frac{ax-b}{a+b}$ $(a > 0;\ b > 0)$.
160. $\frac{4}{2+x} \leqslant 0$.
161. $\frac{x^2}{3x+5} < 0$.
162. $ax + 1 > 2 - 5x$.
163. $ax + b > 3 - 2x$.
164. $x - \frac{x+1}{2} > \frac{x-3}{4} - \frac{x-2}{3}$.
165. $x + \frac{x-1}{a+1} > \frac{x+1}{a+1} - ax$.

При каких значениях x определены данные выражения (№ 166—169):

166. $\sqrt{7+3x}$.
167. $\sqrt{5-x}$.
168. $\sqrt{2x+4}$.
169. $\sqrt{1-2x} + \sqrt{x}$.

170. Может ли неравенство

$$a^2x > a + 1$$

не иметь решений?

Решить уравнения:

171. $|4x - 3| = 4x - 3$
172. $|7 - 2x| = 2x - 7$.
173. $|6x - a| = a - 6x$.
174. $|ax - 1| = ax - 1$.

Графический способ решения неравенства $mx > n$ § 22

На одном и том же чертеже построим графики двух функций:

$$y = mx \text{ и } y = n.$$

Если $m \neq 0$, то прямая $y = mx$ обязательно пересечет прямую $y = n$ (рис. 27 для $m > 0$ и рис. 28 для $m < 0$). Обозначим точку пересечения этих прямых через M. Абсцисса этой точки представляет собой корень уравнения $mx = n$ и потому равна $\frac{n}{m}$.

Если $m > 0$, то, как видно из рисунка 27, mx будет больше n для всех x, больших, чем $\frac{n}{m}$. Если $m < 0$ (рис. 28), то mx будет больше n для всех x, меньших, чем $\frac{n}{m}$.

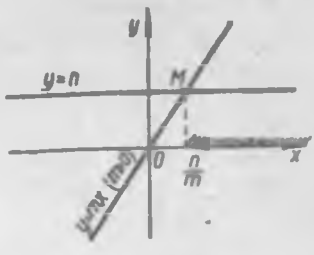


Рис. 27.

При $m = 0$ прямая $y = mx$ совпадает с осью абсцисс. Если при этом число n отрицательно, то mx всегда будет больше n (рис. 29). В этом случае любое число x удовлетворяет неравенству $mx > n$. Если же число n неотрицательно (рис. 30), то ни при каком значении x mx не будет больше n.

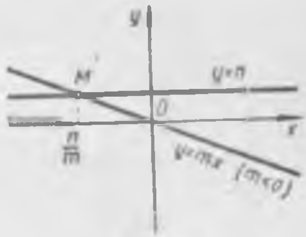


Рис. 28.

Упражнения

Решить графически данные неравенства:

175. $2x - 1 > 3$. **177.** $1 - 2x > 7$.

176. $x + 1 > 2x - 1$. **178.** $3 > 1 - x$.

Системы линейных неравенств § 23

Системой линейных неравенств называется любая совокупность двух или более линейных неравенств, содержащих одну и ту же неизвестную величину.

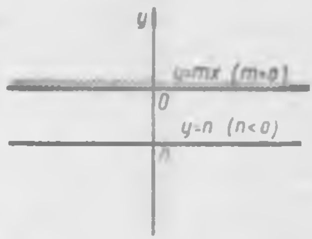


Рис. 29.

Примерами таких систем могут служить системы:

$$\begin{cases} x - 1 > 0, \\ 2x - 8 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 - x < 2x - 5, \\ 3 - x > -5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14x - 3 \leqslant 7 + 9x, \\ 1 < x - 3. \end{cases}$$

Решить систему неравенств — это значит найти все значения неизвестной величины, при которых выполняется каждое неравенство системы.

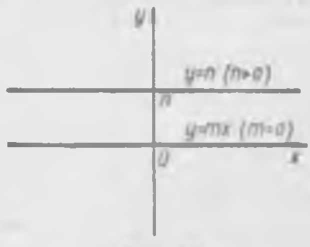


Рис. 30.

Решим приведенные выше системы.

Пример 1.

$$\begin{cases} x - 1 > 0, \\ 2x - 8 > 0. \end{cases}$$

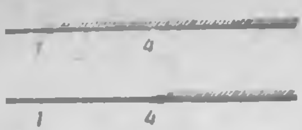


Рис. 31.

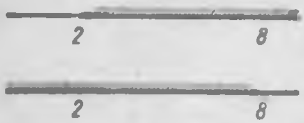


Рис. 32.

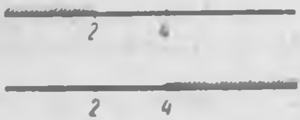


Рис. 33.

Расположим одну под другой две числовые прямые (рис. 31); на верхней отметим те значения x, при которых выполняется первое неравенство ($x>1$), а на нижней — те значения x, при которых выполняется второе неравенство ($x>4$). Сравнивая результаты на числовых прямых, замечаем, что оба неравенства одновременно будут удовлетворяться при $x>4$. Ответ. $x>4$.

Пример 2.

$$\begin{cases} 1-x<2x-5, \\ 3-x>-5. \end{cases}$$

Первое неравенство дает $-3x<-6$, или $x>2$, а второе $-x>-8$, или $x<8$. Далее поступаем так же, как и в первом примере. На одной числовой прямой отмечаем все те значения x, при которых выполняется первое неравенство системы, а на второй числовой прямой, расположенной под первой,—все те значения x, при которых выполняется второе неравенство системы (рис. 32). Сравнение этих двух результатов показывает, что оба неравенства одновременно будут выполняться при всех значениях x, заключенных от 2 до 8. Множество таких значений x записывается в виде двойного неравенства $2<x<8$.

Пример 3. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 14x-3\leqslant 7+9x, \\ 1<x-3. \end{cases}$$

Первое неравенство системы дает $5x\leqslant 10$, или $x\leqslant 2$, второе $x>4$. Таким образом, любое число, удовлетворяющее обоим неравенствам одновременно, должно быть не больше 2 и больше 4 (рис. 33). Но таких чисел не существует. Поэтому данная система неравенств не выполняется ни при каких значениях x.

Подобные системы неравенств называются *несовместными*.

Упражнения

Решить данные системы неравенств (№ 179—184):

179. $\begin{cases} 2x-1>1, \\ 3-x>0. \end{cases}$

180. $\begin{cases} 1-2x<-9, \\ 3x+1<13. \end{cases}$

181. $\begin{cases} 5x+3>8, \\ 0{,}7-3x\leqslant -2{,}6. \end{cases}$

182. $\begin{cases} 2x-3>x-3, \\ 4x+3>8-x. \end{cases}$

183. $\begin{cases} 3x+7>9+2x, \\ 5+x>2x+2. \end{cases}$ **184.** $\begin{cases} x+4<2x, \\ 1-x>-2. \end{cases}$

Решить неравенства (№ 185, 186):

185. $(2x+3)(2-2x)>0$. **186.** $(2-\pi)(2x-15)(x+4)>0$.

Найти допустимые значения букв, входящих в данные равенства (№ 187, 188):

187. $\sqrt{a-1}+\sqrt{5-3a}=\sqrt{b}$.

188. $\sqrt{9-2a}+\sqrt{3a-6}=\frac{b}{a-3}$.

Решить неравенства (№ 189, 190):

189. $1<2x-5<2$. **190.** $-2<1-ax<5$.

191. Какой должна быть температура 10 *л* воды, чтобы при смешении ее с 6 *л* воды при температуре 15° получить воду с температурой не менее 30° и не более 40°?

192. Одна сторона треугольника равна 4 *см*, а сумма двух других 10 *см*. Найти эти стороны, если они выражаются целыми числами.

193. Известно, что система двух линейных неравенств не удовлетворяется ни при каких значениях неизвестной величины. Можно ли сказать, что отдельные неравенства этой системы не выполняются ни при каких значениях неизвестной величины?

Дробно-линейные функции § 24

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые вопросы поведения функций вида

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}, \quad (1)$$

где a, b, c и d — заданные числа, причем c отлично от нуля. Такие функции называются *дробно-линейными**.

Прежде всего отметим, что дробно-линейная функция (1) определена при всех значениях аргумента x, кроме $x=-\frac{d}{c}$.

Те значения аргумента, при которых функция определена, в математике принято называть *областью определения* этой функции. Поэтому можно сказать, что областью определения дробно-линейной функции (1) служит множество всех чисел, кроме $-\frac{d}{c}$.

Так, областью определения функции $y=\frac{x-1}{3-7x}$ будет множество всех чисел, кроме $\frac{3}{7}$; область определения функции $y=\frac{2}{x-1}$ состоит из всех чисел, кроме 1.

Теперь на частном примере покажем, как можно выяснить, при каких значениях аргумента x дробно-линейная функция

* Обычно, говоря о функциях вида (1), предполагают, что $ad-bc\neq0$. Это условие мы заменяем здесь более простым условием $c\neq0$.

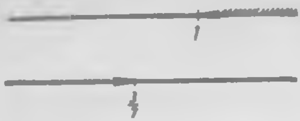


Рис. 34.

принимает положительные значения, при каких — отрицательные значения и при каких она обращается в нуль.

Пусть

$$y = \frac{x-1}{3-7x}.$$

Рассмотрим отдельно числитель и знаменатель данной дроби. При $x > 1$ числитель $x - 1$ положителен, а при $x < 1$ — отрицателен. Этот факт отмечен на верхней прямой рисунка 34: заштрихованная область этой числовой прямой соответствует тем значениям аргумента x, при которых числитель $x - 1$ положителен, а незаштрихованная — тем значениям аргумента x, при которых числитель $x - 1$ отрицателен. Решая неравенство

$$3 - 7x > 0,$$

получаем: $x < \frac{3}{7}$. Поэтому знаменатель $3 - 7x$ данной дроби будет положительным при $x < \frac{3}{7}$; этот факт отмечен с помощью штрихов на нижней числовой прямой рисунка 34. При $x > \frac{3}{7}$ знаменатель будет, очевидно, отрицательным.

Сравнение двух числовых прямых на рисунке дает: при $\frac{3}{7} < x < 1$ знаки числителя и знаменателя данной дроби совпадают (оба «—»); при $x < \frac{3}{7}$ и при $x > 1$ они разные. Поэтому при $\frac{3}{7} < x < 1$ данная функция $y = \frac{x-1}{3-7x}$ принимает положительные значения, а при $x < \frac{3}{7}$ и при $x > 1$ — отрицательные значения. В точке $x = 1$ она обращается в нуль, а при $x = \frac{3}{7}$ вообще не определена (рис. 35).

Описанным способом можно решать и некоторые неравенства, содержащие дробно-линейные выражения. Покажем, например, как решается неравенство

$$\frac{2}{x-1} < 4.$$

Переносяя 4 в левую часть, получаем эквивалентное неравенство

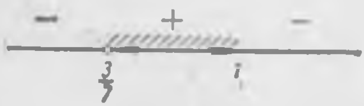


Рис. 35.

$$\frac{2}{x-1} - 4 < 0,$$

или

$$\frac{6-4x}{x-1} < 0.$$

Числитель $6-4x$ полученной дроби положителен при $x<\frac{3}{2}$ и отрицателен при $x>\frac{3}{2}$. Знаменатель $x-1$ положителен при $x>1$ и отрицателен при $x<1$ (рис. 36). Поэтому дробь $\frac{6-4x}{x-1}$ принимает отрицательные значения при $x<1$ и при $x>\frac{3}{2}$.

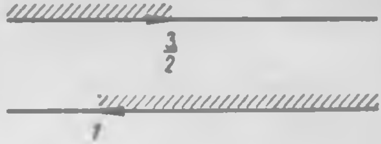


Рис. 36.

Таким образом, неравенству $\frac{2}{x-1}<4$ удовлетворяют все значения $x<1$ и $x>\frac{3}{2}$.

Подчеркнем, что данное неравенство нельзя решать путем почленного умножения на $x-1$. Ведь тогда могло бы получиться неравенство, не эквивалентное данному. В самом деле, мы имели бы

$$2<4(x-1),$$
$$6<4x,$$
$$x>\frac{3}{2}.$$

Оказались потерянными решения $x<1$.

Правильным является ответ: $x<1$; $x>\frac{3}{2}$.

Упражнения

Найти области определения данных дробно-линейных функций (№ 194, 195) и установить, при каких значениях аргумента они принимают положительные значения, при каких — отрицательные значения и при каких обращаются в нуль:

194. $y=\frac{2x-5}{9-3x}$. **195.** $y=\frac{7x+21}{2x-4}$.

Решить неравенства (№ 196—198):

196. $\frac{1}{x}<1$. **197.** $\frac{x-1}{x+5}>2$. **198.** $\frac{x+2}{x+3}>7$.

199. При каких x значения выражения $\frac{x}{x-1}$ заключены между 0 и 2?

200. Решить неравенство

$$1<\frac{1+x}{1-x}<2.$$

Найти допустимые значения букв, входящих в данные выражения (№ 201, 202):

201. $\sqrt{\frac{4+x}{x-2}}+\sqrt{x}$. **202.** $\sqrt{\frac{3a-1}{2a}}-\frac{3a}{a-5}$.

Решить уравнения:

203. $\left|\frac{2x-4}{x}\right| = \frac{2x-4}{x}$. 205. $\left|\frac{5x-10}{3x^2}\right| = \frac{10-5x}{3x^2}$.

204. $\left|\frac{x-1}{x-3}\right| = \frac{1-x}{3-x}$. 206. $\left|\frac{a-x}{b-x}\right| = \frac{x-a}{x-b}$.

Неравенства, содержащие неизвестное под знаком абсолютной величины § 25

В этом параграфе мы на частных примерах покажем, как решаются неравенства вида

$$|ax + b| < c \text{ и } |ax + b| > c.$$

Пример 1. Решить неравенство

$$|2x - 5| < 1.$$

Если абсолютная величина некоторого числа меньше 1, то само это число должно быть больше —1, но меньше 1 (рис. 37). Поэтому данное неравенство можно записать в виде двойного неравенства:

$$-1 < 2x - 5 < 1.$$

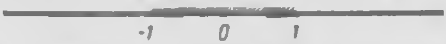


Рис. 37.

Прибавляя к каждой части такого неравенства число 5 и деля затем полученное неравенство почленно на 2, мы приходим к следующему результату:

$$4 < 2x < 6,$$
$$2 < x < 3.$$

Множество таких значений x показано на рисунке 38.

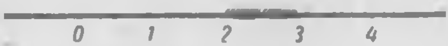


Рис. 38.

Пример 2. Решить неравенство

$$|3 - x| > 2.$$

Если абсолютная величина некоторого числа больше 2, то само это число должно быть либо меньше —2, либо больше 2 (рис. 39). Поэтому из данного неравенства вытекает, что либо

$$3 - x < -2,$$

либо

$$3 - x > 2.$$

Рис. 39.

Первое из этих двух неравенств дает

$$-x < -5, \text{ или } x > 5,$$

а второе

$$-x > -1, \text{ или } x < 1.$$

Ответ: $x < 1$; $x > 5$. Множество таких значений x показано на рисунке 40 в виде двух лучей числовой прямой.

Рис. 40.

Упражнения

Решить следующие неравенства (№ 207—216):

207. $|x-2| < 3$.
208. $|1-x| > 10$.
209. $|0,5x-3| < 0,5$.
210. $|2x-4| > 6$.
211. $|1+x| < 2$.
212. $|2-x| > 1$.
213. $|-2x+1| > 5$.
214. $|x+4| < 3$.
215*. $|3+x| > |x|$.
216. $|ax+b| < a$.

Данные неравенства решить графически:

217. $|x-3| < 2$. 218. $|1-2x| > 3$. 219. $|x| > |1-x|$.

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Совместные и несовместные системы § 26

Системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными называется совокупность уравнений вида

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases} \tag{1}$$

где x и y — неизвестные величины, а a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 — некоторые заданные числа.

Примером системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными может служить любая из систем:

$$\begin{cases} 2x-3y=0, \\ 7x-5y=0; \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} 100x-2y=96, \\ -3x+57y=111; \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x-2y=12, \\ 3y=3; \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} x-y=0, \\ x-y=0; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} x+y=0, \\ x+y=1; \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} -x+1,5y=3, \\ 2x-3y=-6. \end{cases} \tag{7}$$

Кстати, любую из этих систем можно назвать *системой уравнений 1-й степени*. Так называются системы вида (1), в которых хотя бы одно из уравнений содержит ненулевой коэффициент при x или при y.

Если в системе (1) *оба свободных члена* c_1 *и* c_2 *равны нулю, то система называется однородной. Если хотя бы один из свободных членов* c_1 *и* c_2 *отличен от нуля, то система называется неоднородной.*

Так, из приведенных выше систем (2) — (7) однородными будут системы (2) и (5); все же остальные системы неоднородны.

Решением системы уравнений (1) *называется такая пара чисел* $(x_0,\ y_0)$, *которая каждое уравнение этой системы обращает в числовое равенство**:

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 = c_1, \\ a_2x_0 + b_2y_0 = c_2. \end{cases}$$

Например, пара чисел (0, 0) является решением системы уравнений (2), поскольку

$$\begin{cases} 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0, \\ 7 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 0. \end{cases}$$

Пара чисел (1, 2) будет решением системы (3), так как

$$\begin{cases} 100 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 96, \\ -3 \cdot 1 + 57 \cdot 2 = 111. \end{cases}$$

Пара чисел (2, 1) не будет решением системы (3), поскольку

$$\begin{cases} 100 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \neq 96, \\ -3 \cdot 2 + 57 \cdot 2 \neq 111. \end{cases}$$

Решением системы уравнений (3) не будет и пара чисел (2,52). Действительно,

$$100 \cdot 2 - 2 \cdot 52 = 96,$$

но

$$-3 \cdot 2 + 57 \cdot 52 \neq 111.$$

Системы могут иметь различное число решений. Например, система уравнений (4) имеет, очевидно, единственное решение: $x = 14$, $y = 1$. В самом деле, из второго уравнения этой системы следует, что $y = 1$. Подставляя затем это значение y в первое уравнение, получаем: $x - 2 \cdot 1 = 12$, откуда $x = 14$.

Система уравнений (5) имеет, очевидно, бесконечное множество решений. Действительно, при любом a пара чисел $(a,\ a)$ обращает оба уравнения системы в числовые равенства. Поэтому любая такая пара чисел (а их бесконечное множество) является решением данной системы.

---

* Это определение годится и для произвольных систем уравнений с двумя неизвестными.

Наконец, существуют системы, которые вообще не имеют решений. Примером таких систем может служить система (6). Если бы она имела решение (x_0, y_0), то сумма двух чисел x_0 и y_0 должна была бы равняться одновременно и 0 и 1. Но этого быть не может.

Таким образом, существуют системы линейных уравнений, имеющие ровно одно решение, бесконечное множество решений и, наконец, совсем не имеющие решений.

Система уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется совместной, а не имеющая ни одного решения — несовместной. Например, системы уравнений (2) и (3) совместны, а система (6) несовместна.

Для каждой однородной системы уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0, \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases}$$

пара чисел (0, 0) является решением. Поэтому ***любая однородная система уравнений совместна.*** В частности, совместными являются приведенные выше системы (2) и (5).

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

— это значит: 1) *выяснить, является ли она совместной, и* 2) *если она совместна, то найти все ее решения.*

Упражнения

220. Можно ли системы:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x + y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y = 3, \\ 2x - 3y = 30; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = 7, \\ 2y = 0 \end{cases}$$

— назвать системами двух линейных уравнений с двумя неизвестными?

221. Показать, что ни при каких значениях a системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + 7y = a, \\ -5x + 6y = a + 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -11x + 6y = 5a - 1, \\ 4x - 5y = a^2 \end{cases}$$

не являются однородными.

222. Доказать, что если система двух уравнений 1-й степени с двумя неизвестными имеет нулевое решение (то есть решение $x = 0$, $y = 0$), то она является однородной.

Верно ли обратное утверждение?

Когда нам нужно записать сумму двух чисел a и b, мы используем знак $+$ и пишем $a+b$; для записи разности двух чисел используется знак $-$ и т. д. Большую роль в математике играет еще одна форма записи алгебраических действий, которая нам понадобится для изучения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Выглядит эта форма записи так:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Четыре числа a, b, c и d записаны в виде таблицы, имеющей две строки (a, b) и (c, d) и два столбца $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$. Слева и справа стоят вертикальные черточки. Все это выражение употребляется для записи разности $ad - bc$ и называется *определителем второго порядка*. Итак,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \tag{2}$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-6) - (-3) \cdot (-5) = -12 - 15 = -27;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - (-2) \cdot (-3) = 6 - 6 = 0;$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a \cdot a - 1 \cdot 1 = a^2 - 1.$$

Числа a, b, c, d называются *элементами* определителя (1).

Строки (a, b) *и* (c, d) *определителя*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

называются пропорциональными, если хотя бы одна из них получается в результате поэлементного умножения другой строки на некоторое число k.

Поясним это определение на двух частных примерах.

Пример 1. В определителе

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

первая строка получается посредством умножения каждого элемента второй строки на 2:

$$2 = 2 \cdot 1; \quad 6 = 2 \cdot 3.$$

Значит, строки этого определителя пропорциональны. В роли k здесь выступает число 2.

В данном случае возможно и другое объяснение: вторая строка определителя получается посредством умножения каждого элемента первой строки на $\frac{1}{2}$:

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 2; \ 3 = \frac{1}{2} \cdot 6.$$

Следовательно, строки этого определителя пропорциональны. Здесь уже в роли k выступает число $\frac{1}{2}$.

Пример 2. Строки определителя

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

также пропорциональны, поскольку первая из них получается поэлементным умножением второй строки на нуль:

$$0 = 0 \cdot 0, \quad 0 = 0 \cdot 1.$$

В этом случае роль k играет число 0.

В отличие от первого примера здесь вторая строка уже не может быть получена путем поэлементного умножения первой строки. Вот почему в определении пропорциональных строк говорится, что из двух таких строк *хотя бы одна* должна получаться в результате поэлементного умножения другой строки на некоторое число k.

Таким образом, определение пропорциональности строк (a, b) и (c, d) определителя

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

можно записать следующим образом:

$$\text{либо} \quad a = kc, \quad b = kd, \tag{3}$$

$$\text{либо} \quad c = k'a, \quad d = k'b, \tag{4}$$

где k и k' — некоторые числа. Для одних определителей выполняются оба эти условия (см. пример 1, в котором $k = 2$, $k' = \frac{1}{2}$); для других же определителей имеет место только одно из них (см. пример 2).

Заметим, что если оба элемента первой строки в определителе

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

отличны от нуля, то пропорциональность строк можно записать в виде:

$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b}.$$

Аналогично, если каждый элемент второй строки данного определителя отличен от нуля, то пропорциональность строк можно записать в виде:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Упражнения

223. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 13 & -6 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} 1-a & -a \\ a & 1+a \end{vmatrix}$.

224. Как изменится определитель 2-го порядка, если:

а) поменять местами его строки;

б) поменять местами его столбцы;

в) поменять местами элементы, стоящие на одной диагонали;

г) все элементы первой строки умножить на число a;

д) все элементы второго столбца разделить на число $d \neq 0$?

225. При каких значениях a строки данных определителей пропорциональны:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ a & 3a \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 6 & a \end{vmatrix}$?

226. Докажите, что если в определителе второго порядка какая-нибудь строка или какой-нибудь столбец состоит из одних нулей, то строки такого определителя пропорциональны.

(Это утверждение полезно запомнить. Оно потребуется нам в следующем параграфе.)

Условие, при котором определитель 2-го порядка равен нулю — § 28

Во всех приложениях теории определителей важную роль играют условия, при которых определитель обращается в нуль. Эти условия мы и рассмотрим в данном параграфе.

Теорема 1. ***Если строки определителя***

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

пропорциональны, то этот определитель равен нулю.

Доказательство. Пропорциональность строк (a, b) и (c, d) означает, что:

$$\text{либо } a = kc, \quad b = kd,$$
$$\text{либо } c = k'a, \quad d = k'b.$$

(При этом, конечно, не исключается возможность и того и другого.)

Если $a = kc$, $b = kd$, то

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} kc & kd \\ c & d \end{vmatrix} = kcd - kdc = 0.$$

Аналогично обстоит дело и в случае, когда $c = k'a$, $d = k'b$:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ k'a & k'b \end{vmatrix} = ak'b - bk'a = 0.$$

Теорема доказана.

Верна и обратная теорема.

Теорема 2. ***Если определитель***

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

равен нулю, то строки его пропорциональны.

Доказательство. По условию

$$ad - bc = 0,$$

или

$$ad = bc. \qquad (1)$$

Если ни один из элементов второй строки (c, d) не равен нулю, то из (1) вытекает, что

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Но это уже означает, что строки (a, b) и (c, d) пропорциональны.

Если оба числа c и d равны нулю, то строки определителей опять же будут пропорциональны (см. задачу 226 из предыдущего параграфа).

Остается рассмотреть лишь случай, когда одно из чисел c и d равно нулю, а другое отлично от нуля. Пусть, например, $c = 0$, а $d \neq 0$. Тогда из (1) вытекает, что $a = 0$. Но в таком случае в определителе

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

первый столбец будет состоять из одних нулей. Поэтому строки определителя будут пропорциональны (см. задачу 226).

Доказанные две теоремы приводят к следующему результату. ***Определитель***

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

равен нулю тогда и только тогда, когда его строки пропорциональны.

Упражнения

227. При каких значениях a строки данных определителей пропорциональны:

а) $\begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a-1 & 3 \\ a^2 & 3a \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a & a-1 \\ a+1 & a \end{vmatrix}$?

228. Столбцы определителя 2-го порядка называются пропорциональными, если хотя бы один из них получается в результате поэлементного умножения другого на некоторое число k.

Докажите, что если в определителе 2-го порядка пропорциональны строки, то пропорциональными будут и столбцы. Верно ли обратное утверждение?

Главный и вспомогательные определители системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными § 29

Главным определителем системы уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

называется определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

составленный из коэффициентов при неизвестных x и y. Этот определитель мы будем обозначать греческой буквой Δ (дельта). Очевидно, что

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Первым вспомогательным определителем системы уравнений (1) называется определитель

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Он получается из главного определителя этой с
ний путем замены первого столбца на столбец с
нов. Этот определитель мы будем обозначать Δ_x
есть значок) x при Δ указывает, что в главном оп
первый столбец $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, составленный из коэффицие
в системе уравнений (1), заменен на столбец свобод
$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$. Очевидно, что

$$\Delta_x = c_1 b_2 - c_2 b_1.$$

Вторым вспомогательным определителем системы уравнений (1) называется определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

который получается из главного определителя этой системы путем замены второго столбца на столбец свободных членов.

Этот определитель мы будем обозначать Δ_y. Очевидно, что

$$\Delta_y = a_1 c_2 - a_2 c_1.$$

Пример. Для системы уравнений

$$\begin{cases} -x + 2y = -5, \\ -7x + 3y = -13 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 - (-7) \cdot 2 = -3 + 14 = 11;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -13 & 3 \end{vmatrix} = (-5) \cdot 3 - (-13) \cdot 2 = -15 + 26 = 11;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -7 & -13 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-13) - (-7) \cdot (-5) = 13 - 35 = -22.$$

Вопрос о том, какую пользу приносят введенные нами определители Δ, Δ_x и Δ_y при решении системы уравнений (1), мы выясним в следующих параграфах.

Упражнения

Найти главный и вспомогательные определители для следующих систем уравнений:

229. $\begin{cases} 5x - 3y = 5, \\ 2x + 3y = 8. \end{cases}$

230. $\begin{cases} ax + y = 1, \\ x + ay = a. \end{cases}$

231. $\begin{cases} \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}y = 6, \\ x - y = 0. \end{cases}$

232. $\begin{cases} x - \frac{y}{a} = -a, \\ 3ax + y = 5a. \end{cases}$

Теорема. ***Если главный определитель системы уравнений***

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

не равен нулю, то эта система уравнений совместна и имеет единственное решение:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Например, для системы

$$\begin{cases} -x + 2y = -5, \\ -7x + 3y = -13, \end{cases}$$

рассмотренной в конце предыдущего параграфа, $\Delta = 11$, $\Delta_x = 11$, $\Delta_y = -22$. Поскольку $\Delta \neq 0$, то система совместна и имеет единственное решение:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{11}{11} = 1,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-22}{11} = -2.$$

Доказательство теоремы мы разобьем на два этапа.

1) Сначала покажем, что при $\Delta \neq 0$ система (1) не может иметь более одного решения.

Пусть (x_0, y_0) — решение системы (1). Тогда

$$a_1x_0 + b_1y_0 = c_1, \qquad (2)$$

$$a_2x_0 + b_2y_0 = c_2. \qquad (3)$$

Умножим первое из этих равенств на b_2, а второе на $-b_1$, и полученные соотношения сложим. Тогда получится:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x_0 + (b_1b_2 - b_2b_1)y_0 = b_2c_1 - b_1c_2,$$

или

$$\Delta \cdot x_0 = \Delta_x.$$

Затем к равенству (2), умноженному на $-a_2$, прибавим равенство (3), умноженное на a_1. В результате получим:

$$(-a_2a_1 + a_1a_2)x_0 + (-a_2b_1 + a_1b_2)y_0 = -a_2c_1 + a_1c_2,$$

или

$$\Delta \cdot y_0 = \Delta_y.$$

Таким образом, если система уравнений (1) имеет решение (x_0, y_0), то

$$\Delta \cdot x_0 = \Delta_x,$$
$$\Delta \cdot y_0 = \Delta_y.$$

Вследствие того что $\Delta \neq 0$, x_0 должен быть равен $\frac{\Delta_x}{\Delta}$, а $y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}$. Никакими другими числами x_0 и y_0 быть не могут. Но это и означает, что данная система имеет не более одного решения.

2) Доказывая единственность решения системы уравнений (1), мы предположили, что решение существует. Но верно ли такое предположение? Теперь этот вопрос выяснить нетрудно. Мы уже показали, что решением системы уравнений (1) могут быть лишь числа $x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ и $y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}$. Поэтому сейчас нам нужно будет просто подставить эти значения x и y в уравнения системы (1) и посмотреть, обратятся ли при этом уравнения в числовые равенства. Если обратятся, то тем самым мы докажем, что система уравнений (1) имеет решение $x_0 = \frac{\Delta x}{\Delta}$, $y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta}$ и, следовательно, является совместной. В этом и состоит второй этап доказательства нашей теоремы.

Имеем:

$$a_1x_0 + b_1y_0 = a_1\frac{\Delta_x}{\Delta} + b_1\frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{a_1(b_2c_1 - b_1c_2)}{\Delta} + \frac{b_1(a_1c_2 - a_2c_1)}{\Delta} =$$

$$= \frac{a_1b_2c_1 - a_1b_1c_2 + b_1a_1c_2 - b_1a_2c_1}{\Delta} = \frac{c_1(a_1b_2 - a_2b_1)}{\Delta} = \frac{c_1\Delta}{\Delta} = c_1.$$

Аналогично показывается, что

$$a_2x_0 + b_2y_0 = c_2.$$

Таким образом, если для системы уравнений (1) $\Delta \neq 0$, то эта система имеет и притом единственное решение. Его можно получить по следующему правилу: находим Δ_x, Δ_y, а затем вычисляем искомые величины x и y по формулам $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$. Это правило названо именем швейцарского математика Крамера (1704—1752), который одним из первых пришел к понятию определителя и доказал приведенную здесь теорему.

Условие

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

означает, что строки (a, b) и (c, d) этого определителя не пропорциональны (см. § 28). В таком случае говорят, что коэффициенты при неизвестных x и y в системе уравнений (1) не пропорциональны. Поэтому полученный результат можно сформулировать следующим образом.

Если коэффициенты при неизвестных x и y в системе уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

не пропорциональны, то эта система совместна и имеет единственное решение.

Вопрос о пропорциональности коэффициентов при неизвестных часто решается устно. Поэтому устно может быть установлена совместность таких, например, систем, как

$$\begin{cases} x + 2y = 1, \\ 2x + 5y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - y = 5, \\ 3x - 2y = 6; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = a, \\ x - y = b, \end{cases}$$

и т. д. Вместе с тем устно выясняется, что каждая из данных систем имеет лишь одно решение.

Упражнения

233. Данные системы решить по правилу Крамера:

а) $\begin{cases} x + 2y = 2, \\ -2x - 3y = -8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x - 3y = -3, \\ 4x + y = 1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0{,}3x - \frac{1}{5}y = 1, \\ -6x + 5y = -19; \end{cases}$

234. Можно ли решать по правилу Крамера следующие системы:

а) $\begin{cases} ax + 4y = 9, \\ 9x + ay = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - \frac{y}{a} = -a, \\ 3ax + y = 5a; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -x + ay = 0, \\ ay + x = a? \end{cases}$

235. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1 - ax} + \dfrac{1}{1 + ay} = 1, \\ \dfrac{2}{1 - ax} - \dfrac{3}{1 + ay} = -\dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Случай, когда главный определитель системы уравнений равен нулю, а хотя бы один из вспомогательных определителей отличен от нуля § 31

Теорема. ***Если главный определитель системы уравнений***

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

равен нулю, а хотя бы один из вспомогательных определителей отличен от нуля, то система несовместна.

Формально доказательство этой теоремы нетрудно получить методом от противного. Предположим, что система уравнений (1) имеет решение (x_0, y_0). Тогда, как показано в предыдущем параграфе,

$$\Delta \cdot x_0 = \Delta_x, \quad \Delta \cdot y_0 = \Delta_y. \tag{2}$$

Но по условию $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей Δ_x и Δ_y отличен от нуля. Таким образом, равенства (2) одновременно выполняться не могут. Теорема доказана.

Однако представляется интересным более детально выяснить, почему система уравнений (1) в рассматриваемом случае несовместна.

Условие

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

означает, что коэффициенты при неизвестных в системе уравнений (1) пропорциональны. Пусть, например,

$$a_1 = ka_2, \qquad b_1 = kb_2.$$

Условие

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

означает, что коэффициенты при y и свободные члены уравнений системы (1) не пропорциональны. Поскольку $b_1 = kb_2$, то $c_1 \neq kc_2$.

Следовательно, система уравнений (1) может быть записана в следующем виде:

$$\begin{cases} ka_2x + kb_2y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

В этой системе коэффициенты при неизвестных соответственно пропорциональны, но коэффициенты при y (или при x) и свободные члены не пропорциональны. Такая система, конечно, несовместна. Действительно, если бы она имела решение (x_0, y_0), то выполнялись бы числовые равенства

$$k(a_2x_0 + b_2y_0) = c_1,$$
$$a_2x_0 + b_2y_0 = c_2.$$

Но одно из этих равенств противоречит другому: ведь $c_1 \neq kc_2$.

Мы рассмотрели лишь случай, когда $\Delta_x \neq 0$. Аналогично может быть рассмотрен случай, когда $\Delta_y \neq 0$.

Доказанную теорему можно формулировать и таким образом.

Если коэффициенты при неизвестных x и y в системе уравнений (1) пропорциональны, а коэффициенты при какой-нибудь из этих неизвестных и свободные члены не пропорциональны, то эта система уравнений несовместна.

Легко, например, убедиться в том, что каждая из данных систем будет несовместной:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ 2x + 2y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 0{,}5y = 3, \\ 4x - y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 0, \\ -2x + 2y = 7. \end{cases}$$

Упражнения

236. (Устно.) Показать, что каждая из данных систем уравнений несовместна:

а) $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ 4x - 8y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x - 0{,}5y = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -x + 3y = -2, \\ 2x - 6y = -1. \end{cases}$

Решить системы уравнений:

237. $\begin{cases} 5ax - y = 8, \\ -ax + y = 0. \end{cases}$

238. $\begin{cases} 8x + 2ay = 1, \\ 5x + 4ay = 2. \end{cases}$

239. $\begin{cases} \dfrac{a}{x} + \dfrac{2}{y} = a, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{ay} = 1. \end{cases}$

240. $\begin{cases} ax + \dfrac{y}{a-1} = 1 - x, \\ x + y - 1 = a^2x - a. \end{cases}$

Случай, когда и главный и оба вспомогательных определителя системы уравнений равны нулю § 32

В предыдущих параграфах, изучая систему уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \tag{1}$$

мы рассмотрели два случая:

1) случай, когда коэффициенты при неизвестных x и y не являются соответственно пропорциональными ($\Delta \neq 0$);

2) случай, когда коэффициенты при неизвестных x и y соответственно пропорциональны, а коэффициенты при каком-нибудь неизвестном и свободные члены не являются соответственно пропорциональными ($\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей Δ_x и Δ_y отличен от нуля).

Осталось рассмотреть еще один случай, когда и коэффициенты при неизвестных x и y и свободные члены соответственно пропорциональны, то есть

$$a_1 = ka_2, \quad b_1 = kb_2, \quad c_1 = kc_2$$

или

$$a_2 = k'a_1, \quad b_2 = k'b_1, \quad c_2 = k'c_1.$$

Для определенности мы рассмотрим первый из этих двух вариантов. Система уравнений (1) в этом случае имеет вид:

$$\begin{cases} ka_2x + kb_2y = kc_2, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \qquad (2)$$

Очевидно, что каждая пара чисел (x_0, y_0), удовлетворяющая второму уравнению системы (2), должна удовлетворять и первому уравнению этой системы. Поэтому, для того чтобы решить систему уравнений (2), достаточно решить одно лишь второе уравнение этой системы. Другими словами, достаточно найти все такие пары чисел (x_0, y_0), которые обращают уравнение

$$a_2x + b_2y = c_2$$

в числовое равенство.

Предположим, что в этом уравнении хотя бы один из коэффициентов a_2 и b_2 отличен от нуля. Пусть, например, $b_2 \neq 0$. Тогда в качестве x_0 можно выбрать любое число t; y_0 в этом случае найдется из условия $a_2t + b_2y_0 = c_2$, откуда $y_0 = \frac{c_2 - a_2t}{b_2}$.

Итак, в рассматриваемом случае система уравнений (2) имеет бесконечное множество решений. Все они задаются формулами

$$x_0 = t, \; y_0 = \frac{c_2 - a_2t}{b_2},$$

где t — любое число.

Этот результат мы получили в предположении, что хотя бы один из коэффициентов a_2 и b_2 отличен от нуля. А если оба они равны нулю? Тогда система уравнений (2) имеет вид:

$$\begin{cases} 0x + 0y = c_1, \\ 0x + 0y = c_2. \end{cases} \qquad (3)$$

Такая система не представляет особого интереса. Если $c_1 = c_2 = 0$, то решением ее является любая пара чисел (x_0, y_0). Если же хотя бы одно из чисел c_1 и c_2 отлично от нуля, то система (3) несовместна.

Очевидно, что случай, когда $a_2 = b_2 = 0$, будет автоматически исключен, если дополнительно потребовать, чтобы среди коэффициентов при неизвестных x и y в системе уравнений (1) был хотя бы один отличный от нуля коэффициент.

Мы доказали следующую теорему.

Если коэффициенты при неизвестных и свободные члены в системе уравнений (1) соответственно пропорциональны и среди коэффициентов при неизвестных есть хотя бы один коэффициент, отличный от нуля, то система уравнений (1) имеет бесконечное множество решений. Все они получаются как решения одного того уравнения, которое содержит отличный от нуля коэффициент при неизвестном.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=3, \\ 2x-4y=6. \end{cases}$$

Коэффициенты при неизвестных и свободные члены этой системы уравнений соответственно пропорциональны. Поэтому все решения этой системы уравнений можно получить как решения одного лишь первого уравнения

$$x-2y=3.$$

Полагая $x=t$, находим, что $y=\frac{1}{2}(t-3)$.

Итак, данная система уравнений имеет бесконечное множество решений:

$$x=t,\ y=\frac{1}{2}(t-3),$$

где t — любое число. В частности, при $t=0$ получается решение $x=0$, $y=-\frac{3}{2}$, при $t=5$ — решение $x=5$, $y=1$ и т. д.

Доказанную выше теорему полезно сформулировать и в терминах определителей.

Если коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы уравнений (1) соответственно пропорциональны, то, как легко получить непосредственно, используя (2),

$$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0.$$

Можно доказать и обратное утверждение. Если $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$ и хотя бы один из коэффициентов при неизвестных системы уравнений (1) отличен от нуля, то коэффициенты при неизвестных и свободные члены такой системы уравнений будут соответственно пропорциональными. На доказательстве этого факта мы останавливаться не будем, хотя в принципе это и можно было бы сделать. Но, приняв его на веру, мы можем теперь доказанную выше теорему сформулировать следующим образом.

Если и главный и оба вспомогательных определителя системы уравнений (1) ***равны нулю и среди коэффициентов при неизвестных есть хотя бы один отличный от нуля коэффициент, то система уравнений*** (1) ***имеет бесконечное множество решений. Все они получаются как решения одного того уравнения, которое содержит отличный от нуля коэффицент при неизвестном.***

Упражнения

241. (Устно.) Показать, что каждая из данных систем уравнений имеет бесконечное множество решений:

а) $\begin{cases} 7x-y=3, \\ 14x-2y=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+3y=0, \\ 4x+6y=0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x-1{,}5y=3, \\ 3y-4x=-6 \end{cases}$

Решить системы уравнений (№ 242—244):

242. $\begin{cases} x - y = 1, \\ 3y - 3x = -3. \end{cases}$ **243.** $\begin{cases} 3x - 5y = 0, \\ -15x + 25y = 0. \end{cases}$

244. $\begin{cases} 7x - 2y = 16, \\ 3{,}5x - y = 8. \end{cases}$

245. Дана система уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1, \\ 4x - 6y = 1. \end{cases}$$

а) Сколько решений имеет каждое уравнение этой системы?

б) Сколько решений имеет система?

246. Сколько различных решений имеет однородная система уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0, \\ a_2x + b_2y = 0, \end{cases} \quad \text{если} \quad \text{а)} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0?$$

Таблица основных результатов о системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными § 33

Все результаты о системе уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

которые получены в § 30—32, приводятся в следующей таблице:

$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$	
	хотя бы один из определителей Δ_x и Δ_y не равен нулю	$\Delta_x = \Delta_y = 0$, и хотя бы один коэффициент при неизвестных отличен от нуля
1-й случай	2-й случай	3-й случай
Система совместна и имеет единственное решение: $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$ $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$	Система несовместна	Система совместна и имеет бесконечное множество решений. Все эти решения получаются как решения одного того уравнения, которое содержит отличный от нуля коэффициент при неизвестном

П р и м е р. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} ax - y = 3, \\ -x + ay = -3. \end{cases}$$

Для этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1; \ \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & a \end{vmatrix} = 3a - 3;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -3a + 3.$$

Пусть $a^2 - 1 \neq 0$, то есть $a \neq -1$ и $a \neq 1$. Тогда $\Delta \neq 0$ (случай 1), и потому система имеет единственное решение:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{3a-3}{a^2-1} = \frac{3}{a+1}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-3a+3}{a^2-1} = -\frac{3}{a+1}.$$

Если $a = -1$, то $\Delta = 0$, $\Delta_x = -6$, $\Delta_y = 6$. В этом случае система будет несовместной (случай 2). Если же $a = 1$, то $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ (случай 3). В этом случае система будет иметь бесконечное множество решений, причем все они получаются в результате решения одного лишь первого (второго) уравнения. При $a = 1$ первое уравнение обращается в $x - y = 3$. Все решения этого уравнения можно записать в виде $x = t$, $y = t - 3$, где t — любое число.

Итак, к задаче можно дать следующий ответ: если $a \neq 1$ и $a \neq -1$, то данная система уравнений имеет единственное решение

$$x = \frac{3}{a+1}, \quad y = -\frac{3}{a+1};$$

если $a = -1$, то система несовместна; при $a = 1$ система имеет бесконечное множество решений, которые можно записать в виде

$$x = t, \quad y = t - 3,$$

где t — любое число.

Метод решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, с которым мы познакомились в этой главе, основан на использовании определителей 2-го порядка. В курсе высшей алгебры вводится понятие определителя порядка n для любого натурального n и излагается метод решения системы n линейных уравнений с n неизвестными с помощью таких определителей. Этот метод очень важен как при решении теоретических вопросов, так и при исследовании систем уравнений с буквенными коэффициентами. Он широко применяется (как и само понятие определителя) не только в высшей алгебре, но и в других разделах высшей математики, в механике, в теоретической физике.

Однако для практического решения систем линейных уравнений с ч и с л о в ы м и коэффициентами самым экономным (в смысле объема производимых вычислений) оказывается известный вам по курсу VIII класса метод последовательного исключения неизвестных. Именно им пользуются всегда на практике.

Упражнения

Решить системы уравнений (№ 247—249):

247. $\begin{cases} 2x + ay = -6, \\ ax + 8y = 12. \end{cases}$

249. $\begin{cases} ax - (a-1)y = 0{,}5, \\ (a-1)x - ay = a. \end{cases}$

248. $\begin{cases} 3x - ay = 6 - a, \\ -ax + 3y = 3 - 2a. \end{cases}$

250. Доказать, что каждая из данных систем уравнений не может иметь бесконечно много различных решений:

а) $\begin{cases} (a+1)x + y = 0, \\ x + (a^2 - a + 1)y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{a-1}{x} + \dfrac{a}{y} = 5, \\ \dfrac{a}{x} + \dfrac{a+1}{y} = 6. \end{cases}$

251. Доказать, что каждая из данных систем уравнений либо несовместна, либо имеет бесконечное множество решений:

а) $\begin{cases} 4x - 6y = a, \\ 2x - 3y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (4-a)x + y = -a, \\ (2a-8)x - 2y = a. \end{cases}$

252. (Устно.) Выяснить, сколько решений имеет каждая из данных систем уравнений:

а) $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ x - 3y = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + y = 9, \\ 8x - 4y = -36; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x - 6y = 5, \\ -8x + 12y = 10; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + 17y = 0, \\ 2x + 34y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x - y = 6, \\ 6x - 2y = 12; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x - y = 100, \\ 2x + 3y = 17. \end{cases}$

Графический способ решения систем линейных уравнений § 34

Предположим, что в каждом уравнении системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (1)$$

хотя бы один из коэффициентов при неизвестных x и y отличен от нуля. Тогда любое из этих двух уравнений можно рассматривать как уравнение прямой в прямоугольной системе координат.

Действительно, возьмем, например, первое уравнение

$$a_1x + b_1y = c_1.$$

Если $b_1 \neq 0$, то уравнение можно переписать в виде:

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1}.$$

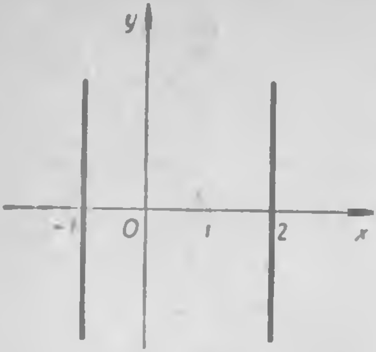


Рис. 41.

Это уже знакомое нам уравнение прямой (см. § 3).

При $b_1 = 0$ уравнение $a_1x + b_1y = c_1$ принимает вид $a_1x = c_1$, или

$$x = \frac{c_1}{a_1}.$$

Это соотношение можно рассматривать как уравнение прямой, параллельной оси y и пересекающей ось x в точке с абсциссой $\frac{c_1}{a_1}$ (смотри, например, рисунок 41, на котором представлены прямые $x = -1$ и $x = 2$).

Поэтому результаты, полученные в предыдущих параграфах, допускают простую геометрическую интерпретацию. С системой уравнений (1) свяжем две прямые: прямую $a_1x + b_1y = c_1$ и прямую $a_2x + b_2y = c_2$ (рис. 42). Если эти прямые имеют общую точку M, то координаты ее (x_0, y_0) определяют некоторое решение системы уравнений (1). Обратно: каждое решение системы уравнений (1) можно рассматривать как координаты точки, принадлежащей одновременно и прямой $a_1x + b_1y = c_1$ и прямой $a_2x + b_2y = c_2$. Таким образом, система уравнений (1) имеет столько решений, сколько общих точек содержат прямые $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$.

Любые две прямые либо имеют одну общую точку (пересекающиеся прямые), либо не имеют ни одной общей точки (параллельные прямые), либо имеют бесконечно много общих точек (сливающиеся друг с другом прямые). Соответственно этому система уравнений (1) либо имеет единственное решение (случай 1), либо несовместна, то есть не имеет ни одного решения (случай 2), либо имеет бесконечно много решений (случай 3). Поясним это на трех частных примерах.

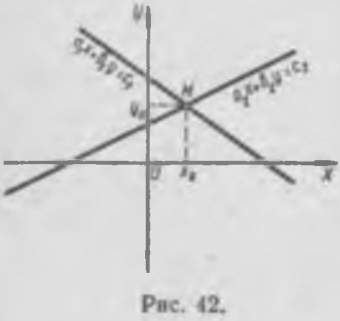


Рис. 42.

Примеры 1. Системе уравнений

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1 \end{cases}$$

соответствуют прямые, представленные на рисунке 43. Они пересекаются в одной точке с координатами (2; 1). Следовательно, данная система имеет единственное решение $x=2$, $y=1$.

2. Системе уравнений

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$$

соответствуют параллельные прямые, представленные на рисунке 44. Они не пересекаются ни в одной точке. Данная система уравнений несовместна.

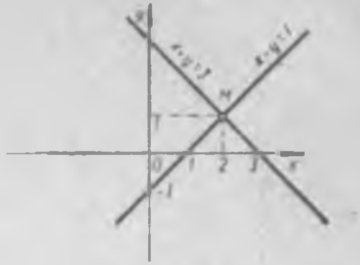


Рис. 43.

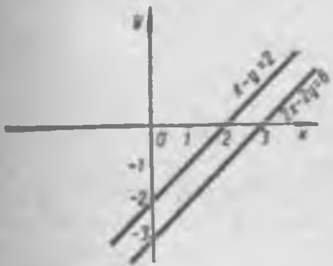


Рис. 44.

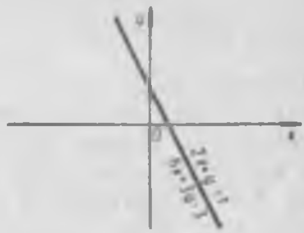


Рис. 45.

3. Для системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 6x + 3y = 3 \end{cases}$$

соответствующие прямые сливаются в одну прямую линию (рис. 45). О таких прямых можно сказать, что они пересекаются в бесконечном множестве точек, а именно в каждой своей точке. Поэтому данная система уравнений имеет бесконечное множество решений. Все эти решения можно представить как координаты точек, лежащих на этой прямой. Если x принять за t, то для y получим $y = 1 - 2t$.

Упражнения

Решить графически следующие системы уравнений (№ 253—258):

253. $\begin{cases} 2x - y = 5, \\ 3x - y = 7. \end{cases}$

254. $\begin{cases} x + y = 4, \\ 2x + 2y = 8. \end{cases}$

255. $\begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ x - 1{,}5y = 1{,}5. \end{cases}$

256. $\begin{cases} x - y = 1, \\ y - 2x = 1. \end{cases}$

257. $\begin{cases} x - y = 3, \\ 2x = 4. \end{cases}$

258. $\begin{cases} -x + 2y = 0, \\ 3y = 6. \end{cases}$

259. Как геометрически можно интерпретировать тот факт, что любая однородная система двух линейных уравнений с двумя неизвестными совместна?

Задачи на повторение

260. При каких значениях a уравнение $ax = 2x + a$
а) не имеет корней;
б) имеет и притом только положительные корни;
в) имеет и притом только отрицательные корни;
г) имеет корни?

261. Отцу 40 лет, а сыну 10. Через сколько лет отец будет в k раз старше сына?

262. Решить относительно x уравнение

$$\frac{3x^2 - 8a}{2ax - 2a - 3x + 3} = \frac{3x}{2a - 3} - \frac{x}{x - 1}.$$

263. Сколько точек пересечения имеет прямая $y = ax + b$
а) с осью абсцисс;
б) с осью ординат?

Доказать неравенства (№ 264—268):

264. $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}.$

265. $(ac + bd)^2 \leqslant (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$

266. $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 9. \qquad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$

267. $(a + b + c)^2 \leqslant 3(a^2 + b^2 + c^2).$

268.* $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc\,(a + b + c).$

269. Где моторная лодка быстрее пройдет расстояние в 30 *км* и возвратится назад: по озеру или по реке?

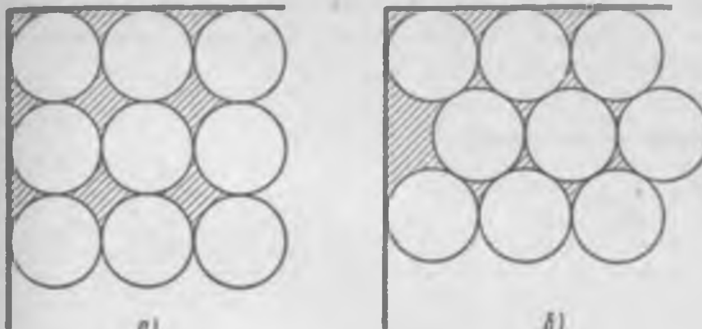
270. Доказать, что если $a + b + c \geqslant 3$, то и $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 3$.

271*. Как выгоднее (с точки зрения экономии металла) штамповать металлические шайбы: как показано на рисунке 46, *а* или как показано на рисунке 46, *б*? Каждая пластина, из которой штампуются шайбы, имеет форму прямоугольника со сторонами a и b, а диаметр шайбы равен d.

272. Громоотвод защищает от молнии все предметы, расстояния которых от его основания не превышают его удвоенной высоты. Какой должна быть высота h громоотвода, чтобы им можно было защитить от молнии прямоугольный участок шириной a *м* и длиной b *м*? В каком месте этого участка лучше всего поставить громоотвод?

Решить неравенства (№ 273, 274):

273. $3 < \frac{5x - 1}{2x - 3} < 5.$ 274. $3 \leqslant |x - 2| < 4.$



а) *б)*

Рис. 46.

275. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x+1} < 1, \\ \dfrac{2}{x+1} > 0. \end{cases}$$

Решить системы уравнений (№ 276—279):

276. $\begin{cases} x + ay = b, \\ ax + y = b. \end{cases}$

278. $\begin{cases} \dfrac{a}{x} - \dfrac{1}{y} = 3. \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = -3. \end{cases}$

277*. $\begin{cases} ax + |y| = 1 + a, \\ x + ay = 1 - a. \end{cases}$

279. $\begin{cases} 2x + ay = a^2, \\ x + y = \dfrac{a+2}{2}. \end{cases}$

280. При каких значениях m и n прямые $3x - my = n$ и $2x + 3y = 5$ параллельны?

281. При каких значениях a прямые $4x - 3y = a$ и $-5x + ay = 8$ пересекаются в точке, координаты которой отрицательны?

282. При каких значениях a и b прямые $ax - y = b$ и $4x + 3y = 10$ сливаются в одну прямую?

283. В каком случае однородная система уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0, \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases}$$

а) имеет только нулевое решение, то есть решение

$$x = 0, \quad y = 0;$$

б) имеет ненулевое решение, то есть такое решение $(x_0, \ y_0)$, что хотя бы одно из чисел x_0 и y_0 отлично от нуля?

259. Как геометрически можно интерпретировать тот факт, что любая однородная система двух линейных уравнений с двумя неизвестными совместна?

Задачи на повторение

260. При каких значениях a уравнение $ax = 2x + a$
а) не имеет корней;
б) имеет и притом только положительные корни;
в) имеет и притом только отрицательные корни;
г) имеет корни?

261. Отцу 40 лет, а сыну 10. Через сколько лет отец будет в k раз старше сына?

262. Решить относительно x уравнение

$$\frac{3x^2 - 8a}{2ax - 2a - 3x + 3} = \frac{3x}{2a - 3} - \frac{x}{x - 1}.$$

263. Сколько точек пересечения имеет прямая $y = ax + b$
а) с осью абсцисс;
б) с осью ординат?

Доказать неравенства (№ 264—268):

264. $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} > \sqrt{a} + \sqrt{b}.$

265. $(ac + bd)^2 \leqslant (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$

266. $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) > 9.$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$

267. $(a + b + c)^2 \leqslant 3(a^2 + b^2 + c^2).$

268.* $a^4 + b^4 + c^4 \leqslant abc\,(a + b + c).$

269. Где моторная лодка быстрее пройдет расстояние в 30 *км* и возвратится назад: по озеру или по реке?

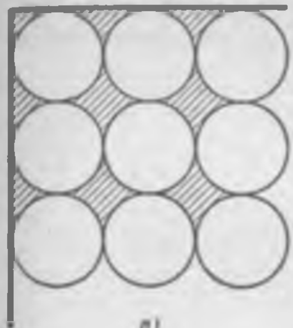
270. Доказать, что если $a + b + c > 3$, то и $a^2 + b^2 + c^2 > 3$.

271*. Как выгоднее (с точки зрения экономии металла) штамповать металлические шайбы: как показано на рисунке 46, *а* или как показано на рисунке 46, *б*? Каждая пластина, из которой штампуются шайбы, имеет форму прямоугольника со сторонами a и b, а диаметр шайбы равен d.

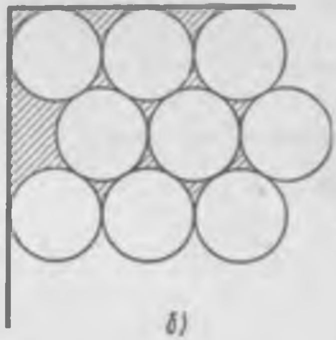
272. Громоотвод защищает от молнии все предметы, расстояния которых от его основания не превышают его удвоенной высоты. Какой должна быть высота h громоотвода, чтобы им можно было защитить от молнии прямоугольный участок шириной a *м* и длиной b *м*? В каком месте этого участка лучше всего поставить громоотвод?

Решить неравенства (№ 273, 274):

273. $3 < \frac{5x - 1}{2x - 3} < 5.$ 274. $3 \leqslant |x - 2| < 4.$



а)



б)

Рис. 46.

275. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x+1} < 1, \\ \dfrac{2}{x+1} > 0. \end{cases}$$

Решить системы уравнений (№ 276—279):

276. $\begin{cases} x + ay = b, \\ ax + y = b. \end{cases}$

278. $\begin{cases} \dfrac{a}{x} - \dfrac{1}{y} = 3. \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = -3. \end{cases}$

277*. $\begin{cases} ax + |y| = 1 + a, \\ x + ay = 1 - a. \end{cases}$

279. $\begin{cases} 2x + ay = a^2, \\ x + y = \dfrac{a+2}{2}. \end{cases}$

280. При каких значениях m и n прямые $3x - my = n$ и $2x + 3y = 5$ параллельны?

281. При каких значениях a прямые $4x - 3y = a$ и $-5x + ay = 8$ пересекаются в точке, координаты которой отрицательны?

282. При каких значениях a и b прямые $ax - y = b$ и $4x + 3y = 10$ сливаются в одну прямую?

283. В каком случае однородная система уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0, \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases}$$

а) имеет только нулевое решение, то есть решение

$$x = 0, \quad y = 0;$$

б) имеет ненулевое решение, то есть такое решение (x_0, y_0), что хотя бы одно из чисел x_0 и y_0 отлично от нуля?

284. При каких значениях a решение системы уравнений

$$\begin{cases} x - 7y = 1, \\ 5x + 3y = a \end{cases}$$

удовлетворяет условию $x < 0$, $y > 0$?

285. С какой точностью можно найти x и y из системы уравнений

$$\begin{cases} 2x - \ \ y = a, \\ x + 3y = b, \end{cases}$$

если вместо чисел a и b известны их приближенные значения с точностью до 0,01? Что можно определить точнее: x или y?

286. (Устно.) Сколько различных решений имеет каждая из систем уравнений:

а) $\begin{cases} 2x - \ \ y = 0, \\ 3x + 4y = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 7x + 3y = 2, \\ 7x - 3y = a; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x - 3{,}5y = 0, \\ 2x - \ \ 7y = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + \ \ y = 5, \\ 2x + 2y = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 6x - 12y = 5, \\ -x + 2y = \frac{5}{6}; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ ax + 6y = 2. \end{cases}$

287. а) Известно, что уравнение $ax = b$ имеет бесконечное множество корней. Следует ли отсюда, что любое число x_0 является корнем этого уравнения?

б) Известно, что система уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений. Следует ли отсюда, что любая пара чисел (x_0, y_0) является решением этой системы?

288. В каких пределах заключены числа m и n, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} m - 5n = a, \\ 2m + 3n = b, \end{cases}$$

если $0{,}1 < a < 0{,}2$, а $1{,}3 < b < 1{,}4$?

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

II

Рациональные числа — § 35

Первой математической операцией, с которой столкнулся человек, был счет предметов. В результате счета предметов получаются целые положительные числа, иначе называемые *натуральными*. Расположенные в порядке возрастания, они образуют *натуральный ряд чисел*

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots .$$

После натуральных чисел в математику были введены *положительные дроби*, то есть числа вида $\frac{m}{n}$, где m и n — произвольные натуральные числа. Введение этих чисел в математику было вызвано потребностью производить измерения.

Известно, например, что при разливах реки Нила затоплялись огромные земельные участки древних египтян. После того как вода спадала, каждый должен был «найти» свой участок. Но без умения точно измерять ширину и длину участка сделать это было невозможно.

Для того чтобы показать, каким образом появляются положительные дроби при решении задач измерения, мы напомним, как измеряются прямолинейные отрезки. Из всех отрезков выбирают какой-нибудь один, например AB (см. рис. 47 на стр. 78), и объявляют его «единицей длины». Если в измеряемом отрезке CD выбранная единица длины укладывается ровно n раз (на рис. 47 $n = 3$), то длина отрезка CD выражается числом n.

Но не всегда отрезок AB, представляющий собой единицу длины, укладывается в измеряемом отрезке целое число раз. Так, например, на рисунке 48 отрезок AB вдвое длиннее измеряемого отрезка CD. Следовательно, половина отрезка AB укладывается в CD ровно один раз. Поэтому длина отрезка CD выражается дробным числом $\frac{1}{2}$. Вообще, если отрезок, выбранный в качестве единицы длины, в n раз длиннее измеряемого отрезка, то длина последнего выражается числом $\frac{1}{n}$. Возможен и такой случай, когда n-я часть единицы длины AB уклады-

Рис. 47.

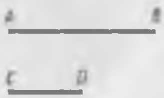


Рис. 48.

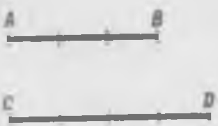


Рис. 49.

вается в измеряемом отрезке CD ровно m раз (см. рис. 49, на котором $n = 3$, $m = 4$). В этом случае длина отрезка CD выражается дробным числом $\frac{m}{n}$.

Таким образом, введение в математику натуральных чисел и положительных дробей было вызвано практическими потребностями людей. Позднее наряду с этими потребностями стали появляться и потребности теоретического характера. Как известно, натуральные числа и положительные дроби можно складывать и умножать друг на друга. А вот вычесть такие числа одно из другого удается далеко не всегда. Например, разности 5—5 и $\frac{1}{3}$—2 никакими натуральными числами и никакими положительными дробями выразить нельзя. Следовательно, действие вычитания в множестве всех натуральных чисел и положительных дробей, вообще говоря, не выполнимо. Потребности арифметики еще в древние времена поставили перед математикой необходимость ввести в рассмотрение *отрицательные целые числа, нуль* и *отрицательные дроби.*

Отрицательные числа мы впервые встречаем в работах китайских математиков II века до н. э. Не исключена возможность, что результаты, содержащиеся в этих работах, были получены еще раньше. В VI—XI веках отрицательными числами свободно пользовались индийские математики. В Европе отрицательные числа стали широко использоваться лишь после работ французского математика Декарта (1596—1650).

После введения отрицательных чисел и нуля математика стала располагать всеми *рациональными числами*, то есть числами, которые можно представить в виде отношения $\frac{m}{n}$, где m и n — целые числа, причем $n \neq 0$. Сюда входят все целые числа (положительные, отрицательные и нуль):

$$3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \ldots, \quad -5 = \frac{-5}{1} = \frac{10}{-2} = \ldots, \quad 0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \ldots,$$

и все дроби (правильные и неправильные, положительные и отрицательные):

$$\frac{1}{2}, \frac{10}{3}, -\frac{6}{5}$$

и т. д.

Упражнения

289. Существует ли среди всех натуральных чисел:
а) наименьшее число; б) наибольшее число?

290. Есть ли среди всех положительных рациональных чисел:
а) наименьшее число;
б) наибольшее число?

291. Есть ли среди всех неположительных рациональных чисел:
а) наименьшее число;
б) наибольшее число?

292. Среди всех отрицательных чисел, не превышающих по абсолютной величине $\frac{5}{2}$, указать:
а) наименьшее рациональное число;
б) наибольшее рациональное число;
в) наименьшее целое число.

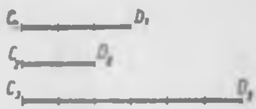


Рис. 50.

293. Если за единицу длины принять отрезок AB, то длина отрезка CD выразится числом $\frac{m}{n}$. А каким числом выразится длина того же самого отрезка CD, если в качестве единицы длины выбрать отрезок:
а) в k раз меньший отрезка AB;
б) в k раз больший отрезка AB?

294. Какими числами выразятся длины отрезков C_1D_1, C_2D_2 и C_3D_3, представленных на рисунке 50, если за единицу длины принять:
а) отрезок C_1D_1; б) отрезок C_2D_2; в) отрезок C_3D_3?

Действия над рациональными числами § 36

Как известно, две дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{k}{l}$ равны, то есть изображают одно и то же рациональное число, в том и только в том случае, когда $ml = nk$. Например, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, так как $1 \cdot 6 = 3 \cdot 2$; $\frac{-5}{7} = \frac{10}{-14}$, поскольку $(-5) \cdot (-14) = 7 \cdot 10$; $\frac{0}{1} = \frac{0}{5}$, так как $0 \cdot 5 = 1 \cdot 0$ и т. д.

Очевидно, что для любого целого числа r, не равного 0,

$$\frac{m}{n} = \frac{m \cdot r}{n \cdot r}.$$

Это вытекает из очевидного равенства $m \cdot (n \cdot r) = n \cdot (m \cdot r)$. Поэтому любое рациональное число можно представить в виде отношения двух чисел бесконечным числом способов. Например,

$$5 = \frac{5}{1} = \frac{-10}{-2} = \frac{15}{3} \text{ и т. д.}$$

$$\frac{-1}{7} = \frac{2}{-14} = \frac{-3}{21} = \frac{-100}{700} \text{ и т. д.}$$

$$0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{-2} = \frac{0}{3} = \frac{0}{100} \text{ и т. д.}$$

В множестве всех рациональных чисел выполнимы действия сложения, умножения, вычитания и деления (кроме деления на нуль). Напомним, как определяются эти действия.

Сумма двух рациональных чисел $\frac{m}{n}$ *и* $\frac{k}{l}$ *определяется формулой*:

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml + nk}{nl}. \tag{1}$$

Произведение двух рациональных чисел $\frac{m}{n}$ *и* $\frac{k}{l}$ *определяется формулой*:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} = \frac{mk}{nl}. \tag{2}$$

Поскольку одно и то же рациональное число допускает несколько записей $\left(\text{например, } \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \ldots\right)$, следовало бы показать, что сумма и произведение рациональных чисел не зависят от того, как записаны слагаемые или сомножители. Например,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{4} + \frac{3}{9}, \qquad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6}$$

и т. д. Однако рассмотрение этих вопросов выходит за пределы нашей программы.

При сложении и умножении рациональных чисел соблюдаются следующие основные законы:

1) *коммутативный* (или переместительный) закон сложения:

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{k}{l} + \frac{m}{n};$$

2) *ассоциативный* (или сочетательный) закон сложения:

$$\left(\frac{m}{n}+\frac{k}{l}\right)+\frac{p}{q}=\frac{m}{n}+\left(\frac{k}{l}+\frac{p}{q}\right);$$

3) *коммутативный* (или переместительный) закон умножения:

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{k}{l}=\frac{k}{l}\cdot\frac{m}{n};$$

4) *ассоциативный* (или сочетательный) закон умножения:

$$\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{k}{l}\right)\cdot\frac{p}{q}=\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{k}{l}\cdot\frac{p}{q}\right);$$

5) *дистрибутивный* (или распределительный) закон умножения относительно сложения:

$$\left(\frac{m}{n}+\frac{k}{l}\right)\cdot\frac{p}{q}=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}+\frac{k}{l}\cdot\frac{p}{q}.$$

Сложение и умножение являются основными алгебраическими действиями. Что же касается вычитания и деления, то эти действия определяются как обратные по отношению к сложению и умножению.

Разностью двух рациональных чисел $\frac{m}{n}$ *и* $\frac{k}{l}$ *называется такое число* x, *которое в сумме с* $\frac{k}{l}$ *дает* $\frac{m}{n}$. Другими словами, разность $\frac{m}{n}-\frac{k}{l}$ определяется как корень уравнения

$$\frac{k}{l}+x=\frac{m}{n}.$$

Можно доказать, что такое уравнение всегда имеет корень и притом только один:

$$x=\frac{ml-nk}{nl}.$$

Таким образом, разность двух чисел $\frac{m}{n}$ и $\frac{k}{l}$ находится по формуле:

$$\frac{m}{n}-\frac{k}{l}=\frac{ml-nk}{nl}.$$

Если числа $\frac{m}{n}$ и $\frac{k}{l}$ равны между собой, то разность их обращается в нуль; если же эти числа не равны между собой, то разность их либо положительна, либо отрицательна. При $\frac{m}{n}-\frac{k}{l}>0$ говорят, что число $\frac{m}{n}$ больше числа $\frac{k}{l}$; если же $\frac{m}{n}-\frac{k}{l}<0$, то говорят, что число $\frac{m}{n}$ меньше числа $\frac{k}{l}$.

Частным от деления рационального числа $\frac{m}{n}$ *на рациональное число* $\frac{k}{l}$ *называется такое число* x, *которое в произведении с* $\frac{k}{l}$ *дает* $\frac{m}{n}$. Другими словами, частное $\frac{m}{n}:\frac{k}{l}$ определяется как корень уравнения

$$\frac{k}{l}\cdot x=\frac{m}{n}.$$

Если $\frac{k}{l}\neq 0$, то данное уравнение имеет единственный корень

$$x=\frac{ml}{nk}.$$

Если же $\frac{k}{l}=0$, то это уравнение либо совсем не имеет корней $\left(\text{при } \frac{m}{n}\neq 0\right)$, либо имеет бесконечно много корней $\left(\text{при } \frac{m}{n}=0\right)$. Желая сделать операцию деления выполнимой однозначно, условимся не рассматривать вовсе деление на нуль. Таким образом, деление рационального числа $\frac{m}{n}$ на рациональное число $\frac{k}{l}$ определено всегда, если только $\frac{k}{l}\neq 0$. При этом

$$\frac{m}{n}:\frac{k}{l}=\frac{ml}{nk}.$$

Упражнения

295. Вычислить наиболее рациональным способом и указать, какими законами действий приходится при этом пользоваться:

а) $\left(5\frac{1}{12} - 3\frac{1}{4}\right) \cdot 24$; в) $\left(333\frac{1}{3} \cdot 4\right) \cdot \left(\frac{3}{125} \cdot \frac{1}{16}\right)$.

б) $\left(\frac{1}{10} - 3\frac{1}{2}\right) + \frac{9}{10}$;

Геометрическое изображение рациональных чисел § 37

Пусть Δ есть отрезок, принятый за единицу длины, а l — произвольная прямая (рис. 51). Возьмем на ней какую-нибудь точку и обозначим ее буквой O. Каждому положительному рациональному числу $\frac{m}{n}$ поставим в соответствие точку прямой l, лежащую справа от O на расстоянии в $\frac{m}{n}$ единиц длины. Например, числу 2 будет соответствовать точка A, лежащая справа от O на расстоянии в 2 единицы длины, а числу $\frac{5}{4}$ — точка B, лежащая справа от O на расстоянии в $\frac{5}{4}$ единиц длины. Каждому отрицательному рациональному числу $\frac{k}{l}$ поставим в соответствие точку прямой, лежащую слева от O на расстоянии в $\left|\frac{k}{l}\right|$ единиц длины. Так, числу -3 будет соответствовать точка C, лежащая слева от O на расстоянии в 3 единицы длины, а числу $-\frac{3}{2}$ точка D, лежащая слева от O на расстоянии в $\frac{3}{2}$ единиц длины. Наконец, рациональному числу «нуль» поставим в соответствие точку O.

Очевидно, что при выбранном соответствии равным рациональным числам $\left(\text{например, } \frac{1}{2} \text{ и } \frac{2}{4}\right)$ будет отвечать одна и та же точка, а не равным между собой числам — различные точки прямой. Предположим, что числу $\frac{m}{n}$ соответствует точка P, а числу $\frac{k}{l}$ — точка Q. Тогда, если $\frac{m}{n} > \frac{k}{l}$, то точка P будет лежать правее точки Q (рис. 52, *а*); если же $\frac{m}{n} < \frac{k}{l}$, то точка P будет находиться левее точки Q (рис. 52, *б*).

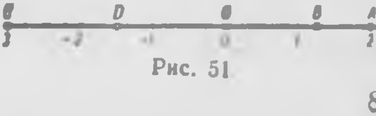


Рис. 51

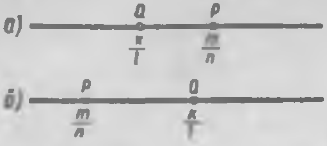


Рис. 52.

Итак, ***любое рациональное число можно геометрически изобразить в виде некоторой, вполне определенной точки прямой.*** А верно ли обратное утверждение? Всякую ли точку прямой можно рассматривать как геометрический образ некоторого рационального числа? Решение этого вопроса мы отложим до § 44.

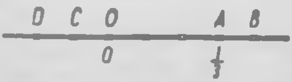


Рис. 53

Упражнения

296. Изобразить точками прямой следующие рациональные числа:

-3; $-\frac{7}{2}$; 0; 2,6.

297. Известно, что точка A (рис. 53) служит геометрическим изображением рационального числа $\frac{1}{3}$. Какие числа изображают точки B, C и D?

298. На прямой заданы две точки, которые служат геометрическим изображением рациональных чисел a и b. Найти на этой прямой точки, изображающие числа $a+b$ и $a-b$.

299. На прямой заданы две точки, которые служат геометрическим изображением рациональных чисел $a+b$ и $a-b$. Найти на этой прямой точки, изображающие числа a и b.

Десятичная форма записи рациональных чисел § 38

На практике обычно пользуются десятичной формой записи рациональных чисел. Так, вместо $\frac{1}{2}$ пишут 0,5; вместо $-\frac{3}{8}$ пишут $-0{,}375$; вместо $\frac{5}{4}$ пишут 1,25 и т. д. Для простоты в дальнейшем мы будем говорить лишь о положительных и правильных дробях, то есть дробях, заключенных в интервале от 0 до 1.

Чтобы получить десятичную форму записи числа $\frac{m}{n}$, нужно m «уголком» разделить на n. Как известно из арифметики, в результате такого деления получается либо *конечная*, либо *бесконечная периодическая десятичная дробь*. Проиллюстрируем это на числах $\frac{5}{16}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{29}{110}$.

$$\begin{array}{l|l} 5 & 16 \\ \hline 50 & 0{,}3125 \\ 48 & \\ \hline 20 & \\ 16 & \\ \hline 40 & \\ 32 & \\ \hline 80 & \\ 80 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 1 & 3 \\ \hline 10 & 0{,}3333\ldots \\ 9 & \\ \hline 10 & \\ 9 & \\ \hline 10 & \\ 9 & \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 29 & 110 \\ \hline 290 & 0{,}26363\ldots \\ 220 & \\ \hline 700 & \\ 660 & \\ \hline 400 & \\ 330 & \\ \hline 700 & \\ 660 & \\ \hline 400 & \\ 330 & \\ \hline 70 & \end{array}$$

Поэтому

$\frac{5}{16} = 0{,}3125$ (конечная десятичная дробь);

$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$ (бесконечная периодическая десятичная дробь с периодом 3);

$\frac{29}{110} = 0{,}26363\ldots$ (бесконечная периодическая десятичная дробь с периодом 63).

Период начинается либо сразу же после запятой (например, 0,333...), либо после нескольких десятичных знаков, не входящих в период (например, 0,26363...). Соответственно этому все периодические десятичные дроби разделяются на *простые* (такие, как 0,333...) и *смешанные* (такие, как 0,26363...).

Период бесконечной десятичной дроби, которая получается в результате деления целых чисел «уголком», может быть любым натуральным числом; исключается лишь случай, когда он составлен из одних девяток. (На строгом доказательстве этого факта мы останавливаться не будем.) Отметим еще, что любую конечную десятичную дробь можно рассматривать как бесконечную периодическую дробь с периодом 0. Например,

$$0{,}37 = 0{,}370000\ldots$$
$$6{,}14 = 6{,}140000\ldots$$

и т. д. Таким образом, ***любое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби, период которой отличен от 9.***

Верно и обратное утверждение: ***любая бесконечная периодическая дробь с периодом, отличным от 9, является рациональным числом.***

Доказательство этого утверждения мы отложим до § 148. А пока напомним лишь известные из арифметики правила обращения периодических десятичных дробей в обыкновенные. Для простоты мы предположим, что все рассматриваемые нами десятичные дроби положительны и меньше единицы.

Правило 1. *Для обращения простой периодической дроби в обыкновенную нужно поступить следующим образом: в числителе поставить период десятичной дроби, а в знаменателе — число, состоящее из девяток, взятых столько раз, сколько знаков в периоде десятичной дроби.*

Например,

$$0{,}333333\ldots = \frac{3}{9} = \frac{1}{3};$$

$$0{,}454545\ldots = \frac{45}{99} = \frac{5}{11};$$

$$0{,}243243243\ldots = \frac{243}{999} = \frac{9}{37}.$$

Правило 2. *Для обращения смешанной периодической десятичной дроби в обыкновенную нужно поступить следующим образом: в числителе взять число, стоящее в десятичной дроби до второго периода, минус число, стоящее в десятичной дроби до первого периода; в знаменателе нужно написать столько девяток, сколько цифр в периоде, и приписать к ним столько нулей, сколько цифр в исходной десятичной дроби от запятой до первого периода.*

Например,

$$0{,}453333\ldots = \frac{453-45}{900} = \frac{408}{900} = \frac{34}{75};$$

$$0{,}027454545\ldots = \frac{2745-27}{99000} = \frac{2718}{99000} = \frac{151}{5500}.$$

Заметим, что бесконечным периодическим дробям с периодом 9 также можно придать определенный смысл, если формально, используя правила 1 и 2, представить их в виде отношения двух целых чисел. Например, правило 1 дает

$$0{,}999999\ldots = \frac{9}{9} = 1.$$

Согласно правилу 2

$$0{,}499999\ldots = \frac{49-4}{90} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2} = 0{,}5;$$

$$0{,}679999\ldots = \frac{679-67}{900} = \frac{612}{900} = \frac{68}{100} = 0{,}68;$$

$$0{,}521999\ldots = \frac{5219-521}{9000} = \frac{4698}{9000} = \frac{522}{1000} = 0{,}522$$

и т. д. Все приведенные здесь бесконечные периодические десятичные дроби с периодом 9 оказались равными конечным десятичным дробям, которые получаются из данных десятичных дробей, если десятичный знак, стоящий перед первым периодом, увеличить на 1, а все последующие десятичные знаки отбросить. Можно доказать, что это относится не только к рассмотренным, но и к любым другим периодическим десятичным дробям с периодом 9. Отсюда вытекает, что любая конечная десятичная дробь может быть представлена в виде бесконечной периодической дроби двумя различными способами: с периодом 0 и с периодом 9. Например,

$$0{,}37 = 0{,}370000\ldots = 0{,}369999\ldots;$$

$$0{,}6 = 0{,}600000\ldots = 0{,}599999\ldots.$$

Это обстоятельство затрудняет изложение теории бесконечных периодических десятичных дробей. Вот почему в дальнейшем мы условимся совсем не говорить о периодических десятичных дробях с периодом 9, каждый раз заменяя их соответствующими периодическими дробями с периодом 0.

Итак, рациональные числа (и только они) представимы в виде бесконечных периодических десятичных дробей. А существуют ли бесконечные непериодические десятичные дроби? Вопрос этот решается положительно. Чтобы убедиться в этом, достаточно привести хотя бы один пример бесконечной непериодической десятичной дроби. Такой пример дает, в частности, дробь

$$0{,}101001000100001\ldots$$

(после запятой выписываются подряд числа 10, 100, 1000, 10000 и т. д.). Попробуйте доказать, что указанная десятичная дробь действительно является непериодической!

В следующих параграфах будут рассмотрены конкретные задачи, которые приводят нас к бесконечным непериодическим десятичным дробям.

Упражнения

300. Записать в виде бесконечных десятичных дробей:

а) $\frac{15}{8}$; б) $-\frac{3}{7}$; в) 0; г) $\frac{46}{27}$; д) $-\frac{9}{28}$.

301.* Данные периодические десятичные дроби обратить в обыкновенные:

а) 0,444444...; в) 4,636363...; д) —2,001777...;
б) 10,521521...; г) —0,573636...; е) 7,090909... .

302. Известно, что несократимая дробь $\frac{m}{n}$ представима в виде конечной десятичной дроби. На какие числа может делиться без остатка число n?

303.* Почему при делении целых чисел «уголком» получаются всегда периодические дроби?

304*. Доказать, что дробь

$$0{,}12345678910111213\ldots,$$

которая получается, если после нуля выписать подряд все натуральные числа, не является периодической.

Извлечение квадратных корней из рациональных чисел § 39

Как мы знаем, в множестве рациональных чисел всегда выполнимо действие умножения. В частности, определено произведение $\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}$. Это произведение, как известно, называется квадратом числа $\frac{m}{n}$ и обозначается $\left(\frac{m}{n}\right)^2$:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2=\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}.$$

Таким образом, если некоторое число является рациональным, то квадрат его есть также рациональное число. Это число, очевидно, положительно. А теперь поставим обратную задачу: всякое ли положительное рациональное число является квадратом некоторого рационального числа? На языке алгебраических уравнений эта задача может быть сформулирована следующим образом. Дано уравнение

$$x^2 = a,$$

где a — некоторое положительное р а ц и о н а л ь н о е число, а x — неизвестная величина. Спрашивается, всегда ли это уравнение имеет р а ц и о н а л ь н ы е корни? Ответ на этот вопрос оказывается отрицательным. Рациональное число a можно выбрать так, что уравнение $x^2 = a$ не будет иметь ни одного рационального корня. В этом нас убеждает, в частности, следующая теорема.

Т е о р е м а. ***Не существует рационального числа, квадрат которого равен 2.***

Доказательство будем проводить методом от противного. Предположим, что существует рациональное число $\frac{m}{n}$, квадрат которого равен 2:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2.$$

Если целые числа m и n имеют одинаковые множители, то дробь $\frac{m}{n}$ можно сократить. Поэтому с самого начала мы вправе предположить, что дробь $\frac{m}{n}$ несократима.

Из условия $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ вытекает, что

$$m^2 = 2n^2.$$

Поскольку число $2n^2$ четно, то число m^2 должно быть четным. Но тогда будет четным и число m. (Докажите это!) Таким образом, $m = 2k$, где k — некоторое целое число. Подставляя это выражение для m в формулу $m^2 = 2n^2$, получаем: $4k^2 = 2n^2$, откуда

$$n^2 = 2k^2.$$

В таком случае число n^2 будет четным; но тогда должно быть четным и число n. Выходит, что числа m и n четные. А это противоречит тому, что дробь $\frac{m}{n}$ несократима. Следовательно, наше исходное предположение о существовании дроби $\frac{m}{n}$, удовлетворяющей условию $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, неверно. Остается признать, что среди всех рациональных чисел нет такого, квадрат которого был бы равен 2. Поэтому уравнение

$$x^2 = 2$$

в множестве **р а ц и о н а л ь н ы х** чисел неразрешимо. Аналогичное заключение можно было бы сделать и о многих других уравнениях вида

$$x^2 = a,$$

где a — положительное целое число. Тем не менее в VIII классе мы неоднократно говорили о корнях таких уравнений. А положительному корню уравнения $x^2 = a$ мы даже дали специальное название «корень квадратный из числа a» и ввели для него специальное обозначение: $\sqrt{a}$.

Итак, к рациональным числам $\sqrt{2}$ не принадлежит. А как же в таком случае можно охарактеризовать $\sqrt{2}$? Чтобы ответить на этот вопрос, вспомним правило для извлечения квадратных корней. Применительно к числу 2 это правило дает:

$$\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
\hline
24 & 100 \\
4 & 96 \\
\hline
281 & 400 \\
1 & 281 \\
\hline
2824 & 11900 \\
4 & 11296 \\
\hline
28282 & 60400 \\
2 & 56564 \\
\hline
282841 & 383600 \\
1 & 282841 \\
\hline
 & 100759
\end{array}$$

Процесс извлечения корня в данном случае не может закончиться ни на каком шаге. В противном случае $\sqrt{2}$ был бы равен некоторой конечной десятичной дроби и потому был бы рациональным числом. А это противоречит доказанной выше теореме. Таким образом, при извлечении корня квадратного из 2 получается бесконечная десятичная дробь. Эта дробь не может быть периодической, иначе ее, как и всякую другую бесконечную периодическую дробь, можно было бы представить в виде отношения двух целых чисел. А это также находится в противоречии с доказанной выше теоремой. Таким образом, $\sqrt{2}$ можно рассматривать как ***бесконечную непериодическую десятичную дробь***.

Итак, к бесконечным непериодическим десятичным дробям нас приводит, например, действие извлечения корней из целых чисел.

В последующих параграфах мы рассмотрим еще одну задачу, которая, вообще говоря, никак не связана с извлечением корней, но которая также приводит нас к бесконечным непериодическим десятичным дробям.

Упражнения

305. Укажите несколько натуральных чисел, квадратные корни из которых были бы рациональными числами.

306. Докажите, что если корень квадратный из натурального числа представляет собой рациональное число, то это рациональное число является непременно целым.

307. Докажите, что уравнение $x^3 = 5$ в множестве рациональных чисел не имеет корней.

Соизмеримые и несоизмеримые отрезки — § 40

Отрезок Δ называется общей мерой отрезков Δ_1 и Δ_2, если он укладывается целое число раз в каждом из этих отрезков.

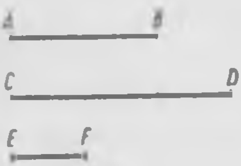


Рис. 54.

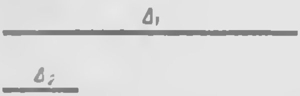


Рис. 55.

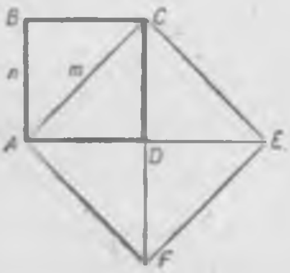


Рис. 56.

Например, отрезок EF, изображенный на рисунке 54, укладывается в AB два раза, а в CD — 3 раза. Поэтому он является общей мерой отрезков AB и CD. Аналогично этому, отрезок Δ_2, изображенный на рисунке 55, является общей мерой отрезков Δ_1 и Δ_2, поскольку в Δ_1 он укладывается 4 раза, а в Δ_2 (в самом себе) — один раз.

Любые ли два отрезка имеют общую меру? Ответ на этот вопрос будет дан несколькими строками ниже. А пока мы введем еще одно определение.

Два отрезка, имеющие общую меру, называются соизмеримыми, а не имеющие общей меры — несоизмеримыми.

Теперь вопрос о том, любые ли два отрезка имеют общую меру, можно перефразировать таким образом: любые ли два отрезка являются соизмеримыми? Следующая теорема дает отрицательный ответ на этот вопрос.

Теорема. ***Диагональ любого квадрата несоизмерима с его стороной.***

Доказательство будем проводить методом от противного. Предположим, что диагональ AC квадрата $ABCD$

(рис. 56) соизмерима с его стороной AB. Тогда существует общая мера этих отрезков, то есть отрезок, который в AB укладывается ровно n раз, а в AC ровно m раз. Если принять этот отрезок за единицу длины, то длина AB выразится числом n, а длина AC — числом m.

На диагонали AC построим новый квадрат $ACEF$, как показано на рисунке 56. Очевидно, что площадь этого квадрата вдвое больше площади квадрата $ABCD$:

$$S_{ACEF} = 2S_{ABCD},$$

но

$$S_{ABCD} = n^2, \text{ а } S_{ACEF} = m^2.$$

Поэтому

$$m^2 = 2n^2,$$

откуда

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2.$$

Но это равенство противоречит теореме, доказанной в предыдущем параграфе: «Не существует рационального числа, квадрат которого равен 2».

Следовательно, наше исходное предположение неверно. Остается признать, что диагональ любого квадрата несоизмерима с его стороной.

Теперь мы можем сделать два важных вывода.

1. ***Если отрезок CD соизмерим с единицей длины AB, то его длина выражается рациональным числом.***

Действительно, в силу того что отрезки AB и CD соизмеримы, найдется третий отрезок EF, который в AB укладывается ровно n раз, а в CD ровно m раз. Но в таком случае n-я часть отрезка AB должна укладываться в CD ровно m раз. Поэтому длина CD выражается рациональным числом $\frac{m}{n}$.

2. ***Если отрезок CD несоизмерим с единицей длины AB, то длина его не выражается никаким рациональным числом.***

Действительно, если бы длина отрезка CD выражалась некоторым рациональным числом, например $\frac{p}{q}$, то q-я доля отрезка AB укладывалась бы в AB q раз, а в CD p раз. Но в таком случае q-ю долю отрезка AB можно было бы считать общей мерой отрезков AB и CD. А это противоречит условию: отрезки AB и CD несоизмеримы.

Упражнения

308. Докажите, что если отрезки AB и CD соизмеримы, то n-я доля отрезка AB соизмерима с m-й долей отрезка CD (m и n — произвольные натуральные числа).

309. Докажите, что если отрезки AB и CD несоизмеримы, то n-я доля отрезка AB несоизмерима с m-й долей отрезка CD (m и n — произвольные натуральные числа).

310. Пусть Δ_1 и Δ_2 — два соизмеримых отрезка, причем отрезок Δ_1 длиннее отрезка Δ_2. Докажите, что в таком случае отрезки $\Delta_1 + \Delta_2$ и $\Delta_1 - \Delta_2$ будут также соизмеримыми.

Верно ли обратное утверждение?

311. Докажите, что в прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в 60°, несоизмерим с гипотенузой.

312. Докажите, что если отрезок AB соизмерим с отрезком CD, а отрезок CD соизмерим с отрезком EF, то отрезок AB соизмерим с отрезком EF.

313. Докажите, что если отрезок AB соизмерим с отрезком CD, но несоизмерим с отрезком EF, то отрезки CD и EF несоизмеримы.

Длина отрезка, несоизмеримого с единицей длины § 41

Вернемся к задаче измерения прямолинейных отрезков, частично уже рассмотренной нами в предыдущих параграфах. Пусть AB есть отрезок, принятый за единицу длины, а CD — измеряемый отрезок. Может представиться два случая:

1) отрезки AB и CD соизмеримы;

2) отрезки AB и CD несоизмеримы.

В первом случае длина отрезка CD выразится некоторым рациональным числом $\frac{m}{n}$. Во втором случае длина CD не может быть выражена никаким рациональным числом. Этот случай сейчас будет представлять для нас наибольший интерес. Его-то мы и рассмотрим. Один из важнейших выводов, к которому приводит рассмотрение этого случая, состоит в следующем: ***для измерения отрезков рациональных чисел не хватает***. Для того чтобы длина каждого отрезка выражалась некоторым числом, мы должны к уже известным нам рациональным числам добавить какие-то новые числа.

Как же представить себе эти новые числа?

Пусть отрезок CD несоизмерим с единицей длины — отрезком AB. Будем откладывать отрезок AB на отрезке CD, начиная от точки C (рис. 57). Предположим, что в результате двух последовательных откладываний получается некоторый «остаток» — отрезок $C'D$, который меньше отрезка AB. Тогда естественно считать, что длина CD приближенно выражается числом 2. Разделим единицу длины AB на 10 равных частей и одну такую часть будем откладывать на $C'D$, начиная от точки C'. Допустим, что после пяти таких откладываний получается «остаток» — отре-

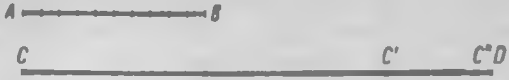


Рис. 57.

зок $C''D$, меньший, чем десятая доля AB. Тогда естественно считать, что длина CD приближенно выражается числом 2,5. После этого десятую долю AB разделим, в свою очередь, на 10 равных частей. В результате мы получим $\frac{1}{100}$ долю AB. Будем откладывать* ее на отрезке $C''D$, начиная от точки C''. Предположим, что после восьми таких последовательных откладываний получается «остаток» — отрезок $C'''D$, меньший, чем $\frac{1}{100}$ доля AB. Тогда естественно считать, что длина отрезка CD приближенно выражается числом 2,58. Описанный процесс можно было бы продолжать неограниченно. При этом каждый шаг давал бы нам все более и более точные, хотя и всегда приближенные, значения длины отрезка CD, например:

2;	2,583;
2,5;	2, 5833;
2, 58;	2, 58337

и т. д.

Почему мы уверены, что этот процесс будет продолжаться бесконечно? Если бы он оборвался на каком-нибудь шаге, например на третьем, то длина CD выразилась бы точно (а не приближенно) числом 2,58. Но в таком случае $\frac{1}{100}$ доля AB укладывалась бы в AB 100 раз, а в CD 258 раз. А это противоречит условию, согласно которому отрезки AB и CD несоизмеримы.

Теперь естественно считать, что длина отрезка CD выражается бесконечной десятичной дробью

$$2,58337\ldots\ .$$

Эта дробь не может быть периодической, иначе ее можно было бы представить в виде $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. Но тогда n-я доля AB укладывалась бы в AB n раз, а в CD m раз, что также противоречит несоизмеримости отрезков AB и CD.

Таким образом, длина отрезка CD выражается бесконечной непериодической десятичной дробью (2,58337...). К аналогичному выводу мы пришли бы, если вместо отрезка CD рассмотрели какой-нибудь другой отрезок, несоизмеримый с единицей длины AB.

---

* На рисунке 57 это уже не отмечено.

Итак, ***если некоторый отрезок CD несоизмерим с единицей длины, то его длина записывается в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.***

Упражнения

314. Может ли длина отрезка Δ при одной единице длины выражаться бесконечной периодической дробью, а при другой единице длины — бесконечной непериодической дробью? Приведите примеры.

315. Соизмерим ли отрезок CD с единицей длины AB, если длина CD выражается:

а) конечной десятичной дробью;

б) бесконечной периодической десятичной дробью;

в) бесконечной непериодической десятичной дробью?

Действительные числа § 42

В предыдущем параграфе мы убедились, что для измерения отрезков рациональных чисел не хватает. Напомним еще раз, что рациональные числа — это числа, представимые в виде бесконечных периодических десятичных дробей. А длины некоторых отрезков выражаются бесконечными непериодическими десятичными дробями. Таким образом, задача измерения отрезков приводит нас к необходимости расширить множество рациональных чисел путем присоединения к нему положительных бесконечных непериодических десятичных дробей. С такой же необходимостью мы столкнулись по существу и в § 39 при рассмотрении квадратных уравнений вида $x^2 = a$, где a — некоторое рациональное (даже натуральное) число. Потребности алгебры (например, выполнимость действия вычитания) указывают на то, что наряду с положительными целесообразно сразу же ввести в рассмотрение и отрицательные бесконечные непериодические десятичные дроби Поэтому в дальнейшем, говоря о бесконечных непериодических дробях, мы будем иметь в виду как положительные, так и отрицательные дроби.

Числа, которые можно представить в виде бесконечных непериодических десятичных дробей, называются иррациональными (то есть «нерациональными»).

Примером иррациональных чисел может служить любое из чисел $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и т. д. Иррациональность $\sqrt{2}$ мы фактически доказали в § 39, а иррациональность чисел $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ может быть установлена аналогично. Не следует, однако, думать, что иррациональные числа получаются только при извлечении корней. Как было показано в предыдущем параграфе, к иррациональным числам приводит и задача измерения отрезков.

А измерение отрезков, вообще говоря, не обязательно связано с извлечением корней.

В § 38, где об извлечении корней не говорилось ни слова, мы указали иррациональное число 0,101001000100001 ... .

Классический пример иррационального числа, происхождение которого также не имеет никакого отношения к извлечению корней, дает число $\pi = 3,1415926535...$ (отношение длины окружности к ее диаметру). К сожалению, мы не можем привести здесь других убедительных примеров. Но примеры такие существуют. Поэтому извлечение корней из целых чисел — далеко не единственный источник образования иррациональных чисел. Более того, среди всех иррациональных чисел в известном смысле больше как раз таких чисел, которые своим происхождением никак не связаны с извлечением корней. Однако вопрос этот довольно сложен; подробно останавливаться на нем мы здесь не можем.

Все рациональные и все иррациональные числа, взятые вместе, образуют множество *действительных*, или *вещественных*, чисел. К изучению этого множества мы приступим в следующем параграфе.

Некоторыми иррациональными числами математики пользовались еще в древние времена. К ним приводили многие задачи геометрии, которые не могли быть решены на базе существовавшей тогда арифметики. Однако в те времена иррациональные числа рассматривались не как равноправные с рациональными, а как какие-то исключительные числа, нарушающие гармонию арифметики и геометрии. По этой причине некоторые предлагали даже изгнать иррациональные числа из математики.

Строгая теория иррациональных чисел была построена лишь во второй половине XIX века. Основная заслуга в этом принадлежит немецким ученым Д е д е к и н д у (1831—1916), К а н т о р у (1845—1918) и В е й е р ш т р а с с у (1815—1897).

Упражнения

316. а) Любое ли рациональное число является действительным? А наоборот?

б) Любое ли иррациональное число является действительным? А наоборот?

317. Длина любого ли отрезка выражается:

а) рациональным числом;

б) иррациональным числом;

в) действительным числом?

Сравнение действительных чисел § 43

В этом параграфе, говоря о действительных числах, мы будем предполагать, что все они заданы нам в виде бесконечных десятичных дробей. Сначала рассмотрим лишь положительные числа.

*Два положительных действительных числа называются равными, если все соответственные десятичные знаки их одинаковы**. Если же одно из чисел содержит знак, не совпадающий с соответственным знаком другого числа, то числа называются *неравными*. Например, число 5,6389... не равно числу 3,6389...; число 0,146... не равно числу 0,148... и т. д.

Пусть α и β — не равные между собой положительные действительные числа**. Если целые части этих чисел различны, то бóльшим считается то из них, которое имеет бóльшую целую часть. Например,

$$5{,}6348... > 3{,}9901...;$$
$$1{,}0000... > 0{,}5777... .$$

Предположим теперь, что целые части неравных чисел α и β равны между собой. Тогда сравним их первые после запятой десятичные знаки. Если эти знаки различны, то бóльшим будет то из чисел α и β, которое содержит больший первый десятичный знак. Если же и эти знаки одинаковы, то сравним вторые после запятой знаки. Бóльшим из чисел α и β будет то, у которого второй после запятой десятичный знак больше. Если же и эти знаки одинаковы, то сравниваем третьи после запятой знаки и т. д. Рано или поздно мы придем к разным знакам: в противном случае числа α и β были бы равны друг другу.

Примеры.
$$37{,}1269... > 37{,}0394...;$$
$$110{,}0057... > 110{,}0049...;$$
$$0{,}3333... > 0{,}3332... .$$

Теперь покажем, как сравниваются между собой отрицательные действительные числа. *Два отрицательных действительных числа α и β называются равными, если равны их абсолютные значения*:

$$|\alpha| = |\beta|.$$

Если же $|\alpha| \neq |\beta|$, то отрицательные числа α и β называются *неравными*. Например:

$$-5{,}6389... \neq -3{,}6389...;$$
$$-0{,}146... \neq -0{,}147... .$$

Из двух отрицательных чисел бóльшим считается то, абсолютная величина которого меньше. Например:
$-37{,}1269... < -37{,}0394...$, так как $37{,}1269... > 37{,}0394...$;
$-0{,}3333... < -0{,}3332...$, поскольку $0{,}3333... > 0{,}3332...$.

---

* Бесконечные периодические десятичные дроби с периодом 9 мы исключаем из рассмотрения

** α и β — греческие буквы; читаются соответственно: альфа и бета.

Нам осталось установить, как сравниваются между собой действительные числа разных знаков. Будем считать, что *любое положительное число больше любого отрицательного числа и числа* 0, *а число* 0, *в свою очередь, больше любого отрицательного числа.*

Упражнения

318. Между данными числами поставить один из следующих трех знаков: $>$, $<$, $=$.

а) 5,63479 ... и 5,63497 ... ; г) 15,25 ... и $\frac{61}{4}$;

б) — 3,4833 ... и — 3,5829 ...; д) 0 и — 0,0003 ....

в) — 16,0010 ... и — 16,0001 ...;

319. Выяснить, какое из двух данных чисел больше и какое меньше (или же показать, что эти числа равны друг другу):

а) —71,7171 ... и 7,1717 ... ; б) $-\frac{3}{8}$ и —0,375 ... ;

в) $\frac{5}{9}$ и 0,5555 ... (одни пятерки); г) 0,3333 ... и $\frac{1}{3}$.

Геометрическое изображение действительных чисел § 44

Геометрически действительные числа, так же как и рациональные числа, изображаются точками прямой.

Пусть l — произвольная прямая, а O — некоторая ее точка (см. рис. 58 на стр. 98). Каждому положительному действительному числу α поставим в соответствие точку A, лежащую справа от O на расстоянии в α единиц длины.

Если, например, $\alpha = 2,1356...$, то

$$2 < \alpha < 3$$
$$2,1 < \alpha < 2,2$$
$$2,13 < \alpha < 2,14$$

и т. д. Очевидно, что точка A в этом случае должна находиться на прямой l правее точек, соответствующих числам

$$2;\ 2,1;\ 2,13;\ ...,$$

но левее точек, соответствующих числам

$$3;\ 2,2;\ 2,14;\ ... .$$

Можно показать, что эти условия определяют на прямой l единственную точку A, которую мы и рассматриваем как геометрический образ действительного числа $\alpha = 2,1356...$.

Аналогично, каждому отрицательному действительному числу β поставим в соответствие точку B, лежащую слева от O на расстоянии в $|\beta|$ единиц длины. Наконец, числу «нуль» поставим в соответствие точку O.

Рис. 58.

Рис. 59.

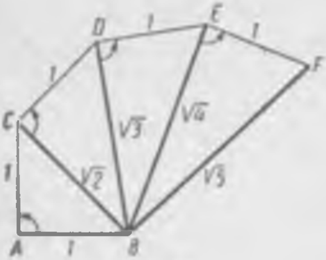


Рис. 60.

Так, число 1 изобразится на прямой l точкой A, находящейся справа от O на расстоянии в одну единицу длины (рис. 59), число $-\sqrt{2}$ — точкой B, лежащей слева от O на расстоянии в $\sqrt{2}$ единиц длины, и т. д.

Покажем, как на прямой l с помощью циркуля и линейки можно отыскать точки, соответствующие действительным числам $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$ и т. д. Для этого прежде всего покажем, как можно построить отрезки, длины которых выражаются этими числами. Пусть AB есть отрезок, принятый за единицу длины (рис. 60). В точке A восставим к этому отрезку перпендикуляр и отложим на нем отрезок AC, равный отрезку AB. Тогда, применяя теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику ABC, получим:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Следовательно, отрезок BC имеет длину $\sqrt{2}$. Теперь восставим перпендикуляр к отрезку BC в точке C и выберем на нем точку D так, чтобы отрезок CD был равен единице длины AB. Тогда из прямоугольного треугольника BCD найдем:

$$BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}.$$

Следовательно, отрезок BD имеет длину $\sqrt{3}$. Продолжая описанный процесс дальше, мы могли бы получить отрезки BE, BF, . . ., длины которых выражаются числами $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$ и т. д.

Теперь на прямой l легко найти те точки, которые служат геометрическим изображением чисел $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$ и т. д. Откладывая, например, справа от точки O отрезок BC (рис. 61), мы получим точку C', которая служит геометрическим изображением числа $\sqrt{2}$. Точно так же, откладывая справа от точки O отрезок BD, мы получим точку D', которая является геометрическим образом числа $\sqrt{3}$, и т. д.

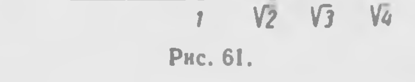


Рис. 61.

Не следует, однако, думать, что с помощью циркуля и линейки на числовой прямой l можно найти точку, соответствующую любому заданному действительному числу. Доказано, например, что, имея в своем распоряжении только циркуль и линейку, нельзя построить отрезок, длина которого выражается числом $\pi = 3{,}14\ \ldots$. Поэтому на числовой прямой l с помощью таких построений нельзя указать точку, соответствующую этому числу. Тем не менее такая точка существует.

Итак, каждому действительному числу α можно поставить в соответствие некоторую вполне определенную точку прямой l. Эта точка будет отстоять от начальной точки O на расстоянии в $|\alpha|$ единиц длины и находиться справа от O, если $\alpha > 0$, и слева от O, если $\alpha < 0$. Очевидно, что при этом двум неравным действительным числам будут соответствовать две различные точки прямой l. В самом деле, пусть числу α соответствует точка A, а числу β — точка B. Тогда, если $\alpha > \beta$, то A будет находиться правее B (рис. 62, *а*), если же $\alpha < \beta$, то A будет лежать левее B (рис. 62, *б*).

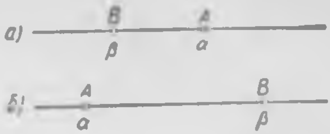


Рис. 62.

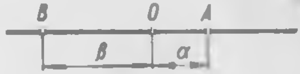


Рис. 63.

Говоря в § 37 о геометрическом изображении рациональных чисел, мы поставили вопрос: любую ли точку прямой можно рассматривать как геометрический образ некоторого р а ц и о н а л ь н о г о числа? Тогда мы не могли дать ответа на этот вопрос; теперь же мы можем ответить на него вполне определенно. На прямой есть точки, которые служат геометрическим изображением иррациональных чисел (например, $\sqrt{2}$). Поэтому не всякая точка прямой изображает рациональное число. Но в таком случае напрашивается другой вопрос: любую ли точку числовой прямой можно рассматривать как геометрический образ некоторого д е й с т в и т е л ь н о г о числа? Этот вопрос решается уже положительно.

В самом деле, пусть A — произвольная точка прямой l, лежащая справа от O (рис. 63). Длина отрезка OA выражается некоторым положительным действительным числом α (см. § 41). Поэтому точка A является геометрическим образом числа α. Аналогично устанавливается, что каждая точка B, лежащая слева от O, может рассматриваться как геометрический образ отрицательного действительного числа $-\beta$, где β — длина отрезка BO. Наконец, точка O служит геометрическим изображением числа нуль. Понятно, что две различные точки прямой l не могут быть геометрическим образом одного и того же действительного числа.

В силу указанных выше причин прямая, на которой указана в качестве «начальной» некоторая точка O (при заданной единице длины), называется *числовой прямой*.

В ы в о д. ***Множество всех действительных чисел и множество всех точек числовой прямой находятся во взаимно однозначном соответствии.***

Это означает, что каждому действительному числу соответствует одна, вполне определенная точка числовой прямой и, наоборот, каждой точке числовой прямой при таком соответствии отвечает одно, вполне определенное действительное число.

Упражнения

320. Выяснить, какая из двух точек находится на числовой прямой левее и какая правее, если эти точки соответствуют числам:

а) 1,454545... и 1,455454...; в) 0 и — 1,56673...;

б) — 12,0003... и — 12,0002...; г) 13,24... и 13,00....

321. Выяснить, какая из двух точек находится на числовой прямой дальше от начальной точки O, если эти точки соответствуют числам:

а) 5,2397... и 4,4996...; в) — 0,3567... и 0,3557... .

б) — 15,0001 и — 15,1000...;

322. В этом параграфе было показано, что для построения отрезка длиной в $\sqrt{n}$ с помощью циркуля и линейки можно поступить следующим образом: сначала построить отрезок длиной в $\sqrt{2}$, затем отрезок длиной в $\sqrt{3}$ и т. д., пока не дойдем до отрезка длиной в $\sqrt{n}$. Но при каждом фиксированном $n > 3$ этот процесс можно ускорить. Как бы, например, вы стали строить отрезок длиной в $\sqrt{10}$?

323*. Как с помощью циркуля и линейки найти на числовой прямой точку, соответствующую числу $\frac{1}{\alpha}$, если положение точки, соответствующей числу α, известно?

Десятичные приближения действительных чисел § 45

Пусть α есть некоторое положительное действительное число, представленное в виде бесконечной дроби. Вначале мы предположим, что эта дробь не является периодической с периодом 0. (Например, в качестве α не может выступать число 0,5 = = 0,5000... .) Тогда десятичные приближения числа α с *недостатком* определяются как числа, которые получаются в результате последовательного отбрасывания всех его цифр, стоящих после запятой, начиная с первой цифры, потом со второй, затем с третьей и т. д. Например, для числа $\sqrt{2} = 1,41421...$ такими приближениями будут:

$$1;\quad 1,4;\quad 1,41;\quad 1,414;\quad 1,4142;\quad 1,41421;\ \dots .$$

Если последнюю цифру каждого из десятичных приближений числа α увеличить на 1, то мы получим последовательные десятичные приближения числа α с *избытком*. Например, для числа $\sqrt{2}$ такими приближениями будут:

$$2;\quad 1,5;\quad 1,42;\quad 1,415;\quad 1,4143;\quad 1,41422;\ \dots .$$

Очевидно, что число α больше любого своего десятичного приближения с недостатком, но меньше любого своего десятичного приближения с избытком. Например, для числа $\sqrt{2}$

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$

$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$$

$$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$$

$$1{,}41421 < \sqrt{2} < 1{,}41422$$

и т.д.

Теперь предположим, что α есть периодическая десятичная дробь с периодом 0. Примером такого числа может служить число $1{,}47 = 1{,}4700\ldots$ Десятичные приближения этого числа с недостатком естественно определить как числа

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}47;\ 1{,}470;\ 1{,}4700;\ \ldots,$$

а десятичные приближения с избытком — как числа

$$2;\ 1{,}5;\ 1{,}47;\ 1{,}470;\ 1{,}4700;\ \ldots .$$

Вообще, пусть нулевой период числа α начинается с k-го десятичного знака после запятой (например, для числа $1{,}47 = 1{,}470000\ldots$ $k = 3$). Тогда его первые $k - 1$ десятичных приближений с недостатком и первые $k - 1$ десятичных приближений с избытком определяются так же, как и в случае, когда рассматриваемая дробь не является периодической с периодом 0. Все же остальные десятичные приближения считаются равными числу α. Так, для числа $0{,}373 = 0{,}37300\ldots$ десятичными приближениями будут:

с недостатком 0; 0,3; 0,37; 0,373; 0,3730; 0,37300; ...,
с избытком 1; 0,4; 0,38; 0,373; 0,3730; 0,37300; ...

Очевидно, что в этом случае число α не меньше любого своего десятичного приближения с недостатком и не больше любого своего десятичного приближения с избытком.

Мы показали, как составляются десятичные приближения (с недостатком и с избытком) для любых положительных действительных чисел. Аналогично можно определить десятичные приближения и для произвольных отрицательных чисел. Мы не будем приводить здесь общих определений; покажем лишь, как следует находить десятичные приближения отрицательных чисел на примере числа $-\sqrt{2} = -1{,}41421\ldots$.

Как мы знаем (см. § 43), из двух отрицательных чисел больше то, абсолютная величина которого меньше. Поэтому из полученных выше соотношений

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$$

$$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$$

$$1,41421 < \sqrt{2} < 1,41422$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

вытекает, что

$$-2 < -\sqrt{2} < -1$$

$$-1,5 < -\sqrt{2} < -1,4$$

$$-1,42 < -\sqrt{2} < -1,41$$

$$-1,415 < -\sqrt{2} < -1,414$$

$$-1,4143 < -\sqrt{2} < -1,4142$$

$$-1,41422 < -\sqrt{2} < -1,41421$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Числа, стоящие в левых частях этих неравенств, естественно назвать десятичными приближениями числа $-\sqrt{2}$ с недостатком, а числа, стоящие в правых частях, — десятичными приближениями числа $-\sqrt{2}$ с избытком. Очевидно, что число $-\sqrt{2}$ больше любого своего десятичного приближения с недостатком, но меньше любого своего десятичного приближения с избытком. Добавим, наконец, что для действительного числа 0 также можно построить десятичные приближения с недостатком и десятичные приближения с избытком. Каждое из таких приближений считается равным нулю.

Итак, с каждым действительным числом α можно связать две бесконечные последовательности чисел:

$$\alpha_1', \quad \alpha_2', \quad \alpha_3', \quad \alpha_4', \dots;$$

$$\alpha_1'', \quad \alpha_2'', \quad \alpha_3'', \quad \alpha_4'', \dots$$

Первая последовательность состоит из десятичных приближений числа α с недостатком, а вторая — из десятичных приближений числа α с избытком. При этом

$$a_1' < \alpha < a_1''$$
$$a_2' < \alpha < a_2''$$
$$a_3' < \alpha < a_3''$$
$$a_4' < \alpha < a_4''$$

и т. д.

Важно отметить, что каждое из десятичных приближений числа α является р а ц и о н а л ь н ы м числом, хотя само число α может быть и иррациональным.

Упражнения

324. Найти несколько первых десятичных приближений (с недостатком и с избытком) для следующих действительных чисел:

а) $\sqrt{3}$; в) $\frac{11}{7}$; д) 4; ж) $\frac{5}{8}$;

б) $-\sqrt{3}$; г) $-\frac{11}{7}$; е) -4; з) $-\frac{5}{8}$.

325. Все десятичные приближения действительного числа α с недостатком, начиная с некоторого, совпадают. Какое число α: рациональное или иррациональное?

326. Все десятичные приближения действительного числа α с недостатком различны. Можно ли утверждать, что число α иррационально? Ответ пояснить примерами.

Сложение действительных чисел § 45

Пока что мы умеем складывать друг с другом лишь р а ц и о н а л ь н ы е числа. Как мы знаем,

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml + nk}{nl}.$$

А вот какой смысл вкладывается в сумму двух чисел, из которых хотя бы одно иррационально, этого мы еще не знаем. Нам предстоит сейчас дать определение того, что понимается под суммой $\alpha + \beta$ двух произвольных д е й с т в и т е л ь н ы х чисел α и β.

Для примера рассмотрим числа $\frac{1}{3}$ и $\sqrt{2}$. Представим их в виде бесконечных десятичных дробей

$$\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots;$$
$$\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots.$$

Сначала сложим соответственные десятичные приближения данных чисел с недостатком. Эти приближения, как отмечалось в конце предыдущего параграфа, представляют собой р а ц и о н а л ь н ы е числа. А складывать такие числа мы уже умеем:

$$0 + 1 = 1$$
$$0{,}3 + 1{,}4 = 1{,}7$$
$$0{,}33 + 1{,}41 = 1{,}74$$
$$0{,}333 + 1{,}414 = 1{,}747$$
$$0{,}3333 + 1{,}4142 = 1{,}7475$$
$$0{,}33333 + 1{,}41421 = 1{,}74754$$

. . . .

Затем сложим соответственные десятичные приближения данных чисел с избытком:

$$1 + 2 = 3$$
$$0{,}4 + 1{,}5 = 1{,}9$$
$$0{,}34 + 1{,}42 = 1{,}76$$
$$0{,}334 + 1{,}415 = 1{,}749$$
$$0{,}3334 + 1{,}4143 = 1{,}7477$$
$$0{,}33334 + 1{,}41422 = 1{,}74756$$

. . . .

Можно доказать*, что существует и притом единственное действительное число γ**, которое больше всех сумм десятичных приближений чисел $\frac{1}{3}$ и $\sqrt{2}$ с недостатком, но меньше всех сумм десятичных приближений этих чисел с избытком:

$$1 < \gamma < 3$$
$$1{,}7 < \gamma < 1{,}9$$
$$1{,}74 < \gamma < 1{,}76$$
$$1{,}747 < \gamma < 1{,}749$$
$$1{,}7475 < \gamma < 1{,}7477$$
$$1{,}74754 < \gamma < 1{,}74756$$

. . . .

По определению это число γ и принимается за сумму чисел $\frac{1}{3}$ и $\sqrt{2}$:

$$\gamma = \frac{1}{3} + \sqrt{2}.$$

Очевидно, что $\gamma = 1{,}7475...$.

---

* Строгое доказательство этого факта выходит за пределы нашей программы и потому здесь не приводится.

** γ — греческая буква; читается: гамма.

Аналогично может быть определена и сумма любых других положительных действительных чисел, из которых хотя бы одно иррационально. Суть дела не изменится и в том случае, если одно из слагаемых, а может быть и оба, будут отрицательными.

Итак, *если числа* α *и* β *рациональны, то сумма их находится по правилу сложения рациональных чисел* (см. § 36).

Если же хотя бы одно из них иррационально, то суммой $\alpha+\beta$ *называется такое действительное число, которое больше всех сумм соответственных десятичных приближений этих чисел с недостатком, но меньше всех сумм соответственных десятичных приближений этих чисел с избытком.*

Определенное таким образом действие сложения подчиняется следующим двум законам:

1) коммутативному закону:

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha;$$

2) ассоциативному закону:

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma).$$

Доказывать этого мы не будем. Учащиеся могут сделать это самостоятельно. Отметим лишь, что при доказательстве придется использовать уже известный нам факт: сложение рациональных чисел подчинено коммутативному и ассоциативному законам (см. § 36).

Упражнения

327. Данные суммы представить в виде десятичных дробей, указав не менее трех верных знаков после запятой:

а) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; г) $\sqrt{2}+(-\sqrt{3})$; ж) $\frac{3}{4}+(-\sqrt{5})$;

б) $\sqrt{2}+\frac{5}{8}$; д) $\left(-\frac{1}{3}\right)+\sqrt{5}$; з) $\frac{1}{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

в) $(-\sqrt{2})+\sqrt{3}$; е) $\frac{11}{9}+(-\sqrt{5})$;

328. Найти несколько первых десятичных приближений (с недостатком и с избытком) для действительных чисел:

а) $\frac{1}{2}+\sqrt{7}$; б) $\sqrt{3}+\sqrt{7}$; в) $\sqrt{3}+(-\sqrt{7})$.

329. Исходя из определения суммы действительных чисел, доказать, что для любого числа α

$$\alpha+(-\alpha)=0.$$

330. Всегда ли сумма двух бесконечных непериодических дробей есть дробь непериодическая? Ответ пояснить примерами.

В этом параграфе мы покажем, как можно прийти к естественному определению произведения двух действительных чисел α и β, из которых хотя бы одно является иррациональным. При этом мы будем исходить из того, что умножение рациональных чисел нами уже изучено (см. § 36).

Сначала предположим, что числа α и β положительные. Пусть, например, $\alpha = \frac{1}{3}$, а $\beta = \sqrt{2}$. Представим эти числа в виде бесконечных десятичных дробей:

$$\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots; \qquad \sqrt{2} = 1{,}41421\ldots.$$

Перемножим соответственные десятичные приближения данных чисел с недостатком. Эти приближения представляют собой рациональные числа. А перемножать такие числа мы уже умеем:

$$0 \cdot 1 = 0$$
$$0{,}3 \cdot 1{,}4 = 0{,}42$$
$$0{,}33 \cdot 1{,}41 = 0{,}4653$$
$$0{,}333 \cdot 1{,}414 = 0{,}470862$$
$$0{,}3333 \cdot 1{,}4142 = 0{,}47135286$$
$$0{,}33333 \cdot 1{,}41421 = 0{,}4713986193$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Затем перемножим соответственные десятичные приближения данных чисел с избытком:

$$1 \cdot 2 = 2$$
$$0{,}4 \cdot 1{,}5 = 0{,}6$$
$$0{,}34 \cdot 1{,}42 = 0{,}4828$$
$$0{,}334 \cdot 1{,}415 = 0{,}47261$$
$$0{,}3334 \cdot 1{,}4143 = 0{,}47152762$$
$$0{,}33334 \cdot 1{,}41422 = 0{,}4714160948$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Можно доказать, что существует и притом единственное число γ, которое больше всех произведений десятичных приближений чисел $\frac{1}{3}$ и $\sqrt{2}$ с недостатком, но меньше всех произведений десятичных приближений этих чисел с избытком:

$$0 < \gamma < 2$$
$$0{,}42 < \gamma < 0{,}6$$
$$0{,}4653 < \gamma < 0{,}4828$$
$$0{,}470862 < \gamma < 0{,}47261$$
$$0{,}47135286 < \gamma < 0{,}47152762$$
$$0{,}4713986193 < \gamma < 0{,}4714160948$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

По определению это число γ и принимается за произведение чисел $\frac{1}{3}$ и $\sqrt{2}$:

$$\gamma = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}.$$

Очевидно, что $\gamma = 0{,}471\ldots$. Аналогично может быть определено и произведение любых других положительных действительных чисел, из которых хотя бы одно иррационально.

Теперь нужно рассмотреть случай, когда хотя бы один из сомножителей α и β отрицателен. Если отрицательными являются оба сомножителя α и β, то

$$\alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta|.$$

Если же один из сомножителей α и β положителен, а другой отрицателен, то

$$\alpha \cdot \beta = -|\alpha| \cdot |\beta|.$$

Например,

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (-\sqrt{2}) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} = 0{,}471\ldots ;$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \sqrt{2} = -\left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}\right) = -0{,}471\ldots .$$

Наконец, если хотя бы один из сомножителей равен нулю, то и произведение считается равным нулю. Например,

$$\sqrt{2} \cdot 0 = 0,$$

$$0 \cdot (-\sqrt{2}) = 0$$

и т. д.

Теперь мы можем дать общее определение произведения двух действительных чисел.

Если числа α и β рациональны, то произведение их находится по правилу умножения рациональных чисел (см. § 36).

Если хотя бы одно из чисел α и β иррационально и оба они положительны, то произведением их называется такое действительное число, которое больше всех произведений соответственных десятичных приближений этих чисел с недостатком, но меньше всех произведений соответственных десятичных приближений этих чисел с избытком.

Если оба числа α и β отрицательны, то

$$\alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta|.$$

Если одно из чисел α и β является положительным, а другое отрицательным, то

$$\alpha \cdot \beta = -(|\alpha| \cdot |\beta|).$$

Наконец, если хотя бы одно из чисел α и β равно нулю, то

$$\alpha \cdot \beta = 0.$$

Нетрудно показать, что определенное таким образом действие умножения подчиняется следующим законам:

1) коммутативному закону:

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha;$$

2) ассоциативному закону:

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma).$$

Кроме того, для любых действительных чисел α, β и γ выполняется соотношение

$$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma,$$

которое выражает дистрибутивный закон умножения относительно сложения.

Упражнения

331. Данные произведения представить в виде десятичных дробей, указав не менее двух верных знаков после запятой:

а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$; г) $\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{5})$; ж) $\frac{3}{4} (-\sqrt{6})$;

б) $\sqrt{2} \cdot \frac{5}{8}$; д) $\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \sqrt{2}$; з) $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$.

в) $(-\sqrt{2}) \cdot \sqrt{3}$; е) $\frac{11}{9} \cdot (-\sqrt{5})$;

332. Найти несколько первых десятичных приближений (с недостатком и с избытком) для действительных чисел:

а) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{7}$; б) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$; в) $\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{7})$.

333. Исходя из определения произведения действительных чисел, доказать, что для любого числа a

$$a \cdot 1 = a.$$

334. Всегда ли произведение двух бесконечных непериодических дробей представляет собой непериодическую дробь?

Основными алгебраическими действиями в множестве всех действительных чисел, так же как и в множестве всех рациональных чисел, являются сложение и умножение. Что же касается вычитания и деления, то эти действия определяются как обратные по отношению к действиям сложения и умножения.

1. Вычитание действительных чисел

Разностью $\alpha - \beta$ двух действительных чисел α и β называется такое число γ, которое в сумме с β дает α.

Другими словами, разность $\alpha - \beta$ определяется как корень уравнения

$$\beta + x = \alpha. \tag{1}$$

Как и в случае рациональных чисел (см. § 36), уравнение (1) всегда имеет и притом единственное решение. Таким образом, ***для любых действительных чисел α и β разность $\alpha - \beta$ существует и определена однозначно.***

Покажем, например, как могут быть найдены приближенные значения разности

$$\sqrt{2} - \frac{1}{3}.$$

Заменив в этом выражении число $\sqrt{2}$ его любым десятичным приближением с недостатком (1; 1,4; 1,41; 1,414; . . .), а число $\frac{1}{3}$ — его любым десятичным приближением с избытком (1; 0,4; 0,34; 0,334; . . .), мы получим, очевидно, приближенное значение разности $\sqrt{2} - \frac{1}{3}$ с недостатком. Наоборот, если в выражении $\sqrt{2} - \frac{1}{3}$ число $\sqrt{2}$ заменить его любым десятичным приближением с избытком (2; 1,5; 1,42; 1,415; . . .), а число $\frac{1}{3}$ — его любым десятичным приближением с недостатком (0; 0,3; 0,33; 0,333; . . .), то полученная разность будет, очевидно, представлять собой приближенное значение $\sqrt{2} - \frac{1}{3}$ с избытком. В частности,

$$1 - 1 < \sqrt{2} - \frac{1}{3} < 2 - 0,$$

или

$$0 < \sqrt{2} - \frac{1}{3} < 2.$$

Это слишком грубое неравенство. Для получения более точных данных о разности $\sqrt{2}-\frac{1}{3}$ возьмем другие приближения $\sqrt{2}$ и $\frac{1}{3}$:

$$1{,}4-0{,}4<\sqrt{2}-\frac{1}{3}<1{,}5-0{,}3,$$

или

$$1{,}0<\sqrt{2}-\frac{1}{3}<1{,}2.$$

Это неравенство дает уже гораздо больше информации о разности $\sqrt{2}-\frac{1}{3}$. Из него, в частности, вытекает, что с точностью до 0,1

$$\sqrt{2}-\frac{1}{3}\approx 1{,}1.$$

Если и такая точность нас не устраивает, мы можем продолжить наши рассуждения:

$$1{,}41-0{,}34<\sqrt{2}-\frac{1}{3}<1{,}42-0{,}33,$$

или

$$1{,}07<\sqrt{2}-\frac{1}{3}<1{,}09.$$

Отсюда, в частности, получаем, что с точностью до 0,01

$$\sqrt{2}-\frac{1}{3}\approx 1{,}08.$$

Описанный способ нахождения приближенных значений разности $\sqrt{2}-\frac{1}{3}$ можно было бы продолжать и дальше. При этом будут получаться все более и более точные значения этой разности. (Заметим, однако, что ни на каком шаге мы не можем получить точного значения этой разности. Почему?)

2. Деление действительных чисел

Частным $\alpha:\beta$ *от деления действительного числа* α *на действительное число* β *называется такое число* γ, *которое при умножении на* β *дает* α.

Другими словами, частное $\alpha:\beta$ определяется как корень уравнения

$$\beta\cdot x=\alpha. \qquad (2)$$

Можно доказать, что если $\beta\neq 0$, то уравнение (2) имеет и притом единственный корень. Если же $\beta=0$, то это уравнение либо вообще не имеет корней (при $\alpha\neq 0$), либо имеет бесконечно много корней (при $\alpha=0$); в последнем случае любое число является корнем уравнения (2). Поэтому, *если* $\beta\neq 0$, *то*

частное $\alpha:\beta$ существует и определено однозначно: при $\beta=0$ частное $\alpha:\beta$ не определено.

Покажем, например, как могут быть найдены приближенные значения частного $\alpha:\beta$, если $\alpha = 1{,}532\ldots$, а $\beta = 2{,}037\ldots$. Если в выражении $\alpha:\beta$, число α заменить его любым десятичным приближением с недостатком (1; 1,5; 1,53; 1,532; ...), а число β — его любым десятичным приближением с избытком (3; 2,1; 2,04; 2,038; ...), то полученное частное будет, очевидно, представлять собой приближенное значение $\alpha:\beta$ с недостатком. Наоборот, если в выражении $\alpha:\beta$ число α заменить любым его десятичным приближением с избытком (2; 1,6; 1,54; 1,533; ...), а число β — любым его десятичным приближением с недостатком (2; 2,0; 2,03; 2,037; ...), то полученное частное будет служить, очевидно, приближенным значением $\alpha:\beta$ с избытком.

В частности,

$$1{,}532 : 2{,}038 < \alpha:\beta < 1{,}533 : 2{,}037,$$

или

$$0{,}7516 < \alpha:\beta < 0{,}7526.$$

Это дает по меньшей мере два верных десятичных знака (после запятой) частного:

$$\alpha:\beta = 0{,}75\ldots.$$

Упражнения

335. Вычислить с точностью до 0,01:

а) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$; в) $\sqrt{6}-\frac{3}{8}$;

б) $\sqrt{5}-\frac{5}{6}$; г) $0{,}25-\sqrt{6}$.

336. Найти приближенные значения разности

$$1{,}7534\ldots - 0{,}6325\ldots$$

с точностью до 0,001.

337. Вычислить с точностью до 0,01:

а) $\frac{\sqrt{2}}{1{,}3657\ldots}$; б) $\frac{1}{3}:\sqrt{5}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{2}}$.

338. Найти приближенные значения частного

$$\frac{0{,}023\ldots}{0{,}041\ldots}$$

с точностью до:

а) 0,1; б) 0,01.

339. Доказать, что для любого действительного числа a, отличного от нуля,

$$a : a = 1.$$

340. Разность между действительным числом α и одним из его десятичных приближений есть число рациональное. Каким является само число α: рациональным или иррациональным?

341. Может ли частное от деления иррационального числа на какое-нибудь его десятичное приближение быть числом рациональным?

Задачи на повторение

342. Разрешимо ли уравнение

$$a + x = b$$

(a и b — заданные натуральные числа)
а) в множестве всех натуральных чисел;
б) в множестве всех положительных рациональных чисел;
в) в множестве всех целых чисел?

343. Разрешимо ли уравнение

$$ax = b$$

(a и b — заданные целые числа)
а) в множестве всех целых чисел;
б) в множестве всех рациональных чисел?

344. Может ли уравнение

$$\sqrt{m} + x = \sqrt{n}$$

(m и n — заданные натуральные числа)
а) иметь иррациональный корень;
б) иметь рациональный корень;
в) не иметь действительных корней?

345. Числа $\alpha + \beta$ и $\alpha - \beta$ рациональны. Будут ли рациональными числа α и β?

346. Если за единицу длины принять отрезок Δ_1, то длина отрезка AB выразится рациональным числом; если же в качестве единицы длины выбрать отрезок Δ_2, то длина отрезка AB выразится иррациональным числом. Докажите, что отрезки Δ_1 и Δ_2 несоизмеримы.

347. Может ли произведение двух периодических десятичных дробей быть дробью непериодической?

348. Методом от противного доказать, что сумма рационального числа с иррациональным числом есть число иррациональное.

Доказанное утверждение сформулировать в терминах бесконечных десятичных дробей (периодических и непериодических).

349. Может ли сумма двух иррациональных чисел быть числом рациональным? Ответ пояснить примерами.

350. Может ли произведение двух иррациональных чисел быть числом рациональным? Ответ пояснить примерами.

351. Может ли случиться так, что первые 10 степеней числа a

$$a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots,\ a^{10}$$

будут иррациональными, а следующие 10 степеней

$$a^{11},\ a^{12},\ a^{13},\ \ldots\ a^{20}$$

— рациональными?

352. Пусть a и b — некоторые рациональные числа. Докажите, что если $a+b\sqrt{2}\neq 0$, то и $a-b\sqrt{2}\neq 0$. Привести не менее двух различных способов доказательства.

353. Доказать, что числа $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ являются иррациональными.

КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

III

Выделение из квадратного трехчлена полного квадрата

§ 49

Квадратным трехчленом относительно переменной величины x называется выражение вида $ax^2 + bx + c$, где a, b и c — заданные числа, причем $a \neq 0$.

Преобразуем квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ следующим образом. Прежде всего вынесем за скобки коэффициент при x^2:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Затем выражение $\frac{b}{a}x$ представим в виде $2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x$ (удвоенное произведение числа $\frac{b}{2a}$ на число x):

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{c}{a}\right).$$

К выражению, стоящему в скобках, прибавим и вычтем из него число $\frac{b^2}{4a^2}$, являющееся квадратом числа $\frac{b}{2a}$. В результате получим:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right].$$

Замечая теперь, что $x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, получаем:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Итак,

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \qquad (1)$$

Преобразование квадратного трехчлена к виду (1) называется *выделением полного квадрата*. Проиллюстрируем это преобразование на некоторых частных примерах:

1) $-2x^2-4x+5=-2\left(x^2+2x-\frac{5}{2}\right)=$
$=-2\left[(x^2+2\cdot x\cdot 1+1)-1-\frac{5}{2}\right]=-2\left[(x+1)^2-\frac{7}{2}\right]=$
$=-2(x+1)^2+7.$

2) $\frac{x^2}{3}-5x+7=\frac{1}{3}(x^2-15x+21)=\frac{1}{3}\left[\left(x^2-2\cdot\frac{15}{2}\cdot x+\frac{225}{4}\right)-\right.$
$\left.-\frac{225}{4}+21\right]=\frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{15}{2}\right)^2-\frac{141}{4}\right]=\frac{1}{3}\left(x-\frac{15}{2}\right)^2-\frac{47}{4}.$

Упражнения

Выделить полные квадраты в следующих выражениях (№ 354—361):

354. $2x^2+4x-3.$

355. $\frac{1}{3}x^2-4x+16.$

356. $-5x^2+20x-13.$

357. $-0{,}5x-0{,}25x^2-2{,}25.$

358. $(x-2)(x-4).$

359. $ax^2-4a^2x+4a^3+3.$

360. $6a^2x-9a^3-ax^2+a-1.$

361. $(x+a)(x+b).$

362. Доказать, что квадратный трехчлен x^2+x+1 при всех значениях x принимает положительные значения.

363. Доказать, что квадратный трехчлен $-3x^2+12x-13$ при всех значениях x принимает отрицательные значения.

Квадратные уравнения § 50

Уравнения вида

$$ax^2+bx+c=0, \qquad (1)$$

где x — неизвестная величина, a, b, c — данные числа $(a\neq 0)$, называются квадратными.

Выделяя в левой части квадратного уравнения полный квадрат (см. формулу (1) § 49), получаем:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0,$$

или

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \qquad (2)$$

Очевидно, что уравнение (2) эквивалентно уравнению (1) (см. § 2). Уравнение (2) может иметь действительные корни только тогда, когда $\frac{b^2-4ac}{4a^2}\geqslant 0$, или $b^2-4ac\geqslant 0$ (поскольку $4a^2>0$).

Ввиду той особой роли, которую играет выражение $D = b^2-4ac$ при решении уравнения (1), этому выражению дано специальное название — *дискриминант* квадратного уравнения $ax^2+bx+c = 0$ (или дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$). Итак, ***если дискриминант квадратного уравнения отрицателен, то уравнение не имеет действительных корней.***

Если же $D = b^2 - 4ac > 0$, то из (2) получаем:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

или

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Если дискриминант квадратного уравнения неотрицателен, то это уравнение имеет действительные корни. Они записываются в виде дроби, в числителе которой стоит коэффициент уравнения при x, взятый с противоположным знаком, плюс-минус корень квадратный из дискриминанта, а в знаменателе — удвоенный коэффициент при x^2.

Если дискриминант квадратного уравнения положителен, то уравнение имеет два различных действительных корня:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \text{ и } x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

Если дискриминант квадратного уравнения равен нулю, то уравнение имеет один действительный корень:

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

(В этом случае иногда говорят, что уравнение имеет два равных корня: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$)

Примеры.

1) Для уравнения $2x^2-x-3 = 0$ дискриминант $D = (-1)^2-4\cdot 2\cdot(-3) = 25 > 0$. Уравнение имеет два различных корня:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{25}}{4} = \frac{3}{2},$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{25}}{4} = -1.$$

2) Для уравнения $3x^2-6x+3 = 0$ $D = (-6)^2-4\cdot 3\cdot 3 = 0$. Это уравнение имеет один действительный корень:

$$x = \frac{6}{2\cdot 3} = 1.$$

3) Для уравнения $5x^2+4x+7=0$ $D=4^2-4\cdot5\cdot7=-124<0$. Это уравнение не имеет действительных корней.

4) Выяснить, при каких значениях a квадратное уравнение $x^2+ax+1=0$:

а) имеет один корень;

б) имеет два разных корня;

в) вообще не имеет корней.

Дискриминант данного квадратного уравнения равен

$$D=a^2-4.$$

Если $|a|=2$, то $D=0$; в этом случае уравнение имеет один корень. Если $|a|>2$, то $D>0$; в этом случае уравнение имеет два разных корня. Наконец, если $|a|<2$, то данное уравнение не имеет корней.

Упражнения

Решить уравнения (№ 364—369):

364. $6x^2-x-1=0$.

365. $3x^2-5x+1=0$.

366. $x^2-x+1=0$.

367. $-x^2+8x-16=0$.

368. $2x^2-12x+12=0$.

369. $2x-x^2-6=0$.

370. Можно ли число 15 представить в виде суммы двух чисел так, чтобы их произведение было равно 70?

371. При каких значениях a уравнение

$$x^2-2ax+a(1+a)=0$$

а) имеет два различных корня;

б) имеет только один корень;

в) не имеет корней?

372. При каких значениях a уравнение

$$(1-a)x^2-4ax+4(1-a)=0$$

а) не имеет корней;

б) имеет не более одного корня;

в) имеет не менее одного корня?

373. При каком значении a уравнение $x^2+ax+1=0$ имеет единственный корень? Чему он равен?

374. В каких пределах заключено число a, если известно, что уравнения $x^2+x+a=0$ и $x^2+x-a=0$ имеют одинаковое число корней?

375. Что вы можете сказать о величине a, если уравнения $4a(x^2+x)=a-2{,}5$ и $x(x-1)=1{,}25-a$ имеют одинаковое число корней?

376. Поезд был задержан на станции на t *мин*. Чтобы наверстать потерянное время, машинист увеличил скорость на a *км/ч* и на следующем перегоне в b *км* ликвидировал опоздание. С какой скоростью поезд шел до задержки на станции?

377. Два подъемных крана, работая вместе, разгрузили баржу за t *ч*. За какое время может разгрузить баржу каждый кран в отдельности, если один из них тратит на это на a *ч* меньше другого?

378. Один из заводов выполняет некоторый заказ на 4 дня быстрее, чем другой. За какое время может выполнить заказ каждый завод, работая отдельно, если известно, что при совместной работе за 24 дня они выполнили заказ в 5 раз больший?

Решить уравнения (№ 379, 380).

(Обратите внимание на то, что в этих уравнениях неизвестное содержится в знаменателях дробей. Полученные корни необходимо будет проверить!)

379. $\frac{6}{x^2-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{2}{x-1}+1.$

380. $\frac{5}{x+a}-\frac{1}{a-x}=2+\frac{10a}{a^2-x^2}.$

381*. При каких значениях a уравнения

$$x^2+ax+1=0 \text{ и } x^2+x+a=0$$

имеют хотя бы один общий корень?

Частные виды квадратных уравнений § 51

В этом параграфе мы изучим некоторые наиболее важные частные виды квадратных уравнений. При этом каждый раз, не оговаривая это специально, мы будем предполагать, что дискриминант рассматриваемого квадратного уравнения неотрицателен.

1. Уравнение с «четным коэффициентом при x». Если в уравнении $ax^2+bx+c=0$ коэффициент при x имеет вид $b=2k$ (например, $b=4$, $b=2\sqrt{2}$ и т. д.), то формула для корней этого уравнения несколько упрощается. Подставив в соотношение

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

вместо b число $2k$, получим:

$$x=\frac{-2k\pm\sqrt{4k^2-4ac}}{2a}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}.$$

Таким образом, корни квадратного уравнения $ax^2+2kx+c=0$ можно записать в виде дроби, в числителе которой — половина коэффициента при x, взятого с противоположным знаком, плюс-минус корень квадратный из квадрата этой половины без произведения коэффициента при x^2 и свободного члена, а в знаменателе — коэффициент при x^2.

Например, чтобы решить уравнение

$$5x^2 - 16x + 3 = 0,$$

нет необходимости применять общую формулу

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

В данном случае следует отдать предпочтение доказанной выше формуле

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Используя ее, получаем:

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64-15}}{5} = \frac{8 \pm \sqrt{49}}{5} = \frac{8 \pm 7}{5};$$

$$x_1 = \frac{1}{5}; \qquad x_2 = 3.$$

2. Приведенное квадратное уравнение. Квадратное уравнение называется *приведенным*, если коэффициент при x^2 равен 1. Общий вид приведенного квадратного уравнения таков:

$$x^2 + px + q = 0, \tag{1}$$

где p и q — некоторые числа.

Полагая в общей формуле для корней квадратного уравнения

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a = 1$, $b = p$ и $c = q$, получим формулу для корней приведенного квадратного уравнения:

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2 - 4q}{4}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Таким образом,

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Корни приведенного квадратного уравнения равны половине коэффициента при x, взятого с противоположным знаком, плюс-минус корень квадратный из квадрата этой половины без свободного члена.

Пример. Пусть $x^2+4x-12=0$.

Тогда
$$x=-2\pm\sqrt{4+12}=-2\pm 4,$$
или
$$x_1=2;\qquad x_2=-6.$$

Замечание. Любое квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ можно свести к приведенному квадратному уравнению посредством деления на a:
$$ax^2+bx+c=0,\quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Упражнение

382. Решить уравнения, используя в каждом случае наиболее удобную формулу:

а) $3x^2-5x+2=0$;

б) $3x^2-20x-52=0$;

в) $x^2-10x+24=0$;

г) $x^2+7x-30=0$;

д) $5x^2+9x-14=0$;

е) $4x^2-x+10=0$.

Теорема Виета § 52

В § 51 мы получили следующие формулы для корней приведенного квадратного уравнения с неотрицательным дискриминантом:
$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},\quad x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$
Из них вытекает, что
$$x_1+x_2=-p,$$
$$x_1\cdot x_2=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\cdot\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right).$$
Произведение суммы двух чисел на их разность равно разности квадратов этих чисел. Поэтому
$$x_1\cdot x_2=\left(-\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)^2=q.$$
Итак,
$$\boldsymbol{x_1+x_2=-p,}$$
$$\boldsymbol{x_1\cdot x_2=q.}$$

Если приведенное квадратное уравнение имеет действительные корни, то сумма их равна коэффициенту при x, взятому с противоположным знаком, а произведение — свободному члену этого уравнения.

Это свойство корней приведенного квадратного уравнения носит название *теоремы Виета**.

П р и м е р. Для уравнения $x^2-7x-8=0$ $D=81>0$. Поэтому уравнение имеет два различных действительных корня x_1 и x_2. По теореме Виета

$$x_1+x_2=7, \quad x_1\cdot x_2=-8.$$

Предлагаем учащимся решить данное уравнение и убедиться в справедливости полученных нами соотношений.

Квадратное уравнение общего вида $ax^2+bx+c=0$ делением на a сводится к приведенному квадратному уравнению

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Если исходное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет действительные корни x_1 и x_2, то и уравнение $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ должно иметь те же самые корни x_1 и x_2. При этом по теореме Виета должно быть

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

П р и м е р. Уравнение $2x^2-2x-3=0$ имеет дискриминант $D=28>0$. Поэтому оно имеет два действительных корня x_1 и x_2, причем

$$x_1+x_2=-\frac{-2}{2}=1; \quad x_1\cdot x_2=\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}.$$

Предлагаем учащимся решить данное уравнение и убедиться в справедливости полученных соотношений.

В дальнейшем нам потребуется теорема, обратная теореме Виета. Формулируется она следующим образом.

Если существуют действительные числа x_1 и x_2 такие, что $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$, то эти числа (x_1 и x_2) являются корнями квадратного уравнения $x^2+px+q=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $x_1+x_2=-p$, то $x_2=-p-x_1$. Подставляя это выражение для x_2 в соотношение $x_1\cdot x_2=q$, получаем:

$$x_1\cdot(-p-x_1)=q, \qquad -px_1-x_1^2=q, \qquad x_1^2+px_1+q=0.$$

Но это означает, что число x_1 является корнем уравнения $x^2+px+q=0$. Аналогично доказывается, что корнем этого уравнения является и число x_2. Впрочем, это и так ясно: ведь числа x_1 и x_2 входят в формулировку нашей теоремы совершенно симметрично.

---

* В и е т (1540—1603) — французский математик.

Упражнения

383. (У с т н о.) Решить уравнения:

1) $x^2 - 3x + 2 = 0$;
2) $x^2 + 99x - 100 = 0$;
3) $x^2 + 548x - 549 = 0$;
4) $-x^2 + 6x - 5 = 0$;
5) $-x^2 - 7x + 8 = 0$;
6) $x^2 - 7x + 12 = 0$;
7) $3x^2 + x - 2 = 0$;
8) $x^2 - 5x + 6 = 0$.

384. Обозначим через x_1 и x_2 корни уравнения

$$x^2 - 7x + 10 = 0.$$

Не находя этих корней, определить:

а) $x_1^2 + x_2^2$;
б) $x_1^3 + x_2^3$;
в) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$;
г) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$;
д) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$.

385. То же, что и в задаче 384, сделать для уравнения

$$-3x^2 + x + 24 = 0.$$

386. При каких значениях x выражение $(x-1)(x+5)$ равно $(a-1)(a+5)$?

387. Доказать, что корни уравнения $ax^2+bx+a=0$ (если только они существуют) представляют собой взаимно обратные числа.

388. Определить число m так, чтобы уравнение

$$x^2 - 12x + m = 0$$

имело два действительных корня, один из которых больше другого на $2\sqrt{5}$.

389. Определить число a так, чтобы один из корней уравнения

$$4x^2 - 15x + 4a^3 = 0$$

был квадратом другого.

390. При каких значениях a уравнение

$$x^2 - 4x + a = 0$$

имеет

а) действительные корни;
б) действительные корни одного знака;
в) действительные корни разных знаков;
г) один корень нулевой, а другой — положительный;
д) один корень нулевой, а другой — отрицательный?

Используя теорему Виета, можно, не решая уравнения $x^2+px+q=0$, определить, какими будут его корни: положительными или отрицательными. Но при этом, конечно, нужно быть уверенным в том, что рассматриваемое уравнение имеет корни. Если же корней нет, то говорить о знаках корней не имеет смысла. Поэтому на протяжении всего этого параграфа мы будем предполагать, что рассматриваемое приведенное квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет корни, то есть дискриминант его неотрицателен.

1) Пусть $q>0$; тогда оба корня имеют одинаковые знаки, поскольку $x_1 \cdot x_2 = q > 0$. Если к тому же $p<0$, то $x_1+x_2 = -p > 0$ и, значит, оба корня положительны. Если $p>0$, то $x_1+x_2 = -p<0$ и тогда оба корня отрицательны. В случае, когда $p=0$, уравнение не будет иметь действительных корней, потому что сумма двух положительных или двух отрицательных чисел не может быть равна нулю.

2) Предположим теперь, что $q<0$. Тогда один из корней должен быть положительным, а другой — отрицательным, поскольку $x_1 \cdot x_2 = q < 0$. Если при этом $p>0$, то $x_1+x_2 = -p<0$ и, значит, абсолютная величина отрицательного корня больше положительного корня. Если же $p<0$, то $x_1+x_2=-p>0$. Это возможно только тогда, когда положительный корень больше абсолютной величины отрицательного корня. При $p=0$ $x_1+x_2=0$, откуда $x_1=-x_2$; в этом случае корни равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

3) Осталось рассмотреть случай, когда $q=0$. Тогда $x_1 \cdot x_2=0$, поэтому хотя бы один из корней равен нулю. Пусть для определенности $x_1=0$, тогда другой корень найдется из условия $x_1+x_2=-p$, откуда $x_2=-p$. Значит, в этом случае один корень равен нулю, а другой представляет собой число, противопо-

$q>0$			$q<0$			$q=0$
$p>0$	$p<0$	$p=0$	$p>0$	$p<0$	$p=0$	
$x_1<0$ $x_2<0$	$x_1>0$ $x_2>0$	Этот случай невозможен ввиду исходного предположения, что $D>0$	Корни разных знаков: $x_1<0$, $x_2>0$, $\lvert x_1\rvert > x_2$	Корни разных знаков: $x_1<0$, $x_2>0$, $\lvert x_1 \rvert < x_2$	Корни взаимно противоположные: $x_1=-x_2$	$x_1=0$ $x_2=-p$

ложное коэффициенту p. Если же и $p=0$, то уравнение имеет два равных корня: $x_1=x_2=0$.

Полученные результаты исследования знаков корней представлены в таблице на предыдущей странице.

Еще раз отметим, что приведенные здесь рассуждения верны лишь в предположении, что исследуемое уравнение имеет действительные корни, то есть его дискриминант неотрицателен.

Рассмотрим несколько примеров на исследование знаков корней квадратных уравнений.

1) $x^2-8x-9=0$. Дискриминант этого уравнения равен $D=64+36=100>0$. Поэтому уравнение имеет два различных действительных корня. Вследствие того что $x_1 \cdot x_2=-9$, корни должны иметь разные знаки, а так как $x_1+x_2=8$, то абсолютная величина отрицательного корня меньше положительного корня.

2) $x^2+7x+10=0$. Дискриминант этого уравнения равен $D=49-40=9>0$. Поэтому уравнение имеет два различных действительных корня. Так как $x_1 \cdot x_2=10>0$, то корни имеют одинаковые знаки. Кроме того, $x_1+x_2=-7$, значит, оба корня отрицательны.

3) $x^2-x+1=0$. Для данного уравнения

$$D=(-1)^2-4=-3<0.$$

Следовательно, это уравнение не имеет действительных корней.

Полученные выше результаты относятся лишь к *приведенным* квадратным уравнениям. Но подобные исследования можно провести и для любых квадратных уравнений $ax^2+bx+c=0$. Для этого сначала нужно посредством деления на a привести данное уравнение к приведенному квадратному уравнению $x^2+\frac{b}{a}x+$ $+\frac{c}{a}=0$, а затем для этого уравнения провести описанные выше рассуждения.

Пусть, например, нужно исследовать знаки корней уравнения $-3x^2+5x-2=0$. Дискриминант этого уравнения равен $D=25-24=1>0$. Поэтому оно имеет два различных действительных корня.

Разделив обе части уравнения на -3, получим: $x^2-\frac{5}{3}x+$ $+\frac{2}{3}=0$. Отсюда видно, что корни данного уравнения имеют одинаковые знаки, так как $x_1 \cdot x_2=\frac{2}{3}>0$. Кроме того, $x_1+x_2=$ $=\frac{5}{3}>0$. Следовательно, оба корня положительны.

Упражнения

Не решая данных уравнений (№ 391—400), определить знаки их корней:

391. $x^2-4x+3=0$.
392. $x^2-6x+5=0$.
393. $x^2-x-42=0$.
394. $x^2-x-6=0$.
395. $x^2+x+1=0$.
396. $6x^2-x-1=0$.
397. $-20x^2-3x+2=0$.
398. $x^2-6x+10=0$.
399. $-3x^2+17=0$.
400. $-5x^2+x-7=0$.

401. При каких значениях a корни уравнения

$$x^2+(1-a)x-a=0$$

имеют одинаковые знаки и при каких — разные?

402. При каких значениях a корни уравнения

$$x^2+(a+6)x+(2a-1)(7-a)=0$$

имеют одинаковые знаки и при каких — разные?

Разложение квадратного трехчлена на линейные множители § 54

В этом параграфе мы рассмотрим следующий вопрос: в каком случае квадратный трехчлен ax^2+bx+c можно представить в виде произведения

$$(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)$$

двух линейных относительно x множителей с действительными коэффициентами a_1, b_1, a_2, b_2 $(a_1\neq 0,\ a_2\neq 0)$.

1. Предположим, что данный квадратный трехчлен ax^2+bx+c представим в виде

$$ax^2+bx+c=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2). \qquad (1)$$

Правая часть формулы (1) обращается в нуль при $x=-\frac{b_1}{a_1}$ и $x=-\frac{b_2}{a_2}$ (a_1 и a_2 по условию не равны нулю). Но в таком случае числа $-\frac{b_1}{a_1}$ и $-\frac{b_2}{a_2}$ являются корнями уравнения

$$ax^2+bx+c=0.$$

Следовательно, дискриминант квадратного трехчлена ax^2+bx+c должен быть неотрицательным.

2. Обратно, предположим, что дискриминант $D=b^2-4ac$ квадратного трехчлена ax^2+bx+c неотрицателен. Тогда этот

трехчлен имеет действительные корни x_1 и x_2. Используя теорему Виета, получаем:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right] =$$
$$= a\left[(x^2 - x_1x) - (x_2x - x_1x_2)\right] = a\left[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)\right] =$$
$$= a(x - x_1)(x - x_2).$$

Итак,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \tag{2}$$

где x_1 и x_2 — корни трехчлена ax^2+bx+c. Коэффициент a можно отнести к любому из двух линейных множителей, например,

$$a(x - x_1)(x - x_2) = (ax - ax_1)(x - x_2).$$

Но это означает, что в рассматриваемом случае квадратный трехчлен ax^2+bx+c представим в виде произведения двухлинейных множителей с действительными коэффициентами.

Объединяя результаты, полученные в пунктах 1 и 2, мы приходим к следующей теореме.

Теорема. ***Квадратный трехчлен ax^2+bx+c тогда и только тогда можно представить в виде произведения двух линейных множителей с действительными коэффициентами***

$$ax^2 + bx + c = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2),$$

когда дискриминант этого квадратного трехчлена неотрицателен (то есть когда этот трехчлен имеет действительные корни).

Пример 1. Разложить на линейные множители $6x^2-x-1$.

Корни этого квадратного трехчлена равны $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = -\frac{1}{3}$. Поэтому по формуле (2)

$$6x^2 - x - 1 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = (2x - 1)(3x + 1).$$

Пример 2. Разложить на линейные множители x^2+x+1.

Дискриминант этого квадратного трехчлена отрицателен:

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0.$$

Поэтому данный квадратный трехчлен на линейные множители с действительными коэффициентами не раскладывается.

Упражнения

Разложить на линейные множители следующие выражения (№ 403—406):

403. $6x^2 - 7x + 2$.

404. $2x^2 - 7ax + 6a^2$.

405. $x^2 - x + 1$.

406. $x^2 - 3ax + 2a^2 - ab - b^2$.

Сократить дроби (№ 407, 408):

407. $\frac{15x^2 - 8bx + b^2}{12x^2 - bx - b^2}$. 408. $\frac{12a^2 - a - 1}{3a^2 + 5a - 2}$.

Решить уравнения:

409. $\frac{x}{x - 10} - \frac{8}{x - 6} = \frac{4x}{x^2 - 16x + 60}$.

410*. $\frac{x}{54(x - 1)} - \frac{1}{(a + 1)(a + x)} = \frac{1}{x^2 + (a - 1)x - a}$.

Составление квадратного уравнения по заданным корням § 55

Предположим, что нам нужно составить квадратное уравнение, корнями которого были бы числа x_1 и x_2. Очевидно, что в качестве искомого уравнения можно выбрать уравнение

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0, \qquad (1)$$

где a — любое отличное от нуля действительное число. С другой стороны, как было показано в § 54, каждое квадратное уравнение с корнями x_1 и x_2 можно записать в виде (1).

Таким образом, формула (1) полностью решает поставленную выше задачу. Из всех квадратных уравнений корни x_1 и x_2 имеют уравнения вида (1) и только они.

Пример. Составить квадратное уравнение, корни которого равны 1 и —2.

Ответ. Корни 1 и —2 имеют все квадратные уравнения вида

$$a(x - 1)(x + 2) = 0,$$

или

$$ax^2 + ax - 2a = 0,$$

где a — любое отличное от нуля действительное число. Например, при $a = 1$ получается уравнение

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Упражнения

411. Составить квадратное уравнение, корнями которого были бы числа:

а) 2 и —3; б) —1 и —5; в) $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$; г) $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{3}$.

412. Составить квадратное уравнение с целыми коэффициентами так, чтобы его корни были равны:

а) $-\frac{1}{5}$ и $\frac{2}{3}$; б) $\frac{4}{7}$ и 5; в) $-\frac{3}{2}$ и $\frac{2}{9}$; г) $-\frac{3}{10}$ и $-\frac{2}{5}$.

трехчлен имеет действительные корни x_1 и x_2. Используя теорему Виета, получаем:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] =$$
$$= a[(x^2 - x_1x) - (x_2x - x_1x_2)] = a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] =$$
$$= a(x - x_1)(x - x_2).$$

Итак,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \qquad (2)$$

где x_1 и x_2 — корни трехчлена ax^2+bx+c. Коэффициент a можно отнести к любому из двух линейных множителей, например,

$$a(x - x_1)(x - x_2) = (ax - ax_1)(x - x_2).$$

Но это означает, что в рассматриваемом случае квадратный трехчлен ax^2+bx+c представим в виде произведения двух линейных множителей с действительными коэффициентами.

Объединяя результаты, полученные в пунктах 1 и 2, мы приходим к следующей теореме.

Теорема. ***Квадратный трехчлен ax^2+bx+c тогда и только тогда можно представить в виде произведения двух линейных множителей с действительными коэффициентами***

$$ax^2 + bx + c = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2),$$

когда дискриминант этого квадратного трехчлена неотрицателен (то есть когда этот трехчлен имеет действительные корни).

Пример 1. Разложить на линейные множители $6x^2-x-1$.

Корни этого квадратного трехчлена равны $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = -\frac{1}{3}$. Поэтому по формуле (2)

$$6x^2 - x - 1 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = (2x - 1)(3x + 1).$$

Пример 2. Разложить на линейные множители x^2+x+1. Дискриминант этого квадратного трехчлена отрицателен:

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0.$$

Поэтому данный квадратный трехчлен на линейные множители с действительными коэффициентами не раскладывается.

Упражнения

Разложить на линейные множители следующие выражения (№ 403—406):

403. $6x^2 - 7x + 2$. **405.** $x^2 - x + 1$.

404. $2x^2 - 7ax + 6a^2$. **406.** $x^2 - 3ax + 2a^2 - ab - b^2$.

Сократить дроби (№ 407, 408):

407. $\frac{15x^2-8bx+b^2}{12x^2-bx-b^2}$. 408. $\frac{12a^2-a-1}{3a^2+5a-2}$.

Решить уравнения:

409. $\frac{x}{x-10}-\frac{8}{x-6}=\frac{4x}{x^2-16x+60}$.

410*. $\frac{x}{54(x-1)}-\frac{1}{(a+1)(a+x)}=\frac{1}{x^2+(a-1)x-a}$.

Составление квадратного уравнения по заданным корням § 55

Предположим, что нам нужно составить квадратное уравнение, корнями которого были бы числа x_1 и x_2. Очевидно, что в качестве искомого уравнения можно выбрать уравнение

$$a(x-x_1)(x-x_2)=0, \qquad (1)$$

где a — любое отличное от нуля действительное число. С другой стороны, как было показано в § 54, каждое квадратное уравнение с корнями x_1 и x_2 можно записать в виде (1).

Таким образом, формула (1) полностью решает поставленную выше задачу. Из всех квадратных уравнений корни x_1 и x_2 имеют уравнения вида (1) и только они.

Пример. Составить квадратное уравнение, корни которого равны 1 и —2.

Ответ. Корни 1 и —2 имеют все квадратные уравнения вида

$$a(x-1)(x+2)=0,$$

или

$$ax^2+ax-2a=0,$$

где a — любое отличное от нуля действительное число. Например, при $a=1$ получается уравнение

$$x^2+x-2=0.$$

Упражнения

411. Составить квадратное уравнение, корнями которого были бы числа:

а) 2 и —3; б) —1 и —5; в) $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$; г) $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{3}$.

412. Составить квадратное уравнение с целыми коэффициентами так, чтобы его корни были равны:

а) $-\frac{1}{5}$ и $\frac{2}{3}$; б) $\frac{4}{7}$ и 5; в) $-\frac{3}{2}$ и $\frac{2}{9}$; г) $\frac{3}{10}$ и $-\frac{2}{5}$.

413. Составить квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корни которого равны $\frac{5}{7}$ и $-\frac{1}{2}$, а сумма всех коэффициентов равна 36.

414. Могут ли корнями квадратного уравнения с натуральными коэффициентами быть числа $\frac{6}{5}$ и $-\frac{1}{7}$?

415. Составить квадратное уравнение с целыми коэффициентами, если известно, что один из его корней равен:

а) $2+\sqrt{3}$; б) $3-\sqrt{2}$.

Биквадратные уравнения § 56

Биквадратными называются уравнения вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \tag{1}$$

где a, b и c — заданные числа, причем $a \neq 0$.

Решение таких уравнений сводится к решению квадратных уравнений. Действительно, полагая в (1) $y = x^2$, получаем:

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Найдя из этого уравнения y и учитывая, что $y = x^2$, легко получить и x.

Пример. Решить уравнение

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0.$$

Полагая $y = x^2$, получаем:

$$y^2 - 5y - 36 = 0,$$

откуда $y_1 = -4$, $y_2 = 9$. Поскольку y может принимать только неотрицательные значения (ведь $y = x^2$), первый из этих корней является «посторонним». Следовательно, $x^2=9$, откуда $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

Подобным способом можно решать и более широкий круг уравнений, а именно уравнения вида

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0,$$

где n — любое натуральное число. Полагая здесь

$$y = x^n,$$

мы приходим к квадратному уравнению

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Пример. Решить уравнение

$$x^6 - 7x^3 - 8 = 0.$$

Полагая $y = x^3$, получаем:

$$y^2 - 7y - 8 = 0.$$

откуда

$$y_1 = -1, \quad y_2 = 8.$$

Вспоминая, что $y = x^3$, получаем следующие два корня данного уравнения: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

График квадратной функции § 57

В этом параграфе мы покажем, как строится график квадратной функции $y = ax^2 + bx + c$. Наше рассмотрение придется разбить на ряд отдельных этапов.

1. **График функции $y = x^2$.** Этот график строится «по точкам». Составим следующую таблицу значений функции:

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	...
$y = x^2$	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9	...

Отметим соответствующие точки на плоскости координат и соединим их плавной кривой (рис. 64). Эта кривая называется *параболой*. На рисунке 64 парабола $y = x^2$ начерчена лишь при $-3 < x < 3$. При $|x| > 3$ она уходит (и притом весьма круто) все выше и выше.

Парабола $y = x^2$ обладает следующими основными свойствами.

1) Она лежит целиком в верхней полуплоскости. Это соответствует тому, что функция $y = x^2$ принимает только неотрицательные значения. В начале координат парабола касается оси абсцисс. Это самая низкая точка графика; она называется *вершиной* параболы.

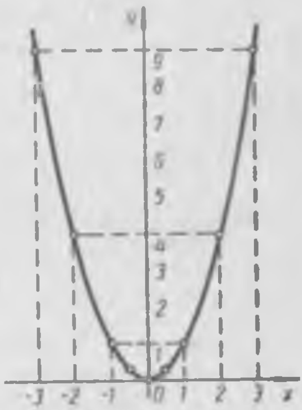


Рис. 64.

2) Парабола симметрична относительно оси ординат. Если перегнуть рисунок 64 по оси y, то левая и правая части параболы совместятся. Это служит графической иллюстрацией того, что функция $y = x^2$ не меняет своих значений при изменении знака у аргумента:

$$(-x)^2 = x^2.$$

Такие функции называются *четными*.

2. **График функции $y = ax^2$.** График функции $y = ax^2$, так же как и график функции $y = x^2$, легко строится «по точкам».

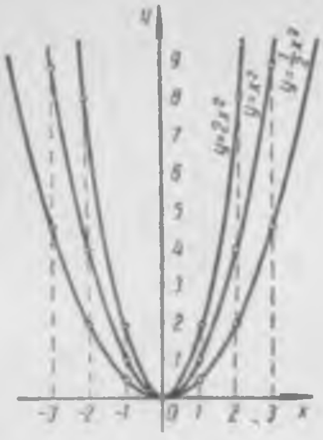


Рис. 65.

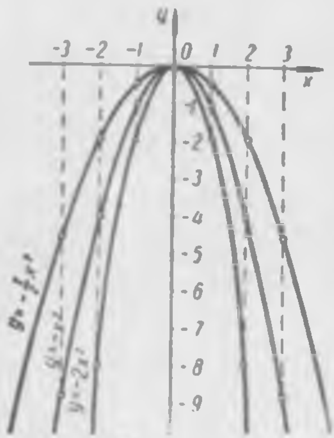


Рис. 66.

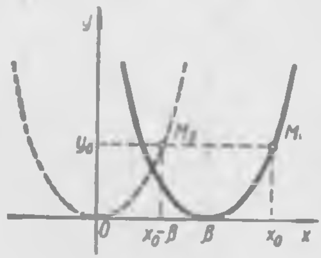


Рис. 67.

Сначала рассмотрим случай, когда $\alpha>0$. На рисунке 65 представлены графики функций $y=\alpha x^2$ при $\alpha = \frac{1}{2}$; 1; 2. Во всех этих случаях получаются кривые, симметричные относительно оси ординат и расположенные целиком в верхней полуплоскости. Каждая из этих кривых направлена вверх. Эти кривые, так же как и кривая $y=x^2$, называются параболами. Начало координат является их общей вершиной, а ось ординат — их общей осью симметрии. Из рисунка 65 видно, что чем больше α, тем круче ветви параболы $y=\alpha x^2$; чем меньше α, тем они положе.

Теперь рассмотрим случай, когда $\alpha < 0$. На рисунке 66 представлены кривые $y = \alpha x^2$ при $\alpha = -\frac{1}{2}$; -1; -2. Эти направленные вниз кривые также называются параболами. Общая вершина — начало координат — является их наивысшей точкой. Ось ординат для каждой из этих кривых служит осью симметрии. Чем больше абсолютная величина α, тем круче ветви параболы; чем она меньше, тем положе ветви параболы.

3. **График функции $y = \alpha(x-\beta)^2$.** Сравним между собой две функции: $y_1=\alpha(x-\beta)^2$ и $y_2=\alpha x^2$, где $\beta>0$. Пусть M_1 — произвольная точка графика первой функции (рис. 67). Тогда ее координаты (x_0, y_0) связаны соотношением

$$y_0 = \alpha(x_0 - \beta)^2.$$

Но это соотношение показывает, что точка M_2 с координатами $(x_0 - \beta, y_0)$ должна принадлежать графику второй функции. Значит, каждая точка кривой $y=\alpha(x-\beta)^2$ получается из соответствующей точки кривой $y=\alpha x^2$ (см. рис. 67) посредством переноса (или смещения) вправо по направлению оси x на расстояние β. Поэтому и вся ***кривая $y = \alpha(x - \beta)^2$ получается посредством переноса кривой $y = \alpha x^2$ вправо на β.***

Например, кривая $y=2(x-1)^2$ получается из кривой $y=2x^2$, если последнюю сместить на 1 вправо (рис. 68); кривая $y=-0,5(x-3)^2$ получается смещением кривой $y=-0,5x^2$ вправо на 3 единицы (рис. 69).

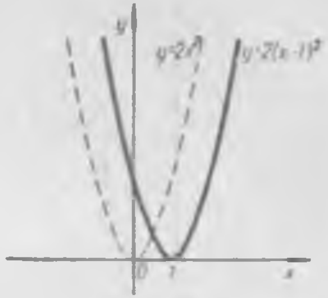


Рис. 68.

Вершиной параболы $y = \alpha x^2$ является точка с координатами (0, 0), а осью симметрии — прямая $x = 0$. При смещении вправо по направлению оси x на расстояние β точка с координатами (0, 0) переходит в точку с координатами (β, 0), а прямая $x = 0$ — в прямую $x=\beta$ (рис. 70). Поэтому вершиной параболы $y=\alpha(x-\beta)^2$ будет точка с координатами (β, 0), а осью симметрии — прямая $x = \beta$.

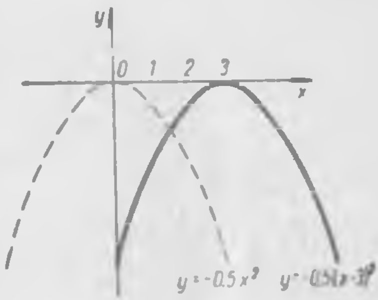


Рис. 69.

Парабола $y=\alpha x^2$ направлена вверх при $\alpha>0$ и вниз при $\alpha<0$. Поэтому такое же направление будет иметь и парабола $y = \alpha(x - \beta)^2$.

Итак, графиком функции $y = \alpha(x-\beta)^2$ является парабола, направленная вверх, если $\alpha>0$, и вниз, если $\alpha<0$. Вершиной этой параболы является точка с координатами (β, 0), а осью симметрии — прямая $x = \beta$.

Точно так же может быть построен и график функции $y = \alpha(x+\beta)^2$, где $\beta>0$. Он представляет собой параболу, которая получается посредством смещения параболы $y = \alpha x^2$ *влево* на β. Эта парабола направлена вверх, если $\alpha>0$ (рис. 71а), и вниз, если $\alpha<0$ (рис. 71б). Вершина ее находится в точке с координатами

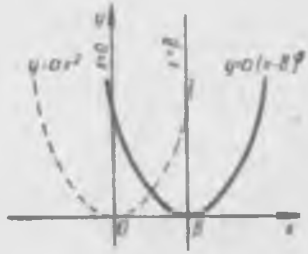


Рис. 70.

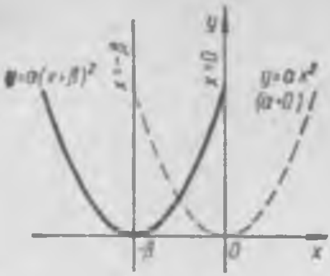


Рис. 71 а.

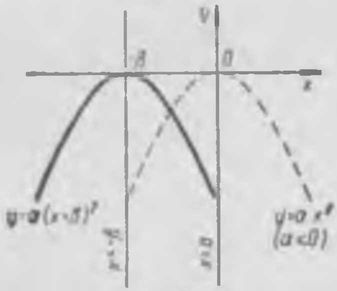


Рис. 71 б.

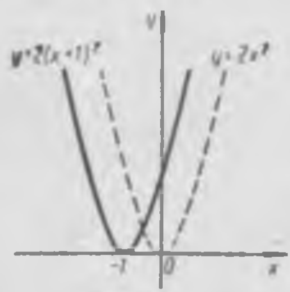


Рис. 72.

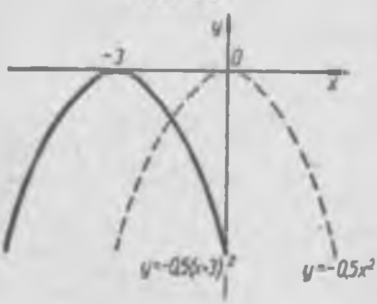


Рис. 73.

$(-\beta,\ 0)$; осью симметрии служит прямая $x=-\beta$.

На рисунке 72 вы видите график функции $y=2(x+1)^2$. Он получен посредством параллельного переноса параболы $y=2x^2$ влево на 1. График функции $y=-0{,}5(x+3)^2$ (рис. 73) получен посредством параллельного переноса параболы $y=-0{,}5x^2$ влево на 3.

4. **График функции $y=\alpha(x-\beta)^2+\gamma$.** Этот график получается посредством смещения параболы $y=\alpha(x-\beta)^2$ по направлению оси y вверх на расстояние γ, если $\gamma>0$, и вниз на расстояние $-\gamma$, если $\gamma<0$. В результате смещения получается парабола с вершиной в точке, координаты которой равны (β, γ). Осью симметрии такой параболы служит прямая $x=\beta$.

При смещении вверх или вниз парабола $y=\alpha(x-\beta)^2$ не меняет своего направления. Поэтому параболы $y=\alpha(x-\beta)^2+\gamma$ и $y=\alpha(x-\beta)^2$ имеют одно и то же направление: при $\alpha>0$ — вверх, а при $\alpha<0$ — вниз.

В качестве примера на рисунке 74 представлен график функции $y=-0{,}5(x+3)^2+1$, который получается смещением графика $y=-0{,}5(x+3)^2$ вверх на 1. На рисунке 75 вы видите график функции $y=2(x-1)^2-3$, полученный из графика $y=2(x-1)^2$ смещением вниз на 3 по оси симметрии.

5. **График функции $y=ax^2+bx+c$** Как отмечалось в § 49, квадратный трехчлен ax^2+bx+c представим в виде

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

Последнее выражение имеет вид $a(x-\beta)^2+\gamma$, где

$$\alpha = a, \qquad \beta = -\frac{b}{2a},$$

$$\gamma = -\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Поэтому ***графиком функции $y=ax^2+bx+c$ является парабола с вершиной в точке $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$. Осью симметрии этой параболы является прямая $x=-\frac{b}{2a}$. При $a>0$ парабола направлена вверх, а при $a<0$ — вниз.***

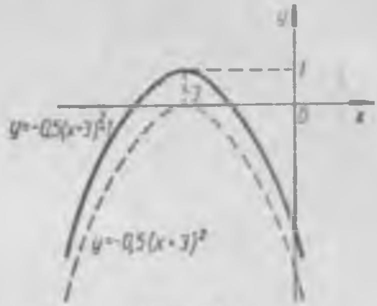


Рис. 74.

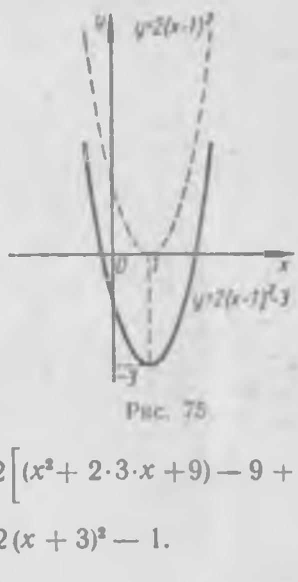


Рис. 75

Примеры построения графиков квадратной функции § 58

Пример 1. Построить график функции

$$y = 2x^2 + 12x + 17.$$

Преобразуем квадратный трехчлен $2x^2+12x+17$, выделив полный квадрат:

$$2x^2+12x+17 = 2\left(x^2+6x+\frac{17}{2}\right) = 2\left[(x^2+2\cdot 3\cdot x+9)-9+\frac{17}{2}\right] =$$

$$= 2\left[(x+3)^2-\frac{1}{2}\right] = 2(x+3)^2-1.$$

Теперь построение графика можно выполнить в следующей последовательности.

1) «По точкам» строим график функции $y=2x^2$ (I, рис. 76).

2) Смещаем этот график на 3 единицы влево. В результате получаем кривую $y=2(x+3)^2$ (II, рис. 76).

3) Эту кривую опускаем вниз на 1 (III, рис. 76). Полученная парабола и есть график функции $y=2x^2+12x+17$. Ее вершина имеет координаты $(-3, -1)$, а осью симметрии является прямая $x=-3$.

Пример 2. Построить график функции $y=|-2x^2+3|$.

Сначала построим график функции $y=-2x^2+3$ (рис. 77а). Затем ту часть этого графика, которая лежит выше оси x (для нее $-2x^2+3>0$), оставим без изменения, а ту часть графика, которая лежит ниже оси x (для нее $-2x^2+3<0$), отобразим симметрично относительно оси x. Полученная в результате этого кривая (рис. 77б, сплошная линия) и есть график функции $y = |-2x^2 + 3|$.

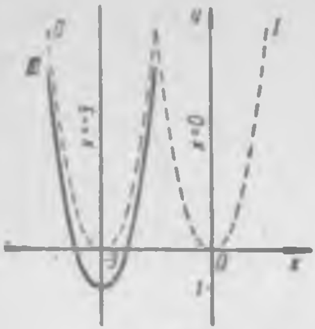


Рис. 76.

Упражнения

Построить графики данных функций:

416. $y = -2x^2 + 1$.
417. $y = 0{,}5x^2 - 2$.
418. $y = (x - 2)^2 + 3$.
419. $y = (x + 1)^2 - 2$.
420. $y = -2(x + 1{,}5)^2 + 1$.
421. $y = 2x^2 - 3x - 2$.
422. $y = -3x^2 + 8x + 3$.
423. $y = (x - 3)(x - 5) + 1$.
424. $y = |-x^2 + 2|$.
425. $y = |3x^2 - 1|$.
426. $y = |x^2 + x - 2|$.
427. $y = |-x^2 + 3x - 2|$.

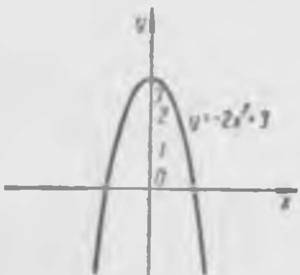


Рис 77 а.

Характеристические точки параболы § 59

Характеристическими точками параболы $y=ax^2+bx+c$ мы называем ее вершину и точки пересечения с осями координат.

Вершину имеет любая парабола $y=ax^2+bx+c$. Координаты этой вершины легко найти, выделив в квадратном трехчлене ax^2+bx+c полный квадрат (см. § 49). Например, для параболы $y = x^2+4x+3$ имеем:

$$x^2+4x+3 = (x + 2)^2 - 1.$$

Поэтому абсцисса вершины равна -2, а ордината -1 (рис. 78).

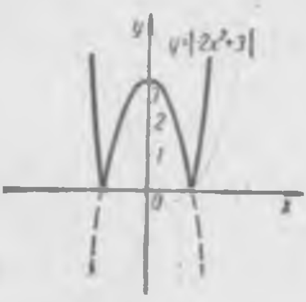


Рис. 77 б.

Точку пересечения с осью y имеет также любая парабола $y = ax^2+bx+c$. Абсцисса точки пересечения равна, очевидно, нулю, а ордината c. Она получается, если в выражении $ax^2 + bx + c$ положить $x=0$. Например, точка пересечения параболы $y=x^2+4x+3$ с осью ординат (рис. 78) имеет координаты (0,3).

Точки пересечения с осью x имеет не всякая парабола $y=ax^2+bx+c$. Если дискриминант $D = b^2-4ac$ положителен, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два различных действительных корня:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

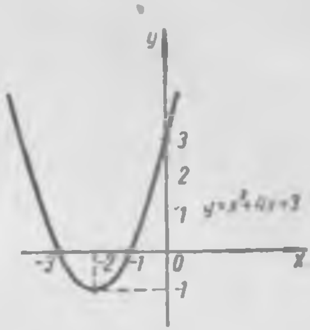


Рис 78.

В этом случае парабола $y=ax^2+bx+c$ пересекает ось x в двух точках с абсциссами x_1 и x_2 соответственно. Так, для квадратного трехчлена x^2+4x+3 $D=16-12=4>0$. Этот квадратный трехчлен имеет два корня: $x_1=-1$, $x_2=-3$. Поэтому парабола $y=x^2+4x+3$ пересекает ось x в двух точках (рис. 78), абсциссы которых равны -1 и -3.

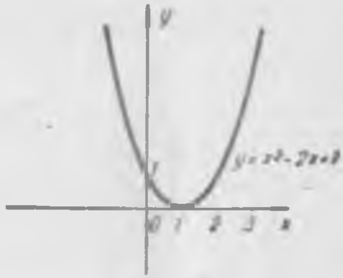


Рис. 79.

Если $D=b^2-4ac=0$, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет один действительный корень $x=-\frac{b}{2a}$.

В этом случае уравнение параболы можно записать в виде $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$. Такая парабола касается оси x в точке с абсциссой $-\frac{b}{2a}$. Например, для квадратного трехчлена x^2-2x+1 $D=0$. Уравнение $x^2-2x+1=0$ имеет один корень $x=1$. Поэтому парабола $y=x^2-2x+1$ касается оси x в точке с абсциссой 1 (рис. 79).

Если $D=b^2-4ac<0$, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет действительных корней. В этом случае парабола не пересекает оси x. Например, для квадратного трехчлена x^2+2x+3 $D=-8<0$. Уравнение $x^2+2x+3=0$ не имеет действитель-

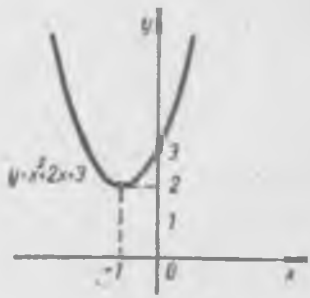


Рис. 80.

ных корней. Парабола $y=x^2+2x+3$ не пересекает оси x (рис. 80).

Характеристические точки параболы всегда полезно находить при построении графика функции $y=ax^2+bx+c$. Это позволяет более точно построить график.

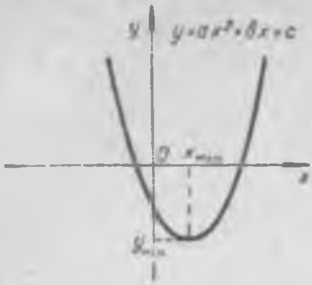


Рис. 81.

Упражнения

Начертить данные параболы, указав координаты характеристических точек и уравнения осей симметрии:

428. $y = 3(x-2)^2 - 2$.
429. $y = -(x+1)^2 + 3$.
430. $y = 3 - 2x - x^2$.
431. $y = 2x^2 - 2x - 4$.
432. $y = x^2 + 12x + 22$.
433. $y = x(1-x)$.

Экстремальное значение функции $y=ax^2+bx+c$ § 60

Наименьшее, или минимальное, из всех значений, которые принимает квадратная функция $y = ax^2+bx+c$, геометрически можно истолковать как ординату самой низкой точки параболы $y=ax^2+bx+c$ (рис. 81), а наибольшее, или максимальное, значение — как ординату самой высокой точки параболы $y=ax^2+bx+c$ (рис. 82).

Если $a>0$, то парабола $y=ax^2+bx+c$ уходит неограниченно вверх (рис. 81). В этом случае самой высокой точки параболы не существует. Поэтому не существует и максимального значения функции $y=ax^2+bx+c$. Но в этом случае существует самая низкая точка параболы — ее вершина. Следовательно, существует минимальное значение функции. Это минимальное значение (мы будем его обозначать $y_{\min}$) равно ординате вершины параболы. Абсцисса этой вершины (обозначим ее $x_{\min}$) дает то значение аргумента x, при котором достигается минимум функции $y= ax^2 + bx + c$.

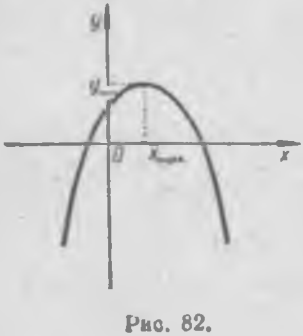


Рис. 82.

Если $a<0$, то парабола $y=ax^2+bx+c$ уходит неограниченно вниз (рис. 82). В этом случае самой низкой точки параболы не существует. Поэтому не существует и минимального значения функции $y=ax^2+bx+c$. Зато существует самая высокая точка параболы — ее вершина. Следовательно, существует максимальное значение данной функции. Это максимальное значение (мы будем обозначать его y_{max}) равно ординате вершины параболы. Абсцисса этой вершины (обозначим ее x_{max}) дает то значение аргумента x, при котором достигается максимум функции $y = ax^2 + bx + c$.

В § 57 было установлено, что вершина параболы $y=ax^2+bx+c$ независимо от того, положительно a или отрицательно, имеет координаты:

$$x = -\frac{b}{2a}; \qquad y = -\frac{b^2-4ac}{4a}. \qquad (1)$$

Поэтому можно сказать, что если $a>0$, то функция $y=ax^2+bx+c$ принимает наименьшее значение $y_{min} = -\frac{b^2-4ac}{4a}$ при $x_{min} = -\frac{b}{2a}$; наибольшего значения этой функции не существует. Если $a<0$, то функция $y=ax^2+bx+c$ принимает наибольшее значение $y_{max} = -\frac{b^2-4ac}{4a}$ при $x_{max} = -\frac{b}{2a}$; наименьшего значения функции в данном случае не существует.

Минимальные и максимальные значения функции иначе называются *экстремальными*.

П р и м е р 1. Найти экстремальное значение функции $y=2x^2-4x-17$ и указать, при каком значении x функция принимает это экстремальное значение.

Поскольку коэффициент при x^2 положителен, то данная функция имеет минимальное значение. Максимального значения она не имеет. Чтобы определить минимальное значение, найдем координаты вершины параболы $y=2x^2-4x-17$. Для этого выделим полный квадрат:

$$2x^2-4x-17 = 2\left(x^2-2x-\frac{17}{2}\right) =$$

$$= 2\left[(x^2-2x+1)-1-\frac{17}{2}\right] = 2(x-1)^2-19.$$

Отсюда заключаем, что координаты вершины параболы таковы: $x=1$, $y=-19$. (Эти координаты, конечно, можно было бы получить и по формулам (1), если в них положить $a=2$, $b=-4$, $c=-17$.) Следовательно, минимальное значение функции $y=2x^2-4x-17$ равно -19. Оно достигается при $x=1$.

П р и м е р 2. Найти экстремальное значение функции $y=-x^2-4x+6$ и выяснить, при каком значении аргумента x оно достигается.

Поскольку коэффициент при x^2 отрицателен, то данная функция имеет максимальное значение. Минимального значения она не имеет. Чтобы найти максимальное значение, выделим полный квадрат:

$$-x^2-4x+6 = -(x^2+4x-6) =$$

$$= -[(x^2+4x+4)-10] = -(x+2)^2+10.$$

Отсюда заключаем, что максимальное значение данной функции равно 10. Оно достигается при $x=-2$.

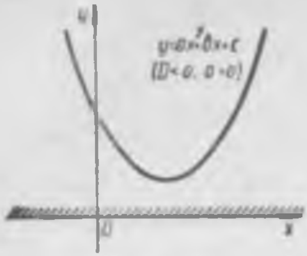


Рис. 83.

Упражнения

Найти экстремальные значения данных функций и указать, при каких значениях аргумента они достигаются (№ 434—437).

434. $y = 2x^2+12x + 13.$

435. $y = -2x^2 - 4x - 5.$

436. $y = |6x^2 - x - 1|.$

437. $y = |4x^2 - 4x - 3|.$

438. Доказать, что если сумма двух величин постоянна, то их произведение максимально тогда и только тогда, когда эти величины принимают равные значения. (Это утверждение является естественным обобщением теоремы о постоянной сумме на случай любых, а не только положительных величин; см. гл. I, § 17.)

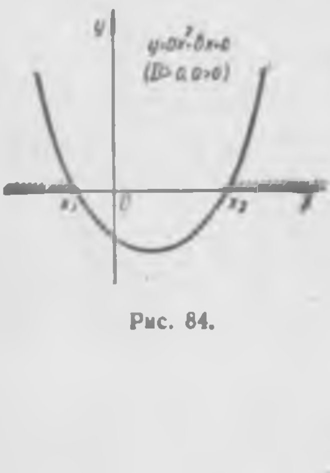


Рис. 84.

Квадратные неравенства § 61

Неравенства вида

$ax^2+bx+c>0,\qquad ax^2+bx+c<0,$
$ax^2+bx+c\geqslant 0,\qquad ax^2+bx+c\leqslant 0,$

где a, b и c — заданные числа и $a\neq 0$, называются *квадратными* (или *неравенствами второй степени*).

В этом параграфе мы ограничимся лишь рассмотрением неравенств вида

$$ax^2 + bx + c > 0.$$

Такие неравенства лучше всего решать, используя геометрическую иллюстрацию. Рассмотрим отдельно два случая:

$$a > 0 \text{ и } a < 0.$$

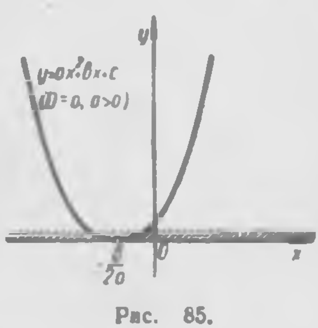


Рис. 85.

С л у ч а й 1. $a>0$. В этом случае парабола $y=ax^2+bx+c$ направлена вверх. Если $D = b^2-4ac<0$, то квадратный трехчлен ax^2+bx+c не имеет действительных корней. Значит, парабола $y=ax^2+bx+c$ не пересекает оси x и расположена целиком выше оси x (рис. 83). Это означает, что в данном случае неравенство $ax^2+bx+c>0$ выполняется при любых значениях x.

Если $D=b^2-4ac>0$, то парабола $y=ax^2+bx+c$ пересекает ось x в двух точках (рис. 84) с абсциссами:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Поэтому $ax^2+bx+c>0$ при $x<x_1$, а также при $x>x_2$.

Наконец, если $D=b^2-4ac=0$, то трехчлен ax^2+bx+c имеет один корень $x=-\frac{b}{2a}$ и, следовательно, представим в виде $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

В этом случае парабола $y=ax^2+bx+c$ касается оси x в точке с абсциссой $-\frac{b}{2a}$ (рис. 85). Поэтому $ax^2+bx+c>0$ при всех значениях x, кроме $x=-\frac{b}{2a}$.

Случай 2. $a<0$. В этом случае парабола $y=ax^2+bx+c$ направлена вниз.

Если $D=b^2-4ac<0$, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет действительных корней и, значит, парабола $y=ax^2+bx+c$ лежит целиком ниже оси x (рис. 86). Поэтому неравенство $ax^2+bx+c>0$ не выполняется ни при каких значениях x.

Если $D=b^2-4ac>0$, то парабола $y=ax^2+bx+c$ пересекает ось x в двух точках с абсциссами

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

(рис. 87). В этом случае $ax^2+bx+c>0$ при тех значениях x, которые расположены между корнями уравнения $ax^2+bx+c=0$, то есть при

$$x_1<x<x_2.$$

Наконец, если $D=b^2-4ac=0$, то парабола $y=ax^2+bx+c$ касается

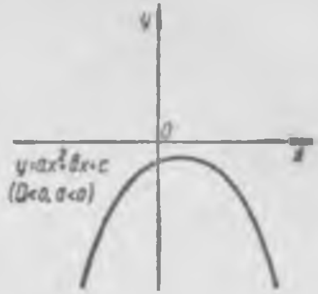


Рис. 86.

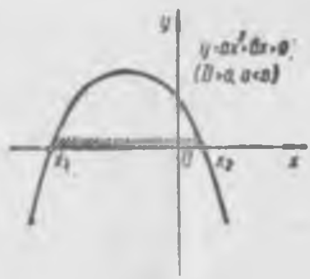


Рис. 87.

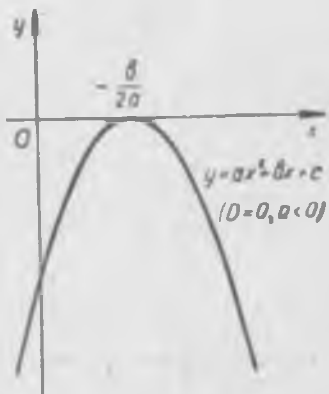


Рис. 88.

оси x в точке с абсциссой $x = -\frac{b}{2a}$ (рис. 88). В этом случае неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ не выполняется ни при каких значениях x.

З а м е ч а н и е 1. Из рассмотренного вытекает, что если дискриминант квадратного трехчлена ax^2+bx+c положителен, то этот трехчлен принимает как положительные, так и отрицательные значения. Если же дискриминант отрицателен, то все значения квадратного трехчлена имеют один и тот же знак, а именно знак коэффициента при x^2.

З а м е ч а н и е 2. При решении неравенства $ax^2+bx+c>0$ нет необходимости точно строить параболу $y=ax^2+bx+c$ (например, совсем не нужно искать вершину параболы, точку пересечения с осью y и т. д.). Достаточно лишь грубо представить себе эту кривую. Единственное, что нужно сделать абсолютно точно, — это найти корни уравнения $ax^2+bx+c=0$ (при $D>0$).

Примеры решения квадратных неравенств § 62

П р и м е р 1. Решить неравенство

$$2x^2+4x-6>0.$$

Квадратный трехчлен $2x^2+4x-6$ имеет два действительных корня $x_1=-3$, $x_2=1$. Поэтому парабола $y=2x^2+4x-6$ пересекает ось x в двух точках, абсциссы которых равны -3 и 1. Поскольку коэффициент при x^2 больше нуля, парабола $y=2x^2+4x-6$ направлена вверх (рис. 89). Из рисунка видно, что трехчлен $2x^2+4x-6$ положителен при $x<-3$ и при $x>1$.

П р и м е р 2. Решить неравенство

$$-x^2+x-1>0.$$

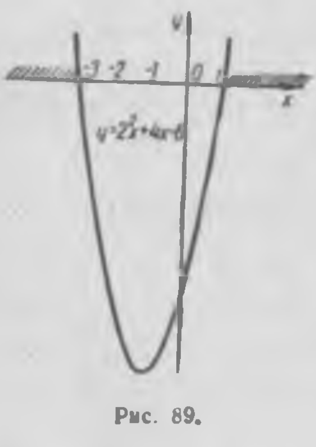


Рис. 89.

Дискриминант квадратного трехчлена $-x^2+x-1$ отрицателен: $D=-3$. Поэтому при всех x значения функции $y=-x^2+x-1$ имеют один и тот же знак, а именно знак коэффициента при x^2, то есть минус. Следовательно, неравенство $-x^2+x-1>0$ не выполняется ни при каких значениях x.

П р и м е р 3. Выяснить, при каких значениях x дробь

$$\frac{x^2+2x-3}{2x-x^2}$$

положительна и при каких — отрицательна.

Сначала указанным выше способом определим знаки числителя и знаменателя данной дроби, а затем сравним их.

Числитель x^2+2x-3 положителен при $x<-3$ и при $x>1$, а отрицателен при $-3<x<1$ (рис. 90, верхняя числовая ось). Знаменатель $2x-x^2$ положителен при $0<x<2$ и отрицателен при $x<0$ и при $x>2$ (рис. 90, нижняя числовая ось). Из рисунка 90 видно, что данная дробь будет положительна при $-3<x<0$ (в этом случае числитель и знаменатель отрицательны) и при $1<x<2$ (в этом случае числитель и знаменатель положительны); отрицательной она будет при $x<-3$ (числитель положителен, знаменатель отрицателен), при $0<x<1$ (числитель отрицателен, знаменатель положителен) и при $x>2$ (числитель положителен, знаменатель отрицателен).

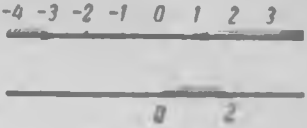


Рис. 90

Упражнения

Решить данные неравенства (№ 439—446):

439. $x^2-4x+3>0$.

440. $x^2-6x+5<0$.

441. $-5x^2+3x+2>0$.

442. $x(1-x)>0$.

443. $x^2+x+1<0$.

444. $x^2-x+1\geqslant 0$.

445. $x^2-6x+10\leqslant 0$.

446. $-3x^2+2x+1>0$.

447. Найти целые значения x, удовлетворяющие неравенству

$$4x^2+4x-3<0.$$

Решить неравенства (№ 448, 449):

448. $\dfrac{x^2+2x-15}{x+1}<0$.

449. $\dfrac{x^2-6x-16}{-x^2+8x-12}>0$.

450. Найти целые значения x, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-6x+5}{-3x^2+2x-7}<0,\\ x^2<16.\end{cases}$$

При каких значениях a данные неравенства (№ 451, 452) удовлетворяются для всех значений x?

451. $(a-1)x^2-(a+1)x+(a+1)>0$.

452. $(a-2)x^2+2(2a-3)x+5a-6<0$.

453. При каких значениях a уравнение

$$(a-3)x^2-2(3a-4)x+7a-6=0$$

имеет действительные корни?

454. При каких значениях a уравнение

$$5(a+4)x^2 - 10x + a = 0$$

имеет:

а) действительные корни;

б) действительные корни одного знака;

в) действительные корни разных знаков?

455. Не решая уравнения

$$x^2 - (a+1)x + (3a-5) = 0,$$

определить знаки его корней.

Решение некоторых систем уравнений § 63

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые типичные системы уравнений, решение которых сводится к решению квадратных уравнений.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 - xy - 2x + 1 = 0, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Поскольку второе уравнение этой системы линейно относительно каждой из переменных x и y, то одна из этих переменных, например y, легко выражается через другую:

$$y = x - 1.$$

Подставляя это выражение для y в первое уравнение системы, получаем:

$$x^2 + 3(x-1)^2 - x(x-1) - 2x + 1 = 0,$$

откуда

$$3x^2 - 7x + 4 = 0; \qquad x_1 = \frac{4}{3}; \quad x_2 = 1.$$

Этим значениям x согласно второму уравнению системы соответствуют следующие значения y: $y_1 = \frac{1}{3}$; $y_2 = 0$.

Таким образом, данная система уравнений имеет два решения:

$$x_1 = \frac{4}{3}, \quad y_1 = \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad x_2 = 1, \quad y_2 = 0.$$

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 14x^2 - 5xy + 3y^2 = 16, \\ 6x^2 - xy + y^2 = 8. \end{cases} \qquad (1)$$

Характерная особенность этой системы уравнений состоит в том, что она содержит лишь выражения x^2, y^2 и xy, суммарная степень x и y в которых постоянна и равна 2.

Для решения данной системы выполним следующие преобразования. Из первого уравнения системы (1) вычтем второе, умноженное на 2. В результате получим уравнение

$$2x^2 - 3xy + y^2 = 0, \tag{2}$$

правая часть которого равна 0.

Заметим, что $x \neq 0$. В противном случае из (2) вытекало бы, что $y = 0$, а это явно противоречит уравнениям системы (1). Но если $x \neq 0$, то уравнение (2) можно почленно разделить на x^2, что дает

$$2 - 3\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0.$$

Мы получили квадратное уравнение относительно $\frac{y}{x}$. Из него следует, что либо $\frac{y}{x} = 1$, либо $\frac{y}{x} = 2$.

Рассмотрим эти два случая отдельно.

1) Если $\frac{y}{x} = 1$, то $y = x$. Замена y в первом уравнении данной системы на x приводит к следующему результату:

$$14x^2 - 5x^2 + 3x^2 = 16, \text{ или } 12x^2 = 16.$$

Следовательно, $x = \pm\sqrt{\frac{16}{12}} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Отсюда получаем следующие два решения данной системы:

$$x_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad y_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}; \quad x_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \quad y_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

2) Если $\frac{y}{x} = 2$, то $y = 2x$. Заменяя y в первом уравнении данной системы на $2x$, получаем:

$$14x^2 - 10x^2 + 12x^2 = 16,$$

или

$$16x^2 = 16.$$

Следовательно, $x = \pm 1$. Отсюда, учитывая, что $y = 2x$, получаем еще два решения данной системы:

$$x_3 = 1, \quad y_3 = 2; \qquad x_4 = -1, \quad y_4 = -2.$$

Проверка показывает, что ни одно из полученных четырех решений системы (1) не является «посторонним».

Ответ. Данная система уравнений имеет 4 решения:

1) $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{2}{\sqrt{3}}$; 3) $x = 1$, $y = 2$;

2) $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $y = -\frac{2}{\sqrt{3}}$; 4) $x = -1$, $y = -2$.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = -7. \end{cases}$$

Если только данная система уравнений имеет решение, то по теореме, обратной теореме Виета, это решение должно состоять из корней квадратного уравнения (см. § 52):

$$z^2 - 6z - 7 = 0.$$

Это уравнение имеет корни $z_1 = -1$, $z_2 = +7$. Следовательно, в роли решений данной системы уравнений могут выступать только следующие две пары чисел:

$$x_1 = -1,\ y_1 = 7 \text{ и } x_2 = 7,\ y_2 = -1.$$

Элементарная проверка показывает, что каждая из этих пар чисел является решением нашей системы.

Ответ. Данная система уравнений имеет два решения:

$$x_1 = -1,\ y_1 = 7 \text{ и } x_2 = 7,\ y_2 = -1.$$

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 8, \\ xy = -7. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что $x \cdot (-y) = 7$. Поэтому

$$\begin{cases} x + (-y) = 8, \\ x \cdot (-y) = 7. \end{cases}$$

Мы получили систему уравнений, вполне аналогичную системе, рассмотренной в примере 3. Только роль неизвестных играют не x и y, как в примере 3, а x и $-y$. Поэтому дальнейший ход решения этой системы такой же, как в примере 3. Учащимся предлагается провести его самостоятельно.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = -2. \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем $x^2y^2 = 4$. Но в таком случае по теореме, обратной теореме Виета, x^2 и y^2 можно рассматривать как корни квадратного уравнения

$$z^2 - 5z + 4 = 0,$$

откуда $z_1 = 4$, $z_2 = 1$. Поэтому возможны два случая: 1) $x^2 = 4$ и тогда $y^2 = 1$; 2) $x^2 = 1$ и тогда $y^2 = 4$.

Случай 1. Если $x = +2$, то $y = -1$ (согласно второму уравнению исходной системы $xy = -2$). Если $x = -2$, то $y = 1$.

Случай 2. Если $x = 1$, то $y = -2$, если же $x = -1$, то $y = 2$.

Мы получили 4 решения данной системы уравнений:

$$x_1 = 2, \quad y_1 = -1; \qquad x_3 = 1, \quad y_3 = -2;$$
$$x_2 = -2, \quad y_2 = 1; \qquad x_4 = -1, \quad y_4 = 2.$$

Упражнения

Решить данные системы уравнений:

456. $\begin{cases} x^2 + 3xy - y^2 + 2x - 5y = -64, \\ x - y = -7. \end{cases}$

457. $\begin{cases} 2x^2 - 3xy - 19y^2 = 25, \\ x^2 - 6y^2 = 250. \end{cases}$

458. $\begin{cases} 7x^2 - 6xy + 12y^2 = 108, \\ x^2 - \frac{5}{6}xy + \frac{7}{3}y^2 = 18. \end{cases}$

459. $\begin{cases} x + 2y = 13, \\ xy = 15. \end{cases}$

460. $\begin{cases} 2x - 3y = -18, \\ xy = -12 \end{cases}$

461. $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = -\frac{1}{4}, \\ xy = \frac{1}{4}. \end{cases}$

462. $\begin{cases} 2y^2 - 3x^2 = -19, \\ xy = -6. \end{cases}$

463. $\begin{cases} x + xy + y = 11, \\ x - xy + y = 1. \end{cases}$

464. $\begin{cases} xy + y + x = 11, \\ x^2y + y^2x = 30. \end{cases}$

465. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x + y = 1. \end{cases}$

466. $\begin{cases} x^2 - y^2 = -21, \\ x + y = -3. \end{cases}$

Графический способ решения некоторых систем уравнений — § 64

Некоторые системы уравнений могут быть решены графически. Проиллюстрируем это на примере следующей системы:

$$\begin{cases} x^2 + y = 4, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

На одном и том же рисунке начертим две кривые, первая из которых имеет уравнение $x^2 + y = 4$, или $y = 4 - x^2$, а вторая—уравнение $x + y = 2$, или $y = 2 - x$. Очевидно, что искомыми решениями данной системы уравнений будут координаты точек пересечения этих двух кривых.

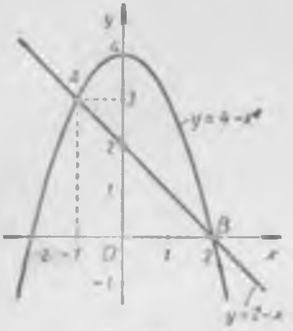


Рис. 91.

Как видно из рисунка 91, рассматриваемые кривые пересекаются в двух точках: A с координатами (— 1,3) и B с координатами (2,0). Поэтому данная система уравнений имеет два решения:

$x = -1$, $y = 3$ и $x = 2$, $y = 0$.

Упражнения

Решить графически следующие системы уравнений:

467. $\begin{cases} x^2 + 2y = 10, \\ x - y = -1. \end{cases}$

468. $\begin{cases} 2x^2 - y = -2, \\ 3x + y = 1. \end{cases}$

469. $\begin{cases} y + 2x^2 = 3, \\ x + y = 2. \end{cases}$

470. $\begin{cases} y = x^2 - 1, \\ y = -x^2 + 2x - 1. \end{cases}$

Иррациональные уравнения § 65

Иррациональными уравнениями называются уравнения, содержащие неизвестное под знаком радикала. К таким относятся, например, уравнения

$$\sqrt{x-1} = 3 + \sqrt{x}; \quad \sqrt{x} = 5 - 4x;$$
$$\sqrt[3]{2-x} = \sqrt[4]{x+6} + 7x$$

и т. д.

Мы ограничимся рассмотрением иррациональных уравнений, которые содержат только квадратные радикалы. В связи с этим следует напомнить, что квадратные корни можно извлекать только из неотрицательных чисел. Такие, например, выражения, как $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-25}$, $\sqrt{-10}$, не имеют смысла. Далее, под квадратным корнем из положительного числа мы всегда подразумеваем его арифметическое, то есть положительное, значение. Так, $\sqrt{4} = 2$, а не -2; $\sqrt{25} = 5$, а не -5; $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$, а не $-1{,}4142\ldots$ и т. д.

Этих замечаний уже достаточно для того, чтобы мы могли рассмотреть несколько типичных примеров иррациональных уравнений.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}=3.$$

Квадратные корни можно извлекать лишь из неотрицательных чисел. Поэтому допустимые значения неизвестной величины x должны удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} x-2 \geqslant 0, \\ 1-x \geqslant 0. \end{cases}$$

Первое неравенство этой системы дает $x \geqslant 2$, второе $x \leqslant 1$. Очевидно, что одновременно эти условия выполняться не могут. Поэтому множество допустимых значений неизвестной величины x в данном случае пусто, то есть не содержит ни одного числа. Но в таком случае данное уравнение не может иметь действительных корней.

Рассмотренный пример учит нас постоянно помнить о следующем важном обстоятельстве. Прежде чем решать то или иное иррациональное уравнение, нужно быть уверенным, что множество допустимых значений неизвестной величины не пусто. Если ни одно из чисел не является допустимым для неизвестной величины, то можно сразу же сказать, что уравнение не имеет корней.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=-2.$$

Ни один из корней $\sqrt{x}$ и $\sqrt{1-x}$ не может быть отрицательным. Поэтому ни при каких действительных значениях величины x сумма этих корней не может равняться -2. Следовательно, данное уравнение также не имеет корней.

Заметим, что здесь не было необходимости исследовать, какие значения может принимать неизвестная величина x. Отсутствие корней данного уравнения мы установили и без этого исследования.

Мы рассмотрели два простейших примера иррациональных уравнений. В следующем параграфе будут рассмотрены более сложные примеры.

Упражнения

Показать, что данные уравнения не имеют корней:

471. $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}=-1$.

472. $\sqrt{2x-7}+\sqrt{x}=0$.

473. $\sqrt{3x-5}+\sqrt{6-x}=-7$.

474. $\sqrt{4-4x}+\sqrt{x-2}=6$.

Обычный способ решения иррациональных уравнений состоит в освобождении их от радикалов и сведении к уже изученным нами типам алгебраических уравнений (например, к линейным или квадратным). Добиться этого иногда удается путем почленного возведения иррационального уравнения в степень. Поясним это на ряде частных примеров.

Пример 1. Решить уравнение

$$x = \sqrt{2 - x}.$$

Множество допустимых значений величины x определяется неравенством $x \leqslant 2$. Чтобы среди всех этих значений найти корни нашего уравнения, возведем обе его части в квадрат. В результате получим:

$$x^2 = 2 - x,$$
$$x^2 + x - 2 = 0,$$

откуда

$$x_1 = -2,$$
$$x_2 = 1.$$

Каждое из двух полученных чисел попадает в множество допустимых значений величины x. Но это еще не означает, что -2 и 1 — корни данного уравнения. Ведь к уравнению $x^2 = 2 - x$ мы пришли путем почленного возведения в квадрат исходного уравнения

$$x = \sqrt{2 - x}.$$

Но к такому же результату мы пришли бы, если бы почленно возвели в квадрат не это, а другое уравнение

$$x = -\sqrt{2 - x},$$

отличное от данного. Следовательно, в результате выполненных преобразований мы можем получить новые, посторонние корни — корни уравнения $x = -\sqrt{2 - x}$, которые нас в данном случае не интересуют. Вот почему, прежде чем дать ответ к данной задаче, необходимо сделать проверку полученных корней.

При $x = -2$ левая часть данного уравнения принимает значение -2, а правая $\sqrt{4} = 2$. Поскольку $-2 \neq 2$, число -2 не есть корень данного уравнения. При $x = 1$ обе части нашего уравнения принимают значения, равные 1. Поэтому 1 — корень этого уравнения.

Итак, данное уравнение имеет один корень $x = 1$. Что же касается числа -2, полученного нами выше, то оно, как и следовало ожидать, является корнем уравнения $x = -\sqrt{2 - x}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$x = 1 + \sqrt{x+5}.$$

Множество допустимых значений неизвестной величины в данном случае определяется неравенством $x \geqslant -5$.

Перенося 1 из правой части в левую и возводя обе части полученного уравнения в квадрат, мы приходим к уравнению

$$(x-1)^2 = (\sqrt{x+5})^2,$$

$$x^2 - 2x + 1 = x + 5, \; x^2 - 3x - 4 = 0,$$

откуда

$$x_1 = 4, \; x_2 = -1.$$

Проверка показывает, что из этих двух чисел корнем данного уравнения является лишь число 4. Число -1 является посторонним корнем.

Ответ. Данное уравнение имеет единственный корень $x = 4$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{x-5} + \sqrt{10-x} = 3.$$

Множество допустимых значений x определяется, очевидно, неравенством

$$5 \leqslant x \leqslant 10.$$

Возведя обе части данного уравнения в квадрат, мы получим:

$$x - 5 + 2\sqrt{(x-5)(10-x)} + 10 - x = 9,$$

$$2\sqrt{(x-5)(10-x)} = 4, \quad \sqrt{(x-5)(10-x)} = 2.$$

С последним уравнением мы поступим так же, как и с исходным: возведем его почленно в квадрат. В результате получим:

$$(x-5)(10-x) = 4, \quad -x^2 + 15x - 50 = 4,$$

$$x^2 - 15x + 54 = 0.$$

Итак, в результате двукратного почленного возведения данного уравнения в квадрат в сочетании с другими элементарными преобразованиями мы пришли к простому квадратному уравнению, корни которого равны:

$$x_1 = 6, \; x_2 = 9.$$

Проверка показывает, что оба эти числа являются корнями данного уравнения. Ответ. $x_1 = 6$, $x_2 = 9$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt{x+7} + \sqrt{x-1} = 4.$$

Множество допустимых значений неизвестной величины x определяется в данном случае неравенством $x \geqslant 1$. Это уравнение можно было бы решить тем же способом, которым мы решали предыдущее уравнение. Для этого нам пришлось бы дважды применять метод почленного возведения в квадрат.

В данном случае можно предложить и другой прием. Умножим почленно данное уравнение на выражение $\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}$, сопряженное* выражению $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}$. В результате, используя формулу для произведения суммы двух чисел на их разность, получим:

$$(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1})=4(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}),$$

или

$$(x+7)-(x-1)=4(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}).$$

Отсюда

$$4(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1})=8,$$

$$\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}=2.$$

Теперь мы имеем:

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}=4,$$

$$\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}=2.$$

Складывая почленно эти уравнения, получаем:

$$2\sqrt{x+7}=6,$$

откуда

$$\sqrt{x+7}=3, \qquad x+7=9, \qquad x=2.$$

В процессе решения данного уравнения нам пришлось обе его части умножить на $\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}$. Но в результате такого преобразования могли получиться посторонние корни. Вот почему теперь необходимо проверить, является ли полученное число 2 корнем исходного уравнения.

При $x=2$ левая часть данного уравнения принимает значение

$$\sqrt{9}+\sqrt{1}=3+1=4.$$

Следовательно, $x=2$ — корень данного уравнения.

Ответ. Данное уравнение имеет единственный корень $x=2$.

Рассмотренные методы решения иррациональных уравнений таковы, что, используя их, мы не можем потерять никаких

---

* Одно выражение, содержащее знак радикала, называется *сопряженным* другому выражению, содержащему знак радикала, если произведение этих выражений можно записать уже без знака радикала. Так, выражение $\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}$ является сопряженным выражению $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}$, поскольку $(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1})=(x+7)-(x-1)=8$; выражение $\sqrt{a}+1$ будет сопряженным выражению $\sqrt{a}-1$, так как $(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)=a-1$, и т. д.

корней. Зато, как показывают примеры 1 и 2, мы можем получить посторонние корни. Поэтому еще раз подчеркнем, что проверка полученных корней путем их подстановки в исходные уравнения является важной составной частью решения иррациональных уравнений.

Упражнения

Решить уравнения:

475. $\sqrt{7-\sqrt{x-3}}=2$.

476. $\sqrt{1-3x}=3+x$.

477. $21+\sqrt{2x-7}=x$.

478. $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$.

479. $\sqrt{2x+1}=2\sqrt{x}-\sqrt{x-3}$.

480. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1$.

481. $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{2a}$.

482. $\sqrt{x-3}-\sqrt{x+3}=2-\sqrt{10}$.

Из истории развития алгебры § 67

Методы решения квадратных уравнений были известны еще в древние времена. Они излагаются, например, в вавилонских рукописях времен царя Хаммурапи (XX в. до н. э.), в трудах древнегреческого математика Евклида (III в. до н. э), в древних китайских и японских трактатах.

Многие математики древности решали квадратные уравнения геометрическим способом. Например, для решения уравнения $x^2+10x=39$ поступали следующим образом. Пусть $AB=x$, $BC=5$ ($=10:2$). На стороне $AC=AB+BC$ строился квадрат, который разбивался на четыре части, как показано на рисунке 92. Очевидно, что сумма площадей I, II и III частей равна x^2+10x, или 39.

Если к этой площади прибавить площадь IV части, то в результате получится 64 — площадь всего квадрата. Но эта же площадь равна $(x+5)^2$, так как $AC=x+5$. Следовательно,

$$(x+5)^2=64,$$
$$x+5=8,$$
$$x=3.$$

В некоторых древних рукописях содержатся примеры решения приведенных квадратных уравнений, которые по существу следуют формуле

$$-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}. \qquad (1)$$

Правда, задачи эти решаются не в общем виде, а лишь при определенных числовых значениях коэффициентов. Однако методы решения не оставляют сомнения в том, что авторам их были знакомы общие правила. Здесь следует указать, что в древние времена буквенные обозначения еще не использовались. Систематически их ввел в математику лишь французский математик Виет, чье имя носит известная нам теорема о корнях приведен-

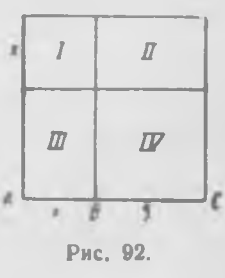


Рис. 92.

ного квадратного уравнения. Отрицательные числа также не были широко известны ученым древности. Поэтому о формуле (1), как таковой, конечно, не могло быть и речи.

Достаточно подробно методы решения квадратных уравнений изложены в трудах знаменитого узбекского математика ал-Хорезми (IX в.). Одна из его работ называется «Хисаб ал-джебр вал-мукабала», что в переводе на русский язык означает «Учение о приведении и о двустороннем отнятии».

В этой книге рассматривались и линейные уравнения. Одним из методов их решения был метод, названный «ал-джебр». От этого слова и произошло название «алгебра».

Задачи на повторение

483. Какие известные вам физические законы описываются с помощью квадратных функций?

484. Чему равно число c, если при любых значениях a и b уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ всегда имеет хотя бы один корень?

485. При каких значениях a корни уравнения

$$(a - 1)x^2 - 2(a + 1)\,x + (a + 4) = 0$$

равны между собой?

486. Разложить выражение

$$2x\,(2x + b) - a\,(4x - a) - ab$$

на линейные относительно x множители.

487. Известно, что при любых значениях x функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные значения. Докажите, что $a > 0$, $c > 0$. Можно ли утверждать, что в рассматриваемом случае $b > 0$? Ответ поясните примерами.

488. Известно, что при любых значениях x

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 > a_2x^2 + b_2x + c_2.$$

Докажите, что $a_1 > a_2$, $c_1 > c_2$. Можно ли утверждать, что в рассматриваемом случае $b_1 > b_2$?

489*. Решить уравнение

$$\frac{a^2}{x} - \frac{b^2}{x - 1} = a^2 + b^2.$$

490. При каких значениях x выражение $\frac{x-1}{(x+2)^2}$ принимает значение, равное

$$\frac{a - 1}{(a + 2)^2}?$$

491. Решить уравнение

$$x + \frac{bx}{x - 2a} = \frac{2ab}{x - 2a}.$$

492. При каких значениях a корни уравнения

$$x^2 + x - a\,(1 + a) = 0$$

имеют

а) одинаковые знаки;

б) разные знаки?

493. Могут ли выражения $x^2 - ax + 1$ и $2x^2 + ax + 3$ быть равны при трех различных значениях x?

494. При каких значениях a неравенство $ax^2 + (a-1)x + (a-1) < 0$ выполняется для всех значений x?

Решить неравенства (№ 495, 496):

495. $\dfrac{x^2 - 5x + 8}{x^2 - 8x + 15} < 0.$ **496.** $\dfrac{x + 2}{x^2 - 7x + 6} > 0.$

497. При каких значениях a уравнение

$$(2a - 1)x^2 + (3 - a)x + 1 = 0$$

имеет действительные корни?

498. При каких значениях a квадратное уравнение

$$5(10 - a)x^2 - 10x + 6 - a = 0$$

а) имеет корни;

б) имеет не более одного корня;

в) не имеет корней;

г) имеет одинаковые корни;

д) имеет корни одинакового знака;

е) имеет корни разных знаков?

Решить системы уравнений (№ 499—502):

499. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2, \\ xy = 27. \end{cases}$

501. $\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ x - y = b. \end{cases}$

500. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{10}, \\ xy = 50. \end{cases}$

502. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 3, \\ x + y = 2. \end{cases}$

Решить уравнения (№ 503—505):

503.* $\sqrt{1 + ax} = x + \sqrt{1 - ax}.$

504. $\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x} = 1.$

505. $\sqrt{22 - x} - \sqrt{10 - x} = 2.$

506. Не решая уравнения

$$x^2 + 2ax + (a^2 + 2a - 1) = 0,$$

определить знаки его корней.

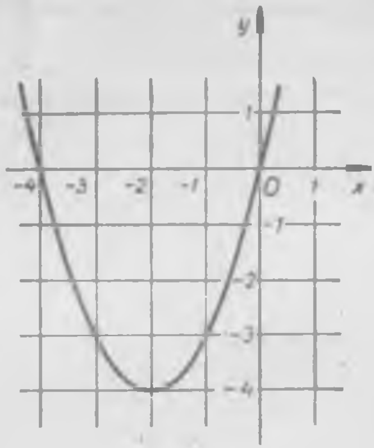


Рис. 93а.

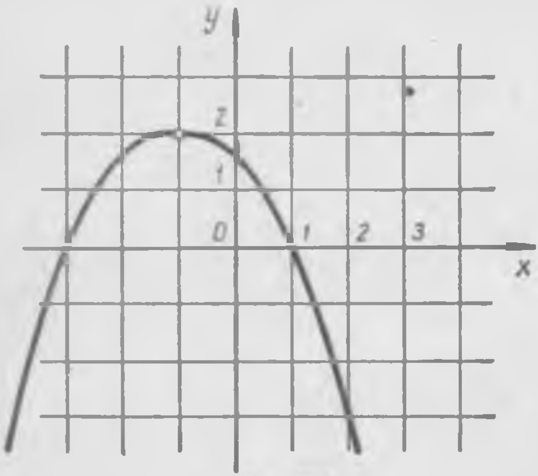


Рис. 93б.

507. Доказать, что корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (если только они существуют!) обратны корням уравнения

$$cx^2 + bx + a = 0.$$

508. Могут ли корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$ быть числа p и q?

509. При каких значениях a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + ax + (a - 2) = 0$ будет минимальной?

510*. При каких значениях a сумма кубов корней уравнения $3x^2 + 3(a + 1)x + a^2 = 0$ будет максимальной?

511. Квадратное уравнение $3x^2 + bx + c = 0$ имеет единственный корень, равный 1. Чему равны b и c?

512. На неограниченной прямой, соединяющей два источника света разной силы I_1 и I_2, определить точку, равноосвещенную обоими источниками. Расстояние между источниками света равно a.

Указание. Освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.

513. Потребность колхоза в ячмене 4000 *ц*. Если увеличить урожай ячменя на 8 *ц* с 1 *га*, то можно будет уменьшить площадь посева ячменя на 25 *га*. Сколько гектаров засеяно ячменем и какой урожай в центнерах с 1 *га*?

514. Написать уравнения парабол, приведенных на рисунках 93а и 93б.

СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

IV

Степень с натуральным показателем. Возведение в степень произведения и частного § 68

Пусть a — произвольное действительное число, а n — натуральное число, большее или равное 2. Тогда *n-я степень числа a* (обозначается a^n) *есть произведение n чисел, каждое из которых равно a*:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ \ldots \ \cdot a}_{n}.$$

Например,

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8,$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{81}.$$

Число a в выражении a^n называется *основанием*, а n — *показателем* степени. Первой степенью действительного числа a называется само это число a. По аналогии с n-й степенью ($n \geqslant 2$) числа a первую степень этого числа следовало бы записывать как a^1, но поскольку это выражение равно a, то единицу в записи a^1 обычно опускают и пишут просто a.

Степени с натуральными показателями обладают рядом важных свойств, которые мы рассмотрим ниже.

Теорема 1. ***Степень положительного числа с любым натуральным показателем положительна.***

Степень отрицательного числа с четным показателем положительна, а с нечетным показателем отрицательна.

Действительно, если $a > 0$, то a^n как произведение n положительных чисел положительно. Если $a < 0$, то a^{2k} как произведение четного числа отрицательных чисел положительно, а a^{2k+1} как произведение нечетного числа отрицательных чисел отрицательно.

Примеры:

$(-3)^4 = 81$ (четное число отрицательных сомножителей);

$(-2)^5 = -32$ (нечетное число отрицательных сомножителей).

Теорема 2. ***Чтобы возвести в степень произведение, достаточно возвести в эту степень каждый сомножитель и результаты перемножить***, то есть

$$(a \cdot b)^n = a^n b^n.$$

Доказательство. По определению степени

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \ \dots \ (ab)}_{n}.$$

Используя коммутативный и ассоциативный законы умножения, получаем:

$$(ab) \cdot (ab) \ \dots \ (ab) = (\underbrace{a \cdot a \ \dots \ a}_{n}) \cdot (\underbrace{b \cdot b \ \dots \ b}_{n}) = a^n b^n,$$

что и требовалось доказать.

Мы получили правило возведения в степень для случая двух сомножителей. На самом деле оно верно для любого числа сомножителей, например,

$$(a \cdot b \cdot c \cdot d)^n = a^n b^n c^n d^n.$$

Формулу $(ab)^n = a^n b^n$ иногда полезнее читать справа налево:

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n.$$

Чтобы перемножить степени с одинаковыми показателями, достаточно перемножить основания этих степеней, а показатель оставить прежним.
Например,

$$2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 216;$$

$$12^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \left(12 \cdot \frac{1}{4}\right)^5 = 3^5 = 243;$$

$$16^4 \cdot \left(\frac{1}{32}\right)^4 \cdot 4^4 = \left(16 \cdot \frac{1}{32} \cdot 4\right)^4 = 2^4 = 16.$$

Теорема 3. ***Чтобы возвести в степень дробь, достаточно возвести в эту степень отдельно числитель и знаменатель и первый результат разделить на второй***, то есть

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0).$$

Доказательство. По определению степени и правилу умножения дробей

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ \cdots \ \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdots a}{b \cdot b \cdots b} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Примеры:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}; \qquad \left(-\frac{5}{4}\right)^3 = -\frac{5^3}{4^3} = -\frac{125}{64}.$$

Упражнения

515. (У с т н о.) Какие из данных чисел являются положительными и какие — отрицательными:

1) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$; 4) $-(-\sqrt{5})^6$; 7) $(a\sqrt{3})^5$; 10) $(2-\sqrt{5})^6$;

2) $\left(-\frac{2}{5}\right)^4$; 5) $-\left(-\frac{3}{7}\right)^3$; 8) $(-a\sqrt{2})^{99}$; 11) $\left(\sqrt{7}-\frac{5}{2}\right)^7$;

3) $(-3)^5$; 6) $\left(-\frac{5}{2}\right)^n$; 9) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{17}$; 12) $(1-a)^{13}$?

516. Упростить выражения:

а) $2^2 4^2 8^2 \left(\frac{1}{16}\right)^2$; в) $(49)^4 \cdot \left(-\frac{1}{343}\right)^4 \cdot 21^4$;

б) $5^3 15^3 25^3 \left(\frac{1}{125}\right)^3$; г) $\left(-\frac{10}{17}\right)^3 \left(-\frac{51}{2}\right)^3 \left(-\frac{1}{15}\right)^3$.

517. Степени каких чисел не изменяются при произвольном изменении показателя?

Умножение и деление степеней с одинаковыми основаниями — § 69

Т е о р е м а 1. ***Чтобы перемножить степени с одинаковыми основаниями, достаточно показатели степеней сложить, а основание оставить прежним,*** то есть

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению степени

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a\,a\,\ldots\,a}_{m} \cdot \underbrace{a\,a\,\ldots\,a}_{n} = \underbrace{a\,a\,\ldots\,a}_{m+n} = a^{m+n}.$$

Например,

$$2^2 \cdot 2^3 = 2^5 = 32; \quad (-3) \cdot (-3)^3 = (-3)^4 = 81.$$

Мы рассмотрели произведение двух степеней. На самом же деле доказанное свойство верно для любого числа степеней с одинаковыми основаниями.

Например,

$$a^m \cdot a^n \cdot a^k \cdot a^l = a^{m+n+k+l}.$$

Т е о р е м а 2. ***Чтобы разделить степени с одинаковыми основаниями, когда показатель делимого больше показателя делителя, достаточно из показателя делимого***

вычесть показатель делителя, а основание оставить прежним, то есть ***при*** $m > n$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0).$$

Доказательство. Напомним, что частным от деления одного числа на другое называется число, которое при умножении на делитель дает делимое. Поэтому доказать формулу $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, где $a \neq 0$, — это все равно, что доказать формулу

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^m.$$

Если $m > n$, то число $m - n$ будет натуральным; следовательно, по теореме 1

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^{(m-n)+n} = a^m.$$

Теорема 2 доказана.

Например, $\frac{3^{10}}{3^8} = 3^{10-8} = 3^2 = 9$; $\frac{4^6}{4^3} = 4^{6-3} = 4^3 = 64$.

Следует обратить внимание на то, что формула

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$$

доказана нами лишь в предположении, что $m > n$. Поэтому из доказанного пока нельзя делать, например, таких выводов:

$$\frac{3^8}{3^{10}} = 3^{8-10} = 3^{-2}.$$

К тому же, степени с отрицательными показателями нами еще не рассматривались, и мы пока что не знаем, какой смысл можно придать выражению 3^{-2}.

Теорема 3. ***Чтобы возвести степень в степень, достаточно перемножить показатели, оставив основание степени прежним***, то есть

$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

Доказательство. Используя определение степени и теорему 1 этого параграфа, получаем:

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \ \ldots \ a^n}_{m} = a^{\overbrace{n+n+\ldots+n}^{m}} = a^{nm},$$

что и требовалось доказать.

Например, $(2^3)^2 = 2^6 = 64$;

$$\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^5\right]^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}.$$

Формулу $(a^n)^m = a^{nm}$ иногда полезнее читать справа налево:

$$a^{nm} = (a^n)^m.$$

Упражнения

518. (У с т н о.) Определить x из уравнений:

1) $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^6 = 2^x$; 3) $4^2 \cdot 4^4 \cdot 4^6 \cdot 4^8 \cdot 4^{10} = 2^x$;

2) $3 \cdot 3^3 \cdot 3^5 \cdot 3^7 \cdot 3^9 = 3^x$; 4) $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{125} \cdot \frac{1}{625} = \frac{1}{5^x}$.

519. (У с т н о.) Упростить:

1) $\frac{5^{10}}{5^9}$; 5) $(4^2)^5$; 8) $(9^6)^7$;

2) $\frac{(-7)^7}{(-7)^5}$; 6) $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^5\right]^2$; 9) $\left[\frac{(-a)^m}{b^n}\right]^k$;

3) $\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{99}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{96}}$; 7) $\left[\left(-\frac{6}{7}\right)^3\right]^4$; 10) $\left[-\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^4\right]^3$.

4) $\frac{(\sqrt{2})^{15}}{(-\sqrt{2})^{11}}$;

520. (У с т н о.) Упростить:

1) $\frac{(\sqrt{2})^{15}}{(\sqrt{2})^{17}}$; 2) $\frac{(-5)^{100}}{(-5)^{103}}$; 3) $\frac{3^{40}}{(-3)^{100}}$; 4) $\frac{(2\sqrt{3})^{10}}{12^5}$.

521. Данные выражения представить в виде степеней с одинаковыми основаниями:

1) 32 и 64; 3) 8^5 и 16^3; 5) 4^{100} и 32^{50};
2) -1000 и 100; 4) -27 и -243; 6) $81^{75} \cdot 8^{200}$ и $3^{600} \cdot 4^{150}$.

Упростить выражения:

522. $(-2a)^6 - (-8a^3)^2 - [-(2a)^3]^3 - [2 \cdot (-a)^3]^2$.

523. $(-2a)^{10} - (-13a^5)^2 - [-(2a)^2]^5 - [2 \cdot (-a^5)]^2$.

524. $\left[\left(\frac{a^2b}{cd^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{ac^4}{b^2d^3}\right)^2\right] : \left[\left(\frac{a^2b^2}{cd^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{c^3}{b^3d}\right)^3\right]$.

525. $\left[\left(\frac{mnp}{a^2b}\right)^4 : \left(\frac{m^2n^2}{a^3b^2}\right)^2\right] \cdot \left[\left(\frac{a^2b^4c}{mp^3}\right)^3 : \left(\frac{a^3b^6c^3}{m^2p^5}\right)^2\right]$.

Сравнение степеней § 70

Теорема 1. ***Из двух степеней с одинаковыми показателями и положительными основаниями больше та, основание которой больше.*** Другими словами, если $a > b > 0$, то при любом натуральном n

$$a^n > b^n.$$

Это свойство было доказано нами в главе I (§ 12).

Пример. Какое число больше: 2^{300} или 3^{200}?

Для решения этой задачи представим данные числа в виде степеней с одинаковыми показателями, используя тождество

$$a^{mn} = (a^m)^n.$$

Имеем:

$$2^{300} = 2^{3 \cdot 100} = (2^3)^{100} = 8^{100}; \quad 3^{200} = 3^{2 \cdot 100} = (3^2)^{100} = 9^{100}.$$

Так как $9 > 8$, то $9^{100} > 8^{100}$. Следовательно,

$$3^{200} > 2^{300}.$$

Теорема 2. ***Если*** $0 < a < 1$, ***то из двух степеней*** a^m ***и*** a^n ***больше та, показатель которой меньше.***

Если $a > 1$, ***то из двух степеней*** a^m ***и*** a^n ***больше та, показатель которой больше.***

Доказательство. Пусть $m > n$. Тогда $m = n + k$, где k — некоторое натуральное число. Поэтому

$$a^m = a^{n+k} = a^n a^k.$$

Если $0 < a < 1$, то $0 < a^k < 1$. Следовательно, $a^m = a^n \cdot a^k < a^n$. Если же $a > 1$, то $a^k > 1$. Следовательно, $a^m = a^n \cdot a^k > a^n$.

Например, $\left(\frac{1}{3}\right)^{100} < \left(\frac{1}{3}\right)^{50}$; $\quad 3^{100} > 3^{50}$.

Упражнения

526. Данные выражения представить в виде степеней с одинаковыми показателями и сравнить их по величине:

1) 4^2 и 2^8;
2) 27^3 и 9^6;
3) 125^2 и 25^2;
4) 4^{300} и 3^{400};
5) $-\frac{1}{8}$ и $\left(-\frac{1}{32}\right)^3$;
6) $\left(-\frac{6}{7}\right)^4$ и $\left(\frac{36}{49}\right)^6$;
7) $\left(\frac{1}{16}\right)^{100}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^{500}$.

527. Данные выражения представить в виде степеней с одинаковыми основаниями и сравнить их по величине:

1) 8^5 и 16^3;
2) 4^{100} и 32^{50};
3) $(-3)^{75}$ и $(-27)^{15}$;
4) $81^{150} \cdot 8^{200}$ и $3^{600} \cdot 16^{75}$.

528. Что больше: $(a^n)^m$ или $(a^m)^n$?

Степени с нулевыми и отрицательными показателями § 71

В § 69 мы доказали (см. теорему 2), что при $m > n$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0).$$

Вполне естественно желание распространить эту формулу и на случай, когда $m < n$. Но тогда число $m - n$ будет либо отрицательным, либо равным нулю. А мы до сих пор говорили лишь о степенях с натуральными показателями. Таким образом, мы сталкиваемся с необходимостью ввести в рассмотрение степени действительных чисел с нулевыми и отрицательными показателями.

Определение 1. *Любое число a, не равное нулю, в нулевой степени равно единице, то есть при* $a \neq 0$

$$a^0 = 1. \tag{1}$$

Например, $(-13{,}7)^0 = 1$; $\pi^0 = 1$; $(\sqrt{2})^0 = 1$.

Число 0 нулевой степени не имеет, то есть выражение 0^0 не определено.

Определение 2. *Если $a \neq 0$ и n — натуральное число, то*

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \tag{2}$$

то есть *степень любого числа, неравного нулю, с целым отрицательным показателем равна дроби, числитель которой есть единица, а знаменатель — степень того же числа a, но с показателем, противоположным показателю данной степени.*

Например, $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{-\frac{1}{8}} = -8$.

Приняв эти определения, можно доказать, что при $a \neq 0$, формула

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \tag{3}$$

верна для любых натуральных чисел m и n, а не только для $m > n$.

Для доказательства достаточно ограничиться рассмотрением двух случаев: $m = n$ и $m < n$, поскольку случай $m > n$ уже рассмотрен в § 69.

Пусть $m = n$; тогда $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^n}{a^n} = 1$. Значит, левая часть равенства (3) равна 1. Правая же часть при $m = n$ обращается в

$$a^{m-n} = a^{n-n} = a^0.$$

Но по определению $a^0 = 1$. Таким образом, правая часть равенства (3) также равна 1. Следовательно, при $m = n$ формула (3) верна.

Теперь предположим, что $m < n$. Разделив числитель и знаменатель дроби $\frac{a^m}{a^n}$ на a^m, получим:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{a^m}}.$$

Так как $n > m$, то $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$. Поэтому $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$. Используя определение степени с отрицательным показателем, можно записать $\frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}$. Итак, при $m < n$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, что и требовалось доказать. Формула (3) доказана теперь для любых натуральных чисел m и n.

З а м е ч а н и е. Отрицательные показатели позволяют записывать дроби без знаменателей. Например,

$$\frac{1}{3} = 3^{-1}; \quad \frac{2}{5} = 2\cdot 5^{-1}; \text{ вообще, } \frac{a}{b} = a\cdot b^{-1}.$$

Однако не следует думать, что при такой записи дроби превращаются в целые числа. Например, 3^{-1} есть такая же дробь, как и $\frac{1}{3}$, $2\cdot 5^{-1}$ такая же дробь, как и $\frac{2}{5}$, и т. д.

Упражнения

529. Вычислить:

1) 3^{-3}; 2^{-1}; $(-1)^5 \cdot \frac{6}{3^{-4}}$;

2) $\frac{5^{-2}}{2^{-5}}$; $\frac{(-2)^{-3}}{(\sqrt{3})^0}$; $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$; $-\frac{10^{-3}}{(-2)^5}$;

3) $\left[6 - 4\left(\frac{3}{7}\right)^0\right]^{-2}$;

4) $\frac{3^3\cdot 3^{-1} + (-1{,}5)^0}{2^{-2}}$;

5) $\frac{2^{-3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{-4}\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{10^{-1} + \left(-\frac{1}{5}\right)^0}$.

530. Записать без знаменателей дроби:

1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{1}{625}$; 3) $\frac{10}{17}$; 4) $-\frac{2}{3}$.

531. Данные десятичные дроби записать в виде целых выражений, используя отрицательные показатели:

1) 0,01;	3) — 0,00033;	5) — 7,125;
2) 0,65;	4) — 0,5;	6) 75,75.

Свойства степеней с целыми показателями § 72

В § 68 и 69 мы доказали следующие свойства степеней с натуральными показателями:

1) $(a\cdot b)^m = a^m\cdot b^m$;

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$;

3) $a^m\cdot a^n = a^{m+n}$;

4) $a^m : a^n = a^{m-n}$;

5) $(a^m)^n = a^{mn}$.

Все эти свойства оказываются справедливыми и для степеней с любыми целыми (положительными, отрицательными и нулевыми) показателями, если только числа a и b не равны нулю.

Докажем, например, что при $a \neq 0$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \tag{1}$$

где m и n — любые целые числа.

Поскольку для натуральных чисел m и n формула (1) уже доказана, то нам остается рассмотреть лишь следующие три случая: 1) числа m и n отрицательны; 2) одно из чисел m и n положительно, а другое — отрицательно; 3) хотя бы одно из чисел m и n равно нулю.

Случай 1. Пусть m и n — отрицательные числа. Тогда по определению степени с отрицательным показателем

$$a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}}.$$

Так как m и n отрицательны, то $-m$ и $-n$ положительны. Поэтому

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m-n} = a^{-(m+n)}.$$

Значит, $\frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}}$. Используя определение степени с отрицательным показателем, запишем:

$$\frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

Следовательно,

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Случай 2. Один из показателей m и n положителен, а другой — отрицателен. Пусть, например, $m > 0$, а $n < 0$. По определению степени с отрицательным показателем

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{a^m}{a^{-n}}.$$

Число $-n$ положительно; значит, по доказанному в § 71

$$\frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m-(-n)} = a^{m+n}.$$

Поэтому

$$a^m \cdot a^n = \frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m+n}.$$

Случай 3. Хотя бы один из показателей m и n равен нулю. Пусть, например, $m = 0$. Тогда по определению нулевой степени

$$a^m \cdot a^n = a^0 \cdot a^n = 1 \cdot a^n = a^n,$$

но $a^{m+n} = a^{0+n} = a^n$. Значит, формула

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

верна и в этом случае.

Таким образом, при $a \neq 0$ формула

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

верна для любых целых чисел m и n.

Аналогично могут быть доказаны и остальные четыре свойства степеней с целыми показателями, упомянутые в начале этого параграфа.

Примеры. 1) $4^{-5} \cdot 4^8 = 4^3 = 64$;

$$2)\ (3^2)^{-4} = 3^{-8} = \frac{1}{6561};$$

$$3)\ \left[\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]^3 = [(5^{-1})^{-2}]^3 = [5^2]^3 = 5^6 = 15\,625.$$

В заключение отметим еще два свойства степеней с целыми показателями (заучивать эти свойства не нужно).

6) Если $a > b > 0$ и n отрицательно, то $a^n < b^n$, то есть ***из двух степеней с положительными основаниями и одинаковыми отрицательными показателями больше та, основание которой меньше.***

Например,

$$5^{-3} < 4^{-3} \quad \left(\frac{1}{125} < \frac{1}{64}\right); \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \quad (9 > 4)$$

и т. д.

7) ***Если $0 < a < 1$, то из двух степеней a^m и a^n больше та, показатель которой меньше.***

Если $a > 1$, то из двух степеней a^m и a^n больше та, показатель которой больше. Под m и n здесь подразумеваются любые целые числа, а не только натуральные.

Например,
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}, \text{ или } 32 > 16;$$

$$2^{-5} < 2^{-4}, \text{ или } \frac{1}{32} < \frac{1}{16}$$

и т. д.

Предлагаем учащимся доказать эти свойства самостоятельно.

Упражнения

532. Вычислить:

а) $a^5 \cdot a^{-3}$; $a^4 \cdot a^{-1}$; $a^3 : a^{-1}$; $a^{-3} : a^{-1}$;

б) $3a^5 \cdot 4a^4$; $5a^n : \frac{1}{2}a^{-n}$; $\frac{3}{2}a^{-m} : a^m$;

в) $3^{12} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{-4}$; $8^{-5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{15}$; $\frac{2^{-1} \cdot a^3(a+b)}{3^{-2}a^{-2}(a+b)^{-3}}$;

г) $[a-(1-a)^{-1}]\cdot\dfrac{(a-2)+a^{0}}{\dfrac{1}{a^{-2}}-a+1}$;

д) $(x^{-2}+a^{-3})\cdot(x^{-2}-a^{-3})$;

е) $\dfrac{a^{-2}b^{-1}+a^{-1}b^{-2}}{a^{-2}-b^{-2}}+a^{3}(a^{2}-2ab+b^{2})^{-2}$.

533. Какое число больше:

а) 5^{-63} или 5^{-64};

б) 5^{-63} или 6^{-61};

в) 5^{-63} или $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-63}$;

г) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{63}$ или 5^{-63}?

534. Упростить выражение

$$\frac{[1,5(a-1)]^{-2}}{[3(a-b)]^{-2}}:\left[1+a^{-1}-2b^{-1}+\frac{(1-b^{-1})^{2}}{a^{-1}-1}\right]$$

и найти его числовое значение при

$$a=-4,\ b=-\frac{1}{2}.$$

535. При каком показателе n степень a^n не зависит от основания a?

Функции $y = x^n$ при $n = 1, 2, 3$ § 73

Каждому значению величины x формула

$$y = x^n,$$

где n — натуральное число, ставит в соответствие вполне определенное значение величины y. Следовательно, эта формула определяет y как функцию аргумента x. Рассмотрим такие функции при $n = 1, 2, 3$.

1. **Функция $y = x$.** Эта функция определена для всех значений x. Поэтому можно сказать, что областью определения функции $y = x$ является совокупность всех чисел.

Данная функция принимает любые числовые значения. Множество всех значений, которые принимает та или иная функция, называется *областью изменения* этой функции. Поэтому можно сказать, что областью изменения функции $y = x$ также является совокупность всех чисел.

График функции $y = x$ (рис. 94) есть прямая, проходящая через начало координат и разделяющая первый и третий координатные углы пополам. Этот график хорошо иллюстрирует свойства функции $y = x$.

Так, большему значению аргумента x соответствует и большее значение функции y. Например, при $x_2 > x_1$ $y_2 > y_1$ (рис. 94). Такие функции принято называть *монотонно возрастающими*.

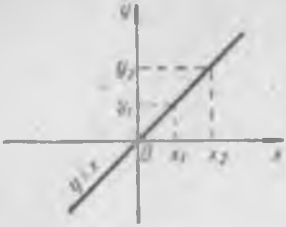


Рис. 94.

Функция $y = x$ *нечетная*. Это означает, что при изменении знака аргумента на противоположный она, не изменяясь по абсолютной величине, изменяет свой знак на противоположный. График функции $y = x$ симметричен относительно начала координат.

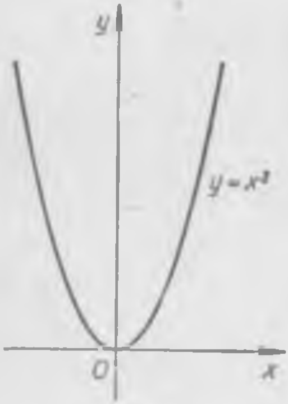


Рис. 95.

2. **Функция** $y = x^2$. Эта функция была подробно изучена нами в главе III. Областью ее определения является множество всех действительных чисел, а областью изменения — множество всех неотрицательных чисел. Графиком этой функции является направленная вверх парабола с вершиной в начале координат (рис. 95). Как видно из рисунка, при отрицательных значениях аргумента x функция $y = x^2$ *монотонно убывает*. Это означает, что из двух отрицательных значений аргумента большему соответствует меньшее значение функции. При положительных значениях аргумента функция $y = x^2$ монотонно возрастает. Это означает, что из двух положительных значений аргумента большему соответствует большее значение функции. При $x = 0$ функция принимает наименьшее значение, равное нулю. Наибольшего значения функция не имеет.

Функция $y = x^2$ *четна*. Это означает, что изменение знака аргумента x на противоположный не изменяет значения функции y. График такой функции симметричен относительно оси y.

3. **Функция** $y = x^3$. Областью определения этой функции является множество всех действительных чисел. Функция является нечетной, поскольку $(-x)^3 = -x^3$. Поэтому для построения ее графика достаточно составить таблицу значений только для положительных значений аргумента x:

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y=x^3$	0	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{8}$	1	8	27

Значения функции для отрицательных x отличаются от значений функции для соответствующих положительных x только знаками. Например, при $x = \frac{1}{4}$ $y = \frac{1}{64}$; поэтому при $x = -\frac{1}{4}$ y будет равен $-\frac{1}{64}$; при $x = 2$ $y = 8$; поэтому при $x = -2$ y будет равен -8 и т. д. Теперь, используя составленную таблицу и свойство нечетности функции $y = x^3$, построим график этой функции (рис. 96). Кривая, изображенная на рисунке 96, называется *кубической параболой*.

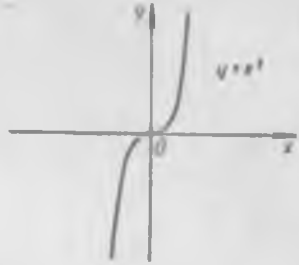


Рис. 96.

Кубическая парабола наглядно демонстрирует, что функция $y = x^3$ всюду монотонно возрастает, принимая любые значения. Областью изменения этой функции является совокупность всех действительных чисел. Следует особо отметить поведение этой кривой вблизи начала координат. Здесь кубическая парабола подходит к оси абсцисс, как бы одновременно и касаясь этой оси и пересекая ее.

Упражнения

536. Какими общими свойствами обладают функции $y = x$, $y = x^2$ и $y = x^3$?

537. Построить графики функций:

а) $y = x^3 - 1$; б) $y = (x - 1)^3$; в) $y = (x + 2)^3$; г) $y = |x^3|$.

Функции $y = x^n$ при $n = -1$ и $n = -2$ — § 74

1. Функция $y = x^{-1}$. Областью определения функции $y = x^{-1}$, или $y = \frac{1}{x}$, является множество всех действительных чисел, кроме нуля. Эта функция нечетна, так как $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$. Поэтому для построения ее графика достаточно составить таблицу значений только для положительных значений аргумента x:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	2	3	4
$y = x^{-1}$	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Используя эту таблицу и свойство нечетности функции $y = x^{-1}$, построим ее график (рис. 97). Этот график, как видно из рисунка, состоит из двух кривых, одна из которых целиком находится

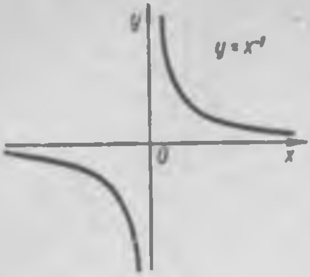


Рис. 97.

в первом, а другая — в третьем координатном углу. Они симметричны друг другу относительно начала координат. Вместе эти кривые называются *гиперболой*, а каждая из кривых в отдельности — *ветвью гиперболы*.

Заметим, что при всех положительных значениях x функция $y = x^{-1}$ монотонно убывает. То же верно и для всех отрицательных значений x. Однако было бы ошибочно утверждать, что эта функция является монотонно убывающей всюду. Например, значению аргумента $x_1 = -1$, соответствует значение функции $y_1 = -1$, а значению аргумента $x_2 = +1$ — значение функции $y_2=1$. Имеем: $x_2>x_1$ и $y_2>y_1$. Для монотонно убывающей функции из $x_2> x_1$ должно вытекать $y_2< y_1$. Но здесь это условие не выполняется. Следовательно, говорить, что функция $y=x^{-1}$ всюду монотонно убывает, нельзя. Однако можно сказать, что эта функция убывает на любом отрезке, на котором она определена (то есть на любом отрезке оси x, не содержащем нуля).

Функция $y = x^{-1}$ принимает любые числовые значения, кроме нуля. Значит, областью ее изменения, так же как и областью определения, является множество всех действительных чисел, кроме нуля.

Следует обратить внимание на поведение функции $y = x^{-1}$ вблизи точки $x = 0$. Если значения аргумента x неограниченно приближаются к нулю, оставаясь положительными, то соответствующие значения функции y неограниченно растут. Если же значения аргумента x неограниченно приближаются к нулю, оставаясь отрицательными, то соответствующие значения функции y неограниченно убывают.

2. **Функция** $y = x^{-2}$. Областью определения функции $y = x^{-2}$, или $y=\frac{1}{x^2}$, является множество всех действительных чисел, кроме нуля. Так как

$$(-x)^{-2} = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = x^{-2},$$

то функция $y =x^{-2}$ четна. Поэтому для построения графика этой функции достаточно составить таблицу ее значений только для положительных значений x:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	2	3
$y = x^{-2}= \frac{1}{x^2}$	16	4	$\frac{16}{9}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$

Значения этой функции при отрицательных x равны ее значениям при соответствующих положительных x. Например, $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=16$. Используя составленную таблицу и свойство четности функции $y=x^{-2}$, построим ее график (рис. 98). Он состоит из двух ветвей, одна из которых целиком расположена в первом, а другая — во втором координатном углу. Эти кривые симметричны друг другу относительно оси ординат. Необходимо подчеркнуть, что ни одну из них в отдельности нельзя считать графиком функции $y=x^{-2}$. Только взятые вместе, они образуют этот график.

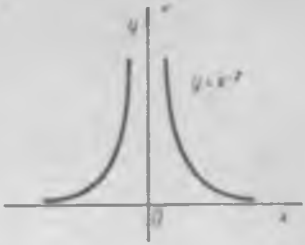


Рис. 98.

Функция $y=x^{-2}$, или $y=\frac{1}{x^2}$, принимает только положительные значения. Поэтому график ее расположен целиком выше оси x.

Когда значения аргумента x неограниченно растут (или неограниченно убывают), соответствующие значения функции y неограниченно приближаются к нулю, оставаясь все время положительными. При неограниченном приближении значений аргумента x к нулю (как слева, так и справа) соответствующие значения функции y неограниченно растут. Областью изменения функции $y=x^{-2}$ является совокупность всех положительных чисел.

Упражнение

538. Построить графики функций:

а) $y=(x-1)^{-1}$; в) $y=|x^{-1}|$; д) $y=x^{-2}-2$;

б) $y=(x+2)^{-1}$; г) $y=|x|^{-1}$; е) $y=\frac{x+2}{x+1}$.

Корень n-й степени из действительного числа a § 75

Пусть n — натуральное число, большее или равное 2, а a — произвольное действительное число. Тогда *корнем n-й степени из числа a* (обозначается $\sqrt[n]{a}$) *называется число, n-я степень которого равна a.*

Например, $\sqrt[3]{-8}=-2$, так как $(-2)^3=-8$; $\sqrt[4]{81}=3$, так как $3^4=81$. Число -3 также является корнем 4-й степени из числа 81, поскольку $(-3)^4=3^4=81$.

Вошло в обычай корни второй степени называть *квадратными*, а корни третьей степени — *кубическими*. В выражениях типа $\sqrt[2]{a}$ число 2 обычно опускают и пишут просто $\sqrt{a}$.

Фактически корень n-й степени из действительного числа мы определяем как корень уравнения

$$x^n = a.$$

Уравнения, как мы знаем, могут иметь, а могут и не иметь корней. Точно так же корень n-й степени из числа a может существовать, а может и не существовать. Когда же он существует и сколько различных значений может он принимать? Этот вопрос будет рассмотрен в следующих параграфах.

Упражнения

539. В какую сумму обратится денежный вклад в a рублей через n лет, если ежегодный прирост составляет p%?

540. Определить ежегодный прирост, если известно, что через каждые 20 лет вклад увеличивается вдвое.

541. Производительность труда увеличивается каждый год на одно и то же число процентов по сравнению с предыдущим годом. В результате за три года она возросла на 27%. На сколько процентов она увеличивалась ежегодно?

542. На сколько процентов нужно увеличивать производительность труда ежегодно, чтобы за 7 лет она возросла вдвое?

Корень n-й степени из положительного числа a § 76

Теорема 1. ***Для любого положительного числа a существует положительный корень n-й степени.***

Другими словами, для любого натурального числа n и любого положительного числа a уравнение

$$x^n = a$$

имеет положительный корень.

Мы не будем доказывать эту теорему, а укажем лишь, как можно находить приближенное значение положительного корня степени n из положительного числа a. Найдем, например, приближенное значение $\sqrt[3]{2}$.

Приближенными значениями корня с точностью до 1 будут, очевидно, 1 (с недостатком) и 2 (с избытком). Чтобы найти первый десятичный знак приближенного значения $\sqrt[3]{2}$, найдем в ряде

1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2,0

— два таких последовательных числа, чтобы куб первого из них был меньше 2, а куб второго — больше 2. Для этого возьмем из чисел нашего ряда среднее 1,5 и возвысим его в куб. Мы найдем: $1{,}5^3 = 3{,}375$, что больше 2. Так как числа, стоящие справа от 1,5, при возвышении в куб дают результат еще больший, то мы можем отбросить всю правую половину ряда и дальше испытывать лишь числа

$$1{,}1;\ 1{,}2;\ 1{,}3;\ 1{,}4.$$

Возвысим в куб среднее из этих чисел — 1,2. Получим 1,728, что меньше 2. Куб числа 1,1 будет еще меньше. Значит, дальнейшему испытанию подлежат только числа 1,3 и 1,4.

Возвысив в куб 1,3, получим 2,197, что больше 2. Итак, мы нашли два числа 1,2 и 1,3, таких, что куб первого из них меньше 2, а куб второго больше 2. Эти числа и будут приближенными значениями $\sqrt[3]{2}$ с точностью до 0,1: 1,2 — с недостатком, а 1,3 — с избытком.

Для нахождения сотых долей нужно испытать следующие числа:

$$1{,}21;\ 1{,}22;\ 1{,}23;\ 1{,}24;\ \ldots;\ 1{,}29.$$

Взяв в этом ряде среднее число 1,25 и возвысив его в куб, найдем $1{,}25^3 = 1{,}953125$, что меньше 2. Значит, теперь надо испытать только числа

$$1{,}26;\ 1{,}27;\ 1{,}28;\ 1{,}29$$

Имеем: $1{,}26^3 = 2{,}000376$, что больше 2. Значит, приближенными значениями $\sqrt[3]{2}$ с точностью до 0,01 будут: 1,25 (с недостатком) и 1,26 (с избытком).

Если указанный процесс нахождения последовательных десятичных знаков корня продолжать дальше, то мы будем получать значения $\sqrt[3]{2}$ все с большей и большей точностью.

Мы показали на примере, как приближенно, но с любой степенью точности можно отыскать корень третьей степени из положительного числа 2. Таким же образом можно отыскивать приближенные значения корня любой степени из любого положительного числа.

Отметим, что если $\sqrt[n]{a}$ представим в виде конечной десятичной дроби, то в принципе с помощью описанного метода значение корня можно получить абсолютно точно (а не приближенно).

Теорема 2. ***Всякое положительное число а имеет ровно один положительный корень степени n.***

Доказательство будем вести методом от противного. Предположим, что существует несколько различных положительных корней n-й степени из положительного числа a. Пусть b и c — два таких корня. Тогда

$$b^n = c^n = a. \tag{1}$$

Так как числа b и c различные, то одно из них больше другого. Пусть, например, $b > c$. Тогда должно быть $b^n > c^n$, но это противоречит соотношению (1). Значит, наше предположение о существовании нескольких различных положительных корней неверно. Таким образом, существует только один положительный корень n-й степени из положительного числа a.

А существуют ли отрицательные корни n-й степени из положительного числа a? Ответ на этот вопрос дают последующие теоремы.

Теорема 3. ***Отрицательных корней нечетной степени из положительного числа не существует.***

Другими словами, при положительном a уравнение

$$x^{2k+1} = a$$

не имеет отрицательных корней.

Доказательство этой теоремы очень простое, и потому мы опускаем его. Учащиеся без особого труда могут провести его самостоятельно.

Теорема 4. ***Существует и притом только один отрицательный корень четной степени из положительного числа. Он отличается от положительного корня из этого числа лишь знаком.***

Доказательство. Пусть b есть положительный корень уравнения

$$x^{2k} = a \quad (a > 0).$$

Такой корень существует в силу теоремы 1. Но тогда

$$b^{2k} = a$$

и, следовательно,

$$(-b)^{2k} = a.$$

А это означает, что отрицательное число $-b$ является корнем n-й степени из числа a. Тем самым доказано *существование* отрицательного корня.

Предположим теперь, что отрицательных корней степени $2k$ из положительного числа a несколько. Пусть $-b$ и $-c$ — два таких корня. Тогда

$$(-b)^{2k} = (-c)^{2k} = a.$$

Отсюда вытекает, что

$$b^{2k} = c^{2k} = a.$$

Следовательно, существует два различных положительных корня степени $2k$ из положительного числа a: b и c. Но это противоречит теореме 2. Таким образом, наше предположение о существовании двух различных отрицательных корней степени $2k$ из числа a неверно. Тем самым доказана *единственность* отрицательного корня.

Теорема 4 доказана.

Объединяя теперь теоремы 1, 2, 3 и 4, мы приходим к следующему выводу.

Существует ровно один корень нечетной степени из положительного числа. Этот корень положительный.

Существует ровно два корня четной степени из положительного числа. Эти корни равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Примеры. $\sqrt[5]{32}=2$; $\sqrt[3]{125}=5$; $\sqrt[4]{16}=\pm 2$; $\sqrt[4]{81}=\pm 3$.

Упражнения

543. Найти все значения корней: а) $\sqrt[3]{125}$; б) $\sqrt[4]{1296}$.

544. Что можно сказать о числе a, если известно, что существует два различных значения корня $\sqrt{a}$?

545. Что можно сказать о числе a, если известно, что никакое положительное число не может быть значением $\sqrt[3]{a}$?

Арифметическое значение корня § 77

В предыдущем параграфе было показано, что любое положительное число имеет два корня четной степени: положительный и отрицательный. Например, $\sqrt{9}=\pm 3$; $\sqrt[4]{16}=\pm 2$ и т. д.

Положительный корень четной степени из положительного числа называется его *арифметическим значением* или *арифметическим корнем*. Так, арифметическим значением $\sqrt{9}$ будет число 3, а арифметическим значением $\sqrt[6]{64}$ — число 2.

Всюду в дальнейшем под $\sqrt[2k]{a}$ $(a>0)$ мы будем подразумевать арифметический корень степени $2k$ из числа a. Например, $\sqrt{16}=4$, $\sqrt{25}=5$ и т. д. В связи с этим полезно отметить следующую важную формулу:

$$\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, & \text{если } x>0,\\ -x, & \text{если } x<0,\\ 0, & \text{если } x=0.\end{cases}$$

Другими словами,

$$\sqrt{x^2}=|x|.$$

Ошибочно было бы написать $\sqrt{x^2}=x$, так как при отрицательных значениях x мы имели бы дело с отрицательным (неарифметическим) корнем.

Примеры:

1) $$\sqrt{(4-a)^2}=|4-a|=\begin{cases} 4-a, & \text{если } a<4,\\ a-4, & \text{если } a>4,\\ 0, & \text{если } a=4.\end{cases}$$

2) $\sqrt{(x^2+x+1)^2}=x^2+x+1$.

В данном случае знак модуля можно не писать, так как при любых значениях x $x^2 + x + 1 > 0$.

Упражнения

546. Найти арифметические значения корней:

а) $\sqrt{(x-1)^2}$; в) $\sqrt{(2x^3-3x+1)^2}$;

б) $\sqrt{(x+2)^2}$; г) $\sqrt{(-3x^2+x-1)^2}$.

547. Построить графики функций:

а) $y=\sqrt{(x-1)^2}$; в) $y=\sqrt{x^6}$;

б) $y=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$; г) $y=-\sqrt{x^4}$.

548. Вычислить сумму

$$\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(3-x)^2}.$$

549. Построить график функции

$$y=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(3-x)^2}.$$

550. Решить уравнение

$$\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(5-x)^2}=2.$$

551. Решить уравнения:

а) $\sqrt{(x+6)^2}=x+6$; в) $\sqrt{(x^2+2x-3)^2}=x^2+2x-3$;

б) $\sqrt{(1-2x)^4}=(1-2x)^2$; г) $\sqrt{(8-4x-x^2)^2}=x^2+4x-8$.

Корень n-й степени из отрицательного числа $-a$ § 78

Теорема 1. ***Корней четной степени из отрицательного числа не существует.***

Другими словами, уравнение

$$x^{2k} = -a \quad (a>0)$$

не имеет действительных корней.

Мы предлагаем учащимся доказать эту теорему самостоятельно.

Теорема 2. ***Существует и притом только один корень нечетной степени из отрицательного числа. Этот корень отрицателен.***

Другими словами, уравнение

$$x^{2k+1} = -a \quad (a>0)$$

имеет единственный корень. Этот корень является отрицательным.

Доказательство. Прежде всего покажем, что корень нечетной степени $2k+1$ из отрицательного числа $-a$ не может быть положительным. Если бы этот корень (обозначим его через b) был положительным, то в равенстве $b^{2k+1}=-a$ левая часть была бы положительной, а правая — отрицательной.

Теперь покажем, что отрицательный корень нечетной степени $2k+1$ из отрицательного числа $-a$ существует.

Число a положительно, и потому оно имеет положительный корень степени $2k+1$ (теорема 1, § 76). Обозначим его через b. Тогда

$$b^{2k+1}=a.$$

Отсюда вытекает, что

$$(-b)^{2k+1}=-b^{2k+1}=-a.$$

Но это и означает, что отрицательное число $-b$ является корнем степени $2k+1$ из отрицательного числа $-a$.

Осталось лишь показать, что существует не более одного отрицательного корня нечетной степени $2k+1$ из числа $-a$.

Для доказательства предположим противное, т. е. что существует несколько таких корней. Пусть $-b$ и $-c$ — два таких корня. Тогда

$$(-b)^{2k+1}=-a, \qquad (-c)^{2k+1}=-a. \tag{1}$$

Но так как число $2k+1$ нечетно, то $(-b)^{2k+1}=-b^{2k+1}$; $(-c)^{2k+1}=-c^{2k+1}$. Поэтому из (1) следует, что

$$b^{2k+1}=a, \ c^{2k+1}=a.$$

А это, в свою очередь, означает, что положительное число a имеет два различных положительных корня степени $2k+1$: b и c; но это противоречит теореме 2, § 76.

Теорема полностью доказана. Объединяя теоремы 1 и 2, мы приходим к следующему выводу.

Корней четной степени из отрицательного числа не существует.

Существует ровно один корень нечетной степени из отрицательного числа. Этот корень является отрицательным.

Примеры.

Корней $\sqrt[4]{-81}$; $\sqrt[100]{-25}$ не существует; $\sqrt[5]{-32}=-2$; $\sqrt[3]{-125}=-5$.

Упражнения

552. (Устно.) Какие из данных выражений не имеют смысла: $\sqrt{-9}$; $\sqrt[3]{-8}$; $\sqrt{-0,25}$; $\sqrt[4]{-81}$; $\sqrt[7]{-2}$?

553. Найти области определения следующих функций:

а) $y=\sqrt{x-1}$;

б) $y=\sqrt[5]{x-1}$;

в) $y=\sqrt[12]{3x^2+5x-2}$;

г) $y=\sqrt[5]{(x+2)(x-7)}$;

д) $y=\sqrt[6]{x^2+x+1}$;

е) $y=\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[4]{5x-5}$.

Теорема 1. ***Корень n-й степени из произведения положительных чисел равен произведению корней n-й степени из сомножителей***, то есть при $a>0$, $b>0$ и натуральном n

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}. \tag{1}$$

Доказательство. Напомним, что корень n-й степени из положительного числа ab есть такое положительное число, n-я степень которого равна ab. Поэтому доказать равенство (1) — это все равно, что доказать равенство

$$(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=ab.$$

По свойству степени произведения

$$(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n.$$

Но по определению корня n-й степени $(\sqrt[n]{a})^n=a$, $(\sqrt[n]{b})^n=b$. Поэтому $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=ab$. Теорема доказана.

Требование $a>0$, $b>0$ существенно лишь для четного n, поскольку при отрицательных a и b и четном n корни $\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt[n]{b}$ не определены. Если же n нечетно, то формула (1) справедлива для любых a и b (как положительных, так и отрицательных).

Примеры: $\sqrt{16\cdot121}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{121}=4\cdot11=44.$

$\sqrt[3]{-125\cdot27}=\sqrt[3]{-125}\cdot\sqrt[3]{27}=-5\cdot3=-15.$

Формулу (1) полезно использовать при вычислении корней, когда подкоренное выражение представляется в виде произведения точных квадратов. Например,

$$\sqrt{153^2-72^2}=\sqrt{(153+72)(153-72)}=\sqrt{225\cdot81}=15\cdot9=135.$$

Теорему 1 мы доказали для случая, когда под знаком радикала в левой части формулы (1) стоит произведение двух положительных чисел. На самом же деле эта теорема верна для любого числа положительных сомножителей, то есть при любом натуральном $k>2$:

$$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\ldots a_k}=\sqrt[n]{a_1}\cdot\sqrt[n]{a_2}\ldots\sqrt[n]{a_k}.$$

Следствие. Читая это тождество справа налево, мы получаем следующее правило умножения корней с одинаковыми показателями:

$$\sqrt[n]{a_1}\cdot\sqrt[n]{a_2}\ldots\sqrt[n]{a_k}=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\ldots a_k}.$$

Чтобы перемножить корни с одинаковыми показателями, достаточно перемножить подкоренные выражения, оставив показатель корня прежним.

Например, $\sqrt{3}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{3\cdot8\cdot6}=\sqrt{144}=12.$

Теорема 2. ***Корень n-й степени из дроби, числитель и знаменатель которой — положительные числа, равен частному от деления корня той же степени из числителя на корень той же степени из знаменателя***, то есть при $a>0$ и $b>0$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \qquad (2)$$

Доказать равенство (2) — это значит показать, что

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{a}{b}.$$

По правилу возведения дроби в степень и определению корня n-й степени имеем:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\frac{a}{b}.$$

Тем самым теорема доказана.

Требование $a>0$ и $b>0$ существенно лишь при четном n. Если же n нечетно, то формула (2) верна и для отрицательных значений a и b.

Примеры: $\sqrt{\frac{36}{49}}=\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}}=\frac{6}{7}$;

$$\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}=\frac{\sqrt[3]{-64}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{-4}{3}=-\frac{4}{3}.$$

Следствие. Читая тождество $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ справа налево, мы получаем следующее правило деления корней с одинаковыми показателями:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Чтобы разделить корни с одинаковыми показателями, достаточно разделить подкоренные выражения, оставив показатель корня прежним.

Например, $\frac{\sqrt{126}}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{126}{14}}=\sqrt{9}=3.$

Упражнения

554. В каком месте доказательства теоремы 1 мы использовали то, что a и b положительны?

Почему при нечетном n формула (1) верна и для отрицательных чисел a и b?

При каких значениях x верны данные равенства (№ 555—560):

555. $\sqrt{x^2-9}=\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{x+3}$.

556. $\sqrt[4]{(x-2)(8-x)}=\sqrt[4]{x-2}\cdot\sqrt[4]{8-x}$.

557. $\sqrt[3]{(x+1)(x-5)}=\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{x-5}$.

558. $\sqrt{x(x+1)(x+2)}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+2}$.

559. $\sqrt{(x-a)^2}=(\sqrt{x-a})^2$.

560. $\sqrt[3]{(x-5)^2}=(\sqrt[3]{x-5})^2$.

561. Вычислить:

а) $\sqrt{173^2-52^2}$; в) $\sqrt{200^2-56^2}$;

б) $\sqrt{373^2-252^2}$; г) $\sqrt{242{,}5^2-46{,}5^2}$.

562. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 205 *см*, а один из катетов 84 *см*. Найти другой катет.

563. Во сколько раз:

а) $\sqrt{45}$ больше $\sqrt{5}$; б) $\sqrt[3]{\frac{5}{256}}$ меньше $\sqrt[3]{\frac{5}{64}}$?

Извлечение корня из степени. Возведение корня в степень. Извлечение корня из корня § 80

Пусть a — произвольное положительное число, а m и n — натуральные числа, причем m делится без остатка на n. Тогда

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}. \qquad (1)$$

Например, $\sqrt[3]{5^6}=5^2=25$; $\sqrt[4]{3^{12}}=3^3=27$.

Другими словами, верна следующая теорема.

Теорема 1. ***Чтобы извлечь корень из степени положительного числа, показатель которой делится нацело на показатель корня, достаточно показатель подкоренного выражения разделить на показатель корня, оставив основание степени прежним.***

Доказательство. На основании правила возведения степени в степень имеем:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^{\frac{mn}{n}}=a^m.$$

Но это и означает, что $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$.

Теорема 2. ***Чтобы корень из положительного числа возвести в степень, достаточно возвести в эту степень подкоренное число, оставив показатель корня без изменения***, то есть при $a > 0$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}. \tag{2}$$

Действительно,

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \ldots \sqrt[n]{a}}_{m} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \ldots a}_{m}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Если n — нечетное число, то формула (2) верна и для $a < 0$.

Примеры: $\left(\sqrt[4]{2}\right)^3 = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$;

$\left(\sqrt[6]{16}\right)^3 = \sqrt[6]{16^3} = \sqrt[6]{2^{12}} = 2^2 = 4$;

$\left(\sqrt[3]{-2}\right)^5 = \sqrt[3]{(-2)^5} = \sqrt[3]{-32}$.

Теорема 3. ***Величина корня из положительного числа не изменится, если показатели корня и подкоренного выражения умножить на одно и тоже натуральное число или разделить на их общий множитель.***

Другими словами: а) если $a > 0$ и m, n, k — натуральные числа, то

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}; \tag{3}$$

2) если $a > 0$ и k — общий делитель чисел m и n, то

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{k}]{a^{\frac{m}{k}}}. \tag{4}$$

Доказать формулу (3) — это значит показать, что

$$\left(\sqrt[nk]{a^{mk}}\right)^n = a^m.$$

По правилу возведения корня в степень

$$\left(\sqrt[nk]{a^{mk}}\right)^n = \sqrt[nk]{a^{mkn}}.$$

Показатель mnk степени делится нацело на показатель nk корня. Следовательно, по теореме 1 $\sqrt[nk]{a^{mkn}} = a^m$. Поэтому $\left(\sqrt[nk]{a^{mk}}\right)^n = a^m$. Это и означает, что $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$.

Формула (4) легко вытекает из (3). Предлагаем учащимся самостоятельно убедиться в этом.

Примеры. $\sqrt[4]{3} = \sqrt[8]{3^2}$; $\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[9]{2^6}$; $\sqrt[15]{a^{10}} = \sqrt[3]{a^2}$.

Теорема 4. ***Чтобы извлечь корень из корня, достаточно перемножить показатели этих корней, не изменяя подкоренного числа***, то есть

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad (a > 0). \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 2

$$\left(\sqrt[nm]{a}\right)^n = \sqrt[nm]{a^n}.$$

Величина корня не изменится, если показатель корня и показатель подкоренного числа разделить на их общий множитель (теорема 3); поэтому $\sqrt[nm]{a^n} = \sqrt[m]{a}$. Итак, $\left(\sqrt[nm]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a}$. Но по определению корня это и означает, что $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$.

Например, $\sqrt{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[6]{4}$,

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[15]{2}.$$

Упражнения

564. Упростить выражения:

1) $\sqrt[10]{2^5}$; 3) $\sqrt[12]{(-3)^4}$; 5) $\sqrt[6]{\frac{8}{27}}$; 7) $\sqrt[10]{\left(-\frac{36}{81}\right)^4}$.

2) $\sqrt[12]{3^4}$; 4) $\sqrt[8]{a^4}$; 6) $\sqrt{\frac{625}{256}}$;

565. Упростить выражения:

1) $\sqrt[6]{(\sqrt{7}-2)^3}$; 3) $\sqrt[9]{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^3}$; 5) $\sqrt[8]{(\sqrt{5}-2)^4}$;

2) $\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^2}$; 4) $\sqrt[10]{(\sqrt{3}-4)^2}$; 6) $\sqrt[6]{(1-\sqrt{2})^3}$.

566. Упростить выражения:

1) $\sqrt[8]{[(x-1)(x+1)]^4}$; 2) $\sqrt[8]{(x^2-x+1)^4}$.

567. (У с т н о). Упростить выражения:

1) $\sqrt{\sqrt[3]{6}}$; 3) $\sqrt{\sqrt[4]{8}}$; 5) $\sqrt[5]{\sqrt{10}}$; 7) $\sqrt{\sqrt[3]{(-3)}}$;

2) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$; 4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{-243}}$; 6) $\sqrt[7]{\sqrt{7}}$; 8) $\sqrt[9]{\sqrt[9]{9}}$.

Вынесение множителя из-под знака корня и введение его под знак корня § 81

Иногда подкоренное выражение разлагается на такие множители, корни из которых извлекаются довольно легко. В таких случаях выражение можно упростить посредством вынесения множителя из-под знака корня. Например,

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3};$$

$$\sqrt[4]{1250} = \sqrt[4]{625 \cdot 2} = \sqrt[4]{5^4 \cdot 2} = \sqrt[4]{5^4} \cdot \sqrt[4]{2} = 5\sqrt[4]{2}.$$

Вынесение множителя за знак корня позволяет упростить и более сложные выражения. Так,

$$\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{98}=\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{25\cdot 2}-\sqrt{49\cdot 2}=$$
$$=3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-7\sqrt{2}=\sqrt{2};$$
$$\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{375}=\sqrt[3]{27\cdot 3}-\sqrt[3]{8\cdot 3}+$$
$$+\sqrt[3]{125\cdot 3}=3\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{3}=6\sqrt[3]{3}.$$

Иногда оказывается полезным, наоборот, ввести какой-нибудь множитель под знак корня.

Пусть, например, нужно вычислить приближенное значение $7\sqrt{8}$ с недостатком с точностью до 0,1. Введем 7 под знак корня. Для этого заметим, что $7=\sqrt{49}$. Поэтому $7\sqrt{8}=$ $=\sqrt{49}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{49\cdot 8}=\sqrt{392}$. Извлекая корень из 392 обычным способом, получим следующее приближенное значение этого корня с недостатком с точностью до 0,1: $\sqrt{392}\approx 19{,}7$. Если бы мы не ввели 7 под знак корня, а вычислили бы приближенное значение $\sqrt{8}$ с точностью до 0,1 $(\sqrt{8}\approx 2{,}8)$ и полученный результат умножили на 7, то получили бы $7\sqrt{8}\approx 19{,}6$, то есть ошиблись на 0,1. Этот пример показывает, какую пользу может оказать введение множителя под знак корня.

Кроме того, введение множителя под знак корня приводит иногда к значительному упрощению выражения. Например,

$$\sqrt[3]{16\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{16^2\cdot 2}}=\sqrt[3]{\sqrt{2^8\cdot 2}}=\sqrt[3]{\sqrt{2^9}}=$$
$$=\sqrt[6]{2^9}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}.$$

Упражнения

568. Не извлекая корней, определить, какое из данных чисел больше:

а) $2\sqrt{3}$ или $3\sqrt{2}$; в) $5\sqrt{7}$ или $8\sqrt{3}$;

б) $2\sqrt[3]{3}$ или $3\sqrt[3]{2}$; г) $3\sqrt[3]{4}$ или $4\sqrt[3]{2}$.

569. Вычислить:

а) $2\sqrt{3}-\sqrt{27}+3\sqrt{12}-2\sqrt{243}$;

б) $\sqrt{50}-5\sqrt{8}+\sqrt{2}+\sqrt{128}$;

в) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{686}-\sqrt[3]{16}$.

570. Упростить:

а) $\sqrt{5\sqrt[3]{625}}$; г) $\sqrt[5]{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{8}}}$;

б) $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3\sqrt[5]{3}}}$; д) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}}$;

в) $\sqrt[4]{12\sqrt{9\sqrt[3]{4}}}$; е) $\sqrt{\frac{a+1}{a-1}\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}}$.

571. Вычислить с точностью до 0,01:

а) $2\sqrt{7}$; б) $5\sqrt{3}$; в) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$;

г) $2\sqrt{7}+5\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

572. Вычислить:

а) $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{6})\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{3})$;

б) $(\sqrt{8}-3\sqrt{2}+\sqrt{10})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{1,6}+3\sqrt{0,4})$;

в) $(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})\cdot(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})$;

г) $(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})\cdot(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})$.

573. Что больше:

а) $\sqrt{2}$ или $\sqrt[3]{3}$; в) $\sqrt{8}$ или $\sqrt[3]{19}$;

б) $\sqrt[3]{12}$ или $\sqrt{5}$; г) $\sqrt[12]{2}$ или $\sqrt[15]{3}$?

Умножение и деление корней § 82

1. **Умножение корней.** В § 79 было получено правило умножения корней с одинаковыми показателями:

$$\sqrt[n]{a_1}\cdot\sqrt[n]{a_2}\ldots\sqrt[n]{a_k}=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\ldots a_k}.$$

Чтобы умножить корни с разными показателями, предварительно их нужно привести к общему показателю, а затем умножить как корни с одинаковыми показателями.

Пусть, например, надо умножить $\sqrt[n]{a}$ на $\sqrt[m]{b}$. Используя теорему 3 § 80, можно написать:

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[nm]{a^m};\quad \sqrt[m]{b}=\sqrt[mn]{b^n}.$$

Отсюда

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[nm]{a^m}\cdot\sqrt[nm]{b^n}=\sqrt[nm]{a^mb^n}.$$

Например, $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}=\sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{9^2}=\sqrt[6]{3^3\cdot 9^2}=\sqrt[6]{3^3\cdot 3^4}=$
$=\sqrt[6]{3^7}=3\sqrt[6]{3}$.

В качестве общего показателя для корней $\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt[m]{b}$ удобнее всего выбирать наименьшее общее кратное чисел n и m. Например, если нужно умножить $\sqrt[4]{2}$ на $\sqrt[6]{32}$, то в качестве общего показателя для данных корней удобно выбрать число 12, являющееся наименьшим общим кратным чисел 4 и 6.

Теорема 3 § 80 дает: $\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{2^3}$; $\sqrt[6]{32}=\sqrt[12]{32^2}=\sqrt[12]{2^{10}}$. Поэтому

$$\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{32}=\sqrt[12]{2^3}\cdot\sqrt[12]{2^{10}}=\sqrt[12]{2^{13}}=2\sqrt[12]{2}.$$

2. Деление корней. В § 79 было получено правило деления корней с о д и н а к о в ы м и показателями:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Чтобы разделить корни с р а з н ы м и показателями, предварительно их следует привести к общему показателю, а затем разделить как корни с одинаковыми показателями.

Например,

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^3}}=\sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}}=\sqrt[6]{2}.$$

Упражнения

574. Выполнить указанные действия:

а) $\sqrt[5]{a^3}\cdot\sqrt[15]{a^4}$;

б) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a}$;

в) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{6}}$;

г) $a\sqrt{4a}\cdot\sqrt[4]{4a}\cdot a^2\cdot\sqrt[8]{4a^3}$;

д) $\sqrt[12]{a^5}:\sqrt[4]{a}$;

е) $\sqrt[9]{a^8}:\sqrt[6]{a^5}$;

ж) $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}}$.

575. Что больше:

а) $\frac{\sqrt[15]{3^{10}}}{\sqrt[10]{3^3}}$ или $\frac{\sqrt[14]{3^9}}{\sqrt[9]{3^3}}$;   б) $\frac{\sqrt[8]{2^5}}{\sqrt[6]{2}}$ или $\frac{\sqrt[4]{2^7}}{\sqrt[8]{2^4}}$?

Освобождение от радикалов в знаменателе дроби § 83

Некоторые дроби, содержащие в знаменателях радикалы, с помощью преобразований могут быть сведены к дробям, которые уже не содержат радикалов в знаменателях. Поясним это на ряде частных примеров.

П р и м е р 1. Освободиться от радикала в знаменателе дроби $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Умножив числитель и знаменатель данной дроби на $\sqrt{3}$, получим:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}=\frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

П р и м е р 2. Освободиться от радикала в знаменателе дроби

$$\frac{5}{\sqrt[3]{12}}.$$

Число 12, стоящее под знаком радикала, разложим на множители: $12 = 2^2 \cdot 3$. До полного куба не хватает, очевидно, множителя $2 \cdot 3^2 = 18$. Умножив числитель и знаменатель данной дроби на $\sqrt[3]{18}$, получим:

$$\frac{5}{\sqrt[3]{12}} = \frac{5\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{12}\sqrt[3]{18}} = \frac{5\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3}\sqrt[3]{2 \cdot 3^2}} = \frac{5\sqrt[3]{18}}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}\sqrt[3]{18}.$$

Пример 3. Освободиться от радикалов в знаменателе дроби

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}.$$

Умножив числитель и знаменатель данной дроби на $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (это выражение является сопряженным к выражению $\sqrt{3}-\sqrt{2}$), получим:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{3+2\sqrt{6}+2}{3-2} =$$
$$= 5 + 2\sqrt{6}.$$

Пример 4. Вычислить

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

с точностью до 0,1.

В примере 3 мы получили:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 5 + 2\sqrt{6}.$$

Но $2\sqrt{6} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{24} \approx 4{,}8$ (с точностью до 0,1). Поэтому $5 + 2\sqrt{6} \approx 9{,}8$ (с точностью до 0,1).

Если бы мы вместо этого в исходную дробь подставили приближенные значения $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$ с точностью до 0,1:

$$\sqrt{3} \approx 1{,}7; \quad \sqrt{2} \approx 1{,}4,$$

то получили бы

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \approx \frac{3{,}1}{0{,}3} \approx 10{,}3,$$

что дает значительную ошибку.

Пример 5. Освободиться от радикалов в знаменателе дроби

$$\frac{4}{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}.$$

Освободиться от радикалов в знаменателе данной дроби можно в два приема. Сначала умножим числитель и знаменатель данной дроби на $1+\sqrt{3}+\sqrt{2}$. В результате мы освободимся от радикала $\sqrt{2}$:

$$\frac{4}{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{4[(1+\sqrt{3})+\sqrt{2}]}{[(1+\sqrt{3})-\sqrt{2}][(1+\sqrt{3})+\sqrt{2}]}=$$

$$=\frac{4(1+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(1+\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{4(1+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(4+2\sqrt{3})-2}=$$

$$=\frac{4(1+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{2+2\sqrt{3}}=\frac{2(1+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{1+\sqrt{3}}.$$

Затем числитель и знаменатель полученной дроби умножим на $1-\sqrt{3}$. В результате получим:

$$\frac{2(1+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{1+\sqrt{3}}=\frac{2(1+\sqrt{3}+\sqrt{2})(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=$$

$$=\frac{2(1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-3+\sqrt{2}-\sqrt{6})}{1-3}=2-\sqrt{2}+\sqrt{6}.$$

Пример 6. Освободиться от радикалов в знаменателе дроби

$$\frac{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}.$$

Умножим числитель и знаменатель данной дроби на неполный квадрат суммы чисел $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt[3]{3}$, то есть на $(\sqrt[3]{5})^2+\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{3}+(\sqrt[3]{3})^2$. Тогда в знаменателе получится разность кубов чисел $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt[3]{3}$: $(\sqrt[3]{5})^3-(\sqrt[3]{3})^3=5-3=2$, а в числителе $(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2})=\sqrt[3]{5^3}+\sqrt[3]{5^2\cdot 3}+\sqrt[3]{5\cdot 3^2}+\sqrt[3]{5^2\cdot 3}+\sqrt[3]{5\cdot 3^2}+\sqrt[3]{3^3}=5+\sqrt[3]{75}+\sqrt[3]{45}+\sqrt[3]{75}+\sqrt[3]{45}+3=8+2\sqrt[3]{75}+2\sqrt[3]{45}$.

Поэтому

$$\frac{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}=\frac{8+2\sqrt[3]{75}+2\sqrt[3]{45}}{2}=4+\sqrt[3]{75}+\sqrt[3]{45}.$$

Упражнения

576. Освободиться от радикалов в знаменателях дробей:

1) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt[3]{18}}$; 7) $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; 10) $\frac{1}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{24}}$;

2) $\frac{3}{\sqrt{6}}$; 5) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$; 8) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; 11) $\frac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$;

3) $\frac{1}{\sqrt[3]{75}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}$; 9) $\frac{15}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{7}}$; 12) $\frac{31}{2+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$.

577. Найти приближенные значения данных выражений с точностью до 0,01:

а) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$; б) $\dfrac{13-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$; в) $\dfrac{36-5\sqrt{17}}{2-\sqrt{17}}$.

578. Освободиться от радикалов в знаменателях дробей:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{5+\sqrt{2}}}$, б) $\dfrac{1}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}$; в) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}{\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}$.

Степень положительного числа с положительным дробным показателем § 84

В § 80 мы доказали следующее утверждение: если a — произвольное положительное число, а m и n — натуральные числа ($n > 2$), причем m делится без остатка на n, то

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Вполне естественно желание обобщить эту формулу на случай произвольных натуральных чисел. Но деление в области натуральных чисел, вообще говоря, невыполнимо. Поэтому частное $\frac{m}{n}$ может оказаться дробным числом. Таким образом, мы сталкиваемся с необходимостью ввести в рассмотрение степени с дробными показателями.

Определение. Пусть a — произвольное положительное число, а m и n — произвольные натуральные числа. Тогда

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \qquad (1)$$

Например,

$$9^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{9^5} = \sqrt[4]{9^4\cdot 9} = 9\sqrt[4]{9} = 9\sqrt{3};$$

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{2^6} = 4.$$

Степень положительного числа с положительным дробным показателем есть корень, показатель которого равен знаменателю данного дробного показателя, а подкоренное выражение — степень исходного положительного числа с показателем, равным числителю данного дробного показателя.

Как мы знаем, величина дроби $\frac{m}{n}$ не изменится, если числитель и знаменатель этой дроби умножить на какое-нибудь натуральное число k или разделить на какой-нибудь их общий делитель p*:

$$\frac{m}{n}=\frac{mk}{nk};\quad \frac{m}{n}=\frac{\frac{m}{p}}{\frac{n}{p}}.$$

Вполне понятно, что введенное нами определение степени $a^{\frac{m}{n}}$ будет корректным лишь в том случае, если

$$a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mk}{nk}}, \tag{2}$$

$$a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{\frac{m}{p}}{\frac{n}{p}}}. \tag{3}$$

И эти соотношения действительно выполняются. Докажем, например, формулу (2). Имеем:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},$$

$$a^{\frac{mk}{nk}}=\sqrt[nk]{a^{mk}}.$$

Но

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}.$$

Отсюда и получается соотношение (2).

Формула (3), если ее читать справа налево,

$$a^{\frac{\frac{m}{p}}{\frac{n}{p}}}=a^{\frac{m}{n}},$$

выражает по существу то же самое, что и формула (2). Только роль m здесь играет целое число $\frac{m}{p}$, роль n — целое число $\frac{n}{p}$, а роль k — число p. Поэтому в специальном доказательстве формула (3) не нуждается.

Формулы (2) и (3) выражают следующий факт: ***величина степени положительного числа с положительным дробным показателем не изменится, если числитель и знаменатель показателя умножить на какое-нибудь натуральное число или разделить на их общий множитель.***

---

* Поскольку p есть общий делитель чисел m и n, числа $\frac{m}{p}$ и $\frac{n}{p}$ являются целыми.

Например $\qquad a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{6}{9}} = \ldots,$

$$a^{\frac{8}{16}} = a^{\frac{4}{8}} = a^{\frac{2}{4}} = \ldots .$$

З а м е ч а н и е. Введенное определение степени с дробным показателем не распространяется на степени с о т р и ц а т е л ь н ы м и основаниями. Для отрицательных a формула (1) может вообще потерять смысл. Например, писать $(-2)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{-2}$ нельзя, поскольку выражение $\sqrt[4]{-2}$ не определено.

Упражнение

579. Вычислить:

а) $64^{\frac{2}{3}}$; $\qquad$ в) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$; $\qquad$ д) $125^{\frac{5}{6}} : 5$;

б) $27^{\frac{4}{3}}$; $\qquad$ г) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{4}}$; $\qquad$ е) $144^{\frac{3}{4}} : 9$.

Основные свойства степени положительного числа с положительным дробным показателем § 85

В этом параграфе мы рассмотрим основные свойства степени положительного числа с положительным дробным показателем. Поскольку степень отрицательного числа с положительным дробным показателем, вообще говоря, не определена, то всегда, не оговаривая это специально, мы будем предполагать, что основание степени есть число положительное.

Перечислим основные свойства степени, которые мы хотим рассмотреть:

1) $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$;

2) $(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$;

3) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$;

4) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$;

5) $\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$, если $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$.

Прежде чем приступить к рассмотрению этих свойств, напомним следующий важный факт, о котором мы говорили в предыдущем параграфе.

Величина степени с дробным показателем не изменится, если числитель и знаменатель показателя умножить на любое натуральное число или разделить на их общий множитель:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}}; \qquad a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{\frac{m}{p}}{\frac{n}{p}}}.$$

Теперь перейдем к доказательству 1-го свойства степени:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Чтобы перемножить две степени с одинаковыми основаниями, достаточно показатели степеней сложить, а основание оставить прежним.

Действительно,

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mq}{nq}}, \quad a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{pn}{qn}}.$$

Следовательно,

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{qn}} \cdot a^{\frac{pn}{qn}} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{pn}}.$$

По правилу умножения корней с одинаковыми показателями

$$\sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq+pn}}.$$

Но

$$\sqrt[nq]{a^{mq+pn}} = a^{\frac{mq+pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Поэтому

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}},$$

что и требовалось доказать.

Примеры:

$$3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 3^1 = 3;$$

$$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}} = a^{\frac{22}{15}} \ (a > 0).$$

1-е свойство степени, доказанное нами для случая двух сомножителей, на самом деле верно и для любого числа сомножителей.

Например, $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$.

Остальные свойства степени с дробным показателем предлагаем учащимся сформулировать и доказать самостоятельно.

Упражнения

580. Доказать тождества:

а) $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right) = a - b;$

б) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)=a+b$;

в) $\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)=a-b$.

• 581. Что больше:

а) $8^{\frac{3}{2}}$ или $12^{\frac{3}{4}}$; в) $12^{\frac{3}{2}}$ или $18^{\frac{2}{3}}$;

б) $64^{\frac{4}{3}}$ или $36^{\frac{3}{2}}$; г) $\left(\frac{1}{18}\right)^{\frac{3}{4}}$ или $\left(\frac{1}{12}\right)^{\frac{4}{3}}$?

582. Упростить:

$$\frac{3\sqrt{a}}{a}+a^{\frac{1}{5}}\sqrt[4]{a}-\frac{a^{\frac{2}{7}}}{\sqrt[35]{a}}-\frac{3a^{0}}{\sqrt{a}} \quad (a>0).$$

583. Упростить выражения:

• а) $\left(\frac{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}\right)^{-4}$; б) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{x-y}$;

в) $\left[\frac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}-\frac{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a-b}\right]\cdot(a-b-1)^{-1}$.

584. Какое значение принимает выражение

$\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}-4^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\left(27x^{\frac{9}{10}}\right)^{\frac{5}{3}}}{\left(3^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{10}}\right)^{10}}+6\sqrt{x}$ при условии, что $x^{3}=3^{10}$?

Степень положительного числа с отрицательным дробным показателем § 86

Подобно тому как в § 71 мы определили степень a^{-n} числа a с отрицательным целым показателем $-n$, можно определить и степень $a^{-\frac{m}{n}}$ положительного числа a с отрицательным дробным показателем $-\frac{m}{n}$.

Пусть a — произвольное положительное число, а m и n — натуральные числа. Тогда по определению

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

Степень положительного числа с отрицательным дробным показателем равна единице, деленной на степень того же числа с показателем, противоположным показателю данной степени.

Например, $8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{4}$;

$$27^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{27^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{27^5}} = \frac{1}{\sqrt[6]{3^{15}}} = \frac{1}{\sqrt{3^5}} = \frac{1}{9\sqrt{3}}.$$

Теперь мы знаем, что представляет собой степень положительного числа с любым рациональным показателем.

Степени с рациональными показателями обладают следующими основными свойствами:

1) $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$;

2) $(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$;

3) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$;

4) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$;

5) $\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$.

Частично эти свойства были доказаны нами в предыдущих параграфах, но лишь для положительных показателей. Теперь же мы можем доказать их для произвольных рациональных показателей.

Докажем, например, свойство 1.

Для положительных показателей $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ доказательство было дано в предыдущем параграфе. Поэтому нам нужно рассмотреть следующие случаи:

1) оба показателя отрицательны;

2) один из показателей отрицательный, а другой — положительный;

3) хотя бы один из показателей равен нулю.

Пусть m, n, p и q — натуральные числа. Покажем, что

$$a^{-\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}.$$

Действительно, по определению степени с отрицательным показателем

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, \quad a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}.$$

Поэтому

$$a^{-\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}},$$

но

$$\frac{1}{a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}} = a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)} = a^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}},$$

откуда и вытекает требуемое соотношение.

Мы рассмотрели случай, когда показатели каждой из двух степеней отрицательны. Теперь рассмотрим случай, когда один из них положителен, а другой отрицателен. Докажем, например, что

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}.$$

Имеем:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}}.$$

Если $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$, то по свойству 5, упомянутому в предыдущем параграфе,

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}.$$

Если $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$, то

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}-\frac{m}{n}}},$$

но

$$\frac{1}{a^{\frac{p}{q}-\frac{m}{n}}} = a^{-\left(\frac{p}{q}-\frac{m}{n}\right)} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}.$$

Наконец, если $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, то

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = 1 = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}.$$

Здесь мы используем определение $a^0 = 1$. Таким образом,

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}.$$

Нам осталось рассмотреть случай, когда из двух степеней с одинаковыми основаниями хотя бы одна имеет нулевой показатель. Докажем, например, что

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^0 = a^{\frac{m}{n}+0}.$$

Действительно, $a^0 = 1$ и $\frac{m}{n} + 0 = \frac{m}{n}$. Поэтому

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^0 = a^{\frac{m}{n}} \cdot 1 = a^{\frac{m}{n}}, \quad a^{\frac{m}{n}+0} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Свойство 1 доказано.

Аналогично можно доказать и все остальные свойства. Заметим, что если в предыдущем параграфе мы могли говорить о свойстве 5 лишь при $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$, то теперь, используя определения степени положительного числа с нулевым и отрицательным дробным показателем, мы можем доказать его и для случая, когда $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$.

Например,

$$\frac{16^{\frac{3}{4}}}{16^{\frac{4}{5}}} = 16^{\frac{3}{4}-\frac{4}{5}} = 16^{-\frac{1}{20}} = (2^4)^{-\frac{1}{20}} = 2^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}.$$

Упражнения

585. Вычислить:

а) $9^{-\frac{3}{2}}$; в) $\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{4}{3}}$; д) $(27)^{-\frac{5}{6}} \cdot 3^{2,5}$;

б) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$; г) $(25)^{-\frac{3}{2}}$; е) $(6,25)^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$.

Вычислить (№ 586—592):

586. $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^0\right]^{-0,5} - 7,5 \cdot 4^{-\frac{3}{2}} - (-2)^{-4} + 81^{0,25}$.

587. $0,027^{-\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{-2} + 256^{0,75} - 3^{-1} + (5,5)^0$.

588. $\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{10}} : \left(\frac{25}{36}\right)^{-\frac{3}{2}} - \left[\left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{-3}$.

589. $\left(9^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} - \left(25^{\frac{5}{2}}\right)^{-\frac{1}{10}} + \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{6}{7}}\right]^0 : (36)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$.

590. $\left[4^{-\frac{1}{4}}+\left(\dfrac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]\cdot\left[4^{-0,25}-(2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right].$

591. $\left[\left(a^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}(a-x)-\dfrac{a+x}{a^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}}\right]\cdot 2(ax)^{-\frac{1}{3}}.$

592. $(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{1+a^2(1-a^2)^{-1}}\cdot\dfrac{(1-a^2)^{\frac{1}{2}}+a^2(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{1-a^2}\quad(|a|<1).$

593. Какое значение принимает выражение

$$\left[\frac{(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}+(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}-(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}}\right]^{-2}\quad \text{при}\ x=\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}},$$

если: 1) $n>m>0$; 2) $m>n>0$; 3) $m=n=1$?

594. Вычислить

$$\left(x^{-2}+a^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(a^{-2}+a^{-\frac{4}{3}}x^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\quad \text{при}\quad x=\left(1-a^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

595. Упростить выражение

$$\left[\frac{\left(a^{\frac{3}{4}}-b^{\frac{3}{4}}\right)\left(a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\sqrt{ab}\right]\cdot\frac{2\sqrt{2,5}\,(a-b)^{-1}}{(10)^{-\frac{1}{2}}}.$$

Функции $y=x^r$ при $r=\frac{1}{2}$ и $r=\frac{1}{3}$ § 87

Функция $y=x^{\frac{1}{2}}$. Функция $y=x^{\frac{1}{2}}$, или $y=\sqrt{x}$, определена для всех неотрицательных значений аргумента x; поэтому областью ее определения является совокупность всех неотрицательных чисел. График этой функции (построенный «по точкам») представлен на рисунке 99. Функция $y=x^{\frac{1}{2}}$ принимает любые неотрица-

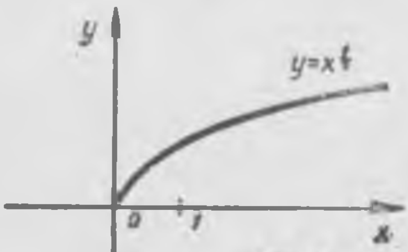


Рис. 99

тельные значения; поэтому областью ее изменения является совокупность всех неотрицательных чисел.

Данная функция является монотонно возрастающей. Это хорошо видно на графике, но может быть строго доказано и без обращения к графику. (Из двух положительных чисел большему соответствует больший квадратный корень.)

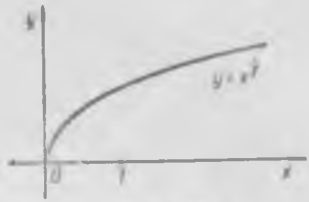


Рис. 100.

Функция $y = x^{\frac{1}{3}}$. Функция $y = x^{\frac{1}{3}}$, или $y = \sqrt[3]{x}$, определена для всех действительных значений аргумента x. Однако мы ограничимся рассмотрением ее поведения лишь для положительных значений x.

График функции $y = x^{\frac{1}{3}}$ для $x > 0$ представлен на рисунке 100. Как видно из этого рисунка, поведение функции $y = x^{\frac{1}{3}}$ при $x > 0$ вполне аналогично поведению функции $y = x^{\frac{1}{2}}$: она принимает только положительные значения и является монотонно возрастающей.

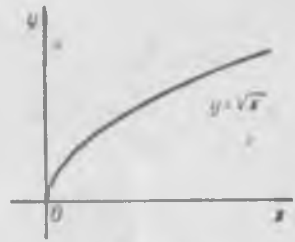


Рис. 101.

Упражнения

596. Используя график функции $y = x^{\frac{1}{2}}$, найдите приближенные значения корней:

а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5}$.

597. Построить графики функций:

1) $y = \sqrt{x-1}$; 5) $y = -2\sqrt{x}$; 8) $y = \sqrt[3]{x+1}$;
2) $y = \sqrt{x} - 1$; 6) $y = \sqrt[3]{x-2}$; 9) $y = \sqrt[3]{x} + 1$;
3) $y = \sqrt{x+2}$; 7) $y = \sqrt[3]{x} - 2$; 10) $y = -2\sqrt[3]{x}$.
4) $y = \sqrt{x} + 2$;

598. Как располагаются друг относительно друга графики функций:

а) $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{x+a}$; б) $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = a\sqrt[3]{x}$?

599. На рисунке 101 вы видите график функции $y = \sqrt{x}$. По ошибке чертежник забыл отметить на чертеже единицу длины (масштаб). Как с помощью циркуля и линейки определить по этому чертежу единицу длины?

Степенными функциями называются функции вида $y = ax^r$, где a и r — заданные действительные числа. Согласно этому определению показатель степени r может быть как рациональным, так и иррациональным. Но поскольку мы еще не знаем, что, такое степень с иррациональным показателем, то пока ограничимся лишь случаем, когда число r рационально. Кроме того, мы будем считать, что $a = 1$. После того как функция $y = x^r$ будет изучена, исследование функции $y = ax^r$ не представит особых затруднений.

Некоторые частные примеры степенных функций $y = x^r$ (при $r = 1, 2, 3, -1, -2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$) уже рассматривались нами в § 73 74, 87. Сейчас мы рассмотрим свойства функции при любом рациональном r.

Поскольку степень x^r с рациональным показателем r определена, вообще говоря, лишь для положительных значений x, то и функцию $y = x^r$ мы будем рассматривать только для положительных значений аргумента x.

Степенные функции обладают следующими основными свойствами.

Свойство 1. ***При положительных значениях аргумента x степенная функция $y = x^r$ принимает только положительные значения.***

Действительно, если $r = 0$, то $x^r = 1 > 0$. Если $r = \frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа, то $x^r = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$. Но $x > 0$; значит, x^m также больше нуля, потому и $\sqrt[n]{x^m} > 0$. Если $r = -\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа, то $x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$. Но $x^{\frac{m}{n}} > 0$; следовательно, и $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}} > 0$.

На рисунках 102—104 вы видите графики степенных функций $y = x^r$ при различных значениях r.

Каждая из приведенных кривых расположена выше оси x. Это и служит графическим подтверждением 1-го свойства степенной функции.

Свойство 2. ***Если число r положительно, то при положительных значениях аргумента x степенная функция $y = x^r$ является монотонно возрастающей.***

Доказательство. Пусть $r = \frac{m}{n} > 0$, $x_2 > x_1 > 0$. Докажем, что $x_2^r > x_1^r$. Это и будет означать, что при положительных значениях аргумента x функция $y = x^r$ монотонно возрастает.

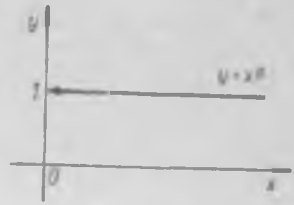


Рис. 102.

Имеем:

$$x_1^r = x_1^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x_1^m};\ x_2^r = x_2^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x_2^m}.$$

Так как $x_2 > x_1 > 0$, то $x_2^m > x_1^m$, причем оба эти числа положительны. Поэтому и

$$\sqrt[n]{x_2^m} > \sqrt[n]{x_1^m},$$

то есть $x_2^{\frac{m}{n}} > x_1^{\frac{m}{n}}$, или $x_2^r > x_1^r$.

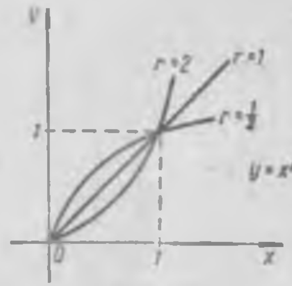


Рис. 103

Как видно из рисунка 103, кривые $y = x^r$ с ростом x поднимаются все выше и выше. Это является графическим подтверждением 2-го свойства степенной функции.

Свойство 3. ***Если число r отрицательно, то при положительных значениях аргумента x функция $y = x^r$ является монотонно убывающей.***

Доказательство. Пусть $x_2 > x_1 > 0$ и $r = -\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. Покажем, что

$$x_2^r < x_1^r.$$

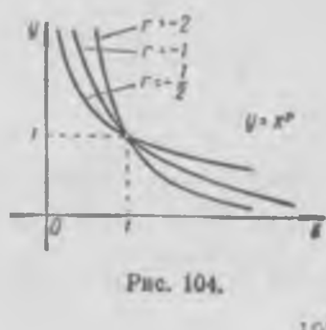


Рис. 104.

Это и будет означать, что при положительных значениях аргумента x функция $y = x^r$ монотонно убывает. Имеем:

$$x_2^r = x_2^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x_2^{\frac{m}{n}}};\quad x_1^r = x_1^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x_1^{\frac{m}{n}}}.$$

Так как $x_2 > x_1 > 0$, то по 2-му свойству степенной функции

$$x_2^{\frac{m}{n}} > x_1^{\frac{m}{n}}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{x_2^{\frac{m}{n}}} < \frac{1}{x_1^{\frac{m}{n}}}, \quad x_2^{-\frac{m}{n}} < x_1^{-\frac{m}{n}},$$

или $x_2^r < x_1^r$, что и требовалось доказать.

В заключение отметим еще одно свойство степенных функций.

Свойство 4. ***Если число r положительно, то при неограниченном приближении x к 0 соответствующие значения функции $y = x^r$ неограниченно приближаются к 0; при неограниченном возрастании x соответствующие значения функции $y = x^r$ неограниченно возрастают.***

Если число r отрицательно, то при неограниченном приближении x к нулю соответствующие значения функции $y = x^r$ неограниченно возрастают; при неограниченном росте x соответствующие значения функции $y = x^r$ неограниченно приближаются к нулю.

Это свойство степенных функций легко понять, рассматривая графики, представленные на рисунках 103 и 104. Строгого доказательства этого свойства мы не приводим.

Упражнения

600. Что больше:

а) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{6}{11}}$ или $\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{6}{11}}$; в) $0{,}357^{-\frac{1}{3}}$ или $0{,}358^{-\frac{1}{3}}$;

б) $(2\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}$ или $(3\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}$; г) $(\sqrt{21})^{-\frac{2}{7}}$ или $(2\sqrt{5})^{-\frac{2}{7}}$?

601. Известно, что m, n, p и q — натуральные числа, причем $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$. Что можно сказать о положительном числе a, если:

а) $a^{\frac{m}{n}} > a^{\frac{p}{q}}$; б) $a^{-\frac{m}{n}} > a^{-\frac{p}{q}}$?

602. Какие из данных чисел больше 1 и какие меньше 1:

а) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{10}{3}}$; б) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-\frac{6}{5}}$; в) $\left(\frac{13}{17}\right)^{0}$?

Задачи на повторение

603. Какие известные вам физические законы описываются с помощью степенных функций $y = ax^r$? Какой физический смысл имеют в них параметры a и r?

604. Какие из приводимых ниже формул выражают теоремы и какие—определения (m и n—произвольные натуральные числа):

а) $a^0 = 1$; б) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$; в) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$; г) $a^m : a^n = a^{m-n}$?

605. Построить графики следующих функций:

а) $y = \sqrt{(x-2)^2}$ и $y = x - 2$;

б) $y = \sqrt[3]{(x+1)^3}$ и $y = x + 1$;

в) $y = \sqrt{[(x-3)(x+2)]^2}$ и $y = (x-3)(x+2)$.

606*. Вычислить $\left(a + x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(a - x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ при $x = 4(a-1)$.

Освободиться от радикалов в знаменателях дробей (№ 607, 608):

607. $\frac{3 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 5\sqrt{6}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{6}}$. 608. $\frac{2 + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5} - \sqrt{3}}$.

Расположить в порядке возрастания числа (№ 609—611):

609. $\left(\frac{9}{4}\right)^{-0,1}$; $\left(\frac{9}{4}\right)^{0,2}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$.

610. $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{2}{3}}$; $\left(\frac{49}{16}\right)^{\frac{4}{3}}$; $\left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{4}}$.

611. $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{5}}$; $\left(\frac{125}{27}\right)^{-\frac{1}{15}}$; $\left(\frac{9}{25}\right)^{-4}$.

612. Доказать тождества (формулы сложных радикалов):

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}};$$

$$\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} - \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Используя формулы сложных радикалов, упростить выражения (№ 613—615):

613. $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$. 614. $\sqrt{6 - \sqrt{20}}$. 615. $\sqrt{10 - 2\sqrt{21}}$.

616. Доказать, что при $1 \leqslant x \leqslant 2$

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2.$$

Решить уравнения (№ 617—619):

617. $\left(\frac{2\sqrt{x}}{x^3}\right)^{-3} = \left[(x\sqrt{x})^{-1}\right]^{-\frac{1}{3}}$.

618. $\left[(\sqrt[3]{x})^{-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{6}{5}} = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]^{\frac{6}{5}}$.

619. $\left(\frac{x^3}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^{-\frac{4}{5}} = \left(\sqrt[3]{x^3\sqrt{x^3}}\right)^{\frac{9}{7}}.$

Данные выражения (№ 620—623). упростить путем вынесения множителей за знак радикала:

620. $\sqrt{a^3b}.$ **621.** $\sqrt[3]{a^3b^2}.$ **622.** $\sqrt[3]{a^5b^3}.$ **623.** $\sqrt[4]{a^5b^7}$.

624. Расположить в порядке возрастания числа:

$$1,\ \sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{4}.$$

625. Вычислить

$$\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[12]{y^{10}}}\cdot\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}\sqrt[3]{y}}{\sqrt[4]{xy^{-1}}}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{x^{-\frac{3}{5}}}{y^{-\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{4}{3}}$$

при

$$x = 5;\ y = 20.$$

626. Вычислить

$$\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}\cdot\left(x^{-1}+y^{-1}\right)+\frac{2}{\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^{3}}\cdot\left(x^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}\right),$$

если известно, что

$$\sqrt[3]{x} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)^{-\frac{1}{3}};\quad \sqrt[7]{y} = \sqrt[7]{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1}.$$

V

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Понятия вектора и оси § 89

Все величины, которые изучаются в математике и физике можно разбить на две группы. К одной группе относятся величины, которые полностью характеризуются их числовыми значениями. Таковы длина, площадь, объем, время, масса и другие величины. Если мы скажем, что карандаш имеет длину 10 *см* или что температура воздуха равна — 5°, то длина карандаша и температура воздуха тем самым будут определены полностью. Но наряду с такими величинами существуют и величины, которые нельзя полностью охарактеризовать числовыми значениями. Из физики, например, известно, что сила, скорость, ускорение и некоторые другие величины характеризуются не только своими числовыми значениями, но и направлениями. Если на материальную точку действует сила 5 *кГ*, то для того чтобы сказать, к чему это приведет, нужно знать еще направление этой силы. Для полного описания подобных величин наряду с числовыми значениями необходимо задавать и их направления.

Величины, которые полностью определяются своими числовыми значениями, называются скалярными. Величины, которые характеризуются не только своими числовыми значениями, но и направлениями, называются векторными величинами.

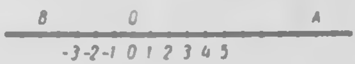


Рис. 105.

Любую скалярную величину можно характеризовать отрезком числовой прямой. Например, длину карандаша 10 *см* можно характеризовать отрезком OA (рис. 105), длина которого равна длине карандаша. Температуру — 5° можно характеризовать на числовой прямой отрезком OB (рис. 105), где точка B удалена от точки O на расстояние в 5 единиц длины и лежит слева от O, указывая, что на улице 5° мороза, а не тепла.

Рис. 106.

Такая интерпретация векторных величин была бы неполной. Но подобно тому как скалярные величины можно характеризовать отрезками числовой прямой, векторные величины можно характеризовать *направленными отрезками*, или *векторами*.

Вектор есть направленный отрезок, то есть отрезок с фиксированным положением своего начала и своего конца.

Направлением вектора считается направление от его начала к его концу. Обычно вектор обозначается двумя буквами, над которыми ставится стрелочка, обращенная острием вправо. При этом первая буква обозначает начало вектора, а вторая — конец. Так, векторы, представленные на рисунке 106, обозначаются

$$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{EF}.$$

Единственно существенной характеристикой отрезка является его *длина*. Вектор же имеет несколько характеристик: *начало*, *направление*, *длину*. Каждая из этих характеристик является по-своему важной. Незнание хотя бы одной из них делает вектор неопределенным.

Наряду с понятием вектора, или направленного отрезка, большую роль в математике играет также понятие *направленной прямой*, или *оси*.

Упражнение

627. Какие из данных величин являются скалярными и какие векторными: объем, скорость, масса, ускорение, сила тока?

Проекция вектора на ось § 90

Как известно, проекцией точки A на ось l называется основание B перпендикуляра, опущенного из точки A на эту ось (рис. 107).

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется величина отрезка A_1B_1, соединяющего проекцию начала данного вектора с проекцией его конца на ось l (рис. 108—111). *Эта величина считается положительной, если направление вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси l, и отрицательной в противном случае.*

Рассмотрим несколько примеров.

1. Вектор $\overrightarrow{AB}$ длины r параллелен оси l. Если направление этого вектора совпадает с направлением оси l (рис. 109, a), то проекция его на ось l равна r. Если же направление вектора $\overrightarrow{AB}$

противоположно направлению оси l (рис. 109, б), то его проекция равна $-r$.

Рис. 107.

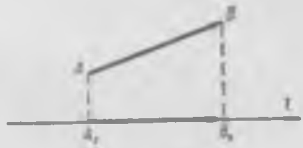


Рис. 108.

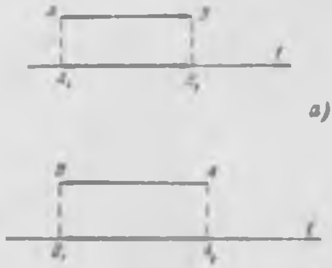


Рис. 109.

2. Вектор $\overrightarrow{AB}$ перпендикулярен оси l (рис. 110). В этом случае точки A и B проектируются в одну и ту же точку. Поэтому проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l равна нулю.

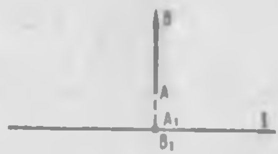


Рис. 110.

3. Вектор $\overrightarrow{AB}$ длины r расположен по отношению к оси l так, как показано на рисунке 111. Тогда его проекция на ось l равна длине отрезка A_1B_1 или AC. Из прямоугольного треугольника ABC находим $AC = \frac{r}{2}$ (катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы).

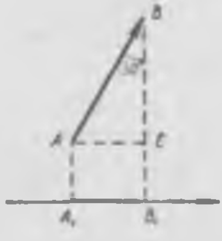


Рис. 111.

Упражнения

628. Как изменится проекция вектора на ось, если:

а) длину вектора увеличить вдвое;

б) направление вектора изменить на противоположное, а направление оси оставить прежним;

в) направление оси изменить на противоположное, а направление вектора оставить прежним;

г) направление оси и направление вектора изменить на противоположные?

629. Что можно сказать о взаимном расположении вектора и оси, если при изменении направления вектора на противоположное проекция этого вектора на ось не изменяется?

Свободные и связанные векторы § 91

Как уже отмечалось в § 89, каждый вектор определяется своим началом (или точкой приложения), направлением и длиной. Точку приложения вектора особенно важно учитывать при решении физических задач. Пусть, например, на диск, закрепленный на оси (рис. 112), действует сила $F = 1$ *кГ*, направленная вертикально вниз. Если эта сила приложена в точке A, то диск под действием ее будет вращаться по часовой стрелке. Если эта сила приложена в точке B, то диск будет вращаться против часовой стрелки. Если же сила F приложена в точке C, то диск будет находиться в состоянии покоя.

В математике в основном рассматриваются лишь такие задачи, в которых точка приложения вектора не играет существенной роли. Примером может служить хотя бы следующая задача: какой угол образуют между собой векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$

Рис. 112.

Рис. 113.

(рис. 113)? В дальнейшем мы будем иметь дело только с такими векторами. Они называются *свободными*, в отличие от *связанных* векторов, для изучения которых важно знать, где располагаются их начальные точки. Свободные векторы, где бы они ни начинались, всегда можно перенести так, чтобы их начальные точки совпали; направления векторов и их длины при этом останутся прежними. Удобно считать, что точкой приложения свободного вектора является начало координат. Поэтому в дальнейшем мы будем в основном рассматривать лишь векторы, выходящие из начала координат.

Координаты вектора на плоскости § 92

Пусть xOy — прямоугольная система координат. *Проекции x и y вектора $\overrightarrow{OA}$* (рис. 114) *на оси абсцисс и ординат называются координатами этого вектора*. Координаты вектора обычно записываются в виде (x, y), а сам вектор так: $\overrightarrow{OA} = (x, y)$.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Пусть вектор $\overrightarrow{OA}$ длины r лежит на оси x и направлен в ту же сторону, что и ось x (рис. 115, *а*). Тогда $\overrightarrow{OA_1} = (r, 0)$. Если бы направление вектора $\overrightarrow{OA}$ было противоположно на-

правлению оси x (рис. 115, *б*), то мы имели бы $\overrightarrow{OA_2} = (-r,\ 0)$. Аналогично, вектор $\overrightarrow{OA_3}$, представленный на рисунке 115, *в*, имеет координаты $(0,\ r)$, а вектор $\overrightarrow{OA_4}$, представленный на рисунке 115, *г*, — координаты $(0,\ -r)$.

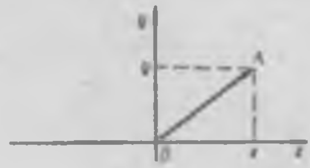


Рис. 114.

2. Вектор $\overrightarrow{OB_1}$ длины r, образующий с осями координат равные углы (рис. 116, *а*), имеет координаты $\left(\frac{r}{\sqrt{2}},\ \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$. Это легко доказать, рассмотрев прямоугольный треугольник OB_1C_1. Аналогично, векторы $\overrightarrow{OB_2}$, $\overrightarrow{OB_3}$ и $\overrightarrow{OB_4}$, изображенные на рисунках 116, *б*, *в* и *г*, соответственно имеют координаты:

$$\overrightarrow{OB_2} = \left(-\frac{r}{\sqrt{2}},\ \frac{r}{\sqrt{2}}\right),$$
$$\overrightarrow{OB_3} = \left(-\frac{r}{\sqrt{2}},\ -\frac{r}{\sqrt{2}}\right),$$
$$\overrightarrow{OB_4} = \left(\frac{r}{\sqrt{2}},\ -\frac{r}{\sqrt{2}}\right).$$

Координаты являются исчерпывающей характеристикой любого вектора, так как по координатам можно построить и сам вектор. Зная координаты, легко найти и длину вектора.

Теорема. ***Квадрат длины любого вектора равен сумме квадратов его координат.***

Доказательство. Пусть координаты вектора $\overrightarrow{OA}$ равны x и y, а длина r. Покажем, что

$$r^2 = x^2 + y^2. \qquad (1)$$

Если вектор $\overrightarrow{OA}$ лежит на какой-нибудь координатной оси, то, как было показано выше, одна из его координат равна нулю, а другая либо $+r$, либо $-r$. В этом случае равен-

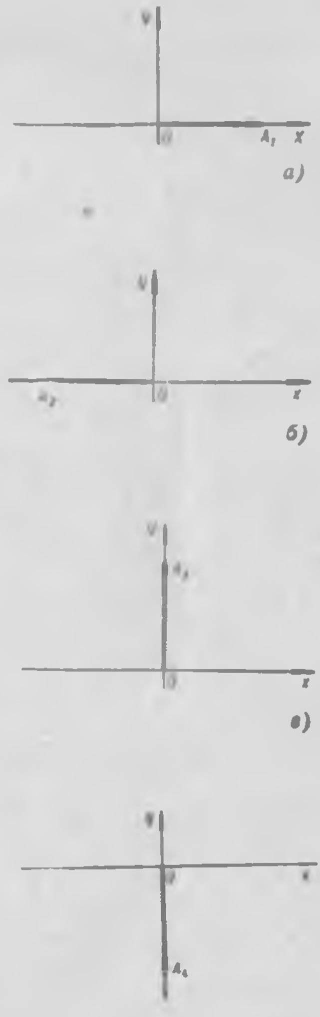


Рис. 115.

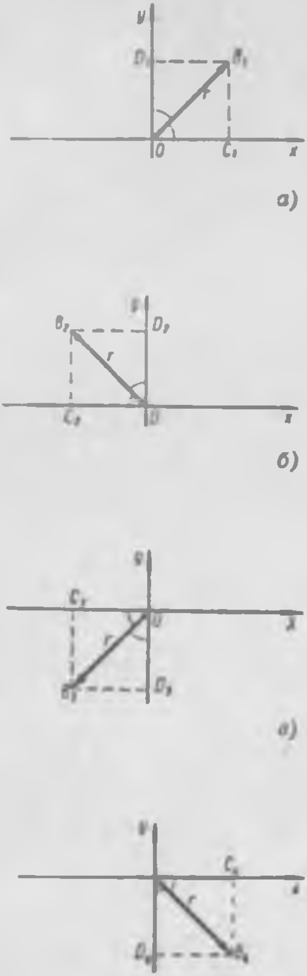


Рис. 116.

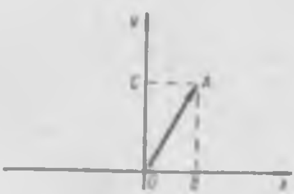


Рис. 117.

ство (1) верно. Если вектор $\overrightarrow{OA}$ лежит в первой четверти (рис. 117), то (1) следует из теоремы Пифагора, примененной к $\triangle ABO$. Аналогично обстоит дело и в случае, когда вектор $\overrightarrow{OA}$ лежит в какой-нибудь другой четверти (докажите это!).

Из доказанной теоремы вытекает следующее важное для дальнейшего следствие: ***любая координата вектора по абсолютной величине не превышает длины этого вектора.*** Другими словами, если вектор длины r имеет координаты x и y, то

$$|x| \leqslant r, \qquad |y| \leqslant r.$$

Действительно,

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Поэтому $r^2 > x^2$, откуда

$$|x| \leqslant r.$$

Аналогично показывается, что $|y| \leqslant r$.

Упражнения

630. Построить векторы с координатами: (2; 5); (0; 3); (4; 0); (— 1; 2); (0; — 3); (— 7; — 6).

631. Как изменятся координаты вектора, если:

а) направление вектора изменить на противоположное;

б) уменьшить длину вектора вдвое, не меняя направления?

632. Найти длины векторов с координатами:

$(3;\ 4);\ (-5;\ 12);\ (0;\ -75);\ (2;\ \sqrt{5})$.

633*. Что представляет из себя множество концов векторов, если координаты $(x,\ y)$ этих векторов удовлетворяют уравнению $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$?

В геометрии мы рассматривали в основном углы, меньшие «полного» угла, то есть угла в 360°. Чаще всего (например, в треугольниках) это были даже углы, меньшие «развернутого» (180°). Но иногда нам приходилось иметь дело и с углами, большими 360°. Вспомните хотя бы теорему об углах выпуклого многоугольника: сумма всех внутренних углов выпуклого n-угольника равна

$$2d\,(n-2).$$

Согласно этой теореме сумма внутренних углов выпуклого пятиугольника равна

$$2d\cdot 3=6d=540°.$$

Как же представить себе такой угол?

Любой угол можно рассматривать как фигуру, образующуюся при вращении луча вокруг своей начальной точки. Например, угол в 90° получится, если луч $\overrightarrow{OA}$ (рис. 118, *а*) совершит четверть полного оборота вокруг точки O. Аналогично развернутый угол получится, если этот луч совершит пол-оборота вокруг точки O (рис. 118, *б*); полный угол описывается в результате одного полного оборота (рис. 118, *в*) и т. д. Угол, больший полного, получится, если луч совершит более одного оборота вокруг точки O. Например, в результате $1\frac{1}{8}$ оборота образуется угол, в $1\frac{1}{8}$ раза больший полного (рис. 119, *а*); в результате двух оборотов получается угол, в два раза больший полного (рис. 119, *б*). Подобные углы описывают, например, стрелки часов, лопасти пропеллера самолета и т. д.

В то время как сам луч при повороте вокруг своей начальной точки описывает угол, любая его точка, отлич-

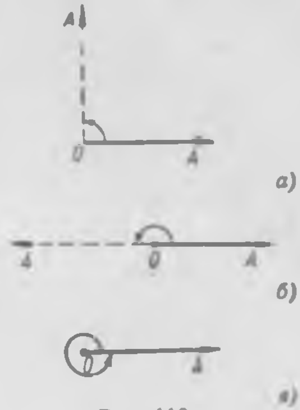


Рис. 118.

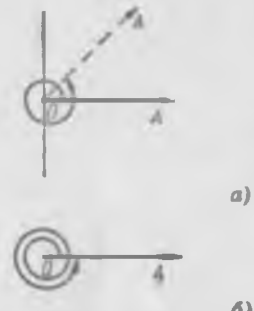


Рис. 119.

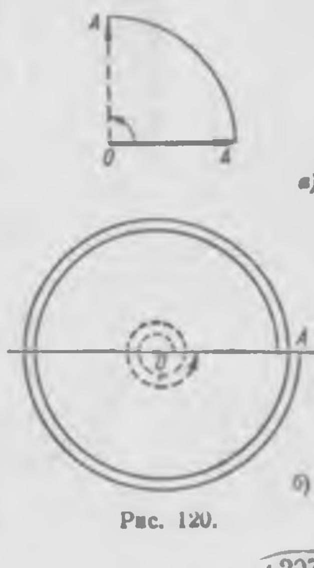


Рис. 120.

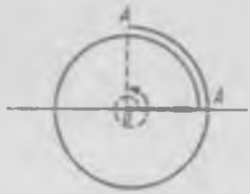
ная от начальной точки, описывает дугу окружности. Если, например, луч совершит четверть полного оборота, то точка A (рис. 120, *а*) опишет четверть полной дуги (то есть четверть окружности радиуса OA); при двух полных оборотах луча (рис. 120, *b*) точка A опишет дугу, которая вдвое больше полной дуги, и т. д. Представление о таких дугах дает, например, намотанная на катушку нить.

а)

б)

Рис. 121.

Луч можно вращать вокруг начальной точки в двух направлениях: по часовой стрелке и против часовой стрелки. Направление против часовой стрелки принято называть *положительным*, а по часовой стрелке — *отрицательным*. Соответственно этому углы и дуги, полученные вращением оси против часовой стрелки, принято считать *положительными*; углы и дуги, полученные вращением оси по часовой стрелке, принято считать *отрицательными*.



а)

б)

Рис. 122.

За единицу измерения углов и дуг, как и в геометрии, мы примем соответственно угол в 1 градус и дугу в 1 градус.

Угол в 1 градус — это угол, который опишет луч, совершив 1/360 часть полного оборота вокруг своей начальной точки против часовой стрелки. При такой единице измерения угол, описываемый в результате одного полного оборота против часовой стрелки, равен 360°, а по часовой стрелке — 360°. Угол, изображенный на рисунке 121, *а*, равен $360° \cdot 1\frac{1}{4} = 450°$, а угол, изображенный на рисунке 121, *б*, равен $-360° \cdot 1\frac{1}{2} = -540°$.

Рис. 123.

Дуга в 1 градус — это дуга, которую описывает точка луча при повороте этого луча на угол в 1 градус. Например, дуга, изображенная на рисунке 122, *а*, равна $1\frac{1}{4} \cdot 360° = 450°$, а дуга, изображенная на рисунке 122, *б*, равна $-\frac{3}{4} \cdot 360° = -270°$.

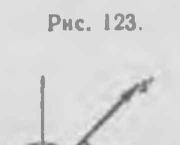


Рис. 124.

Дугу в 1 градус и угол в 1 градус не следует отождествлять друг с другом. Это разные, хотя и очень близкие понятия. Чтобы не путать их, иногда угол в 1 градус называют *угловым градусом*, а дугу в 1 градус — *дуговым градусом*. Дуга всегда содержит столько дуговых градусов, сколько угловых градусов содержит соответствующий ей угол.

В заключение примем следующее соглашение. Пусть угол φ образован* вращением луча OA вокруг точки O (рис. 123). Исходное положение OA этого луча будем называть *начальной стороной угла* φ, а положение OA', которое он займет в результате вращения, — *конечной стороной угла* φ. Если начальные стороны двух равных углов совпадают, то совпадут, очевидно, и их конечные стороны. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Так, углы в $45°$ и $45° + 360° = 405°$ (рис. 124) не равны друг другу, хотя начальные и конечные стороны их совпадают.

Упражнения

634. Какие углы описывают минутная и часовая стрелки за: а) 5 *мин*; б) 5 *ч*?

635. В каких координатных четвертях оканчиваются углы:

а) $75°$ и $-75°$;	в) $140°$ и $-140°$;
б) $1000°$ и $-1000°$;	г) $191°$ и $-191°$?

636. Могут ли углы φ и $-\varphi$ оканчиваться в одной и той же четверти? Могут ли они иметь одну и ту же конечную сторону?

637. Написать общий вид углов, оканчивающихся:

а) на положительной части оси абсцисс;

б) на отрицательной части оси абсцисс;

в) на положительной части оси ординат;

г) на отрицательной части оси ординат;

д) на биссектрисе первого координатного угла;

е) на биссектрисе первого или на биссектрисе третьего координатного угла;

ж) на биссектрисе четвертого координатного угла.

Теорема об отношениях координат вектора к его длине § 94

Пусть два вектора $\overrightarrow{OA_1} = (x_1, y_1)$ и $\overrightarrow{OA_2} = (x_2, y_2)$, длины которых равны соответственно r_1 и r_2, лежат на одной прямой и направлены в одну и ту же сторону, как показано на рисунке 125. Тогда $x_1 = OB_1$, $y_1 = A_1B_1$; $x_2 = OB_2$, $y_2 = A_2B_2$. Из подобия треугольников OA_1B_1 и OA_2B_2 следует, что

$$\frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{A_2B_2}{OA_2} \quad \text{и} \quad \frac{OB_1}{OA_1} = \frac{OB_2}{OA_2},$$

* φ — греческая буква, читается: фи.

$$\frac{y_1}{r_1} = \frac{y_2}{r_2}; \quad \frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2}. \qquad (1)$$

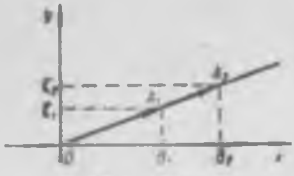


Рис. 125.

Если бы векторы $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_2}$ лежали во второй четверти (рис. 126), то аналогично предыдущему мы имели бы

$$x_1 = -OB_1, \; y_1 = A_1B_1;$$
$$x_2 = -OB_2, \; y_2 = A_2B_2;$$

$$\frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{A_2B_2}{OA_2}, \quad \frac{OB_1}{OA_1} = \frac{OB_2}{OA_2},$$

или

$$\frac{y_1}{r_1} = \frac{y_2}{r_2}; \quad \frac{-x_1}{r_1} = \frac{-x_2}{r_2},$$

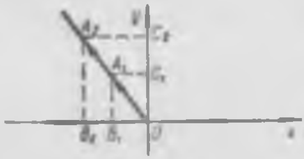


Рис. 126.

откуда снова получаются соотношения (1). Таким же образом можно было бы рассмотреть и случаи, когда векторы $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_2}$ лежат в 3-й или 4-й четвертях. Мы и тогда пришли бы к соотношениям (1).

Формулы (1) справедливы также в случае, когда векторы $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_2}$ лежат на какой-нибудь оси координат. Например, в случае, представленном на рисунке 127,

Рис. 127.

$$x_1 = 0; \; y_1 = r_1; \quad x_2 = 0; \; y_2 = r_2.$$

Поэтому

$$\frac{y_1}{r_1} = 1 = \frac{y_2}{r_2}; \quad \frac{x_1}{r_1} = 0 = \frac{x_2}{r_2}.$$

Рис. 128.

Учащиеся могут самостоятельно рассмотреть и другие возможные случаи расположения векторов $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_2}$ на осях координат и убедиться, что формулы (1) верны в этих случаях.

Равенства

$$\frac{y_1}{r_1} = \frac{y_2}{r_2} \text{ и } \frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2}$$

Рис. 129.

указывают на то, что отношения $\frac{x}{r}$ и $\frac{y}{r}$ координат x и y вектора к его длине r не зависят от длины вектора. При изменении длины вектора эти отношения остаются неизменными, хотя сами координаты x и y при этом, конечно, изменяются.

От чего же в таком случае зависят эти отношения? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим два примера. Если вектор $\overrightarrow{OA}$ длины r лежит на положительной полуоси абсцисс (рис. 128), то его координаты равны $x = r$, $y = 0$. Поэтому для такого вектора

$$\frac{x}{r} = 1, \quad \frac{y}{r} = 0.$$

Если же вектор $\overrightarrow{OA}$ длины r лежит на положительной полуоси ординат (рис. 129), то, как мы видели выше,

$$\frac{x}{r} = 0, \quad \frac{y}{r} = 1.$$

Уже из этих частных примеров видно, что отношения координат вектора к его длине изменяются при изменении направления вектора.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема. ***Отношения***

$$\frac{x}{r} \quad \text{и} \quad \frac{y}{r}$$

координат вектора к его длине не зависят от длины вектора, но зависят от его направления.

Упражнения

638. Зависят ли от длины r вектора $\overrightarrow{OA}$:

а) его координаты x и y;

б) отношения $\frac{x}{r}$ и $\frac{y}{r}$?

639. Зависит ли отношение $\frac{x}{y}$ координат вектора от его длины r?

Определение тригонометрических функций угла — § 95

Пусть φ — произвольный угол (рис. 130). На конечной стороне этого угла возьмем вектор $\overrightarrow{OA}$ произвольной длины r. Абсциссу этого вектора обозначим x, а ординату — y. Как было показано в предыдущем параграфе, отношения $\frac{y}{r}$ и $\frac{x}{r}$ зависят лишь от направления вектора $\overrightarrow{OA}$, определяемого углом φ, и не зависят от длины вектора r. Поэтому эти величины являются своеобразными характеристиками угла φ.

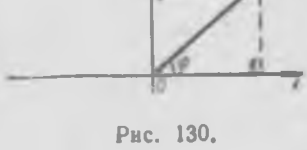


Рис. 130.

Отношение ординаты вектора, образующего с осью Ox угол φ, *к длине этого вектора называется синусом угла* φ (обозначается sin φ):

$$\sin\varphi = \frac{y}{r}. \tag{1}$$

Отношение абсциссы вектора, образующего с осью Ox угол φ, *к длине этого вектора называется косинусом угла* φ (обозначается cos φ):

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}. \tag{2}$$

Отношение синуса угла φ *к его косинусу называется тангенсом угла* φ (обозначается tg φ):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}. \tag{3}$$

Отношение косинуса угла φ *к его синусу называется котангенсом угла* φ (обозначается ctg φ):

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}. \tag{4}$$

Величина, обратная косинусу угла φ, *называется секансом угла* φ (обозначается sec φ):

$$\sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}. \tag{5}$$

Величина, обратная синусу угла φ, *называется косекансом угла* φ (обозначается cosec φ):

$$\operatorname{cosec}\varphi = \frac{1}{\sin\varphi}. \tag{6}$$

Легко понять, что для острых углов введенные таким образом определения полностью совпадают с теми, которые уже известны нам по курсу геометрии.

Синус и косинус определены для любого угла φ, поскольку выражения $\frac{x}{r}$ и $\frac{y}{r}$ имеют смысл при любом положительном r. Что же касается tg φ, ctg φ, sec φ и cosec φ, то они определены не для всякого угла φ. Тангенс и секанс в силу (3) и (5) определены лишь для тех углов, косинусы которых отличны от нуля, а котангенс и косеканс в силу (4) и (6) — для тех углов, синусы которых отличны от нуля.

Если $\cos\varphi = \frac{x}{r} = 0$, то $x = 0$. Это может быть лишь тогда, когда вектор $\overrightarrow{OA}$ перпендикулярен оси абсцисс (рис. 131, *а* и 131, *б*).

В этом случае угол φ может принимать значения

$$\pm 90^\circ;\ \pm 270^\circ;\ \pm 450^\circ;\ \pm 630^\circ;\ \ldots\ .$$

Все эти значения можно записать одной формулой:

$$\varphi = 90^\circ(2n + 1),$$

где n — любое целое число (положительное, отрицательное или нуль).

Таким образом, ***тангенс и секанс определены для всех углов φ, кроме углов $\varphi = 90^\circ(2n+1)$.***

Если $\sin\varphi = \frac{y}{r} = 0$, то $y = 0$. Это возможно лишь тогда, когда вектор $\overrightarrow{OA}$ лежит на оси абсцисс (рис. 132, *а* и 132, *б*). В этом случае угол φ может принимать значения:

$$0^\circ;\ \pm 180^\circ;\ \pm 360^\circ;\ \pm 540^\circ,\ \ldots\ .$$

Все эти значения можно записать одной формулой:

$$\varphi = 180^\circ n,$$

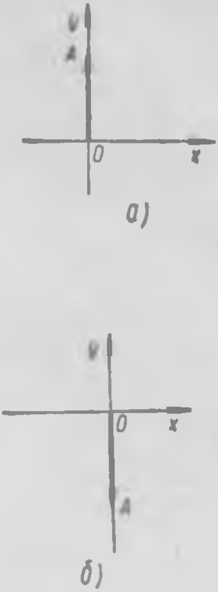


Рис. 131.

где n — любое целое число (положительное, отрицательное или нуль). Поэтому ***котангенс и косеканс определены для всех углов φ, кроме $\varphi = 180^\circ n$.***

Если $\varphi \neq 90^\circ m$ (m — целое число), то определены и $\operatorname{tg}\varphi$ и $\operatorname{ctg}\varphi$, причем:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x};$$

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{x}{y}.$$

Итак,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x};\quad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{x}{y}. \qquad (7)$$

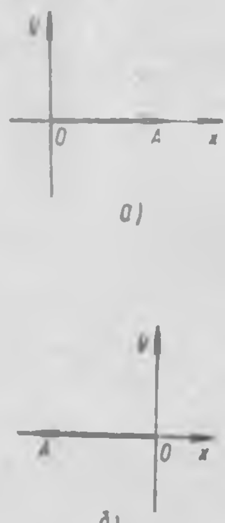


Рис. 132.

Каждому углу φ соответствуют вполне определенные значения $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$. Кроме того, каждому углу $\varphi \neq 90^\circ(2n+1)$ соответствуют вполне определенные значения $\operatorname{tg}\varphi$ и sec φ, а каждому углу $\varphi \neq 180°n$ — вполне определенные значения ctg φ и cosec φ.

Поэтому sin φ, cos φ, tg φ, ctg φ, sec φ, cosec φ являются функциями угла φ. Эти функции называются *тригонометрическими функциями угла.*

Ввиду простой связи между углами и дугами (см. § 93) можно говорить о тригонометрических функциях не только угла, но и дуги. Под синусом (косинусом, тангенсом и т. д.) дуги в α дуговых градусов понимают число, равное синусу (косинусу, тангенсу и т. д.) угла в α угловых градусов.

Упражнения

640. Для каких из данных углов 65°, 90°, 180°, 270°, 720°, 810°, 900° не определены:

а) тангенс; б) котангенс?

641. (Устно.) Найти tg φ, если известно, что:

а) $\sin\alpha = 0{,}6$, $\cos\alpha = 0{,}8$;

б) $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$;

в) $\sin\alpha = -1$, $\cos\alpha = 0$.

642. Существует ли угол α, для которого и tg α и ctg α не определены?

643. Найти значения тригонометрических функций угла φ, который образует с осью x вектор $\overrightarrow{OA}$ с координатами (—2, 2).

644. Найти значения тригонометрических функций угла φ, который образует с осью x вектор $\overrightarrow{OA}$ с координатами $(1, -\sqrt{3})$.

Тригонометрический круг. Оси тангенсов и котангенсов § 96

Синус и косинус угла φ мы определили отношениями:

$$\sin\varphi = \frac{y}{r}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{r}, \tag{1}$$

где x и y — координаты вектора, образующего с осью абсцисс угол φ, а r — его длина. Поскольку отношения $\frac{y}{r}$ и $\frac{x}{r}$ не зависят от длины вектора, то в качестве r можно выбрать любое положительное число. Удобнее всего положить $r = 1$. Тогда формулы (1) принимают наиболее простой вид:

$$\sin\varphi = y \qquad \cos\varphi = x. \tag{2}$$

Синус угла φ равен ординате, а косинус — абсциссе вектора единичной длины, исходящего из начала координат и образующего с осью Ox угол φ (рис. 133).

В § 92 мы доказали, что координаты вектора не превышают по абсолютной величине длины этого вектора. Поэтому из (2) следует, что ***синус и косинус любого угла не могут принимать значений, бо́льших по абсолютной величине, чем 1.***

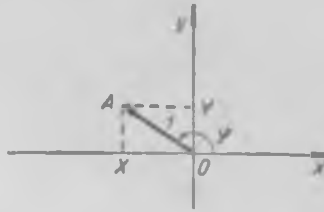


Рис. 133.

Все векторы единичной длины целиком лежат в круге радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 134.) Этим кругом удобно пользоваться при изучении тригонометрических функций (особенно синуса и косинуса.) Поэтому он получил специальное название — *тригонометрический круг.*

Рис. 134.

Прямая $x = 1$ (рис. 135) называется *осью тангенсов.* Каждому углу $\varphi \neq$ $\neq 90^\circ(2n + 1)$ можно поставить в соответствие точку B на оси тангенсов, являющуюся точкой пересечения конечной стороны угла φ (или ее продолжения) с осью тангенсов (рис. 136, *а* и 136, *б*).

Рис. 135.

Тангенс угла φ равен ординате соответствующей точки B на оси тангенсов.

Действительно, если угол φ оканчивается в 1-й четверти (рис. 136, *а*), то согласно формуле (7), § 95,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{BC}{OC} = \frac{BC}{1} = BC.$$

Но BC как раз и есть ордината точки B. Если же угол φ оканчивается во 2-й четверти (рис. 136, *б*), то, выбирая на его

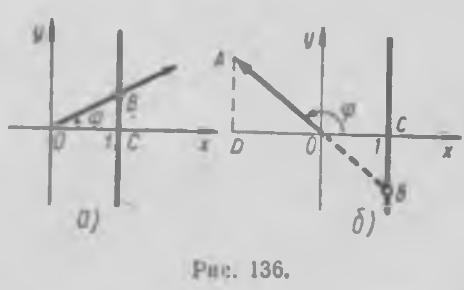


Рис. 136.

конечной стороне произвольную точку A и рассматривая вектор $\overrightarrow{OA}$, получаем:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{AD}{-OD} = -\frac{AD}{OD}.$$

Из подобия треугольников OAD и OBC следует, что

$$\frac{AD}{OD} = \frac{BC}{OC}.$$

Поэтому $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{BC}{OC} = -\frac{BC}{1} = -BC$. Но $-BC$ как раз и есть ордината точки B.

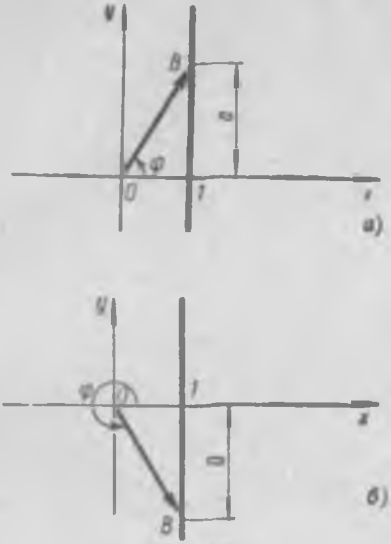


Рис. 137.

Аналогично можно доказать справедливость нашего утверждения и для углов φ, оканчивающихся в 3-й и 4-й четвертях.

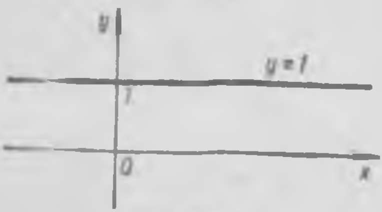


Рис. 138.

В отличие от $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, принимающих только значения от -1 до 1 (включая эти два значения), **$\operatorname{tg}\varphi$ *может быть равен любому действительному числу.*** В самом деле, каким бы ни было число a, всегда, выбирая на оси тангенсов точку B с ординатой a и соединяя ее с точкой O, мы получаем вектор $\overrightarrow{OB}$, образующий с осью x некоторый угол φ. Тангенс этого угла равен a (см. рис. 137, *а* для $a > 0$ и рис. 137, *б* для $a < 0$). Поэтому для любого числа a можно указать такой угол φ, что $\operatorname{tg}\varphi = a$.

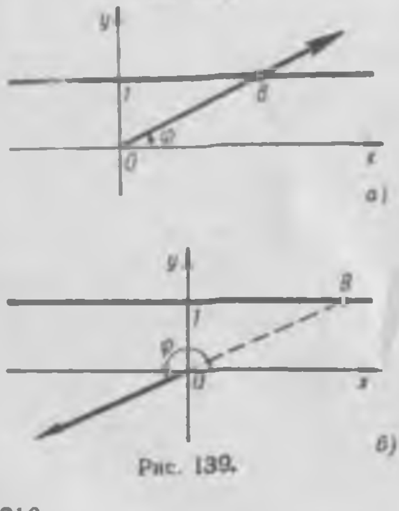


Рис. 139.

Прямая $y = 1$ (рис. 138) называется *осью котангенсов*. Каждому углу $\varphi \neq 180°n$ можно поставить в соответствие точку B на оси котангенсов, являющуюся точкой пересечения конечной стороны угла φ (или ее продолжения) с осью котангенсов (рис. 139, *а* и 139, *б*).

Котангенс угла φ равен абсциссе соответствующей точки B на оси котангенсов.

Это утверждение мы предлагаем учащимся доказать самостоятельно.

Как и $\operatorname{tg} \varphi$, ***котангенс угла может быть равен любому действительному числу.***

Упражнения

645. Используя тригонометрический круг, показать, что для любого острого угла α

$$\sin \alpha + \cos \alpha > 1.$$

646. Показать, что углам 35° и 215° соответствует одна и та же точка на оси тангенсов.

То же для углов 215° и —145°.

647. Используя ось тангенсов и ось котангенсов, показать, что $\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{tg} 225^\circ = 1$.

648. Верны ли утверждения:

а) каждому углу φ соответствует одна вполне определенная точка оси тангенсов;

б) каждой точке оси тангенсов соответствует один вполне определенный угол φ?

649. Может ли синус некоторого угла равняться $\frac{\pi}{3}$?

650. Может ли секанс некоторого угла равняться $\frac{\pi}{4}$?

651. Докажите геометрически, используя ось тангенсов и ось котангенсов, что для любого острого угла φ

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{ctg} \varphi = 1.$$

Построение угла по заданным значениям его тригонометрических функций § 97

В этом параграфе мы на конкретных задачах покажем, как строятся углы по известным значениям их тригонометрических функций.

Задача 1. *Построить угол φ, синус которого равен a.*

Если $|a| > 1$, то построить такой угол нельзя, потому что он вообще не существует (синус любого угла по абсолютной величине не превышает единицы). Если же $|a| \leqslant 1$, то поступаем таким образом. Проводим окружность радиуса 1 с центром в начале координат. На оси Oy отмечаем точку B с ординатой a (рис. 140) и проводим через нее прямую, параллельную оси абсцисс. Точки пересечения этой прямой с окружностью обозначим через A_1 и A_2. Векторы $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_2}$ имеют единичную длину, а их ординаты равны a. Поэтому все углы, для которых $\overrightarrow{OA_1}$

и OA_2 являются конечными сторонами, имеют синус, равный a.

Замечание. Если $a = 1$, то описанным выше способом мы получаем не два, а только один вектор $\overrightarrow{OB}$, образующий искомые углы с положительным направлением оси абсцисс (рис. 141, *а*). В этом случае $\varphi = 90° + 360°n$. Аналогично обстоит дело и при $a = -1$ (рис. 141, *б*). В этом случае $\varphi = -90° + 360° n$.

Рис. 140.

Задача 2. *Построить угол φ, косинус которого равен a.*

Как и в задаче 1, требуемое построение можно выполнить лишь при $|a| \leqslant 1$.

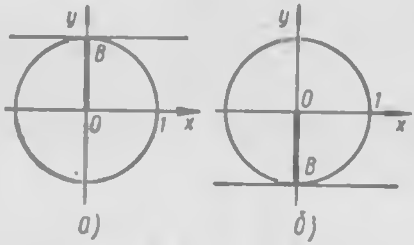


Рис. 141.

На оси Ox отмечаем точку B с абсциссой a и через нее проводим прямую, параллельную оси ординат (рис. 142; на этом рисунке число a отрицательно). Точки пересечения этой прямой с единичной окружностью обозначим через A_1 и A_2. Искомыми углами будут углы, для которых конечными сторонами являются OA_1 и OA_2.

Рис. 142.

Задача 3. *Построить угол φ, тангенс которого равен a.*

На оси тангенсов отмечаем точку B с ординатой a (рис. 143). Все углы, конечные стороны которых лежат на прямой OB, имеют тангенс, равный a.

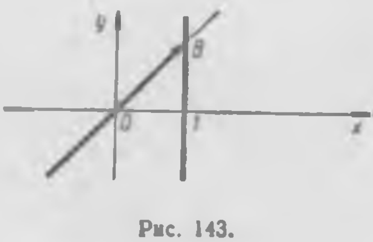


Рис. 143.

Задача 4. *Построить угол φ, котангенс которого равен a.*

На оси котангенсов отмечаем точку B с абсциссой a (рис. 144). Все углы, конечные стороны которых лежат на прямой OB, имеют котангенс, равный a.

Упражнение

652. Построить угол φ по следующим данным:

1) $\sin\varphi = \frac{1}{3}$; 7) $\operatorname{tg}\varphi = 3$;
2) $\sin\varphi = -0{,}5$; 8) $\operatorname{tg}\varphi = -2$;
3) $\sin\varphi = -1$; 9) $\operatorname{ctg}\varphi = 5$;
4) $\cos\varphi = -\frac{1}{3}$; 10) $\operatorname{ctg}\varphi = -4$;
5) $\cos\varphi = 0{,}4$; 11) $\sec\varphi = 1{,}5$;
6) $\cos\varphi = 1$; 12) $\operatorname{cosec}\varphi = -2$.

Рис. 144.

Значения тригонометрических функций некоторых углов § 98

1. Пусть вектор единичной длины $\overrightarrow{OA}$ образует с осью абсцисс угол $\varphi = 0°$ (рис. 145). Тогда его координаты x и y равны соответственно 1 и 0. Следовательно, $\sin 0° = y = 0$, $\cos 0° = x = 1$. Отсюда

$$\operatorname{tg} 0° = \frac{\sin 0°}{\cos 0°} = 0,$$

$$\sec 0° = \frac{1}{\cos 0°} = 1.$$

Рис. 145.

Котангенс и косеканс этого угла не определены.

2. Если $\varphi = 90°$ (рис. 146), то координаты вектора $\overrightarrow{OA}$ единичной длины равны $x = 0$, $y = 1$.

Следовательно,
$\sin 90° = y = 1$, $\cos 90° = x = 0$.

Поэтому

$$\operatorname{ctg} 90° = \frac{\cos 90°}{\sin 90°} = 0,$$

$$\operatorname{cosec} 90° = \frac{1}{\sin 90°} = 1.$$

Рис. 146.

Тангенс и секанс этого угла не определены.

Рис. 147.

Рис. 148.

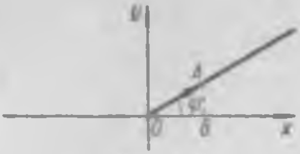


Рис. 149.

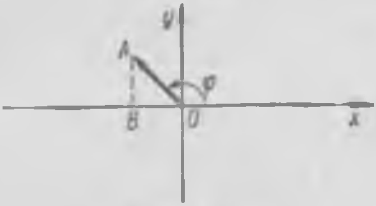


Рис 150.

3. При $\varphi = 180°$ (рис. 147) $x = -1$, $y = 0$. Поэтому $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$, $\operatorname{tg} 180° = 0$, $\sec 180° = -1$. Котангенс и косеканс этого угла не определены.

4. При $\varphi = 270°$ (рис. 148) $x = 0$, $y = -1$. Поэтому $\sin 270° = -1$, $\cos 270° = 0$, $\operatorname{ctg} 270° = 0$, $\operatorname{cosec} 270° = -1$. Тангенс и секанс этого угла не определены.

5. Пусть $\varphi = 30°$ (рис. 149). Тогда $x = OB$, $y = AB$. Из $\Delta\, AOB$ находим: $AB = \frac{1}{2}$ (катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы). Используя теорему Пифагора, получаем:

$$OB = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$ Поэтому $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{1}{2}$.

Следовательно,

$$\sin 30° = \frac{1}{2};\ \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}};\ \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}.$$

6. Пусть $\varphi = 135°$ (рис. 150). Тогда если $OA = 1$, то $x = -OB = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = AB = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (в $\triangle\, OAB$ $OB = AB$, так как $\angle AOB = 45°$).

Следовательно, $\sin 135° = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos 135° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\operatorname{tg} 135° = -1$; $\operatorname{ctg} 135° = -1$; $\sec 135° = -\sqrt{2}$; $\operatorname{cosec} 135° = \sqrt{2}$.

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не существует
$\operatorname{ctg}\alpha$	Не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Аналогично можно было бы найти значения тригонометрических функций и некоторых других углов. Значения тригонометрических функций углов 0°, 30°, 45°, 60°, 90° следует знать на память.

Таблица этих значений приведена на странице 220.

Упражнения

Вычислить (№ 653—659):

653. $2 \sin 30° + 3 \cos 30° - 2 \operatorname{tg} 30° - 4 \operatorname{ctg} 30° + \sec 30° - \operatorname{cosec} 30°$.

654. $5 \sin 45° + 2 \cos 45° + 3 \operatorname{tg} 45° - 10 \operatorname{ctg} 45° - 4 \sec 45° - 7 \operatorname{cosec} 45°$.

655. $\sin 60° + \cos 60° - \operatorname{tg} 60° - \operatorname{ctg} 60° + \sec 60° - \operatorname{cosec} 60°$.

656. $3 \sin 0° - 5 \cos 0° + 7 \operatorname{tg} 0° + \sec 0°$.

657. $\sin 90° - 6 \cos 90° + 3 \operatorname{ctg} 0° + 5 \operatorname{cosec} 0°$.

658. $\sin 270° + \cos 270° - \operatorname{ctg} 270°$.

659. $\frac{1}{2} \sin 180° - \sqrt{3} \cos 180° + \frac{1 + \operatorname{tg} 180°}{1 - \operatorname{tg} 180°} + \sec 180°$.

660. Найти тригонометрические функции углов:
а) — 30°; б) — 45°; в) — 60°; г) — 90°.

Вычислить:

661. $\frac{\sin 45° \cos 60° - \cos(-45°) \sin(-60°)}{\operatorname{tg}^2 30° - \sin^2 90° \cdot \cos^2 270°}$.

662. $\frac{\sec(-30°) + \operatorname{cosec}(-30°)}{\sin^2(-30°) + \operatorname{cosec}^2(-30°)}$.

Четность тригонометрических функций § 99

Углы φ и $-\varphi$ образуются при повороте луча в двух взаимно противоположных направлениях (по часовой стрелке и против часовой стрелки). Поэтому конечные стороны $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_2}$ этих углов симметричны относительно оси абсцисс (рис. 151). Координаты векторов единичной длины $\overrightarrow{OA_1} = (x_1, y_1)$ и $\overrightarrow{OA_2} = (x_2, y_2)$ удовлетворяют соотношениям:

$$x_2 = x_1, \ y_2 = -y_1.$$

Поэтому

$$\cos(-\varphi) = \cos \varphi,$$
$$\sin(-\varphi) = -\sin \varphi.$$

Следовательно, ***синус является нечетной, а косинус—четной функцией угла.***

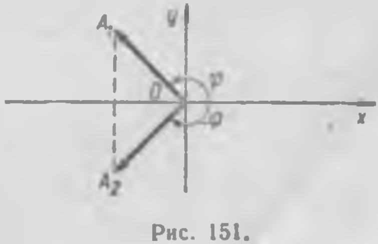


Рис. 151.

Далее имеем:

$$\operatorname{tg}(-\varphi)=\frac{\sin(-\varphi)}{\cos(-\varphi)}=\frac{-\sin\varphi}{\cos\varphi}=-\operatorname{tg}\varphi,$$

$$\operatorname{ctg}(-\varphi)=\frac{\cos(-\varphi)}{\sin(-\varphi)}=\frac{\cos\varphi}{-\sin\varphi}=-\operatorname{ctg}\varphi.$$

Поэтому ***тангенс и котангенс являются нечетными функциями угла***.

Упражнение

663. Выяснить, какие из данных функций являются четными и какие нечетными:

1) $y = \sin(-x)$;
2) $y = \cos(-x)$;
3) $y = \operatorname{tg}(2x)$;
4) $y = \sin x \cos x$;
5) $y = \sec x$;
6) $y = \operatorname{cosec} x$;
7) $y = \sin^2 x$;
8) $y = \cos^2 x$;
9) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$.

Периодичность функций $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ — § 100

Предположим, что вектор $\overrightarrow{OA}=(x, y)$ единичной длины образует с осью абсцисс угол φ (рис. 152). Если сделать полный оборот вектора $\overrightarrow{OA}$ вокруг точки O против часовой стрелки, то получится угол $\varphi + 360°$. Но вектор $\overrightarrow{OA}$ при этом займет первоначальное положение, а потому координаты его x и y не изменятся. Следовательно,

$$y = \sin\varphi = \sin(\varphi + 360°),$$
$$x = \cos\varphi = \cos(\varphi + 360°).$$

Эти соотношения показывают, что значения функций $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ не изменяются, если их аргумент увеличить на 360°.

Пусть $f(x)$ есть некоторое выражение, зависящее от переменной величины x. (Например, $f(x) = x^2$, $f(x) = \sin x$ и т. д.) Тогда равенство

$$y = f(x)$$

определяет y как функцию аргумента x.

Рис. 152.

Если при любых допустимых значениях аргумента x

$$f(x+T) = f(x),$$

где T — некоторое отличное от нуля число, то функция $f(x)$ называется периодической, а число T — ее периодом. Согласно этому определению функции $\sin x$ и $\cos x$ являются периодическими с периодом $T = 360°$.

При n полных оборотах вектора $\overrightarrow{OA}$ против часовой стрелки образуется угол $\varphi + 360° n$, а по часовой стрелке — угол $\varphi - 360° n$. В каждом из этих случаев координаты x и y вектора не изменяются, а потому не изменяются $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$. Таким образом,

$$\cos\varphi = \cos(\varphi + 360° n),$$
$$\sin\varphi = \sin(\varphi + 360° n), \qquad (1)$$

где n — любое целое число (положительное, отрицательное или нуль).

Формулы (1) показывают, что каждый из углов

$$360°;\ 720°;\ 1080°;\ \ldots \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$
$$-360°;\ -720°;\ -1080°;\ \ldots \quad (n = -1, -2, -3, \ldots)$$

является периодом функций $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$. Таким образом, эти периодические функции имеют бесконечное множество периодов.

Можно доказать, что любая периодическая функция (а не только $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$) имеет бесконечное множество периодов.

Говоря о периоде функции, удобно из бесконечного множества всех ее периодов иметь в виду какой-нибудь один вполне определенный период. Обычно под ним понимают *наименьший положительный период функции**.

Из всех рассмотренных выше периодов функции $\sin\varphi$ наименьшим положительным периодом является угол в 360°. Но, может быть, существует еще меньший угол, который мы просто упустили из виду, но который также является периодом функции $\sin\varphi$? Чтобы решить этот вопрос, предположим, что наименьший положительный период функции $\sin\varphi$ равен T. Тогда при любом φ

$$\sin(\varphi + T) = \sin\varphi.$$

В частности, при $\varphi = 0$ получаем:

$$\sin T = \sin 0° = 0.$$

Но нулю равны синусы лишь тех положительных углов, которые кратны углу в 180° (см. § 95), то есть углов в 180°, 360°, 540° и т. д. Поэтому единственным «конкурентом» для угла в 360° является угол в 180°. Составляет ли он период функции $\sin\varphi$? Если бы это было так, то равенство $\sin(\varphi + 180°) = \sin\varphi$ должно было бы выполняться при всех значениях φ. В частности, при $\varphi = 90°$ мы получили бы

$$\sin 270° = \sin 90°.$$

* Следует, однако, иметь в виду, что наименьшего положительного периода у периодической функции может и не быть. Подробнее об этом см. в гл. IX, часть II.

Но $\sin 270° = -1$, а $\sin 90° = 1$ (см. § 98). Поэтому угол в 180° не является периодом функции $\sin \varphi$. Остается признать, что ***периодом*** (то есть наименьшим положительным периодом) ***функции*** $\sin \varphi$ ***является угол в 360°***.

Аналогично можно доказать, что ***периодом функции*** $\cos \varphi$ ***также является угол в 360°***.

Предлагаем учащимся убедиться в этом самостоятельно.

Упражнения

664. Доказать следующие соотношения:

а) $\sin 740° = \sin 20°$; в) $\cos 54° = \cos(-1026°)$;

б) $\sin(-1000°) = \sin 80°$; г) $\cos(-1750°) = \cos 50°$.

665. Данные выражения преобразовать так, чтобы входящие в них углы были положительными и не превышали 360°:

а) $\sin 820°$; б) $\cos(-7363°)$; в) $\sin(-600°)$.

666. Данные выражения преобразовать так, чтобы входящие в них углы по абсолютной величине не превышали 180°:

а) $\cos 729°$; б) $\sin 1268°$; в) $\sin(-535°)$; г) $\cos(-1001°)$.

667. Доказать, что угол в 540° является одним из периодов функции $y = \cos 2x$.

668. Доказать, что угол в 360° является одним из периодов функции $y = \operatorname{tg} x$.

669. Докажите, что любой период T функции $y = \cos x$ является корнем уравнения

$$\cos x = 1.$$

Верно ли обратное утверждение?

Периодичность функций $\operatorname{tg} \varphi$ и $\operatorname{ctg} \varphi$ § 101

Мы знаем, что тангенс угла φ равен ординате соответствующей точки B на оси тангенсов (рис. 153). При повороте вектора $\overrightarrow{OA}$, образующего с осью абсцисс угол φ, на 180° против часовой стрелки вектор изменит свое направление на противоположное, но соответствующая точка B на оси тангенсов останется прежней. Поэтому не изменится и тангенс угла. Следовательно, при любом φ

$$\operatorname{tg}(\varphi + 180°) = \operatorname{tg} \varphi.$$

Это означает, что функция $\operatorname{tg} \varphi$ является периодической с пе-

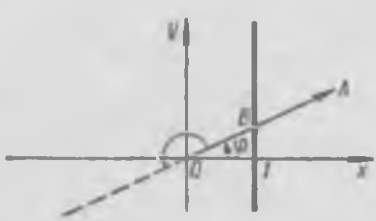


Рис. 153.

риодом 180°. Но будет ли угол в 180° **наименьшим** положительным периодом этой функции?

Предположим, что наименьший положительный период функции $\operatorname{tg}\varphi$ равен T. Тогда для всех допустимых значений φ должно быть

$$\operatorname{tg}(\varphi + T) = \operatorname{tg}\varphi.$$

В частности, при $\varphi = 0°$ получаем:

$$\operatorname{tg} T = \operatorname{tg} 0° = 0.$$

Но тангенс положительного угла равен нулю лишь тогда, когда синус этого угла равен нулю, то есть при $T = 180°, 360°, 540°$ и т. д. Следовательно, никакой положительный угол, меньший 180°, не может быть периодом функции $\operatorname{tg}\varphi$. Остается признать, что ***периодом*** (то есть наименьшим положительным периодом) ***функции*** $\operatorname{tg}\varphi$ ***является угол в 180°.***

Аналогично можно доказать, что ***периодом функции*** $\operatorname{ctg}\varphi$ ***также является угол в 180°.*** Предлагаем учащимся убедиться в этом самостоятельно.

Упражнения

670. Данные выражения преобразовать так, чтобы входящие в них углы были положительными и не превышали 180°:

а) $\operatorname{tg} 205°$; б) $\operatorname{tg}(-185°)$; в) $\operatorname{ctg} 300°$; г) $\operatorname{ctg}(-210°)$.

671. Данные выражения преобразовать так, чтобы входящие в них углы по абсолютной величине не превышали 90°:

а) $\operatorname{tg} 375°$; б) $\operatorname{ctg}(-93°)$; в) $\operatorname{ctg} 530°$.

672. Доказать, что угол в 120° является одним из периодов функции $y = \operatorname{ctg} 3x$.

673. Доказать, что любой период T функции $y = \operatorname{ctg} x$ является корнем уравнения

$$\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Верно ли обратное утверждение?

О периодических функциях § 102

Если функция $f(x)$ периодична с периодом T, то по значениям этой функции на любом отрезке длины T можно восстановить ее значения на всей числовой прямой.

Действительно, пусть периодическая функция $f(x)$ задана в интервале $(a, a + T)$, где T — период этой функции (рис. 154). Покажем, как можно определить значения этой функции в интервале $(a + T, a + 2T)$. Для любой точки b из этого интервала

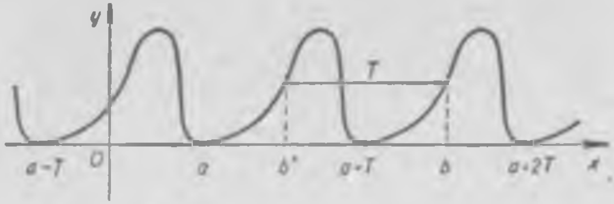


Рис. 154.

можно указать точку b' из интервала $(a,\ a+T)$, отстоящую от b на расстоянии T. В силу периодичности функции $f(x)$

$$f(b)=f(b').$$

Таким образом, по заданным значениям функции $f(x)$ в интервале $(a,\ a+T)$ можно восстановить значения этой функции в интервале $(a+T,\ a+2T)$. Затем, исходя из значений функции $f(x)$ в интервале $(a+T,\ a+2T)$, можно восстановить ее значения в интервале $(a+2T,\ a+3T)$. После этого точно так же можно найти значения функции $f(x)$ в интервале $(a+3T,\ a+4T)$ и т. д. Аналогично можно определить значения функции $f(x)$ и во всех точках числовой прямой, лежащих левее отрезка $(a,\ a+T)$.

Итак, задание периодической с периодом T функции $f(x)$ на любом интервале длины T дает возможность полностью охарактеризовать ее на всей числовой прямой. Поэтому для исследования функции $f(x)$, периодической с периодом T, достаточно изучить ее поведение лишь на каком-нибудь интервале длины T. Например, для исследования функций $y=\sin\varphi$ и $y=\cos\varphi$ достаточно рассмотреть их лишь при $0°\leqslant\varphi\leqslant 360°$. Для исследования функции $y=\operatorname{tg}\varphi$ можно было бы ограничиться интервалом $0°\leqslant\varphi\leqslant 180°$. Но при $\varphi=90°$ $\operatorname{tg}\varphi$ не определен. Поэтому в данном случае целесообразнее выбрать какой-нибудь другой интервал, в каждой точке которого функция $y=\operatorname{tg}\varphi$ была бы определена. Мы отдадим предпочтение интервалу $-90°<\varphi<90°$. Однако в принципе можно было бы выбрать, конечно, и интервал $0°\leqslant\varphi\leqslant 180°$. Для изучения функции $\operatorname{ctg}\varphi$ целесообразно выбрать интервал $0°<\varphi<180°$.

Упражнения

674. Как достроить график функции, периодической с периодом T, если он задан лишь в интервале $0\leqslant x\leqslant T$?

675. Может ли периодическая с периодом T функция $f(x)$ удовлетворить условию

$$f(2T)=2f(T)?$$

Если может, то в каком случае? Ответ пояснить примерами.

Используя тригонометрический круг, выясним, как с изменением аргумента φ изменяются функции $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

Пусть угол φ непрерывно возрастает от 0° до 90°. Тогда ордината соответствующего вектора (рис. 155, *а*) будет непрерывно возрастать от 0 до 1. Следовательно, при увеличении угла от 0° до 90° синус его возрастает от 0 до 1.

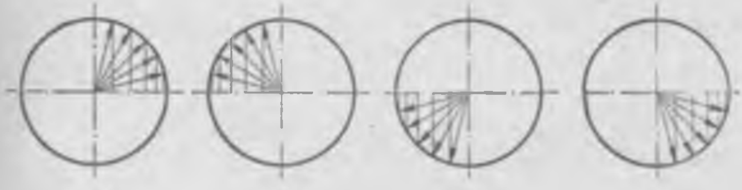
Если угол φ непрерывно возрастает от 90° до 180°, то ордината соответствующего вектора будет непрерывно уменьшаться от 1 до 0 (рис. 155, *б*). Следовательно, при увеличении угла φ от 90° до 180° синус его уменьшается от 1 до 0.

Точно так же можно установить, что при возрастании угла φ от 180° до 270° синус его уменьшается от 0 до —1 (рис. 155, *в*), а при возрастании угла φ от 270° до 360° синус его увеличивается от —1 до 0 (рис. 155, *г*).

Схематично поведение функции $\sin\varphi$ при изменении угла φ в интервале от 0° до 360° представлено сплошной линией на рисунке 156. Пунктирная линия схематично показывает изменение функции $\sin\varphi$ в других интервалах. Она получена посредством периодического продолжения сплошной линии влево и вправо.

Если угол φ оканчивается в 1-й или во 2-й четверти (рис. 155, *а* и 155, *б*), то ордината соответствующего вектора положительна. Поэтому синусы углов, оканчивающихся в 1-й и во 2-й четвертях, положительны. Если же угол φ оканчивается в 3-й или в 4-й четверти (рис. 155, *в* и 155, *г*), то ордината соответствующего вектора отрицательна. Поэтому и синусы этих углов отрицательны. К таким же выводам, конечно, можно было бы прийти и из рассмотрения схемы поведения функции $\sin\varphi$ (см. рис. 156).

Из отмеченных выше свойств следует особо подчеркнуть следующее свойство острых углов: ***чем больше острый угол, тем больше его синус***. Так, $\sin 55° > \sin 54°$; $\sin 13°56' > \sin 13°54'$ и т. д. Это утверждение, верное для острых углов, не распространяется на произвольные углы. Например, угол в 180° больше угла в 0°. Однако $\sin 180° = \sin 0° = 0$.



а) б) в) г)

Рис. 155.

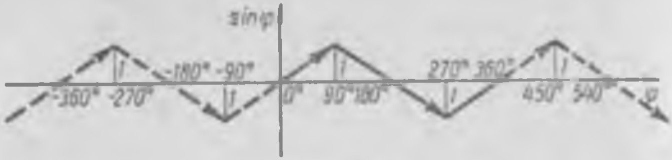


Рис. 156

Аналогично тому, как мы изучили функцию sin φ, может быть рассмотрена и функция cos φ. Мы предлагаем учащимся провести это рассмотрение самостоятельно. При этом могут быть использованы те же самые рисунки 155, *а*, 155, *б*, 155, *в* и 155, *г*. Приведем лишь окончательный результат.

При увеличении угла от 0° до 90° косинус его уменьшается от 1 до 0; при увеличении угла от 90° до 180° косинус его уменьшается от 0 до —1; при увеличении угла от 180° до 270° косинус его увеличивается от —1 до 0; при увеличении угла от 270° до 360° косинус его увеличивается от 0 до 1.

Схематично поведение функции $y = \cos x$ при изменении аргумента φ в интервале от 0° до 360° представлено сплошной линией на рисунке 157. Пунктирная линия схематично показывает изменение функции cos φ в других интервалах. Такая картина обусловлена периодичностью косинуса. Как показывают рисунки 155 и 157, косинусы углов, оканчивающихся в 1-й или в 4-й четвертях, положительны; косинусы углов, оканчивающихся во 2-й или в 3-й четвертях, отрицательны.

Следует особо подчеркнуть следующее свойство косинусов острых углов: ***чем больше острый угол, тем меньше его косинус***. Так, $\cos 55° < \cos 54°$; $\cos 13°56' < \cos 13°54'$ и т. д. Это утверждение, верное для острых углов, не распространяется на произвольные углы. Например, угол в 270° больше угла в 180°. Вместе с тем $\cos 270° > \cos 180°$ $(0 > -1)$.

Упражнения

676. Определить знаки следующих выражений:

1) sin 153°; 4) sin (—402°); 7) cos (—1230°);
2) sin 273°; 5) cos 73°; 8) cos 140°;
3) sin 301°; 6) sin 910°; 9) sin 1000° · cos 1000°.

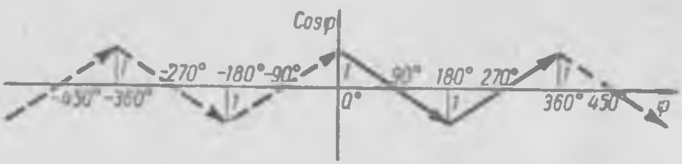


Рис. 157.

677. Доказать неравенства:

1) $\sin 61° > \sin 60°$;
2) $\sin 92° < \sin 91°$;
3) $\sin 196° > \sin 201°$;
4) $\sin 353° < \sin 359°$;
5) $\cos 79° < \cos 78°$;
6) $\cos 102° > \cos 150°$;
7) $\cos 190° < \cos 200°$;
8) $\cos 290° < \cos 310°$.

678. Какое число больше:

а) $\sin 735°$ или $\sin(-1066°)$;

б) $\sin(-313°)$ или $\sin 790°$;

в) $\cos 860°$ или $\cos 510°$;

г) $\cos(-20°)$ или $\cos(-10°)$?

679. В каких четвертях может оканчиваться угол φ, если: а) $\sin\varphi\cos\varphi > 0$; б) $\sin\varphi\cos\varphi < 0$?

680. В каких четвертях может оканчиваться угол φ, если: а) $\cos 2\varphi > 0$, $\sin 2\varphi < 0$; б) $\cos 2\varphi < 0$, $\sin 2\varphi > 0$?

681. В каких четвертях может оканчиваться угол α, если:
а) $|\sin\alpha| = -\sin\alpha$;
б) $|\cos\alpha| = \cos\alpha$;
в) $|\sin(-\alpha)| = -\sin\alpha$?

682. Расположить в порядке возрастания величины:
а) $\sin(-55°)$; $\sin 600°$; $\sin 1295°$;
б) $\cos 654°$; $\cos(-67°)$; $\cos 295°$.

683. Как изменяется $\sin 2\varphi$ при изменении угла φ:
а) от 0° до 45°;
б) от 90° до 135°;
в) от 135° до 180°;
г) от 5760° до 5805°?

684. Как изменяется $\cos 3\varphi$ при изменении угла φ от 3660° до 3690°?

Изменение функций $\operatorname{tg}\varphi$ и $\operatorname{ctg}\varphi$ § 104

Как было отмечено в § 102, для полного исследования функций $\operatorname{tg}\varphi$ достаточно изучить ее лишь в интервале от $-90°$ до $90°$.

При $\varphi = \pm 90°$ $\operatorname{tg}\varphi$ не определен. Но если угол φ, оставаясь в пределах от $-90°$ до $90°$, хоть немного отличается от $\pm 90°$, то выражение $\operatorname{tg}\varphi$ уже определено. Посмотрим, как же ведет себя функция $\operatorname{tg}\varphi$, когда ее аргумент φ близок к $\pm 90°$?

По мере того как угол φ приближается к 90°, оставаясь меньше 90°, ордината соответствующей точки на оси тангенсов (рис. 158) неограниченно возрастает. Какое бы большое число N мы ни взяли, всегда можно указать такой угол φ_0 (рис. 159), что для всех острых углов φ, больших φ_0, будет: $\operatorname{tg}\varphi > N$. Это

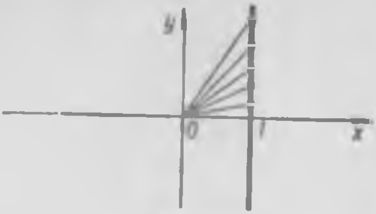


Рис. 158.

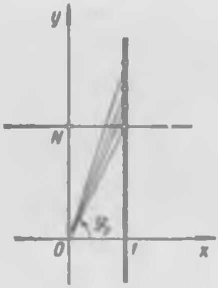


Рис. 159.

Рис. 160.

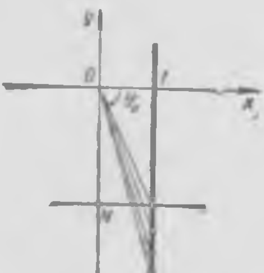


Рис. 161.

свойство тангенсов *условно* записывается так:

$$\lim_{\substack{\varphi \to 90^\circ \\ (\varphi < 90^\circ)}} \operatorname{tg} \varphi = +\infty$$

(читается: предел тангенса φ, когда φ стремится к 90°, оставаясь при этом меньше 90°, равен плюс бесконечности).

По мере того как угол φ приближается к -90°, оставаясь при этом больше -90°, ордината соответствующей точки на оси тангенсов, будучи отрицательной, неограниченно возрастает по абсолютной величине (рис. 160). Какое бы большое число N мы ни взяли, всегда можно указать такой угол φ_0 (рис. 161), что для всех углов φ, меньших φ_0, но больших -90°, будет: $|\operatorname{tg} \varphi| > N$, причем $\operatorname{tg} \varphi < 0$. Это свойство тангенса *условно* записывается так:

$$\lim_{\substack{\varphi \to -90^\circ \\ (\varphi > -90^\circ)}} \operatorname{tg} \varphi = -\infty$$

(читается: предел тангенса φ, когда φ стремится к -90°, оставаясь при этом больше -90°, равен минус бесконечности).

Мы исследовали поведение функции $\operatorname{tg} \varphi$ вблизи конечных точек интервала $(-90^\circ, 90^\circ)$. Исследовать $\operatorname{tg} \varphi$ внутри этого интервала весьма просто. Как уже указывалось в § 96, $\operatorname{tg} \varphi$ может принимать любые числовые значения. Из рисунка 162 легко понять, что, чем больше значение аргумента φ в интервале $(-90^\circ, 90^\circ)$, тем больше будет ордината соответствующей точки на оси тангенсов. Следовательно, из двух произвольных углов этого интервала большему соответствует больший тангенс.

Принято говорить, что ***при увеличении угла от $-90°$ до $+90°$ тангенс его возрастает от $-\infty$ до $+\infty$.***

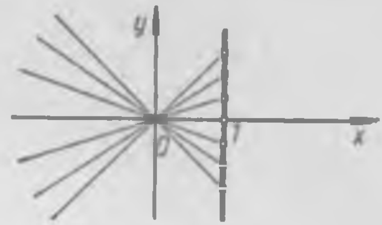


Рис. 162.

Схематично поведение функции $\operatorname{tg}\varphi$ в интервале $-90° < \varphi < 90°$ изображено сплошной линией па рисунке 163. Пунктирные линии на том же рисунке дают представление об изменении функции $\operatorname{tg}\varphi$ в других интервалах изменения аргумента φ. Такая картина объясняется периодичностью тангенса (см. § 102).

Необходимо особо отметить следующее. Если угол φ приближается к $90°$, оставаясь при этом м е н ь ш е $90°$, то $\operatorname{tg}\varphi$ неограниченно в о з р а с т а е т. Если же угол φ приближается к $90°$, оставаясь при этом б о л ь ш е $90°$ (см. рис. 163), то $\operatorname{tg}\varphi$ неограниченно у б ы в а е т. Аналогично можно сформулировать и закон изменения функции $\operatorname{tg}\varphi$, когда $\varphi \to -90°$.

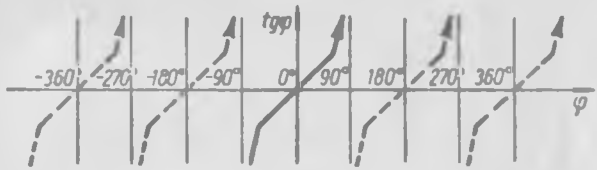


Рис. 163.

Углам, оканчивающимся в 1-й и 3-й четвертях, соответствуют точки на оси тангенсов с положительными ординатами (рис. 162). Поэтому тангенсы этих углов положительны. Углам, оканчивающимся во 2-й и 4-й четвертях, соответствуют точки на оси тангенсов с отрицательными ординатами (рис. 162). Поэтому тангенсы этих углов отрицательны.

Итак, мы рассмотрели функцию $y = \operatorname{tg}\varphi$. Аналогично можно было бы исследовать и функцию $\operatorname{ctg}\varphi$. Нетрудно видеть (рис. 164), что

$$\lim_{\substack{\varphi \to 0° \\ (\varphi > 0°)}} \operatorname{ctg}\varphi = +\infty, \qquad \lim_{\substack{\varphi \to 180° \\ (\varphi < 180°)}} \operatorname{ctg}\varphi = -\infty.$$

Из двух углов, заключенных в интервале $(0°, 180°)$, большему соответствует меньший котангенс.

Принято говорить, что ***при увеличении угла от $0°$ до $180°$ котангенс его уменьшается от $+\infty$ до $-\infty$.***

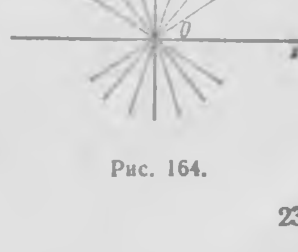


Рис. 164.

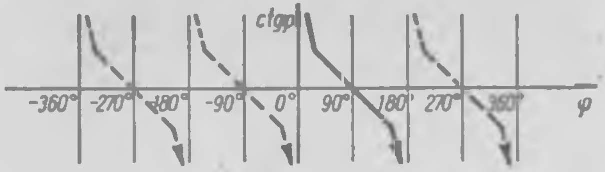


Рис. 165.

Схематично поведение функции ctg φ представлено на рисунке 165.

Котангенсы углов, оканчивающихся в 1-й и 3-й четвертях, положительны; котангенсы углов, оканчивающихся во 2-й и 4-й четвертях, отрицательны.

Упражнения

685. Определить знаки следующих выражений:

1) tg 153°; 4) ctg (—402°) · tg 1°; 7) tg (—1230°);
2) ctg 270°; 5) tg 73°; 8) tg 140° · ctg 240°;
3) tg 301°; 6) ctg (—910°); 9) tg 546° — 1.

686. Какое число больше:

1) tg 92° или tg 91°; 5) ctg 102° или ctg 150°;
2) tg 61° или tg 60°; 6) ctg (—313°) или ctg 790°;
3) tg 353° или tg 359°; 7) ctg (—20°) или ctg (—10°);
4) ctg 290° или ctg 310°; 8) tg 407° или ctg 497°?

687. В каких четвертях может оканчиваться угол φ, если:

а) $|\operatorname{tg}\varphi| = \operatorname{tg}\varphi$; в) $\operatorname{tg} 2\varphi > 0$;
б) $|\operatorname{ctg}(-\varphi)| = -\operatorname{ctg}\varphi$; г) $\operatorname{ctg} 2\varphi < 0$?

688. В каких четвертях имеют одинаковые знаки:
а) sin φ и tg φ; в) cos φ и tg φ;
б) cos φ и ctg φ; г) tg φ и ctg φ?

689. Какие пары тригонометрических функций имеют одинаковые знаки во всех четвертях?

690. Данные выражения расположить в порядке возрастания:
а) tg (—55°); tg 600°; tg 1295°;
б) ctg 295°; ctg (—67°); ctg 654°.

691. Какие тригонометрические функции внутреннего угла треугольника могут принимать отрицательные значения и когда именно?

692. Могут ли быть отрицательными значения тригонометрических функций:
а) половины внутреннего угла треугольника;
б) полусуммы двух внутренних углов треугольника;
в) полуразности двух внутренних углов треугольника?

В § 98, используя известные из геометрии свойства прямоугольных треугольников, мы показали, как можно найти значения тригонометрических функций некоторых углов, например, 30°, 45°, 60° и т. д. Кроме того, мы показали, как находятся значения тригонометрических функций углов, конечные стороны которых лежат на какой-нибудь оси координат (90°, 180°, 270° и т. д.). Но до сих пор остается неясным, как отыскиваются значения тригонометрических функций произвольных углов, таких, например, как 12°, 91°, 1239° и т. д.

Математика уже давно располагает весьма эффективными методами определения значений тригонометрических функций любого угла. Однако рассмотрение этих методов выходит далеко за пределы школьной программы. Поэтому мы можем лишь отметить, что в настоящее время существуют таблицы приближенных значений тригонометрических функций углов с очень высокой степенью точности. В некоторых из этих таблиц ошибки не превышают $10^{-7} = 0{,}0000001$. Мы будем пользоваться «Четырехзначными математическими таблицами» В. М. Брадиса. В них на страницах 52—54 приведена таблица, по которой с точностью до 0,0001 можно определять синусы и косинусы острых углов с интервалом в одну минуту.

Входными данными в таблицу являются величины углов: в строках отмечены градусы, а в столбцах — минуты. Каждая строка таблицы имеет две пометки — левую и правую. Например, первая строка на странице 53 помечена слева как 35°, а справа как 54°; последняя строка на той же странице помечена слева как 69°, а справа как 20°. Аналогично, каждый столбец имеет две пометки — верхнюю и нижнюю. Например, второй столбец на странице 53 сверху помечен как 6′, а снизу как 54′; следующий столбец сверху помечен как 12′, а снизу как 48′ и т. д.

Нахождение синуса угла. Пусть, например, нужно найти синус угла 37°. Отыскиваем число, стоящее на пересечении строки с *левой* пометкой 37° и столбца с *верхней* пометкой 0′. Это число 0,6018 (для краткости в таблице указаны лишь дробные части чисел, поскольку целые части всех этих чисел равны нулю). Следовательно, с точностью до 0,0001 $\sin 37° \approx 0{,}6018$. Если бы нам нужно было найти $\sin 37°24'$, то мы должны были бы взять число в строке с левой пометкой 37° и столбце с верхней пометкой 24′. Это число 0,6074. Следовательно, с точностью до 0,0001 $\sin 37°24' \approx 0{,}6074$.

Предположим теперь, что нам нужно найти $\sin 37°26'$. Столбца с верхней пометкой 26′ в таблице нет. В таком случае нужно воспользоваться поправками, приведенными в правой части страницы. Представим $37^\circ26'$ как $37^\circ24' + 2'$. Теперь к $\sin 37^\circ24' \approx$ $\approx 0{,}6074$ нужно п р и б а в и т ь поправку на $2'$. Эту поправку отыскиваем в строке с левой пометкой 37° и столбце с пометкой $2'$. Она равна 5.

Поэтому

$$\sin 37^\circ26' = \sin(37^\circ24' + 2') \approx \begin{array}{r} 0{,}6074 \\ +\quad 5 \\ \hline 0{,}6079. \end{array}$$

Итак, с точностью до 0,0001 $\sin 37^\circ26' \approx 0{,}6079$.

Если бы нам нужно было найти $\sin 37^\circ29'$, то мы поступили бы следующим образом: $37^\circ29' = 37^\circ30' - 1'$. В таблице находим $\sin 37^\circ30' \approx 0{,}6088$; поправка на $1'$ равна 2. Поэтому

$$\sin 37^\circ29' = \sin(37^\circ30' - 1') \approx \begin{array}{r} 0{,}6088 \\ -\quad 2 \\ \hline 0{,}6086. \end{array}$$

Итак, с точностью до 0,0001 $\sin 37^\circ29' \approx 0{,}6086$.

Из этих примеров нетрудно понять общее правило учета поправки при нахождении синуса: ***если данный угол больше того, который отмечен в таблице, то поправка при нахождении синуса прибавляется; если же данный угол меньше того, который отмечен в таблице, то поправка отнимается.***

Это правило легко понять: ведь чем больше острый угол, тем больше его синус, и наоборот, чем меньше острый угол, тем меньше его синус.

Нахождение косинуса угла. Пусть, например, нужно найти косинус угла 37°. Отыскиваем число, стоящее на пересечении строки с *правой* пометкой 37° и столбца с *нижней* пометкой $0'$. Это число 0,7986. Следовательно, с точностью до 0,0001 $\cos 37^\circ \approx 0{,}7986$. Если бы нам нужно было найти $\cos 37^\circ24'$, то мы должны были бы взять число в строке с правой пометкой 37° и столбце с нижней пометкой $24'$. Это число 0,7944. Следовательно, $\cos 37^\circ24' \approx 0{,}7944$.

Предположим теперь, что нам нужно найти $\cos 37^\circ26'$. Тогда мы находим по таблице $\cos 37^\circ24' \approx 0{,}7944$, а затем о т н и м а е м от этого числа поправку на $2'$. Эту поправку отыскиваем в строке с правой пометкой 37° и в столбце с отметкой $2'$. Она равна 4. Поэтому

$$\cos 37^\circ26' = \cos(37^\circ24' + 2') \approx 0{,}7944 - 0{,}0004 = 0{,}7940.$$

Итак, с точностью до 0,0001 $\cos 37^\circ26' \approx 0{,}7940$. Если бы нам нужно было найти $\cos 37^\circ29'$, то мы поступили бы следующим образом: $37^\circ29' = 37^\circ30' - 1'$. В таблице находим $\cos 37^\circ30' \approx 0{,}7934$; поправка на $1'$ равна 2. Поэтому

$$\cos 37^\circ29' = \cos(37^\circ30' - 1') \approx 0{,}7934 + 0{,}0002 = 0{,}7936.$$

Итак, с точностью до 0,0001 $\cos 37^\circ29' \approx 0{,}7936$.

Из этих примеров нетрудно понять общее правило учета поправки при нахождении косинуса. ***Если данный угол больше того, который отмечен в таблице, то поправка при нахождении косинуса отнимается; если же данный угол меньше того, который отмечен в таблице, то поправка прибавляется.***

В основе этого правила лежит следующее свойство косинуса: чем больше острый угол, тем меньше его косинус; чем меньше острый угол, тем больше его косинус.

Нахождение тангенса и котангенса угла. Таблицы тангенсов и котангенсов приведены у В. М. Брадиса на страницах 55 — 58. Эти таблицы составлены аналогично таблицам синусов и косинусов, и поэтому мы не будем подробно их описывать. Отметим лишь правила учета поправок. ***Если данный угол больше того, который отмечен в таблице, то при нахождении тангенса поправка прибавляется, а при нахождении котангенса—отнимается. Наоборот, если данный угол меньше того, который отмечен в таблице, то при нахождении тангенса поправка отнимается, а при нахождении котангенса—прибавляется.***

Учащимся предлагается самостоятельно обосновать это правило.

Примеры. Найти $\operatorname{tg} 37°29'$.

По таблице находим $\operatorname{tg} 37°30' \approx 0,7673$. Поправка на $1'$ равна 5. Поэтому $\operatorname{tg} 37°29' = \operatorname{tg} (37°30' - 1') \approx 0,7673 - 0,0005 = 0,7668$.

Найти $\operatorname{ctg} 37°29'$. По таблице находим $\operatorname{ctg} 37°30' \approx 1,3032$. В таблице мы прочитаем просто 3032. Это дробная часть тангенса. Целая часть указана ниже. Она равна 1 и постоянна для котангенсов всех углов от 30° и до 35°. Поправка на $1'$ равна 8. Поэтому $\operatorname{ctg} 37°29' = \operatorname{ctg} (37°30' - 1') \approx 1,3032 + 0,0008 = 1,3040$.

В заключение отметим, что тангенсы углов, близких к 90° (от 76° до 90°), и котангенсы углов, близких к 0° (от 0° до 14°), находятся по таблице (стр. 57, 58) без использования поправок.

Мы показали, как с помощью математических таблиц находятся значения тригонометрических функций острых углов. А как быть, если интересующий нас угол не является острым (например, 91°, 127° и т. д.)? Этот вопрос мы решим позднее. Пока лишь отметим, что для нахождения синуса, косинуса, тангенса и котангенса любого угла (в том числе и не острого!) вполне достаточно тех таблиц, которые мы только что рассмотрели.

Упражнения

693. Для каждого из данных углов найти синус, косинус, тангенс и котангенс:

1) 20°48′;	4) 88°54′;	7) 61°13′;	10) 45°07′;
2) 35°06′;	5) 20°50′;	8) 88°51′;	11) 87°11′;
3) 61°12′;	6) 35°05′;	9) 44°03′;	12) 65°05′.

694. Самолет, видимый с базы поисковой группы под углом 12°, радирует на базу, что он находится на высоте 800 *м* над разыскиваемым объектом. Найти расстояние от базы до разыскиваемого объекта.

695. При фотографировании обратной стороны Луны автоматическая межпланетная станция находилась от Луны на расстоянии, примерно равном 65 000 *км*. Под каким углом была видна в это время Луна? Радиус Луны принять равным 1740 *км*.

Использование тригонометрических таблиц для нахождения острого угла по значениям его тригонометрических функций — § 106

Тригонометрические таблицы можно использовать не только для нахождения значений тригонометрических функций острых углов, но и для нахождения острых углов по заданным значениям их тригонометрических функций.

Пусть, например, нужно найти острый угол φ, синус которого равен 0,5135. Отыскиваем это число в таблице на страницах 52—54. Замечаем, что оно стоит на пересечении строки с левой пометкой 30° и столбца с верхней пометкой 54′. Следовательно, $\varphi \approx 30°54'$. Попробуем теперь найти острый угол φ, синус которого равен 0,9526. Такого числа в таблице нет. Ближайшее же к нему число в таблице равно 0,9527. Представим, 0,9526 в виде 0,9527 — 0,0001. Число 0,9527 соответствует углу 72°18′, а 0,0001 — поправке на 1′. Поэтому $\varphi \approx 72°18'-1'=72°17'$. Таким же образом можно находить углы и по значениям их косинуса, тангенса и котангенса. Ответы, как правило, будут приближенными с точностью до 1′.

Особое внимание при решении подобных задач нужно обратить на правило учета поправок. Пусть, например, нужно найти острый угол φ, котангенс которого равен 2,710. В таблице на страницах 55—58 отыскиваем число, ближайшее к 2,710. Таким числом является 2,703. Представим 2,710 в виде 2,703+0,007. Число 2,703 соответствует котангенсу угла 20°18′, а 0,007—поправке на 3′. Поэтому искомый угол φ равен $\varphi \approx 20°18'-3' = 20°15'$. Поправку в данном случае нужно отнимать, а не прибавлять. Ведь из двух острых углов меньшему соответствует больший котангенс.

Упражнения

696. Найти острый угол по данному значению его синуса (косинуса):

а) 0,1874;	г) 0,9903;	ж) 0,9412;	к) 0,9441;
б) 0,5577;	д) 0,2682;	з) 0,4381;	л) 0,9944;
в) 0,9078;	е) 0,8264;	и) 0,8760;	м) 0,0020.

697. Найти острый угол φ по данному значению его тангенса (котангенса):

а) 0,2698;	г) 19,1900;	ж) 3,9910;	к) 0,3832;
б) 2,2250;	д) 0,0090;	з) 1,7400;	л) 0,1844;
в) 3,9230;	е) 0,5782;	и) 2,7440;	м) 0,0008.

Радианное измерение углов и дуг § 107

Подобно тому как расстояния не всегда удобно измерять в сантиметрах, время в секундах, массу в граммах и т. д. — углы и дуги не всегда удобно измерять в градусах. Поэтому наряду с градусом очень часто употребляется и другая единица измерения углов и дуг — радиан.

1 угловой радиан есть центральный угол, опирающийся на такую дугу окружности, длина которой равна радиусу этой окружности (рис. 166).

В этом определении фигурирует окружность, и поэтому естественно поставить вопрос: а не зависит ли угол в 1 радиан от радиуса этой окружности? Было бы нехорошо, если бы такая зависимость имела место. Ведь тогда один и тот же угол, например угол в 30°, содержал бы разное число радианов в зависимости от того, с какой окружностью его связывать. Однако в этом отношении все обстоит благополучно. Действительно, окружность радиуса R имеет длину $2\pi R$. Поэтому ее дуга длиной в R составляет $\frac{1}{2\pi}$ часть окружности; но в таком случае соответствующий ей центральный угол должен составлять $\frac{1}{2\pi}$ часть полного угла, то есть угла в 360°:

$$1 \text{ радиан} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57^\circ 17' 45''.$$

Такой угол не зависит от R. Очевидно, что

$$2\pi \text{ радианов} = 360^\circ.$$

Поэтому

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} \text{ радиана} \approx 0{,}017 \text{ радиана}.$$

1 дуговой радиан есть такая дуга окружности, которой соответствует центральный угол в 1 угловой радиан.

Вошло в обычай слово «радиан» в выражениях: «$\varphi = 1$ радиану», «$\varphi = 10$ радианам», «$\varphi = -3$ радианам» и т. д.—опускать и писать просто:

$$\varphi = 1, \ \varphi = 10, \ \varphi = -3 \text{ и т. д.}$$

Эти выражения не следует путать с выражениями

$$\varphi = 1^\circ, \ \varphi = 10^\circ, \ \varphi = -3^\circ \text{ и т. д.}$$

Рис. 166

Такие углы, как углы в 30°, 45°, 60°, 90°, 135° и др., очень часто будут встречаться в упражнениях. Радианную меру этих углов полезно помнить:

$$30^\circ = \frac{\pi}{6}; \quad 45^\circ = \frac{\pi}{4}; \quad 60^\circ = \frac{\pi}{3}; \quad 90^\circ = \frac{\pi}{2}; \quad 135^\circ = \frac{3}{4}\pi \text{ и т. д.}$$

В четырехзначных математических таблицах В. М. Брадиса на страницах 59—61 приведены таблицы для перевода градусной меры угла (дуги) в радианную. Этими же таблицами можно пользоваться и для решения обратной задачи, то есть для обращения радианной меры угла в градусную. На страницах 62 — —64 в таблицах В. М. Брадиса приведены значения функций $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$ для углов φ, выраженных в радианах.

Если под φ понимать угол, выраженный в радианах, то периодом функций $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ будет угол 2π, а периодом функций $\operatorname{tg}\varphi$ и $\operatorname{ctg}\varphi$ — угол π.

Упражнения

698. Данные углы выразить в радианах:

а) 40°; б) 150°; в) 315°; г) 1000°.

699. Данные углы выразить в градусах:

а) $\frac{\pi}{7}$; б) $\frac{3}{5}\pi$; в) 7π; г) $\frac{5}{2}\pi$.

700. В какой четверти оканчиваются углы:

1) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{21\pi}{4}$; 5) 3; 7) 100;

2) $-\frac{2\pi}{3}$; 4) 0,80; 6) —3,25; 8) $-\frac{1}{3}$?

701. Вычислить:

а) $a^2 \sin\frac{\pi}{2} + b^2\cos 0 + 2ab\cos\pi$;

б) $3\cos\frac{\pi}{2} - 4\sin^3\frac{3\pi}{2} + 8\operatorname{tg}\pi$;

в) $2\cos\pi + 6\operatorname{ctg}\frac{3}{2}\pi - 5\sin 2\pi$;

г) $2\operatorname{tg}0 + \sin\pi - \cos\frac{3}{2}\pi - \operatorname{ctg}\pi$.

702. Для каких значений x выражение $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ не определено?

703. Какие из данных величин являются положительными и какие отрицательными:

а) $\sin\frac{15\pi}{4}$; б) $\cos 2$; в) $\operatorname{tg}\frac{5}{2}\pi$; г) $\operatorname{ctg} 100$?

Используя тригонометрические таблицы, вычислить:

704. $\sin 0{,}5 + \cos 2{,}7 + \operatorname{tg} 0{,}6 \cdot \operatorname{ctg} 2{,}8$.

705. $\operatorname{tg} 2{,}5 + \operatorname{ctg} 1{,}5 + \sin 0{,}3 \cdot \cos 0{,}3$.

706. При каком условии длина дуги окружности равна ее радианной мере?

707. Что больше:

а) $\sin 0{,}63$ или $\sin 0{,}87$; в) $\sin 4^\circ$ или $\sin 4$;

б) $\cos 1{,}8$ или $\cos 1{,}83$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{5}{6}\right)^\circ$ или $\operatorname{tg}\frac{5}{6}$?

Тригонометрические функции числового аргумента § 108

До сих пор, говоря о тригонометрических функциях, мы считали, что аргументами этих функций являются углы или дуги. Теперь мы хотим ввести в рассмотрение тригонометрические функции числового аргумента. Такое желание вполне естественно. Когда мы говорим, например, о квадратной функции $y = ax^2$, то под x понимаем просто число. Это число может характеризовать время в свободном падении тел $\left(S = \frac{gt^2}{2}\right)$, сопротивление электрической цепи в законе Джоуля — Ленца ($Q = IR^2$)и т д. Почему же в таком случае, говоря о функции $y = \operatorname{tg} x$, мы под x должны понимать обязательно угол?

Определение. *Синусом числа x называется число, равное синусу угла в x радианов. Косинусом числа x называется число, равное косинусу угла в x радианов.*

Аналогично определяются и другие тригонометрические функции числового аргумента x. Например, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и т. д. Здесь уже $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{6}$ не углы, выраженные в радианах, а просто числа.

Упражнения

Какие из данных чисел являются положительными и какие отрицательными (№ 708, 709):

708. а) $\sin 3$; б) $\cos 6$; в) $\operatorname{tg} 9$; г) $\operatorname{ctg} 12$.

709. а) $\cos(-5)$; б) $\operatorname{tg}(-10)$; в) $\sin(-15)$; г) $\operatorname{ctg}(-20)$?

Алгебраические соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента § 109

Прежде всего отметим уже известные нам тождества

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \tag{1}$$

и

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}. \tag{2}$$

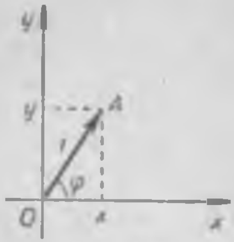


Рис. 167.

Из этих двух тождеств следует, что

$$\operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{ctg}\varphi = 1. \tag{3}$$

Теперь покажем, что для любого угла φ

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1^*. \tag{4}$$

Предположим, что $\overrightarrow{OA} = (x, y)$ есть вектор единичной длины, образующий с осью x угол φ (рис. 167). Тогда

$$\sin\varphi = y,$$
$$\cos\varphi = x.$$

Квадрат длины любого вектора равен сумме квадратов его координат. Из этого утверждения и вытекает формула (4).

Нам известны также следующие соотношения:

$$\sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi} \tag{5}$$

и

$$\operatorname{cosec}\varphi = \frac{1}{\sin\varphi}. \tag{6}$$

К полученным шести тождествам добавим еще два:

$$1 + \operatorname{tg}^2\varphi = \sec^2\varphi, \tag{7}$$
$$1 + \operatorname{ctg}^2\varphi = \operatorname{cosec}^2\varphi. \tag{8}$$

Докажем, например, тождество (7):

$$1 + \operatorname{tg}^2\varphi = 1 + \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi} = \sec^2\varphi.$$

Аналогично доказывается и тождество (8).

Упражнения

710. Могут ли $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ одновременно равняться нулю?

711. Могут ли $\operatorname{tg}\varphi$ и $\operatorname{ctg}\varphi$ по абсолютной величине быть: а) оба больше 1; б) оба меньше 1?

712. Может ли одно из чисел $\operatorname{tg}\varphi$ и $\operatorname{ctg}\varphi$ быть положительным, а другое отрицательным?

713. Какова область допустимых значений φ в тождестве

$$\operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{ctg}\varphi = 1?$$

714. Доказать неравенство $|\sec\varphi| \geqslant 1$ не менее чем двумя различными способами.

715. Выразить $\dfrac{3\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + 2\cos\alpha}$ через $\operatorname{tg}\alpha$.

716. Найти $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = a$.

---

* Выражения $\sin^2\varphi$, $\cos^2\varphi$ и т. д. употребляются для записи квадратов $(\sin\varphi)^2$, $(\cos\varphi)^2$ и т. д.

Используя основные тригонометрические тождества, полученные в § 109, легко найти значения всех тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, если известно значение какой-нибудь одной из них. Поясним это на конкретных примерах.

Пример 1. Найти значения тригонометрических функций угла φ, если известно, что $\sin\varphi = \frac{3}{5}$.

Из тождества $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ находим: $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi = \frac{16}{25}$. Поэтому $\cos\varphi = \pm\frac{4}{5}$.

Знак $+$ или $-$ следует выбирать в зависимости от того, в какой четверти оканчивается угол φ. По условию $\sin\varphi = \frac{3}{5} > 0$. Значит, угол φ оканчивается либо в 1-й, либо во 2-й четверти. Если он оканчивается в 1-й четверти, то $\cos\varphi = +\frac{4}{5}$. Если же он оканчивается во 2-й четверти, то $\cos\varphi = -\frac{4}{5}$.

В первом случае

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}; \qquad \sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{5}{4};$$

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{4}{3}; \qquad \operatorname{cosec}\varphi = \frac{1}{\sin\varphi} = \frac{5}{3}.$$

Во втором случае

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{3}{4}; \quad \operatorname{ctg}\varphi = -\frac{4}{3}; \quad \sec\varphi = -\frac{5}{4}; \quad \operatorname{cosec}\varphi = \frac{5}{3}.$$

Пример 2. Найти значения тригонометрических функций угла φ, если известно, что он оканчивается в 4-й четверти и $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{3}{4}$.

Используя тождество $1 + \operatorname{tg}^2\varphi = \sec^2\varphi$, найдем $\sec\varphi$:

$$\sec\varphi = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = \sqrt{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{5}{4}.$$

Знак $+$ перед радикалом мы взяли потому, что угол φ по условию оканчивается в 4-й четверти, $\sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}$, а косинус угла, оканчивающегося в 4-й четверти, положителен; поэтому положителен и $\sec\varphi$. Далее получаем:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sec\varphi} = \frac{4}{5}.$$

Теперь, используя тождество $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, найдем $\sin\varphi$:

$$\sin\varphi = -\sqrt{1-\cos^2\varphi} = -\frac{3}{5}.$$

Здесь перед радикалом нужно брать знак —, поскольку синус угла, оканчивающегося в 4-й четверти, отрицателен.

Заметим, что в данном случае рациональнее было бы найти $\sin\varphi$ из тождества $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$. Однако мы сознательно получили $\sin\varphi$ другим путем, чтобы еще раз показать, как нужно выбирать знак (+ или —) перед радикалом.

Итак, мы получили $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$, $\sec\varphi$. После этого легко найти значения и других тригонометрических функций угла φ:

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = -\frac{4}{3}; \quad \operatorname{cosec}\varphi = \frac{1}{\sin\varphi} = -\frac{5}{3}.$$

Упражнения

717. Найти значения тригонометрических функций угла α по следующим данным:

1) $\sin\alpha = 0{,}6$, $0° < \alpha < 90°$;
2) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$;
3) $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $270° < \alpha < 360°$;
4) $\cos\alpha = -0{,}8$, $180° < \alpha < 270°$;
5) $\operatorname{tg}\alpha = -2$, $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$;
6) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, $180° < \alpha < 270°$.

718. Найти значения тригонометрических функций угла φ, если известно, что $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$ $(a > b > 0)$ и угол φ оканчивается не в 1-й четверти.

719. Найти значения тригонометрических функций угла φ, если известно, что $\operatorname{tg}\varphi = a^2 - 1$ $(|a| \leqslant 1)$, и угол φ оканчивается не во 2-й четверти.

Формулы приведения § 111

Теорема. *Для любого угла* φ

$$\sin(90° + \varphi) = \cos\varphi. \qquad (1)$$

Доказательство. Если угол φ оканчивается в 1-й четверти (рис. 168, *а*), то угол $90° + \varphi$ должен оканчиваться во 2-й четверти. Используя единичный круг, получаем:

$$\sin(90° + \varphi) = BD, \quad \cos\varphi = OC.$$

Но треугольники OAC и BOD равны; поэтому $BD = OC$. Отсюда и вытекает равенство (1).

Если угол φ оканчивается во 2-й четверти (рис. 168, *б*), то угол $90° + \varphi$ должен оканчиваться в 3-й четверти. Используя единичный круг, получаем: $\sin(90° + \varphi) = -BD$, $\cos\varphi = -OC$.

Треугольники OAC и BOD равны; поэтому $BD = OC$. Следовательно, $-BD = -OC$, или $\sin(90° + \varphi) = \cos\varphi$.

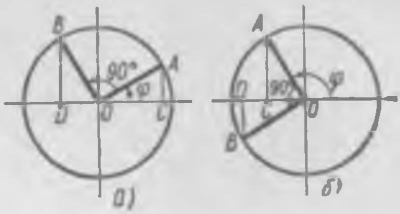


Рис. 168.

Аналогично можно рассмотреть случаи, когда угол φ оканчивается в 3-й или в 4-й четверти. Тождество (1) легко проверить и в случае, когда конечная сторона угла φ лежит на какой-нибудь оси координат. Предлагаем учащимся самостоятельно убедиться в этом.

Из доказанного тождества (1) вытекает ряд других важных тождеств. Заменив в (1) φ на $-\varphi$, получаем:

$$\sin(90° - \varphi) = \cos(-\varphi) = \cos\varphi. \qquad (2)$$

Чтобы получить аналогичную формулу для $\cos(90° - \varphi)$, заменим в (2) φ на $90° - \varphi$. В результате получим:

$$\sin[90° - (90° - \varphi)] = \cos(90° - \varphi),$$

или

$$\sin\varphi = \cos(90° - \varphi).$$

Итак,

$$\cos(90° - \varphi) = \sin\varphi. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) вытекает:

$$\operatorname{tg}(90° - \varphi) = \frac{\sin(90° - \varphi)}{\cos(90° - \varphi)} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \operatorname{ctg}\varphi,$$

$$\operatorname{tg}(90° - \varphi) = \operatorname{ctg}\varphi. \qquad (4)$$

Аналогично, $\operatorname{ctg}(90° - \varphi) = \dfrac{\cos(90° - \varphi)}{\sin(90° - \varphi)} = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi,$

$$\operatorname{ctg}(90° - \varphi) = \operatorname{tg}\varphi.$$

Формулы

$$\sin(90° - \varphi) = \cos\varphi,$$
$$\cos(90° - \varphi) = \sin\varphi,$$
$$\operatorname{tg}(90° - \varphi) = \operatorname{ctg}\varphi,$$
$$\operatorname{ctg}(90° - \varphi) = \operatorname{tg}\varphi$$

иногда называют *формулами дополнительного угла*. Это связано с тем, что углы $90° - \varphi$ и φ дополняют друг друга до прямого угла. Эти формулы очень просто запомнить: одна функция заменяется на другую, сходную с ней (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс).

Например, $\sin 40° = \cos 50°$; $\operatorname{tg} 70° = \operatorname{ctg} 20°$ и т. д.

Теперь получим формулы для угла $90° + \varphi$. Одну из таких формул мы уже доказывали выше:

$$\sin(90° + \varphi) = \cos\varphi.$$

Остальные формулы легко получаются из формул дополнительного угла и свойства четности (нечетности) тригонометрических функций. Имеем:

$$\cos(90° + \varphi) = \cos[90° - (-\varphi)] = \sin(-\varphi) = -\sin\varphi;$$
$$\operatorname{tg}(90° + \varphi) = \operatorname{tg}[90° - (-\varphi)] = \operatorname{ctg}(-\varphi) = -\operatorname{ctg}\varphi;$$
$$\operatorname{ctg}(90° + \varphi) = \operatorname{ctg}[90° - (-\varphi)] = \operatorname{tg}(-\varphi) = -\operatorname{tg}\varphi.$$

Исходя из этих формул, можно получить формулы для углов $180° \pm \varphi$. Например,

$$\sin(180° + \varphi) = \sin[90° + (90° + \varphi)] = \cos(90° + \varphi) = -\sin\varphi;$$
$$\sin(180° - \varphi) = \sin[90° + (90° - \varphi)] = \cos(90° - \varphi) = \sin\varphi.$$

Аналогично доказываются формулы

$$\cos(180° + \varphi) = -\cos\varphi; \quad \cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi.$$

Чтобы получить соответствующие формулы для тангенса и котангенса, можно воспользоваться выведенными соотношениями для синуса и косинуса, учитывая, что $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$. Однако в данном случае лучше всего исходить из того, что угол $180°$ является периодом функций $\operatorname{tg}\varphi$ и $\operatorname{ctg}\varphi$. Отсюда сразу же получаем:

$$\operatorname{tg}(180° + \varphi) = \operatorname{tg}\varphi,$$
$$\operatorname{tg}(180° - \varphi) = \operatorname{tg}(-\varphi) = -\operatorname{tg}\varphi,$$
$$\operatorname{ctg}(180° + \varphi) = \operatorname{ctg}\varphi,$$
$$\operatorname{ctg}(180° - \varphi) = \operatorname{ctg}(-\varphi) = -\operatorname{ctg}\varphi.$$

Из формул для углов $180° \pm \varphi$ можно получить аналогичные формулы для углов $270° \pm \varphi$.

Формулы для углов $360° \pm \varphi$ легко получаются, если учесть, что угол $360°$ является общим периодом тригонометрических функций. Подробно останавливаться на этом мы не будем. На странице 245 приведена полная таблица нужных нам формул. Заучивать эти формулы нет нужды. Достаточно помнить следующее:

1) Если в формуле содержатся углы $180°$ и $360°$ (π и 2π), то наименование функции не изменяется; если же в формуле содержатся углы $90°$ и $270°$ $\left(\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi\right)$, то наименование функции меняется на сходное (синус на косинус, тангенс на котангенс и т. д.);

2) чтобы определить знак в правой части формулы ($+$ или $-$), достаточно, считая угол φ острым, определить знак выражения, стоящего в левой части формулы.

Угол \ Функция		$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
φ		$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$
$90^\circ-\varphi$	$\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$
$90^\circ+\varphi$	$\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$	$\cos\varphi$	$-\sin\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$
$180^\circ-\varphi$	$(\pi-\varphi)$	$\sin\varphi$	$-\cos\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$
$180^\circ+\varphi$	$(\pi+\varphi)$	$-\sin\varphi$	$-\cos\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$
$270^\circ-\varphi$	$\left(\frac{3}{2}\pi-\varphi\right)$	$-\cos\varphi$	$-\sin\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$
$270^\circ+\varphi$	$\left(\frac{3}{2}\pi+\varphi\right)$	$-\cos\varphi$	$\sin\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$
$360^\circ-\varphi$	$(2\pi-\varphi)$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$
$360^\circ+\varphi$	$(2\pi+\varphi)$	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$

Пусть, например, нужно определить $\operatorname{tg}(90^\circ+\varphi)$. Прежде всего мы замечаем, что в формуле содержится угол 90°. Поэтому в правой части искомой формулы должен стоять $\operatorname{ctg}\varphi$. Чтобы определить знак перед $\operatorname{ctg}\varphi$, предположим, что угол φ острый. Тогда угол $90^\circ+\varphi$ должен оканчиваться во 2-й четверти. Но тангенс угла, оканчивающегося во 2-й четверти, отрицателен. Поэтому перед $\operatorname{ctg}\varphi$ нужно взять знак —. Итак,

$$\operatorname{tg}(90^\circ+\varphi)=-\operatorname{ctg}\varphi.$$

Аналогично устанавливается формула

$$\cos(180^\circ-\varphi)=-\cos\varphi.$$

Поскольку в формуле содержится угол в 180°, наименование функции не изменяется. Если угол φ острый, то угол $180^\circ-\varphi$ должен оканчиваться во 2-й четверти. Но косинус угла, оканчивающегося во 2-й четверти, отрицателен. Поэтому в правой части формулы должен стоять знак —.

Полученные выше формулы носят название *формул приведения*. Причины такого названия будут выяснены в следующем параграфе.

Упражнения

Упростить выражения (№ 720—727):

720. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

721. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

722. $\sin(\pi+\alpha)-\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$.

723. $\cos(\pi-\alpha)+\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)$.

724. $\sin(270°-\alpha)+\cos(270°+\alpha)$.

725. $\operatorname{tg}(270°+\alpha)-\operatorname{ctg}(270°-\alpha)$.

726. $\operatorname{tg}(\alpha-360°)+\sin(\alpha+360°)$.

727. $\cos(\alpha-360°)-\operatorname{ctg}(\alpha-360°)$.

728. Доказать, что если прямые $y=k_1x$ и $y=k_2x$ взаимно перпендикулярны, то $k_1k_2=-1$.

729. $\operatorname{tg} x=3$. Чему равен тангенс дополнительного угла?

730. $\sin\varphi=0{,}6$. Чему равен синус дополнительного угла?

731. Что больше:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \text{ или } \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)?$$

Упростить выражения (№ 732—734):

732. $\sin(\pi+1)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$.

733. $\sin^2 2(\pi+1)+\cos^2 2(\pi-1)$.

734. $$\frac{[\sin^2(9\pi+0{,}5)+\sin^2(0{,}5-7{,}5\pi)]\cdot\sin\left(\frac{1}{2}-\pi\right)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi-0{,}5\right)\cdot\operatorname{tg}(0{,}5-0{,}5\pi)}.$$

Доказать тождества (№ 735—739):

735. $\cos(45°+\alpha)=\sin(45°-\alpha)$.

736. $\cos(20°-\alpha)+\sin(250°+\alpha)=0$.

737. $\sin(112°-\alpha)+\cos(\alpha+158°)=0$.

738. $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}(90°-x)=1$.

739*. $\operatorname{tg}1°\cdot\operatorname{tg}2°\cdot\operatorname{tg}3°\ldots\operatorname{tg}87°\cdot\operatorname{tg}88°\cdot\operatorname{tg}89°=1$.

740. Доказать, что синус суммы двух углов треугольника равен синусу третьего угла.

741. 1) Доказать, что площадь любого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

2) Доказать, что из всех прямоугольников с данной диагональю наибольшую площадь имеет квадрат.

3) Какой четырехугольник с диагоналями d_1 и d_2 имеет максимальную площадь?

742. Что больше:

а) $\sin 26°$ или $\cos 40°$; в) $\sin 0{,}63$ или $\cos 0{,}87$;

б) $\operatorname{tg} 57°$ или $\operatorname{ctg} 20°$; г) $\operatorname{tg}\frac{3}{8}\pi$ или $\operatorname{ctg}\frac{5}{16}\pi$?

Определение по таблицам значений тригонометрических функций любого угла § 112

В § 105 мы показали, как, используя «Четырехзначные математические таблицы» В. М. Брадиса, можно определить, чему равно значение той или иной тригонометрической функции острого угла. Теперь ту же самую задачу мы решим для любого (а не только для острого) угла α.

Прежде всего заметим, что угол α можно считать положительным. В противном случае мы воспользовались бы формулами

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

и свели бы тем самым нашу задачу к нахождению значений тригонометрических функций положительного угла.

Далее, можно считать, что угол α заключен в пределах

$$0° \leqslant \alpha < 360°, \text{ или } 0 \leqslant \alpha < 2\pi.$$

Действительно, во всех иных случаях угол α можно представить в таком виде:

$$\alpha = 360° \cdot n + \alpha_1, \text{ или } \alpha = 2n\pi + \alpha_1,$$

где n — некоторое натуральное число, а α_1 находится в пределах

$$0° \leqslant \alpha_1 < 360°, \text{ или } 0 \leqslant \alpha < 2\pi.$$

Поскольку угол в 360° (или в 2π радианов) есть общий период синуса, косинуса, тангенса и котангенса, то:

$$\sin\alpha = \sin(360° \cdot n + \alpha_1) = \sin\alpha_1,$$
$$\cos\alpha = \cos(360° \cdot n + \alpha_1) = \cos\alpha_1,$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(360° \cdot n + \alpha_1) = \operatorname{tg}\alpha_1,$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(360° \cdot n + \alpha_1) = \operatorname{ctg}\alpha_1.$$

Таким образом, наша задача сводится к нахождению значений тригонометрических функций угла α_1, заключенного в интервале

$$0° \leqslant \alpha_1 < 360°, \text{ или } 0 \leqslant \alpha_1 < 2\pi.$$

Если теперь угол α_1 острый, то значения его тригонометрических функций можно определить по таблицам В. М. Брадиса. Если же $\alpha_1 > 90°$, то

либо $\alpha_1 = 90° + \alpha_2$,

либо $\alpha_1 = 180° + \alpha_2$,

либо $\alpha_1 = 270° + \alpha_2$.

где α_2 — уже острый угол. Используя формулы приведения, мы можем теперь свести нашу задачу к определению значений тригонометрических функций острого угла α_2.

Примеры. 1) Найти $\sin 757°24'$.

Имеем:

$$757°24' = 360° \cdot 2 + 37°24'.$$

Поэтому

$$\sin 757°24' = \sin (360° \cdot 2 + 37°24') = \sin 37°24'.$$

Синус угла в $37°24'$ находим по таблице В. М. Брадиса. Приближенно он оказывается равным 0,6074. Поэтому

$$\sin 757°24' \approx 0{,}6074.$$

2) Найти $\operatorname{tg} (-1927°30')$.

Прежде всего заметим, что

$$\operatorname{tg} (-1927°30') = -\operatorname{tg} 1927°30'.$$

Теперь представим угол в $1927°30'$ в виде

$$1927°30' = 360° \cdot 5 + 127°30'.$$

Отсюда $\operatorname{tg} 1927°30' = \operatorname{tg} (360° \cdot 5 + 127°30') = \operatorname{tg} 127°30'$; но $127°30' = 90° + 37°30'$. Поэтому, используя формулы приведения, получаем:

$$\operatorname{tg} 127°30' = \operatorname{tg} (90° + 37°30') = -\operatorname{ctg} 37°30'.$$

Окончательно получаем, используя таблицы В. М. Брадиса, $\operatorname{tg} (-1927°30') = \operatorname{ctg} 37°30' \approx 1{,}3032$.

Итак, для того чтобы находить значения тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ для любых значений x, вполне достаточно уметь находить значения этих функций лишь для $0° \leqslant x \leqslant 90°$ $\left(\text{или } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$; для всех же остальных x значения функций можно найти, используя уже известные нам тригонометрические тождества. Отсюда можно сделать следующий вывод:

Поведение функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ при всех значениях x вполне определяется их поведением при $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Упражнение

743. Используя «Четырехзначные математические таблицы», найти синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы следующих углов:

1) $112°14'$;	5) $283°13'$;	9) $824°22'$;	13) 5;
2) $217°47'$;	6) $351°05'$;	10) $1307°21'$;	14) 6,3;
3) $233°21'$;	7) $100°17'$;	11) $1715°39'$;	15) 1000;
4) $165°58'$;	8) $275°57'$;	12) $3928°15'$;	16) 3,14.

Как было отмечено в предыдущем параграфе, поведение функции $y = \sin x$ на всей числовой прямой (или при всех значениях аргумента x) полностью определяется ее поведением в интервале $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Поэтому прежде всего мы построим график функции $y = \sin x$ именно в этом интервале.

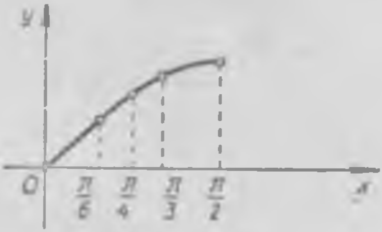


Рис. 169.

Составим следующую таблицу значений нашей функции:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Отмечая соответствующие точки на плоскости координат и соединяя их плавной линией, мы получаем кривую, представленную на рисунке 169. Для построения ее можно было бы выбрать и большее число точек. При этом нам пришлось бы использовать тригонометрические таблицы.

Полученную кривую можно было бы построить и геометрически, не составляя таблицы значений функции $y = \sin x$. Первую четверть окружности радиуса 1 (рис. 170) разделим на 8 равных частей и через точки деления проведем прямые, параллельные оси x. Ординаты точек деления окружности представляют собой синусы соответствующих углов. Первая четверть окружности

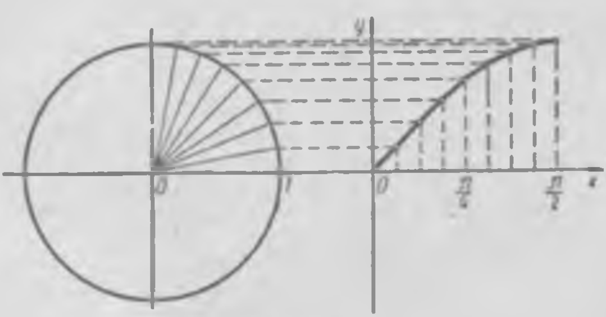


Рис. 170.

соответствует углам от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Поэтому на оси x возьмем отрезок $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и разделим его на 8 равных частей. Из точек деления восставим перпендикуляры до пересечения с ранее проведенными горизонтальными прямыми. Точки пересечения соединим плавной линией.

Теперь обратимся к интервалу $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$. Каждое значение аргумента x из этого интервала можно представить в виде

$$x = \frac{\pi}{2} + \varphi,$$

где $0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}$. По формулам приведения

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \cos\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

Точки оси x с абсциссами $\frac{\pi}{2} + \varphi$ и $\frac{\pi}{2} - \varphi$ симметричны друг другу относительно точки оси x с абсциссой $\frac{\pi}{2}$, и синусы в этих точках одинаковы. Это позволяет получить график функции $y = \sin x$ в интервале $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ путем простого симметричного отображения графика этой функции в интервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$ (рис. 171).

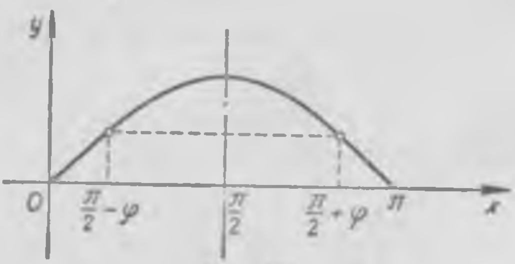


Рис. 171.

Теперь, используя свойство нечетности функции $y = \sin x$,

$$\sin(-x) = -\sin x,$$

легко построить график этой функции в интервале $[-\pi, 0]$. Это построение выполнено на рисунке 172.

Функция $y = \sin x$ периодична с периодом 2π. Поэтому для построения всего графика этой функции достаточно кривую, изображенную на рисунке 172, продолжить влево и вправо периодически с периодом 2π. Полученная в результате этого

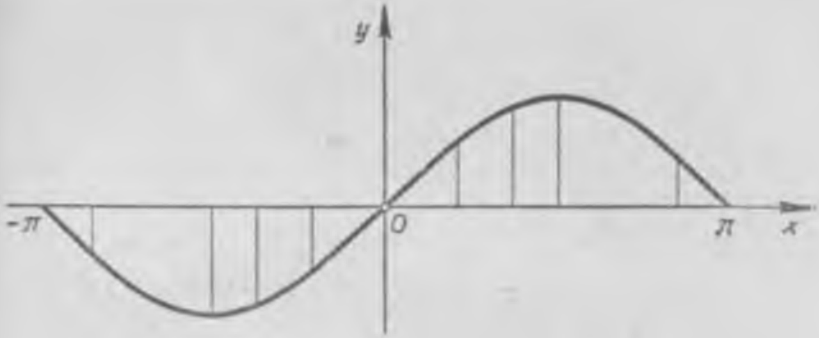


Рис. 172.

кривая (рис. 173) называется *синусоидой*. Она и представляет собой график функции $y = \sin x$.

Рисунок 173 хорошо иллюстрирует все те свойства функции $y = \sin x$, которые раньше были доказаны нами. Напомним эти свойства.

1) Функция $y = \sin x$ определена для всех значений x, так что областью ее определения является совокупность всех действительных чисел.

2) Функция $y = \sin x$ ограничена. Все значения, которые она принимает, заключены в интервале от -1 до 1, включая эти два числа. Следовательно, область изменения этой функции определяется неравенством $-1 \leqslant y \leqslant 1$. При $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ функция принимает наибольшие значения, равные 1, а при $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ — наименьшие значения, равные -1.

3) Функция $y = \sin x$ является нечетной (синусоида симметрична относительно начала координат).

4) Функция $y = \sin x$ периодична с периодом 2π.

5) В интервалах $2n\pi < x < \pi + 2n\pi$ (n — любое целое число) она положительна, а в интервалах $\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$ (k — любое целое число) она отрицательна. При $x = k\pi$ функция обращается в нуль. Поэтому эти значения аргумента x (0; $\pm\pi$; $\pm 2\pi$; . . .) называются *нулями функции* $y = \sin x$.

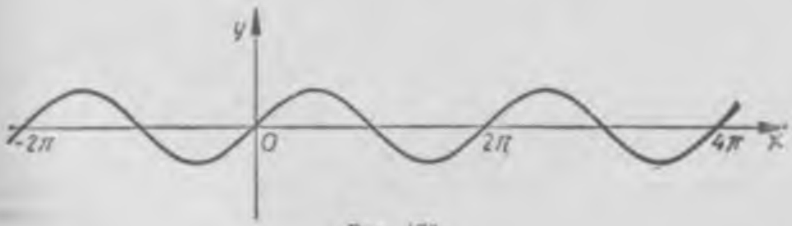


Рис. 173.

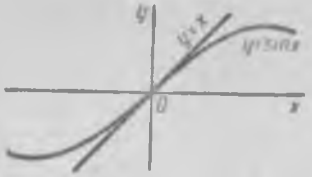


Рис. 174.

6) В интервалах $-\frac{\pi}{2}+2n\pi<x<\frac{\pi}{2}+2n\pi$ функция $y=\sin x$ монотонно возрастает, а в интервалах $\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{3}{2}\pi+2k\pi$ она монотонно убывает.

Следует особо обратить внимание на поведение функции $y = \sin x$ вблизи точки $x = 0$. Как видно из рисунка 174, в окрестности точки $x = 0$ синусоида почти сливается с биссектрисой 1-го и 3-го координатных углов. Поэтому при малых углах x, выраженных в р а д и а н а х, или при малых по абсолютной величине ч и с л о в ы х значениях x (как положительных, так и отрицательных)

$$\sin x \approx x.$$

Например, $\sin 0{,}012 \approx 0{,}012$; $\sin(-0{,}05) \approx -0{,}05$;

$$\sin 2^\circ = \sin\frac{\pi\cdot 2}{180} = \sin\frac{\pi}{90} \approx \frac{\pi}{90} \approx 0{,}03.$$

Вместе с тем следует отметить, что при любых значениях x

$$|\sin x| \leqslant |x|. \qquad (1)$$

Действительно, пусть радиус окружности, представленной на рисунке 175, равен 1, а $\angle AOB = x$. Тогда $\sin x = AC$. Но $AC < AB$, а AB, в свою очередь, меньше длины дуги AB, на которую опирается угол x. Длина этой дуги равна, очевидно, x, так как радиус окружности равен 1. Итак, при $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$

$$\sin x < x.$$

Отсюда в силу нечетности функции $y = \sin x$ легко показать, что при $-\frac{\pi}{2} \leqslant x < 0$

$$|\sin x| < |x|.$$

Наконец, при $x = 0$

$$|\sin x| = |x|.$$

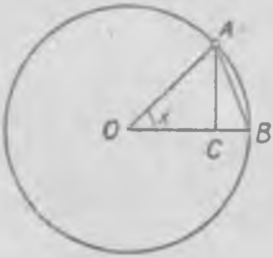


Рис. 175.

Таким образом, для $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$ неравенство (1) доказано. На самом же деле это неравенство верно и при $|x| > \frac{\pi}{2}$, в силу того, что $|\sin x| \leqslant 1$, а $\frac{\pi}{2} > 1$.

Упражнения

744. По графику функции $y = \sin x$ определить:

а) $\sin 2$; б) $\sin 4$; в) $\sin(-3)$.

745. По графику функции $y = \sin x$ определить, какое число из интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ имеет синус, равный:

а) 0,6; б) — 0,8.

746. По графику функции $y = \sin x$ определить, какие числа имеют синус, равный $\frac{1}{2}$.

747. Найти приближенно (без использования таблиц):

а) $\sin 1°$; б) $\sin 0{,}03$; в) $\sin(-0{,}015)$; г) $\sin(-2°30')$.

График функции $y = \cos x$ § 114

Как мы знаем,

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Поэтому если $\cos x$ принимает некоторое значение a при $x = x_0$, то при $x = x_0 + \frac{\pi}{2}$ это же значение a примет и $\sin x$. Если аргумент x толковать как время, то можно сказать, что значения функции $y = \sin x$ как бы «запаздывают», или «отстают» от соответствующих значений функции $y = \cos x$ на $\frac{\pi}{2}$. Отсюда можно заключить, что график функции $y = \cos x$ получается посредством сдвига графика функции $y = \sin x$ вдоль оси абсцисс влево на расстояние $\frac{\pi}{2}$ (рис. 176).

Итак, график функции $y = \cos x$ есть синусоида, сдвинутая влево на $\frac{\pi}{2}$. Иногда такую кривую называют *косинусоидой*.

Косинусоида хорошо иллюстрирует все основные свойства функции $y = \cos x$, которые раньше были нами доказаны. Предлагаем учащимся еще раз сформулировать эти свойства и дать им графическую интерпретацию.

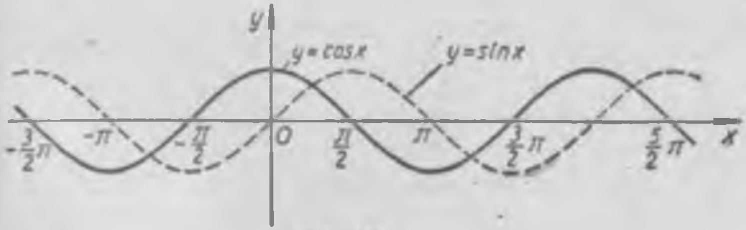


Рис. 176.

Упражнения

748. По графику функции $y = \cos x$ определить:

а) $\cos 3$; б) $\cos 4$; в) $\cos(-2)$.

749. По графику функции $y = \cos x$ определить, какое число из интервала $[0, \pi]$ имеет косинус, равный:

а) 0,6; б) $-0{,}8$.

750. По графику функции $y = \cos x$ определить, какие числа имеют косинус, равный $\frac{1}{2}$.

751. При малых (по абсолютной величине) значениях x косинусоида $y = \cos x$ имеет примерно такой же вид, как и парабола $y = 1 - \frac{x^2}{2}$. (Сделайте чертеж!). Поэтому для малых значений x

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Используя эту формулу, вычислите приближенно:

а) $\cos 1°$; б) $\cos 0{,}03$; в) $\cos(-0{,}015)$; г) $\cos(-2°30')$.

Полученные результаты сравните с табличными.

Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ § 115

Схематично поведение функции $y = \operatorname{tg} x$ было представлено на рисунке 163 (см. стр. 231). Теперь мы начертим точный график этой функции. Для этого используем геометрическое построение, аналогичное тому, которое было описано в § 113 для построения синусоиды (см. рис. 170). Мы не будем подробно останавливаться на этом построении, а ограничимся лишь тем, что приведем соответствующий рисунок (рис. 177). Учащиеся без особого труда смогут разобраться в нем самостоятельно.

Теперь, используя график функции $y = \operatorname{tg} x$ в интервале $0 < x < \frac{\pi}{2}$, можно построить график этой функции и в интер-

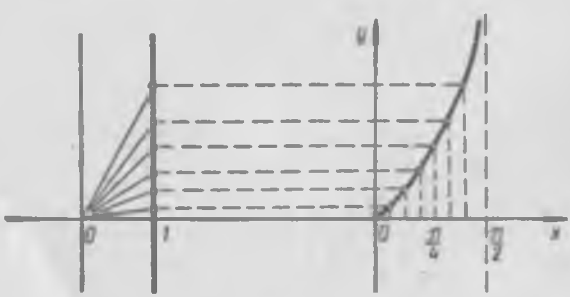


Рис. 177.

вале $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Для этого воспользуемся тождеством

$$\operatorname{tg}(-\varphi) = -\operatorname{tg}\varphi.$$

Оно указывает на то, что график функции $y = \operatorname{tg} x$ симметричен относительно начала координат. Отсюда сразу же получается та часть графика, которая соответствует значениями $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ (рис. 178).

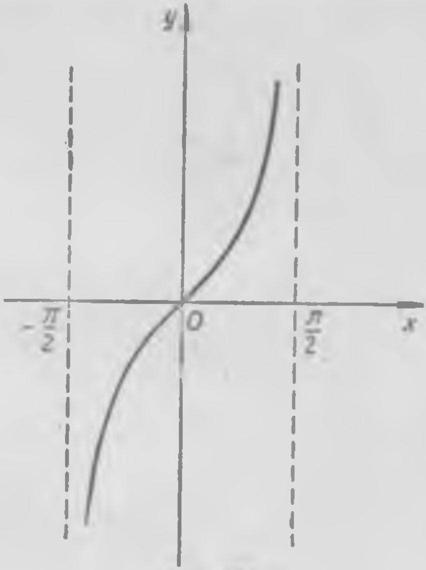


Рис. 178.

Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодична с периодом π. Поэтому теперь для построения ее графика нам остается лишь продолжить периодически кривую, представленную на рисунке 178, влево и вправо с периодом π. В результате получается кривая, которая называется *тангенсоидой* (рис. 179).

Тангенсоида хорошо иллюстрирует все те основные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$, которые раньше были доказаны нами. Напомним эти свойства.

1) Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена для всех значений x, кроме $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, где n — любое целое число. Таким образом, областью ее определения служит совокупность всех действительных чисел, кроме $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$.

2) Функция $y = \operatorname{tg} x$ не ограничена. Она может принимать как любые положительные, так и любые отрицательные зна-

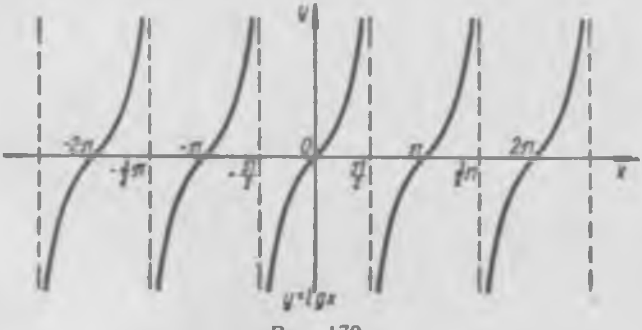


Рис. 179.

чения. Следовательно, областью ее изменения является совокупность всех действительных чисел. Среди этих чисел нельзя указать ни наибольшего, ни наименьшего.

3) Функция $y = \operatorname{tg} x$ нечетна (тангенсоида симметрична относительно начала координат).

4) Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодична с периодом π.

5) В интервалах

$$n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi$$

функция $y = \operatorname{tg} x$ положительна, а в интервалах

$$-\frac{\pi}{2} + n\pi < x < n\pi$$

отрицательна. При $x = n\pi$ функция $y = \operatorname{tg} x$ обращается в нуль. Поэтому эти значения аргумента (0; $\pm\pi$; $\pm 2\pi$; $\pm 3\pi$; . . .) служат *нулями функции* $y = \operatorname{tg} x$.

6) В интервалах

$$-\frac{\pi}{2} + n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi$$

функция монотонно возрастает. Можно сказать, что в любом интервале, *в котором функция* $y = \operatorname{tg} x$ *определена*, она является монотонно возрастающей. Однако ошибочно было бы считать, что функция $y = \operatorname{tg} x$ монотонно возрастает всюду. Так, например (см. рис. 179), $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{4}$. Однако $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) < \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$. Это объясняется тем, что в интервал, соединяющий точки $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$, попадает значение $x = \frac{\pi}{2}$, при котором функция $y = \operatorname{tg} x$ не определена.

Для построения графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ следует воспользоваться тождеством

$$\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Оно указывает на следующий порядок построения графика:

1) тангенсоиду $y = \operatorname{tg} x$ нужно сдвинуть влево по оси абсцисс на расстояние $\frac{\pi}{2}$;

2) полученную кривую отобразить симметрично относительно оси абсцисс.

В результате такого построения получается кривая, представленная на рисунке 180. Эту кривую иногда называют *котангенсоидой*.

Котангенсоида хорошо иллюстрирует все основные свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$. Предлагаем учащимся сформулировать эти свойства и дать им графическую интерпретацию.

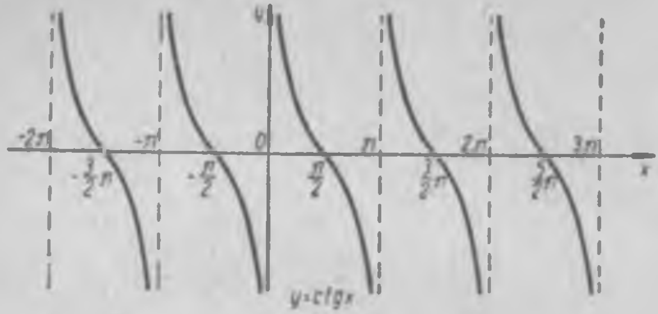


Рис. 180.

Упражнения

752. Используя графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, найти наименьшие положительные корни уравнений:

а) $\operatorname{tg} x = -3$; б) $\operatorname{tg} x = 2$; в) $\operatorname{ctg} x = -3$; г) $\operatorname{ctg} x = 2$.

753. Используя графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, найти все корни уравнений:

а) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; б) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Доказательство тригонометрических тождеств § 118

При доказательстве любых тождеств и, в частности, тригонометрических, обычно используют следующие способы:

1) выражение, стоящее в одной части равенства, с помощью тождественных преобразований приводят к выражению, стоящему в другой части равенства;

2) выражения, стоящие в левой и правой частях тождества, с помощью тождественных преобразований приводят к одному и тому же виду;

3) доказывают, что разность между левой и правой частями данного тождества равна нулю.

Поясним это на некоторых частных примерах.

Пример 1. Доказать тождество

$$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha.$$

Используя формулу для разности квадратов двух чисел, получаем:

$$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha).$$

Но $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Поэтому

$$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример 2. Доказать тождество

$$|\sin\alpha| = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}}$$

Это тождество мы будем доказывать путем преобразования выражения, стоящего в правой части.

Способ 1.

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}} = \sin^2\alpha$$

Поэтому

$$\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}} = \sqrt{\sin^2\alpha} = |\sin\alpha|.$$

Способ 2. Прежде всего заметим, что $\operatorname{ctg}\alpha \neq 0$; в противном случае не имело бы смысла варажение $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$. Но если $\operatorname{ctg}\alpha \neq 0$, то числитель и знаменатель подкоренного выражения можно умножить на $\operatorname{ctg}\alpha$, не изменяя значения дроби. Следовательно,

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

Используя тождества $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1$ и $1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$, получаем: $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{1}{\operatorname{cosec}^2\alpha} = \sin^2\alpha.$

Поэтому

$$\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}} = |\sin\alpha|,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Следует обратить внимание на то, что левая часть доказанного тождества ($|\sin\alpha|$) определена при всех значениях α, а правая — лишь при

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2}\cdot n.$$

Поэтому при всех допустимых значениях α $\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}} = |\sin\alpha|$. Вообще же эти выражения не эквивалентны друг другу.

Пример 3. Доказать тождество

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)+\cos(\pi-\alpha) = \cos(2\pi+\alpha) - 3\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Преобразуем левую и правую части этого тождества, используя формулы приведения:

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)+\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha-\cos\alpha=-2\cos\alpha;$$

$$\cos(2\pi+\alpha)-3\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha-3\cos\alpha=-2\cos\alpha.$$

Итак, выражения, стоящие в обеих частях данного тождества, приведены к одному и тому же виду. Тем самым тождество доказано.

Пример 4. Доказать тождество

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1=-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$$

Покажем, что разность между левой и правой частями данного тождества равна нулю. Имеем:

$$\begin{gathered}(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1)-(-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha)=\\=(\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)-1=\\=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-1=1-1=0.\end{gathered}$$

Тем самым тождество доказано.

Пример 5. Доказать тождество

$$\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}.$$

Это тождество можно рассматривать как пропорцию. Но чтобы доказать справедливость пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, достаточно показать, что произведение ее крайних членов ad равно произведению ее средних членов bc. Так мы поступим и в данном случае. Покажем, что $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)=\cos\alpha\cdot\cos\alpha$. Действительно, $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$.

По поводу этого примера можно было бы сделать замечание, аналогичное замечанию к примеру 2.

Упражнения

Доказать тождества (№ 754—763):

754. $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$.

755. $\frac{\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}=\sin^2\alpha$.

756. $\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

757. $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)+1=3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)$.

758. $\sqrt{1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=|\sin\alpha+\cos\alpha|$.

759. $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$.

760. $|\sin\alpha|=\sqrt{(\sec^2\alpha-1)(1-\sin^2\alpha)}$.

761. $\frac{2\cos^2\alpha-1}{1-2\sin\alpha\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{4\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

762. $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = \frac{|\cos\alpha|}{1+\sin\alpha}$.

763. $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{|\sin\alpha|}$.

Упростить выражения (№ 764—769):

764. $\sqrt{\frac{1}{1+\cos\alpha} + \frac{1}{1-\cos\alpha}}$.

765. $\sqrt{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2 + (1-\operatorname{tg}\alpha)^2}$.

766. $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}$.

767. $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

768. $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$.

769. $\frac{1+\cos\alpha+\cos^2\alpha}{1+\sec\alpha+\sec^2\alpha}$.

770. Найти значение выражения $\frac{5\cos\alpha + 6\sin\alpha}{3\sin\alpha - 7\cos\alpha}$, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$.

771. Найти значение выражения $\frac{4\sin\alpha - \cos\alpha}{\cos\alpha - 4\sin\alpha}$, если известно, что котангенс угла α не определен.

772. Найти значение выражения $\frac{5\sin\alpha + 6\cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$, если известно, что $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$.

Доказать тождества (№ 773—779):

773. $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha - 1} = \frac{\operatorname{cosec}\alpha + 1}{\operatorname{ctg}\alpha}$.

774. $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

775. $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$.

776. $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) - 2\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2 - 3\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

777. $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha + \pi) + \sin\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) + \sin(\alpha + 2\pi) =$
$= \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\alpha + \pi) + \cos\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) + \cos(\alpha + 2\pi)$.

778. $\frac{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + 1}{\operatorname{tg}\alpha - 1}$.

779. $\frac{1 - 2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$.

Арксинус числа a § 117

Пусть про угол φ известно лишь то, что синус его равен $\frac{1}{2}$:

$$\sin\varphi = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Можем ли мы найти этот угол?

Как известно, $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$. Поэтому возможно, что $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

Вместе с тем в силу периодичности синуса

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\pi\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

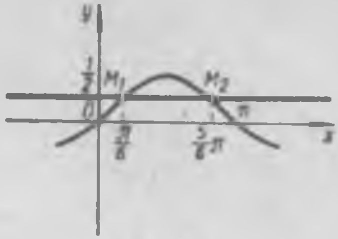


Рис. 181.

Поэтому не исключена также возможность, что $\varphi=\frac{\pi}{6}+2\pi$. Вообще, каким бы ни было целое число n,

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+2n\pi\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, искомым углом φ может быть любой из углов

$$\frac{\pi}{6},\quad \frac{\pi}{6}\pm2\pi;\quad \frac{\pi}{6}\pm4\pi;\quad \frac{\pi}{6}\pm6\pi$$

и т. д. Таким образом, по значению своего синуса угол определяется неоднозначно.

Такой неоднозначности, однако, можно избежать, если потребовать, чтобы искомый угол φ находился в определенных пределах. Например, при дополнительном условии, что $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, равенство (1) определяет единственный угол: $\varphi=\frac{\pi}{6}$. Если бы мы в качестве дополнительного ограничения, накладываемого на угол φ, выбрали условие $0<\varphi<\pi$, то задача опять была бы неопределенной. В интервале $(0, \pi)$ синусоида $y=\sin x$ (см. рис. 181) пересекается с прямой $y=\frac{1}{2}$ в двух точках M_1 и M_2. Абсцисса точки M_1 равна $\frac{\pi}{6}$, а абсцисса точки M_2 равна $\frac{5}{6}\pi$. Поэтому в интервале $(0, \pi)$ существует два угла φ, синусы которых равны $\frac{1}{2}$: $\varphi_1=\frac{\pi}{6}$, $\varphi_2=\frac{5}{6}\pi$.

Какие же ограничения нужно наложить на угол φ, чтобы равенство

$$\sin\varphi=a \tag{2}$$

определяло этот угол однозначно? Один из возможных путей решения этой задачи состоит в следующем. Прежде всего заметим, что если $|a|>1$, то равенство (2) вообще не определяет никакого угла: ведь при любых значениях φ

$$|\sin\varphi|\leqslant 1.$$

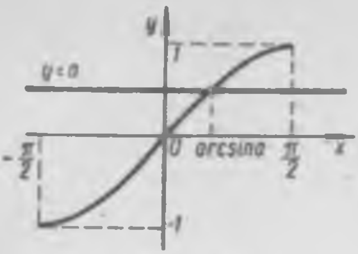


Рис. 182.

Далее, будем считать, что угол изменяется в интервале от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Тогда синус его непрерывно возрастает от -1 до $+1$ (рис. 182). Каким бы ни было число a, не превосходящее по абсолютной величине единицы, в интервале $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ синусоида $y = \sin x$ обязательно пересечется с прямой $y = a$ и притом лишь в одной точке. Поэтому при любом $|a| \leqslant 1$ равенство (2) в интервале $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ определяет и притом единственный угол φ. Этот угол принято называть *арксинусом числа* a и обозначать $\arcsin a$.

Арксинус a *есть угол, заключенный в интервале от* $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ (или от $-90°$ до $+90°$), *синус которого равен* a.

П р и м е р ы.

1) $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, или $\arcsin \frac{1}{2} = 30°$. Действительно, угол в $\frac{\pi}{6}$ радианов попадает в интервал $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и синус его равен $\frac{1}{2}$.

2) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, или $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -60°$. Действительно, угол в $-60°$ попадает в интервал $(-90°, 90°)$ и синус его равен $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, или $\arcsin 1 = 90°$. Действительно, угол в $\frac{\pi}{2}$ радианов попадает в интервал $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и синус его равен 1.

Аналогично,

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}; \qquad \arcsin 0 = 0$$

и т. д.

Заметим, что из равенства

$$\sin \pi = 0$$

нельзя сделать вывод, что $\arcsin 0 = \pi$. Ведь угол в π радианов не попадает в интервал $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и потому не может равняться арксинусу числа 0.

Упражнения

780. Какие значения могут принимать величины a и b, если $b = \arcsin a$?

781. Вычислить:

а) $\arcsin 0 + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin 1$;

б) $\arcsin 0 + \arcsin \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin (-1)$;

в) $6 \arcsin (-1) - 12 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 5 \arcsin \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

782. а) Можно ли из равенства $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ заключить, что $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$?

б) Можно ли из равенства $\sin 270° = -1$ заключить, что $\arcsin (-1) = 270°$?

783. (Устно.) В каких четвертях оканчиваются углы:
а) $\arcsin 0,6$; в) $\arcsin (-0,8)$;
б) $\arcsin 0,9$; г) $\arcsin (-0,1)$?

784. Вычислить:

а) $\sin (\arcsin 0,6)$; в) $\cos [\arcsin (\sqrt{3} - \sqrt{2})]$;

б) $\sin [\arcsin (-0,8)]$; г) $\cos \left(\arcsin \frac{\pi}{2}\right)$.

785. Найти синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы углов:
а) $\arcsin 0,4$; б) $\arcsin (-0,8)$.

786. Доказать тождества:

а) $\arcsin \left(\sin \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12}$;

б) $\arcsin (\sin 6) = 6 - 2\pi$;

в) $\arcsin (-x) = -\arcsin x$.

Уравнение $\sin x = a$ § 118

Каждый корень уравнения

$$\sin x = a \qquad (1)$$

можно рассматривать как абсциссу некоторой точки пересечения синусоиды $y = \sin x$ с прямой $y = a$, и, наоборот, абсцисса каждой такой точки пересечения является одним из корней уравнения (1).

При $|a| > 1$ синусоида $y = \sin x$ не пересекается с прямой $y = a$ (рис. 183). В этом случае уравнение (1) корней не имеет.

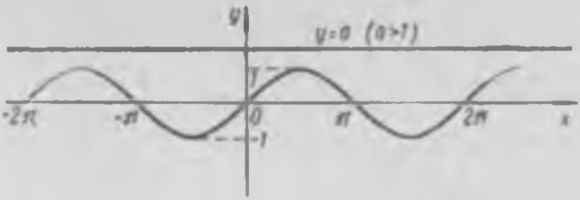


Рис 183.

Если же $|a| < 1$, то синусоида $y = \sin x$ и прямая $y = a$ имеют бесконечно много общих точек. В этом случае уравнение (1) имеет бесконечное множество корней.

Пусть $0 < a < 1$. Тогда в интервале $0 \leqslant x < \pi$ имеем две точки пересечения: A и B (рис. 184). Точка A попадает в интервал $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Поэтому ее абсцисса равна $\arcsin a$. Что же касается точки B, то ее абсцисса, как легко понять из рисунка 184, равна $\pi - \arcsin a$. Все остальные точки пересечения синусоиды $y = \sin x$ с прямой $y = a$ мы разобьем на две группы:

$$\ldots, A_{-2}, A_{-1}, A_1, A_2, \ldots,$$
$$\ldots, B_{-2}, B_{-1}, B_1, B_2, \ldots.$$

Точки первой группы удалены от A на расстояния, кратные 2π, и потому имеют абсциссы $\arcsin a + 2n\pi$, где n пробегает все целые числа ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$). Точки второй группы удалены от B на расстояния, кратные 2π, и потому имеют абсциссы $\pi - \arcsin a + 2k\pi = - \arcsin a + (2k+1)\pi$, где k пробегает все целые числа ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$). Таким образом, уравнение (1) имеет две группы корней:

$$x = \arcsin a + 2n\pi \qquad (2)$$

и

$$x = -\arcsin a + (2k+1)\pi. \qquad (3)$$

Легко понять, что обе эти группы корней можно представить одной формулой

$$x = (-1)^m \arcsin a + m\pi, \qquad (4)$$

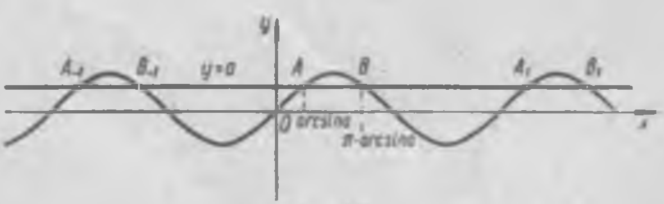


Рис. 184.

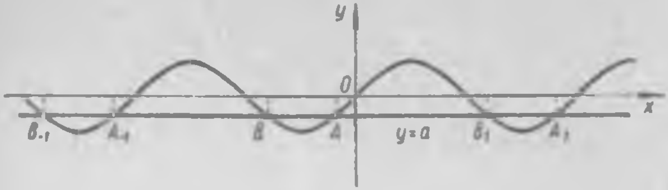


Рис. 185.

где m пробегает все целые числа ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$). Действительно, при m четном ($m = 2n$) (4) обращается в (2), а при m нечетном ($m = 2k + 1$) — в (3).

Итак, при $0 < a < 1$ все корни уравнения (1) задаются формулой (4).

К такому же результату можно прийти и в случае

$$-1 < a < 0.$$

Мы не будем подробно разбирать этот случай, предлагая учащимся сделать это самостоятельно с помощью рисунка 185.

Нам осталось рассмотреть случай, когда $a = 0$ и $a = \pm 1$.

При $a = 0$ уравнение

$$\sin x = a$$

имеет корни

$$x = m\pi, \tag{5}$$

где m пробегает все целые числа ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$). Такой же результат дает и формула (4) при $a = 0$. Действительно, $\arcsin 0 = 0$ и потому

$$(-1)^m \arcsin 0 + m\pi = m\pi.$$

Следовательно, формула (4) формально дает все корни уравнения (1) и в случае, когда $a = 0$.

Если $a = 1$, то корнями уравнения $\sin x = a$ будут числа (см. рис. 186)

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \tag{6}$$

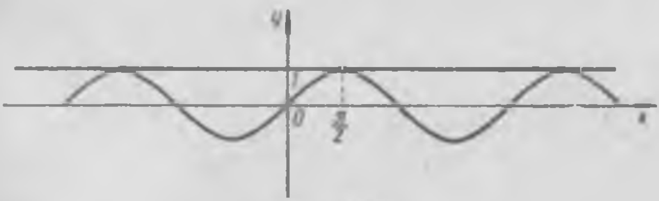


Рис. 186.

где k пробегает все целые числа ($k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$). Формула (4) охватывает и этот случай. Действительно, полагая в ней $a = 1$ и учитывая, что $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, получаем:

$$(-1)^m \arcsin 1 + m\pi = (-1)^m \frac{\pi}{2} + m\pi.$$

Если m четно ($m = 2k$), то

$$(-1)^m \arcsin 1 + m\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Если же m нечетно ($m = 2k + 1$), то

$$(-1)^m \arcsin 1 + m\pi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi + \pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

И тот и другой случай учитываются формулой (6).

Наконец, если $a = -1$, то корнями уравнения $\sin x = a$ будут числа (см. рис. 187):

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \tag{7}$$

где k пробегает все целые числа ($k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$). Предлагаем учащимся доказать, что при $a = -1$ формула (7) дает тот же результат, что и общая формула (4). Таким образом, формула (4) задает все корни уравнения (1) при любых значениях a, если только $|a| < 1$. Однако при $a = 0$, $a = +1$ и $a = -1$ целесообразнее сразу же использовать формулы (5), (6) и (7), не обращаясь к общей формуле (4).

В заключение отметим, что формулы (4), (5), (6) и (7) можно использовать лишь тогда, когда искомый угол x выражен в радианах. Если же x выражен в градусах, то эти формулы нужно естественным образом изменить. Например, вместо формулы (4) нужно использовать формулу

$$x = (-1)^m \arcsin a + 180^\circ m,$$

вместо формулы (5) — формулу

$$x = 180^\circ m$$

и т. д.

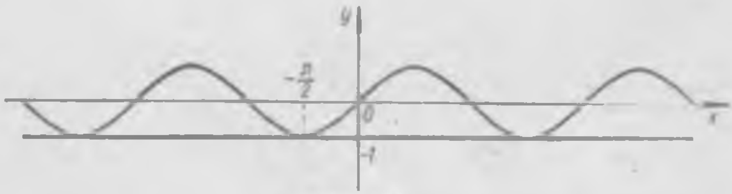


Рис. 187.

Примеры.

1) Решить уравнение

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Приведем два возможных варианта записи решения.

<table>
<tr><th>1-й вариант</th><th>2-й вариант</th></tr>
<tr><td>

$$x = (-1)^m \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 180^\circ m = $$
$$= (-1)^m 60^\circ + 180^\circ m.$$

Ответ. $x = (-1)^m 60^\circ + 180^\circ m$, где m — любое целое число.

</td><td>

$$x = (-1)^m \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + m\pi =$$
$$= (-1)^m \frac{\pi}{3} + m\pi.$$

Ответ. $x = (-1)^m \frac{\pi}{3} + m\pi$,

где m — любое целое число.

</td></tr>
</table>

Недопустимо в одном и том же решении частично использовать 1-й и частично 2-й варианты. Например, ответ к данному упражнению нельзя записать в виде

$$x = (-1)^m 60^\circ + m\pi$$

или

$$x = (-1)^m \frac{\pi}{3} + 180^\circ m.$$

2) Решить уравнение

$$\sin(1 - 2x) = -\frac{1}{2}.$$

В отличие от примера 1, здесь искомые значения x нельзя выражать в градусах. В условии задачи под знаком синуса стоит выражение $1 - 2x$. Наличие единицы указывает, что x — либо угол, выраженный в радианах, либо просто число. Поэтому решение данного уравнения нужно записать следующим образом:

$$1 - 2x = (-1)^m \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + m\pi = (-1)^m\left(-\frac{\pi}{6}\right) + m\pi =$$
$$= (-1)^{m+1}\frac{\pi}{6} + m\pi.$$

Отсюда

$$x = \frac{1}{2} + (-1)^m \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} m.$$

Например, при $m = 0$ $x = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{12}$;

при $m = 1$ $x = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} - \frac{7\pi}{12}$ и т. д.

3) Решить уравнение $\sin(30^\circ - x) = 0$.

Здесь, как легко понять, под x подразумевается угол, выраженный в градусах. Поэтому решение данного уравнения нужно записать следующим образом:

$$30^\circ - x = 180^\circ m, \qquad x = 30^\circ - 180^\circ m.$$

Поскольку под m мы подразумеваем любое целое число (в том числе и отрицательное), то полученный результат можно, конечно, представить и в другой форме, а именно:

$$x = 30^\circ + 180^\circ n,$$

где n — любое целое число.

Упражнения

Решить уравнения (№ 787—796):

787. $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

788. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

789. $\sin 2x = 0$.

790. $\sin \frac{x}{3} = 1$.

791. $\sin (2x + 30^\circ) = -1$.

792. $\sin \left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

793. $\sin (60^\circ - x) = \frac{\pi}{3}$.

794. $\sin (2x + 1) = \frac{\pi}{4}$.

795. $\sin \pi x = 0$.

796*. $\sin x + \sin 2x = 2$.

Арккосинус числа a — § 119

В § 117 мы отмечали, что равенство

$$\sin \varphi = a$$

при $|a| < 1$ однозначно определяет угол φ, если дополнительно потребовать, чтобы он находился в пределах

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \text{ или } -90^\circ \leqslant \varphi \leqslant 90^\circ.$$

Аналогичным свойством обладает равенство

$$\cos \varphi = a, \qquad (1)$$

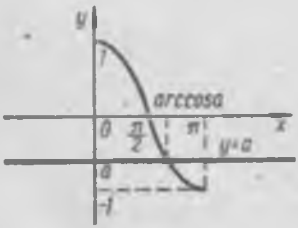


Рис. 188.

только в качестве дополнительного ограничения, накладываемого на угол φ, нужно выбрать следующее условие:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad \text{или} \quad 0^\circ < \varphi \leqslant 180^\circ.$$

Действительно, в интервале $0 < x \leqslant \pi$ функция $y = \cos x$ непрерывно убывает от 1 до —1 (рис. 188). Следовательно, в этом интервале при $|a| \leqslant 1$ косинусоида $y = \cos x$ обязательно пересечется с прямой $y = a$ и притом только в одной точке. Поэтому равенство (1) при дополнительном условии $0 < \varphi < \pi$ определяет угол φ однозначно. Этот угол принято называть *арккосинусом числа* a и обозначать $\arccos a$.

Арккосинус a есть угол, заключенный в интервале от 0 *до* π (*или от* 0° *до* 180°), *косинус которого равен* a.

Примеры.

1) $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, или $\arccos\frac{1}{2} = 60^\circ$. Действительно, угол в $\frac{\pi}{3}$ радианов попадает в интервал $[0, \pi]$ и косинус его равен $\frac{1}{2}$.

2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{6}\pi$, или $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 150^\circ$.

Действительно, угол в 150° попадает в интервал $[0^\circ, 180^\circ]$ и косинус его равен $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) $\arccos(-1) = \pi$, или $\arccos(-1) = 180^\circ$. Действительно, угол в 180° попадает в интервал $[0, 180^\circ]$ и косинус его равен -1.

Аналогично

$$\arccos 1 = 0, \qquad \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

и т. д. Заметим, что из равенства

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

нельзя сделать вывод, что $\arccos 0 = -\frac{\pi}{2}$. Ведь угол в $-\frac{\pi}{2}$ радианов не попадает в интервал $[0, \pi]$ и потому не может равняться арккосинусу числа 0.

Упражнения

797. Какие значения могут принимать величины a и b, если $b = \arccos a$?

Вычислить (№ 798—801):

798. $\arccos 0 + \arccos(-1) + \arccos 1$.

799. $\arccos 0 + \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} + \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

800. $\arccos(-1) - \arccos 1 - \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

801. $5\arccos(-1) - 12\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} - 6\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

802. Можно ли из равенства $\cos 3\pi = -1$ заключить, что $\arccos(-1) = 3\pi$?

803. Вычислить:

а) $\cos(\arccos 0{,}5)$; в) $\sin\left[\arccos\left(\sqrt{2}-2\right)\right]$;

б) $\cos(\arccos 0{,}2)$; г) $\sin\left[\arccos\left(3-\sqrt{2}\right)\right]$.

804. Найти синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы углов: а) $\arcsin 0{,}5$; б) $\arccos 1$.

805. (Устно.) В каких четвертях оканчиваются углы:

а) $\arccos(0{,}7)$; в) $\arccos(-0{,}3)$;

б) $\arccos(0{,}9)$; г) $\arccos(1{,}3)$?

Доказать тождества (№ 806—808):

806. $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)=\frac{\pi}{7}$.

807. $\arccos\left(-\cos\frac{\pi}{7}\right)=\frac{6}{7}\pi$.

808. $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$.

Вычислить (№ 809, 810):

809. $\arccos(\cos 6)$.

810. $\arccos(\cos 1)$.

811. Могут ли выражения $\arcsin a$ и $\arccos a$ принимать значения:

а) одного знака; б) разных знаков?

Уравнение $\cos x = a$ § 120

Каждый корень уравнения

$$\cos x = a \qquad (1)$$

можно рассматривать как абсциссу некоторой точки пересечения косинусоиды $y=\cos x$ с прямой $y=a$ и, наоборот, абсциссу каждой точки пересечения можно толковать как один из корней уравнения (1). Таким образом, множество всех корней уравнения (1) совпадает с множеством абсцисс всех точек пересечения косинусоиды $y=\cos x$ с прямой $y=a$.

Если $|a|>1$, то косинусоида $y=\cos x$ не пересекается с прямой $y=a$ (рис. 189). В этом случае уравнение (1) не имеет

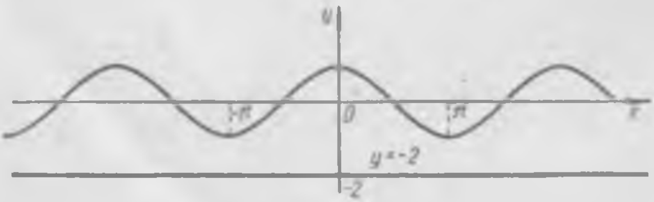


Рис. 189.

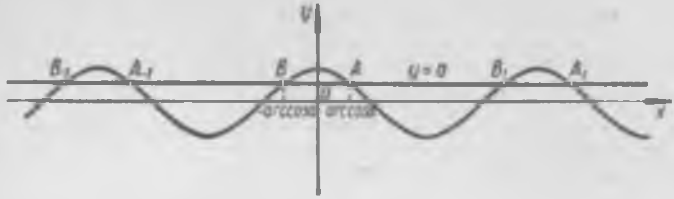


Рис. 190.

корней. При $|a| \leqslant 1$ получается бесконечно много точек пересечения (см. рис. 190 для $a > 0$ и рис. 191 для $a < 0$).

Все эти точки пересечения мы разобьем на две группы:

$$\ldots, A_{-2}, A_{-1}, A, A_1, A_2, \ldots,$$
$$\ldots, B_{-2}, B_{-1}, B, B_1, B_2, \ldots.$$

Точка A имеет абсциссу $\arccos a$, а все остальные точки первой группы отстоят от нее на расстояния, кратные 2π. Поэтому их абсциссы выражаются как

$$\arccos a + 2k\pi. \qquad (2)$$

Точка B, как легко понять из рисунков 190 и 191, имеет абсциссу $-\arccos a$, а все остальные точки второй группы удалены от нее на расстояния, кратные 2π. Поэтому их абсциссы выражаются как

$$-\arccos a + 2n\pi. \qquad (3)$$

Таким образом, уравнение (1) имеет две группы корней, определяемых формулами (2) и (3). Но эти две формулы можно, очевидно, записать в виде одной формулы

$$x = \pm \arccos a + 2m\pi, \qquad (4)$$

где m пробегает все целые числа ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$).

Те рассуждения, которые мы проводили при выводе этой формулы, верны лишь при $|a| \neq 1$. Однако формально соотношение (4) определяет все корни уравнения $\cos x = a$ и при $|a| = 1$. (Докажите это!) Поэтому можно сказать, что формула (4) дает

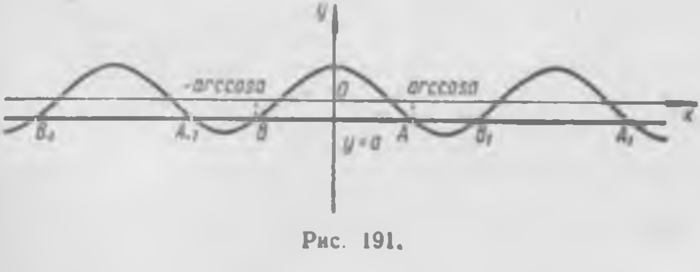


Рис. 191.

все корни уравнения (1) при любых значениях a, если только $|a| \leqslant 1$.

Но все же в трех частных случаях ($a = 0$, $a = -1$, $a = +1$) мы рекомендуем не обращаться к формуле (4), а пользоваться другими соотношениями. Полезно запомнить, что корни уравнения $\cos x = 0$ задаются формулой:

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi; \tag{5}$$

корни уравнения $\cos x = -1$ задаются формулой

$$x = \pi + 2m\pi \tag{6}$$

и, наконец, корни уравнения $\cos x = 1$ задаются формулой

$$x = 2m\pi. \tag{7}$$

В заключение отметим, что формулы (4), (5), (6) и (7) верны лишь в предположении, что искомый угол x выражен в радианах. Если же он выражен в градусах, то эти формулы нужно естественным образом изменить. Так, формулу (4) следует заменить формулой:

$$x = \pm \arccos a + 360°n,$$

формулу (5) формулой:

$$x = 90° + 180°n$$

и т. д.

Примеры.

1) Решить уравнение

$$\cos 3x = \frac{1}{2}.$$

По формуле (4) находим:

$$3x = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2m\pi = \pm\frac{\pi}{3} + 2m\pi.$$

Отсюда

$$x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}m\pi.$$

Ответ к задаче можно было бы выразить и в градусах:

$$x = \pm 20° + 120°m.$$

Однако не следует записывать ответ в форме, в которой градусы перемешиваются с радианами (например, $x = \pm 20° + \frac{2}{3}m\pi$ или $x = \pm\frac{\pi}{9} + 120°m$).

2) Решить уравнение

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = -1.$$

Очевидно, что здесь искомый угол x выражен в радианах. Поэтому, используя формулу (6), решение можно записать таким образом:

$$\frac{\pi}{4}-2x=\pi+2m\pi,$$

откуда

$$2x=-\frac{3}{4}\pi-2m\pi,$$

или

$$x=-\frac{3}{8}\pi-m\pi.$$

Поскольку под m здесь подразумевается любое целое число (в том числе и отрицательное), то ответ можно записать в виде

$$x=-\frac{3}{8}\pi+m\pi.$$

Упражнения

Решить уравнения:

812. $\cos x=-\frac{1}{2}$.

813. $\cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

814. $\cos 4x=-1$.

815. $\cos(30^\circ-x)=1$.

816. $\cos 5x=\frac{\pi}{2}$.

817. $\cos \pi x=1$.

818. $\cos(2x-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

819. $\cos\left(20^\circ-\frac{x}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

820. $\sin x+\cos x=-2$.

821. $\cos x+\cos 2x=-2$.

822. $\sin x\cdot\cos x=1$.

Арктангенс и арккотангенс числа a § 121

Равенство

$$\operatorname{tg}\varphi=a \tag{1}$$

определяет угол φ неоднозначно. В самом деле, если φ_0 есть угол, удовлетворяющий равенству (1), то в силу периодичности тангенса этому равенству будут удовлетворять и углы

$$\varphi_0+n\pi,$$

где n пробегает все целые числа ($n=0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$). Такой неоднозначности можно избежать, если дополнительно потребовать, чтобы угол φ находился в пределах $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$. Действительно, в интервале

$$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$$

функция $y=\operatorname{tg}x$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ (рис. 192). Следовательно, в этом интервале тангенсоида обязательно пересе-

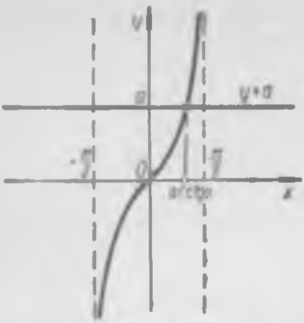


Рис. 192.

чется с прямой $y = a$ и притом лишь в одной точке. Абсциссу этой точки принято называть *арктангенсом* числа a и обозначать arctg a.

Арктангенс a есть угол, заключенный в интервале от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ (или от $-90°$ до $+90°$), тангенс которого равен a.

Примеры.

1) $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, или $\operatorname{arctg} 1 = 45°$.

Действительно, угол в $\frac{\pi}{4}$ радианов попадает в интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и тангенс его равен 1.

2) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$, или $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -30°$.

Действительно, угол в $-30°$ попадает в интервал $(-90°, 90°)$, тангенс его равен $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Заметим, что из равенства

$$\operatorname{tg} \pi = 0$$

нельзя заключить, что $\operatorname{arctg} 0 = \pi$. Ведь угол в π радианов не попадает в интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и потому он не может быть арктангенсом нуля. Читатель, по-видимому, уже догадался, что $\operatorname{arctg} 0 = 0$.

Равенство

$$\operatorname{ctg} \varphi = a \qquad (2)$$

так же как и равенство (1), определяет угол φ неоднозначно. Чтобы избавиться от этой неоднозначности, нужно на искомый угол наложить дополнительные ограничения. В качестве таких ограничений мы выберем условие

$$0 < \varphi < \pi.$$

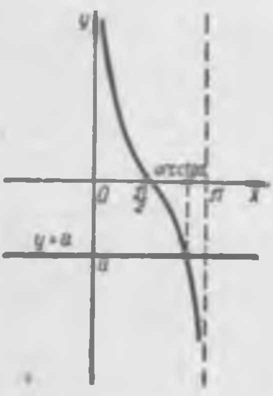


Рис. 193.

Если аргумент x непрерывно возрастает в интервале $(0, \pi)$, то функция $y = \operatorname{ctg} x$ будет монотонно убывать от $+\infty$ до $-\infty$. Поэтому в рассматриваемом интервале котангенсоида (рис. 193) обязательно пересечет прямую $y = a$ и притом лишь в одной точке. Абсциссу этой точки принято называть *арккотангенсом* числа a и обозначать $\text{arcctg}\, a$.

Арккотангенс a есть угол, заключенный в интервал от 0 до π (или от 0° до 180°), котангенс которого равен a.

Примеры.

1) $\text{arcctg}\, 0 = \frac{\pi}{2}$, или $\text{arcctg}\, 0 = 90°$.

Действительно, угол в $\frac{\pi}{2}$ радианов попадает в интервал $(0, \pi)$ и котангенс его равен 0.

2) $\text{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3}\pi$, или $\text{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 120°$.

Действительно, угол в 120° попадает в интервал (0°, 180°) и котангенс его равен $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Заметим, что из равенства

$$\text{ctg}\,(-45°) = -1$$

нельзя заключить, что $\text{arcctg}\,(-1) = -45°$. Ведь угол в $-45°$ не попадает в интервал (0°, 180°) и потому он не может быть арккотангенсом числа -1. Очевидно, что

$$\text{arcctg}\,(-1) = 135°.$$

Упражнения

Вычислить (№ 823—826):

823. $\text{arctg}\, 0 + \text{arctg}\, \frac{1}{\sqrt{3}} + \text{arctg}\, \sqrt{3} + \text{arctg}\, 1.$

824. $\text{arcctg}\, 0 + \text{arcctg}\, \frac{1}{\sqrt{3}} + \text{arcctg}\, \sqrt{3} + \text{arcctg}\, 1.$

825. $\text{arcctg}\, 0 + \text{arcctg}\,(-1) - \text{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \text{arcctg}\,(-\sqrt{3}).$

826. $\text{arctg}\,(-1) + \text{arctg}\,(-\sqrt{3}) - \text{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \text{arctg}\, 0.$

827. Какие значения могут принимать величины a и b, если

$$b = \text{arctg}\, a?$$

828. Какие значения могут принимать величины a и b, если

$$b = \text{arcctg}\, a?$$

829. В каких четвертях оканчиваются углы:

а) $\text{arctg}\, 5$; в) $\text{arcctg}\, 3$; д) $\frac{\pi}{2} - \text{arcctg}\,(-4)$;

б) $\text{arctg}\,(-7)$; г) $\text{arcctg}\,(-2)$; е) $\frac{3}{2}\pi + \text{arctg}\, \frac{1}{2}$?

830. Могут ли выражения $\text{arctg}\, a$ и $\text{arcctg}\, a$ принимать значения: а) одного знака; б) разных знаков?

831. Найти синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы следующих углов:

а) $\operatorname{arctg}\frac{5}{12}$; в) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{5}{12}\right)$;

б) $\operatorname{arctg}(-0{,}75)$; г) $\operatorname{arcctg}(0{,}75)$.

Доказать тождества (№ 832, 833):

832. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.

833. $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

Вычислить:

834. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 2)$.

835. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2)$.

Уравнения $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$ — § 122

Все корни уравнения

$$\operatorname{tg} x = a$$

задаются формулой

$$x = \operatorname{arctg} a + m\pi, \tag{1}$$

или

$$x = \operatorname{arctg} a + 180^\circ m, \tag{2}$$

где m пробегает все целые числа ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$). Предлагаем учащимся доказать это самостоятельно. При этом следует использовать рисунок 194.

Аналогично все корни уравнения

$$\operatorname{ctg} x = a$$

определяются соотношением

$$x = \operatorname{arcctg} a + m\pi, \tag{3}$$

или

$$x = \operatorname{arcctg} a + 180^\circ m. \tag{4}$$

Это хорошо иллюстрируется рисунком 195.

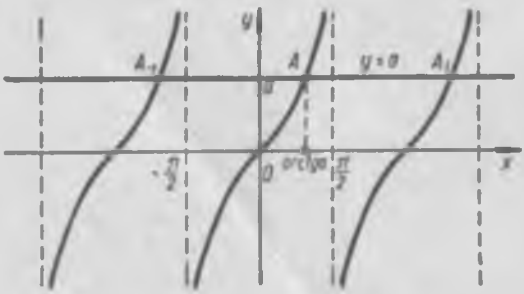


Рис. 194.

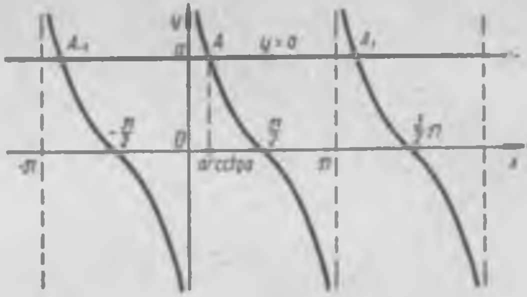


Рис. 195.

Рассмотрим два примера.

1) Решить уравнение $\operatorname{tg}(30^\circ - x) = \sqrt{3}$.

Используя формулу (2), получаем:

$$30^\circ - x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + 180^\circ m = 60^\circ + 180^\circ m.$$

Отсюда

$$x = -30^\circ - 180^\circ m,$$

что можно представить, конечно, и в таком виде:

$$x = -30^\circ + 180^\circ k.$$

2) Решить уравнение $\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$.

Используя формулу (3), получаем:

$$2x - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arcctg}(-1) + m\pi = \frac{3}{4}\pi + m\pi.$$

Отсюда

$$2x = \pi + m\pi = (1 + m)\pi,$$

$$x = \frac{\pi}{2}(m + 1).$$

Поскольку m может быть любым целым числом, то полученный результат можно представить и в более простой форме:

$$x = \frac{\pi}{2}\cdot k.$$

Упражнения

Решить уравнения:

836. $\operatorname{tg} 3x = 0$.

837. $\operatorname{tg}(2x + 60^\circ) = -1$.

838. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) = \sqrt{3}$.

839. $\operatorname{tg}\pi x = 1$.

840. $\operatorname{ctg}(30^\circ + 2x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

841. $\operatorname{ctg}(3x - 45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

842. $\operatorname{ctg}\pi x = 0$.

843. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = -1$.

844. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 0{,}5$.

845. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$.

831. Найти синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы следующих углов:

а) $\operatorname{arctg}\frac{5}{12}$;   в) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{5}{12}\right)$;

б) $\operatorname{arctg}(-0{,}75)$;   г) $\operatorname{arcctg}(0{,}75)$.

Доказать тождества (№ 832, 833):

832. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.

833. $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

Вычислить:

834. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 2)$.

835. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2)$.

Уравнения $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$ § 122

Все корни уравнения

$$\operatorname{tg} x = a$$

задаются формулой

$$x = \operatorname{arctg} a + m\pi, \tag{1}$$

или

$$x = \operatorname{arctg} a + 180^\circ m, \tag{2}$$

где m пробегает все целые числа ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$). Предлагаем учащимся доказать это самостоятельно. При этом следует использовать рисунок 194.

Аналогично все корни уравнения

$$\operatorname{ctg} x = a$$

определяются соотношением

$$x = \operatorname{arcctg} a + m\pi, \tag{3}$$

или

$$x = \operatorname{arcctg} a + 180^\circ m. \tag{4}$$

Это хорошо иллюстрируется рисунком 195.

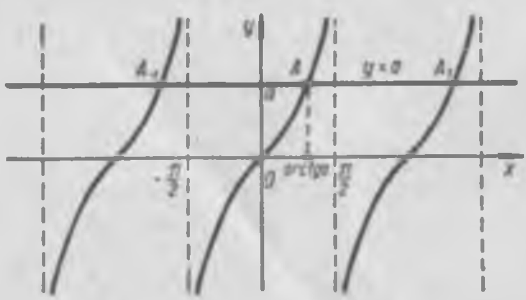


Рис. 194.

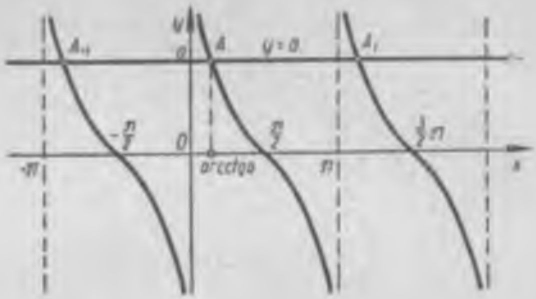


Рис. 195.

Рассмотрим два примера.

1) Решить уравнение $\operatorname{tg}(30° - x) = \sqrt{3}$.

Используя формулу (2), получаем:

$$30° - x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + 180°m = 60° + 180°m.$$

Отсюда

$$x = -30° - 180°m,$$

что можно представить, конечно, и в таком виде:

$$x = -30° + 180°k.$$

2) Решить уравнение $\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$.

Используя формулу (3), получаем:

$$2x - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arcctg}(-1) + m\pi = \frac{3}{4}\pi + m\pi.$$

Отсюда

$$2x = \pi + m\pi = (1 + m)\pi,$$

$$x = \frac{\pi}{2}(m + 1).$$

Поскольку m может быть любым целым числом, то полученный результат можно представить и в более простой форме:

$$x = \frac{\pi}{2} \cdot k.$$

Упражнения

Решить уравнения:

836. $\operatorname{tg} 3x = 0$.

837. $\operatorname{tg}(2x + 60°) = -1$.

838. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) = \sqrt{3}$.

839. $\operatorname{tg} \pi x = 1$.

840. $\operatorname{ctg}(30° + 2x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

841. $\operatorname{ctg}(3x - 45°) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

842. $\operatorname{ctg} \pi x = 0$.

843. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = -1$.

844. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 0{,}5$.

845. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$.

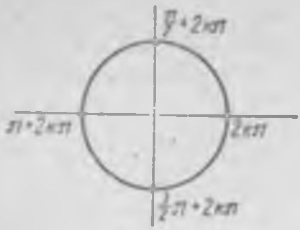


Рис. 196.

Поскольку обе части данного уравнения мы возводили в квадрат, то не исключена возможность, что среди полученных нами корней имеются посторонние. Вот почему в этом примере, в отличие от всех предыдущих, необходимо сделать проверку. Все значения $x = \frac{\pi}{2} \cdot n$ можно разбить на 4 группы (см. рис. 196):

1) $x = 2k\pi$; $(n = 4k)$;

2) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $(n = 4k + 1)$;

3) $x = \pi + 2k\pi$; $(n = 4k + 2)$;

4) $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$; $(n = 4k + 3)$.

При $x = 2k\pi$ $\sin x + \cos x = 0 + 1 = 1$. Следовательно, $x = 2k\pi$ — корни данного уравнения. При $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $\sin x + \cos x = 1 + 0 = 1$. Значит, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ — также корни данного уравнения. При $x = \pi + 2k\pi$ $\sin x + \cos x = 0 - 1 = -1$. Поэтому значения $x = \pi + 2k\pi$ не являются корнями данного уравнения. Аналогично показывается, что $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ не являются корнями.

Таким образом, данное уравнение имеет следующие корни: $x = 2k\pi$ и $x = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$, где k и m — любые целые числа.

Упражнения

Решить уравнения:

846. $\cos x = \sin 2x \cos x$.

847. $\operatorname{tg} x + \sin x \operatorname{tg} x = 0$.

848. $\cos x \operatorname{cosec}^2 x = 0$.

849. $\frac{\sin x}{1 - \cos x} = 0$.

850. $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = 0$.

851. $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} = 0$.

852. $\cos x + \operatorname{tg} x = 0$.

853. $\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$.

854. $2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0$.

855. $2\cos^2 x = 3\sin x$.

856. $\cos^2 x - 1 = \cos(90° - x)$.

857. $2\sin^2 x = 2 + 5\cos x$.

858. $\sqrt{3} \operatorname{tg}^2(x + 40°) = \operatorname{ctg}(50° - x)$.

859. $\sin x + \cos x = 3$.

860. $2\sin x - 3\cos x = 6$.

861. $\sin x + \cos 2x = 2$.

862. $\sin x \cos 2x = -1$.

863. $\cos 2x - 2\sin^2 x = -3$.

864. $\sin x - \cos x = 1$.

865. $\sin x = \cos x$.

Примерами *однородных* тригонометрических уравнений могут служить уравнения:

$$\sin x - \cos x = 0,$$
$$\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0,$$
$$\cos^2 x - \sin x\cos x = 0.$$

Это такие уравнения, все члены которых имеют одну и ту же общую степень относительно $\sin x$ и $\cos x$. Например, все члены первого уравнения имеют общую степень 1, а все члены других двух уравнений — общую степень 2.

Решим уравнение $\sin x - \cos x = 0$. Для этого заметим, что в данном случае $\cos x$ не может быть равен нулю. Если бы было $\cos x = 0$, то должно было бы быть и $\sin x = 0$. Но тогда не выполнялось бы тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Итак, в данном случае $\cos x \neq 0$. Поэтому обе части данного уравнения можно разделить на $\cos x$. В результате получим $\operatorname{tg} x - 1 = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$.

Аналогично решается и уравнение $\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0$. Разделив обе части этого уравнения на $\cos^2 x$, получим:

$$\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 6 = 0; \quad (\operatorname{tg} x)_1 = 2; \quad (\operatorname{tg} x)_2 = 3.$$

Поэтому

$$x = \operatorname{arctg} 2 + n\pi; \; x = \operatorname{arctg} 3 + k\pi.$$

Теперь решим уравнение

$$\cos^2 x - \sin x\cos x = 0.$$

Здесь уже равенство $\cos x = 0$ возможно, поэтому делить обе части уравнения на $\cos^2 x$ нельзя. Зато можно утверждать, что $\sin x \neq 0$. В противном случае из уравнения вытекало бы, что $\cos x = 0$. Но тогда не выполнялось бы тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Итак, $\sin x \neq 0$. Поэтому обе части данного уравнения можно разделить на $\sin^2 x$. В результате получим:

$$\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg} x = 0,$$

откуда $(\operatorname{ctg} x)_1 = 0$; $(\operatorname{ctg} x)_2 = 1$. Соответственно этому получается две группы корней:

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ и } x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Некоторые тригонометрические уравнения, не являясь однородными, легко сводятся к однородным.

Например, если в уравнении

$$\sin x \cos x = 0{,}5$$

представить 0,5 в виде $0{,}5(\sin^2 x + \cos^2 x)$, то получится однородное уравнение $\sin x \cos x = 0{,}5 \sin^2 x + 0{,}5 \cos^2 x$. Это уравнение предлагаем учащимся решить самостоятельно.

Упражнения

Решить уравнения:

866. $3 \sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$.

867. $2 \cos x - \sqrt{2} \sin x = 0$.

868. $3 \sin x + 5 \cos x = 0$.

869. $\sin^2 x - (1 + \sqrt{3}) \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0$.

870. $\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$

871. $\sqrt{3} \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0$.

872. $2 \sin x - \cos x \sin x = 0$.

873. $\sqrt{3} \cos x + \cos x \sin x = 0$.

874. $\sin x \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos^2 x$.

875. $\cos^2 x - 3 \sin x \cos x + 1 = 0$.

876. $\sin^2 x + 3 \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = \frac{5 - \sqrt{3}}{2}$.

877. $\sin x \cos x = -0{,}25$.

878. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

Графический способ решения тригонометрических уравнений § 125

Уравнения, с которыми приходится сталкиваться при решении практических задач, как правило, значительно отличаются от тех, которые мы рассматривали в этой главе. Для таких уравнений иногда вообще нельзя указать никакого способа, который позволял бы найти корни абсолютно точно. В таком случае приходится ограничиваться нахождением лишь *приближенных* значений корней. Современная математика располагает эффективными методами приближенного решения уравнений. Эти методы излагаются в учебниках по вычислительной математике и требуют определенных знаний, которых у нас пока еще нет. Поэтому мы остановимся лишь на одном из доступных нам способов — *графическом способе*.

Пусть, например, нужно решить уравнение

$$\sin x = 1 - x.$$

На одном и том же рисунке начертим два графика: график функции $y=\sin x$ и график функции $y=1-x$ (рис. 197). Эти графики пересекаются в одной точке M. Абсцисса этой точки и дает нам единственный корень нашего уравнения:

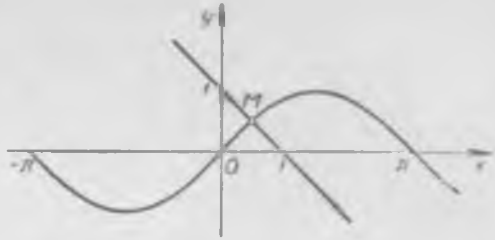


Рис. 197.

$$x \approx 0{,}5.$$

Для уточнения полученного результата полезно использовать тригонометрические таблицы. При $x = 0{,}5$

$$\sin x \approx 0{,}4794,$$
$$1 - x = 0{,}5;$$

следовательно, $\sin x < 1 - x$. Но тогда, как легко понять из рисунка 197, корень уравнения $\sin x = 1 - x$ будет больше, чем 0,5. Проверим значение $x = 0{,}6$. Имеем (при $x = 0{,}6$):

$$\sin x \approx 0{,}5446,$$
$$1 - x = 0{,}4;$$

следовательно, $\sin x > 1 - x$. Но тогда, как легко понять из того же рисунка 197, искомый корень x_0 должен быть меньше, чем 0,6. Теперь уже мы знаем, что x_0 находится в интервале [0,5; 0,6]. Поэтому с точностью до 0,1

$$x_0 \approx 0{,}5 \text{ (с недостатком)},$$
$$x_0 \approx 0{,}6 \text{ (с избытком)}.$$

С помощью таблиц можно найти приближенное значение x_0 и с точностью до 0,01. Разделим интервал [0,5; 0,6] пополам. В средней точке ($x = 0{,}55$) этого интервала

$$\sin x \approx 0{,}5227,$$
$$1 - x = 0{,}45.$$

Опять получаем, что $\sin x > 1 - x$. Следовательно, $x_0 < 0{,}55$. Проверим точку $x = 0{,}52$ (она близка к средней точке $x = 0{,}525$ интервала [0,50; 0,55], в котором заключен корень x_0). При $x = 0{,}52$

$$\sin x \approx 0{,}4969,$$
$$1 - x = 0{,}48.$$

Снова $\sin x > 1 - x$; поэтому $x_0 < 0{,}52$. Итак,

$$0{,}50 < x_0 < 0{,}52.$$

Поэтому с точностью до 0,01

$$x_0 \approx 0{,}51.$$

Упражнения

879. Выше мы показали, что с точностью до 0,01 корень уравнения $\sin x = 1 - x$ равен 0,51. Определите, какое это значение корня: с недостатком или с избытком.

880. Найти корни данных уравнений с точностью до 0,01:
а) $\cos x = x - 1$; б) $\sin x + 0{,}5 = x$.

881. Сколько корней имеет уравнение $10\sin x = x$?

882. Найти наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg} x = 1 - x$ с точностью до 0,01.

Тригонометрические неравенства § 125

При решении тригонометрических неравенств полезно обращаться к графикам. Пусть, например, нужно решить неравенство

$$\cos x > \frac{1}{2}.$$

На одном и том же чертеже построим графики функций $y = \cos x$ и $y = \frac{1}{2}$ (рис. 198). Как видно из рисунка, один из интервалов, в котором выполняется данное неравенство, заключен между наименьшими по абсолютной величине корнями уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$, то есть между точками $x = -\frac{\pi}{3}$ и $x = \frac{\pi}{3}$. Все остальные интервалы, в которых выполняется данное неравенство, получаются путем сдвига интервала $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ влево

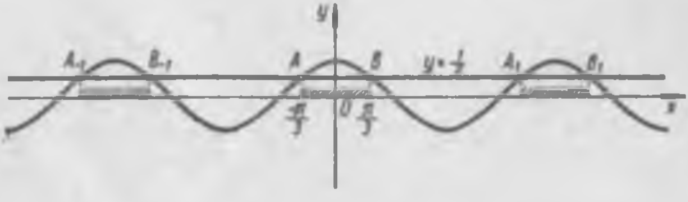


Рис. 198.

или вправо на расстояния, кратные 2π. Поэтому неравенство $\cos x > \frac{1}{2}$ выполняется при условии, что

$$-\frac{\pi}{3} + 2n\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2n\pi,$$

где n — любое целое число.

Рассмотрим еще один пример. Решить неравенство

$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 > 0.$$

Обозначив $\cos x$ через y, придем к следующему квадратному неравенству:

$$2y^2 + 3y - 2 > 0.$$

Это неравенство выполняется при $y < -2$ и $y > \frac{1}{2}$. Поэтому все решения данного неравенства должны удовлетворять либо неравенству $\cos x < -2$, либо неравенству $\cos x > \frac{1}{2}$. Первое из этих неравенств не выполняется ни при каких значениях x; второе же неравенство, как мы показали выше, выполняется при

$$-\frac{\pi}{3} + 2n\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2n\pi.$$

Упражнения

Решить неравенства:

883. $\operatorname{tg} x > 1$.
884. $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
885. $2\sin^2 x - 5\sin x + 3 > 0$.
886. $\sin^2 x > \cos x$.
887. $|\sin x| > \frac{1}{2}$.

Задачи на повторение

Доказать тождества (№ 888—891):

888. $(r\cos\alpha)^2 + (r\sin\alpha\sin\beta)^2 + (r\sin\alpha\cos\beta)^2 = r^2$.

889. $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} = 2|\sec\alpha|$.

890. $1 + \frac{\cos\alpha\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\cos\alpha} = \sec\alpha$.

891. $1 + (\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha)\cdot\cos^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha$.

Решить данные неравенства (№ 892—894) относительно о с т р о г о угла α:

892*. $\cos(\alpha - 120^\circ) > \sin(64^\circ + \alpha)$.

893*. $\operatorname{tg}(65^\circ - 2\alpha) > \operatorname{ctg}(40^\circ - \alpha)$.

894*. $\sin(\alpha + 30^\circ) > \cos(72^\circ - 2\alpha)$.

895. Найти косинус, тангенс и котангенс угла φ, если известно, что $\sin\varphi = 0{,}28$.

896. Найти синус, тангенс и котангенс угла φ, если известно, что

$$\cos\varphi = -0{,}96$$

и угол φ оканчивается не в 3-й четверти.

897. Найти синус, косинус и котангенс угла φ, если известно, что этот угол оканчивается в 3-й четверти и

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{3}.$$

Найти синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы следующих углов (№ 898—901):

898. $\arcsin 0{,}28$ и $\arcsin(-0{,}28)$.

899. $\arccos 0{,}96$ и $\arccos(-0{,}96)$.

900. $\operatorname{arctg}\frac{5}{12}$ и $\operatorname{arctg}\left(-\frac{5}{12}\right)$.

901. $\operatorname{arcctg} 1\frac{1}{3}$ и $\operatorname{arcctg}\left(-1\frac{1}{3}\right)$.

Упростить данные выражения (№ 902—905):

902. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos 0{,}6\right)$.

903. $\cos\left[\frac{\pi}{2} + \arccos(-0{,}8)\right]$.

904. $\operatorname{tg}\left[\frac{3}{2}\pi - \arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right]$.

905. $\sin\left(\operatorname{arctg} 0{,}75 - \frac{3}{2}\pi\right)$.

906. а) $\sin\alpha = \sin\beta$. Можно ли сказать, что $\alpha = \beta$?

б) $\sin\alpha = \sin\beta$, причем углы α и β оканчиваются в одной и той же четверти. Можно ли сказать, что $\alpha = \beta$?

в) $\sin\alpha = \sin\beta$, причем $0 < \alpha < \pi$ и $0 < \beta < \pi$. Можно ли сказать, что $\alpha = \beta$?

г) $\sin\alpha = \sin\beta$, причем $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$. Можно ли сказать, что $\alpha = \beta$?

907. Чем отличаются друг от друга функции

$$y = x \text{ и } y = \sin(\arcsin x)?$$

Сравните графики этих функций.

908*. Построить график функции $y = \arccos(\cos x)$.

909*. На плоскости xOy найти множество всех точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют условию

$$\sin(x + y) = 0.$$

910. При каких значениях α определены выражения:

а) $\dfrac{1}{\sin\alpha + 1}$; в) $\sqrt{\cos\alpha - 1}$; д) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$;

б) $\dfrac{1}{\cos\alpha - 0{,}5}$; г) $\dfrac{3}{\sin\alpha - \cos\alpha}$; е) $\operatorname{tg} 2\alpha$?

911. При каких значениях a данные уравнения имеют корни:

а) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + a = 0$; б) $\sin^2 x + \sin x + a = 0$?

Проверить данные равенства (№ 912—915):

912. $\arcsin(\sin 1) = 1$.

913. $\arcsin(\sin 2) = \pi - 2$.

914. $\arccos(\cos 1{,}5) = 1{,}5$.

915. $\arccos(\cos 2{,}5) = 2{,}5$.

916. Доказать тождества:

а) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$;

б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$.

Вычислить (№ 917—919):

917. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{2}{3}\pi\right)$.

918. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} 0{,}6\pi)$.

919. $\arccos(\sin 2)$.

920. Что больше:

а) $\arccos\dfrac{2}{3}$ или $\arcsin\dfrac{3}{4}$;

б) $\arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)$ или $\arccos\left(-\dfrac{5}{6}\right)$;

в) $\operatorname{arctg} 3$ или $\operatorname{arctg} 4$?

Решить данные уравнения (№ 921—930):

921. $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x = 3$.

922. $3\sin^2 x + 2\sin x\cos x = 2$.

923. $\sin x - \cos 2x + \sin 4x = 3$.

924. $\cos x = \sqrt{2}\sin^2 x$.
925. $\sin x + \cos x = 1 + 2\sin x\cos x$.
926. $\sin(\pi\cos x) = 0$.
927. $\cos 2x\sin x = \cos 2x$.
928. $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = 0$.
929. $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$.
930. $\sqrt{1-\cos^2 x} = -\sin x$.
931. Доказать, что уравнение

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin 100x = 100$$

не имеет корней.

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ VI

Числовые последовательности и способы их задания. Конечные и бесконечные последовательности § 127

Рассмотрим следующие три совокупности чисел:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots, \tag{1}$$

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{(-1)^{n-1}}{n},\ \ldots, \tag{2}$$

$$\sin 1,\ \sin 2,\ \sin 3,\ \ldots,\ \sin n,\ \ldots. \tag{3}$$

Естественно считать, что каждое число в любой из этих совокупностей снабжено номером в соответствии с тем местом, которое оно занимает в этой совокупности. Например, во второй совокупности число 1 имеет номер 1, число $-\frac{1}{2}$ — номер 2, число $\frac{1}{3}$ — номер 3 и т. д.

Наоборот, какой бы номер мы ни указали, в каждой из этих совокупностей найдется число, снабженное этим номером. Например, номер 2 в первой последовательности имеет число 2, во второй — число $-\frac{1}{2}$, в третьей — число sin 2. Аналогично, номер 10 имеют: в первой последовательности — число 10, во второй — число $-\frac{1}{10}$, в третьей — число sin 10 и т. д. Таким образом, в приведенных выше совокупностях каждое число имеет вполне определенный номер и полностью определяется этим номером.

Совокупность чисел, каждое из которых снабжено своим номером n ($n = 1, 2, 3, \ldots$), *называется числовой последовательностью.*

Отдельные числа последовательности называются ее членами и обозначаются обычно так: первый член a_1, второй a_2, ..., n-й член a_n и т. д. Вся числовая последовательность обозначается

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ \text{или}\ \{a_n\}.$$

Задать числовую последовательность — это значит указать, как отыскивается тот или иной ее член, если известен номер занимаемого им места. Существует много различных способов задания числовых последовательностей. Ниже мы остановимся на некоторых из них.

1. Обычно числовая последовательность задается с помощью формулы, позволяющей по номеру члена последовательности определить этот член. Например, если известно, что при любом n

$$a_n = n^2,$$

то

$$a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_n = 9 \text{ и т. д.}$$

При $a_n = \sin\frac{\pi}{2}n$ мы получим: $a_1 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, $a_2 = \sin\pi = 0$, $a_3 = \sin\frac{3}{2}\pi = -1$, $a_4 = \sin 2\pi = 0$ и т. д.

Формула, позволяющая найти любой член числовой последовательности по его номеру, называется формулой общего члена числовой последовательности.

2. Бывают случаи, когда последовательность задается посредством описания ее членов. Например, говорят, что последовательность

$$1{,}4;\quad 1{,}41;\quad 1{,}414;\quad 1{,}4142;\ \ldots$$

составлена из приближенных значений $\sqrt{2}$ с недостатком с точностью до 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 и т. д. В подобных случаях иногда вообще нельзя установить формулу общего члена; тем не менее последовательность оказывается полностью определенной.

3. Иногда указывается несколько первых членов последовательности, а все остальные члены определяются этими заданными членами по тому или иному правилу. Пусть, например,

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,$$

а каждый последующий член определяется как сумма двух предыдущих. Другими словами, при любом $n > 3$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Так определяется числовая последовательность

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots,$$

члены которой носят название «чисел Фибоначчи» [по имени итальянского математика Леонарда Пизанского (около 1170—1250), которого называли также Фибоначчи, что означает «сын Боначчо»]. Они обладают многими интересными свойствами, рассмотрение которых, однако, выходит за пределы нашей программы.

Последовательность может содержать как конечное, так и бесконечное число членов.

Последовательность, состоящая из конечного числа членов, называется конечной, а последовательность, состоящая из бесконечного числа членов, — бесконечной последовательностью.

Например, последовательность всех четных положительных чисел 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... бесконечна, а последовательность однозначных четных положительных чисел 2, 4, 6, 8 конечна.

Упражнения

932. Написать 4 первых числа последовательности с общим членом:

а) $a_n = 2^{-n}$; в) $a_n = \frac{2n-1}{3+n}$; д) $a_n = (-1)^n$;

б) $a_n = 2 + 3n$; г) $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)$; е) $a_n = \operatorname{tg}\frac{\pi}{n+2}$.

933. Найти формулу общего члена для каждой из данных последовательностей:

а) 1, 3, 5, 7, 9, . . . ; д) tg 45°, tg 22°30′, tg 11°15′, . . . ;

б) 2, 4, 6, 8, 10, . . . ; е) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$;

в) 3, —3, 3, — 3, 3, . . . ; ж) 1, 9, 25, 49, 81, ...

г) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$;

934. Является ли конечной последовательность всех положительных корней уравнения:

а) $\sin x = x - 1$; б) $\operatorname{tg} x = x$; в) $\sin x = ax + b$?

Монотонные последовательности § 128

Если каждый член последовательности, начиная со второго, больше предыдущего, то последовательность называется монотонно возрастающей.

Другими словами, *числовая последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ называется монотонно возрастающей, если для любого n*

$$a_{n+1} > a_n.$$

Примером монотонно возрастающей* числовой последовательности является натуральный ряд чисел 1, 2, 3, 4, ... Другим примером монотонно возрастающей числовой последовательности может служить последовательность

$$p_4, p_8, p_{16}, p_{32}, \ldots$$

периметров правильных 4-, 8-, 16-угольников и т. д., вписанных в одну и ту же окружность. Действительно, пусть AB —

---

* Если при любом n $a_{n+1} \geq a_n$, то последовательность $\{a_n\}$ называется *монотонно неубывающей*. Например, последовательность 1, 1, 2, 2, 3, 3,... не является монотонно возрастающей, но является монотонно неубывающей.

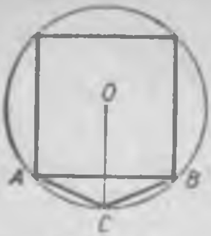


Рис. 199.

сторона квадрата, вписанного в окружность O (рис. 199). Опустим на AB перпендикуляр из центра окружности O и продолжим его до пересечения с окружностью в точке C. AC и BC будут, очевидно, сторонами правильного восьмиугольника. В треугольнике ABC

$$AC + BC > AB.$$

Поскольку $p_4 = 4AB$, $p_8 = 4\,(AC + BC)$, то $p_8 > p_4$. Аналогично показывается, что $p_{16} > p_8$, $p_{32} > p_{16}$ и т. д.

Если каждый член числовой последовательности, начиная со второго, меньше предыдущего, то последовательчость называется монотонно убывающей.

Другими словами, числовая последовательность $a_1, a_2, a_3, \dots$ *называется монотонно убывающей, если для любого* n

$$a_{n+1} < a_n.$$

Примером монотонно убывающей* числовой последовательности может служить последовательность

$$1,\quad \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \dots,\ \frac{1}{n},\ \dots.$$

Другим примером монотонно убывающей последовательности является последовательность

$$P_4,\ P_8,\ P_{16},\ P_{32},\ \dots$$

периметров правильных 4-, 8-, 16-угольников и т. д., описанных около одной и той же окружности. Доказательство этого факта мы предлагаем учащимся провести самостоятельно.

Монотонно возрастающие и монотонно убывающие последовательности иногда называются просто *монотонными* последовательностями.

Не следует думать, что всякая числовая последовательность является монотонной. Так, например, последовательность

$$-1;\ 1;\ -1;\ 1;\ \dots$$

с общим членом $a_n = (-1)^n$ не принадлежит ни к монотонно возрастающим, ни к монотонно убывающим последовательностям. То же самое можно сказать и о последовательности

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \dots$$

---

* Если при любом n $a_{n+1} < a_n$, то последовательность $\{a_n\}$ называется *монотонно невозрастающей*. Например, последовательность $1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \dots$ не является монотонно убывающей, но является монотонно невозрастающей.

с общим членом $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Подобные последовательности получили название *колеблющихся* последовательностей.

Упражнения

935. Какие из данных последовательностей являются возрастающими, какие убывающими и какие колеблющимися:

а) $1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots$;

б) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$;

в) $\sin 1, \sin 2, \sin 3, \ldots, \sin n, \ldots$;

г) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}, \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}, \operatorname{tg}\frac{\pi}{9}, \ldots, \operatorname{tg}\frac{\pi}{3n}, \ldots$;

д) $1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$;

е) $1; -0{,}1; 0{,}01; -0{,}001; \ldots; (-0{,}1)^{n-1}; \ldots$.

936. Доказать, что последовательность с общим членом $a_n = \frac{2n}{2n+1}$ является возрастающей.

937. Доказать, что последовательность с общим членом $a_n = \frac{2n+3}{6n-5}$ является убывающей.

938. Какому условию должны удовлетворять положительные числа a, b, c и d, чтобы последовательность с общим членом $a_n = \frac{an+b}{cn+d}$ была монотонно возрастающей?

939. Доказать, что последовательность с общим членом $a_n = \left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^n$, где a — некоторое положительное число, отличное от 1, является монотонно возрастающей.

Ограниченные и неограниченные числовые последовательности § 129

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной сверху, если все ее члены меньше некоторого числа A:

$$a_n < A \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Примером такой последовательности может служить последовательность

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots,$$

все члены которой меньше 1:

$$a_n < 1.$$

Здесь в роли A выступает число 1. Вместо него можно было бы выбрать 2, 3, $\frac{5}{2}$ и т. д., поскольку любое число рассматри-

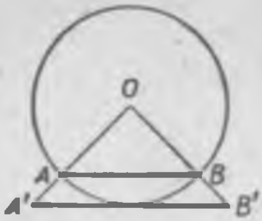


Рис. 200.

ваемой последовательности меньше каждого из этих чисел. Важно не то, какое число выбрано в качестве A, а то, что хотя бы одно такое число *существует*.

Важным примером последовательности, ограниченной сверху, служит последовательность

$$p_4,\ p_8,\ p_{16},\ p_{32},\ \dots \qquad (1)$$

периметров правильных 4-, 8-, 16-угольников и т. д., в п и с а н н ы х в одну и ту же окружность. Для доказательства ограниченности этой последовательности мы поступим следующим образом. Наряду с данной последовательностью рассмотрим последовательность

$$P_4,\ P_8,\ P_{16},\ P_{32},\ \dots \qquad (2)$$

периметров правильных 4-, 8-, 16-угольников и т. д., о п и с а н н ы х около той же самой окружности. Очевидно, что сторона AB правильного 2^n-угольника, вписанного в окружность, меньше стороны $A'B'$ правильного 2^n-угольника, описанного около этой окружности (рис. 200). Поэтому

$$p_{2^n} < P_{2^n}\ . \qquad (3)$$

Как было отмечено в предыдущем параграфе, последовательность (2) является монотонно убывающей. Поэтому каждый член этой последовательности, начиная со второго, меньше первого члена P_4. Следовательно, для любого $n > 2$

$$P_{2^n} < P_4. \qquad (4)$$

Из (3) и (4) вытекает, что

$$p_{2^n} < P_4.$$

Но $P_4 = 8\,r$, где r — радиус окружности. Итак, для всех $n > 2$

$$p_{2^n} < 8r.$$

Это неравенство и говорит о том, что последовательность (1) ограничена сверху. Роль A в данном случае играет число $8\,r$.

Если члены ограниченной сверху числовой последовательности изобразить точками числовой прямой, то все точки расположатся левее точки с абсциссой A (рис. 201).

Рис. 201.

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной снизу, если все ее члены больше некоторого числа B:

$$a_n > B \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Примером такой последовательности может служить натуральный ряд чисел

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots .$$

Он ограничен снизу, так как все его члены больше нуля ($B = 0$). В качестве B можно было бы указать и любое отрицательное число или $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и т. д. Как и в случае последовательности, ограниченной сверху, здесь важно не то, какое число выбрать в качестве B, а то, что хотя бы одно такое число *существует*.

Важным примером последовательнссти, ограниченной снизу, является последовательность

$$P_4, P_8, P_{16}, \ldots$$

периметров правильных 4-, 8-, 16-угольников и т. д., описанных около окружности. В этом легко убедиться с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые мы проводили выше при исследовании последовательности

$$p_4, p_8, p_{16} \ldots .$$

Если члены ограниченной снизу числовой последовательности изобразить точками числовой прямой, то все точки расположатся правее точки с абсциссой B (рис. 202).

Числовая последовательность, ограниченная одновременно и снизу, и сверху, называется ограниченной.

Другими словами, *числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется ограниченной, если существуют числа A и B такие, что при любом n*

$$A < a_n < B \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Очевидно, что все точки числовой оси, соответствующие членам такой числовой последовательности, заключены в отрезке, концы которого имеют абсциссы A и B (рис. 203).

Примеры.

1) $\sin 1, \sin 2, \sin 3, \ldots \sin n, \ldots .$

Для этой последовательности $a_n = \sin n$. При любом n

$$-2 < \sin n < 2.$$

Поэтому данная числовая последовательность ограничена.

2) 1,4; 1,41; 1,414, 1,4142; ... .

Рис 202.

Рис. 203.

Члены этой последовательности представляют собой десятичные приближения числа $\sqrt{2}$. Очевидно, что $1 < a_n < 2$, так что эта последовательность также ограничена.

3) Ограниченными будут, очевидно, и рассмотренные выше последовательности:

$$p_4, p_8, p_{16}, p_{32}, \ldots,$$
$$P_4, P_8, P_{16}, P_{32}, \ldots,$$

составленные из периметров правильных 2^n-угольников, вписанных и описанных около некоторой окружности.

Упражнения

940. Выяснить, какие из данных последовательностей ограничены и какие не ограничены:

а) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots;$

б) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{2n-1}{2n}, \ldots;$

в) $2, -3, 4, -5, \ldots, (-1)^{n+1}(n+1), \ldots;$

г) $\frac{\sin 1}{1}, -\frac{\sin 2}{2}, \frac{\sin 3}{3}, \ldots, \frac{(-1)^{n-1}\sin n}{n}, \ldots.$

941. Приведите пример последовательности, которая была бы:
а) ограниченной сверху, но не ограниченной снизу;
б) ограниченной снизу, но не ограниченной сверху;
в) не ограниченной ни сверху, ни снизу.

942*. Доказать, что последовательность с общим членом

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

является неограниченной

Предел бесконечной числовой последовательности § 130

Рассмотрим бесконечную числовую последовательность

$$1 + \frac{1}{1}, \quad 1 - \frac{1}{2}, \quad 1 + \frac{1}{3}, \quad 1 - \frac{1}{4}, \ldots$$

с общим членом

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Будем изображать члены этой последовательности точками на числовой прямой (рис. 204). Понятно, что все последовательные точки с ростом n то слева, то справа все ближе и ближе подходят к точке с абсциссой 1. Алгебраически это означает, что абсолютная величина разности $a_n - 1$ с ростом n становится все меньше и меньше, неограниченно приближаясь к нулю.

Действительно,

$$|a_n - 1| = \left| 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| = \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \frac{1}{n}.$$

Поэтому для всех членов, начиная со 101-го, эта абсолютная величина меньше 0,01; для всех членов, начиная с 1001-го, она

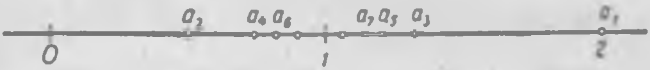


Рис. 204.

меньше 0,001 и т. д. Вообще, какое бы малое положительное число ε мы ни выбрали (например, $\varepsilon = 0{,}01$; $0{,}001$), всегда можно указать номер N такой, что для всех $n > N$ будет выполняться неравенство

$$|a_n - 1| < \varepsilon.$$

Это неравенство эквивалентно двойному неравенству

$$-\varepsilon < a_n - 1 < \varepsilon,$$

из которого вытекает, что

$$1 - \varepsilon < a_n < 1 + \varepsilon.$$

Итак, при любом $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, начиная с которого все члены нашей последовательности лежат в интервале от $1 - \varepsilon$ до $1 + \varepsilon$ (рис. 205). В таких случаях говорят, что

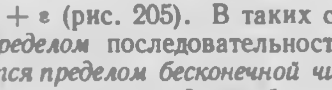


Рис. 205

число 1 является *пределом* последовательности.

Число a называется пределом бесконечной числовой последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, если для любого положительного числа ε существует номер N такой, что все члены последовательности, начиная с a_{N+1}, попадают в интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Другими словами, *число a называется пределом бесконечной числовой последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, если для любого* *положительного числа* ε *существует номер* N *такой, что для всех* $n > N$

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Тот факт, что a есть предел числовой последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, записывается следующим образом:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

(читается: предел* a_n при n, стремящемся к бесконечности, равен a).

Результат, полученный в начале этого параграфа, мы можем записать теперь в виде:

$$\lim_{n \to \infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right] = 1.$$

Примеры § 131

Рассмотрим несколько примеров на вычисление пределов бесконечных числовых последовательностей.

Пример 1. Доказать, что предел числовой последовательности

$$1, \ \frac{4}{3}, \ \frac{6}{4}, \ \frac{8}{5}, \ \ldots, \ \frac{2n}{n+1}, \ \ldots$$

равен 2:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n}{n+1} = 2.$$

Имеем:

$$|a_n - 2| = \left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{2n - 2n - 2}{n+1}\right| = \left|\frac{-2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1}.$$

Отсюда видно, что с ростом n абсолютная величина $a_n - 2$ становится и остается сколь угодно малой.

Например, при $n > 20$ эта абсолютная величина меньше 0,1, при $n > 200$ она меньше 0,01 и т. д. Вообще, как бы мало ни было положительное число ε, всегда можно найти номер N такой, что для всех $n > N$ будет выполняться неравенство

$$|a_n - 2| < \varepsilon.$$

В самом деле, $|a_n - 2| = \frac{2}{n+1}$. Поэтому написанное выше неравенство можно переписать в виде

$$\frac{2}{n+1} < \varepsilon,$$

* lim — первые три буквы латинского слова *limes*, что по-русски означает: предел, граница.

откуда

$$n+1>\frac{2}{\varepsilon},\ n>-1+\frac{2}{\varepsilon}.$$

Если, например, мы хотим, чтобы $|a_n-2|$ было меньше, чем $\varepsilon=0{,}1$, то n нужно выбирать из условия

$$n>-1+\frac{2}{0{,}1},$$

то есть начиная с $n=20$. При $\varepsilon=0{,}001$ мы получили бы

$$n>-1+\frac{2}{0{,}001}.$$

Следовательно, условие $|a_n-2|<0{,}001$ выполняется для всех n, начиная с $n=2000$ и т. д.

Если бы мы стали изображать члены рассматриваемой числовой последовательности точками числовой прямой (рис. 206), то заметили бы, что с ростом n они все ближе и ближе слева

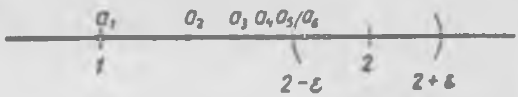


Рис. 206.

подходят к точке с абсциссой 2. Для любого $\varepsilon>0$ можно указать такой номер N, начиная с которого все точки будут находиться в интервале $(2-\varepsilon,\ 2)$. Но в таком случае можно сказать, что все они будут находиться и в интервале $(2-\varepsilon,\ 2+\varepsilon)$. Это служит геометрической иллюстрацией того, что предел данной числовой последовательности равен 2.

П р и м е р 2. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|=\frac{|\sin n|}{n}\leqslant\frac{1}{n}.$$

Выражение $\frac{1}{n}$, а вместе с ним и $\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|$, с ростом n принимает все меньшие и меньшие значения. Поэтому, как бы мало ни было положительное число ε, можно указать такой номер N, что для всех $n>N$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|<\varepsilon.$$

В частности, можно добиться, чтобы было

$$\left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| < 0{,}01 \qquad (\varepsilon = 0{,}01),$$

$$\left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| < 0{,}001 \qquad (\varepsilon = 0{,}001)$$

и т. д. Но в таком случае

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Упражнения

Исходя из определения предела, доказать следующие соотношения (№ 943—946):

943. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n}{n+1} = 3.$

944. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1-n^2}{1+n^2} = -1.$

945. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\cos n}{n} = 0.$

946. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sin n + \cos n}{n} = 0.$

В упражнениях 947—950 указаны общие члены числовых последовательностей. Для каждой из этих последовательностей найти предел a и определить номер N так, чтобы для всех $n > N$ выполнялось неравенство $|a_n - a| < 0{,}01$.

947. $a_n = \frac{1-n}{1+n}.$

948. $a_n = \frac{n}{2n+1}.$

949. $a_n = \frac{\cos n}{n}.$

950. $a_n = \frac{\sin n - \cos n}{n}.$

Сходящиеся и расходящиеся числовые последовательности § 132

Теорема. ***Числовая последовательность не может иметь более одного предела.***

Для доказательства предположим противное. Пусть некоторая числовая последовательность a_1, a_2, a_3, ... имеет несколько

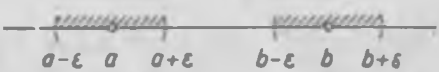


Рис. 207.

пределов. Допустим, что a и b — два таких предела. Для определенности будем считать, что $a < b$. Выберем положительное число ε так, чтобы отрезки $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ и $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ не перекрывались друг с другом* (рис. 207). Тогда все числа нашей последовательности, начиная с некоторого, должны находиться, с одной стороны, в отрезке $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, а с другой — в отрезке $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Но это невозможно, так как эти отрезки не перекрываются. Получено противоречие; значит, предположение о существовании двух различных пределов неверно.

Итак, любая числовая последовательность может иметь не более одного предела. А каждая ли числовая последовательность

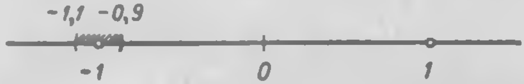


Рис. 208.

имеет предел? Чтобы выяснить этот вопрос, рассмотрим последовательность

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots$$

с общим членом

$$a_n = (-1)^n$$

Каждый ее член, стоящий на нечетном месте, изобразится на числовой прямой точкой с абсциссой -1, а каждый член, стоящий на четном месте, — точкой с абсциссой 1. Уже отсюда ясно, что если только эта последовательность имеет предел, то он равен либо -1, либо 1. Пусть, например, предел существует и равен -1. Тогда все члены последовательности, начиная с некоторого, должны укладываться, например, в интервале $(-1 - 0{,}1;\ -1 + 0{,}1)$, или $(-1{,}1;\ -0{,}9)$, что соответствует числу $\varepsilon = 0{,}1$ (рис. 208). Но это не так, поскольку члены, равные 1,

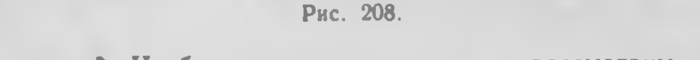


Рис. 209.

не попадают в этот интервал. Аналогично доказывается, что и 1 не является пределом рассматриваемой последовательности.

Таким образом, последовательность $-1;\ 1;\ -1;\ 1;\ \ldots$ не имеет предела.

Рассмотрим еще один пример — натуральный ряд чисел

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots\ .$$

Точки числовой прямой, соответствующие членам этой последовательности (рис. 209), не скапливаются ни у какой точки. Какую бы точку на числовой прямой мы ни взяли, точки,

* В качестве такого ε можно, например, взять

$$\varepsilon = \frac{b-a}{4}.$$

соответствующие натуральному ряду чисел, рано или поздно «перешагнут» через нее и уйдут как угодно далеко вправо. Следовательно, натуральный ряд чисел также не имеет предела.

Числовая последовательность, имеющая предел, называется сходящейся, а не имеющая предела — расходящейся.

Например, последовательности

$$1, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{6}{4}, \quad \frac{8}{5}, \ \dots, \ \frac{2n}{n+1}, \ \dots$$

и

$$\frac{\sin 1}{1}, \quad \frac{\sin 2}{2}, \quad \frac{\sin 3}{3}, \ \dots, \ \frac{\sin n}{n}, \ \dots$$

(см. примеры 1 и 2, § 131) являются сходящимися, а последовательности

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots,$$
$$1, 2, 3, 4, \dots$$

— расходящимися.

Упражнение

951. Какие из данных последовательностей являются сходящимися и какие расходящимися:

а) $2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$;

б) $1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots$;

в) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{(-1)^n}{2n}, \dots$;

г) $0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, \dots$;

д) $\frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{9}, \dots, \frac{(-1)^{n-1}}{5+n}, \dots$.

Монотонные и ограниченные последовательности § 133

В предыдущем параграфе мы убедились, что не всякая числовая последовательность имеет предел. Теперь возникает вопрос: как же решить, является ли та или иная последовательность сходящейся? Полное решение этой задачи выходит далеко за пределы школьной программы. Однако с одним довольно широким классом сходящихся числовых последовательностей мы познакомимся в этом параграфе. Справедливы следующие теоремы, которые мы приводим без доказательства.

Теорема 1. ***Всякая монотонно возрастающая (неубывающая) и ограниченная сверху числовая последовательность сходится.***

Теорема 2. ***Всякая монотонно убывающая (невозрастающая) и ограниченная снизу числовая последовательность сходится.***

Поясним эти теоремы на двух частных примерах.

Пример 1. Последовательность

$$1; \quad 1{,}4; \quad 1{,}41; \quad 1{,}414; \quad 1{,}4142; \ldots$$

составлена из десятичных приближений числа $\sqrt{2}$ с недостатком. Эта последовательность является монотонно возрастающей (точнее, монотонно неубывающей), поскольку каждый ее член, начиная со второго, получается из предыдущего путем приписывания соответствующего десятичного знака. Вместе с тем эта последовательность ограничена сверху, так как любой ее член меньше двух. Следовательно, по теореме 1 данная последовательность имеет предел. (Этим пределом является иррациональное число $\sqrt{2}$.)

Пример 2. Последовательность

$$p_4, \; p_8, \; p_{16}, \; \ldots$$

периметров правильных 4-, 8-, 16-угольников и т. д., вписанных в некоторую окружность, является монотонно возрастающей (см. § 128) и ограниченной сверху (см. § 129). Следовательно, по теореме 1 существует предел этой последовательности. (К этому пределу мы еще вернемся в последующих параграфах.)

К аналогичному результату можно прийти, рассматривая последовательность

$$P_4, \; P_8, \; P_{16}, \; \ldots$$

периметров правильных 4-, 8-, 16-угольников и т. д., описанных около некоторой окружности. Для этого придется использовать теорему 2.

В заключение отметим, что иногда указанные две теоремы объединяют в одну:

Любая монотонная и ограниченная числовая последовательность имеет предел.

Упражнения

952. Докажите, что последовательность

$$2, \; \frac{3}{2}, \; \frac{4}{3}, \; \ldots, \; \frac{n+1}{n}, \; \ldots$$

монотонно убывает и ограничена снизу. Покажите, что пределом этой последовательности является число 1.

953. Доказать, что последовательность

$$s_4, \; s_8, \; s_{16}, \; s_{32}, \; \ldots$$

площадей правильных 4-, 8-, 16-, 32-угольников и т. д., вписанных в одну и ту же окружность, яляется монотонно возрастающей и ограниченной.

Рассмотрим бесконечную числовую последовательность

$$\left(1+\frac{1}{1}\right), \quad \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \quad \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \quad \ldots \tag{1}$$

с общим членом

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Покажем, что эта последовательность является монотонно возрастающей и ограниченной.

1) Применим теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом (см. гл. I, § 16) к $n+1$ числу

$$\left(1+\frac{1}{n}\right), \quad \left(1+\frac{1}{n}\right), \quad \ldots, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right), \quad 1;$$

получим:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)n+1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1},$$

или

$$\frac{n+2}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Возводя обе части последнего неравенства в $(n+1)$-ю степень, получаем

$$\left(1+\frac{1}{1+n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

или

$$a_{n+1} > a_n.$$

Тем самым доказано, что рассматриваемая последовательность является монотонно возрастающей.

2) Теперь докажем, что наша последовательность является ограниченной. Для этого рассмотрим еще одну последовательность:

$$\left(1-\frac{1}{1}\right), \quad \left(1-\frac{1}{2}\right)^2, \quad \left(1-\frac{1}{3}\right)^3, \quad \ldots \tag{2}$$

с общим членом

$$b_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

Аналогично тому, как мы доказали монотонность последовательности (1), может быть доказана и монотонность последовательности (2):

$$b_{n+1} > b_n.$$

Далее

$$a_n \cdot b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n < 1.$$

Поэтому для всех $n > 1$

$$a_n < \frac{1}{b_n}.$$

Так как последовательность (2) монотонно возрастает, все ее члены, начиная с третьего, больше второго члена. Поэтому для всех $n \geqslant 3$

$$b_n > b_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, для всех $n \geqslant 3$

$$a_n < \frac{1}{b_2} < 4.$$

Это неравенство верно и при $n = 1$ и $n = 2$, так что для всех натуральных n

$$0 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 4.$$

Тем самым доказана ограниченность последовательности (1).

Теперь на основании теоремы о пределе монотонной ограниченной последовательности можно заключить, что предел последовательности (1) существует. Этот предел принято обозначать буквой e:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{3}$$

Подсчитано, что $e = 2{,}7182818284\ldots$.

Иногда для запоминания того или иного числа цифры этого числа связывают с какой-нибудь знаменательной датой. Легко, например, запомнить первые девять знаков числа e после запятой, если обратить внимание на то, что 1828 — это год рождения Льва Толстого.

Число e является иррациональным. Более того, как показал французский математик Э р м и т (1822—1901), это число не может быть корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами. Такие иррациональные числа называются *трансцендентными* (см. гл. II).

Предел (3) является одним из тех замечательных пределов, которые лежат в основе многих математических исследований. Число e играет особую роль в математике. Однако, если бы мы захотели убедиться в этом, нам пришлось бы заняться уже высшей математикой.

Переменные величины и их пределы § 135

Общий член любой числовой последовательности можно рассматривать как переменную величину. Например, последовательность

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots$$

имеет общий член $a_n = \dfrac{1}{n}$. При разных значениях n величина a_n принимает разные числовые значения и потому является *переменной величиной*.

Итак, с каждой числовой последовательностью можно связать некоторую переменную величину. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Например, с переменной величиной t, представляющей собой время, нельзя связать никакую числовую последовательность. Члены числовой последовательности изменяются скачками. Если мы будем изображать члены последовательности точками числовой прямой, то всю числовую прямую при этом мы не заполним (рис. 210).

Рис. 210.

А вот со временем дело обстоит иначе. Время течет н е п р е р ы в н о. Поэтому все моменты времени нельзя занумеровать как члены некоторой числовой последовательности.

В этой главе мы будем изучать лишь такие переменные величины, которые можно рассматривать как общие члены некоторых числовых последовательностей. Такие переменные величины мы будем обозначать символами a_n, b_n, c_n и т. д.

Пределом переменной величины a_n называется предел числовой последовательности, для которой a_n есть общий член.

Например, предел переменной величины

$$a_n = \frac{1}{n}$$

есть по определению предел последовательности

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n}, \quad \ldots .$$

Очевидно, что предел переменной величины можно определить и таким образом.

Число a называется пределом переменной величины a_n, если для любого положительного числа ε можно указать номер N такой, что для всех $n > N$

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Так же как и числовые последовательности, переменные величины могут иметь, а могут и не иметь предела. Например, переменная величина $a = \frac{\sin n}{n}$ (см. § 131, пример 2) имеет предел, а переменная величина $a_n = (-1)^n$ (см. § 132) не имеет предела.

Над переменными величинами можно производить те же самые действия, что и над постоянными величинами (то есть числами).

Например, умножив переменную величину $a_n = \frac{1}{n}$ на 3, получим переменную величину $b_n = \frac{3}{n}$.

При сложении переменных величин $a_n = -\frac{1}{n+1}$ и $b_n = \frac{1}{n}$ получается переменная величина $c_n = a_n + b_n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}$.

Основные теоремы о пределах § 136

Как было отмечено в предыдущем параграфе, не всякая переменная величина a_n имеет предел при $n \to \infty$. В этом параграфе мы будем рассматривать только такие переменные величины, пределы которых существуют. Для таких величин мы без доказательства укажем несколько важных теорем.

Теорема 1. ***Предел константы равен самой этой константе***:

$$\lim_{n \to \infty} c = c.$$

Говоря о пределе константы c, мы имеем в виду предел числовой последовательности

$$c, c, c, \ldots, c, \ldots,$$

все члены которой равны одному и тому же числу c.

Теорема 2. ***Постоянный множитель можно выносить за знак предела:***

$$\lim_{n \to \infty} (ka_n) = k \cdot \lim_{n \to \infty} a_n.$$

Пример. В § 130 было доказано, что

$$\lim_{n \to \infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right] = 1.$$

Поэтому

$$\lim_{n \to \infty} \left\{5\left[1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]\right\} = 5 \lim_{n \to \infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right] = 5 \cdot 1 = 5.$$

Теорема 3. ***Предел суммы двух переменных величин равен сумме пределов этих величин***:

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n.$$

П р и м е р. В § 130 и 132 было доказано, что

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]=1, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\frac{\sin n}{n}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]+\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=1+0=1.$$

Данная теорема верна не только для двух, но и для произвольного фиксированного числа слагаемых. Например,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n+c_n+d_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n+\lim_{n\to\infty}c_n+\lim_{n\to\infty}d_n.$$

Т е о р е м а 4. ***Предел произведения двух переменных величин равен произведению пределов этих величин:***

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n.$$

П р и м е р.

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\sin n}{n}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]=0\cdot 1=0.$$

И эта теорема верна не только для двух, но и для произвольного фиксированного числа сомножителей. Например,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n\cdot c_n\cdot d_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n\cdot\lim_{n\to\infty}c_n\cdot\lim_{n\to\infty}d_n.$$

Т е о р е м а 5. ***Предел дроби равен частному от деления предела числителя на предел знаменателя, если только предел знаменателя отличен от нуля:***

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}\quad\left(\lim_{n\to\infty}b_n\neq 0\right).$$

П р и м е р. Пусть

$$a_n=\frac{\sin n}{n},\quad b_n=1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{0}{1}=0.$$

Заметим, что писать

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}$$

в данном случае нельзя, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Следует отметить, что, хотя доказательство приведенных теорем выходит за пределы школьной программы, некоторые ученики в состоянии доказать их. Поэтому тем учащимся, которые проявляют к математике особый интерес, мы предлагаем попытаться доказать эти теоремы. А теорему 1 должны доказать все.

Замечание. Необходимо напомнить соглашение, которое мы приняли в начале данного параграфа. Мы условились считать, что все рассматриваемые нами переменные величины имеют пределы. Если же это не так, то приведенные выше теоремы теряют смысл. Например, нельзя писать (см. теорему 2)

$$\lim_{n \to \infty} 5n^2 = 5 \lim_{n \to \infty} n^2,$$

поскольку предел $\lim\limits_{n \to \infty} n^2$, очевидно, не существует.

В заключение мы рассмотрим пример на вычисление предела переменной величины с использованием приведенных выше теорем. Пусть требуется найти

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 2n - 1}{3n^2 - n + 5}.$$

Разделим числитель и знаменатель данной дроби на n^2. В результате получим:

$$\frac{n^2 + 2n - 1}{3n^2 - n + 5} = \frac{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{3 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}.$$

Теперь, используя приведенные выше теоремы, получаем:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 2n - 1}{3n^2 - n + 5} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n \to \infty} \left(3 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{1 + 2 \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} - \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2}}{3 - \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} + 5 \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{1 + 2 \cdot 0 - 0}{3 - 0 + 5 \cdot 0} = \frac{1}{3}.$$

Здесь мы воспользовались очевидными равенствами:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Упражнения

Найти пределы:

954. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{-n^2 + 3}{2n^2 - 6n + 5}$.

955. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n^2 - n}{n^2 - 5}$.

956. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-7}{n^2+7n-9}$.

957. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(1-n)}{(n+1)(n-2)}$.

958. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1\,000\,000}{n^2+1}$.

959. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1n^2+b_1n+c_1}{a_2n^2+b_2n+c_2}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ при $|q|<1$ § 137

В этом параграфе мы докажем, что если $|q|<1$, то предел

$$\lim_{n\to\infty} q^n$$

существует и равен нулю. Нам придется рассмотреть отдельно два случая: $q>0$ и $q<0$.

Случай 1. $0<q<1$. Прежде всего заметим, что $\lim q^n$ является пределом числовой последовательности

$$q,\ q^2,\ q^3,\ \ldots,\ q^n,\ \ldots . \tag{1}$$

Эта последовательность при $0<q<1$ будет монотонно убывающей ($q^{n+1}<q^n$) и ограниченной ($0<q^n<1$). Поэтому она имеет предел. Обозначим этот предел буквой c и докажем, что $c=0$.

Если из последовательности (1) выбросить первый член, то получится последовательность

$$q^2,\ q^3,\ q^4,\ \ldots,\ q^{n+1},\ \ldots, \tag{2}$$

которая, очевидно, имеет тот же самый предел c, что и последовательность (1). Общий член последовательности (1) есть $a_n=q^n$, а последовательности (2) $b_n=q^{n+1}$.

Имеем:

$$\lim_{n\to\infty} q^n=c,$$

$$\lim_{n\to\infty} q^{n+1}=c.$$

Но $q^{n+1}=q\cdot q^n$. Поэтому

$$c=\lim_{n\to\infty} q^{n+1}=\lim_{n\to\infty}(q\cdot q^n)=q\lim_{n\to\infty} q^n=qc.$$

Итак, $c=qc$, откуда $c=0$, поскольку $q\neq 1$. Таким образом, при $0<q<1$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ существует и равен нулю.

Случай 2. $-1<q<0$. Докажем, что и в этом случае

$$\lim_{n\to\infty} q^n$$

существует и равен 0. Имеем:

$$|q^n-0|=|q^n|=|q|^n.$$

Поскольку $|q| < 1$, то $|q|^n$ при возрастании n стремится к нулю (случай 1).

Следовательно, с ростом n выражение $|q^n|$ становится и остается меньше любого наперед заданного положительного числа. Поэтому, каково бы ни было положительное число ε, можно указать такой номер n, начиная с которого будет выполняться неравенство

$$|q^n - 0| < \varepsilon.$$

Но это и означает, что

$$\lim_{n \to \infty} q^n = 0.$$

Упражнения

960. Что вы можете сказать о пределе $\lim\limits_{n \to \infty} q^n$, если:

а) $|q| = 1$;
б) $|q| > 1$?

961. Существует ли $\lim\limits_{n \to \infty} q^n$ при

а) $q = \frac{\pi}{3}$; б) $q = -\frac{\pi}{4}$; в) $q = -2$; г) $q = \frac{a+1}{a-1}$?

Что такое длина окружности § 138

В главе II мы говорили о том, что такое длина прямолинейного отрезка. Чтобы измерить прямолинейный отрезок AB (рис. 211), нужно выбрать единицу измерения (например, отрезок CD) и сравнить AB с этой единицей измерения. *Длина отрезка AB есть число, показывающее, сколько раз единица измерения укладывается в этом отрезке.* А что понимать под длиной окружности? Ведь окружность — кривая линия, и откладывать на ней отрезок CD нельзя. Таким образом, мы сталкиваемся с необходимостью определить, что такое длина окружности.

Пусть

$$p_4, p_8, p_{16}, \dots, p_{2^{n+1}} \dots \qquad (1)$$

— последовательность периметров правильных 4-, 8-, 16-угольников и т. д., вписанных в окружность радиуса r. Как мы уже говорили раньше (§ 133), эта последовательность монотонно возрастает и ограничена. Поэтому существует предел

$$p = \lim_{n \to \infty} p_{2^{n+1}}.$$

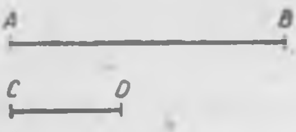


Рис. 211.

Этот предел мы и назовем *длиной окружности радиуса r.*

Впишем теперь в окружность радиуса r не 4-, 8-, 16-угольники и т. д., а, например, правильные 3-, 6-, 12-угольники и т. д., периметры которых образуют последовательность

$$p_3, p_6, p_{12}, \ldots, p_{3 \cdot 2^{n-1}}, \ldots . \qquad (2)$$

Эта последовательность также монотонно возрастает, ограничена и, следовательно, имеет предел

$$p' = \lim_{n \to \infty} p_{3 \cdot 2^{n-1}}.$$

Этот предел p', как и предел p, также естественно назвать длиной окружности. Но возникает вопрос: равны ли между собой числа p и p'? Ведь если бы эти числа оказались различными, то принятое нами определение длины окружности было бы неудачным.

Можно доказать, что числа p и p' равны между собой. Вообще, как бы мы ни вписывали в окружность правильные многоугольники, получая каждый последующий путем удвоения числа сторон предыдущего, последовательность периметров этих многоугольников всегда будет сходиться к одному и тому же числу, принимаемому за длину окружности. Более того, если каждый последующий многоугольник мы будем получать не обязательно путем удвоения числа сторон предыдущего, а каким-нибудь другим способом (например, вписывать правильные 3-, 4-, 5-, 6-угольники и т. д.), то все равно последовательность периметров этих многоугольников будет сходиться и притом к тому же самому числу p, что и последовательность (1).

Доказательство этих утверждений выходит за пределы школьной программы и потому здесь не приводится.

Итак, мы принимаем следующее определение длины окружности:

длина p окружности радиуса r есть предел последовательности

$$p_3, p_4, p_5, \ldots, p_n, \ldots$$

периметров правильных 3-, 4-, 5-угольников и т. д., вписанных в эту окружность:

$$p = \lim_{n \to \infty} p_n.$$

Упражнение

Рис. 212.

962. Теперь мы знаем, как определяются длины прямолинейных отрезков и окружностей. А как бы вы определили длину произвольной кривой (см., например, рис. 212)?

Лемма. ***Отношение длины окружности к ее диаметру постоянно для всех окружностей.***

Предположим, что A_1B_1 и A_2B_2 — стороны правильных n-угольников, вписанных в окружности O_1 и O_2 соответственно (рис. 213). Тогда треугольники $O_1A_1B_1$ и $O_2A_2B_2$, как треугольники с соответственно равными углами, будут подобны; поэтому

$$\frac{A_1B_1}{O_1A_1}=\frac{A_2B_2}{O_2A_2}.$$

Умножая обе части этого равенства на $\frac{n}{2}$, получим:

$$\frac{n\cdot A_1B_1}{2\cdot O_1A_1}=\frac{n\cdot A_2B_2}{2\cdot O_2A_2}.$$

Но $n\cdot A_1B_1=p_n'$, $n\cdot A_2B_2=p_n''$, где p_n' и p_n''—периметры правильных n-угольников, вписанных в окружности O_1 и O_2 соответственно. Следовательно,

$$\frac{p_n'}{2r_1}=\frac{p_n''}{2r_2}, \qquad (1)$$

где r_1 и r_2 — радиусы окружностей O_1 и O_2 соответственно.

Поскольку существуют пределы $p'=\lim\limits_{n\to\infty}p_n'$ и $p''=\lim\limits_{n\to\infty}p_n''$, то должны существовать и пределы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n'}{2r_1}=\frac{1}{2r_1}\cdot\lim_{n\to\infty}p_n'=\frac{p'}{2r_1};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{p_n''}{2r_2}=\frac{1}{2r_2}\cdot\lim_{n\to\infty}p_n''=\frac{p''}{2r_2}. \qquad (2)$$

В силу (1) эти пределы должны быть равны. Поэтому

$$\frac{p'}{2r_1}=\frac{p''}{2r_2}. \qquad (3)$$

Это равенство как раз и означает, что отношение длины окружности к ее диаметру постоянно для всех окружностей.

Отношение длины окружности к ее диаметру принято обозначать греческой буквой π («пи»). Подсчитано, что $\pi=3{,}141592\ldots$. Для практических потребностей достаточно запомнить лишь три-четыре цифры после запятой.

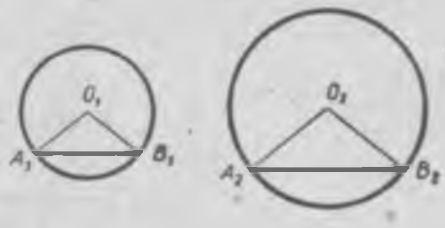


Рис. 213.

Итак, для окружности радиуса r

$$\frac{p}{2r} = \pi,$$

откуда

$$p = 2\pi r.$$

Длина окружности равна произведению ее диаметра на число π.

В разные времена использовались различные приближения числа π. Один из величайших математиков древней Греции Архимед (III век до н. э.) нашел довольно точное приближение для π: $3\frac{1}{7}$, что дает два верных десятичных знака. В XVI веке было получено приближенное значение π с 35 верными десятичными знаками, в XIX — с 527 верными десятичными знаками и т. д. Наибольшее число правильных десятичных знаков числа π (10 000) было получено с помощью счетной машины в 1958 году.

Швейцарский математик Ламберт (1728—1777) доказал, что число π является иррациональным. Немецкий ученый Линдеманн (1852—1939) усилил этот результат, доказав, что число π не может быть корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами. Такие иррациональные числа, как известно, называются *трансцендентными*.

Нахождение приближенных значений числа π — § 140

Для нахождения приближенных значений числа π представим это число в виде отношения $\frac{p}{2\cdot 1}$ длины окружности радиуса 1 к диаметру, то есть как половину длины окружности радиуса 1. Если вместо половины длины такой окружности взять половину периметра правильного n-угольника, вписанного в нее, то вместо точного значения π получится его приближенное значение. С ростом n это приближенное значение должно стремиться к точному значению. Следовательно,

$$\pi \approx \frac{p_n}{2},$$

где p_n — периметр правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса 1. Но $p_n = n \cdot a_n$, где a_n — сторона правильного n-угольника. Поэтому

$$\pi \approx \frac{n \cdot a_n}{2}. \qquad (1)$$

Теперь воспользуемся известной из геометрии формулой удвоения. Согласно этой формуле стороны a_n и a_{2n} правильных n- и $2n$-угольников, вписанных в окружность радиуса r, связаны соотношением

$$a_{2n}^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}.$$

При $r = 1$ это соотношение принимает вид:

$$a_{2n}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4}} \qquad (2)$$

Вспомним еще, что сторона a_6 правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна радиусу этой окружности. Поэтому по формуле (2) найдем:

$$a_{12}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = 2 - \sqrt{3},$$

откуда

$$a_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 0,51764.$$

Затем по формуле (2) найдем a_{24}:

$$a_{24}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_{12}^2}{4}} = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = 2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Отсюда $a_{24} \approx 0,26104$. Затем по формуле (2) можно найти a_{48}, a_{96} и т. д. После этого составим таблицу приближенных значений a_n и π:

n	a_n	$\pi \approx \frac{n \cdot a_n}{2}$
6	1,00000	3,000
12	0,51764	3,106
24	0,26104	3,132
48	0,13080	3,139
96	0,06542	3,140

Из этой таблицы видно, что уже при $n = 96$ получается два верных десятичных знака числа π.

Площадь круга § 141

Пусть s_4, s_8, s_{16}, ..., $s_{2^{n+1}}$, . . . — последовательность площадей правильных 4-, 8-, 16-угольников и т. д., вписанных в окружность радиуса r.

Легко показать, что последовательность эта монотонно возрастает, ограничена и, следовательно, имеет предел

$$s = \lim_{n \to \infty} s_{2^{n+1}}.$$

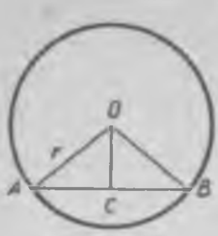


Рис. 214.

Можно доказать, что такой же предел имеет последовательность s_3, s_4, s_5 ... , s_n, ... площадей правильных 3-, 4-, 5-угольников и т. д., вписанных в ту же самую окружность. Этот предел по определению и принимается за площадь круга радиуса r.

Теперь выведем формулу для нахождения площади круга по его радиусу r. Пусть AB — сторона правильного n-угольника (рис. 214), вписанного в окружность радиуса r, p_n — периметр этого многоугольника, а s_n — его площадь. Имеем:

$$s_n = n \cdot s_{\triangle OAB} = n \cdot \frac{1}{2} AB \cdot OC,$$

но $n \cdot AB = p_n$. Поэтому

$$s_n = \frac{1}{2} p_n \cdot OC. \tag{1}$$

Покажем, что при $n \to \infty$ OC неограниченно приближается к r.

Действительно (см. рис. 214),

$$r - OC = OA - OC.$$

Из треугольника AOC получаем:

$$0 < OA - OC < AC = \frac{1}{2} AB$$

(разность двух сторон треугольника меньше третьей стороны). Поэтому $r - OC < \frac{1}{2} AB$. Но $AB = \frac{p_n}{n}$, $p_n < 2\pi r$. Следовательно, $0 < r - OC < \frac{1}{2} \cdot 2\pi \frac{r}{n} = \frac{\pi r}{n}$. При возрастании n дробь $\frac{\pi r}{n}$ становится сколь угодно малой. Поэтому $(OC - r)$ при $n \to \infty$ становится и остается меньше любого наперед заданного положительного числа ε:

$$|OC - r| < \varepsilon.$$

А это и означает, что предел OC при $n \to \infty$ равен r. Теперь из равенства (1) получаем:

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2} p_n \cdot OC\right) = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} (p_n \cdot OC) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} p_n \cdot \lim_{n \to \infty} OC = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi r^2.$$

Итак,

$$s = \pi r^2.$$

Площадь круга радиуса r равна произведению числа π на квадрат радиуса этого круга.

Рис. 215.

Упражнение

963. Какое определение вы предложили бы для площади, ограниченной произвольной замкнутой линией (см., например, рис. 215)?

Арифметическая прогрессия § 142

Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же для данной последовательности числом, называется арифметической прогрессией.

Примером арифметической прогрессии является натуральный ряд чисел

$$1, 2, 3, \ldots .$$

Каждое его число, начиная со второго, равно предыдущему, сложенному с единицей. Другим примером арифметической прогрессии может служить последовательность

$$3;\ 1,5;\ 0;\ -1,5;\ -3, \ldots$$

Каждый член этой последовательности, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с числом — 1,5.

Данное выше определение арифметической прогрессии эквивалентно, очевидно, такому определению: *числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется арифметической прогрессией, если для любого n*

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

где d — некоторое постоянное для данной последовательности число.

Это число d называется *разностью* прогрессии.

Например, для натурального ряда чисел d равно 1; для арифметической прогрессии 3; 1,5; 0; — 1,5; — 3; . . . разность d равна — 1,5.

Пусть a_1 — первый член арифметической прогрессии, а d — ее разность.

Тогда по определению арифметической прогрессии

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d \text{ и т. д.}$$

Очевидно, что при любом $n > 1$

$$a_n = a_1 + (n-1)d. \qquad (1)$$

К формуле (1) можно прийти другим путем, который, кстати, является и более строгим. По определению арифметической прогрессии

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + d,\\
a_3 &= a_2 + d,\\
a_4 &= a_3 + d,\\
&\dots\dots\dots\\
a_{n-1} &= a_{n-2} + d,\\
a_n &= a_{n-1} + d.
\end{aligned}
$$

Складывая почленно эти $n - 1$ равенств, получаем:

$$
\begin{gathered}
(a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1}) + a_n = \\
= a_1 + (a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1}) + (n-1)\,d,
\end{gathered}
$$

откуда и вытекает формула (1).

Формула (1) позволяет найти любой член арифметической прогрессии, если известны ее первый член и разность. Поэтому она называется *формулой общего члена арифметической прогрессии*. Например, для арифметической прогрессии

$$
\begin{gathered}
-10;\ -9{,}5;\ -9;\ \dots\\
a_1 = -10;\ d = 0{,}5.
\end{gathered}
$$

Поэтому

$$
\begin{aligned}
a_{21} &= a_1 + 20d = -10 + 10 = 0,\\
a_{100} &= a_1 + 99d = -10 + 49{,}5 = 39{,}5
\end{aligned}
$$

и т. д.

Упражнения

964. Найти формулу общего члена арифметической прогрессии, для которой:
а) $a_1 = 5, a_2 = -5$;
б) $a_1 = -3, a_2 = 0$;
в) $a_1 = 6, a_{10} = 33$;
г) $a_4 = -4, a_{17} = -17$;
д) $a_{10} = 0, a_{40} = -30$.

965. Если к членам одной арифметической прогрессии прибавить соответствующие (по номеру занимаемого места) члены другой арифметической прогрессии, то будет ли полученная последовательность арифметической прогрессией?

966. Доказать, что если числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{b+a}$ составляют арифметическую прогрессию, то числа a^2, b^2, c^2 также составляют арифметическую прогрессию.

967. Образуют ли арифметическую прогрессию положительные корни уравнения, расположенные в порядке возрастания:

а) $\sin x = 0$; б) $\sin x = \frac{1}{2}$; в) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$?

968. При каких значениях a корни данного уравнения

$$\cos x = a,$$

расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию?

Составить арифметические прогрессии по следующим данным:

969. $\begin{cases} a_2 + a_4 = 16, \\ a_1 \cdot a_5 = 28. \end{cases}$ **970.** $\begin{cases} a_2 \cdot a_{11} = 44, \\ a_2 + a_{10} = 24. \end{cases}$

Характеристическое свойство арифметической прогрессии § 143

Теорема. ***Каждый член арифметической прогрессии***

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots,$$

начиная со второго, равен среднему арифметическому соседних с ним членов.

Другими словами, при любом $n > 2$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}. \qquad (1)$$

Действительно, при любом $n > 2$

$$a_n = a_{n-1} + d,$$
$$a_n = a_{n+1} - d.$$

Почленное сложение этих равенств дает:

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1},$$

откуда и вытекает соотношение (1).

Верна и теорема, обратная к только что доказанной.

Если каждый член числовой последовательности, начиная со второго, равен среднему арифметическому соседних с ним членов, то такая числовая последовательность является арифметической прогрессией.

Попробуйте доказать это самостоятельно.

Отмеченное в этом параграфе свойство определяет, в частности, причину названия «арифметическая прогрессия».

Рассказывают, что однажды учитель начальной школы, желая занять класс на продолжительное время самостоятельной работой, дал детям «трудное» задание — вычислить сумму всех натуральных чисел от 1 до 100:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100.$$

Один из учеников моментально предложил решение. Вот оно:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 =$$
$$= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (49 + 52) + (50 + 51) =$$
$$= \underbrace{101 + 101 + \ldots + 101 + 101}_{50} = 101 \cdot 50 = 5050.$$

Это был Карл Г а у с с, ставший потом одним из самых знаменитых математиков мира*.

Идею такого решения можно использовать для нахождения суммы членов любой арифметической прогрессии.

Л е м м а. ***Сумма двух членов конечной арифметической прогрессии, равноудаленных от концов, равна сумме крайних членов.***

Например, в конечной арифметической прогрессии

$$1, 2, 3, \ldots, 98, 99, 100$$

члены 2 и 99, 3 и 98, 4 и 97 и т. д. являются равноудаленными от концов этой прогрессии. Поэтому их суммы $2 + 99$, $3 + 98$, $4 + 97$ равны сумме крайних членов $1 + 100$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Пусть в конечной арифметической прогрессии

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$$

два каких-нибудь члена одинаково удалены от концов. Предположим, что один из них есть k-й член слева, то есть a_k, а другой — k-й член справа, то есть a_{n-k+1}. Тогда

$$a_k + a_{n-k+1} = [a_1 + (k-1)d] + [a_1 + (n-k)d] = 2a_1 + (n-1)d.$$

Сумма крайних членов данной прогрессии равна

$$a_1 + a_n = a_1 + [a_1 + (n-1)d] = 2a_1 + (n-1)d.$$

Таким образом,

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n,$$

что и требовалось доказать.

* Подобный случай с Гауссом действительно имел место. Однако здесь он значительно упрощен. Предложенные учителем числа были пятизначными и составляли арифметическую прогрессию с трехзначной разностью.

Используя доказанную лемму, легко получить общую формулу для суммы n членов любой арифметической прогрессии. Имеем:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1.$$

Складывая эти два равенства почленно, получаем:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1),$$

но

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots .$$

Поэтому

$$2S_n = n(a_1 + a_n),$$

откуда

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Сумма членов конечной арифметической прогрессии равна произведению полусуммы крайних членов на число всех членов.

В частности,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = \frac{(1 + 100)\,100}{2} = 5050.$$

Упражнения

971. Найти сумму всех нечетных трехзначных чисел.

972. Сколько ударов сделают часы в течение суток, если они отбивают только число целых часов?

973. Чему равна сумма первых n чисел натурального ряда?

974. Вывести формулу длины пути, пройденного телом при равномерно ускоренном движении:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

где v_0 — начальная скорость в $\frac{м}{сек}$, a — ускорение в $\frac{м}{сек^2}$, t—время движения в *сек*.

975. Найти сумму всех несократимых дробей со знаменателем 3, заключенных между целыми положительными числами m и n $(m < n)$.

976. Рабочий обслуживает 16 ткацких станков, работающих автоматически. Производительность каждого станка $a\,\frac{м}{ч}$. Рабочий включил первый станок в 7 *ч*, а каждый следующий на 5 *мин* позже предыдущего. Узнать выработку в метрах за первые 2 *ч* работы.

977. Решить уравнения:

а) $1 + 7 + 13 + \ldots + x = 280;$

б) $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \ldots + (x + 28) = 155.$

978. С 1 по 12 июля включительно температура воздуха ежедневно поднималась в среднем на $\frac{1}{2}$ градуса. Зная, что средняя температура за это время оказалась равной $18\frac{3}{4}$ градуса, определить, какой была температура воздуха 1 июля.

979. Найти арифметическую прогрессию, у которой среднее арифметическое n первых членов при любом n равно их числу.

980. Найти сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, в которой

$$a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20.$$

Геометрическая прогрессия. Формула общего члена геометрической прогрессии — § 145

Геометрической прогрессией называется такая числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на некоторое постоянное для данной последовательности число, отличное от нуля.

Примеры геометрической прогрессии:

$$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ \ldots,$$

$$2,\ 8,\ 32,\ 128,\ \ldots,$$

$$12,\ -6,\ 3,\ -\frac{3}{2},\ \ldots,$$

$$\frac{1}{5},\ -\frac{2}{5},\ \frac{4}{5},\ -\frac{8}{5},\ \ldots.$$

В каждой из этих последовательностей любой член, начиная со второго, получается из предыдущего путем умножения в первом случае на $\frac{1}{3}$, во втором — на 4, в третьем — на $\left(-\frac{1}{2}\right)$, в четвертом — на (-2).

Геометрическую прогрессию, очевидно, можно определить и таким образом:

числовая последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ *называется геометрической прогрессией, если для любого* n

$$a_{n+1} = a_n \cdot q,$$

где q *— некоторое постоянное для данной последовательности и отличное от нуля число.*

Это число q называется *знаменателем* геометрической прогрессии.

Для приведенных выше примеров q равно в первом случае $\frac{1}{3}$, во втором 4, в третьем $-\frac{1}{2}$, в четвертом -2.

Геометрическая прогрессия называется *возрастающей*, если $|q| > 1$, и *убывающей*, если $|q| < 1$. Так, из приведенных выше геометрических прогрессий первая $\left(q = \frac{1}{3}\right)$ и третья $\left(q = -\frac{1}{2}\right)$ — убывающие, а вторая ($q = 4$) и четвертая ($q = -2$) — возрастающие.

Пусть знаменатель геометрической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$ равен q. Тогда по определению

$$a_2 = a_1 \cdot q,$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2,$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = (a_1 \cdot q^2) \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

и т. д. Очевидно, что при любом $n > 1$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \qquad (1)$$

то есть ***n-й член геометрической прогрессии равен произведению ее первого члена на знаменатель прогрессии в степени $n - 1$.***

Формула (1) называется *формулой общего члена геометрической прогрессии.*

Например, для геометрической прогрессии

$$12, \ -6, \ 3, \ -\frac{3}{2}, \ \ldots$$

$a_1 = 12$, $q = -\frac{1}{2}$. Поэтому

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{3}{(-2)^7} = -\frac{3}{128};$$

$$a_{101} = a_1 \cdot q^{100} = 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{100} = \frac{3}{2^{98}}$$

и т. д.

Упражнения

981. Написать формулу общего члена геометрической прогрессии, в которой:

а) $a_1 = 2, \quad a_2 = \frac{1}{2}$;

б) $a_1 = 3, \quad a_4 = -\frac{1}{3}$;

в) $a_3 = a_5 = -1$;

г) $a_4 = -54$, $a_5 = 162$;

д) $a_1 = \sin\varphi$, $a_2 = 2\sin\varphi$;

е) $a_1 = \operatorname{tg}\varphi$, $a_2 = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi$;

ж) $a_1 = \operatorname{tg}\varphi$, $a_2 = 1$;

з) $a_1 = 1$, $a_4 = 8$.

982. Получить формулу общего члена геометрической прогрессии путем почленного умножения равенств:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q, \\ a_3 &= a_2 \cdot q, \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q. \end{aligned}$$

(Сравните с арифметической прогрессией, § 142.)

Составить геометрические прогрессии по следующим данным (№ 983, 984):

983. $\begin{cases} a_2 - a_1 = -4, \\ a_3 - a_1 = 8. \end{cases}$ 984. $\begin{cases} a_4 + a_1 = \frac{7}{16}, \\ a_3 - a_2 + a_1 = \frac{7}{8}. \end{cases}$

985. Найти формулу, выражающую произведение n первых членов геометрической прогрессии через ее первый член и знаменатель.

986. Если все члены геометрической прогрессии умножить на соответствующие (по номеру занимаемого места) члены другой геометрической прогрессии, то будет ли полученная последовательность геометрической прогрессией?

987. Две геометрические прогрессии почленно сложили. В каком случае полученная последовательность будет геометрической прогрессией?

988. Доказать, что в конечной геометрической прогрессии произведение членов, равноудаленных от концов, равно произведению крайних членов.

Характеристическое свойство геометрической прогрессии с положительными членами § 146

Для любой геометрической прогрессии с положительными членами верна следующая теорема, которая, в частности, объясняет название «геометрическая прогрессия».

Теорема. ***Любой член геометрической прогрессии с положительными членами***

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots,$$

начиная со второго, равен среднему геометрическому соседних с ним членов.

Другими словами, при $n > 2$

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}. \qquad (1)$$

Действительно, при $n > 2$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q,$$

$$a_n = \frac{a_{n+1}}{q}.$$

Поэтому

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1},$$

откуда и вытекает равенство (1).

На геометрические прогрессии, содержащие отрицательные члены, эта теорема не распространяется: ведь среднее геометрическое определено только для положительных чисел.

Верна и теорема, обратная к только что доказанной.

Если каждый член числовой последовательности с положительными членами, начиная со второго, равен среднему геометрическому соседних с ним членов, то такая последовательность является геометрической прогрессией.

Попробуйте доказать это самостоятельно!

Сумма членов геометрической прогрессии § 147

Пусть S_n есть сумма n членов геометрической прогрессии $a_1, a_1q, a_1q^2, \ldots$:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}. \quad (1)$$

Если знаменатель прогрессии q равен 1, то $S_n = n \cdot a_1$. Если же он отличен от 1, то поступим следующим образом. Умножим равенство (1) почленно на q; в результате получим:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^n. \quad (2)$$

Затем вычтем почленно из равенства (1) равенство (2):

$$S_n - qS_n = a_1 + (a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}) - (a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^{n-1}) - a_1q^n = a_1 - a_1q^n = a_1(1 - q^n).$$

Итак,

$$(1 - q) S_n = a_1 (1 - q^n),$$

откуда

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}. \quad (3)$$

Таким образом, ***если знаменатель геометрической прогрессии не равен единице, то сумма n первых членов этой прогрессии равна дроби, в числителе которой стоит произведение первого члена на единицу минус n-я степень знаменателя прогрессии, а в знаменателе дроби — единица минус знаменатель прогрессии.***

П р и м е р ы.

$$1)\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{10}}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2^{10}-1}{2^{10}}=\frac{1023}{1024};$$

$$2)\ 1-3+3^2-3^3+\ldots+3^8=\frac{1\cdot(1-(-3)^9)}{1-(-3)}=\frac{1+3^9}{4}=4921.$$

Существует предание, по которому индийский принц Сирам (VI век) предложил изобретателю шахмат любую награду, которую только тот захочет. Изобретатель попросил, чтобы за первую клетку шахматной доски ему дали одно пшеничное зерно, за вторую — два, за третью — четыре и т. д.—за каждую следующую клетку вдвое больше, чем за предыдущую. Такое «скромное» желание удивило принца, но он согласился. Когда же подсчитали количество зерен пшеницы, которое следовало выдать за все 64 клетки шахматной доски, то оказалось, что награда в этом размере не может быть выдана. Действительно, требуемое количество зерен равно:

$$1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{63}=\frac{1\cdot(1-2^{64})}{1-2}=2^{64}-1=18446744073709551615.$$

Если бы такое число зерен равномерно рассыпать по всей земной суше, то образовался бы слой пшеницы толщиной около 9 *мм*.

Упражнения

989. Найти суммы:

а) $1+2+2^2+\ldots+2^{10}$;

б) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\ldots-\frac{1}{2^{10}}$;

в) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^{10}}$;

г) $1-2+2^2-2^3+\ldots+2^{12}$;

д) $1+x+x^2+\ldots+x^{100}$;

е) $x-x^3+x^5-\ldots+x^{13}$.

990. За одно качание воздушный насос откачивает $\frac{1}{10}$ часть воздуха. Сколько процентов воздуха останется после 10 качаний?

991. Бактерия, попав в живой организм, к концу 20-й минуты делится на две; каждая из них к концу следующих 20 минут делится опять на две и т. д. Найти число бактерий, образовавшихся из одной бактерии к концу суток.

992. Доказать, что в геометрической прогрессии, имеющей четное число членов, отношение суммы членов, стоящих на четных местах, к сумме членов, стоящих на нечетных местах, равно знаменателю прогрессии.

993. Решить уравнения:

а) $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{99}=0$;

б) $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{100}=0$.

994. Сумма трех чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 30. Если от первого числа отнять 5, от второго 4, а третье число оставить без изменения, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

До сих пор, говоря о суммах, мы всегда предполагали, что число слагаемых в этих суммах конечно (например, 2, 15, 1000 и т. д.). Но при решении некоторых задач (особенно высшей математики) приходится сталкиваться и с «суммами» бесконечного числа слагаемых

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots . \qquad (1)$$

Что же представляют из себя такие суммы? По определению *суммой бесконечного числа слагаемых* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *называется предел суммы* S_n *первых* n *чисел, когда* $n \to \infty$:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n). \qquad (2)$$

Предел (2), конечно, может существовать, а может и не существовать. Соответственно этому говорят, что сумма (1) существует или не существует.

Как же выяснить, существует ли сумма (1) в каждом конкретном случае? Общее решение этого вопроса выходит далеко за пределы нашей программы. Однако существует один важный частный случай, который нам предстоит сейчас рассмотреть. Речь будет идти о суммировании членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Пусть $a_1, a_1q, a_1q^2, \ldots$ — бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Это означает, что $|q| < 1$. Сумма первых n членов этой прогрессии равна

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Из основных теорем о пределах переменных величин (см. § 136) получаем:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} \cdot \lim_{n \to \infty} (1 - q^n) =$$

$$= \frac{a_1}{1 - q} \left(\lim_{n \to \infty} 1 - \lim_{n \to \infty} q^n \right).$$

Но $\lim\limits_{n \to \infty} 1 = 1$, а $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$. Поэтому

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Итак, ***сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна первому члену этой прогрессии, деленному на единицу минус знаменатель этой прогрессии.***

Примеры.

1) Сумма геометрической прогрессии $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$ равна

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2},$$

а сумма геометрической прогрессии $12; -6; 3; -\frac{3}{2}, \ldots$ равна

$$S = \frac{12}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{12}{\frac{3}{2}} = 8.$$

2) Простую периодическую дробь

$$0{,}454545\ \ldots$$

обратить в обыкновенную.

Для решения этой задачи представим данную дробь в виде бесконечной суммы:

$$0{,}454545\ \ldots = \frac{45}{100} + \frac{45}{10000} + \frac{45}{1000000} + \ldots.$$

Правая часть этого равенства представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, первый член которой равен $\frac{45}{100}$, а знаменатель $\frac{1}{100}$. Поэтому

$$0{,}454545\ \ldots = \frac{\frac{45}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}.$$

Описанным способом может быть получено и общее правило обращения простых периодических дробей в обыкновенные (см. гл. II, § 38):

Для обращения простой периодической дроби в обыкновенную нужно поступить следующим образом: в числителе поставить период десятичной дроби, а в знаменателе—число, состоящее из девяток, взятых столько раз, сколько знаков в периоде десятичной дроби.

3) Смешанную периодическую дробь

$$0{,}58333\ \ldots$$

обратить в обыкновенную.

Представим данную дробь в виде бесконечной суммы:

$$0{,}58333\ldots = \frac{58}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} + \ldots .$$

В правой части этого равенства все слагаемые, начиная с $\frac{3}{1000}$, образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, первый член которой равен $\frac{3}{1000}$, а знаменатель $\frac{1}{10}$. Поэтому

$$\frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} + \ldots = \frac{\frac{3}{1000}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{300}.$$

Следовательно,

$$0{,}58333\ \ldots = \frac{58}{100} + \frac{1}{300} = \frac{175}{300} = \frac{7}{12}.$$

Описанным способом может быть получено и общее правило обращения смешанных периодических дробей в обыкновенные (см. гл. II, § 38). Мы сознательно не приводим его здесь. Запоминать это громоздкое правило нет необходимости. Гораздо полезнее знать, что любую смешанную периодическую дробь можно представить в виде суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии и некоторого числа.

А формулу

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии нужно, конечно, помнить.

В качестве упражнения предлагаем вам, помимо приведенных ниже задач № 995—1000, еще раз обратиться к задаче № 301 (стр. 87).

Упражнения

995. Что называется суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии?

996. Найти суммы бесконечно убывающих геометрических прогрессий:

а) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots;$ в) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}, 1, \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}, \ldots;$

б) $3, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \ldots;$ г) $1, x, x^2, x^3, \ldots\ (|x| < 1).$

997. При каких значениях x прогрессия

$$\frac{a+x}{a-x}, \quad \frac{a-x}{a+x}, \quad \left(\frac{a-x}{a+x}\right)^3, \ \ldots$$

является бесконечно убывающей? Найти сумму такой прогрессии.

998. В равносторонний треугольник со стороной a вписан посредством соединения середин его сторон новый треугольник; в этот треугольник тем же способом вписан новый треугольник и так далее до бесконечности.

Найти:

а) сумму периметров всех этих треугольников;

б) сумму их площадей.

999. В квадрат со стороной a вписан путем соединения середин его сторон новый квадрат; в этот квадрат таким же образом вписан квадрат и так далее до бесконечности. Найти сумму периметров всех этих квадратов и сумму их площадей.

1000. Составить бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, такую, чтобы сумма ее равнялась $\frac{25}{4}$, а сумма квадратов ее членов равнялась $\frac{625}{24}$.

Задачи на повторение

1001. Будет ли последовательность

$$1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4; \ldots :$$

а) ограниченной снизу;

б) ограниченной сверху?

1002. Доказать, что всякая последовательность, имеющая предел, ограничена. Верно ли обратное утверждение? Ответ пояснить примерами.

1003. Является ли последовательность всех положительных корней уравнения $\sin\frac{1}{x} = 0$:

а) конечной;

б) ограниченной?

1004. а) Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ образует арифметическую прогрессию. Будет ли арифметической прогрессией последовательность $|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots$?

б) Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ образует геометрическую прогрессию. Будет ли геометрической прогрессией последовательность $|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots$?

1005. Докажите, что всякая арифметическая прогрессия представляет собой монотонную последовательность. Верно ли это для геометрической прогрессии?

1006. При каком значении x числа

$$\sqrt{x},\ \sqrt[3]{x},\ \sqrt[4]{x}:$$

а) образуют арифметическую прогрессию;

б) образуют геометрическую прогрессию;

в) образуют одновременно и арифметическую и геометрическую прогрессию?

1007. Найти сумму

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2+\ldots+\left(a^n+\frac{1}{a^n}\right)^2.$$

1008. В геометрической прогрессии $a_{m+n}=A$, $a_{m-n}=B$. Найти a_m и a_n.

1009. Существуют ли такие три члена, которые одновременно являются первыми членами некоторой арифметической и некоторой геометрической прогрессии?

1010. В какой арифметической прогрессии сумма двух любых ее членов является членом той же прогрессии?

1011. Могут ли стороны прямоугольного треугольника образовывать:

а) арифметическую прогрессию;

б) геометрическую прогрессию?

1012. В арифметической прогрессии $a_{m+n}=A$, $a_{m-n}=B$. Найти a_m и a_n.

1013. Могут ли сумма и разность двух членов арифметической прогрессии быть последовательными членами той же прогрессии? Если могут, то в каком случае?

1014. Найти арифметическую прогрессию, если сумма 7-го и 9-го ее членов равна 30, а произведение 6-го и 10-го членов равно 209.

1015. Доказать, что если в арифметической прогрессии для некоторых p и q $(p\neq q)$ $S_p=S_q$, то $S_{p+q}=0$.

1016. Найти 3-й и 10-й члены геометрической прогрессии, если их сумма равна -2, а произведение 2-го и 11-го членов этой прогрессии равно -3.

1017*. Могут ли числа 10, 11, 12 быть членами (не обязательно соседними) одной и той же геометрической прогрессии?

1018. В круг, радиус которого равен R, вписан квадрат; в квадрат вписан круг, а в этот круг вписан новый квадрат и так далее до бесконечности. Определить сумму площадей всех этих кругов и сумму площадей всех квадратов.

1019. Построить график функции

$$y=x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\ldots.$$

1020. Три числа, составляющие арифметическую прогрессию, дают в сумме 3. Найти эти числа, если при прибавлении к ним соответственно 1, 7 и 17 получается геометрическая прогрессия.

1021. Сумма трех чисел, составляющих возрастающую геометрическую прогрессию, равна 65. Если от меньшего из этих чисел отнять 1, а от большего 19, то полученные три числа составят арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

1022. Найти четыре целых числа, из которых первые три составляют арифметическую, а последние три—геометрическую прогрессию, если известно, что сумма крайних чисел равна 37, а сумма средних 36.

1023.* Можно ли из чисел $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ выбрать бесконечную геометрическую прогрессию, сумма которой равна:

а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{1}{7}$?

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА — I

1. Левая часть определена для любых неотрицательных чисел a, правая часть — для любых чисел a, равенство в целом — для всех неотрицательных чисел a. 4. Левая часть определена для всех чисел c, кроме 0 и 1, правая часть — для всех чисел c, равенство в целом — для всех чисел c, кроме 0 и 1. 5. Левая часть определена для всех чисел a, кроме 0 и -1, правая часть — для всех чисел a, кроме 0 и 1, равенство в целом — для всех чисел a, кроме 0, -1 и 1. 6. Левая часть определена для всех неотрицательных чисел b, кроме 1, правая часть — для всех чисел b, равенство в целом — для всех неотрицательных чисел b, кроме 1. 8. Левая часть определена для всех пар (a, b), правая — для всех пар, кроме пары $(0, 0)$, равенство в целом — для всех пар, кроме пары $(0, 0)$. 13. а) Да; б) нет; в) нет; г) нет; д) да. 14. Если $a = 1$, то один: $x = 1$; если $a \neq 1$, то ни одного. 26. $\frac{a-1}{3}$. 27. При $a = 1$ нет корней; при $a \neq 1$ $x = \frac{5}{a-1}$. 28. При $c = 0$ корней нет; при $a \neq 0$ $x = \frac{4}{a}$. 29. Если $a = \pm 1$, то x — любое; если $a \neq \pm 1$, то $x = 0$. 30. Если $a \neq -2$, то $x = \frac{4 + a^2}{a + 2}$; при $a = -2$ корней нет. 31. Если $a \neq \pm 1$, то $x = \frac{1}{a-1}$; если $a = 1$, то корней нет; при $a = -1$ x — любое. 32. Если $a = 1$ и $b \neq -1$, то корней нет; если $a = 1$ и $b = -1$, то x — любое; при $a \neq 1$ $x = \frac{1+b}{a-1}$. 36. а) Да, если $m \neq 0$; б) нет; в) нет; г) да, если $m = n = 0$. 37. Нет. 38. Нет. 39. б) 5 лет назад отец был в 4 раза старше сына. 40. 2 ч. 41. Требуемое количество стали можно получить лишь в том случае, если число r заключено между числами p и q. При этом лома первого сорта нужно взять $\frac{100(r-q)}{p-q}$ тонн. 50. Нет корней. 51. -1. 52. При $a \neq -19$ $x = \frac{a+5}{2}$; при $a = -19$ нет корней. 53. Если $a \neq 1$ и $a \neq \frac{3}{4}$, то $x = \frac{1-2a}{a-1}$; при $a = 1$ и $a = \frac{3}{4}$ нет корней. 54. Если $a = b = 0$, то каждое число является корнем уравнения; если одно из чисел a и b равно нулю, а

другое отлично от нуля, то корней нет; если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то при $a^2 \neq b^2$ $x = \frac{1}{a+b}$, при $b = a$ x — любое, кроме $\frac{1}{a}$, при $b = -a$ корней нет. **55.** Если $b = 0$ и $a = 1$, то x — любое; если $b = 0$ и $a \neq 1$, то корней нет; при $b \neq 0$ и $a \neq -1$ $x = \frac{1-a}{b(a+1)}$; при $b \neq 0$ и $a = -1$ корней нет. **56.** При $b \neq 0$ и $b \neq 1$ $x = 2$; при $b = 0$ x — любое число, кроме $\frac{1}{2}$; при $b = 1$ уравнение не имеет смысла. **57.** Если $a = 0$, то x — любое число, кроме 0; если $a \neq 0$, то $x = \frac{5}{3}a$. **58.** Если хотя бы одно из чисел m и n равно нулю, то корней нет; если оба числа m и n отличны от нуля и $m = n$, то x — любое число, кроме n, при $m \neq 0$, $n \neq 0$ и $m \neq n$ $x = m + n$. **59.** Относительно x: если $b \neq 0$, то корней нет; если $b = 0$ и $a \neq 0$, то x — любое число, кроме 0; при $a = b = 0$ уравнение не имеет смысла. Относительно b: если хотя бы одно из чисел a и x равно нулю, то корней нет; если $a \neq 0$ и $x \neq 0$, то $b = 0$. **61.** Если $a > 1$, то $x = \pm(a-1)$; при $a < 1$ корней нет. **62.** 0,5; 1,5. **63.** Если $a > 0$, то $x = 1 \pm a$; если $a < 0$, то корней нет. **64.** 0. **65.** $\frac{11}{8}$. **66.** $\frac{1}{2}$. **67.** -2; $\frac{4}{5}$. **71.** Может, если $a = 0$, а b — положительное число. **73.** а) Нет; например, при $a = b = 1$; б) да; в) нет; например, при отрицательном c; г) нет. **75.** x — любое число, заключенное в интервале от -1 до 1 (включая эти два числа). **76.** x — любое число, не превосходящее -3. **77.** Нет корней. **78.** $-\frac{4}{3}$ и -6. **79.** а) $a > 0$; б) $b > 0$, $b \neq 1$; в) $a \neq 0$; г) b — любое; д) x — любое; е) a и b — любые числа, не равные нулю одновременно. **84.** а) Если $a = 0$, то $a^2 = 5a^2 = 2a^2$; если $a \neq 0$, то $a^2 < 2a^2 < 5a^2$; с) если $a > 1$, то $a < a^2 < a^3$; если $0 < a < 1$, то $a > a^2 > a^3$; при $a = 0$ и $a = 1$ $a = a^2 = a^3$; если $-1 < a < 0$, то $a < a^3 < a^2$; если $a < -1$, то $a^3 < a < a^2$; при $a = -1$ $a = a^3 < a^2$. **98.** Данные числа равны между собой. **99.** $\sqrt[3]{26} > \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. **100.** $(1 + \sqrt{5})^{100} > 3^{100}$. **102.** $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^{51} < (\sqrt{6} - \sqrt{2})^{51}$. **103.** а) $-0,4 < a < 2$; б) $-2 < a < 0,4$. **104.** $6,6 < a + b < 6,8$. **105.** 5,61; 5,66. **106.** 0,2; 0,4. **107.** а) 1,38; 1,68; б) $-\frac{22}{35}$; $-\frac{25}{48}$. **118.** Быстрее в безветренную погоду. **125.** У к а з а н и е. $a + b > 2\sqrt{ab}$; $b + c > 2\sqrt{cb}$; $a + c > 2\sqrt{ac}$. **131.** 2. **133.** а) $a = 4$; б) $a = \frac{1}{2}$; в) $a = \sqrt{5}$. **134.** а) $a = 1$; б) $a = 2$; в) 0. **135.** Квадрат с площадью $2R^2$. **136.** Квадрат с площадью $\frac{d^2}{2}$. **137.** Квадрат со стороной $\frac{p}{4}$. **138.** а) 1; б) нет корней; в) -1. **139.** Первая бригада. **142.** Ошибка при взвешивании на некоторых электрических весах составляет не более 0,001% от истинного веса тела. **149.** а) 5,5; б) 3,7; в) 8,6; г) 0,6. **150.** а) 14,97 с точностью до 0,09; б) $-24,20$ с точностью до 0,08; в) $-8,99$ с точностью до 0,05. **151.** а) 0,0005; б) 0,0005; в) 0,00009 (точнее, $\frac{1}{11000}$). **152.** а) Да; б) нет; в) нет; г) да. **153.** а) Да; б) да; в) да; г) да; д) нет; е) нет; ж) нет; з) да. **155.** $x > 1$. **159.** Если $a > b$, то $x > -1$; если $a < b$, то $x < -1$. **163.** Если $a > -2$, то $x > \frac{3-b}{a+2}$; если $a < -2$, то $x < \frac{3-b}{a+2}$; если $a = -2$ и $b > 3$, то x — любое; при $a = -2$ и $b < 3$ нет решений. **164.** $x > \frac{5}{7}$.

165. Если $a > -1$, то $x > \frac{2}{(a+1)^2}$; если $a < 1$, то $x < \frac{2}{(a+1)^2}$. **171.** $x > \frac{3}{4}$.
174. Если $a > 0$, то $x > \frac{1}{a}$; если $a < 0$, то $x < \frac{1}{a}$; при $a = 0$ нет корней.
181. $x > 1{,}1$. **186.** $x < -4$; $x > 7{,}5$. **187.** $1 < a < \frac{5}{3}$; $b > 0$. **188.** $2 < a < 3$, $3 < a < 4{,}5$; b — любое. **189.** $3 < x < 3{,}5$. **190.** Если $a > 0$, то $-\frac{4}{a} < x < \frac{3}{a}$; если $a < 0$, то $\frac{3}{a} < x < -\frac{4}{a}$; при $a = 0$ x — любое. **191.** $39° < t < 55°$.
194. Положительна при $2{,}5 < x < 3$; отрицательна при $x < 2{,}5$ и при $x > 3$.
196. $x < 0$; $x > 1$. **197.** $-11 < x < -5$. **198.** $-\frac{19}{6} < x < -3$. **199.** $x < 0$; $x > 2$. **200.** $0 < x < \frac{1}{3}$. **201.** $x > 2$. **203.** $x < 0$; $x > 2$. **205.** $x < 0$; $0 < x < 2$.
207. $-1 < x < 5$. **208.** $x < -9$; $x > 11$. **212.** $x < 1$; $x > 3$. **215.** $x > -\frac{3}{2}$.
216. При $a < 0$ решений нет; если $a > 0$, то $-\frac{a+b}{a} < x < \frac{a-b}{a}$; если $a = 0$, $b \neq 0$, то решений нет; при $a = b = 0$ x — любое. **223.** а) -15; б) 3; в) 121; ж) 1. **224.** а) Изменит знак на противоположный; в) не изменится. **225.** а) 6; б) -2; в) 0; г) при любом a. **227.** а) ± 2; б) 0; в) ни при каком значении a строки данного определителя не пропорциональны. **231.** $\frac{1}{6}$; -6; -6. **232.** 4; $5 - a$; $5a + 3a^2$ $(a \neq 0)$. **234.** а) Да, если $a \neq \pm 6$; в) да, если $a \neq 0$. **235.** Если $a = 0$, то решений нет; если $a \neq 0$, то $x = -\frac{2}{a}$, $y = \frac{1}{2a}$. **237.** Если $a \neq 0$, то $x = \frac{2}{a}$, $y = 2$; при $a = 0$ система несовместна. **238.** Если $a \neq 0$, то $x = 0$, $y = \frac{1}{2a}$; при $a = 0$ система несовместна. **239.** Система несовместна. **240.** Если $a \neq \pm 1$, то $x = \frac{1}{a+1}$, $y = 0$; при $a = -1$ система несовместна; при $a = 1$ она не имеет смысла. **242.** $x = t$, $y = t - 1$, где t — любое число. **243.** $x = t$, $y = \frac{3}{5}t$, где t — любое число. **245.** а) Бесконечное множество решений; б) система несовместна. **247.** Если $a \neq \pm 4$, то $x = -\frac{12}{4-a}$, $y = \frac{6}{4-a}$; если $a = -4$, то $x = t$, $y = \frac{t+3}{2}$, где t — любое; при $a = 4$ система несовместна.
248. Если $a \neq \pm 3$, то $x = 2$, $y = 1$; если $a = \pm 3$, то $x = t$, $y = \frac{a - 6 + 3t}{a}$, где t — любое число. **249.** Если $a \neq \frac{1}{2}$, то $x = \frac{a(2a-3)}{2(1-2a)}$, $y = \frac{2a^2 - a + 1}{2(1-2a)}$; при $a = \frac{1}{2}$ система несовместна. **260.** а) 2; б) $a < 0$; $a > 2$; в) $0 < a < 2$;

г) $a \neq 2$. **262.** Если $a \neq 0$ и $a \neq \frac{3}{2}$, то $x = 4$; если $a = 0$, то x — любое число, кроме 1; при $a = \frac{3}{2}$ уравнение не определено. **269.** По озеру. **270.** Указание. Использовать результат упр. № 267. **272.** $h > \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{4}$. **273.** $2{,}8 < x < 8$. **274.** $-2 < x < -1$; $5 < x < 6$. **275.** $-1 < x < 2$. **276.** Если $a \neq \pm 1$ то $x = y = \frac{b}{1+a}$; если $a = 1$, то $x = t$, $y = b - t$; если $a = -1$, $b \neq 0$, то система несовместна; если $a = -1$, $b = 0$, то $x = y = t$, где t — любое число. **277.** $x = 1$, $y = -1$; кроме того, при $|a| < 1$ получается еще одно решение: $x = \frac{a^2+2a-1}{a^2-1}$, $y = \frac{1+a^2}{1-a^2}$. **278.** Если $a = -1$, то $x = t$, $y = -\frac{t}{1+3t}$, где t — любое число, отличное от 0 и $-\frac{1}{3}$; при $a \neq -1$ система несовместна. **279.** Если $a \neq 2$, то $x = -\frac{a}{2}$, $y = a + 1$; при $a = 2$ $x = t$, $y = 2 - t$, где t — любое число. **280.** При $m = -\frac{9}{2}$, $n \neq \frac{15}{2}$. **281.** $-6{,}40 < a < 3{,}75$. **282.** $a = -\frac{4}{3}$, $b = -\frac{10}{3}$. **284.** Указанные условия не выполняются ни при каких значениях a. **285.** x находится с точностью до 0,006 $\left(\text{точнее, } \frac{4}{700}\right)$, а y — с точностью до 0,005 $\left(\text{точнее, } \frac{3}{700}\right)$. **288.** $\frac{34}{65} < m < \frac{38}{65}$; $\frac{9}{130} < n < \frac{12}{130}$.

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА — II

292. а) $-\frac{5}{2}$; б) нет; в) -2. **293.** а) $\frac{km}{n}$; б) $\frac{m}{kn}$. **294.** а) 1; $\frac{2}{3}$; 2; б) $\frac{3}{2}$; 1; 3; в) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; 1. **299.** Указание. Воспользоваться тождествами $a = \frac{(a+b)+(a-b)}{2}$, $b = \frac{(a+b)-(a-b)}{2}$. **302.** Все делители числа n имеют вид 2^m5^k. **308.** Пусть Δ — общая мера отрезков AB и CD. Тогда отрезок $\frac{\Delta}{nm}$ будет общей мерой отрезков $\frac{AB}{n}$ и $\frac{CD}{m}$. **309.** Если бы n-я доля AB и m-я доля CD имели общую меру Δ, то Δ была бы и общей мерой отрезков AB и CD. **310.** Пусть Δ — общая мера отрезков Δ_1 и Δ_2. Приняв Δ за единицу длины, получим, что $|\Delta_1| = m$, $|\Delta_2| = n$, где m и n — натуральные числа (значок $|\ |$ употребляется для обозначения длины). Но тогда $|\Delta_1| + |\Delta_2| = m + n$, $|\Delta_1 - \Delta_2| = m - n$. Следовательно, Δ является общей мерой отрезков $\Delta_1 + \Delta_2$ и $\Delta_1 - \Delta_2$. Обратное утверждение также верно. **313.** Доказывается методом от противного с помощью результата задачи 312. **315.** а) Да; б) да; в) нет. **318.** г) $15{,}25\ldots > \frac{61}{4}$. **319.** б) $-\frac{3}{8} > -0{,}375\ldots$; в) $\frac{5}{9} = 0{,}5555\ldots$ (одни пятерки); г) какое из

чисел больше: 0,3333 ... или $\frac{1}{3}$ — сказать нельзя; все зависит от того, каковы десятичные знаки числа 0,3333 ..., стоящие после четвертой тройки; например, $0{,}33331\ldots < \frac{1}{3}$, но $0{,}33335\ldots > \frac{1}{3}$. **324.** а) С недостатком: 1; 1,7; 1,73; 1,732; ...; с избытком: 2; 1,8; 1,74; 1,733; ...; б) с недостатком: —2; —1,8; —1,74; —1,733; ...; с избытком: —1; —1,7; —1,73; —1,732; ....
326. Нет; например, $a = \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$. **327.** а) 3,146 ...; в) 0,317 ...; г) —0,317 ...; д) 1,902 ...; е) —1,013 ...; ж) —1,486 ...; з) 3,479 ....
328. а) С недостатком: 3; 3,1; 3,14; 3,145; ...; б) с недостатком: 4; 4,3; 4,37; 4,377 ...; в) с недостатком: —1; —1,0; —0,92; —0,914; .... **330.** Нет, не всегда, например, $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$; $2 - \sqrt{2} = 0{,}5857\ldots$, но $\sqrt{2} + (2 - \sqrt{2}) = 2{,}000\ldots = 2$. **331.** б) 0,88 ...; г) —3,16 ...; е) —2,73 ....
334. Не всегда. **335.** а) 0,91 .... **337.** а) 1,03; б) 0,14; в) —1,22. **344.** а) Может; например, при $m = 1$, $n = 2$; б) может, например, при $m = n$; в) нет, не может. **345.** Да. **351.** Нет. **352.** 1-й способ. Если хотя бы одно из чисел $a + b\sqrt{2}$ и $a - b\sqrt{2}$ равно нулю, то $(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = 0$, откуда $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$. Число $\frac{a}{b}$ рационально; но среди рациональных чисел нет такого, квадрат которого равен 2. 2-й способ. Число a рационально, а число $b\sqrt{2}$ иррационально. Следовательно, их сумма не может быть равна рациональному числу 0.

КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН III

358. $(x - 3)^2 - 1$. **359.** $a(x - 2a)^2 + 3$. **361.** $\left(x + \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(a-b)^2}{4}$. **362.** $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. **363.** $-3x^2 + 12x - 13 = -3(x - 2)^2 - 1$. **370.** Нет.
371. а) $a < 0$; б) $a = 0$; в) $a > 0$. **372.** а) $a < \frac{1}{2}$; б) $a < \frac{1}{2}$; в) $a > \frac{1}{2}$.
373. Либо 1 (при $a = -2$), либо —1 (при $a = 2$). **374.** $|a| < \frac{1}{4}$. **375.** $a < 0$.
376. $V = \frac{-at + \sqrt{a^2t^2 + 240abt}}{2t}\ \frac{км}{ч}$. **377.** $\frac{\pm a + 2t + \sqrt{4t^2 + a^2}}{2}$ ч. **379.** 2.
380. При $a = -\frac{3}{2}$ корней нет, при $a \neq -\frac{3}{2}$ $x = 3 + a$. **381.** $a = -2$.
384. Указание. Воспользоваться тождествами: $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$; $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$. **386.** a и $-a - 4$. **388.** 31. **389.** $a = 1{,}5$ и $a = -2{,}5$. **390.** а) $a < 4$; б) $0 < a < 4$; в) $a < 0$; г) $a = 0$; д) этот случай не может иметь места ни при каком значении a. **401.** Одинаковые при $a < 0$, разные при $a > 0$. **402.** Одинаковые при $\frac{1}{2} < a < 7$, разные при $a < \frac{1}{2}$ и при $a > 7$. **404.** $(2x - 3a)(x - 2a)$. **406.** $(x - 2a - b)(x - a + b)$.
409. 8. **410.** Если $a \neq -1$ и $a \neq 53$, то $x = \frac{54}{a+1}$; при $a = 53$ корней нет.

412. а) $a(15x^2-7x-2)=0$, где a — любое целое число, отличное от нуля. 413. $84x^2-18x-30=0$. 414. Нет. 415. а) $a(x^2-4x+1)=0$, где a — любое целое число, отличное от нуля. 434. $x_{\min}=-3$, $y_{\min}=-5$. 435. $x_{\max}=-1$, $y_{\max}=-3$. 436. $y_{\min}=0$; достигается при $x=\frac{1}{2}$ и $x=-\frac{1}{3}$. 437. $y_{\min}=0$; достигается при $x=-\frac{1}{2}$ и $x=\frac{3}{2}$. 439. Либо $x<1$, либо $x>3$. 440. $1<x<5$. 441. $-\frac{2}{5}<x<1$. 442. $0<x<1$. 443. Неравенство не выполняется ни при каких значениях x. 447. -1; 0. 448. Либо $x<-5$, либо $-1<x<3$. 449. Либо $|x|<2$, либо $6<x<8$. 450. -3; -2; -1; 0. 451. $a>\frac{5}{3}$. 452. $a<1$. 454. б) Либо $-5<a<-4$, либо $0<a<1$; в) $-4<a<0$. 455. При $a=\frac{5}{3}$ один корень равен 0, а другой $\frac{8}{3}$. При $\frac{5}{3}<a<3$, а также при $a>7$ корни положительны. При $a<\frac{5}{3}$ корни разных знаков. Если $3<a<7$, то уравнение не имеет корней. 458. $x=\frac{6}{5}\sqrt{3}$, $y=-\frac{6}{5}\sqrt{3}$; $x=-\frac{6}{5}\sqrt{3}$, $y=\frac{6}{5}\sqrt{3}$; $x=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$, $y=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$; $x=-\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$, $y=-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. 459. $x=10$, $y=\frac{3}{2}$; $x=3$, $y=5$. 460. $x=-3$, $y=4$; $x=-6$, $y=2$. 461. $x=y=\frac{1}{2}$; $x=y=-\frac{1}{2}$. 463. $x=1$, $y=5$; $x=5$, $y=1$. 464. $x=1$, $y=5$; $x=5$, $y=1$; $x=2$, $y=3$; $x=3$, $y=2$. 465. $x=0$, $y=1$; $x=1$, $y=0$. 466. $x=2$, $y=-5$. 470. См. рис. 1*. 475. 12. 476. -1. 477. 28. 478. 4; -5. 479. 4. 480. 0; 5. 481. $-a$; a. 482. 7. 484. $c=0$. 485. 5. 486. $(2x-a)(2x-a+b)$. 489. Если $a=b=0$, то x — любое число, кроме 0 и 1; если хотя бы одно из чисел a и b отлично от нуля, то корней нет. 490. При $x=a$ и $x=\frac{8+a}{a-1}$, если a отлично от 1 и -2; при $x=1$, если $a=1$; при $a=-2$ задача теряет смысл. 491. Если $b\neq-2a$, то $x=-b$. При $b=-2a$ уравнение не имеет корней. 493. Нет. 494. $a<-\frac{1}{3}$. 495. $3<x<5$. 496. Либо $-2<x<1$, либо $x>6$. 497. При $a<1$ и при $a>13$. 498. а) $5<a<11$; б) $a<5$ и $a>11$; в) $a<5$ и $a>11$; г) $a=5$, $a=11$; д) $5<a<6$ и $10<a<11$; е) $6<a<10$. 499. $x=27$, $y=1$; $x=-1$, $y=-27$. 501. Если $b\neq 0$, то $x=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+b\right)$, $y=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-b\right)$; если

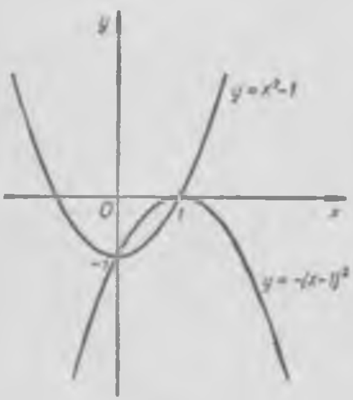


Рис. 1*

$b = 0$, а $a \neq 0$, то система не имеет решений; при $a = b = 0$ $x = t$, $y = t$, где t — любое число. 502. $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{2}{3}$; $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{4}{3}$. 504. Нет корней. 505. 6. 506. Корни одинаковых знаков при $a < -1 - \sqrt{2}$ и при $-1 + \sqrt{2} < a < 1$; корни разных знаков при $-1 - \sqrt{2} < x < -1 + \sqrt{2}$. 508. Могут, но только при $p = q = 0$ и $p = 1$, $q = -2$. 509. 1. 510. $3 - \sqrt{12}$. 511. $b = -6$, $c = 3$.

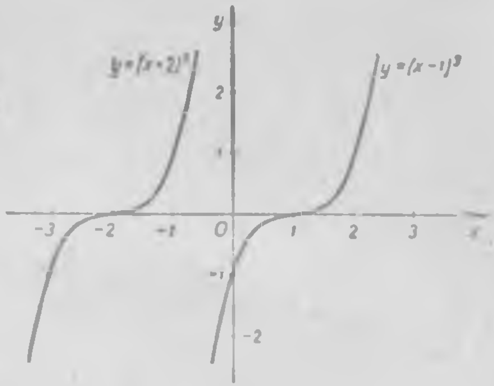


Рис. 2*

СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ — IV

517. 0 и 1. 521. 2) $(-10)^3$ и $(-10)^2$; 5) 2^{200} и 2^{250}. 522. $60a^6$. 523. $1875a^{10}$. 524. c^3. 525. ap. 526. 4) $(4^3)^{100}$ и $(3^4)^{100}$, $(4^3)^{100} < (3^4)^{100}$; 5) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ и $\left(-\frac{1}{32}\right)^3$,
$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 < \left(-\frac{1}{32}\right)^3;\quad 6)\ \left[\left(\frac{6}{7}\right)^2\right]^2 \text{ и } \left[\left(\frac{36}{49}\right)^3\right]^2,\quad \left[\left(\frac{6}{7}\right)^2\right]^2 > \left[\left(\frac{6}{7}\right)^6\right]^2.$$
531. 3) $-33 \cdot 10^{-5}$. 532. г) 1; д) $x^{-4} - a^{-6}$; е) $\frac{b(b^2 - 3ab + 3a^2)}{(b-a)^4}$. 535. 0. 537. б) и в) см. рис. 2*. 538. в), д) и е) см. рис. 3*. 540. $100(\sqrt[20]{2} - 1)$ %. 541. $100(\sqrt[5]{1{,}27} - 1)$ %. 542. $100(\sqrt[7]{2} - 1)$ %. 544. $a > 0$. 545. $a < 0$. 546. а) $|x - 1|$; г) $3x^2 - x + 1$. 548. $4 - 2x$ при $x < 1$; 2 при $1 < x < 3$;

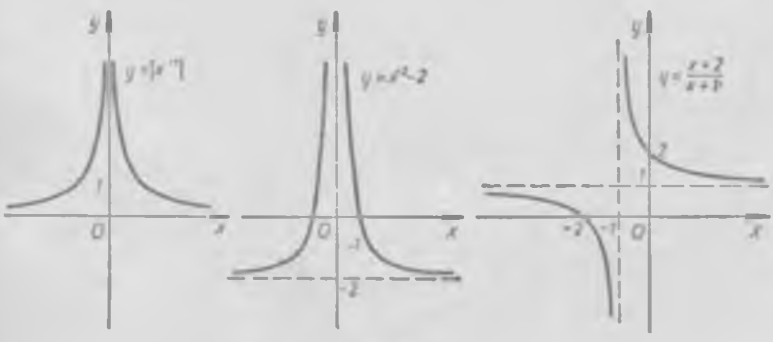


Рис. 3*

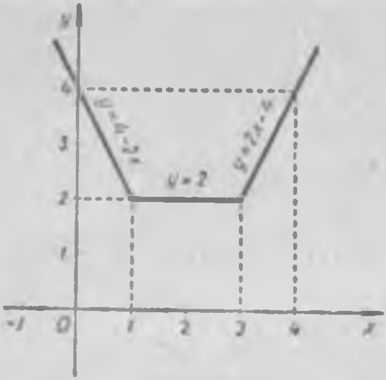


Рис. 4*

$2x-4$ при $x>3$. **549.** См. рис. 4*. **550.** $3<x<5$. **551.** а) $x>-6$; б) x — любое число; в) $x<-3$; $x>1$. **553.** а) $x>1$; б) множество всех действительных чисел; в) $x<-2$ и $x>\frac{1}{3}$; г) $x<-2$ и $x>7$; д) множество всех действительных чисел; е) $x>1$. **555.** $x>3$. **556.** $2<x<8$. **557.** x — любое число. **558.** $x>0$. **559.** $x>a$. **560.** x — любое число. **563.** а) В три раза. **566.** 1) $\sqrt{|x^2-1|}$; 2) $\sqrt{x^2-x+1}$. **568.** а) $3\sqrt{2}>2\sqrt{3}$; г) $4\sqrt[5]{2}>3\sqrt[5]{4}$. **570.** б) $\sqrt[20]{3^{13}}$; е) $\sqrt[4]{\frac{a+1}{a-1}}$. **572.** а) $4\sqrt{6}-8\sqrt{3}$; б) 8; в) 1; г) $a-b$. **574.** г) $2a^4\sqrt[8]{64a}$; д) $\sqrt[8]{a}$ $(a>0)$. **575.** а) $\frac{\sqrt[15]{3^{10}}}{\sqrt[15]{3^{9}}}<\frac{\sqrt[14]{3^{9}}}{\sqrt[6]{3^{3}}}$. **576.** 8) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{15}-3)$; 9) $\frac{1}{10}(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{49})$; 11) $2(2\sqrt{2}+\sqrt{10}-\sqrt{5}-1)$; 12) $6+7\sqrt{2}+4\sqrt{10}-\sqrt{5}$. **577.** а) 21,95; б) 15,39; в) $-7{,}24$. **581.** а) $8^{\frac{2}{3}}>9^{\frac{5}{8}}$; в) $12^{\frac{5}{6}}>18^{\frac{2}{3}}$. **582.** $\sqrt{a}-\sqrt[21]{a^5}$. **583.** а) $\frac{a}{b}$, если $a>0$ и $b>0$; 0, если $a>0$ и $b=0$; б) $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ $(x>0,\ y>0,\ x\neq y)$. **584.** $-3\sqrt[5]{9}$. **586.** 3. **587.** 32. **589.** $\frac{19}{3}$. **590.** $\frac{7}{16}$. **591.** $4\ (|a|\neq|x|)$. **592.** 0. **600.** а) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{5}{11}}>\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{6}{11}}$; б) $(2\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}<(3\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}$; г) $(\sqrt{21})^{-\frac{2}{7}}<(2\sqrt{5})^{-\frac{2}{7}}$. **601.** а) $a>1$; б) $a<1$. **606.** $\frac{2}{2-a}$, если $1<a<2$; $\frac{2\sqrt{a-1}}{a-2}$, если $a>2$; при $a<1$ и $a=2$ задача теряет смысл. **607.** $5-\sqrt{2}$. **608.** $\sqrt{3}+\sqrt{5}$. **616.** Указание. Представить $x+2\sqrt{x-1}$ в виде $(x-1)+2\sqrt{x-1}+1$. **617.** $\sqrt[3]{16}$. **618.** 1. **619.** 1. **620.** $|a|\sqrt{ab}$. **621.** $a\sqrt[3]{b^2}$. **622.** $a\sqrt[3]{a^2b^2}$. **623.** $ab\sqrt[4]{ab^3}$. **624.** 1; $\sqrt{2}=\sqrt[4]{4}$; $\sqrt[3]{3}$. **625.** 0,1. **626.** $\frac{1}{243}$.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ V

629. Вектор перпендикулярен оси. **633.** Окружность радиуса r с центром в точке с координатами (a, b). **634.** а) $-30°$ (минутная) и $-2°{,}5$ (часовая). **635.** а) 1-й и 4-й; б) 4-й и 1-й. **636.** В одной и той же четверти углы φ и $-\varphi$ оканчиваются чиваться не могут; однако они могут иметь одну и ту же конечную сторону, лежащую на оси абсцисс (например, 360° и —360°, 180° и —180°). **637.** а) $360°\cdot n$; б) $180°+360°\cdot n$; в) $90°+360°n$; г) $270°+360°n$; д) $45°+360°n$; е) $45°+180°n$; ж) $-45°+360°n$. **639.** Нет. **642.** Нет. **643.** $\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\varphi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\varphi=-1$, $\operatorname{ctg}\varphi=-1$. **644.** $\sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\varphi=\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\varphi=-\sqrt{3}$; $\operatorname{ctg}\varphi=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **648.** а) Да; б) нет. **649.** Нет. **650.** Нет. **653.** $-\frac{2+5\sqrt{3}}{2}$. **654.** $-\frac{14+15\sqrt{2}}{2}$. **655.** $\frac{5-3\sqrt{3}}{2}$. **656.** -4. **657.** Выражение не определено: $\operatorname{ctg} 0°$ и $\operatorname{cosec} 0°$ не существуют. **658.** -1. **659.** $\sqrt{3}$. **661.** $\frac{3}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$. **662.** $\frac{8}{51}(\sqrt{3}-3)$. **663.** Четные: 2, 5, 7, 8; нечетные: 1, 3, 4, 6, 9. **665.** а) $\sin 100°$; б) $\cos 163°$; в) $\sin 120°$. **666.** а) $\cos 9°$; б) $\sin(-172°)$; в) $\sin(-175°)$; г) $\cos 79°$. **670.** а) $\operatorname{tg} 25°$; б) $\operatorname{tg} 175°$; в) $\operatorname{ctg} 120°$; г) $\operatorname{ctg} 150°$. **671.** а) $\operatorname{tg} 15°$; б) $\operatorname{ctg} 87°$; в) $\operatorname{ctg}(-10°)$. **675.** Может, если $f(0)=0$; если $f(0)\neq 0$, то указанное условие выполняться не может. **676.** Положительными являются выражения 1) и 5); остальные выражения отрицательны. **678.** а) $\sin 735°$; б) $\sin 790°$; в) $\cos 860°$; г) $\cos(-10°)$. **679.** а) В первой или третьей четверти. **680.** а) Во 2-й или в 4-й четверти; б) в 1-й или 3-й четверти. **681.** а) В 3-й и 4-й четвертях; б) в 1-й и 4-й четвертях. **682.** а) $\sin 600° < \sin(-55°) < \sin 1295°$; б) $\cos(-67°) < \cos 654° < \cos 295°$. **684.** Возрастает от -1 до 0. **685.** Положительными являются выражения 5) и 7); выражение 2) равно нулю; остальные выражения отрицательны. **686.** 3) $\operatorname{tg} 353° < \operatorname{tg} 359°$; 7) $\operatorname{ctg}(-20°) > \operatorname{ctg}(-10°)$. **687.** б) Во 2-й или в 4-й четверти; в) в любой четверти; однако это не означает, что угол φ может быть произвольным. **689.** $\sin x$ и $\operatorname{cosec} x$, $\cos x$ и $\sec x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$. **690.** а) $\operatorname{tg}(-55°)$, $\operatorname{tg} 1295°$, $\operatorname{tg} 600°$; б) $\operatorname{ctg} 295°$, $\operatorname{ctg} 651°$, $\operatorname{ctg}(-67°)$. **692.** а) Нет; б) нет; в) да. **694.** ≈ 3764 *м*. **695.** $\approx 3°$. **698.** а) $\frac{2}{9}\pi$; б) $\frac{5}{6}\pi$; в) $\frac{7}{4}\pi$; г) $\frac{50}{9}\pi$. **699.** а) $\approx 25°43'$; б) $108°$. **700.** 1) В 1-й; 2) в 3-й; 3) в 3-й. **701.** а) $(a-b)^2$; б) 4; в) -2; г) данное выражение не определено: $\operatorname{ctg}\pi$ не существует. **702.** $x=n\pi$. **706.** Когда радиус окружности равен 1. **707.** а) $\sin 0{,}87$; б) $\cos 1{,}8$; в) $\sin 4°$. Указание. $\sin 4° > 0$, $\sin 4 < 0$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{5}{6}\right)^{\circ}$. **708.** Положительными являются выражения а) и б), отрицательными — выражения в) и г). **709.** Положительным является выражение а), отрицательными—выражения б), в) и г). **715.** $\frac{3\operatorname{tg}\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha+2}$. **716.** $\frac{a^2-1}{2}$. **717.** 2) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$; 4) $\sin\alpha=-0{,}6$; $\operatorname{tg}\alpha=0{,}75$; 5) $\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$. **718.** $\cos\varphi=\frac{b-a}{b+a}$. **719.** $\sin\varphi=\frac{a^2-1}{\sqrt{a^4-2a^2+2}}$, $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{a^4-2a^2+2}}$. **729.** $\frac{1}{3}$. **730.** 0,8, если угол φ оканчивается в первой четверти; —0,8, если угол φ оканчивается во второй четверти. 732. 0. 733. 1. 734. $-\operatorname{tg} 0{,}5 \approx -0{,}5463$. 742. а) $\cos 40^\circ$; в) $\cos 0{,}87$. 743. Приводятся соответственно синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы данных углов:

1) 0,9257; —0,3783; —2,446; —0,4088; 2) —0,6127; —0,7900; 0,7752; 1,2900; 3) —0,8023; —0,5969; 1,3440; 0,7441; 5) —0,9735; 0,2287; —4,258; —0,2348. 747. а) 0,017; в) —0,015. 751. а) 0,9999; в) 0,9999. 764. $\dfrac{\sqrt{2r}}{|\sin\alpha|}$.

765. $\sqrt{2}\,|\sec\alpha|$. 766. $\operatorname{tg}\alpha$. 767. 1 $\left(\alpha \neq \dfrac{n\pi}{2}\right)$. 768. $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$ $(\alpha \neq n\pi,\ \beta \neq k\pi)$.

769. $\cos^2\alpha$ $\left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right)$. 770. $-\dfrac{7}{6}$. 771. —1. 772. —16. 780. $-1 < a < 1$, $-\dfrac{\pi}{2} < b < \dfrac{\pi}{2}$. 781. а) 195°; б) —75°; в) —1485°. 785. а) 0,4; $\sqrt{0{,}84}$; $\dfrac{0{,}2}{\sqrt{0{,}21}}$; 5 $\sqrt{0{,}21}$; б) $-\dfrac{4}{5}$; $\dfrac{3}{5}$; $-\dfrac{4}{3}$; $-\dfrac{3}{4}$. 787. $(-1)^n \dfrac{\pi}{4} + n\pi$.

788. $(-1)^{n+1} \dfrac{\pi}{3} + n\pi$. 789. $\dfrac{n}{2}\pi$. 790. $\dfrac{3}{2}\pi + 6n\pi$. 791. $-60^\circ + 180^\circ n$. 792. $2n\pi$; $-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$. 793. Нет корней. 794. $\dfrac{1}{2}\left[-1 + (-1)^n \arcsin\dfrac{\pi}{4} + n\pi\right]$. 795. n

796. Нет корней. 797. $-1 < a < 1$; $0 < b < \pi$. 798. 270°. 799. 300°. 800. 30°. 801. —270°. 809. $2\pi - 6$. 810. 1. 811. а) Да; б) нет. 812. $\pm 120^\circ + 360^\circ n$.

813. $\pm \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2}{3} n\pi$. 814. $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{n}{2}\pi$. 815. $30^\circ + 360^\circ n$. 816. Нет корней. 817. $2n$.

818. $\pm \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{1}{2} + n\pi$. 819. $-390^\circ + 1080^\circ n$; $510^\circ + 1080^\circ n$. 820. Нет корней. 821. Нет корней. 822. Нет корней. 823. 135°. 824. 225°. 825. 255°. 826. —75°.

827. $-\infty < a < \infty$, $-\dfrac{\pi}{2} < b < \dfrac{\pi}{2}$. 828. $-\infty < a < \infty$, $0 < b < \pi$.

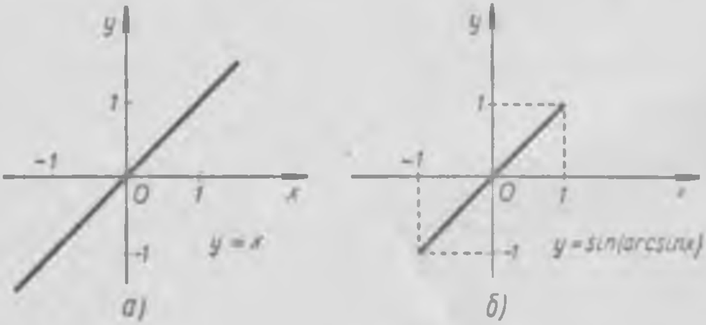


Рис. 5*

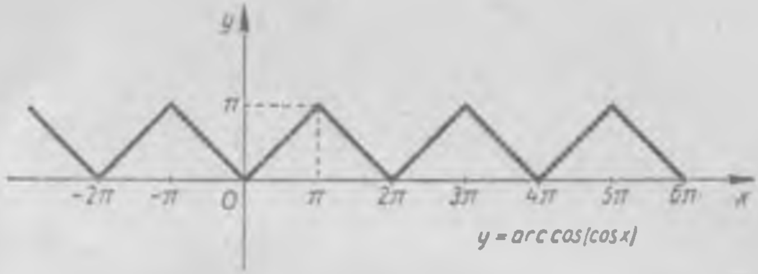


Рис. 6*

831. а) $\frac{5}{13}$, $\frac{12}{13}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{12}{5}$; б) $-\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{4}{3}$; в) $\frac{12}{13}$, $-\frac{5}{13}$, $-\frac{12}{5}$, $-\frac{5}{12}$; г) $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$. 834. 2. 835. $2-\pi$. 836. $\frac{n}{3}\pi$. 837. $-52^\circ 30' + 90^\circ n$. 838. $\frac{n}{5}\pi$. 839. $\frac{1}{4}+n$. 840. $15^\circ + 90^\circ n$. 841. $55^\circ + 60^\circ n$. 842. $\frac{1}{2}+n$. 843. $-\frac{7}{12}\pi + n\pi$. 844. Нет корней. 845. $\frac{\pi}{4}+n\pi$. 846. $\frac{\pi}{4}+n\pi$; $\frac{\pi}{2}+k\pi$. 847. $n\pi$; $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$. 848. $\frac{\pi}{2}+n\pi$. 849. $\pi+2n\pi$. 850. $\frac{\pi}{2}+2n\pi$. 851. Нет корней. 852. $n\pi$. 853. $\frac{\pi}{4}+n\pi$; $-\operatorname{arctg} 3 + k\pi$. 854. $\pm 60^\circ + 360^\circ n$. 855. $(-1)^n \frac{\pi}{6}+n\pi$. 856. $n\pi$; $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$. 857. $\frac{\pi}{2}+n\pi$. 858. $-40^\circ+180^\circ n$; $-10^\circ + 180^\circ k$. 859. Нет корней. 860. Нет корней. 861. Нет корней. 862. $\frac{\pi}{2}+2n\pi$. 863. $\frac{\pi}{2}+n\pi$. 864. $\frac{\pi}{2}+2n\pi$; $\pi+2k\pi$. 865. $\frac{\pi}{4}+n\pi$. 866. $\frac{\pi}{6}+n\pi$. 867. $\operatorname{arctg}\sqrt{2}+n\pi$. 868. $-\operatorname{arctg}\frac{5}{3}+n\pi$. 869. $\frac{\pi}{4}+n\pi$; $\frac{\pi}{3}+k\pi$. 870. $\frac{\pi}{4}+n\pi$; $\operatorname{arctg} 3+k\pi$. 871. $\frac{\pi}{3}+n\pi$; $\frac{\pi}{6}+k\pi$. 872. $n\pi$. 873. $\frac{\pi}{2}+n\pi$. 875. $\frac{\pi}{4}+n\pi$; $\operatorname{arctg} 2+k\pi$. 876. $-\operatorname{arctg}(2+\sqrt{3})+n\pi$; $\frac{\pi}{6}+k\pi$. 877. $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{2}$. 878. $\frac{\pi}{4}+2n\pi$. 881. 7 корней. 882. 0,47. 885. $x \neq \frac{\pi}{2}+2n\pi$. 892. $73^\circ < \alpha < 90^\circ$. 895. $\frac{24}{25}$, $\frac{7}{24}$, $\frac{24}{7}$, если φ оканчивается в первой четверти; $-\frac{24}{25}$, $-\frac{7}{24}$, $-\frac{24}{7}$, если φ оканчивается во второй четверти. 896. $\frac{7}{25}$, $-\frac{7}{24}$, $-\frac{24}{7}$. 897. $-\frac{1}{\sqrt{10}}$, $-\frac{3}{\sqrt{10}}$, 3. 898. $\frac{7}{25}$, $\frac{24}{25}$, $\frac{7}{24}$, $\frac{24}{7}$ и $-\frac{7}{25}$, $\frac{24}{25}$, $-\frac{7}{24}$, $-\frac{24}{7}$. 899. $\frac{7}{25}$, $\frac{24}{25}$, $\frac{7}{24}$, $\frac{24}{7}$ и $\frac{7}{25}$, $-\frac{24}{25}$, $-\frac{7}{24}$, $-\frac{24}{7}$. 900. $\frac{5}{13}$, $\frac{12}{13}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{12}{5}$ и $-\frac{5}{13}$, $\frac{12}{13}$, $-\frac{5}{12}$, $-\frac{12}{5}$. 901. $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$ и $\frac{3}{5}$, $-\frac{4}{5}$, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{4}{3}$.

Рис. 7*

902. 0,6. 903. $-0,6$. 904. $-\frac{12}{5}$. 905. 0,8. 907. См. рис. 5*. 908. См. рис. 6*. 911. а) $a < \frac{1}{4}$. б) $-2 < a < \frac{1}{4}$. 917. $-\frac{\pi}{6}$. 918. $0,9\pi$. 919. $2-\frac{\pi}{2}$. 921. $-\frac{\pi}{4}+n\pi$; $\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$. 922. $\operatorname{arctg}(-1\pm\sqrt{3})+n\pi$. 923. Нет корней. 924. $\pm\frac{\pi}{4}+2n\pi$. 925. $-\frac{\pi}{4}+n\pi$; $2k\pi$; $\frac{\pi}{2}+2l\pi$. 926. $\frac{n}{2}\pi$. 927. $\frac{\pi}{2}+2n\pi$; $\frac{\pi}{4}+\frac{k}{2}\pi$. 928. Нет корней. 929. $-\frac{\pi}{2}+2n\pi < x < \frac{\pi}{2}+2n\pi$. 930. $\pi+2n\pi < x < 2\pi+2n\pi$.

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ VI

934. а) Да; б) нет; в) да, если $a \neq 0$; при $a=0$, $|b|<1$ данная последовательность бесконечна; при $a=0$, $|b|>1$ уравнение $\sin x = ax+b$ совсем не имеет корней. 936. Указание. $a_{n+1}-a_n = \frac{2}{(2n+3)(2n+1)} > 0$. 938. $ad-bc>0$. 947. $N=199$. 948. $N=24$. 949. $N=100$. 950. $N=200$. 954. $-\frac{1}{2}$. 955. 3. 956. 0. 957. -1. 958. 1. 959. $\frac{a_1}{a_2}$, если $a_2 \neq 0$; если $a_2=0$, а $a_1\neq 0$, то предел не существует; если $a_1=a_2=0$, а $b_2\neq 0$, то предел равен $\frac{b_1}{b_2}$ и т. д. 961. а) Нет; б) да; г) да при $a<0$; нет при $a>0$. 964. а) $a_n = 5-10(n-1)$; в) $a_n=6+3(n-1)$. 967. а) Да; б) нет; в) да. 968. -1; 0; 1. 969. Либо $a_1=2$, $d=3$, либо $a_1=14$, $d=-3$. 970. Либо $a_1=2$, $d=2$, либо $a_1=22$, $d=-2$. 971. 247 500. 972. 156. 975. n^2-m^2. 976. 22 *м*. 977. а) 55; б) 1. 978. 16°. 979. 1, 3, 5, ... 980. 100. 981. в) Либо $a_n=(-1)^n$, либо $a_n=-1$. 983. 1, -3, 9, ... 984. $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... 989. г) 2731; д) $\frac{x^{101}-1}{x-1}$, если $x\neq 1$; 101, если $x=1$. 990. $100\left(1-\frac{1}{10}\right)^{10}$%. 991. 2^{72}. 993. а) -1; б) нет корней. 994. 17, 10, 3 или 8, 10, 12. 996. б) $\frac{9}{4}$; в) $\frac{5+3\sqrt{3}}{2}$. 997. Если $a>0$, то при $x>0$; если $a<0$, то при $x<0$; если же $a=0$, то данная геометрическая прогрессия не будет убывающей ни при каком значении x. 998. а) $6a$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$.

1000. 5, 1, $\frac{1}{5}$, ... 1004. а) Вообще говоря, нет; б) да. 1006. а) 0,1, $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$; б) 1; в) 1. *Примечание.* Последовательность 0, 0, 0, ... мы не относим к геометрическим прогрессиям. 1007. $\frac{(1+a^{2n+2})(1-a^{2n})}{a^{2n}(1-a^2)}+2n$. 1009. Такими числами могут быть лишь равные числа: a, a, a.
1012. $a_m=\frac{A+B}{2}$, $a_n=A+\frac{m}{2n}(B-A)$. 1014. 1, 3, 5, ... или 29, 27, 25, ... 1016. 1 и -3 или -3 и 1. 1017. Нет. 1019. См. рис. 7*. 1020. 3,1, -1 или 15, 1, -13. 1021. 5, 15, 45. 1022. 12, 16, 20, 25.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА — I

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА II

КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН III

СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ IV

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ V

Ч СЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ VI

Евгений Семенович Кочетков
Екатерина Семеновна Кочеткова

АЛГЕБРА

И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

9 класс

Редактор *Г. С. Уманский*
Переплет художника *А. С. Котлярова*
Художественный редактор *В. С. Эрденко*
Технический редактор *В. И. Корнеева*
Корректор *К. А. Иванова*

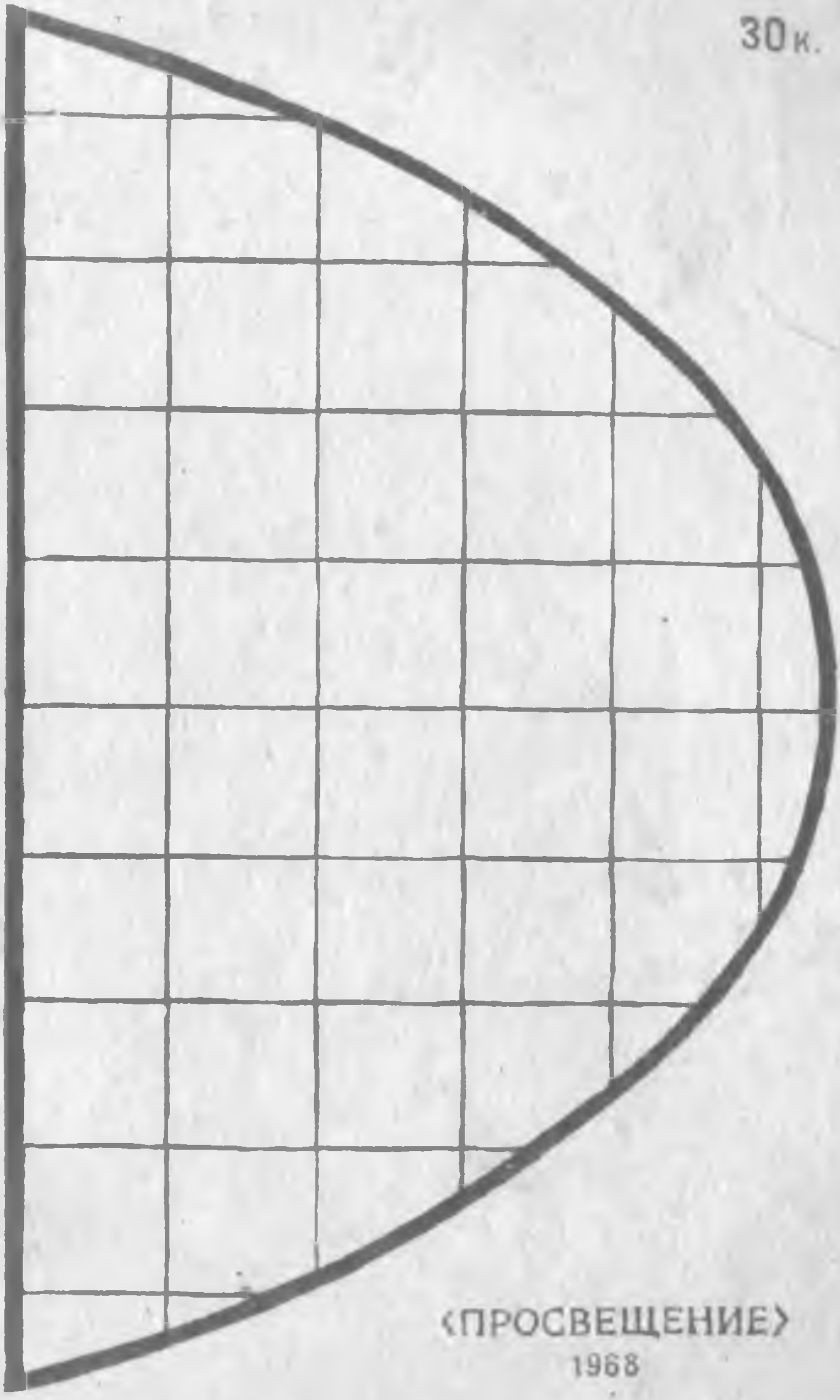
Подписано к печати с матриц 26/XII 1967 г. 60×90$^1/_{16}$. Бумага тип. № 2. Печ. л. 22. Уч.-изд. л. 17,14. Тираж 600 тыс. (1 500 001—2 100 000) экз. Заказ № 196.

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Цена без переплета 23 коп. Переплет бум. 7 коп., бум. ледерин 12 коп., коленкор 15 коп.

30 к.



«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
1968