М.Л.ГАЛИЦКИЙ, М.М.МОШКОВИЧ, С.И.ШВАРЦБУРД

# АЛГЕБРА ВА МАТЕМАТИК АНАЛИЗ КУРСИНИ ЧУҚУР ЎРГАНИШ

М. Л. ГАЛИЦКИЙ,
М. М. МОШКОВИЧ,
С. И. ШВАРЦБУРД

# АЛГЕБРА ВА МАТЕМАТИК АНАЛИЗ КУРСИНИ ЧУҚУР ЎРГАНИШ

## МЕТОДИК ТАВСИЯЛАР ВА ДИДАКТИК МАТЕРИАЛЛАР

УҚИТУВЧИ УЧУН ҚЎЛЛАНМА

ҚАЙТА ИШЛАНГАН РУСЧА
2- НАШРИДАН ТАРЖИМА

ТОШКЕНТ «УҚИТУВЧИ» 1995

Ўзбекистон Республикаси
Халқ таълими вазирлигининг
дарсликларни қайта кўриш махсус комиссияси маъқуллаган

Ушбу китоб математика чуқур ўрганиладиган мактаблар ва синфларда ишловчи ўқитувчилар учун мўлжалланган. У ўз ичига айрим назарий масалаларни ўрганиш ва топшириқларни ечиш бўйича методик тавсияларни, дарсларни режалаштиришни, барча мавзулар бўйича мустақил ва назорат ишлар ҳамда 1982—1988 йиллардаги имтиҳон ишлари намуналарини олади.

Г 17

**Галицкий М. Л.** ва бошқ.

Алгебра ва математик анализ курсини чуқур ўрганиш: Методик тавсиялар ва дидактик материаллар: Ўқитувчи учун қўлланма / М. Л. Галицкий, И. М.Мошкович, С. И. Шварцбурд.— Қайта ишланган русча 2-нашр. тарж.— Т.: «Ўқитувчи», 1995.— 384 б.

1.1, 2 автордош.

ББК 74.262

Г $\frac{4306010000-192}{353\ (04)-95}$ 95—94

ISBN 5—645—02204—1

## СЎЗ БОШИ

Математикани чуқур ўрганиш синфлари кўпдан бери мавжуд, улар мактаб таълими системасида мустаҳкам ўрнашди, ёш математиклар, мухандислар ва техникларнинг бутун бир авлодини тарбиялашда ёрдам берди.

Китобхонга тақдим этилаётган «Алгебра ва математик анализ курсини чуқур ўрганиш» китоби шу курс бўйича методик тавсиялар ва дидактик материалларни ўз ичига олади ва математикани чуқур ўрганиш мактаблари ва синфлари ўқитувчиларига мўлжалланади. Бу материаллар Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев — Мусатов ва С. И. Шварцбурдларнинг 1992 ва 1993 йилларда «Просвещение» нашриёти томонидан X синф учун чиқарилган «Алгебра ва математик анализ» қўлланмасига ва XI синфга мўлжалланган худди шундай қўлланмага мувофиқ ёзилди. Китобдаги дидактик материаллар муаллифлар томонидан математика чуқур ўрганиладиган мактаблар ва синфлар ўқитувчилари билан олиб борган Москва шаҳар ўқитувчилар малакасини ошириш институтида ўтказилган семинарлар қатнашчилари таништирилди.

Ушбу қўлланма:

— математика чуқур ўрганиладиган X ва XI синфлар учун ўқув материалини тахминий режалаштириш;

— номи юқорида кўрсатилган ўқув қўлланмаларида келтирилган масалалар ичидан муаллифларнинг фикрича энг қийинларининг ечимлари ва уларни ечишга кўрсатмалар;

— курснинг айрим бўлимлари бўйича масалаларни ечишга оид методик тавсиялар;

— математика чуқур ўрганиладиган X ва XI синфлар алгебра ва математик анализ тўлиқ курси бўйича назорат ва мустақил ишлар;

— олдинги йилларда битириш имтиҳонларида берилган имтиҳон ишлари, унинг ечимлари ёки уларга доир кўрсатмаларни ўз ичига олади.*

Ўқув материали X синфда ҳафтасига 5,5 соат ва XI синфда ҳафтасига 5 соат ҳисобидан режалаштириб берилди.

---

* Назорат, мустақил ва имтиҳон ишлари материалидан ўқувчиларнинг билими ва малакасини текшириш учун ўтказиладиган тест синовлари топшириқларини тузишда ҳам фойдаланиш мумкин.

Масалаларни ечишга доир тавсиялар математик индукция усули; Безу теоремаси ва унинг натижаларининг кўпҳадларни кўпайтувчиларга ажратиш ҳамда юқори даражали тенгламаларни ечишга татбиқи; функциялар графикларининг асимптоталарини топиш; функцияларни ҳосила ёрдами билан текшириш; аниқ интегралнинг ясси шакллар юзларини топишда қўлланилиши; функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топиш; тенгсизликларни исботлашнинг турли усуллари ва бошқа мавзулар бўйича берилди.

Ушбу китобда масалалар ечишга мактабда математикани чуқур ўрганишнинг асосий воситаси сифатида қаралади. Бунда ўқитувчи у ёки бу масаланинг ечилиши назарий материалига чуқурроқ қарашга, у ёки бу умумлаштиришларга ёрдам беришини кўра олади.

Китобда мустақил ва назорат ишлари олти вариант билан берилди ва улар дастур материалининг барча мавзуларини ўз ичига олади. 1 ва 2- вариантлар ечими тўлиқ келтирилди, қолган вариантларнинг эса жавоблари (нисбатан қийин машқларга — уларни ечиш учун кўрсатмалар) берилди. Тавсия этилаётган ишларнинг ҳисоблаш қисми микрокалькуляторлардан фойдаланиб бажарилиши мумкин.

Мустақил ишлар бир дарс ёки унинг бир қисмига мўлжалланади, лекин барча иш ўқувчиларга тўлалигича тавсия этилиши шарт эмас, топшириқлар қисмлаб берилиши мумкин. Топшириқ синф таркиби ва унинг тайёрлигига қараб ўқитувчи томонидан танланади. У ёки бу мустақил ишнинг қолдирилиши ва ундаги машқлардан ўқувчилар билан индивидуал ишларни ўтказишда фойдаланилиши ҳам мумкин.

Назорат ишлари бир ёки икки дарсга мўлжалланган. Ҳар қайси назорат ишида асосий қисмдан ташқари «°» орқали белгиланган қўшимча қисм ҳам бор. У ўзлаштириши кучли ўқувчилар учун мўлжалланади ва агар ишнинг асосий қисми 4 ёки 5 баҳога бажарилган бўлса, қўшимча қисм учун алоҳида баҳо қўйилади. Бу ҳолда журналга 4 дан паст баҳо қўйиш тавсия этилмайди, 4 баҳо эса фақат ўқувчининг хоҳиши билан қўйилиши мумкин. XI синфдаги охирги назорат иши уч дарсга мўлжаллангандир.

Гарчи «Алгебра ва математик анализни чуқур ўрганиш» китоби математика чуқур ўрганиладиган мактаблар ва синфлар ўқитувчилари учун мўлжалланган бўлса ҳам, у умумий таълим мактаблари ўқитувчиларига факультатив машғулотлар ва математик тўгаракларни олиб боришда ёрдам бериши мумкин.

Фурсатдан фойдаланиб, ўзларининг фикрлари билан китобнинг мазмунини яхшилашга кўмаклашганликлари учун тақризчилар А. М. Гольдман ва Л. И. Звавичга миннатдорчилик изҳор қиламиз.

*Муаллифлар*

# ЎҚУВ МАТЕРИАЛИНИ ТАХМИНИЙ РЕЖАЛАШТИРИШ

| Дарсларнинг номери | Ўқув материалининг мазмуни |
|---|---|
| | **X СИНФ** |
| | (I ярим йилда ҳафтасига 5 соат, II ярим йилда ҳафтасига 6 соат, жами 187 соат) |
| | **Ҳақиқий сонлар (14 соат)** |
| 1—4 | Ҳақиқий сонлар ва чексиз ўнли касрлар. Рационал ва иррационал сонлар. 1- мустақил иш |
| 5—9 | Ҳақиқий сонлар устида арифметик амаллар. Даврий ўнли касрларни оддий касрларга айлантириш. Микрокалькуляторлар ва ҳисоблашларда улардан фойдаланиш. 2- мустақил иш |
| 10—13 | Тўғри чизиқда ва текисликда координаталар. Кесмани берилган нисбатда бўлувчи нуқтанинг координатлари. Координаталари билан берилган икки нуқта орасидаги масофа |
| 14 | 1- назорат иши |
| | **Кўпҳадлар (30 соат)** |
| 15—17 | Ифодалар ва уларнинг синфлари. Бутун рационал ифодаларни айний алмаштириш. 3- мустақил иш |
| 18—21 | Тўла ва тўламас индукция. Математик индукция усули. Математик индукция усули билан айниятлар ва тенгсизликларни исбот қилиш |
| 22 | 2- назорат иши |
| 23—26 | Бир ўзгарувчили кўпҳадлар. Бутун рационал ифодаларнинг каноник кўриниши. Кўпҳадни қолдиқли бўлиш. 4- мустақил иш. |
| 27—29 | Безу теоремаси. Горнер схемаси. Кўпҳад илдизлари, кўпҳаднинг бутун илдизларини топиш. Виет теоремаси |
| 30 | Рационал ифодаларнинг айнан тенглиги, рационал ифодаларнинг каноник шакли |
| 31—32 | 3- назорат иши |
| 33—38 | Тенгламалар, айниятлар, тенгсизликлар. Тенг кучли тенгламалар ва тенгсизликлар. Тенгламаларни ечишнинг асосий усуллари. 5- мустақил иш |

| Дарсларнинг номери | Ўқув материалнинг мазмуни |
|---|---|
| 39—42 | Тенгсизликларни ечиш ва исботлаш |
| 43—44 | 4- назорат иши |
| | **Функциялар (18 соат)** |
| 45—48 | Сонли функциялар. Уларнинг берилиш усуллари. Функциянинг графиги. Функциялар устида амаллар. Функциялар композицияси |
| 49—54 | Функциялар графикларини алмаштириш. Чизиқли, квадратик ва каср-чизиқли функциялар графиклари. 6- мустақил иш |
| 55—58 | Жуфт ва тоқ функциялар. Функцияларнинг ўсиши ва камайиши |
| 59—60 | Сонли кетма-кетликлар. Рекуррент муносабатлар |
| 61—62 | 5- назорат иши |
| | **Лимит ва узлуксизлик (25 соат)** |
| 63—67 | Чексиз кичик функциялар. Чексиз кичик функциялар устида амаллар. Функциянинг чексизликдаги лимити. Функция лимитининг $x \to +\infty$ даги хоссалари |
| 68—70 | Чексиз катта функциялар. Горизонтал ва оғма асимптоталар. 7- мустақил иш |
| 71—73 | Кетма-кетлик лимити. Монотон ва чегараланган функция лимитининг мавжудлиги |
| 74 | 6- назорат иши |
| 75—80 | Функциянинг нуқтадаги лимити ва унинг хоссалари. Узлуксиз функциялар. Узилиш нуқталари. Вертикал асимптоталар |
| 81—84 | Узлуксиз функциялар устида арифметик амаллар. Кесмада узлуксиз бўлган функцияларнинг оралиқ қийматлари ҳақидаги теоремалар |
| 85 | Тескари функциялар |
| 86—87 | 7- назорат иши |
| | **Ҳосила ва унинг татбиқи (35 соат)** |
| 88—91 | Функциялар орттирмаси. Дифференциалланувчи функциялар. Ҳосила. Ҳосиланинг физик маъноси. Дифференциал. Тақрибий ҳисоблашлар. 8- мустақил иш |
| 92—95 | Ҳосиланинг геометрик маъноси. Функция графигига уринувчи тўғри чизиқ ва унинг тенгламаси. Дифференциалланувчи функциянинг узлуксизлиги. 9- мустақил иш |
| 96—99 | Дифференциаллаш қоидаси. Функциялар чизиқли комбинациясини дифференциаллаш. Функция даражасини ва функциялар кўпайтмасини дифференциаллаш. Касрни дифференциаллаш. Иккинчи ҳосила |
| 100—101 | 8- назорат иши |
| 102—105 | Функция экстремумининг зарурий шарти. Функциянинг кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топиш |

| Дарсларнинг номери | Ўқув материалининг мазмуни |
|---|---|
| 106—111 | Лагранж теоремаси ва унинг натижалари. Функциянинг ўсиши ва камайишини текшириш. Функция экстремумининг етарли шарти. Функциялар графикларининг қавариқлигини текшириш ва эгилиш нуқталари. 10- мустақил иш |
| 112—116 | Ҳосилаларнинг функцияларни текшириш ва графикларини ясашга, функцияларнинг энг катта ва энг кичик қийматларини топишга татбиқи |
| 117—118 | 9- назорат иши |
| 119—122 | Ҳосилалар ва тенгсизликларни исботлаш. Ньютон биноми. Биномиал коэффициентларнинг хоссалари. Ньютон биномининг тақрибий ҳисоблашларга татбиқи. 11- мустақил иш |
|  | **Тригонометрик функциялар (50 соат)** |
| 123—124 | Ёй узунлиги. Ёй ва бурчакларнинг радиан ўлчови. Координат айлана |
| 125—131 | Тригонометрик функциялар: сонли аргументнинг синуси, косинуси, тангенси ва котангенси. Тригонометрик функцияларнинг даврийлиги. Синус ва косинуснинг узлуксизлиги. Жуфт ва тоқ тригонометрик функциялар. Гармоник тебранишлар. $\sin x = a$, $\cos x = a \left(a = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1\right)$; $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a \left(a = 0, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm 1, \pm \sqrt{3}\right)$ тригонометрик тенгламаларни бирлик айланадан фойдаланиб ечиш |
| 132—133 | 10- назорат иши |
| 134—138 | Тригонометрик функцияларнинг қўшиш формулалари. Келтириш формулалари. Иккиланган ва учланган аргументнинг тригонометрик функциялари. Ярим аргументнинг тригонометрик функциялари. 12- мустақил иш |
| 139—142 | Бир исмли тригонометрик функциялар йигиндиси ва айирмасини кўпайтмага ва шу функциялар кўпайтмасини йигиндига айлантириш. Гармоник тебранишларни қўшиш |
| 143—144 | 11- назорат иши |
| 145—149 | Тригонометрик функцияларни дифференциаллаш. Функциялар композициясини дифференциаллаш. 13- мустақил иш |
| 150—153 | Энг содда тригонометрик тенгламаларни ечиш. Арксинус, арккосинус, арктангенс ва арккотангенснинг таърифи |
| 154—160 | Тригонометрик тенгламаларни ечишнинг асосий усуллари |
| 161—162 | 12- назорат иши |
| 163—166 | Тригонометрик тенгсизликларни исботлаш ва ечиш. 14- мустақил иш |
| 167—171 | Тескари тригонометрик функциялар. Тескари тригонометрик функциялар билан боглиқ лимитларни ҳисоблаш. Тескари тригонометрик функциялар қатнашган тенгламалар ва тенгсизликлар |
| 172 | 13- назорат иши |

*давоми*

| Дарсларнинг номери | Ўқув материалининг мазмуни |
|---|---|
| | **Такрорлаш** (15 соат) |
| 173—176 | Функциянинг лимити ва узлуксизлиги. Ҳосила. Функцияларни ҳосила ёрдамида текшириш |
| 177—180 | Бир ўзгарувчили кўпҳадлар. Безу теоремаси ва унинг натижалари |
| 181—183 | Бир ўзгарувчили тенгламалар ва тенгсизликлар |
| 184—185 | 14- назорат иши |
| 186—187 | Масалалар ечиш |
| | XI СИНФ |
| | (ҳафтасига 5 соат, жами 170 соат) |
| | **Интеграл ва дифференциал тенгламалар** (28 соат) |
| 1—9 | Бошланғич функция ва аниқмас интеграл. Аниқмас интегралнинг хоссалари. Интеграллаш қоидаси билан танишиш. 1- мустақил иш |
| 10—16 | Дифференциал тенгламаларга келтириладиган масалаларга доир мисоллар. Бошланғич шартлар. Ўзгарувчилари ажраладиган тенгламалар. Гармоник тебранишнинг дифференциал тенгламаси. Дифференциал тенгламаларнинг татбиқи |
| 17 | 1- назорат иши |
| 18—23 | Эгри чизиқли трапециянинг юзи. Аниқ интеграл. Ньютон — Лейбниц формуласи. Интегралнинг гармоник ва физик масалаларни ечишга татбиқи. 2- мустақил иш |
| 24—27 | Аниқ интегралнинг хоссалари |
| 28 | 2- назорат иши |
| | **Кўрсаткичли, логарифмик ва даражали функциялар** (42 соат) |
| 29—32 | Кўрсаткичли функция, унинг хоссалари ва графиги. 3- мустақил иш |
| 33—36 | Логарифмик функция, унинг хоссалари ва графиги. 4- мустақил иш |
| 37—42 | Кўрсаткичли ва логарифмик тенгламалар ва тенгсизликларни ечишнинг асосий усуллари |
| 43—44 | 3- назорат иши |
| 45—50 | *e* сони. Натурал логарифмлар. *e* сони билан боғлиқ бўлган баъзи лимитлар. Кўрсаткичли ва логарифмик функцияларнинг ҳосиласи. 5- мустақил иш |
| 51—52 | Органик ўзгариш жараёнларининг дифференциал тенгламаси |
| 53—54 | 4- назорат иши |
| 55—58 | Даражали функция ва унинг ҳосиласи. Кўрсаткичли, логарифмик ва даражали функцияларнинг ўсишини таққослаш. 6- мустақил иш |

*давоми*

| Дарсларнинг номери | Ўқув материалининг мазмуни |
|---|---|
| 59—62 | Иррационал ифодаларни алмаштириш. 7-мустақил иш. |
| 63—68 | Иррационал тенгламалар ва тенгсизликлар |
| 69—70 | 5-назорат иши |
| | **Кўп ўзгарувчили кўпҳадлар. Тенгламалар ва тенгсизликлар системалари** (24 соат) |
| 71—74 | Кўп ўзгарувчили кўпҳаднинг стандарт шакли. Симметрик кўпҳадлар. Тенгсизликларни исботлаш. 8-мустақил иш |
| 75—78 | Икки ўзгарувчили бир тенгламанинг геометрик маъноси. Тенгламалар системалари. Номаълумларни йўқотиш усули, алгебраик қўшиш усули. 9-мустақил иш |
| 79—80 | Ўзгарувчиларни алмаштириш усули |
| 81—82 | 6-назорат иши |
| 83—86 | Чизиқли тенгламалар системалари. Гаусс усули. Иррационал тенгламалар системалари. 10-мустақил иш |
| 87—90 | Кўрсаткичли, логарифмик ва тригонометрик тенгламалар системалари. 11-мустақил иш |
| 91—92 | Икки ўзгарувчили тенгсизликларни ечиш. Чизиқли дастурлаш ҳақида тушунча |
| 93—94 | 7-назорат иши |
| | **Комплекс сонлар** (20 соат) |
| 95—99 | Комплекс сонлар ва улар устида амаллар. 12-мустақил иш |
| 100—104 | Комплекс сонларнинг геометрик кўриниши. Қутб координаталар системаси ва комплекс соннинг тригонометрик шакли. Тригонометрик шаклдаги комплекс сонларни кўпайтириш, бўлиш, даражага кўтариш. Муавр формуласи |
| 105 | 8-назорат иши |
| 106—110 | Комплекс сондан илдиз чиқариш. Алгебраик тенгламаларнинг комплекс илдизлари. Алгебранинг асосий теоремаси ҳақида тушунча. 13-мустақил иш |
| 111—112 | Комплекс сонларнинг татбиқи |
| 113—114 | 9-назорат иши |
| | **Комбинаторика элементлари** (12 соат) |
| 115—125 | Комбинаториканинг асосий тушунчалари ва принциплари. Йиғинди қоидаси ва кўпайтма қоидаси. Такрорли ва такрорсиз ўринлаштириш, ўрин алмаштириш ва гуруҳлашлар сони учун формулалар. Ньютон формуласи. Комбинаторик масалаларни ечиш. |
| 126 | 10-назорат иши |
| | **Эҳтимолликлар назарияси элементлари** (14 соат) |
| 127—135 | Тасодифий ҳодисалар. Эҳтимоллик. Қўшиш теоремалари. Эркин тасодифий ҳодисалар. Шартли эҳтимоллик. Кўпайтириш формулалари. 14-мустақил иш |

*давоми*

| Дарсларнинг номери | Ўқув материалининг мазмуни |
|---|---|
| 136—139 | Бернулли формуласи. Катта сонлар қонуни |
| 140 | 11- назорат иши |
| | **Такрорлаш (30 соат)** |
| 141—143 | Ҳақиқий сонлар. Соннинг модули. Сонли функциялар, уларнинг хоссалари |
| 144—145 | Функциянинг лимити ва узуксизлиги. Ҳосила ва бошланғич функция |
| 146—149 | Ҳосиланинг қўлланилиши. Уринма. Функцияларни текшириш. Функциянинг энг катта ва энг кичик қиймати. Масалалар ечиш |
| 150—151 | 12- назорат иши |
| 152—155 | Тригонометрик функциялар ва уларнинг хоссалари. Тригонометрик тенгламалар ва тенгсизликларни ечиш. 15- мустақил иш |
| 156—158 | Кўрсаткичли ва логарифмик функциялар ва уларнинг хоссалари. Кўрсаткичли ва логарифмик тенгламалар ва тенгсизликни ечиш. |
| 159—162 | Бутун курс бўйича тенгламалар, тенгсизликлар, тенгламалар ва тенгсизликлар системаларини ечиш |
| 163—164 | Комплекс сонлар |
| 165—167 | 13- назорат иши |
| 168—170 | Бутун курс бўйича масалалар ечиш |

# МЕТОДИК ТАВСИЯЛАР

Ушбу бўлимда алгебра ва математик анализ курсининг айрим мавзулари бўйича масалалар ечиш учун методик тавсиялар келтирилади. Айрим ҳолларда ўрганиладиган материалнинг мазмуни тушунтирилади, ўқитувчи учун қўшимча маълумот берилади, теоремаларнинг исботи, формулаларнинг келтириб чиқарилиши берилади ва ҳ. к. Кўп бандлар X ва XI синф ўқув қўлланмаларидаги* масалаларни ечиш учун кўрсатмаларга ёки масалаларнинг ечимига эга. Қўшимча машқлар ўқитувчи томонидан синф иши жараёнида ва уй вазифаси учун фойдаланилиши мумкин.

## 1. МАТЕМАТИК ИНДУКЦИЯ УСУЛИ

Математик индукция усулининг асосида аксиома сифатида қабул қилинадиган математик индукция принципи ётади.

Агар:

1) $P(n)$ тасдиқ $n = 1$ да тўғри бўлса;

2) исталган $k \in N$ учун $P(k)$ нинг тўғрилигидан $P(k+1)$ нинг тўғрилиги келиб чиқса, $n$ натурал сонга боғлиқ бўлган $P(n)$ тасдиқ исталган $n \in N$ да тўғри бўлади.

Математик индукция усули билан исботлаш қуйидаги тартибда бажарилади. Аввал исботланаётган тасдиқ $n = 1$ бўлганда текшириб кўрилади. Исботнинг бу қисми *индукция базиси* деб аталади. Сўнг *индукция қадами* деб аталадиган исбот қисми келади. Бу қисмда тасдиқ $n = k$ да тўғри, деб фараз қилинган ҳолда (индукция фарази) тасдиқнинг $n = k + 1$ да тўғри бўлиши исботланади.

X синф ўқув қўлланмасида математик индукция усулининг йиғиндини топишга, айниятлар ва тенгсизликларни исботлашга доир масалаларда қўлланилиши қаралади, арифметик ва геометрик прогрессияларнинг $n$-ҳади ва дастлабки $n$ та ҳади йиғиндиси учун формулалар чиқарилади. Машқлар орасида кетма-кетликни рекуррент усул билан беришга боғлиқ масалалар ҳам учрайди. Ўқув қўлланмадаги мавжуд масалалардан ташқари яна ўқувчиларга бўлинишга до-

---

* Виленкин Н. Я., Ивашев—Мусатов О. С., Шварцбурд С. И. 10-синф учун алгебра ва математик анализ—М.; Просвещение, 1992.

Виленкин Н. Я., Ивашев—Мусатов О. С., Шварцбурд С. И. 11-синф учун алгебра ва математик анализ.—М.: Просвещение, 1993.

ир масалалардан ҳам бериш, математик индукция усулининг баъзи геометрик ва бошқа масалаларни ечишга татбиқини кўрсатиш фойдали.

1-мисол. Исталган натурал $n$ да $7^{n+1}+8^{2n-1}$ сонининг 19 га га бўлинишини исботланг.

Ечиш. Агар $n=1$ бўлса, $7^2+8^1=57$ бўлади, 57 эса 19 га бўлинади. Бирор $k$ натурал сон учун $7^{k+1}+8^{2k-1}$ сони 19 га бўлинади, деб фараз қилайлик. Бу ҳолда $7^{k+2}+8^{2k+1}$ нинг 19 га бўлинишини исботлаймиз.

Ҳақиқатан, $7^{k+2}+8^{2k+1}=7\cdot 7^{k+1}+64\cdot 8^{2k-1}=7(7^{k+1}+8^{2k-1})+$ $+57\cdot 8^{2k-1}$. Олинган йиғиндидаги ҳар қайси қўшилувчи 19 га бўлинаётганидан $7^{k+2}+8^{2k+1}$ ҳам 19 га бўлинади. Мулоҳаза исботланди.

2-мисол. Текисликда $n$ та тўғри чизиқ ўтказилган бўлиб, улардан ҳеч қайси иккитаси параллел эмас ва ҳеч қайси учтаси бир нуқтадан ўтмайди. Бу тўғри чизиқлар текисликни неча қисмга бўлади?

Ечиш. Мос расмларни чизиб, бир тўғри чизиқ текисликни 2 қисмга, икки тўғри чизиқ уни 4 қисмга, уч тўғри чизиқ 7 қисмга, тўрт тўғри чизиқ 11 қисмга бўлишини билиш қийин эмас.

$n$ тўғри чизиқ текисликни бўлгандаги қисмлар сонини $N(n)$ орқали белгилаймиз. $N(1)=2$, $N(2)=N(1)+2$, $N(3)=N(2)+3$, $N(4)=N(3)+4$ бўлишини кўриш мумкин. $N(n)=N(n-1)+n$ деб фараз қилиниши табиий.

$n$ та

$$\begin{aligned} N(1) &= 2, \\ N(2) &= N(1)+2, \\ N(3) &= N(2)+3, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ N(n) &= N(n-1)+n \end{aligned}$$

тенгликни ҳадлаб қўшиб, $N(n)=2+2+3+4+\ldots+n$ ни топамиз ёки

$$N(n)=1+\frac{n(n+1)}{2}. \qquad (1)$$

(1) формуланинг тўғрилигини математик индукция усули билан исботлайлик.

$n=1$ учун формула текшириб кўрилди. Индукция фаразини қилиб, масала шартини қаноатлантирувчи $k+1$ та тўғри чизиқни қараймиз. Улардан $k$ та тўғри чизиқни ихтиёрий тартибда ажратамиз. Индукция фаразига кўра улар текисликни $1+\frac{k(k+1)}{2}$ қисмга бўлади. Қолган $(k+1)$-тўғри чизиқ ажратилган $k$ та тўғри чизиқ томонидан $k+1$ қисмга бўлинади ва шунинг учун у олдин бўлакланган текисликнинг $k+1$ қисми устидан ўтади ва шу қисмларнинг ҳар бирини 2 қисмга бўлади, яъни қисмлар сони $k+1$ тага ортади.

Шундай қилиб, $N(k+1) = N(k) + k + 1 = 1 + \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = 1 + \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ бўлиб, шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Қатор ҳолларда бирор тасдиқнинг барча натурал $n$ ларда эмас, балки $n > m$ дагина тўғрилигини исботлаш зарур бўлади, бунда $m$ — белгилаб қўйилган натурал сон. Масалан, кўпёқлилар хоссаларини исботлаш учун $n=4$ дан бошлашимизга тўғри келарди.

Бу ҳолда математик индукция принципи бундай таърифланади.

*$m$ — бирор натурал сон бўлсин. Агар ушбу икки шарт бажарилса;*

1) *$n=m$ да $P(n)$ мулоҳаза тўғри ва*

2) *ҳар қандай $k \geqslant m$ натурал сон учун $P(k)$ нинг тўғрилигидан $P(k+1)$ нинг тўғрилиги келиб чиқса, $P(n)$, $n \in N$ мулоҳаза барча $n \geqslant m$ натурал қийматларда тўғри бўлади.*

Шуни таъкидлаймизки, бу ҳолда индукция фарази бошқа кўринишга эга бўлганидан (исботланадиган тасдиқ $n = k \geqslant m$ да тўғри деб фараз қилинмоқда) тасдиқ $n < m$ қийматларда тўғри ҳам, нотўғри ҳам бўлиши мумкин. Математик индукция усули билан бажарилган исбот тасдиқнинг $1 \leqslant n < m$ да тўғри бўлишига асос бўла олмайди.

3- мисол. $2^n > 2n^2 - 3n + 1$ тенгсизлик тўғри бўладиган барча $n \in N$ ларни топинг.

Ечиш. Тенгсизлик $n = 1$ да тўғри. Бирор натурал $k$ да $2^k > 2k^2 - 3k + 1$ тенгсизлик ўринли, деб фараз қилайлик. $2^{k+1} > 2(k+1)^2 - 3(k+1) + 1$ тенгсизликни $2^{k+1} - 2k^2 - k > 0$ ёки $2(2^k - 2k^2 + 3k - 1) + 2k^2 - 7k + 2 > 0$ кўринишда қайта ёзиш мумкин бўлганидан, индукцион қадамни ўтказиш учун $2k^2 - 7k + 2 > 0$ тенгсизликнинг бажарилиши етарли. Бу кейинги тенгсизлик $k \geqslant 4$ да тўғри. Бунга қараганда $m=1$ индукция базиси бўла олмайди—биринчи индукция қадамини бажара олмаймиз. Табиийдирки, базис учун $m = 4$ ни олишга уриниб кўрамиз. Бу ҳолда индукция қадами бажарилади, лекин бевосита текшириш $n = 4$ да $2^n > 2n^2 - 3n + 1$ тенгсизлик бажарилмаслигини кўрсатади. Демак, $m = 4$ ҳам индукция базиси бўла олмайди. Фақат $m = 6$ да бу тенгсизлик тўғри, шунга кўра $m = 6$ индукция базиси учун олиш мумкин ($m \geqslant 6$ да индукция қадами ҳам бажарилади). Демак, $2^n > 2n^2 - 3n + 1$ тенгсизлик барча $n \geqslant 6$ натурал қийматларда тўғри. Шуни қайд қиламизки, $n$ нинг 6 дан кичик $n = 1, 2$ қийматларида ҳам бу тенгсизлик тўғри. Шундай қилиб, $n = 1, 2$ ва $n \geqslant 6$, $n \in N$ да тенгсизлик тўғри.

Баъзи масалаларда математик индукция принципи қуйидаги шаклда қўлланилади:

*Агар ушбу икки шарт бажарилса*:

1) *$P(n)$ тасдиқ $n = m$ ва $n = m + 1$ да тўғри;*

1) *исталган $k \geqslant m$ натурал қийматда $P(k)$ ва $P(k+1)$ нинг тўғрилигидан $P(k+2)$ нинг тўғрилиги келиб чиқса, $P(n)$ тасдиқ*

*барча $n \geqslant m$ $(m \in N)$ натурал сонлар учун тўғри бўлади, бунда $n$— натурал сон.*

Мисол тариқасида X синф ўқув қўлланмасидан 80-машқни олиб қараймиз.

4 (80)-**мисол.** $a_0, a_1, \ldots, a_n$ сонлар кетма-кетлиги ушбу қонун бўйича тузилади: олдинги икки $a_0$ ва $a_1$ сонлари берилган, кейинги ҳар қайсиси эса ундан олдинги иккитаси йиғиндисининг ярмига тенг. Қуйидагини ҳисобланг:

$$a_n = \frac{2a_1 + a_0}{3} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{a_1 - a_0}{3 \cdot 2^{n-1}}.$$

**Ечиш.** Мулоҳазанинг $n = 0$ ва $n = 1$ да тўғрилигини текширамиз.

$$a_0 = \frac{2a_1 + a_0}{3} - \frac{a_1 - a_0}{3 \cdot 2^{-1}} = a_0,$$

$$a_1 = \frac{2a_1 + a_0}{3} + \frac{a_1 - a_0}{3} = a_1$$

бўлади.

Исталган натурал $k$ учун мулоҳазанинг $n = k - 1$ ва $n = k$ да тўғрилигидан унинг $n = k + 1$ да ҳам тўғри бўлишини исботлаймиз.

Қуйидагига эга бўламиз:

$$a_{k+1} = \frac{a_{k-1} + a_k}{2} =$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{2a_1 + a_0}{3} + (-1)^{k-2}\left(\frac{a_1 - a_0}{3 \cdot 2^{k-2}} - \frac{a_1 - a_0}{3 \cdot 2^{k-1}}\right)}{2} =$$

$$= \frac{2a_1 - a_0}{3} + (-1)^{k-2} \cdot \frac{2(a_1 - a_0) - (a_1 - a_0)}{2 \cdot 3 \cdot 2^{k-1}} =$$

$$= \frac{2a_1 + a_0}{3} + (-1)^k \cdot \frac{a_1 - a_0}{3 \cdot 2^k}.$$

X синф ўқув қўлланмасидан яна бир неча масаланинг ечимини келтирамиз.

5 (85(2))-**мисол.** Қуйидаги айниятни исботланг:

$$\frac{x}{1 - x^2} + \frac{x^2}{1 - x^4} + \ldots + \frac{x^{2^{n-1}}}{1 - x^{2^n}} = \frac{1}{1 - x} \cdot \frac{x - x^{2^n}}{1 - x^{2^n}}.$$

**Ечиш.**

$$A(n) = \frac{x}{1 - x^2} + \frac{x^2}{1 - x^4} + \frac{x^4}{1 - x^8} + \ldots + \frac{x^{2^{n-1}}}{1 - x^{2^n}},$$

$$B(n) = \frac{1}{1 - x} \cdot \frac{x - x^{2^n}}{1 - x^{2^n}}$$

бўлсин.

$n = 1$ да қуйидагига эга бўламиз:

$$A(1) = \frac{x}{1 - x^2}\ ;\ B(1) = \frac{1}{1 - x} \cdot \frac{x - x^2}{1 - x^2} = \frac{x}{1 - x^2},\ \text{яъни}\ A(1) = B(1).$$

Қисқа ёзиш учун $2^k = m$ деб олайлик. У ҳолда:

$$A(k+1) - A(k) = \frac{x^m}{1 - x^{2m}};$$

$$B(k+1) - B(k) = \frac{1}{1-x}\left(\frac{x - x^{2m}}{1 - x^{2m}} - \frac{x - x^m}{1 - x^m}\right) =$$

$$= \frac{1}{1 - x} \cdot \frac{x - x^{2m} - (1 + x^m)(x - x^m)}{1 - x^{2m}} = \frac{1}{1 - x} \cdot \frac{x^m - x^{m+1}}{1 - x^{2m}} =$$

$$= \frac{x^m}{1 - x^{2m}}.$$

Шундай қилиб, $A(x+1) - A(k) = B(k+1) - B(k)$, $k \in N$. Демак, $A(k) = B(k)$ тенгликдан $A(k+1) = B(k+1)$ тенглик келиб чиқади.

**6 (86(5))-мисол.** Фибоначчи кетма-кетлиги қуйидаги шартлар билан берилади:

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1}.$$

Исботланг:

$$a_{n+1} \cdot a_{n+2} - a_n \cdot a_{n+3} = (-1)^n.$$

Ечиш. Қўйилган шартдан $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$ экани келиб чиқади. $n = 1$ да $a_2 a_3 - a_1 a_4 = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = (-1)^1$ бўлади.

Тенглик $n = k$, $k \in N$ да тўғри бўлсин: $a_{k+1} a_{k+2} - a_k a_{k+3} = (-1)^k$. Энди $n = k + 1$ да: $a_{k+2} a_{k+3} - a_{k+1} a_{k+4} = a_{k+2} a_{k+3} - a_{k+1}(a_{k+3} + a_{k+2}) = a_{k+2} a_{k+3} - a_{k+1} a_{k+3} - a_{k+1} a_{k+2} = (a_{k+1} + a_k) a_{k+3} - a_{k+1} a_{k+3} - a_{k+1} a_{k+2} = a_{k+1} a_{k+3} + a_k a_{k+3} - a_{k+1} a_{k+3} - a_{k+1} a_{k+2} =$

$$= -(a_{k+1} a_{k+2} - a_k a_{k+3}) = -(-1)^k = (-1)^{k+1}.$$

емак, тенглик $n$ нинг исталган натурал қийматида тўғри.

**7(89(3))-мисол.** Қуйидаги тенгсизликни исботланг:

$$2^n > n^3,\ n \geqslant 10,\ n \in N.$$

Ечиш. $n = 10$ да тенгсизлик тўғри: $2^{10} > 10^3$. $k \geqslant 10$, $k \in N$ нинг бирор ихтиёрий қийматида $2^k > k^3$ тенгсизлик бажарилсин. У ҳолда $2^{k+1} > (k + )^3$ тенгсизлик ҳам тўғри бўлишини исботлаймиз. $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^3 = k^3 + k^3$ га эга бўламиз. Энди $k \geqslant 10$ да $k^3 > 3k^2 + 3k + 1$ бўлишини исботлаш қолади. $k \geqslant 10$ да $k^3 - 9k^2 = k^2(k - 9) \geqslant 0$ бўлгани учун $k^3 > 9k^2 = 3k^2 + 3k^2 + 3k^2 > 3k^2 + 3k + 3 > 3k^2 + 3k + 1$ бўлади. Мана шуни исботлаш талаб этилган эди.

## Қўшимча машқлар

1. Тенгликларнинг тўғрилигини исботланг:

а) $2+16+56+\ldots+(3n-2)\cdot 2^n = 10+(3n-5)\cdot 2^{n+1}$;

б) $5+45+325+\ldots+(4n+1)\cdot 5^{n-1} = n\cdot 5^n$;

в) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 5}+\frac{17}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{2n^2-1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n^2}{2n+1}$,

г) $\frac{1\cdot 7}{3\cdot 5}+\frac{3\cdot 9}{5\cdot 7}+\frac{5\cdot 11}{7\cdot 9}+\ldots+\frac{(2n-1)(2n+5)}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(6n+1)}{3(2n+3)}$;

д) $\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 5}\cdot 2+\frac{4}{5\cdot 6}\cdot 2^2+\ldots+\frac{n+1}{(n+2)(n+3)}\cdot 2^{n-1}=$
$=\frac{2^n}{n+3}-\frac{1}{3}$;

е) $\frac{3}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 5}+\frac{4}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\ldots+\frac{n+2}{n(n+1)(n+3)(n+4)}=$
$=\frac{n(n+5)}{8(n+1)(n+4)}$;

ж) $3+20+168+\ldots+(2n+1)\cdot 2^{n-1}\cdot n! = 2^n\cdot(n+1)!-1$;

з) $\frac{1}{2}\cdot 2!+\frac{2}{2^2}\cdot 3!+\frac{3}{2^3}\cdot 4!+\ldots+\frac{n}{2^n}\cdot(n+1)!=\frac{(n+2)!}{2^n}-2$

2. $n\in N$ да

а) $n^3+11n$ нинг 6 га; б) $7^n+3n-1$ нинг 9 га;

в) $5^n-3^n+2n$ нинг 4 га; г) $5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}$ нинг 19 га; д) $6^{2n}+$ $+19^n-2^{n+1}$ нинг 17 га; е) $2^{2n-1}-9n^2+21n-14$ нинг 27 га каррали эканини исботланг.

3. Берилган: $a_1=4$, $a_{n+1}=3a_n-2$. $a_n=3^n+1$, $n\in N$ бўлишини исботланг.

4. Берилган: $a_1=\frac{14}{3}$, $a_{n+1}=\frac{1}{3}(27a_n+32)$. $a_n=\frac{2}{3}(9^n-2)$, $n\in N$ бўлишини исботланг.

5. Берилган: $a_1=1$, $a_2=9$, $a_{n+2}=9a_{n+1}-20a_n$. $a_n=5^n-4^n$; $n\in N$ бўлишини исботланг.

6. Берилган: $a_1=3$, $a_2=15$, $a_{n+2}=5a_{n+1}-4a_n$. $a_n=4^n-1$, $n\in N$ бўлишини исботланг.

7. Берилган: $a_1=29$, $a_2=85$, $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$. $a_n=2^n+3^{n+2}$, $n\in N$ бўлишини исботланг.

8. Тенгсизликларни исботланг:

а) $n\in N$ да $5^n>7n-3$; б) $n\in N$, $n\geqslant 7$ да $2^{n-1}>n(n+1)$;

в) $n\in N$ да $3^n\geqslant 2^n+n$; г) $n\in N$ да $4^n\geqslant 3^n+n^2$;

д) $n\in N$, $n\geqslant 2$ да $4^n>3^n+2^n$.

9. Бир текисликда ётган ва умумий нуқтага эга бўлган $n$ та тўғри чизиқ текисликни $2n$ бўлакка бўлишини исботланг.

10. Бир тўғри чизиқда ётган $n$ та ҳар хил нуқта уни $n+1$ та интервалга (улардан икки интервал чексиз) ажратишини исботланг.

11. Ҳар учтаси кесишадиган ва ҳеч қандай тўрттаси умумий нуқтага эга бўлмаган $n$ та текислик фазони неча қисмга бўлади?

Жавоб. $\frac{(n-1)n(n+1)}{6}+n+1$.

12. Текисликда $n$ та айлана шундай чизилганки, улардан ҳар иккитаси икки нуқтада кесишади ва ҳеч қандай учтаси умумий нуқтага эга эмас. Текислик бунда неча қисмга бўлинади?

Жавоб. $n^2-n+2$.

13. Томонлари сони $2^n$ га тенг бўлган мунтазам кўпбурчакнинг томони кўпбурчакка ташқи чизилган айлананинг $R$ радиуси орқали ушбу формула билан ифодаланишини исботланг:

$$a_{2n}=R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-2 \text{ та икки}}}.$$

14. Формулани исботланг:

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+2a_1a_2+2a_1a_3+$$
$$+\ldots+2a_{n-1}a_n.$$

15. Исботланг:

$$(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)=x^n+(a_1+a_2+\ldots+a_n)x^{n-1}+$$
$$+(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n)x^{n-2}+\ldots+a_1a_2\ldots a_n.$$

16. Агар $a>b$ ва $a, b$ — мусбат сонлар бўлса, у ҳолда $a^n>b^n$ $(n\in N)$ бўлишини исботланг.

17. Тенгсизликларни исботланг:

а) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1$;

б) $2^{n-1}(a^n+b^n)\geqslant(a+b)^n$, $a$ ва $b$ — мусбат сон;

в) $\sqrt{n}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$;

г) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

18. $(n+1)(n+2)\ldots(n+n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$ бўлишини исботланг.

19. Кўпайтмани ҳисобланг:

$A=2^{\frac{1}{2}}\cdot4^{\frac{1}{4}}\cdot8^{\frac{1}{8}}\cdot16^{\frac{1}{16}}\ldots$. Жавоб. $A=4$.

## 2. ЮҚОРИ ДАРАЖАЛИ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ЕЧИШ

Юқори даражали тенгламаларни ечиш усулларидан бири тенгламанинг чап қисмида турган кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратиш усулидир. Бу усул Безу теоремасининг ушбу қўлланилишига асосланади.

Агар $\alpha$ сони $n$- даражали $P(x)$ кўпҳаднинг илдизи бўлса, у ҳолда бу кўпҳадни $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$ кўринишда тасвирлаш мумкин, бунда $Q(x)$ — $P(x)$ ни $x-\alpha$ га бўлишда чиқадиган бўлинма, $n-1$- даражали кўпҳад.

Шундай қилиб, агар $n$- даражали $P(x)=0$ тенгламанинг ҳеч бўлмаганда битта илдизи маълум бўлса, масалани Безу теоремаси ёрдами билан $n-1$- даражали тенгламани ечишга келтириш, яъни, айтилишича, тенгламанинг даражасини пасайтириш мумкин.

Табиий савол туғилади: қандай қилиб тенгламанинг ҳеч бўлмаса битта илдизини топиш мумкин?

Бутун коэффициентли тенгламалар ҳолида рационал, хусусан бутун илдизларни, албатта улар мавжуд бўлса, топиш мумкин.

Бутун коэффициентли алгебраик тенгламанинг рационал илдизларини топиш усули ушбу теорема билан берилади:

Теорема. $\frac{p}{q}$ *қисқармас каср бутун коэффициентли*

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0_n \tag{1}$$

тенгламанинг илдизи бўлсин. У ҳолда $p$ сони $a_n$ озод ҳаднинг бўлувчиси, $q$ эса $a_0$ бош коэффициентнинг бўлувчиси бўлади.

Исботи. $\frac{p}{q}$ касрни (1) тенгламага қўйиб ва махраждан қутқазиб, ушбу тенгликни оламиз:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1-1} q + \ldots + a_{n-1} p^{n-1} + a_n q^n = 0. \tag{2}$$

(2) тенгликни икки усул билан қайтадан ёзамиз:

$$a_n q^n = p(-a_0 p^{n-1} - a_1 p^{n-2} q - \ldots - a_{n-1} q^{n-1}); \tag{3}$$

$$a_0 p^n = q(-a_1 p^{n-1} - \ldots - a_{n-1} p q^{n-1} - a_n q^{n-1}). \tag{4}$$

(3) тенгликка қараганда $a_n q^n$ кўпайтма $p$ га бўлинади ва $q^n$ билан $p$ ўзаро туб бўлгани учун $a_n$ сони $p$ га бўлинади. Шу каби (4) тенгликка кўра $a_0$ сони $q$ га бўлинади. Теорема исботланди.

Исбот қилинган теореманинг ўз-ўзидан равшан бўлган икки натижасини кўрсатамиз.

**1-натижа.** *Бутун коэффициентли тенгламанинг исталган бутун илдизи озод ҳадининг бўлувчисидан иборат.*

**2-натижа.** *Агар бутун коэффициентли тенгламанинг бош коэффициенти 1 га тенг бўлса, у ҳолда тенгламанинг барча рационал илдизлари, агар улар мавжуд бўлса, бутун сон бўлади.*

1-мисол. Тенгламани ечинг:

$$2x^3 - 7x^2 + 5x - 1 = 0.$$

**Ечиш.** Тенгламанинг рационал илдизларини топамиз. $\frac{p}{q}$ қисқармас каср тенгламанинг илдизи бўлсин. У ҳолда $p$ ни озод ҳаднинг бўлувчилари ичидан, яъни $\pm 1$ сонлари ичидан, $q$ ни эса бош коэффициентнинг мусбат бўлувчилари, яъни 1; 2 ичидан излаш керак. Шундай қилиб, тенгламанинг рационал илдизларини $\pm 1$, $\pm \frac{1}{2}$ сонлари ичидан излаш керак бўлади. Текшириш кўрсатишича фақат $\frac{1}{2}$ сони тенгламанинг илдизидан иборат.

$(2x - 1)$ кўпайтувчини қавсдан ташқарига чиқариш кераклигини назарда тутган ҳолда тенгламанинг чап қисмини кўпайтувчиларга ажратамиз. Тенгламани $2x^3 - x^2 - 6x^2 + 3x + 2x - 1 = 0$ кўринишга келтириб ёзамиз. $x^2(2x - 1) - 3x(2x - 1) + (2x - 1) = 0$ ёки $(2x - 1)(x^2 - 3x + 1) = 0$ ни оламиз.

Иккинчи кўпайтувчини нолга тенглаштириб, $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ илдизга эга бўлган квадрат тенгламага келамиз.

**Жавоб.** $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Юқорида кўрсатилганидек, $P(x) = 0$ тенгламанинг илдизи $\alpha$ маълум бўлган ҳолда унинг даражасини пасайтириш $P(x)$ ни $x - \alpha$ га бўлишдан чиқадиган бўлинмани топишга келади.

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

кўпҳадни $x - \alpha$ иккиҳадга бўлишни Горнер схемаси бўйича бажариш қулай. $P(x)$ ни $x - \alpha$ га бўлганда ҳосил бўладиган тўлиқсиз бўлинмани $Q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$, қолдиқни эса $b_n$ орқали белгилайлик. $P(x) = Q(x)(x - \alpha) + b_n$ бўлгани учун ушбу айният ўринли бўлади:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = (b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1})(x - \alpha) + b_n.$$

Бу тенгликнинг ўнг қисмидаги қавсларни очамиз ва $x$ нинг чап ва ўнгдаги бир хил даражалари олдида турган коэффициентларни солиштирамиз. $a_0 = b_0$ ва $1 \leqslant k \leqslant n$ да $a_k = b_k - \alpha b_{k-1}$ муносабатлар ўринли эканига эга бўламиз. Бундан $b_0 = a_0$ ва $1 \leqslant k \leqslant n$ да $b_k = a_k + \alpha b_{k-1}$ келиб чиқади.

$Q(x)$ кўпҳад коэффициентларини ва $b_n$ қолдиқни ҳисоблаш қуйидаги жадвал кўринишида ёзилади:

| $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | ... | $a_{n-1}$ | $a_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $b_0 = a_0$ | $b_1 = a_1 + \alpha b_0$ | $b_2 = a_2 + \alpha b_1$ | ... | $b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha b_{n-2}$ | $b_n = a_n + \alpha b_{n-1}$ |

у *Горнер схемаси* деб аталади. Бу жадвалнинг биринчи сатрида $P(x)$ кўпҳад коэффициентлари ёзилган. Иккинчи сатрда бўлинманинг коэффициентлари ва қолдиқ ҳосил бўлади. Бўлинманинг бош коэффициенти бўлинувчининг бош коэффициентига тенг. Агар иккинчи сатрнинг бир неча катаги тўлғазилган бўлса, у ҳолда кейинги бўш катак бундай тўлғазилади: унинг устида турган биринчи сатрдаги сон олинади ва унга $\alpha$ билан иккинчи сатрдаги олдинги элементнинг кўпайтмаси қўшилади. Иккинчи сатрнинг охирги катагида бўлинувчи озод ҳадининг остида бўлишдан чиқадиган қолдиқ ҳосил бўлади.

Безу теоремаси бўйича $b_n = P(\alpha)$ бўлганидан, Горнер схемаси $P(x)$ кўпҳаднинг $x = \alpha$ даги қийматини топишга имкон беради. Кўп ҳолларда Горнер схемаси бўйича ҳисоблаш $\alpha$ ни тўғридан-тўғри $P(x)$ кўпҳадга қўйишга қараганда қулайроқдир.

2-мисол. $P(3)$ ни ҳисобланг, бунда

$$P(x) = 4x^5 - 7x^4 + 5x^3 - 2x + 1.$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | −7 | 5 | 0 | −2 | 1 |
| 2 | 4 | 5 | 20 | 60 | 178 | 535 |

Демак, $P(3) = 535$.

3-мисол. Бутун коэффициентли

$$P(x) = 2x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 5x - 1$$

кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратинг.

Ечиш. Бутун илдизларни озод ҳаднинг бўлувчилари орасидан излаймиз: ±1. —1 тўғри келади. $P(x)$ ни $x + 1$ га бўламиз:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | −7 | −3 | 5 | −1 |
| 1 | 2 | −9 | 6 | −1 | 0 |

$$P(x) = (x + 1)(2x^3 - 9x^2 + 6x - 1).$$

Учинчи даражали кўпҳаднинг бутун илдизларини унинг озод ҳадининг бўлувчилари: ±1 орасидан излаймиз. Ҳисоблашлар бутун илдизлар йўқлигини кўрсатади. Кўпҳаднинг бош коэффициенти 1 га тенг бўлмаганлиги туфайли, кўпҳад каср рационал илдизларга эга бўлиши мумкин. Фақат $-\frac{1}{2}$ ва $\frac{1}{2}$ сонлари каср илдиз бўла олади. $\frac{1}{2}$ тўғри келади:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | −9 | 6 | −1 |
| $\frac{1}{2}$ | 2 | −8 | 2 | 0 |

Ушбуга эга бўламиз:

$$P(x) = (x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 8x + 2) =$$

$$= (x+1)(2x-1)(x^2 - 4x + 1).$$

$x^2 - 4x + 1$ учҳад бутун коэффициентли кўпҳадларга ажралмайди.

Жавоб. $P(x) = (x+1)(2x-1)(x^2 - 4x + 1)$.

## Қўшимча машқлар

1. Мусбат коэффициентли кўпҳад мусбат илдизга эга бўла олмаслигини исботланг.

2. Кўпҳад коэффициентларининг йиғиндиси нолга тенг бўлганда ва фақат шу ҳолдагина 1 сони унинг илдизи бўлишини исботланг.

3. —1 сони кўпҳаднинг илдизи бўлиши учун унинг жуфт ўринларда турган коэффициентлари йиғиндиси тоқ ўринларда турган коэффициентлари йиғиндисига тенг бўлиши зарур ва етарли. Исботланг.

4. Бутун коэффициентли кўпайтувчиларга ажратинг:

а) $x^3 + 2x^2 - 5x + 6$; б) $x^3 - 3x^2 + x + 1$;

в) $2x^3 + 5x^2 + x - 2$; г) $x^3 - 2x - 1$;

д) $x^4 + 4x^3 - 25x^2 - 16x + 84$; е) $x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 26x^2 + 36x - 72$.

6. Тенгламаларни ечинг:

а) $x^3 - 5x + 4 = 0$; б) $x^3 - 3x^2 + 2x^2 = 0$; в) $x^3 - 7x - 6 = 0$;

г) $x^3 - 8x^2 + 40 = 0$; д) $8x^3 - 4x + 1 = 0$; е) $16x^3 - 6x - 1 = 0$;

ж) $2x^4 - 5x^3 - x^2 + 3x + 1 = 0$; з) $2x^4 - 7x^3 - 7x^2 + 3x + 1 = 0$;

и) $x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0$; к) $2x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 2 = 0$.

6. $a$ ни топинг ва тенглама илдизларидан бири маълум бўлса, уни ечинг:

а) $2x^3 - (a+4)x^2 + 2(a-1)x + a = 0,\ x_1 = 0{,}5$;

б) $6x^3 + 2(a-9)x^2 - 3(2a-1)x + a = 0,\ x_1 = \frac{1}{3}$.

7. Тенгламаларни ечинг:

а) $\frac{4(x+3)}{2x^3 + x^2 - 8x - 4} - \frac{5}{2x^2 - 3x - 2} = 1$;

б) $\frac{x^2 - 5x - 6}{2x^3 + 3x^2 - 2x - 3} = \frac{4x^2 - 20}{2x^2 + x - 3}$.

8. Тенгламаларни ечинг:

а) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=9$; б) $(x^2+3x+2)(x^2+9x+20)=4$;

в) $(x-1)(x-5)^2(x-9)=-39$; г) $(x^2-2x)(2x-3)(2x-1)=2{,}5$;

д) $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$; е) $x^4+x^3-16x^2+2x+4=0$;

ж) $x^4-5x^3+4x^2+5x+1=0$; з) $x^4+2x^3-9x^2-6x+9=0$.

и) $5x+\frac{5}{2x}=2x^2+\frac{1}{2x^2}+4$; к) $x^2+\frac{9x^2}{(x-3)^2}=2$.

9. $P(x)=2x^3+x^2+ax+b$ кўпҳад $x+1$ га бўлинганда қолдиқда 18 қолади, $x-2$ га эса қолдиқсиз бўлинади. Кўпҳаднинг илдизларини топинг.

10. $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ кўпҳад $x+1$ ва $x+2$ га бўлинганда қолдиқда 12 қолади. $P(x)$ кўпҳаднинг илдизларидан бири 1 га тенг. Кўпҳаднинг қолган илдизларини топинг.

11. Тенгсизликларни ечинг:

а) $x^3-4x^2+5x-2 \geqslant 0$; б) $x^3-12x+16>0$;

в) $x^3-5x^2+8x-4 \leqslant 0$; г) $x^3-7x^2+16x-12<0$;

д) $(x^2-3x)(x-1)(x-2) \leqslant 24$; е) $(x-2)(x-3)^2(x-4)>20$;

ж) $(x^2-6x+8)(x^2-18x+80)<64$; з) $x^3(x+1) \geqslant (13x+12)(x+1)$;

и) $x^3(x-2) \leqslant (7x-6)(x-2)$; к) $\frac{x^3-4x}{x^2+5x+6} \geqslant \frac{x^2-7x+10}{x^2-2x-15}$;

л) $(x^2+5x)(x^2-9x+18)>(x^3-9x)(x^2-x-30)$;

м) $(x^3-16x)(x^2+x-6)>(x^2+4x)(x^2-x-12)$;

и) $\frac{x(x-6)}{2} \geqslant \frac{5x-6}{1-x}$; о) $4x^2|x|-12x^2+9|x|-2<0$.

12. Тенгсизликларни ечинг ($a$ — параметр);

а) $ax^2+1>0$; б) $ax^2-4 \leqslant 0$; в) $x^2-ax \leqslant 0$;

г) $ax<\frac{9}{x}$; д) $\frac{a}{x} \geqslant x$; е) $x^2-2ax+1>0$;

ж) $ax^2-2x-1>0$; з) $ax^2+ax-5 \leqslant 0$; и) $x^2-ax+a-1 \geqslant 0$.

13. $a$ нинг қандай қийматларида қуйидаги тенгсизликлар $x$ нинг барча ҳақиқий қийматларида ўринли:

а) $x^2-2x+a-3>0$; б) $ax^2-2x+3>0$; в) $x^2-9x+(a-3)^2 \geqslant 0$;

г) $ax^2-6x-1<0$; д) $ax^2-2ax-3 \leqslant 0$; а) $\frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} \leqslant 2$?

14. Тенгсизликлар системаларини ечинг:

а) $\begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 \geq 0, \\ 3x^2 - 5x + 2 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 0{,}25 > 0, \\ 2x^2 - 5x + 3 < 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x^2 - 6|x| + 9)(|x| - 2) > 0, \\ x^2 - x - 20 \leq 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - 7x - 18 \leq 0, \\ (x-2)^2 - 4|x-2| + 3 \geq 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} |2x + 3| < 2, \\ \dfrac{3x^2 - 1}{x + 2} < \dfrac{2}{3}; \end{cases}$ е) $\begin{cases} |x - 2| \geq 1, \\ \dfrac{2x + 3}{x^2 - 1} < \dfrac{7}{3}; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 10 \leq x^2 - 8x + 25 < 18, \\ 7 + 6|2x - 3| - (2x - 3)^2 \leq 0; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \dfrac{x + 3}{4 - x} < 2, \\ x^3 < 25x, \\ 16 - x^2 \geq 0; \end{cases}$

и) $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 9|x| + 14}{x - 3} < 0, \\ |x - 4| \cdot (|x + 3| - 8) < 0; \end{cases}$ к) $\begin{cases} 2x^4 + x^3 - 7x^2 + 5x - 1 > 0, \\ x^2 - 2x - 1 < 0. \end{cases}$

### Қўшимча машқларнинг жавоблари

5. в) $x_1 = -2$; $x_2 = -1$, $x_3 = 3$; ж) $x_1 = -0{,}5$, $x_2 = 1$, $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2}$. 6. б) $a = -1$; $x_1 = -0{,}5$, $x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{5}$. 7. а) $x_1 = -1$, $x_2 = -1{,}5$. 8. а) $x_1 = x_2 = -4$, $x_{3,4} = -4 \pm \sqrt{10}$; в) $x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{13}$, $x_{3,4} = 5 \pm \sqrt{3}$. 9. $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$. 10. $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. 11. а) $x = 1$, $x \geq 2$, г) $x < 2{,}2 < x < 3$; о) $-2 < x < 2$, $x \neq \pm 0{,}5$. 12. а) $a \geq 0$ да $x$ ихтиёрий ҳақиқий сон, $a < 0$ да $-\sqrt{-\dfrac{1}{a}} < x < \sqrt{-\dfrac{1}{a}}$; г) $a \leq 0$ да $x > 0$, $a > 0$ да $x < -\dfrac{3}{\sqrt{a}}$, $0 < x < \dfrac{3}{\sqrt{a}}$. 13. д) $-3 \leq a \leq 0$.

## 3. ФУНКЦИЯНИНГ ЛИМИТИ ВА УЗЛУКСИЗЛИГИ

Мавзу бўйича биринчи машқлар функциянинг нуқтадаги лимитининг таърифига асосланади.

*1- таъриф.* Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ сони топилсаки, $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизликнинг бажарилишидан $|f(x) - b| < \varepsilon$ тенгсизлик келиб чиқса, $b$ сони *$f$ функциянинг $a$ нуқтадаги лимити* дейилади.

$b$ сони $f$ функциянинг $x \to a$ даги лимити бўлишини исботлаш учун берилган $\varepsilon > 0$ бўйича лимит таърифида айтилаётган $\delta > 0$ сонини топиш кифоя.

1- мисол. Исботланг:

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 18}{x - 3} = 12.$$

Ечиш. $\varepsilon > 0$ — ихтиёрий мусбат сон бўлсин. Ушбу

$$\left|\frac{2x^2-18}{x-3}-12\right|<\varepsilon \tag{1}$$

тенгсизликни тузамиз.

(1) тенгсизлик

$$0<|x-3|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

тенгсизликка тенг кучли ва бунга қараганда $\delta$ сифатида $\frac{\varepsilon}{2}$ ни олиш мумкин. (1) ва (2) ларнинг тенг кучлилигига кўра $0<|x-a|<\delta$ тенгсизлигидан (1) тенгсизлик келиб чиқади.

2 (342 (1))-мисол. Исботланг:

$$\lim_{x\to 4} x^2 = 16.$$

Ечиш. Ихтиёрий берилган $\varepsilon > 0$ бўйича $\delta > 0$ ни $0<|x-4|<\delta$ тенгсизликдан

$$|x^2-16|=|x+4|\cdot|x-4|<\varepsilon \tag{3}$$

тенгсизлик келиб чиқадиган қилиб таниш мумкинлигини исботлаш керак.

$\delta$ сонини бирма-бир танлаймиз. Аввал 4 нуқтанинг 1 радиусли ($\delta = 1$) атрофини, яъни $x$ нинг $|x-4|<1$ бўладиган қийматларини қараймиз. Қаралаётган атрофда

$$|x+4|=|x-4+8|\leqslant|x-4|+8<9$$

ва шунга кўра $|x+4|\cdot|x-4|<9|x-4|$. (3) тенгсизлик бажарилиши учун $|x-4|<\frac{\varepsilon}{9}$ бўлиши етарли. Шундай қилиб, $\delta$ сифатида 1 ва $\frac{\varepsilon}{9}$ сонларидан кичигини олиш мумкин, яъни $\delta=\min\left(1;\ \frac{\varepsilon}{9}\right)$.

*2-таъриф.* Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ сони топилсаки, $a<x<a+\delta$ $(a-\delta<x<a)$ тенгсизликнинг бажарилишидан $|f(x)-b|<\varepsilon$ тенгсизлик келиб чиқса, $b$ сони $f$ функциянинг $a$ нуқтадаги *ўнг (чап) лимити* дейилади.

$f$ функциянинг $a$ нуқтадаги ўнг (чап) лимитини белгилаш учун ушбу

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=b;\quad \left(\lim_{x\to a-0} f(x)=b\right)$$

белгилашдан ёки янада қисқароқ

$$f(a+0)=b;\quad (f(a-0)=b)$$

белгилашдан фойдаланилади. Мисол тариқасида

$$f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases} x>0 \text{ да } & 1,\\ x<0 \text{ да } & -1\end{cases}$$

функцияни қарайлик.

Бу функция 0 нуқтада ҳам ўнг ва ҳам чап лимитга эга, шу билан бирга $f(+0)=1$, $f(-0)=-1$. Ҳақиқатан, 0 нуқтанинг исталган «ўнг ярим атрофи» да, яъни $0<x<\delta\,(\delta>0)$ да $f(x)=$ $=1$ бўлади, ва шу сабабли исталган $\varepsilon>0$ учун $|f(x)-1|=|1-$ $-1|=0<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилади; бу эса $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=1$ бўлишини англатади. Шу каби $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=-1$ ҳам исботланади.

Шундай қилиб, $f(x)=\frac{|x|}{x}$ функция 0 нуқтада лимитга эга эмас, лекин шу нуқтада 1 га тенг бўлган ўнг лимитга ва $-1$ га тенг чап лимитга эга. Бу функция ўнг ва чап лимитларининг бир-бирига тенг эмаслиги тасодифий ҳол эмас, чунки ушбу тасдиқ ўринли: *иккала бир томонли лимитлар мавжуд ва ўзаро тенг* $f a-0)=$ $=f(a+0)$ *бўлганда ва фақат шу ҳолдагина* $x\to a$ *да* $f$ *функциянинг лимити мавжуд бўлади.*

Бу тасдиқни исботлаш учун 1 ва 2-таърифдан фойдаланиш ва агар $|f(x)-b|<\varepsilon$ тенгсизлик $x$ нинг $0<|x-a|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида ўринли бўлса, у $x$ нинг $a-\delta<x<a$ ва $a<x<a+\delta$ тенгсизликлардан ҳар бирини қаноатлантирувчи барча қийматларида ҳам ўринли бўлишини эътиборга олиш етарли. Тескариси ҳам ўринли: агар $|f(x)-b|<\varepsilon$ тенгсизлик $x$ нинг $a-\delta_1<x<a$ ва $a<x<a+\delta_2\,(\delta_1>0,\ \delta_2>0)$ тенгсизликлардан ҳар бирини қаноатлантирувчи барча қийматларида ўринли бўлса, у $x$ нинг $0<|x-a|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида ҳам ўринли бўлади, бунда $\delta=\min(\delta_1;\ \delta_2)$.

**3 (352 (6))**-мисол. Қуйидаги функциянинг $x=-1$ ва $x=2$ нуқталардаги бир томонли лимитларини топинг:

$$f(x)=\begin{cases} x<-1 \text{ да, } x+2,\\ -1<x<2 \text{ да, } x^2,\\ x\geqslant 2 \text{ да } 5-x.\end{cases}$$

$x\to-1$ ва $x\to2$ да $f$ функциянинг лимитлари мавжудми?

Ечиш. $x<-1$ қийматлар учун функция $f(x)=x+2$ формула билан аниқланади. Шундай қилиб, функциянинг $x=-1$ нуқтадаги чап лимити $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-1-0}(x+2)$ тенглик билан ифодаланади. $x+2$ функциянинг $x\to-1$ даги лимити 1 га тенг бўлганидан $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-1-0}(x+2)=\lim\limits_{x\to-1}(x+2)=1$ бўлади.

Шу каби мулоҳаза юритиб, $\lim\limits_{x\to-1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to-1+0} x^3=\lim\limits_{x\to-1} x^2=1$ га эга бўламиз.

$\lim\limits_{x\to-1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-1+0} f(x)=1$ бўлганидан $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=1$ бўлади.

Шунга ўхшаш $\lim\limits_{x\to2-0} f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to2+0} f(x)=3$ бўлишини ҳам аниқ[illegible] $\lim\limits_{x\to2-0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to2+0} f(x)$ бўлгани учун $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ мавжуд эмас.

Функциянинг нуқтадаги лимитини ҳисоблашга доир бир неча мисолни қараймиз.

4-**мисол.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100}+2x^{50}-3}{x^{20}-3x^{10}+2}$ ни топинг.

**Ечиш.**

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{100}+2x^{50}-3}{x^{20}-3x^{10}+2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^{100}-1)+2(x^{50}-1)}{(x^{20}-1)-3(x^{10}-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x^{99}+x^{98}+\ldots+x+1)+2(x^{49}+x^{48}+\ldots+x+1)}{(x^{19}+x^{18}+\ldots+x+1)-3(x^{9}+x^{8}+\ldots+x+1)} =$$

$$= \frac{100+2\cdot 50}{20-3\cdot 10} = -20.$$

5-**мисол.** $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$ ни топинг.

**Ечиш.**

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{x+4-9}{(x+5)\sqrt{x+4}+3} = \lim_{x\to 5} \frac{1}{\sqrt{x+4}+3} = \frac{1}{6}.$$

Иррационалликка эга лимитларни ҳисоблаш баъзан янги ўзгарувчиларни киритиш билан соддалаштирилади.

6-**мисол.** $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3-\sqrt[3]{x+22}}{x-5}$ ни ҳисобланг.

**Ечиш.** $\sqrt[3]{x+22} = t$ бўлсин, у ҳолда $x = t^3 - 22$. Агар $x \to 5$ бўлса, у ҳолда $t \to 3$.

$$\lim_{x-5} \frac{3-\sqrt[3]{x+22}}{x-5} = \lim_{t\to 3} \frac{3-t}{t^3-27} = -\lim_{t\to 3} \frac{1}{t^2+3t+9} = -\frac{1}{27}.$$

7-**мисол.** $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt[4]{x+11}-2}{x-5}$ ни ҳисобланг.

**Ечиш.** $\sqrt[4]{x+11} = t$ алмаштириш киритамиз. У ҳолда $x = t^4 - 11$. Агар $x \to 5$, у ҳолда $t \to 2$.

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt[4]{x+11}-2}{x-5} = \lim_{t\to 2} \frac{t-2}{t^4-18} = \lim_{t\to 2} \frac{1}{(t^2+4)(t+2)} = \frac{1}{32}.$$

8-**мисол.** Ҳисобланг:

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt[3]{x+22}}{\sqrt[4]{x+11}-2}.$$

**Ечиш.**

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt[3]{x+22}}{\sqrt[4]{x+11}-2} =$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{\dfrac{\sqrt{x+4-3}}{x-5} + \dfrac{3-\sqrt[3]{x+22}}{x-5}}{\dfrac{\sqrt[4]{x+11}-2}{x-5}} = \frac{\dfrac{1}{16}\quad\dfrac{1}{27}}{\dfrac{1}{32}} = \frac{112}{27}.$$

Функциянинг нуқтада узлуксизлиги тушунчаси билан боғлиқ бўлган бир неча машқ қараймиз.

**9-мисол.** Ушбу

$$f(x)=\begin{cases} x\neq 0,\ x\neq -1,\ x\neq 2,\ x\neq 1 \text{ да } & \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x}}; \\ x \text{ нинг қолган қийматларида } 1 \end{cases}$$

функция берилган. $f$ функциянинг 0; $-1$; 2; 1 нуқталарда узлуксизми ёки йўқми эканини аниқланг.

**Ечиш.** $f$ функциянинг $x\to 0$ даги лимитини топамиз:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-2)}{2x(x+1)(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-2}{2(x+1)(x-1)}=1.$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ га эга бўламиз. Шундай қилиб, $f$ функция $x=0$ нуқтада узлуксиз. $f$ функция $-1$, 2, 1 нуқталарда узлуксиз эмаслигини кўриш қийин эмас.

**10-мисол.** Ушбу

$$f(x)=\begin{cases} x<1 \text{ да } 3x+7, \\ x\geqslant 1 \text{ да } x^2; \end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases} x\leqslant 5 \text{ да } 2x-5, \\ x>5 \text{ да } 3x \end{cases}$$

функциялар берилган: $f(g(x))$ функцияни узлуксизликка текширинг.

**Ечиш.** $x<3$ да $2x-5<1$, $3\leqslant x\leqslant 5$ да $2x-5\geqslant 1$, $x>5$ да $3x>1$ бўлгани учун,

$$f(g(x))=\begin{cases} x<3 \text{ да } 3(2x-5)+7, \\ 3\leqslant x\leqslant 5 \text{ да } (2x-5)^2. \\ x>5 \text{ да } (3x)^2 \end{cases}$$

бўлади. Фақат $x=3$ ва $x=5$ нуқталар $f(g(x))$ функциянинг узилиш нуқталари бўлишини кўриш қийин эмас.

**11-мисол.** $f(x)=\dfrac{x^7-1}{x^2-1}$ функция берилган. Бу функция $x=1$ нуқтада узлуксиз бўлсин учун уни қўшимча равишда шу нуқтада яна қандай таърифлаш керак?

**Ечиш.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^7-1}{x^2-1}=\dfrac{7}{2}$ бўлганидан, функцияни $x=1$ нуқтада $\dfrac{7}{2}$ га тенг қиймат билан қўшимча таърифлаймиз ва $x=1$ нуқтада узлуксиз функцияни оламиз:

$$g(x)=\begin{cases} x\neq 1 \text{ да } & \dfrac{x^7-1}{x^2-1}, \\ x=1 \text{ да } & \dfrac{7}{2}. \end{cases}$$

12-**мисол.** $a$ ва $b$ нинг қандай қийматларида

$$f(x)=\begin{cases} x<2 \text{ да } ax+1, \\ x=2 \text{ да } 3, \\ x>2 \text{ да } x^2+b \end{cases}$$

функция $x=2$ нуқтада узлуксиз бўлади?

**Ечиш.** Агар

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2+0} f(x)=f(2)=3$$

бўлса, $f$ функция $x=2$ нуқтада узлуксиз бўлади.

$$\begin{cases} 2a+1=3, \\ 4+b=3 \end{cases}$$

га эга бўламиз. Тенгламалар системасини ечиб, $a=1$, $b=-1$ топамиз.

### Қўшимча машқлар

1. Функцияларнинг лимитларини ҳисобланг:

а) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-27}{9-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^5-32}{x^3-3x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{32x^5+1}{2x^3-7x^2+6x+5}$; г) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4-4x+3}{2x^3-3x^2+1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-3x^2-9x+27}{x^4-18x^2+81}$; е) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^4-4x^3+1}{3x-x^3-2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^{11}-2x-1}{x^5-2x-1}$; з) $\lim\limits_{x\to -3} \left(\frac{1}{x+3}+\frac{6}{x^2-9}\right)$;

и) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{30}-2x^{27}+3x^{13}-2}{x^{37}-5x^{10}+3x^3+1}$;

к) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{3}{x^3-3x^2+3x-2}-\frac{1}{x-2}\right)$.

2. Функцияларнинг лимитларини ҳисобланг:

а) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^4+x^3-7x^2-13x-6}{x^3+x^2-x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4-x^3-3x^2+5x-2}{x^5-4x^4+4x^3+2x^2-5x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x^3-3x^2+4)^{50}}{(x^2-3x+2)^{100}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^4-(1+4x)}{x^2+x^7}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x^2+x-2)^{30}}{(x^4-2x^3+2x-1)^{10}}$; з) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x+2)^3+(x-2)^3}{x^2+3x}$;

и) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)(1+3x)(1+5x)(1+7x)-(1+16x)}{x^2}$.

3. Функцияларнинг лимитларини ҳисобланг:

а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{x^2-5x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-6x+5}{\sqrt{2x+7}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x+7}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^5-\sqrt{x}}{x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^7-1}{x\sqrt{x}-1}$; е) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x\sqrt{x}-1}{x\sqrt[3]{x}-1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{3-x}-1}{4-2x}$; з) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt[4]{x+17}-2}{x+1}$,

4. Функцияларнинг лимитларини ҳисобланг.

а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{x+7}}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3+2x}}{\sqrt[4]{2-14x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{3+x}-2}-\frac{\sqrt{5x^2+4x^3}-\sqrt{x^4+8x^2}}{\sqrt{x}-1}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to\sqrt[3]{2}}\left(\frac{x^4-x^2\sqrt[3]{4}}{(x-\sqrt[3]{2})^2}-\frac{2(x^5+x^4\sqrt[3]{2}+x^3\sqrt[3]{4})}{x^3-2}\right)^3$.

5. *a* нинг қандай қийматларида

$$f(x)=\begin{cases} x\neq1 \text{ да } & \dfrac{x^3-4x^2+3}{x-1} \\ x=1 \text{ да } & a \end{cases}$$

функция $x_0=1$ нуқтада узлуксиз бўлади?

6. *a* ва *b* нинг қандай қийматларида

$$f(x)=\begin{cases} x>1 \text{ да } & \dfrac{ax^2+3x+1}{x-b}, \\ x\leqslant1 \text{ да } & x+b \end{cases}$$

функция $x_0=1$ нуқтада узлуксиз бўлади?

7. *a* ва *b* нинг қандай қийматларида

$$f(x)=\begin{cases} x<1 \text{ да } & \dfrac{ax^2+bx+3}{x-1}, \\ x\geqslant1 \text{ да } & x+1 \end{cases}$$

функция $x_0=1$ нуқтада узлуксиз бўлади?

8. Функцияларнинг лимитларини топинг:

а) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sqrt{2}\sin x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^2 x-\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$;

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} x-\sqrt{3}}$; е) $\lim\limits_{x\to\frac{5\pi}{6}} \frac{\cos 3x}{\cos x+\sqrt{3}}$.

9. Кетма-кетликларнинг лимитларини топинг:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n}{3n-1}+\frac{6n^3+1}{1-9n^2}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^4}{n^3+8}-\frac{n^2}{n+2}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-2)^3}{(2n-1)(n+3)}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^n}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+5\cdot 3^{n-1}}{2^{n+1}+3^n}$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+2^{n-1}}{2^{n+1}+3}$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+5+\ldots+(4n-3)}{(2n+1)(1-5n)}$; з) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\ldots+\right.$
$\left.+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}\right)$;

и) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{(n+1)(n+2)}-\frac{n}{3}\right)$; к) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+n!}{(n+2)!}$.

10. Кетма-кетликларнинг лимитларини топинг:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{4n^2+3n+1}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-n})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-5}-n+1)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+3n-2}-2n-1)$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2+3-4+\ldots-(2n)}{\sqrt{n^2+1}}$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n+a)(n+b)}-n)$.

11. Агар ихтиёрий $n \in N$ да

а) $0 < a_n < \frac{n+1}{n^2}$; б) $2 \leqslant a_n < \frac{2n+7}{n+1}$; в) $\frac{3n+1}{n} < a_n \leqslant \frac{3n+5}{n}$

бўлиши маълум бўлса, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ни топинг.

### Қўшимча машқларнинг жавоблари

**1.** д) $\frac{1}{6}$; ж) 3; з) $-\frac{1}{6}$; и) $-\frac{15}{4}$; к) $-1$. **2.** а) 2; б) $-1{,}5$; г) $3^{50}$; д) $\frac{n(n+1)}{2}$; е) 6; ж) $\left(\frac{27}{2}\right)^{10}$; з) 8; и) 86. **3.** г) 4,5; д) $\frac{14}{3}$; е) $\frac{9}{8}$; з) $\frac{1}{32}$. **4.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{8}{21}$; в) $-6$; **5.** $a=-5$. **6.** $a=-4$, $b=-6$. **7.** $a=5$, $b=-8$. **8.** а) 1; б) $-2$; в) $\frac{\sqrt{2}}{6}$; г) $-4\sqrt{3}$. **9.** а) $\frac{5}{9}$; б) 2; в) 4,5; г) $\frac{2}{5}$; д) $\frac{5}{3}$; е) 0,5; ж) $-\frac{1}{5}$; з) $\frac{1}{5}$; и) $-\frac{1}{2}$; к) 1. **10.** а) $\frac{3}{2}$; б) 2; в) 1; г) $-\frac{1}{4}$; д) $-1$; е) $\frac{a+b}{2}$.
**11.** а) 0; б) 2; в) 3.

## 4. ФУНКЦИЯ ГРАФИГИНИНГ АСИМПТОТАСИ

Асосий таърифлар ва далилларни эсга келтирамиз.

*1-таъриф.* Агар $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ ёки $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ лимитлардан ақалли бирортаси $+\infty$ ёки $-\infty$ га тенг бўлса, $x=a$ тўғри чизиқ $f$ *функция графигининг вертикал асимптотаси* деб аталади.

*2-таъриф.* Агар $f$ функцияни

$$f(x)=kx+b+\alpha(x), \tag{1}$$

бунда

$$\lim_{x\to+\infty}\alpha(x)=0,$$

кўринишда тасвирлаш мумкин бўлса, у ҳолда, $y=kx+b$ тўғри чизиқ $x\to+\infty$ да $f$ функция графигининг *асимптотаси* дейилади.

Бунда агар $k\neq 0$ бўлса, у ҳолда $y=kx+b$ асимптота *оғма*, $k=0$ бўлганда эса — *горизонтал асимптота* дейилади.

**Теорема.** *$f$ функция графиги $x\to+\infty$ да $y=kx+b$ асимптотага эга бўлиши учун*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k \text{ ва } \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b \tag{2}$$

*лимитларнинг мавжуд бўлиши зарур ва етарли.*

Исботи. Зарурлик. $x\to+\infty$ да $f$ функция графиги $y=kx+b$ асимптотага эга, яъни (1) ифода $f$ учун ўринли бўлсин. У ҳолда

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{kx+b+\alpha(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right)=k.$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}(b+\alpha(x))=b.$$

Етарлилик. (2) лимитлар мавжуд бўлсин. Бу тенгликларнинг иккинчисидан $x\to+\infty$ да $f(x)-k(x)-b$ айирманинг чексиз кичик бўлиши келиб чиқади. Бу чексиз кичик миқдорни $\alpha(x)$ орқали белгилаб, $f(x)$ учун (1) ифодани оламиз. Теорема исбот қилинди.

Эслатма. $x\to-\infty$ ҳоли учун асимптота (оғма ва горизонтал) шу каби таърифланади ва теорема исботланади.

Мисол тариқасида ўқув қўлланмасидаги 299-машқни қараймиз.

**299 (4).** $f(x)=\frac{x^4-1}{x^4+1}$ функция графиги учун $x\to+\infty$ да ҳам $x\to-\infty$ да ҳам $y=1$ тўғри чизиқ горизонтал асимптота бўлади. Бу $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$ бўлишидан келиб чиқади. Қаралаётган функция вертикал асимптоталарга эга эмас (ҳеч бир нуқтада $x^4+1$ нолга айланмайди).

**299 (5).** $\varphi(x)=\frac{x^4-1}{x^3+6}$ функция графиги $x\to+\infty$ да ҳам, $x\to-\infty$ да ҳам $y=x$ оғма асимптотага эга, чунки

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=1, \quad \lim_{x\to\infty}(\varphi(x)-x)=0.$$

Бу $\varphi(x)$ функцияни $\varphi(x) = x + \alpha(x)$ кўринишда тасвирлаш мумкинлигидан ҳам келиб чиқади, бунда $\alpha(x) = -\frac{6x+1}{x^3+6}$ ва $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$.

$\varphi(x)$ функция графигининг вертикал асимптотаси $x = -\sqrt[3]{6}$ тўғри чизиғидан иборат, чунки $\lim\limits_{x\to-\sqrt[3]{6}} \varphi(x) = \infty$.

$y = \operatorname{tg} x$ ва $y = \operatorname{ctg} x$ функциялар графиклари мос равишда $y = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ва $y = \pi n$, $n \in Z$ вертикал асимптоталарга эга. $y = \operatorname{arctg} x$ функция графиги $x \to +\infty$ да $y = \frac{\pi}{2}$ горизонтал асимптотага, $x \to -\infty$ да эса $y = -\frac{\pi}{2}$ асимптотага эга. $y = \operatorname{arc\,ctg} x$ функция графиги ҳам икки горизонтал асимптотага эга: $x \to +\infty$ да $y = 0$ ва $x \to -\infty$ да $y = \pi$. $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ функция графиги $x = 0$ вертикал асимптотага эга.

Асимптоталарни топишга доир яна бир неча мисол қараймиз.

1-мисол. $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$. Демак, график икки $y = 1$ ва $y = -1$ горизонтал асимптотага эга.

2-мисол. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}}{3x+1}$.

Функциянинг $x \to +\infty$ даги ва $x \to -\infty$ даги лимитларини топамиз.

Сурат ва махражни $|x|$ га бўламиз:

$$\varphi(x) = \frac{\frac{\sqrt{x^2+5}}{|x|}}{\frac{3x+1}{|x|}} = \frac{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}}{3\cdot\frac{x}{|x|}+\frac{1}{|x|}}.$$

$x \to +\infty$ бўлсин. Функцияни исталган $(a; +\infty)$ оралиқда, бунда $a > 0$, қараш мумкин, масалан $(0; +\infty)$ да. Бу ҳолда $|x| = x$ бўлганидан $f(x) = \frac{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}}{3+\frac{1}{x}}$ бўлади ва, демак $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{3}$.

$x \to -\infty$ бўлсин. $x < 0$ деб ҳисоблаш мумкин, у ҳолда $|x| = -x$ ва $f(x) = -\frac{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}}{3=\frac{1}{x}}$ бўлади ва, демак $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$.

Шундай қилиб, функция графиги иккита горизонтал асимптотага эга: $x \to +\infty$ да $y = \frac{1}{3}$ ва $x \to -\infty$ да $y = -\frac{1}{3}$.

3-мисол. $f(x)=\frac{x}{e^x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ бўлгани учун $y=0$ тўғри чизиқ функция графигининг $x\to+\infty$ даги горизонтал асимптотасидир.

$y=0$ тўғри чизиқ $x\to-\infty$ да $f$ графигига горизонтал асимптота бўла олмайди, чунки $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

Функция графигининг асимптотага нисбатан қандай жойлашганини аниқлаш учун $f(x)-(kx+b)$ айирманинг ҳар қайси $x\to+\infty$ ва $x\to-\infty$ ҳолидаги ишорасини билиш керак. Агар у мусбат бўлса, функция графиги асимптота устида, манфий бўлса, асимптота остида жойлашади: агар $f(x)-(kx+b)$ айирма ўз ишорасини ўзгартирса, асимптота графикни кесиб ўтади.

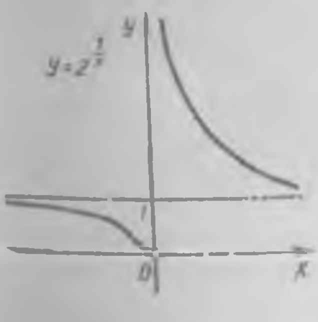
Вертикал асимптотани топишда ҳам функция лимити ҳар қайси $x\to a+0$ ва $x\to a-0$ ҳол учун алоҳида олиб қаралиши керак, бунда $a$ — функциянинг узилиш нуқтаси (қутби).

4-мисол. $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$.

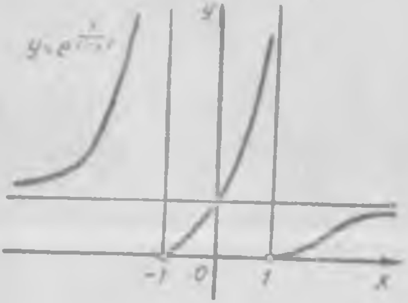
$f$ функция $x$ нинг $x=0$ дан ташқари барча қийматларида аниқланган. Функциянинг $x\to\pm\infty$ ва $x\to\pm0$ даги лимитларини топамиз:

$$\lim_{x\to\pm\infty}2^{\frac{1}{x}}=1,\quad \lim_{x\to+0}2^{\frac{1}{x}}=+\infty,\quad \lim_{x\to-0}2^{\frac{1}{x}}=0.$$

Бундан $x\to\pm\infty$ да $y=1$ — горизонтал асимптота, $x\to+0$ да эса $x=0$ вертикал асимптотадан иборатлиги маълум бўлади. $x>0$ да $2^{\frac{1}{x}}>1$, $x<0$ да $0<2^{\frac{1}{x}}<1$, шунинг учун $x>0$ да график $y=1$ асимптотадан юқорида, $x<0$ да эса қуйида жойлашади (1-расм).



1-расм.



2-расм.

5-мисол. $f(x)=e^{\frac{x}{1-x^2}}$.

Функция $x$ нинг $x=\pm 1$ дан бошқа барча қийматларида аниқланган. Қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{x}{1-x^2}}=1,\quad \lim_{x\to-1-0} e^{\frac{x}{1-x^2}}=+\infty,\quad \lim_{x\to-1+0} e^{\frac{x}{1-x^2}}=0,$$

$$\lim_{x\to1-0} e^{\frac{x}{1-x^2}}=+\infty,\quad \lim_{x\to1+0} e^{\frac{x}{1-x^2}}=0,$$

яъни $x\to\pm\infty$ да $y=1$ асимптота, $x\to-1-0$ да $x=-1$ асимптота, $x\to1-0$ да $x=1$ асимптотадир. $f(x)$ функциянинг графиги 2- расмда тасвирланган.

6-мисол. $f(x)=x\cos\frac{\pi}{x}$.

Функция $x\neq0$ да аниқланган. $\lim\limits_{x\to0}\left(x\cos\frac{\pi}{x}\right)=0$ бўлганидан, графикнинг вертикал асимптотаси йўқ. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cos\frac{\pi}{x}\right)=\infty$ бўлганидан горизонтал асимптота ҳам йўқ.

$f$ графигининг оғма асимптотаси бор-йўқлигини аниқлаймиз.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\cos\frac{\pi}{x}=1,\quad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(x\cos\frac{\pi}{x}-x\right)=$$

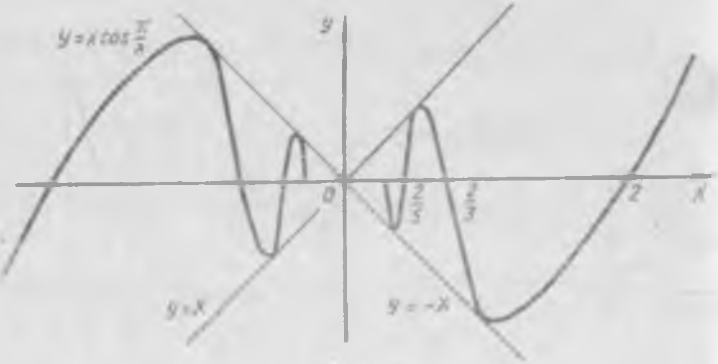
$$=-\lim_{x\to\infty}\left(2x\sin^2\frac{\pi}{2x}\right)=-\frac{\pi^2}{2}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin^2\frac{\pi}{2x}}{\left(\frac{\pi}{2x}\right)^2}\right)=0,$$

у ҳолда $y=x$ тўғри чизиқ функция графигининг $x\to\infty$ даги оғма асимптотаси (3- расм).

## Қўшимча машқлар

Функциялар графикларининг асимптоталарини топинг:

1. $y=\frac{1}{(x-2)^2}$; 2. $y=\frac{x^2}{x^2+9}$; 3. $y=\sqrt{x^2-4}$; 4. $y=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+9}}$;



3- расм.

5. $y=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$; 6. $y=\frac{\sin x}{x}$; 7. $y=x \operatorname{arctg} x$; 8. $y=x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$; 9. $y=\arcsin\frac{1}{x}$; 10. $y=\arccos\frac{1}{x}$.

### Қўшимча машқларнинг жавоблари

1. $x=2$, $y=0$. 2. $y=x$. 3. $y=-x$, $y=x$. 4. $y=-1$, $y=1$. 5. $x=-1$, $x=1$, $y=-x$, $y=x$. 6. $y=0$. 7. $y=-\frac{\pi}{2}x-1$, $y=\frac{\pi}{2}x-1$, 8. $y=2x+1$. 9. $y=0$. 10. $y=\frac{\pi}{2}$.

## 5. ҲОСИЛА

**Ҳосилани таърифи бўйича ҳисоблаш.** Таърифга мувофиқ $f$ функция ҳосиласининг $a$ нуқтадаги қиймати

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad (1)$$

формула билан ифодаланади. (1) формулага $h=x-a$ ни қўйиб,

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (2)$$

ни оламиз.

1-мисол. Ҳосиланинг таърифидан фойдаланиб, $f(x)=x^3-3x$ функция ҳосиласининг 1 нуқтадаги қийматини ҳисобланг.

Ечиш. $f'(1)$ ни ҳисоблаш учун (2) формуладан фойдаланамиз:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-3x)-(1^3-3\cdot 1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x-2)=0.$$

2-мисол. Агар $f(x)=|x^2-6x+5|$ бўлса, $f'(2)$, $f'(6)$ ни топинг. 5 ва 1 нуқталарда функция ҳосилага эга эмаслигини исботланг.

Ечиш. $1\leqslant x\leqslant 5$ да функция қийматлари $f(x)=-x^2+6x-5$ формула бўйича, $x>5$ да эса $f(x)=x^2-6x+5$ формула бўйича ҳисоблангани учун

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(-x^2+6x-5)-3}{x-2}=$$

$$=-\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=-\lim_{x\to 2}(x-4)=2;$$

$$f'(6)=\lim_{x\to 6}\frac{f(x)-f(6)}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{(x^2-6x+5)-5}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{x^2-6x}{x-6}=6.$$

Энди функциянинг $x=5$ нуқтада ҳосилага эга эмаслигини исботлаймиз. «Айирмали» нисбат тузамиз:

$$\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\frac{|x^2-6x+5|}{x-5}.$$

5-**мисол.** $f(x) = e^{\frac{x}{1-x^2}}$.

Функция $x$ нинг $x = \pm 1$ дан бошқа барча қийматларида аниқланган. Қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{x}{1-x^2}} = 1, \quad \lim_{x \to -1-0} e^{\frac{x}{1-x^2}} = +\infty, \quad \lim_{x \to -1+0} e^{\frac{x}{1-x^2}} = 0,$$

$$\lim_{x \to 1-0} e^{\frac{x}{1-x^2}} = +\infty, \quad \lim_{x \to 1+0} e^{\frac{x}{1-x^2}} = 0,$$

яъни $x \to \pm\infty$ да $y = 1$ асимптота, $x \to -1-0$ да $x = -1$ асимптота, $x \to 1-0$ да $x = 1$ асимптотадир. $f(x)$ функциянинг графиги 2-расмда тасвирланган.

6-**мисол.** $f(x) = x \cos \frac{\pi}{x}$.

Функция $x \neq 0$ да аниқланган. $\lim\limits_{x \to 0} \left(x \cos \frac{\pi}{x}\right) = 0$ бўлганидан, графикнинг вертикал асимптотаси йўқ. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x \cos \frac{\pi}{x}\right) = \infty$ бўлганидан горизонтал асимптота ҳам йўқ.

$f$ графигининг оғма асимптотаси бор-йўқлигини аниқлаймиз.

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \cos \frac{\pi}{x} = 1, \quad b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty} \left(x \cos \frac{\pi}{x} - x\right) =$$

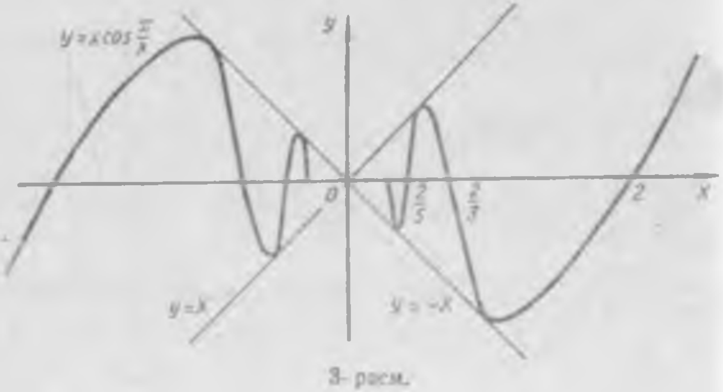
$$= -\lim_{x \to \infty} \left(2x \sin^2 \frac{\pi}{2x}\right) = -\frac{\pi^2}{2} \cdot \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2x}}{\left(\frac{\pi}{2x}\right)^2}\right) = 0,$$

у ҳолда $y = x$ тўғри чизиқ функция графигининг $x \to \infty$ даги оғма асимптотаси (3-расм).

## Қўшимча машқлар

Функциялар графикларининг асимптоталарини топинг:

1. $y = \frac{1}{(x-2)^2}$; 2. $y = \frac{x^2}{x^2 + 9}$; 3. $y = \sqrt{x^2 - 4}$; 4. $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+9}}$;



3- расм.

5. $y = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$; 6. $y = \frac{\sin x}{x}$; 7. $y = x \operatorname{arctg} x$; 8. $y = x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)$; 9. $y = \arcsin\frac{1}{x}$; 10. $y = \arccos\frac{1}{x}$.

### Қўшимча машқларнинг жавоблари

1. $x = 2$, $y = 0$. 2. $y = x$. 3. $y = -x$, $y = x$. 4. $y = -1$, $y = 1$. 5. $x = -1$, $x = 1$, $y = -x$, $y = x$. 6. $y = 0$. 7. $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$, $y = \frac{\pi}{2}x - 1$, 8. $y = 2x + 1$. 9. $y = 0$. 10. $y = \frac{\pi}{2}$.

## 5. ҲОСИЛА

**Ҳосилани таърифи бўйича ҳисоблаш.** Таърифга мувофиқ $f$ функция ҳосиласининг $a$ нуқтадаги қиймати

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad (1)$$

формула билан ифодаланади. (1) формулага $h = x - a$ ни қўйиб,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad (2)$$

ни оламиз.

1-мисол. Ҳосиланинг таърифидан фойдаланиб, $f(x) = x^3 - 3x$ функция ҳосиласининг 1 нуқтадаги қийматини ҳисобланг.

Ечиш. $f'(1)$ ни ҳисоблаш учун (2) формуладан фойдаланамиз:

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{(x^3 - 3x) - (1^3 - 3\cdot 1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1}(x^2 + x - 2) = 0.$$

2-мисол. Агар $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$ бўлса, $f'(2)$, $f'(6)$ ни топинг. 5 ва 1 нуқталарда функция ҳосилага эга эмаслигини исботланг.

Ечиш. $1 \leqslant x \leqslant 5$ да функция қийматлари $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ формула бўйича, $x \geqslant 5$ да эса $f(x) = x^2 - 6x + 5$ формула бўйича ҳисоблангани учун

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(-x^2 + 6x - 5) - 3}{x - 2} =$$

$$= -\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} = -\lim_{x\to 2}(x - 4) = 2;$$

$$f'(6) = \lim_{x\to 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} = \lim_{x\to 6} \frac{(x^2 - 6x + 5) - 5}{x - 6} = \lim_{x\to 6} \frac{x^2 - 6x}{x - 6} = 6.$$

Энди функциянинг $x = 5$ нуқтада ҳосилага эга эмаслигини исботлаймиз. «Айирмали» нисбат тузамиз:

$$\frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \frac{|x^2 - 6x + 5|}{x - 5},$$

**2 (459 (1))-мисол.** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ функциянинг монотонлик оралиқлари топилсин.

Ечиш. $f'(x) = 3(x-1)^2$ ҳосилани топамиз. Барча $x \in \boldsymbol{R}$ да $f'(x) \geqslant 0$ ва фақат $x = 1$ да $f'(x) = 0$ бўлгани учун, 1′-теоремага мувофиқ функция $\boldsymbol{R}$ да ўсади (2-теоремага ҳавола ҳам мумкин).

3-мисол. $f(x) = x^5 - 5|x-1|$ функция монотонликка текширилсин.

Ечиш. $f$ функция $\boldsymbol{R}$ да узлуксиз. Функцияни

$$f(x) = \begin{cases} x < 1 \text{ да } x^5 + 5x - 5, \\ x \geqslant 1 \text{ да } x^5 - 5x + 5 \end{cases}$$

кўринишда тасвирлаб, қуйидагини топамиз:

$$f'(x) = \begin{cases} x < 1 \text{ да } 5(x^4 + 1), \\ x > 1 \text{ да } 5(x^4 - 1). \end{cases}$$

Функция узлуксиз бўлган $x = 1$ нуқтадан ташқари (бу нуқтада ҳосила мавжуд эмас) барча $x \in \boldsymbol{R}$ лар учун $f'(x) > 0$ бўлиши равшан. Демак, функция $\boldsymbol{R}$ да ўсади (2-теорема).

4 (459 (7))-мисол. $f(x) = (x-1)^4 (x+2)^3$ функциянинг монотонлик оралиқларини топинг.

Ечиш. Функция $\boldsymbol{R}$ да дифференциалланувчи. $f'(x) = (x+2)^2 \times \times (x-1)^3 (7x+5)$. $\left(-\infty; -\frac{5}{7}\right]$, $[1; +\infty)$ оралиқларни қараймиз. Бу оралиқларда $f'(x) \geqslant 0$ ($x = -2$, $x = -\frac{5}{7}$, $x = 1$ да $f'(x) = 0$). 1′-теоремага мувофиқ $f$ функция $\left(-\infty; -\frac{5}{7}\right]$ да ва $[1; +\infty)$ да ўсади.

$\left[-\frac{5}{7}; 1\right]$ оралиқни қараймиз. Бу оралиқда $f'(x) \leqslant 0$ ($x = -\frac{5}{7}$, $x = 1$ да $f'(x) = 0$). 1′-теоремага мувофиқ функция $\left[-\frac{5}{7}; 1\right]$ да камаяди.

5-мисол. $f(x) = x^3 - 3|x|$ берилган. $f$ функциянинг монотонлик оралиқларини топинг.

Ечиш.

$$f(x) = \begin{cases} x < 0 \text{ да } x^3 + 3x, \\ x \geqslant 0 \text{ да } x^3 - 3x \end{cases}$$

бўлгани учун

$$f'(x) = \begin{cases} x < 0 \text{ да } 3(x^2 + 1), \\ x > 0 \text{ да } 3(x^2 - 1). \end{cases}$$

$x = 1$ да $f'(x) = 0$, $x = 0$ да эса $f'(x)$ мавжуд эмас. 0 ва 1 нуқталар сонлар ўқини шундай уч интервалга ажратадики, уларнинг ҳар қайсисида ҳосила доимий ишорани сақлайди: $x < 0$ ва $x > 1$ да $f'(x) > 0$, $0 < x < 1$ да $f'(x) < 0$. Функциянинг 0 ва 1 нуқталарда узлуксизлигини эътиборга олиб, функция $(-\infty; 0]$ ва $[1; +\infty)$ оралиқларда ўсади ва $[0; 1]$ да камаяди, деган хулосага келамиз (1 ёк 2-теорема).

6-мисол. $m$ нинг қандай қийматларида

$$f(x) = 2x^3 - 3(m+2)x^2 + 48mx + 6x - 3$$

функция бутун сонлар тўғри чизиғида ўсади?

Ечиш. $f'(x) = 6(x^2 - (m+2)x + 8m + 1)$ га эга бўламиз. Агар исталган $x \in \boldsymbol{R}$ да $f'(x) \geqslant 0$ бўлса, $f$ функция $\boldsymbol{R}$ да ўсувчи бўлади. $f'(x)$ — бош коэффициенти мусбат квадрат учҳад бўлганидан, бу шарт фақат учҳад дискриминанти номусбат бўлганда, яъни $(m+2)^2 - - 4(8m+1) \leqslant 0$ бўлган ҳолдагина бажарилади. Тенгсизликни ечиб, $m$ учун зарур қийматларни топамиз: $0 \leqslant m \leqslant 28$.

**Ҳосиланинг геометрик маъноси.** Ушбу мавзу бўйича кўпчилик масалаларни ечиш тўғридан-тўғри

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \tag{1}$$

уринма тенгламасидан фойдаланишга асосланади. Уринманинг $k$ бурчак коэффициенти бир томондан уринма ва абсциссалар ўқи орасидаги $\alpha$ бурчакнинг тангенсига, иккинчи томондан $f$ функция ҳосиласининг $x_0$ нуқтадаги қийматига тенглигини эсда тутиш лозим:

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0). \tag{2}$$

Ҳосиланинг геометрик маъносига доир баъзи масалаларни қараймиз.

1-мисол. $f(x) = x^2 - 3x + 2$ функция графиги билан абсциссалар ўқи кесишиш нуқталарида шу графикка ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг.

Ечиш. $x^2 - 3x + 2 = 0$ тенгламани ечиб, уриниш нуқталари абсциссаларини топамиз. Улар $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. (1) тенгламадан фойдаланиб, уринмаларнинг изланаётган тенгламаларини топамиз: $y = 1 - - x$ ва $y = x - 1$.

2-мисол. Абсциссаси $x_0 = \sqrt{6}$ бўлган нуқтада $f(x) = -\frac{6}{x}$ гиперболага ўтказилган уринма абсциссалар ўқи билан қандай бурчак ташкил қилади?

Ечиш. $f'(x) = \frac{6}{x^2}$ ҳосилани топамиз. (2) формула бўйича: $\operatorname{tg} \alpha = f'(\sqrt{6}) = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

3-мисол. Абсциссалари 1 ва 2 бўлган нуқталарда $f(x) = x^3 - - 7x^2 + 14x - 7$ функция графигига ўтказилган уринмалар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. $f'(x) = 3x^2 - 14x + 14$. Уринмаларнинг бурчак коэффициентлари: $k_1 = f'(1) = 3$, $k_2 = f'(2) = -2$. Изланаётган $\varphi$ бурчакни $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$ формула бўйича топамиз. $\operatorname{tg} \varphi = 1$ ни оламиз, бундан $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

4-мисол. Қандай нуқтада $f(x) = x^2$ функция графигига ўтказилган уринма а) $y = 2x + 5$ тўғри чизиққа параллел? б) шу тўғри чизиққа перпендикуляр?

**Ечиш.** а) Агар тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентлари тенг бўлса, улар параллел бўлади. $y = 2x + 5$ тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти $k_1 = 2$ га тенг, уринманинг бурчак коэффициенти $k_2 = 2x_0$, бунда $x_0$ — уриниш нуқтасининг абсциссаси. $2x_0 = 2$ тенгламадан $x_0 = 1$ ни топамиз. Демак, уринма $M(1;\ 1)$ нуқтадан ўтказилиши керак.

б) Агар $k_1 \cdot k_2 = -1$ бўлса, $y = k_1x + b_1$ ва $y = k_2x + b_2$ тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлишидан фойдаланамиз. Бизнинг ҳолда $k_1 = 2$, шунинг учун $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{2}$ ва $2x_0 = -\frac{1}{2}$ тенгламадан $x_0 = -\frac{1}{4}$ ни топамиз. Демак, уринма $N\left(-\frac{1}{4};\ \frac{1}{16}\right)$ нуқтадан ўтказилиши керак.

**5-мисол.** $M(1;\ 5)$ нуқтада $y = 7x + 2$ тўғри чизиққа уринувчи $y = ax^2 + bx + 1$ параболанинг тенгламасини топинг.

**Ечиш.** Масаланинг шартига кўра $M(1; 5)$ нуқта $y = ax^2 + bx + 1$ параболада ётади, демак, $a + b + 1 = 5$. Бундан ташқари, масаланинг шартидан $y'(1) = 7$ келиб чиқади. $y'(x) = 2ax + b$, у ҳолда $2a + b = 7$. Ушбу

$$\begin{cases} a + b + 1 = 5, \\ 2a + b = 7 \end{cases}$$

системани ечиб, $a = 3$, $b = 1$ ни топамиз. Параболанинг тенгламаси: $y = 3x^2 + x + 1$.

**6-мисол.** $y = x - 1$ тўғри чизиқ $y = x^3 - 2x + 1$ эгри чизиққа уринадими?

**Ечиш.** $x^3 - 2x + 1 = x - 1$ тенгламани ечиб, тўғри чизиқ ва эгри чизиқнинг умумий нуқталарини топамиз: $M_1(1;\ 0)$ ва $M_2(-2;\ -3)$. $y = x^3 - 2x + 1$ функция ҳосиласи $y' = 3x^2 - 2$ га тенг ва унинг кесишиш нуқталаридаги қийматлари $y'(1) = 1$, $y'(-2) = 10$ га тенг. Лекин $y = x - 1$ тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти 1 га тенг. Демак, берилган тўғри чизиқ $M_1(1;\ 0)$ нуқтада $y = x^3 - 2x + 1$ эгри чизиққа ўтказилган уринмадан иборат.

## Қўшимча машқлар

1. Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган нуқталарда дифференциалланувчи эмаслигини исботланг:

а) $y = x + |x - 2|;\ x_0 = 2;$
б) $y = |x^3 - x|,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1;$
в) $y = \begin{cases} x < 0 \text{ да } x^2, \\ x \geqslant 0,\ x_0 = 0 \text{ да } x + 2; \end{cases}$
г) $y = \begin{cases} x \leqslant 1 \text{ да } x, \\ x > 1,\ x_0 = 1 \text{ да } 3 - x; \end{cases}$
д) $y = \sqrt{x^4},\ x_0 = 0;$
е) $y = \sqrt{x^4 - 2x^3 + 1},\quad x_1 = 1,\ x_2 = -1.$

2. Функцияларни монотонликка текширинг;

а) $y = 3x^2 - 8x^3$; б) $y = x^3 - 6x^2 + 15x - 1$;

в) $y = \sqrt{x}\,(x - 3)$; г) $y = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$;

д) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$; е) $y = \frac{3}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$.

3. Ушбу функцияларнинг бутун сонлар тўғри чизиғида монотонлигини исботланг. Улардан қайсилари ўсувчи, қайсилари камаювчи эканини кўрсатинг:

а) $y = -x^3 + 9x^2 - 30x - 2$;

б) $y = x^5 - 5x^3 + 20x - 3$;

в) $y = 3|x - 1| - x^3$;

г) $y = 2x^9 - 3x^6 + 6x^3 - 9x^2 + 18x - 3$.

4. $y = x^5 + 10x - 3$ эгри чизиқнинг исталган уринмаси $Ox$ ўқи билан ўткир бурчак ташкил қилишини кўрсатинг.

5. $y = \frac{1}{1 + x^2}$ эгри чизиқда шундай нуқтани топингки, ундан ўтказиладнган уринма абсциссалар ўқига параллел бўлсин.

6. $y = x^3 + x - 7$ чизиқнинг қайси нуқталарида унга ўтказиладиган уринма $y = 4x - 2$ тўғри чизиққа параллел бўлади?

7. $y = x^2$ параболада абсциссалари $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ бўлган икки нуқта олинган. Бу нуқталар орқали тўғри чизиқ ўтказилган. Параболанинг қайси нуқтасида уринма бу тўғри чизиққа параллел бўлади?

8. $a$ нинг қандай қийматида $M(1;\ a - 2)$ нуқтада $y = ax^2 + x - 3$ параболага ўтказилган уринма $3y - 6x = 1$ тўғри чизиққа параллел бўлади?

9. (1; 3) нуқтадан ўтадиган, $y = 8\sqrt{x} - 7$ функция графигига уринувчи ва $y = x^2 + 4x - 1$ функция графигини иккита ҳар хил нуқтада кесувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини топинг.

10. $y = 2x - 1$ тўғри чизиқ $y = \sqrt{4x - 3}$ функция графигига уринадими?

11. Функцияларни текширинг ва графикларини ясанг:

а) $y = (x + 1)^2 (x - 2)$; б) $y = x(x - 1)(x^2 - 1)$;

в) $y = (x + 1)^2 (3 - x)$; г) $y = (x - 2)^2 (x + 1)^2$;

д) $y = x^2 (x^2 - 1)(x + 1)$; е) $y = (x^2 - 1)^2$;

ж) $y = (x^2 - 1)^3$; з) $y = (x + 1)^2 (2 - x)^3$;

и) $y = \frac{x^2 - x}{x^2 - 4}$; к) $y = \frac{1 + x + x^2}{1 + x^2}$;

л) $y = \frac{2x^2 + x + 1}{1 + x^2}$; м) $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$;

н) $y = \frac{x^2 - 5}{x - 2}$; о) $y = \frac{x^2 - 5}{x - 2}$;

п) $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$; р) $y = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 4}$;

с) $y = \frac{1+x^2}{x^2-4}$; т) $y = \frac{x^2-1}{x(4-x^2)}$;

у) $y = \frac{1-x^2}{x^2-4}$; ф) $y = \frac{(x-1)(x^2-1)}{x(4-x^2)}$.

### Қўшимча машқларнинг жавоблари

**2.** а) $(-\infty;\ 0]$ ва $\left[\frac{1}{4};\ +\infty\right)$ да камаяди, $\left[0;\ \frac{1}{4}\right]$ да ўсади; б) $R$ да ўсади; в) $[0;\ 1]$ да камаяди, $[1;\ +\infty)$ да ўсади; г) $[5;\ +\infty)$ да ўсади, $(-\infty;\ -1]$ да камади; д) $(-\infty;\ -1)$ да ва $(-1;\ 0)$ да ўсади, $[0;\ 1)$ да ва $(1;\ +\infty)$ да камаяди; е) $\left[\frac{1}{2};\ 1\right]$ да ўсади, $(-\infty;\ 0)$, $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$ $[1;\ +\infty)$ да камаяди. **3.** а) Камаяди.; б) ўсади; в) камаяди; г) ўсади. **5.** $(0;\ 1)$. **6.** $(1;\ -5)$, $(-1;\ -9)$. **7.** $(2;\ 4)$ **8.** 0,5. **9.** $y = 2x+1$. **10.** Бўлади.

## 6. ТРИГОНОМЕТРИК ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

Тригонометрик тенгламалар (тенгсизликлар) ни ечишнинг кўпгина йўллари ва усуллари мавжудки, уларни умумий назария доирасида тўлалигича кўзда тутишнинг иложи йўқ. Улардан айримларини санаб ўтамиз: ўзгарувчиларни алмаштириш, кўпайтувчиларга ажратиш, ёрдамчи аргумент киритиш, рационалловчи ўрнига қўйишларни қўллаш, тригонометрик функциялар кўпайтмасини уларнинг йиғиндисига келтириш ва бунинг акси, симметрик кўпҳадлар хоссаларидан фойдаланиш, баҳолашдан ва тенгсизликлардан фойдаланиш, элементар функцияларнинг хоссаларидан фойдаланишга асосланган усуллар ва ҳоказо.

Тригонометрик тенгламалар ва тенгсизликларни ечишда қўлланиладиган айрим усулларни мисолларда кўрсатамиз.

1-мисол. Тенгламани ечинг:

а) $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$; б) $\sin(\pi \cos 4x) = 1$; в) $\cos\left(\sqrt{4-|x|}\right) = 0$.

Ечиш. а) $\sin 2x = 0{,}5$, $2x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$,

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in Z.$$

б) Ушбуга эга бўламиз: $\pi \cos 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, яъни $\cos 4x = \frac{1}{2} + 2k$, $k \in Z$. Лекин $|\cos 4x| \leqslant 1$, шунга кўра $k = 0$. Бундан $\cos 4x = 0{,}5$ ва бунинг ечими: $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

в) Ушбуга эга бўламиз: $\sqrt{4-|x|} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Шу билан бирга $0 \leqslant \sqrt{4-|x|} \leqslant 2$, у ҳолда $k = 0$. Шундай қилиб,

$\sqrt{4-|x|}=\frac{\pi}{2}$ тенгламани ҳосил қиламиз, унинг ечими $x=\pm\left(4-\frac{\pi^2}{4}\right)$ дан иборат.

**2-мисол.** Ушбу $4\sin^3 x+\cos^2 x+3\sin x=2{,}75$ тенгламани ечинг.

Тенгламанинг қуйидаги шартни қаноатлантирувчи барча ечимларини топинг:

а) $\cos x\leqslant 0$; б) $x\in\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$; в) $x\in\left[-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

**Ечиш.** $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ бўлгани учун тенгламани

$$16\sin^3 x-4\sin^2 x+12\sin x-7=0$$

кўринишга келтириш мумкин. Уни $\sin x$ га нисбатан учинчи даражали тенглама каби ечиб, $\sin x=0{,}5$ ни оламиз. Бундан:

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z \text{ ёки } \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+2\pi n, \\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z. \end{array}\right.$$

Олинган мажмуадан шуниси равшан бўлмоқдаки, а) шартни $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$ сонлар, б) шартни фақат $x=\frac{5\pi}{6}$ сони, в) шартни эса $x=-\frac{7\pi}{6}$ сони қаноатлантиради.

**Жавоб.** $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; а) $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$; б) $\frac{5\pi}{6}$; в) $-\frac{7\pi}{6}$.

**3-мисол.** Тенгламани ечинг:

а) $2\sin 2x-\sqrt{3}+2\sqrt{3}\sin x=2\cos x$;

б) $\sin 2x\,\mathrm{tg}\,x=\sin 2x$.

**Ечиш.** а) $\sin 2x=2\sin x\cos x$ бўлгани учун берилган тенгламани

$$4\sin x\cos x-2\cos x+2\sqrt{3}\sin x-\sqrt{3}=0$$

кўринишда ёзамиз ва унинг чап қисмини кўпайтувчиларга ажратамиз. У ҳолда:

$$2\cos x(2\sin x-1)+\sqrt{3}\,(2\sin x-1)=0,$$
$$(2\sin x-1)(2\cos x+\sqrt{3})=0;$$
$$\left[\begin{array}{l} \sin x=0{,}5, \\ \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$$

**Жавоб.** $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi x$, $k\in Z$, $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$.

б) Ушбуга эга бўламиз: $\sin 2x(\operatorname{tg} x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \cos x \neq 0, \end{cases} \\ \operatorname{tg} x = 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k, \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in Z. \end{array}\right.$$

**Жавоб.** $\pi k, \ \frac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in Z.$

**4-мисол.** Тенгламани ечинг:

а) $3\sin 2x + \cos 2x - 4\cos^2 x = 1;$
б) $\sin x - 2\cos x| = \sin x;$
в) $2\cos 3x = 3\sin x + \cos x.$

**Ечиш.** Бу учала тенглама *бир жинслига* келувчи тенгламаларга мисол бўла олади.

а) $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ бўлишини эътиборга олиб, берилган тенгламани қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$6\sin x\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x - 4\cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

ёки

$$\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0.$$

$\frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z$ сонлари бу тенгламанинг ечимлари эмаслигини кўриш қийин эмас. Шунга кўра унинг барча ҳадларини $\cos^2 x \neq 0$ га бўлиб, унга тенг кучли ушбу тенгламани оламиз:

$$\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k. \end{array}\right.$$

**Жавоб.** $\frac{\pi}{4} + \pi k, \ \operatorname{arctg} 2 + \pi k, \ k \in Z.$

$$\text{б) } |\sin x - 2\cos x| = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sin x - 2\cos x = \sin x, \\ \sin x - 2\cos x = -\sin x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \sin x = \cos x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in Z. \end{array}\right.$$

**Жавоб.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in Z.$

в) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ бўлгани учун тенгламани қуйидаги кўринишга келтириш мумкин:

$$8\cos^3 x - 6\cos x = 3\sin x + \cos x,$$

ёки

$$8\cos^3 x = 3\sin x + 7\cos x,$$

$$8\cos^3 x = (3\sin x + 7\cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

$\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ сонлари бу тенгламанинг илдизлари эмас. Шунга кўра тенгламанинг барча ҳадларини $\cos^3 x$ га бўлиб, унга тенг кучли ушбу тенгламани оламиз:

$$8 = (3\,\mathrm{tg}\,x + 7)(\mathrm{tg}^2 x + 1).$$

Қавсларни очиб, ушбу

$$3\,\mathrm{tg}^3 x + 7\,\mathrm{tg}^2 x + 3\,\mathrm{tg}\,x - 1 = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз ва уни ечиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\,x = -1, \\ \mathrm{tg}\,x = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}. \end{array}\right.$$

Жавоб. $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $\mathrm{arctg}\,\frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3} + \pi k$, $k \in Z$.

Энди шундай тенгламаларни қараймизки, уларни ечишда ёрдамчи аргумент киритиш усулини қўллаш мумкин бўлсин. Бундай тенгламаларга $\sin x$ ва $\cos x$ га нисбатан чизиқли тенгламалар киради:

$$a \sin x + b \cos x = c \quad (a^2 + b^2 \neq 0).$$

Бу тенглама унинг барча ҳадлари $\sqrt{a^2 + b^2}$ га бўлингандан кейин $\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ кўринишга келади, унда $\varphi$ — ёрдамчи бурчак, унинг учун $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Тенглама фақат ва фақат $|c| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$ бўлган ҳолдагина ечимга эга бўлади.

5-мисол. Ушбу $4 \sin x + 5 \cos x = 6$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $\sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$ бўлгани учун берилган тенглама

$$\frac{4}{\sqrt{41}} \sin x + \frac{5}{\sqrt{41}} \cos x = \frac{6}{\sqrt{41}}$$

тенгламага тенг кучли. $\left(\frac{4}{\sqrt{41}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{41}}\right)^2 = 1$ бўлганидан шундай $\varphi$ бурчак мавжудки, унинг учун

$$\cos \varphi = \frac{4}{\sqrt{41}}, \ \sin \varphi = \frac{5}{\sqrt{41}} \quad \left(\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{5}{4}\right).$$

Ушбуга эга бўламиз: $\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = \frac{6}{\sqrt{41}}$,

$$\sin(x + \varphi) = \frac{6}{\sqrt{41}} \left( \varphi = \arcsin \frac{5}{\sqrt{41}} \right).$$

$\left|\frac{6}{\sqrt{41}}\right| < 1$ бўлгани учун узил-кесил қуйидагини оламиз:

$$x = -\arcsin\frac{5}{\sqrt{41}} + (-1)^k \arcsin\frac{6}{\sqrt{41}} + \pi k,\ k \in Z.$$

Шуни қайд этамизки, $a\sin x + b\cos x = c$ кўринишдаги тенгламаларни универсал ўрнига қўйиш ёрдами билан ҳам ечиш мумкин.

6-мисол. Тенгламанн ечинг:

а) $\sin 5x = \sin 3x$; б) $\cos x^2 + 2\sin^2 x = 1$; в) $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 3x$.

Бир исмли тригонометрик функцияларнинг тенглик шартларидан фойдаланамиз:

$$\sin\alpha = \sin\beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha - \beta = 2\pi n,\\ \alpha + \beta = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.\end{array}\right.$$

$$\cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \alpha \pm \beta = 2\pi n,\ n \in Z.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\alpha - \beta = \pi n,\ n \in Z,\\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z,\\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi m,\ n \in Z.\end{array}\right.$$

Ечиш.

а) $\sin 5x = \sin 3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x - 3x = 2\pi n,\\ 5x + 3x = \pi + 2\pi n;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi n,\\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}.\end{array}\right.$

Жавоб. $\pi n,\ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z.$

б) Ушбуга эга бўламиз: $\cos x^2 = 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow \cos x^2 = \cos 2x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2 - 2x - 2\pi n = 0,\\ x^2 + 2x - 2\pi n = 0;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1 \pm \sqrt{1 + 2\pi n},\\ x = -1 \pm \sqrt{1 + 2\pi n},\end{array}\right. (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Жавоб. $\pm 1 \pm \sqrt{1 + 2\pi n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

в) $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 3x \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2x = \pi n,\\ \cos 3x \neq 0,\\ \cos 5x \neq 0.\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pi k,\ k \in Z.$

Жавоб. $\pi k,\ k \in Z.$

7-мисол. Ушбу тенгламани ечинг:

$$2\cos^2 x - 3\cos x + \sin x + 1 = 0.$$

Ечиш. Берилган тенглама барча $x \neq \pi + 2\pi n$ лар учун тўғри бўлган

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

формулалар ёрдами билан $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ га нисбатан алгебраик тенгламага келтирилиши мумкин. $\sin x$ ва $\cos x$ ни таркибида $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ бўлган ифодалар билан алмаштириш $x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$ кўринишдаги илдизларнинг йўқолишига олиб келиши мумкинлигини қайд қиламиз. $x$ нинг бу қийматлари берилган тенгламани қаноатлантирадими-йўқми, бу текшириш орқали аниқланади.

Берилган тенгламада *универсал алмаштириш* деб аталувчи $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=$ $=t$ алмаштиришни бажариб,

$$3t^4+t^3-t^2+t=0$$

тенгламага эга бўламиз. У $t_1=0$, $t_2=-1$ дан иборат илдизларга эга. Энди $x$ ўзгарувчига қайтсак, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-1$ тенгламалар мажмуасини ҳосил қиламиз, ундан $x=2\pi k$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$. Бизга $x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$ сонларнинг берилган тенгламани қаноатлантирмаслигини текшириш қолади. Қуйидагига эга бўламиз:

$$2\cos^2(\pi+2\pi n)-3\cos(\pi+2\pi n)+\sin(\pi+2\pi n)+1\neq 0.$$

**Жавоб.** $2\pi k$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$.

**8-мисол.** Ушбу $8\cos^4 x+\cos 2x+4\sin^2 2x=3$ тенгламани ечинг.

**Ечиш.** Бундай тенгламаларни ечишда ушбу

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},\quad \cos^2\alpha=\frac{1+2\cos 2\alpha}{2}$$

*даражани пасайтириш формулаларидан* фойдаланиш қулай. $\cos 2x=$ $=t$ белгилаш киритиб, $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ формуладан фойдаланиб,

$$8\left(\frac{1+t}{2}\right)^2+t+4(1-t^2)=3$$

тенгламани оламиз. Қавслар очилиб, ўхшаш ҳадлар ихчамлангандан сўнг $2t^2-5t-3=0$ тенглама ҳосил бўлади. $t\leqslant 1$ эканини эътиборга олиб, $t=-\frac{1}{2}$ ни топамиз, яъни $\cos 2x=-\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+$ $+\pi n$, $n\in Z$.

**Жавоб.** $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$.

**9-мисол.** $\cos x+\sin\frac{x}{4}=2$ тенгламани ечинг.

**Ечиш.** $\cos x$ ва $\sin\frac{x}{4}$ функциялар кўпи билан 1 га тенг қийматни қабул қилиши сабабли бир вақтда $\cos x = 1$ ва $\sin\frac{x}{4} = 1$ бўлгандагина уларнинг йиғиндиси 2 га тенг бўлади, яъни

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \sin\frac{x}{4} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi k, \\ x = 2\pi + 8\pi n; \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\pi + 8\pi m,\ m \in Z.$$

Жавоб. $2\pi + 8\pi m,\ m \in Z$.

10-мисол. Ушбу $\frac{1}{\cos x} \geqslant 2\cos x + 1$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $\cos x = t$ белгилаш киритиб, ушбу тенгсизликни оламиз:

$$\frac{1}{t} \geqslant 2t + 1 \Leftrightarrow \frac{(2t-1)(t+1)}{t} \leqslant 0.$$

Уни интерваллар усули билан ечиб, $t \leqslant -1,\ 0 < t \leqslant \frac{1}{2}$ ни топамиз.

$x$ ўзгарувчига қайтиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\left[\begin{array}{l} \cos x \leqslant -1, \\ 0 < \cos x \leqslant \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1, \\ 0 < \cos x \leqslant \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi n, \\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x \leqslant -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ \frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$$

### Қўшимча машқлар

1. Тенгламаларни ечинг:

а) $\sin(\pi\cos x) = 0$; б) $\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\cos x\right) = \frac{1}{4}$;

в) $\cos(\mathrm{tg}\, x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\mathrm{ctg}(\sin x) = \sqrt{3}$;

д) $(x^2 - 2)|\sin x| = \sin x$; е) $(x^2 + 2)\cos x = 3x|\cos x|$;
ж) $|4 - x^2|\sin x = x^2 - 4$; з) $\sin 4x\, \mathrm{ctg}\, x = 0$;
и) $|\cos x|\cos x + \sin^2 x = 0{,}5$; к) $|\sin x|\cos x = 0{,}5$.

2. $(\cos(\pi x^2))\cos(\pi(x^2 + 1)) = -1$ тенгламанинг $4x^2 - 8x + 3 < 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча ечимларини топинг.

3. Қуйидаги тенгламаларни бирор тригонометрик функцияга нисбатан алгебраик тенгламага келтириш йўли билан ечинг:

а) $10\sin^2 x - \sqrt{3}\cos x = 1$;
б) $\mathrm{tg}^2 x - 2\,\mathrm{tg}\, x + 6\,\mathrm{ctg}\, x = 3$.
в) $1 + 2\cos^4 x + 2\sqrt{2}\sin x + \cos 2x = 0$;
г) $\sin 3x - 10\cos^2 x - 5\sin x + 6 = 0$.

4. Тенгламаларнинг кўрсатилган шартларини қаноатлантирувчи барча ечимларини топинг:

а) $\sqrt{3}\sin x - 2\cos^2 x = 1, \qquad \left|x - \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \pi;$

б) $1 - 5|\cos x| + 2\sin^2 x = 0, \ \sin x \leqslant 0;$

в) $\cos x + (1 + \cos x)\,\mathrm{tg}^2 x = 1, \ \mathrm{tg}\, x \leqslant 0;$

г) $2\cos^2 x + 3\sin x = 0, \ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 7x + 12} < 0;$

д) $2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0,$

1) $\sin x \leqslant 0$; 2) $x \in [\pi;\ 2\pi]$; 3) $x \in [-\pi;\ 0]$;

е) $2 + 6\sin x\cos x = \cos 4x.$

1) $\cos x \leqslant 0$; 2) $x \in \left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$, 3) $x^2 - 3x + 2 < 0$;

ж) $\mathrm{tg}^2 x - \frac{|\sin x|}{\cos x} - 2 = 0, \ x \in \left(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right);$

з) $2\cos 3x - \cos x = \sqrt{\cos^2 x}, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right).$

5. Тенгламаларни кўпайтувчиларга ажратиш усули билан ечинг:

а) $1 + \sin 2x = 2\sin x + \cos x;$

б) $4\sin 2x\sin x - 2\cos x + 4\sin^2 x - 1 = 0;$

в) $(2\sin x - 1)(2\sin 2x + 1) = 3 - 4\cos^2 x;$

г) $(1 - \mathrm{ctg}\, x)\sin^2 x = \cos x - \sin x;$

д) $\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\, x\sin 3x = \sin 3x;$

е) $\mathrm{tg}\, 3x\sin 4x = \sin 4x.$

6. Тенгламаларни бир жинсли тенгламаларга келтириш билан ечинг:

а) $|\sin x| = \cos x$; б) $|\sin x| = |\cos x|$; в) $\sqrt{3}\,|\sin x| = -\cos x$;

г) $|3\sin x + \cos x| = -2\cos x$; д) $2\sin x\,|\cos x| = \cos 2x$;

е) $3\cos^2 x = 2\sin 2x$; ж) $5\sin^2 x - 1 = 3\sin x\cos x$;

з) $\sin x\sin 2x + 2\cos x\cos 2x + 10\cos^3 x + 4\sin^3 x = 2\sin x.$

7. Тенгламаларни ёрдамчи аргумент киритиш орқали ечинг:

а) $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}$; б) $\sin 3x + 2\sqrt{2}\cos 3x = 2$;

в) $6\sin x\cos x - 4\cos 2x = 5$; г) $2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 - 2\sqrt{3}\sin x.$

8. Тенгламалар ечимга эга эмаслигини исботланг:

а) $5\sin x - 7\cos x = 9$; б) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{7\pi}{27}$;

в) $\sin 3x + \sin 10x\cos 3x = \frac{3}{2}$; г) $\sqrt{a-1}\sin x + a\cos x = 2a.$

9. $a$ параметрнинг барча шундай қийматларини топингки, уларда тенгламалар ечимга эга бўлсин:

18. Тенгламаларни ечинг:

а) $\frac{3\cos x}{1+\sin x}=1$;  б) $\frac{\sin 2x}{1+\cos x}=-2\sin x$;

в) $\frac{2\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos x-3\sqrt{2}\cos x-1}{1+\sin 2x}=1$;

г) $\frac{\sin 4x}{4\sin x-\sin 3x}=\cos x$;

д) $\frac{\sin 3x+\sin x}{|\cos x|}=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$;

е) $4\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\cos 2x}{1-\sin x}$;

ж) $2\sin x-\frac{1}{\cos x}=\frac{2\cos x-\sin x}{\operatorname{ctg} x}$;

з) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)=\frac{(1+\cos 2x)\operatorname{tg} x}{\cos x}$.

19. Тенгламаларнинг кўрсатилган оралиқларга тегишли ба ечимларини топинг:

а) $\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}-1+\cos x=2\cos 2x$;  $x\in[\pi;\ 2\pi]$;

б) $1+\cos 4x+\frac{2}{1+\operatorname{tg}^2 x}=2\sin^2 x$;  $x\in[0;\ \pi]$.

20. Тенгламаларни ечинг:

а) $2\sin 6x=\operatorname{tg} 2x-2\sin 2x$;

б) $2\sin^2 x\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin^2 x-\operatorname{tg} x$;

в) $\operatorname{ctg} x+\sin 2x=\operatorname{ctg} 3x$;

г) $\sin 4x\,(2+\sin 14x)=2\operatorname{ctg} 3x\cos 4x$;

д) $\cos 3x+\cos x\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=0$;

е) $2(\cos^4 x+\sin x\sin 2x+\sin^4 x)=\cos x-\sin^2 2x+4\cos 2x$;

ж) $4\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)+2\cos^2\frac{x}{2}+20\cos\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)+7=\cos x$;

з) $2\sin^2 x+2\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg} x+2\sqrt{2}\sin x+3=0$

и) $2(\cos 3x+\sin x\sin 2x)=4\cos^3 x+3\operatorname{tg} x$;

к) $\cos 2x+4\sin x\sin^2 2x+2\sin x\cos 4x=0$.

21. Тенгламаларни ечинг:

а) $\sin x\cos^6 x-\sin^6 x\cos x=\sin 2x$;

б) $\sin^3 x\cos^7 x-\cos^3 x\sin^7 x=\cos 2x$;

в) $3\sin 4x - 8\sin^2 2x = 1;$

г) $\cos x + \cos^2 x + \sin^3 x = 0;$

д) $2\sin^3 x = \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{\sin^2 x} - 2\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\operatorname{ctg} x;$

е) $2(\sin 3x - \sin 2x\cos x) = 3\operatorname{ctg} x - 4\sin^3 x;$

ж) $\cos x(1 + \cos x) - 1 = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} - \sin x(1 + \sin x);$

з) $\frac{\sin 2x}{\cos 2x - \cos 2x} = \sqrt{2};$

и) $\frac{\sin 2x - \cos x}{\sin x - \cos 2x} = 1;$

к) $\frac{4\sin^3 \frac{x}{2}\cos x + \cos 4x + \sqrt{3}\sin 3x}{2\cos x - 1} = 1.$

22. Тенгламаларни ечинг:

а) $\cos x + \sqrt{1 - \sin 2x} = 0;$ б) $\sin x = \sqrt{1 + \sin 2x};$

в) $\frac{\sqrt{2 - 2\cos 2x}}{\sin x} = 2\cos x - 1;$ г) $\frac{\sqrt{2 + 2\cos 2x}}{\cos x} = 2\sin x - 1;$

д) $\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos^2 x = 2\sqrt{2 + 2\cos 2x};$

е) $\sqrt{3}\sin 2x + 2\sin^2 x = -2\sqrt{2 - 2\cos 2x};$

ж) $\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 16\operatorname{ctg}^2 x - 8} = \operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x.$

23. Ушбу

$$\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{2}\cos 3x = 0$$

тенгламанинг $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ оралиққа тегишли барча ечимларини топинг.

24. $\frac{\pi}{2} < |3x - 2\pi| \leqslant \pi$ шартни қаноатлантирувчи ва ушбу

$$\sin x + \cos x - \cos 2x = \cos 3x - \sin 2x - 1$$

тенгламанинг ечимларидан иборат бўлган барча $x$ ларни топинг.

25. $a$ нинг барча шундай қийматларини топингки, уларда:

а) $2\cos^2 x + (2a + 1)\sin x - a - 2 = 0$ тенглама $[0; \pi]$ оралиқда роппа-роса учта илдизга эга бўлсин;

б) $2\cos^2 3x + (4a^2 - 7)\cos 3x + 2a^2 - 4 = 0$ тенглама $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ оралиқда роппа-роса бешта илдизга эга бўлсин.

26. $a$ параметрнинг барча шундай ҳақиқий кийматларини топингки, уларда қуйидаги тенгламалар ечимларга эга бўлсин. Шу ечимларни топинг:

а) $\sin^2 x - 3\sin x + a = 0$;
б) $\cos^4 x - (a + 1)\cos^2 x - (a + 2) = 0$;
в) $a \sin x + 2\sqrt{a+1}\cos x = 2a + 1$;
г) $\sin 2x - (a + 2)(\sin x + \cos x) + 2a + 1 = 0$;
д) $\sin^4 x + \cos^4 x = a$;
е) $\frac{a}{1-\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\sin^2 x + a^2 - 2}{\cos 2x}$.

27. Тенгсизликларни ечинг:

а) $\sin x \cos x > \frac{1}{4}$;
в) $\sin(2\pi \cos x) < 0$;
д) $\sin^2 x \leqslant 0{,}5$;
ж) $2\sin^2 x - \sin x < 0$;
и) $\sin 2x > \cos 2x$;
л) $\operatorname{tg}^2 3x > 1$;

б) $\sqrt{3}\cos x - \sin x > \sqrt{2}$;
г) $\cos(0{,}5\pi \sin x) > \frac{1}{2}$;
е) $\cos x < 0{,}5\sqrt{3}$;
з) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x > 0$;
к) $\sqrt{3}\sin x + \cos x < 0$;
м) $\left|\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right| < \sqrt{3}$.

28. Тенгсизликларни ечинг:

а) $11\sin x + \cos 2x \leqslant 6$;
в) $2\cos^2 x - 7\sin x > 5$;
д) $\sqrt{3}(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) > 4$;
ж) $2\cos^4 x \leqslant 0{,}5 + \cos 2x$;
и) $4\sin x + \frac{3}{\sin x} < 8$;

б) $\cos 2x < 2 + \sqrt{3}\cos x$;
г) $2(\sin^2 x + 1) < 7\cos x$;
е) $2\operatorname{tg} 2x \leqslant 3\operatorname{tg} x$;
з) $2\cos 2x - 5 < 4\sqrt{3}\sin x$;
к) $4\cos x - \frac{5}{\cos x} > 8$;

л) $\sin 2x - 6\sin x + \sqrt{3}\cos x < \sqrt{27}$.

29. Тенгсизликларни кўрсатилган оралиқларда ечинг:

а) $\sqrt{2}(\sin 2x - \cos x) + 2\sin x > 1$, $x \in [0;\ \pi]$;
б) $\sqrt{2}(\sin 2x + \sin x) - 2\cos x < 1$, $x \in [0;\ \pi]$;
в) $\sin x < \sin 2x \cos x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]$;
г) $\sin 2x \sin x > \cos x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]$.

30. Тенгсизликларни ечинг:

а) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x < 0$;
б) $\cos x + \cos 3x > \cos 2x + \cos 4x$;
в) $\cos x \cos 3x < \cos 5x \cos 7x$;
г) $2\cos 2x + \sin 2x < \operatorname{ctg} x$;
д) $5\sin^2 x + \sin^2 2x > 4\cos 2x$;
е) $2\cos^3 x + \cos x - 3\sin^2 x + 3 < 0$;

ж) $\dfrac{1+\sin\dfrac{x}{2}-\sqrt{3}\cos\dfrac{x}{2}}{4+4\sin x+2\cos x+\sin 2x}>0.$

31. Функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $y=\sqrt{2\sin x-1}+\sqrt{7x-x^2}$;

б) $y=\sqrt{1-2\cos x}+\sqrt{10x-x^2}$;

в) $y=\dfrac{1}{2\sin x-1}+\sqrt{6x-x^2}$;

г) $y=\dfrac{1}{\sin x}-\sqrt{9x-x^2-14}$;

д) $y=\sqrt{2\sin x-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{6x-x^2-8}}$.

### Қўшимча машқларнинг жавоблари

1. а) $\frac{\pi n}{2}$; г) $(-1)^n \arcsin\frac{\pi}{6}+\pi n$; д) $-1$; $\sqrt{3}$; $\pi n$, $n\in Z$; ж) $-\frac{\pi}{2}$; $\pm 2$; $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in N$; з) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$*; и) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$. 2. 1; $\sqrt{2}$. 4. а) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; г) $\frac{7\pi}{6}$; ж) $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$. 5. д) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$. 6. г) $\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi(2n+1)$; з) $-\operatorname{arctg}2+\pi n$. 8. в) Кўрсатма: $|\sin 3x+\sin 10x\cos 3x|\leqslant\sqrt{1+\sin^2 10x}<\frac{3}{2}$. 9. б) $-4{,}5\leqslant a\leqslant 0{,}5$. 10. д) $2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}+\pi n$; е) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\pm\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+\pi n$. 11. в) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\pi+2\pi n$. 13. ж) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$. 15. в) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; г) $\pm\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$. 16. а) $\frac{3\pi}{2}+6\pi n$; б) $2\pi+8\pi n$; д) $\frac{\pi}{6}+\pi n$; ж) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$; и) $\frac{7\pi}{3}+4\pi n$; к) $\frac{9\pi}{2}+12\pi n$. 17. д) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$; м) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; н) $\frac{\pi n}{2}$; о) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$. 18. г) $\frac{\pi}{6}(2n+1)$; е) $-2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2\pi n$. 19. а) $\frac{5\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$. 20. а) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$; б) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; в) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; г) $\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}$; д) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; е) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$; и) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$; к) $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\pi n$. 21. г) $\pi+2\pi n$, $\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+2\pi n$; д) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; е) $\pm\frac{\pi}{3}+$

---

* Шу ерда ва ундан кейин $n\in Z$.

$+ 2\pi n$; з) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n$, $2\mathrm{arctg}\sqrt{2} + 2\pi n$; и) $2\pi n$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; к) $\pi n$, $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. 22. д) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; е) $\pi n$; ж) $\frac{\pi}{3} + \pi n$. 23. $\frac{21\pi}{16}$; $\frac{11\pi}{8}$.
25. а) $a = 1$; б) $a = \pm\sqrt{2}$. 26. а) $-4 \leqslant a \leqslant 2$, $x = (-1)^n \arcsin\frac{3-\sqrt{9-4a}}{2} +$ $+ \pi n$; б) $-2 \leqslant a \leqslant -1$, $x = \pm\arccos\sqrt{a+2} + \pi n$; в) $-1 \leqslant a \leqslant 1$, $x =$ $= \arcsin\frac{a}{a+2} \pm \arccos\frac{2a+1}{a+2} + 2\pi n$; г) $|a| \leqslant \sqrt{2}$, $x = \frac{\pi}{4} + \arccos\frac{a}{\sqrt{2}} +$ $+ 2\pi n$; д) $0{,}5 \leqslant a \leqslant 1$, $x = \pm\frac{1}{4}\arccos(4a-3) + \frac{\pi n}{2}$; е) $|a| > 1$, $|a| \neq \sqrt{3}$, $x = \pm\arcsin\sqrt{\frac{2}{1+a^2}} + \pi n$. 28. ж) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; з) $x \neq (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}$ $+ \pi n$. 29. а) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6} < x \leqslant \pi$; б) $0 \leqslant x < \frac{\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{4}$
30. ж) $\frac{\pi}{3} + 4\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 4\pi n$, $\frac{3\pi}{2} + 4\pi n < x < 3\pi + 4\pi n$. 31. а) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right] \cup$ $\cup \left[\frac{13\pi}{6}; 7\right]$; в) $\left[0; \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}; 6\right]$; д) $\left(2; \frac{2\pi}{3}\right]$.

## 7. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ ЮЗЛАРНИ ҲИСОБЛАШГА ТАТБИҚИ

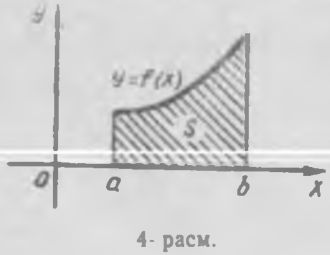
Ясси фигуралар юзларини ҳисоблаш аниқ интегралнинг геометрик маъносига асосланади.

Агар $f$ функция $[a; b]$ кесмада узлуксиз ва номанфий бў у ҳолда $\int_a^b f(x)\,dx$ аниқ интеграл мос эгри чизиқли трапециянинг юзига сонли тенг бўлади (4- расм):

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \quad ($$

Масалаларни ечишда ушбу теоремадан тез- тез фойдаланилади.

*Агар фигура $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлган $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар графиклари ва $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар билан че раланган бўлса, ҳамда барча $x \in [a;$ лар учун $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ тенгсизлик ба жарилса, у ҳолда фигуранинг юзи*



4- расм.

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx \quad ($$

*формула бўйича ҳисобланиши мумки*

$[a; b]$ кесмада $f_1(x)$ ва $f_2($ функциялар номанфий бўлган х учун (2) формуланинг исботи ўқув қўлланмасида келтирилади.

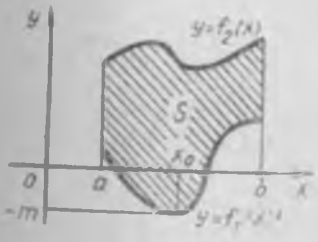
(2) формуланинг умумий ҳол учун исботини келтирамиз. $[a; b]$ кесмада узлуксиз бўлган $f_1(x)$ функциянинг энг кичик қиймати $f_1(x_0) = -m < 0$ $(m > 0)$ бўлсин (5- расм). $y = f_1(x) + m$, $y = f_2(x) + m$ функциялар графиклари ва $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигурани, яъни берилган фигурадан $Oy$ ўқи бўйича параллел кўчириш билан олинадиган фигурани қараймиз. $f_2(x) + m \geqslant f_1(x) + m \geqslant 0$ бўлганидан

$$S = \int_a^b ((f_2(x) + m) - (f_1(x) + m))\,dx =$$

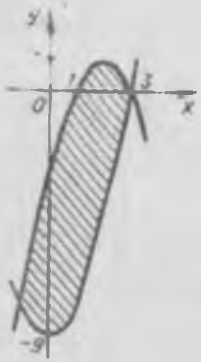
$$= \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx$$

бўлади. Берилган фигура ҳам шундай юзга эга бўлиши равшан. (2) формула исботланди.

1-мисол. $y = x^2 - 9$ ва $y = -x^2 + 4x - 3$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг (6- расм).



5- расм.



6- расм.

Ечиш. $f_1(x) = x^2 - 9$ ва $f_2(x) = -x^2 + 4x - 3$ функциялар графикларининг кесишиш нуқталари абсциссаларини топамиз. $x^2 - 9 = -x^2 + 4x - 3$ тенглик $x = -1$, $x = 3$ да тўғри. $-1 \leqslant x \leqslant 3$ да $f_2(x) - f_1(x) = -2(x+1)(x-3) \geqslant 0$ бўлганидан, (2) формулани қўллаб, ушбуни топамиз:

$$S = \int_{-1}^{3} ((-x^2 + 4x - 3) + (x^2 - 9))\,dx =$$

$$= -2\int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)\,dx = 21\frac{2}{3}.$$

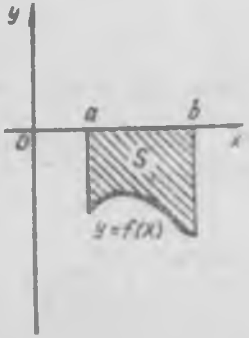
Шуни қайд қиламизки, агар (2) формулага $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = f(x) \geqslant 0$ қўйилса, бизга таниш (1) формула ҳосил бўлади:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx;$$

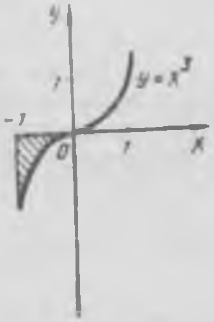
агар $f_1(x) = f(x) \leqslant 0$, $f_2(x) = 0$ деб олинса (7- расм), у ҳолда

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (3)$$

**2-мисол.** $y = x^3$, $y = 0$, $x = -1$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.



7- расм.



8- расм.

**Ечиш.** $y = x^3$ $(x \in [-1;\ 0])$ функция графиги $Ox$ ўқидан пастда жойлашган (8- расм). Шунинг учун юзни ҳисоблашда (3) формулани қўлланамиз:

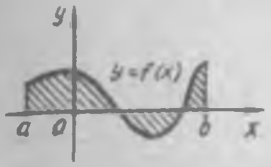
$$S = -\int_{-1}^{0} x^3dx = -\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{4}.$$

Амалда учрайдиган кўп ҳолларда фигура юзини топишга доир масалани ечиш даврида берилган фигура шундай чекли сондаги қисмларга ажратиладики, уларнинг ҳар қайсисига нисбатан (1) — (3) формулалардан бирортасини қўллаш мумкин бўлади.

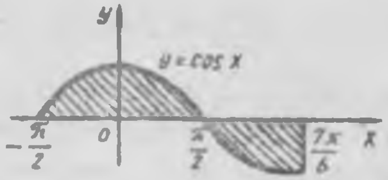
Мисол учун, агар $y = f(x)$ $(x \in [a;\ b])$ — графиги абсцисса ўқини чекли сондаги нуқталарда кесиб ўтадиган узлуксиз функция бўлса (9- расм), (1) ва (3) формулаларга қараганда $f$ функция графиги, $Ox$ ўқ ва $x = a$, $x = b$ тўгри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзи

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

формула бўйича ҳисобланади.



9- расм.

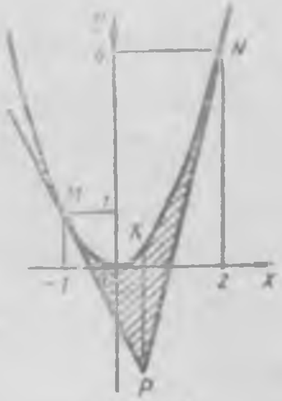


10- расм.

**3-мисол.** $Ox$ ўқнинг $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{7\pi}{6}\right]$ кесмаси, $y = \cos x$ функция графиги ва $x = \frac{7\pi}{6}$ тўгри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

**Ечиш.** $\cos x = 0$ тенгламани ечиб, $y = \cos x$ функция графиги $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{7\pi}{6}\right]$ кесмада $Ox$ ўқини $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$ нукталарда кесишини аниқлаймиз (10- расм). Демак,

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}} |\cos x|\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}} \cos x dx = 3{,}5.$$



11- расм.

**4-мисол.** $y = x^2$ функция графиги ва $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ нуқталарда $y = x^2$ функция графигига ўтказилган уринмалар билан чегараланган фигура юзини ҳисобланг.

**Ечиш.** Фигуранинг юзи $MPK$ ва $KPN$ фигуралар юзлари йиғиндисига тенг (11- расм). Буларнинг ҳар қайсисига нисбатан (2) формула қўлланишга эга. Уринмалар тенгламалари $y = -2x - 1$, $y = 4x - 4$ ва уларнинг кесишиш нуқтасининг абсциссаси: $x_0 = 0{,}5$. Изланаётган юзни ҳисоблаймиз:

$$S = \int_{-1}^{0.5} (x^2 - (-2x - 1))\,dx + \int_{0.5}^{2} (x^2 - (4x - 4))\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{0.5} (x + 1)^2\,dx + \int_{0.5}^{2} (x - 2)^2\,dx =$$

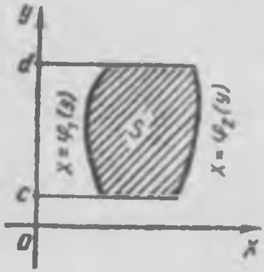
$$= \frac{1}{3}(x+1)^3 \Big|_{-1}^{0,5} + \frac{1}{3}(x-2)^3 \Big|_{0,5}^{2} = 2,25.$$

1-изоҳ. Агар $[a;\ b]$ кесмада

$$f_2(x) \geqslant f_1(x) \text{ ёки } f_1(x) \geqslant f_2(x)$$

тенгсизликлардан бири бажарилса, у ҳолда $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзи ушбу формула бўйича ҳисобланиши мумкин:

$$S = \left| \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\, dx \right|. \qquad (4)$$



12- расм.

2-изоҳ. Агар фигура $x = \varphi_1(y)$, $x = \varphi_2(y)$, $y = c$, $y = d$, бунда $[c;\ d]$ да $c < d$ ва $\varphi_2(y) \geqslant \varphi_1(y)$, чизиқлар билан чегараланган бўлса (12-расм), унинг юзи (2) формулада $x$ ва $y$ ларнинг ролларини алмаштиришдан ҳосил бўладиган ушбу формула бўйича ҳисобланиши мумкин:

$$S = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y))\, dy. \qquad (5)$$

(5) формуладан (4) формулага ўхшаш формулани олиш мумкинлиги равшан.

## Қўшимча машқлар

1. Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг:

а) $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$; б) $y = 8x - x^2$, $y = 0$; в) $y^2 = 2x^3$, $y = 0$, $x = 2$; г) $y = \sqrt{2x-1}$, $y = 0$, $x = 5$; д) $y = \sqrt{1-x}$, $y = 0$, $x = -3$; е) $y = \sqrt{4 - |x|}$ $y = 0$; ж) $y = x^2$, $y = (x-2)^2$, $y = 0$; з) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{8-x}$, $y = 0$; и) $y = \mathrm{tg}^2 x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$; к) $y = \cos 2x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$; $y = 0$; л) $y = \sin^2 x$, $x \in [0;\ \pi]$, $y = 0$.

2. Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг:

а) $y = x^2$, $y = 4$; б) $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$; в) $y = \sqrt{|x|}$, $y = 2$; г) $y = 4x - x^2$, $y = 3$; д) $y = x^2 - 4x + 6$, $y = 6 - x$; е) $y = 8x - x^2 - 10$, $y = 8 - x$; ж) $y = \sin^2 x$, $y = \cos^2 x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$.

3. Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг:

а) $y = 2x^3$, $y = 0$, $x = -1$; б) $y = x^2 - 4x$, $y = 0$; в) $x = 3x - x^3$,

$y = -4$; г) $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = x - 1$; д) $y = \frac{2}{3} x - \frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{3} x^2 - \frac{8}{3} x + 2$; е) $y = 18x - x^2$, $y = x^2 + 8x - 12$; ж) $y = x^2 - 6x + 5$, $y = 5 - 2x - x^2$.

4. $y = x^2 - 4x + 5$ парабола, унга $M$ (4; 5) нуқта орқали ўтказилган уринма ва $x = 1$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5. $y = -x^2 + 4x - 3$ парабола, унга $M$ (0; − 3) ва $N$ (3; 0) нуқталар орқали ўтказилган уринмалар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

6. $y = x^2 - 2a$, унга ўтказилган $y = 2x - 5$ уринма ва $x = 3$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

7. $y = \frac{1}{x^3}$, $y = 0$, $x = 3$ чизиқлар ва ординатаси 1 га тенг бўлган нуқта орқали $y = \frac{1}{x^3}$ функциянинг графигига ўтказилган уринма билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

8. Абсциссалари бутун сонлардан иборат бўлган нуқталарда кесишувчи $y = 1 + \cos \pi x$ ва $y = 2x^2 - 2$ функцияларнинг графиклари билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

9. $a$ нинг қандай қийматида $y = \frac{3|x| + x}{2}$ ва $y = ax^2$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзи $\frac{3}{32}$ га тенг бўлади?

10. $y = \sin |x|$, $y = |x| - \pi$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

### Қўшимча машқларнинг жавоблари

1. а) $4\frac{2}{3}$; в) 8; г) 9; е) $10\frac{2}{3}$; ж) $\frac{2}{3}$. 2. д) 4,5; е) 4,5; ж) 1. 3. а) 0,5; б) $10\frac{2}{3}$; в) $20\frac{5}{6}$; г) 4,5; д) 3; е) $\frac{343}{3}$. 4. 9. 5. $2\frac{1}{4}$. 6. $2\frac{2}{3}$. 7. $\frac{5}{18}$. 8. $4\frac{2}{3}$. 9. $a = 4$. 10. $4 + \pi^2$.

## 8. $e$ СОНИ БИЛАН БОҒЛИҚ БАЪЗИ ЛИМИТЛАР

Бу мавзу бўйича масалаларни ечишда «ажойиб лимитлар» деб аталувчи ушбу лимитлардан фойдаланилади:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad (1)$$

$$\lim_{\alpha\to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e. \qquad (2)$$

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\ln(1 + \alpha)}{\alpha} = 1, \qquad (3)$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}=1. \qquad (4)$$

(1) ва (2) формулаларнинг исботи ўқув қўлланмасида келтирилган. (3) ва (4) формулалар исботини келтирамиз. Қуйидагига эга бўламиз:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=$$

$$=\ln\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\ln e=1.$$

(4) формулани исботлаш учун $e^{\alpha}-1=\beta$ алмаштириш киритамиз. Натижада $\ln(1+\beta)=\alpha$; $\alpha\to 0$ да $\beta\to 0$. У ҳолда:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}=\lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\ln(1+\beta)}=1.$$

(3) формулага кўра, агар $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ лар $x\to a$ да чексиз кичик функциялар бўлса ва $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ лимит мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln(1+\alpha(x))}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}; \qquad (5)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln(1+\alpha(x))}{\ln(1+\beta(x))}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \qquad (6)$$

экани бевосита келиб чиқади.

Мисол учун (6) тенгликни исбот қиламиз. Қуйидагига эга бўламиз:

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln(1+\alpha(x))}{\ln(1+\beta(x))}=\lim_{x\to a}\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\frac{\frac{\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)}}{\frac{\ln(1+\beta(x))}{\beta(x)}}\right)=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

(5) тенглик ҳам шундай исботланади.

Ўқув қўлланмасидаги айрим машқларни қараймиз.

**169(3).** Ушбу $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$ лимитни ҳисобланг.

Ечиш.

$$(\sin x)^{\operatorname{tg}x}=\left((1+(\sin x-1))^{\frac{1}{\sin x-1}}\right)^{(\sin x-1)\cdot\operatorname{tg}x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+(\sin x-1))^{\frac{1}{\sin x-1}}=e,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x - 1)\ \operatorname{tg} x = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\sin x \cdot \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right) =$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\sin x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right) = 0$$

бўлади, у ҳолда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = e^0 = 1.$$

**170 (2, 3).** Лимитларни ҳисобланг:

2) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\ln x - \ln a}{x-a}$;  3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

Ечиш. 2) $x - a = t$ бўлсин, у ҳолда $x = t + a$ ва $x \to a$ да $t \to 0$. Бундан:

$$\lim_{x\to a} \frac{\ln x - \ln a}{x-a} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(t+a) - \ln a}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{t}{a}\right)}{t} = \frac{1}{a}.$$

$$3) \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos ax - 1)\ln\left(\cos ax^{\frac{1}{\cos ax - 1}}\right)}{(\cos bx - 1)\ln\left(\cos bx^{\frac{1}{\cos bx - 1}}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos ax - 1}{\cos bx - 1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{ax}{2}}{2\sin^2 \frac{bx}{2}} = \frac{a^2}{b^2}, \text{ чунки } \lim_{x\to 0} \cos ax^{\frac{1}{\cos ax - 1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \cos bx^{\frac{1}{\cos bx - 1}} = e.$$

**172 (1, 3).** Лимитларни ҳисобланг:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}$;  3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Ечиш.

$$1)\ f(x) = \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)} = \frac{2\ln|x| + \ln\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{10\ln|x| + \ln\left(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}}\right)}.$$

Демак, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0{,}2$.

$$3)\quad \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left(\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{\frac{\cos x}{\cos 2x}-1}}\right)^{\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}-1\right)}$$

ва

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}-1\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2\cos 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{x^2\cos 2x} = 1{,}5$$

бўлгани учун $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{1,5}$ бўлади.

**173 (1, 2).** Лимитларни ҳисобланг:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin cx-\sin dx}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 3x)}{\ln(1+\mathrm{tg}4x)}$.

Ечиш.

$$1)\quad \frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin cx-\sin dx} = \frac{a\cdot\frac{e^{ax}-1}{ax}-b\cdot\frac{e^{bx}-1}{bx}}{c\cdot\frac{\sin cx}{cx}-d\cdot\frac{\sin nx}{dx}}\ \text{ва}\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha} = 1;$$

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ бўлгани учун

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin cx-\sin dx} = \frac{a-b}{c-d}$$

бўлади.

173 (2)-машқларни ечишда (6) тенгликдан фойдаланиш мумкин.

$$2)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 3x)}{\ln(1+\mathrm{tg}4x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\mathrm{tg}\,4x} = \frac{3}{4}.$$

## 9. КЎРСАТКИЧЛИ ВА ЛОГАРИФМИК ТЕНГЛАМАЛАР ҲАМДА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

Кўрсаткичли ва логарифмик тенгламалар ҳамда тенгсизликларни ечиш усуллари XI синф ўқув қўлланмасида етарлича тўлиқ қаралган.

Тенгламаларнинг тенг кучлилиги, логарифмик тенгламаларни ечиш жараёнида илдизларнинг йўқолиш ва пайдо бўлиш манбалари билан боғлиқ баъзи масалалар устида тўхталамиз.

Логарифмик ифодаларни алмаштиришда кўпинча

$$a^{\log_a x} = x, \tag{1}$$

$$\log_a(xy) = \log_a x+\log_a y, \tag{2}$$

$$\log_a\frac{x}{y} = \log_a x-\log_a y, \tag{3}$$

$$\log_a x^{\alpha} = \alpha\log_a x \tag{4}$$

формулалардан фойдаланилади, бунда $a>0$, $a\neq 1$.

(1) — (4) формулаларнинг ўзига хос хусусияти шуки, агар уларнинг чап ва ўнг қисмлари бир-бирларидан мустақил равишда қаралса, улар ўзгарувчилар қийматларининг ҳар хил тўпламларида аниқланганликларини кўриш мумкин. Масалан, (1) формуланинг чап қисми $x>0$ да, ўнг қисми эса исталган $x\in \boldsymbol{R}$ да аниқланган. (2) ва (3) формулалардаги чап қисмлар бир хил ишорали $x$ ва $y$ сонларининнг барча жуфтларида, ўнг қисмлар эса фақат $x>0$, $y>0$ ларда аниқланган. (4) формулада $\alpha = 2x$, $k\in \boldsymbol{Z}$, $k\neq 0$ да чап қисм барча $x\neq 0$ ларда, ўнг қисм эса фақат $x>0$ да аниқланган.

Таъкидлаб ўтилган хусусият бу формулаларнинг қўлланилиши тенгламаларнинг аниқланиш соҳасини ўзгартириши, яъни тенг кучли бўлмаган тенгламаларга олиб келиши мумкинлигини билдиради.

Масалан, $a^{\log_a f(x)}$ ифоданинг $f(x)$ ифода билан алмаштирилиши, шунингдек,

$$\log_a f(x)\log_a g(x) = \log_a(f(x)\,g(x)),$$

$$\log_a f(x)-\log_a g(x) = \log_a\frac{f(x)}{g(x)},$$

$$2k\log_a f(x) = \log_a(f(x))^{2k},\ (k\in \boldsymbol{Z},\ k\neq 0) \tag{I}$$

потенцирлаш формулаларининг қўлланилиши, умуман олганда, тенгламанинг аниқланиш соҳасини кенгайтиради, бу эса чет илдизларнинг пайдо бўлишига олиб келиши мумкин.

$$\log_a(f(x)\ g(x)) = \log_a f(x)+\log_a g(x),$$

$$\log_a\frac{f(x)}{g(x)} = \log_a f(x)-\log_a g(x),$$

$$\log_a(f(x))^{2k} = 2k\log_a f(x)\ \ (k\in \boldsymbol{Z},\ k\neq 0) \tag{II}$$

логарифмлаш формулаларининг қўлланилиши эса, аксинча, тенгламанинг аниқланиш соҳасининг торайиши мумкинлигидан илдизларнинг йўқолишига олиб келиши мумкин.

Потенцирлашда пайдо бўладиган чет илдизлар одатда текшириш (дастлабки тенгламага қўйиш) ёрдами билан аниқланади. Бундай текшириш қийин бўлган ҳолда берилган тенгламани шу тенглама ва тегишли тенгсизликлардан иборат бўлган тенг кучли системага алмаштириш маъқул. Ҳосил қилинган аралаш системадаги тенгламалар ечилади, тенгсизликлар эса текширилади. Шу билан бирга, баъзан системани соддароғи билан алмаштиришга ва зарур текширишларни енгил бажарилишига эришилади.

1-мисол. Ушбу

$$3^{\log_3(x^2-2x-1)}+x = 2 \tag{5}$$

тенгламани ечинг.

**Ечиш.** (1) формулани қўлланиб,

$$x^2 - 2x - 1 + x = 2 \qquad (6)$$

тенгламани оламиз. Унинг илдизлари

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Энди олинган сонлардан қайси бири

$$x^2 - 2x - 1 > 0 \qquad (7)$$

тенгсизликни қаноатлантиришини текшириш етарли. Лекин илдизларни текширишни қуйидагича соддалаштириш мумкин. (6) тенгламани

$$x^2 - 2x - 1 = 2 - x \qquad (8)$$

кўринишда қайта ёзиб, $x^2 - 2x - 1$ ифода фақат $x < 2$ бўлгандагина мусбат бўлишини кўрамиз. Шундай қилиб, (7) тенгсизликни текшириш ўрнига $x < 2$ шартнинг бажарилишини текшириш мумкин. Энди берилган тенгламанинг илдизи фақат $x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$ дан иборатлигини кўриш қийин эмас.

(5) тенглама қуйидаги тартибда ечилади:

$$(5) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 > 0, \\ x^2 - 2x - 1 + x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 > 0, \\ x^2 - 2x - 1 = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x > 0, \\ x^2 - x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < 2, \\ \left[ \begin{array}{l} x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}, \\ x = \frac{1 + \sqrt{13}}{3} \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}.$$

**2-мисол.** Тенгламани ечинг:

$$\log_2 x + \log_2 (4x - x^2 - 1) = 1. \qquad (9$$

**Ечиш.** (9) тенглама ушбу системага тенг кучли:

$$(9) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 4x - x^2 - 1 > 0, \\ \log_2 x (4x - x^2 - 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 4x - x^2 - 1 > 0, \\ x (4x - x^2 - 1) = 2 \end{cases} (*) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x (4x - x^2 - 1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^3 - 4x^2 + x + 2 = 0 \end{cases} \left[ \begin{array}{l} x = 1, \\ x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}. \end{array} \right.$$

(*) системадаги $4x + x^2 - 1 > 0$ тенгсизлигини тушириб қолдир мумкин, чунки у шу системадаги $x > 0$ тенгсизлик ва $x (4x - x^2 - 1) = 2$ тенгламадан келиб чиқади.

Тенгламалардан фарқли равишда тенгсизликларни ечиш ҳол одатда, текширишни бажариб бўлмайди, шу сабабли фақат тенг ку ли алмаштиришлар қилишга тўғри келади.

**3-мисол.** Тенгсизликни ечинг:

$$\log_2 x + \log_2 (x^3 - 2x + 3) > \log_2 (x^4 - 2). \qquad (10)$$

**Ечиш.** (10) тенгсизлик ушбу тенгсизликлар системасига тенг кучли:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x^3 - 2x + 3 > 0, \\ x^4 - 2 > 0, \\ x (x^3 - 2x + 3) > x^4 - 2. \end{cases} \qquad (11)$$

(11) системадаги $x^3 - 2x + 3 > 0$ тенгсизлик системанинг қолган тенгсизликларидан келиб чиқади. Шунинг учун

$$(11) \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt[4]{2}, \\ 2x^2 - 3x - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt[4]{2} < x < 2.$$

**Жавоб.** $\sqrt[4]{2} < x < 2$.

Юқорида айтганимиздек, (II) логарифмлаш формулаларининг қўлланилиши илдизларнинг йўқолишига олиб келади, табиийки, бунга йўл қўйиш мумкин эмас. Агар тенгламалар ва тенгсизликларни ечиш жараёнида бу формулалардан фойдаланишга тўғри келса-чи, у ҳолда нима қилишимиз керак? Логарифмлаш формулалари илдизларнинг йўқолишига олиб келмаслиги учун улардан қуйидаги кўринишда фойдаланилади:

$$\log_a (f(x)\, g(x)) = \log_a |f(x)| + \log_a |g(x)|,$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a |f(x)| - \log_a |g(x)|, \qquad (III)$$

$$\log_a (f(x))^{2k} = 2x \log_a |f(x)|.$$

(III) гуруҳдаги дастлабки икки формула ҳам универсал эмас, чунки улар тенглама аниқланиш соҳасининг кенгайишига, демак, чет илдизларнинг пайдо бўлишига олиб келиши мумкин. Лекин бу аниқланиш соҳасининг торайиши ва илдизларнинг йўқолишига қараганда унчалик хавфли эмас. Таъкидлаб ўтилганига кўра бегона илдизлар текшириш ёрдами билан аниқланиши мумкин.

Логарифмлаш формулалари илдизларнинг йўқолишига ҳам, чет илдизларнинг пайдо бўлишига ҳам олиб келмайдиган қилиб тенгламаларни алмаштириш мумкинлигини кўрсатамиз. У, зарурият бўлган ҳолларда,

$$\log_a (f(x)\, g(x)) = h(x) \qquad (12)$$

кўринишдаги тенгламадан (12) тенгламага тенг кучли бўлган

$$\left[ \begin{array}{l} \log_a f(x) + \log_a g(x) = h(x), \\ \log_a (-f(x)) + \log_a (-g(x)) = h(x) \end{array} \right.$$

тенгламалар мажмуасига (дизъюнкциясига) ўтишдан иборат.

**4-мисол.** Тенгламани ечинг:

$$\log_2^2 (\sin x \cos x) = \log_2 \sin^2 x \cdot \log_2 \cos^2 x. \qquad (13)$$

Ечиш. (13) тенглама

$$\left[\begin{array}{ll}(\log_2\sin x+\log_2\cos x)^2=4\log_2\sin x\cdot\log_2\cos x, & (14)\\ (\log_2(-\sin x)+\log_2(-\cos x))^2=4\log_2(-\sin x)\cdot\log_2(-\cos x) & (15)\end{array}\right.$$

тенгламалар мажмуасига тенг кучли. (14) ва (15) тенгламалардан ҳар бирини алмаштириб, қуйидагиларни оламиз:

$$\left[\begin{array}{l}(\log_2\sin x-\log_2\cos x)^2=0,\\ (\log_2(-\sin x)-\log_2(-\cos x))^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2\sin x=\log_2\cos x,\\ \log_2(-\sin x)=\log_2(-\cos x)\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z,\\ x=\frac{5\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z.$$

Таъкидлаймизки, агар (III) гуруҳ формулаларидан фойдаланилса, (13) тенгламанинг натижасидан иборат бўлган

$$(\log_2|\sin x|+\log_2|\cos x|)^2=4\log_2|\sin x|\cdot\log_2|\cos x| \qquad (16)$$

тенгламани олган бўлардик.

(16) тенглама илдизлари $x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$ бўлган

$$\log_2|\sin x|=\log_2|\cos x|$$

тенгламага тенг кучли. $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$ лар чет илдизлардан иборат. Уларни ташлаб, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$ ни оламиз.

$$\log_a(f(x))^{2k}=2k\log_a|f(x)|\ (k\in Z,\ k\neq 0)$$

тенгламани қўлланиш тенг кучли тенгламага олиб келишини таъкидлаймиз. Тенгликнинг чап ва ўнг қисмлари $x$ нинг фақат бир хил қийматларида аниқланган.

Шу сабабга кўра

$$\log_{(\varphi(x))^{2k}}f(x)=\frac{1}{2k}\log_{|\varphi(x)|}f(x)$$

формуланинг қўлланилиши ҳам тенг кучли тенгламага олиб келад

5-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\log_4x^2+\log_{x^6}64=2. \qquad (17$$

Ечиш.

$$(17)\Leftrightarrow\log_2|x|+\log_{x}2=2\Leftrightarrow\log_2|x|=1\Leftrightarrow|x|=2.$$

Жавоб. ± 2.

6-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{\log_2(x^2-14x+49)^6}+6\log_4\sqrt{14-2x}=7. \qquad (1$$

Ечиш. $x < 7$ эканини назарда тутиб, илдиз остидаги ифодани алмаштирамиз:

$$\log_2 (x^2 - 14x + 49)^8 = 16 \log_2 |x - 7| = 16 \log_2 (7 - x).$$

Демак,

$$(18) \Leftrightarrow 8 \sqrt{\log_2 (7 - x)} + 3 \log_2 (7 - x) = 11.$$

$\sqrt{\log_2 (7-x)}$ ни $y$ орқали белгилаб, $3y^2 + 8y - 11 = 0$ ни оламиз, бундан $y = 1$. Шундан сўнг $\sqrt{\log_2 (7 - x)} = 1$ га эга бўламиз, бундан $x = 5$.

Логарифмни ўзгарувчига эга янги асосга ўтказиш ҳам илдизларнинг йўқолишига, ҳам бегона илдизларнинг пайдо бўлишига олиб келувчи алмаштиришларга мисол бўла олади.

Агар тенгламаларни ечиш даврида

$$\log_{g(x)} f(x) = \frac{\log_{h(x)} f(x)}{\log_{h(x)} g(x)} \tag{19}$$

формула қўлланилса, илдизлар йўқолиши мумкин, бунда $h(x) \leqslant 0$ ёки $h(x) = 1$. Масалан, агар

$$\log_{2x} x = \log_{\frac{8}{x}} x \tag{20}$$

тенгламада $x$ асосга ўтилса,

$$\frac{1}{\log_x (2x)} = \frac{1}{\log_x \frac{8}{x}}$$

тенглама олинади. Унинг ягона илдизи $x = 2$ дан иборат. Лекин $x = 1$ (20) тенгламанинг илдизи бўлишини кўриш қийин эмас, бу илдиз йўқотиб қўйилган. Бу ҳол $x$ асосга ўтиш формуласидан фойдаланиш натижасида рўй берган. $x$ асосга ўтиш тенгламанинг аниқланиш соҳасини торайтирган ($x \neq 1$ қўшимча чеклаш пайдо бўлади, лекин худди $x = 1$ тенгламанинг илдизидан иборат).

Демак, $x$ асосга ўтишдан илгари $x = 1$ берилган тенгламанинг илдизи бўлиш-бўлмаслигини текшириш, у тенгламанинг илдизи экани аниқлангач, жавобга киритилиши, сўнг эса $x \neq 1$ ҳолини қараш ва ўтиш формуласидан фойдаланиш керак эди. Ушбу масалада $x$ га тенг янги асоснинг танланиши зарурий эмас эди, 2 асосига ўтиш масаланинг ечилишини қийинлаштирмас, шу билан бирга илдиз йўқолишининг олдини олишга имкон берарди.

Баъзан логарифмик тенгламаларни ечишда қуйидаги формуладан фойдаланиш қулай:

$$u^{\log_a v} = v^{\log_a u} \quad (u > 0;\ v > 0;\ a > 0;\ a \neq 1). \tag{21}$$

(21) формулани исботлаш учун $a$ асос бўйича $u^{\log_a v}$ ва $v^{\log_a u}$ лардан логарифм топиш етарли. Бу логарифмлар битта $\log_a u \cdot \log_a v$

$$\begin{cases} \sin 3x = 1, & (28) \\ \cos\frac{12x}{5} = 1. & (29) \end{cases}$$

Бу системани ечишнинг икки усулини келтирамиз.

I усул. $\sin 3x$ ва $\cos\frac{12x}{5}$ функцияларнинг умумий даврини топамиз. $\sin 3x$ функциянинг даври $T_1 = \frac{2\pi}{3}$ га; $\cos\frac{12x}{5}$ функциянинг даври $T_2 = \frac{5\pi}{6}$ га тенг. $\frac{T_1}{T_2} = \frac{4}{5}$ бўлгани учун $5T_1 = 4T_2$ бўлади. Демак, $T = 5\ T_1 = 4\ T_2 = \frac{10\pi}{3}$ — кўрсатилган функцияларнинг умумий даври.

(28) ва (29) тенгламаларнинг $\frac{10\pi}{3}$ узунликка эга бўлган бирор оралиқдаги, масалан $\left[0; \frac{10\pi}{3}\right)$ даги, умумий илдизларини топамиз. (28) тенглама илдизларини топайлик:

$$\sin 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in Z.$$

$\left[0; \frac{10\pi}{3}\right)$ оралиққа $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{13\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{6}$ лар тегишли.

Энди (29) тенгламанинг илдизларини топамиз:

$$\cos\frac{12x}{5} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{5\pi k}{6},\ k \in Z.$$

$\left[0; \frac{10\pi}{3}\right)$ оралиққа 0; $\frac{5\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{2}$ лар тегишли.

Шундай қилиб, (28) ва (29) тенгламаларнинг $\left[0; \frac{10\pi}{3}\right)$ даги умумий илдизи $x = \frac{5\pi}{6}$ дан иборат. Бундан (28) — (29) тенгламалар системасининг барча ечимлари

$$x = \frac{5\pi}{6} + \frac{10\pi m}{3},\ m \in Z$$

кўринишда ёзилиши келиб чиқади.

II усул. (28) ва (29) тенгламаларнинг умумий илдизларини

$$\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} = \frac{5\pi k}{6} \qquad (30)$$

тенгламани тузиш ва уни бутун сонларда ечиш орқали топиш мумкин.

(30) тенгламани $1 + 4n = 5k$ ёки

$$k - 1 = 4\ (n - k) \qquad (31)$$

кўринишда қайтадан ёзамиз. (31) дан $k - 1$ сони 4 га каррали бўлиши кераклиги, яъни $k - 1 = 4m$, бунда $m \in Z$, экани келиб чиқади.

Шундай қилиб, $k = 4m + 1$, $m \in Z$ ва бундан

$$x = \frac{5\pi}{6}\ (4m + 1) = \frac{5\pi}{6} + \frac{10\pi m}{3},\ m \in Z.$$

## Қўшимча машқлар

1. Тенгламаларни ечинг:

а) $4{,}5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-x}\cdot 3^{x+1} = 4\cdot 2^x$; б) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot 2^{|x|} = (2\sqrt{2})^{x^2-2}$; в) $3\cdot 2^{x^2-1} = 5\cdot 2^{1-x} - 2^{x^2}$; г) $9^x - 2^{x+0,5} = 8\sqrt{2}\cdot 2^x - 3^{2x-1}$; д) $2^{2x+9} + 5\cdot 2^{x+4} - 3 = 0$; е) $3\cdot 4^{|x|} - 7\cdot 2^{1+|x|} + 8 = 0$; ж) $2\cdot 9^x + 3\cdot 6^x = 9\cdot 4^x$; з) $2\cdot 3^{1+3|x|} + 1 = 9^{|x|} + 2\cdot 3^{1+|x|}$; и) $\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}\right)^x = 12$; к) $9^x + 9^{-x} - 3^{x+1} - 3^{1-x} + 4 = 0$; л) $8^x + 8^{-x} - 5\ (2^x + 2^{-x}) + 8 = 0$; м) $27^x - 12^x + 2\cdot 18^x - 2\cdot 8^x = 0$.

2. Тенгламаларни ечинг:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{4}{3} = 2^x$; б) $4^x - (7 - x)\ 2^x + 12 - 4x = 0$;
в) $8 - x\cdot 2^x + 2^{3-x} = x$; г) $3^{x-1}\cdot x^2 + (3^x - 2^x)\ x = 2^{x+1} - 2\cdot 3^{x-1}$;
д) $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x = (2\sqrt{2})^x$;
е) $\frac{2^{x+3}+3}{4^x+16} = x^2 - 4x + 5$.

3. Тенгламаларни ечинг.

а) $4^{\sin x} - 2^{2+\sin x} + 3 = 0$; б) $3\sin^2 x + 4\cdot 3^{\cos^2 x} = 13$;
в) $4^{\sin x} + 2\cdot 4^{\cos x} = 3\cdot 2^{\sin x + \cos x}$;
г) $5^{1+4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - 24\cdot 5^{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} - 5 = 0$.

4. Тенгсизликларни ечинг:

а) $|2^x - 5| < 3$; б) $3^{x^2} > 81\cdot 27^{|x|}$; в) $(x^2 - 2x - 3)\ (2^x - 8) \leqslant 0$;
г) $5^{\cos 2x} + 70 \leqslant 3\cdot 25^{\cos^2 x}$; д) $2^{x^2-2x-1} + 3\cdot 2^{x^2-2x-2} - 2^{x^2-2x-3} > 5$;
е) $2^{6x+11} - 3\cdot 2^{3x+6} + 4 < 0$; ж) $4^{|2x-1|} - 3\cdot 2^{1+|2x-1|} + 8 < 0$;
з) $2^{2x+1} + 3^{2x+1} > 5\cdot 6^x$; и) $2^{2x^2+1} + 2^{4x+2} \geqslant 17\cdot 2^{x^2+2x}$;
к) $2^{2x^2-4x+1} - 9\cdot 2^{x^2-2x} + 4 < 0$; л) $16^{\sin^2 x} + 16^{\cos^2 x} \leqslant 10$;
м) $\frac{3\cdot 9^x + 5}{3^{x+1} - 1} \leqslant 4$; н) $\frac{4^x + 5}{2^{x+1} - 1} \geqslant 3$;

о) $\frac{9^x+4^x}{6^x-9^x} \geqslant 5$; п) $\frac{5\cdot 15^x+9^x+6}{2\cdot 15^x+25^x+3} \leqslant 2$;

р) $(x^2+1)^{3x-1} \geqslant (x^2+1)^2$; с) $|x|^{x^2-2x-3} < 1$;

т) $(x^2+x+1)^x < 1$; у) $(2\cdot 3^{x-2}+3^{-x})^{2-x} > 1$.

5. Ушбу $4^x-2^{x+1}-3<0$ тенгсизликни ечинг. $\sqrt{2}$ бу тенгсизликнинг ечими экани тўғрими?

6. Ушбу $9^{x-0,5}-3^{x-1}\log_2 56+\log_2 7<0$ тенгсизликни ечинг. $\frac{1}{\lg 9}$ сони тенгсизликнинг ечими экани тўғрими?

7. Тенгсизликлар системаларини ечинг:

а) $\begin{cases} 0{,}2^{\sin 2\pi x} \geqslant 1, \\ 3^{|x^2-3x|}-82\cdot 3^{|x^2-3x|}+81<0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^{\cos^2\frac{\pi x}{2}} \leqslant 1, \\ \frac{0{,}5^{x^2-2x}-0{,}125}{0{,}5^{x^2-2x}-2} \leqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{2^{x+1}+x^2-10}{2^x-8}; \\ 8^{x^2}-4^{5-x^2}>0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{3^x+x^2-19}{3^x-9}>2; \\ 3^{4-x^2}-27^{x^2}>0. \end{cases}$

8. Тенгламаларни ечинг:

а) $53^{\log_3 x}=6$; б) $2^{x^2-2x}=3^{x-2}$; в) $3^{\sin x}=2^{\lg x}$;

г) $2^{|\log_2 x|}=3$; д) $3\cdot 2^{|\log_2 x|}=7-4x^2$;

е) $(16-x^2)\log\sin x=0$; ж) $(\sin x)\cdot\lg(16-x^2)=0$;

з) $\log_{\cos x}(\cos 2x+3\sin x)=0$; и) $\log_{\frac{3x}{\pi}}(\sqrt{3}\sin x-\cos x)=0$;

к) $\log_{8\cos^2 x}\sin x=-0{,}5$; л) $\log_{0,8(3x-x^2)}\sin\pi(x^2-2x+5{,}25)=0$.

9. Тенгламаларни ечинг:

а) $\log\sin x=\lg\cos x$; б) $\log_3\sin 2x=\log_2(-\cos x)$;

в) $\log_7(\sin 3x+\sin x)=\log_7(-\sin 2x)$;

г) $\log_{9-x^2}\sin^2 x=\log_{9-x^2}0{,}5$;

д) $\log_{4-x^2-3x}(\cos x-\cos 3x)=\log_{4-x^2-3x}\sin 2x$;

е) $|\sin x|\cdot(\log_2(20-x^2)-1)=\sin x$.

10. Тенгламаларни ечинг:

а) $2\log_3 x+\log_3(3-x)=1$;

б) $2\log_3\sin x-\log_3\cos x=-0{,}5$;

в) $\log_2\sin x+\log_2\cos x=-2$; г) $\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3)$;

д) $0{,}5\log_2(x-2)^4+2\log_2(1-x)=2+\frac{2}{3}\log_3 27$;

е) $\log_2^2 x^2-2\log_2 x-4^{\log_4 2\sqrt{2}}=0$; ж) $\log_3(2^{2x-1}-4)\log_3(4^x-8)=6$

з) $\log_2^2 \sqrt{2x-1} + \log_2^2 \sqrt{4x-2} + \log_2^2 \sqrt{8x-4} = 3,5;$
и) $\log_x \sqrt[3]{9} + 2\log_x (x\sqrt[3]{3}) + (\log_x \sqrt[3]{81})^2 = 22;$
к) $\log_2 (3x^2 + 5x - 2) = 1 + \log_2 (3x - 1) \log_2 (x + 2);$
л) $\log_2^2 x + (x - 5) \log_2 x + 6 - 2x = 0;$
м) $4^{\log_2^2 x} = x^{1+\log_2 x};$ н) $x^{\lg (25x)} = 16;$
о) $x^{\log_6 x} = 3\cdot 2^{3 \log_6 x - 2};$ п) $3^{\log_6 x} = 6 - x^{\log_2 3}.$

11. Тенгламаларни ечинг:

а) $\log_2 x + \log_{x^2} 8 = 2,5;$ б) $\log_3 x^2 + \log_{x^4} 27 = 2,5;$

в) $\log_4^2 (4x^2) + \log_2 \frac{4}{x} = 5;$ г) $\log_{0,5\sin 2x} \sin x \cdot \log_{0,5\sin 2x} \cos x = 0,25;$

д) $\log_3 (5\mathrm{tg}^2 x) = 2\log_9 5 + 2\log_{\frac{1}{3}} (2\cos x);$ е) $25^x - 5^x \log_2 56 + 3\log_2 7 = 0;$

ж) $49^x - 7^x \log_2 12 + 2\log_2 3 = 0;$ з) $\log_{|x|} (x^2 - 2x) - \log_{|x-2|} \frac{x-2}{x} = \frac{5}{2};$

и) $\log_2^2 (x^2 - x)\cdot\log_2 \frac{x-1}{x} + \log_2^2 x^2 = 4;$

к) $\log_2^2 (x^2 - x) = \log_2^2 |x| + \log_2^2 |x - 1|;$

л) $\log_{0,5} (0,5\sin 2x) = \log_{0,5}^2 \mathrm{tg} x + \log_{0,5} \sin^2 x;$

м) $\log_{\sin x} (1 - \cos 2x) = 2^{\cos 8x} + \log_{\sin x} 2;$ н) $\log_3 x = \log_4 (x^2 - 5);$

о) $\log_6 (x^2 + 9) - \log_6 x = 6x - x^2 - 8.$

12. Тенгламаларнинг илдизлари сонини аниқланг:

а) $\log_{2\pi} x = \cos x;$ б) $\log_2 x = -\cos x;$ в) $\log_{\frac{1}{32}} x = \cos x.$

13. Тенгсизликларни ечинг:

а) $\log_3 \frac{2x-1}{x-1} < 1;$ б) $\log_{\frac{1}{2}} (|x - 2| - 3) > 0;$

в) $\log_2 \frac{(x-3)^2}{3x-1} < 1;$ г) $\log_{\frac{1}{5}} (x^2 - 4x + 5) < -1;$

д) $\log_3 (4 + \log_{0,5} (x^2 + 2x)) > 0;$ е) $\log_6 (3^{2\log_3 (4-x)} + 3x - 10) < 1;$
ж) $\log_3 (4^x - 3\cdot 2^{x+1} + 8) < 1;$ з) $\log_2 (x^2 - 4|x| + 4) < 0;$

и) $x^{\frac{1}{\log_5 x}}\cdot\log_5 x < 1;$ к) $2^{|\log_2 x|} < 4,5x - x^2;$

л) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|\log_2 x|} > x^2 - 2x + 2;$ м) $0,5^{\log_{0,5}^2 x} \leqslant x^3.$

14. Тенгсизликларни ечинг:

а) $(9^x - 10\cdot 3^{x-1} + 1)\lg^2 (4x - 1) < 0;$

б) $(2^{2x+1}-9\cdot 2^x+4)\lg^2(x+3)>0$;
в) $(2^x-3)(2\log_2 x-1)\log_2^2 x\leqslant 0$;

г) $\dfrac{(7x^2-10x+3)\lg^2(x+1)}{2-5^x}>0$;

д) $(5x-x^2)\log_{\frac{1}{5}}(|x|-2)>0$; е) $\dfrac{1-2x+\log_2(6x)}{x-2}\leqslant -2$;

ж) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_2\log_{0,2}(x^2-0,8)}\leqslant 1$; з) $\log_4 x^2<\log_2(4-x)+\log_2(3-x)$;

и) $\log_2(x-3)<\log_4(5-x)^2$; к) $2\log_4 x+\log_2(x^3-11x+18)>3$;

л) $\log_2 x^2<\log_2(8-x^2)$; м) $\lg(9^{\lg x}+1)\geqslant 1-\lg 3+\lg x\cdot\lg 3$.

15. Тенгсизликларни ечинг:

а) $4\log_4^2 x-8\log_4 x-5>0$; б) $\log_2(\log_{\frac{1}{2}}^2 x-3\log_{\frac{1}{2}} x+2)\leqslant 1$;

в) $\log_2\sqrt{x}-2\log_{\frac{1}{4}}^2 x+1>0$;

г) $\log_4^2(2)+3\log_2 x<4$; д) $\log_{\frac{4}{x}} 2>\log_x 2$;

е) $2\log_2(2x-1)-\log_{2x-1}16<2$; ж) $\log_2 x^4+2\log_{4x^2}8<4$;
з) $4(\log_2^2 x+\log_x^2 2)-12(\log_2 x-\log_x 2)+1>0$;
и) $\log_2^2(3x^2-5x-2)-3\log_2(3x-2)<1{,}5\log_2(1-x)^2-2$.

16. Тенгсизликларни ечинг:

а) $\log_{x-1}(2x^2-9x+13)\geqslant 2$; б) $\log_{x-2}\sqrt{22-x}\leqslant 1$;

в) $\log_{2x-6}(x^2-9)<2$; г) $\log_{5|x|-4}x^2>1$;

д) $\log_{3^{2-x^2}}(1{,}5-|x-1|)\leqslant 0$; е) $\log_{2x-x^2}\left(x^2-3x+\dfrac{9}{4}\right)^2>0$;

ж) $\log_x\dfrac{|3x-4|}{x-1}<1$; з) $\log_{3-x}\dfrac{1}{|x|}>1$;

и) $(0{,}05)^{-\log_{x-0,25}x}\geqslant(2\sqrt{5})^{\log_{x-0,25}(4x-1)}$;

к) $\log_{2x}\left(\dfrac{1}{17}\cdot 2^{2x+1}+\dfrac{8}{17}\right)\geqslant 2$; л) $\log_{2x-1}(9^x-2\cdot 3^{x+2}+81)<0$.

17. Тенгсизликларни ечинг:

а) $\log_{x-1}2\log_4\sqrt[3]{\dfrac{6-5x}{6x-5}}\leqslant\dfrac{1}{6}$;

б) $\log_{\frac{5-x}{4}}(x-2)\log_{x-2}(6x-x^2)\geqslant\log_{\frac{5-x}{4}}(3x^2-10x+15)$;

в) $\dfrac{1}{\log_3(2x-1)\cdot\log_{x-1}9}<\dfrac{\log_3\sqrt{2x-1}}{\log_3(x-1)}$;

г) $5^{\log_3 x} < 2 - x^{\log_3 5}$; д) $3^{\log_4 x} > 6 - x^{\log_4 3}$;

е) $\log_3 (4 + \cos 6x) \leqslant \sin \frac{x^2}{3}$; ж) $\log_4 \left(5 - \sin \frac{x}{4}\right) \leqslant \cos x$;

з) $\sqrt{\lg \sin x} < 9 - x^2$; и) $\log_2 (4 - \sqrt{x+1}) > \log_3 x$.

18. Функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $y = \sqrt{9 \cdot 2^{x+1} - 4^x - 32} + \lg \sin x$;

б) $y = \sqrt{\log_{0,3} (5^{2x+1} - 4 \cdot 5^x)}$;

в) $y = \log_5 (\sqrt{27^{\lg x - 2}} - \sqrt[3]{9^{2 - \lg x}})$.

19. $\log_{0,2} (29 - 4x - 2x^2) < -2$ тенгсизликнинг барча шундай ечимларини топингки, улар $|2x + 5| + 2\,|x - 1| = 7$ тенгламанинг ҳам ечимлари бўлсин.

20. $a$ параметрнинг барча шундай қийматларини топингки, уларда $\log_2 x^2 \leqslant \log_2 (x + 1) - 1$ тенгсизликнинг ҳар қайси ечими $16x^2 - a^4 \leqslant 0$ тенгсизликнинг ҳам ечими бўлсин.

21. $a$ нинг қайси қийматларида

$$P(x) = x^4 + (a + 3)\,x^2 + (4^a - 5 \cdot 2^{a+1} + 16)\,x + 2^a + 1$$

кўпҳад иккинчи даражали кўпҳаднинг квадратидан иборат бўлади?

22. $a$ параметрнинг ҳар қайси қиймати учун

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{8+\log_a x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_a^2 x}, \ (a > 0;\ a \neq 1)$$

тенгсизлигининг $0 < x < 1$ интервалга тегишли барча ечимларини топинг.

23. Ушбу

$$\log_{0.5}^2 x - \log_{0,5} x + a = 0, \ (a < 0)$$

тенгламанинг 1 дан катта илдизини топинг.

24. $a$ нинг барча шундай қийматларини топингки, уларда

$$a \cdot 4^x - 4 \cdot 2^x + 3a + 1 > 0$$

тенгсизлик $x$ нинг барча қийматларида ўринли бўлсин.

25. Тенгламаларни (тенгсизликларни) ечинг ($a$ — параметр):

а) $4^{-|x-1|} - 2^{2-|x-1|} - a = 0$;

б) $4^{|x|} - 2^{|x|+1} + a = 0$; в) $\sqrt{a\,(2^x - 2) + 1} = 1 - 2^x$;

г) $\log_2 (1 + a \cdot 4^x) = x + 1$; д) $\log_{\frac{1}{5}} (4^x + a) + (x + 1) \log_5 2 = 0$;

е) $x^{1+\log_a x} > a^2 x \ (a > 0;\ a \neq 1)$; ж) $\log_a \ (1 - x^2) \geqslant 1 \ (a > 0;\ a \neq 1)$;

з) $\log_{x+2} (2x + a) = 1$; и) $\log_{2x} (x^2 + a) = 1$;

к) $4^x - (a + 1)\ 2^x + a \leqslant 0$; л) $\log_2^2 \cos x - 2a \log_2 \cos x + 2 - a^2 = 0$.

26. $a$ нинг барча шундай қийматларини топингки, уларда

$$1+\log_2(ax)=2\log_2(1-x)$$

тенглама ягона ечимга эга бўлсин.

27. $a$ нинг барча шундай қийматларини топингки, уларда

$$\log_3(9^x+a)=x$$

тенглама иккита ҳақиқий ва ҳар хил илдизга эга бўлсин.

28. $a$ нинг барча шундай қийматларини топингки, уларда

$$4^x+4^{-x}-(a+1)(2^x+2^{-x})+a+2=0$$

тенглама ягона ечимга эга бўлсин.

### Қўшимча машқларнинг жавоблари

1. а) $-1$; 3; г) 1,5; з) 0; к) 0. 2. а) 1; б) 1; 2; в) 2; г) $-2$; 1; д) 2; е) 2. 3. а) $\pi n$, $n\in Z$. 4. и) $x\leqslant-1, x\geqslant3, x=1$; л) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; н) $-1<x\leqslant1$, $x\geqslant2$; р) $x=0$, $x\geqslant1$; с) $1<x<3$; т) $x<-1$; у) $x>\log_2 1{,}5$; $1<x<2$. 7. а) 1; 2; б) $-1$; 3; в) $x<-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}<x<3$; г) $-1<x<1$. 8. б) 2; $\log_2 3$; г) 3; $\frac{1}{3}$; е) $-4$; $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$; ж) 0; $\pm\pi$; $\pm\sqrt{15}$; л) 1,5 9. д) $\frac{\pi}{6}$; е) $-4$; 0; $\pm\pi$; $\sqrt{19}$. 10. в) $\frac{\pi}{12}+2\pi n$, $\frac{5\pi}{12}+2\pi n$, $n\in Z$; и) $3^{\frac{1}{3}}$; $3^{-\frac{4}{15}}$; н) 0,01; 4; о) $\frac{4}{3}$; 6. 11. б) $\pm\sqrt{3}$; $\pm\sqrt[4]{27}$; г) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$; е) $\log_5 3$; $\log_5\log_2 7$; з) $-2$; 4; н) 3; о) 3. 12. а) битта; б) иккита; в) ўн битта. 13. в) $1<x<11$, $x\neq3$; и) $0<x<\sqrt[3]{2}$, $x\neq1$; к) $0{,}5<x<3{,}5$; л) $x=1$. 14. а) $0{,}25<x<0{,}5$; $0{,}5<x<1$; в) $\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\log_2 3$; $x=1$; з) $x<0$, $0<x<2$; к) $x>2$; м) $0<x\leqslant0{,}1$; $x\geqslant10$. 15. ж) $0<|x|<\frac{1}{2}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}<|x|<\sqrt{2}$. 16. а) $2<x\leqslant3$; $x\geqslant4$; е) $\frac{1}{2}<x<2$, $x\neq1$, $x\neq1{,}5$. 17. б) $\frac{5}{2}\leqslant x<5$, $x\neq3$; е) $\frac{3\pi}{2}+6\pi k$, $k\in Z$; ж) $2\pi+8\pi k$, $k\in Z$; з) $\frac{\pi}{2}$; н) $-1\leqslant x<3$. 18. а) $1\leqslant x<\pi$; б) $\log_5 0{,}8<x\leqslant0$. 19. $-2{,}5\leqslant x<-1+\sqrt{3}$. 20. $|a|\geqslant2$. 21. $a=3$ да. 22. $a>1$ да $0<x<\frac{1}{a^4}$; $0<a<1$ да $0<x<a^8$. 23. $x=0{,}5^{\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}}$. 25. а) $-3\leqslant a<0$ да $x=1\pm\log_2(2-\sqrt{4+a})$. $a<-3$, $a\geqslant0$ да ечим мавжуд эмас; б) $a\leqslant1$ да $x=\pm\log_2(1+\sqrt{1-a})$, $a>1$ да ечим мавжуд эмас; в) $0<a\leqslant1$ да $x=\log_2 a$, қолган $a$ ларда ечим мавжуд эмас; г) $a=0$ да $x=-1$, $0<a\leqslant1$ да $x=\log_2\frac{1\pm\sqrt{1-a}}{a}$, $a<0$ да $x=\log^{a}\frac{1-\sqrt{1-a}}{a}$, $a>1$ да ечим мавжуд эмас; д) $0<a\leqslant1$ да $x=\log_2(1\pm\sqrt{1-a})$, $a\leqslant0$ да $x=\log_2(1+\sqrt{1-a})$, $a>1$ да ечим мавжуд эмас; е) $a>1$ да $0<x<a^{-\sqrt{2}}$, $x>a^{\sqrt{2}}$, $0<a<1$ да $a^{\sqrt{2}}<x<a^{-\sqrt{2}}$; ж) $a>1$ да ечим мавжуд эмас, $0<$

$< a < 1$ да $-1 < x \leqslant -\sqrt{1-a}$, $\sqrt{1-a} \leqslant x < 1$; з) $a < 4$, $a \neq 3$ да $x = 2 - a$, бошқа $a$ ларда ечим мавжуд эмас; и) $0 < a < \frac{3}{4}$, $\frac{3}{4} < a \leqslant 1$ да $x = 1 \pm \sqrt{1-a}$, $a \leqslant 0$ да $x = 1 + \sqrt{1-a}$, $a = \frac{3}{4}$ да $x = 1{,}5$, $a > 1$ да ечим мавжуд эмас; к) $a > 1$ да $0 \leqslant x \leqslant \log_2 a$, $a = 1$ да $x = 0$, $0 < a < 1$ да $\log_2 a \leqslant x \leqslant 0$, $a \leqslant 0$ да $x \leqslant 0$; л) $a < -\sqrt{2}$, $a > \sqrt{2}$ да $x = \pm \arccos 2^{a - \sqrt{2(a^2-1)}} + 2\pi n$, $n \in Z$, $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant -1$ да $x = \pm \arccos 2^{a \pm \sqrt{2(a^2-1)}} + 2\pi n$, $n \in Z$, $-1 < a < \sqrt{2}$ да ечим мавжуд эмас. **26.** $a > 0$, $a = -2$. **27.** $0 < a < \frac{1}{4}$. **28.** $a = 2$.

## 10. КЎРСАТКИЧЛИ ВА ЛОГАРИФМИК ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ҲОСИЛАСИ

Мавзу бўйича масалаларни ечишда ушбу формулалардан фойдаланилади:

$$(a^u)' = a' \ln a \cdot u', \tag{1}$$

$$(e^u)' = e^u \cdot u', \tag{2}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (u > 0,\ a > 0,\ a \neq 1), \tag{3}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \tag{4}$$

бунда $u = u(x)$ — дифференциалланувчи функция.

(1), (2) ва (4) формулалардан

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \quad \int e^x\,dx = e^x + C; \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

экани келиб чиқади.

$u = u(x)$ функция чизиқли, $u = kx + b$ бўлган ҳолда (2) ва (4) формулалар

$$(e^{kx+b})' = ke^{kx+b},$$

$$(\ln(kx+b))' = \frac{k}{kx+b} \quad (kx + b > 0)$$

кўринишга келади ва шунга мувофиқ, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\int e^{kx+b}\,dx = \frac{1}{k} e^{kx+b} + C; \quad \int \frac{dx}{kx+b} = \frac{1}{k} \ln|kx+b| + C \ (k \neq 0).$$

1-мисол. Ушбу

$$f(x) = \ln(2x+4) + x^2 + x$$

функциянинг монотонлик оралиғини ва экстремум нуқталарини топинг.

**Ечиш.** Функция $(-2;\ +\infty)$ да аниқланган.

$$f'(x)=\frac{(2x+3)(x+1)}{x+2},\quad x>-2.$$

Функциянинг критик нуқталари: $-1,5$ ва $-1$.

$-2<x<-1,5$ ва $x>-1$ да $f'(x)>0$; $-1,5<x<-1$ да эса $f'(x)<0$ бўлишини кўриш қийин эмас.

Демак, функция $-1,5$ ва $-1$ нуқталарда узлуксиз, $(-2;\ -1,5]$ ва $[-1;\ +\infty)$ да ўсади, $[-1,5;\ -1]$ да камаяди.

У ҳолда $x_1=-1,5$ — функциянинг максимум нуқтаси, $x_2=-1$ — минимум нуқтаси.

**2-мисол.** $f(x)=\frac{e^x}{x-2}$ функцияни текширинг ва унинг графигини ясанг.

**Ечиш.** 1) Функция $x_0=2$ нуқтадан ташқари ҳамма жойда аниқланган.

$$D(f)=(-\infty;\ 2)\cup(2;\ +\infty).$$

2) Функция жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас:

$$-2\in D(f),\ 2\notin D(f).$$

3) $f(x)=0$ тенглама илдизларга эга эмас. Функциянинг графиги абсциссалар ўқини кесмайди.

4) Функция $(-\infty;\ 2)$ ва $(2;\ +\infty)$ да узлуксиз. Шу оралиқларнинг ҳар қайсисида функция доимий ишорага эга: $x>2$ да $f(x)>0$, $x<2$ да $f(x)<0$.

$x_0=2$ нуқта — функциянинг узилиш нуқтаси.

$$\lim_{x\to2+0}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to2-0}f(x)=-\infty.$$

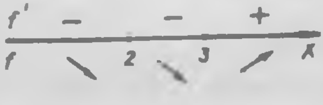
$x=2$ тўғри чизиқ — функция графигининг вертикал асимптотаси.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

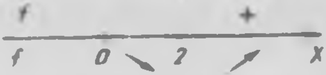
Кейин, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x-2}=0$, шунга кўра $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$. Бу ҳол $y=0$ тўғри чизиқ $f(x)$ функция графигининг $x\to-\infty$ даги горизонтал асимптотаси эканини билдиради.

6) $f'(x)=\frac{(x-3)e^x}{(x-2)^2}$ га эга бўламиз. $x>3$ да $f'(x)>0$, $x<2$, $2<x<3$ да $f(x)<0$ бўлгани учун (13-расм), $f(x)$ функция $[3;\ +\infty)$ да ўсади, $(-\infty;\ 2)$ва $(2;\ 3]$ да камаяди (функциянинг 3 нуқтада узлуксизлиги эътиборга олинган).

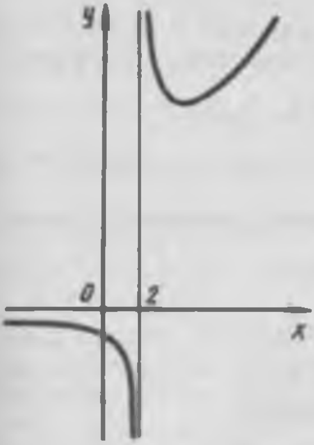
7) $f''(x)=\frac{(x^2-6x+10)\cdot e^x}{(x-2)^3}$ га эга бўламиз. $x>2$ да $f''(x)>0$, $x<2$ да эса $f''(x)<0$ бўлгани учун функциянинг графиги $(2;\ +\infty)$ оралиқда қавариқлиги билан пастга, $(-\infty;\ 2)$ оралиқда эса қавариқлиги билан юқорига йўналган.



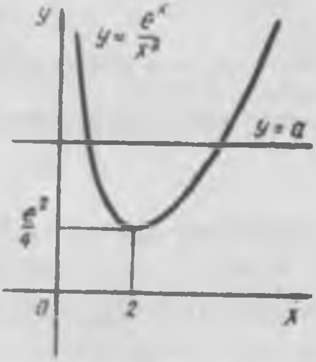
13-расм.



15-расм.



14-расм.



16-расм.

8) $f(0) = -0{,}5$ бўлгани учун функция графиги ординаталар ўқини $M(0;\ -0{,}5)$ нуқтада кесади.

Ўтказилган текширишга асосланиб, функциянинг графигини ясаймиз (14-расм).

**3-мисол.** $a(a>0)$ га боғлиқ равишда $e^x = ax^2$ тенгламанинг мусбат илдизлари сонини топинг.

**Ечиш.** Берилган тенглама ушбу тенгламага тенг кучли:

$$\frac{e^x}{x^2} = a.$$

$f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ функцияни $(0;\ +\infty)$ да текширамиз.

$f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$, $x>0$ га эга бўламиз.

$0<x<2$ да $f'(x)<0$ ва $x>2$ да $f'(x)>0$ бўлгани учун (15-расм) $(0;\ 2]$ да функция камаяди, $[2;\ +\infty)$ да ўсади.

Функция $(0;\ +\infty)$ да энг кичик қийматини $x_0 = 2$ нуқтада қабул қилади. Бу энг кичик қиймат $f(2) = 0{,}25\,e^2$ га тенг.

Функциянинг узлуксизлигини ва $x \to +0$ ҳамда $x \to +\infty$ да $f(x) \to +\infty$ ни эътиборга олиб, $E(f) = [0{,}25\,e^2;\ +\infty)$ деган хулосага келамиз ва, шунга кўра, агар $a = 0{,}25\,e^2$ бўлса, берилган тенглама битта илдизга, $a > 0{,}25\,e^2$ да иккита илдизга эга бўлади. $0 < a < 0{,}25\,e^2$ да тенглама илдизларга эга эмас (16-расм).

Дифференциал тенгламаларга келтирувчи масалаларни қараймиз.

**1-масала** (радиоактив емирилиш). Радиоактив емирилишда емирилиш тезлигининг модда миқдорига пропорционаллиги маълум. Агар модда миқдори $t = 0$ бошланғич вақт моментида $m_0$ га тенг, ярим емирилиш даври (мавжуд модданинг ярминнинг емирилиши учун кетадиган вақт) эса $T$ га тенг бўлса, радиоактив емирилиш қонунини топинг.

Ечиш. $m(t)$ — модданинг $t$ вақт моментидаги массаси бўлсин. Масаланинг шартига мувофиқ ушбу дифференциал тенгламани оламиз:

$$m'(t) = -km(t), \text{ бунда } k > 0. \tag{1}$$

(1) тенгламада «—» ишораси қўйилган, чунки $m(t)$ — камаювчи функция, демак, $m'(t) < 0$.

(1) тенгламада ўзгарувчиларни ажратиб, қуйидагини оламиз:

$$\frac{dm}{m} = -k\,dt,$$

уни интеграллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\ln m = -kt + \ln C. \tag{2}$$

$C$ константа $m(0) = m_0$ шартдан аниқланади:

$$m_0 = Ce^{-k\cdot 0} = C, \text{ яъни } C = m_0.$$

Ниҳоят қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$m(t) = m_0e^{-kt}. \tag{3}$$

Ярим емирилиш даври $T$ ни билган ҳолда $k$ коэффициентни аниқлаш мумкин. Ҳақиқатан, $m(T) = 0{,}5\,m_0$, ёки (3) бўйича: $m_0e^{-kT} = 0{,}5\,m_0$, кейин $e^{-kT} = 0{,}5$, $kT = \ln 2$, $k = \frac{\ln 2}{T}$; $m = m_0e^{-\frac{\ln 2}{T}t}$.

Одатда физикада радиоактив емирилиш қонуни $T$ ярим емирилиш даври орқали ифодаланади:

$$m(t) = m_0(e^{\ln 2})^{-\frac{t}{T}} = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}.$$

Шундай қилиб, радиоактив емирилишнинг ушбу қонунини оламиз:

$$m = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}.$$

2-масала. Моторли қайиқ турғун сувда 5 м/с тезлик билан ҳаракат қилмоқда. Тўлиқ юришда унинг мотори тўхтатилган ва 40 с дан кейин қайиқнинг тезлиги 2 м/с га тенг бўлиб қолган. Сувнинг қаршилик кучи қайиқнинг ҳаракат тезлигига пропорционал, деб қабул қилиб, қайиқнинг мотор тўхтатилгандан 2 мин ўтгандан кейинги тезлигини топинг.

Ечиш. Қайиқнинг ҳаракат тенгламасини Ньютоннинг иккинчи қонунига асосланиб тузамиз: $-ma = F_{\text{қарш}}$, лекин $F_{\text{қарш}} = kv$, у ҳолда $-ma = kv$, ёки $mv' + kv = 0$, бундан

$$v' = -\frac{k}{m}v.$$

Ҳосил қилинган дифференциал тенгламани ечиб, қуйидагини топамиз:

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Агар бошланғич шартлардан фойдалансак: $2 = 5e^{-40\cdot\frac{k}{m}}$, бундан:

$$e^{-\frac{k}{m}} = \sqrt[40]{\frac{2}{5}}.$$

Шунга кўра мотор тўхтатилгандан кейин 2 мин ўтгач қайиқнинг тезлиги $v = 5\cdot\left(\sqrt[40]{\frac{2}{5}}\right)^{120} = 0{,}32$ м/с бўлади.

Жавоб. 0,32 м/с.

3-масала. $A(1,\ 2)$ нуқтадан ўтувчи шундай эгри чизиқнинг тенгламасини тузингки, унинг ихтиёрий нуқтасидан ўтказилган уринма ординаталар ўқидан кесиб ажратадиган кесманинг узунлиги уриниш нуқтасининг ординатасидан икки марта катта бўлсин.

Ечиш. $M(x;\ y)$ — изланаётган эгри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин.

Уринманинг $M$ нуқтадаги тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$Y - y = y'(x)(X - x), \tag{1}$$

бунда $X$, $Y$ — уриниш нуқтасининг ўзгарувчи координаталари.

Масаланинг шартига мувофиқ $X = 0$ да $Y = 2y$ бўлади.

У ҳолда (1) тенгламадан $2y - y = -xy'$ яъни $y = -xy'$. Лекин $y' = \frac{dy}{dx}$, кейинги тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0.$$

Бундан

$$\ln|y| + \ln|x| = \ln C_1;\ xy = C.$$

Эгри чизиқнинг $A(1;\ 2)$ нуқта орқали ўтишини эътиборга олиб, $C = 2$ ни топамиз, ва шундай қилиб, эгри чизиқ тенгламаси $xy = 2$ кўринишда бўлади. Изланаётган эгри чизиқ — гипербола.

## Қўшимча машқлар

1. Функция ҳосиласининг кўрсатилган нуқтадаги қийматини ҳисобланг:

а) $y = \sqrt{5 + e^{2x}}$, $x_0 = \ln 2$; б) $y = xe^{\sin \pi x}$, $x_0 = 1$;

в) $y = \frac{8^x + 4^x + 3\cdot 2^x}{\ln 2}$, $x_0 = \log_4 3$; г) $y = \frac{e^{3x-6}}{x^3}$, $x_0 = 2$;

д) $y = x^2 \ln(2x - 1)$, $x_0 = 1$; е) $y = \frac{\ln(2x + 3)}{x}$, $x_0 = -1$;

ж) $y = \ln^3 x + 5\ln^2 x$, $x_0 = e$; з) $y = x\ln^3(3 - 2x)$, $x_0 = 1$.

2. Кўрсатилган нуқтада функция графигига ўтказиладиган уринманинг тенгламасини ёзинг.

а) $y = e^{1-x} \sin \frac{\pi x}{2}$, $x_0 = 1$;  б) $y = e^{\cos 2x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;
в) $y = 0{,}5\, x \ln (2x - 3)$, $x_0 = 2$;  г) $y = x^2 \ln (3 - x)$, $x_0 = 2$.

3. Функция графигига ўтказиладиган уринманинг тенгламасини тузинг:

а) $y = e^{2x-1} + 2x$, уринма $y = 4x + 1$ тўғри чизиққа параллел бўлсин;
б) $y = x^2 - \ln (2x - 1)$, уринма $y = 2x - 3$ тўғри чизиққа параллел бўлсин.

4. $y = -3x \ln 2 - 5$ тўғри чизиқ

$$f(x) = 4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + x \ln 2$$

функция графигига уринади. Уриниш нуқтасининг координаталарини топинг.

5) $a$ нинг қандай қийматида $y = 9x + a$ тўғри чизиқ $f(x) = \frac{9^x - 3^{x+1}}{\ln 3}$ функциянинг графигига уринади?

6. $a$ нинг қандай қийматида $y = ax$ тўғри чизиқ $y = e^{x-1} - 3x$ функциянинг графигига уринади?

7. $a (a > 0)$ нинг қандай қийматида $y = a \ln x$ эгри чизиқ $f(x) = 2x^2$ функциянинг графиги билан битта умумий нуқтага эга бўлади?

8. Функциянинг критик нуқталарини топинг:

а) $y = 2^x + 2^{3-x} + x \ln 4$;  б) $y = (x^2 + 5x + 7) e^{-x}$;
в) $y = 0{,}5\, x \ln x - x \ln 2$;  г) $y = e^{x^2 - 4x} - x^2 + 4x$;
д) $y = 2x - x^2 \ln 2 - x \cdot 2^{3-x}$;
е) $y = x^3 (2 + 3 \ln x) - 36 x \ln x + 1$.

9. Функцияларнинг монотонлик оралиқлари ва экстремум нуқталарини топинг:

а) $y = 2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + (2 \ln 2) x - 3$;  б) $y = (2x^2 - 3x) e^x$;
в) $y = 3 + 2x - x^2 - 2x e^{3-x}$;  г) $y = (11 + x - x^2) e^{-x}$;
д) $y = x + \ln (x^2 - 3)$;  е) $y = \ln (x^2 - 6x + 9) + 2x$;
ж) $y = x (x - 3) \ln x + 0{,}5\, x^2 + 7$;  з) $y = x^2 + 3x + \ln (2x + 6)$

10. Функциянинг графигини ясанг:

а) $y = e^{\frac{1}{x}}$;  б) $y = e^{\frac{1}{1-x^2}}$;
в) $y = \frac{e^{-x}}{x + 1}$;  г) $y = (x^2 - 3) e^x$;
д) $y = x - \ln (x + 1)$;  е) $y = x^2 - 2x - 2 \ln (x - 1)$;
ж) $y = x^2 + 4 \ln (3 - x)$;  з) $y = x^2 \ln^2 x$.

11. $a$ га боғлиқ равишда тенгламанинг ечимлари сонини топинг:

а) $e^x = ax\,(a > 0)$; б) $\ln x = \frac{a}{x}$; в) $\ln x = ax^2$.

12. Интегрални ҳисобланг:

а) $\int (4^x + 2^x) \ln 2\, dx$; б) $\int \frac{(e^x - 1)^3}{e^x}\, dx$;

в) $\int \frac{3x + 1}{x - 2}\, dx$; г) $\int \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}\, dx$;

д) $\int \frac{x^2}{x - 2} dx$; е) $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{x^2}\, dx$; ж) $\int \frac{3 + 5xe^{1-2x} + \sqrt{x}}{x}\, dx$.

13. Аниқ интегрални ҳисобланг:

а) $\int\limits_0^{\ln 2} (e^x + e^{-x})\, dx$; б) $\int\limits_0^{\log_3 2} (3^x - 1)^2\, dx$;

в) $\int\limits_2^3 \frac{x dx}{x - 1}$; г) $\int\limits_1^e \frac{1 + \lg x}{x}\, dx$.

14. Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:

а) $y = e^{2x}$, $y = 2 + e^x$, $x = 1$; б) $y = e^{x+1}$, $y = e^{2x}$, $x = \ln 5$;

в) $y = e^x - 1$, $y = 5(1 - e^{-x})$; г) $y = \frac{2}{x}$, $y = \frac{10x - 21}{2x - 5}$.

15. Ушбу $\int\limits_0^{\ln 2} (e^{2a+2x} - e^{a-x})\, dx = 1$ тенгламани ечинг.

16. Ушбу $\int\limits_0^{x} (9^t - 3^{t+1})\, dt \leqslant 0$ тенгсизликни ечинг.

17 Дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимини топинг.

а) $y' = -3y$; б) $y' = \frac{2y}{x}$; в) $y' = 2x(y - 1)$;

г) $y' = 3y + 2$; д) $y' = y \cos x$; е) $y' = y \operatorname{ctg} x$.

18 Дифференциал тенгламанинг кўрсатилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг:

а) $2y' = \sqrt{x} = y$, $y(4) = 1$; б) $(x + 1)' y' + xy = 0$, $y(0) = 1$;

в) $\operatorname{tg} x \cdot dy = ydx$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1$; г) $\sin 2x\, dy = 2y \cos 2x dx$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$;

д) $y' = y \sin x$, $y = \left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$; е) $xy' = 5y$, $y(1) = 2$.

19. Агар $(x - 1)y' = 2y - 1$ ва $f(2) = 1$ бўлса, $y = f(x)$ функциянинг энг кичик қийматини топинг.

20. Агар $2y \cos 2x dx = (1 + \sin 2x) dy$ ва $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ бўлса, $y = f(x)$ функциянинг энг катта қийматини топинг.

21. $y = f(x)$ функциянинг графигини ясанг, бунда:

а) $2y \sin 2x dx + \cos 2x dy = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1;$

б) $\sin 3x\, dy = 3y \cos 3x\, dx, \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2.$

22. $M(0;\ 1)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг ихтиёрий нуқтасидан ўтувчи уринманинг бурчак коэффициенти уриниш нуқтасининг ординатасидан икки марта катта. Шу эгри чизиқнинг тенгламасини тузинг ва тасвирини ясанг.

23. $M(1;\ 3)$ нуқта орқали ўтувчи эгри чизиққа ўтказилган уринманинг уриниш нуқтаси ва $Ox$ ўқи орасидаги кесмаси $Oy$ ўқи билан кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади. Шу эгри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

24. $M(2;\ 3)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг ихтиёрий нуқтасидан координаталар бошигача бўлган масофа шу нуқтада эгри чизиққа ўтказилган уринманинг қаралаётган нуқтадан абсциссалар ўқи билан кесишиш нуқтасигача кесмасининг узунлигига тенг. Шу эгри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

25. Маълум бир модданинг ярим емирилиш даври 1000 йилга тенг. 100 йилдан сўнг шу моддадан қанча қолади?

## Қўшимча машқларнинг жавоблари

**1.** а) $\frac{4}{3}$; в) $6 + 12\sqrt{3}$; д) 2; ж) $\frac{13}{e}$. **2.** а) $y = 2 - x$; в) $y = 2x - 4$. **3.** а) $y = 4x$; б) $y = 2x - \frac{3}{4} - \ln 2$. **4.** $(0;\ -5)$. **5.** $a = -9$. **6.** $a = -2$. **7.** $a = 4e$. **8.** д) 2; $\frac{1}{\ln 2}$; е) 2; $\frac{1}{e}$. **9.** а) $(-\infty;\ -2]$, $[1, +\infty)$ да ўсади. $[-2;\ 1]$ да камаяди; в) $(-\infty;\ 1]$, $[3;\ +\infty)$ да камаяди, $[1;\ 3]$ да ўсади; д) $(-\infty;\ -3]$, $(\sqrt{3};\ +\infty)$ да ўсади, $[-3;\ -\sqrt{3})$ да камаяди; ж) $\left(0;\ \frac{1}{e}\right]$, $[1{,}5;\ +\infty)$ да ўсади, $\left[\frac{1}{e};\ 1{,}5\right]$ да камаяди. **11.** а) $a > e$ да ечим иккита, $a = e$ да ечим битта, $0 < a < e$ да ечим мавжуд эмас; б) $a \geqslant 0$ ва $a = -\frac{1}{e}$ да ечим битта, $-\frac{1}{e} < a < 0$ да ечим иккита, $a < -\frac{1}{e}$ да ечим мавжуд эмас; в) $a \leqslant 0$, $a = \frac{1}{2e}$ да ечим битта, $0 < a < \frac{1}{2e}$ да ечим иккита, $a > \frac{1}{2e}$ да ечим мавжуд эмас. **13.** а) 1,5; б) $\log_a \frac{2}{\sqrt{e}}$; в) $1 + \ln 2$; г) $1 + \frac{\ln e}{2}$. **14.** а) $0{,}5e^2 - e - 2 + \ln 4$; б) $12{,}5 - 5e + 0{,}5e^2$; в) $6 \ln 5 - 8$; г) $7{,}5 - 8 \ln 2$. **15.** $a = 0$. **16.** $0 \leqslant x \leqslant \log_2 5$. **17.** а) $y = Ce^{-3x}$; б) $y = Cx^3$. **18.** а) $y = e^{\sqrt{x-2}}$; б) $y = (1+x)e^{-x}$; в) $y = -2 \sin x$; г) $y = 3 \sin 2x$. **19.** 0,5. **20.** 1. **21.** а) $y = -2 \cos 2x$; б) $y = 2 \sin 3x$. **22.** $y = e^{2x}$. **23.** $y^2 = 9x$. **24.** $xy = 6$, $y = 1{,}5x$. **25.** $\frac{m_0}{\sqrt[10]{2}}$.

## 11. ИРРАЦИОНАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

$A(x)$ ёки $B(x)$ ифодалардан ҳеч бўлмаганда биттаси иррационал бўлса, $A(x)=B(x)$ тенглама *иррационал тенглама* деб аталади. $\sqrt{x-2}=2x-1$, $\sqrt[3]{x-1}=2$, $\sqrt{x-5}-\sqrt{2x+3}=\sqrt{7-x}$ ва шу кабилар иррационал тенгламалардир.

Айрим ҳолларда алмаштиришларга мурожаат қилмай иррационал тенгламанинг ечимлари ҳақида бирор хулосага келиш мумкин. Масалан, $\sqrt{5x-2}=-1$, $\sqrt{x-5}=3-x$ тенгламалар ечимга эга эмас, бу арифметик илдизнинг таърифидан келиб чиқади. Шу каби $\sqrt{x-2}=6-3x$ ва $\sqrt{x-2}+\sqrt{10+5x}=0$ тенгламалардан ҳар қайсисининг 2 га тенг бўлган ягона илдизга эгалигини кўриш қийин эмас.

Иррационал тенгламаларни ечишнинг асосий усулларидан бири — тенгламанинг ҳар иккала қисмини бир хил даражага кўтариш усулидир. Шуни таъкидлаймизки, жуфт $n$ да $A^n(x)=B^n(x)$ тенглама $A(x)=B(x)$ тенгламанинг натижасидан иборат, тоқ $n$ да эса $A(x)=$ $=B(x)$ тенгламага тенг кучлидир. Шунга кўра тенгламанинг иккала қисми жуфт даражага кўтарилганда чет илдизлар пайдо бўлиши мумкин ва шунинг учун илдизлар текширилиши керак.

$\sqrt[2n]{f(x)}=\varphi(x)$ иррационал тенглама ушбу системага тенг кучли:

$$\begin{cases}\varphi(x)\geqslant 0, & (1)\\ f(x)=\varphi^{2n}(x). & (2)\end{cases} \qquad (*)$$

(*) системага $f(x)\geqslant 0$ тенгсизликни киритиш ортиқча — у (2) тенгламадан келиб чиқади.

1-мисол. $\sqrt{x^3-3x+1}=x-1$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенглама ушбу системага тенг кучли:

$$\begin{cases}x\geqslant 1,\\ x^3-3x+1=(x-1)^2;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 1,\\ x(x^2-x-1)=0;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 1,\\ \left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=0{,}5(1\pm\sqrt{5});\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=0{,}5(1+\sqrt{5}).$$

Жавоб. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2-мисол. Тенгсизликни ечинг.

$$\sqrt{2\cos 2x+\sqrt{3}\sin x}=-\sqrt{2}\cos x.$$

Ечиш. Тенглама ушбу системага тенг кучли:

$$\begin{cases}\cos x<0\\ 2\cos 2x+\sqrt{3}\sin x=2\cos^2 x;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x<0,\\ 2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x=0;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi+2\pi n,\\ x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\end{array}\right.\quad n\in\mathbf{Z}.$$

Жавоб. $\pi + 2\pi n, \quad \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in Z$.

3-мисол. $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{3x-4} = \sqrt[3]{x}$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенгламанинг иккала қисмини ушбу

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

формула бўйича кубга кўтарамиз. Берилган тенгламага тенг кучли тенглама ҳосил бўлади:

$$4x - 6 + 3\sqrt[3]{(x-2)(3x-4)}\,(\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{2x-4}) = x. \qquad (1)$$

Қавслар ичидаги ифодани $\sqrt[3]{x}$ ифода билан алмаштирамиз:

$$\sqrt[3]{(x-2)(3x-4)x} = 2 - x. \qquad (2)$$

(2) тенглама (1) тенгламанинг натижасидан иборат, шу сабабли текшириш бажарилиши керак. (2) тенгламанинг чап ва ўнг қисмини кубга кўтарамиз:

$$x(x-2)(3x-4) = (2-x)^3.$$

Охирги тенгламанинг илдизлари: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

Текшириш $x_2 = 1$ нинг чет илдизлигини кўрсатади.

Жавоб. 2.

Айрим иррационал тенгламаларни янги ўзгарувчи киритиш ёрдами билан ечиш мумкин бўлади.

4-мисол. $\sqrt{2x-1} - 2\sqrt[4]{2x-1} = 3$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $\sqrt[4]{2x-1} = y$, $y \geqslant 0$ алмаштиришни бажариб, тенгламани $y^2 - 2y - 3 = 0$ кўринишда ёзамиз. Бу тенгламанинг илдизлари $y_1 = 3$, $y_2 = -1$ дан иборат. У ҳолда: $\sqrt[4]{2x-1} = 3$, $x = 41$.

Жавоб. 41.

5-мисол. $\sqrt{x-1} = x - a$ ($a$ — параметр) тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенгламани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$x - 1 - \sqrt{x-1} + 1 - a = 0 \qquad (1)$$

ва уни $\sqrt{x-1}$ га нисбатан квадрат тенглама сифатида қараймиз. Тенгламанинг $D = 4a - 3$ дискриминантини топамиз. $a \geqslant 3\frac{3}{4}$ бўлган ҳолдагина (1) тенглама ечимга эга бўлади.

Қуйидагини топамиз:

$$\left[\begin{array}{ll} \sqrt{x-1} = \frac{1-\sqrt{4a-3}}{2}, & (2) \\ \sqrt{x-1} = \frac{1+\sqrt{4a-3}}{2}. & (3) \end{array}\right.$$

Шуни уқтирамизки, (2) тенглама фақат ва фақат $1 - \sqrt{4a-3} \geqslant 0$ бўлганда, яъни $a \leqslant 1$ да ечимга эга бўлади. (2) ва (3) тенгламаларни ечиб, $\frac{3}{4} \leqslant a \leqslant 1$ учун қуйидагига эга бўламиз:

$$x_1 = \frac{2a+1-\sqrt{4a-3}}{2}, \quad x_2 = \frac{2a+1+\sqrt{4a-3}}{2}.$$

Шу тариқа ушбу жавобни оламиз: $\frac{3}{4} \leqslant a \leqslant 1$ да тенглама иккита илдизга эга: $x_1$ ва $x_2$; $a > 1$ да тенглама битта илдизга эга: $x_2$; $a < \frac{3}{4}$ да ечим мавжуд эмас.

Айрим иррационал тенгламаларни функцияларнинг монотонлик хоссасидан фойдаланиб ечиш мумкин бўлади.

**6-мисол.** $\sqrt{x-3} = 5 - x$ тенгламани ечинг.

**Ечиш.** $\sqrt{x-3}$ ўсувчи функция, $5 - x$ эса камаювчи функция (умумий аниқланиш соҳасида) эканидан, тенглама биттадан ортиқ илдизга эга бўла олмайди. Тенгламанинг ягона ечимини билиш қийин эмас: $x_0 = 4$.

**Жавоб.** 4.

**7-мисол.** $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3} = 3$ тенгламани ечинг.

**Ечиш.** $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3}$ функция ўзининг аниқланиш соҳасида ўсувчи. $x_0 = 1$ — тенгламанинг илдизи бўлишини кўриш қийин эмас. Тенглама бошқа илдизларга эга бўла олмайди.

**Жавоб.** 1.

Энди параметрли тенгламани қараймиз. Уни ечишда функцияларнинг монотонлик хоссасидан ва ўзгарувчини алмаштириш усулидан фойдаланиш қулай.

**8-мисол.** $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+2} = a$ тенгламани ечинг.

**Ечиш.** $f(x) = \sqrt{3x-2} + \sqrt{x+2}$ функция $\left[\frac{2}{3};\ +\infty\right)$ оралиқда аниқланган ва унда ўсади. У энг кичик қийматни $\frac{2}{3}$ нуқтада қабул қилади; $E(f) = \left[\frac{2\sqrt{6}}{3};\ +\infty\right)$. Демак, $f(x) = a$ тенглама $a > \frac{2\sqrt{6}}{4}$ да ягона ечимга эга, $a < \frac{2\sqrt{6}}{3}$ да ечим мавжуд эмас.

Шундай қилиб, $a > \frac{2\sqrt{6}}{3}$ бўлсин. Тенгламани

$$\sqrt{3x-2} = a - \sqrt{x+2} \qquad (1)$$

кўринишда ёзиб, унинг иккала қисмини квадратга кўтарамиз:

$$3x - 2 = a^2 - 2a\sqrt{x+2} + x + 2. \qquad (2)$$

(2) тенглама (1) тенгламанинг натижасидан иборат. Уни

$$2(x+2) + 2a\sqrt{x+2} - a^2 - 8 = 0 \qquad (3)$$

кўринишда қайтадан ёзамиз. (3) тенглама $\sqrt{x+2}$ га нисбатан квадрат тенгламадан иборат. Уни ечиб, икки тенглама мажмуасини оламиз:

$$\left[\begin{array}{ll}\sqrt{x+2}=\dfrac{-a-\sqrt{3a^2+16}}{2}, & (4)\\ \sqrt{x+2}=\dfrac{-a+\sqrt{3a^2+16}}{2}. & (5)\end{array}\right.$$

$a \geqslant \frac{2\sqrt{6}}{3}$ да (4) тенглама ечимга эга эмас, (5) тенгламанинг илдизи эса:

$$x=\frac{2a^2+4-a\sqrt{3a^2+16}}{2}.$$

Ихтиёрий $a \geqslant \frac{2\sqrt{6}}{3}$ да берилган тенглама илдизга эга ва у фақат битта, шунга кўра топилган илдиз берилган тенгламанинг илдизидир.

Жавоб. $a \geqslant \frac{2\sqrt{6}}{3}$ да $x=\frac{2a^2+4-a\sqrt{3a^2+16}}{2}$, $a<\frac{2\sqrt{6}}{3}$ да ечим мавжуд эмас.

9-мисол. $\sqrt{x^2-ax+2}=x-1$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенглама ушбу системага тенг кучли:

$$\begin{cases}x \geqslant 1,\\ x^2-ax+2=(x-1)^2;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \geqslant 1,\\ (a-2)x=1.\end{cases}$$

$a=2$ да система ечимга эга эмас, $a \neq 2$ да эса

$$\begin{cases}x \geqslant 1,\\ x=\dfrac{1}{a-2}\end{cases}$$

ни оламиз. $2<a\leqslant 3$ да $\frac{1}{a-2} \geqslant 1$ бўлади ва натижада жавоб: $2<a\leqslant 3$ да $x=\frac{1}{a-2}$; $a\leqslant 2$, $a>3$ да ечим мавжуд эмас.

Иррационал тенгсизликларни ечиш билан боғлиқ бўлган айрим масалаларни қараймиз.

10-мисол. $\sqrt{x-4}<6-x$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Тенгсизликни

$$x+\sqrt{x-4}<6$$

кўринишда қайтадан ёзамиз ва $f(x)=x+\sqrt{x-4}$ функцияни қараймиз. Бу функция $[4;+\infty)$ оралиқда аниқланган ва ўсади. $x+\sqrt{x-4}=6$ тенглама ягона илдизга эга бўлишини кўриш қийин эмас: $x=5$. Шундай қилиб, тенгсизлик $4\leqslant x<5$ да бажарилади.

Жавоб. $4\leqslant x<5$.

11-мисол. $\sqrt{2x+7}>\frac{x+5}{2}$ тенгсизликни ечинг.

**Ечиш.** $\sqrt{2x+7} = y$ бўлсин. У ҳолда $x = \frac{y^2-7}{2}$. Берилган тенгсизлик қуйидаги кўринишга келади:

$$y^2 - 4y + 3 < 0.$$

Бундан:

$$1 < y < 3,$$
$$1 - \sqrt{2x+7} < 3,$$
$$1 < 2x + 7 < 9,$$
$$-3 < x < 1.$$

**Жавоб.** $-3 < x < 1$.

**12-мисол.** $\sqrt{x^3 + x - 9} > x - 1$ тенгсизликни ечинг.

**Ечиш.** Икки ҳолни қараймиз: а) $x \geqslant 1$; б) $x < 1$. а) ҳолида

$$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x^3 + x - 9 > (x-1)^2 \end{cases}$$

га эга бўламиз. $x^3 + x - 9 \geqslant 0$ тенгсизликни системага киритишга ҳожат йўқ — у системадаги иккинчи тенгсизликдан келиб чиқади. Системани ечиб $x > 2$ ни оламиз.

б) ҳолида ечим мавжуд эмас, чунки $x < 1$ да $x^3 + x - 9 < 0$ бўлади.

**Жавоб.** $x > 2$.

Иррационал тенгсизликларни ечишда интерваллар усулини ҳам қўллаш мумкин. Бу усул ушбу тасдиққа асосланади.

*Агар $f$ функция $(a; b)$ интервалда узлуксиз бўлса ва нолга айланмаса, у ҳолда у шу интервалда доимий ишорани сақлайди.*

**13-мисол.** Ушбу тенгсизликни ечинг:

$$\frac{4x^2 - 8x - 5}{\sqrt{3x^2 - 6x}} \leqslant \frac{2x+1}{3}.$$

**Ечиш.** Тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. Шу аниқланиш соҳасида берилган тенгсизлик $(2x+1)(6x - 15 - \sqrt{3x(x-2)}) \leqslant 0$ га тенг кучли. Кейинги тенгсизликни ечиш учун интерваллар усулидан фойдаланамиз. Ушбу

$$f(x) = (2x+1)(6x - 15 - \sqrt{3x(x-2)})$$

функцияни қараймиз, $f(x) = 0$ тенгламани ечиб, унинг нолларини топамиз: $-0,5$; 3. $(-\infty; -0,5)$, $(0,5; 0)$, $(2; 3)$ $(3; +\infty)$ оралиқларнинг ҳар бирида $f$ функция узлуксиз ва нолга айланмайди. Демак, уларнинг ҳар қайсисида у доимий ишорага эга. Агар $x < -0,5$ бўлса, у ҳолда $f(x) > 0$, агар $-0,5 < x < 0$ бўлса, у ҳолда $f(x) < 0$ бўлишини кўриш қийин эмас. Лекин $f(1,5) < 0$ ва $f(4) > 0$. Шунга кўра $2 < x < 3$ да $f(x) < 0$ ва $x > 3$ да $f(x) > 0$ бўлади (17- расм).

17- расм.

**Жавоб.** $-0,5 \leqslant x < 0$, $2 < x \leqslant 3$.

## Қўшимча машқлар

1. Тенгламаларни ечинг:

а) $\sqrt{x-3}+\sqrt{12-4x}=0$; б) $\sqrt{x^2-5x}=3x-x^2$;

в) $\sqrt[3]{9-x}=x+1$; г) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=5$;

д) $\sqrt{2+4x-x^2}=2-x$; е) $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-2x}=1$;

ж) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{7-x}=2$;

з) $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{6x-1}=\sqrt[3]{2x+1}$.

2. Тенгламаларни ечинг:

а) $\sqrt{2\sin x}=-\sqrt{3}\operatorname{tg}x$; б) $\sqrt{5\cos x-\cos 2x}+2\sin x=0$;

в) $\sqrt{\cos 2x+\sqrt{3}\sin x}=-2\cos x$;

г) $\sqrt{1+\sqrt{3}\sin 2x}+\sqrt{10}\sin x=0$;

д) $\sqrt{\sin 3x+\sin x}=\sqrt{\sin 2x}$; е) $\sqrt{\cos 3x+\cos x}=\sqrt{2}\cos 2x$;

ж) $\cos x-\sin x=\sqrt{2\sin^2 x-1}$, $x\in[-\pi;\ \pi]$;

з) $\sqrt{1-2\cos^2 x}+\sin x+\cos x=0$, $x\in[0;\ 2\pi]$;

и) $\sqrt{2-2\sin^2 x}-\sqrt{\cos 2x}=1$;

к) $$\sqrt{\frac{4\sin^2\left(\pi+\frac{3x}{2}\right)-3}{2\cos x}}=2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right);$$

л) $$\sqrt{3+24\sin^2 2x\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\sqrt{-2x}\right)}+2\sqrt{3}\sin 3x=0.$$

3. Тенгламаларни ечинг:

а) $$\frac{3(x-3)+4\sqrt{2x^2-7x+6}}{2x(x-2)}=1;$$

б) $\sqrt{4x^2-\sqrt{x}-2}=3\sqrt{x}-2x$;

в) $\sqrt{19-x}+\sqrt[4]{2x^2-45x+133}=6\sqrt{7-2x}$;

г) $\sqrt{x-3+\sqrt{2x-7}}+\sqrt{x+1+3\sqrt{2x-7}}=7\sqrt{2}$;

д) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-8x+7}=\sqrt{x^2-24x+23}$;

е) $\sqrt{\log_{\sqrt{3}}(6-3x)}+\log_3(x^2-4x+4)=8$;

ж) $\sqrt{1+\log_3\sqrt{x}}\cdot\log_x 9+\sqrt{2}=0$;

з) $\sqrt{1+\log_x\sqrt{27}}\cdot\log_3 x+1=0$;

и) $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+}$

4. Тенгсизликларни ечинг:

а) $\sqrt{x-3}<5-x$; б) $\sqrt{9-3x}+\sqrt{4-x}>\sqrt{2x+}$

в) $\sqrt{x^2+2x-8}>2x-5$; г) $\sqrt{-x^2+8x-12}>10-2x$;

д) $\sqrt{-x^2-2x+3}>x+1;$ е) $\sqrt{x^3+2x-32}>x-2;$

ж) $\sqrt{x^2-3x-4}<x-2;$ з) $\sqrt{x^2-5x+6}\leqslant x-2;$

и) $\sqrt{x+8}-\sqrt{x+3}>\sqrt{x};$

к) $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5};$

л) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{4x-3}>\sqrt{x};$

м) $\sqrt{x-3}+\sqrt{11-x}\leqslant 2\sqrt{2};$

н) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3x-5}<\sqrt{4x-7}+\sqrt{5x-9}.$

5. Тенгсизликларни ечинг:

а) $(x-3)(x-5)\sqrt{x^2-10x+24}\leqslant 0;$

б) $(x-1)(x-2)^4(x-5)\sqrt{(2x-3)(x-3)(x-6)}>0;$

в) $\frac{(x-3)(x-5)}{1-x}\sqrt{\frac{x-4}{x-2}}\leqslant 0;$ г) $\frac{x^2-2x-3}{x^2-6x+5}\sqrt{x+9}\leqslant 0;$

д) $(x^2-7x+10)\sqrt{7-2x}-x-4)>0;$

е) $\frac{x-3\sqrt{x-2}}{x^2-6x-27}\leqslant 0;$ ж) $\frac{x^2-4x-5}{\sqrt{x^2-4x}}\leqslant\frac{x+1}{2\sqrt{3}}.$

6) Тенгсизликларни ечинг:

а) $\sqrt{2-\sqrt{2+x}}<3^{\log_9(x+3)};$

б) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}>3^{\log_9\log_{\frac{1}{2}}(x-1)};$

в) $\sqrt{7-\log_2(x-1)^2}+\log_2(1-x)^4>4;$

г) $\frac{\sqrt{4+3x-x^2}}{2x+3}>\frac{\sqrt{4+3x-x^2}}{x+3};$

д) $\frac{x-5}{\sqrt{4-x}}>\frac{x-5}{x-3};$

е) $2x^2-3x+7<7\sqrt{(2x-1)(x-1)};$

ж) $x^2-5x+6<3\sqrt{(x-1)(x-4)};$

з) $\sqrt[4]{\frac{2x+1}{x+2}}+4<5\sqrt[4]{\frac{x+2}{2x+1}}.$

7. Тенгсизликларни ечинг:

а) $x\sqrt{3-x}<-2;$ б) $x\sqrt{3-x}>-2;$

в) $x\sqrt{5-\frac{4}{x}}<-3;$ г) $x\sqrt{3-\frac{1}{x}}<-2;$

д) $\sqrt{x^3-3x^2+2x}>x-1;$ е) $\sqrt{x^3-5x^2+6x}\leqslant x-2;$

ж) $x^2+4x\sqrt{x-1}\leqslant 12(x-1);$ з) $\frac{x}{2}+\frac{3}{x}\leqslant\sqrt{6-x}+0{,}5;$

и) $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)+1>\sqrt{2x-1};$ к) $\sqrt{9-\frac{3}{x}}<3x-\sqrt{3x-\frac{3}{x}}.$

8. Тенгсизликларни ечинг:

а) $\sqrt{2^{1+2x}-1} < 2-2^x$; б) $\sqrt{26-25^x} > 6-5^x$;

в) $2^x-1 \geqslant \sqrt{4^x+2^{x+1}-3}$; г) $3^x-1 < \sqrt{9^x-3^x-2}$;

д) $\log_3(\sqrt{x+4}-x-2) \leqslant 0$; е) $\log_{\frac{1}{3}}(x-\sqrt{x^2-2x-3}) \leqslant 0$;

ж) $\sqrt{2\log_4 x} > \log_3 \sqrt{x}$; з) $\log_2 \frac{4}{x} - 2\sqrt{\log_2 \sqrt{x}} + 2 < 0$;

и) $\sqrt{1-\log_5(x^2-4x+5)} < \log_5(5x^2-20x+25)$;

к) $\sqrt{\log_4(-4+8x-2x^2)} > \log_2(-2+4x-x^2)$;

л) $5^{2x-12-3\sqrt{x-3}} - 4\cdot 5^{x-6} < 5^{1+3\sqrt{x-3}}$.

9. Тенгламалар ва тенгсизликларни ечинг ($a$ ва $b$ — параметрлар):

а) $\sqrt{x-3} = x-a$; б) $\sqrt{x^2-ax+3a} = 2-x$;

в) $\sqrt{x-a} = b-x$; г) $\sqrt{2x-4} + \sqrt{x+7} = a$;

д) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-2} = a$; е) $\sqrt{2x^2-2ax+1} = x-2$;

ж) $\sqrt{3x-a} = a-2x$; з) $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = a$;

и) $x + \sqrt{1-x^2} = a$; к) $\sqrt{|x|+1} - \sqrt{|x|} = a$;

л) $x - 2\sqrt{x} + a < 0$; м) $\sqrt{2x-4} + \sqrt{x+7} > a$.

## Қўшимча машқларнинг жавоблари

2. а) $\pi n$, $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$; в) $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; ж) $-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$; и) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; к) $\frac{4\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. 3. д) $-2$; 1; е) $-1$; ж) $\frac{1}{3}$; и) 2. 4. а) $3 \leqslant x < 4$; б) $-12{,}5 \leqslant x < 0$; в) $x \leqslant -4$, $2 \leqslant x < \frac{11+\sqrt{22}}{3}$; д) $-3 \leqslant x < \sqrt{2}-1$; ж) $4 \leqslant x < 8$; с) $x=2$, $x \geqslant 3$; и) $0 \leqslant x < 1$; л) $\frac{3}{4} \leqslant x < 1$; и) $x > 2$. 5. а) $3 \leqslant x \leqslant 4$, $x=6$; б) $x \geqslant 6$, $x=1, 5$, $x=2$, $x=3$; в) $1<x<2$, $x \geqslant 5$, $x=4$; д) $x<-1$, $2<x<3{,}5$; е) $2 \leqslant x \leqslant 3$, $6 \leqslant x < 9$; ж) $-1 < x < 0$, $4 < x \leqslant 6$. 6. а) $-\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x \leqslant 2$; б) $\frac{5}{4} < x < 2$; в) $1+2^{\frac{3}{8}} < x \leqslant 1+2^{\frac{7}{2}}$, $1-2^{\frac{7}{2}} \leqslant x < 1-2^{\frac{3}{8}}$; г) $-1 \leqslant x \leqslant 0$; $x=4$; е) $-3{,}5 < x < 0$; $1{,}5 < x < 5$; ж) $0 < x < \frac{5-\sqrt{13}}{2}$, $\frac{5+\sqrt{13}}{2} < x < 5$; з) $-0{,}5 < x < 1$. 7. а) $x<-1$; б) $-1 < x \leqslant 3$; в) $x<-1$; г) $x<-1$; д) $0 \leqslant x < 1$, $x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$; е) $x=2$, $3 \leqslant x \leqslant 2+\sqrt{2}$; ж) $x=2$; з) $x<0$, $x=2$; и) $0{,}5 \leqslant x < 1$, $x>1$ 8. а) $-0{,}5 \leqslant x \leqslant 0$; б) $0 < x < 1$; в) $x=0$; г) $x>1$; д) $\frac{\sqrt{5}-3}{2} \leqslant x < 0$; $x \geqslant 3$; ж) $1 < x < 16$; з) $x>4$; и) $0 \leqslant x \leqslant 4$, $x \neq 2$; к) $2-0{,}5\sqrt{6} \leqslant x \leqslant 2+$

$+0,5\sqrt{6}$, $x \neq 2$; л) $3 \leq x < 19$. **9.** а) $2,75 \leq a \leq 3$ да $x = 0,5(2a + 1 \pm \sqrt{4a - 11})$, $a \geq 3$ да $x = 0,5(2a + 1 + \sqrt{4a - 11})$, $a < 2,75$ да ечим мавжуд эмас; б) $-4 \leq a < 4$ да $x = \dfrac{3a - 4}{a - 4}$, $a < 4$, $a \geq 4$ да ечим мавжуд эмас; в) $b \geq a$ да $x = 0.5(2b + 1 - \sqrt{4b - 4a + 1})$, $b < a$ да ечим мавжуд эмас; г) $a \geq 3$ да $x = 3a^2 + 11 - 2a\sqrt{2a^2 + 18}$, $a < 3$ да ечим мавжуд эмас; д) $0,5\sqrt{6} \leq a \leq \sqrt{3}$ да $x = 3a^2 - 1 \pm 2a\sqrt{2a^2 - 3}$, $a > \sqrt{3}$ да $x = 3a^2 - 1 + 2a\sqrt{2a^2 - 3}$, $a < 0,5\sqrt{6}$ да ечим мавжуд эмас; е) $a \geq \dfrac{9}{4}$ да $x = a - 2 + \sqrt{a^2 - 4a + 7}$, $a < \dfrac{9}{4}$ да ечим мавжуд эмас; ж) $a \geq 0$ да $x = \dfrac{1}{8}(4a + 3 - \sqrt{8a + 9})$, $a < 0$ да ечим мавжуд эмас; з) $\sqrt{2} \leq a \leq 2$ да $x = 2 \pm \dfrac{\sqrt{4a^2 - a^4}}{2}$, $a < \sqrt{2}$, $a > 2$ да ечим мавжуд эмас; и) $1 \leq a \leq \sqrt{2}$ да $x = 0,5(a \pm \sqrt{2 - a^2})$, $-1 \leq a < 1$ да $x = 0,5(a - \sqrt{2 - a^2})$, $a < -1$, $a > \sqrt{2}$ да ечим мавжуд эмас; к) $0 < a \leq 1$ да $x = +0,25\left(a - \dfrac{1}{a}\right)^2$, $a \leq 0$, $a > 1$ да ечим мавжуд эмас; л) $0 \leq a < 1$ де $2 - a - 2\sqrt{1 - a} < x < 2 - a + 2\sqrt{1 - a}$, $a < 0$ да $0 \leq x < 2 - a + 2\sqrt{1 - a}$, $a \geq 1$ да ечим мавжуд эмас; м) $a \geq 3$ да $x > 3a^2 + 11 - 2a\sqrt{2a^2 + 18}$, $a < 3$ да $x \geq 2$.

## 12. ТЕНГСИЗЛИКЛАРНИ ИСБОТЛАШ

Тенгсизликларни исботлашда турли усул ва методлардан фойдаланилади.

Баъзан зарур натижани таърифга асосланиб, яъни тенгсизликнинг чап ва ўнг қисмлари айирмасини қараш орқали олиш мумкин, баъзан айрим маълум тенгсизликлардан ёки тенгсизликнинг чап ва ўнг қисмларини баҳолашдан фойдаланиш фойда келтиради. Баъзан тенгсизликни тенг кучли алмаштиришлар йўли билан аён (тўғри) тенгсизликка келтириш орқали эришилади.

1-мисол. Иккита ўзаро тескари мусбат соннинг йиғиндиси иккидан кичик эмаслигини исботланг.

Ечиш. $a$ — мусбат сон бўлсин. $a + \dfrac{1}{a} - 2 = \dfrac{(a-1)^2}{a} \geq 0$, демак, $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$.

2-мисол. Тенгсизликни исботланг:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

Ечиш. Ушбу

$$a^2 + b^2 \geq 2ab,$$
$$a^2 + c^2 \geq 2ac,$$
$$b^2 + c^2 \geq 2bc$$

тўғри тенгсизликларни қўшиб ва ҳадма-ҳад 2 га бўлиб, исботланаётган тенгсизликни оламиз.

**3- мисол.** Агар $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сонлар арифметик прогрессия ташкил қилса, у ҳолда $a_{k+1} a_{n-k} \geqslant a_1 a_n$ бўлишини исботланг ($k = 0, 1, \ldots, n-1$).

**Ечиш.** $a$ — прогрессия айирмаси бўлсин. У ҳолда

$$a_{k+1} a_{n-k} - a_1 a_n = (a_1 + dk)(a_1 + d(n-k-1)) - a_1(a_1 + d(n-1)) =$$

$$= d^2 k(n-k-1) \geqslant 0, \text{ чунки } 0 \leqslant k \leqslant n -- 1.$$

**4- мисол.** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ мусбат сонлар арифметик прогресси ташкил қилсин. Исботланг:

$$\sqrt{a_1 a_n} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

**Ечиш.** Коши тенгсизлигига асосан,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leqslant \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Шунчнгдек, $a_{k+1} a_{n-k} \geqslant a_1 a_n$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ учун) (3- мисол қ.). Шунинг учун

$$(a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^2 = (a_1 a_n)(a_2 a_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (a_n a_1) \geqslant (a_1 a_n)^n$$

ёки

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \geqslant \sqrt{a_1 a_n}.$$

**5- мисол.** $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ кетма-кетликнинг ўсувчи экани исботланг.

**Ечиш.** $n + 1$ та

$$1;\ \underbrace{1 + \frac{1}{n};\ 1 + \frac{1}{n};\ \ldots;\ 1 + \frac{1}{n}}_{n \text{ та сон}}$$

мусбат сонни қараймиз ва уларга нисбатан Коши тенгсизлиг татбиқ қиламиз. У ҳолда:

$$\frac{1 + n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}, \text{ яъни } 1 + \frac{1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n},$$

ёки

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Шуни исботлаш талаб этилган эди.

Ўқув қўлланмасидан айрим машқларни олиб қараймиз.

**274.** Тенгсизликларни исботланг:

1) $x^2 + y^2 \geqslant \frac{1}{2}$; 2) $x^4 + y^4 \geqslant \frac{1}{8}$; 3) $x^8 + y^8 \geqslant \frac{1}{128}$, бунда $x >$ $y > 0$, $x + y = 1$.

**Ечиш.**

1) $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 1 - 2xy \geqslant 1 - 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$;

2) $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 y^2 \geqslant \frac{1}{4} - 2x^2 y^2 \geqslant \frac{1}{4} - 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$;

3) $x^8 + y^8 = (x^4 + y^4)^2 - 2x^4 y^4 \geqslant \frac{1}{64} - 2x^4 y^4 \geqslant \frac{1}{64} -$
$- 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^8 = \frac{1}{128}$.

**275.** Тенгсизликларни исботланг:

3) $n! \geqslant n^{\frac{n}{2}}$; 4) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2$;

13) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$; 14) $\sqrt[3]{(a+k)(b+l)(c+m)} \geqslant$
$\geqslant \sqrt[3]{abc} / \sqrt[3]{klm}$ ($a > 0$; $b > 0$; $c > 0$; $k > 0$; $l > 0$; $m > 0$;

16) $\sqrt{n} \sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{n+1}{2}$;

17) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 3$;

18) $2 \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \leqslant 4$;

19) $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2$, ($x_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$);

23 $(a+b)^n \leqslant 2^{n-1}(a^n + b^n)$ ($a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$).

**Ечиш.**

3) 4- мисолдаги тенгсизликдан фойдаланамиз. $a_1 = 1$, $a_2 = 2, \ldots, a_n = n$ ни олиб, $\sqrt{1 \cdot n} \geqslant \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}$ ёки $\sqrt{n} \geqslant \sqrt[n]{n!}$ ни ҳосил қиламиз, бундан $n! \geqslant n^{\frac{n}{2}}$.

Тенглик ишораси фақат $n = 1$ да ва $n = 2$ да ўринли.

4) Исботни математик индукция усули билан бажарамиз. $n = 1$ да берилган тенгсизлик тўғри, чунки $3 > 2\sqrt{2}$. Берилган тенгсизлик $n = k$ да тўғри бўлсин; у $n = k + 1$ да ҳам тўғри бўлишини исботлаймиз. Қуйидагиларга эга бўламиз:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > 2\sqrt{k+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{k+1}} =$$

$$= 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2}) + \frac{1}{\sqrt{k+1}} + 2\sqrt{k+2} - 2 =$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}\right)+2\sqrt{k+2}-2>$$

$$>\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1}}\right)+2\sqrt{k+2}-2=2\sqrt{k+2}-2.$$

13) Тенгсизлик $a>0,\ b>0,\ c>0$ да тўғри.

**Ечиш.** $b+c=2x,\ c+a=2y,\ a+b=2z$ бўлсин. У ҳолда $a+b+c=x+y+z,\ a=y+z-x,\ b=x+z-y,\ c=x+y-z$. Қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}=\frac{y+z-x}{x}+\frac{x+z-y}{y}+\frac{x+y-z}{z}=$$

$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{5}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)-3\geqslant 2+2+2-3=3.$$

14) Берилган тенгсизликнинг иккала қисмини кубга кўтарамиз:

$$abc+bck+acl+ckl+abm+bkm+alm+klm\geqslant$$

$$\geqslant abc+klm+3\sqrt[3]{abcklm}\,(\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{klm}). \qquad (1)$$

(1) тенгсизликни ушбу кўринишда ёзамиз:

$$(abm+bck+acl)+(alm+bkm+ckl)\geqslant$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{abcklm}\cdot\left(\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{klm}\right) \qquad (2)$$

(2) тенгсизликни исботлаш учун чап қисмнинг ҳар қайси қўшилувчисига Коши тенгсизлигини татбиқ қиламиз:

$$abm+bck+acl\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2klm}.$$

$$alm+bkm+ckl\geqslant 3\sqrt[3]{abck^2l^2m^2},$$

Бу тенгсизликларни ҳадлаб қўшиб, (2) тенгсизликни оламиз.

16) 4-мисолдаги тенгсизликдан фойдаланамиз. $a_1=1,\ a_2=2,\ \ldots,\ a_n=n$ деб олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\sqrt{1\cdot n}\leqslant\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot\ldots n}\leqslant\frac{1+n}{2},$$

$$\text{яъни } \sqrt{n}\leqslant\sqrt[n]{n!}\leqslant\frac{n+1}{2}.$$

17) 5-мисол натижасидан $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ кетма-кетликнинг ўсувчи эканлиги маълум бўлади: $a_n<a_{n+1}$, яъни

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

$a_n<3$ бўлишини (ёки, шунинг ўзи, $a_{n+1}<3$ бўлишини) исботлаш учун Ньютон формуласидан фойдаланиш мумкин.

18) $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ бўлсин. У ҳолда $b_{n-1}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$. Куйидагиларга эга бўламиз:

$$b_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1};\quad b_{n-1}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^n;$$

$$\frac{b_{n-1}}{b_n}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^n:\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}=\frac{n^{2n+1}}{(n-1)^n\,(n+1)^{n+1}}=$$

$$=\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1}=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1}.$$

Бернулли тенгсизлигига мувофиқ

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\geqslant 1+\frac{1}{n^2-1}.$$

$1+\frac{n}{n^2-1}>1+\frac{n}{n^2}=\frac{n+1}{n}$ бўлгани учун $\frac{b_{n-1}}{b_n}>\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}=1$ бўлади, яъни $b_n<b_{n-1}$; $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$ тенгсизлиги исботланди.

Бернулли тенгсизлиги бўйича:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\geqslant 1+\frac{n+1}{n}=2+\frac{1}{n}>2.$$

Бизга

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n\leqslant 4\ (n=2,\ 3,\ \ldots)$$

тенгсизликни исботлаш қолди. Тенгсизлик $n=2$ ва $n=3$ да бажарилади. $n\geqslant 4$ да қуйидагига эга бўламиз:

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)<$$

$$<3\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=3+\frac{3}{n-1}\leqslant 4.$$

19) **Кўрсатма.** Коши тенгсизлигини $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ сонларига, сўнг эса $\frac{1}{a_1};\ \frac{1}{a_2},\ \ldots,\ \frac{1}{a_n}$ сонларига татбиқ этинг ва олинган тенгсизликларни кўпайтиринг.

23) Математик индукция усулини татбиқ этамиз. $n=1$ да тенгсизлик тўғри. $(a+b)^k<2^{k-1}(a^k+b^k)$ тенгсизлик тўғри деб фараз қилайлик. У ҳолда

$$(a+b)^{k+1}=(a+b)^k(a+b)\leqslant 2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b)=$$

$$=2^{k-1}(a^{k+1}+b^{k+1}+ab^k+a^kb)\leqslant 2^{k-1}\cdot 2\,(a^{k+1}+b^{k+1})=$$

$$=2^k(a^{k+1}+b^{k+1}),$$

ҳамда $(a^{k+1}+b^{k+1})-(ab^k+a^kb)=(a-b)(a^k-b^k)\geqslant 0$ ва, шунинг учун $ab^k+a^kb\leqslant a^{k+1}+b^{k+1}$.

## 13. ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАЛАРИ

**Тенгламалар системаларини ечиш.** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ўзгарувчили чизиқли тенглама деб,

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$$

кўринишдаги тенгламага айтилади. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сонлари—тенглама коэффициентлари—исталган ҳақиқий сонлар.

$n$ ўзгарувчили $m$ та чизиқли тенглама системасини ечиш учун Гаусс усулидан фойдаланиш қулай.

Мисоллар қарайлик.

1- мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ 3x + 0{,}5\,y = 4 \end{cases} \qquad (1)$$

система берилган. Уни тенг кучли системага шундай алмаштирамизки, бунда иккинчи тенгламадаги $x$ олдида турган коэффициент нолга тенг бўлсин. Щу мақсадда биринчи тенгламани $-1{,}5$ га кўпайтирамиз ва системанинг иккинчи тенгламасига ҳадлаб қўшамиз. Натижада

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ -4y = -8 \end{cases} \qquad (2)$$

тенгламани ҳосил қиламиз, ундан $y = 2$, $x = 1$ ни осонлик билан топамиз.

Жавоб. (1; 2).

2- мисол. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x + 3y - 5z = -7, \\ 3x + 5y + 4z = 25. \end{cases} \qquad (3)$$

Ечиш. Биринчи тенгламани—2 га кўпайтриб, ҳадма-ҳад системанинг иккинчи тенгламасига қўшсак ва —3 га кўпайтириб, системанинг учинчи тенгламасига қўшсак, берилган системага тенг кучли система ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ y - 7z = -19, \\ 2y + z = 7. \end{cases} \qquad (4)$$

(4) системанинг иккинчи ва учинчи тенгламалари фақат $y$ ва $z$ ўзгарувчиларига эга. Учинчи тенгламадан $y$ ўзгарувчини йўқотамиз. Бунинг учун иккинчи тенгламани $-2$ га ҳадлаб кўпайтирамиз ва учинчи тенгламага қўшамиз:

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ y - 7z = -19, \\ z = 3. \end{cases} \qquad (5)$$

$z = 3$ ни (5) системанинг иккинчи тенгламасига қўйиб, $y = 2$ ни топамиз. Сўнг $y = 2$ ва $z = 3$ ни биринчи тенгламага қўйиб, $x = 1$ ни топамиз. Шундай қилиб, берилган система биргина (1; 2; 3) ечимга эга экан.

(2) ва (5) кўринишдаги системалар учбурчакли системалар дейилади.

3- мисол. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x - y + 3z = 5, \\ x - 3y + 4z = 1. \end{cases} \qquad (6)$$

Ечиш. Системани учбурчакли кўринишга келтиришга ҳаракат қиламиз:

$$(6) \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ -5y + 5z = 1, \\ -5y + 5z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ -5y + 5z = 1, \\ 0 \cdot z = -2. \end{cases}$$

Охирги тенглама маъно жиҳатидан зид, система ечимга эга эмас.

Ўзгарувчилар сони тенгламалар сонига тенг бўлмаган системани қараймиз.

4- мисол.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 5, \\ 2x - 3y + 2z = 1. \end{cases} \qquad (7)$$

Биринчи тенгламани $-2$ га кўпайтириб ва иккинчи тенгламага ҳадлаб қўшиб,

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 5, \\ y - 4z = -9 \end{cases}$$

ни оламиз.

$k$ ўзгарувчига эга қўшилувчиларни тенгламаларнинг ўнг қисмига ўтказамиз. Система қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{aligned} x - 2y &= 5 - 3z, \\ y &= 4z - 9. \end{aligned} \qquad (8)$$

(8) система $x$ ва $y$ ўзгарувчиларга нисбатан учбурчакли кўринишга эга. Ундан:

$$\begin{cases} x = 5z - 13, \\ y = 4z - 9. \end{cases}$$

(7) система $(5z - 13;\ 4z - 9;\ z)$ кўринишдаги чексиз кўп ечимга эга бўлади, бунда $z$ — исталган ҳақиқий сон.

Жавоб: $(5z - 13;\ 4z - 9;\ z)$, бунда $z \in R$.

Икки ўзгарувчили иккита тенглама системасини текширишда ушбу геометрик интерпретациядан фойдаланиш қулай.

Системанинг ҳар қайси тенгламасида ҳеч бўлмаганда бир ўзгарувчи олдида турган коэффициент нолдан фарқли деб ҳисоблайлик.

У ҳолда системадаги ҳар қайси тенглама координата текислигида бирор тўғри чизиқнинг тенгламасидан иборат бўлади.

Бу тўғри чизиқлар ё кесишади, ё параллел, ё устма-уст тушади. Биринчи холда система битта ечимга эга, иккинчи ҳолда ечимга эга эмас, учинчи ҳолда эса чексиз кўп ечимга эга.

5-мисол. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} (a+1)x + 2y = 2a + 4, \\ x + ay = 3. \end{cases} \qquad (9)$$

Ечиш. Икки ўзгарувчили иккита тенглама системасининг геометрик интерпретациясидан фойдаланамиз.

$a = 0$ ҳолидан бошлайлик. $a = 0$ да система битта ечимга эга бўлиши равшан.

Энди $a \neq 0$ бўлсин. (9) системани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\begin{cases} y = -0{,}5(a+1)x + a + 2, \\ y = -\dfrac{1}{a}x + \dfrac{3}{a}. \end{cases} \qquad (10)$$

Система биринчи тенгламаси билан бериладиган тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти $-0{,}5(a+1)$ га тенг, система иккинчи тенгламаси билан бериладиган тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти эса $-\dfrac{1}{a}$ га тенг. Шунинг учун $-0{,}5\ (a+1) \neq -\dfrac{1}{a}$ да, яъни $a \neq 1$ ва $a \neq -2$ да бу тўғри чизқлар кесишади ва шу туфайли система битта ечимга эга. Бу ечимни топамиз.

(1) система тенгламаларининг ўнг қисмларини тенглаштирамиз: $-0{,}5\ (a+1)x + a + 2 = -\dfrac{x}{a} + \dfrac{3}{a}$, бундай соддалаштиришлардан сўнг $x = \dfrac{2(a+3)}{a+2}$ $(a \neq 1;\ a \neq -2)$ ни топамиз. $x$ учун топилган қийматни (10) системадаги исталган тенгламага қўйиб, $y = \dfrac{1}{a+2}$ га эга бўламиз. $a = -2$ да тўғри чизиқлар параллел ва умумий нуқтага эга эмас. $a = -2$ ни берилган системага қўйсак ечимга эга эмаслиги равшан бўлган $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ система ҳосил бўлади.

$a = 1$ да тўғри чизиқлар устма-уст тушади, система чексиз кўп ечимга эга. $a = 1$ ни қўйиб, $\begin{cases} x + y = 3, \\ x + y + 3 \end{cases}$ системани оламиз, у бирча ечимлари $(t;\ 3 - t)$, $t \in R$, кўринишига эга бўлган битта $x + y = 3$ тенгламага тенг кучли.

Жавоб. $a \neq -2$, $a \neq 1$ да система ягона ечимга эга: $x = \dfrac{2(a+3)}{a+2}$, $y = \dfrac{1}{a+2}$; $a = -2$ да система ечимга эга эмас; $a = 1$ да система чексиз кўп $(t;\ 3 - t)$ ечимга эга, бунда $t \in R$.

Текширишни геометрик интерпретациясиз ҳам ўтказиш мумкинлигини таъкидлаймиз. Буни ўша мисолнинг ўзида кўрсатайлик.

Системанинг иккинчи тенгламасини — 1 га кўпайтирамиз ва $\frac{a}{2}$ га кўпайтирилган биринчи тенгламага қўшамиз, натижада:

$$(a^2 + a - 2)\,x = 2\,(a^2 + 2a - 3) \text{ ёки}$$

$$(a + 2)(a - 1)\,x = 2\,(a + 3)(a - 1). \qquad (11)$$

Агар $a \neq 1$, $a \neq -2$ бўлса, у ҳолда (11) тенглама битта ечимга эга бўлади: $x = \frac{2(a+3)}{a-2}$. Топилган $x$ қийматини системадаги исталган тенгламага қўйиб, $y = \frac{1}{a+2}$ ни оламиз. $a = -2$ да $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ система ўринли эмас, $a = 1$ да $\begin{cases} x + y = 3, \\ x + y = 3 \end{cases}$ система чексиз кўп ечимга эга ва биз олдин топилган натижани яна оламиз.

**Чизиқли бўлмаган тенгламалар системаларини ечиш.** Тенгламалар системаларини ечиш тенг кучли системаларга ёки натижаларга ўтиш қоидаларига асосланади. Тенгламалар системаларини ечишда турли усуллар қўлланилади: кўпайтувчиларга ажратиш, ўзгарувчиларни йўқотиш, алгебраик қўшиш, ўзгарувчиларни алмаштириш ва шу кабилар

Ўқув қўлланмасидан айрим машқларни ечишга доир кўрсатмалар ва қисқача ечилишларини келтирамиз.

**293 (3).** Ушбу тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x + y = x^2, \\ 3y - x = y^2. \end{cases}$$

Ечиш. Системанинг биринчи тенгламасидан $y = x^2 - x$ ни ифодалаб, иккинчи тенгламага қўйсак, $x^4 -- 2x^3 - 2x^2 + 4x = 0$ ҳосил бўлади, бунинг илдизлари: $x = 0$, $x = 2$, $x = \pm\sqrt{2}$. Берилган системанинг ечимлари: (0; 0), (2; 2), $(\sqrt{2};\ 2 - \sqrt{2})$, $(\sqrt{2};\ 2 + \sqrt{2})$.

**295.** Тенгламалар системаларини ечинг:

7) $\begin{cases} x^4 + y^4 + x^3 y + xy^3 = \frac{112}{9} x^2 y^2, \\ x + y = 4; \end{cases}$

10) $\begin{cases} \sqrt{x_2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}} = a, \\ x + y + 3\sqrt[3]{bxy} = b. \end{cases}$

7) Кўрсатма. Системанинг биринчи тенгламаси бир жинсли тенглама. Уни ҳадма-ҳад $y^4$ га бўлинг.

10) Кўрсатма. Агар системанинг биринчи тенгламасидаги биринчи илдиз остида турган ифодада $\sqrt[3]{x^4}$ ифода, иккинчисида эса

$\sqrt[3]{y^4}$ ифода қавсдан ташқарига чиқарилса, бу тенглама $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt{a}$ кўринишга келади.

**298.** Тенгламалар системалари ечилсин:

1) $\begin{cases} x^y = 243, \\ (1024)^{\frac{1}{y}} = \left(\frac{2}{3}x\right)^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}} = y^{\frac{8}{3}}, \\ y^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}} = y^{\frac{2}{3}}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_2(y-x) - \log_8(3y-5x) = 0, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} \cos^2 y + 3\sin x \sin y = 0, \\ 21\cos 2x - \cos 2y = 10; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, y = a, \\ \mathrm{ctg}\, x + \mathrm{tg}\, y = 2; \end{cases}$ 11) $\begin{cases} \sqrt{a-x} - \sqrt{y-x} = \sqrt{y}, \\ \sqrt{b-x} + \sqrt{y-x} = \sqrt{y}; \end{cases}$

12) $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}} = 1, \\ \sqrt{x^2-y} + \sqrt{x^2-y} = 1. \end{cases}$

Ечиш.

1) Биринчи тенгламадан $x = 243^{\frac{1}{y}}$ ни топамиз; уни иккинчи тенгламага қўйиб, $1024^{\frac{1}{y}} = \frac{4}{9}\cdot 243^{\frac{2}{y}}$ ёки $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{10}{y}} = \frac{4}{9}$ ни ҳосил қиламиз, бундан $y = 5$. Сўнг $x = 3$ ни топамиз.

Жавоб. (3; 5).

2). Кўрсатма. Иккала тенгламани 10 асос бўйича логариф лаш билан системани $u = \frac{\lg x}{\lg y}$, $v = \sqrt[4]{x} + \sqrt{y}$ ўзгарувчиларга нис батан рационал бўлган системага келтиринг.

Жавоб. $\left(\frac{16}{81}; \frac{4}{9}\right)$.

3) Биринчи тенгламадан $(y-x)^2 = 3y - 5x$ ни топамиз. Олин ган тенгламани ҳадма-ҳад системанинг иккинчи тенгламасига бўли $5(y-x)^3 = (3y-5x)(x^2+y^2)$ ни ҳосил қиламиз. Алмаштиришлар дан сўнг $y(2y^2 - 10xy + 12x^2) = 0$ га эга бўламиз.

Жавоб. (1; 2); $(-\sqrt{5}; 0)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

7) Биринчи тенгламадан $\sin x = -\frac{\cos^2 y}{3\sin y}$ ни топамиз ($\sin y \neq$ чунки акс ҳолда $\sin y = \cos y = 0$) ва иккинчи тенгламага қўй (унда $\cos 2x$ ни $1-2\sin^2 x$ га алмаштириб), алмаштиришлардан с

$$2\cos^2 2y + 25\cos 2y - 13 = 0$$

ни оламиз, бундан $\cos 2y = \frac{1}{2}$. У ҳолда иккинчи тенгламадан $\cos 2x = \frac{1}{2}$ ни топамиз. $\begin{cases} \cos 2y = \frac{1}{2}, \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases}$ тенгламилар системаси берилган системанинг натижасидир. Уни ечиб,

$$\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z, \\ y = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z \end{cases}$$

ни топамиз. $x$ ва $y$ сонлари жуфтларини шундай танлаймизки, $\sin x$ ва $\sin y$ ҳар хил ишорага эга бўлсин (берилган системанинг биринчи тенгламасига қаранг).

Жавоб.

$$\begin{cases} x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z, \\ y = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z; \end{cases} \quad \begin{cases} x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z, \\ y = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z. \end{cases}$$

8) Агар $a<0$ ёки $a>2$ бўлса, система ечилади:

$$x = \mathrm{arctg}\,\frac{a \pm \sqrt{a^2-2a}}{2} + \pi k,\ k \in Z,$$

$$y = \mathrm{arctg}\,\frac{a \pm \sqrt{a^2-2a}}{a} + \pi n,\ n \in Z.$$

11) Кўрсатма. Системани

$$\begin{cases} \sqrt{a-x} = \sqrt{y-x} + \sqrt{y}, \\ \sqrt{b-x} = \sqrt{y} - \sqrt{y-x} \end{cases}$$

кўринишга келтиринг, тенгламалардан ҳар қайсисини квадратга кўтаринг ва ҳосил бўлган тенгламаларни қўшинг. Система $a > b > 0$ да ечимга эга.

Жавоб. $x = \frac{ab}{a+b}$; $y = \frac{a+b}{4}$.

12) Кўрсатма. Система тенгламаларининг ҳар қайсисини квадратга кўтаринг, сўнг илдиз яккалантирилганидан ва такрор квадратга кўтарилганидан кейин, ушбу системани оласиз:

$$\begin{cases} x - y = \frac{1}{4}; \\ x^2 - y^2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Жавоб. $\left(\frac{5}{8}; \frac{3}{8}\right)$.

## Қўшимча машқлар

1. Тенгламалар системаларини ечинг:

а) $\begin{cases} x+y=3, \\ 2x-3y=11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y=3, \\ 6x-3y=2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x+y=7, \\ 6x+2y=14; \end{cases}$

г) $\begin{cases} ax+y=3a-1, \\ x+ay=2; \end{cases}$ д) $\begin{cases} (a+2)x+y=3, \\ ax+2y=1. \end{cases}$

2. *a* параметрнинг барча шундай қийматларини топингки, уларда ушбу

а) $\begin{cases} (a+1)x+2y=a, \\ x+(a+2)y=0 \end{cases}$ тенгламалар системаси ечимга эга бўлмасин;

б) $\begin{cases} ax+(a+6)y=3; \\ x+xy=a-2 \end{cases}$ тенгламалар системаси чексиз кўп ечимга эга бўлсин.

3. Тенгламалар системаларини ечинг:

а) $\begin{cases} x+y+z=2, \\ 2x-3y+5z=-1, \\ -5x+2y-z=-3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y+z+1, \\ 3x+5y+2z=3, \\ 2x+4y+z=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+2y+z=3, \\ -2x+y+3z=1, \\ x+7y+6z=8. \end{cases}$

4. Тенгламалар системаларини ечинг:

а) $\begin{cases} x^2=4x+5y, \\ y^2=5x+4y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy+24=\frac{x^3}{y}, \\ xy-6=\frac{y^3}{x}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^3+y^2=7, \\ x^2y+y^2x=-2 \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^3-y^3=65, \\ x^2y-xy^2=-20; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x+3xy+2y=-4, \\ 3x-xy+y=3; \end{cases}$

е) $\begin{cases} xy+2y^2+2x-y=7, \\ 3xy-y^2+6x+3y=20. \end{cases}$

5. Тенгламалар системаларини ечинг:

а) $\begin{cases} x^2+y^2+3xy-4x-4y+3=0, \\ xy+2x+2y=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2(x+y)=3xy, \\ x^2+y^2+2x+2y-7xy+3= \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^4+y^4+x^2+y^2=22, \\ xy=2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5(x^4+y^4)=41(x^3+y^2), \\ x^2+xy+y^2=13; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2+6xy+4y^2=20, \\ x+2y+xy=6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} (x+y+1)^2+(x+y)^2=2 \\ x^2-y^2=3; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \frac{x}{y}-\left(\frac{y-x}{x}\right)^2=1, \\ 2y^2-x^2=1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y}+xy=5, \\ xy+\frac{6(x-y)}{x+y}=4. \end{cases}$

6. Тенгламалар системаларини ечинг:

а) $\begin{cases} 2x^2+3xy+2y^2=4, \\ 4x^2-4xy-y^2=8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=3, \\ 2y^2-xy-y^2=5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2-3xy+2=0; \\ y^2+xy-3=0, \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^3-2y^3=6, \\ 2x^2y-xy^2=6; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2+2xy-3y^2=0, \\ x|x|+y|y|=-2; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x^3-y^3=7, \\ 2x^2y-xy^2=6; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} 4y^2-3xy=2x-y, \\ 5x^2-3y^2=4x-2y. \end{cases}$

7. Тенгламалар системаларини ечинг:

а) $\begin{cases} \sqrt{x^2+4y}=2y-x, \\ x\sqrt{x^2-y^2}=2x+1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{x^2-4xy+y^2}=x-y, \\ \sqrt{x^2+16|y|}=3+|y|-2x^2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6, \\ x^2y+xy^2=20; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y+3\sqrt{xy}=1, \\ \sqrt{x^3y}+\sqrt{xy^3}=10; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \sqrt{x+2y}-\sqrt{x-1}=1, \\ \sqrt{5-2y}+2=\sqrt{x+2y}; \end{cases}$

е) $\begin{cases} \frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}=x, \\ \frac{x}{y}=\sqrt{\frac{1+x}{1-y}}; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x+y-\sqrt{x}+\sqrt{y}-2\sqrt{xy}=2, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=8; \end{cases}$

з) $\begin{cases} (x+y\sqrt{x}+y^2)\sqrt{x+y^2}=65, \\ (x-y\sqrt{x}+y^2)\sqrt{x+y^2}=185; \end{cases}$ и) $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2}, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4. \end{cases}$

8. Иррационал тенгламаларни рационал системаларга келтириш билан ечинг:

а) $\sqrt[4]{49-\sqrt{2x}}+\sqrt[4]{33+2x}=4;$ б) $\sqrt[4]{17-x}+\sqrt{x-1}=2;$

в) $\sqrt[4]{x-1}+\sqrt{2-x}=1;$ г) $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1;$

д) $\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6;$ е) $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1.$

9. Тенгламалар системаларини ечинг:

а) $\begin{cases} 3^{x+y}+3^x+3^y=7; \\ 3^{2x+y}+3^{x+2y}=12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (2x+y)^{\frac{1}{x}}=9, \\ (2x+y)\cdot 2^x=18; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (3y^2+1)\log_3 x=4, \\ (\sqrt[4]{x})^{2y^2+19}=27; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^3 = y^{-1}, \\ x^{y+4x} = y^{5\left(y-\frac{x}{3}\right)}; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y^{25x} = 4^{200} \\ x - \log_2(8y) = 3; \end{cases}$

е) $\begin{cases} (x+y)\cdot 3^{y-x} = \frac{7}{9}, \\ 2\log_7(x+y) = x - y; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} (3x-y)^{x+y} = 4, \\ 48^{\frac{1}{x+y}} = 27x^2 - 18xy + 3y^2; \end{cases}$

з) $\begin{cases} 2\cdot 15^x + 15^y = 5^x \cdot 3^{-y} \\ 2\cdot 3^{x-y} - 5^{y-x} = 3\cdot 9^x. \end{cases}$

10. Тенгламалар системаларини ечинг:

а) $\begin{cases} (1+\log_x y)\log_2 x = 3, \\ \log_{\sqrt[3]{x}}(y^4 x^2) - 0{,}5\log_{\sqrt{x}} y^4 = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x\log_2 \frac{1}{y} \cdot \log_{\frac{1}{x}} 4 = y\sqrt{y}(\log_x 4 - 2), \\ \log_{y^2} 4 \cdot \log_{\sqrt[4]{2}} x = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \lg^2 \frac{x}{y} = 3\lg^2 x + \lg^2 y, \\ \lg^2(y-3x) + \lg x \lg y = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \log_{\sqrt{y}} x^2 + \log_x y = 5, \\ \frac{2\log_3^2 x}{\log_3 y} = 5 - 2^{\frac{y}{x}} + \log_9 x; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \log^2_{\frac{2}{3}} x + \log^2_{\frac{2}{3}} y - \log^2_{\frac{2}{3}}(x+y) = 1, \\ \log_{\frac{3}{2}} x \cdot \log_{\frac{3}{2}} y + \log_{\frac{3}{2}}(x+y) = 0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2\log_2(x+y) - \log_2 x = 2\log_{16} 4 - \log_{\frac{1}{2}}(3y-x), \\ \log_2 \frac{xy+3}{x^2+3x+1-y} = 2\log_4 \frac{y}{x}; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x^{\log_5 y} + y^{\log_5 x} = 50, \\ \log_{25} x + \log_{25} y = 1{,}5; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x^{1+\log_7 y} = 49x, \\ \log_7 y - \log_7 x = 1. \end{cases}$

11. Тенгламалар системаларини ечинг:

а) $\begin{cases} \sin y + \cos 2x = 2, \\ x + y = \dfrac{5\pi}{2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{6}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \dfrac{1}{2}; \\ x - y = \dfrac{4\pi}{3}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{6}, \\ \sin x \sin y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$

д) $\begin{cases} y - x = \dfrac{1}{3}, \\ \cos^2 \pi x \cos^2 \pi y = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$

е) $\begin{cases} \sin y = 5 \sin x, \\ 3 \cos x + \cos y = 2; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ \cos x + \cos y = 1; \end{cases}$

з) $\begin{cases} 6 \cos x + 4 \cos y = 5, \\ 3 \sin x + 2 \sin y = 0; \end{cases}$

и) $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{11}{16}, \\ \sin \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{5}{8}; \end{cases}$

к) $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{3}{4}; \\ \cos 2x + 2 \cos y = 1; \end{cases}$

л) $\begin{cases} 3 \sin (x - 2y) + 2 \sin y \cos (x - y) = 0, \\ \cos (x - y) = 3 \cos (x + y); \end{cases}$

м) $\begin{cases} \dfrac{1}{2} \cos y (\cos x - \cos y) = \cos \dfrac{x+y}{2} \sin y \sin \dfrac{y-x}{2}, \\ 2y - x = \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

н) $\begin{cases} \sin (2x + y) = 2 \sin y, \\ \sin (2y + x) = 3 \sin x. \end{cases}$

12. Тенгламалар системаларини ечинг:

а) $\begin{cases} \cos x = \sin y, \\ \sqrt{2 - 2 \cos 2x} = 2 \cos 2y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sin x = 2 \cos y, \\ \sqrt{1 + \cos 2x} = -\sqrt{2} \cos 2y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \cos x = 2 \sin y, \\ \sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{2} \cos 2y; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \sqrt{\cos 2y + \cos x} = -\cos y, \\ \sqrt{3} \sin y - \cos x = \sin^2 y; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \sqrt{\sin x} = \cos y, \\ \cos 2x = \sin^2 y; \end{cases}$

е) $\begin{cases} \sqrt{\cos x + \sin y} = -\sin x, \\ \cos x - \sin y = \cos^2 x. \end{cases}$

13. Тенгламалар системаларининг кўрсатилган шартларни қаноатлантирувчи барча ечимларини топинг:

а) $\begin{cases} \sin 2x = \sin y, \\ \sin x = \cos y, \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \cos 2x - \cos 2y = 1, \end{cases}$

$0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi;$ $0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi;$

в) $\begin{cases} |\sin x| \sin y = -0{,}25, \\ \cos(x+y) + \cos(x-y) = 1{,}5,\ 0 < x < 2\pi,\ 0 < y < 2\pi. \end{cases}$

14. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 2^{-x} + 2^{x} \cos 2y + \cos y = 0, \\ 2^{-x} - 2^{x} \sin 2y - \sin y = 0. \end{cases}$$

15. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(8 - y), \\ \log_2 y = \log_2 (4y - y^2) - \log_2 x. \end{cases}$$

16. Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи барча ($x$; $y$) жуфтларни топинг:

а) $\begin{cases} 2^{|x-3|} = 3^{2-y}, \\ |y-3| + y^2 + 1 \leqslant 3y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5^{\sqrt{y-1}} = 3^{2-x}, \\ |x-4| + x^2 \leqslant 3x. \end{cases}$

17. Тенгламалар системаларини ечинг:

а) $\begin{cases} x + y = 4, \\ y + z = 5, \\ xz = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy + yz = -4, \\ yz + xz = -9, \\ xy + xz = -1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = -1, \\ xy + yz + xz = -10, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 29; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x + y + z = 9, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1, \\ xy + xz + yz = 27; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^3 = xyz + 2, \\ y^3 = xyz + 3, \\ z^3 = xyz - 3; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 4, \\ x + y + z = 6, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 18; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 x + \log_4 z = 3{,}5, \\ \log_4 x + \log_4 y + \log_2 z = 4{,}5, \\ \log_4 x + \log_2 y + \log_4 z = 4. \end{cases}$

### Қўшимча машқларнинг жавоблари

1. а) (4; − 1); б) ечим мавжуд эмас; в) ($t$; $7 - 3t$); $t \in R$, кўр чексиз кўп ечим; г) $a \neq \pm 1$ да $x = \dfrac{3a+2}{a+1}$, $y = -\dfrac{1}{a+1}$ дан иборат ечим; $a = -1$ да ечим мавжуд эмас; $a = 1$ да ($t$; $2 - t$), $t \in R$ кўр чексиз кўп ечим; д) $a \neq -4$ да $x = \dfrac{5}{a+4}$, $y = \dfrac{2-2a}{a+4}$ дан иборат ягона

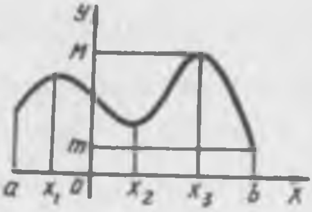
$a = -4$ да ечим мавжуд эмас. **2.** а) $a = -3$; б) $a = 3$. **3.** а) (1; 1; 0); б) $\left(1 - 1{,}5t;\ \frac{t}{2};\ t\right)$; $t \in R$; в) ечим мавжуд эмас. **4.** а) (0; 0), (9; 9); б) (— 4; — 2), (4; 2). **К ў р с а т м а.** $xy = u$, $\frac{x}{y} = v$ алмаштиришни киритинг, $x^2$ ва $y^2$ ни топиш учун бу тенгликларни хадма-хад кўпайтиринг ва бўлинг; в) (2; — 1), (— 1; 2); з) (1; — 1), (— 1; 3). **5.** б) (2; 1), (1; 2); г) ($\mp 3$; $\mp 1$), ($\mp 1$; $\mp 3$). **6.** д) (— 1; — 1), (— 15; 0,5); ж) (0; 0), (1; 1), $\left(\frac{297}{265};\ \frac{27}{53}\right)$. **7.** а) (— 1; 0), (— 0,5; 0,5); б) (0; — 9), (0; — 1), (1; 0); г) (— 4; — 1), (— 1; — 4); д) (5; 2); е) (0,25; 0,2); з) (9; — 4), (16; — 3); и) (4; 4). **8.** а) — 16; 24;, б) 1; в) 1; 2; г) 1; 2; 10; д) 3; — 24; — 88; е) $\frac{16}{25}$. **К ў р с а т м а:** $\sqrt{x} = u$, $\sqrt{1-x} = v$, $\sqrt{x - \sqrt{1-x}} = w$. Тенглама $u + w = 1$, $u^2 + v^2 = 1$, $w^2 = u^2 - v$ системага келтирилади. **9.** а) (0; 1), (1; 0); г) (1; 1), $\left(2;\ \frac{1}{8}\right)$; ж) $\left(\frac{5}{4};\ -\frac{1}{4}\right)$; з) $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$. **10.** а) (2; 4), ($2^{12}$; $2^{-9}$); б) $\left(2^{\frac{3}{5}};\ 2^{\frac{2}{5}}\right)$; в) (1; 4); $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$; г) (9; 9), $\sqrt[3]{\log_2 5}$; $\sqrt[3]{(\log_2 5)^4}$); д) $\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right)$; $\left(\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; е) (1; 1), ($c$; $3c$), бунда $c > 0$, $c \in R$. **11.** а) $\left(2\pi n;\ \frac{5\pi}{2} - 2\pi n\right)$*; б) $\left(\frac{\pi}{3} + \pi n;\ \frac{\pi}{6} + \pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi n;\ -\frac{\pi}{3} + \pi n\right)$; в) $\left(\frac{\pi}{6} + \pi n;\ -\frac{7\pi}{5} + \pi n\right)$; д) $\left(n + \frac{1}{3};\ n + \frac{2}{3}\right)$, $n \in Z$; е) $(2\pi k;\ \pi + 2\pi n)$; л) $\left(\pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $\left(\pm \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k;\ \pm \frac{\pi}{6} + \pi n\right)$; н) $(\pi k;\ \pi n)$, $\left(\pm \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k;\ \pm \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n\right)$. **12.** а) $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi n\right)$; б) $\left(\pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$; г) $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi + 2\pi n\right)$, $\left(\pm \arccos \frac{3}{4} + 2\pi k,\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$; е) $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; (-1)^n \arcsin \frac{1}{4} + \pi n\right)$. **13.** а) $\left(\frac{\pi}{2};\ 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6};\ \frac{5\pi}{3}\right)$. **14.** $\left(0;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $\left(0{,}5;\ \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right)$. **15.** $(4 - \pi;\ \pi)$. **16.** а) (3; 2); б) (2; 1). **17.** а) (2; 2; 3), (— 3; 7; — 2); б) (1; 2; — 3), (— 1; — 2; 3); в) (— 3; 2; 4), (2; — 3; 4), (— 4; 3; — 2), (3; — 4; — 2); д) (3; 3; 3); е) (2; $\sqrt[3]{9}$; $\sqrt[3]{3}$), ($\sqrt[3]{0{,}5}$; $\sqrt[3]{1{,}5}$; $-\sqrt[3]{4{,}5}$); ж) (1; 1; 4), (1; 4; 1), (4; 1; 1); з) (2; 4; 8).

## 14. ЭНГ КАТТА ВА ЭНГ КИЧИК ҚИЙМАТЛАРНИ ТОПИШГА ДОИР МАСАЛАЛАР

Энг катта ва энг кичик қийматларни топишга доир масалаларни ечиш малакасини шакллантириш — мактабда математик анализни ўрганишнинг энг муҳим мақсадларидан биридир. Ҳосиланинг қўлланилишига асосланган бу тур масалаларни ечиш катта амалий йўналишга эга.

---

* Шу жойда ва ундан кейин $n \in Z$, $k \in Z$.



18- расм.

Агар $f$ функция $[a; b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у шу кесмада энг катта ва энг кичик қийматлар қабул қилиши, яъни функция графиги шу кесмада энг катта ($M$) ва энг кичик ($m$) ординатали нуқталарга эга бўлиши маълум (18- расм).

Агар $f$ функция $[a; b]$ кесманинг бирор ички нуқтасида энг катта (энг кичик) қиймат қабул қилса, у ҳолда бу энг катта (энг кичик) қиймат $f$ функциянинг $[a; b]$ кесма ичидаги энг катта (энг кичик) максимуми (минимуми) билан устма-уст тушади. Лекин функция энг катта (энг кичик) қийматга $[a; b]$ кесманинг ичида эмас, балки унинг учларидан бирида эришиши мумкин. 18- расмда $[a; b]$ кесмада узлуксиз бўлган $f$ функция $x_1$ ва $x_3$ нуқталарда максимумларга, $x_2$ нуқтада эса минимумга эга. Функция энг катта қийматни $x_3$ нуқтада — максимумлардан энг каттаси жойлашган нуқтада қабул қилади. Функция ўзининг энг кичик қийматини кесманинг ўнг учида — $b$ нуқтада қабул қилади. $f$ функция $b$ нуқтада экстремумга эга эмаслигини кўрамиз, чунки $b$ нуқтадан ўнгда функция аниқланмаган.

Шунинг учун кесмада узлуксиз бўлган функциянинг энг катта ва энг кичик қийматини топиш қоидаси бундай таърифланади.

*Кесмада узлуксиз ва чекли сондаги критик нуқталарга эга функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топиш учун функциянинг барча критик нуқталардаги ва кесманинг учларидаги қийматларини топиш ҳамда ҳосил қилинган сонлардан энг каттаси ва энг кичигини танлаш лозим.*

1- мисол. $f(x) = 5\sqrt{2x+1} - x$ функциянинг $[4; 40]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматини топинг.

Ечиш. Функциянинг берилган кесма ичидаги критик нуқталарини топамиз:

$$f'(x) = \frac{5}{\sqrt{2x+1}} - 1,$$

$$\begin{cases} f'(x) = 0, \\ 4 < x < 40 \end{cases} \Leftrightarrow x = 12.$$

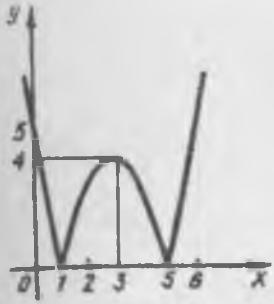
Функциянинг кесма учларидаги ва критик нуқтадаги қийматларини ҳисоблаймиз: $f(4) = 11$, $f(12) = 13$, $f(40) = 5$. Топилган қийматлардан энг каттаси ва энг кичигини ажратиб оламиз:

$$\max_{[4;\,40]} f(x) = f(12) = 13, \quad \min_{[4;\,40]} f(x) = f(40) = 5.$$

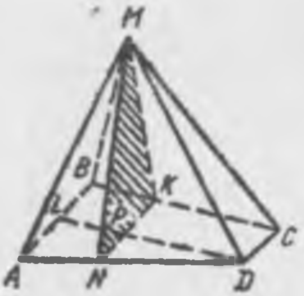
2- мисол. $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$ функция берилган. $f$ функциянинг $[2; 6]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

Ечиш. $f$ функцияни $[2; 6]$ кесмада қараймиз:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \leqslant x < 5 \text{ да } -x^2 + 6x - 5, \\ 5 \leqslant x \leqslant 6 \text{ да } x^2 - 6x + 5. \end{cases}$$



19- расм.



20- расм.

$[2;\ 6]$ да узлуксиз бўлган $f$ функция критик нуқталарини топиш учун $[2;\ 6]$ кесмадаги ҳосила нолга айланадиган ёки мавжуд бўлмаган ички нуқталарни топиш керак. Қуйидагига эга бўламиз:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 < x < 5 \text{ да } -2x + 6, \\ 5 < x < 6 \text{ да } 2x - 6. \end{cases}$$

$x = 5$ нуқтада ҳосила мавжуд эмас; $x = 3$ да $f'(x) = 0$. Шундай қилиб, критик нуқталар: 3 ва 5.

Функциянинг критик нуқталардаги ва кесма учларидаги қийматини ҳисоблаймиз: $f(2) = 3,\ f(3) = 4,\ f(5) = 0,\ f(6) = 5;$

$$\max_{[2;\,6]} f(x) = f(6) = 5, \ \min_{[2;\,6]} f(x) = f(5) = 0.$$

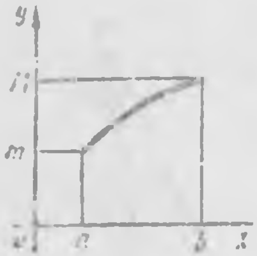
Изоҳ. Критик нуқталарни топишда функция графигини схематик тасвирлаб (19- расм), геометрик характердаги мулоҳазалардан фойдаланиш мумкин.

Кесмада узлуксиз бўлган функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топишга келадиган геометрик мазмунли масалага мисол келтирамиз.

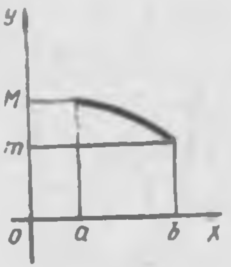
3 мисол. $MABCD$ пирамида асосида тўғри бурчакли $ABCD$ трапеция ётади, унда $AB$ ва $CD$ лар параллел, $ABC$ бурчак тўғри. $MB$ ён қирра асос текислигига перпендикуляр. $M$ уч ва $BC$ қиррада ётувчи ихтиёрий $K$ нуқтадан $AB$ тўғри чизиғига параллел қилиниб кесма ўтказилган. Агар $AB = 2,\ BC = 5,\ CD = 1,\ MB = 2\sqrt{2}$ бўлса, кесманинг энг катта ва энг кичик юзини топинг.

Ечиш. Пирамида кесими $MKN$ тўғри бурчакли учбурчакдан иборат (20- расм). Трапеция баландлиги $DL$ ни ўтказамиз. $DL$ ва $KN$ тўғри чизиқлар кесишиш нуқтасини $P$ билан белгилайлик. $BK = x$ бўлсин. У ҳолда $KC = PD = 5 - x,\ AL = 1,\ PK = 1,\ MK = \sqrt{x^2 + 8}$. $PDN$ ва $LDA$ учбурчакларнинг ўхшашлигидан: $\frac{PN}{AL} = \frac{PD}{LD}$, бундан $PN = \frac{5-x}{5}$ ва $KN = \frac{5-x}{5} + 1 = \frac{10-x}{5}$.

8—2759



21- расм.



22- расм.

$MKN$ кесим юзи $s(x)=\frac{1}{2}\,KM\cdot KN=\frac{1}{10}(10-x)\sqrt{x^2+8}$ га тенг, бунда $0\leqslant x\leqslant 5$. ($x=0$ ва $x=5$ да кесим мос равишда $AMB$ ва $MCD$ учбурчаклардан иборат эканини эслатиб ўтамиз.) Юз учун формулани

$$s(x)=\frac{1}{10}\sqrt{(10-x)^2(x^2+8)},\ 0\leqslant x\leqslant 5,$$

кўринишда қайта ёзамиз. $f(x)=(10-x)^2(x^2+8)$, $0\leqslant x\leqslant 5$, функцияни қарайлик. Унинг $[0;\ 5]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топамиз. $f'(x)=4(x-10)(x^2-5x+4)$, бунда $0\leqslant x<5$; $x=1$ ва $x=4$ да $f'(x)=0$. Энди $f(0)=800$, $f(1)=729$, $f(4)=864$, $f(5)=825$ ни ҳисоблаб топамиз. Шундай қилиб, $f(x)$ функция 4 нуқтада энг катта, 1 нуқтада эса энг кичик қийматга эришади. Шу нуқталарнинг ўзида $s(x)$ функция ҳам энг катта ва энг кичик қийматга эга бўлади. $s(4)=1{,}2\sqrt{6}$, $s(1)=2{,}7$ ни топамиз. Кесимнинг энг катта юзи $1{,}2\sqrt{6}$ га, энг кичик юзи 2,7 га тенг.

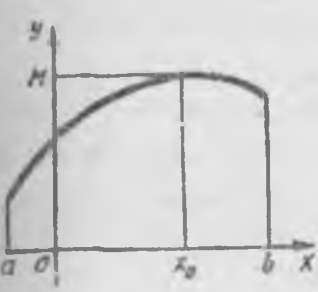
Энг катта (энг кичик) қиймат осонлик билан топиладиган икки хусусий ҳолни кўрсатамиз.

1. Агар функция $[a;\ b]$ кесмада ўсса (камайса), у ҳолда унинг энг катта ва энг кичик қийматларига кесманинг учларида эришилади (21, 22- расмлар). Бу ҳолда $[a;\ b]$ кесмада функциянинг минимумлари ва максимумлари мавжуд бўлмайди, лекин узлуксиз функциянинг энг катта ва энг кичик қиймати албатта мавжуд бўлади.

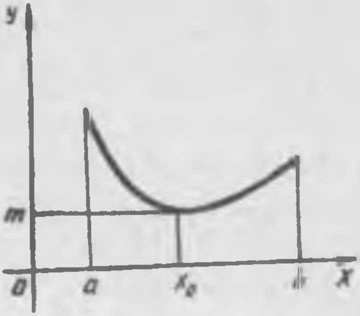
2. Агар $[a;\ b]$ кесмада берилган $f$ функция $[a;\ x_0]$ да ўсса, $[x_0;\ b]$ да камайса (23- расм), у ҳолда функциянинг $[a;\ b]$ кесмадаги энг катта қиймати $f(x_0)$ бўлади. Шундай мулоҳаза энг кичик қиймат учун ҳам ўринли (24- расм).

4- мисол. $f(x)=x\ \ln\ 5-x\ \ln\ x$ функциянинг $\left[\frac{5}{3};\ 2{,}5\right]$ кесмадаги энг катта қийматини топинг.

Ечиш. $f'(x)=\ln 5-\ln x-1=\ln\frac{5}{e}-\ln x$, $x=\frac{5}{e}$ да $f'(x)=0$. Функциянинг кесма учларидаги ва критик нуқтадаги қийматларини солиштириш мураккаб ҳисоблашларга олиб келади. Бунинг



23- расм.



24- расм.

ўрнига функцияни монотонликка текширамиз. $x_0 = \frac{5}{e}$ нуқтада функциянинг узлуксизлигини ва ҳосила $\frac{5}{3} \leqslant x < \frac{5}{e}$ да мусбат, $\frac{5}{e} < x \leqslant$ $\leqslant 2{,}5$ да эса манфий бўлишини эътиборга олиб, функция $\left[\frac{5}{3}; \frac{5}{e}\right]$ ораликда ўсади, $\left[\frac{5}{e}; 2{,}5\right]$ ораликда камаяди деган хулосага келамиз. Бу эса функциянинг $x_0 = \frac{6}{e}$ нуқтадаги қиймати функциянинг берилган кесмадаги қийматлари ичида энг каттаси бўлишини билдиради.

Кесмада узлуксиз бўлган функциянинг энг катта ва энг кичик қийматлари функциянинг шу кесмадаги қийматлари тўплами каби тушунча билан яқиндан боғланганлигини, яъни қуйидаги теорема ўринли эканини таъкидлаймиз.

*$[a; b]$ кесмада узлуксиз бўлган $f$ функциянинг қийматлар тўплами $[m; M]$ кесмадан иборат, бунда* $m = \min\limits_{[a;\, b]} f(x)$, $M = \max\limits_{[a;\, b]} f(x)$.

Масалан, 1- мисолда қаралаётган ораликда функциянинг қийматлар тўплами $[5; 13]$ кесмадан, 2- мисолда $[0; 5]$ кесмадан иборат.

Кўпгина масалалар, шу жумладан геометрик мазмунга эга масалалар (5- мисолга қ.) чекли ёки чексиз очиқ ораликда функциянинг энг катта ёки энг кичик қийматини топишга зарурият уйғотади. Лекин шуни назарда тутиш керакки, очиқ ораликда берилган функция, хатто у узлуксиз бўлганда ҳам, кесмада энг катта ёки энг кичик қийматга, ёки унисига ҳам, бунисига ҳам эга бўлмаслиги мумкин. Масалан, $y = x^2$ функция $(-5; -1)$, $(2; 5)$, $(1; +\infty)$ интервалларда на энг катта, на энг кичик қийматга эга, $(-3; 2)$, $(-\infty; +\infty)$ интервалларда эса энг катта қийматга эга эмас.

Мутлақо равшанки, кесмада берилган функция учун юқорида таърифланган энг катта ва энг кичик қийматларни топиш қоидаси очиқ ораликда берилган функцияга нисбатан қўлланишга эга эмас (бу қийматлардан бирортасининг мавжуд бўлмаслиги ҳам эҳтимолдан холи эмас). Бу ҳолда масалани ечиш учун одатда функция монотонликка текширилади ёки функциянинг четки нуқталар яқинидаги ёки $x \to \pm\infty$ даги ҳолати аниқланади. Баъзан функция графигини схематик тасвирлаш фойдали бўлади.

5-мисол. Мунтазам учбурчакли призма 16 дм$^3$ ҳажмга эга. Энг кичик тўла сиртли призма асосининг томони узунлигини топинг.

Ечиш. Призманинг тўла сирти $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah$ формула бўйича ҳисобланади, бунда $a$ — асос томони, $h$ — призма баландлиги. Масаланинг шарти бўйича призманинг ҳажми 16 дм$^3$ га тенг, яъни $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}h = 16$, бундан $h = \frac{64}{a^2\sqrt{3}}$. У ҳолда

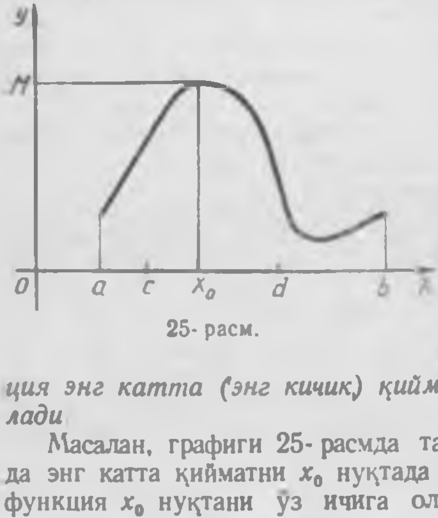
$$S = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(a^2 + \frac{128}{a}\right), \quad a > 0.$$

Масала функциянинг $(0; +\infty)$ оралиқдаги энг кичик қийматини топишга келади.

Функцияни монотонликка текширамиз:

$$S' = \frac{\sqrt{3}(a^3-64)}{a^2}, \quad a > 0.$$

Функция $(0; 4]$ оралиқда камаювчи, $[4; +\infty)$ оралиқда эса ўсувчи бўлгани учун функциянинг $x_0 = 4$ нуқтадаги қиймати унинг $(0; +\infty)$ оралиқдаги барча қийматлари ичида энг кичиги бўлади.



25-расм.

Шундай қилиб, призманинг тўла сирти асоснинг томони 4 дм га тенг бўлганда энг кичик бўлади.

Монотонликка текшириш қийин бўлган ҳолда кўпинча ушбу аёний тасдиқ ёрдам бера олади.

*Агар функция $X$ тўпламда энг катта (энг кичик) қийматни бирор $x_0 \in X$ нуқтада қабул қилса, у ҳолда $X$ тўпламнинг $x_0$ нуқтага эга бўлган исталган $X_1$ қисм-тўпламида ҳам функция энг катта (энг кичик) қийматни ўша $x_0$ нуқтада қабул қилади*

Масалан, графиги 25-расмда тасвирланган функция $[a; b]$ кесмада энг катта қийматни $x_0$ нуқтада қабул қилади. Тушунарликки, бу функция $x_0$ нуқтани ўз ичига олган ва $[a; b]$ ичида жойлашган исталган $[c; d]$ (ёки $(c; d)$) оралиқдаги энг катта қийматни ҳам $x_0$ нуқтада қабул қилади.

6-мисол. $f(x) = x\sin 2x + 0{,}5\cos 2x$ функция берилган. Функциянинг $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ интервалдаги энг кичик қийматини топинг.

**Ечиш.** $f'(x) = 2x \cos 2x$ ҳосилани топамиз. $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ интервалда функциянинг фақат битта $x_0 = \frac{3\pi}{4}$ критик нуқтаси борлигини эътиборга оламиз. $f$ функцияни $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ кесмада қараймиз.

Функциянинг кесма учлари ва критик нуқтадаги қийматини ҳисоблаймиз: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0{,}5$, $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi}{4}$, $f(\pi) = 0{,}5$. Кўрамизки, $f$ функция ўзининг $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ кесмадаги энг кичик қийматига кесманинг ички нуқтаси — $x_0 = \frac{3\pi}{4}$ нуқтада эришади. Демак, функция $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ кесманинг қисм-тўпламидан иборат ва $x_0 = \frac{3\pi}{4}$ нуқтани ўз ичига олган исталган оралиқдаги энг кичик қийматига ўша нуқтада эришади. $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ интервал $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ кесманинг қисм-тўпламидан иборат ва $x_0 = \frac{3\pi}{4}$ нуқта бу интервалга тегишли; демак, функция $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ даги энг кичик қийматига $x_0 = \frac{3\pi}{4}$ нуқтада эришади.

$$\min_{\left(\frac{\pi}{2};\, \pi\right)} f(x) = \min_{\left[\frac{\pi}{2};\, \pi\right]} f(x) = f\left(\frac{3\pi}{3}\right) = -\frac{3\pi}{4}.$$

Энг катта ва энг кичик қийматга доир масалалар орасида ечилиши квадрат учҳадни текширишга келадигани кам эмас. Бу ҳолда ҳосилани қўлланиш билан бирга ҳаммага маълум бўлган тўлиқ квадрат ажратиш усулидан ҳам фойдаланиш мумкин. Шу билан бирга $f(x) = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$ функция экстремал қийматга $x_0 = -\frac{b}{2a}$ да эришади, бунда агар $a > 0$ бўлса, $f(x_0)$ — функциянинг минимал, $a < 0$ да эса у максимал қиймати бўладики, бунга диққат қилиниши керак. Шунингдек, геометрик характердаги мулоҳазалардан фойдаланиб, функция графигини схематик ясаш ҳам мумкин.

**7-мисол.** $f(x) = \cos 2x - 8 \cos x$ функциянинг $[0; 2\pi]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

**Ечиш.** Берилган функцияни $f(x) = 2 \cos^2 x - 8 \cos x - 1$ кўринишда тасвирлаб, $\cos x = t$ алмаштиришни киритамиз. $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ да $-1 \leqslant t \leqslant 1$ бўлгани учун масала $\varphi(t) = 2t^2 - 8t - 1$ квадрат функциянинг $[-1; 1]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топишга келади (26-расм). $t_0 = 2$ критик нуқта $[-1; 1]$ кесмага тегишли эмас. Демак, функция энг катта ва энг кичик қийматларни кесманинг учларида қабул қилади. $\varphi(-1) = 9$, $\varphi(1) = -7$ ни ҳисоблаб, $\cos 2x - 8 \cos x$ функциянинг энг катта ва энг кичик қийматлари мос равишда 9 ва $-7$ га тенглигини топамиз.

26- расм

7- мисолда келтирилган ечиш йўли яна шу билан ибратлики, у ўзгарувчиларни қулай алмаштиришлар ёрдамида ва критик нуқталарни енгиллик билан топишга имкон беришини ҳам кўрсатади. Масалан, $\cos^2 x \sin x$ функциянинг $[0; \pi]$ кесмадаги энг катта (энг кичик) қийматини топиш масаласи $\sin x = t$ алмаштириш ёрдами билан $(1-t^2)t = t - t^3$ функциянинг $[0; 1]$ кесмадаги энг катта (энг кичик) қийматини топишдан иборат, нисбатан содда масалага келтирилиши мумкин. $\log_2^3 x - 6 \log_2^2 x + 9 \log_2 x + 3$ функциянинг $[2; 8]$ кесмадаги энг катта (энг кичик) қийматини топиш эса $\log_2 x = t$ алмаштириш билан $t^3 - 6t^2 + 9t + 2$ функциянинг $[1; 3]$ кесмадаги энг катта (энг кичик) қийматини топишга келтирилади.

8- мисол. $y = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 3$ функциянинг энг кичик қийматини топинг.

Ечиш. Функцияни қуйидагича алмаштирамиз:

$$y = (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) + 3 =$$

$$= (x^2 - 5x + 4)^2 + 2(x^2 - 5x + 4) + 1 + 2 = (x^2 - 5x + 5)^2 + 2.$$

Функциянинг энг кичик қиймати 2 га тенг ва унга $x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$ нуқтада эришилиши равшан.

Энг катта ва энг кичик қийматни топишга доир кўпгина масалаларни ечишда мусбат сонларнинг ўрта арифметиги ва ўрта геометригини боғловчи Коши тенгсизлигини қўллаш мумкин:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ \ldots \ a_n}. \qquad (1)$$

(1) тенгсизликдаги тенглик фақат $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сонлар тенг бўлган ҳолда ўринли бўлиши назарда тутилиши керак. Шунга кўра кўпинча Коши тенгсизлигининг қуйидаги натижаларидан фойдаланиш қулай бўлади:

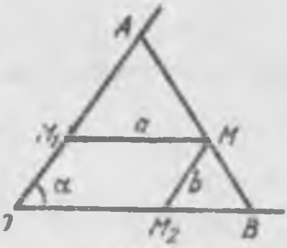
1) $n$ та мусбат катталикнинг берилган (доимий) йиғинди билан кўпайтмаси бу катталикларнинг ҳаммаси тенг бўлган ҳолда энг катта бўлади;

2) $n$ та мусбат катталикнинг берилган (доимий) кўпайтма билан йиғиндиси бу катталикларнинг ҳаммаси тенг бўлган ҳолда энг кичик бўлади.

9- мисол. Тўла сирти берилган барча тўғри бурчакли параллелепипедлар ичида ҳажми энг катта бўладиганини топинг.

Ечиш. $x$, $y$, $z$ — тўғри бурчакли параллелепипед ўлчамлари, $S$ — тўла сирт, $V$ — ҳажм бўлсин.

$S = 2(xy + yz + xz)$, $V = xyz$ бўлиши аён. $xy$, $yz$ ва $zx$ катт ликлар йиғиндиси $\frac{S}{2}$ га тенглигини, яъни доимий эканини кўриб, $xy \cdot yz \cdot xz = V^2$ кўпайтма энг катта қийматни фақат $xy = yz = xz$ бўлганда, яъни $x = y = z$ да қабул қилади, деган хулосага келамиз. Шундай қилиб, изланаётган параллелепипед кубдир.



27- расм.

10- мисол. $\alpha$ бурчак ва унинг ичида $M$ нуқта берилган. Тўғри чизиқни $M$ нуқта орқали қандай ўтказилса, у бурчакдан юзи энг кичик учбурчак ажратади?

Ечиш. $AB$ — берилган $M$ нуқта орқали ўтувчи ихтиёрий тўғри чизиқ бўлсин (27- расм). $OB = x$, $OA = y$ ни белгилаймиз. $M$ нуқта орқали $MM_1 \parallel OB$ ва $MM_2 \parallel OA$ тўғри чизиқларни ўтказамиз. $MM_1 = a$, $MM_2 = b$ ларни белгилайлик. $a$ ва $b$ сонлари берилган (улар ҳақиқатда $M$ нуқтанинг кийшиқ бурчакли координаталаридан иборат). $AM_1M$ ва $AOB$ учбурчакларнинг ўхшашлигига кўра:

$$\frac{a}{x} = \frac{y-b}{y} \text{ ёки } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1. \qquad (1)$$

$AOB$ учбурчакнинг юзи $S = \frac{1}{2} xy \sin \alpha$ формула бўйича ҳисобланади, шунга кўра у энг кичик қийматга $xy$ кўпайтманинг энг кичик қийматида эга бўлади. Ўрта қийматлар ҳақидаги теорема бўйича ((1) ни эътиборга олиб),

$$1 = \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y}\right)^2 > \left(2\sqrt{\frac{a}{x} \cdot \frac{b}{y}}\right)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{xy} \qquad (2)$$

ни ҳосил қиламиз, бундан

$$xy > 4ab. \qquad (3)$$

(2) тенгсизликдаги (демак, (3) тенгсизликдаги ҳам) тенглик фақат $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{1}{2}$ бўлгандагина бажарилади, бундан $x = 2a$, $y = 2b$ ва $M$ нуқта $AB$ нинг ўртаси бўлиши аниқланади. Шундай қилиб, берилган бурчакдан энг кичик юзга эга учбурчак ажратувчи тўғри чизиқ $M$ нуқта орқали шундай ўтказилиши керакки, бу нуқтада $AB$ кесма тенг иккига бўлинсин.

Энг катта ва энг кичик қийматларни ҳисоблашга доир масалаларни ҳар хил усул билан ечиш мумкин. Бундай масалаларни ечишнинг умумий усули дифференциал ҳисоб аппаратининг қўлланилишига асосланади. Лекин ҳосила ёрдами билан ечиш ҳамма вақт ҳам мақбул бўлавермайди. Айрим ҳолларда элементар усуллар билан соддароқ ва кўркам ечиш мумкин. Ўқувчиларга бир масалани ечишнинг турли усулларини кўрсатиш керак. Масалан, 5- мисолда $f(a) = a^2 + \frac{128}{a}$ функциянинг $a > 0$ даги энг кичик қийматини яна ўрта қийматлар ҳақидаги тенгсизлик ёрдами билан ҳам топиш мумкин.

Ҳақиқатан, функцияни $f(a) = a^2 + \frac{64}{a} + \frac{64}{a}$ кўринишда тасвирлаб ва Коши тенгсизлигини қўлланиб,

$$f(a) \geqslant 3\sqrt[3]{a^2 \cdot \frac{64}{a} \cdot \frac{64}{a}} = 48$$

ни оламиз.

Тенглик фақат $a^2 = \frac{64}{a}$ бўлган ҳолда, яъни $a = 4$ да ўринли. Шундай қилиб, функциянинг энг кичик қиймати $f(4) = 48$ га тенг.

Масалалар ечишнинг ҳар хил усулларини қўлланиш ўқувчиларнинг фикрлаш фаолиятини фаоллаштиради, уларда масалалар ечишга ва умуман математикани ўрганишга қизиқиш уйғотади.

11-мисол. $y = \frac{x^4 + 3}{x}$ функциянинг $(0; +\infty)$ интервалдаги энг кичик қийматини топинг.

Ечиш. Функцияни қуйидагича қайта ёзамиз:

$$y = x^3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}.$$

Масала мусбат катталиклар йиғиндисининг энг кичик қийматини топишга келади, бунда уларнинг кўпайтмаси доимий:

$$x^3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = 1.$$

Демак, йиғиндининг энг кичик қийматига барча қўшилувчилар тенг бўлганда, яъни $x^3 = \frac{1}{x}$ да эришилади, бундан $x = 1$. Функциянинг $(0; +\infty)$ интервалдаги энг кичик қиймати 4 га тенг.

12-мисол. Мунтазам тўртбурчакли пирамидада баландлик ва асос томонининг йиғиндиси 3 га тенг. Пирамиданинг мумкин бўлган энг катта ҳажмини топинг.

Ечиш. $x$ — асос томони, $h$ — пирамида баландлиги, $V$ — пирамида ҳажми бўлсин. $V = \frac{1}{3}x^2 h$. Масаланинг шарти бўйича $x + h = 3$. Демак, пирамида ҳажми $V(x) = \frac{1}{3}x^2(3 - x)$; $(0 < x < 3)$ га тенг. $V(x)$ ни қуйидагича ифодалаймиз:

$$V(x) = \frac{1}{6}x^2(6 - 2x);\ 0 < x < 3.$$

$x^2(6 - 2x)$ кўпайтмани учта мусбат кўпайтувчиларнинг $x \cdot x \cdot (6 - 2x)$ кўпайтмаси сифатида қараймиз, бунда уларнинг йиғиндиси доимий. Кўпайтманинг энг катта қийматига фақат $x = 6 - 2x$ бўлган ҳолдагина, яъни $x = 2$ да эришилади. Демак, пирамиданинг энг катта ҳажми $V(2) = \frac{4}{3}$ га тенг.

Тригонометрик функцияларнинг энг катта ва энг кичик қийматларини топишга доир бир неча масалани қараймиз.

**13-мисол.** Функция қийматлари тўпламини топинг:

$$y = a \sin \omega x + b \cos \omega x \, (a^2 + b^2 \neq 0).$$

**Ечиш.** Функцияни

$$y = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \omega x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \omega x\right) \quad (1)$$

кўринишда ёзиб ва $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ бўлишини кўриб, шундай $\alpha$ мавжудки, унинг учун

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \alpha, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \alpha$$

ва функция

$$y = \sqrt{a^2 + b^2} \sin (\omega x + \alpha) \quad (2)$$

кўринишда ёзилиши мумкин, деган хулосага келамиз.

(2) дан функциянинг энг катта қиймати $\sqrt{a^2 + b^2}$ га, энг кичик қиймати $(-\sqrt{a^2 + b^2})$ га тенглиги келиб чиқади. Функциянинг қийматлари тўплами — $[-\sqrt{a^2 + b^2}; \sqrt{a^2 + b^2}]$ кесма.

**14-мисол.** Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматини топинг:

$$y = a \sin^2 x + b \sin x \cos x + a \cos^2 x.$$

**Ечиш.** Функцияни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$y = \frac{\alpha}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{b}{2} \sin 2x + \frac{c}{2}(1 + \cos 2x)$$

ёки

$$y = \frac{b}{2} \sin 2x + \frac{c-a}{2} \cos 2x + \frac{a+c}{3}$$

ва 13-мисол натижасини қўллаб, функциянинг энг катта ва энг кичик қийматлари мос равишда

$$\frac{a + c \pm \sqrt{b^2 + (c-a)^2}}{2}$$

га тенг бўлишини аниқлаймиз.

**15-мисол.** Берилган $c$ гипотенузали тўғри бурчакли учбурчаклар ичидан энг катта радиусли ички чизилган айланага эга бўлганини топинг. Шу радиусни ҳам топинг.

**Ечиш.** $a$ ва $b$ — катетлар, $\alpha$ — ўткир бурчаклардан бири, $r$ — ички чизилган айлана радиуси бўлсин. У ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{c(\sin \alpha + \cos \alpha - 1)}{2}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2};$$

$\sin \alpha + \cos \alpha$ ифоданинг энг катта қиймати $\sqrt{2}$ га тенг ($\alpha = \frac{\pi}{2}$ да) бўлгани учун радиуснинг энг катта қиймати $\frac{c(\sqrt{2}-1)}{2}$ га тенг бўлади.

Шундай қилиб, берилган гипотенузали тўғри бурчакли учбурчаклар ичида тенг ёнли учбурчак энг катта радиусли ички чизилган айланага эга бўлади.

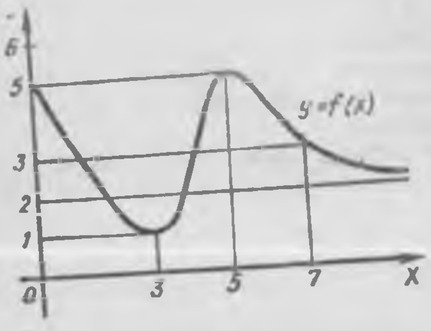
## Қўшимча машқлар

1. Функциянинг кўрсатилган оралиқлардаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг:

а) $y = -4x^2 + 5x - 8$ нинг $[2; 3]$ даги;
б) $y = x^3 + 3x^2 - 2$ нинг 1) $[-2; 2]$; 2) $(-\infty; 0)$ даги;
в) $y = |x - 3|$ нинг 1) $[0; 4]$; 2) $[4; 5]$ даги;
г) $y = x^2 + |x + 2|$ нинг $[-3; -1]$ даги;
д) $y = |x^2 - 6x|$ нинг $[-1; 3]$ даги;
е) $y = 1 - \cos 4x + \cos 2x$ нинг $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ даги;
ж) $y = 5 \sin x + 0{,}5 \sin 2x - 2x$ нинг $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ даги;
з) $y = e^{-2x} \cos 2x$ нинг $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$ даги;
и) $y = \frac{2x+1}{x-2}$ нинг $[-1; 1]$ даги;
к) $y = \frac{3^{x+2} + 2 \cdot 3^{-x-1}}{\ln 3}$ нинг $[-1; 1]$ даги.

2. Ўткир бурчаги 45° ва периметри 4 см бўлган тўғри бурчакли трапеция баландлик узунлигининг қандай қийматида энг катта юзга эга бўлади?

3. Тўғри тўртбурчакнинг икки учи ярим айлана диаметрида, қолган иккитаси эса ярим айланада ётади. Радиуси 5 см бўлган ярим айланага ички чизилган тўғри тўртбурчакнинг энг катта периметрини ҳисобланг.



28- расм.

4. Пирамиданинг асоси бўлиб ўткир бурчаги φ бўлган тўғри бурчакли учбурчак хизмат қилади. Ён қирралар асос текислигига 30° бурчак остида оғган ва $l$ узунликка эга. φ нинг қандай қийматида пирамида ҳажми энг катта бўлади? Шу энг катта ҳажмни ҳисобланг.

5. $ABCD$ квадрат унинг текислигида ётган ва фақат $A$ учдан ўтувчи ўқ атрофида айланади. Ҳосил бўладиган айланма жисмнинг ҳажми энг катта бўлиши учун $AB$ томон ва айланиш ўқи орасидаги бурчак қандай бўлиши керак?

6. Эгри чизиқли трапеция $y = e^x$ эгри чизиқ ва $y = 0$; $x = 0$; $x = 1$ тўғри чизиқлар билан чегараланган. $y = e^x$ $(0 < x < 1)$ эгри чизиқнинг қайси нуқтасидан уринма ўтказилса, у эгри чизиқли трапециядан энг катта юзли одатдаги трапецияни ажратади?

7. 28- расмда $f$ функция графиги тасвирланган. Агар $[5; +\infty]$ оралиқда $f$ функциянинг камайиши ва $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ экани маълум бўлса, функциянинг қуйидаги оралиқлардаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг: а) $[0; 5]$; б) $[3; +\infty)$; в) $(5; 7]$; г) $(5; +\infty)$.

### Қўшимча машқларнинг жавоблари

1. а) $-14$, $-29$; б) 1) 18, $-2$; 2) 2, мавжуд эмас; в) 1) 3,0; 2) 2, 1; г) 10, 2; д) 9, 0; е) $2\frac{1}{8}$, $-1$; ж) 0, $\frac{2\pi}{3} - \frac{11\sqrt{3}}{4}$; з) 1, $-\frac{e^{-0.75\pi}}{\sqrt{2}}$; и) $\frac{1}{3}$; $-3$; к) $\frac{245}{9 \ln 3}$; $\frac{5}{\ln 3}$. 2. $2(\sqrt{2} - 1)$ см. 3. $10\sqrt{5}$ см. 4. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{l^3}{8}$. 5. 45°. 6. $(0{,}5; \sqrt{e})$. 7. а) 5, 1; б) 5, 1; в) энг катта қиймати йўқ, энг кичик қиймати 3; г) энг катта қиймати ҳам, энг кичик қиймати ҳам йўқ.

# ДИДАКТИК МАТЕРИАЛЛАР

## X СИНФ УЧУН МУСТАҚИЛ ВА НАЗОРАТ ИШЛАРИ

### *1- мустақил иш*

**1- вариант** **1- М**

1. $\frac{2}{5+2x} - \frac{2}{5-2x} - \frac{4x^2-45}{4x^2-25} = 0$ тенглама нечта илдизга эга?

2. $10^r = 2$ ни қаноатлантирадиган $r$ рационал сони мавжуд эмаслигини исботланг.

3. $a$ нинг қандай бутун қийматларида

$$4x^2 + ax + 9 = 0$$

тенглама йиғиндиси бутун сон бўлган рационал илдизларга эга бўлади?

**2- вариант** **1- М**

1. $\frac{1}{3+x} - \frac{1}{3-x} = \frac{x^2-15}{x^2-9}$ тенгламани ечинг.

2. $\sqrt{5}$ рационал сон эмаслигини исботланг.

3. $a$ нинг қандай бутун қийматларида

$$ax^2 + 20x + 9 = 0$$

квадрат тенглама йиғиндиси бутун сон бўлган рационал илдизларга эга бўлади?

**3- вариант** **1- М**

1. $\frac{2}{x^2-4} + \frac{x-4}{x^2+2x} = \frac{1}{x^2-5x}$ тенглама битта илдизга эга эканини исботланг.

2. $5^r = 3$ ни қаноатлантирувчи $r$ рационал сони мавжуд эмаслигини исботланг.

3. $a$ нинг қандай натурал қийматларида $9x^2 - 24x - a^2 = 0$ тенгламанинг илдизлари рационал сонлар бўлади?

**4- вариант** **1- М**

1. $\frac{2}{7+2x} - \frac{4x^2-77}{4x^2-49} = \frac{2}{7-2x}$ тенгламанинг барча илдизларини топинг.

2. $\sqrt[3]{2}$ рационал сон эмаслигини исботланг.

3. $a$ нинг қандай бутун қийматларида

$$2x^2 + ax + 8 = 0$$

тенглама рационал илдизларга эга ва уларнинг йиғиндиси бутун сон бўлади?

**5-вариант** **1-М**

1. $\frac{2}{5+x} - \frac{x^2-45}{x^2-25} = \frac{2}{5+x}$ тенглама битта илдизга эга эканини исботланг.

2. $\sqrt[5]{9}$ рационал сон эмаслигини исботланг.

3. $a$ нинг қандай бутун қийматларида

$$ax^2 + 10x + 8 = 0$$

квадрат тенглама рационал илдизларга эга ва уларнинг йиғиндиси бутун сон бўлади?

**6-вариант** **1-М**

1. $\frac{1}{3+2x} - \frac{4x^2-15}{4x^2-9} = \frac{1}{3+2x}$ тенглама нечта илдизга эга?

2. $\sqrt[3]{6}$ рационал сон эмаслигини исботланг.

3. $a$ нинг қандай натурал қийматларида $4x^2 - 6x - a^2 = 0$ тенгламанинг илдизлари рационал сонлар бўлади?

## *2-мустақил иш*

**1-вариант** **2-М**

1. $\sqrt{3}$ ва $\frac{23}{17}$ сонларининг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва бўлинмасини 0,0001 гача аниқлик билан топинг.

2. Ўзаро тенг бўлмаган шундай икки $\alpha$ ва $\beta$ иррационал сонга мисол келтирингки, уларнинг айирмаси рационал сон бўлсин.

3. Агар $\alpha$ ва $\beta$ иррационал сонлар ва $\alpha \neq \beta$ бўлса, у ҳолда уларнинг бўлинмаси ва айирмаси бир вақтда рационал сон бўла олмаслигини исботланг.

4. Тенгсизликларни ечинг:
а) $||x-1|-3| < 2$; б) $x^2 - 2|x| - 15 \geqslant 0$.

**2-вариант** **2-М**

1. $\sqrt{5}$ ва $\frac{43}{31}$ сонларининг йигиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва бўлинмасини 0,0001 гача аниқлик билан топинг.

2. Ўзаро тенг бўлмаган шундай икки $\alpha$ ва $\beta$ ирриционал сонга мисол келтирингки, уларнинг бўлинмаси рационал сон бўлсин.

3. $\alpha$ ва $\beta$, $\alpha \neq \beta$ иррационал сонлари берилган, бунда $\alpha - \beta$ рационал сон. $\alpha + 2\beta$ нинг иррационал сон эканини исботланг. $\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2$ сони рационалми ёки иррационалми?

4. Тенгсизликларни ечинг:

а) $\frac{|x-1|-1}{|x-1|-3} \leqslant 2$; б) $3x^2 - 8|x| + 4 < 0$.

### 3- вариант

2-М

1. $\sqrt{7}$ ва $\frac{40}{31}$ сонларининг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва бўлинмасини 0,0001 гача аниқлик билан топинг.

2. Шундай икки $\alpha$ ва $\beta$ иррационал сонга мисол келтирингки, уларнинг йиғиндиси рационал сон бўлсин.

3. Агар икки $\alpha_1$ ва $\alpha_2$ иррационал сон йиғиндиси ва кўпайтмаси рационал сон бўлса, у ҳолда $\alpha_1$ ва $\alpha_2$ лар $a \pm \sqrt{b}$ кўринишга эга бўлишини исботланг, бунда $a$ ва $b$ рационал сон.

4. Тенгсизликларни ечинг:

а) $||2x-3|-1|>2$; б) $3x^2-5|x|+2 \leqslant 0$.

### 4- вариант

2-М

1. $\sqrt{3}$ ва $\frac{23}{19}$ сонларининг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва бўлинмасини 0,0001 гача аниқлик билан топинг.

2. Шундай икки $\alpha$ ва $\beta$ иррационал сонга мисол келтирингки, уларнинг кўпайтмаси рационал сон бўлсин.

3. $a$, $b$ ва $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ — рационал сонлар. $\sqrt{a}$ ва $\sqrt{b}$ лар рационал сонлар эканини исботланг ($a \neq b$).

4. Тенгсизликларни ечинг:

а) $\frac{1-|x|}{3-|x|}<1$; б) $(2x-1)^2-18|2x-1|+45 \leqslant 0$.

### 5- вариант

2-М

1. $\sqrt{10}$ ва $\frac{53}{41}$ сонларининг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва бўлинмасини 0,0001 гача аниқлик билан топинг.

2. Шундай икки $\alpha$ ва $\beta$ иррационал сонга мисол келтирингки, $\alpha+2\beta$ йиғинди рационал сон бўлсин.

3. $\alpha$ ва $\beta$ — иррационал сонлар, бунда $\alpha+\beta$ рационал сон ва $\alpha \neq -\beta$. У ҳолда $\alpha-2\beta$ иррационал сон бўлишини исботланг. $\alpha^2-\alpha\beta-2\beta^2$ сони рационалми ёки иррационалми?

4. Тенгсизликларни ечинг:

а) $||2x+1|-5| \leqslant 4$; б) $3x^2+8|x|-3>0$.

### 6- вариант

2-М

1. $\sqrt{11}$ ва $\frac{61}{53}$ сонларининг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва бўлинмасини 0,0001 гача аниқликда топинг.

2. Шундай икки $\alpha$ ва $\beta$ иррационал сонга мисол келтирингки, $2\alpha-\beta$ рационал сон бўлсин.

3. $\alpha$ ва $\beta$ — иррационал сонлар, бунда $\alpha-2\beta$ — рационал сон ва $\alpha \neq 2\beta$. У ҳолда $\alpha+3\beta$ иррационал сон бўлишини исботланг. $\alpha^2+\alpha\beta-6\beta^2$ сони рационалми ёки иррационалми?

4. Тенгсизликларни ечинг:

а) $\frac{|3x-2|-2}{|3x-2|-1}<2$; б) $(x-1)^2-2|x-1|-63<0$.

## *1- назорат иши*

### 1- вариант

1-К

1. $A(-2;\ 5)$, $B(2;\ 2)$, $C(10;\ 0)$ нуқталар берилган.

а) $ABC$ учбурчакнинг ўтмас бурчакли эканини исботланг.

б) $AD$ — $ABC$ учбурчакнинг биссектрисаси бўлсин. $D$ нуқтанинг координаталарини топинг.

2. Ҳақиқий соннинг модули таърифига асосланиб, $|x-3|+|2+x| \leqslant 2x+3$ тенгсизликни ечинг.

3°. $2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+5\sqrt{5}$ сони рационал сон эмаслигини исботланг.

### 2- вариант

1-К

1. $K(1;\ 3)$, $M(9;\ 3)$, $P(-7;\ 9)$ нуқталар берилган.

а) $KMP$ учбурчакнинг ўтмас бурчакли эканини исботланг.

б) $KA$ — $KMP$ учбурчакнинг биссектрисаси бўлсин. $A$ нуқтанинг координаталарини топинг.

2. Ҳақиқий соннинг модули таърифига асосланиб, $|x+3|-|2-x| \geqslant 3x-2$ тенгсизликни ечинг.

3°. $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}$ сони рационал сон эмаслигини исботланг.

### 3- вариант

1-К

1. $A(-7;\ 15)$, $B(10;\ 10)$, $C(4;\ 4)$ нуқталар берилган.

а) $ABC$ учбурчакнинг ўтмас бурчакли эканини исботланг.

б) $CM$ — $ABC$ учбурчакнинг биссектрисаси бўлсин. $M$ нуқтанинг координаталарини топинг.

2. Ҳақиқий соннинг модули таърифига асосланиб. $|3-x|+|x+4|<3$ тенгсизликни ечинг.

3°. $3\sqrt{5}+5\sqrt{3}+7\sqrt{2}$ сони рационал сон эмаслигини исботланг.

### 4- вариант

1-К

1. $K(-7;\ -3)$, $M(2;\ 9)$, $H(-13;\ 5)$ нуқталар берилган.

а) $KMH$ учбурчакнинг ўткир бурчакли эканини исботланг.

б) $KB$ — $KMH$ учбурчакнинг биссектрисаси бўлсин. $B$ нуқтанинг координаталарини топинг.

2. Ҳақиқий соннинг модули таърифига асосланиб, $|5-2x|+|x+3| \geqslant 5$ тенгсизликни ечинг.

3°. $\sqrt{5}+\sqrt[3]{2}$ сони рационал сон эмаслигини исботланг.

### 5- вариант

1-К

1. $D(-4:\ -5)$, $E(3;\ 2)$, $K(8;\ -3)$ нуқталар берилган.

а) $DEK$ учбурчакнинг тўғри бурчакли эканини исботланг.

б) $EC$ — $DEK$ учбурчакнинг биссектрисаси. $C$ нуқтанинг координаталарини топинг.

2. Ҳақиқий соннинг модули таърифига асосланиб, $|2x-7|+|x-8| \leqslant 8$ тенгсизликни ечинг.

3°. $3\sqrt{3}-5\sqrt{5}+7\sqrt{7}$ сони рационал сон эмаслигини исботланг.

**6- вариант** 1-К

1. $A(-2;\ -9)$, $B(-7;\ 3)$, $C(-13;\ 5)$ нуқталар берилган.

а) $ABC$ учбурчакнинг ўткир бурчакли эканини исботланг.

б) $BE$ — $ABC$ учбурчакнинг биссектрисаси. $E$ нуқтанинг координаталарини топинг.

2. Ҳақиқий соннинг модули таърифига асосланиб, $|4-2x|-|6x-12|>6$ тенгсизликни ечинг.

3°. $\sqrt[4]{3}+\sqrt{2}$ сони рационал сон эмаслигини исботланг.

## *3- мустақил иш*

**1- вариант** 3-М

1. $a$ нинг қандай қийматларида тенглик тўғри:

$$\left(\frac{3a+1}{6a}+\frac{4}{3a+3}-2\right):\frac{3a+1}{3a+3}-\frac{3a^2-5a+1}{2a}=\frac{2-3a}{2}\ ?$$

2. Айниятни исботланг:

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=(x-y)(y-z)(x-z).$$

3. Агар натурал сон 5 га каррали бўлмаса, у ҳолда шу соннинг квадрати 5 га бўлинганда 2 га тенг қолдиқ қолмаслигини исботланг.

**2- вариант** 3-М

1. $a$ нинг қандай қийматларида

$$\frac{a+6}{a^2-6a}\cdot\left(6a-a^2+\frac{a-6}{9a+54}\right)-\frac{1-54a}{9a}=-a$$

тенглик тўғри?

2. $(xy+xz+yz)(x+y+z)-xyz$ ни кўпайтувчиларга ажратинг.

3. Агар сон 7 га каррали бўлмаса, у ҳолда шу соннинг квадрати 7 га бўлинганда 3 га тенг қолдиқ қолмаслигини исботланг.

**3- вариант** 3-М

1. $a$ нинг қандай қийматларида

$$\left(\frac{3a+4}{6a+6}-\frac{4}{3a+6}-2\right):\frac{3a+4}{3a+6}-\frac{3a^2+a-1}{2a+2}=-\frac{3a+1}{2}$$

тенглик тўғри?

2. $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)=(x-y)(y-z)(z-x)$ айниятни исботланг.

3. Агар сон 6 га каррали бўлмаса, у ҳолда шу соннинг квадрати 6 га бўлинганда 2 га тенг бўлган қолдиқ қолмаслигини исботланг.

**4- вариант** 3-М

1. $a$ нинг қандай қийматларида

$$\frac{a+9}{a^2-9}\cdot\left(\frac{a-3}{9a+81}+9-a^2\right)+\frac{161+54a}{9a+27}+a=-3$$

тенглик тўғри?

2. $x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz$ ни кўпайтувчиларга ажратинг.

3. Агар сон 5 га каррали бўлмаса, у ҳолда шу соннинг квадрати 3 га бўлинганда 3 га тенг қолдиқ қолмаслигини исботланг.

**5- вариант** 3-М

1. $a$ нинг қандай қийматларида

$$\left(\frac{3a-2}{6a-6}+\frac{4}{3a}-2\right)\cdot\frac{3a}{3a-2}-\frac{3a^2-11a+9}{2a-2}+\frac{3a-3}{2}=1$$

тенглик тўғри?

2. $x(y+z)(y^2-z^2)+y(z+x)(z^2-x^2)+z(x+y)(x^2-y^2)=(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$ айниятни исботланг.

3. Агар сон 7 га каррали бўлмаса, у ҳолда шу соннинг квадрати 7 га бўлинганда 5 га тенг қолдиқ қолмаслигини исботланг.

**6- вариант** 3-М

1. $a$ нинг қандай қийматларида

$$\left(\frac{a-8}{9(a+4)}-a^2+10a-16\right):\frac{a^2-10a+16}{a+4}+\frac{54a-109}{9a-18}+a=2$$

тенглик тўғри?

2. $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$ ни кўпайтувчиларга ажратинг.

3. Агар сон 6 га каррали бўлмаса, у ҳолда шу соннинг квадрати 6 га бўлинганда 5 га тенг қолдиқ қолмаслигини исботланг.

## *2-назорат иши*

**1- вариант** 2-К

1. Математик индукция усули билан

$$\frac{1}{3\cdot5}+\frac{6}{5\cdot7}+\frac{20}{7\cdot9}+\ldots+\frac{2n-1}{(2n+1)(2n+3)}\cdot2^{n-1}=$$
$$=\frac{2^n}{2n+3}-\frac{1}{3}$$

бўлишини исботланг.

2. $n$ нинг барча натурал қийматларида $7^n+3^{n+1}$ нинг 4 га бўлинишини исботланг.

3. $k$ нинг қандай қийматларида $kx^2-6kx+2k+3$ учҳад илдизлари кубларининг йиғиндиси 72 га тенг бўлади?

4°. $(x_n)$ кетма-кетлик рекуррент берилган: $x_1 = 3$, $x_2 = 6$, $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = -1$, $n \in N$. Исботланг: $x_n = 2^n + n$, $n \in N$.

**2-вариант** 2-Қ

1. Математик индукция усули билан исботланг:

$$2 + 18 + 60 + \ldots + n(n+1)(2n-1) =$$
$$= \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)(3n-1).$$

2. $n$ нинг исталган натурал қийматида $7 \cdot 5^{2n-1} + 2^{3n+1}$ нинг 17 га бўлинишини исботланг.

3. $b$ нинг қандай қийматларида $bx^2 + (b+2)x - 4b$ учҳад илдизлари квадратларининг йиғиндиси $10\frac{7}{9}$ га тенг бўлади?

4°. $n \in N$, $n \geqslant 5$ да $2^n \geqslant n^2 + n + 2$ тенгсизликнинг тўғри бўлишини исботланг.

**3-вариант** 2-Қ

1. Математик индукция усули билан исботланг:

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \ldots + \frac{2n-1}{3^n} = 1 - \frac{n+1}{3^n}.$$

2. $n \in N$ да $10^n - 9n - 1$ нинг 81 га бўлинишини исботланг.

3. $k$ нинг қандай қийматларида $kx^2 + 2(k+1)x - 12$ учҳад илдизлари айирмасининг модули 8 га тенг бўлади?

4°. Агар $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$, $n \in N$ бўлса, у ҳолда $a_n = 3^n - 1$, $n \in N$ бўлишини исботланг.

**4-вариант** 2-К

1. Математик индукция усули билан исботланг:

$$4 + 60 + \ldots + (n+1)(3n-1) \cdot 4^{n-1} = n^2 \cdot 4^n.$$

2. $n$ нинг исталган натурал қийматида $6^{n+1} + 7^{2n-1}$ нинг 43 га бўлинишини исботланг.

3. $a$ нинг қандай қийматларида $(a-1)x^2 + ax - 3(a-1)$ учҳад илдизлари квадратларининг йиғиндиси 10 га тенг бўлади?

4°. $n \in N$, $n \geqslant 4$ да $3^n > 5n^2$ тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

**5-вариант** 2-К

1. Математик индукция усули билан исботланг:

$$\frac{1 \cdot 8}{4 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 11}{7 \cdot 10} + \ldots + \frac{n(3n+5)}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{n(n+1)}{3n+4}.$$

2. $n$ нинг исталган натурал қиймати учун ушбу тасдиқнинг тўғри эканини исботланг: $3^{2n} - 8n - 1$ сони 16 га каррали.

3. $a$ нинг қандай қийматларида $(a+1)x^2+(a+3)x-4a-4$ учҳад илдизлари квадратлари айирмасининг модули 15 га тенг бўлишини исботланг.

4°. Агар $a_1=1$, $a_2=5$, $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$, $n\in N$ бўлса, у ҳолда $a_n=3^n-2^n$, $n\in N$ бўлишини исботланг.

**6- вариант** **2-К**

1. Математик индукция усули билан исботланг:

$$3\cdot2+4\cdot2^2+5\cdot2^3+\ldots+(n+2)2^n=(n+1)2^{n+1}-2.$$

2. $n$ нинг исталган натурал қийматида ушбу тасдиқ тўғрилигини исботланг: $5\cdot9^{n-1}+2^{4n-3}$ сони 7 га каррали.

3. $k$ нинг қандай қийматларида $2kx^2-(k+1)x-4k$ учҳад илдизлари кубларининг йиғиндиси 7 га тенг бўлишини исботланг.

4°. $n\in N$, $n\geqslant 6$ да $2^n>n(n+4)$ тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

## *4- мустақил иш*

**1- вариант** **4- М**

1. $x^3-3x+2$ ни $x-2$ га қолдиқли бўлинг.

2. $P(x)$ кўпҳад $x-1$ га бўлинганда қолдиқда 3 ни, $x-2$ га бўлинганда эса қолдиқда 5 ни беради. $P(x)$ кўпҳадни $x^2-3x+2$ га бўлишдан чиқадиган қолдиқни топинг.

3. $a$ нинг барча шундай қийматларини топингки, уларда

$$\sqrt{x^4+ax^3+15x^2-18x+9}$$

ифода $x$ га нисбатан иккинчи даражали кўпҳад бўлсин.

**2- вариант** **4-М**

1. $x^5+2$ ни $x-1$ га қолдиқли бўлишни бажаринг.

2. $P(x)$ кўпҳад $x-1$, $x+1$, $x-2$ га бўлинганда қолдиқда мос тартибда 4, 2, 8 ни беради. $P(x)$ кўпҳадни $x^3-2x^2-x+2$ га бўлишдан чиқадиган қолдиқни топинг.

3. $x^3+5$ кўпҳад бутун коэффициентли келтирилган квадрат учҳадга булинмаслигини исботланг.

**3- вариант** **4-М**

1. $x^6-2$ ни $x^2-x+1$ га қолдиқли бўлинг.

2. $P(x)$ кўпҳад $x-1$ га қолдиқсиз бўлинади, $x+2$ га бўлинганда эса қолдиқда 3 қолади. $P(x)$ кўпҳадни $x^2+x-2$ га бўлишдан чиқадиган қолдиқни топинг.

3. $a$ ва $b$ нинг барча шундай қийматларини топингки, уларда

$$x^4-a^2x^3+74x^2+bx+25$$

кўпҳад $x$ га нисбатан иккинчи даражали бутун коэффициентли кўпҳаднинг квадрати бўлсин.

### 4- вариант 4-М

1. $x^4 - 3x^2 + 1$ ни $x - 2$ га қолдиқли бўлинг.

2. $P(x)$ кўпҳад $x - a$ га ва $x - b (a \neq b)$ га қолдиқсиз бўлинади. $P(x)$ нинг $(x - a)(x - b)$ га қолдиқсиз бўлинишини исботланг.

3. Агар $n$ 3 га каррали, $n \in N$ бўлса, у ҳолда $x^n - 1$ нинг $x^2 + x + 1$ га қолдиқсиз бўлинишини исботланг.

### 5- вариант 4-М

1 $x^4 + x + 1$ ни $x^2 + 1$ га қолдиқли бўлинг.

2. $P(x)$ кўпҳад $x - 2$ га бўлинганда қолдиқда 5 қолади, $x + 5$ га бўлинганда эса қолдиқда $-2$ қолади. $P(x)$ кўпҳадни $x^2 + 3x - 10$ га бўлишдан чиқадиган қолдиқни топинг.

3. $9x^4 - 6x^3 + ax^2 - 4x + 4$ кўпҳадни учҳаднинг квадрати кўринишида тасвирланг. Бу $a$ нинг қандай қийматларида мумкин?

### 6- вариант 4-М

1. $x^6 - 1$ ни $x^2 + 2$ га қолдиқли бўлинг.

2. $P(x)$ кўпҳад $x - 1$ ва $x + 1$ га қолдиқсиз бўлинади, $x + 3$ га бўлинганда эса қолдиқда 8 қолади. $P(x)$ ни $x^3 + 3x^2 - x - 3$ га бўлишдан чиқадиган қолдиқни топинг.

3. $a$ нинг ҳеч қандай қийматида $x^6 + x^3 + a$ кўпҳад $x^3 + x + a$ кўпҳадга бўлинмаслигини исботланг.

## 3-назорат иши

### 1- вариант 3-К

1. $a$ ва $b$ нинг қандай қийматларида $2x^4 + 3x^3 - ax^2 + bx - 3$ кўпхад $x + 3$ га қолдиқсиз бўлинади, $x - 2$ бўлинганда эса қолдиқда 5 қолади?

2. $x^4 - 27x^2 - 14x + 120$ кўпҳаднинг бутун илдизларини топинг.

3. 48 соннинг биттага оширилган тоқ даражаси 7 га каррали бўлишини исботланг.

4 Аниқмас коэффициентлар усули билан $x^4 - 10x^3 + 27x^2 - 14x + 2$ кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратинг.

5°. $x^{12} - 3x^6 + 1$ кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратинг.

### 2- вариант 3-К

1. $m$ ва $n$ нинг қандай қийматларида $x^3 + mx + n$ кўпҳад $x^2 + 3x + 10$ учҳадга қолдиқсиз бўлинади?

2. $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 38x - 24$ кўпҳадни чизиқли кўпайтувчиларга ажратинг.

3. 57 соннинг биттага камайтирилган жуфт натурал даражаси 203 га каррали бўлишини исботланг.

4. Аниқмас коэффициентлар усули билан $x^4 - 12x^3 + 43x^2 - 42x + 6$ кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратинг.

5°. $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$ кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратинг.

### 3- вариант

3-К

1. $m$ ва $n$ нинг қандай қийматларида $3x^4 - 2x^3 + mx + n$ кўпҳад $x - 2$ га қолдиқсиз бўлинади, $x - 1$ га бўлинганда эса $(-14)$ га тенг қолдиқ қолади?

2. $x^4 + 10x^3 + 37x^2 + 60x + 36$ кўпҳадни чизиқли кўпайтувчиларга ажратинг.

3. 43 сонининг биттага камайтирилган жуфт натурал даражаси 77 каррали бўлишини исботланг.

4. Аниқмас коэффициентлар усули билан $x^4 + x^3 - 5x^2 + 13x - 6$ кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратинг.

5°. $a^{16} + a^8 + 1$ кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратинг.

### 4- вариант

3-Қ

1. $a$ ва $b$ нинг қандай қийматларида $2x^4 + ax^3 + bx - 2$ кўпҳад $x^2 - x - 2$ учҳадга қолдиқсиз бўлинади?

2. $x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8$ кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратинг.

3. 17 сонининг биттага оширилган ток натурал даражаси 9 га каррали бўлишини исботланг.

4. Аниқмас коэффициентлар усули билан $x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 13x - 2$ кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратинг.

5°. $(x^2 - 6x + 3)(x^2 - 6x + 5) - 15$ кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратинг.

### 5- вариант

3-Қ

1. $a$ ва $b$ нинг қандрй қийматларида $3x^4 - 2x^3 + 14x^2 + ax + b$ кўпҳад $(x + 2)$ га бўлинганда 101 га тенг қолдиқ қолади, $(x + 1)$ га эса қолдиқсиз бўлинади?

2. $x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 22x - 24$ кўпҳаднинг бутун илдизларини топинг.

3. 19 сонининг биттага камайтирилган жуфт даражаси 36 га каррали бўлишини исботланг.

4. Аниқмас коэффициентлар усули билан $x^4 - x^3 - 67x^2 - 11x + 6$ кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратинг.

5°. $x^8 + 4x^4 + 16$ кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратинг.

### 6- вариант

3-К

1. $k$ ва $p$ нинг қандай қийматларида $x^4 - px^2 + kx - 12$ кўпҳад $x^2 - 2x - 3$ кўпҳадга бўлинади?

2. $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 46x + 120$ кўпҳадни чизиқли кўпайтувчиларга ажратинг.

3. 21 сонининг битта оширилган тоқ даражаси 11 га каррали бўлишини исботланг.

4. Аниқмас коэффициентлар усули билан $x^4 + 6x^3 - 21x^2 + 78x - 16$ кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратинг.

5°. $(x^2 - 5x + 3)(x^2 - 5x - 5) - 9$ кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратинг.

## *5- мустақил иш*

**1- вариант** 5-М

1. $3x^3 - 5x^2 + 3x - 5 = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизларини топинг.

2. $2x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 9x + 6 = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизларини топинг.

3. $(x + 1)(x - 2)(x + 3)(x - 4) = 144$ тенгламани ечинг.

**2- вариант** 5-М

1. $4x^5 + 8x^4 + 5x^3 + 10x^2 - 3x - 6 = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизларини топинг.

2. $2x^4 - 5x^3 - x^2 + 5x + 2 = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизларини топинг.

3. $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 6$ тенгламани ечинг.

**3- вариант** 5-М

1. $3x^5 - 6x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 3x + 6 = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизларини топинг.

2. $5x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 3x + 5 = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизларини топинг.

3. $(x - 3)(x + 2)(x - 6)(x - 1) + 56 = 0$ тенгламани ечинг.

**4- вариант** 5-М

1. $2x^5 + 4x^4 - 5x^3 - 10x^2 - 7x - 14 = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизларини топинг.

2. $4x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 3x + 4 = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизларини топинг.

3. $(x + 2)(x - 3)(x + 4) = 126$ тенгламани ечинг.

**5- вариант** 5-М

1. $3x^5 - 6x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 16x + 32 = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизларини топинг.

2. $3x^4 - 4x^3 - 7x^3 + 4x + 4 = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизларини топинг.

3. $(x + 3)(x - 2)(x - 6)(x + 7) = - 180$ тенгламани ечинг.

**6- вариант** 5-М

1. $2x^5 + 6x^4 - 7x^3 - 21x^2 - 4x - 12 = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизларини топинг.

2. $2x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 7x + 3 = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизларини топинг.

3. $(x + 6)(x - 7)(x + 2)(x - 3) + 180 = 0$ тенгламани ечинг.

## *4- назорат иши*

**1- вариант** **4-К**

1. Агар $x$ нинг $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар аниқланган барча қийматларида $A(x) > 0$ бўлса, у ҳолда $f(x) < \varphi(x)$ ва $f(x)A(x) < \varphi(x \times \times A(x)$ тенгсизликлар тенг кучли бўлишини исботланг.

2. $a > 0$ да $(a + 3)(a + 6)(a + 2)(a + 1) > 96a^2$ тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

3. Тенгсизликни ечинг:

$$\frac{(x^3 + 3x - 18)(4x^2 - 4x + 1)}{(x^2 - 5x + 6)(3x^2 - 8x + 14)} < 0.$$

4. Тенгламани ечинг.

$$\frac{2}{x - 3} - \frac{3x}{2 - 2x} = \frac{3}{x^2 - 1}.$$

5°. $x$ ва $y$ нинг исталган ҳақиқий қийматларида $x^2 + 10y^2 - 6xy + + 10x - 26y + 30 > 0$ тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

**2- вариант** **4- К**

1. Агар $x$ нинг $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар аниқланган барча қийматларида $A(x)$ функция аниқланган бўлса, у ҳолда $f(x) > \varphi(x)$ ва $f(x) + A(x) > \varphi(x) + A(x)$ тенгсизликлар тенг кучли бўлишини исботланг.

2. $a > 0$ қийматларда

$$\frac{(a^2 + 3a + 1)(a^4 - a^2 + 1)}{a^3} \geqslant 5$$

тенгсизлик бажарилишини исботланг. $a$ нинг қандай қийматларида тенглик ўринли бўлади?

3. Тенгсизликни ечинг:

$$\frac{(3x^2 - 5x + 2)(x^2 - 4x + 4)}{7 - 6x - x^2} < 0.$$

4. Тенгламани ечинг:

$$\frac{4}{x^2 - 1} + \frac{1}{x - 2} = \frac{2x}{x + 1}$$

5°. $x$ ва $y$ нинг исталган ҳақиқий қийматларида $x^2 + y^2 + xy + + x - y + 3 > 0$ тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

**3- вариант** **4-К**

1. Агар $x$ нинг $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар аниқланган барча қийматлари учун $A(x) < 0$ бўлса, у ҳолда $f(x) < \varphi(x)$ ва $f(x)A(x) > > \varphi(x)A(x)$ тенгсизликлар тенг кучли бўлишини исботланг.

2. $n > 0$ да $(5 + n)(n + 4)(n + 8)(n + 2) > 128n^2\sqrt{5}$ тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

3. Тенгсизликни ечинг:

$$\frac{(x^2-5x-6)(5x^2+2x+2)}{(9x^2-6x+1)(-3x^2+x+2)}<0.$$

4. Тенгламани ечинг:

$$\frac{2x}{3(x-1)}+\frac{4}{4-x^2}=\frac{1}{x+2}.$$

5°. $\sqrt{2}$ сони $x^3-(a+2)x^2+bx-2a=0$ ($a$ ва $b$ — бутун) тенгламанинг илдизи экани маълум. $a$ ва $b$ нинг қийматларини ва тенгламанинг қолган илдизларини топинг.

**4-вариант** **4-К**

1. Агар $x$ нинг барча қийматларида $f(x)>0$ ва $\varphi(x)>0$ бўлса, у ҳолда $f(x)<\varphi(x)$ ва $f^2(x)<\varphi^2(x)$ тенгсизликлар тенг кучли бўлишини исботланг.

2. $a>2$ да $a^3-4a^2+6a-4>0$ тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

3. Тенгсизликни ечинг:

$$-\frac{4x^2-5x-6}{(5-x^2-4x)(4x^2-4x+1)}>0.$$

4. Тенгламани ечинг:

$$\frac{12}{x^2-9}+\frac{x}{x+1}=\frac{2}{x-3}.$$

5°. $x$ ва $y$ нинг исталган ҳақиқий қийматларида $2x^2+9y^2-6xy+6xy+3>0$ тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

**5-вариант** **4-К**

1. Агар $x$ нинг $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар аниқланган барча қийматлари учун $A(x)$ функция аниқланган бўлса, у ҳолда $f(x)\leqslant\varphi(x)$ ва $f(x)+A(x)\leqslant\varphi(x)+A(x)$ тенгсизликлар тенг кучли бўлишини исботланг.

2. Агар $a>0{,}8$ бўлса, у ҳолда $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2a-1}+\frac{1}{5a-4}\right)(8a-5)\geqslant 9$ тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг. Тенглик $a$ нинг қандай қийматларида ўринли?

3. Тенгсизликни ечинг:

$$\frac{(x^2-4x-5)(9x^2-6x+1)}{(x^2-2x-15)(5x^2-x+4)}>0.$$

4. Тенгламани ечинг:

$$\frac{12}{4-x^2}=\frac{2x}{x+1}-\frac{3}{x-2}.$$

5°. $x$ ва $y$ нинг исталган ҳақиқий қийматида $4x^2+26y^2-20xy-12x+34y+14>0$ тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

**6- вариант** **4-К**

1. Агар $x$ нинг $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар аниқланган барча қийматлари учун $A(x) > 0$ бўлса, у ҳолда $f(x) > \varphi(x)$ ва $f(x)A(x) > \varphi(x)A(x)$ тенгсизликлар тенг кучли бўлишини исботланг.

2. $a$ нинг барча ҳақиқий қийматларида $4a^4 - 12a^3 + 13a^2 - 6a + 1 \geqslant 0$ тенгсизликнинг бажарилишини исботланг. Тенглик $a$ нинг қандай қийматларида ўринли?

3. Тенгсизликни ечинг:

$$\frac{(x^2 - 5x - 6)(3x^2 + 2x + 1)}{(3x^2 - 12x + 12)(x^2 + x + 8)} < 0.$$

4. Тенгламани ечинг:

$$\frac{6}{x^2 - 9} + \frac{x}{x - 1} = \frac{1}{x - 3}.$$

5°. $1 + \sqrt{2}$ сони $x^3 + ax^2 + bx + a + 2 = 0$ ($a$ ва $b$ — бутун) тенгламанинг илдизи экани маълум. $a$ ва $b$ нинг қийматларини ва тенгламанинг бошқа илдизларини топинг.

## *6- мустақил иш*

**1- вариант** **6- М**

1. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ функция берилган. $f\left(\frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a - 1}\right)$ ни топинг.

2. $y = \frac{3x^2 + 3x - 6}{x^2 - 1}$ функциянинг графигини схематик тасвирланг.

3. $A(3;\ 5)$ ва $B(1;\ -2)$ нуқталар орқали ўтадиган тўғри чизиқнинг ва унга параллел бўлиб, $C(1;\ -1)$ нуқта орқали ўтадиган тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзинг. Бу тўғри чизиқларнинг координаталар ўқлари билан кесишишидан ҳосил бўладиган учбурчаклар юзларининг нисбатини топинг.

**2-вариант** **6-М**

1. $f(x) = \frac{1 - 2x^2}{1 + 2x^2}$ функция берилган. $f\left(\sqrt{\frac{1 - b}{2b + 2}}\right)$ ни топинг.

2. $y = \frac{20 + 6x - 2x^2}{x^2 - x - 6}$ функциянинг графигини схематик тасвирланг.

3. $C(-2;\ 1)$ нуқта орқали ўтадиган тўғри чизиқ $A(-2;\ -6)$ ва $B(7;\ 3)$ нуқталар орқали ўтадиган тўғри чизиққа параллел.

а) Шу тўғри чизиқлар тенгламасини ёзинг.

б) Тўғри чизиқларнинг координата ўқлари билан кесишишидан ҳосил бўладиган учбурчаклар периметрларининг нисбатини топинг.

**3- вариант** **6- М**

1. $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1}$ функция берилган. $f\left(\frac{\sqrt{1 - c^2}}{2(1 - c)}\right)$ ни топинг.

2. $y=\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$ функциянинг графигини схематик тасвирланг.

3. $M(1;\ 2)$ ва $H(0;\ 5)$ нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг ва унга параллел бўлиб, $P(-3;\ -2)$ нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзинг. Бу тўғри чизиқларнинг координата ўқлари билан кесишишидан ҳосил бўладиган учбурчаклар юзларининг нисбатини топинг.

**4- вариант** **6-М**

1. $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ функция берилган. $f\left(\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\right)$ ни топинг.

2. $y=\frac{4x^2+x-5}{2x^2-x-1}$ функциянинг графигини схематик тасвирланг.

3. $M(-3;\ -4)$ нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ $P(2;\ 0)$ ва $K(0{,}5;\ -1)$ нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиққа параллел.

а) Бу тўғри чизиқлар тенгламаларини ёзинг.

б) Бу тўғри чизиқларнинг координата ўқлари билан кесишишидан ҳосил бўлган учбурчаклар периметрлари нисбатини топинг.

**5- вариант** **6-М**

1. $f(x)=\frac{3x^2-1}{3x^2+1}$ функция берилган. $f\left(\sqrt{\frac{c+1}{3(1-c)}}\right)$ ни топинг.

2. $y=\frac{6x^2+6x}{x^2-1}$ функциянинг графигини схематик тасвирланг.

3. $C$ нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ $A(5;\ 2)$ ва $B(-1;\ -2)$ нуқталар устидан ўтувчи тўғри чизиққа параллел.

а) Агар $C$ $2x+y=-7$ ва $x+2y=-8$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси бўлса, $C$ нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

б) $AB$ тўғри чизиқ ва $C$ нуқта орқали унга параллел равишда ўтувчи тўғри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишишидан ҳосил бўлган учбурчакларнинг юзлари нисбатини топинг.

**6- вариант** **6-М**

1. $f(x)=\frac{x^2-3}{x^2+3}$ функция берилган. $f\left(\sqrt{\frac{3(y+1)}{1-y}}\right)$ ни топинг.

2. $y=\frac{4x-8}{x^2+2x-8}$ функциянинг графигини схематик тасвирланг.

3. $x=1$ ва $3x-y=7$ тўғри чизиқларнинг $A$ кесишиш нуқтаси орқали тўғри чизиқ ўтказилган бўлиб, у $C(1,\ -1)$ ва $D(5;\ 5)$ нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиққа параллел.

а) Шу тўғри чизиқларнинг тенгламасини ёзинг.

б) Шу тўғри чизиқларнинг координата ўқлари билан кесишишидан ҳосил бўлган учбурчаклар периметрларининг нисбатини топинг.

## *5- назорат иши*

**1- вариант** **5-К**

1. Иккита тоқ функциянинг кўпайтмаси уларнинг умумий аниқланиш соҳасида жуфт функция бўлишини исботланг.

2. $y = \frac{8}{x^2 - 6x + 13}$ функция берилган.

а) Функциянинг энг катта қийматини топинг.

б) $[3; +\infty)$ оралиқда функциянинг камайишини исботланг.

3. $f(x) = |x - 2| + 3|x| + \sqrt{x^2 + 4x + 4}$ функцияни тоқлик ва жуфтликка текширинг.

4. $f(x) = 2x^2 - 1$ ва $\varphi(x) = \sqrt{3x - 1}$ функциялар берилган. $f(\varphi(x))$; $\varphi(f(x))$ ларни топинг.

5°. Функциянинг энг катта қийматини топинг:

$$y = 2x - \sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{4x^2 + 20x + 25}.$$

**2- вариант** **5-К**

1. Агар $f(x)$ функция $X$ тўпламда камайса ва $k > 0$ бўлса, у ҳолда $k \cdot f(x)$ функция ҳам $X$ тўпламда камайишини исботланг.

2. $y + \frac{13}{x^2 + 2x + 3}$ функция берилган.

а) Функциянинг энг катта қийматини топинг.

б) Функциянинг $(\infty; -1]$ оралиқда ўсишини исботланг.

3. $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 1)(x + 2)^6 - (x^3 + 3x^2 - 1)(x - 2)^6$ функцияни жуфтлик ва тоқликка текширинг.

4. $f(x) = (x - 2)^2$ ва $\varphi(x) = \sqrt{x}$ функциялар берилган. $f(\varphi(x))$ ва $\varphi(f(x)$ ларни топинг.

5°. $y = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} - 2x$ функциянинг энг кичик қийматини топинг.

**3- вариант** **5-К**

1. Жуфт функциянинг тоқ функцияга кўпайтмаси уларнинг умумий аниқланиш соҳасида тоқ функция бўлишини исботланг.

2. $y = \frac{9}{3x^2 + 6x + 7}$ функция берилган.

а) Функциянинг энг катта қийматини топинг.

б) Функциянинг $(-\infty; -1]$ оралиқда ўсишини исботланг.

3. $f(x) = \frac{(2x - 3)\cdot(x + 4)}{(x + 1)(3x - 1)} + \frac{(2x + 3)\cdot|x - 4|}{(x - 1)(3x + 1)}$ функцияни жуфтлик ва тоқликка текширинг.

4. Агар $f(x) = 4x^4 - 4x^2$, $\varphi(x) = \sqrt{x + 1}$ бўлса, $f(\varphi(x))$ ва $\varphi(f(x))$ ни топинг.

5°. $y = 2x - \sqrt{x^2 - 10x + 25} - \sqrt{4x^2 + 12x + 9}$ функциянинг энг катта қийматини топинг.

## 4- вариант

5-К

1. Агар $y = f(x)$ функция $X$ тўпламда ўсса ва $a < 0$ бўлса, у ҳолда $y = af(x)$ функциянинг $X$ тўпламда камайишини исботланг.

2. $y = \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 9}$ функцияни жуфт ва тоқ функциялар йиғиндиси кўринишида тасвирланг.

3. $y = -2x^4 + 3x^2 - 6$ функциянинг энг катта қийматини топинг ва функция $\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ интервалда ўсишини исботланг.

4. Агар $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $\varphi(x) = 3x^2 - 1$ бўлса, $f(\varphi(x))$, $\varphi(f(x))$ ларни топинг.

5°. $y = \sqrt{x^2 - 14x + 49} - \sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2}$ функциянинг энг кичик қийматини топинг.

## 5- вариант

5-К

1. Агар $f(x)$ функция $X$ тўпламда камайса ва $k < 0$ бўлса, у ҳолда $kf(x)$ функциянинг $X$ тўпламда ўсишини исботланг.

2. $y = \frac{11}{x^2 - 6x + 11}$ функция берилган.

а) Функциянинг энг катта қийматини топинг.

б) Функциянинг $[3; +\infty)$ оралиқда камайишини исботланг.

3. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 4x + 1} + \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 - 4x - 1}$ функцияни жуфтлик ва тоқликка текширинг.

4. $f(x) = 1 - 3x^2$ ва $\varphi(x) = \sqrt{1 - 2x}$ функциялар берилган. $f(\varphi(x))$, $\varphi(f(x))$ ларни топинг.

5°. $y = 3x - \sqrt{9x^2 - 6x + 1} - \sqrt{4x^2 - 12x + 9}$ функциянинг энг катта қийматини топинг.

## 6- вариант

5-К

1. Икки тоқ функциянинг йиғиндиси уларнинг умумий аниқланиш соҳасида тоқ функция бўлишини исботланг.

2. $y = \frac{8}{2x - x^2 - 3}$ функция берилган.

а) Функциянинг энг кичик қийматини топинг.

б) Функциянинг $(-\infty; 1]$ оралиқда камайишини исботланг.

3. $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(3x - 2)(x + 1)} \cdot |2x - 1| - \frac{x^3 + 2x^2}{(3x + 2)(x - 1)} \cdot |2x + 1|$ функцияни жуфтлик ва тоқликка текширинг.

4. $f(x) = 3x^4 - 2x^2$ ва $\varphi(x) = \sqrt{3x + 1}$ функциялар берилган. $f(\varphi(x))$ ва $\varphi(f(x))$ ларни топинг.

5°. $y = \sqrt{9x^2 - 6x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} - 3x$ функциянинг энг кичик қийматини топинг.

## *7- мустақил иш*

**1-вариант** 7-M

1. $y = \frac{x^3+3}{x^2-3x+2}$ функция графигининг асимптотасини топинг.

2. $f(x) = \frac{3x}{2x-1} - 1,5$ функциянинг $x \to \infty$ да чексиз кичик бўлишини исботланг.

3. Шундай $(M;\ +\infty)$ нурни топингки, унда $|x^2-4x+3| > 10^4$ тенгсизлик бажарилсин.

**2-вариант** 2- M

1. $y = \frac{x^2-2x}{x^2-x-6}$ функция графигининг асимптотасини топинг.

2. $\varphi(x) = \frac{2}{\frac{4x+5}{x-4} - 4}$ функциянинг $x \to \infty$ да чексиз катта бўлишини исботланг.

3. Шундай $(M;\ +\infty)$ нурни топингки, унда $\left|\frac{x+1}{x^2+3x}\right| < 0,001$ тенгсизлик бажарилсин.

**3-вариант** 7- M

1. $y = \frac{2x^3+3x}{x^2+3x+2}$ функция графигининг асимптотасини топинг.

2. $f(x) = \frac{5x+4}{x+1} - 5$ функциянинг $x \to \infty$ да чексиз кичик бўлишини исботланг.

3. Шундай $(M;\ +\infty)$ нурни топингки, унда $\left|\frac{x^3-4x^2+3x+1}{x^2-6x+5}\right| > 10^5$ тенгсизлик бажарилсин.

**4-вариант** 7- M

1. $y = \frac{2x^3+15}{x^2-6x-7}$ функция графигининг асимптотасини топинг.

2. $y = 4x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 7$ функциянинг $x \to -\infty$ да чексиз катта бўлишини исботланг.

3. $a$ нинг қандай қийматларида $y = \frac{ax^2+3x+4}{2x^2+3} - 2$ функция $x \to +\infty$ да чексиз кичик бўлади? Шундай $(M;\ +\infty)$ нурни топингки, унда $|y| < 0,01$ тенгсизлик бажарилсин.

**5-вариант** 7- M

1. $y = \frac{4x^3-8x+7}{x^2-3x-10}$ функция графигининг асимптотасини топинг.

2. Шундай $(M;\ +\infty)$ нурни топингки, унда $|x^3-8x+1| > 10^6$ тенгсизлик бажарилсин.

3. $a$ нинг қандай қийматларида $y = \frac{x^3+2x^2+1}{x+2} - x^2 + a$ функция $x \to \infty$ да чексиз кичик бўлади?

**6- вариант** **7- М**

1. $y = \frac{7x^2 - 8x + 2}{x^2 + 7x + 6}$ функция графигининг асимптотасини топинг.

2. $a$ ва $b$ нинг қандай қийматларида $f(x) = \frac{ax^2 + 2x + 1}{3x + 1} - bx$ функция $x \to +\infty$ да чексиз кичик бўлади? Шундай $(M; +\infty)$ нурни топингки, унда $|f(x)| < 0{,}0001$ тенгсизлик бажарилсин.

3. $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1}$ функциянинг $x \to \infty$ да чексиз катта бўлишини исботланг.

## *6- назорат иши*

**1- вариант** **6- К**

1. Функция берилган:

$$f(x) = \begin{cases} x < 2 \text{ да } & \frac{2|x| - 1}{x - 3}, \\ x \geqslant 2 \text{ да } & \frac{3x + 5}{1 + 2x}. \end{cases}$$

Шу функциянинг $x \to -\infty$ ва $x \to \infty$ даги лимитларини топинг.

2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left( \frac{2n + (-1)^n}{6n - (-1)^n} - \frac{2^n - 2^{-n}}{2^n + 2^{-n}} \right)$ ни топинг.

3. Чексиз геометрик прогрессиянинг йиғиндиси 8 га тенг, иккинчи ва учинчи ҳадлари йиғиндиси 3 га тенг, прогрессия махражи эса рационал сондан иборат, унинг тўртинчи ҳадини топинг.

4°. $\lim\limits_{n \to \infty} \left( \frac{1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2)}{2n + 1} - \frac{3n + 1}{4} \right)$ ни топинг.

**2- вариант** **6- К**

1. Функция берилган:

$$f(x) = \begin{cases} x \leqslant 1 \text{ да } & \frac{x}{2x - 4}, \\ x > 1 \text{ да } & \frac{1 - |x - 2|}{x}. \end{cases}$$

Шу функциянинг $x \to -\infty$ ва $x \to +\infty$ даги лимитларини топинг.

2. $\lim\limits_{n \to \infty} \left( \frac{5n^3}{1 + 5n^3} + \frac{1 - 3n^2}{3n + 1} \right)$ ни топинг.

3. Чексиз геометрик прогрессиянинг йиғиндиси $\frac{2}{3}$ га тенг, учинчи ҳади эса $\frac{1}{4}$ га тенг, унинг бешинчи ҳадини топинг.

4°. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3 + 6 + 12 + \ldots + 3 \cdot 2^{n-1}}{5 \cdot 2^{n+1} + 3}$ ни топинг.

## 3- вариант

**6- К**

1. Функция берилган:

$$f(x)=\begin{cases} x<-5 \text{ да } & -\dfrac{3x}{4-|x|}, \\ x\geqslant -5 \text{ да } & \dfrac{2x+5}{x+6}. \end{cases}$$

Шу функциянинг $x\to-\infty$ ва $x\to+\infty$ даги лимитларини топинг.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(-3)^n+2^n}{(-3)^{n-1}+2^{n+1}}+\dfrac{(2+3n)^2}{(3n-1)(n+1)}\right)$ ни ҳисобланг.

3. Чексиз геометрик прогрессиянинг йиғиндиси 3 га тенг, биринчи ва учинчи ҳадлари йиғиндиси эса $\dfrac{13}{9}$ га тенг, унинг тўртинчи ҳадини топинг.

4°. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 13}+\ldots+\dfrac{1}{(6n-5)(6n+1)}\right)$ ни топинг.

## 4- вариант

**6- К**

1. Функция берилган:

$$f(x)=\begin{cases} x<2 \text{ да } & \dfrac{1-x}{5-2x}, \\ x\geqslant 2 \text{ да } & \dfrac{1}{|3-x|+1}. \end{cases}$$

Шу функциянинг $x\to-\infty$ ва $x\to+\infty$ даги лимитларини топинг.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6\cdot 4^n+1}{3\cdot 2^n+1}-2^{n+1}\right)$ ни ҳисобланг.

3. Чексиз геометрик прогрессиянинг йиғиндиси 4 га тенг, биринчи ва учинчи ҳадлари орасидаги айирма $\dfrac{7}{16}$ га тенг, прогрессия махражи эса рационал сондан иборат, унинг бешинчи ҳадини топинг.

4°. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{1+2+\ldots+n}-\dfrac{4n^2+2n-2}{3(2n+1)}\right)$ ни топинг.

## 5- вариант

**6- К**

1. Функция берилган:

$$f(x)=\begin{cases} x<0 \text{ да } & \dfrac{3+2|x|}{4x-1}, \\ x\geqslant 0 \text{ да } & \dfrac{9x}{3x+2}. \end{cases}$$

Шу функциянинг $x\to-\infty$ ва $x\to+\infty$ даги лимитларини топинг.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)}-4\right)$ ни ҳисобланг.

3. Мусбат ҳадли чексиз геометрик прогрессиянинг йиғиндиси $\frac{3}{4}$ га тенг, учинчи ҳади эса $\frac{1}{9}$ га тенг, унинг тўртинчи ҳадини топинг.

4°. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+6+36+\ldots+6^{n-1}}{4\cdot 6^{n+2}+1}$ ни топинг.

**6- вариант** **6- К**

1. Функция берилган:

$$f(x)=\begin{cases} x\leqslant -5 \text{ да } \frac{3x}{|x|-1}, \\ x>-5 \text{ да } \frac{|x|-|7-x|}{3x+20}. \end{cases}$$

Шу функциянинг $x\to\infty$ ва $x\to+\infty$ даги лимитларини топинг.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(n+4)(n+5)}-\frac{(n+3)(n+4)}{n+5}\right)$ ни ҳисобланг.

3. Чексиз геометрик прогрессиянинг йиғиндиси $\frac{4}{3}$ га тенг, биринчи ва учинчи ҳадлари орасидаги айирма 1,5 га тенг, прогрессиянинг махражи эса рационал сондан иборат, унинг бешинчи ҳадини топинг.

4°. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right)$ ни топинг.

### *7- назорат иши*

**1- вариант** **7- К**

1. Лимитларни топинг:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+4x^2+6x+3}{2x^2+3x+1}$.

2. Функция берилган:

$$f(x)=\begin{cases} x<-1 \text{ да } \frac{2x+1}{x}, \\ -1\leqslant x<2 \text{ да } 2-x^2, \\ x\geqslant 2 \text{ да } -3. \end{cases}$$

а) Функцияни узлуксизликка текширинг ва унинг графигини ясанг.

б) $\lim\limits_{x\to -2}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5}f(x)$ ларни топинг.

3. $x^3 - 5x + 3 = 0$ тенгламанинг $[-3; -2]$ ораликда илдизга эгалигини исботланг. Шу илдизнинг қийматини 0,1 гача аниқлик билан топинг (микрокалькулятордан фойдаланинг).

4. $g(x) = x^2 - 6x + 10$ функциянинг тескариланувчи эмаслигини исботланг.

$[3; +\infty)$ ораликда $g(x)$ га тескари функцияни топинг ва унинг графигини ясанг.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (2n-1)^2 - (2n)^2}{4n^2 - 3}$ ни топинг.

6°. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{4bx^2 + 5}{2x - 1} + ax\right) = 1{,}5$ шартдан фойдаланиб, $a$ ва $b$ параметрларнинг қийматларини топинг.

**2- вариант** **7- К**

1. Лимитларни топинг:

а) $\lim\limits_{x\to 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 7x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3 + 5x^2 - 7x + 1}{2x^2 + 3x - 5}$.

2. Функция берилган:

$$f(x) = \begin{cases} x \leqslant -2 \text{ да } 3, \\ -2 < x < 2 \text{ да } x^2 + 1, \\ x \geqslant 2 \text{ да } \frac{5}{x - 1}. \end{cases}$$

а) Функцияни узлуксизликка текширинг ва графигини ясанг.

б) $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ ларни топинг.

3. $x^3 + x - 11 = 0$ тенгламанинг $[2; 3]$ ораликда илдизга эгалигини исботланг. Шу илдизнинг қийматини 0,1 гача аниқлик билан топинг (микрокалькулятордан фойдаланинг).

4. $g(x) = x^2 + 8x + 10$ функциянинг тескариланувчи эмаслигини исботланг. $(-\infty; -4]$ ораликда берилган функцияга тескари функцияни топинг ва унинг графигини ясанг.

5. $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{2^2 - 4^2 + 6^2 - 8^2 + \ldots + (4k-2)^2 - (4k)^2}{4k^2 + 3k + 4}$ ни топинг.

6°. $a$ нинг кандай қийматларида

$$\varphi(x) = \begin{cases} x < 3 \text{ да } \frac{2x^2 - 6x}{x - 3}, \\ x \geqslant 3 \text{ да } ax + 2 \end{cases}$$

функция $x = 3$ нуқтада узлуксиз?

**3- вариант** **7- К**

Лимитларни ҳисобланг:

а) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{2}{1 - x^2} - \frac{3}{1 - x^3}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3 + 4x + 5}{2x^2 - 5x - 7}$.

2. Функция берилган:

$$f(x)=\begin{cases} x<-2 \text{ да } -\dfrac{2}{x}, \\ -2\leqslant x\leqslant 6 \text{ да } \sqrt{x+3}, \\ x>6 \text{ да } -1 \end{cases}$$

а) Функцияни узлуксизликка текширинг ва графигини ясанг.

б) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$ ларни топинг.

3. [0; 1] оралиқда $2x^3-5x+1=0$ тенгламанинг илдизи мавжудлигини исботланг. Шу илдизнинг қийматини 0,1 гача аниқлик билан топинг (микрокалькулятордан фойдаланинг).

4. $g(x)=3+\sqrt{x-4}$ функцияга тескари функцияни тузинг ва унинг графигини ясанг.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6^2-9^2+12^2-15^2+\ldots+(6n)^2-(6n+3)^2}{18n^2-7}$ ни топинг.

6°. $a$ нинг қандай қийматида

$$\varphi(x)=\begin{cases} |x|<1 \text{ да } \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}, \\ |x|\geqslant 1 \text{ да } 4x-a \end{cases}$$

функция $x=1$ да узлуксиз?

### 4- вариант

7- К

1. Лимитларни топинг:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{3}{x\sqrt{x}-1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-5x+2}{3x^2-5x+2}$.

2. Функция берилган:

$$f(x)=\begin{cases} x<-1 \text{ да } 2, \\ -1\leqslant x<2 \text{ да } |x-1|. \\ x\geqslant 2 \text{ да } \dfrac{2-3x}{x}. \end{cases}$$

а) Функцияни узлуксизликка текширинг ва графигини ясанг.

б) Шу функциянинг $x\to 3$, $x\to 0$, $x\to -105$ даги лимитларини топинг.

3. [1; 2] оралиқда $3x^3-6x-5=0$ тенглама илдизга эгалигини исботланг. Илдизнинг қийматини 0,1 гача аниқлик билан топинг (микрокалькулятордан фойдаланинг).

4. $g(x)=-x^2+8x-10$ функциянинг тескариланувчи эмаслигини исботланг. $[4; +\infty)$ нурда унга тескари функцияни топинг ва графигини ясанг.

5. $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{2^2-3^2+4^2-5^2+\ldots+(2k)^2-(2k+1)^2}{3k-2k^2}$ ни топинг.

6°. $a$ ва $b$ доимийларни

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$$

шарт бўйича топинг.

### 5- вариант

7- К

1. Лимитларни топинг:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{27}{x^3-27}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+4x^2+4x+1}{3x^2+5x+2}$.

2. Функция берилган:

$$f(x)=\begin{cases} x<0 \text{ да } \dfrac{3}{x}, \\ 0\leqslant x<2 \text{ да } \dfrac{2x+10}{3x+1}, \\ x\geqslant 2 \text{ да } 3. \end{cases}$$

а) Функцияни узлуксизликка текширинг ва графигини ясанг.

б) Шу функциянинг $x\to 10$, $x\to -10$, $x\to 1$ даги лимитларини топинг.

3. $3x^3-2x^2+2=0$ тенгламанинг [— 1; 0] да илдизга эгалигини исботланг. Шу илдизнинг қийматини 0,1 гача аниқлик билан ҳисобланг (микрокалькулятордан фойдаланинг).

4. $g(x)=\sqrt{x+5}-4$ функциянинг тескариланувчи эканини исботланг. $g^{-1}(x)$ ни тузинг ва тескари функция графигини ясанг.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^2-5^2+6^2-7^2+\ldots+(2n+2)^2-(2n+3)^2}{4n-6n^2}$ ни топинг.

6°. $b$ нинг қандай қийматларида

$$h(x)=\begin{cases} x<4 \text{ да } \dfrac{3x^2-12x}{x-4}, \\ x\geqslant 4 \text{ да } b^2x-4 \end{cases}$$

функция $x=4$ нуқтада узлуксиз?

### 6- вариант

7- К

1. Лимитларни топинг:

а) $\lim\limits_{x\to 17}\dfrac{4-\sqrt{x-1}}{x^2-17x}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^3+4x^2-x-2}{3x^2+7x+2}$.

2. Функция берилган:

$$f(x)=\begin{cases} x\leqslant -1 \text{ да } -\dfrac{5}{x}, \\ -1<x\leqslant 0 \text{ да } -6x, \\ x>0 \text{ да } 0. \end{cases}$$

а) Функцияни узлуксизликка текширинг ва графигини ясанг.

б) Шу функциянинг $x \to 3$, $x \to -0{,}5$, $x \to -5$ даги лимитларини хисобланг.

3. $2x^3 + 3x - 4 = 0$ тенгламанинг $[0;\ 1]$ оралиқда илдизга эгалигини исботланг. Шу илдизнинг қийматини 0,1 гача аниқлик билан топинг (микрокалькулятордан фойдаланинг).

4. $g(x) = 3 - 2x - x^2$ функция тескариланувчи функциями? $(-\infty;\ -1]$ оралиқда $g^{-1}(x)$ функцияни тузинг ва ҳосил бўлган функциянинг графигини ясанг.

5. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \ldots + (2n+1)^2 - (2n+2)^2}{3n - 7n^2}$ ни топинг.

6°. $c$ ва $d$ нинг қандай қийматларида

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{cx^3 + 7}{3x^2 - 4} + d(x - 1)\right) = 2?$$

## *8-мустақил иш*

**1-вариант** **8-М**

1. Дифференциал тушунчасидан фойдаланиб, ифодаларнинг тақрибий қийматларини топинг: а) $3{,}013^3$; б) $\sqrt[3]{27{,}018}$. Жавобни микрокалькулятор билан текширинг.

2. $y = |x + 3|$ функция ҳосиласининг $x = 0$, $x = -3$ нуқталардаги қийматини топинг.

3. $n \in N$ нинг қандай қийматларида $\left|\dfrac{3n}{2n-1} - 1{,}5\right| < 0{,}02$?

**2-вариант** **8-М**

1. Дифференциал тушунчасидан фойдаланиб, ифодаларнинг тақрибий қийматларини топинг: а) $4{,}007^4$; б) $\sqrt[4]{16{,}47}$. Жавобларни микрокалькулятор билан текширинг.

2. $f'(a)$ ни топинг, бунда $f(x) = (x - a)\,\varphi(x)$ ва $\varphi(x)$ функция $x_0 = a$ нуқтада узлуксиз.

3. Лимит тушунчасидан фойдаланмай, $\left(\dfrac{n^2 - 3n + 5}{n^2 + 1}\right)$ кетма-кетликнинг чегараланганлигини исботланг.

**3-вариант** **8-М**

1. Дифференциал тушунчасидан фойдаланиб, ифодаларнинг тақрибий қийматларини топинг: а) $2{,}003^5$; б) $\sqrt[5]{243{,}33}$. Жавобларни микрокалькулятор билан текширинг.

2. $y = |x - 1| + |x|$ функция ҳосиласининг $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ нуқталардаги қийматларини топинг.

3. $\left(\dfrac{5n + 3}{2n + 3}\right)$ кетма-кетликнинг ўсувчанлигини исботланг.

**4-вариант** **8-М**

1. Дифференциал тушунчасидан фойдаланиб, ифодаларнинг тақрибий қийматларини топинг: а) $2{,}007^3$; б) $\sqrt[3]{27{,}57}$. Жавобларни микрокалькулятор билан текширинг.

2. $f(x)=|x-a|\varphi(x)$ функциянинг $x_0=a$ нуқтада ҳосилага эга эмаслигини исботланг, бунда $\varphi(x)$ функция $x_0=a$ нуқтада узлуксиз ва $\varphi(a)\neq 0$.

3. $n\in N$ нинг қандай қийматларида $\left|\frac{7n+13}{3n+3}-2\frac{1}{3}\right|<0{,}03$?

**5-вариант** **8-М**

1. Дифференциал тушунчасидан фойдаланиб, ифодаларнинг тақрибий қийматларини топинг: а) $2{,}013^4$; б) $\sqrt[4]{80{,}71}$. Жавобларни микрокалькулятор билан текширинг.

2. $y=\sqrt[5]{x^4}$ функция ҳосиласининг $x_0=1$, $x_1=0$ нуқталардаги қийматларини топинг.

3. Лимит тушунчасидан фойдаланмай, $\left(\frac{n^2+3n+4}{n^2+2}\right)$ кетма-кетликнинг чегараланганлигини исботланг.

**6-вариант** **8-М**

1. Дифференциал тушунчасидан фойдаланиб, ифодаларнинг тақрибий қийматларини топинг: а) $1{,}995^5$; б) $\sqrt[5]{31{,}79}$. Жавобларни микрокалькулятор билан текширинг.

2. Агар $f(x)=|x-a|\varphi(x)$ бўлса, $f'(a)$ ни топинг, бунда $\varphi(x)$ функция $x_0=a$ нуқтада узлуксиз ва $\varphi(a)=0$.

3. $\left(\frac{3n+8}{2n-1}\right)$ кетма-кетликнинг камаювчанлигини исботланг.

## *9-мустақил иш*

**1-вариант** **9-М**

1. $y=x^2$ функция графигига $x_0=-1$ абсциссали нуқтада ўтказилган уринма ва $y=3-2x$ тўғри чизиқ ўзаро қандай жойлашган?

2. $x_0=-1$ абсциссали нуқтада $y=2x^3$ функция графигига ўтказилган уринма $y=\frac{6x^2+34x+22}{x+3}$ функция графигининг асимптотаси бўлишини исботланг.

3. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$ ни топинг.

**2-вариант** **9-М**

1. $M(2;\ 8)$ нуқта орқали $y=x^3$ эгри чизиққа $l$ уринма ўтказилган. $l$ тўғри чизиқ ва $y=x^3$ эгри чизиқнинг барча умумий нуқталарини топинг.

2. Ушбу $y = \frac{2x^2 + 7x + 4}{2x + 3}$ функция графигининг оғма асимптотаси $x_0 = 0{,}25$ абсциссали нуқтада $y = \sqrt{x}$ функция графигига уринма билан параллел бўлишини исботланг.

3. $\sum\limits_{k=1}^{n} k(2k + 1)$ ни топинг.

**3- вариант** **9- М**

1. $x_0 = 1$ абсциссали нуқтада $y = x^3$ функция графигига ўтказилган уринма билан $y = 3x + 5$ тўғри чизиқ ўзаро қандай жойлашади?

2. $x_0 = -1$ абсциссали нуқтада $y = x^3 + 3$ функция графигига ўтказилган уринма билан $y = \frac{4x^2 + 8x + 3}{2x + 4}$ функция графиги оғма асимптотасининг кесишиш нуқтасини топинг.

3. $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k - 1)^3$ ни топинг.

**4- вариант** **9- М**

1. $a$ нинг қандай қийматида $y = 3x + a$ тўғри чизиқ $y = x^3$ функция графигига уринади?

2. $x_0 = -3$ абсциссали нуқтада $y = 3 - x^2$ функция графигига ўтказилган уринма билан $y = \frac{3x^2 + 3x + 4}{x^2 - 2x + 17}$ функция графиги асимптотасининг кесишиш нуқтаси координаталарини топинг.

3. $\sum\limits_{k=1}^{n} k(3k - 1)$ ни топинг.

**5- вариант** **9- М**

1. $x_0 = 2$ абсциссали нуқтада $y = 4 - x^2$ функция графигига ўтказилган уринма билан $y = 8 - 4x$ тўғри чизиқ ўзаро қандай жойлашади?

2. $x_0 = 3$ абсциссали нуқтада $y = 7 - x^2$ функция графигига ўтказилган уринма билан $y = \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x^2 - 4x + 3}$ функция графиги асимптотасининг кесишиш нуқтаси координаталарини топинг.

3. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2(k + 1)$ ни топинг.

**6- вариант** **9- М**

1. $y = 6x + 4$ тўғри чизиқ $y = 2x^3$ функция графигига уринадими? Агар шундай бўлса, уриниш нуқтасининг координаталарини топинг. $y = 6x + 4$ тўғри чизиқ ва $y = 2x^3$ эгри чизиқнинг барча умумий нуқталарини топинг.

2. $x_0 = -2$ абсциссали нуқтада $y = x^2 - 4$ функция графигига уринма билан $y = \frac{8x^2 - 4x + 9}{3 - 2x}$ функция графигининг оғма асимптотаси параллел бўлишини исботланг.

3. $\sum\limits_{k=1}^{n} (3k - 2)^2$ ни ҳисобланг.

### *8- назорат иши*

**1- вариант** 8- К

1. Моддий нуқта тўғри чизиқ бўйича

$$s(t) = t^3 - \frac{3t^2}{2} + 2t - 1 \quad (\text{см})$$

тенгламага мувофиқ ҳаракат қилади.

а) Унинг $t = 3$ с вақт моментидаги тезлигини топинг.

б) Қандай вақт моментида тезланиш $9 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$ га тенг бўлади?

2. Агар $f(x) = \frac{8x\sqrt{x} + 2}{x}$ бўлса, $f'(1)$ ни топинг.

3. $\varphi(x) = \frac{x + 2}{3 - x}$ функция берилган. $x_0 = 2$ нуқтада унинг графигига $l$ уринма ўтказилган.

а) $l$ уринманинг тенгламасини ёзинг.

б) $\varphi$ функция графигига яна $l$ дан бошқа ва $l$ га параллел булган уринма мавжудми? Агар мавжуд бўлса, унинг тенгламасини ёзинг.

4. $g(x) = 3x(2x - 1)^5$ функция берилган. $x$ нинг барча шундай қийматларини топингки, уларда: а) $g'(x) = 0$; б) $g'(x) > 0$; в) $g'(x) \leqslant$ $< 0$ бўлсин.

5. $y = \left| \frac{x^3 - 1}{1 - x} \right|$ функция ўзининг аниқланиш соҳасида дифференциалланувчи бўладими?

6°. $(x - 2)^{50} = a_0x^{50} + a_1x^{49} + \ldots + a_{49}x + a_{50}$ экани маълум. $50a_0 + 49a_1 + \ldots + 2a_{48} + a_{49}$ йиғиндини топинг.

**2- вариант** 8- К

1. Моддий нуқта $x(t) = 2t^3 - 2{,}5t^2 + 3t + 1$ (м) қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилади.

а) Нуқтанинг $t = 1$ с вақт моментидаги тезлигини топинг.

б) Қандай вақт моментида тезланиш $19 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ га тенг бўлади?

2. Агар $f(x) = \frac{32 - 2x^2 + \sqrt{x}}{x^2}$ бўлса, $f'(4)$ ни топинг.

3. $\varphi(x) = \frac{1 - x}{x + 4}$ функция берилган. $x_0 = -3$ абсциссали нуқтада унинг графигига $m$ уринма ўтказилган.

а) $m$ уринманинг тенгламасини ёзинг.

б) $\varphi$ функция графигига яна $m$ дан бошқа ва $m$ га параллел бўлган уринма мавжудми? Агар мавжуд бўлса, унинг тенгламасини ёзинг?

4. $g(x) = 2x(1-x)^5$ функция берилган. $x$ нинг барча шундай қийматларини топингки, уларда: а) $g'(x)=0$; б) $g'(x) > 0$; в) $g'(x) < 0$ бўлсин.

5. $y = |1 - x^2|$ функция $x = 1$ ва $x = -1$ нуқталарда дифференциалланувчи эмаслигини исботланг.

6°. $(3-2x)^{40} = a_0x^{40} + a_1x^{39} + \ldots + a_{39}x + a_{40}$ экани маълум. $40 \cdot 39a_0 + 39 \cdot 38a_1 + \ldots + 3 \cdot 2a_{37} + 2a_{38}$ йиғиндини топинг.

**3- вариант** **8-К**

1. Моддий нуқта тўғри чизиқ бўйича $s(t) = t^3 + \frac{3t^2}{2} - 4t + 3$ (м) тенгламага мувофиқ ҳаракат қилади.

а) Унинг $t = 2$ с вақт моментидаги тезлигини топинг.

б) Қандай вақт моментида тезланиш 9 $\frac{м}{с^2}$ га тенг бўлади?

2. Агар $f(x) = \frac{x\sqrt{x} + 4x}{2\sqrt{x}}$ бўлса, $f'(1)$ ни топинг.

3. $x_0 = 3$ абсциссали нуқтада $\varphi(x) = \frac{x-3}{4-x}$ функция графигига $l$ уринма ўтказилган.

а) $l$ уринманинг тенгламасини ёзинг.

б) $\varphi$ функция графигига яна $l$ дан бошқа ва $l$ га параллел бўлган уринма мавжудми? Агар мавжуд бўлса, унинг тенгламасини ёзинг.

4. $g(x) = 2x(1-3x)^7$ функция берилган. $x$ нинг барча шундай қийматларини топингки, уларда: а) $g'(x)=0$, б) $g'(x) > 0$; в) $g'(x) < 0$ бўлсин.

5. $y = \sqrt{81 - 18x^2 + x^4}$ функция 3 ва $-3$ нуқталарда дифференциалланувчи эмаслигини исботланг.

6°. $3(4x-3)^{30} = b_0x^{30} + b_1x^{29} + \ldots + b_{29}x + b_{30}$ экани маълум. $30b_0 + 29b_1 + \ldots + 2b_{28} + b_{29}$ ни топинг.

**4- вариант** **8- К**

Моддий нуқта $x(t) = 2t^3 + \frac{5t^2}{2} - 7t + 3$ (см) қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда.

а) Унинг $t = 1$ с вақт моментидаги тезлигини топинг.

б) Қандай вақт моментида тезланиш 11 $\frac{см}{с^2}$ га тенг бўлади?

2. Агар $f(x) = \frac{243x - 2x^3\sqrt{x}}{x^3}$ бўлса, $f'(9)$ ни топинг.

3. $x_0 = -4$ абсциссали нуқтада $\varphi(x) = \frac{2-x}{x+3}$ функция графигига $m$ уринма ўтказилган.

а) $m$ уринма тенгламасини ёзинг.

б) $\varphi$ функция графигига яна $m$ дан бошқа ва $m$ га параллел бўлган уринма мавжудми? Агар мавжуд бўлса, унинг тенгламасини ёзинг.

4. $g(x) = 2x(3x-1)^5$ функция берилган. $x$ нинг барча шундай қийматларини топингки, уларда: а) $g'(x) = 0$; б) $g'(x) > 0$; в) $g'(x) \leqslant 0$ бўлсин.

5. $y = \sqrt{x^4 - 8x^2 + 16}$ функция 2 ва $-2$ нуқталарда дифференциалланувчи эмаслигини исботланг.

6°. $3(3x+4)^{20} = c_0x^{20} + c_1x^{19} + \ldots + c_{19}x + c_{20}$ экани маълум. $20 \cdot 19\, c_0 - 19 \cdot 18\, c_1 + \ldots - 3 \cdot 2\, c_{17} + 2\, c_{18}$ ни топинг.

## 5- вариант 8- К

1. Моддий нуқта $x(t) = \frac{1}{6}t^3 - \frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} + 0{,}5$ (м) қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда.

а) Унинг $t = 3$ с вақт моментидаги тезлигини топинг.

б) Қандай вақт моментида тезланиш $4\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ га тенг бўлади?

2. Агар $f(x) = \frac{27\sqrt{x} + 8x^3}{x\sqrt{x}}$ бўлса, $f'(9)$ ни топинг.

3. $x_0 = -3$ абсциссали нуқтада $\varphi(x) = \frac{3-x}{x+4}$ функция графигига $m$ уринма ўтказилган.

а) $m$ уринма тенгламасини ёзинг.

б) $\varphi$ функция графигига яна $m$ дан бошқа ва $m$ га параллел бўлган уринма мавжудми? Агар мавжуд бўлса, унинг тенгламасини ёзинг.

4. $g(x) = 2x(3x+4)^5$ функция берилган. $x$ нинг барча шундай қийматларини топингки, уларда: а) $g'(x) = 0$; б) $g'(x) > 0$; в) $g'(x) < 0$ бўлсин.

5. $h(x) = x|x|$ функция берилган.

а) $h'(3)$, $h'(-5)$ ни топинг.

б) Ҳосиланинг таърифидан фойдаланиб, $h'(0)$ ни топинг.

6°. $4(2x+1)^{15} = a_0x^{15} + a_1x^{14} + \ldots + a_{14}x + a_{15}$ экани маълум. $15a_0 - 14a_1 + \ldots - 2a_{13} + a_{14}$ ни топинг.

## 6- вариант 8- К

1. Моддий нуқта $x(t) = 6t^3 + 2t - 7$ (м) қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда.

а) Унинг $t = 3$ с вақт моментидаги тезлигини топинг.

б) Қандай вақт моментида тезланиш $54\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ га тенг бўлади?

2. Агар $f(x) = \frac{2x - x^4\sqrt{x} + 1}{x^4}$ бўлса, $f'(1)$ ни топинг.

3. $x_0 = -2$ абсциссали нуқтада $\varphi(x) = \frac{x+2}{3+x}$ функция графигига $l$ уринма ўтказилган.

а) $l$ уринма тенгламасини ёзинг.

б) $\varphi$ функция графигига яна $l$ дан бошқа ва $l$ га параллел бўлган уринма мавжудми? Агар мавжуд бўлса, унинг тенгламасини ёзинг.

4. $g(x) = 3x(5x-4)^2$ функция берилган. $x$ нинг барча шундай қийматларини топингки, уларда: а) $g'(x)=0$; б) $g'(x) > 0$; в) $g'(x) \leqslant 0$ бўлсин.

5. $h(x) = 2x + |x-1|$ функция берилган.

а) $h'(0)$, $h'(3)$ ни топинг.

б) Ҳосиланинг таърифидан фойдаланиб, $h$ функция $x_0 = 1$ нуқтада дифференциалланувчи эмаслигини исботланг. Функция $x_0 = 1$ нуқтада узлуксизми?

6°. $(3x-2)^{25} = B_0x^{25} + B_1x^{24} + B_2x^{23} + \ldots + B_{23}x^2 + B_{24}x + B_{25}$ экани маълум. $25 \cdot 24\, B_0 + 24 \cdot 23\, B_1 + 23 \cdot 22\, B_2 + \ldots + 2\, B_{23}$ ни топинг.

## *10- мустақил иш*

**1- вариант** **10- М**

1. $y = -\frac{1}{3}x^3 + 5x^2 + 12$ функциянинг ўсиш, камайиш оралиқларини, экстремумларини, графигининг қавариқлик, ботиқлик оралиқларини ва эгилиш нуқталарини топинг.

2. $y = 2x^2 - \sqrt{x}$ функциянинг экстремумларини топинг.

3. $M(0;\ 3)$ нуқта орқали $y = \frac{1}{x}$ функция графигига уринма ўтказилган. Унинг тенгламасини ёзинг.

**2- вариант** **10- М**

1. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$ функциянинг ўсиш, камайиш оралиқларини, экстремумларини, графигининг қавариқлик, ботиқлик оралиқларини ва эгилиш нуқталарини топинг.

2. $y = x^2(\sqrt{x} - 1)$ функциянинг экстремумларини топинг.

3. $M(2;\ 0)$ нуқта орқали $y = 3 - x^2$ функция графигига уринмалар ўтказилган. Шу уринмаларнинг тенгламаларини ёзинг.

**3- вариант** **10- М**

1. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} + 12x + 16$ функциянинг ўсиш, камайиш оралиқларини, экстремумларини, графигининг қавариқлик, ботиқлик оралиқларини ва эгилиш нуқталарини топинг.

2. $y = x^2\sqrt{1-2x}$ функциянинг экстремумларини топинг.

3. $M(-1;\ 0)$ нуқта орқали $y = \sqrt{2x-1}$ функция графигига уринма ўтказилган. Унинг тенгламасини ёзинг.

**4-вариант** **10-М**

1. $y = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 1$ функциянинг ўсиш, камайиш оралиқларини, экстремумларини, графигининг қавариқлик, ботиқлик оралиқларини ва эгилиш нуқталарини топинг.

2. $y = (2 - x)\sqrt{x^2 + x + 1}$ функциянинг экстремумларини топинг.

3. $M(2; 0)$ нуқта орқали $y = \sqrt{1 - x}$ функция графигига уринма ўтказилган. Унинг тенгламасини ёзинг.

**5-вариант** **10-М**

1. $y = -\frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 13$ функциянинг ўсиш, камайиш оралиқларини, экстремумларини, графигининг қавариқлик, ботиқлик оралиқларини ва эгилиш нуқталарини топинг.

2. $y = 8x^2 - \sqrt{2x}$ функциянинг экстремумларини топинг.

3. $M(0; 2)$ нуқта орқали $y = \frac{2}{x}$ функция графигига уринма ўтказилган. Шу уринманинг тенгламасини ёзинг.

**6-вариант** **10-М**

1. $y = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 12x + 18$ функциянинг монотонлик оралиқларини, экстремумларини, графигининг қавариқлик, ботиқлик оралиқларини ва эгилиш нуқталарини топинг.

2. $y = 4x^2\sqrt{1 - 4x}$ функциянинг экстремумларини топинг.

3. $M(1; 3)$ нуқта орқали $y = \sqrt{1 - x}$ функция графигига уринма ўтказилган. Шу уринманинг тенгламасини ёзинг.

## *9-назорат иши*

**1-вариант** **9-К**

1. Функциянинг нуқтадаги ва кесмадаги узлуксизлиги таърифини беринг. Нуқтада узлуксиз бўлган икки функция йиғиндиси ва кўпайтмасининг узлуксизлиги ҳақидаги теоремаларни исботланг.

2. Функцияни текширинг ва унинг графигини ясанг: $y = \frac{x^2}{x + 1}$.

3. Арифметик прогрессияда олтинчи ҳад 3 га тенг, прогрессия айирмаси $d > 0,5$. $d$ нинг қандай қийматида биринчи, тўртинчи ва бешинчи ҳадлар кўпайтмаси энг катта бўлади?

4°. $y = 0,2x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 5x$ функциянинг $R$ да ўсишини исботланг.

**2-вариант** **9-К**

Функциянинг нуқтадаги ҳосиласи таърифини беринг. Икки дифференциалланувчи функция йиғиндисининг ҳосиласи ҳақидаги теоремани исботланг.

2. Функцияни текширинг ва графигини ясанг: $y = \frac{x}{3 - x}$

3. Икки сон айирмаси 8 га тенг. Биринчи сон кубининг иккинчи сонга кўпайтмаси энг кичик бўлиши учун бу сонлар қандай бўлиши керак?

4°. $y = -0{,}2x^5 + 0{,}5x^4 - x^3 + x^2 - x$ функциянинг $R$ да камайишини исботланг.

**3- вариант** 9- К

1. Критик нуқталар ва экстремум нуқталари таърифини беринг. Экстремум мавжудлигининг етарли шарти ҳақидаги теоремани исботланг.

2. Функцияни текширинг ва графигини ясанг: $y = \frac{x + 2}{x^3}$.

3. 180 сонини шундай учта номанфий қўшилувчилар йиғиндиси кўринишида тасвирлангки, улардан иккитаси 1:2 каби нисбатда, учала қўшилувчининг кўпайтмаси эса энг катта бўлсин.

4°. $y = -0{,}2x^5 + 0{,}5x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$ функциянинг $R$ да камайишини исботланг.

**4- вариант** 9- К

1. Функциянинг нуқтадаги лимити таърифини беринг. Берилган нуқтада дифференциалланувчи функция узлуксизлиги ҳақидаги теоремани исботланг.

2. Функцияни текширинг ва графигини ясанг: $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.

3. 8 сонини шундай иккита мусбат соннинг кўпайтмаси кўринишида тасвирлангки, кўпайтувчилар квадратларининг йиғиндиси энг кичик бўлсин.

4°. $y = 0{,}8x^5 - x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4x$ функциянинг $R$ да ўсишини исботланг.

**5- вариант** 9- К

1. Даражанинг ва икки функция кўпайтмасининг ҳосиласи ҳақидаги теоремани исботланг.

2. Функцияни текширинг ва графигини ясанг: $y = \frac{x^2}{x - 1}$.

3. Арифметик прогрессияда иккинчи ҳад 6 га тенг. Прогрессия $d \leq 2$ айирмасининг қандай қийматида прогрессия биринчи, учинчи ва олтинчи ҳадлари кўпайтмаси энг кичик бўлади?

4° $y = 0{,}2x^5 - 1{,}5\,x^4 + 7\,\frac{2}{3}\,x^3 - 21x^2 + 52\,x + 7$ функциянинг $R$ да ўсишини исботланг.

**6- вариант** К-9

1. Бўлинманинг ҳосиласи ҳақидаги теоремани исботланг.

2. Функцияни текширинг ва графигини ясанг: $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.

3. Иккита мусбат сонниng айирмаси 13,75 га тенг. Катта сонниng иккиланган квадрати билан кичик сонниng куби орасидаги айирма энг катта бўлиши учун бу сонлар қандай бўлиши керак?

4. $y = -0{,}8x^5 - 3x^4 + 2\frac{1}{3}x^3 + 12x^2 - 16x + 8$ функциянинг $R$ да камайишини исботланг.

## *11- мустақил иш*

**1- вариант** **11-М**

1. Тенгсизликни исботланг:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^7 \leqslant \frac{a^7+b^7}{2},\ a>0,\ b>0.$$

2. $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$ бином ёйилмасини топинг.

3. Ифодани соддалаштиринг:

$$(3-2x)^4 + 8x(3-2x)^3 + 24x^2(3-2x)^2 + 32x^3(3-2x) + 16x^4.$$

**2- вариант** **11-М**

1. Тенгсизликни исботланг:

$$\left(\frac{a+3}{2}\right)^5 \leqslant \frac{a^5+243}{2},\ a>0.$$

2. $(a^2 - a^{-1})^7$ бином ёйилмасини топинг.

3. Ифодани соддалаштиринг:

$$(2x-1)^4 - 8x(2x-1)^3 + 24x^2(2x-1)^2 - 32x^3(2x-1) + 16x^4$$

**3- вариант** **11- М**

1. Тенгсизликни исботланг:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-3} \leqslant \frac{a^{-3}+b^{-3}}{2},\ a>0,\ b>0.$$

2. $(b^2 + b^{-1})^6$ бином ёйилмасини топинг.

3. Ифодани соддалаштиринг:

$$(2-3x)^4 + 12x(2-3x)^3 + 54x^2(2-3x)^2 + 108x^3(2-3x) + 81x^4.$$

**4- вариант** **11- М**

1. Тенгсизликни исботланг:

$$(0{,}5a+1)^4 \leqslant \frac{a^4+16}{2},\ a>0.$$

2. $(a^3 + a^{-2})^7$ бином ёйилмасини топинг.

3. Ифодани соддалаштиринг:

$$(2x+1)^5 - 10x(2x+1)^4 + 10x^2(2x+1)^3 -$$
$$-80x^3(2x+1)^2 + 80x^4(2x+1) - 32x^5.$$

**5- вариант** **11-М**

1. Тенгсизликни исботланг:

$$\left(\frac{2c+1}{4}\right)^3 \leqslant \frac{8c^3+1}{16},\quad c>0.$$

2. $(2a-a^{-1})^7$ бином ёйилмасини топинг.
3. Ифодани соддалаштиринг:

$$(3x-1)^4-12x(3x-1)^3+54x^2(3x-1)^2-108x^3(3x-1)+81x^4.$$

**6- вариант** **11-М**

1. Тенгсизликни исботланг:

$$\left(\frac{1+3b}{6}\right)^{-3} \leqslant \frac{27+b^{-3}}{2},\quad b>0.$$

2. $(x^{-3}-2x^2)^6$ бином ёйилмасини топинг.
3. Ифодани соддалаштиринг:

$$(4x-3)^4-16x(4x-3)^3+96x^2(4x-3)^2-$$
$$-256x^3(4x-3)+256x^4.$$

## *10- назорат иши*

**1- вариант** **10-К**

1. $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{24}{7}$, $\frac{2\pi}{3}<\alpha<2\pi$ экани маълум. $\sin\alpha$ ва $\operatorname{ctg}\alpha$ ва $\operatorname{ctg}\alpha$ ларнинг қийматларини топинг.

2. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{1+\cos\alpha}{\sin^2\alpha}:\left(1+\left(\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2\right).$$

3) $f(x)=\sin\frac{3}{2}x+5\cos\frac{3}{4}x$ функция берилган.

а) $f(0)$, $f(7\pi)$, $f(-12\pi)$ ларни топинг.
б) $8\pi$ сони шу функциянинг даври бўлишини кўрсатинг.
в) $f$ функциянинг асосий даврини топинг.

4. Функцияни жуфтлик ва тоқликка текширинг.

$$\varphi(x)=x^3+2\sin x+\operatorname{ctg}x.$$

5. $2\sin^3x+3\sin^2x-2\sin x=0$ тенгламани ечинг.

6. $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ формула билан берилган гармоник тебранишнинг амплитудаси, частотаси, даври ва бошланғич фазасини топинг. Шу функция графигини ясанг.

7° $\sin^3\alpha\,(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha\,(1+\operatorname{tg}\alpha)<\frac{m^4+1}{m^2}$ бўлишини исботланг.

## 2- вариант 10-К

1. $\mathrm{ctg}\,\alpha = -\frac{5}{12}$ ва $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ экани маълум. $\cos\alpha$ ва $\mathrm{tg}\,\alpha$ ларнинг қийматларини топинг.

2. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\mathrm{tg}\,\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}.$$

3. $f(x) = \sin 2x + 5\cos 4x$ функция берилган.

а) $f(0)$, $f\left(\frac{7\pi}{3}\right)$, $f\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$ ларни топинг.

б) $3\pi$ сони $f$ функциянинг даври бўлишини кўрсатинг.

в) $f$ функциянинг энг кичик мусбат даврини топинг.

4. Функцияни жуфтлик ва тоқликка текширинг.

$$\varphi(x) = -3x^2 + 2\cos x + 2x\sin x.$$

5. $2\cos^3 x + 5\cos^2 x - 3\cos x = 0$ тенгламани ечинг.

6. $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ формула билан берилган гармоник тебранишнинг амплитудаси, частотаси, даври ва бошланғич фазасини топинг. Шу функция графигини ясанг.

7°. Исботланг:

$$\left|\frac{\sec x - \cos x}{\mathrm{tg}\,x + 1} + \frac{\mathrm{cosec}\,x - \sin x}{\mathrm{ctg}\,x + 1}\right| > \frac{1}{2}.$$

## 3- вариант 10-К

1. $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ва $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ экани маълум. $\sin\alpha$ ва $\mathrm{ctg}\,\alpha$ ларнинг қийматларини топинг.

2. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{\sin\alpha}{1 + \mathrm{ctg}\,\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha} - \frac{1}{\sin\alpha + \cos\alpha}.$$

3. $f(x) = 3\,\mathrm{tg}\frac{3}{4}x + 5\cos 2x$ функция берилган.

а) $f(0)$, $f(8\pi)$, $f\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$ ларни топинг.

б) $8\pi$ сони $f$ функциянинг даври бўлишини кўрсатинг.

в) $f$ функциянинг энг кичик мусбат даврини топинг.

4. Функцияни жуфтлик ва тоқликка текширинг:

$$\varphi(x) = 3x|x| - 2\sin x + 3\,\mathrm{tg}\,x.$$

5. $2\sin^3 x - 3\sin^2 x - 2\sin x = 0$ тенгламани ечинг.

6. $y = -2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ формула билан берилган гармоник теб-

ранишнинг амплитудаси, частотаси, даври ва бошланғич фазасини топинг. Шу функциянинг графигини ясанг.

7°. Исботланг:

$$\frac{1+\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}{\sec^2 x+\operatorname{tg} x}-\frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{cosec}^2 x+\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x}<\frac{a^4+1}{2a^2}.$$

**4- вариант** 10-Қ

1 $\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ ва $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ экани маълум. $\cos\alpha$ ва $\operatorname{tg}\alpha$ ларнинг қийматларини топинг.

2. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}-\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}.$$

3. $f(x)=4\operatorname{ctg}3x+5\sin 4x$ функция берилган.

а) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{11\pi}{4}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ ларни топинг.

б) $3\pi$ сони $f$ функциянинг даври бўлишини кўрсатинг.

в) $f$ функциянинг энг кичик мусбат даврини топинг.

4. Функцияни жуфтлик ва тоқликка текширинг:

$$\varphi(x)=3(x^2-1)-2|\sin x|+x^3\operatorname{tg}x.$$

5. $2\cos^3 x+5\cos^2 x+2\cos x=0$ тенгламани ечинг.

6. $y=-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ формула билан берилган гармоник тебранишнинг амплитудаси, частотаси, даври ва бошланғич фазасини топинг. Шу функция графигини ясанг.

7°. Исботланг:

$$(1+\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot(1-\sin\alpha+\cos\alpha)\,(1+\sin\alpha-$$
$$-\cos\alpha)\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha-1)\leqslant 1.$$

**5- вариант** 10- К

1. $\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, бунда $a<0$. Қолган тригонометрик функцияларнинг қийматларини топинг.

2. Агар $A=\frac{1}{1-\sin\alpha}$, $B=\frac{1}{1+\sin\alpha}$ бўлса, у ҳолда $4A^2B^2-2AB=$ $=A^2+B^2$ бўлишини исботланг.

3. $f(x)=\cos 4x-2{,}5\sin 2x$ функция берилган.

а) $f(0)$, $f\left(\frac{7\pi}{4}\right)$, $f\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$ ларни топинг.

б) $5\pi$ сони $f$ функциянинг даври бўлишини исботланг.

в) $f$ функциянинг асосий даврини топинг.

4. $\varphi(x)=\cos\frac{x^2-x}{x-1}$ функцияни жуфтлик ва тоқликка текширинг.

5. $2\cos^3 x - 3\cos^2 x + \cos x = 0$ тенгламани ечинг.

6. $y = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)$ формула билан берилган гармоник тебранишнинг амплитудаси, частотаси, даври ва бошланғич фазасини топинг. Шу функция графигини ясанг.

7°. Исботланг:

$$\left|\frac{1-\cos^2 x}{\sin x + \cos x} + \frac{1-\sin^2 x}{\cos x + \sin x}\right| > 0,5.$$

**6- вариант** **10- К**

1. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2a}{a^2-1}$, бунда $a < -1$. Қолган тригонометрик функцияларнинг қийматларини топинг.

2. Агар $M = \sec\alpha + 1$, $N = \sec\alpha - 1$ бўлса, у ҳолда $M^2 - 4 = N(2M - N)$ бўлишини исботланг.

3. $f(x) = 2\sin\ 2{,}5x - 3\cos 0{,}75x$ функция берилган.

а) $f(0)$, $f(5\pi)$, $f(-10\pi)$ ларни топинг.

б) $16\pi$ сони $f$ нинг даври бўлишини кўрсатинг

в) $f$ функциянинг асосий даврини топинг.

4. Функцияни жуфтлик ва тоқликка текширинг:

$$\varphi(x) = \sin\frac{x^{31} - x^{29}}{x^2 - 1}.$$

5. $4\sin^3 x = \sin x$ тенгламани ечинг.

6. $y = -2\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$ формула билан берилган гармоник тебранишнинг амплитудаси, частотаси, даври ва бошланғич фазасини топинг. Шу функция графигини ясанг.

7°. Исботланг:

$$\left|\frac{\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1+\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x}\right| < \frac{b^4+1}{2b^2}.$$

## *12- мустақил иш*

**1- вариант** **12-М**

1. $\cos(\pi + 2\alpha) + \sin(\pi + 2\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ ифодани соддалаштиринг.

2. $\sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x = 1$ тенгламани ечинг.

3. $y = 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x$ функциянинг асосий даврини топинг.

4. Агар $\pi < \alpha < 2\pi$ бўлса, $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha}} = \sin\frac{\alpha}{4}$ тенгликни текширинг.

### 2- вариант

**12-М**

1. $\sin(\pi - 2\alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\pi - 2\alpha)$ ифодани соддалаштиринг.

2. $\cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x = \sqrt{3}$ тенгламани ечинг.

3. $y = \sin x \cos x \cos 2x + \cos 4x$ функциянинг энг кичик мусбат даврини топинг.

4. Агар $\pi < \alpha < 2\pi$ бўлса, $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha}} = \cos\frac{\alpha}{4}$ тенгликни текширинг.

### 3- вариант

**12- М**

1. $\sin(\pi + 2\alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos(\pi + 2\alpha)$ ифодани соддалаштиринг.

2. $\sin 3x + \cos 3x = -\sqrt{2}$ тенгламани ечинг.

2. $y = \sin 2x \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ функциянинг энг кичик мусбат даврини топинг.

4. Агар $3\pi < \alpha < 4\pi$ бўлса, $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha}} = -\cos\frac{\alpha}{4}$ тенгликни текширинг.

### 4- вариант

**12- М**

1. $\cos(\pi - 2\alpha) - \sin(\pi - 2\alpha)\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ ифодани соддалаштиринг.

2. $\cos 5x - \sin 5x = -1$ тенгламани ечинг.

3. $y = \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x$ функциянинг энг кичик мусбат даврини топинг.

4. Агар $3\pi < \alpha < 4\pi$ бўлса, $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha}} = \sin\frac{\alpha}{4}$ тенгликни текширинг.

### 5- вариант

**12-М**

1. $\cos(\pi + 2\alpha) + \cos(1{,}5\pi - 2\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ ифодани соддалаштиринг.

2. $\cos 5x - \sqrt{3}\sin 5x = -1$ тенгламани ечинг.

3 $f(x) = 16\sin^2 x\cos^2 x - 1$ функциянинг асосий даврини топинг.

4. Агар $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ бўлса, $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha}} = \sin\frac{\alpha}{2}$ тенгликни текширинг.

**6- вариант** **12- М**

1. $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi-\alpha)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)$ ифодани соддалаштиринг.

2. $\cos 2x+\sin 2x=\sqrt{2}$ тенгламани ечинг.

3. $y=\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}\cos 2x$ функциянинг асосий даврини топинг.

4. Агар $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ бўлса, $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha}}=$ $=-\cos\frac{\alpha}{2}$ тенгликни текширинг.

## *11- назорат иши*

**1- вариант** **11- К**

1. Айниятни исботланг:

$$\frac{(1+\operatorname{tg}\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).$$

2. Агар $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{2}+1$ бўлса, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$ ни топинг.
3. $\cos x-\cos 2x=\sin 3x$ тенгламани ечинг.

4. $\frac{1}{\sin 10^\circ}-4\sin 70^\circ=2$ тенгликни текширинг.

5. $y=\frac{x^3-2x^2+3}{x^2+1}$ функция графигининг асимптотаси билан $x_0=$ $=1$ абсциссали нуқтада шу графикка ўтказилган уринма орасидаги бурчакни топинг.

6° Айниятни исботланг:

$$1+2\cos 2\alpha+2\cos 4\alpha+2\cos 6\alpha=\frac{\sin 7\alpha}{\sin\alpha}.$$

**2- вариант** **11- К**

1. Айниятни исботланг:

$$\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sqrt{3}\cos\alpha}=\sqrt{2}.$$

2. Агар $\operatorname{tg}\alpha=2,4$, $\operatorname{tg}\beta=-0,75$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ бўлса, $\sin(\alpha-$ $-2\beta)$ ни топинг.
3. $\cos 2x+\cos x=\sin 3x$ тенгламани ечинг.
4. $\operatorname{tg}20^\circ+4\sin 20^\circ=\sqrt{3}$ тенгликни текширинг.

5. $y=\frac{2x^2-4x+7}{x+3}$ функция графигининг оғма асимптотаси би-

лан $x_0 = -1$ абсциссали нуқтада шу графикка ўтказилган уринма орасидаги бурчакни топинг.

6°. Айниятни исботланг:

$$1 - 2\cos 4\alpha + 2\cos 8\alpha - 2\cos 12\alpha = -\frac{\cos 14\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

**3- вариант** **11-К**

1. Айниятни исботланг:

$$\frac{(1-\operatorname{tg}\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).$$

2. Агар $\operatorname{ctg}\alpha = 1 - \sqrt{2}$ бўлса, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$ ни топинг.
3. $\cos 2x - \cos 3x = \sin 5x$ тенгламани ечинг.
4. $4\cos 20° = \sqrt{3}\operatorname{ctg} 20° - 1$ тенгликни текширинг.
5. $y = \dfrac{3x^2 - 5x + 6}{x - 4}$ функция графигининг оғма асимптотаси билан $x_0 = 1$ абсциссали нуқтада шу функция графигига ўтказилган уринма орасидаги бурчакни топинг.

6°. Айниятни исботланг:

$$\frac{1}{\cos x \cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cos 3x} + \ldots + \frac{1}{\cos 9x \cos 10x} =$$
$$= \frac{2\sin 9x}{\sin 2x \cos 10x}.$$

**4- вариант** **11-К**

1. Айниятни исботланг:

$$\frac{\sin\alpha + 2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

2. Агар $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-5}{12}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{4}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ бўлса, $\cos(2\alpha - \beta)$ ни топинг.
3. $\cos 3x + \cos 2x = \sin 5x$ тенгламани ечинг
4. Жадвалдан фойдаланмай, $\cos\frac{2\pi}{5} - \sin\frac{3\pi}{10}$ ни ҳисобланг.
5. $y = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 4}{x^2 - 2x + 2}$ функция графигининг асимптотаси билан $x_0 = 0$ абсциссали нуқтада шу функция графигига ўтказилган уринма орасидаги бурчакни топинг.

6°. Айниятни исботланг:

$$8\operatorname{ctg} 24\alpha + 4\operatorname{tg} 12\alpha + 2\operatorname{tg} 6\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{ctg} 3\alpha.$$

**5- вариант** **11-К**

1. Айниятни исботланг:

$$\frac{(1+\operatorname{tg}2\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}2\alpha}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right).$$

2. Агар $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\beta=\frac{3}{4}$, $\pi<\beta<\frac{3}{2}\pi$ бўлса, $\cos(2\alpha+\beta)$ ни топинг.

3. $\sin 2x+\sin x=\sin 3x$ тенгламани ечинг.

4. $\operatorname{ctg}70^\circ-\sqrt{3}=-4\cos 70^\circ$ тенгликни текширинг.

5. $y=\frac{2x^2+6x+7}{x+2}$ функция графигига (—2; 4) нуқтадан ўтувчи уринма билан шу функция графигининг оғма асимптотаси орасидаги бурчакни топинг.

6. Айниятни исботланг:

$$\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 6\alpha+\sin 8\alpha=\frac{\sin 5\alpha\cdot\sin 4\alpha}{\sin\alpha}.$$

**6- вариант** **11-К**

1. Айниятни исботланг:

$$\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\sin\alpha\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-\sqrt{3}\cos\alpha}=\sqrt{2}.$$

2. Агар $\operatorname{ctg}\alpha=3-\sqrt{2}$ бўлса, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$ ни топинг.

3. $\sin 3x+\sin 2x=\sin 5x$ тенгламани ечинг.

4. $\frac{1-2\cos 80^\circ}{\cos 80^\circ}=4\cos 20^\circ$ тенгликни текширинг.

5. $y=\frac{x^2-5x+20}{x-5}$ функция графигининг оғма асимптотаси билан $x_0=1$ абсциссали нуқтада шу функция графигига ўтказилган уринма орасидаги бурчакни топинг.

6°. Айниятни исботланг:

$$\frac{1}{\cos 2x\ \cos 4x}+\frac{1}{\cos 4x\ \cos 6x}+\frac{1}{\cos 6x\cos 8x}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{\cos 18x\cos 20x}=\frac{2\sin 18x}{\sin 4x\cos 20x}.$$

## *13- мустақил иш*

**1- вариант** **13-М**

1. Лимитни топинг:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\sin 3x+\sin 4x}{x^3\sin 3x}.$$

2. $y = 1 + \sin^2 2x$ функция графигига $x_0 = \frac{\pi}{6}$ абсциссали нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг.

3. Агар:

а) $f(x) = \frac{1 - 4\sin x}{2 - 3\cos x}$;

б) $g(x) = x\sin(3x + 1) + 2\,\mathrm{ctg}(3x + 1)$ бўлса, $f'(\pi)$, $g'\left(\frac{\pi - 2}{6}\right)$ ни топинг.

4. Функциянинг графигини ясанг:

$$y = \sqrt{1 - \sin^2 x} \cdot \frac{(1 - \mathrm{tg}\,x)\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{1 - \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}.$$

**2- вариант** **13- М**

1. Топинг:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - 2\cos x + \cos 4x}{x^2 \cos x}.$$

2. $y = 1 + \cos^2 2x$ функция графигига $x_0 = \frac{\pi}{3}$ абсциссали нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг.

3. Агар:

а) $f(x) = \frac{\mathrm{tg}\,x}{\sin x - 2}$;

б) $g(x) = x\cos(2x + 3) - 3\,\mathrm{tg}(2x + 3)$ бўлса, $f'(\pi)$, $g'\left(\frac{\pi - 3}{2}\right)$ ни топинг.

4. Функциянинг графигини ясанг:

$$y = \sqrt{1 - \sin^2 x} \cdot \frac{\mathrm{ctg}\,2x\,(1 + \mathrm{tg}\,2x)}{1 + \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}.$$

**3- вариант** **13- М**

1. Лимитни топинг:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x - \sin 2x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 \cos x}.$$

2. $y = \sin^2 3x$ функция графигига $x_0 = \frac{\pi}{2}$ абсциссали нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг:

3. Агар

а) $f(x) = \frac{2\cos x + \sin x}{3\sin x - \cos x}$;

б) $g(x) = 4\operatorname{ctg}(1 - 3x) - x\sin(3x - 1)$ бўлса, $f'(\pi)$, $g'\left(\frac{3\pi+2}{6}\right)$ ни топинг.

4. Функциянинг графигини ясанг:

$$y = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{\cos^2(-x)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin(\pi - x)}.$$

**4- вариант** **13-М**

1. Лимитни топинг;

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{8}} \frac{\sqrt{2} - \cos 2x - \sin 2x}{(8x - \pi)^2}.$$

2. $y = \cos^2 3x$ функция графигига $x_0 = \frac{\pi}{3}$ абсциссали нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг.

3. Агар:

а) $f(x) = \frac{2\cos x - 3\sin x}{1 + 4\cos x}$;

б) $g(x) = 3\operatorname{tg}(5 - 2x) - x\cos(5 - 2x)$

бўлса, $f'(\pi)$, $g'\left(\frac{5 - 3\pi}{2}\right)$ ни топинг.

4. Функциянинг графигини ясанг:

$$y = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x} \cdot \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\sin(\pi + x)}{\operatorname{ctg}(\pi - x)}.$$

**5- вариант** **13-М**

1. Топинг:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x \sin 2x - 0{,}5\cos x + 0{,}5\cos^2 5x}{5x^2 \cos x}.$$

2. $y = 2\cos^2 2x$ функция графигига $x_0 = \frac{\pi}{2}$ абсциссали нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг:

3. Функциялар берилган:

а) $f(x) = x\sin(2x + 4) + 2\operatorname{ctg}(2x + 4)$;

б) $g(x) = \frac{\operatorname{ctg} x}{\cos x - 2}$.

$f'\left(\frac{\pi - 8}{4}\right)$, $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ни топинг:

4. Функция графигини ясанг:

$$y = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{\operatorname{ctg}(\pi - x) \cdot \sin(2\pi + x)}{\operatorname{tg}^2 x}.$$

**6- вариант** **13-М**

1. Топинг:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin 4x-2\cos 2x}{\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)^2\cos 2x}+\frac{4x}{\pi}\right).$$

2. $y=3-2\sin^2 3x$ функция графигига $x_0=\frac{\pi}{12}$ абсциссали нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг.

3. Функциялар берилган:

а) $f(x)=\frac{3\cos 2x-2\sin 2x}{1-4\sin 2x}$;

б) $g(x)=3\operatorname{ctg}(2x-5)+x\sin(2x-5)$.

$f'(\pi)$, $g'\left(\frac{\pi+10}{4}\right)$ ни топинг.

4. Функция графигини ясанг:

$$\sqrt{1-\cos^2 x}\cdot\frac{\operatorname{ctg}(\pi-2x)(1-\operatorname{tg}2x)}{1+\operatorname{ctg}(\pi-2x)}.$$

## *12- назорат иши*

**1- вариант** **12-К**

1. $2\sin(5x+3)+3\cos^2(5x+3)=3{,}25$ тенгламани ечинг.

2. $y=\sin(4x-2)$ ва $y=-\cos(3x+5)$ функциялар графикларининг кесишиш нуқталари абсциссаларини топинг.

3. $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=2$ тенгламани ечинг.

4. $a>0$, $b>0$ да $a\sin 5x+2\sqrt{ab+b^2}\cos 5x+2a=-4b$ тенглама ечимларга эга эмаслигини исботланг.

5. Агар $\operatorname{ctg}\alpha=0{,}75$, $\operatorname{tg}\beta=7$; $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\pi<\beta<\frac{3}{2}\pi$ бўлса, $\alpha+\beta$ ни топинг.

6°. Тенгламани ечинг:

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=1\frac{3}{4}.$$

**2- вариант** **12-К**

1. $2\cos(3x+5)+3\sin^2(3x+5)=3\frac{1}{4}$ тенгламани ечинг.

2. $x$ нинг қандай қийматларида $y=\operatorname{tg}(4x+3)$ ва $y=\operatorname{ctg}(x+5)$ функциялар тенг қийматлар қабул қилади?

3. $2\cos^2 2x+\cos x+\cos 9x=1$ тенгламани ечинг.

4. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x+\sin 5x=5$ тенглама ечимларга эга эмаслигини исботланг.

5. Агар $\operatorname{ctg}\alpha=0{,}6$, $\operatorname{ctg}\beta=4$; $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$, $2\pi<\beta<2\frac{1}{2}\pi$ бўлса, $\alpha-\beta$ ни топинг.

6°. Тенгламани ечинг:

$$\sin^2 2x + \cos^2 4x + 2\sin 2x = 3 + 2\cos 4x + 2\sin 2x\cos 4x.$$

**3- вариант** **12-Қ**

1. $4\cos(4x - 1) + 12\sin^2(4x - 1) = 11$ тенгламани ечинг.

2. $y = \cos(5x - 2)$ ва $y = -\sin(4x + 1)$ функциялар графиклари кесишиш нуқталарининг абсциссаларини топинг:

3. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$ тенгламани ечинг.

4. $a\sin 7x + 2\sqrt{18 - 3a}\cos 7x = 18 - 2a + 3\sin 7x$ тенглама ечимларга эга эмаслигини исботланг.

5. Агар $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}75$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{7}$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ бўлса, $\alpha + \beta$ ни топинг.

6°. Тенгламани ечинг:

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = -0{,}5.$$

**4- вариант** **12- К**

1. $4\sin(5x + 1) + 7\cos^2(5x + 1) = 7\frac{1}{4}$ тенгламани ечинг.

2. $x$ нинг қандай қийматларида $y = \operatorname{ctg}(2x - 3)$, $y = \operatorname{tg}(7x + 1)$ функциялар тенг қийматлар қабул қилади?

3. $2\sin^2 2x + \sin x + \sin 9x = 1$ тенгламани ечинг.

4. $\sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \operatorname{tg} 3x \sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) = 3$ тенглама ечимларга эга эмаслигини исботланг.

5. Агар $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\beta = 1\frac{2}{3}$; $\pi < \alpha < 1{,}5\pi$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ бўлса, $\alpha - \beta$ ни топинг.

6° Тенгламани ечинг:

$$\sin^2 2x + \cos^2 4x - 2\sin 2x = 3 - 2\cos 4x + 2\sin 2x\cos 4x.$$

**5- вариант** **12- К**

1. $2\sin(2x + 4) + 5\cos^2(2x + 4) = 4{,}75$ тенгламани ечинг.

2. $y = \operatorname{tg}(3 - 4x)$ ва $y = \operatorname{ctg}(5 - x)$ функциялар графиклари кесишиш нуқталарининг абсциссаларини топинг.

3. $2\cos^2 x + \cos 3x + \cos 4x = 1$ тенгламани ечинг.

4. $a\sin 3x + 2\sqrt{2a^2 + 6a + 4}\cos 3x = -6a - 8$ тенглама ечимларга эга эмаслигини исботланг:

5. Агар $\operatorname{tg}\alpha = -2$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{7}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ бўлса, $2\alpha + \beta$ ни топинг.

6° Тенгламани ечинг:

$$\sin^2 3x + \cos^2 6x + 3\sin 3x + 2 = 3\cos 6x + 2\sin 3x\cos 6x.$$

**6- вариант** **12- К**

1. $3\cos(2x+1)-3\sin^2(2x+1)=-3{,}75$ тенгламани ечинг.

2. $y=\cos(x^2-5x+1)$, $y=\sin(2x-x^2)$ функциялар графиклари кесишиш нуқталарининг абсциссаларини топинг.

3. $\sin^2\frac{5x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+\sin^2 2x=2$ тенгламани ечинг.

4. $\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+\mathrm{ctg}\,3x\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+\cos 4x=4$ тенглама ечимларга эга эмаслигини исботланг.

5. Агар $\mathrm{tg}\,\alpha=0{,}5$, $\mathrm{tg}\,\beta=7$; $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; $\pi<\beta<1{,}5\pi$ бўлса, $2\alpha+\beta$ ни топинг.

6° Тенгламани ечинг:

$$\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+\cos 8x=-\frac{1}{2}.$$

## *14- мустақил иш*

**1- вариант** **14-М**

1. $3\sin^2\alpha+5\sin\alpha\cos\alpha$ ифода а) 4,45; б) $\sqrt{17}$ қийматни қабул қила оладими (микрокалькулятордан фойдаланинг)?

2. $y=13\sin\left(\frac{\pi}{12}+4x\right)\cos\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)$ функциянинг қийматлари тўпламини топинг. $x$ нинг қандай қийматларида функция энг катта ва энг кичик қийматларни қабул қилади?

3. $2+\cos 2x<3\cos x$ тенгсизликни ечинг.

**2- вариант** **14-М**

1. $\sin^{20}2x+\cos^{40}2x\leqslant 1$ бўлишини исботланг. $x$ нинг қандай қийматларида тенглик ўринли бўлади?

2. Микрокалькулятордан фойдаланиб, $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ функциянинг қийматларини 0,934 сони билан солиштиринг.

3. $\mathrm{tg}\,x+2\,\mathrm{ctg}\,x>3$ тенгсизликни ечинг.

**3- вариант** **14-М**

1. $4\cos^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha\leqslant 4{,}5$ тенгсизликни исботланг. $\alpha$ нинг қандай қийматларида тенгликка эришилади?

2. $f(x)=8\sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(2x+\frac{5\pi}{8}\right)$ функция а) $-3\sqrt{5}$; б) 1,18 қийматни қабул қила оладими (микрокалькулятордан фойдаланинг)

3. $2\sin^2 2x+2\cos^2 x>3$ тенгсизликни ечинг.

**4-вариант** **14-М**

1. $\cos^{15} x + \sin^{18} x \geqslant 1$ тенгсизликни ечинг.

2. Микрокалькулятордан фойдаланиб, $y = 4\sin\left(\frac{\pi}{12} - 3x\right)\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ функциянинг қийматларини $\sqrt{7,469}$ сони билан солиштиринг.

3. $\frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} \geqslant 2$ тенгсизликни ечинг.

**5-вариант** **14-М**

1. $|1 + \sqrt{3}\sin 2\alpha - 2\cos^2\alpha \leqslant \frac{a^4+1}{a^2}$ ни исботланг. $a$ ва $\alpha$ нинг қандай қийматларида тенгликка эришилади?

2. Микрокалькулятордан фойдаланиб, $y = 6\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(3x + \frac{\pi}{12}\right)$ функциянинг қийматлари $-2{,}224$ ва $3{,}777$ сонлари орасида жойлашганлигини исботланг.

3. $\sin 3x > 4\sin^2 x$ тенгсизликни ечинг.

**6-вариант** **14-М**

1. $\sin^{13}\alpha + \cos^{15}\alpha \leqslant 1$ бўлишини исботланг. $\alpha$ нинг қандай қийматларида тенгликка эришилади?

2. Микрокалькулятордан фойдаланиб, $y = 4\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right)$ функциянинг қийматларини tg 76° билан солиштиринг.

3. $\cos 3x + 4\cos x < 1$ тенгсизликни ечинг.

### *13- назорат иши*

**1-вариант** **13-К**

1. Топинг: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\arcsin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$.

2. Ҳисобланг;

а) $\sin\left(2\arcsin\frac{12}{13}\right)$; б) $\arcsin(\sin 5)$.

3. $\cos\frac{\pi}{4}\cos 2x + \sin\frac{\pi}{4}\sin 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ тенгсизликни ечинг.

4. $\arcsin x < \arccos x$ тенгсизликни ечинг.

5° $\sin 3x > \sin 5x$ тенгсизликни ечинг.

**2-вариант** **13-К**

1. Топинг:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\arcsin 2x)\operatorname{arctg} 2x}{(x^2 - x)\arcsin 3x}.$$

2. Ҳисобланг:

а) $\cos\left(2\arcsin\frac{7}{25}\right)$; б) $\arccos(\cos 4)$.

3. $\sin\frac{\pi}{6}\cos 2x+\cos\frac{\pi}{6}\sin 2x\leqslant\frac{1}{2}$ тенгсизликни ечинг.

4. $\operatorname{arc\,tg} x<\operatorname{arc\,ctg} x$ тенгсизликни ечинг.

5°. $\cos^2 x-\cos^2 4x<0$ тенгсизликни ечинг.

**3- вариант** 13-Ҳ

1. Топинг:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{4x-\pi}{3\arcsin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

2. Ҳисобланг:

а) $\sin\left(2\arccos\frac{12}{13}\right)$; б) $\operatorname{arc\,ctg}(\operatorname{tg}2)$.

3. $\cos\frac{\pi}{3}\cos 2x-\sin\frac{\pi}{3}\sin 2x>-\frac{1}{2}$ тенгсизликни ечинг.

4. $\arccos x<\arcsin x$ тенгсизликни ечинг.

5° $\cos 3x-\cos 2x\leqslant 0$ тенгсизликни ечинг.

**4- вариант** 13- К

1. Топинг:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}2x)\arcsin 5x}{x^2\cos 2x}.$$

2. Ҳисобланг:

а) $\cos\left(2\arccos\frac{24}{25}\right)$; б) $\operatorname{arc\,ctg}(\operatorname{ctg}6)$.

3. $\sin\frac{\pi}{4}\cos 2x-\cos\frac{\pi}{4}\sin 2x\leqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$ тенгсизликни ечинг.

4. $\arccos(x^2-4x+3)>\frac{\pi}{2}$ тенгсизликни ечинг.

5°. $\sin 2x+\sin 4x>0$ тенгсизликни ечинг.

**5- вариант** 13- К

1. Топинг:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{x\sin 4x}.$$

2. Ҳисобланг:

а) $\cos\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$; б) $\arcsin(\sin 6)$.

3. $\cos\frac{\pi}{6}\cos 3x - \sin\frac{\pi}{6}\sin 3x > -\frac{1}{2}$ тенгсизликни ечинг.

4. $\arcsin\frac{2x^2-9x+8}{2} < \frac{\pi}{6}$ тенгсизликни ечинг.

5°. $\sin^2 x - \cos^2 2x > 0$ тенгсизликни ечинг.

**6- вариант** **13- К**

1. Топинг:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 3x - \sin x)\arcsin x}{5x^2}.$$

2. Ҳисобланг:

а) $\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)$; б) $\arccos(\cos(-5))$.

2. $\sin\frac{\pi}{3}\cos 2x + \cos\frac{\pi}{3}\sin 2x \leqslant \frac{1}{2}$ тенгсизликни ечинг.

4. $\mathrm{arc\,tg}\,3x - \mathrm{arc\,ctg}\,3x > 0$ тенгсизликни ечинг.

5°. $\cos^2 x - \sin^2 2x \geqslant 0$ тенгсизликни ечинг.

### *14-назорат иши*

**1- вариант** **14- К**

1. $\frac{9-x^2}{3x+1} \geqslant \frac{2}{x}$ тенгсизликни ечинг.

2. $f(x) = \frac{3-x^2}{x+2}$ функциянинг монотонлик оралиқларини, экстремумларини, ноллларини аниқланг. Шу функциянинг асимптоталарини топинг ва графигини ясанг.

3. $x^3 + 8x + 24$ кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратинг.

4. Исталган $n \in N$ да $10^n + 45n - 1$ сони 27 га каррали бўлишини исботланг.

5. $\sin 2x + \cos x + 2\sin x = -1$ тенгламанинг $0 < x < 5$ шартни қаноатлантирувчи барча ечимларини топинг.

**2- вариант** **14- К**

1. $\frac{x}{1+x} \leqslant \frac{16}{x^2+4}$ тенгсизликни ечинг.

2. $f(x) = \frac{4x}{9}(3-x)^2$ функциянинг монотонлик оралиқларини, экстремумларини, нолларини аниқланг. Қавариқлик ва ботиқлик оралиқларини, эгилиш нуқталарини топинг ва шу функция графигини ясанг.

3. $x^4 - x^3 - 10x^2 - x + 1 = 0$ тенгламани ечинг.

4. Агар $n$ натурал сон ва $n \geqslant 4$ бўлса, у ҳолда $2^n < n!$ бўлишини исботланг.

5. $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x - \cos^2 x = -2$ тенгламанинг $0 < x < 4$ шартни қаноатлантирувчи барча ечимларини топинг.

### 3- вариант 14- К

1. $2x+\frac{1}{x^2}\leqslant 3$ тенгсизликни ечинг.

2. $y=\frac{2x^2}{3-x}$ функциянинг монотонлик оралиқларини, экстремумларини, нолларини аниқланг. Шу функциянинг асимптоталарини топинг ва графигини ясанг.

3. $(x-2)(x-3)^2\ (x-4)-12$ ни кўпайтувчиларга ажратинг.

4. $n\in N$ да $3^n+2n-1$ нинг 4 га бўлинишини исботланг.

5. $\sqrt{3}\sin x+2\cos x=\sqrt{3}+\sin 2x$ тенгламанинг $0<x<2$ шартни қаноатлантирувчи барча ечимларини топинг.

### 4- вариант 14- К

1. $\frac{x+6}{3x-2}\leqslant\frac{3x+2}{x^2}$ тенгсизликни ечинг.

2. $y=\frac{2x}{3}(x-2)^3$ функциянинг монотонлик оралиқларини, экстремумларини, нолларини аниқланг. Қавариқлик ва ботиқлик оралиқларини, эгилиш нуқталарини топинг ва шу функциянинг графигини ясанг.

3. $x^4-5x^3+4x^2+5x+1=0$ тенгламани ечинг.

4. $n\geqslant 5$, $n\in N$ да $2^n<2\cdot(n-1)!$ тенгсизлик ўринли эканини исботланг.

5. $5\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x+3\sin^2 x=2$ тенгламанинг $0<x<5$ шартни қаноатлантирувчи барча ечимларини топинг.

### 5- вариант 14- К

1. $\frac{9}{x}\leqslant\frac{18-x^2}{6-x}$ тенгсизликни ечинг.

2. $y=\frac{x(x-3)^2}{2}$ функциянинг монотонлик оралиқларини, экстремумларини, нолларини аниқланг. Қавариқлик оралиқларини, эгилиш нуқталарини топинг ва функция графигини ясанг.

3. $2x^3-9x^2+12x-5=0$ тенгламани ечинг.

4. $5^n+4n+7$ барча $n\in N$ ларда 8 га каррали, исботланг.

5. $2\sin^2 2x-\sqrt{3}\sin 4x+1=0$ тенгламанинг $0<x<2$ шартни қаноатлантирувчи барча ечимларини топинг.

### 6- вариант 14- К

1. $\frac{4x}{3x+1}\leqslant\frac{1}{x^2}$ тенгсизликни ечинг.

2. $y=\frac{4-x^2}{x+3}$ функциянинг монотонлик оралиқлари, экстремумлари, нолларини аниқланг. Асимптоталарини топинг ва шу функция графигини ясанг.

3. $x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 16x + 16 = 0$ тенгламани ечинг.

4. $n > 3$, $n \in N$ да $2^n < 0,5\,(n+1)!$ тўғри бўлишини исботланг.

5. $\sin 4x - \sqrt{3}\sin 2x = 2\cos 2x - \sqrt{3}$ тенгламанинг $0 < x < 1$ шартни қаноатлантирувчи барча ечимларини топинг.

## XI СИНФ УЧУН МУСТАҚИЛ ВА НАЗОРАТ ИШЛАРИ

### *1-мустақил иш*

**1-вариант** **1-М**

1. Интегралларни ҳисобланг:

а) $\int \frac{(2-3\sqrt{x})^2}{x^3}dx$; б) $\int \left(\frac{\sin 2x - 2\sin^2 x}{1-\operatorname{tg}x}\right)^2 dx$.

2. $F(x) = 3x + \sin^2 3x$ функция $f(x) = 6\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$ функциянинг бошланғич функцияси эканини исботланг.

3. $y = \sin x\sqrt{\cos^2 x} + \cos x\sqrt{\sin^2 x}$ функциянинг графигини ясанг. Шу функция дифференциалланувчи бўлмаган нуқталар борми?

**2-вариант** **1-М**

1. Интегралларни ҳисобланг:

а) $\int \frac{x^2 - 3x + 4}{x\sqrt{x}} dx$;

б) $\int \cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(4x + \frac{7\pi}{4}\right) dx$.

2. $F(x) = 3x + 2\sin 2x + 0,25\sin 4x$ функция $f(x) = 8\cos^4 x$ функциянинг бошланғич функцияси эканини исботланг.

3. $y = \sqrt{\sin^2 2x} + 2\sin x\cos x$ функциянинг графигини ясанг. Шу функция дифференциалланувчи бўлмаган нуқталар борми?

**3-вариант** **1-М**

1. Интегралларни ҳисобланг:

а) $\int \frac{3\sin^2 x - 2\cos 2x}{1 + \cos 2x} dx$;

б) $\int \frac{1+2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

2. $F(x) = 4x + \cos^2 4x$ функция $f(x) = 8\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right)$ функциянинг бошланғич функцияси эканини исботланг.

3. $y = \cos x\sqrt{\cos^2 x} - \sin x\sqrt{\sin^2 x}$ функциянинг графигини ясанг. Бу функция дифференциалланувчи бўлмаган нуқталар борми?

**4-вариант** **1-М**

1. Интегралларни ҳисобланг:

а) $\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3}{3x^2}\, dx$;

б) $\int \sin\left(5x + \frac{9\pi}{4}\right) \cos\left(2x - \frac{7\pi}{4}\right) dx$.

2. $F(x) = 3x - \sin 4x + \frac{\sin 8x}{8}$ функция $f(x) = 8\sin^4 2x$ функциянинг бошланғич функцияси эканини исботланг.

3. $y = \sqrt{1 - 4\sin^2 x \cos^2 x} - \cos^2 x + \sin^2 x$ функциянинг графигини ясанг. Бу функция дифференциалланувчи бўлмаган нуқталар борми?

**5-вариант** **1-М**

1. Интегралларни ҳисобланг:

а) $\int \frac{2x^3 + x^2 + 2x + 2}{1 + x^2}\, dx$;

б) $\int \left(\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x}\right)^2 dx$.

2. $F(x) = 5x + \cos^2\left(5x - \frac{\pi}{6}\right)$ функция $f(x) = 10\cos^2\left(5x + \frac{\pi}{12}\right)$ функциянинг бошланғич функцияси эканини исботланг.

3. $y = \sin x \sqrt{\sin^2 x} + \cos x \sqrt{\cos^2 x}$ функциянинг графигини ясанг. Бу функция дифференциалланувчи бўлмаган нуқталар борми?

**6-вариант** **1-М**

1. Интегралларни ҳисобланг:

а) $\int \frac{4\cos^2 x + \cos 2x}{1 - \cos 2x}\, dx$; б) $\int x\sqrt{2x+1}\, dx$.

1. $F(x) = 6x + 4\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 0{,}5\sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right)$ функция $f(x) = 16\sin^4\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{2}\right)$ функциянинг бошланғич функцияси эканини исботланг.

3. $y = \sqrt{\sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}}$ функциянинг графигини ясанг. Бу функция дифференциалланувчи бўлмаган нуқталар борми?

## *1-назорат иши*

**1-вариант** **1-К**

1. $y' = xy^2$ дифференциал тенгламанинг $y(1) = -2$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечимини топинг.

2. $m = 1$ массали моддий нуқта $F(t) = 8 - 12t$ қонун бўйича ўзгарувчи куч таъсири остида тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилмоқда. Агар $t = 0$ вақт моментида нуқтанинг координатаси 0 га тенг ва тезлик 1 га тенг бўлса, нуқтанинг $x = x(t)$ ҳаракат қонунини топинг. Қандай вақт моментида нуқтанинг тезлиги максимал бўлади?

3. $y = f(x)$ функция $y'' + 9y = 0$ дифференциал тенгламани ва $f(0) = 3$, $f'(0) = 9$ бошланғич шартларни қаноатлантиради. Унинг $\left[\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{6}\right]$ кесмадаги энг кичик қийматини топинг.

4°. $f(x) = \begin{cases} x < 0 \text{ да } 2x, \\ x \geqslant 0 \text{ да } \sin x \end{cases}$ функциянинг графиги $M\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ нуқтадан ўтувчи $F$ бошланғич функциясини топинг. Шу бошланғич функциянинг графигини ясанг.

**2-вариант** **1-К**

1. $x^2y' = y^3$ дифференциал тенгламанинг $y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

2. Координата бошидан ўтувчи шундай эгри чизиқни топингки, унинг исталган уринмасига уриниш нуқтаси орқали ўтказилган перпендикуляр $Ox$ ўқини абсциссаси уриниш нуқтасининг абсциссасига қараганда 2 бирлик катта бўлган нуқтада кесадиган бўлсин.

3. $y = f(x)$ функция $y'' + 16y = 0$ дифференциал тенгламани ва $f(0) = 2$, $f'(0) = -8$ бошланғич шартларни қаноатлантиради. Унинг $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$ кесмадаги энг катта қийматини топинг.

4°. $f(x) = \begin{cases} x < 0 \text{ да } \cos x, \\ x \geqslant 0 \text{ да } 1 \end{cases}$ функциянинг графиги $M(1; 2)$ нуқтадан ўтувчи $F$ бошланғич функциясини топинг. Шу бошланғич функциянинг графигини ясанг.

**3-вариант** **1-К**

1. $y'\sin^2 x = \cos^2 y$ дифференциал тенгламанинг $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

2. $t$ вақт моментида нуқтанинг (тўғри чизиқ бўйича ҳаракатида) тезланиши $1 + \sin 2t$ га тенг. Агар $t = 0$ вақт моментида нуқтанинг координатаси 2 га тенг ва тезлик 1 га тенг бўлса, нуқтанинг $x = x(t)$ ҳаракат қонунини топинг.

3. $y = f(x)$ функция $y'' = -9y$ дифференциал тенгламани ва $f(0) = 3$, $f'(0) = -9$ бошланғич шартларни қаноатлантиради. Унинг $\left[\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{3}\right]$ кесмадаги энг кичик қийматини топинг.

4°. $f(x) = \begin{cases} x < 1 \text{ да } 1, \\ x \geqslant 1 \text{ да } x \end{cases}$ функциянинг графиги координата бошидан ўтувчи $F$ бошланғич функциясини топинг. Шу бошланғич функциянинг графигини ясанг.

## 4- вариант

1-Қ

1. $x^4y' = y^{-2}$ дифференциал тенгламанинг $y(1) = -1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

2. Агар $M$ (1; 0) нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг исталган уринмасига уриниш нуқтаси орқали ўтказиладиган перпендикулярнинг координата бошидан ўтиши маълум бўлса, шу эгри чизиқни топинг.

3. $y = f(x)$ функция $y'' = -16y$ дифференциал тенгламани ва $f(0) = 2$, $f'(0) = 8$ бошланғич шартларни қаноатлантиради. Унинг $\left[-\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{6}\right]$ кесмадаги энг катта қийматини топинг.

4°. $f(x) = \begin{cases} x < 0 \text{ да } \frac{1}{(x-1)^2}, \\ x \geqslant 0 \text{ да } \cos x \end{cases}$ функциянинг графиги $M\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ нуқтадан ўтувчи $F$ бошланғич функциясини топинг. Шу бошланғич функциянинг графигини ясанг.

## 5- вариант

1-Қ

1. $x^{-5}y' = 2y^4$ дифференциал тенгламанинг $y(1) = -1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

2. $m = 1$ моддий нуқта $F = -2$ доимий куч таъсири остида тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қилмоқда. Агар $t = 0$ бошланғич вақт моментида координата 10 га тенг ва тезлик 3 га тенг бўлса, нуқтанинг $x = x(t)$ ҳаракат қонунини топинг. Қандай вақт моментида нуқта дастлабки ҳолатга қайтади?

3. $y = f(x)$ функция $y'' + 4y = 0$ дифференциал тенгламани ва $f(0) = 3$, $f'(0) = 6$ бошланғич шартларни қаноатлантиради. Унинг $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ кесмадаги энг катта қийматини топинг.

4°. $f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < x < 0 \text{ да } \frac{1}{\cos^2 x}, \\ x \geqslant 0 \text{ да } \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$ функциянинг графиги координаталар бошидан ўтувчи $F$ бошланғич функциясини топинг. Шу бошланғич функциянинг графигини ясанг.

## 6- вариант

1-Қ

1. $y'\cos^2 x = \sin^2 y$ дифференциал тенгламанинг $y(\pi) = \frac{3\pi}{2}$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

2. Агар координаталар бошидан ўтувчи эгри чизиқнинг исталган уринмасига уриниш нуқтаси орқали ўтказиладиган перпендикуляр $Oy$ ўқини ординатаси уриниш нуқтасининг ординатасидан 0,5 га катта бўлган нуқтада кесиши маълум бўлса, шу эгри чизиқни топинг.

3. $y = f(x)$ функция $y'' + y = 0$ дифференциал тенгламани ва $f(0) = 5$, $f'(0) = 5$ бошланғич шартларни қаноатлантиради. $y = f(x)$ функциянинг $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ кесмадаги энг кичик қийматини топинг.

4°. $f(x) = \begin{cases} x < 1 \text{ да } 1, \\ x > 1 \text{ да } \dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$ функциянинг графиги $M\ (0;\ 1)$ нуқта орқали ўтувчи $F$ бошланғич функциясини топинг. Шу бошланғич функциянинг графигини ясанг.

## 2-мустақил иш

**1-вариант** **2-М**

1. $y = x^2$ ва $y = \sqrt[3]{32x}$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

2. $A$ ва $B$ нинг $f(x) = A\cos 2\pi x + B$ функция $f'\left(\frac{1}{4}\right) = -2$ ва $\int_0^3 f(x)dx = 6$ шартларни қаноатлантирувчи қийматларини топинг.

3. Агар таъсир этаётган куч (Гук қонуни бўйича) пружинанинг сиқилишига тўғри пропорционал бўлиши ва 1 см га сиқиш учун 20 Н куч зарурлиги маълум бўлса, пружинани 10 см га сиқиш учун бажариладиган ишни ҳисобланг.

4. Аниқ интегралнинг геометрик маъносидан фойдаланиб, $\int_1^3 \sqrt{4x - x^2 - 3}\, dx$ ни ҳисобланг.

**2-вариант** **2-М**

1. $y = \sin^2 2x \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ функция графиги ва $Ox$ ўқи билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

2. $A$, $B$ ва $C$ ларнинг шундай қийматларини топингки, уларда $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ функция $f'(1) = 0$, $f(2) - f'(2) = 2$, $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{3}$ шартларни қаноатлантирсин.

3. Жисм $v(t) = 6t - t^2 \left(\frac{м}{с}\right)$ тезлик билан тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Жисмнинг ҳаракат бошидан то унинг тўхташигача ўтган йўли узунлигини топинг.

4. Аниқ интегралнинг геометрик маъносидан фойдаланиб, $\int_0^6 |x - 3|\, dx$ ни ҳисобланг.

**3-вариант** **2-М**

1. $y = 8\sqrt{2}\, x^2$ ва $y = \cos \pi x$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

2. $A$ ва $B$ ларнинг шундай қийматларини топингки, уларда $f(x) =$

### 4- вариант

1-Қ

1. $x^4y' = y^{-2}$ дифференциал тенгламанинг $y(1) = -1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

2. Агар $M$ (1; 0) нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг исталган уринмасига уриниш нуқтаси орқали ўтказиладиган перпендикулярнинг координата бошидан ўтиши маълум бўлса, шу эгри чизиқни топинг.

3. $y = f(x)$ функция $y'' = -16y$ дифференциал тенгламани ва $f(0) = 2$, $f'(0) = 8$ бошланғич шартларни қаноатлантиради. Унинг $\left[-\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{6}\right]$ кесмадаги энг катта қийматини топинг.

4°. $f(x) = \begin{cases} x < 0 \text{ да } \frac{1}{(x-1)^2}, \\ x \geqslant 0 \text{ да } \cos x \end{cases}$ функциянинг графиги $M\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ нуқтадан ўтувчи $F$ бошланғич функциясини топинг. Шу бошланғич функциянинг графигини ясанг.

### 5- вариант

1-Қ

1. $x^{-5}y' = 2y^4$ дифференциал тенгламанинг $y(1) = -1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

2. $m = 1$ моддий нуқта $F = -2$ доимий куч таъсири остида тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қилмоқда. Агар $t = 0$ бошланғич вақт моментида координата 10 га тенг ва тезлик 3 га тенг бўлса, нуқтанинг $x = x(t)$ ҳаракат қонунини топинг. Қандай вақт моментида нуқта дастлабки ҳолатга қайтади?

3. $y = f(x)$ функция $y'' + 4y = 0$ дифференциал тенгламани ва $f(0) = 3$, $f'(0) = 6$ бошланғич шартларни қаноатлантиради. Унинг $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ кесмадаги энг катта қийматини топинг.

4°. $f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < x < 0 \text{ да } \frac{1}{\cos^2 x}, \\ x \geqslant 0 \text{ да } \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$ функциянинг графиги координаталар бошидан ўтувчи $F$ бошланғич функциясини топинг. Шу бошланғич функциянинг графигини ясанг.

### 6- вариант

1-Қ

1. $y'\cos^2 x = \sin^2 y$ дифференциал тенгламанинг $y(\pi) = \frac{3\pi}{2}$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

2. Агар координаталар бошидан ўтувчи эгри чизиқнинг исталган уринмасига уриниш нуқтаси орқали ўтказиладиган перпендикуляр $Oy$ ўқини ординатаси уриниш нуқтасининг ординатасидан 0,5 га катта бўлган нуқтада кесиши маълум бўлса, шу эгри чизиқни топинг.

3. $y = f(x)$ функция $y'' + y = 0$ дифференциал тенгламани ва $f(0) = 5$, $f'(0) = 5$ бошланғич шартларни қаноатлантиради. $y = f(x)$ функциянинг $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ кесмадаги энг кичик қийматини топинг.

4°. $f(x) = \begin{cases} x < 1 \text{ да } 1, \\ x > 1 \text{ да } \dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$ функциянинг графиги $M$ (0; 1) нуқта орқали ўтувчи $F$ бошланғич функциясини топинг. Шу бошланғич функциянинг графигини ясанг.

### *2- мустақил иш*

**1- вариант** **2- М**

1. $y = x^2$ ва $y = \sqrt[3]{32x}$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

2. $A$ ва $B$ нинг $f(x) = A\cos 2\pi x + B$ функция $f'\left(\frac{1}{4}\right) = -2$ ва $\int\limits_0^3 f(x)dx = 6$ шартларни қаноатлантирувчи қийматларини топинг.

3. Агар таъсир этаётган куч (Гук қонуни бўйича) пружинанинг сиқилишига тўғри пропорционал бўлиши ва 1 см га сиқиш учун 20 Н куч зарурлиги маълум бўлса, пружинани 10 см га сиқиш учун бажариладиган ишни ҳисобланг.

4. Аниқ интегралнинг геометрик маъносидан фойдаланиб, $\int\limits_1^3 \sqrt{4x - x^2 - 3}\, dx$ ни ҳисобланг.

**2- вариант** **2- М**

1. $y = \sin^2 2x$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ функция графиги ва $Ox$ ўқи билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

2. $A$, $B$ ва $C$ ларнинг шундай қийматларини топингки, уларда $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ функция $f'(1) = 0$, $f(2) - f'(2) = 2$, $\int\limits_0^1 f(x)\, dx = \frac{2}{3}$ шартларни қаноатлантирсин.

3. Жисм $v(t) = 6t - t^2$ $\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$ тезлик билан тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Жисмнинг ҳаракат бошидан то унинг тўхташигача ўтган йўли узунлигини топинг.

4. Аниқ интегралнинг геометрик маъносидан фойдаланиб, $\int\limits_0^6 |x - 3|\, dx$ ни ҳисобланг.

**3- вариант** **2- М**

1. $y = 8\sqrt{2}\, x^2$ ва $y = \cos \pi x$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

2. $A$ ва $B$ ларнинг шундай қийматларини топингки, уларда $f(x) =$

$= Ax + B$ функция $f(2) - f'(2) = 1$, $\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx \leqslant 0{,}25$ шартларни қаноатлантирсин.

3. Пружина 180 Н куч билан 2 см га чўзилади. Пружинанинг дастлабки узунлиги 20 см. Пружинани 25 см гача чўзиш учун қандай иш бажарилиши керак?

4. Аниқ интегралнинг геометрик маъносидан фойдаланиб, $\int\limits_{-2}^{-1} \sqrt{-2x - x^2}\,dx$ ни ҳисобланг.

**4- вариант** **2- М**

1. $y = \sqrt[4]{8x}$ ва $y = \frac{x^3}{4}$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

2. $A$ ва $B$ ларнинг шундай қийматларини топингки, уларда $f(x) = A\cos\frac{\pi}{2}x + B$ функция $f'(1) = 1{,}5$ ва $\int\limits_0^2 f(x)\,dx = 3$[illegible] шартларни қаноатлантирсин.

3. Икки жисм бир вақт моментида бир нуқтадан бир йўналиш бўйича тўғри чизиқли ҳаракатни бошлади. Биринчи жисм $v_1(t) = 3t^2 + 4t \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$ тезлик билан, иккинчиси эса $v_2(t) = 2t \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$ тезлик билан ҳаракат қилади, 4 с дан сўнг жисмлар орасидаги масофа қандай бўлади?

4. Аниқ интегралнинг геометрик маъносидан фойдаланиб, $\int\limits_0^2 ||x - 1| - 1|\,dx$ ни ҳисобланг.

**5- вариант** **2- М**

1. $y = \frac{x}{1 + 2x^2 + x^4}$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

2. $A$, $B$ ва $C$ ларнинг шундай қийматларини топингки, уларда $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ функция $f'(0) = 2$, $f(1) - f'(1) = 1$, $\int\limits_0^3 f(x)\,dx = 0$ шартларни қаноатлантирсин.

3. Пружина 60 Н куч таъсири остида 2 см га чўзилади. Пружинани 12 см га чўзиш учун қандай иш сарф қилиниши керак?

4. Аниқ интегралнинг геометрик маъносидан фойдаланиб, $\int\limits_0^2 \sqrt{4x - x^2}\,dx$ ни ҳисобланг.

**6-вариант** **2-М**

1. $y = \cos^2 2x\left(-\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$ функция графиги ва $Ox$ ўқи билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

2. $A$ ва $B$ нинг шундай қийматларини топингки, уларда $f(x) = Ax + B$ функция $f(1)\ f'(1) \leqslant -2$, $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 2$ шартларни қаноатлантирсин.

3. Икки жисм бир вақт моментида бир нуқтадан бир йўналиш бўйича тўғри чизиқли ҳаракатни бошлади. Биринчи жисм $v_1 = 9t^2 + 2t\ \left(\frac{м}{с}\right)$ тезлик билан, иккинчиси $v_2 = 2t\ \left(\frac{м}{с}\right)$ тезлик билан ҳаракат қилади. Неча секунддан сўнг уларнинг орасидаги масофа 81 м га тенг бўлади?

4. Аниқ интегралнинг геометрик маъносидан фойдаланиб, $\int\limits_4^0 (x-1| + |3-x|)\,dx$ ни ҳисобланг.

## *2-назорат иши*

**1-вариант** **2-К**

1. $\int\limits_{0,5}^{1} \frac{2x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$ интегрални ҳисобланг.

2. $\int\limits_0^1 (2t^2z - t^2)\,dz \geqslant 0$ тенгсизликни ечинг.

3. $y = 0{,}5x^2 - 3x + 2$ ва $y = x - 4$ функциялар графиклари билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

4°. $x$, $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$ нинг қандай қийматларида $f(x) = 2\cos 2x - \sin x$ нинг бошланғич функцияларндан $x = \pi$ да $-1$ га тенг қийматга эга бўладигани нолга айланади?

**2-вариант** **2-К**

1. $\int\limits_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx$ интегрални ҳисобланг.

2. $\int\limits_0^1 (tz^3 + z^2)\,dt > 0$ тенгсизликни ечинг

3. $y = x^2 - 6x + 4$, $y = 4 - x^2$ функциялар графиклари билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

4°. $f(x) = \int\limits_0^x [\sin t - \sin 2t)\,dt$, $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right]$ функция графигига абсциссалар ўқига параллел равишда ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг.

$= Ax + B$ функция $f(2) - f'(2) = 1$, $\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx \leqslant 0{,}25$ шартларни қаноатлантирсин.

3. Пружина 180 Н куч билан 2 см га чўзилади. Пружинанинг дастлабки узунлиги 20 см. Пружинани 25 см гача чўзиш учун қандай иш бажарилиши керак?

4. Аниқ интегралнинг геометрик маъносидан фойдаланиб, $\int\limits_{-2}^{-1} \sqrt{-2x - x^2}\,dx$ ни ҳисобланг.

**4- вариант** **2- М**

1. $y = \sqrt[4]{8x}$ ва $y = \frac{x^3}{4}$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

2. $A$ ва $B$ ларнинг шундай қийматларини топингки, уларда $f(x) = A\cos\frac{\pi}{2}x + B$ функция $f'(1) = 1{,}5$ ва $\int\limits_0^2 f(x)\,dx = 3$ шартларни қаноатлантирсин.

3. Икки жисм бир вақт моментида бир нуқтадан бир йўналиш бўйича тўғри чизиқли ҳаракатни бошлади. Биринчи жисм $v_1(t) = 3t^2 + 4t\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$ тезлик билан, иккинчиси эса $v_2(t) = 2t\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$ тезлик билан ҳаракат қилади, 4 с дан сўнг жисмлар орасидаги масофа қандай бўлади?

4. Аниқ интегралнинг геометрик маъносидан фойдаланиб, $\int\limits_0^2 \left||x-1|-1\right|\,dx$ ни ҳисобланг.

**5- вариант** **2- М**

1. $y = \frac{x}{1 + 2x^2 + x^4}$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

2. $A$, $B$ ва $C$ ларнинг шундай қийматларини топингки, уларда $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ функция $f'(0) = 2$, $f(1) - f'(1) = 1$, $\int\limits_0^3 f(x)\,dx = 0$ шартларни қаноатлантирсин.

3. Пружина 60 Н куч таъсири остида 2 см га чўзилади. Пружинани 12 см га чўзиш учун қандай иш сарф қилиниши керак?

4. Аниқ интегралнинг геометрик маъносидан фойдаланиб, $\int\limits_0^2 \sqrt{4x - x^2}\,dx$ ни ҳисобланг.

**6-вариант** **2-М**

1. $y = \cos^2 2x\left(-\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$ функция графиги ва $Ox$ ўқи билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

2. $A$ ва $B$ нинг шундай қийматларини топингки, уларда $f(x) = Ax + B$ функция $f(1)\ f'(1) \leqslant -2$, $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 2$ шартларни қаноатлантирсин.

3. Икки жисм бир вақт моментида бир нуқтадан бир йўналиш бўйича тўғри чизиқли ҳаракатни бошлади. Биринчи жисм $v_1 = 9t^2 + 2t\ \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$ тезлик билан, иккинчиси $v_2 = 2t\ \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$ тезлик билан ҳаракат қилади. Неча секунддан сўнг уларнинг орасидаги масофа 81 м га тенг бўлади?

4. Аниқ интегралнинг геометрик маъносидан фойдаланиб, $\int\limits_{-4}^{0}(x-1| + |3-x|)\,dx$ ни ҳисобланг.

## *2-назорат иши*

**1-вариант** **2-К**

1. $\int\limits_{0,5}^{1} \frac{2x dx}{\sqrt{4-x^2}}$ интегрални ҳисобланг.

2. $\int\limits_0^1 (2t^2z - t^2)\ dz \geqslant 0$ тенгсизликни ечинг.

3. $y = 0{,}5x^2 - 3x + 2$ ва $y = x - 4$ функциялар графиклари билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

4°. $x$, $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$ нинг қандай қийматларида $f(x) = 2\cos 2x - \sin x$ нинг бошланғич функциялардан $x = \pi$ да $-1$ га тенг қийматга эга бўладигани нолга айланади?

**2-вариант** **2-К**

1. $\int\limits_0^2 \sqrt{1+x^3}\ dx$ интегрални ҳисобланг.

2. $\int\limits_0^1 (tz^3 + z^2)\ dt > 0$ тенгсизликни ечинг

3. $y = x^2 - 6x + 4$, $y = 4 - x^2$ функциялар графиклари билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

4°. $f(x) = \int\limits_0^x (\sin t - \sin 2t)\ dt$, $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right]$ функция графигига абсциссалар ўқига параллел равишда ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг.

**3- вариант** **2- Қ**

1. $\int\limits_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{25-x^4}}$ интегрални ҳисобланг.

2. $\int\limits_1^2 \left(\frac{24x}{y^3} - 9x^2\right) dy \geqslant 4$ тенгсизликни ечинг.

3. $y = -x^2 + x + 6$ ва $y = 6 - 3x$ функциялар графиклари билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

4°. $f(x) = \int\limits_0^x (\sin 2t - \cos t)\, dt,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$ функция максимумларини топинг.

**4- вариант** **2- К**

1. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{3xdx}{\sqrt{1+x^2}}$ интегрални ҳисобланг.

2. $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \left(\frac{2v}{u} + 3uv^2\right) dv > 2$ тенгсизликни ечинг.

3. $y = 3 - |x|$ ва $y = x^2 - 3$ функциялар графиклари билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

4°. $x \in [0;\ 2\pi]$ нинг қандай қийматларида $f(x) = \cos x - \sin x$ функциянинг бошланғич функцияларидан $x = \frac{3\pi}{2}$ да $-2$ га тенг бўладигани нолга айланади?

**5- вариант** **2- К**

1. $\int\limits_0^2 \frac{x^2 dx}{x^6 + 64}$ интегрални ҳисобланг.

2. $\int\limits_1^2 \left(\frac{2y^3}{x^2} + \frac{4}{3} yx\right) dx > -1$ тенгсизликни ечинг.

3. $|y| = 2x - x^2$ чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

4°. $f(x) = \int\limits_0^x (\cos 2t + \cos t)\, dt,\ \pi < x < \frac{3\pi}{2}$ функция графигига $x + y = 1$ тўғри чизиққа параллел равишда ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг.

**6- вариант** **2- К**

1. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+2x)^3}$ интегрални ҳисобланг.

2. $\int\limits_0^1 \left(v + \frac{16u^2}{v}\right) du \leqslant 4$ тенгсизликни ечинг.

3. $y = x^2 - 4x + 6$, $y = x - 4$, $x = 0$, $x = 3$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

4°. $f(x) = \int\limits_0^x (2\cos^2 t - \sin 2t)\, dt$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ функциянинг минимумларини топинг.

### *3- мустақил иш*

**1- вариант** **3- М**

1. $y = \sqrt{4^x - 2^{x+1} + 1} + 2^x$ функция графигини ясанг.

2. $\left(\frac{1}{9}\right)^{\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ тенгламанинг $x^2 - 8x + 12 \leqslant 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча илдизларини топинг.

3. $f(x) = 7^{\frac{x^2-3}{x}}$ функция берилган.
Топинг: а) $\lim\limits_{x \to \pm 0} f(x)$; б) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$.

4. $y = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{x^2-2x}$ функциянинг энг катта қийматини топинг.

**2- вариант** **3- М**

1. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x-2|+|1-x|}$ функциянинг графигини ясанг.

2. Тенгсизликни ечинг:

$$(7x - x^2 - 6)(\sqrt{5} - 25^{\cos^2 x})^2 > 0.$$

3. $f(x) = \frac{2^x + 2^{1-x} - 3}{2^{x+1} - 4^x}$ функция берилган.

Топинг: а) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$; б) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

4. $y = (3 + 2\sqrt{2})^x + (3 - 2\sqrt{2})^x$ функциянинг энг кичик қийматини топинг.

**3- вариант** **3- М**

1. $y = (0{,}25)^{|x|} \cdot 2^x$ функциянинг графигини ясанг.

2. $0{,}3^{1-\operatorname{tg}^2 x} = 1$ тенгламанинг $x^2 - 6x + 5 < 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча илдизларини топинг.

3. $f(x) = 3^{\frac{2x^2}{x^2-1}}$ функция берилган:
Топинг: а) $\lim\limits_{x \to 1 \pm 0} f(x)$; б) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$.

4. $y = \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)^{4x-x^2}$ функциянинг энг катта қийматини топинг.

**4- вариант** **3- М**

1. $y = \sqrt{3\cdot 3^{2x+1} - 6\cdot 3^{x}+1} + 3^{x+1}$ функция графигини ясанг.
2. $(3 + 2x - x^2)\,(4^{\sin^2 x} - 2)^2 > 0$ тенгсизликни ечинг.
3. $f(x) = \dfrac{4^x - 2^{1+x}}{8^x - 2^{x+2}}$ функция берилган.

Топинг: а) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; б) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$

4. $y = 7^{x^2+2x}$ функциянинг энг кичик қийматини топинг

**5- вариант** **3- М**

1. $y = 2^{|x-1|}\cdot 0{,}5^{-x}$ функция графигини ясанг.
2. $16^{\cos^2 x} = 8$ тенгламанинг $x^2 - 7x + 10 < 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча илдизларини топинг.
3. $f(x) = \left(\dfrac{1}{7}\right)^{\frac{5}{x^2-4}}$ функция берилган.

Топинг: а) $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} f(x)$; б) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

4. $y = \dfrac{3^x}{9^x+1}$ функциянинг энг катта қийматини топинг.

**6- вариант** **3- М**

1. $y = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|} + \left(\frac{1}{2}\right)^x}$ функция графигини ясанг.
2. $(x^2 - x - 6)\left(\dfrac{1}{5} - 0{,}008^{\operatorname{ctg}^2 x}\right)^2$ тенгсизликни ечинг.
3. $f(\ ) = \dfrac{8^x - 2\cdot 4^x + 1}{8^x - 2^x}$ функция берилган.

Топинг: а) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; б) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

4. $y = 5^{1+x} + 5^{1-x}$ функциянинг энг кичик қийматини топинг.

## *4- мустақил иш*

**1- вариант** **4- М**

1. $2^{2x+|x|} = \dfrac{1}{3}$ тенгламани ечинг.
2. Ифодани соддалаштиринг:

$$0{,}2^{\log_5 0{,}5} + \log_{\sqrt{3}} \frac{9}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{7+2\sqrt{10}}.$$

3. Функция графигини ясанг:

$$y = -\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3} - x\right) + \log_3 \sqrt{9x^2 - 6x + 1}.$$

4. $\log_{12} 3 = a$ эканини билган ҳолда $\log_4 36$ ни топинг.

**2- вариант** **4- М**

1. $2^{|x-3|+2x}=63$ тенгламани ечинг.
2. Ифодани соддалаштиринг:

$$4^{3\log_{2\sqrt{2}}(5-\sqrt{10})-4\log_4(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$$

3. Функция графигини ясанг:

$$y=\log_{0,5}(16-8x+x^2)+\log_2(2x-8).$$

4. $\log_2 3=a$, $\log_5 3=b$ ва $\log_7 3=c$ эканини билган ҳолда $\log_{140}9$ ни топинг.

**3- вариант** **4- М**

1. $3^{\left|\frac{x}{2}-1\right|+x}=8$ тенгламани ечинг.

2. Ифодани соддалаштиринг:

$$5^{\log_{\sqrt{5}}2}+\log_3\frac{5-2\sqrt{6}}{9}+\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(\sqrt{3}-\sqrt{2}).$$

3. Функция графигини ясанг:

$$y=\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)-\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{4x^2-4x+1}.$$

4. $\log_2 3=a$, $\log_5 2=b$ эканини билган ҳолда $\log_{60}8$ ни топинг.

**4- вариант** **4- М**

1. $0{,}7^{3|x|-x}=2$ тенгламани ечинг.
2. Ифодани соддалаштиринг:

$$6^{\log_{\sqrt{6}}(7+\sqrt{35})+2\log_6\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}}.$$

3. Функция графигини ясанг:

$$y=\log_3\left(2-\frac{x}{3}\right)-\log_{\frac{1}{3}}(x^2-12x+36).$$

4. $\log_{20}4=a$ эканини билган ҳолда $\log_{25}10$ ни топинг.

**5- вариант** **4- М**

1. $0{,}2^{2x-|x-1|}=0{,}03$ тенгламани ечинг.
2. Ифодани соддалаштиринг:

$$3^{\log_{\frac{1}{3}}0{,}04}+\log_{25}(3+2\sqrt{2})-\log_{\frac{1}{5}}(\sqrt{2}-1).$$

3. Функция графигини ясанг: $y = \log_2 (|x - 4| + x)$.

4. $\log_3 6 = a$, $\log_5 6 = b$, $\log_{100} 6 = c$ эканини билган ҳолда $\log 6$ ни топинг.

**6- вариант** 4- М

1. Тенгламани ечинг: $7^{\frac{x}{3} + \frac{|x-1|}{4}} = 2$.

2. Ифодани соддалаштиринг: $\left(\frac{1}{4}\right)^{9\log_8 \frac{3-\sqrt{5}}{2} + 4\log_{2\sqrt[3]{2}} (5+3\sqrt{5})}$

3. Функция графигини ясанг:

$$y = |\log_3 (x - 2)| + \log_3 (3x - 6).$$

4. $\log_3 2 = a$, $\log_5 3 = b$ эканини билган ҳолда $\log_{30} 18$ ни топинг.

## *3- назорат иши*

**1- вариант** 3- К

1. $(x^2 - 4) \log_3 (1 - x^2 - 3x) = 0$ тенгламани ечинг.
2. $6^{3x-2} \leqslant 2^{2x} 3^{5x-6}$ тенгсизликни ечинг.
3. $\log_2 (2^x + 1) + \log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} 3 = \log_2 3 - x$ тенгламани ечинг.
4. $\log_2 \sin x - 3\log_{\sin x} 2 > 2$ тенгсизликни ечинг.
5. $\log_2 \cos x = \log_4 \sin 2x$ тенгламани ечинг.
6°. $\log_7 8$ ва $\log_6 7$ сонларини солиштиринг.

**2- вариант** 3- К

1. $(x^2 - x - 2) \log_2 (x^2 - 4x + 4) = 0$ тенгламани ечинг.
2. $7^{\operatorname{tg} x} + 7^{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} \leqslant \frac{50}{7}$ тенгсизликни ечинг.
3. $\log_9^2 (27x) - 2 \log_3 \frac{\sqrt{3x}}{3} = 4^{0,5 + \log_8 2\sqrt{2}}$ тенгламани ечинг.
4. $\log_{x^2 - \frac{5}{4}} (4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 9) \leqslant 0$ тенгсизликни ечинг.
5. $\log_{\sqrt{3}} (-\sin x) = \frac{1}{2} + \log_3 \frac{\sin 2x}{2}$ тенгламани ечинг.
6°. $\log_{24} 72$ ва $\log_{12} 18$ сонларини солиштиринг.

**3- вариант** 3- К

1. $\left(2x - \frac{1}{x} - 1\right) \log_{0,5} (1 - x^2) = 0$ тенгламани ечинг.
2. $5^{2x^2 - 3x} + 5^{4x^2 - 6x + 2} > 26$ тенгсизликни ечинг.

3. $\log_7 (3^{x-1} + \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 0{,}125) + x(\log_7 21 - 1) = 1 + \log_7 9$ тенгламани ечинг.

4. $\log_2 \cos x - \log_{\cos x} 4 \leq 1$ тенгсизликни ечинг.

5. $\log_{\frac{1}{3}} (4\cos x) = \log_3 \sin x$ тенгламани ечинг.

6°. $\log_6 7$ ва $\log_5 6$ сонларнни солиштиринг.

**4- вариант** **3- К**

1. $\operatorname{tg} \pi x \log_3 \left(\frac{5}{2} x - x^2\right) = 0$ тенгламани ечинг.

2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x - \frac{3}{x} - \frac{1}{2}} < \frac{1}{\sqrt{27}}$ тенгсизликни ечинг.

3. $\log_3 5 + \left(1 + \frac{1}{2x}\right) \log_3 2 = \log_3 \left(2^{\frac{1}{x}} + \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} 25\right)$ тенгламани ечинг.

4. $\log_4^2 (2x) + 3\log_2 x < 4$ тенгсизликни ечинг.

5. $\log_{0,5} \sin x = 2\log_{0,25} (-\cos x)$ тенгламани ечинг.

6°. $\log_3 6$ ва $\log_{18} 72$ сонларини солиштиринг.

**5- вариант** **3- К**

1. $\left(1 + \frac{2}{x}\right) \log_4 (3x - x^2 + 1) = 0$ тенгламани ечинг.

2. $5^{\sin \pi x} + 5^{1 - \sin \pi x} \geq 6$ тенгсизликни ечинг.

3. $\lg (2^x + 1) + x(2 - \lg 50) = \lg 3 - \lg 5 - 0{,}5\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2$ тенгламани ечинг.

4. $2\log_2 x - \log_x 16 < 2$ тенгсизликни ечинг.

5. $1 + \log_{\sqrt{2}} \cos x = \log_2 (3 - 3\sin x)$ тенгламани ечинг.

6°. $\log_{10} 11$ ва $\log_9 10$ сонларини солиштиринг.

**6- вариант** **3- К**

1. $\operatorname{ctg} \pi x \log_3 (4x^2 - 4x + 1) = 0$ тенгламани ечинг.

2. $4 \cdot 3^{4x-2} - 9 \cdot 2^{4x-2} < 5 \cdot 6^{2x-1}$ тенгсизликни ечинг.

3. $2\log_4^2 (8x) + 3\log_2 \sqrt{\frac{x}{2}} = 3^{\frac{9}{4} \log_3 \sqrt{3}\ 4}$ тенгламани ечинг.

4. $\log_{\frac{1}{5}} (2x + 5) + \log_5 (16 - x^2) \leq 1)$ тенгсизликни ечинг.

5. $\log_5(\sqrt{2}\sin x) = \log_{25}(2+\cos x)$ тенгламани ечинг.

6°. $\log_2 6$ ва $\log_{24} 648$ сонларини солиштиринг.

## *5- мустақил иш*

**1- вариант** 5- М

1. $f(x) = (2x+1)\,e^{2x}$ функция берилган.

а) Функциянинг монотонлик оралиқларини, экстремум нуқталарини, қавариқлик, ботиқлик оралиқларини, эгилиш нуқталарини топинг.

б) Функциянинг $x \in [-2;\ 0)$ даги қийматлари тўпламини топинг.

2. $y = x^2 + 1 - \ln(2x-1)$ функция графигига $Ox$ ўқига параллел равишда ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг.

3. $f(x) = \frac{x+1}{x}$ функциянинг $x = e$ да $e$ га тенг қиймат қабул қилувчи $F(x)$ бошланғич функциясини топинг, бунда $x > 0$. Қандай нуқталарда $y = F(x)$ эгри чизиқ $Ox$ ўқини кесади?

**2- вариант** 5- М

1. $f(x) = x + \ln(x^2+1)$ функция берилган.

а) Функциянинг монотонлик оралиқларини, экстремум нуқталарини, қавариқлик, ботиқлик оралиқларини, эгилиш нуқталарини топинг.

б) Функциянинг $x \in [-3;\ 0]$ даги қийматлари тўпламини топинг.

2. $y = \frac{2x+1}{e^{2x}}$ функция графигига унинг максимум нуқтасида ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг.

3. $\int e^{3\cos x+2}\sin x dx$ ни ҳисобланг.

**3- вариант** 5- М

1. $f(x) = \frac{2^x + 2^{1-x} + x\ln 2}{\ln 2}$ функция берилган.

а) Функциянинг монотонлик оралиқларини, экстремум нуқталарини, қавариқлик ва ботиқлик оралиқларини, эгилиш нуқталарини топинг.

б) Функциянинг $x \in [-1;\ 1]$ даги қийматлари тўпламини топинг.

2. $y = \ln(5-x^2)$ функция графигига $y = -4x$ тўғри чизиққа параллел равишда ўтган уринманинг тенгламасини тузинг.

3. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x < 0 \text{ да } 1, \\ x \geqslant 0 \text{ да } e^x \end{cases}$$

функциянинг шундай бошланғич функциясини топингки, унинг графиги $M(-1;\ 2)$ нуқтадан ўтсин.

**4- вариант** 5- М

1. $f(x) = x - 1 - \ln(2x-6)$ функция берилган.

а) Функциянинг монотонлик оралиқларини, экстремум нуқталарини, қавариқлик, ботиқлик оралиқларини, эгилиш нуқталарини топинг.

б) Функциянинг $x \in [4;\ 5]$ даги қийматлари тўпламини топинг.

2. $y = e^x + e^{-x}$ функция графигига $y = 1{,}5\,x$ тўғри чизиққа параллел равишда ўтувчи уринманинг тенгламасини ёзинг.

3. $f(x) = 1 + e^{2x}$ функциянинг графиги $M\left(\frac{1}{2};\ \frac{e}{2}\right)$ нуқта орқали ўтувчи $F(x)$ бошланғич функциясини топинг. $y = F(x)$ эгри чизиқнинг $Ox$ ўқи билан кесишиш нуқтаси координаталарини ҳам топинг.

**5- вариант** 5- М

1. $f(x) = \frac{4^x - 3\cdot 2^x}{\ln 2} + x$ функция берилган.

а) Функциянинг монотонлик оралиқларини, экстремум нуқталарини, қавариқлик, ботиқлик оралиқларини, эгилиш нуқталарини топинг.

б) Функциянинг $x \in [0;\ 1]$ даги қийматлари тўпламини топинг.

2. $y = x^2 - 3x + \ln x$ функция минимум нуқтасида унинг графигига ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг.

3. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx$ ни ҳисобланг.

**6- вариант.** 5- М

1. $f(x) = x - 1 + \ln(3-x)$ функция берилган.

а) Функциянинг монотонлик оралиқларини, экстремум нуқталарини, қавариқлик, ботиқлик оралиқларини, эгилиш нуқталарини топинг.

б) функциянинг $x \in [0;\ 2]$ даги қийматлари тўпламини топинг.

2. $y = xe^{2x^2-5x}$ функция минимум нуқтасида унинг графигига ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг.

3. $f(x) = -1 - \frac{1}{x\ln 4}$ функциянинг $x = 2$ да 2,5 га тенг қиймат қабул қилувчи $F(x)$ бошланғич функциясини топинг, бунда $x > 0$. Қайси нуқталарда $y = F(x)$ эгри чизиқ $Ox$ ўқини кесиб ўтади?

## *4- назорат иши*

**1- вариант** 4- К

1. Лимитни топинг; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+15}{3x+1}\right)^{x-1}$.

2. Функцияни экстремум ва монотонликка текширинг:

$$f(x) = x^2 - \ln(2x-1).$$

3. $M\left(2;\ \frac{1}{2}\right)$ нуқта орқали ўтувчи эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасида уринманинг бурчак коэффициенти нуқта ординатасининг абсциссасига қарама-қарши ишора билан олинган нисбатига тенглигини билган ҳолда, шу эгри чизиқни топинг.

4. $y = 2^{3-x}$, $y = 4^x$, $y = 16$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5. $|\cos x| = 2\cos x + \sin x$ тенгламанинг $[0;\ 2\pi]$ кесмага тегишли барча илдизларини топинг.

6°. $a$ нинг қандай қийматларида

$$4^x - (a+3)\cdot 2^x + 4a - 4 = 0$$

тенглама битта илдизга эга бўлади?

**2- вариант**

**4-К**

1. Лимитни топинг:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\operatorname{tg} 2x)}{\ln(1+\sin 3x)}.$$

2. $f(x) = \frac{25^x - 2\cdot 5^{x+1}}{\ln 5}$ функциянинг $[0;\ 2]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

3. Ньютон қонуни бўйича жисмнинг совиш тезлиги жисм ва муҳит ҳароратлари айирмасига пропорционал. Ҳарорати 10° бўлган резервуардаги жисм 30 мин да 100° дан 70° гача совиган. Неча минутдан сўнг у 50° гача совийди?

4. $xy = 2$, $y = 4$, $x = 1$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5. $2|\sin x|\cos x = \sin^2 x$ тенгламанинг $[0;\ 2\pi]$ кесмага тегишли барча илдизларини топинг.

6°. $a$ нинг қандай қийматларида

$$25^x - (a-4)\,5^x - 2a^2 + 10a - 12 = 0$$

тенглама ҳақиқий илдизларга эга бўлмайди?

**3- вариант**

**4-К**

1. Лимитни топинг: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+7}{4x+1}\right)^{x+2}$.

2. $f(x) = 0{,}5x\ln x - x\ln 3$ функциянинг $[3;\ 4{,}5]$ кесмадаги энг кичик қийматини топинг.

3. Жисм тўғри чизиқли ҳаракат қилиб, белгиланган нуқтадан узоқлашади. Ҳаракат тезлиги исталган вақтда ўтилган йўлнинг $\frac{1}{3}$ қисмига сон жиҳатдан тенг. Агар бошланғич вақт моментида ўтилган йўл $e$ га тенг бўлса, йўл, тезлик ва тезланишни вақтнинг функцияси сифатида топинг.

4. $y = 3^x$, $y = 4 - x$, $y = 1$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5. $|\sin x| = 2\sin x + \cos x$ тенгламанинг $[0;\ 2\pi]$ кесмага тегишли барча илдизларини топинг.

6°. $a$ нинг қандай қийматларида

$$36^x + (a - 1)6^x + a - 2a^2 = 0$$

тенглама икки ҳақиқий ва ҳар хил илдизга эга бўлади?

**4- вариант** **4- К**

1. Лимитни топинг: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + \sin 2x)}{\operatorname{tg} 3x}$.

2. Функцияни экстремум ва монотонликка текширинг:

$$y = x^2 - 2x - \ln(1 - 2x).$$

3. N(0; 2) нуқта орқали ўтувчи эгри чизиқнинг исталган нуқтасида унга ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти уриниш нуқтаси координаталари кўпайтмасига тенглигини билган ҳолда эгри чизиқнинг ўзини топинг.

4. $y = 2 - e^x$ ва $y = e^{-x} - \dfrac{4}{3}$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5. $\sin 2x = \cos x\,|\cos x|$ тенгламанинг $[0;\ 2\pi]$ кесмага тегишли барча илдизларини топинг.

6°. $a$ нинг қандай қийматларида

$$9^x - 3^{x+1} - a^2 + 5a - 4 = 0$$

тенглама битта ҳақиқий илдизга эга бўлади?

**5- вариант** **4- К**

1. Лимитни топинг: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x + 1}{2x - 3}\right)^{3x-1}$.

2. $y = e^{-2x}\sin x$ функциянинг $\left[\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ кесмада камайишини исботланг.

3. Радиоактив парчаланишнинг бошида 1 г радий $A$ бўлган. Агар унинг ярим парчаланиш даври 3 мин. га тенг бўлса, неча минутдан сўнг ундан 0,125 г қолади? (Радиоактив модда $m(t)$ массасининг камайиш тезлиги $t$ вақт ўтиши билан унинг миқдорига пропорционал бўлиши маълум.)

4. $y = \dfrac{6 - 4x}{x}$ ва $y = 4 - 2x$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5. $|\cos x| = 2\sin x - \cos x$ тенгламанинг $[0,\ 2\pi]$ кесмага тегишли барча илдизларини топинг.

6°. *a* нинг қандай қийматларида

$$49^x + (a - 1)\,7^x - 2a^2 + 4a - 2 = 0$$

тенглама бирорта ҳам ҳақиқий илдизга эга бўлмайди?

**6- вариант** 4- К

1. Лимитни ҳисобланг: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + \arcsin 2x)}{\ln(1 + \operatorname{tg} 5x)}$.

2. Функциянинг $[-1;\ 2]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг:

$$f(x) = \frac{3^x + 3^{2-x}}{\ln 3} + 8x.$$

3. $M(0;\ -2)$ нуқта орқали ўтувчи эгри чизиқнинг исталган нуқтасида уринманинг бурчак коэффициенти шу нуқтанинг 3 бирлик орттирилган ординатасига тенг, эгри чизиқнинг ўзини топинг.

4. $y = \dfrac{x}{x-2}$, $y = x$, $x = -4$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5. $\sin^2 x = |\sin x| \cos x$ тенгламанинг $[0;\ 2\pi]$ кесмага тегишли барча илдизларини топинг.

6°. *a* нинг қандай қийматларида

$$16^x - (5 - a)\,4^x + 6 - 2a = 0$$

тенглама иккита ҳақиқий ва ҳар хил илдизга эга бўлади?

## *6- мустақил иш*

**1- вариант** 6- М

1. $f(x) = (1 - 2\sin 3x)^{\frac{4}{3}}$ функция берилган.

Топинг: а) $D(f)$; б) $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

2. Ҳисобланг: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6^x + 3^x - x^3}{6^x - 3^x + x^5}$.

3. Функцияни текширинг ва унинг графигини ясанг:

$$y = x^2(1 - \ln x).$$

**2- вариант** 6- М

1. $f(x) = (\sin x - \cos x)^{-\sqrt{2}}$ функция берилган:

Топинг: а) $D(f)$; б) $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2. Ҳисобланг: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^2 x + 3x}{\ln x + 5x}$.

3. Функцияни текширинг ва унинг графигини ясанг: $y = x \cdot e^{1-x^2}$

**3- вариант** **6- М**

1. $f(x)=(\cos^2 2x-0{,}25)^{\frac{3}{2}}$ функция берилган.
Топинг: а) $D(f)$; б) $f'(0)$.

2. Ҳисобланг: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4^x+2^x+x^2}{4^{x-1}-2^x+3x^3}$.

3. Функцияни текширинг ва унинг графигини ясанг:

$$y=x(2-\ln x)^2.$$

**4- вариант** **6- М**

1. $f(x)=(1-\operatorname{tg}2x)^{\pi}$ функция берилган.
Топинг: а) $D(f)$; б) $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2. Ҳисобланг: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^3 x}{\sqrt[5]{x^2}+2}$.

3. Функцияни текширинг ва унинг графигини ясанг: $y=\dfrac{e^{2x-1}}{x^2}$.

**5- вариант** **6- М**

1. $f(x)=(\cos 2x+\sin 2x)^{\frac{8}{3}}$ функция берилган.
Топинг: а) $D(f)$; б) $f'(0)$.

2. Ҳисобланг: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x+x^2+3}{5^x-4x^2-7}$.

3. Функцияни текширинг ва унинг графигини ясанг: $y=\dfrac{1+\ln x}{x^2}$.

**6- вариант** **6- М**

1. $f(x)=(4\sin^2 x-3)^{-\frac{2}{3}}$ функция берилган.
Топинг: а) $D(f)$; б) $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2. Ҳисобланг: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x+\ln x+2x^3}{\ln^3 x+3\ln x-3x^3}$.

3. Функцияни текширинг ва унинг графигини ясанг: $y=\dfrac{1+x^2}{e^x}$.

## *7- мустақил иш*

**1- вариант** **7- М**

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\left(\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}+\frac{a+\sqrt{ab}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}\right)^2(a^2+ab-2b^2)^2.$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+5)(2x-\sqrt{4x^2+3})$ ни топинг.

3. $y=\operatorname{tg}x\sqrt{2+2\cos 2x}$ функциянинг графигини ясанг.

**2- вариант** 7- М

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\left(\frac{m-\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{m}-1}-\frac{m+\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[3]{m}+1}\right)\left(\frac{\sqrt[4]{mn^3}+\sqrt[4]{m^3n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}+\frac{1-\sqrt{mn}}{\sqrt[4]{mn}}\right)^{-1}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-3x^2}}{1-\sqrt{\cos x}}$ ни топинг.

3. $y=\sqrt{(1-|x-2|)^2}$ функциянинг графигини ясанг.

**3- вариант** 7- М

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\sqrt[3]{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a^{-1}b^3}}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}}+\frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}\right)^{-1}}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4-\sqrt{x+15}}{2\sqrt{x}-\sqrt{5-x^2}}$ ни топинг.

3. $y=\dfrac{\sin 3x-\sin x}{\sqrt{2-2\cos 2x}}$ функциянинг графигини ясанг.

**4- вариант** 7- М

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{(\sqrt{m}-\sqrt{n})^3+2m^2:\sqrt{m}+n\sqrt{n}}{m\sqrt{m}+n\sqrt{n}}+\frac{3\sqrt{mn}-3n}{m-n}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x^2-12}}{\sqrt{1+2x}-3}$ ни топинг.

3. $y=\operatorname{ctg} x\sqrt{1-\cos 2x}$ функциянинг графигини ясанг.

**5- вариант** 7- М

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\left(a^2\sqrt{b}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\sin 2x}-1}{2-\sqrt{5x+4}}$ ни топинг.

3. $y=\sqrt{(|x-3|-2)^2}$ функциянинг графигини ясанг.

**6- вариант** 7- М

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\left(x+y^{\frac{3}{2}}:\sqrt{x}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)(\sqrt{9x^2+2}-3x)$ ни топинг.

3. $y=\dfrac{\cos x+\cos 3x}{\sqrt{1+\cos 2x}}$ функциянинг графигини ясанг.

## *5- назорат иши*

**1- вариант** 5- K

Тенгламани ечинг:

1. $\sqrt{7-\sqrt{x^2-4x+4}}=x-3.$
2. $\sqrt{1-2\cos x}=\sin x.$
3. $\sqrt[3]{x+5}=\sqrt{x+1}.$

Тенгсизликларни ечинг:

4. $\sqrt{2x+7}-\sqrt{5-x}>\sqrt{x}.$
5. $\sqrt{\log_2 x}-\log_4\sqrt{2x}>0,5.$

6°. Тенгсизликни ечинг:

$$7+2x\geqslant 2\sqrt{x^2+9x}+\sqrt{x}-\sqrt{x+9}.$$

**2- вариант** 5- K

Тенгламаларни ечинг:

1. $x+\sqrt{3+\sqrt{x^2-2x+1}}=4.$
2. $\sqrt{2-\sqrt{3}\sin x}=\sqrt{2}\cos x.$
3. $\sqrt{2x^2-5x+12}+2x^2=5x.$

Тенгсизликларни ечинг:

4. $\sqrt{5-x^2}\geqslant x+1.$
5. $2^{x+\sqrt{x}}+4^x\leqslant 6\cdot 4^{\sqrt{x}}.$

6°. Тенгсизликни ечинг:

$$\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}\geqslant 3^{2-x}+3^{x-2}.$$

**3- вариант** 5- Қ

Тенгламаларни ечинг:

1. $x+\sqrt{7+\sqrt{x^2-6x+9}}=4.$
2. $\sqrt{3-2\cos x}=-\sqrt{3}\sin x.$
3. $\sqrt[4]{\dfrac{x+1}{3-x}}+\sqrt[4]{\dfrac{3-x}{x+1}}=2,5.$

Тенгсизликларни ечинг:

4. $(x^2-1)\sqrt{x^2-4x+3}\geqslant 0.$

5. $\sqrt{1-\log_5(x+2)} < \log_5(5x+10)$.

6°. Тенгсизликни ечинг:

$$2\sqrt{x^2+3x} \geqslant 9-2x-\sqrt{x}-\sqrt{x+3}.$$

**4- вариант** 5-К

Тенгламаларни ечинг:

1. $2+\sqrt{3-\sqrt{x^2-2x+1}}=x$.
2. $\sqrt{4-3\sin x}=-2\cos x$.
3. $\sqrt{3x^2-6x+7}+x^2=2x+7$.

Тенгсизликларни ечинг:

4. $\dfrac{(x-2)\sqrt{x^2-5x+4}}{5-x} \geqslant 0$.
5. $\sqrt{5-4^x} > 2^x-1$.

6°. Тенгсизликни ечинг:

$$\sqrt{7-x}+\sqrt{x+1}+\cos 2\pi x \geqslant 5.$$

**5- вариант** 5-К

Тенгламаларни ечинг:

1. $x+\sqrt{3-\sqrt{x^2-6x+9}}=2$.
2. $\sqrt{9+2\cos x}=-3\sin x$.
3. $2x\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^3}-1=0$.

Тенгсизликларни ечинг:

4. $2\sqrt{x}+2-\sqrt{x-1}>3$.
5. $\sqrt{\log_3 x}-2\log_9\sqrt{\dfrac{x}{3}}>0{,}5$.

6°. Тенгсизликни ечинг:

$$2x+5>2\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x}-\sqrt{x+5}.$$

**6- вариант** 5-К

Тенгламаларни ечинг:

1. $\sqrt{6-\sqrt{x^2+4x+4}}-x=2$.
2. $\sqrt{1-2\sin x}=\cos x$.
3. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}=3$.

Тенгсизликларни ечинг:

4. $(x^2-9)\sqrt{x^2+3x-10} \leqslant 0$.

5. $\sqrt{10-9^x} > 4-3^x$.

6°. Тенгсизликни ечинг:

$$\sqrt{6-x}-|x-5|+\sqrt{x-4} \geqslant 2.$$

## *8- мустақил иш*

**1- вариант** **8- М**

1. Агар $\frac{x^2-2xy+4y^2}{x^2+y^2}=1{,}5$ бўлса, $\frac{x}{y}$ нисбатни топинг.

2. $x^2-2x-1=0$ квадрат тенглама берилган, унинг илдизлари $\alpha$ ва $\beta$. Илдизлари $\alpha+2\beta$ ва $\beta+2\alpha$ бўлган янги квадрат тенглама тузинг.

3. $y=2^x+9\cdot2^{2-x}$ функциянинг энг кичик қийматини топинг ва унга $x$ нинг қандай қийматида эришилишини аниқланг.

4. $\cos x+2\sin^3x=0$ тенгламани ечинг.

**2- вариант** **8- М**

1. Агар $\operatorname{tg}\alpha=2$ бўлса, $\frac{\sin^3\alpha+3\sin^2\alpha\cos\alpha}{\cos^3\alpha+\sin^3\alpha}$. ифоданинг қийматини топинг.

2. Илдизлари $\alpha$ ва $\beta$ бўлган $x^2-2x-2=0$ квадрат тенглама берилган. Тенгламани ечмай, $\alpha^5+\beta^5$ ни топинг.

3. $(a^3+b)(a+b^3)\geqslant 4a^2b^2\ (a>0;\ b>0)$ тенгсизлигини исботланг ва тенглик ишораси $a$ ва $b$ нинг қандай қийматларида ўринли бўлишини аниқланг.

4. $9^{x^2+3x}+2\cdot6^{x^2+3x}=3\cdot4^{x^2+3x}$ тенгламани ечинг.

**3- вариант** **8- М**

1. $\frac{x^4-2x^2y^2}{x^2y^2+y^4}=1{,}6$ экани маълум. $\frac{y}{x}$ ни топинг.

2. $a$ нинг қандай қийматларида $x^2+(a+2)x+a$ учҳад илдизлари квадратларининг йиғиндиси 3 га тенг?

3. Барча $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ да

$$\left(2\sin\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(2\cos\alpha+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\geqslant 8$$

бўлишини исботланг. $\alpha\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ нинг қандай қийматларида тенглик ишораси ўринли?

4. $\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{(x-1)^2}=3\sqrt[3]{x^2-1}$ тенгламани ечинг.

**4- вариант** **8- М**

1. $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$ экани маълум; $\frac{x^2+y^2}{x^2-3xy+2y^2}$ ифоданинг қийматини топинг.

2. Илдизлари $\alpha$ ва $\beta$ бўлган $2x^2-2x-1=0$ квадрат тенглама берилган. Илдизлари $\alpha^3\beta$ ва $\alpha\beta^3$ бўлган янги квадрат тенглама тузинг.

3. $a>0$, $b>0$ да $(a^2+ab+b^2)\left(ab+\frac{16}{a^3b^3}\right)\geqslant 24$ тенгсизлиги ўринли бўлишини исботланг. Тенглик ишораси $a$ ва $b$ нинг қандай қийматларида ўринли?

4. $\sin^3 x+3\sin^2 x\cos x=2\cos x$ тенгламани ечинг.

**5- вариант** **8- М**

1. Агар $\operatorname{ctg}\alpha=2$ бўлса, $\frac{\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha}{3\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}$ ифоданинг қийматини топинг.

2. $a$ нинг қандай қийматларида $x^2-(a+1)x+a^2=0$ тенглама илдизлари квадратларининг йиғиндиси энг кичик бўлади?

3. $a>0$, $b>0$, $c>0$ да $a^5b+b^5c+c^5a\geqslant 3a^2b^2c^2$ тенгсизликнинг тўғри бўлишини исботланг.

4. Тенгламани ечинг:

$$\log_2^2(x+2)-3\log_2(x+2)\log_2(1-x)+2\log_2^2(1-x)=0.$$

**6- вариант** **8- М**

1. Агар $\frac{(y+x)(y-2x)}{x^2+3y^2}=-0{,}5$ бўлса, $\frac{y}{x}$ нисбатни топинг.

2. Илдизлари $\alpha$ ва $\beta$ бўлган $x^2-3x+1=0$ квадрат тенглама берилган. Тенгламани ечмай, $\frac{\alpha^4\beta+\alpha\beta^4}{\alpha^2+\beta^2}$ ни топинг.

3. $y=\frac{x^2+x+4}{x+1}$ функциянинг $(0;+\infty)$ даги энг кичик қийматини топинг.

4. $2\sin^3 x+4\cos^3 x=3\sin x$ тенгламани ечинг.

## *9- мустақил иш*

**1- вариант** **9- М**

1. Тенгламалар системалари тенг кучлими:

$$\begin{cases}x-y=0,\\2x+y=3\end{cases}\quad \text{ва}\quad \begin{cases}xy=y^2,\\2x+y=3\ ?\end{cases}$$

2. $a$ нинг қандай қийматларида

$$\begin{cases}ax+y=1,\\x+y=2,\\x-y=a\end{cases}$$

тенгламалар системаси ўринли?

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases}x^2+2y^2-x+2y=6,\\1{,}5x^2+3y^2-x+5y=12.\end{cases}$$

**2- вариант** **9-М**

1. Ушбу

$$\begin{cases} x^2 = (y-1)^2, \\ (x-4)(y-2x) = x(2x-y) \end{cases}$$

тенгламалар системаси қандай тенгламалар системалари мажмуасига тенг кучли?

2. $a$ нинг қандай қийматларида

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ y + z = 4, \\ x + z = 2, \\ x + 2y + 3z = a \end{cases}$$

тенгламалар системаси ўринли?

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 + 2x^2y - 9 = 0, \\ x - y - x^2y + 3 = 0. \end{cases}$$

**3- вариант** **9- М**

1. Ушбу $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ ва $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ (3x - 2y)^2 = 16 \end{cases}$

тенгламалар системалари тенг кучлими?

2. $a$ нинг қандай қийматларида

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x + ay = 3, \\ ax + y = 3 \end{cases}$$

тенгламалар системаси ўринли?

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x^2y^2 - \dfrac{2x}{y} + 3xy - 2 = 0, \\ 2x^2y^2 + 2xy - 1 - \dfrac{3x}{y} = 0. \end{cases}$$

**4- вариант** **9- М**

1. Ушбу

$$\begin{cases} (x + y)^2 = x + y, \\ (x + y)(y + 1) = 2x(y + 1) \end{cases}$$

тенгламалар системаси қандай тенгламалар системалари мажмуасига тенг кучли?

2. $a$ нинг қандай қийматларида

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ y - z = 3, \\ 2x - z = a, \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

тенгламалар системаси ўринли?

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x-3y+2xy=3, \\ y-x-xy=-3. \end{cases}$$

**5- вариант** 9- М

1. Ушбу $\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=1 \end{cases}$ ва $\begin{cases} (x-y)(x^2+4y^2)=x^2+4y^2, \\ x+y=1 \end{cases}$

тенгламалар системалари тенг кучлими?

2. $a$ нинг қандай қийматларида

$$\begin{cases} x+y=a, \\ ax-2y=4, \\ x+ay=2 \end{cases}$$

тенгламалар системаси ўринли?

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 3x+2y+\dfrac{x}{x+y}=5{,}5, \\ x+3y-\dfrac{2x}{x+y}=3. \end{cases}$$

**6- вариант** 9- М

1. Ушбу

$$\begin{cases} (x+y)(x-2y)=2x-4y, \\ (x-2)^2+y(x-2)-2y^2=0 \end{cases}$$

тенгламалар системаси қандай тенгламалар системалари мажмуасига тенг кучли?

2. $a$ нинг қандай қийматларида

$$\begin{cases} x+2y=0, \\ y+2z=0, \\ z+2x=3a, \\ x+y+2z=a^2 \end{cases}$$

тенгламалар системаси ўринли?

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 2x^2y^4+x^2y+5xy^2+2=0, \\ 3x^2y^4+x^2y+3xy^2-1=0. \end{cases}$$

### *6- назорат иши*

**1- вариант** 6- К

1. $x^2+y^2-2y-8=0$ тенгламанинг графигини ясанг.

2. $a$ нинг қандай қийматларида

$$\begin{cases} (a+1)x+y=3, \\ 2x-(a-2)y=6 \end{cases}$$

тенгламалар системаси ечимга эга бўлмайди?

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x + y - 2xy = -1, \\ x^2 + y^2 + 3xy = 11. \end{cases}$$

4. Нефть конида аввал икки пармалаш қурилмаси ишлаган, бир қанча вақтдан сўнг учинчи қурилма ҳам ишга тушган, натижада конининг унумдорлиги 2 марта ошган. Иккинчи қурилма бир ярим йилда қанча нефть берса, биринчи ва учинчи қурилма уч ойда шунча нефть бериши маълум. Иккинчи қурилманинг унумдорлиги биринчи қурилма унумдорлигининг неча фоизини ташкил этади?

5. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3x$ тенгламани ечинг.

6°. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x + y = 10, \\ xy - z^2 = 25. \end{cases}$$

**2- вариант** **6- К**

1. $|x - 1| + |y| = 2$ тенгламанинг графигини ясанг.

2. $b$ нинг қандай қийматларида

$$\begin{cases} x - (b - 1)y = 2, \\ (b + 2)x + 2y = 4 + b^2 \end{cases}$$

система чексиз кўп ечимга эга бўлади?

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x^3 + 2x^2y - 3y^3 = 0, \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$$

4. $A$ дан $B$ га ва $B$ дан $A$ га қараб икки пиёда бир вақтда йўлга чиқди. Биринчи пиёда йўлнинг ярмини ўтганида, иккинчисига 15 км ни ўтиш қолган, иккинчиси йўлнинг ярмини ўтганда эса, биринчисига 8 км ни ўтиш қолган. Биринчи пиёда ўтишни тугатган пайтда иккинчисига неча километрни ўтиш қолади?

5. $\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg} 5x$ тенгламани ечинг.

6°. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 8 = z, \\ 6x + 4y - z \geqslant 2. \end{cases}$$

**3- вариант** **6- К**

1. $y^2 - x^2 = 1 - 2x$ тенгламанинг графигини ясанг.

2. $m$ нинг қайси қийматларида

$$\begin{cases} (m + 1)x - y = m, \\ (m - 3)x + my = -9 \end{cases}$$

система ягона ечимга эга бўлади?

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x - xy + y = 1, \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y = 11. \end{cases}$$

4. Уч бўлак мато сотилмоқда. Биринчи бўлакнинг учдан бири, иккинчисининг ярми ва барча матонинг $\frac{1}{6}$ қисми бўлган учинчи бўлакнинг ҳаммаси сотилди. Агар жами бўлиб иккинчи бўлакдагича мато қолган бўлса, неча фоиз мато сотилган?

5. $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 7x$ тенгламани ечинг.

6°. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} y + x - z = 1, \\ 2xy - z^2 = 1. \end{cases}$$

**4- вариант** **6- К**

1. $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ тенглама графигини ясанг.

2. $a$ нинг қандай қийматларида

$$\begin{cases} x + ay = 1, \\ ax - 3ay = 2a + 3 \end{cases}$$

тенгламалар системаси ечимларга эга бўлмайди?

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1, \\ 3x^2 - y^2 = 2. \end{cases}$$

4. Икки мотоциклчи бир вақтда $A$ ва $B$ пунктлардан бир-бирлари томон йўлга чиқди ва 1 соату 20 мин дан сўнг учрашди. Агар улардан иккинчиси бутун йўлга 6 соат кам сарфлагани маълум бўлса, биринчисига $A$ дан $B$ гача барча йўлни ўтиш учун қанча вақт керак бўлади?

5. $\operatorname{ctg} 5x = \operatorname{ctg} 4x$ тенгламани ечинг.

6°. Системани ечинг:

$$\begin{cases} 2y - 2x - z = 1, \\ x^2 + y^2 + 2yz + 1 \leqslant 0. \end{cases}$$

**5- вариант** **6- К**

1. $|x| + |y| + 2 = 1$ тенгламанинг графигини ясанг.

2. $B$ нинг қандай қийматларида

$$\begin{cases} bx + y = 2, \\ x + by = 3b \end{cases}$$

тенгламалар системаси чексиз кўп ечимга эга бўлади?

3. Тенгламилар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + xy = 11, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

4. Икки велосипедчи бир вақтда $A$ ва $B$ пунктлардан бир-бирлари томон йўлга чиқди ва 2 соату 40 мин дан сўнг учрашди. Агар уларнинг иккаласи ҳам $A$ пунктдан чиқиб, $B$ пунктга жўнаганларида ва бунда иккинчи велосипедчи биринчига қараганда 3 соат кейин чиққанида иккинчи велосипедчи биринчини $A$ дан $B$ гача ма-

софанинг $\frac{3}{4}$ қисмини ўтиш пайтида қувиб етган бўларди. Биринчи велосипедчига $A$ дан $B$ гача йўлни ўтиш учун қанча вақт керак бўлади?

5. $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 6x$ тенгламани ечинг.

6°. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 2(xy + 2z) = z^3 + 13. \end{cases}$$

**6- вариант** **6-K**

1. $||x| - |y|| = 1$ тенгламанинг графигини ясанг.

2. $m$ нинг қандай қийматларида

$$\begin{cases} (m - 1)x + y = 3, \\ 2x + my = 2 \end{cases}$$

тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўлади?

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} y^3 + x^2y - 2x^3 = 0, \\ x^2 + 2xy = 3. \end{cases}$$

4. $A$ ҳажм $B$ ва $C$ ҳажмлар йиғиндисининг учдан бир қисмини, $B$ ҳажм эса $B$ ва $C$ ҳажмлар йиғиндисининг бешдан бир қисмини ташкил қилади. $A$ ва $B$ ҳажмлар йиғиндиси $C$ ҳажмнинг қандай қисмини ташкил этади?

5. $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} 5x$ тенгламани ечинг.

6°. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 - 2yz + 1 \leqslant 0, \\ z - 2x + y = 1. \end{cases}$$

## *10- мустақил иш*

**1- вариант** **10- M**

1. Тенгламалар системасини ечинг ва унинг геометрик интерпретациясини беринг:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 5, \\ 6x + 3y = 7{,}5. \end{cases}$$

2. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + 3y - 2z = 7, \\ 3x + 2y + 5z = 0. \end{cases}$$

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 4\sqrt{xy}, \\ x + 4y = 2. \end{cases}$$

**2- вариант** **10- М**

1. Тенгламалар системасини ечинг ($m$ — параметр);

$$\begin{cases} m^2x + y = 1, \\ 8x + 2y = m. \end{cases}$$

2. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x + y - z = -1, \\ 3x - 2y + 4z = 9. \\ 2x + 3y + 2z = 1. \end{cases}$$

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x + 3\sqrt{xy} = 2, \\ 2\sqrt{xy} - y = 3. \end{cases}$$

**3- вариант** **10-М**

1. Тенгламалар системасини ечинг ва унинг геометрик интерпретациясини беринг:

$$\begin{cases} 4x + y = 6, \\ 10x + 2{,}5y = 15. \end{cases}$$

2. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x - y + z = -1, \\ 2x + 3y + 4z = 5, \\ 3x - 2y - 2z = -7. \end{cases}$$

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3\sqrt[4]{xy}, \\ x + y = 17. \end{cases}$$

**4- вариант** **10-М**

1. Тенгламалар системасини ечинг ($m$ — параметр):

$$\begin{cases} x + (m + 1)y = 1, \\ mx + 2y = m. \end{cases}$$

2. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x - y - z = -1, \\ 4x + 5y - 3z = 6, \\ 2x + 3y - 2z = 3. \end{cases}$$

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 3\sqrt[3]{xy} - 2\sqrt{xy} = 1, \\ x^2 + y^2 - x - y + 3xy = 3. \end{cases}$$

**5- вариант** **10-М**

1. Тенгламалар системасини ечинг ва унинг геометрик интерпретациясини беринг:

$$\begin{cases} x + 3y = 2, \\ 3x - y = -4. \end{cases}$$

2. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} -x + y + z = -3, \\ 2x + 2y - 3z = 3, \\ 3x + 4y + 5z = -6. \end{cases}$$

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{y-5} = 2. \end{cases}$$

**6- вариант** **10- М**

1. Тенгламалар системасини ечинг ($m$ — параметр).

$$\begin{cases} mx + y = 1, \\ x + my = -1. \end{cases}$$

2. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} -x - y + z = 3, \\ 5x + 2y + 3z = -4, \\ 3x + 4y - 2z = -9. \end{cases}$$

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x^2 + y\sqrt{xy} = 14, \\ y^2 + x\sqrt{xy} = -7. \end{cases}$$

### *11- мустақил иш*

**1- вариант** **11- М**

1. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 3^{x+1} \cdot 2^8 = \frac{1}{9}, \\ y - x = 3. \end{cases}$$

2. Тенгламалар системасининг $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $\pi \leqslant y \leqslant 2\pi$ шартни қаноатлантирувчи барча ечимларини топинг:

$$\begin{cases} (1 - \cos 2x) \operatorname{tg} y = 1{,}5, \\ \operatorname{tg} y - \cos x = 0{,}5. \end{cases}$$

3. Барча шундай $x$ ва $y$ сонларини топингки, улар учун

$$\begin{cases} 16 \log_2^2 x + 1 = 2 \log_2 y, \\ \log_2 x^2 > \log_4 y \end{cases} \quad \text{бўлсин.}$$

**2- вариант** **11-М**

1. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} y^{1-0{,}2\log_x y} = x^{\frac{4}{5}}, \\ 2 + \log_x\left(1 - \frac{3y}{x^2}\right) = \log_x 4. \end{cases}$$

2. Тенгламалар системасининг $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $\pi \leqslant y \leqslant 2\pi$ шартни қаноатлантирувчи барча ечимларини топинг:

$$\begin{cases} x + y = \frac{5\pi}{2}, \\ \sin x + \cos 2y = -1. \end{cases}$$

3. Барча шундай $x$ ва $y$ сонларини топингки, улар учун

$$\begin{cases} 2^x - 5 = 4y(y+2), \\ 2^{x-2} - y \leqslant 1 \end{cases} \text{ бўлсин.}$$

**3- вариант** **11-М**

1. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} y^x = 16, \\ 625^{\frac{1}{x}} = 2{,}5y. \end{cases}$$

2. Тенгламалар системасининг $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$ шартни қаноатлантирувчи барча ечимларини топинг:

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{2} \sin y, \\ \cos 2x + \sqrt{2} \cos y = 0. \end{cases}$$

3. Барча шундай $x$ ва $y$ сонларини топингки, улар учун

$$\begin{cases} \log_2^2 x + 1 = 2\log_2 y^2, \\ \log_4 x \geqslant \log_2 y \end{cases} \text{ бўлсин.}$$

**4- вариант** **11-М**

1. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} (x+y) \cdot 3^{y-x} = \frac{5}{27}, \\ 3\log_5 (x+y) = x - y. \end{cases}$$

2. Тенгламалар системасининг $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \pi$ шартни қаноатлантирувчи барча ечимларини топинг:

$$\begin{cases} x + y = \frac{5\pi}{2}, \\ \cos x + \sin 2y = 1. \end{cases}$$

3. Барча шундай $x$ ва $y$ сонларини топингки, улар учун

$$\begin{cases} 2^{x+2}-5=y(y-2), \\ 2^{x}+1 \leqslant y \end{cases} \quad \text{бўлсин.}$$

**5- вариант** **11-М**

1. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x^{\frac{x+2y}{4}}=y^{4}, \\ y^{\frac{x+2y}{2}}=x^{2}\,(x>0;\ y>0). \end{cases}$$

2. Тенгламалар системасининг $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$ шартни қаноатлантирувчи барча ечимларини топинг:

$$\begin{cases} 2\cos x=\sin y, \\ 2\sin x+\sqrt{3}\cos 2y=0. \end{cases}$$

3. Барча шундай $x$ ва $y$ сонларини топингки, улар учун

$$\begin{cases} 9\log_2^2 x+1=\log_2 y^2, \\ \log_2 x \geqslant \log_8 y \end{cases} \quad \text{бўлсин.}$$

**6- вариант** **11- М**

1. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \log_2(xy)\log_2\dfrac{x}{y}=3, \\ \log_2^2 x^2+\log_2^2 y^2=20. \end{cases}$$

2. Тенгламалар системасининг $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$ шартни қаноатлантирувчи барча ечимларини топинг:

$$\begin{cases} -\cos x+\cos 4y=1, \\ x+y=\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

3. Барча шундай $x$ ва $y$ сонларини топингки, улар учун

$$\begin{cases} 4^{x}=4y^{2}+1, \\ 2^{2x-1} \leqslant 2y \end{cases} \quad \text{бўлсин.}$$

## *7- назорат иши*

**1- вариант** **7-К**

1. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xyz}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{y+z}{xyz}=\dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{x+z}{xyz}=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

2. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases}\log_3(1+\sqrt{x+y}) = 1 - \log_9 x,\\ x^3 + x^2y = 4.\end{cases}$$

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases}x - y = \frac{\pi}{6}\\ \cos x + \sin 2y = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$$

4. Тенгсизликлар системаси ечимлари тўпламини координата текислигида тасвирланг ва ҳосил бўлган фигуранинг юзини топинг:

$$\begin{cases}x^2 + y^2 \leq 1,\\ y > x^2 - 1.\end{cases}$$

5°. *a* нинг қандай қийматларида

$$\begin{cases}y - \sqrt{x} = a,\\ y - x = 1\end{cases}$$

тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўлади?

**2- вариант** **7-Қ**

1. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10,\\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -4,\\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2,\\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0.\end{cases}$$

2. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2 - 3y} = x - y,\\ 2^{x+1} - 6 = 2^y.\end{cases}$$

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases}\cos(x+y) = 2\cos(x-y),\\ \sin x \sin y = -\frac{1}{4}.\end{cases}$$

4. Тенгсизликлар системаси ечимлари тўпламини координата текислигида тасвирланг ва ҳосил бўлган фигуранинг юзини топинг:

$$\begin{cases}x^2 + y^2 \leq 2x,\\ |y| + 1 \leq x.\end{cases}$$

5°. $a$ нинг қандай қийматларида

$$\begin{cases} y - x = 0, \\ y = \sqrt{x - a} \end{cases}$$

система ягона ечимга эга бўлади?

**3- вариант** **7-К**

1. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 6, \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_1 = 0, \\ x_3 + x_4 + x_1 - x_2 = 2, \\ x_4 + x_1 + x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

2. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} (\sqrt{x + y} + 3)\cdot 2^x = 5\sqrt{x+y}, \\ 2x + \log_2 (x + y) = 4. \end{cases}$$

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x + y = \frac{5\pi}{6}, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

4. Тенгсизликлар системаси ечимлари тўпламини координата текислигида тасвирланг ва ҳосил бўлган фигуранинг юзини топинг:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 2, \\ |y| < 2 - x, \\ x > 1. \end{cases}$$

5°. $a$ нинг қандай қийматларида

$$\begin{cases} y = \sqrt{1 - x}, \\ y = a - x \end{cases}$$

тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўлади?

**4- вариант** **7-К**

1. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \frac{xy}{x + y} = \frac{2}{3}, \\ \frac{yz}{y + z} = \frac{2}{3}, \\ \frac{xz}{x + z} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

2. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \log_2(3-\sqrt{x-2y}) = 1-\log_4 y, \\ xy^2 = 2y^3-1. \end{cases}$$

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \log_3 \operatorname{tg} x + \log_3 \operatorname{tg} y = 0{,}5, \\ \operatorname{tg} x \cos y = \frac{\sqrt{6}}{2}. \end{cases}$$

4. Тенгсизликлар системаси ечимлари тўпламини координата текислигнда тасвирланг ва ҳосил бўлган фигуранинг юзини топинг:

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 2y, \\ y \leqslant 1-|x|\sqrt{3}. \end{cases}$$

5°. *a* нинг қандай қийматларида

$$\begin{cases} x-\sqrt{y} = 0, \\ x-y = a \end{cases}$$

тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўлади?

## 5- вариант 7-К

1. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 4, \\ x_2+x_3+x_4 = 7, \\ x_3+x_4+x_1 = 8, \\ x_4+x_1+x_2 = 2. \end{cases}$$

2. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \log_2^2 x + \log_2\left(\frac{x^2}{4}-xy\right) = 0, \\ \sqrt{x+4y^2} = x-2y. \end{cases}$$

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{6}, \\ \sin x \cos y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

4. Тенгсизликлар системаси ечимлари тўпламини координата текислигида тасвирланг ва ҳосил бўлган фигуранинг юзини топинг:

$$\begin{cases} x^2+y^2 \geqslant 2, \\ 2+y \geqslant |x|, \\ y \leqslant -1. \end{cases}$$

5°. $a > 0$ нинг қандай қийматларида

$$\begin{cases} y - \sqrt{x} = 0, \\ y - ax = a \end{cases}$$

тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўлади?

**6- вариант** **7-К**

1. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x + y - z = xyz, \\ x - 2y + z = 2xyz, \\ x + y - 2z = 3xyz. \end{cases}$$

2. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} (2^{x+1} - 3)\,2^{y-1} = 1, \\ \sqrt{3x + y^2} = x + y. \end{cases}$$

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \sin x = 3\sin y, \\ 2\cos y + \cos x = -1. \end{cases}$$

4. Тенгсизликлар системаси ечимлари тўпламини координата текислигида тасвирланг ва ҳосил бўлган фигуранинг юзини топинг.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 1, \\ |y| \leqslant x\sqrt{3}. \end{cases}$$

5. $a$ нинг қандай қийматларида

$$\begin{cases} y + \sqrt{x} = a, \\ y + x = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўлади?

## *12- мустақил иш*

**1- вариант** **12-М**

1. Берилган: $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 2i$.

Топинг: а) $\frac{z_2}{z_1}$; б) $\left(\frac{z_1 + z_2}{3z_2}\right)^8$.

2. Тенгламани ечинг: $x^2 - 4x + 20 = 0$.

3. Қандай $x \in R$ ва $y \in R$ ларда $z_1 = x^2 + yi - 5 - \frac{7}{i}$ ва $z_2 = -y - x^2 i - 4i$ сонлари қўшма сонлар бўлади?

4. Ҳар қандай тоқ соннинг битта камайтирилган квадрати 8 га бўлинишини исботланг.

## 2- вариант

**12-М**

1. Берилган: $z_1 = 1 + 2i,\ z_2 = -3i$.

Топинг: а) $\frac{\bar{z}_2}{z_1}$; б) $\left(\frac{\bar{z}_1 - iz_2}{2z_2}\right)^6$.

2. Тенгламани ечинг: $x^2 - 6x + 13 = 0$.

3. Қандай $x \in \boldsymbol{R}$ ва $y \in \boldsymbol{R}$ ларда $z_1 = x - \frac{y^2}{i} - 4 + 5i$ ва $z_2 = y^2 + 1 - 3xi$ сонлари қарама-қарши сонлар бўлади?

4. Натурал соннинг квадрати ё 4 га бўлинишини, ёки 4 га бўлганда қолдиқда 1 қолишини исботланг.

## 3- вариант

**12-М**

1. Берилган: $z_1 = 3i$; $z_2 = 4 - i$.

Топинг: а) $\frac{z_1}{\bar{z}_2}$ б) $\left(\frac{z_1 - z_2}{4\bar{z}_1}\right)^6$.

2. Тенгламани ечинг; $x^2 + 2x + 26 = 0$.

3. Қандай $x \in \boldsymbol{R}$ ва $y \in \boldsymbol{R}$ ларда $z_1 = 2x^2 - \frac{3}{i} - yi - 1$ ва $z_2 = y - 3 + x^2 i - 2i$ сонлари тенг бўлади?

4. Иккита тоқ сон квадратлари айирмасининг 8 га бўлинишини исботланг.

## 4- вариант

**12-М**

1. Берилган: $z_1 = 3 + 3i,\ z_2 = -i$.

Топинг: а) $\frac{\bar{z}_1}{z_2}$; б) $\left(\frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{4z_2}\right)^{12}$.

2. Тенгламани ечинг: $x^2 + 4x + 40 = 0$.

3. Қандай $x \in \boldsymbol{R}$ ва $y \in \boldsymbol{R}$ ларда $z_1 = x - \frac{y^2}{i} - 4i + 4$ ва $z_2 = y - 8 + x^2 i - 4i$ сонлари қарамға-қарши сонлар бўлади?

4. Агар натурал сон 5 га бўлинмаса, у ҳолда унинг битта камайтирилган ёки битта орттирилган квадрати 5 га бўлинишини исботланг.

## 5- вариант

**12-М**

1. Берилган: $z_1 = 3 + 4i,\ z_2 = i$.

Топинг: а) $\frac{z_1}{\bar{z}_2}$; б) $\left(\frac{z_1 + z_2}{3z_2}\right)^{14}$.

2. Тенгламани ечинг: $x^2 - 10x + 34 = 0$.

3. Қандай $x \in \boldsymbol{R}$ ва $y \in \boldsymbol{R}$ ларда $z_1 = x^2 + 3y - yi$ ва $z_2 = 4 + y - \frac{2}{i} - x^2 i$ сонлари қўшма сонлар бўлади?

4. 3 га бўлинмайдиган натурал соннинг квадрати билан 1 нинг айирмаси 3 га бўлинишини исботланг.

**6- вариант** **12- М**

1. Берилган: $z_1 = 4i$, $z_2 = i - 3$.

Топинг: а) $\frac{z_1}{z_2}$; б) $\left(\frac{z_1 + z_2}{3z_1}\right)^3$.

2. Тенгламани ечинг: $x^2 + 8x + 41 = 0$.

3. Қандай $x \in R$ ва $y \in R$ ларда $z_1 = y^2 - \frac{x}{i} - 2x + 4i$ ва $z_2 = 3 - \frac{y^2}{i} - 3xi$ сонлари тенг бўлади?

4. Натурал соннинг квадрати билан шу квадратдан олдин келувчи натурал соннинг кўпайтмаси 12 га бўлинишини исботланг.

## *8- назорат иши*

**1- вариант** **8-К**

1. Тригонометрик шаклда тасвирланг:

а) $z = 2i$; б) $z = 1 + \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$.

2. $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = -\sin\frac{\pi}{24} + i\cos\frac{\pi}{24}$ бўлсин. $(z_1 z_2)^8$ ни ҳисобланг.

3. Комплекс текисликнинг

$$\begin{cases} 2 \leqslant |z - i| \leqslant 4, \\ 0 \leqslant \mathrm{Re} z \leqslant 2 \end{cases}$$

шартни қаноатлантирувчи $z$ нуқталари тўпламини расмда тасвирланг.

4°. Агар $z = \sin 2\alpha + i(\sin\alpha + \cos\alpha)$ бўлса, $|z|$ нинг энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

**2- вариант** **8-К**

1. Тригонометрик шаклда тасвирланг:

а) $z = 1 - \sqrt{2}$; б) $z = 1 - \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha \left(\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}\right)$.

2. $z_1 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{8}{\pi}$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ бўлсин. $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ ни ҳисобланг:

3. Комплекс текисликнинг $|z - 3| = 2|z|$ шартни қаноатлантирувчи $z$ нуқталари тўпламини расмда тасвирланг.

4°. Агар $z = 3\sin\alpha + i\cos\alpha$ бўлса, $|z|$ нинг энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

**3- вариант** **8-К**

1. Тригонометрик шаклда тасвирланг:

а) $z = -3i$; б) $z = 1 - i\,\mathrm{tg}\,\alpha \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$.

2. $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{12}$ бўлсин.

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^6$ ни ҳисобланг.

3. Комплекс текисликнинг

$$\begin{cases} 1 \leqslant |z-1| \leqslant 2, \\ 0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant \sqrt{3} \end{cases}$$

шартни қаноатлантирувчи $|z|$ нуқталари тўпламини расмда тасвирланг.

4°. Агар $z=\cos 2\alpha+i(\sin\alpha-\cos\alpha)$ бўлса, $|z|$ нинг энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

## 4- вариант 8-K

1. Тригонометрик шаклда тасвирланг:

а) $z=\sqrt{5}+1$; б) $z=1+\cos 2x-i\sin 2x\left(\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\right)$.

2. $z_1=\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}$, $z_2=1+i\sqrt{3}$ бўлсин. $(z_1z_2)^{12}$ ни ҳисобланг.

3. Комплекс текисликнинг $|z+2i|\leqslant|z-1|$ шартни қаноатлантирувчи $z$ нуқталари тўпламини расмда тасвирланг.

4°. Агар $z=1+2\cos\alpha-i\sin\alpha$ бўлса, $|z|$ нинг энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

## 5- вариант 8-K

1. Тригонометрик шаклда тасвирланг:

а) $z=\sqrt{5}-3$; б) $z=1-\cos 2\alpha-i\sin 2x\left(\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi\right)$.

2. $z_1=\cos\frac{\pi}{12}\,i\sin\frac{\pi}{12}$, $z_2=-1+i\sqrt{3}$ бўлсин.

$(z_1z_2)^{18}$ ни ҳисобланг:

3. Комплекс текисликнинг

$$\begin{cases} |z| \leqslant 2, \\ |z-3i| \geqslant 3 \end{cases}$$

шартни қаноатлантирувчи $z$ нуқталари тўпламини расмда тасвирланг.

4°. Агар $z=\sin 2\alpha-i(\cos\alpha-\sin\alpha)$ бўлса, $|z|$ нинг энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

## 6- вариант 8-K

1. Тригонометрик шаклда тасвирланг:

а) $z=\left(1-\sqrt{2}\right)i$; б) $z=1-i\operatorname{ctg}\alpha\left(\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\right)$.

2. $z_1=-\sqrt{3}+i$, $z_2=\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}$ бўлсин. $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{12}$ ни ҳисобланг.

3. Комплекс текисликнинг

$$\frac{|z-i|}{|z-5i|}=\frac{1}{3}$$

шартни қаноатлантирувчи $z$ нуқталари тўпламини расмда тасвирланг.

4°. Агар $z=\sin\alpha+i(2+\cos\alpha)$ бўлса, $|z|$ нинг энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

## 13- мустақил иш

**1- вариант** **13-М**

1. $\sqrt[3]{-i}$ нинг қийматларини топинг.

2. $x_1=2$, $x_2=3-2i$ илдизларга эга, ҳақиқий коэффициентли ва даражаси энг кичик бўлган тенгламани тузинг.

3. $x^3-3x^2+\lambda x-1=0$ тенглама илдизлари квадратларининг йиғиндиси 1 га тенг. $\lambda$ ни топинг ва шу тенгламани ечинг.

**2- вариант** **13- М**

1. $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$ нинг қийматларини топинг.

2. $x_1=-1$, $x_2=3+4i$ илдизларга эга, ҳақиқий коэффициентли ва даражаси энг кичик бўлган тенгламани тузинг.

3. $x^3-x^2+\lambda x-1=0$ тенглама илдизлари кубларининг йиғиндиси 1 га тенг. $\lambda$ ни топинг ва шу тенгламани ечинг.

**3- вариант** **13- М**

1. $\sqrt[3]{1-i}$ нинг қийматларини топинг.

2. $x_1=x_2=1$, $x_3=i$ илдизларга эга, ҳақиқий коэффициентли ва даражаси энг кичик бўлган тенгламани тузинг.

3. $x^3+\lambda x-2=0$ тенглама икки илдизнинг кўпайтмаси 2 га тенг. $\lambda$ ни топинг ва шу тенгламани ечинг.

**4- вариант** **13-М**

1. $\sqrt{-i}$ нинг қийматларини топинг.

2. $x_1=-2$, $x_2=i$, $x_3=1-i$ илдизларга эга, ҳақиқий коэффициентли ва даражаси энг кичик бўлган тенгламани тузинг.

3. $x^3-\lambda x^2+7x-5=0$ $(\lambda>0)$ тенглама илдизлари квадратларининг йиғиндиси $-5$ га тенг. $\lambda$ ни топинг ва шу тенгламанг ечинг.

**5- вариант** **13-М**

1. $\sqrt[3]{1+i}$ нинг қийматларини топинг.

2. $x_1=1-i$, $x_2=1+2i$ илдизларга эга, ҳақиқий коэффициентли ва даражаси энг кичик бўлган тенгламани тузинг.

3. $x^3+x^2+x-\lambda=0$ тенглама илдизлари кубларининг йиғиндиси $-1$ га тенг. $\lambda$ ни топинг ва шу тенгламани ечинг.

**6- вариант** **13- М**

1. $\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$ нинг қийматларини топинг.

2. $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 1 - i$ илдизларга эга, ҳақиқий коэффициентли га даражаси энг кичик бўлган тенгламани тузинг.

3. $x^3 - x^2 + \lambda = 0$ тенглама икки илдизининг йиғиндиси 2 га тенг. $\lambda$ ни топинг ва шу тенгламани ечинг.

## *9- назорат иши*

**1- вариант** **9- К**

1. Тенгламани комплекс сонлар тўпламида ечинг:

$$6x^4 - 19x^3 + 25x^2 - 19x + 6 = 0.$$

2. $z^2 + \bar{z} = 0$ тенгламани комплекс сонларда ечинг.

3. $a \in R$ нинг қандай қийматида

$$x_1 = \frac{8}{\left(\sqrt{2}\left(\sin\frac{3\pi}{20} + i\cos\frac{3\pi}{20}\right)\right)^8}$$

сони $x^3 - (a+3)x^2 + 6a^2x - a^2 - 5 = 0$ тенгламанинг илдизи бўлади? $a$ нинг топилган қийматида тенгламанинг қолган илдизларини топинг.

4. $3\sin x + 4\cos x = 5\cos 3x$ тенгламани ечинг.

5. $(2^x - 3)(2x^2 - 7x + 6) < 0$ тенгсизликни ечинг.

6°. $2x + 3y = 7$ тенгламани бутун сонларда ечинг.

**2- вариант** **9- К**

1. Тенгламани комплекс сонлар тўпламида ечинг:

$$10x^4 + 39x^3 + 49x^2 + 39x + 10 = 0.$$

2. Тенгламани комплекс сонларда ечинг: $|z| - 2z = 2i - 1$.

3. $b \in R$ нинг қандай қийматида

$$x_1 = \frac{32}{\left(\sqrt[4]{2}\left(-\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)\right)^{27}}$$

сони $x^3 - (b+6)x^2 + 8b^2x - 7 + b^2 = 0$ тенгламанинг илдизи бўлади? $b$ нинг топилган қийматида тенгламанинг қолган илдизларини топинг.

4. $5\sin x - 12\cos x = 13\sin 5x$ тенгламани ечинг.

5. $\frac{3^x - 5}{2x^2 - 5x + 3} > 0$ тенгсизликни ечинг.

6°. $2xy - 3y^2 - 4y + 2x = 2$ тенгламани бутун сонларда ечинг.

**3- вариант** **9- К**

1. Тенгламани комплекс сонлар тўпламида ечинг:

$$6x^4 + 19x^3 + 25x^2 + 19x + 6 = 0.$$

2. $z|z| + 2z + i + 0$ тенгламани комплекс сонларда ечинг.

3. $a \in R$ нинг қандай қийматида

$$x_1 = \frac{32}{\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} - i\sin\frac{19\pi}{12}\right)\right)^9}$$

сони $x^3 + (2 - a)x^2 - 4a^2x + 5 + a^2 = 0$ тенгламанинг илдизи бўлади? $a$ нинг топилган қийматида тенгламанинг қолган илдизларини топинг.

4. $\cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2} \sin 7x$ тенгламани ечинг.

5. $(7^x - 4)(3x^2 - 5x + 2) > 0$ тенгсизликни ечинг.

6°. $3x - 2y = 8$ тенгламани бутун сонларда ечинг.

## 4- вариант 9- К

1. Тенгламани комплекс сонлар тўпламида ечинг:

$$10x^4 - 39x^3 + 49x^2 - 39x + 10 = 0.$$

2. $|z| = 2i(\bar{z} + 1)$ тенгламани комплекс сонларда ечинг.

3. $b \in R$ нинг қандай қийматида

$$x_1 = \frac{32}{\left(\sqrt{2}\left(\sin\frac{5\pi}{8} - i\cos\frac{5\pi}{8}\right)\right)^{18}}$$

сони $x^3 - (b + 1)x^2 - 2b^2x = 3 + b^2 = 0$ тенгламанинг илдизи бўлади? $b$ нинг шу топилган қийматида тенгламанинг қолган илдизларини топинг.

4. $2\sqrt{5}\cos 3x - 4\sin 3x = 6\cos 5x$ тенгламани ечинг.

5. $\frac{2x^2 - 11x + 15}{2^x - 6} < 0$ тенгсизликни ечинг.

6°. $x(x + y - 1) = y + 1$ тенгламани бутун сонларда ечинг.

## 5- вариант 9- К

1. Тенгламани комплекс сонлар тўпламида ечинг:

$$12x^4 + 37x^3 + 49x^2 + 37x + 12 = 0.$$

2. $|z| = i(2\bar{z} + 1)$ тенгламани комплекс сонларда ечинг.

3. $a \in R$ нинг қандай қийматида

$$x_1 = \frac{8}{\left(\sqrt[10]{2}\left(\sin\frac{9\pi}{20} + i\cos\frac{9\pi}{20}\right)\right)^{25}}$$

сони $x^3 + (2 - a)x^2 + 4a^2x + 1 + a^2 = 0$ тенгламанинг илдизи бўлади? $a$ нинг топилган қийматида тенгламанинг қолган илдизларини топинг.

4. $\sqrt{3}\cos 3x - \sin 3x = 2\cos 5x$ тенгламани ечинг.

5. $(3^x - 15)(2x^2 - 7x + 5) > 0$ тенгсизликни ечинг.

6°. $3x - 5y = 0$ тенгсизликни бутун сонларда ечинг.

### 6- вариант

1. Тенгламани комплекс сонлар тўпламида ечинг:

$$12x^4 - 37x^3 + 49x^2 - 37x + 12 = 0.$$

2. $|z| = 1 + 2i\bar{z}$ тенгламани комплекс сонларда ечинг.

3. $b \in R$ нинг қандай қийматида

$$x_1 = \frac{4}{\left(\sqrt[4]{2}\left(\sin\frac{3\pi}{8} - i\cos\frac{3\pi}{8}\right)\right)^6}$$

сони $x^3 + bx^2 + (b^2 - 1)x - 4 + 2b^2 = 0$ тенгламанинг илдизи бўлади? $b$ нинг топилган қийматида тенгламанинг қолган илдизларини топинг.

4. $2\sin 2x + \sqrt{21}\cos 2x = 5\sin 7x$ тенгламани ечинг.

5. $\frac{6^x - 3}{3x^2 - 2x} < 0$ тенгсизликни ечинг.

6°. $2x^2 - 3xy + 2x + 3y = 3$ тенгламани бутун сонларда ечинг.

## *10- назорат иши*

### 1- вариант

1. $10^5$ дан кичик бўлган нечта сонни 7, 6, 4 рақамлари билан ёзиш мумкин? Улар ичида нечтаси тоқ?

2. 3, 7, 7, 5 рақамларни мумкин бўлган барча ўрин алмаштириш билан хосил қилинадиган тўрт хонали сонлар йиғиндисини топинг.

3. $\sqrt{3\sin 2x + 2\cos^2 x} = 2\sqrt{2}\sin x$ тенгламанинг $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ га тегишли барча илдизларини топинг.

4°. Исталган натурал $n$ да $5^n + 12n + 15$ нинг 16 га каррали бўлишини исботланг.

### 2- вариант

1. Томонларининг узунликлари 8, 10, 12 ва 14 см қийматларни қабул қилувчи турли учбурчаклардан нечта мавжуд? Улар ичида тенг томонлилари, тенг ёнлилари ва турли томонлилари нечта?

2. 5, 7 ва 3 рақамлари билан 1000 дан кичик бўлган нечта сонни тузиш мумкин?

3. $\sqrt{2 + 3\sin x\cos x - 2\cos 2x} = -\cos x$ тенгламанинг $[0; \pi]$ га тегишли барча илдизларини топинг.

4°. Исталган натурал $n$ да $3^n + 5^n + 7^n + 1$ нинг 4 га каррали бўлишини исботланг.

### 3- вариант

1. 3, 5, 8 рақамлари билан $10^4$ дан кичик бўлган нечта сонни тузиш мумкин? Уларнинг ичида жуфтлари нечта?

2. 8, 3, 3, 4 рақамларни мумкин бўлган барча ўрин алмаштириш билан ҳосил қилинадиган тўрт хонали сонлар йиғиндисини топинг.

3. $\sqrt{3\cos^2 x - \sin 2x} = -\sin x$ тенгламанинг $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ га тегишли барча илдизларини топинг.

4°. Исталган жуфт $n \in N$ да $5^n + 3^n + 2$ нинг 4 га каррали бўлишини исботланг.

**4- вариант** **10- К**

1. Ўлчамлари 5 дан 14 гача бутун сонлардан иборат бўлган тўғри бурчакли параллелепипедлардан нечтаси мавжуд?

2. 2, 5, 5, рақамларни мумкин бўлган барча ўрин алмаштириш билан ҳосил қилинадиган тўрт хонали сонлар йиғиндиси нимага тенг?

3. $\sqrt{\cos 2x + 5\sin x \cos x + 3} = 2\cos x$ тенгламанинг $[0; \pi]$ га тегишли барча илдизларини топинг.

4°. $n \in N$ да $7^n + 3n - 1$ нинг 9 га каррали бўлишини исботланг.

**5- вариант** **10- К**

1. 1, 2, 4, 6 рақамлари билан $10^4$ дан кичик бўлган нечта сонни тузиш мумкин? Улар ичида нечтаси жуфт бўлади?

2. 3, 3, 2 рақамларни мумкин бўлган барча ўрин алмаштириш билан ҳосил қилинадиган уч хонали сонлар йиғиндисини топинг.

3. $\sqrt{-3\sin 2x - 4\cos^2 x} = \sqrt{2}\sin x$ тенгламанинг $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ га тегишли барча илдизларини топинг.

4°. Исталган жуфт $n \in N$ да $7^n + 11^n + 4$ нинг 6 га бўлинишини исботланг.

**6- вариант** **10- К**

1. Томонларининг узунликлари 5, 6, 7, 8, 9 қийматларини қабул қилувчи ҳар хил учбурчаклардан нечта мавжуд? Улар ичида тенг томонлилари, тенг ёнлилари ва турли томонлилари нечта?

2. 1, 2, 3, 4 рақамларн билан 10 дан кичик бўлган нечта сонни тузиш мумкин?

3. $\sqrt{1+3\sin x \cos x - \cos 2x} = \sqrt{5}\cos x$ тенгламанинг $[\pi; 2\pi]$ га тегишли барча илдизларини топинг.

4°. $n \in N$ да $16^n - 4^n - 3n$ нинг 9 га бўлинишини исботланг.

## *14- мустақил иш*

**1- вариант** **14- К**

1. Тўдадаги 40 деталдан 5 тасининг нуқсонли экани аниқланган. Таваккалига олинган 4 деталнинг нуқсонсиз бўлиш эҳтимоли қандай?

2. Биринчи шахматчилар жамоасида 7 гроссмейстер ва 3 спорт устаси (мастери), иккинчисида эса 4 гроссмейстер ва 6 спорт устаси

бор. Биринчи ва иккинчи жамоалар ўйинчиларидан тузилган терма жамоа 10 кишидан иборат: биринчи жамоадан 8 киши ва иккинчи жамоадан 2 киши. Терма жамоадан таваккал билан бир шахматчи танланади. Унинг гроссмейстер бўлиш эҳтимоли қандай?

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \sqrt{\sin x}\cos y = 0, \\ \cos^2 x - \cos 2y = \frac{7}{4}. \end{cases}$$

**2- вариант** **14- М**

1. 8 та аёл қатнашаётган 30 кишидан иборат йиғилиш 3 кишилик делегация сайламоқда. Ҳозир бўлганларнинг ҳаммасининг сайланиш ҳуқуқлари бир хил деб ҳисоблаб, делегацияга икки эркак ва бир аёлнинг кириш эҳтимолини топинг.

2. 10 милтиқдан 6 таси снайпер ва 4 таси одатдаги бўлиб, биттаси таваккалига танланади ва ундан отилади. Агар снайпер милтиғининг нишонга тегиш эҳтимоли 0,9, одатдагиники эса 0,7 бўлса, унинг тегиш эҳтимоли қандай бўлади?

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \sqrt{\sin y}\sin 2x = 0, \\ \cos x + \cos^2 y = 0{,}25 + \sin y. \end{cases}$$

**3- вариант** **14- М**

1. Жавонда 20 китоб бўлиб, улардан 7 таси муқоваланган. Таваккалига 4 та китоб олинади. Уларнинг ҳаммаси муқоваланган бўлиш эҳтимоли қандай?

2. Деталлар икки станокдан умумий бункерга тушади. Биринчи станок томонидан нуқсонли деталь тайёрлаш эҳтимоли 0,02 га, иккинчисиники эса 0,01 га тенг. Биринчи станокнинг унумдорлиги иккинчисиникига қараганда уч марта ортиқ. Бункердан таваккалига олинган деталнинг нуқсонли бўлиш эҳтимоли қандай?

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \sqrt{-\cos y}\cdot\sin x = 0, \\ \sin y + \cos 2x = 1{,}5. \end{cases}$$

**4- вариант** **14-М**

1. Тўдадаги 40 деталдан 4 тасининг нуқсонли экани аниқланган. Таваккалига олинган 3 деталнинг нуқсонсиз бўлиш эҳтимоли қандай?

2. Қуйма ғўлалар икки тайёрлов цехидан келади: биринчи цехдан 70 % ва иккинчисидан 30 %. Бунда биринчи цех материалининг 10 % и нуқсонли, иккинчисиникининг 5 % и нуқсонли. Таваккалига олинган бир ғўланинг нуқсонсиз бўлиш эҳтимолини топинг.

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \sqrt{\cos x}\cdot\sin 2y = 0, \\ \sin^2 y - \cos 2x = 1{,}5. \end{cases}$$

**5- вариант** **14- М**

1. 35 киши, шу жумладан 14 аёл қатнашаётган йиғилиш уч кишилик делегация сайламоқда. Ҳамма тенг ҳуқуқ билан сайлана олади. Делегацияга икки аёлнинг кириш эҳтимолини топинг.

2. Ўқувчилар гуруҳи 10 аълочи, 7 яхши ўзлаштирувчи ва 3 суст ўзлаштирувчидан иборат. Аълочилар бўлажак имтиҳонда бир хил эҳтимол билан ё аъло, ё яхши баҳо олишлари мумкин. Яхши ўзлаштирувчи ўқувчилар бир хил эҳтимол билан аъло, яхши қониқарли баҳолар олишлари мумкин. Суст ўзлаштирувчилар бир хил эҳтимол билан яхши, қониқарли, қониқарсиз баҳо олишлари мумкин. Имтиҳонни топшириш учун таваккалига бир ўқувчи чақирилади. Унинг яхши баҳо олиш эҳтимоли қандай?

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases}\sqrt{\sin x}\cdot\cos 2y=0,\\ \sqrt{2}\sin y+\sin^2 x=\cos x+1{,}25.\end{cases}$$

**6- вариант** **14- М**

1. Лотереяда 100 та чипта ўйналмоқда, улардан 20 тасига ютуқ бор. Бир киши 5 та чипта сотиб олган. Сотиб олинган чипталардан ҳеч бўлмаганда биттасининг ютиш эҳтимоли қандай?

2. Деталлар икки автоматик линиядан келтирилиб йиғилади. Биринчи линиянинг 2 % и нуқсонли, иккинчисининг 4 % и нуқсонли бўлиши маълум. Агар биринчи линиядан 50 деталь, иккинчидан 30 деталь келган бўлса, йиғишга нуқсонли деталнинг тушиш эҳтимолини топинг.

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases}\sqrt{\cos x}\cdot\sin 2y=0,\\ \sin 2x+\cos y=0{,}5.\end{cases}$$

### *11- назорат иши*

**1- вариант** **11- К**

1. Спортлото карточкасида 1 дан 19 гача сонлар ёзилган. Шу карточкада таваккалига ўчирилган сонннинг 6 га каррали бўлиш эҳтимоли қандай?

2. Магазинга 11 харидор кирган. Улардан ҳар бирининг харид қилиш эҳтимоли 0,1 га тенг. Улардан 7 кишининг харид қилиш эҳтимоли қандай?

2. $3^x<6^{2x-1}$ тенгсизлигини ечинг.

4. Тенгламани ечинг:

$$\sin^4 x+\cos^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0{,}25,\ \text{бунда}\ x\in\left[\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right].$$

5°. $a$ нинг қандай қийматларида

$$\log_{\frac{3-a}{3}}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)<2$$

тенгсизлик $x$ нинг исталган қийматида бажарилади?

### 2- вариант 11- Қ

1. Радиуси 10 см бўлган доирага квадрат ички чизилган. Шу доира ичига таваккалига қўйилган нуқтанинг квадратга тушмаслик эҳтимоли қандай?

2. 101, 102, 103, . . . , 200 сонлари кетма-кетлигидан 10 та сон қаторасига қайтиш билан танлаб олинади. Улар ичида 8 га каррalисининг биттадан ортиқ бўлмаслик эҳтимоли қандай?

3. $\log_2^2(x-1)^2 < 4$ тенгсизликни ечинг.

4. Тенгламани ечинг:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 0{,}5 + \cos 2x, \text{ бунда } x \in \left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right].$$

5°. $a$ нинг қандай ҳақиқий қийматларида

$$2(1-a)\cdot 9^{2x} + a < 1 + (2-a)\,3^{4x+1}$$

тенгсизлик ечимга эга бўлмайди?

### 3- вариант 11- Қ

1. 1 дан 51 гача барча натурал сонлар қаторасига ёзилган. Таваккалига ўчирилган сон 5 га бўлинганида қолдиқда 1 ни бериш эҳтимоли қандай?

2. Устахонада 10 та дастгоҳ ишлайди. Ҳар қайси дастгоҳнинг иш кунининг охирида бузилиб қолиш эҳтимоли 0,1 га тенг. Куннинг охирига келиб 3 та дастгоҳнинг бузилиб қолиш эҳтимолини топинг.

3. $5^{1-2x} < 3^x$ тенгсизлигини ечинг.

4. Тенгламани ечинг:

$$\cos^4 x + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1{,}25, \text{ бунда } x \in \left[\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right].$$

5. $a$ нинг қандай ҳақиқий қийматларида

$$\log_{a-3}(|x| + 4) > 2$$

тенгсизлик $x$ нинг барча ҳақиқий қийматларида тўғри бўлади?

### 4- вариант 11- Қ

1. Радиуси 6 см бўлган доирага мунтазам учбурчак ташқи чизилган. Учбурчакка таваккалига қўйилган нуқтанинг доирага тушмаслик эҳтимоли қандай?

2. 5, 6, 7, . . . , 100 сонлари кетма-кетлигидан таваккалига 8 сон қайтиш билан олинади. Улар ичида 7 га карралиларининг биттадан ортиқ бўлмаслик эҳтимоли қандай?

3. $\log_2^2(x+2)^2 > 4$ тенгсизлигини ечинг.

4. Тенгламани ечинг:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{15}{16} + \cos 2x, \text{ бунда } x \in \left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right].$$

5°. $a$ нинг қандай ҳақиқий қийматларида

$$2^{2x+1}(a-2)+4^x(1-a)>a-2$$

тенгсизлик ҳеч бўлмаса битта ечимга эга бўлади?

**5- вариант** **11- К**

1. Иккита ўйин соққаси ташланди. Иккала соққада тушган очколар кўпайтмасининг 24 дан ортиқ бўлмаслик эҳтимолини топинг.

2. Магазинга 8 харидор кирган. Агар улардан ҳар қайсисининг харид қилиш эҳтимоли 0,3 га тенг бўлса, улардан 3 тасининг харид қилиш эҳтимолини топинг.

3. $2^{3x-1}>3^{2x+1}$ тенгсизликни ечинг.

4. Тенгламини ечинг:

$$\cos^4\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)+\cos^4 x=0{,}25, \text{ бунда } x\in\left[\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right].$$

5°. $a$ нинг қандий ҳиқиқий қийматларида

$$\log_{\frac{a}{a-1}}(x^2+3)>1$$

тенгсизлик $x$ нинг барча ҳақиқий қийматларида тўғри бўлади?

**6- вариант** **11-К**

1. Мунтазам олтибурчак радиуси 3 см бўлган доирага ички чизилган. Доирага қўйилган нуқтанинг олтибурчакка тушмаслик эҳтимоли қандай?

2. 25, 26, 27, . . . , 99 сонлари кетма-кетлигидан таваккалига 8 та сон қайтиш билан танлиб олинди. Улар ичида 6 га карралисининг иккитадин ортиқ бўлмаслик эҳтимоли қандай?

3. $\log_3^2(2x+1)^2<4$ тенгсизликни ечинг.

4. Тенгламани ечинг:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\cos^2 2x+\sin x\cos x,$$

бунда $x\in[0;\ \pi]$.

5°. $a$ нинг қандай ҳақиқий қийматларида

$$(a-1)4^x+2^{2x+1}(3-a)+a>1$$

тенгсизлик $x$ нинг барча ҳақиқий қийматларида тўғри бўлади?

## *12- назорат иши*

**1- вариант** **12- К**

1. Функция берилган:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{\sin x}}+\sqrt{\frac{10-x^2}{x^4-11x^2+18}}.$$

а) $f$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

б) $f$ нинг аниқланиш соҳасидан ҳеч бўлмаганда битта рационал ва битта иррационал сонни айтинг.

в) $f$ жуфт функциями ёки тоқми?

г) $f$ функциянинг $x \to 0$ даги лимитини топинг.

2. Мусбат ҳадли чексиз камаювчи геометрик прогрессияда биринчи ва учинчи ҳадларининг йиғиндиси $\frac{5}{4}$ га тенг, биринчи ва бешинчи ҳадлари орасидаги айирма $\frac{15}{16}$ га тенг. Прогрессия ҳадлари квадратлари йиғиндисининг унинг барча ҳадлари йиғиндисининг квадратига нисбатини топинг.

3. Ҳажми $V$ га тенг бўлган тўртбурчакли мунтазам пирамидага тўртбурчакли мунтазам призма ички чизилган бўлиб, унинг юқори асоси учлари пирамиданинг ён қирраларида ётади, призманинг қуйи асоси текислиги эса пирамида асос текислигидан иборат. Призманинг мумкин бўлган энг катта ҳажмини топинг.

4. $y = \sqrt{2x}$ эгри чизиқ, $x_0 = 0{,}5$ абсциссали нуқтада шу эгри чизиққа ўтказилган уринма ва $y = 0$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5°. Тенгламани ечинг:

$$\sin 2x\left(3\sin 2x - \cos\frac{x}{2}\right) = \cos 2x\left(2 + \sin\frac{x}{2} - 3\cos 2x\right).$$

## 2-вариант **12-К**

1. Функция берилган:

$$f(x) = \frac{x^2}{\sin 3x} + \frac{\operatorname{tg} x \cdot \sqrt{3 - x^2}}{1 - x^2}.$$

а) $f$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

б) $f$ функциянинг аниқланиш соҳасидан ҳеч бўлмаганда битта рационал ва битта иррационал сонни айтинг.

в) $f$ нинг жуфт ёки тоқ функция бўлишини аниқланг.

г) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ни топинг.

2. Чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг ҳадлари йиғиндиси $\frac{3}{4}$ га тенг, унинг иккинчи ҳади $\left(-\frac{1}{3}\right)$ га тенг. Шу прогрессия барча ҳадлари квадратларининг йиғиндисини топинг.

3. Трапециянинг ҳар қайси ён томони ва кичик асоси $a$ га тенг. Трапециянинг шундай катта асосини топингки, унда трапециянинг юзи энг катта бўлсин.

4. $y = x^2 + 1$ эгри чизиқ, унга $x_0 = 1$ абсциссали нуқтада ўтказилган уринма ва $x = 0$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5°. $3^{\sin x} = 4 - \cos^2\frac{4x}{3}$ тенгламани ечинг.

**3- вариант** **12- К**

1. Функция берилган:

$$f(x) = \log_9 \frac{\sin 3x}{x} - \frac{\sqrt{4x^3 - x^4 + 5}}{\cos \pi x} - x.$$

а) $f$ функция аниқланиш соҳасини топинг.

б) $f$ нинг аниқланиш соҳасидан ҳеч бўлмаганда битта рационал ва битта иррационал сонни айтинг.

в) $f$ функциянинг жуфт ёки тоқ бўлишини аниқланг.

г) $f$ функциянинг $x \to 0$ даги лимитини топинг.

2. Чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг ҳадлари йиғиндиси $\frac{2}{3}$ га тенг, ҳадлари кубларининг йиғиндиси эса $\frac{8}{9}$ га тенг. Прогрессиянинг бешинчи ҳадини топинг.

3. Ҳажми 18 м$^3$ бўлган очиқ бассейннинг туби тўғри тўртбурчак шаклида бўлиб, унинг томонлари деворларини ва тубини қоплашга энг кам материал кетсин учун 1 : 3 каби нисбатда олинган. Бассейннинг ўлчамларини топинг.

4. $y = \sqrt{1 - x}$ чизиқ, унга $x_0 = 0$ абсциссали нуқтада ўтказилган уринма ва $y = 0$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

3°. Тенгламани ечинг:

$$\sin^2 x - \cos^2 3x = 2|\sin 3x| + |\sin x| - \frac{9}{4}.$$

**4- вариант** **12- К**

1. Функция берилган:

$$f(x) = \frac{\sin 3x}{\sin 8x} + \frac{\operatorname{tg} 2\pi x}{\sqrt{2 - 6x^4 - 11x^2}}.$$

а) $f$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

б) $f$ нинг аниқланиш соҳасидан ҳеч бўлмаганда битта рационал ва битти иррационал сонни айтинг.

в) $f$ функциянинг жуфт ёки тоқ бўлишини аниқланг.

г) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ни топинг.

2. Чексиз камаювчи геометрик прогрессияда жуфт ўринларда турувчи ҳадлар йиғиндиси прогрессиянинг тоқ ўринларда турувчи барча ҳадлари йиғиндисидан икки марта кичик. Агар прогрессиянинг олдинги бешта ҳади йиғиндиси 31 га тенг бўлса, прогрессиянинг бешинчи ҳадини топинг.

3. Тенг ёнли трапециянинг асосидаги бурчаги 60°, юзи $2\sqrt{3}$ дм$^2$. Энг кичик периметрли трапеция баландлигининг узунлигини топинг.

4. $y = x^3$ чизиқ ва бу чизиққа $x_0 = 1$ абсциссали нуқтада ўтказилган уринма билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5°. Тенгламани ечинг:

$$\cos x \left(4 - \cos\frac{x}{2} - 5\cos x\right) = \sin x \left(5\sin x - \sin\frac{x}{2}\right).$$

**5- вариант** **12- К**

1. Функция берилган:

$$f(x)=\sqrt[4]{\frac{4\sin 4x}{x}}+\sqrt{(2x^2+1)(6-x^2)}+x.$$

а) $f$ функция аниқланиш соҳасини топинг.

б) $f$ нинг аниқланиш соҳасидан ҳеч бўлмаганда битта рационал ва битта иррационал сонни айтинг.

в) $f$ функциянинг жуфт ёки тоқ бўлишини аниқланг.

г) $x\to 0$ да $f$ функциянинг лимитини топинг.

2. Чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг йиғиндиси 8 га тенг, олдинги бешта ҳадининг йиғиндиси эса $7\frac{3}{4}$ га тенг. Прогрессиянинг олтинчи ҳадини топинг.

3. Учбурчакли мунтазам пирамиданинг ҳажми $\sqrt{3}$ га тенг. Ён ёқнинг асос текислигига қиялик бурчаги $\varphi$ га тенг. $\varphi$ нинг қандай қийматида пирамида ён сиртининг юзи энг кичик бўлади?

4. $y=2\sqrt[3]{\frac{x}{2}}-1$ чизиқ, шу чизиққа $x_0=2$ абсциссали нуқтада ўтказилган уринма ва $x=0$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5°. Тенгламани ечинг:

$$2^{|\cos 2x|}=\frac{\sin 3x-\cos 3x}{\sqrt{2}}.$$

**6- вариант** **12- К**

1. Фунция берилган:

$$f(x)=\frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 2\pi x}+\sqrt{\frac{x^2+4}{9-5x^2}}.$$

а) $f$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

б) $f$ нинг аниқланиш соҳасидан ҳеч бўлмаганда битта рационал ва битта иррационал сонни айтинг.

в) $f$ функциянинг жуфтми ёки тоқми эканини аниқланг.

г) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ни топинг.

2. Чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг йиғиндиси 4 га тенг, барча ҳадларининг квадратлари йиғиндиси эса $\frac{16}{3}$ га тенг. Прогрессиянинг дастлабки тўртта ҳадини топинг.

3. Трапеция $R$ радиусли доирага катта асоси доиранинг диаметри қилиниб ички чизилган. Агар трапециянинг юзи энг катта бўлса, унинг ён томони катта асоси билан қандай бурчак ташкил қилади?

4. $y=x^2+2x+1$ чизиқ, унга $x_0=1$ абсциссали нуқтада ўтказилган уринма ва $x=-1$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5°. Тенгламани ечинг:

$$\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x+\cos\frac{12x}{5}=5-3\cos^2 x.$$

## *15- мустақил иш*

**1- вариант** 15- М

1. Агар $f(x) = \sin 2x + 2\cos x$ ва $D(f) = \left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$ бўлса, $E(f)$ ни топинг.
2. $\sin 2x - \sin x > \sin 3x$ тенгсизликни ечинг.
3. $\arccos(\sin(2 \operatorname{arc\,tg} x)) = 0$ тенгламани ечинг.

**2- вариант** 15- М

1. $y = \sin x \cos 2x$ функциянинг $[0;\ \pi]$ даги энг катта ва энг кичик қийматини топинг.
2. $\cos 3x - \cos 2x > \cos 4x$ тенгсизликни ечинг.
3. $\arcsin(\operatorname{ctg}(0{,}5 \arcsin x)) = \frac{\pi}{2}$ тенгламани ечинг.

**3- вариант** 15- М

1. Агар $f(x) = \sin 2x - 2\cos x$ ва $D(f) = \left[\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$ бўлса, $E(f)$ ни топинг.
2. $\cos x - \sin 3x < \sin x$ тенгсизликни ечинг.
3. $\operatorname{arc\,tg}(\sin(2 \arccos x)) = \frac{\pi}{4}$ тенгламани ечинг.

**4- вариант** 15- М

1. $y = 0{,}5 \cos x \sin 2x$ функциянинг $[-\pi;\ \pi]$ даги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.
2. $\sin 4x - \sin 3x > \sin 5x$ тенгсизликни ечинг.
3. $\arcsin(\cos(2 \operatorname{arc\,ctg} x)) = 0$ тенгламани ечинг.

**5- вариант** 15- М

1. Агар $f(x) = \sin x + \cos 2x$ ва $D(f) = [0;\ \pi]$ бўлса, $E(f)$ ни топинг.
2. $\sin x + \cos x > \cos 3x$ тенгсизликни ечинг.
3. $\arccos(\operatorname{tg}(0{,}5 \arcsin x)) = 0$ тенгламани ечинг.

**6- вариант** 15- М

1. $y = \sin x \sin 2x$ функциянинг $[-\pi;\ \pi]$ даги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.
2. $\sin x + \cos 3x < \cos x$ тенгсизликни ечинг.
3. $\operatorname{arc\,ctg}(\cos(2 \arcsin x)) = \frac{\pi}{4}$ тенгламани ечинг.

## *16- мустақил иш*

**1- вариант** 16- М

1. $\frac{\sin 2^x}{\sin 2^{x-2} \cos 2^{x-2}} = 2\sqrt{3}$ тенгламани ечинг.
2. $\log_4 (x-2)^2 + \log_2 (x+1) \leqslant 1$ тенгсизликни ечинг.

3. $y = \log_2^3 x - 3\log_2 x + 1$ функциянинг экстремум нуқталарини топинг.

### 2- вариант 16- М

1. $\dfrac{\sin(3\cdot 2^x)}{3\sin 2^{x-1} - 4\sin^3 2^{x-1}} = 2$ тенгламани ечинг.

2. $\log_{\frac{1}{3}}(x-8)^2 + \log_{\frac{1}{3}}(2-x) > \log_{\frac{1}{3}} 27$ тенгсизликни ечинг.

3. $y = e^{-2x} + 4e^{-x} + 6x + \sqrt{3}$ функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг.

### 3- вариант 16- М

1. $\dfrac{\sin 4^{1+x}}{\sin 4^x \cos 4^x} = 4$ тенгламани ечинг.

2. $\log_3(4-x) + \log_9(2-x)^2 \leqslant 1$ тенгсизликни ечинг.

3. $y = (2^x - 1)^2(2^x - 4)$ функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг.

### 4- вариант 16- М

1. $\dfrac{\sin 2^{x+1}}{1 - 2\sin^2 2^{x-1}} = -1$ тенгламани ечинг.

2. $\log_9(2x-3)^2 + \log_3(2-2x) \leqslant \log_3 2$ тенгсизликни ечинг.

3. $y = \dfrac{\ln x}{1+\ln^2 x}$ функциянинг экстремум нуқталарини топинг.

### 5- вариант 16- М

1. $\dfrac{\cos 3^{x+1}}{2\cos^2\left(\dfrac{3^x}{2}\right) - 1} = 1$ тенгламани ечинг.

2. $\log_{\frac{1}{4}}(x-4)^2 + \log_{\frac{1}{2}}(x-2) > \log_{\frac{1}{2}} 3$ тенгсизликни ечинг.

3. $y = e^{-x}(x^2 + x - 5)$ функциянинг экстремум нуқталарини топинг.

### 6-вариант 16- М

1. $\dfrac{\sin 4^x}{(\cos 4^{x-1} + \sin 4^{x-1})(\cos 4^{x-1} - \sin 4^{x-1})} = -\sqrt{3}$ тенгламани ечинг.

2. $\log_4(x-2)^2 + \log_2(1-x) > 1 + \log_2 3$ тенгсизликни ечинг.

3. $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$ ' функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг.

## *13- назорат иши*

**1- вариант** **13- К**

1. $x$ ва $y$ нинг барча шундай ҳақиқий қийматларини топингки, уларда $z_1 = \log_y \left(\frac{x}{2}\right) + 2xi$ ва $z_2 = \log_{\frac{x}{2}} y - yi$ комплекс сонлар қўшма бўлсин.

2. $\sin^4 \frac{x}{2} + \sin^4 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4}(1 - \sin 2x)$ тенгламанинг $[0; 2\pi]$ га тегишли барча ечимларини топинг.

3. $4^{x^2-x+2} + 64^x < 17 \cdot 2^{x^2+2x}$ тенгсизликни ечинг.

4. $y = x^3 - 3x$ чизиқ ва унга $x_0 = -1$ абсциссали нуқтада ўтказилган уринма билан чегаралангин фигуранинг юзини топинг.

5. $EABCD$ тўрт бурчакли пирамида асосида $ABCD$ квадрат ётади. $ED$ қирра пирамида баландлигидан иборат. Баландликнинг узунлиги пирамида асоси томонларининг узунлигига тенг ва у 3 дм. Учи $AD$ қиррада ётган, асоси эса $BC$ ва $ED$ тўғри чизиқларга параллел текислик билан $EABCD$ пирамидани кесишдан ҳосил бўлган пирамиданинг энг катта ҳажмини топинг.

**2- вариант** **13- К**

1. $a$ нинг барча шундай ҳақиқий қийматларини топингки, уларда $z_1 = 3 + 2a + i(a^4 + 2)$ ва $z_2 = 6 - a^2 + i(4 - a)$ комплекс сонлар тенг бўлсин.

2. $\log_2(5 - x^2) > \log_2(|x| - 1)$ тенгсизликни ечинг.

3. $\alpha$ нинг барча шундай қийматларини топингки, уларда

$$x^2 - x\cos\alpha - 0{,}5\cos 4\alpha = 0$$

тенглама икки ҳақиқий ва ҳар хил илдизга эга бўлиб, улар квадрат ларининг йиғиндиси 0,25 га тенг бўлсин.

4. Чегараси $y = x^3 + 1$, $x = 2$, $y = 0$ тенгламалар билан берилган эгри чизиқли трапециянинг абсциссалар ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган фигуранинг ҳажмини топинг.

5. $ABCA_1B_1C_1$ — мунтазам учбурчакли призма. $AB$ асос қирраси ва $B_1C_1$ қиррада олинган $M$ нуқта орқали кесим ўтказилган. Агар призманинг баландлиги 2 см га, асос баландлиги 3 см га тенг бўлса, кесимнинг энг катта ва энг кичик юзларини топинг.

**3- вариант** **13- К**

1. $i$ сони $x^4 - (2a + b + 1)x^3 + (3a + 5b)x^2 - 8x + 13 = 0$ тенгламанинг илдизи экани маълум, бунда $a \in R$, $b \in R$. $a$ ва $b$ ларнинг қийматларини топинг ва тенгламани $a$ ва $b$ ларнинг топилган қийматларида ечинг.

2. $16 \log_4^2 \frac{x}{\sqrt[8]{2}} - 9 \log_8(2x) = 8^{-\frac{4}{3}}$ тенгламани ечинг.

3. $\cos 2x + \cos x \geqslant 0$ тенгсизликни ечинг, бунда $x \in [-\pi; \pi]$.

4. $y = x^2 - 4x + 3$ функция графиги ва $y = (3x - 1)e^{1-x^2}$ функция графигига $x_0 = 1$ абсциссали нуқтада ўтказилган уринма билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5. $R$ радиусли шарга энг катта ҳажмга эга бўлган мунтазам учбурчакли пирамида ички чизилган. Пирамида асосидаги икки ёқли бурчакни топинг.

### 4- вариант 13-К

1. $a \in R$ нинг барча шундай қийматларини топингки, уларда $z_1 = 9^a + 3 + i \log_5 (6 - a)$ ва $z_2 = 4 \cdot 3^a + i \log_{0.5} (a + 1)$ комплекс сонлар қўшма бўлсин.

2. $4\sqrt{x^2 + 3x} > -5x - 12$ тенгсизликни ечинг.

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{2\pi}{3}, \\ \sin y = 2 \sin x. \end{cases}$$

4. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ чизиқ, унга $M(2;\ 3)$ нуқтада ўтказилган уринма ва $x = 4$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5. $V$ ҳажмли конус ичига иккинчи конус шундай жойлаштирилганки, унинг учи берилган конус асосида ётади, берилган конуснинг асосига параллел текислик билан кесмаси эса унинг асосидан иборат. Иккинчи конуснинг мумкин бўлган энг катта ҳажмини топинг.

### 5- вариант 13- К

1. $(1 + i\sqrt{3})^{17} + (1 - i\sqrt{3})^{17}$ ни ҳисобланг.

2. $\log_2 (\sqrt{2} \sin x) = \log_4 (\cos 4x - \cos 6x)$ тенгламани ечинг.

3. $9^{-x} + 2 \cdot 3^{1+x} > 7$ тенгсизликни ечинг.

4. $y = \sqrt{3 - x}$ ва $y = |x + 1| - 2$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5. Учбурчакли пирамиданинг иккита кесишмайдиган қирралари узунлиги $a$ га тенг, қолган қирралари 1 га тенг узунликка эга. $a$ нинг қандай қийматида пирамиданинг ҳажми энг катта бўлади? Шу ҳажмни ҳисобланг.

### 6- вариант 13- К

1. $x$ ва $y$ нинг барча шундай ҳақиқий қийматларини топингки, уларда $z_1 = \log_{2x} y + xi$ ва $z_2 = \log_y (2x) + 2yi$ комплекс сонлар тенг бўлсин.

2. $\cos x - \sin x = 1 - \sin 2x$ тенгламанинг $\left| \dfrac{x}{2} - \dfrac{3\pi}{4} \right| < \dfrac{\pi}{8}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча ечимларини топинг.

3. $2^{2x+1} + 18 \cdot 2^{-2x} - 11 \cdot 2^x - 33 \cdot 2^{-x} + 26 = 0$ тенгламани ечинг.

4. $f(x)=\int\limits_{\ln 2}^{x}\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}\,dt$ функция графигига $x-y+1=0$ тўғри чизиққа параллел равишда ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг.

5. Тенг ёнли учбурчакнинг периметри $2p$ га тенг. Шу учбурчакнинг ён томон атрофида айланишидан ҳосил бўладиган жисм ҳажми энг катта бўлиши учун унинг томонлари қандай узунликда бўлиши керак?

# X СИНФ УЧУН МУСТАҚИЛ ВА НАЗОРАТ ИШЛАРИНИНГ ЖАВОБЛАРИ, КЎРСАТМАЛАР ВА ЕЧИЛИШИ

### *1- вариант* 1- М

1. Битта илдиз, $x = 4{,}5$.

2. $10^{\frac{p}{q}} = 2$ бўлсин, бунда $p \in N$, $q \in N$. У ҳолда $10^p = 2^q\, N$. Тенгликнинг чап қисми 10 га бўлинади, ўнг қисми бўлинмайди. Тенглик тўғри бўлиши мумкин эмас.
3. Агар $a^2 - 144 = n^2$, $n \in Z$ бўлса, илдизлар рационал. $x_1 + x_2 = -\frac{a}{4}$ — бутун сон бўлгани учун $a = 4k$, $k \in Z$. Бундан: $16k^2 - 144 = n^2$, яъни $n^2$ 16 га каррали, $n = 4p$, $p \in Z$. Сўнгра, $k^2 - p^2 = 9$, $(k + p)(k - p) = 9$. $k$ ва $p$ бутун бўлганидан, қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

$$\begin{cases} k + p = 9, \\ k - p = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} k + p = 1, \\ k - p = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} k + p = -9, \\ k - p = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} k + p = -1, \\ k - p = -9; \end{cases} \quad \begin{cases} k + p = 3, \\ k - p = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} k + p = -3, \\ k - p = -3. \end{cases}$$

Ҳар қайси тенгламалар системасини алоҳида ечиб, $k = \pm 3$, $k = \pm 5$ ни оламиз. Шундай қилиб, $a = \pm 12$, $a = \pm 20$. Жавоб: $a = \pm 12$, $a = \pm 20$.

### *2- вариант* 1- М

1. 5. 3. Шартдан $x_1 + x_2 = -\frac{20}{a}$ экани келиб чиқади. $x_1 + x_2$ — бутун сон бўлгани учун $a$ ифода $\pm 1$; $\pm 2$; $\pm 4$; $\pm 5$; $\pm 10$; $\pm 20$ қийматларни қабул қила олади. Агар $100 - 9a = k^2$, $k \in Z$ бўлса, илдизлар рационал; бу шартни фақат $a = 4$ қаноатлантиради. Жавоб: $a = 4$.

### *3- вариант* 1- М

1. Тенгламани ечиб, $x = 3$ ни оламиз. 3. Агар $144 - 9a^2 = m^2$, $m \in Z$ бўлса, илдизлар рационал. $m^2$ нинг 9 га каррали, $m = 3k$ бўлиши равшан. У ҳолда $16 + a^2 = k^2$, $k^2 - a^2 = 16$, бундан $|k| = 5$, $|a| = 3$. Жавоб: $a = 3$.

### *4- вариант* 1- М

1. $x = 5{,}5$. 3. $a = \pm 8$, $a = \pm 10$.

### *5- вариант* 1-М

1. Тенгламани ечиб, $x = 9$ ни оламиз. 3. $a = 2$.

### *6- вариант* 1-М

1. Тенглама битта $x = 2{,}5$ илдизга эга. 3. $a = 2$.

### *1- вариант* 2-М

1. $\sqrt{3} \approx 1{,}73205$, $\frac{23}{17} \approx 1{,}35294$.

$$\sqrt{3} + \frac{23}{17} \approx 3{,}0850, \quad \sqrt{3} - \frac{23}{17} \approx 0{,}3791,$$

$$\sqrt{3} \cdot \frac{23}{17} \approx 2{,}3434, \quad \sqrt{3} : \frac{23}{17} \approx 1{,}2802.$$

2. $\alpha = 4{,}123123312333\ldots$, $\beta = 2{,}012012201222\ldots$, у ҳолда $\alpha - \beta = 2{,}111\ldots.$

3. Тескари фараз қилайлик: $\frac{\alpha}{\beta} = r_1$, $\alpha - \beta = r_2$, бунда $r_1$ ва $r_2$ — рационал сонлар, у ҳолда $\beta = \frac{r_2}{r_1 - 1}$. Шартдан $r_1 \neq 1$, $r_2$ ва $r_1 - 1$ нинг рационал сон бўлиши келиб чиқади, у ҳолда $\frac{r_2}{r_1 - 1}$ — рационал сон, яъни $\beta$ — рационал сон, бу эса шартга зид. Демак, иккита тенг бўлмаган иррационал соннинг бўлинмаси ва айирмаси бир вақтда иррационал сон бўла олмайди.

### *2- вариант* 2-М

1. $\sqrt{5} \approx 2{,}23607$, $\frac{43}{31} \approx 1{,}38710$,

$$\sqrt{5} + \frac{43}{31} \approx 3{,}6232, \quad \sqrt{5} - \frac{43}{31} \approx 0{,}8490,$$

$$\sqrt{5} \cdot \frac{43}{31} \approx 3{,}1017, \quad \sqrt{5} : \frac{43}{31} \approx 1{,}6121.$$

2. $\alpha = 1{,}5\sqrt{3}$, $\beta = 7\sqrt{3}$, у ҳолда $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{14} \in Q$.

3. $\alpha + 2\beta = (\alpha - \beta) + 3\beta$. Бунда $\alpha - \beta$ — рационал сон, $3\beta$ эса иррационал сон бўлгани учун $\alpha + 2\beta$ — иррационал сон.

$$\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2 = (\alpha + 2\beta)(\alpha - \beta).$$

$\alpha + 2\beta$ — иррационал сон, $\alpha - \beta \neq 0$ эса рационал сон бўлгани учун $(\alpha + 2\beta)(\alpha - \beta)$ — иррационал сон.

### *3- вариант* 2-М

1. $\approx 3{,}9361$; $\approx 1{,}3554$; $\approx 3{,}4139$; $\approx 2{,}0505$.

3. $\alpha_1 + \alpha_2 = r_1$ ва $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = r_2$ бўлсин, бунда $r_1$ ва $r_2$ — рационал сонлар. $x^2 - r_1 x + r_2 = 0$ тенгламани ечамиз.

$$x = \frac{r_1 \pm \sqrt{r_1^2 - 4r_2}}{2}.$$

$\frac{r_1}{2} = a$, $\frac{1}{4}(r_1^2 - 4r_2) = b$ бўлсин, у ҳолда $x = a \pm \sqrt{b}$, бунда $x$ ё $\alpha_1$ дан, ё $\alpha_2$ дан иборат.

### 4- вариант

2- М

1. $\approx 2{,}9426$; $\approx 0{,}5215$; $\approx 2{,}0967$; $\approx 1{,}4308$.

2. $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ тенгликдан $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ нинг рационал сон экани маълум бўлади. У ҳолда $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ва $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ рационал сонларнинг ярим йиғиндиси бўлган $\sqrt{a}$ сони ҳам рационалдир $\sqrt{b}$ нинг рационал сон эканлиги ҳам шундай исботланади.

### 5- вариант

2- М

1. $\approx 4{,}4550$; $\approx 1{,}8696$; $\approx 4{,}0878$; $\approx 2{,}4463$.

### 6- вариант

2- М

1. $\approx 4{,}4676$; $\approx 2{,}1657$; $\approx 3{,}8172$; $\approx 2{,}8817$.

### 1- вариант

1- К

1. а) $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, $AC = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$, $BC = \sqrt{8^2 + 2^2} = 2\sqrt{17}$.

Косинуслар теоремасидан фойдаланамиз: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$, $\cos B = \frac{25 - 68 - 169}{20\sqrt{17}} < 0$; демак, $90° < B < 180°$, яъни $ABC$ учбурчак ўтмас бурчакли.

б) Учбурчак ички бурчаги биссектрисасннинг хоссаси бўйича:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{13},\ \lambda = \frac{5}{13},$$

$$x_D = \frac{2 + \frac{5}{13} \cdot 10}{1 + \frac{5}{13}} = 4\frac{2}{9},\quad y_D = \frac{2 + \frac{5}{13} \cdot 0}{1 + \frac{5}{13}} = 1\frac{4}{9}.$$

Жавоб: $D\left(4\frac{2}{9};\ 1\frac{4}{9}\right)$.

2. а) $x < -2$; б) $-2 \leqslant x < 3$; в) $x \geqslant 3$ оралиқларни қараймиз.

а) $\begin{cases} x < -2, \\ -x + 3 - 2 - x \leqslant 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2, \\ x \geqslant -0{,}5 \end{cases}$ ечим йўқ;

б) $\begin{cases} -2 \leqslant x < 3, \\ -x + 3 + 2 + x \leqslant 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leqslant x < 3, \\ x \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leqslant x < 3;$

в) $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x - 3 + x + 2 \leqslant 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3, \\ 0 \cdot x > -4 \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant 3.$

Жавоб: $x > 1$.

3. $2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+5\sqrt{5}=r$ бўлсин, бунда $r$ — рационал сон. У ҳолда $2\sqrt{2}+3\sqrt{3}=r-5\sqrt{5}$,

$$35-12\sqrt{6}=r^2-125-10r\sqrt{5},$$
$$12\sqrt{6}-10r\sqrt{5}=r^2+90,$$
$$864+500r^2+240r\sqrt{30}=(r^2+90)^2,$$
$$240r\sqrt{30}=(r^2+90)^2-864-500r^2,$$
$$\sqrt{30}=\frac{(r^2+90)^2-864-500r^2}{240r}=r_1,\ r_1\in Q.$$

Зидликка келдик: $r_1$ — рационал сон, $\sqrt{30}$ эса иррационал сон, демак, $r$ рационал сон бўла олмайди.

### *2- вариант* 1- К

1. а) $MKP$ учбурчак томонлари узунликларини ҳисоблаймиз: $MK=8$, $MP=2\sqrt{73}$, $KP=10$. Косинуслар теоремасидан фойдаланиб, $MKP<0$ ни оламиз, демак, $90°<\angle MKP<180°$, яъни $MKP$ учбурчак ўтмас бурчакли.
б) Учбурчак бурчаги биссектрисаси хоссаси бўйича:

$$\frac{MA}{AP}=\frac{MK}{KP}=0{,}8,\ \lambda=0{,}8,\ x_A=1\frac{8}{9},\quad y_A=5\frac{2}{3}.$$

2. $x\leqslant 2\frac{1}{3}$.
3. $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}=r$, $r\in Q$, $r\neq 0$ бўлсин. У ҳолда: $3+4+3\sqrt[3]{12}(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4})=r^3$, $7+3\sqrt[3]{12}r=r^3$, $\sqrt[3]{12}=\frac{r^3-7}{3r}$. $\sqrt[3]{12}$— рационал сон бўлмоқда.

### *3- вариант* 1- К

1. а) $\cos ACB=0\Rightarrow\Delta\ ACB$ — тўғри бурчакли.
б) $\frac{AM}{MB}=\frac{11}{6}$, $\lambda=\frac{11}{6}$. Жавоб: $M\left(4;\ 11\frac{13}{17}\right)$.
2. $|3-x|+|x+4|\geqslant|3-x+x+4|=7$; ечим йўқ.

### *4- вариант* 1- К

1. а) $MK=15$, $KH=10$, $MH=\sqrt{241}$, $MH>MK>KH$. $\cos MKH>0\Rightarrow\angle MKH$ — ўткир; $MKH$ учбурчак ўткир бурчакли;
б) $\frac{MB}{BH}=1{,}5$, $\lambda=1{,}5$. Жавоб: $B(-7;\ 6{,}6)$.
2. $x$ — исталган ҳақиқий сон.

### *5- вариант*

1- Қ

1. а) $DE = 7\sqrt{2}$, $DK = 2\sqrt{37}$, $EK = 5\sqrt{2}$, $\cos DEK = 0$, $\angle DEK$ — тўғри; б) $C\left(3;\ -3\frac{5}{6}\right)$.

2. $2\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 7$.

### *6- вариант*

1- Қ

1. а) $AB = 13$, $AC = \sqrt{137}$, $BC = 10$, $\cos ACB > 0$, $\angle ACB$ — ўткир; б) $E\left(-8\frac{5}{23};\ -6\frac{17}{23}\right)$.

2. Ечим йўқ.

### *1- вариант*

3- М

1. $a \neq 0$, $a \neq -1$, $a \neq -\frac{1}{3}$.

2. $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = x^2(y-z) + y^2(z-y+y-x) + z^2(x-y) = x^3(y-z) - y^2(y-z) - y^2(x-y) + z^2(x-y) = (y-z)(x^3-y^2) - (x-y)(y^2-z^2) = (x-y)(y-z)(x-z)$.

3. 5 га каррали бўлмаган сонлар натурал сонлар тўпламининг тўртта $\{5n \pm 1 \mid n \in N\}$, $\{5n \pm 2 \mid n \in N\}$ қисм-тўпламини ташкил қилади; шу сонлар квадратлари 5 га бўлинганда қолдиқда ё 1, ё 4 қолади.

### *2- вариант*

3- М

1. $a \neq 0$, $a \neq 6$, $a \neq -6$.

2. Қавсларни очиб, қуйидагини топамиз:

$$x^2y + 2xyz + x^2z + xy^2 + y^2z + yz^2 + xz^2 = x^2(y+z) + xy(y+z) + xz(y+z) + yz(y+z) = (y+z)(x+y)(x+z).$$

### *3- вариант*

3- М

1. $a \neq -1$, $a \neq -2$, $a \neq -1\frac{1}{3}$.

### *4- вариант*

3- М

1. $a \neq -3$, $a \neq 3$, $a \neq -9$. 2. $(x+y)(x+z)(y+z)$.

### *5- вариант*

3- М

1. $a \neq 1$, $a \neq 0$, $a \neq \frac{2}{3}$.

### *6- вариант*

3- М

1. $a \neq -4$, $a \neq 2$, $a \neq 8$. 2. $3(x-y)(y-z)(z-x)$.

### *1- вариант*

2- К

1. Берилган тасдиқни $P(n)$ орқали ифодалаймиз, бунда $n \in N$. $P(1)$ — тўғри, чунки $n = 1$ да тенгликнинг чап ва ўнг қисми $\frac{1}{15}$ қийматни қабул қилади. $k \in N$ учун $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ бўлишини исботлаймиз.

$$\frac{1}{3\cdot5} + \frac{6}{5\cdot7} + \ldots + \frac{2k-1}{(2k+1)(2k+3)}2^{k-1} + \frac{2k+1}{(2k+3)(2k+5)}2^k =$$

$$= \frac{2^k}{2k+3} - \frac{1}{3} + \frac{2k+1}{(2k+3)(2k+5)}2^k = \frac{2^k(2k+5+2k+1)}{(2k+3)(2k+5)} - \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{2^{k+1}}{2k+5} - \frac{1}{3}.$$

Шундай қилиб, тасдиқ $n = 1$ да тўғри, унинг $n = k$ да тўғрилигидан $n = k+1$ да ҳам тўғрилиги келиб чиқмоқда. Демак, тасдиқ $n$ нинг исталган натурал қиймати учун тўғри.

2. Берилган тасдиқни $P(n)$ орқали белгилайлик, бунда $n \in N$. Тасдиқнинг $n = 1$ учун тўғрилигини исботлаймиз. Ҳақиқатан, $7^1 + 3^2 = 16$, 16 эса 4 га каррали.

Энди $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, $k \in N$ бўлишини исботлаймиз.

$$7^{k+1} + 3^{k+2} = (3+4)7^k - 3^{k+2} = 4\cdot7^k + 3(7^k + 3^{k+1}).$$

Индукция фаразига кўра $7^k + 3^{k+1}$ ифода 4 га каррали, $4\cdot7^k$ ҳам 4 га каррали, шу билан бизнинг тасдиқ исботланади.

3. $x_1$ ва $x_2$ — берилган учҳаднинг илдизлари бўлсин, у ҳолда

$$x_1 + x_2 = 6, \qquad (1)$$

$$x_1x_2 = \frac{2k+3}{k}, \qquad (2)$$

$$(3k)^2 - k(2k+3) \geqslant 0. \qquad (3)$$

Шартдан $k \neq 0$ келиб чиқади. $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$ бўлгани учун ҳамда (1) ва (2) ларни эътиборга олиб,

$$72 = 216 - 18\frac{2k+3}{k}$$

ни ҳосил қиламиз, бундан $k = 0{,}5$ ни топамиз. (3) шарт бажарилмоқда. Жавоб: $k = 0{,}5$.

4. $n = 1$ ва $n = 2$ да тасдиқ тўғри: $a_1 = 2 + 1 = 3$, $a_2 = 4 + 2 = 6$. $x_k = 2^k + k$, $x_{k+1} = 2^{k+1} + k + 1$ бўлсин. У ҳолда $x_{k+2} = 2^{k+2} + k + 2$ бўлишини исботлаймиз. $x_{k+2} = 3x_{k+1} - 2x_k - 1 = 3(2^{k+1} + k + 1) - 2(2^k + k) - 1 = 2\cdot2^{k+1} + k + 2 = 2^{k+2} + k + 2$ бўлади. Шундай қилиб, тасдиқ $n = 1$ ва $n = 2$ да тўғри, унинг $n = k$ ва $n = k+1$ да тўғри бўлишидан эса $n = k+2$ да ҳам тўғрилиги келиб чиқади. Демак, тасдиқ $n$ нинг барча натурал қийматлари учун ўринлидир.

### 2- вариант

2- Қ

2. $a_n = 7\cdot 5^{2n-1} + 2^{3n+1}$. $n = 1$ да $a_1 = 51$ сони 17 га бўлинади. $a_{k+1} = 8a_k + 7\cdot 17\cdot 5^{2k-1}$, $k \in N$. Бунга қараганда $a_k$ 17 га бўлинса, у ҳолда $a_{k+1}$ ҳам 17 га бўлинади.

3. Учҳад илдизларини $x_1$ ва $x_2$ орқали белгилаймиз. Шарт бўйича $b \neq 0$, у ҳолда

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b+2}{b}, \\ x_1x_2 = -4, \\ x_1^2 + x_2^2 = 10\dfrac{7}{9}. \end{cases}$$

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ бўлганидан:

$$10\frac{7}{9} = \frac{(b+2)^2}{b^2} + 8, \quad \frac{b+2}{b} = \pm\frac{5}{3}, \text{ ёки } b_1 = 3, \quad b_2 = -\frac{3}{4}.$$

4. $n = 5$ да тенгсизлик тўғри: $32 \geqslant 32$. $2^k \geqslant k^2 + k + 2$ $(k \geqslant 5)$ бўлсин. У ҳолда $2^{k+1} \geqslant (k+1)^2 + (k+1) + 2$, яъни $2^{k+1} \geqslant k^2 + 3k + 4$ бўлишини исботлаймиз.

$$2^{k+1} - k^2 - 3k - 4 = 2(2^k - k^2 - k - 2) + k^2 - k.$$

Энди $k \geqslant 5$ да $k^2 - k = k(k-1) \geqslant 0$ тенгсизликнинг тўғри бўлишига ишонч ҳосил қилиш қолди. Лекин шундай бўлиши аён.

### 3- вариант

2- К

3. $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$, $\dfrac{4(k+1)^2}{k^2} + \dfrac{48}{k} = 64$, $15k^2 - 14k - 1 = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = -\dfrac{1}{15}$.

### 4- вариант

2- К

3. $a_1 = 2$, $a_2 = \dfrac{2}{3}$. 4. $3^{k+1} - 5(k+1)^2 = 3(3^k - 5k^2) + 5(2k^2 - 2k - 1) > 0$, чунки $2k^2 - 2k - 1 > 0$, бунда $k \geqslant 4$.

### 1- вариант

4- М

2.
$$P(x) = (x-1)Q_1(x) + 3, \tag{1}$$
$$P(x) = (x-2)Q_2(x) + 5. \tag{2}$$

(1) ва (2) дан $P(1) = 3$, $P(2) = 5$ экани аниқланади.

$$P(x) = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + ax + b \text{ ёки}$$
$$P(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b \tag{3}$$

бўлсин. $x = 1$ ва $x = 2$ ни (3) га кетма-кет қўйиб,

$$\begin{cases} a + b = 3, \\ 2a + b = 5 \end{cases}$$

тенгламалар системасини оламиз, бундан $a=2$, $b=1$. Жавоб: $2x+1$.

3. Иккинчи даражали кўпҳадни $x^2+mx+n$ кўринишда излаймиз. Бу ҳолда ушбу айният бажарилиши керак:

$$(x^2+mx+n)^2=x^4+ax^3+15x^2-18x+9, \quad \text{ёки}$$

$$x^4+2mx^3+(m^2+2n)x^2+2mnx+n^2=x^4+ax^3+15x^2-18x+9.$$

Ҳосил қилинган тенглик

$$\left|\begin{array}{l} 2m=a, \\ m^2+2n=15, \\ 2mn=-18, \\ n^2=9 \end{array}\right.$$

бўлганда айният бўлади. Олинган тенгламалар системасини ечиб, $a=-6$ ни топамиз.

$$\sqrt{x^4-6x^3+15x^2-18x+9}=x^2-3x+3.$$

Жавоб: $a=-6$.

### *2- вариант* 4- М

2. Шарт бўйича

$$P(x)=(x-1)Q_1(x)+4, \qquad (1)$$

$$P(x)=(x+1)Q_2(x)+2, \qquad (2)$$

$$P(x)=(x-2)Q_3(x)+8. \qquad (3)$$

$$P(x)=(x^3-2x^2-x+2)Q(x)+ax^2+bx+c \quad \text{ёки}$$

$$P(x)=(x-1)(x+1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c \qquad (4)$$

бўлсин. (1), (2), (3) дан $P(1)=4$, $P(-1)=2$, $P(2)=8$ топилади. У ҳолда (4) дан

$$\left\{\begin{array}{l} a+b+c=4, \\ a-b+c=2, \\ 4a+2b+c=8. \end{array}\right.$$

Ҳосил қилинган системани ечиб, $a=b=1$, $c=2$ ни топамиз. Жавоб: $x^2+x+2$.

3. $x^3+5=(x^2+mx+n)(x+a)$ бўлсин, бунда $m$ ва $n$ — бутун сонлар. Айниятга эга бўламиз: $x^3+5=x^3+(m+a)x^2+(ma+n)x+na$, бундан

$$\left|\begin{array}{l} m+a=0, \\ ma+n=0, \\ na=5. \end{array}\right.$$

$a=-m$ бўлгани учун $n=m^2$ бўлади. $a$ ва $n$ нинг бу қийматларини системанинг охирги тенгламасига қўйиб, $m^3=-5$ тенгликни оламиз, бу эса ҳеч қандай бутун $m$ да бажарилмайди.

### 3- вариант 4- М

2. $-x+1$. 3. $a=\pm 4$, $b=-80$.

### 4- вариант 4- М

2. $P(x)=(x-a)Q_1(x)$, $P(x)=(x-b)Q_2(x)$ бўлсин,
$P(x)=(x-a)(x-b)Q(x)+mx+n$.
$P(a)=P(b)=0$ бўлгани учун:

$$ma+n=0, \tag{1}$$
$$mb+n=0. \tag{2}$$

$a\neq b$ бўлгани сабабли (1) ва (2) бўйича $m=n=0$ ни топамиз.
3. $x^{3k}-1=(x^3)^k-1=(x^3-1)M(x)$.

### 5- вариант 4- М

2. $x+3$. 3. $a=13$, $(3x^3-x+2)^2$ ёки $(-3x^2+x--2)^2$.

### 6- вариант 4- М

2. $x^2-1$. 3. $a$, $m$, $n$ ларнинг ҳеч қандай қийматида

$$x^6+x^2+a=(x^3+x+a)(x^3+mx^2+nx+1)$$

тенглик айниятга айланмаслигини исботланг.

### 1- вариант 3- К

1. $P(x)=2x^4+3x^3-ax^2+bx-3$ бўлсин, у ҳолда
$P(-3)=78-9a-3b$, $P(2)=53-4a+2b$.

Шартга мувофиқ: $P(-3)=0$, $P(2)=5$; $a$ ва $b$ га нисбатан тенгламалар системасини оламиз:

$$\begin{cases} 3a+b=26, \\ 2a-b=24, \end{cases}$$

бундан $a=10$, $b=-4$.
2. $P(x)=x^4-27x^2-14x+120$, $P(2)=0$ бўлсин, демак, $x_1=2$ $P(x)$ кўпҳаднинг илдизи. Горнер схемасидан фойдаланиб, $P(x)$ ни $x-2$ га бўламиз:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | −27 | −14 | −120 |
| 2 | 1 | 2 | −23 | −60 | 0 |

$P_1(x)=x^3+2x^2-23x-60$, $P_1(-3)=0$ ни оламиз, демак, $x_2=$ $=-3$ — берилган кўпҳаднинг илдизи. $P_1(x)$ кўпҳадни $x+3$ иккиҳадга бўламиз:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | −23 | −60 |
| −3 | 1 | −1 | −20 | 0 |

$P_2(x) = x^2 - x - 20$ кўпҳадни оламиз, унинг илдизлари $x_3 = -4$, $x_4 = 5$. Шундай қилиб, кўпҳаднинг илдизлари $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = -4$, $x_4 = 5$ сонларидан иборат.

3. Агар $n$ — тоқ сон бўлса, у ҳолда

$$a^n + 1 = (a + 1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \ldots - a + 1). \qquad (1)$$

Демак, тоқ $n$ ларда $48^n + 1 = 49k$ $(k \in N)$ нинг 49 га, демак, 7 га ҳам каррали бўлиши аниқланади.

4. $P(x) = x^4 - 10x^3 + 27x^2 - 14x + 2 = (x^2 + ax + b) \times (x^2 + cx + k)$ бўлсин, бунда $a$, $b$, $c$, $k$ — бутун сонлар, у ҳолда $x^4 - 10x^3 + 27x^2 - 14x + 2 = x^4 + (a + c)x^3 + (b + k + ac)x^2 + (ak + bc)x + bk$. Шундай қилиб,

$$\begin{cases} a + c = -10, & (1) \\ b + k + ac = 27, & (2) \\ ak + bc = -14, & (3) \\ bk = 2. & (4) \end{cases}$$

Масалани ечиш учун системанинг бутун сонлардаги бирор ечимини топиш етарли. (4) тенгламанинг бутун сонлардаги ечимларидан бири $b = 1$, $k = 2$ жуфтдан иборат.

$$\begin{cases} a + c = -10, \\ ac = 24 \end{cases}$$

системанинг ечимларидан бири $a = -4$, $c = -6$ бўлади. Топилган $a = -4$, $b = 1$, $c = -6$ ва $k = 2$ сонлари (3) тенгламани қаноатлантиради, демак,

$x^3 - 10x^3 + 27x^2 - 14x + 2 = (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 6x + 2)$.

5. $x^{12} - 3x^6 + 1 = (x^6 - 1)^2 - x^6 = (x^6 + x^3 - 1)(x^6 - x^3 - 1)$.

## 2- вариант

3- К

1. $x^3 + mx + n$ кўпҳадни $x^2 + 3x + 10$ учҳадга бўламиз.

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 0 \cdot x^2 + mx + n & x^2 + 3x + 10 \\ \cline{2-2} \underline{x^3 + 3x^2 + 10x} & x - 3 \\ \quad -3x^2 + (m - 10)x + n & \\ \quad \underline{-3x^2 - \qquad 9x - 30} & \\ \qquad (m - 1)x + (n + 30). & \end{array}$$

Бўлиш қолдиқсиз бажарилаётганлигидан $(m - 1)x + (n + 30) = 0$ бўлиши керак, бу эса ($x$ нинг исталган қийматида) фақат $m = 1$, $n = -30$ да бўлиши мумкин.

2. $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x - 4)$.

3. $n$ — натурал сон бўлсин, у ҳолда $2n$ — жуфт натурал сон. $57^{2n} - 1 = 3249^n - 1 = 3248 \cdot A$ бўлади, бунда $A \in N$, лекин $3248 = 203 \cdot 16$.

4. $P(x) = (x^2 - 6x + 1)(x^2 - 6x + 6)$.

5. $x^2 + x + 1 = y$ бўлсин, у ҳолда

$(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12=y(y+1)-12=y^2+y-12=(y+4)(y-3)=(x^2+x+5)(x^2+x-2)=(x+2)(x-1)(x^2+x+5)$

### *3- вариант* 3- К

1. $m=-17$, $n=2$. 2. $(x+3)^2(x+2)^2$. 4. $(x^2+3x-2)(x^2-2x+3)$. 5. $(a^2+a+1)(a^2-a+1)(a^4-a^2+1)(a^8-a^4+1)$.

### *4- вариант* 3- К

1. $a=-5$. 2. $(x-1)(x-2)(x+2)^2$. 4. $(x^2-7x+2)(x^2+3x-1)$. 5. $x(x-2)(x-4)(x-6)$.

### *5- вариант* 3- К

1. $a=0$, $b=-19$. 2. $x=1$, $x=-2$. 4. $(x^2-9x+2)(x^2+8x+3)$. 5. $(x^4+2x^2+4)(x^4-2x^2+4)$.

### *6- вариант* 3- К

1. $p=3$, $k=-14$. 2. $(x-2)(x-3)(x+4)(x+5)$. 4. $(x^2+9x-2)(x^2-3x+8)$. 5. $(x+1)(x-1)(x-4)(x-6)$.

### *1- вариант* 5- М

**1.** Тенгламанинг чап қисмини кўпайтувчиларга ажратиб, $(3x-5)(x^2+1)=0$ ни оламиз. Тенгламанинг ягона ҳақиқий илдизи $x=1\frac{2}{3}$.

**2.** Тенгламанинг чап қисмини кўпайтувчиларга ажратамиз ва $8x^2$ ни $2x+6x^2$ тарзда ифодаласак: $(2x^4+3x^3-2x^2)-(6x^2+9x-6)=x^2(2x^2+3x-2)-3(2x^2+3x-2)=(2x^2+3x-2)(x^2-3)$, $(2x^2+3x-2)(x^2-3)=0$, бундан $2x^2+3x-2=0$ ёки $x^2-3=0$. Ҳар қайси квадрат тенгламани ечиб, $x_1=-2$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=-\sqrt{3}$, $x_4=\sqrt{3}$ ни оламиз.

**3.** Тенгламанинг чап қисмини алмаштирамиз: $((x-2)(x+1))((x+3)(x-4))=(x^2-x-2)(x^2-x-12)=y(y+10)=y^2+10y$, бунда $y=x^2-x-12$. $y^2+10y-144=0$ тенгламани оламиз, бундан $y_1=8$, $y_2=-18$. Лекин $y=x^2-x-12$. Тенгламалар мажмуасини ҳосил қиламиз:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-x-12=8, \\ x^2-x-12=-18. \end{array}\right.$$

Улардан биринчисининг илдизлари 5 ва 4, иккинчиси илдизга эга эмас. Жавоб: $x_1=4$, $x_2=5$.

### *2- вариант* 5- М

**1.** Ҳадларини иккитадан кетма-кет гуруҳлаб, $4x^4(x+2)+5x^2(x+2)-3(x+2)=0$, $(x+2)(4x^4+5x^2-3)=0$ ни оламиз. Жавоб: $x_1=-2$, $x_{2,3}=\pm\frac{1}{4}\sqrt{2(\sqrt{73}-5)}$.

**2.** $x^2\neq0$ бўлганидан, тенгламанинг иккала қисмини $x^2$ га бўлиб, берилган тенгламага тенг кучли тенгламани ҳосил қиламиз:

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x-\frac{1}{x}\right)-1=0.$$

$x-\frac{1}{x}=y$ бўлсин, у ҳолда $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$. Демак, $2(y^2+2)-5y-1=0$, $y_1=1$, $y_2=1\frac{1}{2}$.

Натижада $\left[\begin{array}{l} x-\frac{1}{x}=1, \\ x-\frac{1}{x}=1\frac{1}{2}, \end{array}\right.$ бундан $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_3=-\frac{1}{2}$, $x_4=2$.

3. $(x-1)(x-2)(x-3)=1\cdot2\cdot3$. Шунга кўра илдизлардан бирини осонлик билан топамиз: $x=4$. Қавсларни очиб, $x^3-6x^2+11x-12=0$ ни ҳосил қиламиз. Тенгламанинг чап қисмини $x-4$ га бўлсак, $x^2-2x-3=0$ ҳосил бўлади, лекин бу ҳақиқий илдизларга эга эмас. Жавоб: $x=4$.

### *3- вариант* 5- М

1. $x_1=2$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{3}}$. 2. $x_1=x_2=1$.

3. $x_1=-1$, $x_2=5$, $x_{3,4}=2\pm2\sqrt{2}$.

### *4- вариант* 5- М

1. $x_1=-2$, $x_{2,3}=\pm0{,}5\sqrt{14}$. 2. $x_{1,2}=\pm1$, $x_{3,4}=\frac{3\pm\sqrt{73}}{8}$.

3. $x=5$.

### *5- вариант* 5- М

1. $x_1=x_2=2$, $x_3=-2$. 2. $x_{1,2}=\pm1$, $x_3=2$, $x_3=-\frac{2}{3}$.

3. $x_1=-4$, $x_2=3$, $x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{145}}{2}$.

### *6- вариант* 5- М

1. $x_1=-3$, $x_{2,3}=\pm2$. 2. $x_{1,2}=\pm1$, $x_{3,4}=\frac{7\pm\sqrt{73}}{4}$.

3. $x_1=4$, $x_2=-3$, $x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{145}}{2}$.

### *1- вариант* 4- К

2. $a>0$ бўлгани учун $a+3\geqslant2\sqrt{3a}$, $a+6\geqslant2\sqrt{6a}$, $a+2\geqslant2\sqrt{2a}$, $a+1\geqslant2\sqrt{a}$. Тенгсизликларнинг ҳам чап, ҳам ўнг қисмлари — мусбат сонлар, $a$ эса бир вақтда 1, 2, 3, 6 га тенг бўла олмайди, шунга кўра

$$(a+3)(a+6)(a+2)(a+1)>96a^2.$$

3. Берилган тенгсизлик ушбу тенгсизликка тенг кучли:

$$\frac{(x+6)(x-3)(2x-1)^2}{(x-2)(x-3)}<0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+6)(2x-1)^2}{2}<0, \\ x\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6<x<\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}<x<2. \end{array}\right.$$

4. Қуйидагиларга эга бўламиз: $\frac{2}{x-3}+\frac{3x}{2(x-1)}=\frac{3}{x^2-1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x^2-1)+3x(x-3)(x+1)=6(x-3), \\ x\neq 3, \\ x\neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^3-2x^2-15x+14=0, \\ x\neq 3, \\ x\neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=2, \\ x=-\frac{7}{3}, \end{array}\right. \\ x\neq 3, \\ x\neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\frac{7}{3}. \end{array}\right.$$

Қавоб; 2; $-\frac{7}{3}$.

Тенгсизликнинг чап қисмини алмаштирамиз: $x^2+10y^2-6xy+$ $+10x-26y+30=(x-3y+5)^2+(y^2+4y+4)+1=(x-3y+$ $+5)^2+(y+2)^2+1>0$. Ечишнинг иккинчи усулини 2-вариантдаги - мисолдан қаранг.

### *2- вариант* 4- К

. Тенгсизликнинг чап қисмини қуйидаги кўринишга алмаштирамиз:

$$\frac{{}^2+3a+1}{a}\cdot\frac{a^4-a^2+1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}+3\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}-1\right)\geqslant(2+3)(2-$$

$-1)=5.$

енглик фақат $a=1$ да ўринли.

Берилган тенгсизлик ушбу тенгсизликка тенг кучли:

$$\frac{(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-2)^2}{-(x+7)(x-1)}<0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1, \\ x\neq 2, \\ \frac{x-\frac{2}{3}}{x+7}>0. \end{cases}$$

авоб: $x<-7$, $\frac{2}{3}<x<1$, $1<x<2$, $x>2$.

4. Махраждан қутқазиб, берилган тенгламанинг натижасидан иборат бўлган $2x^3-7x^2+9=0$ ни оламиз. Бунинг уч $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_3=1{,}5$ илдизидан $x_1=-1$ бегона илдиздир.
**Жавоб:** 3; 1,5.

5. Тенгсизликнинг чап қисмини $x$ га нисбатан квадрат учҳад сифатида қараймиз: $P(x)=x^2+(y+1)x+y^2-y+3$. Бунда $P(x)$ нинг биринчи коэффициенти мусбат, дискриминант эса манфий: $(y+1)^2-4y^2+4y-12=-3(y-1)^2-9<0$. Демак, исталган $x$ да $P(x)>0$.

### *3- вариант* 4- К

3. $x<-1$, $-\frac{2}{3}<x<\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}<x<1$, $x>6$. 4. 3, $\frac{1}{2}$.

5. $\sqrt{2}$ — тенгламанинг илдизи бўлгани учун $(\sqrt{2})^3-2(a+2)+b\sqrt{2}-2a=0$, ёки

$$4(a+1)=(b+2)\sqrt{2}. \tag{1}$$

$a$ ва $b$ — бутун, шунинг учун (1) дан $b=-2$ экани келиб чиқади. Акс ҳолда $\sqrt{2}=\frac{4(a+1)}{b+2}$ — рационал сон. Агар $b=-2$ бўлса, $a=-1$ бўлади. Шу тариқа $x^3-x^2-2x+2=0$ тенгламани оламиз, унинг илдизлари $x_1=1, x_{2,3}=\pm\sqrt{2}$. **Жавоб:** $a=-1$, $b=2$, $x_1=1$, $x_2=-\sqrt{2}$.

### *4- вариант* 4- К

3. $-5<x<-0{,}75$, $1<x<2$. 4. 1; $-2$.

### *5- вариант* 4- К

2. $a=1$. 3. $x<-3$, $-1<x<\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}<x<5$, $x>5$. 4. 1; $-1{,}5$.

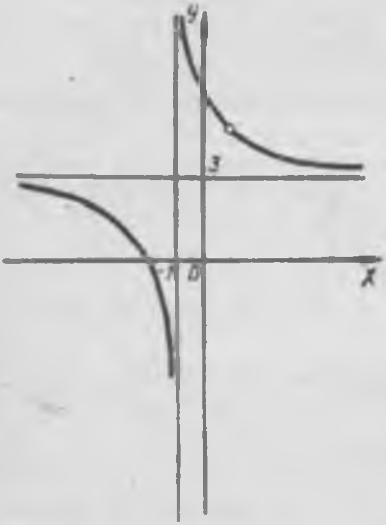
### *6- вариант* 4- К

2. $4a^4-12a^3+13a^2-6a+1=(a-1)^2(2a-1)^2\geqslant 0$.
Тенглик $a=1$ ва $a=0{,}5$ бўлганда бажарилади.
3. $-1<x<2$, $2<x<6$. 4. $-1$. 5. $a=-2$, $b=-1$, $x_1=0$, $x_2=1-\sqrt{2}$.

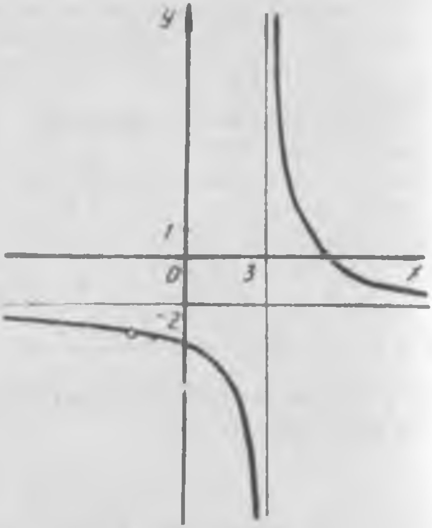
### *1- вариант* 6- М

1.

$$f\left(\frac{\sqrt{a^2-1}}{a-1}\right)=\frac{\left(\frac{\sqrt{a^2-1}}{a-1}\right)^2+1}{\left(\frac{\sqrt{a^2-1}}{a-1}\right)^2-1}=\frac{\frac{a+1}{a-1}+1}{\frac{a+1}{a-1}-1}=a,$$ буида $|a|>1$, $a\neq 1$.



29- расм.



30- расм

2. Қасрни алмаштирамиз: $\frac{3x^2+3x-6}{x^2-1}=\frac{3(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}=3+$ $+\frac{3}{x+1}$. Демак, $y=3+\frac{3}{x+1}$, бунда $x\neq 1$. График 29- расмда тасвирланган.

3. $A(3;\ 5)$ ва $B(1;\ -2)$ нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси:

$$\frac{y+2}{5+2}=\frac{x-1}{3-1} \text{ ёки } y=3{,}5x-5{,}5.$$

Унга параллел ва $C(1;\ -1)$ нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$y=3{,}5(x-1)-1 \text{ ёки } y=3{,}5x-4{,}5$$

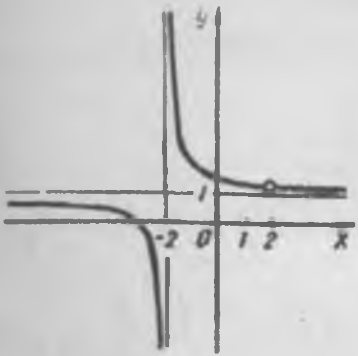
кўринишда ёзилади. $y=3{,}5x-5{,}5$ ва $y=3{,}5x-4{,}5$ тўғри чизиқлар ординаталар ўқидан узунликлари мос равишда 5,5 ва 4,5 га бўлган кесмалар ажратади. Тўғри чизиқлар параллел бўлганлигидан, улар томонидан ажратиладиган учбурчаклар ўхшаш. Демак,

$$\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{5{,}5}{4{,}5}\right)^2=\frac{121}{81}.$$

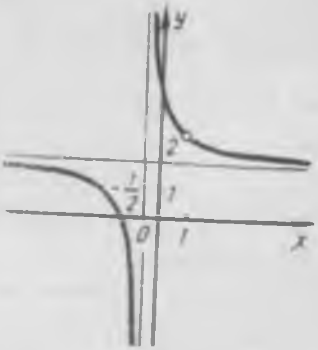
## *2- вариант*

6- М

1. $b$, бунда $-1<b\leqslant 1$. 2. $y=\frac{4}{x-3}-2$, бунда $x\neq -2$ (30- расм).



31- расм.



32- расм.

3. $AB$ тўғри чизиқнинг тенгламаси: $\frac{y+6}{9} = \frac{x+2}{9}$ ёки $y = x - 4$; $AB$ га параллел бўлиб, $C(-2;\ 1)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси: $y = x + 3$.

Координата ўқларини кесишдан ҳосил бўладиган тўғри бурчакли учбурчаклар ўхшаш. $y = x - 4$ тўғри чизиқ абсциссалар ўқидан узунлиги 4 га тенг бўлган, $y = x + 3$ тўғри чизиқ эса узунлиги 3 га тенг бўлган кесма ажратади. Учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{P_1}{P_2} = \frac{4}{3}$ бўлиши келиб чиқади,

### *3- вариант* 6- М

1. $f\left(\frac{\sqrt{1-c^2}}{2(1-c)}\right)^4 = c$, бунда $-1 \leqslant c < 1$. 2. $y = 1 + \frac{1}{x-2}$, бунда $x \neq 2$ (31- расм). 3. $y = -3x + 5$, $y = -3x - 11$, $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{5}{11}\right)^2 = \frac{25}{121}$.

### *4- вариант* 6- М

1. $k$, бунда $-1 \leqslant k \leqslant 1$. 2. $y = \frac{3}{2x+1} + 2$, бунда $x \neq 1$ (32- расм).

3. а) $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$, $y = \frac{2}{3}x - 2$; б) $\frac{P_1}{P_2} = \frac{2}{3}$.

### *5- вариант* 6- М

1. $c$, бунда $-1 \leqslant c < 1$. 2. $y = \frac{6}{x-1} + 6$, бунда $x \neq -1$. 3. а) $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$, $y - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$; б) $\frac{S_1}{S_2} = \frac{16}{25}$.

### *6- вариант* 6- М

1. $y$, бунда $-1 \leqslant y < 1$. 2. $y = \frac{4}{x+4}$, бунда $x \neq 2$. 3. а) $y = 1{,}5x - 2{,}5$, $y = 1{,}5\,x - 5{,}5$; б) $\frac{P_1}{P_2} = \frac{5}{11}$.

### *1- вариант* 5- К

1. а) $y = \frac{8}{(x-3)^2+4}$; $\min\limits_R((x-3)^2+4) = 4$ бўлгани учун $\max\limits_R y = y(3) = 2$ бўлади.
3. $f(-x) = f(x)$. Функция жуфт.
4. $(f\,\varphi(x)) = 2(\sqrt{3x-1})^2 - 1 = 6x - 3$, бунда $x \geqslant \frac{1}{3}$; $\varphi(f(x)) = \sqrt{3(2x^2-1)-1} = \sqrt{6x^2-4}$.
5. Шартдан $y = 2x - |x-2| - |2x+5|$ га эга бўламиз.
Агар $x \leqslant -2{,}5$ бўлса, у ҳолда $y = 5x + 3$; $\max\limits_{(\infty;\,-2{,}5)} y = y(-2{,}5) = -9{,}5$.
Агар $-2{,}5 \leqslant x \leqslant 2$ бўлса, у ҳолда $y = x - 7$; $\max\limits_{[-2{,}5;\,2]} y = y(2) = -5$.
Агар $x \geqslant 2$ бўлса, у ҳолда $y = -x - 3$; $\max\limits_{[2;+\infty]} y = y(2) = 5$. (Ҳар бир ҳолда функциянинг монотонлиги эътиборга олинади.) Шундай қилиб, $\max\limits_R y = -5$.

### *2- вариант* 5- К

1. $x_1 < x_2$, $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ бўлсин. $f$ функция камаювчи бўлгани учун $f(x_1) > f(x_2)$. $k > 0$ бўлгани учун $kf(x_1) > kf(x_2)$, яъни $kf(x)$ функция $X$ тўпламда камаювчи.
2. а) Берилган ифодани алмаштирамиз:

$$\frac{13}{x^2+2x+3} = \frac{13}{(x+1)^2+2}$$

$\min\limits_R((x+1)^2+2) = 2$ бўлгани учун $\max\limits_R y = y(-1) = 6{,}5$.
б) $h(x) = x^2 + 2x + 3$ бўлсин. Қаралаётган оралиқда $h(x)$ функция камаювчи ва $h(x) > 0$ бўлгани учун $y = \frac{13}{h(x)}$ функция $(-\infty; -1]$ оралиқда ўсади.
3. $f(-x) = f(x)$. Функция жуфт.
4. $f(\varphi(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x} - 2)^2$; $\varphi(f(x)) = \varphi(x-2)^2) = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$.
5. Агар $x \leqslant 0{,}5$ бўлса, у ҳолда $y = -5x + 4$; $\min\limits_{(-\infty;\,0{,}5)} y = 1{,}5$.
Агар $0{,}5 \leqslant x \leqslant 3$ бўлса, у ҳолда $y = -x + 2$; $\min\limits_{[0{,}5;\,3]} y = -1$.
Агар $x \geqslant 3$ бўлса, у ҳолда $y = x - 4$; $\min\limits_{[3:+\infty]} y = -1$.
Демак, $\min\limits_R y = y(3) = -1$.

### *3- вариант* 5-К

2. а) $\max\limits_{R} y = y(--1) = 2\frac{1}{4}$ 4. $f(\varphi(x)) = 4x(x+1),\ x \geqslant -1;\ \varphi(f(x)) = |2^{x^2} - 1|$. 5. $-3$.

### *4- вариант* 5- К

2. $y = \frac{2x^3}{x^2-9} + \frac{x^2+1}{x^2-9}$ · 3. $y = -2\left(x^2 - \frac{3}{4}\right)^2 - 4\frac{7}{8}$; $\max y = -4\frac{7}{8}$.

4. $$f(\varphi(x)) = \begin{cases} 1, \text{ агар } |x| > \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ -1, \text{ агар } |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

$\varphi(f(x)) = 2$, бунда $x \neq 0$.

5. $-2$.

### *5- вариант*

2. а) 5,5. 3. Функция тоқ. 4. $f(\varphi(x)) = 6x - 2$, бунда $x \leqslant 0{,}5$; $\varphi(f(x)) = \sqrt{6x^2 - 1}$. 5. $-1$.

### *6- вариант*

2. $-4$. 3. Функция жуфт. 4. $f(\varphi(x)) = 27x^2 + 12x + 1$, $x \geqslant -\frac{1}{3}$; $\varphi(f(x)) = |3x^2 - 1|$. 5. $\frac{1}{3}$.

### *1- вариант* 7- М

1. $y = x + 3$. 2. Биз исталган $\varepsilon > 0$ учун шундай $M > 0$ мавжудки, $|x| > M$ да $|f(\lambda)| < \varepsilon$ тенгсизлиги бажарилишини исботлашимиз керак. Бу ҳолда: $|f(x)| = \left|\frac{3}{4x-2}\right| < \varepsilon$, бундан $|4x-2| > \frac{3}{\varepsilon}$ келиб чиқади. $|4x-2| \geqslant |4x| - 2$ бўлгани учун $|4x| - 2 > \frac{3}{\varepsilon}$ тенгсизликни ечиш етарли. Бу тенгсизликни ечиб, $|x| > \frac{1}{4}\left(2 + \frac{3}{\varepsilon}\right)$ ни оламиз. $M = \frac{3+2\varepsilon}{4\varepsilon}$ деб фараз қилайлик. Биз юритган мулоҳазаларга қараганда $|x| > M$ да $|f(x)| < \varepsilon$ тенгсизлиги бажарилади. Демак, $f$ функция $x \to \infty$ да чексиз кичик.

3. $|\lambda^2 - 4x + 3| \geqslant x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$. Энди $(x-2)^2 - 1 \geqslant 10^4$ тенгсизликни ечиб, $M = 2 + \sqrt{1 + 10^4}$ бўлган $(M;\ +\infty)$ нурда $|x^2 - 4x + 3| > 10^4$ тенгсизликнинг бажарилишини аниқлаймиз.

Бошқача ечилиши. $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ функцияни (3; +∞ нурда қараймиз. $x > 3$ да $f(x) = x^2 - 4x + 3$. У ҳолда:

$$\begin{cases} x > 3, \\ x^2 - 4x + 3 > 10^4 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2 + \sqrt{1 + 10^4}.$$

### *2- вариант* 7- М

1. $y = 1$. 2. $\varphi(x)$ нинг чексиз катта функция эканини исботлаш учун $x \to \infty$ да $f(x) = \frac{4x+5}{x-4} - 4$ функциянинг чексиз кичик бўлишини исботлаш етарли.

3. $x > 1$ да қуйидагига эга бўламиз:

$$\left|\frac{2x+1}{x^2+3x}\right| = \frac{2x+1}{x^2+3x} < \frac{2x+x}{x^2+3x} = \frac{3}{x+3}.$$

$\frac{3}{x+3} < 0{,}001$ тенгсизликни ечиб ($x > 1$ эканини эътиборга олиб), $x > 2997$ ни топамиз. $M \geqslant 2997$ бўлган ҳар қандай $(M;\ +\infty)$ нурда $\left|\frac{2x+1}{x^2+3x}\right| < 0{,}001$ тенгсизлик бажарилмоқда. Мисол учун, $M = 3000$ ни олиш мумкин.

### *3- вариант* 7- М

1. $y = 2x - 6$. 3. $x > 5$ да қуйидагига эга бўламиз:

$$\left|\frac{x^3-4x^2+3x+1}{x^2-6x+5}\right| = \left|x+2+\frac{10x-9}{x^2-6x+5}\right| = x+2+$$
$$+\frac{10x-9}{x^2-6x+5} > x+2.$$

$x + 2 > 10^6$ тенгсизликни ечиб, $x > 10^6 - 2$ ни оламиз; $M = 10^5 - 2$.

### *4- вариант* 7- М

1. $y = 2x + 12$. 3. $a = 4$. $a = 4$ да $y = \frac{3x-2}{2x^2-3}$ · $x > 1$ да $|y| = \left|\frac{3x-2}{2x^2+3}\right| = \frac{3x-2}{2x^2+3} \leqslant \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2x^2}$. Энди $\frac{3}{2x} < 0{,}01$ тенгсизликни ечиб ($x > 4$ ни ҳам эътиборга олиб), $x > 150$ ни топамиз. Изланаётган нур $(M; +\infty)$, бунди $M \geqslant 150$ (масалан, $(160;\ +\infty)$).

### *5- вариант* 7-М

1. $y = 4$. 2. $x > 3$ бўлганда $|x^3 - 8x + 1| = |(x(x^2 - 8) + 1| = x(x^2 - 8) + 1 = x^3 - 8x + 1 > x^3 - 8x$. $(3;\ +\infty)$ га тегишли шундай нурни топайликки, унда $x^3 - 8x > \frac{x^3}{2}$ (1) тенгсизлик бажарилсин. (1) тенгсизликни ечиб (бунда $x > 3$ бўлишини ҳам эътиборга олиб), $x > 4$ ни топамиз. Шундай қилиб, $x > 4$ да $|x^3 - 8x + 1| > \frac{x^3}{2}$ га эга бўламиз. $\frac{x^3}{2} > 10^9$ тенгсизликдан $x > 1000\sqrt{2}$ ни топамиз. Демак, ҳар қандай $(M;\ +\infty)$ нурда $|x^3 - 8x + 1| > 10^9$ тенгсизлик бажарилади, бунда $M \geqslant 1000\sqrt{2}$ (масалан, $M = 2000$). 3. $a = 0$.

### *6- вариант* 7- М

1. $y = 7$. 2. $a = 6$, $b = 2$.

### 1- вариант 6- К

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2|x|-1}{x-3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x-1}{x-3} = -2;$

$$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x+5}{1+2x} = 1,5.$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+(-1)^n}{6n-(-1)^n} - \frac{2^n-2^{-n}}{2^n+2^{-n}}\right) =$

$$= \lim\limits_{n\to\infty} \left( \frac{2+\frac{(-1)^n}{n}}{6-\frac{(-1)^n}{n}} - \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^n} \right) = -\frac{2}{3}.$$

3. $a_1$ — прогрессиянинг биринчи ҳади, $q$ — махражи бўлсин. Масаланинг шарти бўйича $\frac{a_1}{1-q} = 8$, $a_1 q + a_1 q^2 = 3$. Бу тенгликлардан $a_1$ ни чиқариб, $8q^3 - 8q + 3 = 0$ тенгламани оламиз. $2q = z$ алмаштириш тенгламани $z^3 - 4z - 3 = 0$ кўринишга келтиради. $z = 1$ бу тенгламанинг илдизи бўлишини кўриш қийин эмас. Даражани пасайтириб, иккала илдизи ҳам иррационал бўлган $z^2+z-3=0$ тенгламани ҳосил қиламиз. $2q = z$ шартдан $q = 0,5$ ни топамиз. Сўнг $a_1 = 4$, $a_4 = a_1 q^3 = 0,5$ ни топамиз.

4. $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2) = \frac{1+3n-2}{2}\, n = \frac{n(3n-1)}{2}$ бўлганидан, изланаётган лимит:

$$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n(3n-1)}{2(2n+1)} - \frac{3n+1}{4}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-7n-1}{4(2n+1)} = -\frac{7}{8}.$$

### 2- вариант 6- К

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{2x-4} = \frac{1}{2};$

$$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-|x-2|}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-(x-2)}{x} = -1.$$

2. $\frac{1}{3}$. 3. $\frac{1}{16}$. 4. 0,3.

### 3- вариант 6- К

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$. 2. 0. 3. $\frac{8}{27}$. 4. $\frac{1}{6}$.

### 4- вариант 6-К

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0,5$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. 2. $-\frac{2}{3}$. 3. $\frac{81}{128}$. 4. $\frac{1}{3}$.

## *5- вариант* 6- Қ

1. $-0{,}5$; 3. 2. $-4$. 3. $\frac{2}{27}$. 4. $\frac{1}{720}$.

## *6- вариант* 6- К

1. $-3$; 0. 2. $-5$. 3. $\frac{1}{8}$. 4. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

## *1- вариант* 7- Қ

1. а) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+2x+4-12}{x^3-8}=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x+4}{x^2+2x+4}=\frac{1}{2};$$

б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2+3x+3)}{(x+1)(2x+1)}=-1.$

2. а) Узлуксиз функциялар йиғиндиси, кўпайтмаси, бўлинмасининг узлуксизлиги ҳақидаги теоремалардан $f$ функциянинг ихтиёрий $x\neq-1$ ва $x\neq2$ нуқтада узлуксизлиги келиб чиқади. $x=-1$ ва $x=2$ нуқталарда функцияни узлуксизликка текширамиз.

$$\lim_{x\to-1-0}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{2x+1}{x}=1,\quad \lim_{x\to-1+0}f(x)=\lim_{x\to-1}(2-x^2)=1,$$

шунинг учун $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=1$. Шундай қилиб, $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=f(-1)=1$. Демак, $f$ функция $x=-1$ нуқтада узлуксиз.

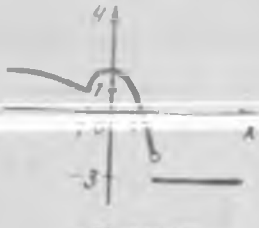
$$\lim_{x\to2-0}f(x)=\lim_{x\to2-0}(2-x^2)=\lim_{x\to2}(2-x^2)=-2;$$
$$\lim_{x\to2+0}f(x)=\lim_{x\to2+0}(-3)=\lim_{x\to2}(-3)=-3.$$

$\lim\limits_{x\to2-0}f(x)\neq\lim\limits_{x\to2+0}f(x)$ бўлгани учун $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ мавжуд эмас. Демак, $f$ функция $x=2$ нуқтада узлуксиз эмас, $x=2$— функциянинг узилиш нуқтаси (33- расм).

б) $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=f(-2)=1{,}5$, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=2$,

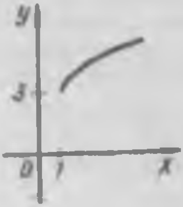
$\lim\limits_{x\to5}f(x)=f(5)=-3.$

3. $P(x)=x^3-5x+3$ бўлсин, $P(-3)=-9<0$, $P(-2)=5>0$. $P(x)$ — узлуксиз функция ва $[-3;-2]$ кесманинг учларида ҳар хил ишорага эга, шунинг учун у шу кесманинг ҳеч бўлмаганда битта ички нуқтасида нолга айланади. Илдизнинг қийматини 0,1 гача аниқлик билан топамиз. $[-3;-2]$ оралиқни тенг 10 бўлакка бўлиб, $-3$; $-2{,}9$; $-2{,}8$; ...; $-2$ нуқталарни оламиз. $P(-2{,}5)=-0{,}125<0$, $P(-2{,}4)=1{,}176>0$ бўлганидан, $x\approx-2{,}5$, $x\approx-2{,}4$—илдизнинг 0,1 гача аниқликда ками ва ортиғи билан олинган тақрибий қийматлари бўлади.



33- расм.

4. $y > 1$ да $x^2 - 6x - 10 = y$ тенглама иккита илдизга эга бўлади, шунинг учун $g(x)$ тескариланмайди. $g$ функция $[3; +\infty)$ оралиқда монотон (ўсувчи), демак, шу оралиқда $g^{-1}$ функция мавжуд. $x^2 - 6x + 10 = y$ тенгламани $x\,(x \geqslant 3)$ га нисбатан ечамиз. $x = 3 + \sqrt{y - 1}$ ни оламиз. Демак, $g^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x - 1}$ (34- расм).



34- расм.

$$5.\ \lim_{n\to\infty} \frac{-1\cdot 3 - 1\cdot 7 - \ldots - 1\cdot(4n-1)}{4n^2 - 3} =$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \frac{(3 + 4n - 1)n}{2(4n^2 - 3)} = -0{,}5.$$

$$6.\ \varphi(x) = \frac{(4b + 2a)x^2 - ax + 5}{2x - 1};$$

Агар $\begin{cases} 4b + 2a = 0, \\ -\dfrac{a}{2} = 1{,}5 \end{cases}$ бўлса, $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 1{,}5$ бўлади, бундан $a = -3$, $b = 1{,}5$.

## 2- вариант

**7- К**

$$1.\ \text{а)}\ \lim_{x\to 7} \frac{(2 - \sqrt{x - 3})(2 + \sqrt{x - 3})}{x(x - 7)(2 + \sqrt{x - 3})} =$$

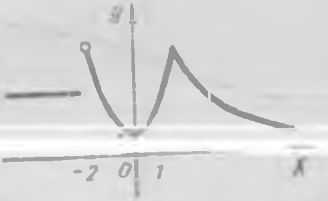
$$= \lim_{x\to 7} \frac{7 - x}{x(x - 7)(2 + \sqrt{x - 3})} = -\frac{1}{28};$$

$$\text{б)}\ \lim_{x\to 1} \frac{x^3 + 6x - 1}{2x + 5} = \frac{6}{7}.$$

2. а) Исталган $x \neq -2$ ва $x \neq 2$ нуқтада функция узлуксиз. Функцияни $x = \pm 2$ нуқталарда узлуксизликка текширамиз. $\lim\limits_{x\to -2-0} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to -2+0} f(x) = 5$. $\lim\limits_{x\to -2-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -2+0} f(x)$ бўлганидан $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ мавжуд эмас. $x = -2$ нуқтада узлуксизлик йўқ. $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = f(2) = 5$, демак, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$, шунга кўра функция $x = 2$ нуқтада узлуксиз (35- расм).

б) $\lim\limits_{x\to 7} f(x) = f(7) = \dfrac{5}{6}$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 2$, $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = f(-3) = 3$.

3. $\varphi(x) = x^3 + x - 11$ бўлсин, у ҳолда $\varphi(3) = 19 > 0$, $\varphi(2) = -1 < 0$, шу билан бирга $\varphi(x)$ узлуксиз, шунинг учун $\varphi(c) = 0$ бўладиган $c\,(2 < c < 3)$ нуқта мавжуд. $c$ ни 0,1 аниқлик билан топамиз. [2; 3] кесмани тенг 10 бўлакка бўламиз: 2; 2,1; 2,2; . . . ; 2,9; 3. $\varphi(2{,}1) \approx 0{,}46 > 0$ ни топамиз. 2 ва 2,1 нуқталарда



35- расм.

функция ҳар хил ишорага эга бўлаётганидан, $x \approx 2{,}0$ илдизнинг 0,1 гача аниқликда ками билан олинган, $x \approx 2{,}1$ эса 0,1 гача аниқликда ортиғи билан олинган тақрибий қиймати бўлади.

4. $x^2 + 8x + 10 = y$ тенглама $y > -6$ да икки илдизга эга бўлганидан, функция тескариланмайди. $(-\infty; -4]$ оралиқда эса $x^2 + 8x + 10$ функция камаювчи ва шунинг учун у шу оралиқда тескариланувчи. $x^2 + 8x + 10 = y$ тенгламани $x \leqslant -4$ да $x$ га нисбатан ечиб, $x = -4 - \sqrt{6 + y}$ ни оламиз. Тескари функция $y = -4\sqrt{6 + x}$ кўринишга эга бўлади.

5. $$\lim_{k\to\infty} \frac{-2\cdot 6 - 2\cdot 14 - 2\cdot 22 - \ldots - 2(8k-2)}{4k^2 + 3k + 4} =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{-2(6 + 14 + 22 + \ldots + (8k-2))}{4k^2 + 3k + 4} = \lim_{k\to\infty} \frac{-2k(8k+4)}{2(4k^2 + 3k + 4)} =$$
$$= -2.$$

6. $$\lim_{x\to 3-0} \varphi(x) = \lim_{x\to 3} \frac{2x(x-3)}{x-3} = 6.$$
$$\lim_{x\to 3+0} \varphi(x) = \lim_{x\to 3} (ax + 2) = 3a + 2;$$
$$3a + 2 = 6, \; a = \frac{4}{3}.$$

### *3- вариант*

7- К

1. а) $-0{,}5$; б) $-\frac{7}{9}$. 2. 36- расм. 3. Ками билан $\approx 0{,}2$. 4.) $(x - 3)^2 + 4$, $x \geqslant 3$. 5. $-1$. 6. 4,5.

### *4- вариант*

7- К

1. а) 1; б) 2. 2. 37- расм. 3. Ками билан $\approx 1{,}7$. 5. 1. 6. $a = 1$, $b = -1$.

### *5- вариант*

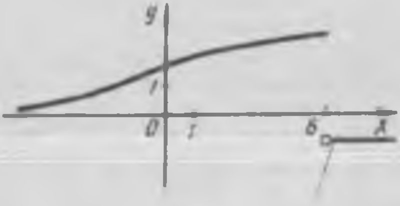
7- К

1. а) $\frac{1}{3}$; б) 3. Ками билан $\approx -0{,}7$. 5. $\frac{1}{3}$.
6. $b = 2$ ёки $b = -2$.

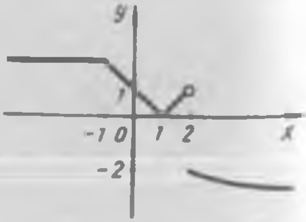
### *6- вариант*

7- К

1. а) $-\frac{1}{136}$; б) $-1{,}4$. 3. Ками билан $\approx 0{,}8$. 5. $\frac{2}{7}$. 6. $c = 6$, $d = -2$.



36- расм.



37- расм.

## 1- вариант

1. $a$ нуқта яқинида функция қийматини тақрибий ҳисоблаш формуласидан фойдаланамиз: $f(a+h)=f(a)+f'(a)h$.

а) $f(x)=x^3$ функцияни $a=3$, $h=0{,}013$ ларда қараймиз. $f(a)=f(3)=27, f'(x)=3x^2, f'(a)=f'(3)=27. f(3{,}013)\approx 27+27\cdot 0{,}013=27+0{,}351=27{,}351$. Микрокалькуляторда $3{,}013^3\approx 27{,}3525$.

б) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ функцияни $a=27$, $h=0{,}018$ ларда қараймиз. $f(a)=$

$$=f(27)=\sqrt[3]{27}=3,\ f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},\ f'(a)=f'(27)=\frac{1}{27};\ f(27{,}018)\approx$$

$$\approx 3+\frac{1}{27}\cdot 0{,}018+3+0{,}000(6)=3{,}000(6).$$ Микрокалькуляторда $\sqrt[3]{27{,}018}\approx 3{,}0006665$.

2. $h>-3$ да $\dfrac{y(h)-y(0)}{h}=\dfrac{|h+3|-3}{h}=1$.

$$y'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{y(h)-y(0)}{h}=1,\ \frac{y(-3+h)-y(-3)}{h}=\frac{|h|}{h}.$$ Лекин $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|}{h}$ мавжуд эмас. Демак, функция $x_0=-3$ нуқтада ҳосилага эга бўлмайди.

3. $\left|\dfrac{3n}{2n-1}-1{,}5\right|<0{,}02$. $\left|\dfrac{1{,}5}{2n-1}\right|<0{,}02$; $n\in N$ бўлгани учун $\dfrac{1{,}5}{2n-1}<0{,}02$, $n>38$.

## 2- вариант

8- М

1. а) 257,792; б) 2,015. 2. $f'(a)=\varphi(a)$.

3. $0<\dfrac{n^2-3n+5}{n^2+1}<\dfrac{n^2+5}{n^2}\leq\dfrac{n^2+5n^2}{n^2}=6$.

## 3- вариант

8- М

1. а) 32,24; б) 3,0008. 2. $y'(0)$ ва $y'(1)$ мавжуд эмас, $y'(2)=2$.

## 4- вариант

8- М

1. а) 8,084; б) 2,984. 3. $n\geqslant 66$.

## 5- вариант

8- М

1. а) 16,416; б) 2,997. 2. $y'(1)=\dfrac{4}{5}$, $y'(0)$ мавжуд эмас.

## 6- вариант

8- М

1. а) 31,60; б) 1,997. 2. $f'(a)=0$.

### *1- вариант* 9- М

1. Параллелдирлар. 2. Уринма тенгламаси $y + 2 = 6(x + 1)$, ёки $y = 6x + 4$. Энди $\frac{6x^2 + 34x - 22}{x + 5} = 6x + 4 + \frac{2}{x + 5}$ бўлгани учун $y = 6x + 4$ — оғма асимптота тенгламаси.

3. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (2n)^2 = \frac{2n(2n + 1)(4n + 1)}{6} =$
$= \frac{n(2n + 1)(4n + 1)}{3}$, $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = \frac{2n(n + 1)(2n + 1)}{3}$.

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1)^2 = \frac{n(2n + 1)(4n + 1)}{3} - \frac{2n(2n + 1)(2n + 1)}{3} = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}.$$

Бошқача ечилиши. $\sum_{k=1}^{n}(2k - 1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(4k^2 - 4k + 1) =$
$= 4\sum_{k=1}^{n}k^2 - 4\sum_{k=1}^{n}k + n = \frac{2n(n + 1)(2n + 1)}{3} - 2n(n + 1) + n = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$.

### *2- вариант* 9- М

1. $M(2; 8)$, $N(-4; -64)$. 3. $\frac{n(n + 1)(4n + 5)}{6}$.

### *3- вариант* 9- М

1. Параллел. 2. (0,5; 1). 3. $n^2(2n^2 - 1)$.

### *4- вариант* 9-М

1. $a = \pm 2$. 2. (—1,5; 3). 3. $n^2(n + 1)$.

### *5- вариант* 9- М

1. Устма-уст тушади. 2. (2; 4), (1; 10), (3; —2).

3. $\frac{n(n + 1)(n + 2)(3n + 1)}{12}$.

### *6- вариант* 9- М

1. Ҳа; уриниш нуқтасининг координаталари (—1; —2); уриниш нуқтасидан ташқари (2; 16) нуқта ҳам умумий нуқта бўлади.

3. $\frac{n(6n^2 - 3n - 1)}{2}$.

1. а) $v = s'(t) = 3t^2 - 3t + 2$, $s'(3) = 20$ м/с;

б) $a = v'(t) = 6t - 3$, $6t - 3 = 9$, $t = 2$с.

2. $f(x) = 8\sqrt{x} + \frac{2}{x}$, $f'(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2}$, $f'(1) = 2$.

3. а) $\varphi(x) = \frac{x+2}{3-x}$, $x_0 = 2$, $\varphi(2) = 4$, $\varphi'(x) = \frac{3 - x + x + 2}{(3-x)^2} =$

$= \frac{5}{(3-x)^2}$, $\varphi'(2) = 5$.

Уринма тенгламаси: $y - 4 = 5(x - 2)$ ёки $y = 5x - 6$.

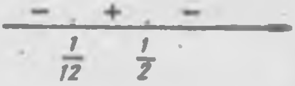
б) Уринманинг бурчак коэффициенти 5 га тенг. Демак, $\frac{5}{(3-x)^2} =$ $= 5$. Бундан $x_0 = 2$ ёки $x_0 = 4$. $x_0 = 4$ абсциссали нуқтада $\varphi$ функция графигига ўтказилган уринма тенгламасини ёзамиз. $\varphi(4) =$ $= -6$ бўлади. Уринма тенгламаси: $y + 6 = 5(x - 4)$ ёки $y = 5x - 26$.

4. $g(x) = 3x(2x - 1)^5$. Ҳосилани топамиз:

$g'(x) = 3((2x - 1)^5 + 10x(2x - 1)^4) = 3(2x - 1)^4 \ (12x - 1)$.

а) $g'(x) = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{12}, \\ x = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$

б) $g'(x) > 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{12} < x < \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{2}; \end{array}\right.$



38- расм.

в) $g'(x) \leqslant 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{12}, \\ x \leqslant \frac{1}{2} \end{array}\right.$

(38- расм).

5. $y = \left|\frac{x^2 - 1}{1 - x}\right| = |x + 1|$, $x \neq 1$;

$$\frac{y(-1 + h) - y(-1)}{h} = \frac{|-1 + h + 1| - 0}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

Лекин $\lim\limits_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$ мавжуд эмас, Демак, $y'(-1)$ мавжуд бўлмайди.

6. Тенгликнинг чап ва ўнг қисмлари ҳосилаларини топамиз:
$50(x - 2)^{49} = 50a_0x^{49} + 49a_1x^{48} + 48a_2x^{47} + \ldots + 2a_{48}x + a_{49}$.
$x = 1$ да:
$50a_0 + 49a_1 + 48a_2 + \ldots + 2a_{48} + a_{49} = -50$.

## 2- вариант

1. а) $v(t) = x'(t) = 6t^2 - 5t + 3$ (м/с), $v(1) = 4$ (м/с);

б) $a(t) = v'(t) = 12t - 5$ (м/с$^2$), $12t - 5 = 19$, $t = 2$ (с).

2. $f(x) = \frac{32}{x^2} - 2\sqrt{x}$, $f'(x) = (32x^{-2} - 2\sqrt{x})' = -\frac{64}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}$. $f'(4) = -1{,}5$.

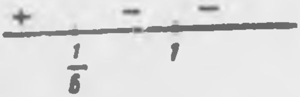
3. а) $\varphi'(x) = \frac{-5}{(x+4)^2}$, $x_0 = -3$, $\varphi(-3) = 4$, $\varphi'(-3) = -5$, $y - 4 = -5(x+3)$, $y = -5x - 11$.

б) Уринманинг бурчак коэффициенги —5 га тенг. $-\frac{5}{(x+4)^2} = -5$.

Бундан $x_0 = -3$ ёки $x_0 = -5$. $x_0 = -5$ абсциссали нуқтада уринманинг тенгламаси: $y + 6 = -5(x+5)$ ёки $y = -5x - 31$.

4. $g'(x) = 2(1-x)^5 - 5x(1-x)^4) = 2(1-x)^4(1-6x)$.

$$\text{а) } g'(x) = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{6}, \\ x = 1; \end{array}\right.$$



39- расм.

$$\text{б) } g'(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant \frac{1}{6} \\ x = 1; \end{array}\right.$$

$$\text{в) } g'(x) < 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{6} < x < 1, \\ x > 1 \text{ (39- расм).} \end{array}\right.$$

5. $F(x) = |1 - x^2|$. $\frac{F(1+h) - F(1)}{h} = \frac{|1(1+h)^2| - |1-1|}{h} = \frac{|-2h - h^2|}{h} = \frac{|h| \cdot |2+h|}{h}$ бўлсин.

$$\lim_{h\to+0} \frac{F(1+h) - F(1)}{h} = 2, \quad \lim_{h\to-0} \frac{F(1+h) - F(1)}{h} = -2$$

бўлганидан $\lim\limits_{h\to0} \frac{F(1+h) - F(1)}{h}$ мавжуд эмас. Демак, $F'(1)$ мавжуд эмас, яъни функция $x = 1$ нуқтада дифференциалланмайди. Функциянинг $x = -1$ нуқтада дифференциалланмаслиги ҳам шу кабн исботланади.

6. Тенгликнинг чап ва ўнг қисмидан биринчи ва иккинчи ҳосилаларни олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$40 \cdot 39 a_0 x^{38} + 39 \cdot 38 a_1 x^{37} + \ldots + 2a_{38} = 6240\,(3-2x)^{38}.$$

$x = 1$ қўйилса:

$$40 \cdot 39 a_0 + 39 \cdot 38 a_1 + 38 \cdot 37 a_2 + \ldots + 2a_{38} = 6240.$$

### *3- вариант* 8- К

1. а) 14 м/с; б) 1 с. 2. 1,5. 3. а) $y = x - 3$; б) $y = x - 7$. 4. а) $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{3}$; б) $x \leqslant \frac{1}{24}$, $x = \frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{24} < x < \frac{1}{3}$; $x > \frac{1}{3}$. 6. 360.

### *4- вариант* 8- К

1. а) 4 м/с; б) 0,5 с. 2. —1. 3. а) $y = -5x - 26$; б) $y = -5x - -6$. 4. а) $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{18} < x < \frac{1}{3}$. $x > \frac{1}{3}$; в) $x \leqslant \frac{1}{18}$, $x = \frac{1}{3}$. 6. 10260.

### *5- вариант* 8- К

1. а) 3,5 м/с; б) 4,5 с. 2. 1. 3. а) $y = -7x - 15$; б) $y = -7x - 43$. 4. а) $-\frac{4}{3}$, $-\frac{2}{9}$; б) $= -\frac{4}{3}$; $x > -\frac{2}{9}$; в) $x < -\frac{4}{3}$, $-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{9}$.
5. а) $h'(3) = 6$, $h'(-5) = 10$; б) $h'(0) = 0$. 6. 120.

### *6- вариант* 8- К

1. а) 164 м/с; б) 1,5 с. 2. — 10,5 3. а) $y = x + 2$; б) $y = x + 6$. 4. а) 0,2; 0,8; б) $0,2 < x < 0,8$, $x > 0,8$; в) $x \leqslant 0,2$, $x = 0,8$. 5. а) $h'(0) = 1$, $h'(3) = 3$. 6. 5400.

### *1- вариант* 10- М

40- расм.

1. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 5x^2 + 12$ бўлсин. $f'(x) = x(10 - x)$, $x = 0$, $x = 10$ да $f'(x) = 0$ бўлади. $f'$ нинг ишоралари 40- расмда кўрсатилган. Функция $(-\infty; 0]$, $[10; +\infty)$ оралиқларда камаяди, $[0; 10]$ да ўсади, $x = 0$ — минимум нуқтаси, $f_{\min} = f(0) = 12$; $x = 10$ — максимум нуқтаси, $f_{\max} = f(10) = 178\frac{2}{3}$ · $f''(x) = 10 - 2x$, $x = 5$ да $f''(x) = 0$, $x < 5$ да $f''(x) > 0$, $x > 5$ да $f''(x) < 0$. Функция графиги $[5; +\infty)$ оралиқда юқорига қавариқ, $(-\infty; 5]$ да пастга қавариқ (ботиқ), $x = 5$ — эгилиш нуқтаси. 2. $\varphi(x) = 2x^2 - \sqrt{x}$ бўлсин. $\varphi'(x) = \frac{8x\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}$; $x = 0,25$ да $\varphi'(x) = 0$, $x > 0,25$ да $\varphi'(x) > 0$, $0 < x < 0,25$ да $\varphi'(x) < 0$, $x = 0,25$ — минимум нуқтаси. 3. $N\left(x_0; \frac{1}{x_0}\right)$ уриниш нуқ-

таси бўлсин, $x_0 \neq 0$. $y'(x) = -\frac{1}{x^2}$ бўлгани учун, $y'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ ва уринманинг $x = x_0$ абсциссали нуқтадаги тенгламаси шундай ёзилади:

$$y - \frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0).$$

$M(0; 3)$ нуқта уринмага тегишли, демак, унинг координаталари уринма тенгламасини қаноатлантиради: $3 - \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0}$, бундан $x_0 = \frac{2}{3}$. У ҳолда $y(x_0) = \frac{3}{2}$, $y'(x_0) = -\frac{9}{4}$. Изланаётган уринманинг тенгламаси: $y = -\frac{9}{4}x + 3$.

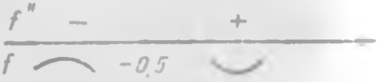
### *2- вариант*

10-М

1. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$ бўлсин, $f'(x) = 6(x - 1)(x + 2)$, $x = -2$, $x = 1$ да $f'(x) = 0$.

Ҳосиланинг ишоралари 41- расмда кўрсатилган. Функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқлари стрелкалар билан схематик тасвирланган.

41- расм.



42- расм.

$x = -2$ — максимум нуқтаси, $f_{max} = f(-2) = 25$; $x = 1$ — минимум нуқтаси, $f_{min} = f(1) = -2$. $f''(x) = 12(x + 0,5)$, $x = -0,5$ да $f''(x) = 0$. Иккинчи ҳосила ишоралари, қавариқлик ва ботиқлик оралиқлари 42- расмда кўрсатилган. Кейинги вариантларда ҳам биз функция ҳолатини схематик тасвирлашдан фойдаланамиз. $x = -0,5$ нуқта — эгилиш нуқтаси.

2. $\varphi(x) = x^2(\sqrt{x} - 1)$, $\varphi'(x) = 2,5x\sqrt{x} - 2x$. $\varphi'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{16}{25}$, $x > \frac{16}{25}$ да $\varphi'(x) > 0$, $0 < x < \frac{16}{25}$ да $\varphi'(x) < 0$. Демак, $x = \frac{16}{25}$ — минимум нуқтаси, $\varphi_{min} = \varphi\left(\frac{16}{25}\right) = -\frac{256}{3125}$.

3. Агар $N(x_0, 3 - x_0^2)$ уриниш нуқтаси бўлса, у ҳолда уринма тенгламаси бундай кўринишда ёзилади:

$$y - (3 - x_0^2) = -2x_0(x - x_0).$$

$M(2; 0)$ нуқта уринмага тегишли. $x_0^2 - 4x_0 - 3 = 0$ тенгламани оламиз, бундан $x_0 = 1$ ёки $x_0 = 3$. Уринманинг $x_0 = 1$ нуқтадаги тенгламаси $y = -2x - 4$. Уринманинг $x_0 = 3$ нуқтадаги тенгламаси $y = -6x + 12$.

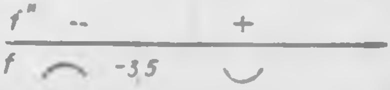
## *3- вариант* 10-М

1. $y'(x) = (x + 3)(x + 4)$, $x = -4$, $x = -3$ да $y'(x) = 0$ (43- расм). $x = -4$ — максимум нуқтаси, $y_{\max} = y(-4) = \frac{8}{3}$; $x = -3$ — минимум нуқтаси, $y_{\min} = y(-3) = 2,5$. $x = -3,5$ нуқта эгилиш нуқтасидан иборат (44- расм).

43- расм

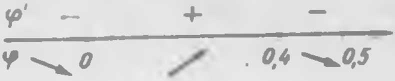
2. $y'(x) = \frac{x(2-5x)}{\sqrt{1-2x}}$,

$x = 0$, $x = \frac{2}{5}$ да $y'(x) = 0$.



44- расм.

Ҳосиланинг ишоралари ва монотонлик оралиқлари 45- расмда кўрсатилган.



45- расм.

$x = 0$ — минимум нуқтаси, $y_{\min} = y(0) = 0$;

$x = \frac{2}{5}$ — максимум нуқтаси, $y_{\max} = y\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4\sqrt{5}}{125}$.

3. $y = \frac{x+1}{\sqrt{3}}$

## *4- вариант* 10-М

1. $y'(x) = (x + 3)(x - 1)$, $x = -3$, $x = 1$ да $y'(x) = 0$ (46- расм). $x = -3$ — максимум нуқтаси, $y_{\max} = y(-3) = 10$;

46- расм.

$x = 1$ — минимум нуқтаси,

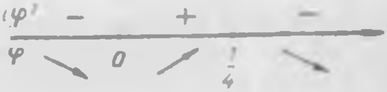
$y_{\min} = y(1) = -\frac{2}{3}$,

$x = -1$ — эгилиш нуқтаси (47- расм).

47- расм.

2. $y'(x) = \frac{-2x(x - 0,25)}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$,

$x = 0$, $x = \frac{1}{4}$ да $y'(x) = 0$ (48- расм.)



48- расм.

$x = 0$ — минимум нуқтаси, $y_{\min} = y(0) = 2$; $x = \frac{1}{4}$ — максимум нуқтаси, $y_{\max} = y\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{16}\sqrt{21}$.

3. $y = -0,5x + 1$.

### *5- вариант*

10- М

**1.** $(\infty; -4]$, $[0; +\infty)$ — камайиш оралиқлари, $[4; 0]$ — ўсиш оралиғи. $y_{\min} = y(-4) = -8\frac{1}{3}$, $y_{\max} = y(0) = 13$. Функция графиги $(-\infty; -2]$ оралиқда қавариқлиги билан пастга, $[-2; +\infty]$ оралиқда эса қавариқлиги билан юқорига қараган, $x = -2$ — эгилиш нуқтаси.

**2.** $y_{\min} = y\left(\frac{1}{8}\right) = -\frac{3}{8}$. **3.** $y = 2 - 0{,}5x$.

### *6- вариант*

10-М

**1.** Камайиш оралиқлари — $(-\infty; 2]$, $[6; +\infty)$, ўсиш оралиғи — $[2, 6]$. $y_{\min} = y(2) = 7\frac{1}{3}$, $y_{\max} = y(6) = 18$. Функция графиги $[4; +\infty)$ оралиқда қавариқлиги билан юқорига, $(-\infty; 4]$ да қавариқлиги билан пастга қараган, $x = 4$ — эгилиш нуқтаси.

**2.** $y_{\min} = y(0) = 0$, $y_{\max} y = (0{,}2) = \frac{4\sqrt{5}}{125}$.

**3.** $y = -\frac{1}{12}x + \frac{37}{12}$.

### *1- вариант*

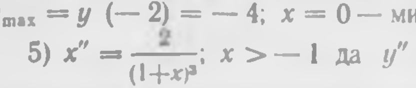
9- К

2.1) $D(f) = \{x \mid x \neq -1\}$.

2) Функция жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас.

3) $x = 0$ да $y = 0$, $x \geqslant -1$ да $y > 0$, $x < -1$ да $y < 0$.

4) $y' = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$; $x = -2$, $x = 0$ да $y' = 0$; $x < -2$, $x > 0$ да $y' > 0$; $-2 < x < -1$, $-1 < x < 0$ да $y' < 0$. $x = -2$ ва $x = 0$ нуқталарда функция узлуксиз. Демак, функция $(-\infty; -2]$ ва $[0; +\infty)$ оралиқларда ўсади, $[-2; -1)$ ва $(-1; 0]$ оралиқларда камаяди (49- расм). $x = -2$ — максимум нуқтаси. $y_{\max} = y(-2) = -4$; $x = 0$ — минимум нуқтаси, $y_{\min} = y(0) = 0$,



49- расм.

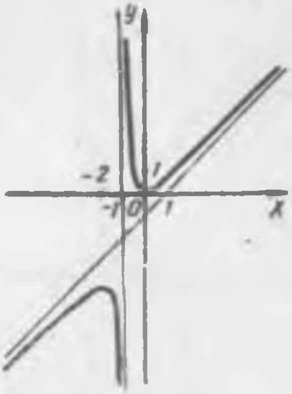
5) $x'' = \frac{2}{(1+x)^3}$; $x > -1$ да $y'' > 0$, $x < -1$ да $y'' < 0$. $(-\infty; -1)$ оралиқда функция графиги қавариқлиги билан юқорига қараган, $(-1; +\infty)$ оралиқда қавариқлиги билан пастга қараган.

6) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \infty$ бўлгани учун, $x = -1$ — функция графигининг вертикал асимптотаси. $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$ ва $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x+1} = 0$, шунга кўра $y = x - 1$ — оғма асимптота. Функция графиги 50- расмда тасвирланган.

**3.** Масаланинг шарти бўйича $a_6 = 3$, $d \geqslant 0{,}5$. Биз $a_1 = 3 - 5d$, $a_4 = 3 - 2d$, $a_5 = 3 - d$ га эга бўламиз; $a_1 a_1 a_5 = (3 - 5d)(3 - 2d)\times$

$\times (3-d)$. $f(d) = (3-5d)(3-2d) \times$ $\times (3-d)$ функцияни карайлик, бунда $d \geqslant 0{,}5$. $f'(d) = -6(5d^2 - 17d + 12)$, бунда, $d \geqslant 0{,}5$. $d = 1$, $d = 2{,}4$ да $f'(d) = 0$ (51- расм). Маълумки, функция $d = 0{,}5$ ёки $d = 2{,}4$ нуқталардан бирида энг катта қиймат қабул қилади. Функциянинг бу нуқталардаги қийматларини топамиз: $f(0{,}5) = 2{,}5$, $f(2{,}4) = \frac{243}{25}$. $f(2{,}4) > f(0{,}5)$ бўлганлигидан $f(d)$ функция энг катта қийматни $[0{,}5; +\infty)$ оралиқда $d = 2{,}4$ нуқтада қабул қилади.

4. $y' = x^2(x+2)^2 + 2(x+1)^2 + 3 > 0$, демак, функция ўсувчи.



50- расм.

### 2- вариант

9- К

2. 1) $D(f) = \{x | x \neq \pm \sqrt{3}\}$.

2) Функциянинг аниқланиш соҳасидан олинган исталган $x$ учун $y(-x) = -y(x)$ бўлгани учун функция тоқ.

3) $x = 0$ да $y = 0$, $0 < x < \sqrt{3}$ ва $x < -\sqrt{3}$ да $y > 0$, $-\sqrt{3} < x < 0$ ва $x > \sqrt{3}$ да $y < 0$.

4) $y' = \frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}$. Функция тоқ бўлгани учун текширишни $x \geqslant 0$ чегараларида ўтказиш мумкин. Функция $[0; \sqrt{3})$ ва $(\sqrt{3}; 3]$ оралиқларда ўсади), $[3; +\infty)$ оралиқда камаяди; $x = 3$ — максимум нуқтаси, $y_{\max} = y(3) = -4{,}5$.

51- расм.

5) $y'' = \frac{6x(x^2+9)}{(3-x^2)^3}$.

Функция графиги $x > \sqrt{3}$ да қавариқлиги билан юқорига ва $0 \leqslant x < \sqrt{3}$ да қавариқлиги билан пастга қараган. ($-\sqrt{3} < x \leqslant 0$ да функциянинг графиги қавариқлиги билан юқорига қараганлигини эътиборга олиб, $x = 0$ нинг эгилиш нуқтаси бўлишини аниқлаймиз.)

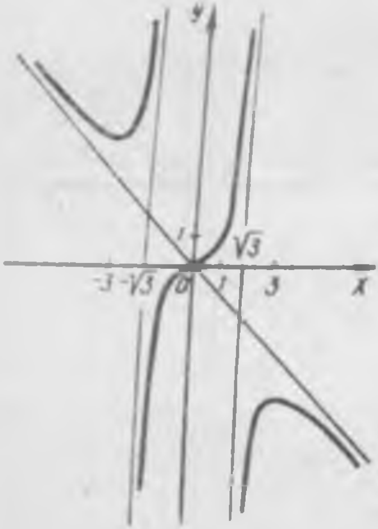
6) $x = \sqrt{3}$ — вертикал асимптота. Функция графигининг оғма асимптотасини топамиз:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{3 - x^2} = -1,$$

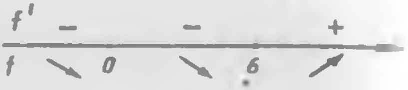
$$b = \lim_{x \to \infty} \left( \frac{x^3}{3 - x^2} + x \right) = 0,$$

$y = -x$ — оғма асимптота. Функция графиги 52- расмда тасвирланган.

3. Биринчи сон $x$, у ҳолда иккинчи сон $x - 8$. $f(x) = x^3(x-8)$ функцияни қараймиз. $f'(x) = 4x^2(x-6)$; $x = 0$ ва $x = 6$ да $f'(x) =$



52- расм.



53- расм.

$= 0$ (53- расм). $(-\infty; 6]$ оралиқда функция камаяди, $[6; +\infty)$ оралиқда функция ўсади. Демак, функция энг кичик қийматни $x = 6$ минимум нуқтасида қабул қилади. Шундай қилиб, биринчи сон 6 га тенг, иккинчи сон $-2$ га тенг.

4. $y' = -(x^2 - x + 1)^2 < 0$ ёки $y' = -(x^3(x - 1)^2 + (x - 1)^3 + x^2) < 0$ демак, функция камаювчи.

### *3- вариант* 9- К

2. $y' = -\frac{2(x + 3)}{x^4}$; $x = -3$ — максимум нуқтаси.

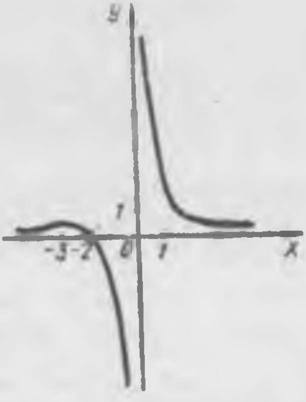
$y_{\max} = y(-3) = \frac{1}{27}$, $y'' = \frac{6(x + 4)}{x^5}$, $x = -4$ — эгилиш нуқтаси. График 54- расмда тасвирланган. 3. 40, 80, 60.

### *4- вариант* 9- К

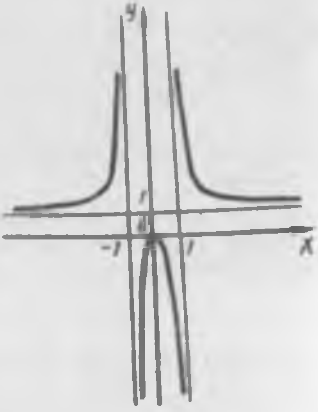
2. $y' = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$; $x = 0$ — максимум нуқтаси,

$y_{\max} = y(0) = 0$. $y'' = \frac{6x^2 + 2}{(x^2-1)^3}$.

График 55- расмда тасвирланган. 3. $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$.



54- расм.



55- расм.

### *5- вариант* 9-К

2. $y' = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$; $x = 0$ — максимум нуқтаси, $y_{\max} = y(0) = 0$; $x = 2$ — минимум нуқтаси, $y_{\min} = y(2) = 4$. $y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$.

3. $-4$.

### *6- вариант* 9-К

2. $y' = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$; $x = -2\sqrt{3}$ — максимум нуқтаси, $y_{\max} = y(-2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$; $x=2\sqrt{3}$ — минимум нуқтаси. $y_{\min} = y(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$. $y'' = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$. 3. 5, 18, 75.

### *1- вариант* 11-М

1. $f(x) = x^7$ функцияни қараймиз. $f'(x) = 7x^6$, $f''(x) = 42x^5$, $x > 0$ да $f''(x) > 0$, яъни функция графигининг қавариқлиги пастга йўналган, демак, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$, яъни $a > 0$, $b > 0$ учун $\left(\frac{a+b}{2}\right)^7 \leqslant \frac{a^7+b^7}{2}$.

2. $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^6 = (x^2)^6 + 6(x^2)^5\left(-\frac{1}{x}\right) + 15(x^2)^4\left(-\frac{1}{x}\right)^2 + 20(x^2)^3\left(-\frac{1}{x}\right)^2 + 15(x^2)^2\left(-\frac{1}{x}\right)^4 + 6x^2\left(-\frac{1}{x}\right)^5 + \left(-\frac{1}{x}\right)^6 = x^{12} - 6x^9 + 15x^6 - 20x^3 + 15 - 6x^{-3} + x^{-6}$.

3. Берилган ифода $((3-2x)+2x)^4 = 3^4 = 81$ кўринишида тасвирланиши мумкин.

### *2- вариант* 11-М

1. $f(x) = x^5$ функцияни қараймиз. $f'(x) = 5x^4$, $f''(x) = 20x^3$, $x > 0$ да $f''(x) > 0$, яъни функция графиги қавариқлиги билан пастга йўналган; демак,

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

$x_1 = a$, $x_2 = 3$ ни қўйиб, ушбуни топамиз:

$$\left(\frac{a+3}{2}\right)^5 \leqslant \frac{a^5+243}{2}.$$

2. $(a^2 - a^{-1})^7 = (a^2)^7 + 7(a^2)^6(-a^{-1}) + 21(a^2)^5(-a^{-1})^2 + 35(a^2)^4 \times (-a^{-1})^3 + 35(a^2)^3(-a^{-1})^4 + 21(a^2)^2(-a^{-1})^5 + 7(a^2)(-a^{-1})^6 + (-a^{-1})^7 = a^{14} - 7a^{11} + 21a^8 - 35a^5 + 35a^2 - 21a^{-1} + 7a^{-4} - a^{-7}$.

3. Берилган ифодани $(2x-1-2x)^4 = 1$ кўринишида тасвирлаш мумкин.

### *3- вариант* 11-М

2. $b^{12} + 6b^9 + 15b^6 + 20b^3 + 15 + 6b^{-3} + b^{-6}$.

3. $(2-3x+3x)^4 = 16$.

### 4- вариант 11- М

2. $a^{21} + 7a^{16} + 21a^{11} + 35a^{6} + 35a + 21a^{-4} + 7a^{-9} + a^{-14}$.
3. $(2x + 1 - 2x)^5 = 1$.

### 5- вариант 11- М

2. $128a^7 - 448a^5 + 672a^3 - 560a + 280a^{-1} - 84a^{-3} + 14a^{-5} - a^{-7}$.
3. $(3x - 1 - 3x)^4 = 1$.

### 6- вариант 11- М

2. $x^{-18} - 12x^{-13} + 60x^{-8} - 160x^{-3} + 240x^2 - 192x^7 + 64x^{12}$,
3. $(4x - 3 - 4x)^4 = 81$.

### 1- вариант 10- К

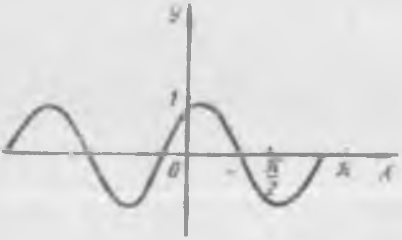
1. $\sin\alpha = -\frac{24}{25}$, $\operatorname{ctg}\varphi = -\frac{7}{24}$. 2. $\frac{1}{2}$. 3. а) $f(0) = 5$, $f(7\pi) = 1 - \frac{5}{\sqrt{2}}$, $f(-12\pi) = -5$.

б) $f(x + 8\pi) = \sin\frac{3}{2}(x + 8\pi) + 5\cos\frac{3}{4}(x + 8\pi) = \sin\left(\frac{3}{2}x + 12\pi\right) + 5\cos\left(\frac{3}{4}x + 6\pi\right) = \sin\frac{3}{2}x + 5\cos\frac{3}{4}x = f(x)$.

в) $T_1 = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{3}$, $T_2 = \frac{2\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{8\pi}{3}$; $T_1 = 4\cdot\frac{\pi}{3}$, $T_2 = 8\cdot\frac{\pi}{3}$, $T = 8 \times \frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$.

4. Функция тоқ.

5. $$\sin x\,(2\sin^2 x + 3\sin x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \sin x = \frac{1}{2}\\ \sin x = -2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \sin x = \frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi n,\\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.\end{array}\right.$$



56- расм.

6. $A = 1$, $\omega = 2$, $T = \pi$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Функция графиги 56- расмда тасвирланган.

7. Тенгсизликнинг чап қисмини алмаштирамиз:

$$\sin^3\alpha\ (1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha\ (1+\operatorname{tg}\alpha)=$$
$$=\sin^2\alpha\ (\sin\alpha+\cos\alpha)+\cos^2\alpha\ (\sin\alpha+\cos\alpha)=$$
$$=\sin\alpha+\cos\alpha<2.$$

Тенгсизликнинг ўнг қисмини алмаштирамиз:

$$\frac{m^4+1}{m^2}=m^2+\frac{1}{m^2}\geqslant 2.$$

Демак, тенгсизлик тўғри.

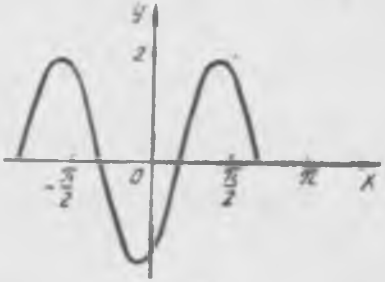
### *2- вариант* 10- К

1. $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{12}{5}$. 2. $2\operatorname{ctg}^2\alpha$.

3. а) $f(0)=5$, $f\left(\frac{7\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}-5}{2}$, $f\left(\frac{-7\pi}{4}\right)=-4$.

б) $f(x+3\pi)=\sin 2(x+3\pi)+5\cos 4(x+3\pi)=\sin 2x+5\cos 4x==f(x)$.

в) $T_1=\pi$, $T_2=\frac{\pi}{2}$, $T=\pi$.



57- расм.

4. Функция жуфт.
5. $\cos x\ (2\cos^2x+5\cos x-3)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \cos x=\frac{1}{2},\\ \cos x=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in Z.\end{array}\right.$$

6. Тенгликнинг ўнг қисмини алмаштириб, $y=2\sin\left(2x+\frac{5\pi}{3}\right)$ ни оламиз; у ҳолда $A=2$, $\omega=2$, $T=\pi$, $\varphi=\frac{5\pi}{3}$. Функция графиги 56- расмда тасвирланган.

7. $\left|\frac{1-\cos^2x}{\sin x+\cos x}+\frac{1-\sin^2x}{\cos x+\sin x}\right|=\frac{1}{|\sin x+\cos x|}>\frac{1}{2}$, чунки $|\sin x+\cos x|\leqslant|\sin x|+|\cos x|<2$.

### *3- вариант* 10- К

1. $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 2. 0. 3. а) $f(0)=5$, $f(8\pi)=5$, $f\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=-2{,}5$; в) $T=4\pi$. 4. Функция жуфт. 5. $\pi n$, $-\frac{\pi}{6}+$

$+ 2\pi n, \ \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in Z$. 6. $y = 2\sin\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right)$. $A = 2, \ \omega = 2, \ T = \pi, \ \varphi = \frac{4\pi}{3}$.

7. Тенгсизликнинг чап қисмини алмаштириб, $\sin x \cos x < 1$ ни оламиз. Тенгсизликнинг ўнг қисмини алмаштириб, $\frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) > 1$ ни оламиз. Демак, тенгсизлик тўғри.

### *4- вариант* 10- К

1. $\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \ \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}$. 2. $\sin^2\alpha$.

3. а) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \ f\left(\frac{11\pi}{4}\right) = 4, \ f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$; в) $T = \pi$.

4. Функция жуфт. 5. $\frac{\pi}{2} + \pi n, \ \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in Z$.

6. $y = 2\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$. $A = 2, \ \omega = 2, \ T = \pi, \ \varphi = \frac{2\pi}{3}$.

7. Тенгсизликнинг чап қисмини алмаштиргандан сўнг қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$4\cos^2\alpha\sin^2\alpha = 4\cos^2\alpha\,(1 - \cos^2\alpha) = 4\cos^2\alpha - 4\cos^4\alpha = \\ = 1 - (1 - 2\cos^2\alpha)^2 \leqslant 1.$$

### *5- вариант* 10- К

1. $|\cos\alpha| = \sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2+b^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

$a < 0$, шунга кўра $\alpha$ III ёки IV чоракларга қарашли. Агар $\alpha$ III чоракка қарашли бўлса, у ҳолда

$$\cos\alpha = -\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}, \ \mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{a}{|b|}, \ \mathrm{ctg}\,\alpha = -\frac{|b|}{a},$$

$$\sec\alpha = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|b|}, \ \mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

Агар $\alpha$ IV чоракка қарашли бўлса, у ҳолда $\cos\alpha = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{|b|}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{|b|}{a}$, $\sec\alpha = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|b|}$, $\mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$.

3. а) $f(0) = 1, f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 1{,}5, f\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{5\sqrt{3} - 2}{4}$; в) $T = \pi$.

4. $x \neq 1$, демак, функциянинг аниқланиш соҳаси нолга нисбатан носимметрик. Функция на жуфт ва на тоқ.

5. $\frac{\pi}{2} + \pi n, \ \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \ 2\pi n, \ n \in Z$.

### *6- вариант* **10-П**

1. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a^2-1}{2a}$, $\cos\alpha = \frac{a^2-1}{a^2+1}$.

$a < -1$, шунга кўра $\alpha$ II ёки IV чоракка қарашли. Агар $\alpha$ IV чоракка қарашли бўлса, у ҳолда $\cos\alpha = \frac{a^2-1}{a^2+1}$, $\sin\alpha = \frac{2a}{a^2+1}$. Агар $\alpha$ II чоракка қарашли бўлса, $\cos\alpha = \frac{1-a^2}{1+a^2}$, $\sin\alpha = -\frac{2a}{a^2+1}$ бўлади.

3. а) $f(0) = -3$, $f(5\pi) = \frac{4-3\sqrt{2}}{2}$, $f(-10\pi) = 0$; в) $T = 8\pi$.

4. Функция тоқ. 5. $\pi n$, $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

### *1- вариант* **12-М**

1. $$\cos(\pi + 2\alpha) + \frac{\sin(\pi + 2\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} =$$

$$= \frac{\cos(\pi + 2\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi + 2\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} =$$

$$= \frac{\cos\left(\pi + 2\alpha - \frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = 1.$$

Ечишнинг бошқа усули ҳам бўлиши мумкин:

$$-\cos 2\alpha + \frac{\sin 2\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin 2\alpha\cos\alpha - \cos 2\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha} = 1.$$

2. $\frac{1}{2}\sin 5x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x = \frac{1}{2}$, $\sin 5x\cos\frac{\pi}{3} + \cos 5x\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$,

$\sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

$$\left[\begin{array}{l} 5x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ 5x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in Z; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}, \\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}, \ n \in Z. \end{array}\right.$$

3. $f(x) = 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x = 1 - 2\sin^2 2x = \cos 4x$, $T = \frac{\pi}{2}$.

4. $$A = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}$$

$\pi < \alpha < 2\pi$ бўлганидан $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$ бўлади. У ҳолда $A = = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{4}}$. Сўнгра, $\pi < \alpha < 2\pi$ бўлганида $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{4} < \frac{\pi}{2}$ бўлади. $A = \sin\frac{\alpha}{4}$ ни ҳосил қиламиз.

### *2- вариант* 12- М

1. $\sin 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha + \cos 2\alpha = 1$.

2. $\frac{1}{2}\cos 3x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}n, \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}n,\ n \in Z. \end{array}\right.$$

3. $y = \frac{1}{8}\sin 8x, \quad T = \frac{\pi}{4}$.

4. $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\alpha}{2}\right)} = \sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{4}} = \cos\frac{\alpha}{4}$.

### *3- вариант* 12- М

1. 1. 2. $-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}n,\ n \in Z$. 3. $\pi$.

### *4- вариант* 12- М

1. 1. 2. $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}n,\ -\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}n,\ n \in Z$. 3. $\frac{\pi}{2}$.

### *5- вариант* 12- М

1. 1. 2. $-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{5}n,\ \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}n,\ n \in Z$. 3. $\frac{\pi}{2}$.

### *6- вариант* 12- М

1. 1. 2. $\frac{\pi}{8} + \pi n,\ n \in Z$. 3. $\pi$.

### *1- вариант* 11- К

1. $\frac{(1 + \mathrm{tg}\,\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha} = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$.

2. $\sin 2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1^2 + \mathrm{tg}^2\alpha}$ формуладан фойдаланамиз.

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1,\ \text{у ҳолда}\ \sin 2\alpha=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{1+(\sqrt{2}-1)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1-(\sqrt{2}-1)^2}{1+(\sqrt{2}-1)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \operatorname{tg}2\alpha=1.$$

3. $2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}=2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}$,

$$\sin\frac{3x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3x}{2}\right)\right)=0,$$

$$\sin\frac{3x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\frac{3x}{2}=0,\\ \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0,\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=0;\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}x=\frac{2\pi}{3}n,\\ x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.\end{array}\right.$$

Жавоб: $\frac{2\pi}{3}n,\quad \frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$

4. Тенгликнинг чап қисмини алмаштирамиз:

$$\frac{1}{\sin 10^\circ}-4\sin 70^\circ=\frac{1-4\sin 70^\circ\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ}=$$

$$=\frac{1-2(\cos 60^\circ-\cos 80^\circ)}{\sin 10^\circ}=\frac{2\cos 80^\circ}{\sin 10^\circ}=2.$$

5. Асимптотанинг бурчак коэффициенти $k_1=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1$. Уринманинг бурчак коэффициентини топамиз:

$$y'(x)=\frac{(3x^2-4x)(x^2+1)-2x(x^3-2x^2+3)}{(x^2+1)^2},$$

$$k_2=y'(1)=-1{,}5,\ \operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{-1{,}5-1}{1-1{,}5}\right|=5,$$

$\varphi\approx 78^\circ 41'$, бунда $\varphi$ — асимптота ва уринма орасидаги бурчак.

6. $1+2\cos 2\alpha+2\cos 4\alpha+2\cos 6\alpha=$

$$=\frac{\sin\alpha+2\sin\alpha\cos 2\alpha+2\sin\alpha\cos 4\alpha+2\sin\alpha\cos 6\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha-\sin\alpha+\sin 5\alpha-\sin 3\alpha+\sin 7\alpha-\sin 5\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin 7\alpha}{\sin\alpha}.$$

1. $$\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sqrt{3}\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}\cos\alpha+2\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+2\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha}{2\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha+2\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha}=\sqrt{2}.$$

2. $\sin(\alpha-2\beta)=\sin\alpha\cos2\beta-\cos\alpha\sin2\beta=$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{25}{144}}}\cdot\frac{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{144}{25}}}\cdot\frac{2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{204}{325}.$$

3. Тенгламанинг чап ва ўнг қисмларини алмаштирамиз:

$$2\cos\frac{3x}{2}.\cos\frac{x}{2}-2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}=0.$$

$$\cos\frac{3x}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)-\sin\frac{3x}{2}\right)=0,$$

$$2\cos\frac{3x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0.$$

Тенгламани ечиб, $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}n$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$ ларни ҳосил қиламиз.

4. Тенгликнинг чап қисмини алмаштирамиз:

$$\mathrm{tg}20^\circ+4\sin20^\circ=\frac{\sin20^\circ+4\sin20^\circ\cos20^\circ}{\cos20^\circ}=$$

$$=\frac{\cos10^\circ+\cos50^\circ}{\cos20^\circ}=\frac{2\cos30^\circ\cos20^\circ}{\cos20^\circ}=\sqrt{3}.$$

5. $$\frac{2x^2-4x+7}{x+3}=\frac{2x(x+3)-10(x+3)+37}{x+3}=2x-10+\frac{37}{x+3}.$$

Асимптота тенгламаси: $y=2x-10$, $k_1=2$.

Уринманинг бурчак коэффициентини топамиз: $y'(x)=2-\frac{37}{(x+3)^2}$, $k_2=y'(-1)=-7\frac{1}{4}$. Агар $\varphi$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчак бўлса, у ҳолда $\mathrm{tg}\,\varphi=\left|\frac{-7\frac{1}{4}-2}{1-2\cdot7\frac{1}{4}}\right|\approx0{,}6852$; $\varphi\approx34^\circ24'$.

6. Чап қисмни $\cos2\alpha$ га кўпайтирсак ва бўлсак:

$$\frac{\cos2\alpha-2\cos2\alpha\cos4\alpha+2\cos2\alpha\cos8\alpha-2\cos2\alpha\cos12\alpha}{\cos2\alpha}=$$

$$= \frac{\cos 2\alpha - \cos 2\alpha - \cos 6\alpha + \cos 6\alpha + \cos 10\alpha - \cos 10\alpha - \cos 14\alpha}{\cos 2\alpha} =$$

$$= -\frac{\cos 14\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

### *3- вариант* 11- K

2. $\operatorname{tg}\alpha = -(1+\sqrt{2})$, $\sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = 1$-

3. $\frac{2\pi n}{5}$, $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$.

4. Тенгликнинг ўнг қисмини алмаштирамиз:

$$\sqrt{3}\ \operatorname{ctg} 20^\circ - 1 = 2\ (\cos 30^\circ \operatorname{ctg} 20^\circ - \sin 30^\circ) =$$

$$= 2\ \frac{\cos 50^\circ}{\sin 20^\circ} = 2\ \frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} = 4\cos 20^\circ.$$

5. $\operatorname{tg}\varphi = 2\ \frac{5}{16}$; $\varphi \approx 70^\circ 34'$.

6. $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$ формуладан фойдаланамиз:

$$\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos 2x \cos x},$$

$$\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x = \frac{\sin x}{\cos 3x \cos 2x},$$

$$\operatorname{tg} 10x - \operatorname{tg} 9x = \frac{\sin x}{\cos 10x \cos 9x}.$$

Ҳадма-ҳад қўшсак:

$$\operatorname{tg} 10x - \operatorname{tg} x = \sin x \left(\frac{1}{\cos 2x \cos x} + \ldots + \frac{1}{\cos 10x \cos 9x}\right),$$

бундан қуйидагини топамиз:

$$\frac{1}{\cos 2x \cos x} + \ldots + \frac{1}{\cos 10x \cos 9x} = \frac{\operatorname{tg} 10x - \operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{2\sin 9x}{\sin 2x \cos 10x}.$$

### *4- вариант* 11- K

2. $\cos(2\alpha - \beta) = -\frac{123}{845}$. 3. $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$.

4. $-0{,}5$. 5. Тўғри чизиқлар параллел, бурчак $\varphi = 0$.

6. $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{ctg} 2\alpha$ ёки $2\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$ формуладан фойдаланамиз.

$$8\operatorname{ctg} 24\alpha + 4\operatorname{tg} 12\alpha + 2\operatorname{tg} 6\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha =$$

$$= 4\ (2\operatorname{ctg} 24\alpha + \operatorname{tg} 12\alpha) + 2\operatorname{tg} 6\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha =$$

$$= 4\operatorname{ctg} 12\alpha + 2\operatorname{tg} 6\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha =$$

$$= 2\ (2\operatorname{ctg} 12\alpha + \operatorname{tg} 6\alpha) + \operatorname{tg} 3\alpha = 2\operatorname{ctg} 6\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{ctg} 3\alpha.$$

### *5- вариант* **11-К**

2. $\frac{123}{845}$. 3. $\frac{2\pi n}{3}$, $\pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

4. $$\mathrm{ctg}70^\circ + 4\cos70^\circ = \frac{\cos70^\circ + 2\sin140^\circ}{\sin70^\circ} = \frac{(\sin20^\circ + \sin140^\circ) + \sin140^\circ}{\sin70^\circ} =$$
$$= \frac{2\sin80^\circ\cos60^\circ + \sin40^\circ}{\sin70^\circ} = \frac{\sin80^\circ + \sin40^\circ}{\sin70^\circ} = \frac{2\sin60^\circ\cos20^\circ}{\cos20^\circ} = \sqrt{3}.$$

5. Асимптотанинг бурчак коэффициентини топамиз:

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 6x + 7}{x(x+2)} = 2.$$

$B(x_0, y_0)$ уриниш нуқтаси координаталарини топамиз:

$$y_0 = \frac{2x_0^2 + 6x_0 + 7}{x_0 + 2}, \quad y' = \frac{2x^2 + 8x + 5}{(x+2)^2},$$

у ҳолда уринманинг бурчак коэффициенти:

$$k_2 = \frac{2x_0^2 + 8x_0 + 5}{(x_0 + 2)^2}.$$

$B$ нуқтада уринувчининг тенгламасини тузамиз: $y - y_0 = k(x - x_0)$. уринма $A(-2;\ 4)$ нуқтадан ўтишидан фойдалансак:

$$4 - \frac{2x_0^2 + 6x_0 + 7}{x_0 + 2} = \frac{2x_0^2 + 8x_0 + 5}{(x_0 + 2)^2}(-2 - x_0),$$

бундан $x_0 = -1$, $k_2 = -1$.

Уринма ва асимптота орасидаги бурчакни $\varphi$ орқали белгиласак,

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right| = \left|\frac{-1-2}{1-2}\right| = 3, \ \varphi \approx 71^\circ34'.$$

### *6- вариант* **11-К**

2. $\sin2\alpha = \frac{4 + \sqrt{2}}{6}$, $\cos2\alpha = \frac{4 - \sqrt{2}}{6}$, $\mathrm{tg}2\alpha = \frac{9 + 4\sqrt{2}}{7}$.

3. $\frac{2\pi n}{5}$, $\frac{2\pi}{5}(3n \pm 1)$, $\pi(2n + 1)$, $n \in Z$.

4. $4\cos20^\circ\cos80^\circ = 2(\cos60^\circ + \cos100^\circ) = 2(0{,}5 - \cos80^\circ) = 1 - 2\cos80^\circ$.
$4\cos20^\circ = \frac{1 - 2\cos80^\circ}{\cos80^\circ}$.

5. $\mathrm{tg}\,\varphi = 1$, $\varphi = 45^\circ$.

### *1- вариант* **13-М**

1. $$\lim_{x\to0} \frac{2\sin3x\cos x + 2\sin3x}{x^2\sin3x} = \lim_{x\to0} \frac{2(\cos x - 1)}{x^2} = -\lim_{x\to0} \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = -1.$$

2. $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{7}{4}$, $y'(x)=4\sin 2x\cos 2x=2\sin 4x$; $y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$. Уринма тенгламаси: $y=x\sqrt{3}+\frac{7}{4}-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

3. а) $f'(x)=\frac{-4\cos x(2-3\cos x)-3\sin x(1-4\sin x)}{(2-3\cos x)^2}$, $f'(\pi)=\frac{4}{5}$;

б) $g'(x)=\sin(3x+1)+x\cdot 3\cos(3x+1)-\frac{6}{\sin^2(3x+1)}$. Агар $x=\frac{\pi-2}{6}$ бўлса, $3x+1=\frac{\pi}{2}$ бўлади. Демак, $g'\left(\frac{\pi-2}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\cdot 3\cos\frac{\pi}{2}-\frac{6}{\sin^2\frac{\pi}{2}}=-5$.

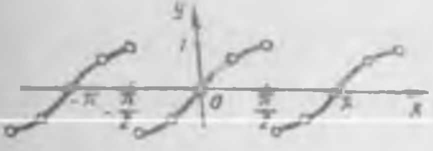
4. Берилган функциянинг аниқланиш соҳаси $\frac{\pi}{4}n$ га тенг бўлмаган ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат, бунда $n\in Z$. Тengликнинг ўнг қисмини алмаштирамиз:

$$\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\frac{(1-\operatorname{tg}x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=|\cos x|\cdot\frac{(1-\operatorname{tg}x)(1+\operatorname{tg}x)}{(1-\operatorname{tg}x)(1+\operatorname{ctg}x)}=$$
$$=|\cos x|\operatorname{tg}x.$$

Агар

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & -\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n \text{ да},\\ -\sin x, & \frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi n \text{ да},\end{cases}$$

функция графигидан $x=\frac{\pi}{4}n$, $n\in Z$, абсциссали нуқталар чиқарилса, берилган функция графигини ҳосил қиламиз (58-расм).



58- расм.

59- расм.

### *2- вариант*

1. $-9$. 2. $y = x\sqrt{3} + \frac{5}{4} - \frac{\pi}{\sqrt{3}}$. 3. а) $f'(\pi) = -0{,}5$; б) $g'\left(\frac{\pi - 3}{2}\right) = -7$.

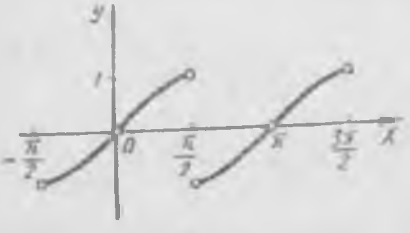
4. Функциянинг аниқланиш соҳаси $\frac{\pi k}{4}$ ва $\frac{\pi}{8}(4k+3)$ га тенг бўлмаган ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат, бунда $k \in Z$. Тенгликнинг ўнг қисмини алмаштирамиз:

$$\sqrt{1 - \sin^2 x} \cdot \frac{\operatorname{ctg} 2x(1 + \operatorname{tg} 2x)}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)} = |\cos x| \cdot \frac{\operatorname{ctg} 2x + 1}{1 + \operatorname{ctg} 2x} = |\cos x|.$$

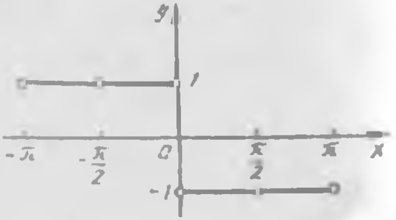
Агар $f(x) = |\cos x|$ функция графигидан $\frac{\pi k}{4}$ ва $\frac{\pi}{8}(4k+3)$ абсциссали нуқталар чиқарилса, бунда $k \in Z$, берилган функция графиги ҳосил бўлади (59- расм).

### *3- вариант*

$$1.\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x - \sin 2x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 \cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2(1 - \sin x)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}} \right)^2 = 1.$$



60- расм.



61- расм.

2. $y = 1$. 4. $\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$, абсциссали нуқталарни

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ бунда } -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ -\sin x, \text{ бунда } \frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z, \end{cases}$$

функция графигидан чиқариб, берилган функция графигини ҳосил қиламиз (60-расм).

### 4- вариант 13- М

1. $\frac{\sqrt{2}}{32}$. 2. $y = 1$.

4. Берилган функция графиги $\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$, абсциссали нуқталар чиқарилган

$$y = \begin{cases} -1, \text{ бунда } 2\pi n < x < \pi + 2\pi n, \\ 1, \text{ бунда } -\pi + 2\pi n < x < 2\pi n, \ n \in Z \end{cases}$$

функция графигидан иборат (61- расм).

### 5- вариант 13- М

1. $-6{,}25$. 2. $y = 2$.

### 6- вариант 13- М

1. 0. 2. $y = -6x + \frac{\pi}{2} + 2$.

### 1- вариант 12-К

1. $\cos^2(5x+3)$ ни $1 - \sin^2(5x+3)$ га алмаштирамиз, $3\sin^2(5x + 3) - 2\sin(5x+3) + 0{,}25 = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз, ундан

$$\left[\begin{aligned} &\sin(5x+3) = \frac{1}{2}, \\ &\sin(5x+3) = \frac{1}{6}; \end{aligned}\right.$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{30} - \frac{3}{5} + \frac{\pi n}{5},$$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{1}{5} \operatorname{ars\,sin} \frac{1}{6} - \frac{3}{5} + \frac{\pi n}{5}, \quad n \in Z.$$

2. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x + 2\right) = \cos(\pi - 3x - 5) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 4x + 2 = \pm(\pi - 3x - 5) + 2\pi n$, $n \in Z$.

Жавоб: $7 - \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\frac{3\pi}{14} - \frac{3}{7} + \frac{2\pi n}{7}$, $n \in Z$.

3. Тенгликнинг чап қисмини $\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ формуладан фойдаланиб алмаштириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} = 2,$$

$$2\cos^2 x + 2\cos 5x \cos x = 0, \ \cos x(\cos x + \cos 5x) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0, \\ \cos x = \cos(\pi - 5x),\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z. \end{array}\right.$$

$\left\{\frac{\pi}{2} + \pi n \middle| n \in Z\right\} \subset \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3} \middle| n \in Z\right\}$ бўлганидан, тенглама $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$ илдизларга эга бўлади, бунда $n \in Z$.

4. Берилган тенгламани қуйидаги кўринишда қайта ёзамиз:

$$a \sin 5x + 2\sqrt{ab + b^2} \cos 5x = -2(a + 2b).$$

Тенгламанинг иккала қисмини $d$ га бўламиз, бунда

$$d = \sqrt{a^2 + (2\sqrt{ab + b^2})^2} = a + 2b > 0,$$

натижада:

$$\frac{a}{a + 2b} \sin 5x + \frac{2\sqrt{ab + b^2}}{a + 2b} \cos 5x = -2,$$

$$\sin(5x + \varphi) = -2, \text{ бунда } \varphi = \arccos \frac{a}{a + 2b}.$$

Тенглама ечимга эга эмас.

5. $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\frac{4}{3} + 7}{1 - \frac{4}{3} \cdot 7} = -1$. $\pi < \alpha + \beta < 2\pi$ бўлганидан $\alpha + \beta = \frac{7\pi}{4}$ бўлади.

6. $\cos^2 \alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ формуладан фойдаланиб,

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = -0{,}5$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Тенгламанинг иккала қисмини $2 \sin x$ га кўпайтирамиз:

$$2 \sin x \cos 2x + 2 \sin x \cos 4x + 2 \sin x \cos 6x + \\ + 2 \sin x \cos 8x = -\sin x.$$

Тригонометрик функциялар кўпайтмасини йиғинди билан алмаштирамиз:

$$\sin 3x - \sin x + \sin 5x - \sin 3x + \sin 7x - \sin 5x + \sin 9x - \\ - \sin 7x + \sin x = 0, \text{ бундан } \sin 9x = 0,\ x = \frac{\pi n}{9},\ n \in Z.$$

$x = \pi k,\ k \in Z$ сонлари ($\sin x = 0$ тенглама илдизлари) берилган тенгламанинг илдизлари эмас, шунга кўра $n$ қийматлари ичидан 9 га каррали бўлганларини чиқариб ташлаш лозим.

Жавоб: $\frac{\pi n}{9},\ n \in Z,\ n \neq 9k,\ k \in Z$.

### *2- вариант* 12-К

1. $\pm \frac{\pi}{9} - \frac{5}{3} + \frac{2\pi n}{3},\ \pm \frac{1}{3} \arccos \frac{1}{6} - \frac{5}{3} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in Z$.

2. Тенгламани ечамиз:

$$\operatorname{tg}(4x+3) = \operatorname{ctg}(x+5),\ \operatorname{tg}(4x+3) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x - 5\right),$$

$$4x + 3 = \frac{\pi}{2} - x - 5 + \pi n,\ n \in Z;\ x = \frac{\pi}{10} - 1{,}6 + \frac{\pi n}{5},\ n \in Z.$$

3. $\cos 4x + 2\cos 5x \cos 4x = 0,\ \cos 4x(1 + 2\cos 5x) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 4x = 0, \\ \cos 5x = -\frac{1}{2}, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, \\ x = \pm\frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5},\ n \in Z. \end{array}\right.$$

4. Берилган тенглама ечимга эга бўлиши учун $\sin x = \sin 2x = \sin 3x = \sin 4x = \sin 5x = 1$ шарт бажарилиши керак, лекин $\sin x = 1$ бўлса, $\sin 2x = 0$ бўлади. Демак, тенглама ечимга эга эмас.

5. $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{1\frac{2}{3} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{4}} = 1.\ \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi,\ -\frac{5\pi}{2} < \beta < -2\pi$ бўлгани учун $-\frac{3\pi}{2} < \alpha - \beta < -\frac{\pi}{2}$ ва $\alpha - \beta = -\frac{3\pi}{4}$.

6. $(\sin 2x - \cos 4x)^2 + 2(\sin 2x - \cos 4x) - 3 = 0,$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\arcsin \frac{\sqrt{17} - 1}{2}}{2} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$$

### *3- вариант* 12-К

1. $\pm \frac{\pi}{12} + \frac{1}{4} + \frac{\pi n}{2},\ \pm \frac{1}{4}\left(\pi - \arccos \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$.

2. $\frac{\pi}{2} + 3 + 2\pi n,\ -\frac{\pi}{18} + \frac{1}{9} + \frac{2\pi n}{9},\ n \in Z$.

3. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z$.

4. $(a-3)\sin 7x + 2\sqrt{18 - 3a}\cos 7x = 18 - 2a$. Тенглама ечимга эга бўлиши учун $(a-3)^2 + (2\sqrt{18-3a})^2 \geqslant (18 - 2a)^2$ бўлиши за-

рур ва етарли, лекин $(a-3)^2+4(18-3a)-(18-2a)^2=-3(a-9)^2<0\ (a\leqslant 6)$. Демак, тенглама ечимга эга эмас.

5. $\frac{7\pi}{4}$. 6. $\frac{2\pi n}{9}$, $n\in Z$, $n\neq 9k$, $k\in Z$. Курсатма. Тенгламанинг иккала қисми $2\sin\frac{x}{2}$ га кўпайтирилсин.

### 4- вариант 12- К

1. $(-1)^k\frac{\pi}{30}-\frac{1}{5}+\frac{\pi n}{5}$; $\frac{1}{5}(-1)^k\arcsin\frac{1}{14}+\frac{\pi k}{5}-\frac{1}{5}$, $n\in Z$.

2. $\frac{\pi}{18}+\frac{2}{9}+\frac{\pi n}{9}$, $n\in Z$. 3. $(-1)^n\frac{\pi}{30}+\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$.

4. $\sin x+\sin 2x+\operatorname{tg}3x\cos 3x=3$,

$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=3$;

$$\begin{cases}\sin x=1,\\ \sin 2x=1,\\ \sin 3x=1.\end{cases}$$

Система ечимга эга эмас.

5. $\frac{3\pi}{4}$. 6. $\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$.

### 5- вариант 12- К

1. $(-1)^k\frac{\pi}{12}-2+\frac{\pi}{2}k$, $(-1)^{k+1}\cdot\frac{\arcsin 0{,}1}{2}+\frac{\pi k}{2}-2$, $k\in Z$.

2. $1{,}6-\frac{\pi}{10}+\pi k$, $k\in Z$. 3. $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.

5. $\frac{7\pi}{4}$. 6. $-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $\frac{\pi n}{3}$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$.

### 6- вариант 12-К

1. $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n-0{,}5$, $n\in Z$. 2. $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}+\frac{1}{3}$, $n\in Z$, $7\pm\sqrt{41-4n+16\pi n}$, бунда $n\geqslant 0$, $n\in Z$. 3. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}$, $n\in Z$. 5. $\frac{7\pi}{4}$. 6. $\frac{\pi n}{9}$, $n\in Z$, $n\neq 9$, $k\in Z$.

### 1- вариант 14- М

1. $3\sin^2\alpha+5\sin\alpha\cos\alpha=0{,}5(3+5\sin 2\alpha-3\cos 2\alpha)<0{,}5(3+\sqrt{34})<0{,}5(3+5{,}83)<4{,}45$.

$0{,}5(3-\sqrt{34})<\sqrt{17}<4{,}2<0{,}5(3+\sqrt{34})$.

**Жавоб.** а) йўқ; б) ҳа.

2. $13\sin\left(\frac{\pi}{12}+4x\right)\cos\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)=6{,}5\left(\sin\left(8x-\frac{7\pi}{12}\right)+\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$\max\limits_{R} y=6{,}5\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ x=\frac{13\pi}{96}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z;$

$\min\limits_{R} y=6{,}5\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ x=\frac{\pi}{96}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z.$

Функциянинг қийматлар тўплами: $\left[\frac{13}{4}(\sqrt{2}-2);\ \frac{13}{4}(\sqrt{2}+2)\right]$

3. $2+2\cos^2 x-1<3\cos x\Leftrightarrow 2\cos^2 x-3\cos x+1<0\Leftrightarrow\frac{1}{2}<\cos x<$ $<1.$

Жавоб: $-\frac{\pi}{3}+2\pi k<x<2\pi k,\ 2\pi k<x<\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z.$

### *2- вариант* 14-М

1. $\sin^{20}2x\leqslant\sin^2 2x$ тенгликка $2x=\pi n$ ёки $2x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in Z,$ да эришилади; $\cos^{40}2x\leqslant\cos^2 2x$ тенгликка $2x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ ёки $2x=$ $=\pi n,\ \ n\in Z,$ да эришилади. Тенгсизликларни ҳадлаб қўшиб, $\sin^{20}2x+\cos^{40}2x\leqslant\sin^2 2x+\cos^2 2x=1$ ни оламиз. Тенгликка $x=$ $=\frac{\pi k}{4},\ k\in Z,$ да эришилади.

2. $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=0{,}5\left(\cos\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\frac{\pi}{6}\right)=$ $=0{,}5\left(\sin 4x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Демак, $\frac{-2+\sqrt{3}}{4}\leqslant y\leqslant\frac{2+\sqrt{3}}{4}<0{,}934.$

3. $\operatorname{tg}x+\frac{2}{\operatorname{tg}x}>3\Leftrightarrow\frac{\operatorname{tg}^2x-3\operatorname{tg}x+2}{\operatorname{tg}x}>0\Leftrightarrow\begin{cases}0<\operatorname{tg}x<1,\\ \operatorname{tg}x>2\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\pi n<x<\frac{\pi}{4}+\pi n,\\ \operatorname{arctg}2+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.\end{array}\right.$$

### *3- вариант* 14- М

1. Тенгликка $\alpha=0{,}5\arccos 0{,}8+\pi n,\ n\in Z,$ да эришилади.

2. а) Ҳа; б) йўқ. 3. $-\frac{\pi}{4}+\pi n<x<-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \frac{\pi}{6}+\pi n<x<$ $<\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$

### *4- вариант* 14- М

1. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ x=2\pi n,\ n\in Z.$ 2. $y<\sqrt{7{,}469}$. 3. $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+$ $+\pi n\leqslant x<\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$

### *5- вариант* 14- М

1. Тенгликка $|a| = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$, да эришилади.

3. $2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < n + 2\pi n$, $n \in Z$.

### *6- вариант* 14-М

1. Тенгликка $\alpha = 2\pi n$ ёки $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$, да эришилади.

2. $y < 76°$. 3. $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

### *1- вариант* 13-Қ

1. $\frac{\pi}{2} - x = t$, $x = \frac{\pi}{2} - t$, $x \to \frac{\pi}{2}$ да $t \to 0$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\arcsin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{2t}{\arcsin t} = 2.$$

2. а) $\sin\left(2\arcsin\frac{12}{13}\right) = 2\sin\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)\cos\left(\arcsin\frac{12}{13}\right) =$

$$= 2 \cdot \frac{12}{13}\sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \frac{120}{169};$$

б) $\arcsin(\sin 5) = \arcsin(\sin(5 - 2\pi)) = 5 - 2\pi$, чунки $-\frac{\pi}{2} < 5 - 2\pi < \frac{\pi}{2}$.

3. Тенгсизликнинг чап қисмини соддалаштириб, $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ ни оламиз. Бирлик айланадан фойдаланамиз, у ҳолда:

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant 2x - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{6} + 2\pi n,$$

$$\frac{\pi}{24} + \pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{24} + \pi n, \; n \in Z.$$

4. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $|x| \leqslant 1$ бўлганидан $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ бўлади. У ҳолда берилган тенгсизлик бундай кўринишни олади: $\arcsin x < \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ ёки $\arcsin x < \frac{\pi}{4}$, бундан $-1 \leqslant x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. $f(x) = \sin 3x - \sin 5x$ деб олайлик. $f$ функция даври $2\pi$ га тенг ва $f$ функция тоқ, шунга кўра $f(x) > 0$ тенгсизликнинг $[0; \pi]$ оралиқдаги ечимларини топиш етарли. $\sin 3x - \sin 5x = 0$ тенглама $[0; \pi]$ кесмада $0$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$, $\frac{7\pi}{8}$, $\pi$ илдизларга эга.

Интерваллар усулини қўлланиб, $f(x)>0$ тенгсизликнинг $[0;\ \pi[$ даги ечимларини топамиз (62- расм):

$$\frac{\pi}{8}<x<\frac{3\pi}{8},\ \frac{5\pi}{8}<x<\frac{7\pi}{8}.$$

Энди $f$ функциянинг тоқлигини эътиборга оламиз. Тенгсизликнинг $(-\pi;\ 0]$ даги ечимлари $-\frac{\pi}{8}<x<0$, $-\frac{5\pi}{8}<x<-\frac{3\pi}{8}$, $-\pi<x<-\frac{7\pi}{8}$ дан иборат. Ниҳоят, $f$ функциянинг даврийлигини эътиборга олиб, тенгсизликнинг барча ечимларини топамиз.

Жавоб: $\frac{\pi}{8}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{8}+2\pi n$, $\frac{5\pi}{8}+2\pi n<x<\frac{7\pi}{8}+2\pi n$, $-\frac{\pi}{8}+2\pi n<x<2\pi n$, $-\frac{5\pi}{8}+2\pi n<x<-\frac{3\pi}{8}+2\pi n$, $-n+2\pi n<x<-\frac{7\pi}{8}+2\pi n$, $n\in Z$.

## *2- вариант* 13-К

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\arcsin 2x)\,\mathrm{arc\,tg}\,2x}{(x^2-x)\arcsin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{x-1}\cdot\frac{\mathrm{arctg}\,2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\arcsin 3x}\cdot\frac{2}{3}\right)=$ $=-1\frac{1}{3}$.

2. а) $\cos\left(2\arcsin\frac{7}{25}\right)=1-2\sin^2\left(\arcsin\frac{7}{25}\right)=1-\frac{98}{625}=\frac{527}{625}$;

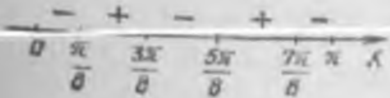
б) $\arccos(\cos 4)=\arccos(\cos(2\pi-4))=2\pi-4$, чунки $2\pi-4\in[0;\ \pi]$.

3. $\frac{\pi}{3}+\pi n\leqslant x\leqslant\pi+\pi n$, $n\in Z$.

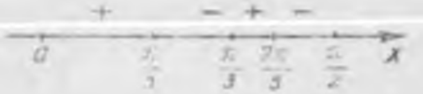
4. $\mathrm{arc\,tg}\,x+\mathrm{arc\,ctg}\,x=\frac{\pi}{2}$, у ҳолда $\mathrm{arc\,ctg}\,x=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arc\,tg}\,x$. Бу тенгсизликдаги $\mathrm{arc\,ctg}\,x$ ўрнига $\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\,x$ ни қўйиб, $\mathrm{arc\,tg}\,x<\frac{\pi}{2}$ ни оламиз, бундан $x<1$.

5. Тенгсизликнинг чап қисмини алмаштирамиз ва $\cos 2x-\cos 8x<0$ ни ҳосил қиламиз. $f(x)=\cos 2x-\cos 8x$ бўлсин. $f$ функция жуфт ва даври $\pi$ га тенг бўлгани учун $f(x)<0$ тенгсизлик ечимларини $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ оралиғида топиш етарли. $f(x)=0$ тенгламанинг $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ даги илдизларини топамиз: $0,\ \frac{\pi}{5},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{5}$.

Интерваллар усулини қўлланиб (63- расм), $f(x)=2\sin 5x\sin 3x<$



62- расм.



63- расм.

$<0$ тенгсизликнинг $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ даги ечимларини топамиз: $\frac{\pi}{5}<x<\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{5}<x\leqslant\frac{\pi}{2}$. $f$ функция жуфт бўлганидан $f(x)<0$ тенгсизликнинг $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$ даги ечимлари $-\frac{\pi}{2}<x<-\frac{2\pi}{5}$, $-\frac{\pi}{3}<x<-\frac{\pi}{5}$ дан иборат.

$f$ функциянинг даврийлигини эътиборга олиб $\left(-\frac{\pi}{2}<x<-\frac{2\pi}{5}\right.$ оралиғини $\frac{2}{\pi}<x<\frac{3\pi}{5}$ оралиги билан алмаштириб), тенгсизликнинг барча ечимларини топамиз.

Жавоб: $\frac{\pi}{5}+\pi n<x<\frac{\pi}{3}+\pi n$, $\frac{2\pi}{5}+\pi n<x<\frac{3\pi}{5}+\pi n$, $-\frac{\pi}{3}+\pi n<x<-\frac{\pi}{5}+\pi n$, $n\in Z$.

### *3- вариант* 13-К

**1.** $1\frac{1}{3}$. **2.** б) $\frac{120}{169}$; а) 0,5. **3.** $-\frac{\pi}{2}+\pi n\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$ **4.** $\frac{\sqrt{2}}{2}<x\leqslant 1$. **5.** $-\frac{2\pi}{5}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{5}+2\pi n$, $\frac{4\pi}{5}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{6\pi}{5}+2\pi n$, $n\in Z$.

### *4- вариант* 13-К

**1.** 10. **2.** а) $\frac{527}{625}$; б) $6-\pi$. **3.** $\frac{7\pi}{24}+\pi n\leqslant x\leqslant\frac{11\pi}{24}+\pi n$, $n\in Z$.
**4.** $1<x<3$. **5.** $\pi n\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+\pi n$, $\frac{\pi}{2}+\pi n\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$.

### *5- вариант* 13-К

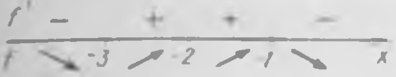
**1.** $\frac{3}{4}$. **2.** а) $\frac{7}{25}$; б) $6-2\pi$. **3.** $-\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}n\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}n$, $n\in Z$. **4.** $1-x\leqslant2$, $2,5\leqslant x<3,5$. **5.** $\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\frac{5\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$.

### *6- вариант* 13-К

**1.** 0,4. **2.** а) $\frac{1}{3}$: б) $2\pi-5$. **3.** $\frac{\pi}{4}+\pi n\leqslant x\leqslant\frac{11\pi}{12}+\pi n$; $n\in Z$. **4.** $x>\frac{1}{3}$. **5.** $\frac{5\pi}{6}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$.

### *1- вариант* 14-К

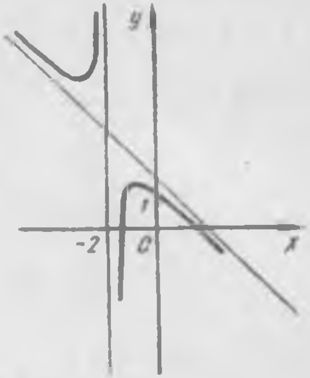
**1.** $\frac{2}{x}-\frac{9-x^2}{3x+1}\leqslant0\Leftrightarrow\frac{x^3-3x+2}{x(3x+1)}\leqslant0\Leftrightarrow\frac{(x-1)^2(x+2)}{x(3x+1)}\leqslant0\Leftrightarrow$



64-расм.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant -2, \\ -\frac{1}{3} < x < 0, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

**Жавоб:** $x \leqslant -2, -\frac{1}{3} < x < 0, x = 1.$



65-расм.

2. Функция исталган $x \neq -2$ да аниқланган.

$$f'(x) = -\frac{(x+3)(x+1)}{(x+2)^2}.$$

Функциянинг критик нуқталари: $x = -3$, $x = -1$ (64-расм); $x = -3$ — минимум нуқтаси, $f_{\min} = f(-3) = 6$; $x = -1$ — максимум нуқтаси, $f_{max} = f(-1) = 2$. Функция $[-3; -2)$ ва $(-2; -1]$ да ўсади, функция $(-\infty; -3]$ ва $[-1; +\infty)$ да камаяди. Функция графигининг асимптоталарини топамиз. $\lim\limits_{x\to-2} \frac{3-x^2}{x+2} = \infty$ бўлаётганидан $x = -2$ тўғри чизиқ вертикал асимптотадан иборат. Оғма асимптотани топамиз:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{3-x^2}{x^2+2x} = -1, \quad b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3-x^2}{x+2} + x\right) = 2.$$

$y = 2 - x$ тўғри чизиқ—оғма асимптота. Функция графиги 65-расмда тасвирланган.

3. $x^3 + 8x + 24 = x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + 12x + 24 = (x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 12)$.

4. $n = 1$ да $10 + 45 - 1 = 54$, $54:27 = 2$. $n = k$, бунда $k \in N$, учун фикрнинг тўғрилигидан фикрнинг $n = k + 1$ учун ҳам тўғрилиги келиб чиқишини исботлаймиз.

$10^{k+1} + 45(k+1) - 1 = 10(10^k + 45k - 1) - 405k + 54$. $10(10^k + 45k - 1)$ сони 27 га каррали (фараз бўйича), $(405k):27 = 15k$ ва 54 сони 27 га каррали, бундан $10^{k+1} + 45(k+1) - 1$ нинг 27 га каррали бўлиши келиб чиқади.

5. Берилган тенгламани алмаштирамиз:

$$2\sin x\cos x + \cos x + 2\sin x + 1 = 0,$$
$$(2\sin x + 1)(\cos x + 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -\frac{1}{2}, \\ \cos x = -1, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = \pi + 2\pi n, \ n \in Z. \end{array}\right.$$

$0 < x < 5$ шартни $\pi$ ва $\frac{7\pi}{6}$ сонлари қаноатлантиради.

Жавоб: $\pi$, $\frac{7\pi}{6}$.

## *2- вариант*

14- Қ

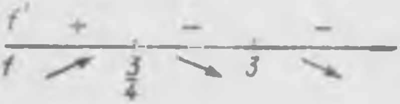
1. Алмаштиришлардан сўнг қуйидагини оламиз:

$$\frac{(x+2)^2(x-4)}{x+1} \leqslant 0.$$

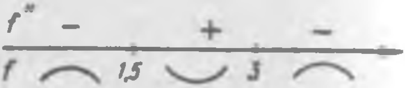
Жавоб: $-1 < x \leqslant 4$, $x = -2$.

2. $D(f) = R$; $x = 0$, $x = 3$ да $f(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{4}{9}(x-3)^2(3-4x).$$

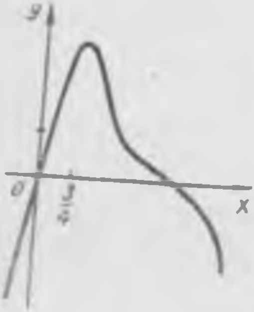


66- расм.



67- расм.

Функциянинг критик нуқталари: $\frac{3}{4}$, 3 (66- расм); $x = \frac{3}{4}$ —максимум нуқтаси, $f_{\max} = f\left(\frac{3}{4}\right) = 3\frac{51}{64}$. Функция $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right]$ да ўсади, $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$ да камаяди.



68- расм.

$$f''(x) = \frac{8}{3}(3-x)(2x-3),$$

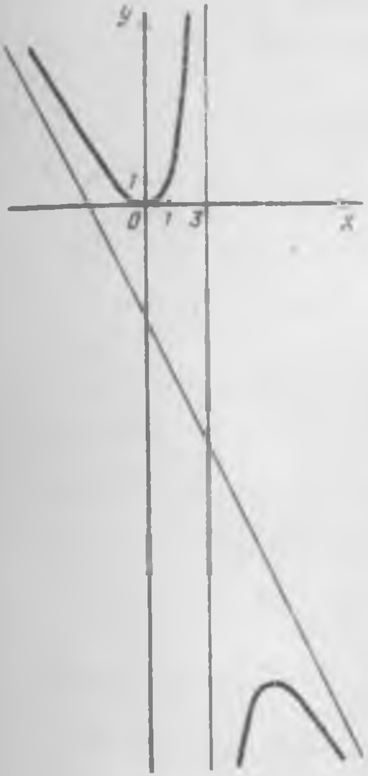
$x = 1{,}5$, $x = 3$ да $f''(x) = 0$,

Функция графиги $(-\infty;\ 1{,}5]$, $[3; +\infty)$ да қавариқлиги билан юқорига, $[1{,}5;\ 3]$ да қавариқлиги билан пастга (ботиқ) йўналган (67- расм), $x = 1{,}5$ ва $x = 3$ — эгилиш нуқталари. Функция графиги 68-расмда тасвирланган.

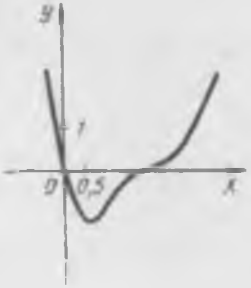
3. $x^2 + \frac{1}{x^2} - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 10 = 0.$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 12 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{x} = -3, \\ x + \frac{1}{x} = 4, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}. \\ x = 2 \pm \sqrt{3}. \end{array}\right.$$



69- расм.



70- расм.

4. $n=4$ да $2^4=16$ ҳамда $4!=24$, яъни фикр тўғри. Фикрнинг $n=k$ да тўғрилигидан, бунда $k \in N$ ва $k \geqslant 4$, фикрнинг $n=k+1$ да ҳам тўғрилиги келиб чиқишини исботлаймиз.

$2^{k+1}=2 \cdot 2^k<2 \cdot k!<(k+1) \cdot k!=$ $=(k+1)!$ га эгамиз:

5. $3\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+$ $+\cos^2 x=0$, $(\sqrt{3}\sin x-$ $\cos x)^2=0$;

$\operatorname{tg} x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x=\frac{\pi}{6}+\pi n, n \in Z$.

Жавоб: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$.

### 3- вариант 14- К

1. $x \leqslant -0{,}5$, $x=1$. 2. Функция графиги 69- расмда тасвирланган. 3. $x^2-6x+8=y$. Ушбуга эга бўламиз: $(x^2-6x+9)(x^2-6x+$ $+8)-12=y(y+1)-12=y^2+y-12=(y+4)(y-3)=(x^2-6x+$ $+12)(x^2-6x+5)=(x-1)\cdot(x-5)(x^2-6x+12)$. 5. $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$.

### 4- вариант 14- К

1. $-1 \leqslant x<0$, $0<x<\frac{2}{3}$, $x=2$. 2. График 70- расмда тасвирланган. 3. $1 \pm \sqrt{2}$. $\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$. 5. $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$.

### *5- вариант*

**14- К**

**1.** $-6 \leqslant x < 0$, $x = 3$, $x > 6$. **3.** $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 2{,}5$. **5.** $\frac{\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$.

### *6- вариант*

**14- К**

**1.** $x = -0{,}5$, $-\frac{1}{3} < x < 0$, $0 < x \leqslant 1$. **3.** $3 \pm \sqrt{5}$. **5.** $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{12}$.

# XI СИНФ УЧУН МУСТАҚИЛ ВА НАЗОРАТ ИШЛАРИНИНГ ЖАВОБЛАРИ, КЎРСАТМАЛАР ВА ЕЧИЛИШИ

## *1- вариант*

**1- М**

1. а) $\int \frac{(2-3\sqrt{x})^2}{x^3}\,dx = \int (4x^{-3} - 12x^{-\frac{5}{2}} + 9x^{-2})\,dx = -\frac{2}{x^2} +$
$+\frac{8}{x\sqrt{x}} - \frac{9}{x} + C.$

б) Интеграл остидаги функцияни алмаштирамиз:

$$\left(\frac{\sin 2x - 2\sin^2 x}{1 - \operatorname{tg} x}\right)^2 = \left(\frac{2\sin x\cos x - 2\sin^2 x}{1 - \operatorname{tg} x}\right)^2 =$$

$$= 4\sin^2 x\cos^2 x = \sin^2 2x.$$

У ҳолда:

$$\int \sin^2 2x dx = \int \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + C.$$

2. $F'(x) = f(x)$ бўлишини исботлаймиз:

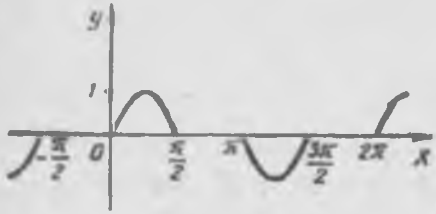
$$F'(x) = 3 + 6\sin 3x\cos 3x = 3 + 3\sin 6x = 3(1+\sin 6x) =$$

$$= 3\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right)\right) = 6\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = f(x).$$

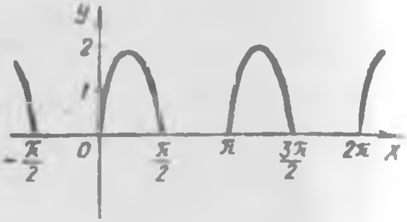
3. Соддалаштиришлардан сўнг $y = \sin x\,|\cos x| + \cos x\,|\sin x|$ ни ҳосил қиламиз. Бу функция даври $2\pi$ га тенг бўлгани учун унинг графигини $[0;\ 2\pi]$ кесмада ясаш етарли, сўнгра функциянинг даврийлигидан фойдаланилиб, графикни бутун тўғри чизиқ бўйича ясаш керак. $[0;\ 2\pi]$ да қуйидагига эга бўламиз:

$$y = \begin{cases} \sin 2x, \ 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ да}, \\ 0, \quad \frac{\pi}{2} \leqslant x < \pi \text{ да}, \\ -\sin 2x, \ \pi \leqslant x < \frac{3\pi}{2} \text{ да}, \\ 0, \quad \frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi \text{ да}. \end{cases}$$

Функция графиги 71- расмда кўрсатилган.



71- расм.



72- расм.

Функция $x=\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$, кўринишдаги нуқталарда дифференциалланмайди.

### 2- вариант

1- М

1. а) $\int\frac{x^2-3x+4}{x\sqrt{x}}dx=\int\left(x^{\frac{1}{2}}-3x^{-\frac{1}{2}}+4x^{-\frac{3}{2}}\right)dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-6x^{\frac{1}{2}}-$
$-8x^{-\frac{1}{2}}+C.$

б) $\int\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(4x+\frac{7\pi}{4}\right)dx=\frac{1}{2}\int\left(\cos(6x+\pi)+\cos\left(2x+\right.\right.$
$\left.\left.+\frac{5\pi}{2}\right)\right)dx=\frac{1}{2}\int(-\cos 6x-\sin 2x)\,dx=-\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{4}\cos 2x+$
$+C.$

2. $F'(x)=3+4\cos 2x+\cos 4x=3+4\cos 2x+\cos^2 2x-1=$
$=2(\cos 2x+1)^2=8\cos^4 x.$

3. Функцияни $y=|\sin 2x|+\sin 2x$ кўринишда қайтадан ёзамиз. Бу функциянинг даври $\pi$ га тенглигини эътиборга олиб, унинг графигини $[0;\pi]$ кесмада ясаймиз. Бизда:

$$y=\begin{cases}2\sin 2x, & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2}\text{ да,}\\ 0, & \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\text{ да.}\end{cases}$$

Даврийликдан фойдаланиб, графикни сонлар тўғри чизиғида ясаймиз (72- расм). Функция $x=\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$, кўринишдаги нуқталарда дифференциалланмайди.

### 3- вариант

1- М

1. а) $2{,}5\operatorname{tg}x-3{,}5x+C$; б) $\arcsin x-2\sqrt{1-x^2}+C.$

3. 73- расм. Функция сонлар тўғри чизиғида дифференциалланувчи ($x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, нуқталарда ҳосила нолга тенг).

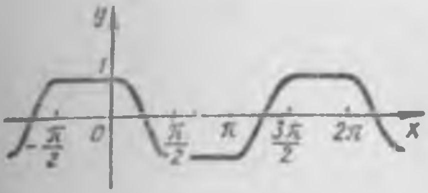
### *4- вариант* 1- М

1. а) $\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{x} + C$; б) $\frac{1}{14}\sin 7x - \frac{1}{6}\cos 3x + C$.

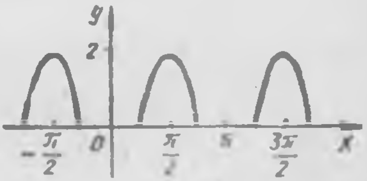
3. 74- расм. Функция $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$, $k \in Z$, нуқталарда дифференциалланмайди.

### *5- вариант* 1- М

1. а) $x^2 + x + \operatorname{arc\,tg} x + C$; б) $-2\operatorname{ctg} 2x - 4x + C$.



73- расм.



74- расм.

### *6- вариант* 1- М

1. а) $-2{,}5\operatorname{ctg} x - 3x + C$; б) $0{,}2(2x+1)^{2{,}5} - \frac{1}{6}(2x+1)^{1{,}5} + C$.

### *1- вариант* 1- К

1. Ўзгарувчиларни ажратиб, $\frac{dy}{y^2} = xdx$ ни оламиз. ($y(1) = -2 \neq 0$ бўлганлигидан $y(x) = 0$ функция тенгламанинг ечими бўлолмайди). Интеграллаб, $-\frac{1}{y} = 0{,}5x^2 + C$ га эга бўламиз. Энди $C$ нинг шундай қийматини топамизки, $y(1) = -2$ шарт бажарилсин. $-\frac{1}{-2} = \frac{1}{2} + C$ га эга бўламиз, бундан $C = 0$. Шундай қилиб, $-\frac{1}{y} = 0{,}5x^2$, яъни $y = -\frac{2}{x^2}$ бўлади.

Жавоб: $y = -\frac{2}{x^2}$.

2. Ньютоннинг иккинчи қонунига мувофиқ $mx'' = F$. Бизнинг ҳолда $m = 1$, $F = 8 - 12t$. Демак, $x'' = 8 - 12t$ тенглама ечилиши керак. $x' = 8t - 6t^2 + C_1$, $x = 4t^2 - 2t^3 + C_1t + C_2$, $x(0) = C_2 = 0$, $v(0) = C_1 = 1$, шунинг учун $x(t) = 4t^2 - 2t^3 + t$. Агар $V'(t) = 8 - 12t = 0$ бўлса, тезлик максимал бўлади, бундан $t = \frac{2}{3}$ (с).

Жавоб: $x(t) = 4t^2 - 2t^3 + t$, $t = \frac{2}{3}$ (с).

## *6- вариант* 1- К

1. $y = x + \frac{\pi}{2}$. 2. $y = x^2$. 3. 5.

4. $F(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 1 \text{ да}, \\ 2\sqrt{x}, & x \geq 1 \text{ да}. \end{cases}$

## *1- вариант* 2- М

1. $x^2 = \sqrt[3]{32x}$ тенгламани ечиб, функциялар графиклари кесишиш нуқталарининг $x_1 = 0$ ва $x_2 = 2$ абсциссаларини топамиз.

$$S = \int\limits_0^2 (\sqrt[3]{32x} - x^2)\,dx = \left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{32}\;x^{\frac{4}{3}} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 3\frac{1}{2}.$$

2. $f'(x) = -2\pi\; A\;\sin\; 2\pi x$, $f'\left(\frac{1}{4}\right) = -2$, $-2\pi\; A = -2$,

$A = \frac{1}{\pi}$. $\int\limits_0^3 f(x)\,dx = 6$ шарт бўйича $B = 2$ топилади.

Жавоб: $A = \frac{1}{\pi}$, $B = 2$.

3. Гук қонуни бўйича сиқилиш кучи $F(s) = ks$ га тенг, бунда $s$ (метрларда) пружинанинг сиқилиш катталиги, $0 \leq s \leq 0{,}1$. $k$ коэффициентни топиш учун шарт бўйича $F(0{,}01) = 20$ эканидан фойдаланамиз. $20 = k \cdot 0{,}01$, бундан $k = 2 \cdot 10^3 \left(\frac{\text{Н}}{\text{м}}\right)$ ва шунинг учун $F(s) = 2 \cdot 10^3\; s$ (Н), $0 \leq s < 0{,}1$.

Ишни $A = \int\limits_0^l F(s)\,ds$ формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$A = \int\limits_0^{0,1} 2 \cdot 10^3\; s ds = 2 \cdot 10^3 \cdot \frac{s^2}{2}\Big|_0^{0,1} = 10 \text{ (Ж)}.$$

Жавоб: 10 Ж.

4. $y = \sqrt{4x - x^2 - 3} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4x - x^2 - 3, \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 1. \\ y \geq 0. \end{cases}$

Демак, маркази $M(2;\, 0)$ ва радиуси $R = 1$ бўлган ярим доиранинг юзини топиш талаб қилинади. Жавоб: $\frac{\pi}{2}$.

## *2- вариант* 2- М

1. $\begin{cases} \sin^2 2x = 0, \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} x = 0, \\ x = \frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4x)\,dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$=\frac{\pi}{4}$. Жавоб: $\frac{\pi}{4}$.

2. $f'(x)=2Ax+B$. $f'(1)=0$ бўлгани учун $2A+B=0$ (1). $f(2)-f'(2)=2$ бўлганига кўра $B+C=2$ (2). $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{2}{3}$ шарт $\frac{A}{3}+\frac{B}{2}+C=\frac{2}{3}$ (3) ни беради.

(1), (2), (3) тенгламалар системасини ечиб, $A=-1$, $B=2$, $C=0$ ни топамиз.

3. $6t-t^2=0$ тенгламани ечиб, йўлнинг бошидан ($t=0$) то тўхташгача ($t=6$ (с)) бўлган йўлни аниқлаймиз.

$$s=\int_0^6(6t-t^2)\,dt=\left(3t^2-\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_0^6=36\ (\text{м}).$$

4. $S=9$.

### *3- вариант*

2- М

1. $\frac{\sqrt{2}}{12\pi}(12-\pi)$. 2. $A=1{,}5$, $B=-0{,}5$. 3. 11,25 Ж. 4. $S=\frac{\pi}{4}$.

### *4- вариант*

2- М

1. 2,2. 2. $A=-\frac{3}{\pi}$, $B=1{,}5$. 3. 80 м. 4. $S=1$.

### *5- вариант*

2- М

1. 0,25. 2. $A=-1$, $B=2$, $C=0$. 3. 21,6 Ж. 4. $S=\pi$.

### *6- вариант*

2- М

1. $\frac{\pi}{4}$. 2. $A=-2$, $B=3$. 3. 3 с. 4. $S=10$.

### *1- вариант*

2- К

1. $\int_{0,5}^{1}\frac{2x dx}{\sqrt{4-x^2}}=(-2\sqrt{4-x^2})\Big|_{0,5}^{1}=\sqrt{15}-2\sqrt{3}$.

2. $\int_0^1(2t^3z-t^2)\,dz=(t^3z^2-(t^2z)\Big|_0^1=t^3-t^2$ бўлгани учун, берилган тенгсизлик $t^3-t^2>0$ тенгсизликка тенг кучли. Кейинги тенгсизликни ечиб, $\left[\begin{array}{l}t=0,\\ t>1\end{array}\right.$ ни оламиз.

Жавоб: $t = 0,\ t \geqslant 1$.

3. $f(x) = x - 4,\ \ g(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 2$ бўлсин. $f(x) = g(x)$ тенгламани ечиб, $x_1 = 2,\ x_2 = 6$ ни оламиз. $2 \leqslant x \leqslant 6$ да $f(x) - g(x) = -0{,}5x^2 + 4x - 6 = -0{,}5(x-2)(x-6) \geqslant 0$ бўлгани учун $[2;\ 6]$ кесмада $f$ функция графиги $g$ функция графигидан пастда жойлашмайди ва шунинг учун фигура юзи

$$S = \int_2^6 (f(x) - g(x))\,dx = \int_2^6 (-0{,}5x^2 + 4x - 6)\,dx = 5\frac{1}{3}$$ га тенг.

4. Берилган функциянинг бошланғич функцияси

$$F(x) = \sin\ 2x + \cos\ x + C$$

кўринишга эга. $F(\pi) = -1$ шарт бўйича $C = 0$ ни оламиз. Шундай қилиб, масала ушбу системани ечишга келади:

$$\begin{cases} \sin\ 2x + \cos\ x = 0, \\ \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \cos\ x = 0, \\ \sin\ x = -0{,}5, \end{array} \right. \\ \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2}, \\ x = \frac{7\pi}{6}, \\ x = \frac{3\pi}{2}. \end{array} \right.$$

## *2- вариант* 2- К

1. $d(1 + x^3) = 3x^2dx$. Шунинг учун $1 + x^3 = t$ алмаштиришни қилиб, $\int x^2 \sqrt{1 + x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{t}\,dt$ ни оламиз, $3x^3\,dx = dt$ бўлганидан

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{1 + x^3}\,dx = \frac{2}{9}\,(1 + x^3)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{52}{9}.$$

2. Тенгсизликнинг чап қисмини алмаштирамиз:

$$\int_0^1 (tz^3 + z^2)\,dt = \frac{z^3t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{z^3}{2} + z^2.$$

Тенгсизлик ушбу кўринишни қабул қилади: $z^2(z + 2) > 0$. Уни интерваллар усули билан ечиб, $z > -2,\ \ z \neq 0$ ни оламиз. Жавоб: $-2 < z < 0,\ z > 0$.

3. $f(x) = 4 - x^2,\ g(x) = x^2 - 6x + 4$ бўлсин. $f(x) = g(x)$ тенглама икки илдизга эга: 0 ва 3. Агар $0 \leqslant x \leqslant 3$ бўлса, $f(x) - g(x) = 2x(3 - x) \geqslant 0$ бўлади. Шундай қилиб, фигура юзи

$$S = 2\int_0^3 (3x - x^2)\,dx = 9$$ га тенг.

4. $f'(x) = \sin\ x - \sin\ 2x,\ x \in \left[\frac{3\pi}{2};\ \frac{7\pi}{4}\right]$. Уринма $y = 0$ тўғри чи-

зиққа параллел бўлиши кераклигидан, унинг бурчак коэффициенти 0 га тенг. Уриниш нуқтасининг абсциссасини топиш учун ушбу системани ечамиз:

$$\begin{cases} \sin\ x - \sin\ 2x = 0, \\ \frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{4}. \end{cases}$$

$x_0 = \frac{5\pi}{3}$ унинг ечими бўлади. $f$ функциянинг $x_0 = \frac{5\pi}{3}$ нуқтадаги қиймати топамиз:

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \int_0^{\frac{5\pi}{3}} (\sin\ t - \sin\ 2t)\, dt = -\cos\ t \Big|_0^{\frac{5\pi}{3}} + \frac{1}{2}\cos\ 2t \Big|_0^{\frac{5\pi}{3}} =$$

$$= -\frac{1}{4}.$$

Уринма тенгламаси: $y = -\frac{1}{4}$.

### *3- вариант* 2- К

1. $\frac{1}{2}$ arc sin $\frac{4}{5}$. 2. $x = \frac{2}{3}$. 3. $10\frac{2}{3}$. 4. $y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

### *4- вариант* 2- К

1. $3(2-\sqrt{2})$. 2. $0 < u < 1$, $u > 1$. 3. $14\frac{2}{3}$. 4. $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = 2\pi$.

### *5- вариант* 2- К

1. $\frac{\pi}{96}$. 2. $y \neq -1$. 3. $2\frac{2}{3}$. 4. $y = -x + \frac{4\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

### *6- вариант* 2- К

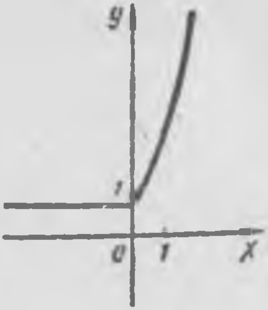
1. $\frac{2}{9}$. 2. $v < 0$ ва $v = 2$. 3. $16\frac{1}{2}$. 4. $y_{\min} = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$.

### *1- вариант* 3- М

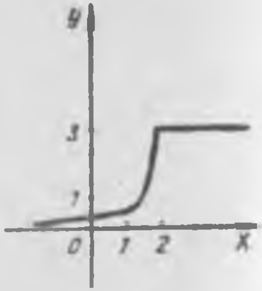
1. Илдиз остидаги ифода $(2^x - 1)^2$ га тенг. Шундай қилиб, $y = |2^x - 1| + 2^x$, ёки

$$y = \begin{cases} 2^{x+1} - 1,\ x > 0 \text{ да}, \\ 1,\ x < 0 \text{ да}. \end{cases}$$

График 79- расмда тасвирланган.



79- расм.



80- расм.

**2.** Берилган тенглама $\sin^2 x = \frac{1}{4}$ тенгламага тенг кучли бўлиб, $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$, сонлари бунинг илдизларидир. $x^2 - 8x + 12 \leqslant 0$ тенгсизлигини ечиб, $2 \leqslant x \leqslant 6$ ни оламиз. $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$ сонлар $2 \leqslant x \leqslant 6$ шартни қаноатлантирувчи илдизлардан иборат.

**3.** а) $\lim\limits_{x \to +0} \frac{x^2-3}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -0} \frac{x^2-3}{x} = +\infty$ ва $7 > 1$ бўлгани учун $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = +\infty$ бўлади.

б) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2-3}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-3}{x} = -\infty$, демак, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Жавоб: $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

**4.** $y = x^2 - 2x$ функциянинг энг кичик қиймати $y(1) = -1$ га тенг. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t$ функция — камаювчи. $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x^2-2x}$ функциянинг энг катта қиймати $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1} = \sqrt{2}$ бўлади.

## *2- вариант*

3- М

**1.** Функцияни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$y = \begin{cases} 3, & x \geqslant 2 \text{ да}, \\ 3^{2x-3}, & x < 2 \text{ да}. \end{cases}$$

График 80- расмда тасвирланган.

**2.** Тенгсизлик ушбу системага тенг кучли:

$$\begin{cases} 7x - x^2 - 6 > 0, \\ \sqrt{5} - 25^{\cos^2 x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 6, \\ \cos x \neq \pm \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$1 < x < 6$ ораликдан $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$ сонларини чиқариб, жавобни оламиз: $1 < x < \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3} < x < 6$.

**3.** а) $f(x) = \frac{2^x + 2^{1-x} - 3}{2^{x+1} - 4^x} = \frac{2^{2x} - 3\cdot 2^x + 2}{4^x(2-2^x)} = \frac{(2^x-1)(2^x-2)}{4^x(2-2^x)} = \frac{1-2^x}{4^x}$, $x \neq 1$, у ҳолда $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\frac{1}{4}$.

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2^{-x}(2^{-x} - 1) = +\infty$.

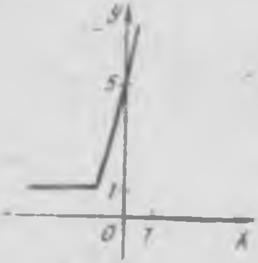
**4.** $(3+2\sqrt{2})^x$ ва $(3-2\sqrt{2})^x$ сонлари ўзаро тескари, шунинг учун $y \geqslant 2$. $x = 0$ да $y = 2$ бўлиши равшан. Шундай қилиб, функциянинг энг кичик қиймати 2 бўлади.

### *3- вариант* 3- М

**1.** Функция графиги 81- расмда тасвирланган **2.** $x_1 = \frac{3\pi}{4}$; $x_2 = \frac{5\pi}{4}$.

**3.** а) $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = 0$; б) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 9$. **4.** 9.

81- расм.



82- расм.

### *4- вариант* 3- М

**1.** Функция графиги 82- расмда тасвирланган. **2.** $-1 < x < -\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4} < x < 3$.

**3.** а) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{4}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}$. **4.** $\frac{1}{7}$.

### *5- вариант* 3- М

**2.** $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$. **3.** $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$. **4.** $y = \frac{1}{3^x + \frac{1}{3^x}} \leqslant 0{,}5$.

### *6- вариант* 3- М

2. $-2 < x < -\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3} < x < 3$. 3. а) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -0,5$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$. 4. 10.

### *1- вариант* 4- М

1. Икки ҳолни қараймиз: а) $x > 0$; б) $x < 0$. Модуль таърифига мувофиқ а) ҳолда $2^{3x} = \frac{1}{3}$ тенгламани оламиз, у ечимга эга эмас, чунки $x > 0$ да $2^{3x} > 1$ бўлади, лекин $\frac{1}{3} < 1$.

б) ҳолда тенглама $2^x = \frac{1}{3}$ кўринишни қабул қилади. Унинг ечими $x = -\log_2 3 < 0$ бўлади. Жавоб: $x = -\log_2 3$.

2. Берилган ифодани $A$ орқали ифодалаймиз. У ҳолда:

$$A = (5^{\log_5 0,5})^{-1} + \log_3 \frac{81}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2} + \log_3 (7 + 2\sqrt{10}) =$$

$$= 2 + \log_3 \frac{81(7+2\sqrt{10})}{7+2\sqrt{10}} = 2 + \log_3 81 = 6.$$

3. Иккинчи қўшилувчи устида айний алмаштиришларни бажарамиз:

$$\log_3 \sqrt{9x^2 - 6x + 1} = \log_3 \sqrt{(3x-1)^2} = \log_3 |3x - 1| =$$

$$= 1 + \log_3 \left| x - \frac{1}{3} \right|.$$

$\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ оралиқ берилган функциянинг аниқланиш соҳасидан иборат. $x < \frac{1}{3}$ да ушбу тенгликлар тўғри:

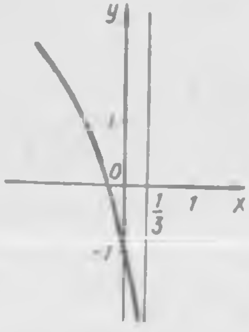
$$\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} - x\right) = -\log_3 \left(\frac{1}{3} - x\right),$$

$$\log_3 \left| x - \frac{1}{3} \right| = \log_3 \left(\frac{1}{3} - x\right).$$

Шундай қилиб, функция $y = 1 + 2\log_3\left(\frac{1}{3} - x\right)$ кўринишида ёзилиши мумкин. Унинг графигини ясаш учун функцияни

$$y = 1 + 2\log_3 \left(-\left(x - \frac{1}{3}\right)\right)$$

кўринишида қайтадан ёзамиз. Демак, берилган функция графиги $y = \log_3 x$ функция графигидан қуйидаги алмаштиришлар натижасида олиниши мумкин экан:



83- расм.

1) ординаталар ўқига нисбатан симметрия,
2) абсциссалар ўқидан 2 коэффициенти билан чўзиш,
3) параллел кўчириш, бунда $O(0;\ 0)$ координаталар боши $A\left(\frac{1}{3};\ 1\right)$ нуқтага ўтади.

Функция графиги 83- расмда тасвирланган.

4. $\log_4 36 = \frac{\log_{12} 36}{\log_{12} 4} = \frac{\log_{12}(12\cdot3)}{\log_{12}\frac{12}{13}} = \frac{1+\log_{12} 3}{1-\log_{12} 3} = \frac{1+a}{1-a}$.

### 2- вариант

4- М

1. Икки ҳолни қараймиз; а) $x \geqslant 3$; б) $x < 3$.

а) холда $2^{3x-3} = 63$, яъни $8^{x-1} = 63$ бўлади. Лекин, $x \geqslant 3$ да $8^{x-1} \geqslant 64$ ва, шундай қилиб ечим йўқ.

б) ҳолида тенглама $2^{3+x} = 63$ кўринишни қабул қилади, бундан $x = \log_2 63 - 3$. Бу ҳолда $x < 3$ шартнинг бажарилишини текшириш қийин эмас. Жавоб: $x = \log_2 63 - 3$.

2. Берилган ифодани $A$ орқали белгилаб оламиз. У ҳолда

$$A = 4^{3\log_8 1{,}5\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{2}) - 2\log_8(\sqrt{5}-\sqrt{2})} =$$

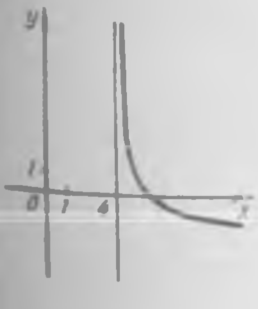
$$= 4^{2\log_8 \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}} = 4^{\log_2 5} = 25.$$

3. Функциянинг аниқланиш соҳаси: $x > 4$. Демак,

$$\log_{0.5}(16-8x+x^2) = \log_{0.5}(x-4)^2 = 2\log_{0.5}|x-4| =$$
$$= 2\log_{0.5}(x-4),$$
$$\log_2(2x-8) = -\log_{0.5} 2 - \log_{0.5}(x-4) = 1 - \log_{0.5}(x-4).$$

Шундай қилиб, функция $y = 1 + \log_{0.5}(x-4)$ кўринишида ёзилиши мумкин. Функция графиги 84- расмда тасвирланган.

4. $140 = 2^2\cdot5\cdot7$ бўлишини назарда тутамиз. У ҳолда



84- расм.

85- расм.

86- расм.

$$\log_{140}9=\frac{2}{\log_3 140}=\frac{2}{\log_3(2^2\,5\cdot7)}=\frac{2}{2\log_3 2+\log_3 5+\log_3 7}=$$

$$=\frac{2}{\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\frac{2abc}{2bc+ac+ab}.$$

### *3- вариант* 4- М

1. $x=2(\log_3 8-1)$. 2. 2. 3. $y=1+2\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)$ функция графиги 85- расмда тасвирланган. 4. $\frac{3b}{2b+ab+1}$.

### *4- вариант* 4- М

1. Ечимлари йўқ. 2. 7. 3. $y=3\log_3(6-x)-1$. Функция графиги 86- расмда тасвирланган. 4. $\frac{a-2}{4(a-1)}$.

### *5- вариант* 4- М

1. $x=-1+\log_{0,2}0{,}03$. 2. 25. 4. $-\frac{1}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$.

### *6- вариант* 4- М

1. $x=\frac{3+12\log_7 2}{7}$. 2. 0,000125. 4. $\frac{b(a+2)}{ab+b+1}$.

### *1- вариант* 3-К

1. Берилган тенгламанинг илдизлари $x^2-4=0$ тенгламанинг илдизларидан (бу илдизлар қийматларида $\log_3(1-x^2-3x)$ кўпайтувчи аниқланган), шунингдек, $\log_3(1-x^2-3x)=0$ тенгламанинг илдизларидан иборат. Жавоб: $-3$; $-2$; 0.

2. Тенгсизликнинг иккала қисмини $6^{3x-2}$ га бўламиз (исталган $x$ да $6^{3x-2}>0$). Берилган тенгсизликка тенг кучли бўлган $\left(\frac{9}{2}\right)^{x-2}>1$, яъни $\left(\frac{9}{2}\right)^{x-2}>\left(\frac{9}{2}\right)^{0}$ тенгсизлигини оламиз. $\frac{9}{2}>1$ бўлганидан, кейинги тенгсизлик $x-2>0$ тенгсизликка тенг кучли, бундан $x>2$. Жавоб: $x>2$.

3. $\log_{\frac{\sqrt{3}}{9}}3=-2$ ва $x=\log_2 2^x$ бўлганидан, берилган тенглама қуйидагига тенг кучли:

$$\log_2(2^x+1)+\log_2 2^x=2+\log_2 3. \qquad (1)$$

(1) тенгламанинг чап ва ўнг қисмларини потенцирлаб, (1) тенгламага тенг кучли бўлган ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$4^x + 2^x = 12. \qquad (2)$$

(2) тенгламани $2^x$ га нисбатан квадрат тенглама сифатида ечиб,

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = -4, \\ 2^x = 3 \end{array}\right. \qquad (3)$$

ни оламиз. Лекин ихтиёрий $x$ да $2^x > 0$, демак, (3) мажмуанинг биринчи тенгламаси ечимга эга эмас. Мажмуанинг иккинчи тенгламасидан $x = \log_2 3$ ни топамиз. Жавоб: $x = \log_2 3$.

4. $\log_2 \sin x$ ни $t$ орқали ифодалаб, берилган тенгсизликни $t - \frac{3}{t} > 2$ кўринишида қайтадан ёзамиз. У $\frac{(t-3)(t+1)}{t} > 0$ тенгсизликка тенг кучли. Интерваллар усулини қўллаб, $-2 < t < 0$, $t > 3$ ларни топамиз. Шундай қилиб,

$$\left[\begin{array}{l} -1 < \log_2 \sin x < 0, \\ \log_2 \sin x > 3 \end{array}\right.$$

тенгсизликлар мажмуасини ҳосил қиламиз, ундан $\frac{1}{2} < \sin x < 1$ (мажмуадаги иккинчи тенгсизлик ечимга эга эмас). Натижада ушбуга эга бўламиз: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x <$
$< \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$.

5. Берилган тенглама

$$\begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin 2x = \cos^2 x \end{cases}$$

системага тенг кучли. $\sin 2x = \cos^2 x$ тенгламани ечиб ва $\cos x > 0$ ни назарда тутиб, $x = \operatorname{arctg} 0{,}5 + 2\pi n$, $n \in Z$, ни оламиз.

6. $\sqrt{\frac{\log_7 8}{\log_6 7}} = \sqrt{\log_7 8 \cdot \log_7 6} < \frac{\log_7 8 + \log_7 6}{2} = \frac{\log_7 48}{2} < 1.$
Демак, $\log_7 8 < \log_6 7$. Бошқача ечиш ҳам мумкин:
$\log_7 8 - 1 = \log_7 \frac{8}{7}$, $\log_6 7 - 1 = \log_6 \frac{7}{6}$; $\log_7 \frac{8}{7} < \log_6 \frac{7}{6}$.

## *2- вариант*

3-К

1. Берилган тенгламанинг аниқланиш соҳаси $x \neq 2$. Шунинг учун $x^2 - x - 2 = 0$ тенгламанинг икки илдизидан фақат $x = -1$ берилган тенглама илдизи бўлади. Бошқа илдизларни $\log_2(x^2 - 4x + 4) = 0$ тенгламани ечиб топамиз.

Жавоб: $-1$; $1$; $3$.

2. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{tg} x$, шунга кўра $7^{\operatorname{tg} x}$ ни $t$ орқали ифодалаб, берилган тенгсизликни $t+\frac{1}{t} \leqslant \frac{50}{7}$ кўринишида қайтадан ёзамиз, бунда $t>0$. Интерваллар усулини қўлланиб, $\frac{1}{7} \leqslant t \leqslant 7$ ни топамиз. Демак, $-1 \leqslant \operatorname{tg} x \leqslant 1$. Жавоб: $-\frac{\pi}{4}+\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in Z$.

3. Берилган тенглама

$$\frac{1}{4}(\log_3 x+3)^2+1-\log_3 x=4$$

тенгламага тенг кучли. Буни $\log_3 x$ га нисбатан квадрат тенглама сифатида ечиб, ушбу оламиз:

$$\left[\begin{array}{l}\log_3 x=1, \\ \log_3 x=-3.\end{array}\right.$$

Бундан: $x_1=3,\ x_2=\frac{1}{27}$.

4. Икки ҳолни қараймиз: а) $x^2-\frac{5}{4}>1$; б) $0<x^2-\frac{5}{4}<1$.

а) ҳолда

$$\begin{cases}|x|>\frac{3}{2}, \\ (2^x-3)>0, \\ 2 \leqslant 2^x \leqslant 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x|>\frac{3}{2}, \\ 2^x \neq 3, \\ 1 \leqslant x<2\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{3}{2}<x<\log_2 3, \\ \log_2 3<x \leqslant 2.\end{array}\right.$$

($2^{\frac{3}{2}}<3$ бўлганидан $\frac{3}{2}<\log_2 3$ бўлади.)

б) ҳолда:

$$\begin{cases}\frac{5}{4}<x^2<\frac{9}{4}, \\ 4^x-3 \cdot 2^{x+1}+9>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{\sqrt{5}}{2}|<|x<\frac{3}{2}, \\ \left[\begin{array}{l}2^x \leqslant 2, \\ 2^x>4\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2}<x<-\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Жавоб: $-\frac{3}{2}<x<-\frac{\sqrt{5}}{2},\ \frac{3}{2}<x<\log_2 3,\ \log_2 3<x \leqslant 2$.

5. Берилган тенглама ушбу системага тенг кучли:

$$\begin{cases}\sin x<0, \\ \log_3 \sin^2 x=\log_3(\sqrt{3} \sin x \cos x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x<0, \\ \sin^2 x=\sqrt{3} \sin x \cos x\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x<0, \\ \sin x=\sqrt{3} \cos x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x<0, \\ \operatorname{tg} x=\sqrt{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x<0, \\ x=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n \in Z\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

6. Қуйидагиларга эгамиз:

$$\log_{24}72 = \frac{\log_2 72}{\log_2 24} = \frac{3 + 2\log_2 3}{3 + \log_2 3};$$

$$\log_{12}18 = \frac{\log_2 18}{\log_2 12} = \frac{1 + 2\log_2 3}{2 + \log_2 3}.$$

$$\log_2 3 = t\,(t > 1) \text{ бўлсин.}$$

$$\log_{24}72 - \log_{12}18 = \frac{3 + 2t}{3 + t} - \frac{1 + 2t}{2 + t} = \frac{3}{(3 + t)(2 + t)} > 0.$$

Демак, $\log_{24}72 > \log_{12}18$.

### *3- вариант* 3- К

1. $-0{,}5$. 2. $x < 0,\ x > 1{,}5$. 3. 2. 4. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x \leqslant -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ \frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$. 5. $\frac{\pi}{12} + 2\pi n,\ \frac{5\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in Z$. 6. $\log_6 7 < \log_5 6$.

### *4- вариант* 3- К

1. 1, 2. 2. $-1 \leqslant x < 0,\ x > 3$. 3. $\frac{1}{6},\ \frac{1}{2}$. 4. $2^{-15} < x < 2$. 5. $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$. 6. $\log_3 6 > \log_{18}72$.

### *5- вариант* 3- К

1. 3. 2. $2n + \frac{1}{2},\ 2n - 1 \leqslant x \leqslant 2n,\ n \in Z$. 3. 1. 4. $0 < x < \frac{1}{2},\ 1 < x < 4$. 5. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$. 6. $\log_{10}11 < \log_9 10$.

### *6- вариант* 3- К

1. $\frac{2n + 1}{2}$, бунда $n \in Z,\ n \neq 0$. 2. $x < 1{,}5$. 3. 2, $2^{-10}$. 4. $-1 \leqslant x < 4$. 5. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$. 6. $\log_2 6 > \log_{24}648$.

### *1- вариант* 5-М

1. а) $f'(x) = 2e^{2x} + 2(2x + 1)e^{2x} = 4e^{2x}(x + 1)$; $x = -1$ да $f'(x) = 0$, $x < -1$ да $f'(x) < 0$, $x > -1$ да $f'(x) > 0$. Функция $(-\infty; -1]$ оралиқда камаяди, $[-1; +\infty)$ оралиқда ўсади, $x_0 = -1$ — минимум нуқтаси. $f''(x) = 4e^{2x}(2x + 3)$; $x = -1{,}5$ да $f''(x) = 0$, $x < -1{,}5$ да $f''(x) < 0$, $x > -1{,}5$ да $f''(x) > 0$.

Функция графиги $(-\infty;\ -1{,}5]$ ораликда қавариқлиги билан юқорига, $[-1{,}5;\ +\infty)$ ораликда қавариқлиги билан пастга қараган, $x_1 = -1{,}5$ — эгилиш нуқтаси.

б) $f$ функция ҳамма жойда узлуксиз. Шунинг учун унинг ихтиёрий кесмадаги қийматлари тўплами $[m;\ M]$ кесмадан иборат, бунда $m$ ва $M$ мос равишда функциянинг шу кесмадаги энг кичик ва энг катта қийматлари. Функциянинг $[-2;\ 0]$ кесмадаги энг кичик қиймати, а) пунктда айтилганига қараганда, $f(-1) = -e^{-2}$ га тенг. Энг катта қийматни топиш учун $f(-2)$ ва $f(0)$ ларни солиштирамиз: $f(-2) = -3e^{-4}$, $f(0) = 1$. Демак, функциянинг $[-2;\ 0]$ даги энг катта қиймати 1 га тенг. Унинг $[-2;\ 0]$ даги қийматлари тўплами $[-e^{-2};\ 1]$ кесмадан иборат. 2. $y' = 2x - \frac{2}{2x-1} = \frac{2(2x^2-x-1)}{2x-1}$, $x > \frac{1}{2}$; $x = 1$ да $y' = 0$. Уринма тенгламаси: $y = 2$. 3. $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, бунда $x > 0$. $F(x) = x + \ln x + C$. $F(e) = e$ шартдан $C = -1$ ни топамиз. Демак, бошланғич функция $F(x) = x + \ln x - 1$ кўринишга эга. $x + \ln x - 1 = 0$ ёки $\ln x = 1 - x$ тенглама $x = 1$ илдизга эга. Бу тенглама бошқа илдизга эга бўлолмайди, чунки $y = \ln x$ функция ўсувчи, $y = 1 - x$ эса — камаювчи. Шундай қилиб, $y = x + \ln x - 1$ эгри чизиқ $Ox$ ўқни $M(1;\ 0)$ нуқтада кесади.

## *2- вариант*

**5- М**

1. $f'(x) = 1 + \frac{2x}{1+x^2} = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$; $x = -1$ да $f'(x) = 0$. Исталган $x \neq -1$ қийматда ҳосила $f'(x) > 0$. Бундан функциянинг сонлар тўғри чизиғининг ҳамма жойида ўсиши, экстремум нуқталарнинг йўқлиги келиб чиқади.

$$f''(x) = \frac{2(x+1)(x^2+1) - 2x(x+1)^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}.$$

Иккинчи ҳосиланинг ишораларини эътиборга олиб, функциянинг графиги $(-\infty;\ -1]$ ва $[1;\ +\infty)$ ораликларда қавариқлиги билан юқорига ва $[-1;\ 1]$ да қавариқлиги билан пастга қараган, деган хулосага келамиз, $x_1 = -1$ ва $x_2 = 1$ — эгилиш нуқталари.

б) Функция $R$ да ўсганидан, у $[-3;\ 0]$ да ҳам ўсади. Шунга кўра унинг шу кесмадаги энг катта қиймати $f(0) = 0$ га, энг кичик қиймати эса $f(-3) = -3 + \ln 10$ га тенг. $f$ функциянинг қийматлар тўплами: $[-3 + \ln 10;\ 0]$.

2. $y' = -4xe^{-2x}$. $x_0 = 0$ нуқта функциянинг максимум нуқтаси бўлиши равшан. Уринма тенгламаси: $y = 1$. 3. $\int e^{3\cos x + 2} \sin x\, dx =$

$$= -\frac{1}{3}\int e^{3\cos x + 2}\, d(3\cos x + 2) = -\frac{1}{3} e^{3\cos x + 2} + C.$$

### *3- вариант* 5- М

1. а) Функция $(-\infty;\ 0]$ ораликда камаяди ва $[0;\ +\infty)$ ораликда ўсади, $x_0 = 0$ — минимум нуқтаси. График сонлар тўғри чизиғи бўйича қавариқлиги билан пастга қарайди. Эгилиш нуқталари йўқ.

б) $\left[\frac{3}{\ln 2};\ \frac{9}{2\ln 2} - 1\right]$.

2. $y = 8 - 4x$. 3. $F(x) = \begin{cases} x + 3, & x < 0 \text{ да}, \\ e^x + 2, & x \geqslant 0 \text{ да}. \end{cases}$

### *4- вариант* 5- М

1. а) $(3;\ 4]$ — камайиш оралиғи, $[4;\ +\infty)$ — ўсиш оралиғи, $x_0 = 4$ — минимум нуқтаси. График аниқланиш соҳаси бўйича қавариқлиги билан пастга қараган. Эгилиш нуқталари йўқ.

б) $[3 - \ln 2;\ 4 - \ln 4]$.

2. $3x - 2y + 5 - 3\ln 2 = 0$. 3. $F(x) = 0{,}5e^{2x} + x - 0{,}5$. $y = F(x)$ эгри чизиқ координаталар бошидан ўтади. $Ox$ ўқ билан бошқа нуқталарда кесишмайди.

### *5- вариант*

1. а) $[-1;\ 0]$ — камайиш оралиғи, $(-\infty;\ -1]$, $[0;\ +\infty)$ — ўсиш ораликлари; $x_0 = -1$ — максимум нуқтаси, $x_1 = 0$ — минимум нуқтаси. График $(-\infty;\ \log_2 0{,}75]$ ораликда қавариқлиги билан юқорига, $[\log_2 0{,}75;\ +\infty)$ ораликда қавариқлиги билан пастга қарайди, $x_2 = \log_2 0{,}75$ — эгилиш нуқтаси.

б) $\left[-\frac{2}{\ln 2};\ 1 - \frac{2}{\ln 2}\right]$.

2. $y = -2$. 3. $1{,}5$.

### *6- вариант* 5- М

1. а) $(-\infty;\ 2]$ — ўсиш оралиғи, $[2;\ 3)$ — камайиш оралиғи, $x_0 = 2$ — максимум нуқтаси. График аниқланиш соҳаси бўйича қавариқлиги билан юқорига қарайди. Эгилиш нуқталари мавжуд эмас.

б) $[\ln 3 - 1;\ 1]$.

2. $y = e^{-3}$. 3. $F(x) = 5 - x - \frac{\ln x}{\ln 4}$; $x = 4$ да $F(x) = 0$.

### *1- вариант* 4- К

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+15}{3x+1}\right)^{x-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{14}{3x+1}\right)^{x-1} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1 + \frac{1}{\frac{3x+1}{14}}\right)^{\frac{3x+1}{14}}\right)^{\frac{14(x-1)}{3x+1}} = e^{\frac{14}{3}},$$

чунки

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x+1}{14}}\right)^{\frac{3x+1}{14}}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e,\text{ бунда } t=\frac{3x+1}{14}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{14(x-1)}{3x+14}=\lim_{x\to\infty}\frac{14\left(1-\frac{1}{x}\right)}{3+\frac{1}{x}}=\frac{14}{3}$$

2. $(0{,}5;\ +\infty)$ оралиқ функциянинг аниқланиш соҳасидан иборат. Функция аниқланиш соҳасининг ихтиёрий нуқтасида ҳосилага эга. $f$ функция ҳосиласини топамиз:

$$f'(x)=\frac{2(2x+1)(x-1)}{2x-1};\ x>\frac{1}{2}.$$

Ферма теоремаси бўйича барча экстремум нуқталари $f'(x)=0,\ x>\frac{1}{2}$ тенгламани қаноатлантириши керак (чунки $f(x)$ аниқланиш соҳаси бўйича ҳосилага эга). $\begin{cases} f'(x)=0, \\ x>\frac{1}{2} \end{cases}$ системани ечиб, $x=1$ ни топамиз.

$\frac{1}{2}<x<1$ оралиқда ҳосила $f'(x)<0$, $1<x<+\infty$ оралиқда эса ҳосила $f'(x)>0$ ва функция $x_0=1$ нуқтада узлуксиз бўлгани учун $x_0=1$ — функциянинг минимум нуқтаси: $y_{\min}=f(1)=1$. Функциянинг ўсиш (камайиш) аломатидан фойдаланиб, функция $\left(\frac{1}{2};\ 1\right]$ оралиқда камаяди, $[1;\ +\infty)$ оралиқда ўсади, деган хулосага келамиз.

3. Шартдан $y'=-\frac{y}{x}$ келиб чиқади. Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}.$$

Интеграллаб, $xy=C$ ни топамиз. Шарт бўйича $y(2)=\frac{1}{2}$, демак, $C=1$. Шундай қилиб, изланаётган эгри чизиқ тенгламаси $xy=1$ бўлган гипербола.

4. $y=2^{3-x}$, $y=4^{x}$ ва $y=16$ функциялар графикларини ясаймиз (87-расм). Уларнинг кесишиш нуқталари абсциссаларини топамиз. $x=1$ да $2^{3-x}=4^{x}$ га, $x=-1$ да $2^{3-x}=16$ га, $x=2$ да $4^{x}=16$ га эгамиз. Изланаётган юз $S=S_{ABCD}-(S_{ABEF}+S_{FECD})$ га тенг. $ABCD$ — тўғри тўртбурчак, $S_{ABCD}=3\cdot16=48$. $ABEF$ ва $FECD$ фигуралар — эгри чизиқли трапеция ва, шунинг учун

$$S_{ABEF} = \int_{-1}^{1} 2^{3-x}dx = -\frac{2^{3-x}}{\ln 2}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{12}{\ln 2},$$

$$S_{FECD} = \int_{1}^{2} 4^x dx = \frac{4x}{2\ln 2}\Bigg|_{1}^{2} = \frac{6}{\ln 2}.$$

87- расм.

Шундай қилиб, изланаётган юз $S = 48 - \frac{18}{\ln 2}$ га тенг.

5. Икки ҳолни қараймиз: а) $\cos x \geqslant 0$; б) $\cos x < 0$.

а) ҳолда

$$\begin{cases} \cos x \geqslant 0, \\ \operatorname{tg} x = -1, \quad \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{4}. \\ 0 < x \leqslant 2\pi \end{cases}$$

б) ҳолда:

$$\begin{cases} \cos x < 0, \\ \operatorname{tg} x = -3, \quad \Leftrightarrow x = \pi - \operatorname{arctg} 3. \\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \end{cases}$$

Жавоб: $x_1 = \frac{7\pi}{4}$, $x_2 = \pi - \operatorname{arctg} 3$.

6. $2^x$ га нисбатан квадрат тенгламани ечиб, $\left[\begin{array}{l} 2^x = a - 1 \\ 2^x = 4 \end{array}\right.$ ни топамиз. Агар $a \leqslant 1$ бўлса, $2^x = a - 1$ тенглама ечимга эга бўлмайди ва, демак, берилган тенглама ягона $x = 2$ илдизга эга. Берилган тенглама $a - 1 = 4$, яъни $a = 5$ бўлганда ҳам ягона ечимга эга бўлади. Қолган барча ҳолларда тенгламанинг иккита ҳар хил ечимга эга бўлиши равшан.

Жавоб: $a \leqslant 1$, $a = 5$.

### *2- вариант* 4- К

1. $\lim\limits_{\alpha \to 0}(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$ бўлганидан $\lim\limits_{\alpha \to 0}\frac{\ln(1 + \alpha)}{\alpha} = 1$.

Шунинг учун

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{tg} 2x)}{\ln(1 + \sin 3x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}.$$

2. $f$ функция ҳосиласини топамиз. $f'(x) = 25^x - 5^{x+1}$, $x = 1$ да $f'(x) = 0$.

Функциянинг кесма учларидаги ва $x_0 = 1$ критик нуқтадаги қийматларини топамиз:

$$f(0) = -\frac{9}{\ln 5},\ f(2) = \frac{375}{\ln 5},\ f(1) = -\frac{25}{\ln 5}.$$

**Жавоб.** Функциянинг энг катта қиймати $\frac{375}{\ln 5}$ га, энг кичик қиймати эса $-\frac{25}{\ln 5}$ га тенг.

3. Ньютон қонуни бўйича: $\frac{dT}{dt} = k(T - 10)$. Ўзгарувчиларни ажратиб, $\frac{dT}{T-10} = kdt$ ни оламиз, бундан $\ln(T - 10) = kt + C$.

$T(0) = 100$ бўлгани учун $C = \ln 90$ бўлади. $T(30) = 70$ шартидан $k = -\frac{1}{30}\ln\frac{3}{2}$ ни топамиз. У ҳолда: $\ln(T - 10) = \ln 90 - \frac{t}{30}\ln\frac{3}{2}$ ва $T = 50$ да $\frac{t}{30}\ln\frac{3}{2} = \ln\frac{9}{4}$, яъни $t = 60$. **Жавоб.** 60 минутдан сўнг.

4. $S = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(4 - \frac{2}{x}\right)dx = 2 - \ln 4.$

5. Икки ҳолни қараймиз: а) $\sin x \geqslant 0$; б) $\sin x < 0$. а) ҳолда:

$$\begin{cases}\sin x \geqslant 0,\\ 2\sin x\cos x = \sin^2 x,\\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\end{cases} \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l}\sin x \geqslant 0,\\ \left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \operatorname{tg} x = 2,\end{array}\right.\\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 0,\\ x = \pi,\\ x = 2\pi,\\ x = \operatorname{arctg} 2.\end{array}\right.$$

б) ҳолда:

$$\begin{cases}\sin x < 0,\\ \sin x = -2\cos x,\\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\sin x < 0,\\ \operatorname{tg} x = -2,\\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\end{cases} \Longleftrightarrow x = 2\pi - \operatorname{arctg}2.$$

**Жавоб:** $x_1 = 0,\ x_2 = \pi,\ x_3 = 2\pi,\ x_4 = \operatorname{arctg} 2,\ x_5 = 2\pi - \operatorname{arctg} 2.$

6. $5^x$ га нисбатан квадрат тенгламани ечиб, $\left[\begin{array}{l}5^x 2a - 6,\\ 5^x = 2 - a\end{array}\right.$ ни топамиз. Агар иккала $2a - 6 \leqslant 0$ ва $2 - a \leqslant 0$ шарт бир вақтда бажарилса, берилган тенглама бирорта ҳам илдизга эга бўлмаслиги аён. Ҳосил қилинган тенгсизликлар системасини ечиб, $2 \leqslant a \leqslant 3$ ни оламиз.

### *3- вариант*

4- К

1. $e^{1,5}$. 2. $f'(x) = \frac{\ln x - \ln\frac{9}{e}}{2}$. Функция $\left[3; \frac{9}{e}\right]$ да камайиши ва $\left[\frac{9}{e};\ 4,5\right]$ да ўсиши туфайли, энг кичик қийматига $x_0 = \frac{9}{e}$ нуқта-

да эришилади ва у $f\left(\frac{9}{e}\right)=\frac{9}{e}\left(0,5\ln\frac{9}{e}-\ln 3\right)=-\frac{9}{2e}$ га тенг.

3. $s=e^{\frac{1}{3}t+1}$, $s'=\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}t+1}$, $s''=\frac{1}{9}e^{\frac{1}{3}t+1}$. 4. $S=1+\frac{2}{\ln 3}$. 5. $x_1=$ $=\frac{3\pi}{4}$, $x_2=2\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. 6. $0<a<\frac{1}{3}$ ва $\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$.

### *4- вариант* **4- К**

1. $\frac{2}{3}$. 2. $x=0$ — минимум нуқтаси; $x\leqslant 0$ да функция камаяди, $0\leqslant x<\frac{1}{2}$ да ўсади. 3. $y=2e^{0,5x^2}$. 4. $S=\frac{4^7}{3}(5\ln 3-4)$. 5. $x_1=$ $=\frac{\pi}{2}$, $x_2=\frac{3\pi}{2}$, $x_3=\operatorname{arctg}0,5$, $x_4=\pi-\operatorname{arctg}0,5$. 6. $a\leqslant 1$, $a>4$ ва $a=2,5$.

### *5- вариант* **4 -К**

1. $e^6$. 3. 9 мин. 4. $S=8-6\ln 3$. 5. $x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=\pi$. 6. $a=1$.

### *6- вариант* **4- К**

1. $\frac{2}{5}$. 2. $\min\limits_{[-1;\,2]}f(x)=f(0)=\frac{10}{\ln 3}$, $\max\limits_{[-1;\,2]}f(x)=f(2)=\frac{10}{\ln 3}+16$.

3. $y=e^x-3$. 4. $S=12-2\ln 3$. 5. $x_1=0$, $x_2=\pi$, $x_3=2\pi$, $x_4=$ $=\frac{\pi}{4}$, $x_5=\frac{7\pi}{4}$. 6. $a<3$, $a\neq 1$.

### *1- вариант* **6- М**

1. а) Функциянинг аниқланиш соҳаси барча шундай $x$ лардан иборатки, улар учун $1-2\sin 3x\geqslant 0$ шарт бажарилади. Тенгсизликни ечиб, $-\frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$, ни оламиз. б) $f'(x)=$

$$=\frac{4}{3}(1-2\sin 3x)^{\frac{1}{3}}(-6\cos 3x),\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=8.$$

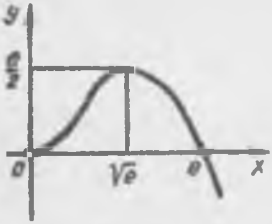
2. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{6^x+3^x-x^3}{6^x-3^x+x^5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\left(\frac{1}{x}\right)^x-\frac{x^3}{6^x}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^x+\frac{x^5}{6^x}}=1,$$

чунки $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{6^3}=0$ ва $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^5}{6^x}=0$.

3. Функция $x>0$ да аниқланган. Функция аниқланиш соҳаси бўйича дифференциалланади. Ҳосилани топамиз: $y'(x)=x(1-2\ln x)$; $x=\sqrt{e}$ да $y'(x)=0$. $0<x<\sqrt{e}$ да $y'(x)>0$, $x>\sqrt{e}$ да $y'(x)<$

$< 0$ ва $x=\sqrt{e}$ нуқтада функция узлуксиз, шунинг учун $(0; \sqrt{e}]$ оралиқда функция ўсувчи, $[\sqrt{e}, +\infty)$ оралиқда камаювчи; $x=\sqrt{e}$ нуқта—максимум нуқтаси. Функциянинг максимум нуқтадаги қийматини ҳисоблаймиз: $y(\sqrt{e})=\frac{e}{2}$.

Иккинчи ҳосилани топамиз: $y''(x)=-(1+2\ln x)$. Функцияни иккинчи ҳосила ёрдами билан текшириб, $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ — эгилиш нуқтаси, деган хулосага келамиз, чунки $0< x<\frac{1}{\sqrt{e}}$ да $y''(x)>0$, $x>\frac{1}{\sqrt{e}}$ да эса $y''(x)<0$.



88-расм.

$x\to+0$ ва $x\to+\infty$ да функция лимитларини излаймиз. $x^2(1-\ln x)=x^2-x^2\ln x$. Сўнг $\lim\limits_{x\to+0}(x^3\ln x)$ ни топамиз. $x=e^{-t}$, яъни $\ln x=-t$ бўлсин. У ҳолда $x\to+0$ да $t\to+\infty$, $\lim\limits_{x\to+0}(x^2\ln x)=-\lim\limits_{t\to+8}\frac{t}{e^{2t}}=0$. Демак, $\lim\limits_{x\to+0}x^2(1-\ln x)=0$. Лекин $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, шунинг учун $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(1-\ln x)=-\infty$. Функция графиги 88- расмда тасвирланган.

## 2- вариант 6-М

1. а) $\sin x-\cos x>0$ ёки $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$ тенгсизликни ечиб, функциянинг аниқланиш соҳасини топамиз, ундан $\frac{\pi}{4}+2\pi n< x<\frac{5\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$.

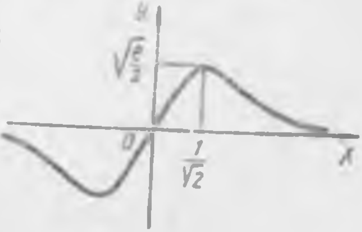
б) $f'(x)=-\frac{\sqrt{2}(\cos x+\sin x)}{(\sin x-\cos x)^{1+\sqrt{2}}}$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sqrt{2}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x+3x}{\ln x+5x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln^2 x}{x}+3}{\frac{\ln x}{x}+5}=\frac{3}{5}$.

3. Функция сонлар тўғри чизиғи бўйича аниқланган ва дифференциалланади. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, у ҳолда $y=0$ функция графигининг горизонтал асимптотаси. Функция тоқ. Ҳосилани топамиз: $f'(x)=(1-2x^2)e^{1-x^2}$. $x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ да ва $x>\frac{1}{\sqrt{2}}$ да $f'(x)<0$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}< x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ да $f'(x)>0$ бўлгани учун ва функция $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ва $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ нуқталарда узлуксиз бўлгани учун, у $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ ва

$\left[\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$ оралиқларда камаяди, $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ оралиқда ўсади. $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ нуқта минимум нуқтасидан, $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ эса максимум нуқтасидан иборат; $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\sqrt{\frac{e}{2}}$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{\frac{e}{2}}$.

Иккинчи ҳосилани топамиз: $f''(x)=2x\times\times(2x^2-3)\cdot e^{1-x^2}$. Эгилиш нуқталари: $x=0$ ва $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. Функция графиги 89- расмда тасвирланган.



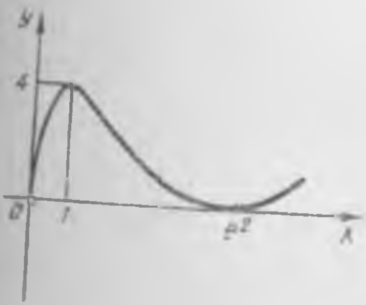
89- расм.

### *3- вариант* 6- М

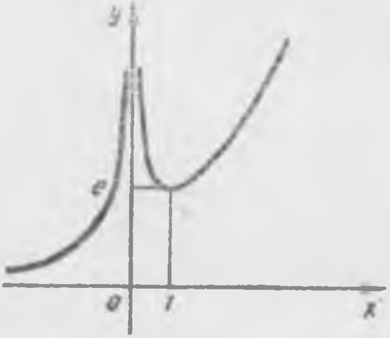
1. а) $-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; б) 0.
2. 4. 3. 90- расм.

### *4- вариант* 6- М

1. а) $-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}<x\leqslant\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; б) $-2\pi$.
2. 0. 3. 91- расм.



90- расм.



91- расм.

### *5- вариант* 6- М

1. а) $-\frac{\pi}{8}+\pi n\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{8}+\pi n$, $n\in Z$; б) $\frac{16}{3}$. 2. 0.

### *6- вариант* 6- М

1. а) $\frac{\pi}{3}+\pi n<x<\frac{2\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$; б) 0. 2. $-\frac{2}{3}$.

## *1- вариант* 7- М

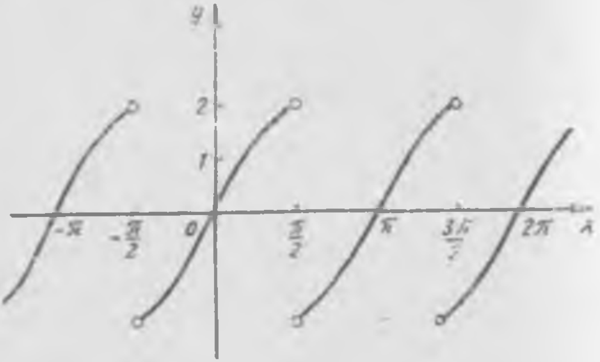
1. Берилган ифодани $A$ орқали ифодалаймиз. У ҳолда:

$$A=\left(\frac{3a\sqrt{a}-3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}}{3\sqrt{a}\,(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2(a-b)^2(a+2b)^2=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2(a-b)^2(a+2b)^2=4a\,(a+2b)^2.$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+5)(2x-\sqrt{4x^2+3})=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3\,(3x+5)}{2x+\sqrt{4x^2+3}}=$

$$=-3\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{5}{x}}{2+\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}}=-\frac{9}{4}.$$



92- расм.

3. $y=\operatorname{tg}x\sqrt{2+2\cos x}$. $1+\cos 2x=2\cos^2 x$ бўлгани учун $y=$ $=2\operatorname{tg}x\,|\cos x|$ бўлади, ёки

$$y=\begin{cases}2\sin x, \text{ агар } \cos x>0 \text{ бўлса,}\\ -2\sin x, \text{ агар } \cos x<0 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

Функция графиги 92- расмда тасвирланган.

## *2- вариант* 7- М

1. Берилган ифодани $A$ орқали белгилаймиз.

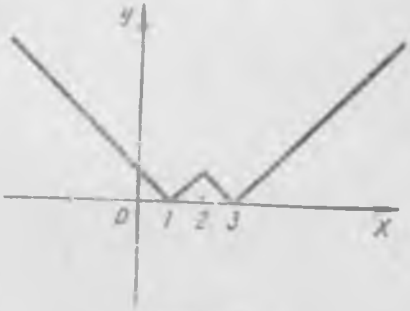
$$A=(\sqrt[3]{m}\,(\sqrt[3]{m}+1)-\sqrt[3]{m^2})\left(\sqrt[4]{mn}+\frac{1-\sqrt{mn}}{\sqrt[4]{mn}}\right)^{-1}=\sqrt[3]{m}\sqrt[4]{mn}=$$

$$=m^{\frac{7}{12}}\,n^{\frac{1}{4}}.$$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-3x^2}}{1-\sqrt{\cos x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2(1+\sqrt{\cos x})}{(1-\cos x)(1+\sqrt{1-3x^2})}=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1+\sqrt{\cos x}}{1+\sqrt{1-3x^2}}=6\lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2=6.$$

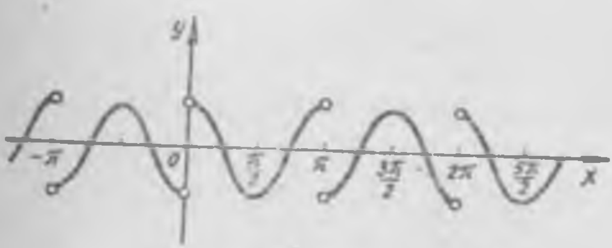
3. $y=||x-2|-1|$. Аввал $y=|x|$ функция графигини ясаймиз. Сўнг $\varphi(x)=|x-2|-1$ функция графигини ясаймиз. У $y=|x|$ функция графигини параллел кўчириш билан ҳосил қилиниши мумкин, бунда координаталар боши $A(2;\ -1)$ нуқтага ўтади. Ниҳоят, $y=|\varphi(x)|$ функция графигини ясаймиз (93- расм).



93- расм.

### 3- вариант 7- М

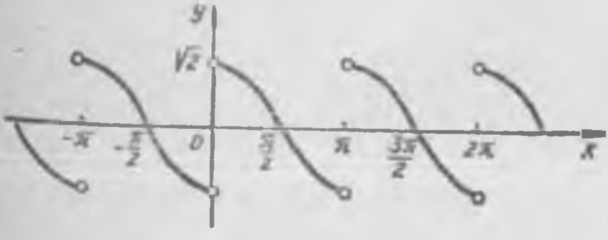
1. $\sqrt[3]{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$. 2. $-\frac{1}{12}$. 3. График 94- расмда тасвирланган.



94- расм.

### 4- вариант 7- М

1. 3. 2. —5,25 3. График 95- расмда тасвирланган.



95- расм.

### *5- вариант*

7- М

1. $\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}$. 2. $\frac{4}{5}$.

### *6- вариант*

7- М

1. $(x-y)^{\frac{2}{3}}$. 2. $\frac{2}{3}$.

### *1- вариант*

5- К

1. $\sqrt{7-\sqrt{x^2-4x+4}}=x-3 \Leftrightarrow \sqrt{7-|x-2|}=x-3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3, \\ \sqrt{9-x}=x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3, \\ x^2-5x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=5.$$

2. $\sqrt{1-2\cos x}=\sin x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geqslant 0, \\ 1-2\cos x=\sin^2 x \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geqslant 0, \\ \cos^2 x-2\cos x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geqslant 0, \\ \cos x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n \in Z.$$

Жавоб: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in Z$.

3. Тенгламанинг иккала қисмини олтинчи даражага кўтарамиз. $x^3+2x^2-7x-24=0$ тенгламани ҳосил қиламиз. $x=3$ унинг ягона ҳақиқий илдизи.

Текшириш берилган тенгламанинг илдизи 3 эканини кўрсатади.

4. $\sqrt{2x+7} > \sqrt{x}+\sqrt{5-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 5, \\ x+1 > \sqrt{5x-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 5. \\ 2x^2-3x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant 5, \\ \left[ \begin{array}{l} x<0,5, \\ x>1 \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} 0 \leqslant x < 0,5 \\ 1 < x \leqslant 5. \end{array} \right.$$

5. Берилган тенгсизлик $\sqrt{\log_2 x}-\frac{1}{4}(1+\log_2 x)>0,5$ га тенг кучли.

$\sqrt{\log_2 x}=t$ алмаштириш киритсак: $t^2-4t+3<0$, $1<t<3$. Демак, берилган тенгсизлик $1<\sqrt{\log_2 x}<3$ тенгсизликка тенг кучли, ундан $2<x<2^9$.

6. $\sqrt{x}-\sqrt{x+9}=y$, $y<0$ бўлсин. У ҳолда $2x+9-$ $-2\sqrt{x^2+9x}=y^2$ ёки $2x-2\sqrt{x^2+9x}=y^2-9$.

Берилган тенгсизлик $y^2-y-2\geqslant 0$ кўринишни қабул қилади. У $y \leqslant -1$, $y \geqslant 2$ тенгсизликлар мажмуасига тенг кучли. $y<0$ бўлгани учун натижада $y \leqslant -1$ ёки $\sqrt{x}-\sqrt{x+9} \leqslant -1$ га эга бўламиз. Бу тенгсизликни ечиб, $0 \leqslant x \leqslant 16$ ни оламиз.

## *2- вариант*

1. Берилган тенглама қуйидагига тенг кучли: $\sqrt{3+|x-1|} = 4-x$. Бунда $4-x \geqslant 0$ бўлганидан, биз икки ҳолни қараймиз: а) $1 \leqslant x \leqslant 4$; б) $x < 1$.

а) ҳолда:
$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 4, \\ \sqrt{x+2} = 4-x \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

б) ҳолда:
$$\begin{cases} x < 1, \\ \sqrt{4-x} = 4-x. \end{cases}$$

Ҳосил қилинган система ечимга эга эмас. Жавоб: $x = 2$.

2. Ушбуга эга бўламиз: $\sqrt{2-\sqrt{3}\sin x} = \sqrt{2}\cos x \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \geqslant 0, \\ 2-\sqrt{3}\sin x = 2\cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi n,\ n \in Z, \\ x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$$

Жавоб: $x = 2\pi n$, $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

3. $\sqrt{2x^2-5x+12}$ ни $t$ орқали белгилаб,
$$\begin{cases} t^2 + t - 12 = 0, \\ t > 0 \end{cases}$$
ни оламиз, бундан $t = 3$. Натижада $\sqrt{2x^2-5x+12} = 3$ тенглама ҳосил бўлади, унинг илдизлари $x = 1$ ва $x = 1{,}5$ сонларидан иборат. Жавоб: $x_1 = 1$, $x_2 = 15$.

4. Берилган тенгсизлик икки система мажмуасига тенг кучли:
$$\begin{cases} x+1 \geqslant 0, \\ 5-x^2 \geqslant (x+1)^2 \end{cases} (1) \text{ ва } \begin{cases} x+1 < 0, \\ 5-x^2 \geqslant 0. \end{cases} (2)$$
$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -1, \\ x^2+x-2 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1.$$
$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ |x| \leqslant \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{5} < x < -1.$$

Шундай қилиб, берилган тенгсизлик ушбу тенгсизликлар мажмуасига тенг кучли:
$$\left[\begin{array}{l} -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\sqrt{5} \leqslant x \leqslant -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow -\sqrt{5} \leqslant x \leqslant 1.$$

Жавоб: $-\sqrt{5} \leqslant x \leqslant 1$.

5. Тенгсизликнинг ҳамма ҳадларини $4^{\sqrt{x}}$ га бўламиз. У ҳолда: $4^{x-\sqrt{x}} + 2^{x-\sqrt{x}} - 6 \leqslant 0$. Энди $2^{x-\sqrt{x}}$ га нисбатан квадрат тенгсиз-

ликни ечиб, $-3 \leqslant 2^{x-\sqrt{x}} \leqslant 2$ ни оламиз, ундан $x-\sqrt{x}-1 \leqslant 0$. Квадрат тенгсизликни $\sqrt{x}$ га нисбатан ечсак,

$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqslant \sqrt{x} \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ олинади, ундан $0 \leqslant x \leqslant \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$.

**6.** Тенгсизликнинг чап қисмини қараймиз:

$$A=\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1};\ A \geqslant 0,\ 1 \leqslant x \leqslant 3.$$

У ҳолда: $A^2=2+2\sqrt{(3-x)(x-1)}$. Бизда $\sqrt{(3-x)(x-1)} \leqslant \leqslant \frac{(3-x)+(x-1)}{2}=1$, шунга кўра $A^2 \leqslant 4$. $A \leqslant 0$ лиги эътиборга олинса, $A \leqslant 2$. Бунда фақат $x=2$ бўлганда $A=2$ бўлади.

Тенгсизликнинг ўнг қисмини қараймиз: $B=3^{2-x}+3^{x-2}>2$. Фақат $x=2$ да $B=2$ бўлади. Шундай қилиб,

$$\begin{cases} A \geqslant B, \\ A \leqslant 2, \\ B \geqslant 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=2, \\ B=2 \end{cases}$$

ни оламиз. Лекин $A=B=2$ фақат $x=2$ да ўринли. Жавоб: $x=2$.

### *3- вариант*

5- Қ

**1.** $x=1$. **2.** $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=-\arccos\frac{2}{3}+2\pi n,\ n\in Z$.
**3.** $x_1=\frac{47}{17}$, $x_2=-\frac{13}{17}$. 4. $x \leqslant -1$, $x \geqslant 3$, $x=1$. 5. $-1<x\leqslant \leqslant 3$. **6.** $x \geqslant 1$.

### *4- вариант*

5- К

1. $x=3$. 2. $x=\pi+2\pi n$, $x=\pi-\arcsin\frac{3}{4}+2\pi n$, $n\in Z$. 3. $x_1= =-1$, $x_2=3$. 4. $x=1$, $4\leqslant x<5$. 5. $x<1$. 6. $x=3$.

### *5- вариант*

5- К

1. $x=1$. 2. $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\arccos\frac{2}{9}+\pi(2n+1)$, $n\in Z$.
3. $x=\frac{1}{2\sqrt{2}}$. 4. $x\geqslant 1$, $x\neq 2$. 5. $1<x<81$. 6. $x\geqslant 0$.

### *6- вариант*

5- К

1. $x=0$. 2. $x=2\pi n, n\in Z$. 3. $x=16$. 4. $2\leqslant x\leqslant 3$ ва $x=-5$.
5. $0<x<1$. 6. $x=5$.

### *1- вариант*

8- М

**1.** $\frac{x^2-2xy+4y^2}{x^2+y^2}=1{,}5$ тенгламадан $y\neq 0$ келиб чиқади. Каср сурати ва махражини $y^2$ га бўлиб, қуйидагини оламиз:

$$\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2-2\left(\frac{x}{y}\right)+3}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}=1{,}5.$$

Ҳосил қилинган тенгламани $\frac{x}{y}$ га нисбатан ечиб, $\frac{x}{y}=1$ ёки $\frac{x}{y}=$ $=-5$ ни топамиз.

2. Янги квадрат тенглама илдизларининг йиғиндиси ва кўпайтмасини топамиз: $(\alpha+2\beta)+(\beta+2\alpha)=3(x+\beta)=6$, $(\alpha+2\beta)(\beta+2\alpha)=5\alpha\beta+2(\alpha^2+\beta^2)=2(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta=7$, чунки Виет теоремаси бўйича

$$\begin{cases}\alpha+\beta=2,\\ \alpha\beta=-1.\end{cases}$$

Янги квадрат тенглама $x^2-6x+7=0$ кўринишга эга бўлади.

3. Икки мусбат соннинг арифметик ўртаси ва геометрик ўртаси ҳақидаги тенгсизликдан фойдаланамиз:

$$2^x+9\cdot2^{2-x}>2\sqrt{2^x\cdot9\cdot2^{2-x}}\ \text{ёки}\ 2^x+9\cdot2^{2-x}>12.$$

Тенглик ишораси $2^x$ ва $9\cdot2^{2-x}$ қўшилувчилар тенг бўлганда ва фақат шу ҳолдагина ўринли бўлади. $2^x=9\cdot2^{2-x}$, бундан $x=\log_2 6$. Шундай қилиб, $x=\log_2 6$ да функциянинг энг кичик қиймати 12 га тенг.

4. Тенгламани

$$\cos x(\cos^2 x+\sin^2 x)+2\sin^3 x=0$$

кўринишда ёзиб, $\sin x$ ва $\cos x$ га нисбатан бир жинсли бўлган учинчи даражали тенгламани ҳосил қиламиз. Уни ечиб, $\mathrm{tg}\,x=-1$, $x=$ $=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$, ни топамиз.

### *2- вариант* 8- М

1. Шарт бўйича $\mathrm{tg}\,\alpha=2$, демак, $\cos\alpha\neq0$. Касрнинг сурат ва махражини $\cos^3 x$ га бўлиб,

$$\frac{\sin^3\alpha+3\sin^2\alpha\cos\alpha}{\cos^3\alpha+\sin^3\alpha}=\frac{\mathrm{tg}^3\alpha+3\,\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^3\alpha}$$

ни оламиз. Касрнинг қиймати $\frac{20}{9}$ га тенг.

2. Виет теоремаси бўйича $\alpha+\beta=2$, $\alpha\cdot\beta=-2$.

$$\alpha^5+\beta^5=(\alpha+\beta)(\alpha^4-\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha\beta^3+\beta^4)=$$
$$=(\alpha+\beta)(\alpha^4+\beta^4-\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)+\alpha^2\beta^2)$$

бўлганидан, масалани ечиш учун $\alpha+\beta$, $\alpha\cdot\beta$, $\alpha^2+\beta^2$ ва $\alpha^4+\beta^4$ ни топиш лозим бўлади. $\alpha+\beta=2$, $\alpha\cdot\beta=-2$, $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-$ $-2\alpha\beta=8$, $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2=56$. Демак, $\alpha^5+\beta^5=$ $=152$.

3. $a^3 + b \geqslant 2\sqrt{a^3b},$ (1)

$a + b^3 \geqslant 2\sqrt{ab^3}.$ (2)

(1), (2) тенгсизликларнинг чап ва ўнг қисмлари мусбат, уларни кўпайтириб,

$(a^3 + b)(a + b^3) \geqslant 4\,a^2\,b^2$ ни оламиз. Тенглик ишораси

$$\begin{cases} a^3 = b, \\ a = b^3 \end{cases} \qquad (3)$$

бўлганда ва фақат шу ҳолдагина бажарилади.

(3) системани ечиб (бунда $a > 0$, $b > 0$ ни ҳам эътиборга олиб), $a = 1$, $b = 1$ ни топамиз.

4. Тенгламанинг иккала қисмини $4^{x^2+3x}$ га бўлсак, берилган тенгламага тенг кучли

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{x^2+3x} + 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+3x} - 3 = 0$$

ҳосил бўлади. Квадрат тенгламани $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+3x}$ га нисбатан ечиб, $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+3x} = 1$ ни оламиз, бундан $x_1 = -3$, $x_2 = 0$.

### *3- вариант* 8- М

1. $\mp 0{,}5$. 2. $a = -1$. 3. $\alpha = \frac{\pi}{4}$. 4. $\frac{9}{7}$.

### *4- вариант* 8-М

1. $-13$. 2. $16x^2 + 16x + 1 = 0$. 3. $a = b = \sqrt{2}$. 4. $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

### *5- вариант* 8- М

1. $-0{,}7$. 2. $a = 1$. 3. $a^5 b + b^5 c + ac^5 \geqslant 3\sqrt[3]{a^6b^6c^6} = 3\,a^2\,b^2\,c^2$.

4. $-0{,}5; \frac{3-\sqrt{13}}{2}$.

### *6- вариант* 8- М

1. 1; $-0{,}6$. 2. $2\frac{4}{7}$. 3. $\frac{x^2+x+4}{x+1} = (x+1) + \frac{4}{x+1} - 1 \geqslant \geqslant 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{4}{x+1}} - 1 = 3$, $x + 1 = \frac{4}{x+1}$, бунда $x = 1$ $(x > 0)$.

4. $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

### *1- вариант* 9- М

1. Иккинчи система ушбу икки система мажмуасига тенг кучли:

$$\text{а)}\ \begin{cases} x = y, \\ 2x + y = 3; \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} y = 0, \\ 2x + y = 3. \end{cases}$$

(1,5; 0) сонлар жуфти б) системанинг ечимидан иборат, лекин у $\begin{cases} x-y=0, \\ 2x+y=3 \end{cases}$ система ечими эмас. Демак, берилган системалар тенг кучли эмас.

2. Системанинг иккинчи ва учинчи тенгламаларини қўшиб ва айириб,

$$x=\frac{a+2}{2},\ y=\frac{2-a}{2}$$

ни оламиз. $x$ ва $y$ учун топилган бу қийматлар системанинг биринчи тенгламасига қўйилса,

$$\frac{a\ (a+2)}{2}+\frac{2-a}{2}=1 \text{ ёки } a^2+a=0,$$

бундан $a=0$, $a=-1$. $a=0$ бўлганда ҳам, $a=-1$ бўлганда ҳам система ўриндош бўлишини текшириб кўриш қийин эмас. Жавоб: $a=0$, $a=-1$.

3. Системадаги иккинчи тенглама $-3$ га кўпайтирилган биринчи тенглама билан 2 га кўпайтирилган иккинчи тенглама йиғиндисига алмаштирилса, берилган тенгламалар системасига тенг кучли

$$\begin{cases} x^2+2y^2-x+2y=6, \\ x=6-4y \end{cases}$$

система ёки

$$\begin{cases} (6-4y)^2+2y^2-(6-4y)+2y=6, \\ x=6-4y \end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Система биринчи тенгламаси икки илдизга эга: $y_1=1$, $y_2=\frac{4}{3}$. Система икки ечимга эга бўлади: (2; 1), $\left(\frac{2}{3};\ \frac{4}{3}\right)$.

### *2-вариант* 9-М

1. Берилган тенгламалар системаси тўртта тенгламалар мажмуасига тенг кучли:

$$\begin{cases} x=y-1, \\ x-4=-x; \end{cases} \begin{cases} x=y-1, \\ y-2x=0; \end{cases} \begin{cases} x=1-y, \\ x-4=-x; \end{cases} \begin{cases} x=1-y, \\ y-2x=0. \end{cases}$$

2. Олдинги уч тенгламани қўшиб, $x+y+z=a+3$ га эга бўламиз. Биринчи, иккинчи ва учинчи тенгламадан кетма-кет $z=a+1$, $x=a-1$, $y=3-a$ ни топамиз. $x$, $y$ ва $z$ нинг топилган қийматлари берилган системадаги охирги тенгламага қўйилса, $a=-8$ олинади. $a=-8$ да система ўриндош бўлишини текшириш қийин эмас. Жавоб: $a=-8$.

3. Система иккинчи тенгламасини 2 га кўпайтириб ва биринчи тенглама билан қўшиб, $(x-y)^2+2\ (x-y)-3=0$ тенгламани оламиз,

бундан $x - y = 1$ ёки $x - y = -3$. Демак, берилган система ушбу икки система мажмуасига тенг кучли бўлади:

$$\text{а)}\ \begin{cases} x - y = 1, \\ x^2y = 4; \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} x - y = -3, \\ x^2y = 0. \end{cases}$$

а) ҳолда битта (2; 1), б) ҳолда икки (0; 3), (— 3; 0) ечим бор. Жавоб: (2; 1), (0; 3), (— 3; 0).

### *3- вариант* 9- М

1. Йўқ. 2. $a = 2$. 3. (1; 1), (— 1; — 1), $\left(2\sqrt{13};\ \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$, $\left(-2\sqrt{13};\ -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

### *4- вариант* 9- М

1. $\begin{cases} x + y = 0, \\ x + y = 2x; \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 0, \\ y + 1 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 2x; \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 1, \\ y + 1 = 0. \end{cases}$

2. $a = 8$. 3. (2; 1), (3; 0).

### *5- вариант* 9- М

1. Ҳа, тенг кучли. 2. $a = 0$, $a = \pm 2$. 3. (1; 1).

### *6- вариант* 9- М

1. $\begin{cases} x + y = 2; \\ x - 2 = y; \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 2, \\ x - 2 = -2y; \end{cases}$ $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ x - 2 = y; \end{cases}$ $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ x - 2 = -2y. \end{cases}$

2. $a = 0$, $a = \frac{4}{3}$. 3. (—1; 1), $\left(\frac{35}{\sqrt[3]{105}};\ -\frac{3}{\sqrt[3]{105}}\right)$

### *1- вариант* 6- К

1. Тенгламани $x^2 + (y - 1)^2 = 9$ кўринишга келтириб ёзамиз. Тенгламанинг графиги маркази $M$ (0; 1) нуқтада жойлашган ва радиуси 3 га тенг бўлган айланадан иборат.

2. Система $a = 2$ да

$$\begin{cases} 3x + y = 3, \\ 2x = 6 \end{cases}$$

кўринишни қабул қилади. Унинг ечими $x = 3$, $y = -6$ сонлар жуфтидан иборат.

$a \neq 2$ бўлсин. Система биринчи тенгламаси билан бериладиган тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти $-(a + 1)$ га тенг, системанинг иккинчи тенгламаси билан бериладиган тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти эса $\frac{2}{a + 2}$ га тенг. Система ечимга эга бўлмаслиги, яъни тўғри чизиқлар параллел бўлиши учун уларнинг бурчак коэффициентлари тенг бўлиши керак: $-(a+1)=\frac{2}{a-2}$, бундан $a_1=0$, $a_2=1$ ни топамиз. $a=0$ да система

$$\begin{cases} x+y=3, \\ 2x+2y=6 \end{cases}$$

кўринишни олади ва чексиз кўп ечимга эга бўлади (тўғри чизиқлар устма-уст жойлашади). $a=1$ да система

$$\begin{cases} 2x+y=3, \\ 2x+y=6 \end{cases}$$

кўринишни қабул қилади ва ечимга эга бўлмайди. Жавоб: $a=1$.
3. $x+y=u$, $xy=v$ алмаштириш

$$\begin{cases} u=2v-1, \\ u^2+v=11 \end{cases}$$

тенгламалар системасига олиб келади,

$$\begin{cases} u=3, \\ v=2; \end{cases} \qquad \begin{cases} u=-3{,}5 \\ v=-1{,}25 \end{cases}$$

сонлар жуфтлари унинг ечимларидан иборат. Ушбу икки

$$\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=-3{,}5, \\ xy=-1{,}25 \end{cases}$$

тенглама мажмуасини ечиб, қуйидагиларни оламиз:

$$\begin{cases} x=2, \\ y=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x=1, \\ y=2; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{-7+\sqrt{69}}{4}, \\ y=\frac{-7-\sqrt{69}}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{-7-\sqrt{69}}{4}, \\ y=\frac{-7+\sqrt{69}}{4}. \end{cases}$$

4. $x$, $y$, $z$ — мос тартибда I, II ва III қурилмаларнинг унумдорлиги бўлсин. У ҳолда

$$\begin{cases} x+y+z=2(x+y), \\ 3(x+z)=18 \end{cases}$$

системага эга бўламиз. $\frac{y}{x}=t$, $\frac{z}{x}=v$ ни белгилаб,

$$\begin{cases} 1+t+v=2+2t, \\ 1+v=6t \end{cases}$$

ни ҳосил қиламиз, бундан $t=\frac{2}{5}$, яъни $\frac{y}{x}=\frac{2}{5}$. Демак, иккинчи қурилма унумдорлиги биринчининг унумдорлигининг 40 % ини ташкил қилади.
5. Тенгламадан ушбу келиб чиқади: $3x=x+\pi n$, $n\in Z$, ёки $x=$

$= \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. Лекин $n = 2k + 1$, $k \in Z$, да $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$ сонлар тенгламанинг ечими эмас. $n = 2k$ да $x = \pi k$, $k \in Z$, сонлар ҳосил бўлади, улар берилган тенглама илдизларидан иборат. Жавоб: $x = \pi k$, $k \in Z$.

6. Системанинг иккинчи тенгламасидан $xy \geqslant 25$ келтириб чиқарилади. Лекин $y = 10 - x$, яъни $x(10 - x) \geqslant 25$, бундан $(x - 5)^2 \leqslant 0$ ва, демак, $x = 5$. Энди $y = 5$, $z = 0$ ни топамиз.

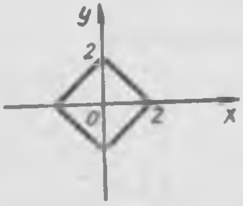
Топилган ечимнинг тўғрилигига текшириш йўли билан ишонч ҳосил қиламиз. Жавоб: (5; 5; 0).

## *2- вариант*

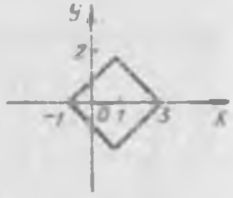
**6- К**

4. $|x - 1| + |y| = 2$ (1) тенгламанинг графиги $|x| + |y| = 2$ (2) тенглама графигини $\vec{r}$ (1; 0) параллел кўчириш орқали, яъни координаталар бошини $M$ (1; 0) нуқтага ўтказадиган кўчириш орқали олиниши мумкин.

(2) тенглама $y$ ни $-y$ га ва $x$ ни $-x$ га алмаштирганда ўзгармайди, шунинг учун (2) тенгламанинг графиги $Ox$ ва $Oy$ ўқларга нисбатан симметрик. Демак, (2) тенглама графигини олдин фақат I чоракда ясаш (бунда $x \geqslant 0$ ва $y \geqslant 0$ бўлиб, тенглама $x + y = 1$ кўринишни олади), сўнг уни II чоракда $Oy$ ўққа нисбатан ва III ва IV чоракларда $Ox$ ўққа нисбатан кетма-кет акслантириш мумкин. (2)



96- расм.



97- расм

тенглама графиги 96- расмда, (1) тенглама графиги эса 97- расмда тасвирланган.

2. Агар система тенгламалари билан бериладиган тўғри чизиқлар устма-уст тушса, система чексиз кўп ечимга эга бўлади.. $b = 1$ да тўғри чизиқлар ҳар хил, шунинг учун $b \neq 1$ бўлган ҳолни қараймиз. Бу ҳолда тўғри чизиқлар устма-уст тушиши учун уларнинг бурчак коэффициентлари тенг бўлиши керак. Шунга кўра:

$$\frac{1}{b - 1} = -\frac{b + 2}{2}.$$

Тенгламани ечиб, $b_1 = 0$, $b_2 = -1$ ни топамиз. $b = 0$ бўлганда тўғри чизиқлар устма-уст тушади. Жавоб: $b = 0$.

3. Системанинг биринчи тенгламаси $x$ ва $y$ га нисбатан учинчи даражали бир жинсли тенгламадан иборат. ($x$; 0) кўринишдаги ҳеч қан-

дай сонлар жуфти системанинг ечими бўлмаганлигидан $x^3 + 2x^2y - 3y^3 = 0$ тенгламанинг барча ҳадларини $y^3$ га бўлиб,

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3 = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз, бундан $\frac{x}{y} = 1$ ни топамиз.

$$\begin{cases} x = y, \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

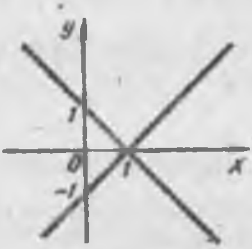
тенгламалар системаси берилган системага тенг кучли. Унинг ечимлари (1; 1) ва (— 1; — 1) дан иборат.

4. $v_1$ ва $v_2$ — пиёдалар тезлиги, $s$ — $A$ ва $B$ орасидаги масофа бўлсин. Масаланинг шартидан

$$\begin{cases} \frac{s}{2v_1} = \frac{s-15}{v_2}, \\ \frac{s}{2v_2} = \frac{s-8}{v_1} \end{cases}$$

келиб чиқади. Системани ушбу кўринишда қайтадан ёзамиз:

$$\begin{cases} \frac{v_2}{v_1} = \frac{2(s-15)}{s}, \\ \frac{v_2}{v_1} = \frac{s}{2(s-8)}. \end{cases}$$



98- расм.

Ўнг қисмларни тенглаштириб,

$$\frac{2(s-15)}{s} = \frac{s}{2(s-8)}$$

ни оламиз, бундан $s = 24$. Лекин у ҳолда $\frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{4}$ бўлади. Изланаётган $s - s \cdot \frac{v_2}{v_1}$ катталик 6 км га тенг.

5. Тенгламадан $3x = \pi n$ ёки $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$, келиб чиқади. Лекин, $n = 3k$, $x \in Z$, да $x = \pi k$ кўринишдаги сонлар ҳосил бўлиб, уларда тенгламаларнинг ҳам чап, ҳам ўнг қисмлари маънога эга бўлмайди. $n = 3k \pm 1$ да $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$ ни оламиз. Жавоб: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

6. $z = x^2 + 4y^2 + 8$ ни $6x + 4y - z > 2$ тенгсизлигига қўйиб, $(x-3)^2 + (2y-1)^2 \leqslant 0$ ни ҳосил қиламиз. Бундан $x = 3$, $y = \frac{1}{2}$ чиқади. Системанинг биринчи тенгламасидан $z = 18$ ни топамиз. Жавоб $\left(3; \frac{1}{2}; 18\right)$.

### *3- вариант* 6- Қ

1. 98- расм. 2. $m \neq 1$, $m \neq -3$. 3. (1; 2), (2; 1), (1; — 4), (—4; 1). 4. 50 %. 5. $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. 6. (1; 1; 1).

### *4- вариант* 6- К

1. Маркази (2; 0) ва радиуси 1 бўлган айлана. 2. $a = 0$. 3. (1; 1), (— 1; — 1). 4. 4 с. 5. Ечими йўқ. 6. (2; 1; — 3).

### *5- вариант* 6- К

2. $b = 1$, $b = -1$. 3. (2; 1), (1; 2). 4. 8 с. 5. $\frac{\pi}{2} n$, $n \in Z$. 6. $\left(3; \frac{3}{2}; 2\right)$.

### *6- вариант* 6- К

2. $m \neq 2$, $m \neq -1$. 3. (1; 1), (— 1; — 1). 4. $\frac{5}{7}$. 5. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. 6. (2; 1; 4).

### *1- вариант* 10-М

1. Иккинчи тенгламани $\frac{2}{3}$ га кўпайтириб, $\left(t; \frac{5-4t}{2}\right)$, бунда $t \in R$, кўринишдаги чексиз кўп ечимга эга бўлган, битта $4x + 2x = 5$ тенгламага тенг кучли

$$\begin{cases} 4x + 2y = 5, & (1) \\ 4x + 2y = 5 & (2) \end{cases}$$

тенгламалар системасини оламиз. (1) ва (2) тўғри чизиқлар устма-уст тушади. Жавоб: $\left(t; \frac{5-4t}{2}\right)$, $t \in R$.

2. Системанинг биринчи тенгламасини $-2$ га кўпайтириб, иккинчи тенгламага ҳадма-ҳад қўшилса, $-3$ га кўпайтириб, учинчи тенгламага қўшилса, берилган системага тенг кучли система ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ y - 4z = 5, \\ -y + 2z = -3. \end{cases}$$

Ҳосил қилинган системанинг иккинчи тенгламаси учинчи тенгламага ҳадлаб қўшилса, берилган системага тенг кучли

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ y - 4z = 5, \\ z = -1 \end{cases}$$

система олинади, бундан кетма-кет $z = -1$, $y = 1$, $x = 1$ ни топамиз. Жавоб: (1; 1; — 1).

3. Система биринчи тенгламасини квадратга кўтариб, қуйидагини оламиз:

$$\begin{cases} x + 4\sqrt{xy} + 4y = 16xy, \\ x + 4y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2\sqrt{xy} = 8xy, \\ x + 4y = 2. \end{cases}$$

Охирги системанинг биринчи тенгламаси $\sqrt{xy}$ га нисбатан квадрат тенгламадан иборат. Уни ечиб, $\sqrt{xy} = 0{,}5$ ни топамиз. Ушбу тенгламалар системасини оламиз:

$$\begin{cases} xy = 0{,}25, \\ x + 4y = 2. \end{cases}$$

Бунинг $\left(1; \frac{1}{4}\right)$ ечими берилган система ечими бўлади. Жавоб: (1; 0,25).

## 2- вариант 10- М

1. Система иккинчи тенгламасини $-2$ га кўпайтирилган биринчи тенгламага ҳадлаб қўшиб, берилган системага тенг кучли системани оламиз:

$$\begin{cases} 2\,(4 - m^2)\,x = m - 2, \\ 8x + 2y = m. \end{cases}$$

Уч ҳолни қараймиз: а) $m = 2$; б) $m = -2$; в) $m \neq \pm 2$.

а) ҳолда

$$\begin{cases} 0 \cdot x = 0, \\ 4x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 4x + y = 1$$

ни ҳосил қиламиз. Система $(t;\ 1 - 4t)$ кўринишидаги чексиз кўп ечимларга эга бўлади, бунда $t \in R$.

б) ҳолда ечимга эга бўлмаган система ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} 0 \cdot x = -4, \\ 4x + y = -1. \end{cases}$$

в) ҳолда ушбу натижани оламиз:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{4 + 2m}, \\ y = \dfrac{m^2 + 2m + 4}{4 + 2m}. \end{cases}$$

Жавоб: $m = 2$ да ечим чексиз кўп: $(t;\ 1 - 4t)$, $t \in R$; $m = -2$ да ечим йўқ; $m \neq \pm 2$ да ечим битта:

$$\left(-\frac{1}{4-2m};\ \frac{m^2 + 2m + 4}{4 + 2m}\right).$$

2. (1; $-1$; 1).

3. Шартга қараганда $x \neq 0$, $y \neq 0$ ва $x$ билан $y$ бир хил ишорага эга бўлиши керак.

Агар $x > 0$, $y > 0$ бўлса, $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ бўлади ва система

$$\begin{cases} x + 3\sqrt{x}\sqrt{y} = 2, \\ 2\sqrt{x}\sqrt{y} - y = 3 \end{cases} \qquad (1)$$

кўринишни қабул қилади. (1) система биринчи тенгламасини 3 га кўпайтириб, — 2 га кўпайтирилган иккинчи тенгламага қўшсак, (1) система натижасидан иборат тенглама ҳосил бўлади:

$$3x + 5\sqrt{x}\sqrt{y} + 2y = 0 \ (x > 0;\ y > 0). \qquad (2)$$

Равшанки, (2) тенглама ечимга эга бўлмайди. Демак, (1) система ҳам ечимга эга эмас.

Агар $x < 0$, $y < 0$ бўлса, у ҳолда $\sqrt{xy} = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-y}$ бўлади. $-x = x_1$, $-y = y_1$ деб белгилаб,

$$\begin{cases} -x_1 + 3\sqrt{x_1}\sqrt{y_1} = 2, \\ 2\sqrt{x_1}\sqrt{y_1} + y_1 = 3 \end{cases} \qquad (3)$$

тенгламалар системасини оламиз. Бу системани ечсак:

$$\text{а)} \begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 1; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{7}, \\ y_1 = \dfrac{9}{7}. \end{cases}$$

Жавоб: $(-1;\ -1)$, $\left(-\frac{4}{7};\ -\frac{9}{7}\right)$.

### 3- вариант 10- М

1. Ечим йўқ. Тўғри чизиқлар параллел. 2. $(-1;\ 1;\ 1)$.
3. $(1;\ 16)$, $(8{,}5;\ 8{,}5)$.

### 4- вариант 10- М

1. $m = 1$ да ечим чексиз кўп: $(1 - 2t;\ t)$, $t \in R$; $m = -2$ да ечим чексиз кўп: $(t + 1;\ t)$, $t \in R$. $m \neq 1$, $m \neq -2$ да ечим битта: $(1;\ 0)$. 2. $(1;\ 1;\ 1)$. 3. $(1;\ 1)$.

### 5- вариант 10- М

1. $(-1;\ 1)$. 2. $(1;\ -1;\ -1)$. 3. $(1;\ 9)$, $\left(\frac{25}{9};\ \frac{49}{9}\right)$.

### 6- вариант 10- М

1. $m = 1$ да ечим йўқ; $m = -1$ да ечим чексиз кўп: $(t - 1;\ t)$, $t \in R$; $m \neq \pm 1$ да ечим битта: $\left(\frac{1}{m-1};\ \frac{1}{1-m}\right)$. 2. $(-1;\ -1;\ 1)$.
3. $(-4;\ -1)$

### *1- вариант* 11- М

1. $\begin{cases} 3^{x+1}\cdot 2^{y} = \frac{1}{9}, \\ y - x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x+1}\cdot 2^{x+3} = 3^{-2}, \\ y = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6^{x} = 6^{-3}, \\ y = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ y = 0. \end{cases}$

Жавоб: $(-3;\ 0)$.

2. Иккинчи тенгламадан $\mathrm{tg}\,y = 0{,}5 + \cos x$ ни топиб, биринчи тенгламага қўямиз:

$$2\sin^2 x\ (0{,}5 + \cos x) = 1{,}5,$$
$$2\ (1 - \cos^2 x)\ (0{,}5 + \cos x) = 1{,}5,$$
$$8\cos^3 x + 4\cos^2 x - 8\cos x + 2 = 0.$$

$2\cos x = t$ алмаштиришни қўлланиб, тенгламани $z^3 + z^2 - 4z + 2 = 0$ кўринишга келтирамиз, бундан $z_1 = 1$, $z_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}$. Демак, $\cos x = \frac{1}{2}$ ёки $\cos x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$. $0 \leqslant x \leqslant \pi$ бўлганидан $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \arccos \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$. Берилган системанинг иккинчи тенгламасига $x = \frac{\pi}{3}$ ни қўйиб, $\mathrm{tg}\,y = 1$ ни топамиз, ва $\pi \leqslant y \leqslant 2\pi$ бўлгани учун $y = \frac{5\pi}{4}$ бўлади. Шунга ўхшаш, агар $x = \arccos \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ бўлса, у ҳолда $y = \pi + \mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ бўлишини аниқлаймиз. Жавоб: $\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{5\pi}{4}\right)$, $\left(\arccos \frac{\sqrt{3} - 1}{2};\ \pi + \mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. $x > 0$, $y > 0$ бўлганидан $\log_2 x^2 \geqslant \log_4 y$ тенгсизлик $\log_2 y \leqslant 4\log_2 x$ (1) тенгсизликка тенг кучли. Системанинг биринчи тенгламасидан

$$\log_2 y = \frac{1}{2}\,(1 + 16\log_2^2 x) \qquad (2)$$

ни топамиз. (2) дан $\log_2 y$ нинг қийматини (1) га қўйиб,

$$\frac{1}{2}\,(1 + 16\log_2^2 x) \leqslant 4\log_2 x$$

тенгсизлигини ҳссил қиламиз. Сўнгра $(4\log_2 x - 1)^2 \leqslant 0$, $x = \sqrt[4]{2}$. (1) дан $y = 2$ ни топамиз. Жавоб: $(\sqrt[4]{2};\ 2)$.

### *2- вариант* 11- М

1. $(x;\ y)$ сонлар жуфти берилган система ечими бўлсин. У ҳолда $x > 0$, $y > 0$, $x \neq 1$ бўлиши равшан. Биринчи тенгламанинг иккала қисмини $x$ асос бўйича логарифмлаб, $\log_x y$ га нисбатан квадратик бўлган ушбу тенгламани оламиз:

$$(1 - 0{,}2 \log_x y) \log_x y = \frac{4}{5}. \qquad (1)$$

Уни ечиб, $\log_x y = 1$ ёки $\log_x y = 4$ ни топамиз, бундан $y = x$ ёки $y = x^4$.

Агар $y = x$ бўлса, берилган системанинг иккинчи тенгламаси

$$2 + \log_x \left(1 - \frac{3}{x}\right) = \log_x 4 \qquad (2)$$

кўринишни олади. (2) тенгламани ечиб, $x = 4$ ни топамиз. Шундай қилиб, (4; 4) — берилган система ечимларидан бири.

Агар $y = x^4$ бўлса, берилган системанинг иккинчи тенгламаси ечимга эга бўлмайди. **Жавоб:** (4; 4).

2. Система иккинчи тенгламасини

$$\cos 2y = -1 - \sin x \qquad (1)$$

кўринишида қайтадан ёзамиз. Шарт бўйича $0 \leqslant x \leqslant \pi$, шунга кўра $\sin x \geqslant 0$ ва (1) тенглама фақат $\sin x = 0$, яъни $x = 0$ ёки $x = \pi$ бўлсагина бажарилади. Агар $x = 0$ бўлса, $y = \frac{5\pi}{2}$ бўлади ва $\pi \leqslant y \leqslant 2\pi$ шарт бажарилмайди. Агар $x = \pi$ бўлса, у ҳолда $y = \frac{3\pi}{2}$ ва $\pi \leqslant y \leqslant 2\pi$ шарт бажарилади. **Жавоб:** $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

3. Система биринчи тенгламасидан $2^x = 5 + 4y\ (y + 2)$ ни топамиз. $2^{x-2} - y \leqslant 1$ тенгсизликдан $2^x \leqslant 4\ (y + 1)$ ни аниқлаймиз. Демак, $5 + 4y\ (y + 2) \leqslant 4\ (y + 1)$ ёки $(2y + 1)^2 \leqslant 0$, бундан $y = -0{,}5$. **Жавоб:** (1; —0,5).

### *3- вариант* 11- М

1. (4; 2). 2. $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right)$. 3. $(2; \sqrt{2})$.

### *4- вариант* 11- М

1. (4; 1). 2. $\left(2\pi; \frac{\pi}{2}\right)$. 2. (1; 3).

### *5- вариант* 11- М

1. (1; 1), (4; 2). 2. $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right)$. 3. $(\sqrt[3]{2}; 2)$.

### *6- вариант* 11- М

1. (4; 2), (— 4; — 2), (4; 0,5), (— 4; —0,5), (0,25; 2), (—0,25, — 2), (0,25; 0,5), (— 0,25; — 0,5).

2. $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right), \left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. 3. (0,5; 0,5).

1. Тенгламани қуйидаги кўринишда қайтадан ёзамиз:

$$\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}=\frac{5}{6},\quad \frac{1}{yz}+\frac{1}{xy}=\frac{2}{3},$$

сўнг $\frac{1}{yz}=a$, $\frac{1}{xz}=b$, $\frac{1}{xy}=c$ алмаштиришлар ёрдами билан ушбу чизиқли тенгламалар системасини оламиз:

$$\begin{cases} a+b=\frac{1}{2},\\ b+c=\frac{5}{6},\\ a+c=\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Ҳосил қилинган тенгламаларни қўшиб, $a+b+c=1$ ни ва бундан $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{3}$, $c=\frac{1}{2}$ ларни топамиз. Тенгламалар системаси ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} xy=2,\\ xz=3,\\ yz=6. \end{cases}$$

Ҳосил бўлган тенгламаларни кўпайтириб, $xyz=\pm 6$ га эга бўламиз. Агар $xyz=6$ бўлса, у ҳолда $x=1$, $y=2$, $z=3$; агар $xyz=-6$ бўлса, у ҳолда $x=-1$, $y=-2$, $z=-3$ бўлади. **Жавоб**: (1; 2; 3), (− 1; − 2; − 3).

2. $\log_9 x=\log_3\sqrt{x}$ бўлгани учун биринчи тенгламани потенцирлаб, берилган системага тенг кучли

$$\begin{cases} \sqrt{x}\,(1+\sqrt{x+y})=3,\\ x^2\,(x+y)=4 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Иккинчи тенгламадан $x+y=\frac{4}{x^2}$ ни топиб, система биринчи тенгламасига қўямиз:

$$\begin{cases} \sqrt{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)=3,\\ x^2\,(x+y)=4. \end{cases}$$

Система биринчи тенгламасини $x-3\sqrt{x}+2=0$ кўринишга келтирамиз, ундан $\sqrt{x}=1$, $\sqrt{x}=2$, ёки $x_1=1$, $x_2=4$. Энг охири қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{cases} x=1,\\ y=3; \end{cases}\quad \begin{cases} x=4,\\ y=-\frac{15}{4}. \end{cases}$$

**Жавоб:** (1; 3), $\left(4; -\frac{15}{4}\right)$.

3. Система иккинчи тенгламасини

$$\cos x+\sin 2y-\sin\frac{\pi}{3}=0$$

кўринишда қайтадан ёзамиз.

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

формуладан фойдаланиб, қуйидагини оламиз:

$$\cos x+2\sin\left(y-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right)=0. \qquad (1)$$

Берилган системанинг биринчи тенгламасидан

$$y+\frac{\pi}{6}=x \qquad (2)$$

га эга бўламиз. Демак, (1) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\cos x+2\sin\left(y-\frac{\pi}{6}\right)\cos x=0. \qquad (3)$$

(3) тенглама ушбу тенгламалар мажмуасига тенг кучли:

а) $\cos x=0$; б) $1+2\sin\left(y-\frac{\pi}{6}\right)=0$.

а) ҳолда қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\begin{cases}\cos x=0,\\ x-y=\frac{\pi}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\\ y=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

б) ҳолда $\sin\left(y-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$ ни оламиз, бундан

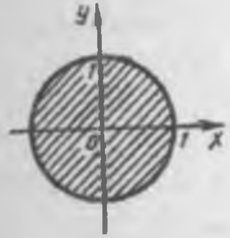
$$\left[\begin{array}{l}y-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\\ y-\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}+2\pi n\end{array}\right.\quad \text{ёки}\quad \left[\begin{array}{l}y=2\pi n,\\ y=\frac{4\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

$x=y+\frac{\pi}{6}$ ни ҳисобга олиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

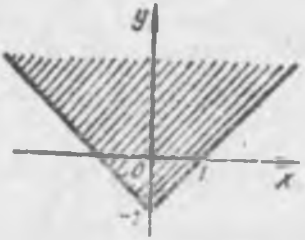
$$\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\\ y=2\pi n;\end{cases}\qquad \begin{cases}x=\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\\ y=\frac{4\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

**Жавоб:** $\begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+\pi n, \\ y=\frac{\pi}{3}+\pi n; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+2\pi n, \\ y=2\pi n. \end{cases}$

Жавобни яна бундай ҳам ёзиш мумкин: $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ 2\pi n\right)$, $n\in Z$.

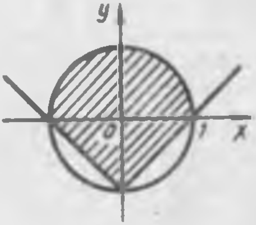


99- расм.



100- расм.

4. Биринчи тенгсизликнинг ечимлар тўплами — маркази координаталар бошида жойлашган, радиус 1 га тенг доира (99-расм). Иккинчи тенгсизликнинг ечимлар тўплами 100- расмда штрихлаб кўрсатилган бурчак. Системанинг ечимлар тўплами олинган тўпламлар кесишмасидан иборат (101- расм). Ҳосил қилинган фигуранинг юзи ярим доиранинг $\frac{\pi}{2}$ га тенг юзи билан учбурчакнинг 1 га тенг юзи йиғиндисига тенг. **Жавоб:** $\frac{\pi+2}{2}$.



101- расм.

5. Система иккинчи тенгламасидан $y=1+x$ ни биринчи тенгламага қўйиб, $\sqrt{x}$ га нисбатан

$$x-\sqrt{x}-a+1=0 \qquad (1)$$

квадрат тенгламани ҳосил қиламиз. Унинг $D=4a-3$ дискриминанти $a\geqslant\frac{3}{4}$ да номанфий. $a$ нинг шу қийматларида

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x} = \dfrac{1+\sqrt{4a-3}}{2}, \\ \sqrt{x} = \dfrac{1-\sqrt{4a-3}}{2}\end{array}\right. \qquad (2)$$

га эга бўламиз. (2) мажмуа $a = \frac{3}{4}$ ва $\frac{1-\sqrt{4a-3}}{2} < 0$ бўлганда, яъни $a > 1$ да ягона ечимга эга бўлади.

Жавоб: $a = \frac{3}{4}$, $a > 1$.

## 2- вариант 7- К

1. (1; 2: 3; 4).

2. Системанинг биринчи тенгламасидан $y \leqslant x$ (1) бўлиши келиб чиқади. Система биринчи тенгламасининг иккала қисмини квадратга кўтарамиз. У ҳолда: $x^2 - 3y = x^2 - 2xy + y^2$ ёки

$$3y - 2xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}y = 0, & (2)\\ y = 2x - 3. & (3)\end{array}\right.$$

(2) ни ҳисобга олиб, $\begin{cases}x = \log_2 3{,}5\\ y = 0\end{cases}$ га эга бўламиз, бунинг устига (1) шарт ҳам бажарилади. (3) дан фойдаланиб, $2^{x+1} - 6 = 2^{2x-3}$ тенгламани ҳосил қиламиз, у $x_1 = 2$ ва $x_2 = \log_2 12$ илдизларга эга. Агар $x = 2$ бўлса, $y = 1$ бўлади. (1) ва (3) дан $x \leqslant 3$ келиб чиқади, ҳамда $\log_2 12 > 3$, у ҳолда $x_2 = \log_2 12$ ни ташлаб, ($\log_2 3{,}5$; 0) ва (2; 1) сонлар жуфтлари берилган системанинг ечимларидан иборат, деган хулосага келамиз. Жавоб: ($\log_2 3{,}5$; 0), (2; 1).

3. Системанинг биринчи тенгламасидан $\cos x \cos y = -3 \sin x \sin y$ ни оламиз. Демак, берилган система ушбу тенгламалар системасига тенг кучли:

$$\begin{cases}\cos x \cos y = \dfrac{3}{4}, & (1)\\ \sin x \sin y = -\dfrac{1}{4}. & (2)\end{cases}$$

(1) тенгламадан (2) тенгламани айириб ва уларни қўшиб,

$$\begin{cases}\cos(x+y) = 1,\\ \cos(x-y) = \dfrac{1}{2}\end{cases}$$

ни оламиз. Бу система ушбу икки система мажмуасига тенг кучли:

$$\text{а)}\ \begin{cases}x + y = 2\pi n,\\ x - y = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\end{cases} \qquad \begin{cases}x + y = 2\pi n,\\ x - y = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\end{cases}$$

бунда $n \in Z$, $k \in Z$.

а) ҳолда қуйидагини оламиз:

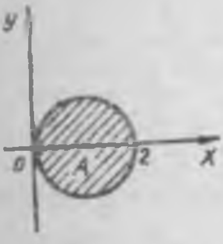
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \pi(n+k), \\ y = -\frac{\pi}{6} + \pi(n-k). \end{cases}$$

б) ҳолда қуйидагини оламиз:

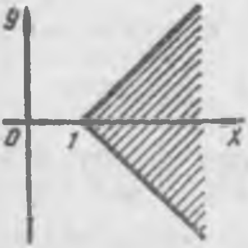
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \pi(n-k), \\ y = \frac{\pi}{6} + \pi(n-k), \; n \in \mathbf{Z}, \; k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Жавоб: $\left(\frac{\pi}{6} + \pi(n+k); -\frac{\pi}{6} + \pi(n-k)\right)$,

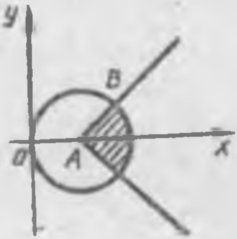
$$\left(-\frac{\pi}{6} + \pi(n+k); \frac{\pi}{6} + \pi(n-k)\right), \; n \in \mathbf{Z}, \; k \in \mathbf{Z}.$$



102- расм.



103- расм.



104- расм.

4. $x^2 + y^2 \leqslant 2x$ тенгсизликни $(x-1)^2 + y^2 \leqslant 1$ кўринишда ёзиш мумкин, шунинг учун унинг ечимлар тўплами маркази A (1; 0) нуқтада ва радиуси 1 бўлган доирадан иборат (102- расм). $|y| + 1 \leqslant x$ тенгсизликнинг ечимлар тўплами 103- расмда тасвирланган бурчак. Бу тўпламлар кесишмаси (104- расм), яъни $BAC$ сектор системанинг ечимлар тўпламидан иборат. Секторнинг марказий бурчаги 90° га, радиуси эса 1 га тенглигидан, унинг юзи $\frac{\pi}{4}$ га тенг.

5. Қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{cases} y - x = 0, \\ y = \sqrt{x-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x, & (1) \\ x = \sqrt{x-a}. & (2) \end{cases}$$

(2) тенгламага ушбу системага тенг кучли:

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 = x - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, & (3) \\ x^2 - x + a = 0. & (4) \end{cases}$$

(4) тенгламанинг $D = 1 - 4a$ дискриминанти $a \leqslant \frac{1}{4}$ да номанфий. $a$ нинг шу қийматларида:

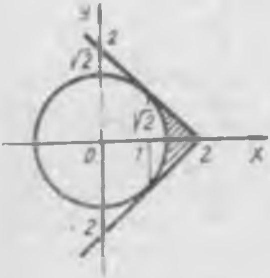
$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}, \\ x = \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}. \end{array}\right.$$

(3) шартни эътиборга олиб, агар $\frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2} < 0$, яъни $a < 0$ ва агар $a = \frac{1}{4}$ бўлса, (4) тенглама, демак, берилган система ҳам ягона ечимга эга бўлади, деган хулосага келамиз.

Жавоб: $a < 0$, $a = \frac{1}{4}$.

### 3- вариант 7- К

1. (3; 2; 1; 0). 2. (1; 3). 3. $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{3} - \pi n\right), \left(\frac{5\pi}{6} + \pi n; -\pi n\right)$, $n \in Z$. 4. 105- расм. Юз $\frac{4 - \pi}{2}$ га тенг.



105- расм.

5. Системанинг иккинчи тенгламасига $y = \sqrt{1 - x}$ ни қўйиб, уни $\sqrt{1 - x} = a - x$ кўринишда ёзамиз. $\sqrt{1 - x} = t \geqslant 0$ белгилаш киритамиз ва $t^2 - t + a - 1 = 0$ тенглама ҳосил қиламиз, ундан $t = \frac{1 \pm \sqrt{5 - 4a}}{2}$ олинади. $a = \frac{5}{4}$ бўлганда ва $\frac{1 - \sqrt{5 - 4a}}{2} < 0$ бўлганда, яъни $a < 1$ да ечим ягона бўлади. Жавоб: $a = \frac{5}{4}$, $a < 1$.

### 4- вариант 7- К

1. (1; 2; 1). 2. (3; 1). 3. $\left(\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$, бунда $n \in Z$, $k \in Z$. 4. $\frac{\pi}{6}$; (0; 1) марказли, радиуси 1 ва ёйи 60° бўлган доира сектори. 5. $a < 0$, $a = \frac{1}{4}$.

### 5- вариант 7-К

1. (0; −1; 5; 3). 2. $\left(2; \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}; -\frac{3}{16}\right)$. 3. $\left(\frac{\pi}{3} + \pi n; -\frac{\pi}{6} - \pi n\right)$, $n \in Z$. 4. $S = \frac{4 - \pi}{2}$. 5. $a = 0$, $a = \frac{1}{2}$.

### *6- вариант* 7- К

1. (0; 0; 0), (1; — 1; — 1), (— 1; 1; 1). 2. (1; 1). 3. $(2\pi k;\ \pi + 2\pi n)$, $k \in Z$, $n \in Z$. 4. $\frac{\pi}{3}$. Доира маркази (0; 0), радиуси 1 ва ёйи 120° бўлган доиравий сектор. 5. $a = \frac{1}{4}$, $a < 0$.

### *1- вариант* 12- М

1. а) $\frac{z_2}{z_1} = \frac{2i}{3 - i} = \frac{2i(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = -0{,}2 + 0{,}6\,i$; б) $\left(\frac{z_1 + z_2}{3z_2}\right)^8 = \frac{(1 + i)^8}{2^4} = \frac{(2i)^4}{2^8} = \frac{1}{16}$.

2. $x^2 - 4x + 20 = 0$, $(x - 2)^2 = -16$, $x - 2 = \pm 4i$, $x = 2 \pm 4i$. Квадрат тенглама илдизлари формуласидан фойдаланиб ечиш мумкин.
3. Агар

$$\begin{cases} x^2 - 5 = -y, \\ y + 7 = x^2 + 4 \end{cases}$$

шартлар бажарилса, $z_1 = x^2 - 5 + (y + 7)\,i$ ва $z_2 = -y - (x^2 + 4)\,i$ комплекс сонлар қўшма бўлади. Системани ечиб, $x_1 = 2$, $y_1 = 1$; $x_2 = -2$, $y_2 = 1$ ни топамиз. Жавоб: (2; 1), (— 2; 1).
4. $(2n + 1)^2 - 1 = 4n(n + 1)$ бўлади. $n(n + 1)$ кўпайтма 2 га бўлингани учун $4n(n + 1)$ 8 га бўлинади.

### *2- вариант* 12- М

1. а) $\frac{\overline{z_2}}{z_1} = \frac{3i}{1 + 2i} = \frac{3i(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = 1{,}2 + 0{,}6i$; б) $\left(\frac{\overline{z_1} - iz_2}{2Z_2}\right)^6 = \left(\frac{1 - 2i - 3}{2(-3i)}\right)^6 = \frac{(1 + i)^6}{-3^6} = \frac{8}{729}\,i$.

2. $x^2 - 6x + 13 = 0$, $x = 3 \pm \sqrt{9 - 13} = 3 \pm \sqrt{-4} = 3 \pm 2i$.

3. (2; — 1), (2; 1). 4. $A$ — берилган натурал сон бўлсин. Агар $A = 4n$ бўлса, $A^2$ 4 га бўлинади; $A = 4n \pm 1$ бўлса, $A^2$ ни 4 га бўлганда қолдиқда 1 қолади; $A = 4n + 2$ бўлса, у ҳолда $A^2$ 4 га бўлинади.

### *3- вариант* 12-М

1. а) $\frac{3}{17} + \frac{12}{17}\,i$; б) $-\frac{8i}{729}$. 2. $-1 \pm 5i$. 3. (1; 4), (— 1; 4). 4. $(2n + 1)^2 - (2n + 1)^2 = 4(n(n + 1) - m(m + 1)) \vdots 8$.

### *4- вариант* 12-М

1. а) $3 + 4i$; б) $-64$. 2. $-2 \pm 6i$. 3. (2; 2)

### *5- вариант* 12-М

1. а) $-4 + 3i$; б) $-128\,i$. 2. $5 \pm 3i$. 3. (1; 1), (— 1; 1). 4. $(3n \pm 1)^2 - 1 = 9n^2 \pm 6n$ 3 га каррали.

### *6- вариант*

12- М

1. а) $-0{,}4-1{,}2i$; б) $\frac{1}{512}i$. 2. $-4\pm5i$. 3. $\left(-\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; -\sqrt{2}\right)$. 4. $n^2(n^2-1)=(n-1)n(n+1)n$. Учта кетма- кет келувчи $n-1$, $n$ ва $n+1$ натурал сондан биттаси 3 га бӯлинади. Бу ифоданинг 4 га бӯлинишини кӯриш қийин эмас.

### *1- вариант*

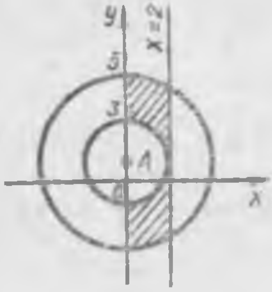
8- К

1. а) $z=2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; б) $Z=1+\cos2\alpha+i\sin2\alpha=$ $=2\cos^2\alpha+2i\sin\alpha\cos\alpha=2\cos\alpha(\cos\alpha+i\sin\alpha)=-2\cos\alpha(\cos(\pi+$ $+\alpha)+i\sin(\pi+\alpha))$. Шарт бӯйича $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ бӯлганидан, $-2\cos\alpha>0$ бӯлади ва, демак, $-2\cos\alpha$ — берилган комплекс соннинг модули, $\pi+\alpha$ эса унинг аргументи.

2. $z_1=\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; $z_2=-\sin\frac{\pi}{24}+i\cos\frac{\pi}{24}=$ $=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{24}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{24}\right)=\cos\frac{13\pi}{24}+i\sin\frac{13\pi}{24}$.

$$z_1z_2=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{13\pi}{24}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{13\pi}{24}\right)\right)=2\left(\cos\frac{17\pi}{24}+i\sin\frac{17\pi}{24}\right);$$

$$(z_1z_2)^8=2^8\left(\cos\frac{17\pi}{3}+i\sin\frac{17\pi}{3}\right)=128(1-i\sqrt{3}).$$



106- расм.

3. Биринчи тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар тӯплами маркази A(0; 1) нуқтада, радиуслари 2 ва 4 га тенг бӯлган ҳалқа. Иккинчи тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар тӯплами чегаралари $x=0$ ва $x=2$ бӯлган тилим. $x=2$ тӯғри чизиқ $x^2+(y-1)^2=4$ айланага уринмадан иборат (106- расм).

4. $|z|=\sqrt{\sin^2 2\alpha+(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=$ $=\sqrt{\sin^2 2\alpha+\sin2\alpha+1}$.

Илдиз остидаги ифоданинг энг катта ва энг кичик қийматларини топамиз. $\sin2\alpha=t$, $-1\leqslant t\leqslant1$ бӯлсин. У ҳолда масала $\varphi(t)=t^2+t+1$ функциянинг $[-1;\ 1]$ даги энг кичик ва энг катта қийматларини топишга келади. **Жавоб:** $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{3}$.

### *2- вариант*

8- К

1. а) $z=1-\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)(\cos\pi+i\sin\pi)$; б) $z=1-\cos2\alpha+$ $+i\sin2\alpha=2\sin\alpha(\sin\alpha+i\cos\alpha)=-2\sin\alpha(-\sin\alpha-i\cos\alpha)=$ $=-2\sin\alpha\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)$.

2. $z_2^{*} = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos -\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\Big)$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{11\pi}{24} + i\sin\frac{11\pi}{24}\right);$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{12} = \frac{1}{2^{12}}\left(\cos\frac{11\pi}{2} + i\sin\frac{11\pi}{2}\right) = -\frac{i}{2^{12}}.$$

3. $z = x + yi$ бўлсин, бунда $x \in R$, $y \in R$. У ҳолда $z - 3 = x - 3 + yi$, $|z - 3| = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Шарт бўйича $\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$, бундан $(x + 1)^2 + y^2 = 4$. **Жавоб:** Маркази $A(-1;\ 0)$ нуқтада, радиуси 2 га тенг бўлган айлана.

4. $|z| = \sqrt{9\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \sqrt{8\sin^2\alpha + 1}$.

$|z|$ нинг энг катта қиймати 3 га, энг кичик қиймати 1 га тенг.

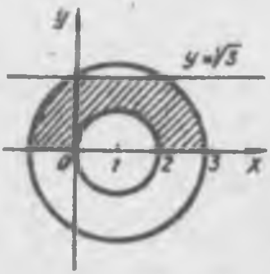
### *3- вариант* 8- К

1. а) $3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$;

б) $-\frac{1}{\cos\alpha}(\cos(\pi - \alpha) + i\sin(\pi - \alpha))$.

2. $64i$. 3. Маркази (1; 0) ва радиуслари 1 ва 2 бўлган ҳалқанинг $y = 0$ ва $y = \sqrt{3}$ оралиғида жойлашган қисми (107- расм).

4. $\max|z| = 1{,}5$, $\min|z| = 0$.



107- расм.

### *4- вариант* 8- К

1. а) $(\sqrt{5} + 1)(\cos 0 + i\sin 0)$;

б) $-2\cos\alpha(\cos(\pi - \alpha) + i\sin(\pi - \alpha))$. 2. $-4096i$. 3. $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ тўғри чизиқ остида жойлашган ярим текислик, унга шу тўғри чизиқ нуқталари ҳам киради. 4. $\max|z| = 3$, $\min|z| = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

### *5- вариант* 8- К

1. а) $(3 - \sqrt{5})(\cos\pi + i\sin\pi)$; б) $-2\sin\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\Big)$. 2. $-2^{18}i$.

3. Марказлари (0; 0), (0; 3) ва радиуслари 2 ва 3 бўлган икки доира кесишмаси. 4. $\min|z| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\max|z| = \sqrt{3}$.

### 6- вариант

8- К

1. а) $(\sqrt{2}-1)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$; б) $-\frac{1}{\sin\alpha}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\right.\right.$ $\left.\left.+\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)$. 2. $-\frac{1}{4096}i$.

3. Маркази $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$ ва радиуси 2,5 бўлган айлана.

4. $\max|z|=3,\ \min|z|=1$.

### 1- вариант

13- М

1. $-i\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right),\ k\in Z$.

$$\sqrt[3]{-i}=\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}=$$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}\right);\ k=0,\ 1,\ 2.$$

Агар $k=0$ бўлса, $\sqrt[3]{-i}=0{,}5(\sqrt{3}-i)$;
агар $k=1$ бўлса, $\sqrt[3]{-i}=i$;
агар $k=2$ бўлса, $\sqrt[3]{-i}=-0{,}5(\sqrt{3}+i)$ бўлади.
Жавоб: $i,\ 0{,}5(\sqrt{3}-i),\ -0{,}5(\sqrt{3}+i)$.
2. $x_1=2,\ x_2=3-2i,\ x_3=3+2i$.
$a(x-2)(x-3+2i)(x-3-2i)=0,\ a\neq 0,\ a\in R$.
Жавоб: $a(x^3-8x^2+25x-26)=0,\ a\neq 0,\ a\in R$. Кейинчалик $a$ кўпайтувчини ташлаймиз).
3. Виет теоремасига мувофиқ: $x_1+x_2+x_3=3,\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\lambda,\quad x_1x_2x_3=2$. $(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$ айниятдан фойдаланамиз. $9=1+2\lambda$, бундан $\lambda=4$. Тенглама $x^3-3x^2+4x-2=0$ кўринишни олади. Уни ечиб, $x_1=1$, $x_{2,3}=1\pm i$ ни топамиз. Жавоб: $\lambda=4,\ x_1=1,\ x_{2,3}=1\pm i$.

### 2- вариант

13- М

1. $\sqrt{1+i\sqrt{3}}=\sqrt{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)\right)}=$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\pi k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi k\right)\right);\ k=0,\ 1.$$

$k=0$ да $\sqrt{1+i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$;

$k=1$ да $\sqrt{1+i\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Жавоб:

$$\pm\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right).$$

2. $x_1 = -1$, $x_2 = 3 + 4i$, $x_3 = 3 - 4i$;
$(x+1)(x-3-4i)(x-3+4i) = 0$. Жавоб: $x^3 - 5x^2 + 19x + 25 = 0$.

3. Виет теоремасига мувофиқ: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = \lambda$, $x_1 x_2 x_3 = 1$. $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1 x_2 x_3 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_2 x_3)$, ёки $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1 x_2 x_3 = (x_1 + x_2 + x_3)((x_1 + x_2 + x_3)^2 - 3(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3))$ формуладан фойдаланиб, $-2 = 1 - 3\lambda$ ни ҳосил қиламиз, бундан $\lambda = 1$. $\lambda = 1$ ни тенгламага қўйсак, $x^3 - x^4 + x - 1 = 0$ бўлади. Тенгламанинг илдизлари: $x_1 = 1$, $x_2 = i$, $x_3 = -i$. Жавоб: $\lambda = 1$; $x_1 = 1$, $x_{2,3} = \pm i$.

### *3- вариант* 13- М

1. $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$, $-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}(1+i)$, $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

2. $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$.

3. $\lambda = 1$; $x_1 = 1$, $x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.

### *4- вариант* 13- М

1. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$. 2. $x^5 - x^3 + 4x^2 - 2x + 4 = 0$. 3. $\lambda = 3$; $x_1 = 1$, $x_{2,3} = 1 \pm 2i$.

### *5- вариант* 13- М

1. $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}(-1+i)$, $-\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$.

2. $x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 14x + 10 = 0$. 3. $\lambda = -1$; $x_1 = -1$, $x_{2,3} = \pm i$.

### *6- вариант* 13-М

1. $\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}\right)\right)$; $k = 0, 1, 2, 3$.
2. $x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 16x^2 + 12x - 4 = 0$.
3. $\lambda = 2$; $x_1 = -1$, $x_{2,3} = 1 \pm i$.

### *1- вариант* 9- К

1. $x = 0$ берилган тенгламанинг илдизи бўлмаганлигидан, берилган тенглама

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 19\left(x + \frac{1}{x}\right) + 25 = 0$$

га тенг кучли. $x + \frac{1}{x} = y$ белгилашни киритиб, $6y^2 - 19y + 13 = 0$ тенгламани оламиз, унинг илдизлари 1 ва $\frac{13}{6}$.

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=1, \\ x+\frac{1}{x}=\frac{13}{6} \end{array}\right.$$

тенгламалар мажмуасини ечиб, берилган тенглама илдизларини топамиз. Жавоб: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

**2.** $z = x + iy$ бўлсин, у ҳолда $\bar{z} = x - iy$, $x \in R$, $y \in R$.

$(x + iy)^2 + x - iy = 0$, ёки $x^2 - y^2 + x + (2xy - y)i = 0$ га эга бўламиз. Комплекс соннинг нолга тенг бўлиш шартидан фойдаланиб, қуйидагини оламиз:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + x = 0, \\ y(2x - 1) = 0. \end{cases}$$

Системани ечиб, қуйидагиларни топамиз: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_2 = -1$, $y_2 = 0$; $x_3 = \frac{1}{2}$, $y_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_4 = \frac{1}{2}$, $y_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Жавоб: $z_1 = 0$, $z_2 = -1$, $z_{3,4} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**3.** $\left(\sin\frac{3\pi}{20} + i\cos\frac{3\pi}{20}\right)^5 = \left(\cos\frac{7\pi}{20} + i\sin\frac{7\pi}{20}\right)^5 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$, у ҳолда $x_1 = 1 + i$. Берилган тенгламага $x = 1 + i$ ни қўйиб, қуйидагини оламиз:

$(1 + i)^3 - (a + 3)(1 + i)^2 + 6a^2(1 + i) + a^2 - 5 = 0$ ёки $7a^2 - 7 + i(6a^2 - 2a - 4) = 0$.

$a \in R$ эканини эътиборга олиб ва комплекс соннинг нолга тенг бўлиш шартидан фойдаланиб,

$$\begin{cases} a^2 = 1, \\ 3a^2 - a - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a = 1 \text{ га}$$

эга бўламиз. $a = 1$ да берилган тенглама

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$$

кўринишни қабул қилади. Уни ечиб, илдизларни топамиз: $2$, $1 + i$, $1 - i$.

**4.** Тенгламанинг иккала қисмини 5 га бўлиб, ушбуни оламиз:

$$\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = \cos 3x.$$

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$ бўлганидан шундай $\alpha$ мавжуд бўладики, унда $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ бўлади. Сўнгра:

$$\cos(x-\alpha)=\cos 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = x-\alpha+2\pi n, \\ 3x = -(x-\alpha)+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\alpha}{2}+\pi n, \\ x = \dfrac{\alpha}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

$\alpha = \arccos\dfrac{4}{5}$ бўлгани учун

$$\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{4}{5}+\pi n, \\ x = \dfrac{1}{4}\arccos\dfrac{4}{5}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

5. $\log_2 3$, $\dfrac{3}{2}$ ва 2 сонлари $f(x)=(2x-3)(2x^2-7x+6)$ функциянинг нолларидан иборат. $\dfrac{3}{2}<\log_2 3<2$ бўлганига кўра тенгсизликни интерваллар усули билан ечиб, қуйидагини оламиз:

$$\left[\begin{array}{l} x<\dfrac{3}{2}, \\ \log_2 3< x< 2. \end{array}\right.$$

6. Тенгламани $2(x+y)+y=7$ (1) кўринишида қайтадан ёзамиз. $x+y=n$ (2) деб белгилаймиз. У ҳолда (1) тенглама $2n+y=7$ (3) кўринишни олади, ундан $y=7-2n$ (4). (2) ва (4) ни эътиборга олиб, $x=n-(7-2n)=3n-7$ ни топамиз.

Шундай қилиб, берилган тенглама ечими барча

$$\begin{cases} x=3n-7, \\ y=7-2n,\ \text{бунда}\ n\in \boldsymbol{Z}, \end{cases}$$

кўринишдаги жуфтлардан иборат.

### *2- вариант* 9- К

1. $-\dfrac{2}{5}$, $-\dfrac{5}{2}$, $\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$

2. $z=x+iy$, $x\in \boldsymbol{R}$, $y\in \boldsymbol{R}$ бўлсин, у ҳолда $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Ушбуга эга бўламиз: $\sqrt{x^2+y^2}-2(x+iy)=-1+2i$, бундан

$$\begin{array}{l} \sqrt{x^2+y^2}-2x=-1, \\ y=-1. \end{array}$$

Системани ечиб, $x=\dfrac{4}{3}$, $y=-1$ ни оламиз. Жавоб: $z=\dfrac{4}{3}-i$.

3. $\left(-\cos\dfrac{11\pi}{12}+i\sin\dfrac{11\pi}{12}\right)^{27}=\left(\cos\left(-\dfrac{11\pi}{12}\right)+i\sin\left(\pi-\dfrac{11\pi}{12}\right)\right)^{27}=$ $=\cos\dfrac{9\pi}{4}+i\sin\dfrac{9\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ бўлганидан $x_1=1-i$ бўлади. $x=1-i$ ни берилган тенгламага қўйиб, $b=-1$ ни оламиз.

$x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0$ тенгламани ечиб, илдизларни топамиз: 3, $1 + i$, $1 - i$.

4. Тенгламанинг иккала қисмини 13 га бўлсак, $\sin(x - \alpha) = \sin 5x$ тенглама ҳосил бўлади, бунда $\alpha = \arccos \frac{5}{13}$, у ҳолда:

$$\left[\begin{array}{l} 5x = x - \alpha + 2\pi n, \\ 5x + x - \alpha = \pi + 2\pi n, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\alpha}{4} + \frac{\pi n}{2}, \\ x = \frac{\alpha}{6} + \frac{\pi(2n+1)}{6} \end{array}\right., \ n \in Z.$$

Жавоб: $-\frac{1}{4}\arccos\frac{5}{13} + \frac{\pi n}{2}$, $\frac{1}{6}\arccos\frac{5}{13} + \frac{\pi}{6}(2n + 1)$, $n \in Z$

5. 1 ва $\frac{3}{2}$ сонлари $2x^2 - 5x + 3$ учҳад илдизларидан иборат. $1 < \log_3 5 < \frac{3}{2}$ бўлганидан тенгсизликни интерваллар усули билан ечиб, қуйидагини оламиз:

$$\left[\begin{array}{l} 1 < x < \log_3 5, \\ x > \frac{3}{2}. \end{array}\right.$$

6. Тенгламани қуйидаги кўринишда қайтадан ёзамиз:

$$2x(y + 1) = 3y^2 + y + 2. \qquad (1)$$

$y = -1$ да (1) тенглик бажарилмайди, шунга кўра унинг иккала қисмини $y + 1$ га бўламиз:

$$2x = \frac{3y^2 + y + 2}{y + 1} \text{ ёки } 2x = 3y + 1 + \frac{1}{y + 1}.$$

$2x$ ва $3y + 1$ — бутун, шунинг учун $\frac{1}{y+1}$ сон ҳам бутун бўлиши керак. Лекин бу $y + 1 = 1$ ёки $y + 1 = -1$ ҳолдагина бўлиши мумкин. Бундан $y = 0$ ёки $y = -2$ ни топамиз. Бутун сонлар жуфтларини ҳосил қиламиз: $x_1 = 1$, $y_1 = 0$; $x_2 = -3$, $y_2 = -2$.

Мулоҳаза бошқача юритилиши ҳам мумкин. Тенгламани $2x(y + 1) - (3y^2 + 4y + 1) = 1$ ёки $2x(y + 1) - (y + 1)(3y + 1) = 1$, $(y + 1)(2x - 3y - 1) = 1$ кўринишда қайтадан ёзамиз, бундан:

$$\begin{cases} y + 1 = 1, \\ 2x - 3y - 1 = 1 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} y + 1 = -1, \\ 2x - 3y - 1 = -1. \end{cases}$$

Жавоб: (1; 0), (−3; −2).

### *3- вариант*

9- К

1. $-\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{2}$, $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. 2. $z = (1 - \sqrt{2})i$. 3. $a = 1$, $x_{1,2} = 1 \pm i$, $x_3 = -3$. 4. $\frac{\pi}{36} + \frac{2\pi}{9}n$, $\frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}n$, $n \in z$. 5. $\frac{2}{3} < x < \log_7 4$. $x > 1$. 6. $(2k;\ 3k - 4)$, бунда $k \in z$.

### *4- вариант* 9- К

1. 2,5; 0,4; $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$. 2. $z=-1+\frac{i}{\sqrt{3}}$. 3. $b=-1$; $x_{1,2}=1\pm i$, $x_3=-2$. 4. $\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}+\pi n$, $-\frac{1}{8}\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$. 5. $x<2{,}5$, $\log_2 6<x<3$. 6. $(0;\ -1)$, $(2;\ -1)$.

### *5- вариант* 9- К

1. $-\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. 2. $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i$. 3. $a=-1$, $x_{1,2}=-1\pm i$, $x_3=-1$. 4. $\frac{\pi}{12}+\pi n$, $-\frac{\pi}{48}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$. 5. $1<x<\log_3 15$, $x>2{,}5$. 6. $(5k;\ 3k)$, $k\in Z$.

### *6- вариант* 9- К

1. $\frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$. 2. $z=-\frac{1}{3}i$. 3. $b=1$; $x_{1,2}=-1\pm i$, $x_3=1$. 4. $\frac{1}{5}\arccos\frac{2}{5}+\frac{2\pi k}{5}$, $-\frac{1}{9}\arccos\frac{2}{5}+\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{9}k$, $k\in Z$. 5. $x<0$, $\log_6 3<x<\frac{2}{3}$. 6. $(2;\ 3)$, $(0;\ 1)$.

### *1- вариант* 10- К

1. $10^5$ дан кичик сонларга 7, 6, 4 рақамларидан тузилган барча бир хонали, икки хонали, уч хонали, тўрт хонали ва беш хонали сонлар киради. Уларнинг сони

$$3+3^2+3^3+3^4+3^5=\frac{3\cdot(3^5-1)}{2}=363 \text{ та.}$$

Тоқ сонлар $1+3+3^2+3^3+3^4=121$ та.

2. Тўрт хонали сонлар миқдори: $P(1;\ 2;\ 1)=\frac{4!}{1!\,2!\,1!}=12$ та. 3 ва 5 сонлари ҳар қайси хонада $P(2;\ 1)=\frac{3!}{2!\,1!}=3$ марта учрайди, 7 сони эса ҳар қайси хонада $P_3=3!=6$ марта учрайди. Шунинг учун барча тўрт хонали сонлар йиғиндиси: $1111\ (3\cdot3+7\cdot6+3\cdot5)=$ $=73326$. 3. Тенглама ушбу системага тенг кучли:

$$\begin{cases}\sin x\geqslant 0,\\ 3\sin 2x+2\cos^2 x=8\sin^2 x.\end{cases}$$

$\sin x$ ва $\cos x$ га нисбатан бир жинсли бўлган

$$4\sin^2 x-3\sin x\cos x-\cos^2 x=0$$

тенгламани ечиб, $\operatorname{tg} x=1$, $\operatorname{tg} x=-0{,}25$ ни оламиз. $\sin x\geqslant 0$ ва $x\in\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$ шартларни назарда тутиб, $x=\pi-\operatorname{arc\,tg} 0{,}25$ ни оламиз. Жавоб: $x=\pi-\operatorname{arctg} 0{,}25$.

4. $n>1$ да қуйидагига эга бўламиз:

$$5^n + 12n + 15 = (4+1)^n + 12n + 15 =$$
$$= (4^n + C_n^1\, 4^{n-1} + C_n^2\, 4^{n-2} + \ldots + C_n^{n-2}4^2 + C_n^{n-1}4 + 1) +$$
$$+ 12n + 15 = (4^n + C_n^1\, 4^{n-1} + \ldots + C_n^{n-2}\, 4^2) + (C_n^{n-1}4 + 1 +$$
$$+ 12n + 15) = (4^n + C_n^1\, 4^{n-1} + \ldots + C_n^{n-2}4^2) + (4n + 1 +$$
$$+ 12n + 15) = 4^n + C_n^1\, 4^{n-1} + \ldots + C_n^{n-2}4^2 + 16n + 16.$$

Ҳар қайси қўшилувчи 16 га бўлинганидан, йиғинди ҳам 16 га бўлинади. $n = 1$ да берилган ифоданинг қиймати 32 га тенг ва бу ҳам 16 га бўлинади.

## *2- вариант* 10- К

1. Ҳар хил учбурчаклар сони 4 элементдан 3 тадан тузилган такрорий комбинациялар сонига тенг:

$$\bar{C}_4^3 = \frac{6!}{3!\,3!} = 20.$$

Шу жумладан ҳар хил томонли учбурчаклар сони 4 элементдан 3 тадан олиб тузилган комбинациялар сонига тенг бўлади, яъни $C_4^3 = 4$. Тенг томонли учбурчаклар 4 та, демак, тенг ёнлилар 12 та.

2. 1000 дан кичик бўлган сонларга 5, 7 ва 3 рақамларидан тузилган бир хонали, икки хонали ва уч хонали сонлар тааллуқли. Улар $3 + 3^2 + 3^3 = 39$ та.

3. Тенглама

$$\begin{cases}\cos x \leqslant 0,\\ 2 + 3\sin x\cos x - 2\cos 2x = \cos^2 x\end{cases}$$

системага тенг кучли. $\sin x$ ва $\cos x$ га нисбатан бир жинсли бўлган

$$4\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$$

тенгламани ечиб, $\operatorname{tg} x = -1$, $\operatorname{tg} x = 0{,}25$ ни оламиз. Лекин $\cos x \leqslant 0$ ва $x \in [0;\ \pi]$ бўлгани учун, энг охир $x = \frac{3\pi}{4}$ ни топамиз.

4. $n \geqslant 2$ да:

$$3^n = (2+1)^n = (2^n + C_n^1\, 2^{n-1} + \ldots + C_n^{n-2}2^2) + (C_n^{n-1}2 + 1),$$
$$5^n = (4+1)^n = (4^n + C_n^1\, 4^{n-1} + \ldots + C_n^{n-1}4) + 1,$$
$$7^n = (6+1)^n = (6^n + C_n^1\, 6^{n-1} + \ldots + C_n^{n-2}6^2) + (C_n^{n-1}6 + 1).$$

Ҳар қайси тенгликнинг ўнг қисмдаги биринчи қўшилувчи 4 га бўлинади, шунга кўра

$$(2\,C_n^{n-1} + 1) + 1 + (6_n^{n-1} + 1) + 1$$

ифоданинг ҳам 4 га бўлинишига ишонч ҳосил қилиш етарли. $(2n + 1) + 1 + (6n + 1) + 1 = 8n + 4$ га эгамиз, у 4 га бўлинади. $n = 1$ да ифода қиймати 16, демак, унинг 4 га бўлиниши равшан.

### *3- вариант* 10-К

1. 120, 40. 2. 59994. 3. $2\pi - \operatorname{arc\,tg} 3$. 4. $(4+1)^n + (4-1)^n + 2\cdot 4$.

### *4- вариант* 10-К

1. 220, 100. 2. 18887. 3. 0.

### *5- вариант* 10-К

1. 340, 85. 2. 888. 3. $\frac{3\pi}{4}$, $\pi - \operatorname{arctg} 2$.

### *6- вариант* 10-К

1. 35; ҳар хил томонлилар 10 та, тенг томонлилар 5 та.
2. $4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 = 340$. 3. $2\pi - \operatorname{arc\,tg} 2{,}5$ 4. $16^n - 4^n - 3n =$ $= (15+1)^n - (3+1)^n - 3n$.

### *1- вариант* 14-М

1. 40 деталдан 4 таси $C_{40}^4$ усул билан танланиши мумкин. Нуқсонсиз 4 детални танлаш эҳтимоли $\frac{C_{35}^4}{C_{40}^4} \approx 0{,}573$ га тенг.

2. Бизни $A$ ҳодиса — «терма командадан танланган шахматчи гроссмейстер» қизиқтиради. Икки ҳодисани қараймиз: $X_1$ — «биринчи командадан танланган шахматчи», $X_2$ — «иккинчи командадан танланган шахматчи». Бу ҳодисалар бир вақтда рўй бермайди ва $X_1 \cup X_2 = U$, бунда $U$ — ишончли ҳодиса. Бундан ташқари, масаланинг шартидан $P(X_1) = 0{,}8$, $P(X_2) = 0{,}2$, $P(A|X_1) = 0{,}7$, $P(A|X_2) = 0{,}4$ келиб чиқади. Тўлиқ эҳтимол формуласидан фойдаланиб,

$$P(A) = 0{,}8\cdot 0{,}7 + 0{,}2\cdot 0{,}4 = 0{,}64 \text{ ни}$$

оламиз.

3. Берилган система икки система мажмуасига тенг кучли:

а) $\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos^2 x - \cos 2y = \frac{7}{4}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos y = 0, \\ \cos^2 x - \cos 2y = \frac{7}{4}. \end{cases}$

а) ҳолда:

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ 1 - \cos 2y = \frac{7}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos 2y = -\frac{3}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, \ n \in Z, \\ y = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + \pi k, \ k \in Z, \end{cases}$$

$\cos 2y = 2\cos^2 y - 1$ бўлгани учун б) ҳолда:

$$\begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos y = 0, \\ \cos^2 x = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos y = 0, \\ \cos x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}, \end{cases} \quad \begin{array}{l} x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z, \\ y = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z. \end{array}$$

Жавоб: $\left(\pi n;\ \pm \arccos\left(-\dfrac{3}{4}\right) + \pi k\right),$

$$\left((-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ n \in Z,\ k \in Z.$$

### *2- вариант* 14- М

1. 3 кишилик делегация $D_{30}^3$ усул билан танланади. Икки эркакни $C_{22}^2$ усул билан, бир аёлни эса $C_8^1$ усул билан танлаш мумкин. Демак, икки эркак ва бир аёлдан иборат делегация $C_{22}^2 \cdot C_8^1$ усул билан танланиши мумкин. У ҳолда изланаётган эҳтимол:

$$p = \frac{C_{22}^2 \cdot C_8^1}{C_{30}^3} \approx 0{,}455.$$

2. 0,82.
3. Система ушбу системалар мажмуасига тенг кучли:

а) $\begin{cases} \sin y = 0, \\ \cos x + \cos^2 y = 0{,}25 + \sin y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin y > 0, \\ \sin 2x = 0, \\ \cos x + \cos^2 y = 0{,}25 + \sin y. \end{cases}$

а) ҳолда қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\begin{cases} \sin y = 0, \\ \cos x = -\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \arccos\left(-\dfrac{3}{4}\right) + 3\pi n,\ n \in Z, \\ y = \pi k,\ k \in Z. \end{cases}$$

б) ҳолда қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} \sin y > 0, & (1) \\ x = \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z, & (2) \\ \cos x + \cos^2 y = 0{,}25 + \sin y. & (3) \end{cases}$$

$x = \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$, кўринишидаги тўпламни уч қисм тўпламга ажратамиз: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$ кўринишдаги сонлар тўплами, улар учун $\cos x = 0$; $x = 2\pi k$, $k \in Z$ кўринишдаги сонлар тўплами, улар учун $\cos x = 1$, ва $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$ кўринишдаги сонлар тўплами, улар учун $\cos x = -1$.

Биринчи ҳолда:

$$\begin{cases} \sin y > 0, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in Z, \\ \cos^2 y = 0{,}25 + \sin y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin y > 0, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in Z, \\ \sin^2 y + \sin y - \frac{3}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in Z, \\ \sin y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in Z, \\ y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in Z. \end{cases}$$

Иккинчи ҳолда:

$$\begin{cases} \sin y > 0, \\ x = 2\pi k, \ k \in Z, \\ 1 + \cos^2 y = 0{,}25 + \sin y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin y > 0, \\ x = 2\pi k, \ k \in Z, \\ \sin^2 y + \sin y - \frac{7}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi k, \ k \in Z, \\ \sin y = \frac{\sqrt{8} - 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi k, \ k \in Z, \\ y = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{8} - 1}{2} + \pi n, \ n \in Z. \end{cases}$$

Учинчи ҳолда:

$$\begin{cases} \sin y > 0, \\ x = \pi + 2\pi k, \ k \in Z, \\ -1 + \cos^2 y = \frac{1}{4} + \sin y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin y > 0 \\ x = \pi + 2\pi k, \ k \in Z, \\ \sin^2 y + \sin y + \frac{1}{4} = 0. \end{cases}$$

Система ечимга эга эмас.

Жавоб: $\left(\pm \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi k; \ \pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k;\right.$ $\left.(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n\right)$, $\left(2\pi k; \ (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{8} - 1}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$, $k \in Z$.

### 3- вариант 14- М

1. $\approx 0{,}0072$. 2. $0{,}0175$. 3. $\left(\pi n; \ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $\left(\pm \frac{\pi}{6} + \pi n; \ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $n \in Z$, $k \in Z$.

### 4- вариант 14- М

1. $\approx 0{,}723$. 2. $0{,}915$. 3. $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)$, $\left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ $n \in Z$, $k \in Z$.

### *5- вариант* 14- М

. $\frac{C_{14}^2 \cdot C_{21}^1}{C_{35}^3} \approx 0,292$. 2. $\frac{5}{12}$. 3. $\left(\pi + 2\pi n;\ (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{8} + \pi k\right)$, $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k\right)$, $n \in Z$, $k \in Z$.

### *6- вариант* 14- М

1. $1 - \frac{C_{80}^5}{C_{100}^5} \approx 0,68$. 2. 0,0275. 3. $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $\left(\frac{\pi}{12} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $\left(\frac{5\pi}{12} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $\left(-\frac{5\pi}{12} + 2\pi n;\ 2\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{12} + 2\pi n;\ 2\pi k\right)$, $n \in Z$, $k \in Z$.

### *1- вариант* 11- К

1. 6 га каррали сонлар ҳаммаси бўлиб 8 та, демак, $p = \frac{8}{49} \approx 0,163$.

2. Ҳар қайси харидорнинг сотиб олиш эҳтимоли $p = 0,1$. У ҳолда $q = 1 - 0,1 = 0,9$. Бернулли формуласи бўйича:

$$P_{7,11} = C_{11}^7 \cdot 0,1^7 \cdot 0,9^4 \approx 22 \cdot 10^{-6}.$$

3. $3^x < 6^{2x-1} \Leftrightarrow 3^x < \frac{36^x}{6} \Leftrightarrow 12^x > 6 \Leftrightarrow x > \log_{12} 6$.

4. $\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ формулаларидан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Соддалаштиришлардан сўнг $\cos 2x + \sin 2x = 1$ тенгламани оламиз, унинг илдизлари $\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$ шартни қаноатлантирувчи $x_1 = \pi$ ва $x_2 = \frac{5\pi}{4}$ сонларидан иборат.

5. Тенгсизлик исталган $x$ да бажарилиши учун $0 < \frac{3-a}{3} < 1$ бўлиши керак. Бу ҳолда берилган тенгсизлик

$$x^2 + \frac{1}{4} > \left(\frac{3-a}{3}\right)^2, \text{ ёки } x^2 + \frac{1}{4} - \left(\frac{3-a}{4}\right)^2 > 0$$

тенгсизликка тенг кучли бўлади. Охирги тенгсизлик фақат $\frac{1}{4} - \left(\frac{3-a}{3}\right)^2 > 0$ бўлганда исталган $x$ да бажарилиши равшан. Шундай қилиб масала қуйидаги системани ечишга келтирилди:

$$\begin{cases} 0 < \frac{3-a}{3} < 1, \\ \left(\frac{3-a}{3}\right)^2 < \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < \frac{3-a}{3} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < a < 3.$$

### *2- вариант* 11-К

1. Квадратнинг юзи 200 см² га, доиранинг юзи $100\pi$ см² га тенг. Демак, таваккалига қўйилган нуқтанинг квадратга тушмаслик эҳтимоли

$$p = \frac{100\pi - 200}{100\pi} = \frac{\pi - 2}{\pi} \approx 0,363 \text{ га}$$

тенг.

2. Берилган сонлар ичида 8 га карралилари 13 та $(101 \leqslant 8n \leqslant 200)$. Берилган 100 та сон ичидан 8 га карралисини танлаб олиш эҳтимоли $\frac{13}{100} = 0,13$ га тенг. Танлаб олинган сон яна қайтарилиши сабабли, биз эркин синашларни такрорлашга эга бўламиз. A ҳодиса — «8 га каррали сонларни 10 марта синаш натижасида биттадан ортиқ бўлмаган соннинг чиқиш» эҳтимоли:

$$P(A) = P_{0.10} + P_{1,10} = C_{10}^0 \cdot 0,13^0 \cdot 0,87^{10} + C_{10}^1 \cdot 0,13 \cdot 0,87^9 \approx 0,620.$$

3. Қуйидагига эга бўламиз:

$$\log_2^2 (x-1)^2 < 4 \Leftrightarrow \log_2^2 |x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < \log_2 x - 1| < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < |x-1| < 2 \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \frac{3}{2} < x < 3, \\ -1 < x < \frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

4. $\sin^4 x + \cos^4 x = 0,5 + \cos 2x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 0,5 + \cos 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 0,5 + \cos 2x \Leftrightarrow \cos^2 2x - 2\cos 2x =$$

$$= 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z. \text{ Жавоб: } \frac{3\pi}{4}.$$

5. Соддалашлардан сўнг қуйидагини оламиз:

$$(a-4)\, 81^x < 1 - a. \qquad (1)$$

3 ҳолни қараймиз: а) $a < 4$; б) $a = 4$; в) $a > 4$.

а) ҳолда (1) тенгсизлик $81^x > \frac{1-a}{a-4}$ кўринишни олади ва ҳар вақт ечимга эга.

б) ҳолда (1) тенгсизлик $0 \cdot 81^x < -3$ кўринишни олади ва ечимга эга бўлмайди.

в) ҳолда (1) тенгсизлик $81^x > \frac{1-a}{a-4}$ кўринишни олади. Бу тенг- излик $\frac{1-a}{a-4} \leqslant 0$ бўлганда ва фақат шу ҳолдагина ечимга эга бўл- айди. $a > 4$ бўлиш шартини эътиборга олиб,

$$\begin{cases} a > 4, \\ \frac{1-a}{a-4} \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 4 \text{ ни}$$

ламиз. Жавоб: $a \geqslant 4$.

### *3- вариант* 11- К

. $\approx 0{,}216$. 2. $\approx 0{,}0574$. 3. $x > \log_{7,5} 5$. 4. $\frac{7\pi}{4}$; $2\pi$. 5. $4 < a \leqslant 5$.

### *4- вариант* 11- К

. $\frac{9-\pi\sqrt{3}}{9}$. 2. $\approx 0{,}670$. 3. $x < -4$, $-2{,}5 < x < -2$, $-2 < x < -1{,}5$, $x > 0$. 4. $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$. 5. $a < 2$; $a > 3$.

### *5- вариант* 11- К

1. $\frac{8}{9}$. 2. $\approx 0{,}254$. 3. $x < \log_{\frac{8}{9}} 6$. 4. $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{4}$. 5. $a > 1{,}5$.

### *6- вариант* 11- К

1. $\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{2\pi}$. 2. $\approx 0{,}878$. 3. $-2 < x < -\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3} < x < 1$. 4. 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\pi$. 5. $1 \leqslant a \leqslant 5$.

### *1- вариант* 12- К

1. а) Функциянинг аниқланиш соҳасини топиш мақсадида ушбу системани ечамиз:

$$\begin{cases} \frac{x}{\sin x} > 0, & (1) \\ \frac{10 - x^2}{x^4 - 11x^2 + 18} \geqslant 0. & (2) \end{cases}$$

Агар $\alpha$ система ечимларидан бири бўлса, у ҳолда $-\alpha$ ҳам унинг ечими бўлиши аён. Бу эса $f$ функциянинг аниқланиш соҳаси координаталар бошига нисбатан симметрик эканини билдиради. Тушунарлики, системанинг фақат мусбат ечимларини топиш етарли. (2) тенгсизликнинг мусбат ечимлари $0 < x < \sqrt{2}$ ва $3 < x \leqslant \sqrt{10}$ оралиқлардан олинган сонлардир. Бу оралиқларнинг $\frac{x}{\sin x} > 0$ тенгсизлик мусбат ечимлари тўплами билан кесишмаси $0<x<\sqrt{2}$ ва $3<x<<\pi$ оралиқлардан иборат (чунки $\pi<3,15$ ҳамда $\sqrt{10}>3,15$ бўлганидан $\pi<\sqrt{10}$ бўлади). Шундай қилиб, функциянинг аниқланиш соҳаси $-\pi<x<-3$, $-\sqrt{2}<x<0$, $0<x<\sqrt{2}$, $3<x<\pi$ оралиқлардан ташкил топади.

б) 1 рационал сони, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ иррационал сони.

в) Функция жуфт: $f(-x)=f(x)$.

г) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1+\frac{\sqrt{5}}{3}$.

2. Шартдан қуйидагига эга бўламиз:

$$\left|\begin{aligned} &a_1+a_1q^2=\frac{5}{4}, \\ &a_1-a_1q^4=\frac{15}{16} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{aligned} &a_1(1+q^2)=\frac{5}{4}, && (1) \\ &a_1(1-q^4)=\frac{15}{16}. && (2) \end{aligned}\right.$$

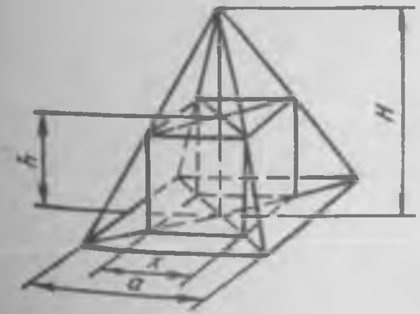
(2) ни (1) га ҳадлаб бўлиб, $1-q^2=\frac{3}{4}$ ни оламиз. $q>0$ бўлишини эътиборга олиб, $q=\frac{1}{2}$ ни топамиз.

$S$ — прогрессиянинг барча ҳадлари йиғиндиси, $S_1$ эса барча ҳадлари квадратларининг йиғиндиси бўлсин. У ҳолда

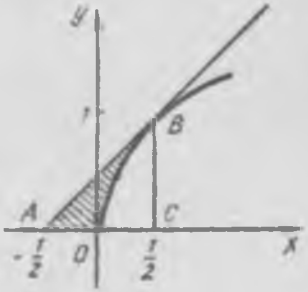
$$S=\frac{a_1}{1-q}, \quad S_1=\frac{a_1^2}{1-q^2};$$

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{(1-q)^2}{1-q^2}=\frac{1-q}{1+q}=\frac{1}{3}.$$

3. $H$ ва $a$ мос равишда пирамида баландлиги ва асосининг томони, $h$ ва $x$ эса призма баландлиги ва асосининг томони бўлсин (108-расм).



108- расм.



109- расм.

Пирамида ҳажми $V = \frac{1}{3}a^2H$ формула бўйича, призма ҳажми эса $V_1 = x^2h$ формула бўйича ҳисобланади.

Ушбу тенглик ўринли: $\frac{H-h}{H} = \frac{x}{a}$, ундан $h = \frac{H}{a}\cdot(a-x)$.

Шундай қилиб, призма ҳажми: $V_1 = \frac{H}{a}x^2(a-x)$, $0<x<a$.

$f(x) = x^2(a+x)$, $0<x<a$, функцияни экстремумга текширамиз:

$$\begin{cases} f'(x) = 0, \\ 0<x<a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax - 3x^2 = 0, \\ 0<x<a \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2a}{3}.$$

$0<x<\frac{2a}{3}$ да $f'(x)>0$, $\frac{2a}{3}<x<a$ да эса $f'(x)<0$ бўлгани ва $x=\frac{2a}{3}$ нуқтада $f$ функция узлуксиз бўлгани учун, у $\left(0; \frac{2a}{3}\right]$ оралиқда ўсади, $\left[\frac{2a}{3}; a\right)$ оралиқда эса камаяди. Демак, қаралаётган оралиқда функция энг катта қийматни $x=\frac{2a}{3}$ нуқтада қабул қилади. $\frac{H}{a}$ — мусбат доимий бўлганидан, $x=\frac{2a}{3}$ да призманинг $V$ ҳажми энг катта қийматни қабул қилади. $x=\frac{2a}{3}$ да $h=\frac{H}{3}$ ва $V_1 = \frac{4}{27}a^2h = \frac{4}{9}V$ га эга бўламиз.

4. Уринма тенгламаси: $y = x + 0{,}5$. Изланаётган фигуранинг $S$ юзини топиш учун $ABC$ учбурчакнинг $S_1$ юзидан $OBC$ эгри чизиқли трапециянинг $S_2$ юзини айириш керак (100-расм): $S = S_1 - S_2$. Бизда

$$S_1 = \frac{1}{2}, \quad S_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{2x}\,dx = \frac{1}{3}.$$

Демак, $S = \frac{1}{6}$.

5. Берилган тенглама қуйидагига тенг кучли:

$$2\cos 2x + \sin\frac{5x}{2} = 3, \tag{1}$$

бу эса ўз навбатида ушбу тенгламалар системасига тенг кучли:

$$\begin{cases} \cos 2x = 1, & (2) \\ \sin\frac{5x}{2} = 1. & (3) \end{cases}$$

Системани ечиб, қуйидагини топамиз:

$$\begin{cases} x = \pi n,\ n \in Z, & (4) \\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi k}{5},\ k \in Z. & (5) \end{cases}$$

$n$ ва $k$ нинг қандай қийматларида (2) ва (3) тенгламалар умумий илдизларга эга бўлишини аниқлаш керак бўлади. (1) тенгламаларга кирувчи функцияларнинг умумий даври $4\pi$ га тенг, шунинг учун аввал тенгламанинг $[0;\ 4\pi]$ кесмадаги ечимларини топиш етарли. (2) тенглама шу кесмада $0;\ \pi;\ 2\pi;\ 3\pi;\ 4\pi$ илдизларга, (3) тенглама эса $\frac{\pi}{5};\ \pi;\ \frac{9\pi}{5};\ \frac{13\pi}{5};\ \frac{17\pi}{5}$ илдизларга эга. (2) ва (3) тенгламаларнинг $[0;\ 4\pi]$ даги ягона умумий илдизи $x = \pi$ дан иборат.

Шундай қилиб, (1) тенгламанинг барча илдизлари $x = \pi + 4\pi m = \pi(1 + 4m)$, $m \in Z$, кўринишида ёзилиши мумкин.

Ечишнинг бошқа усулини қараймиз.

(4) ва (5) ларнинг ўнг қисмларини тенглаштириб, бутун сонлардаги $5n - 4k = 1$ тенгламани оламиз. Уни ечамиз. $n - 4(k - n) = 1$ (6) га эга бўламиз. $k - n = m$ $(m \in Z)$ (7) бўлсин. У ҳолда (6) тенглама $n - 4m = 1$ кўринишни олади, ундан

$$\begin{cases} n = 1 + 4m & (8) \\ k = 1 + 5m,\ m \in Z. & (9) \end{cases}$$

(8) ва (9) формулалар бутун сонлардаги $5n - 4k = 1$ тенгламанинг барча ечимларини ўз ичига олади. $n = 1 + 4m$ ни (4) га (ёки $k = 1 + 5m$ ни (5) га) қўйиб, $x = \pi(1 + 4m)$, $m \in Z$ ни оламиз.

## 2- вариант 12- Қ

**1.** Функциянинг аниқланиш соҳасини қуйидаги шартдан топамиз:

$$\begin{cases} \sin 3x \neq 0, \\ \cos x \neq 0, \\ 3 - x^2 \geqslant 0, \\ 1 - x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi n}{3},\ n \in Z, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z, \\ |x| \neq \sqrt{3}, \\ x \neq \pm 1. \end{cases}$$

Ҳосил қилинган системани ечиб, функциянинг аниқланиш соҳаси $[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}]$ кесмадан иборатлигини аниқлаймиз, ундан $0;\ \pm 1;\ \pm\frac{\pi}{3};\ \pm\frac{\pi}{2}$ нуқталарни чиқариб ташлаш керак.

б) Функция аниқланиш соҳасидан олинган рационал сон, масалан, $\frac{1}{2}$ сон, иррационал сон эса $\sqrt{3}$ бўлади.

в) $f(-x) = -f(x)$, демак, функция тоқ.

г) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

**2.** Масала ушбу системани ечишга келтирилади:

$$\begin{cases} |q| < 1, \\ \frac{a_1}{1 - q} = \frac{3}{4}, \\ a_1 q = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1, \\ q = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

рогрессия барча ҳадлари квадратларининг изланаётган йиғиндиси га тенг.

. Трапеция катта асосини $x$ орқали белгилаймиз. У ҳолда трапеция зи:

$$S = \frac{a+x}{4}\sqrt{3a^2 - x^2 + 2ax}\,, \quad 0 < x < 3a.$$

$$S'(x) = \frac{2a^2 + ax - x^2}{2\sqrt{3a^2 - x^2 + 2ax}}\,, \quad \begin{cases} S'(x) = 0, \\ 0 < x < 3a \end{cases} \Leftrightarrow x = 2a.$$

ункцияни монотонликка текшириб, функция $0 < x \leqslant 2a$ оралиқда сади, $2a \leqslant x < 3a$ оралиқда эса камаяди, деган хулосани чиқарамиз. ункция энг катта қийматни $x = 2a$ нуқтада қабул қилади.

. $$S = \int_0^1 (x^2 + 1 - 2x)\,dx = \int_0^1 (x-1)^2\,dx = \frac{(x-1)^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

. Тенгламани қуйидаги кўринишда қайтадан ёзамиз:

$$3^{\sin x} + \cos^2\frac{4x}{3} = 4. \qquad (1)$$

$^{\sin x} \leqslant 3$, $\cos^2\frac{4x}{3} \leqslant 1$ бўлганидан, (1) тенглама қуйидаги системага енг кучли:

$$\begin{cases} 3^{\sin x} = 3, \\ \cos^2\frac{4x}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1, \\ \left|\cos\frac{4x}{3}\right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \; n \in Z, \\ x = \frac{3\pi k}{4}, \; k \in Z. \end{cases}$$

$\cos^2\frac{4x}{3} = \frac{1 + \cos\frac{8x}{3}}{2}$ функциянинг даври $\frac{3\pi}{4}$ га тенг, $3^{\sin x}$ функциянинг даври $2\pi$ га тенг. Демак, (1) тенгламанинг чап қисмига кирувчи функцияларнинг умумий даври $6\pi$ бўлади. $[0;\ 6\pi]$ кесмада $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ кўринишдаги сонлардан қуйидагилар жойлашган:

$$\frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2};\ \frac{9\pi}{2}.$$

Энди

$$\frac{3\pi k}{4} = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi k}{4} = \frac{5\pi}{2},\ \frac{3\pi k}{4} = \frac{9\pi}{2}$$

тенгламалардан қайси бирининг $k$ нинг бутун қийматларида қаноатланишини текшириш қолади. Фақат учинчи тенглама бутун илдизга эга: $k = 6$. Шундай қилиб, $x = \frac{9\pi}{2} + 6\pi n$, $n \in Z$, сонлар берилган тенгламанинг илдизларидан иборат.

Ечишнинг бошқа усули.

$\frac{\pi}{2}+2\pi n=\frac{3\pi k}{4}$ тенгламани бутун сонларда ечамиз. Натижада: $2+8n=3k$ ёки $n-3(3n-k)=2$. Энди $3n-k=m$ белгилаш киритсак, тенглама $n=3m+2$ кўринишни олади, бунда $m\in Z$. $n=3m+2$ ни $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ тенгликка қўйиб, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi(3m+2)=$ $=\frac{9\pi}{2}+6\pi m$, $m\in Z$, ни ҳосил қиламиз. Жавоб: $\frac{9\pi}{2}+6\pi n$, $n\in Z$.

### 3- вариант

**12-К**

1. а) $0<|x|<\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<|x|<\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}<|x|\leqslant\sqrt{5}$. б) $\frac{1}{3}$; $\sqrt{5}$; в) жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас; г) $\frac{1}{2}-\sqrt{5}$. 2. $\frac{1}{16}$. 3. 2; 6; $\frac{3}{2}$. 4. $\frac{1}{3}$. 5. $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$.

### 4- вариант

**12-К**

1. а) $0<|x|<\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}<|x|<\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{8}<|x|<\frac{1}{\sqrt{6}}$; б) $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{\sqrt{17}}$; в) функция жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас; г) $\frac{3}{8}$. 2. 1. 3. $\sqrt{3}$ дм. 4. $6\frac{3}{4}$. 5. $2\pi+4\pi k$, $k\in Z$.

### 5- вариант

**12-К**

1. а) $0<|x|\leqslant\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}\leqslant|x|\leqslant\frac{3\pi}{4}$; б) 0,5; $\frac{\pi}{4}$; в) жуфт ҳам эмас ва тоқ ҳам эмас; г) $2+\sqrt{6}$. 2. $\frac{1}{8}$. 3. $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. 4. $\frac{1}{3}$. 5. $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$.

### 6- вариант

**12-К**

1. а) $0<|x|<\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{8}<|x|<\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<|x|<1$, $1<|x|<\frac{3\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}<$ $<|x|<\frac{3}{\sqrt{5}}$; б) 0,1; $0{,}5\sqrt{2}$; в) жуфт; г) $\frac{2(3+\pi)}{3\pi}$. 2. 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$. 3. 60°. 4. $2\frac{2}{3}$. 5. $-\frac{5\pi}{6}+5\pi k$, $k\in Z$.

### 1- вариант

**15-М**

1. $f'(x)=2(\cos 2x-\sin x)$,

$$\begin{cases} f'(x)=0, \\ \frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{6}.$$

нкциянинг $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$ даги энг катта ва энг кичик қийматларини то-

миз: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2},\ f(\pi) = -2.$ Шундай қилиб,

$$\underset{;\,\pi]}{\text{in}}\ f(x) = -\frac{3}{2}\sqrt{3},\quad \underset{\left[\frac{\pi}{2};\,\pi\right]}{\max} f(x) = 0.$$

нкция $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$ кесмада узлуксиз бўлганидан, $E(f) = [-1{,}5\sqrt{3};\ 0]$ лади.

Берилган тенгсизлик ушбу тенгсизликка тенг кучли:

$$\sin 2x - (\sin 3x + \sin x) > 0 \text{ ёки}$$
$$\sin 2x - 2\sin 2x\cos x > 0,\ \sin 2x\ (2\cos x - 1) < 0.$$

ирги тенгсизлик ушбу системалар мажмуасига тенг кучли:

$$\begin{cases}\sin 2x > 0,\\ \cos x < \frac{1}{2};\end{cases}\qquad \text{б)}\ \begin{cases}\sin 2x < 0,\\ \cos x > \frac{1}{2}.\end{cases}$$

а) ҳолда қуйидагини топамиз:

$$2\pi n + \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\quad \pi + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,$$

$\in \boldsymbol{Z}$.

б) ҳолда $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$ ни топамиз.

авоб: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < 2\pi n,\ \frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$

$$\pi + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{R}.$$

чишни интерваллар усули билан ҳам бажариш мумкин.

. $\sin(2\operatorname{arctg} x) = 1,\ 2\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\ \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} + \pi n,$ $\in \boldsymbol{Z}$ (1). Лекин $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$. Демак, (1) тенглама фақат $= 0$ да ечимга эга бўлади. $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$ ни ҳосил қиламиз, ундан $= 1$ ни топамиз.

### *2- вариант*

15- М

. $y = \sin x\cos 2x$ ёки $y = \sin x\ (1 - 2\sin^2 x)$ га эгамиз. $\sin x = t$ бўлсин; $0 \leqslant x \leqslant \pi$ бўлгани учун $0 \leqslant t \leqslant 1$. Шундай қилиб, масала $(t) = t\ (1 - 2t^2) = t - 2t^3$ функциянинг $[0;\ 1]$ даги энг катта ва нг кичик қийматларини топишга келади.

$$\varphi'(t) = 1 - 6t^2,$$

$$\begin{cases} \varphi'(t)=0, \\ 0<t<1 \end{cases} \Leftrightarrow t=\frac{t}{\sqrt{6}}.$$

$\varphi(0)=0,\ \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=\frac{\sqrt{6}}{9},\ \varphi(1)=-1$ бўлгани учун функциянинг энг катта қиймати $\frac{\sqrt{6}}{9}$ га, энг кичик қиймати $-1$ га тенг.

2. $-\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$

3. $\operatorname{ctg}(0{,}5\arcsin x)=1,\ 0{,}5\arcsin x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z,\ \arcsin x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$ Кейинги тенглик фақат $n=0$ да ўринли. $\arcsin x=\frac{\pi}{2}$ ни оламиз, ундан $x=1$.

### 3- вариант 15- М

1. $\left[0;\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$. 2. $\frac{\pi}{12}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{12}+2\pi n,\ \frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{13\pi}{12}+2\pi n,\ \frac{17\pi}{12}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$ 3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

### 4- вариант 15- М

1. $\frac{2\sqrt{3}}{9};\ -\frac{2\sqrt{3}}{8}$. 2. $\frac{\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ \pi+2\pi n<x<\frac{5\pi}{4}+2\pi n,\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{3}+2\pi n,\ \frac{7\pi}{4}+2\pi n<x<2\pi+2\pi n,\ n\in Z.$ 3. $\pm 1$.

### 5- вариант 15- М

1. $\left[0;\ \frac{9}{8}\right]$. 2. $2\pi n<x<\frac{7\pi}{12}+2\pi n,\ \frac{11\pi}{12}+2\pi n<x<\pi+2\pi n,\ \frac{19\pi}{12}+2\pi n<x<\frac{23\pi}{12}+2\pi n,\ n\in Z.$ 3. 1.

### 6- вариант 15- М

1. $\frac{4\sqrt{3}}{9};\ -\frac{4\sqrt{3}}{9}$. 2. $\frac{\pi}{12}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{12}+2\pi n,\ \pi+2\pi n<x<\frac{13\pi}{12}+2\pi n,\ \frac{17\pi}{12}+2\pi n<x<2\pi+2\pi n,\ n\in Z.$ 3. 0.

### 1- вариант 16- М

1. $2^{x-2}=t$ алмаштиришни киритиб,

$$\frac{\sin 4t}{\sin t\cos t}=2\sqrt{3} \tag{1}$$

Функциянинг $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ даги энг катта ва энг кичик қийматларини топамиз: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $f(\pi) = -2$. Шундай қилиб,

$$\min_{\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]} f(x) = -\frac{3}{2}\sqrt{3}, \quad \max_{\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]} f(x) = 0.$$

Функция $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ кесмада узлуксиз бўлганидан, $E(f) = [-1{,}5\sqrt{3};\ 0]$ бўлади.

2. Берилган тенгсизлик ушбу тенгсизликка тенг кучли:

$$\sin 2x - (\sin 3x + \sin x) > 0 \text{ ёки}$$
$$\sin 2x - 2\sin 2x\cos x > 0, \ \sin 2x\ (2\cos x - 1) < 0.$$

Охирги тенгсизлик ушбу системалар мажмуасига тенг кучли:

а) $\begin{cases} \sin 2x > 0, \\ \cos x < \frac{1}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin 2x < 0, \\ \cos x > \frac{1}{2}. \end{cases}$

а) ҳолда қуйидагини топамиз:

$$2\pi n + \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad \pi + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,$$

$n \in \boldsymbol{Z}$.

б) ҳолда $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, ни топамиз.

Жавоб: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < 2\pi n$, $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$,

$$\pi + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{R}.$$

Ечишни интерваллар усули билан ҳам бажариш мумкин.

3. $\sin(2\operatorname{arctg} x) = 1$, $2\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (1). Лекин $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$. Демак, (1) тенглама фақат $n = 0$ да ечимга эга бўлади. $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$ ни ҳосил қиламиз, ундан $x = 1$ ни топамиз.

## *2- вариант*

15- М

1. $y = \sin x \cos 2x$ ёки $y = \sin x\ (1 - 2\sin^2 x)$ га эгамиз. $\sin x = t$ бўлсин; $0 \leqslant x \leqslant \pi$ бўлгани учун $0 \leqslant t \leqslant 1$. Шундай қилиб, масала $\varphi(t) = t\,(1 - 2t^2) = t - 2t^3$ функциянинг $[0;\ 1]$ даги энг катта ва энг кичик қийматларини топишга келади.

$$\varphi'(t) = 1 - 6t^2,$$

$$\begin{cases}\varphi'(t)=0,\\ 0<t<1\end{cases}\Leftrightarrow t=\frac{t}{\sqrt{6}}.$$

$\varphi(0)=0,\ \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=\frac{\sqrt{6}}{9},\ \varphi(1)=-1$ бўлгани учун функциянинг энг катта қиймати $\frac{\sqrt{6}}{9}$ га, энг кичик қиймати $-1$ га тенг.

2. $-\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$

3. $\operatorname{ctg}(0{,}5\arcsin x)=1,\ 0{,}5\arcsin x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z,\ \arcsin x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$ Кейинги тенглик фақат $n=0$ да ўринли. $\arcsin x=\frac{\pi}{2}$ ни оламиз, ундан $x=1$.

### *3- вариант* 15- М

1. $\left[0;\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$. 2. $\frac{\pi}{12}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{12}+2\pi n,\ \frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{13\pi}{12}+2\pi n,\ \frac{17\pi}{12}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$ 3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

### *4- вариант* 15- М

1. $\frac{2\sqrt{3}}{9};\ -\frac{2\sqrt{3}}{9}$. 2. $\frac{\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\quad \pi+2\pi n<x<\frac{5\pi}{4}+2\pi n,\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{3}+2\pi n,\ \frac{7\pi}{4}+2\pi n<x<2\pi+2\pi n,\ n\in Z.$ 3. $\pm 1$.

### *5- вариант* 15- М

1. $\left[0;\ \frac{9}{8}\right]$. 2. $2\pi n<x<\frac{7\pi}{12}+2\pi n,\ \frac{11\pi}{12}+2\pi n<x<\pi+2\pi n,\ \frac{19\pi}{12}+2\pi n<x<\frac{23\pi}{12}+2\pi n,\ n\in Z.$ 3. 1.

### *6- вариант* 15- М

1. $\frac{4\sqrt{3}}{9};\ -\frac{4\sqrt{3}}{9}$. 2. $\frac{\pi}{12}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{12}+2\pi n,\quad \pi+2\pi n<x<\frac{13\pi}{12}+2\pi n,\ \frac{17\pi}{12}+2\pi n<x<2\pi+2\pi n,\ n\in Z.$ 3. 0.

### *1- вариант* 16- М

1. [illegible] $=t$ алмаштиришни киритиб,

$$\frac{\sin 4t}{\sin t\,\cos t}=2\sqrt{3}\qquad(1)$$

тенгламани оламиз. У ҳолда:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2\sin 4t}{\sin 2t} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2t = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin 2t \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2t = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow t = \pm\frac{\pi}{12} + \pi n,\ n \in Z.$$

Тенгламалар мажмуасини ҳосил қиламиз:

$$\left[\begin{array}{l} 2^{x-2} = \frac{\pi}{12} + \pi n\ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \\ 2^{x-2} = -\frac{\pi}{12} + \pi n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x} = \frac{\pi}{3} + 4\pi n\ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \\ 2^{x} = -\frac{\pi}{3} + 4\pi n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_2\left(\frac{\pi}{3} + 4\pi n\right)\ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \\ x = \log_2\left(-\frac{\pi}{3} + 4\pi n\right)\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \end{array}\right.$$

Жавоб: $\log_2\frac{\pi}{3}$, $\log_2\left(\pm\frac{\pi}{3} + 4\pi n\right)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

2. Берилган тенгсизлик ушбу тенгсизликка тенг кучли:

$$\log_2|x-2| + \log_2(x+1) \leqslant 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2|\cdot(x+1) \leqslant 2, \\ x \neq 2, \\ x > -1. \end{cases}$$

Икки ҳолни қараймиз:

а) $\begin{cases} x > 2, \\ (x-2)(x+1) \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x^2 - x - 4 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \leqslant \frac{1+\sqrt{17}}{2};$

б) $\begin{cases} -1 < x < 2, \\ (2-x)(x+1) \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 2, \\ x^2 - x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x \leqslant 0, \\ 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$

Жавоб: $-1 < x \leqslant 0,\ 1 \leqslant x < 2,\ 2 < x \leqslant \frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

3. $y' = 3\log_2^2 x \cdot \frac{1}{x\ln 2} - \frac{3}{x\ln 2} = \frac{3}{x\ln 2}(\log_2^2 x - 1)$. $\log_2^2 x - 1 = 0$ да, яъни $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 2$ да $y' = 0$. $0 < x < \frac{1}{2}$ ва $x > 2$ да $y' > 0$, $\frac{1}{2} < x < 2$ да $y' < 0$ бўлгани учун, $x = \frac{1}{2}$ — максимум нуқтаси, $x = 2$ — минимум нуқтаси.

### *2- вариант* 16- М

1. $2^{x-1}$ ни $t$ орқали белгилаб, тенгламани қуйидаги кўринишда қайтадан ёзамиз:

$$\frac{\sin 6t}{3\sin t - 4\sin^3 t} = 2. \qquad (1)$$

У ҳолда:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sin 6t}{\sin 3t} = 2 \Leftrightarrow \frac{2\sin 3t \cos 3t}{\sin 3t} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3t = 1, \\ \sin 3t \quad 0. \end{cases}$$

Ҳосил қилинган система ечимга эга эмас. Жавоб: Ечим йўқ.
2. $x < 2$ бўлганидан $|x - 8| = 8 - x$ бўлади. У ҳолда:

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} ((8 - x)(2 - x)) > \log_{\frac{1}{3}} 27, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (8 - x)(2 - x) \leqslant 27, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 10x - 11 \leqslant 0, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 11, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 2.$$

Жавоб: $-1 \leqslant x < 2$.
3. $y' = -2(e^{-2x} + 2e^{-x} - 3) = 2(e^{-x} + 3)(1 - e^{-x})$. $x = 0$ да $y' = 0$, $x < 0$ да $y' < 0$, $x > 0$ да $y' > 0$ ва $x = 0$ нуқтада функция узлуксиз, шунинг учун функция $(-\infty; 0]$ оралиқда камаяди, $[0; +\infty)$ оралиқда ўсади.

### *3- вариант* 16- М

1. Ечими йўқ. 2. $1 \leqslant x < 2$, $2 < x < 4$. 3. $(-\infty; 0]$, $[\log_2 3; +\infty)$— ўсиш оралиқлари, $[0; \log_2 3]$ — камайиш оралиғи.

### *4- вариант* 16- М

1. $\log_2\left(\frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $\log_2\left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \geqslant 0$, $n \in Z$. 2. $\frac{1}{2} \leqslant x < 1$. 3. $x = \frac{1}{e}$ — минимум нуқтаси, $x = e$ — максимум нуқтаси.

### *5- вариант* 16-М

1. $\log_3(\pi n)$, $n \in Z$. 2. $2 < x < 4$, $4 < x \leqslant 5$. 3. $x = -2$ — минимум нуқтаси, $x = 3$ — максимум нуқтаси.

### *6- вариант* 16- М

1. $\log_4\left(\frac{8\pi}{3} + 4\pi n\right)$, $\log_4\left(\frac{10\pi}{3} + 4\pi n\right)$, $n \geqslant 0$, $n \in Z$.
2. $x \leqslant -1$. 3. $(0; 1)$, $(1; \sqrt[3]{e}]$ — камайиш оралиқлари, $[\sqrt[3]{e}; +\infty)$— ўсиш оралиғи.

## *1- вариант*

1. Масала ушбу системани ечишга келтирилади:

$$\begin{cases} \log_y \left(\frac{x}{2}\right) = \log_{\frac{x}{2}} y, & (1) \\ 2x = y. & (2) \end{cases}$$

$\log_y \frac{x}{2}$ ни $z$ орқали белгилаб, (1) тенгламани $z = \frac{1}{z}$ кўринишда қайтадан ёзамиз, ундан $z_1 = 1$, $z_2 = -1$ ни топамиз. $z = 1$ бўлсин. У ҳолда:

$$\begin{cases} \log_y \frac{x}{2} = 1, \\ 2x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = y, \\ 2x = y, \\ x > 0, \\ y > 0, \\ y \neq 1. \end{cases}$$

Ҳосил қилинган система ечимга эга эмас.

$z = -1$ бўлсин. У ҳолда:

$$\begin{cases} \log_y \frac{x}{2} = -1, \\ 2x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{1}{y}, \\ 2x = y, \\ x > 0, \\ y > 0, \\ y \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Жавоб: (1; 2).

2. $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ формуладан фойдаланамиз. У ҳолда:

$$\left(\frac{1 - \cos x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\,(1 - \sin 2x).$$

Соддалаштиришлардан сўнг:

$$(\sin x - \cos x)^2 - 2\,(\sin x - \cos x) - 3 = 0,$$

бундан $\sin x - \cos x = -1$. Жавоб: 0; $\frac{3\pi}{2}$.

3. $64^x = 2^{6x} > 0$ бўлганидан, тенгсизликнинг барча ҳадларини $2^{6x}$ га бўлиб, берилган тенгсизликка тенг кучли

$$16 \cdot 2^{2x^2 - 8x} - 17 \cdot 2^{x^2 - 4x} + 1 < 0$$

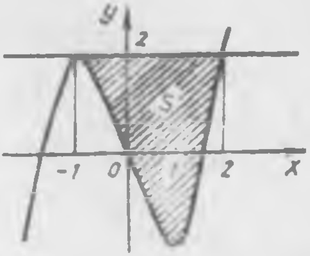
ни ҳосил қиламиз. Бундан қуйидагини топамиз:

$$\frac{1}{16} < 2^{x^2 - 4x} < 1, \text{ яъни}$$

$$\begin{cases} 2^{x^2-4x} < 1, \\ 2^{x^2-4x} > 2^{-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x < 0, \\ (x-2)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 4, \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2, \\ 2 < x < 4. \end{cases}$$

Жавоб: $0 < x < 2$, $2 < x < 4$.

4. $x_0 = -1$ абсциссали нуқтада $y = x^3 - 3x$ функциянинг графигига ўтказилган уринманинг тенгламаси $y = 2$ кўринишга эга. $x^3 - 3x = 2$ тенгламани ечиб, уринма билан $y = x^3 - 3x$ функция графигининг кесишиш нуқталари абсциссаларини топамиз: $x_1 = -1$ уриниш нуқтаси) ва $x_2 = 2$ (110- расм).



110- расм.

Фигура юзи $S = \int\limits_{-1}^{2} (2 - (x^3 - 3x))\, dx = 6{,}75$ га тенг.

5. Пирамида кесими трапециядан иборат. $x$ — кесимнинг кичик асоси бўлсин. У ҳолда кесим баландлиги $3 - x$ га, иккинчи пирамида баландлиги эса $x$ га тенг бўлади. Иккинчи пирамида ҳажми: $V(x) = \frac{1}{6}(9 - x^2)\, x$, $0 < x < 3$. $V(x)$ функцияни текшириб, $\max\limits_{(0;\,3)} V(x) = V(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ ни топамиз.

## 2- вариант **13- К**

1. Масала ушбу системани ечишга келтирилади:

$$\begin{cases} 3 + 2a = 6 - a^2, \\ a^4 + 2 = 4 - a. \end{cases}$$

Биринчи тенгламанинг илдизлари $a = 1$ ва $a = -3$ сонлардан иборат. Бу сонлардан фақат $a = 1$ системанинг иккинчи тенгламасини қаноатлантиради. Жавоб: $a = 1$.

2. Тенгсизлик қуйидаги системага тенг кучли:

$$\begin{cases} 5 - x^2 > 0, \\ |x| - 1 > 0, \\ 5 - x^2 > |x| - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| - 1 > 0, \\ 5 - x^2 > |x| - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 1, \\ |x|^2 + |x| - 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 1, \\ -3 < |x| < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 1, \\ |x| < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < |x| < 2.$$

Жавоб: $1 < x < 2$, $-2 < x < -1$.

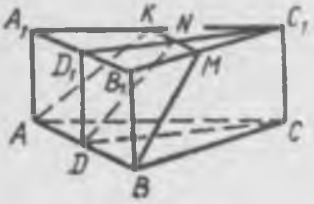
3. $x_1$ ва $x_2$ — берилган тенгламанинг илдизлари бўлсин. У ҳолда $x_1 + x_2 = \cos\alpha$, $x_1 x_2 = -0{,}5\cos 4\alpha$. Қуйидагига эга бўламиз:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \cos^2\alpha + \cos 4\alpha.$$

Шартга мувофиқ ушбу тенгламани оламиз:

$$\cos^2\alpha + \cos 4\alpha = 0{,}25,$$

$$\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + 2\cos^2 2\alpha - 1 = \frac{1}{4},$$



111- расм.

$$8\cos^2 2\alpha + 2\cos 2\alpha - 3 = 0.$$

Квадрат тенгламани ечиб, а) $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$; б) $\cos 2\alpha = -\frac{3}{4}$ ни топамиз.

$x^2 - x\cos\alpha - 0,5\cos^2\alpha = 0$ квадрат тенглама дискриминанти $D = \cos^2\alpha + 2\cos 4\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} + 2(2\cos^2 2\alpha - 1)$ га тенг.

Агар $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$ бўлса, $D < 0$, агар $\cos 2\alpha = -\frac{3}{4}$ бўлса, $D > 0$ бўлади.

Шундай қилиб, агар $\cos 2\alpha = -\frac{3}{4}$ бўлса, у ҳолда берилган тенглама $x_1^2 + x_2^2 = 0,25$ шартни қаноатлантирувчи ҳақиқий ва ҳар хил илдизларга эга бўлади.

Жавоб: $\alpha = \pm 0,5 \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + \pi n$, $n \in Z$.

4. $V = \pi \int\limits_{-1}^{2} (x^3 + 1)^2 \, dx = \frac{405}{14}\pi$.

5. Агар $M$ $B_1$ билан ҳам, $C_1$ билан ҳам устма-уст тушмаса, кесим $ABMK$ трапециядан иборат бўлади (111-расм). $D_1N = x$ бўлсин, у ҳолда $AB = 2\sqrt{3}$, $MK = \frac{6-2x}{\sqrt{3}}$, $DN = \sqrt{4+x^2}$.

Трапециянинг юзи:

$$S(x) = \frac{6-x}{\sqrt{3}}\sqrt{4+x^2}, \quad 0 < x < 3.$$

$AA_1B_1B$ тўғри тўртбурчакнинг юзи $4\sqrt{3}$ га, $ABC_1$ учбурчакнинг юзи $\sqrt{39}$ га тенг. $S(0) = 4\sqrt{3}$, $S(3) = \sqrt{39}$ ни ҳисоблаб, кесим юзи

$$S(x) = \frac{6-x}{\sqrt{3}}\sqrt{4+x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 3$$

га тенг бўлишини аниқлаймиз.

Кесимнинг энг катта ва энг кичик юзини аниқлаш мақсадида ҳосилани топамиз:

$$S'(x) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \, \frac{(x-1)(x-2)}{\sqrt{4+x^2}},$$

$$x = 1 \text{ ва } x = 2 \text{ да } S'(x) = 0.$$

$$S(0) = \frac{12}{\sqrt{3}}, \; S(1) = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, \; S(2) = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \; S(3) = \frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$$

ларни солиштирамиз ва $\min\limits_{[0;3]} S(x) = S(3) = \sqrt{39}$, $\max\limits_{[0;3]} S(x) = S(0) = 4\sqrt{3}$ деган хулосага келамиз. Жавоб: $4\sqrt{3}, \sqrt{39}$.

### 3- вариант 13- К

1. $a = 3$, $b = 1$; $x_1 = i$, $x_2 = -i$, $x_3 = 4 + \sqrt{3}$, $x_4 = 4 - \sqrt{3}$. 2. $2\sqrt{2}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 3. $-\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$. $x = \pm\pi$. 4. 4,5. 5. $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$.

### 4- вариант 13-К

1. $a = 1$. 2. $x > 0$, $x = -4$. 3. $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $y = \frac{\pi}{2} - \pi n$, $n \in Z$. 4. $2\ln 3$. 5. $\frac{4}{27} V$.

### 5- вариант 13- К

1. $2^{17}$. 2. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$. 3. $x < -\log_3 2$, $x > 0$. 4. $16\frac{1}{3}$. 5. $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $V = \frac{2\sqrt{3}}{27}$.

### 6- вариант 13- К

1. $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$. 2. $x = \frac{5\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{2}$. 3. $x = 1$, $x = \log_2 3 - 1$. 4. $y = x - \frac{3}{4}$. 5. $\frac{1 + \sqrt{17}}{8} p$, $\frac{1 + \sqrt{17}}{8} p$, $\frac{7 - \sqrt{17}}{8} p$.

# ИЛОВА

## Ўрта мактаб курси бўйича аввалги йилларда ўтказилган имтиҳон ишларидан намуналар

## 1982 ЙИЛ

### *1-имтиҳон иши*

**1-вариант**

1. Икки комплекс сон берилган:

$$z_1 = a - i,\ z_2 = 2^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right).$$

Барча шундай $a \in \underline{R}$ қийматларни топинги, уларда $z_1^3 = z_2^3$ бўлсин.

2. $f(x) = 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x$, бунда $x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$, функция графигига $y = 4x + 1$ тўғри чизиққа параллел қилиб уринма ўтказилган. Уриниш нуқтасининг координаталарини топинг.
3. Тенгсизликни ечинг: $2\log_2 x - 3\log_x 4 \leqslant 4$.
4. $y^2 = x$ ва $x + y = 2$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.
5. $SABCD$ тўртбурчакли пирамида асосида $ABCD$ квадрат ётади. $SD$ тўғри чизиқнинг $ABC$ текисликка перпендикулярлиги ва $SAC$ учбурчак юзининг $2\sqrt{3}$ га тенглиги маълум. Пирамида ҳажми энг катта бўлиши учун унинг асос томони қандай узунликда бўлиши керак?

**2-вариант**

1. Икки комплекс сон берилган:

$$z_1 = 1 + ai \text{ ва } z_2 = 2^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(\sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}\right).$$

$a \in R$ нинг барча шундай қийматларини топингки, уларда $z_1^3 = s_2^3$ бўлсин.

2. $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x + 2\cos^2 x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, функция графигига $12x - 3y = 2$ тўғри чизиққа параллел қилиб уринма ўтказилган. Уриниш нуқтасининг координаталарини топинг.
3. Тенгсизликни ечинг: $2\log_x 9 - \log_3 x > 3$.
4. $y^2 = x$ ва $x - y = 2$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.
5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — мунтазам тўрт бурчакли призма ($ABCD$ ва $A_1B_1C_1D_1$ — призманинг асослари). $AD_1C_1B$ тўртбурчакнинг юзи $4\sqrt{3}$ га тенглиги маълум. Призма ҳажми энг катта бўлиши учун унинг асос томони қандай узунликда бўлиши керак?

### *2-имтиҳон иши*

**1-вариант**

1. Ҳисобланг: $(-0{,}5 + i0{,}5\sqrt{3})^{10}$.
2. Тенгламани ечинг: $\log_{1+x}(x^2 - 3x - 4)^2 = 2$.
3. Тенгсизликни ечинг: $\cos 2x - \sin x > 1$.
4. $y = x^2 + 2|x| - 8$, $y = 4 - x^2$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг (расмини ҳам чизинг).

5. Конуснинг ён сирти $\pi$ га тенг. Конус асосининг марказидан унинг ясовчисигача масофа энг катта бўлиши учун баландлиги билан ясовчиси орасидаги бурчак қандай бўлиши керак?

**2- вариант**

1. Ҳисобланг: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8$.
2. Тенгламани ечинг: $0{,}5\log_{x-1}(x^2-7x+6)^2=1$.
3. Тенгсизликни ечинг: $\cos 2x+\cos x\geqslant -1$.
4. $y=|0{,}5x^2-x-4|$, $y=8$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.
5. Мунтазам тўрт бурчакли пирамиданинг ҳажми $\frac{4}{3}$ га тенг. Пирамида асосининг марказидан ён ёғигача масофа энг катта бўлиши учун ён ёқ пирамида асосига қандай бурчак остида оғган бўлиши керак?

### *3- имтиҳон иши*

**1- вариант**

1. Ҳисобланг: $(-1-i\sqrt{3})^{10}$.
2. Тенгламани ечинг: $0{,}5\log_{2-x}(x^2+x-6)^2=2$.
3. Тенгсизликни ечинг: $\cos 2x+\sin x\leqslant 1$.
4. $y=x^2-2|x|-3$, $y=9-x^2$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини (расмни ҳам чизиб) ҳисобланг.
5. Мунтазам тўрт бурчакли пирамиданинг ён сирти 4 га тенг. Пирамида асосининг марказидан ён ёғигача масофа энг катта бўлиши учун ён ёқ пирамида асосига қандай бурчак остида оғган бўлиши керак?

**2- вариант**

1. Ҳисобланг: $(1-i)^8$.
2. Тенгламани ечинг: $0{,}5\log_{1-x}(x^2+3x-4)^2=1$.
3. Тенгсизликни ечинг: $\cos x-\cos 2x>1$.
4. $y=|x^2+2x-3|$, $y=5$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини (расмни ҳам чизиб) ҳисобланг.
5. Конуснинг ҳажми $\frac{\pi}{3}$ га тенг. Конуснинг асос марказидан ясовчисигача масофа энг катта бўлиши учун конус баландлиги билан ясовчиси орасидаги бурчак қандай бўлиши керак?

## 1983 ЙИЛ

### *1- имтиҳон иши*

**1- вариант**

1. Ҳисобланг: $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^6$.
2. [illegible] $2x+4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=1$ тенгламанинг $\left[\frac{\pi}{2};\,2\pi\right]$ кесмага қарашли барча ечимларини топинг.
3. Тенгсизликни ечинг: $\log_2^2(4x)+\log_x 8\leqslant -2$.

4. $y = |x^2 - 3x| + x$ ва $y = x + 4$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5. Мунтазам тўрт бурчакли пирамидага радиуси 1 бўлган шар ички чизилган. Пирамида баландлигининг шундай узунлигини топингки, унда унинг ҳажми энг кичик бўлсин.

**2- вариант**

1. Ҳисобланг: $\left(\frac{-1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^6$.

2. $5\cos 2x + 4\cos^2\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = -1$ тенгламанинг $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ кесмага қарашли барча ечимларини топинг.

3. Тенгсизликни ечинг: $\log_x 9 - \log_3^2(3x) \leqslant -2$.

4. $y = |x^2 + 4x| - 2x$ ва $y = 10 - x$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5. Радиуси $R$ бўлган шарга ички чизилган мунтазам уч бурчакли пирамиданинг мумкин бўладиган энг катта ҳажмини топинг.

### 2- *имтиҳон иши*

**1- вариант**

1. Тенгсизликни ечинг: $\log_{x-1} 2 < -1$.

2. $\frac{\sin 4x - \sin 2x}{\operatorname{tg} x} = 0$ тенгламанинг $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right]$ кесмага қарашли барча ечимларини топинг.

3. $n$ нинг барча натурал қийматларида $9^n - 8n + 7$ сони 8 га каррали бўлишини исботланг.

4. $|x^2 - 4| + y = 5$ ва $y = -7$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5. Ясовчиси асос текислигига 45° ли бурчак остида оғган конус ичига цилиндр шундай чизилганки, унинг бир асоси конуснинг асос текислигида ётади, иккинчи асосининг айланаси эса конуснинг ён сиртига қарашли. Цилиндр ўқ кесими диагонали билан унинг асоси орасидаги шундай бурчакни топингки, унда цилиндр ҳажми энг катта бўлсин.

**2- вариант**

1. Тенгсизликни ечинг: $\log_{2-x} 0{,}5 > 1$.

2. $\frac{\sin 4x + \sin 2x}{\operatorname{ctg} x} = 0$ тенгламанинг $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ кесмага қарашли барча ечимларини топинг.

3. $n$ нинг барча натурал қийматларида $4^{n+1} + 15n + 32$ сони 3 га каррали бўлишини исботланг.

4. $|4 - x^2| - y = 5$ ва $y = 7$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5. Берилган ярим шар атрофида конус шундай ташқи чизилганки, конус асосининг маркази ярим шар марказида ётади, конус ясовчилари эса ярим шар сферасига уринади. Конус ясовчиси билан баландлиги орасидаги шундай бурчакни топингки, унда конуснинг ҳажми энг кичик бўладиган бўлсин.

### *3- имтиҳон иши*

**1- вариант**

1. Тенгламани ечинг: $2^{\log_{\sqrt[3]{2}} x} = 7x + 6$.
2. Тенгсизликни ечинг: $\cos 2x + \cos x > 0$, бунда $x \in [-\pi; \pi]$.
3. $n$ нинг барча натурал қийматларида $4^n + 15n + 8$ нинг 3 га бўлинишини исботланг.
4. Сферанинг радиуси 3 га тенг. Сферага мунтазам тўрт бурчакли пирамида барча учлари сферада ётадиган қилиниб ички чизилган. Пирамиданинг мумкин бўладиган энг катта ҳажмини топинг.
5. $y = -0,5x^2 + 7,5$ ва $x = |y - 6|$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

**2- вариант**

1. Тенгламани ечинг: $125^{\frac{1}{\log_x 5}} = 3x^2 - 4$.
2. Тенгсизликни ечинг: $\sin 2x + 2 \cos x < 0$, бунда $x \in [-0,5\pi; 2,5\pi]$.
3. $n$ нинг барча натурал қийматларида $3^{2n+2} - 8n + 55$ сонининг 8 га бўлинишини исботланг.
1. Радиуси $\sqrt{3}$ га тенг бўлган ярим шар атрофига ташқи чизилган мунтазам тўрт бурчакли пирамида ҳажмининг мумкин бўладиган энг кичик қийматини топинг. (Ярим шар сфераси пирамида ёқларига уринади ва пирамида асосининг шар марказида ётади.)
5. $y = -0,5x^2 + 9,5$ ва $x = -|8 - y|$ чизиқлар билан чегараланган фигура юзини топинг.

## 1984 ЙИЛ

### *1- имтиҳон иши*

**1- вариант**

1. Ҳисобланг: $(1 + i\sqrt{3})^7 + (1 - i\sqrt{3})^7$.
2. Тенгламани ечинг: $\sin^4 \dfrac{x}{2} + \sin^4 \left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{4}(1 + \sin 2x)$

   бунда $x \in [0; 2\pi]$.
3. Тенгсизликни ечинг: $4^x + 3 \cdot 2^{2-x} < 13$.
4. $y = \dfrac{x+6}{x}$ функция графиги, $x_0 = 1$ абсциссали нуқтада шу графикка ўтказилган уринма ва $x = 3$ ($\ln 3 \approx 1,1$) тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.
5. Мунтазам тўрт бурчакли пирамидага қирраси 1 га тенг бўлган куб шундай ички чизилганки, унинг бир асоси пирамида асосида, қарши ётган асосининг учлари эса пирамиданинг ён қирраларида ётади. Ҳажми энг кичик бўладиган пирамидада ён ёғининг пирамида асосига оғган бурчаги катталигини топинг.

**2- вариант**

1. Ҳисобланг: $(\sqrt{3} + i)^7 + (\sqrt{3} - i)^7$.
2. Тенгламани ечинг: $\cos^4 \dfrac{x}{2} + \cos^2 \left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{4}(1 - \sin 2x)$,

   бунда $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.
3. Тенгсизликни ечинг: $9^x + 2 \cdot 3^{1-x} > 7$.

4. $y = \frac{x-4}{x}$ функция графиги, $x_0 = 1$ абсциссали нуқтада шу функция графигига ўтказилган уринма ва $x = 5$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигура юзини ҳисобланг ($\ln 5 \approx 1,6$).

5. Мунтазам тўрт бурчакли пирамиданинг баландлиги ва апофемаси устидан ўтувчи кесим томони 2 га тенг бўлган мунтазам учбурчакдан иборат. Пирамидага мунтазам тўрт бурчакли призма шундан ички чизилганки, бунда призманинг қуйи асоси пирамида асосига қарашли, юқори асосининг учлари эса ён қирраларда ётади. Ҳажми энг катта бўладиган призма баландлигининг асос томонига нисбатини топинг.

## *2- имтиҳон иши*

**1- вариант**

1. $|z| = 2i(z+1)$ шартни қаноатлантирувчи барча $z = x + yi$ ($x \in R$, $y \in R$) комплекс сонларни топинг.
2. Тенгламани ечинг: $\sqrt{0,5(\sin x + \sin 3x)} = \cos x$.
3. Тенгсизликни ечинг: $3^{2x^2+1} + 81^x < 4 \cdot 3^{x^2+2x}$.
4. $y = 0,5^{x-4} - 6$ ва $y = -3\frac{3}{4}x + 10$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг ($\ln 0,5 \approx -0,69$).
5. Конус ичига цилиндр чизилган. Цилиндрнинг ўқ кесими периметри 4 га тенг бўлган квадрат. Энг кичик ҳажмга эга бўлган конус баландлигининг конус асоси радиусига нисбатини топинг.

**2- вариант**

1. $|z| = i(2z - 1)$ шартни қаноатлантирувчи барча $z = x + yi$ ($x \in R$, $y \in R$) комплекс сонларни топинг.
2. Тенгламани ечинг: $\sqrt{0,5(\cos x - \cos 3x)} = \sin x$.
3. Тенгсизликни ечинг: $(0,5)^{2x^2-3} + (0,5)^{4x-1} > 17 \cdot (0,5)^{x^2+2x}$.
4. $y = 2^{x+4} - 5$ ва $y = 3\frac{3}{4}x + 11$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг ($\ln 2 \approx 0,69$).
5. Конуснинг ўқ кесими периметри 3 га тенг бўлган тенг томонли учбурчакдан иборат. Шу конусга энг катта ҳажмли цилиндр ички чизилган. Цилиндр баландлигининг цилиндр асосининг радиусига нисбатини топинг.

## *3- имтиҳон иши*

**1- вариант**

1. Берилган: $\frac{1}{z} + z = \sqrt{3}$, бунда $z$ — комплекс сон. $z^{12}$ ни топинг.
2. Тенгсизликни ечинг: $x^{\log_{0,4}x-3} < 0,4^4$.
3. $y = \frac{8}{x} + 3$, $y = -x - 6$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг ($\ln 8 \approx 2,08$).
4. Тенгсизликни ечинг: $\sin x < \sin 2x \cos x$, бунда $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.
5. $V$ ҳажмли конус ичига энг катта ҳажмли цилиндр чизилган. Цилиндрнинг шу энг катта ҳажмини топинг.

**2- вариант**

1. Берилган: $\frac{1}{z} + z = 1$, бунда $z$ — комплекс сон. $z^{30}$ ни топинг.
2. Тенгсизликни ечинг: $x^{\log_{0,3} x - 2} > 0,3^3$.
3. $y = -\frac{6}{x} - 3$, $y = x + 4$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг ($\ln 6 \approx 1,79$).
4. Тенгсизликни ечинг: $\sin 2x \sin x > \cos x$, бунда $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.
5. Конусга $V$ ҳажмли цилиндр ички чизилган. Конуснинг мумкин бўладиган энг кичик ҳажмини топинг.

## 1985 ЙИЛ

### *1- имтиҳон иши*

**1- вариант**

1. $x = \frac{1+i}{1-i}$ сон $2x^3 - a^2x^2 + 2a^2x - a - 2 = 0$, $a \in R$, тенгламанинг илдизидан иборат. $a$ нинг қийматини топинг ва $a$ нинг топилган қийматида тенгламани ечинг.
2. $\cos^4 x + \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0,25$ тенгламанинг $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ кесмага қарашли барча илдизларини топинг.
3. Тенгсизликни ечинг: $\log_2 (3x + 1) \cdot \log_{0,5} (6x + 2) < -6$.
4. $y = 3\sqrt{4x + 1}$ функция графиги, шу функция графигининг $x_0 = 2$ абсциссали нуқтадаги уринмаси ва $y = 0$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.
5. $R$ радиусли шарга цилиндр ички чизилган. Цилиндр ўқ кесимининг диагонали билан асос текислиги орасидаги бурчакнинг қандай қийматида цилиндр тўла сирти энг катта бўлишини аниқланг. Цилиндр тўла сиртининг энг катта қийматини топинг.

**2- вариант**

1. $x = \frac{1-i}{1+i}$ сон $2x^3 + a^2x^2 + 2a^2x + 2 - a = 0$ тенгламанинг илдизидан иборат, $a \in R$. $a$ нинг қийматини топинг ва $a$ нинг топилган қийматида тенгламани ечинг.
2. $\sin^4 x - \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0,25$ тенгламанинг $[-\pi; 2\pi]$ кесмага қарашли барча илдизларини топинг.
3. $\log_{\frac{1}{3}} (1 - 2x) \cdot \log_3 (3 - 6x) < -2$ тенгсизликни ечинг.
4. $y = 3\sqrt{5 - 2x}$ функция графиги, шу функция графигининг $x_0 = -2$ абсциссали нуқтадаги уринмаси ва $y = 0$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5. Конус $R$ радиусли шар атрофига ташқи чизилган. Конус ясовчиси асос текислиги билан $2\alpha$ бурчак ташкил қилади. $\alpha$ нинг қандай қийматида конус ўқ кесимининг юзи энг кичик бўлади? Шу энг кичик юз қийматини топинг.

### 2-имтиҳон иши

**1-вариант**

1. $x = \frac{(1+i)^6}{8}$ сон $3x^3 - a^2x^2 + 3a^2x - 2 + a = 0$ тенгламанинг илдизидан иборат, $a \in R$. $a$ нинг қийматини топинг ва $a$ нинг топилган қийматида тенгламани ечинг.
2. $\cos^4 x - \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \pi\right) = 0{,}25$ тенгламанинг $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ кесмага қарашли барча илдизларини топинг.
3. Тенгсизликни ечинг: $\log_5(15x + 10)\log_{0,2}(3x + 2) < -2$.
4. $y = 4\sqrt{3 - x}$ функция графиги, шу функция графигининг $x_0 = -1$ абсциссали нуқтадаги уринмаси ва $y = 0$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигура юзини топинг.
5. $R$ радиусли шарга мунтазам тўрт бурчакли призма ички чизилган. Призма диагонали ва асос текислиги орасидаги бурчак $\alpha$ га тенг. $\alpha$ нинг қандай қийматида призма тўла сиртининг юзи энг катта бўлади?

**2-вариант**

1. $x = \frac{(1-i)^6}{8}$ сон $3x^3 + a^2x^2 + 3a^2x + 2 + a = 0$, $a \in R$, тенгламанинг илдизидан иборат. $a$ нинг қийматини топинг ва $a$ нинг топилган қийматида тенгламани ечинг.
2. $\sin^4 x - \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0{,}25$ тенгламанинг $[\pi; 2\pi]$ кесмага қарашли барча илдизларини топинг.
3. Тенгсизликни ечинг: $\log_{0,5}(5 - x) \cdot \log_2(10 - 2x) < -6$.
4. $y = 2\sqrt{2x - 2}$ функция графиги, шу функция графигининг $x_0 = 3$ абсциссали нуқтадаги уринмаси ва $y = 0$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.
5. Мунтазам тўрт бурчакли пирамида $R$ радиусли шар атрофига ташқи чизилган. Пирамида ён ёғи асос текислиги билан $2\alpha$ бурчак ташкил қилади. $\alpha$ нинг қандай қийматида пирамиданинг баландлиги ва апофемасидан ўтувчи текислик ҳосил қилган пирамида кесимининг юзи энг кичик бўлади?

### 3-имтиҳон иши

**1-вариант**

1. $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^8$ сонни тригонометрик шаклда ёзинг.
2. $y = -2x + 8$, $x = -1$, $y = 0$ чизиқлар билан чегараланган фигура $y = x^2 - 4x + 5$ парабола билан икки қисмга бўлинади. Ҳар қайси қисмнинг юзини топинг.
3. Тенгсизликни ечинг: $\frac{\log_{0,5}(8 - x)}{\log_2(x + 4)} > 0$.

4. Тенгламани ечинг: $\sqrt{\cos x + \cos 3x} = \sqrt{2}\cos 2x$.
5. $R$ радиусли шарга ички чизилган мунтазам уч бурчакли пирамиданинг имкони борича энг катта бўладиган хажмини топинг.

**2- вариант**

1. $(i - \sqrt{3})^6$ сонни тригонометрик шаклда ёзинг.
2. $y = x + 6$, $y = 0$, $x = 1$ чизиқлар билан чегараланган фигура $y = x^2 + 2x + 4$ парабола билан икки қисмга бўлинади. Ҳар қайси қисмнинг юзини топинг.
3. Тенгсизликни ечинг: $\frac{\log_5 (x+6)}{\log_{0,2} (10-x)} < 0$.
4. Тенгламани ечинг: $\sqrt{\sin x - \sin 3x} = \sqrt{2}\sin x$.
5. Мунтазам тўрт бурчакли пирамидага 1 радиусли шар ички чизилган. Пирамида баландлигининг шундай узунлигини топингки, унда пирамида ҳажми энг кичик бўлсин.

## 1986 ЙИЛ

### *1-имтиҳон иши*

**1- вариант**

1. $a \in R$, $b \in R$ ларнинг барча шундай қийматларини топингки, уларда ушбу тенглик бажарилсин: $4i - 2ab - abi = 3 - a^2 + b^2 i$.
2. Тенгламани ечинг: $2\cos x - |\cos x| = \operatorname{tg} x + \sec x$.
3. Тенгсизликни ечинг: $\log_2 (x^2 - 2x + 1) - 4x < 8 + 2(x+1)\log_{0,5} (1 - x)$.
4. $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{-2x}$, $y = 2$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.
5. Конуснинг ҳажми $V$ га тенг. Шу конусга ички чизилган цилиндрнинг энг катта хажмини топинг.

**2- вариант**

1. $a \in R$, $b \in R$ ларнинг барча шундай қийматларини топингки, уларда ушбу тенглик бажарилсин: $a^2 + (ab + 1)i - 5 = ai - b^2 + bi$.
2. Тенгламани ечинг: $|\sin x| + 2\sin x = \operatorname{ctg} x + \operatorname{cosec} x$.
3. Тенгсизликни ечинг:

$$(x - 3)\,2^{x^2-2x} + 16 > 8\,(x - 2^{x^2-2x-3}).$$

4. $y = \sqrt{-x}$, $y = \sqrt{3x}$, $y = 3$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.
5. Шарнинг ҳажми $V$ га тенг. Шу шарга ички чизилган цилиндрнинг энг катта ҳажмини топинг.

### *2- имтиҳон иши*

**1- вариант**

1. $z^3 + z^6$ комплекс сон модулини топинг, бунда $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.
2. $2 + \sin 2x = 3\operatorname{tg} x$ тенгламанинг $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ га қарашли барча илдизларини топинг.
3. Тенгсизликни ечинг: $9^{\lg (x-1)} + 6^{\lg (x-1)} < 2^{1 + \lg (1-2x+x^2)}$.

4. $y=\sqrt{2x+1}$ эгри чизиқ ва $A(2;\ 2)$ ва $B(4;\ 3)$ нуқталар устидан ўгувчи тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.
5. $R$ радиусли шарга энг катта ҳажмли конус ички чизилган. Шу конус ён сиртининг юзини топинг.

**2- вариант**

1. $z^3-z^4$ комплекс сон модулини топинг, бунда $z=\cos\alpha+i\sin\alpha,\ \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.
2. $3+\cos 2x=-3\operatorname{ctg} x$ тенгламанинг $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$ кесмага қарашли барча илдизларини топинг.
3. Тенгсизликни ечинг: $4^{1+\lg(1-x)}-6^{\lg(1-x)}>2\cdot 3^{2+\lg(x^2-2x+1)}$.
4. $y=\sqrt{2-x}$ эгри чизиқ ва $A(1;\ 1)$ ва $B(-5;\ 3)$ нуқталар устидан ўгувчи тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.
5. $R$ радиусли шарга ён сирти энг катта бўлган конус ички чизилган. Шу конуснинг ҳажмини топинг.

## *3-имтиҳон иши*

**1- вариант**

1. $2z=|z|+2i$ шартни қаноатлантирувчи барча $z$ комплекс сонларни топинг.
2. $\sin 2x-\operatorname{tg} x=4\sin 4x$ тенгламанинг $[\pi;\ 2\pi]$ га қарашли барча ечимларини топинг.
3. Тенгсизликни ечинг: $\log_{x-1}(x^2-6x+9)\leqslant 1$.
4. $y=x^2-2x$ эгри чизиқ, шу эгри чизиқнинг $x_0=3$ абсциссали нуқтадаги уринмаси ва $x=-1$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.
5. Конус асосининг радиуси $R$ га, баландлиги $H$ га тенг. Шу конус ичига бошқа конус шундай жойлаштирилганки, унинг учи берилган конус асосининг марказида туради, асоси эса берилган конус асосига параллел бўлган текислик билан кесилганда ҳосил бўлган кесмадан иборат. Иккинчи конуснинг мумкин бўлган энг катта ҳажмини топинг.

**2- вариант**

1. $|z|-iz=1-2i$ шартни қаноатлантирувчи барча $z$ комплекс сонларни топинг.
2. $\operatorname{ctg} x-\sin 2x=16\sin 4x$ тенгламанинг $[0;\ \pi]$ га қарашли барча ечимларини топинг.
3. Тенгсизликни ечинг: $\log_{\frac{x-1}{5}}(x^2-10x+25)>0$.
4. $y=2x-x^2$ эгри чизиқ, шу эгри чизиқнинг $x_0=-1$ абсциссали нуқтадаги уринмаси ва $x=3$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.
5. Асосининг томони $a$ га, $SO$ баландлиги эса $h$ га тенг бўлган $SABCD$ мунтазам тўрт бурчакли пирамида ичига бошқа пирамида жойлаштирилган бўлиб, унинг учи $O$ нуқтада туради, асоси эса берилган пирамида асосига параллел текислик билан кесилганида ҳосил бўладиган кесимдан иборат. Иккинчи пирамиданинг мумкин бўлган энг катта ҳажмини топинг.

# 1987 ЙИЛ

## *1- имтиҳон иши*

**1- вариант**

1. Ҳисобланг: $\dfrac{16i\left(\sin\dfrac{\pi}{3}-i\cos\dfrac{\pi}{3}\right)^2}{(\sqrt{3}+i)^4}$.
2. $\sqrt{2\sin x}=-\sqrt{3}\operatorname{tg}x$ тенгламанинг $[\pi;\ 3\pi]$ оралиққа қарашли барча ечимларини топинг.
3. Ушбу тенгсизликни ечинг: $\log_2(x^2-3x)\leqslant 5+\log_{0,5}(x+4)$.
4. $y=\dfrac{2}{(2x-1)^2}$ функциянинг графиги, $x_0=1$ абсциссали нуқтада шу функция графигига ўтказилган уринма ва $x=2$ тўғри чизиқ билан чегараланган шаклнинг юзини топинг.
5. $y=8^x-2^{x+1}-x\ln 2$ функциянинг ўсиш, камайиш оралиқлари, экстремум нуқталарини кўрсатинг. Шу функциянинг $[-1;\ 1]$ даги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

**2- вариант**

1. Ҳисобланг: $\dfrac{16i\left(\sin\dfrac{\pi}{6}+i\cos\dfrac{\pi}{6}\right)^2}{(i\sqrt{3}-1)^4}$.
2. $\sqrt{2\cos x}=-\sqrt{3}\operatorname{ctg}x$ тенгламанинг $\left[\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$ оралиққа қарашли барча ечимларини топинг.
3. Ушбу тенгсизликни ечинг: $\log_{0,5}(2x^2+3x)>\log_2(2-x)-3$.
4. $y=\dfrac{2}{(2x+1)^2}$ функциянинг графиги, $x_0=0$ абсциссали нуқтада шу функциянинг графигига ўтказилган уринма ва $x=1$ тўғри чизиқ билан чегараланган шаклнинг юзини топинг.
5. $y=4^x-8^x+x\ln 2$ функциянинг ўсиш, камайиш оралиқлари, экстремум нуқталарини кўрсатинг. Шу функциянинг $[-1;\ 1]$ даги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

## *2- имтиҳон иши*

**1- вариант**

1. Ҳисобланг: $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^6$.
2. Тенгсизликни ечинг: $\log_2(3x-x^2)<1$.
3. $\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2-4\cos^2 3x$ тенгламанинг $\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ оралиққа қарашли барча илдизларини топинг.
4. $y=\ln(5-2x)+x^2-2x$ функциянинг ўсиш, камайиш оралиқлари, экстремум нуқталарини кўрсатинг. Шу функциянинг $[1;\ 2]$ даги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.
5. $y=4\sqrt{-x}$, $y=3\sqrt{x}$ функцияларнинг графиклари ва $M(-4;\ 8)$ нуқтада $y=4\sqrt{-x}$ функциянинг графигига ўтказилган уринма билан чегараланган шаклнинг юзини топинг.

**2- вариант**

1. Ҳисобланг: $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^4$.
2. Тенгсизликни ечинг: $\log_{0,25}(x^3-12x)>-2$.
3. $\sqrt{3}\sin 6x+\cos 6x=2-4\sin^2 x$ тенгламанинг $\left[\frac{\pi}{12};\ \pi\right]$ оралиққа қарашли барча илдизларини топинг.
4. $y=\ln(2x-1)+x^2-4x$ функциянинг ўсиш, камайиш оралиқлари, экстремум нуқталарини кўрсатинг. Шу функциянинг $[1;\ 2]$ даги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.
5. $y=\sqrt{5x}$, $y=2\sqrt{-x}$ функцияларнинг графиклари, $M\ (5;\ 5)$ нуқтада $y=\sqrt{5x}$ функциянинг графигига ўтказилган уринма билан чегараланган шаклнинг юзини топинг.

## *3- имтиҳон иши*

**1- вариант**

1. $z=\sin 2\alpha-i\ (1+\cos 2\alpha)$ комплекс сонни тригонометрик шаклда ёзинг, бунда $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.
2. $3+2\sin^2 x-5\cos 4x=\frac{8}{1+\mathrm{tg}^2 x}$ тенгламани ечинг. Шу тенгламанинг $[\pi;\ 2\pi]$ оралиққа қарашли илдизларини кўрсатинг.
3. Тенгсизликни ечинг: $2\log_{3x-6}9-\log_3(x-2)\geqslant 1$.
4. Ушбу тенгламалар системасини ечинг: $\begin{cases}\sqrt{x^2+y}=x-y,\\ 2^y+4=9\cdot 2^x.\end{cases}$
5. Қандай $a>0$ ларда $y=\frac{x}{3}+\frac{2}{x^2}$, $x=a$, $x=2a$, $y=0$ чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзи энг кичик бўлади?

**2- вариант**

1. $z=\sin 2\alpha+i\ (1-\cos 2\alpha)$ комплекс сонни тригонометрик шаклда ёзинг, бунда $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.
2. Тенгламани ечинг: $3-4\cos^2 x+\cos 4x=\frac{2}{1+\mathrm{ctg}^2 x}$. Шу тенгламанинг $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$ га қарашли илдизларини кўрсатинг.
3. Тенгсизликни ечинг: $\log_2(x+2)+3\log_{2x+4}4\leqslant 4$.
4. Тенгламалар системасини ечинг: $\begin{cases}\sqrt{2x+y^2}=y-x,\\ 3^x+3=28\cdot 3^y.\end{cases}$
5. Қандай $a>0$ ларда $y=\frac{x^2}{3}+\frac{10}{x^2}$, $x=a$, $x=2a$, $y=0$ чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзи энг кичик бўлади?

## 1988 ЙИЛ

### *1- имтиҳон иши*

**1- вариант**

1. Тенгламани ечинг: $z^6 + (8 - i) z^3 + (1 + i)^6 = 0$.
2. Функциянинг аниқланиш соҳаси ва қийматлар соҳасини топинг:

$$y = \frac{\sin 3x}{1 - 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)}.$$

3. $P(x)$ кўпҳад $x + 1$ га қолдиқсиз бўлинади, $x^2 - 3x$ га бўлинганда эса қолдиқда $7x - 1$ қолади. $P(x)$ кўпҳадни $x^3 - 2x^2 - 3x$ га бўлганда қоладиган қолдиқни топинг.
4. $y = \sqrt{8 - x^2}$ функция графигининг уринмасидан иборат бўлган тўғри чизиқ $A(-3;\ 1)$ нуқта орқали ўтади. Шу тўғри чизиқнинг абсциссалар ўқига нисбатан оғиш бурчагини топинг. Шу функция графиги ва уринмани тасвирловчи расмни чизинг.
5. Қия ҳаракат қилаётган поезднинг тезлиги $v(t) = 15 + 0{,}2t$ тенглама билан берилган. Агар поезд қиялик бўйича 20 с юрган бўлса, қияликнинг узунлигини топинг. (Масофа метрларда ўлчанади.)

**2- вариант**

1. Тенгламани ечинг: $z^4 + (2 - 4i) z^3 - (1 - i)^6 = 0$.
2. Функциянинг аниқланиш соҳаси ва қийматлар соҳасини топинг:

$$y = \frac{\cos 3x}{\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}$$

3. $Q(x)$ кўпҳад $x - 2$ га қолдиқсиз бўлинади, $x^2 + x$ га бўлинганда қолдиқда $-4x + 2$ қолади. $Q(x)$ кўпҳадни $x^3 - x^2 - 2x$ га бўлишда чиқадиган қолдиқни топинг.
4. $y = \sqrt{18 - x^2}$ функция графигининг уринмасидан иборат бўлган тўғри чизиқ $A(9;\ -3)$ нуқта орқали ўтади. Шу тўғри чизиқнинг абсциссалар ўқига нисбатан оғиш бурчагини топинг. Шу функциянинг графигини ва уринмани тасвирловчи расмни чизинг.
5. Автомобилнинг тормозланишдаги тезлиги $v(t) = 18 - 1{,}2t$ формула билан ифодаланади. Агар автомобиль тормозланиш бошланганидан 15 с ўтгач тўхтаган бўлса, унинг шу даврда ўтган йўлини топинг. (Масофа метрларда ўлчанади.)

### *2- имтиҳон иши*

**1- вариант**

1. $x_1 = \left(\sin\frac{3\pi}{8} - i\cos\frac{3\pi}{8}\right)$ сони $x^3 - (a + 3)x^2 + a^2x - 1 - a^2 = 0$ $(a \in R)$ тенгламанинг илдизи экани маълум. $a$ нинг қийматини топинг ва тенгламани $a$ нинг шу қийматида ечинг.
2. Тенгламани ечинг: $\dfrac{\cos x - \sin 2x}{\cos 3x} = 1$.
3. Тенгсизликни ечинг: $\log_4^2(2x) + \log_{0.5}\dfrac{\sqrt{x}}{2} > 1{,}5$.
4. Тенгламалар системасини ечинг: $\begin{cases} 2\sqrt{xy} - \sqrt{xy} = 1, \\ x^2 + y^2 - x - y = 1{,}75. \end{cases}$

5. Ушбу $f(x)=\dfrac{4}{(1-2x)^3}$ $(x>0{,}5)$

функциянинг шундай бошланғич функциясини топингки, $y=4-4x$ тўғри чизиқ унинг графигига уринадиган бўлсин.

**2- вариант**

1. $x_1=\left(\sin\dfrac{5\pi}{8}+i\cos\dfrac{5\pi}{8}\right)^4$ сони $x^3+(a-2)x^2+a^2x-2a^2-1=0$ $(a\in R)$ тенгламанинг илдизидан иборат. $a$ нинг қийматини топинг ва тенгламани $a$ нинг шу қийматида ечинг.

2. Тенгламани ечинг: $\dfrac{\cos x+\sin 2x}{\cos 3x}=1.$

3. Тенгсизликни ечинг: $\log^2_{\frac{1}{9}}\dfrac{x}{3}+3\log_{27}(3\sqrt{x})<2{,}25.$

4. Тенгламалар системасини ечинг: $\begin{cases}3\sqrt[3]{xy}-2\sqrt[6]{xy}=1,\\ x^2+y^2-2x-2y=-0{,}75.\end{cases}$

5. Ушбу $f(x)=\dfrac{8}{(2x-1)^3}$ $(x>0{,}5)$

функциянинг шундай бошланғич функциясини топингки, $y=8x-8$ тўғри чизиқ унинг графигига уринадиган бўлсин.

### *3- имтиҳон иши*

**1- вариант**

1. Ҳисобланг: $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^8.$

2. Тенгламани ечинг: $\log^2_9 x^4\cdot\log_{x^6}3=1.$

3. $f(x)=3x(x-2)$ функциянинг шундай $F$ бошланғич функциясини топингки, унинг графиги $M(1;\ 2)$ нуқтадан ўтадиган бўлсин. $x$ нинг $F(x)\leqslant 0$ бўладиган барча қийматларини топинг.

4. Тенгламалар системасини ечинг: $\begin{cases}\sqrt{\cos 2x-\cos y}=-\cos x,\\ \sin x+\cos y=\sin^2x.\end{cases}$

5. $a$ нинг қандай қийматларида $y=a+x\ln 2$ тўғри чизиқ $y=4^x-2^{x+2}+x\ln 8$ функциянинг графигига уринади?

**2- вариант**

1. Ҳисобланг: $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^8+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^8.$

2. Тенгламани ечинг: $\log^2_{x^4}16\cdot\log_4x^6=1.$

3. $f(x)=6x(x-1)$ функциянинг шундай $F$ бошланғич функциясини топингки, унинг графиги $M(-1;\ 4)$ нуқтадан ўтадиган бўлсин. $x$ нинг $F(x)<0$ бўладиган барча қийматларини топинг.

4. Тенгламалар системасини ечинг: $\begin{cases}\sqrt{\sin y-\cos 2x}=-\sin x,\\ \cos x-\sin y=\cos^2x.\end{cases}$

5. $a$ нинг қандай қийматларида $y=a+x\ln 81$ тўғри чизиқ $y=9^x+2\cdot 3^{x+1}-x\ln 81$ функция графигининг уринмасидан иборат бўлади?

## ИМТИҲОН ИШЛАРИНИНГ ЖАВОБЛАРИ

**1- вариант** **1- и (1982)**

1. $a = -1$. 2. $\left(\frac{13\pi}{12}; 1\right)$. 3. $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$, $1 < x \leqslant 8$. 4. 4,5. 5. 2.

**2- вариант** **1- и (1982)**

1. 1. 2. $\left(\frac{11\pi}{12}; 1\right)$. 3. $0 < x \leqslant \frac{1}{81}$, $1 < x \leqslant 3$. 4. 4,5. 5. 2.

**1- вариант** **2- и (1982)**

1. $-0{,}5 + 0{,}5i\sqrt{3}$. 2. 3; 5. 3. $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant 2\pi n$, $n + 2\pi n \leqslant x \leqslant \leqslant \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$. 4. $29\frac{1}{3}$. 5. $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$.

**2- вариант**

1. 1. 2. 5; 7. 3. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. 4. $47\frac{1}{3}$. 5. $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

**1- вариант** **3- и (1982)**

1. $-2^9(1 + i)\sqrt{3})$. 2. $-4$; $-2$. 3. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $\pi + + 2\pi n \leqslant x \leqslant 2\pi + 2\pi n$. 4. 54. 5. $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$.

**2- вариант** **3- и (1982)**

1. 16. 2. $-5$; $-3$. 3. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. 4. $14\frac{2}{3}$. 5. $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$.

**1- вариант** **3- и (1983)**

1. $8i$. 2. $\frac{\pi}{2}$, $\pi + \arcsin\frac{2}{3}$, $2\pi - \arcsin\frac{2}{3}$. 3. $\frac{1}{3} \leqslant x < 1$. 4. $11\frac{5}{6}$. 5. 4.

**2- вариант** 1- и (1983)

1. $\frac{i}{8}$. 2. $\pi + \arcsin\frac{4}{5}$, $2\pi - \arcsin\frac{4}{5}$, $\frac{5\pi}{2}$. 3. $0 < x \leqslant \frac{1}{9}$, $\frac{1}{3} \leqslant x < 1$, $x \geqslant 3$. 4. $35\frac{5}{6}$. 5. $\frac{8R^3\sqrt{3}}{27}$.

**1- вариант** 2- и (1983)

1. $1{,}5 < x < 2$. 2. $\pm\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$. 4. 64. 5. arctg 0,25.

**2- вариант** 2- и (1983)

1. $1 < x < 1{,}5$. 2. $\pm\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$. 4. 64. 5. $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$.

**1- вариант** 3- и (1983)

1. 3. 2. $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$. 4. $21\frac{1}{3}$. 5. $3\frac{2}{3}$.

**2- вариант** 3- и (1983)

1. 2. 2. $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$. 4. 18. 5. $3\frac{2}{3}$.

**1- вариант** 1- и (1984)

1. 128. 2. 0; $\frac{3\pi}{2}$; $2\pi$. 3. $0 < x < \log_2 3$. 4. $6\ln 3$. 5. arctg 4.

**2- вариант** 1- и (1984)

1. $-128\sqrt{3}$. 2. $-\frac{\pi}{2}$, $\pi$, $\frac{3\pi}{2}$. 3. $x < 0$, $x > \log_3 2$. 4. $16 + 4\ln 5$. 5. $0{,}25\sqrt{3}$

**1- вариант** 2- и (1984)

1. $-1 - \frac{i}{\sqrt{3}}$. 2. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{2} + \pi n$ 3. $0 < x < 1$, $1 < x < 2$. 4. $34 + \frac{15}{\ln 0{,}5} \approx 12{,}26$. 5. 4.

**2- вариант** 2- и (1984)

1. $\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{6}$. 2. $\pi n$, $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$. 3. $x \leqslant -1$, $x = 1$, $x \geqslant 3$. 4. $\approx 12{,}26$. 5. $0{,}5\sqrt{3}$.

**1- вариант** 3- и (1984)

1. $-\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{11}{2}i$. 2. $0 < x < \frac{16}{625}$, $x > 2{,}5$. 3. $\frac{63}{2} - 8\ln 8 \approx 14{,}86$. 4. $0 < x < \frac{\pi}{4}$ .5. $\frac{4}{9}V$.

**2- вариант** 3- и (1984)

1. $-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$. 2. $0 < x < 0{,}027$, $x > \frac{10}{3}$. 3. $17{,}5 - 6 \ln 6 \approx 6{,}76$. 4. $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. 5. $\frac{9V}{4}$.

**1- вариант** 1- и (1985)

1. $a = -1$; $0{,}5$; $\pm i$. 2. $\pm \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$. 3. $-\frac{1}{3} < x < -\frac{7}{24}$, $x > 1$. 4. 6,75. 5. $\alpha = 0{,}5 \operatorname{arctg} 2$; $S = \pi R^2 (1 + \sqrt{5})$ -

**2- вариант** 1- и (1985)

1. $a = 1$, $x_1 = -0{,}5$, $x_{2,3} = \pm i$. 2. $-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. 3. $\frac{4}{9} < x < \frac{1}{2}$, $x < -1$. 4. 13,5. 5. $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $S = 3R^2\sqrt{3}$.

**1- вариант** 2- и (1985)

1. $a = 1$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_{2,3} = \pm i$. 2. $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$. 3. $-\frac{2}{3} < x < -\frac{49}{75}$, $x > 1$. 4. $10\frac{2}{3}$.. 5. $\alpha = 0{,}5 \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$.

**2- вариант** 2- и (1985)

1. $a = -1$, $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_{2,3} = \pm i$. 2. $\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. 3. $x < 1$, $4\frac{7}{8} < x < 5$. 4. $\frac{8}{3}$. 5. $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

**1- вариант** 3- и (1985)

1. $64\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right)$. 2. $10\frac{2}{3}$, $14\frac{1}{3}$. 3. $-4 < x < -3$, $7 < x < 8$. 4. $2\pi n$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. 5. $\frac{8R^3\sqrt{3}}{27}$.

**2- вариант** 3- и (1985)

1. $256\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i \sin\frac{2\pi}{3}\right)$. 2. 4,5; 20. 3. $-5 < x < 9$. 4. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\pi n$, $n \in Z$. 5. 4.

**1- вариант** 1- и (1986)

1. $(3; 1)$, $(-3; -1)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$. 2. $2\pi n$, $\pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. 3. $x < -3$, $-2 < x < 1$. 4. 4. 5. $\frac{4V}{9}$.

**2- вариант** 1- и (1986)

1. (2; 1), (1; 2), (1; — 2), (— 2; 1). 2. $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\arccos\frac{2}{3}+2\pi n$, $n\in\in Z$. 3. $-1<x<2$, $x>3$. 4. 12. 5. $\frac{V}{\sqrt{3}}$.

**1- вариант** 2- и (1986)

1. $-2\cos\alpha$. 2. $\frac{5\pi}{4}$. 3. $1<x<2$. 4. $\frac{2}{3}$. 5. $\frac{8\pi R^3\sqrt{3}}{9}$.

**2- вариант** 2- и (1986)

1. $-2\sin\alpha$. 2. $\frac{3\pi}{4}$. 3. $0{,}99<x<1$. 4. $\frac{1}{6}$. 5. $\frac{32\pi R^3}{81}$.

**1- вариант** 3- и (1986)

1. $\frac{1}{\sqrt{3}}+i$. 2. $\pi$, $2\pi$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$ $\pi+\arccos\frac{1}{4}$, $2\pi-\arccos\frac{1}{4}$. 3. $1<x<<2$, $2<x<3$, $3<x\leqslant 5$. 4. $21\frac{1}{3}$. 5. $\frac{4}{81}\pi R^2H$.

**2- вариант** 3- и (1986)

1. $2-1{,}5\,i$. 2. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\arcsin\frac{1}{8}$, $\pi-\arcsin\frac{1}{8}$. 3. $4\leqslant x<5$, $5<<x<6$, $x>6$. 4. $21\frac{1}{3}$. 5. $\frac{4}{81}a^2h$.

**1- вариант** 1- и (1987)

1. $-i$. 2. $\pi$, $2\pi$, $\frac{17\pi}{6}$, $3\pi$. 3. $-4<x<0$, $3<x\leqslant 4$. 4. $2\frac{2}{3}$. 5. Камайиш оралиғи — $(-\infty;\ 0]$, ўсиш оралиғи — $[0;\ +\infty)$, $\min\limits_{[-1;\ 1]} y=-1$, $\max\limits_{[-1;\ 1]} y=4-\ln 2$.

**2- вариант** 1- и (1987)

1. $i$. 2. $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{2}$. 3. $-2\leqslant x<1{,}5$, $0<x<2$. 4. $2\frac{2}{3}$. 5. Ўсиш оралиғи — $(-\infty;\ 0]$, камайиш оралиғи — $[0;\ +\infty)$, $\max\limits_{[-1;\ 1]} y=0$; $\min\limits_{[-1;\ 1]} y=\ln 2-4$.

**1- вариант** 2- и (1987)

1. $-\frac{i}{8}$. 2. $-2<x<-\sqrt{3}$, $0<x<1$, $1<x<\sqrt{3}$. 3. $\frac{\pi}{24}$, $\frac{11\pi}{48}$, $\frac{23\pi}{48}$. 4. Ўсиш оралиғи — $[1{,}5;\ 2]$, камайиш оралиқлари — $(-\infty;\ 1]$, $[2;\ 2{,}5)$; $\max\limits_{[1;\ 2]} y=\ln 3-1$, $\min\limits_{[1;\ 2]} y=\ln 2-0{,}75$. 5. $4\frac{1}{6}$.

**2- вариант** 2- и (1987)

1. $-8i$. 2. $-2\sqrt{3}<x<-2$, $-2<x<0$, $2\sqrt{3}<x<4$. 3. $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{13\pi}{24}$, $\frac{19\pi}{24}$. 4. Ўсиш оралиқлари — $(0{,}5;\ 1]$, $[1{,}5;\ +\infty)$, камайиш оралиғи — $[1;\ 1{,}5]$. 5. 3.

**1- вариант** 3- и (1987)

1. $-2\cos\alpha\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)$. 2. $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$. 3. $2<x\leqslant 2\frac{1}{27}$, $2\frac{1}{3}<x\leqslant 5$. 4. $(-1;\ -1)$. 5. $\alpha=1$.

**2- вариант** 3- и (1987)

1. $-2\sin\alpha(\cos(\pi+\alpha)+i\sin(\pi+\alpha))$. 2. $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$. 3. $-2<x<-1{,}5$, $0\leqslant x\leqslant 2$. 4. $(-2;\ -2)$. 5. $\alpha=1$.

**1- вариант** 1- и (1988)

1. $-2$, $-i$, $1\pm i\sqrt{3}$, $\pm 0{,}5\sqrt{3}+0{,}5i$. 2. $x\neq\pi n$, $x\neq-\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$; $\left[-1;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ 1\right]$. 3. $2x^2+x-1$. 4. $45^\circ$.

**2- вариант** 1- и (1988)

1. $\pm i\sqrt{2}$, $\pm 2(1+i)$. 2. $x\neq-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; $[-1;\ 3)$. 3. $x^3-3x+2$. 4. $135^\circ$. 5. 135 м.

**1- вариант** 2- и (1988)

1. $a=-1$; $x_1=2$, $x_{2,3}=\pm i$. 2. $\pi n$, $n\in Z$. 3. $0<x<0{,}5$, $x>2$. 4. $(2;\ 0{,}5)$, $(0{,}5;\ 2)$. 5. $F(x)=\frac{1}{(2x-1)^2}-1$, $x\in(1;\ +\infty)$.

**2- вариант** 2- и (1988)

1. $a=-1$, $x_1=3$, $x_{2,3}=\pm i$. 2. $\pi n$, $n\in Z$. 3. $\frac{1}{9}<x<9$. 4. $(2;\ 0{,}5)$, $(0{,}5;\ 2)$. 5. $F(x)=1-\frac{1}{(2x-1)^4}$, $x\in(1;\ +\infty)$.

**1- вариант** 3- и (1988)

1. $-2i$. 2. $\pm 3\sqrt{3}$. 3. $F(x)=x^3-3x^2+4$; $x\leqslant-1$, $x=2$ да $F(x)\leqslant 0$. 4. $\left(\pi+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+2\pi k\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$. 5. $a=-3$.

**2- вариант** 3- и (1988)

1. $2i$. 2. $\pm 8$. 3. $F(x)=3x^3-2x^3-1$; $-0{,}5<x<1$, $x>1$ да $F(x)<0$. 4. $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ (-1)^k\arcsin\frac{1}{4}+\pi k\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$ 5. $a=7$.

# МУНДАРИЖА

ГАЛИЦКИЙ МИХАИЛ ЛЬВОВИЧ
МОШКОВИЧ МАТВЕЙ МОИСЕЕВИЧ
ШВАРЦБУРД СЕМЁН ИСААКОВИЧ

**АЛГЕБРА ВА МАТЕМАТИК АНАЛИЗ КУРСИНИ ЧУҚУР ЎРГАНИШ**

Ўқитувчи учун қўлланма

Қайта ишланган русча 2- нашридан таржима

*Тошкент «Ўқитувчи» 1995*

Таҳририят мудири *М. Пўлатов*
Муҳаррирлар: *Н. Ғоипов. С. Бек[illegible]оева*
Расмлар муҳаррири *Т. Қаноатов*
Техн. муҳаррир *Т. Грешникова*
Мусаҳҳиҳа *Э. Содиқова*

ИБ № 6372

Теришга берилди 20.10.93. Босишга рухсат этилди 3.10.95. Бичими 60×90/₁₆. Тип. қоғо
Литературная гарн. Кегли 10 шпонсиз. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 24,0
Шартли кр.-отт. 24,19. Нашр. л. 18,48. 14000 нусхада босилди. Буюртма № 2759.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент, 129. Навоий кўчаси, 30. Шартнома 09-206-93.

Ўзбекистон Давлат матбуот қўмитасининг Тошполиграфкомбинати. Тошкент, Навоий кўчаси
30. 1995.