ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ЎРТА МАХСУС, КАСБ-ҲУНАР ТАЪЛИМИ МАРКАЗИ

А. АБДУҲАМИДОВ, Ҳ. НАСИМОВ,
У. НОСИРОВ, Ж. ҲУСАНОВ

АЛГЕБРА ВА МАТЕМАТИК АНАЛИЗ АСОСЛАРИДАН МАСАЛАЛАР ТЎПЛАМИ

I қисм

Академик лицейлар ва касб-ҳунар коллежлари учун ўқув қўлланма

«ШАРҚ» НАШРИЁТ-МАТБАА
АКЦИЯДОРЛИК КОМПАНИЯСИ
БОШ ТАҲРИРИЯТИ
ТОШКЕНТ — 2002

Т а қ р и з ч и л а р:

Ўзбекистон миллий университети қошидаги
С. Х. СИРОЖИДДИНОВ номли академик лицей;

СамДУ қошидаги гимназия математика ўқитувчиси,
физика-математика фанлари номзоди, доц. *Х. Н. НОСИРОВА*.

*Ҳ. А. НАСИМОВ*нинг умумий таҳрири остида

СЎЗ БОШИ

Республикамизда таълим соҳасида улкан ўзгаришлар амалга оширилаётган ҳозирги даврда академик лицейларнинг математика фани чуқур ўрганиладиган гуруҳлари учун амалдаги ўқув дастурига тўлиқ мос келадиган ва дастурдаги мавзулар бўйича турли хил қийинлик даражасига эга бўлган мисол ва масалаларни қамраб оладиган масалалар тўпламининг мавжуд эмаслиги ушбу «Алгебра ва математик анализ асосларидан масалалар тўплами»нинг яратилишига сабаб бўлди.

Ўқув қўлланма Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги томонидан тасдиқланган ва 2000—2001 ўқув йилидан бошлаб амалга киритилган ўқув дастурига қатъий амал қилинган ҳолда ёзилди.

Қўлланма асосан академик лицейларнинг ўқувчилари учун мўлжалланган бўлиб, ундан касб-ҳунар коллежлари ўқувчилари, умумтаълим мактабларининг ўқитувчилари, шунингдек, математикани мустақил ўрганувчилар ҳам фойдаланишлари мумкин.

Қўлланма етти бобдан иборат бўлиб, ҳар бир боб параграфларга бўлинган ва у қуйидаги мавзуларни ўз ичига олади:

1. Тўпламлар назарияси ва математик мантиқ элементлари.
2. Ҳақиқий сонлар.
3. Комплекс сонлар.
4. Кўпҳадлар.
5. Алгебраик ифодалар.
6. Алгебраик тенгламалар ва тенгсизликлар.
7. Функциялар ва графиклар.

Муаллифлар зарур деб ҳисоблаган ўринларда мисол ва масалаларнинг ечимлари, ечишга доир кўрсатмалар келтирилган.

Муаллифлар ўқув қўлланмасининг яратилиши ва унинг сифатини яхшилашга яқиндан ёрдам берган СамДУ академик лицейи ўқитувчилари, Ўзбекистон Республикасида хизмат кўрсатган ёшлар мураббийси Р. Ғуломовга, физика-математика фанлари номзоди, доц. А. Умаровга миннатдорчилик билдиришни ўз бурчлари деб ҳисоблайдилар, шунингдек, китобни Pentium компьютерида саҳифалаган В. А. Мамедов ва И. Х. Насимовларга самимий ташаккур билдирадилар.

Масалалар тўпламида баъзи бир камчиликлар учраши эҳтимолдан холи эмас. Камчиликлар ҳақида фикр ва мулоҳазалар билдирган ҳамкасбларга муаллифлар олдиндан самимий ташаккур изҳор этадилар.

I б о б. ТЎПЛАМЛАР НАЗАРИЯСИ ВА МАТЕМАТИК МАНТИҚ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1-§. ТЎПЛАМ ВА УНИНГ ЭЛЕМЕНТЛАРИ. БЎШ ТЎПЛАМ

Тўплам тушунчаси математиканинг таърифланмайдиган тушунчаларидан биридир.

Тўпламни ташкил этган нарсалар унинг *элементлари* дейилади. Масалан, 5 дан кичик бўлган натурал сонлар тўплами қуйидаги элементлардан ташкил топади: 1,2,3,4.

Тўпламлар лотин алифбосининг бош ҳарфлари билан, унинг элементлари эса шу алифбонинг кичик ҳарфлари билан белгиланади. Масалан, $A=\{a,b,c,d\}$ ёзуви А тўплам a, b, c, d элементлардан ташкил топганлигини билдиради.

Агар x элемент X тўпламнинг элементи бўлса , $x\in X$ шаклда ёзилади. $x\notin X$ ёзуви x элемент X тўпламнинг элементи эмаслигини билдиради.

Масалан, агар N-натурал сонлар тўплами бўлса, у ҳолда $4\in N$, $5\in N$, $\frac{3}{4}\notin N$, $\pi\notin N$.

Бирорта ҳам элементга эга бўлмаган тўплам бўш тўплам дейилади ва $\varnothing$ белги билан белгиланади.

Тўпламга тегишли бўлган элементларгина қаноатлантирадиган шартлар системасини шу **тўпламнинг характеристик хоссаси** деб аташ қабул қилинган.

Мисол. $A=\{x|x\in N,\ x<7\}$ тўплам элементларини кўрсатинг.

Ечиш. А тўплам 7 дан кичик бўлган барча натурал сонлардан тузилган, яъни $A=\{1,2,3,4,5,6\}$.

1.1. Ўзбекистон Республикасидаги барча вилоятлар ва Қорақалпоғистон Республикаси номлари тўпламини тузинг.

1.2. Ўзбекистон Республикаси давлат мадҳиясида қатнашган ҳарфлар тўпламини тузинг.

1.3. Ўзбекистон Республикасининг давлат герби қабул қилинган санада қатнашган рақамлар тўпламини тузинг.

1.4. $B=\{10;\ 12\frac{3}{4};\ 17,3;\ -7;\ 136\}$ тўплам берилган. Қайси натурал сон бу тўпламга киради? Шу тўпламга тегишли бўлмаган учта сон айтинг. $\in$, $\notin$ белгилари ёрдамида қўйилган саволларга жавоб ёзинг.

1.5. S тўплам -3;-2;-1;4 элементлардан тузилган. Шу тўпламни ёзинг. Шу сонларга қарама-қарши сонларнинг S_1 тўпламини тузинг.

1.6. «Бўш вақтдан унумли фойдалан» жумласидаги ҳарфлар тўпламини тузинг.

1.7. Қуйидаги ёзувларни ўқинг ва ҳар бир тўпламнинг элементларини кўрсатинг:

а) $E=\{x|\ x\in N,\ -1<x<5\}$; б) $F=\{x|\ 5x=x-7\}$;
в) $Q=\{x|\ x(x+12)=0\}$; г) $U=\{x|\ x\in R,\ x^2=2\}$;
д) $V=\{x|\ x\in N,\ x^2<9\}$; е) $W=\{x|\ x\in N,\ x^2\leq 9\}$.

1.8. Қуйидаги тўпламларни сон ўқида белгиланг:

а) $\{x|\ x\in N,\ x\leq 3\}$; б) $\{x|\ x\in Z,\ -2\leq x\leq 2\}$;
в) $\{x|\ x\in R,\ x>4.1\}$; г) $\{x|\ x\in R,\ -2,7\leq x\leq 1\}$;
д) $\{x|\ x\in R,\ x<6\}$; е) $\{x|\ x\in R,\ 3,4<x\leq 8$;
ж) $\{x|\ x\in R,\ -3\frac{1}{4}\leq x\leq -1\}$; з) $\{x|\ x^2=4\}$;
к) $\{x|\ (x^2-1)(x^2-4)=0\}$

1.9. Қуйидаги тўплам элементларини топинг:

а) 1 ва 3 билангина ёзиладиган барча уч хонали сонлар тўплами;

б) 1,3,5 рақамларидан (фақат бир марта) фойдаланиб ёзиладиган барча уч хонали сонлар тўплами;

в) Рақамларининг йиғиндиси 5 га тенг бўлган уч хонали сонлар тўплами;

г) 100 дан кичик ва охирги рақами 1 бўлган барча натурал сонлар тўплами.

1.10. Қуйидаги тўпламлардан қайсилари бўш тўплам:

а) Симметрия марказига эга бўлмаган квадратлар тўплами;

б) $\{x|\ x^2+1=0\}$; в) $\{x|\ x\in R,\ |x|=3\}$
г) $\{x|\ x\in R,\ x^3=1\}$? д) $\{x|\ x^4-16=3\}$

1.11. Қуйидаги тўпламнинг бўш тўплам эканлигини исботланг:

а) $\{x|\ x\in N,\ x<-1\}$; б) $\{x|\ x\in N,\ 15<x<16\}$;
в) $\{x|\ x\in N,\ x=\frac{3}{5}\}$; г) $\{x|\ x>7,\ x<5\}$.

1.12. Тенгламанинг ҳақиқий илдизлари тўпламини топинг. Бу тўпламларнинг қайсилари бўш тўплам эканлигини аниқланг:

а) $3x+15=4(x-8)$ б) $2x+4=4$; в) $2(x-5)=3x$;
г) $x^2-4=0$; д) $x^2+16=0$; е) $(2x+7)(x-2)=0$.

1.13. Қуйидаги тўплам элементларини кўрсатинг:
а) $\{l, f, g\}$; б) $\{a\}$; в) $\{\{a\}\}$; г) $\varnothing$; д) $\{\varnothing\}$
е) $\{\{a;b\},\{c;d\}\}$ ж) $\{\{a,b,c\},a\}$.

1.14. 5 та элементи бор бўлган тўплам тузинг.

1.15. 5 та натурал сон қатнашган сонли тўплам тузинг.

2-§. ҚИСМ ТЎПЛАМ. ТЕНГ ТЎПЛАМЛАР

Агар В тўпламнинг ҳар бир элементи А тўпламнинг ҳам элементи бўлса, В тўплам А тўпламнинг *қисм тўплами* дейилади ва $B\subset A$ кўринишда белгиланади. Бунда $\varnothing\subset A$, $A\subset A$ деб ҳисобланади. Бу қисм тўпламлар *хосмас қисм тўпламлар* дейилади. А тўпламнинг қолган барча қисм тўпламлари *хос қисм тўпламлар* дейилади. *n* та элементдан тузилган тўпламнинг барча қисм тўпламлари сони 2^n га тенг.

Агар $A\subset B$, $B\subset A$ бўлса, $A=B$ дейилади.

1 - м и с о л. А — икки хонали сонлар тўплами, В — икки хонали жуфт сонлар тўплами бўлсин. Ҳар бир икки хонали жуфт сон А тўпламда ҳам мавжуд. Демак, $B\subset A$.

2 - м и с о л. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{x| x\in N, x<4\}$ тўпламлар берилган бўлсин. *B* тўплам 4 дан кичик бўлган натурал сонлар тўпламидир, яъни $B=\{1,2,3\}$. *A* ва *B* тўпламлар айни бир хил элементлардан ташкил топган. Демак, $A=B$.

2.1. $A=\{a,b,c,d,e,f,g,k)$, $B=\{a,l,k\}$, $C=\{b,d,g,k,t\}$, $D=\{a,l\}$, $E=\{e,f,k,g,a\}$ тўпламлар берилган.

а) Уларнинг қайсилари *A* тўпламнинг хос қисм тўплами бўлади?

б) *D* тўплам *C* тўпламнинг қисм тўпламими?

в) *B* тўплам қайси тўпламнинг қисм тўплами бўлади?

2.2. $C=\{213,45,324,732,136\}$ тўплам берилган. *C* тўпламнинг

а) 3 га бўлинадиган; б) 9 га бўлинадиган;

в) 4 га бўлинмайдиган; г) 5 га бўлинмайдиган;

д) 3 га бўлинмайдиган сонларидан тузилган қисм тўпламларини топинг.

2.3. $A=\{3,6,9,12\}$ тўпламнинг барча қисм тўпламларини ҳосил қилинг.

2.4. Тўпламлар жуфти берилган:

а) А={Навоий, Бобир, Фурқат, Нодирабегим} ва В — барча шоир ва шоиралар тўплами;

б) С — қавариқ тўртбурчаклар тўплами ва D — тўртбурчаклар тўплами;

в) E — тошкентлик олимлар тўплами, F — Ўзбекистон олимлари тўплами;

г) K — барча туб сонлар тўплами, M — манфий сонлар тўплами.

Жуфтликдаги тўпламлардан қайси бири иккинчисининг қисм тўплами бўлишини аниқланг.

2.5. Тўртбурчаклар тўплами Т ва унинг қуйидаги қисм тўпламлари берилган:

А—параллелограммлар тўплами;
В —ромблар тўплами;
С —трапециялар тўплами;
D—тўғри тўртбурчаклар тўплами;
Е—квадратлар тўплами.

Бу қисм тўпламларнинг ҳар бирини қандай характеристик хоссалар билан аниқлаш мумкин?

2.6. Қуйидаги тўпламлар учун $A\subset B$ ёки $B\subset A$ муносабатлардан қайси бири ўринли:

а) $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{a,c,d\}$ б) $A=\{a,b\}$, $B=\{a,c,d\}$
в) $A=\varnothing$, $B=\varnothing$; г) $A=\varnothing$, $B=\{a,b,c\}$;
д) $A=\varnothing$, $B=\{\varnothing\}$; е) $A=\{\{a\},a,\varnothing\}$, $B=\{a\}$;
ж) $A=\{\{a,b\},\{c,d\},c,d\}$, $B=\{\{a,b\},c\}$;
з) $A=\{\{0\},0\}$, $B=\{\varnothing,\{\{0\},0\}\}$?

2.7. Тасдиқ тўғри ёки нотўғри эканлигини аниқланг:

а) $\{1;2\}\subset\{\{1;2;3\};\{1;3\};1;2\}$;
б) $\{1;2\}\in\{\{1;2;3\};\{1;3\};1;2\}$
в) $\{1;3\}\subset\{\{1;2;3\};\{1;3\};1;2\}$;
г) $\{1;3\}\in\{\{1;2;3\};\{1;3\};1;2\}$.

2.8. Қуйидаги тўпламлар тенгми:

а) $A=\{2;4;6\}$ ва $B=\{6;4;2\}$;
б) $A=\{1;2;3\}$ ва $B=\{1;11;111\}$;
в) $A=\{\{1;2\},\{2;3\}\}$ ва $B=\{2;3;1\}$;
г) $A=\{\sqrt{256};\ \sqrt{81};\ \sqrt{16}\}$ ва $B=\{2^2;3^2;4^2\}$?

2.9. A — натурал сонлар тўплами, B — жуфт натурал сонлар тўплами, C — тоқ натурал сонлар тўплами, $Д$ — 2 га ҳам, 3 га ҳам бўлинадиган сонлар тўплами, E — ўнли ёзуви 0 билан тугайдиган сонлар тўплами, F — 6 га каррали сонлар тўплами, M — 2 га ҳам, 5 га ҳам каррали бўлган сонлар тўплами бўлсин. Қайси тўплам қайси тўпламнинг қисм тўплами бўлишини аниқланг. Берилган тўпламлар орасида тенг тўпламлар мавжудми?

2.10. Қайси тўпламлар жуфтлигидаги тўпламлар тенг:

а) $X=\{3,5,7,9\}$, $У$ —2 дан катта, лекин 10 дан кичик тоқ сонлар тўплами;

б) $X=\{4,6,8\}$, $У$ —1 дан катта, лекин 9 дан кичик жуфт сонлар тўплами;

в) X — иккита тоқ сонларнинг йиғиндиси бўлган сонлар тўплами, $У$ — жуфт сонлар тўплами;

г) X — текисликда M ва K нуқталардан бир хил узоқлашган нуқталар тўплами, $У$ — MK кесманинг ўрта перпендикуляридаги нуқталар тўплами.

3-§. ТЎПЛАМЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

Икки тўпламнинг кесишмаси, бирлашмаси ва айирмасига бериладиган таърифлар аёний бўлиши учун Эйлер-Венн диаграммаларидан ҳам фойдаланамиз.

A ва B тўпламларнинг ҳар бирида мавжуд бўлган x элемент шу тўпламларнинг умумий элементи дейилади. A ва B тўпламларнинг ***кесишмаси*** деб, уларнинг ҳамма умумий элементларидан тузилган тўпламга айтилади. A ва B тўпламларнинг кесишмаси $A \cap B$ кўринишда белгиланади (1-а расм), $A \cap B=\{x | x \in A$ ва $x \in B\}$.

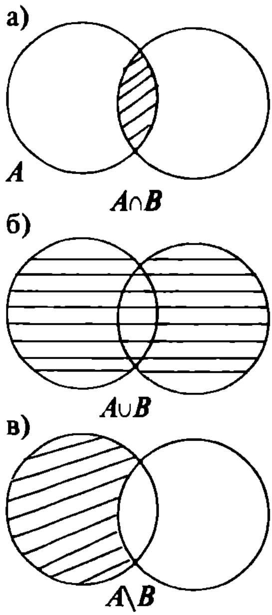
A ва B тўпламларнинг ***бирлашмаси*** деб, уларнинг камида биттасида мавжуд бўлган барча элементлардан тузилган тўпламга айтилади. A ва B тўпламларнинг бирлашмаси $A \cup B$ кўринишида белгиланади (1-б расм):

$$A \cup B=\{x | x \in A \text{ ёки } x \in B\}.$$

A ва B тўпламларнинг айирмаси деб, A нинг B да мавжуд бўлмаган барча элементларидан тузилган тўпламга айтилади. A ва B тўпламларнинг айирмаси $A \setminus B$ кўринишда белгиланади (1-в расм):

$$A \setminus B=\{x | x \in A \text{ ва } x \notin B\}.$$

Агар $B \subset A$ бўлса, $A \setminus B$ тўплам B тўпламнинг ***тўлдирувчиси*** дейилади ва B' билан белгиланади.



1-расм.

1 - м и с о л. A=$\{a,b,c,d,e,f\}$ ва B=$\{b,d,e,g,h\}$ тўпламлар берилган. Уларнинг кесишмасини топинг.

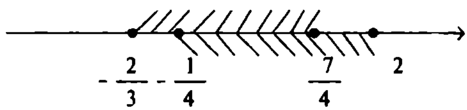
Е ч и ш. b,d,e элементларгина A ва B тўпламларнинг умумий элементларидир.

Шунинг учун, $A\cap B=\{b,d,e\}$.

2 - м и с о л. $A=\{x|-\frac{2}{3}\le x\le\frac{7}{4}\}$, $B=\{x|-\frac{1}{4}\le x\le 2\}$ тўпламларнинг кесишмаси,бирлашмаси ва айирмасини топинг (2-расм).

Ечиш. $A\cap B=\{x|-\frac{1}{4}\le x\le\frac{7}{4}\}$; $A\cup B=\{x|-\frac{2}{3}\le x\le 2\}$;

$A\backslash B=\{x|-\frac{2}{3}\le x<-\frac{1}{4}\}$ (2-расм).



2-расм.

3 м и с о л. Агар $A\subset B$ бўлса, $A\cup B=B$ бўлади. Исботланг.

Исбот. $A\subset B$ бўлсин. а) $A\cup B\subset B$ ни кўрсатамиз. $x\in A\cup B$ бўлсин. У ҳолда $x\in A$ ёки $x\in B$ бўлади. Агар $x\in A$ бўлса, $A\subset B$ эканидан $x\in B$ экани келиб чиқади, иккита ҳолда ҳам $A\cup B$ нинг ҳар қандай элементи B нинг ҳам элементидир. Демак, $A\cup B\subset B$.

б) $B\subset A\cup B$ ни кўрсатамиз. $x\in B$ бўлсин. У ҳолда,тўпламлар бирлашмасининг таърифига кўра $x\in A\cup B$ бўлади. Демак, B нинг ҳар қандай элементи $A\cup B$ нинг ҳам элементи бўлади, яъни $B\subset A\cup B$.

Шундай қилиб, $A\cup B\subset B$, $B\subset A\cup B$. Булар эса $B=A\cup B$ эканини тасдиқлайди. Исбот бўлди.

3.1. $M=\{36;29;15;68;27\}$; $P=\{4;15;27;47;36;90\}$; $Q=\{90;4;47\}$ тўпламлар берилган. $M\cap P$, $M\cap Q$ $P\cap Q$, $M\cap P\cap Q$ ларни топинг.

3.2. A — 18 нинг ҳамма натурал бўлувчилари тўплами, B — 24 нинг ҳамма натурал бўлувчилари тўплами. $A\cap B$ тўплам элементларини кўрсатинг (Эйлер-Венн диаграммасидан фойдаланинг).

3.3. P — икки хонали натурал сонлар тўплами, S — барча тоқ натурал сонлар тўплами бўлса, $K=P\cap S$ тўпламга қайси сонлар киради:

а) $21\in K$; б) $32\in K$; в) $7\notin K$; г) $17\notin K$ дейиш тўғрими?

3.4. «Математика» ва «грамматика» сўзларидаги ҳарфлар тўпламини тузинг. Бу тўпламлар кесишмасини топинг.

3.5. $[1;5]$ ва $[3;7]$ кесмаларнинг кесишмасини топинг.

3.6. $P=\{а,б,в,г,д,е\}$ ва $E=\{а,ж,з,е,к\}$ тўпламлар бирлашмасини топинг.

3.7. $A=\{n|\ n\in N, n<5\}$ ва $B=\{n|\ n\in N, n>7\}$ тўпламлар бирлашмасини топинг: а) $4\in A\cup B$; б) $-3\in A\cup B$; в) $6\in A\cup B$ дейиш тўғрими?

3.8. Агар а) $A=\{x|\ x=8k,\ k\in Z\}$, $B=\{x|\ x=8l-4,\ l\in Z\}$;

б) $A=\{x|\ x=6k-1,\ k\in Z\}$, $B=\{x|\ x=6l+4,\ l\in Z\}$ бўлса, $A\cup B$ ни топинг.

3.9. $A=\{2;4;6;8;\cdots;40\}$, $B=\{1;3;5;7\cdots;37\}$, $C=\{\{a;b\},\{c;d\},\{e;f\},g,h\}$ тўпламларнинг ҳар биридаги элементлар сонини аниқланг. $A\cup B$ да нечта элемент мавжуд?

3.10. $A=\{2;3;4;5;7;10\}$, $B=\{3;5;7;9\}$, $C=\{4;9;11\}$ бўлсин. Қуйидаги тўпламларда нечтадан элемент мавжуд:

а) $A\cup(B\cup C)$; б) $(C\cup B)\cup(A)$; в) $A\cap(B\cup C)$;
г) $A\cup(B\cap C)$; д) $A\cap(B\cap C)$; е) $B\cap(A\cup C)\cap$?

3.11. $A=\{x|\ -5\leq x\leq 10\}$, $B=\{x|\ x\in N,\ 3\leq x\leq 15\}$ бўлсин. $A\backslash B$ ва $B\backslash A$ тўплам элементларини топинг.

3.12. P — икки хонали натурал сонлар тўплами, Q — жуфт натурал сонлар тўплами бўлсин. $P\backslash Q$ ва $Q\backslash P$ тўпламларни тузинг.

3.13. C ва D кесишувчи тўпламлар бўлсин. Эйлер-Венн диаграммалари ёрдамида $C\backslash D$, $D\backslash C$, $(C\backslash D)\cup(D\backslash C)$ ларни тасвирланг.

3.14. N' билан натурал сонлар тўплами N нинг бутун сонлар тўплами Z га тўлдирувчисини белгилаймиз. Қуйидагилар тўғрими:

а) $-4\in N'$; б) $0\in N'$; в) $13\in N'$; г) $-8\notin N'$; д) $-5{,}3\notin N'$; е) $0\notin N'$?

3.15. $A=\{x|\ x=2k+1,\ k\in Z\}$ тўпламнинг z тўпламга тўлдирувчисини топинг.

3.16. $A=\{x|\ x=3k,\ k\in Z\}$ тўпламнинг Z тўпламга тўлдирувчисини топинг.

3.17. Агар $A\subset U$, $B\subset U$ бўлса, қуйидаги тенгликлар ўринли бўлишини исботланг:

а) $(A\cup B)'=A'\cap B'$; б) $(A\cap B)'=A'\cup B'$.

3.18. Агар A тўплам $x^2-7x+6=0$ тенгламанинг ечимлари тўплами ва $B=\{1;6\}$ бўлса, $A=B$ бўлишини исботланг.

3.19. $A\backslash B=A\backslash(A\cap B)$ тенгликни исботланг.

3.20. $A\cap(B\backslash A)=\varnothing$ тенгликни исботланг.

4-§. ТЎПЛАМ ЭЛЕМЕНТЛАРИНИНГ СОНИ БИЛАН БОҒЛИҚ АЙРИМ МАСАЛАЛАР

$n(A)$ билан A тўплам элементларининг сонини белгилаймиз. Ҳар қандай A ва B чекли тўпламлар учун $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ тенглик тўғри.

Мисол. 50 ўқувчининг 37 таси инглиз тилини, 17 таси эса немис тилини ўрганаяпти. Агар 50 ўқувчининг ҳар бири шу икки тилнинг камида биттасини ўрганаётган бўлса,неча ўқувчи иккала тилни ҳам ўрганаяпти?

Ечиш. A — барча ўқувчилар тўплами, B — инглиз тилини ўрганаётган ўқувчилар тўплами, C эса немис тилини ўрганаётган ўқувчилар тўплами бўлсин. $n(A)=50$, $n(B)=37$, $n(C)=17$ ларга эгамиз. Масала мазмунидан, $n(B\cap C)$ ни топиш лозимлигини кўрамиз. Тушунарлики, $A=B\cup C$. $n(B\cup C)=n(B)+n(C)-n(B\cap C)$ тенгликдан $50=37+17-$ $n(B\cap C)$ ёки $n(B\cap C)=4$ ни топамиз. Шундай қилиб, 4 ўқувчи иккала тилни ҳам ўрганаётган экан.

4.1. Синфдаги бир неча ўқувчи марка йиғдилар. 15 ўқувчи Ўзбекистон маркаларини, 11 киши чет эл маркаларини, 6 киши ҳам Ўзбекистон маркаларини, ҳам чет эл маркаларини йиғди. Синфда неча ўқувчи марка йиғган?

4.2. 32 ўқувчининг 12 таси волейбол секциясига, 15 таси баскетбол секциясига, 8 киши эса иккала секцияга ҳам қатнашади. Синфдаги неча ўқувчи ҳеч бир секцияга қатнашмайди?

4.3. 30 ўқувчидан 18 таси математикага, 17 таси эса физикага қизиқади. Иккала фанга ҳам қизиқадиган ўқувчилар сони нечта бўлиши мумкин? (Кўрсатма. Иккала фанга ҳам қизиқмайдиган ўқувчилар сони $k\in\{0,1,2,3,\cdots,12\}$).

4.4. 100 одамдан иборат туристлар гуруҳида 10 киши немис тилини ҳам, француз тилини ҳам билмайди, 75 таси немис тилини, 83 таси эса француз тилини билади. Иккала тилни ҳам биладиган туристлар сонини топинг.

4.5. 26 ўқувчининг 14 таси шахматга, 16 таси шашкага қизиқади. Агар ҳар бир ўқувчи шахматга ёки шашкага қизиқса,ҳам шашкага, ҳам шахматга қизиқадиган ўқувчилар нечта?

5-§. ТЎПЛАМЛАР УСТИДА БАРЧА АМАЛЛАРГА ДОИР МАСАЛАЛАР

5.1. Тўпламлар кесишмасини ва бирлашмасини топинг. Эйлер-Венн диаграммаси ёрдамида график талқин қилинг:

а) $A=\{5,6,7,8,9,10\}$, $B=\{8,9,10,11\}$;

б) $A=\{x| \ x=2n, n\in N\}$, $B=\{ x| \ x=\frac{n+1}{2}, n\in N\}$;

в) $A=\{x| \ x=5n, \ n\in N\}$, $B= \{x| \ x=2n, \ n\in N\}$

г) $A=\{x| \ x=\frac{1}{n}, \ n\in N\}$, $B=\{ x| \ x=\frac{2}{n}, \ n\in N\}$

5.2. P ва Q тўпламлар кесишмаси ва бирлашмасини сон тўғри чизиғида тасвирланг:

а) $P=\{x| \ \frac{10}{3} < x < \sqrt{8}\}$, $Q=\{x| \frac{26}{27} < x < 3.2\}$;

б) $P=\{x| \ -\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3} \}$, $Q=\{x| \ \sqrt{2} < x \le \frac{40}{27} \}$;

в) $P=\{x| \ \frac{11}{4} \le x \le \frac{19}{3} \}$, $Q=\{x| \ \frac{19}{7} < x \le \frac{32}{5} \}$;

г) $P=\{x| \ \frac{4}{11} \le x < \frac{18}{5} \}$, $Q=\{x| \ \sqrt{2} < x < 10\}$

5.3. Қуйидаги тенгликларни исботланг:

а) $A\cap B=B\cap A$; б) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;
в) Агар $A\subset B$ бўлса, $A\cap B=A$; г) $A\cap\varnothing=\varnothing$;
д) $A\cap A=A$

5.4. Қуйидаги тенгликларни исботланг:

а) $A\cup B=B\cup A$; б) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
в) $A\subset B$ бўлса, $A\cup B=B$; г) $A\cup\varnothing=A$;
д) $A\cup A=A$

5.5. Исботланг:

а) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$
б) $(A\cap B)\cup C=(A\cap C)\cap(B\cup C)$

5.6. Айириш ва тўлдириш амалларининг қуйидаги хоссаларини исботланг ($A\subset B$, $B\subset C$, $C\subset U$ деб ҳисобланг):

а) $A'\cap A=\varnothing$; д) $\varnothing'=U$;
б) $A'\cup A=U$; е) $U'=\varnothing$;
в) $(A'\cap B')= A'\cup B'$ ё) $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$
г) $(A\cup B)'=A'\cap B'$ ж) $(A\setminus B)\cup B= A\cup B$

6-§. МАТЕМАТИК МАНТИҚ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1) $\Rightarrow$ — агар ..... бўлса, у ҳолда .... бўлади. $P\Rightarrow Q$ — агар P бўлса, Q бўлади (P дан Q келиб чиқади);

2) $\Leftrightarrow$ — тенг кучлилик $P \Leftrightarrow Q$, P ва Q тенг кучли (P дан Q келиб чиқади ва аксинча);

3) $\vee$ — дизъюнкция («ёки» амали);

4) $\wedge$ — конъюкция («ва» амали);

5) $\forall$ — ихтиёрий, барча;

6) $\exists$ — шундай, мавжуд;

7) $\nexists$ — мавжуд эмас.

1 - м и с о л. Агар $a>b$ ва $b>c$ бўлса, $a>c$ бўлади:

$$(a>b)\wedge(b>c) \Rightarrow (a>c).$$

2 - м и с о л. $a>b$ бўлса, $a+c>b+c$ бўлади:

$$(a>b) \Rightarrow (a+c>b+c).$$

3 - м и с о л. $a=0$ ёки $b=0$ бўлса, $ab=0$ бўлади ва аксинча $ab=0$ бўлса, $a=0$ ёки $b=0$ бўлади:

$$(ab=0) \Leftrightarrow ((a=0)\vee(b=0)).$$

4 - м и с о л. $a>0$ ва $b>0$ бўлса, $ab>0$ бўлади:

$$(a>0)\wedge(b>0) \Rightarrow (ab>0).$$

5 - м и с о л. Ихтиёрий x ҳақиқий сон учун $|x| \geq x$:

$$\forall x\in R: |x| \geq x.$$

6 - м и с о л. Ихтиёрий $a \geq 0$ сон учун, шундай $x\in \mathrm{R}$ сон мавжудки, $x^2=a$ бўлади. $\forall a\geq 0$, $\exists\ x\in \mathrm{R}$: $x^2=a$.

Қуйидаги жумлаларни юқоридаги белгилар ёрдамида ёзинг:

6.1. Ихтиёрий $a \geq 0$ учун, $\sqrt{a}=x$ тенглик ўринли бўладиган x ҳақиқий сон мавжуд.

6.2. $a<0$ ва $b>0$ бўлса, $ab<0$ бўлади.

6.3. Ҳар қандай a,b ҳақиқий сонлар учун $a+b=b+a$ бўлади.

6.4. Агар a бутун сон 9 га бўлинса, у ҳолда бу сон 3 га ҳам бўлинади.

6.5. 2 га ҳам, 3 га ҳам бўлинадиган бутун сон 6 га ҳам бўлинади ва, аксинча, 6 га бўлинадиган бутун сон 2 га ҳам, 3 га ҳам бўлинади.

6.6. Агар $a^2+b^2+c^2=0$ бўлса, $a=b=c=0$ бўлади ва, аксинча, $a=b=c=0$ бўлса, $a^2+b^2+c^2=0$ бўлади.

6.7. Ҳар қандай n натурал сонни олмайлик, $n=2k-1$ ёки $n=2k$ бўладиган k натурал сон мавжуд.

6.8. Ихтиёрий n, k натурал сонлар учун $n^2+k^3\in \mathrm{N}$ бўлади.

6.9. Ихтиёрий n, k натурал сонлар учун $n^2- k^3$ бутун сон бўлади.

6.10. $a<0$ бўлса, $x^2=a$ тенглик тўғри бўладиган ҳақиқий x сон мавжуд эмас.

II б о б. ҲАҚИҚИЙ СОНЛАР

1-§. НАТУРАЛ СОНЛАР

Ҳисобланг:

1.1. $78\cdot29+6573:313-408$. **1.2.** $477\cdot85-7784:56+10809$.
1.3. $927:103+(247-82):5-1$. **1.4.** $(395\cdot52-603)\cdot25-960\cdot64$.
1.5. $25\cdot(28\cdot105+7236:18):6\cdot25$.
1.6. $1092322:574+152\cdot93-(96\cdot125-82215:9)$.
1.7. $79348-64\cdot84:28+6539:13-11005$.
1.8. $3121350-(15125:25+302\cdot804-(3044+2056):17)\cdot9$.
1.9. $(110292:14:101+4129-3127)\cdot(1237-23138:23)$.
1.10. $4097\cdot7-7659+64\cdot105-6992:38:23$.

Бўлиниш аломатларининг татбиқига доир мисоллар

1.11. 1 дан 25 гача бўлган натурал сонлар қаторидаги 6 га бўлинмайдиган натурал сонлар тўпламини тузинг.

1.12. 1 дан 25 гача бўлган натурал сонлар қаторидаги 7 га бўлинадиган натурал сонлар тўпламини тузинг.

1.13. 15121, 117342, 1897524, 2134579, 31445698 сонлари орасидан 6 га бўлинадиган натурал сонлар тўпламини тузинг.

$k\in N$ сонига бўлинадиган барча натурал сонлар тўпламини A_k билан белгилаймиз.

1.14. Тасдиқ тўғрими:

а) $2\in A_3$;	д) $25\notin A_5$;	з) $15342749\in A_9$
б) $2\in A_4$;	е) $36\in A_2$	к) $15342724\in A_4$;
в) $6\notin A_5$;	ё) $41\in A_3$;	л) $15342824\in A_8$;
г) $11\in A_9$	ж) $422\notin A_9$	м) $4343242\in A_{11}$?

1.15. $11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15\cdot16$ сони A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11} тўпламларнинг қайсиларига тегишли?

1.16.* $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdot8\cdot9\notin A_k$ бўлса, $k=2431$ бўлиши мумкинми? $k\in\{15;18\}$ бўлиши мумкинми?

1.17.* $3\cdot5\cdot7\in A_k$ бўлса, k нинг қабул қилиши мумкин бўлган барча қийматларини топинг.

1.18. $A_2\cap A_6$, $A_2\cap A_3$, $A_3\cap A_5$ ларни топинг.

1.19. $A_2 \cup A_3 = A_6$ тенглик тўғрими?

1.20. $a \in A_3$, $b \in A_4$ бўлса, $a+b \notin A_7$ бўлиши мумкинми?

1.21. Сонларни туб кўпайтувчиларга ажратинг: 10; 100; 1000; 10000; 100000; 1000000. Қандай хулосага келиш мумкин?

1.22. Сонларни туб кўпайтувчиларга ажратинг: 250; 300; 340; 3700; 48950; 4725000.

1.23. Сонларни каноник шаклда ёзинг:

а) 36;	д) 125;	з) 946;	н) 13860;
б) 72;	е) 36;	к) 1001;	о) 2431;
в) 81;	ё) 512;	л) 3125;	п) 6783;
г) 96;	ж) 680	м) 4500	р) 36363

1.24. Сонларни каноник шаклда ёзинг:

а) $2 \cdot 3^2 \cdot 2^4 \cdot 6^2$	д) $18 \cdot 18 \cdot 15 \cdot 5$;	з) $15^2 \cdot 17 \cdot 21^3$;
б) $4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$;	е) $17 \cdot 19 \cdot 25$;	к) $27^3 \cdot 11 \cdot 3^4$;
в) $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	ё) $3^4 \cdot 4^3 \cdot 53$;	л) $33 \cdot 34 \cdot 43^2$;
г) $13 \cdot 13 \cdot 27$	ж) $31^2 \cdot 33 \cdot 37^2 \cdot 39$;	м) $117 \cdot 118 \cdot 119^2$.

Туб кўпайтувчиларга ажратишнинг татбиқларига доир мисоллар:

1.25. Соннинг бўлувчиларини топинг:

а) 209; б) 143; в) 2431; г) 2717

1.26. Сонларнинг умумий бўлувчиларини топинг: а) 209 ва 143; б) 209 ва 2431; в) 143 ва 2717; г) 2431 ва 2717.

1.27. Сонларнинг энг катта умумий бўлувчисини топинг:

а) 40 ва 45;	д) 50, 75 ва 100;	з) 63, 130, 143 ва 1001;
б) 130 ва 160;	е) 74, 45 ва 60;	к) 74, 60, 84 ва 480;
в) 121 ва 143;	ё) 84, 63 ва 42;	л) 750, 800, 865 ва 1431;
г) 31 ва 93;	ж) 72, 48 ва 36;	м) 143, 209, 1431 ва 2717.

1.28. Қуйидаги сонлар ўзаро тубми:

а) 15 ва 95; д) 121 ва 143; з) 169 ва 1443;

б) 144 ва 169; е) 11, 12 ва 25; к) 111 ва 121;

в) 143 ва 144; ё) 14, 16 ва 19; л) n, $n+1$ ва $n+2$ ($n \in \mathrm{N}$);

г) 250 ва 131; ж) 63, 130 ва 800; м) n, $n+2$ ва $n+4$ ($n \in \mathrm{N}$)?

1.29. Сонларнинг энг кичик умумий карралисини топинг:

а) 84, 42 ва 21 ; д) 50, 125 ва 175; з) 33, 36 ва 48;
б) 70, 80 ва 90; е) 48, 92 ва 75 ; к) 100, 150 ва 250;
в) 17, 51 ва 289; ё) 10, 21 ва 3600; л) 80, 240 ва 360;
г) 11, 12 ва 13 ; ж) 18, 19 ва 24 ; м) 34, 51 ва 65.

1.30. Сонларнинг энг катта умумий бўлувчисини ва энг кичик умумий карралисини топинг (натижани каноник кўринишда ёзинг):

а) 2^3, 3^2 ва 15 ; д) $7^2\cdot 3$; 46 ва 15 ;
б) 2^3, 3^4 ва 7 ; е) $3^2\cdot 4$; $3\cdot 6$ ва $7\cdot 9$;
в) 8, 13^2 ва 5^2 ; ё) 3^4, 11^2 ва 13^3 ;
г) 12^2, 15 ва1 ; ж) 11^4, 13^5 ва 100^4

1.31. $\tau(a)$ билан $a\in N$ нинг ҳамма натурал бўлувчилари сонини белгилаймиз. $a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdot \quad p_n^{\alpha_n}$ бўлса, $\tau(a)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)$ бўлади. Қуйидагиларни топинг:

а) $\tau(81)$; д) $\tau(400)$; з) $\tau(2^3\cdot 6\cdot 7)$; н) $\tau(11\cdot 13\cdot 17)$;
б) $\tau(91)$; е) $\tau(680)$; к) $\tau(2^3\cdot 3^2\cdot 5)$; о) $\tau(19^2\cdot 23\cdot 29)$;
в) $\tau(512)$; ё) $\tau(13860)$; л) $\tau(4^2\cdot 6\cdot 15)$; п) $\tau(121\cdot 11^2)$;
г) $\tau(1001)$; ж) $\tau(13800)$; м) $\tau(13\cdot 100\cdot 55)$; р) $\tau(144\cdot 11^3)$.

1.32. Сонларнинг умумий бўлувчиси нечта:

а) 18 ва 54; д) 63 ва 72; з) 150 ва 180;
б) 42 ва 56; е) 120 ва 96; к) 12, 18 ва 30;
в) 96 ва 92; ё) 102 ва 170; л) 54, 90 ва 162;
г) 84 ва 120; ж) 26, 65 ва 130; м) 40, 60 ва 100?

1.33. Сонларнинг умумий бўлувчиларини топинг:

а) $13\cdot 17$ ва $13^2\cdot 17\cdot 19$; б) $17\cdot 19\cdot 23$ ва $17^4\cdot 19\cdot 23^8\cdot 1849$.

1.34. $A=\{100,15,200,300\}$ ва $B=\{150,300,450\}$ тўпламлар умумий элементларининг умумий бўлувчилари нечта?

1.35. Ҳисобланг:

а) τ(τ(ЭКУБ(ЭКУК(250;500);100)));
б) ЭКУБ((100); τ(ЭКУБ(25;5))) + τ(ЭКУК(10;35));
в) ЭКУК(ЭКУК(τ(144);51);18) − τ(42);
г) τ(18·91+15(ЭКУБ(10;21)))·τ(142).

Евклид алгоритмини татбиқ этишга доир мисоллар

1.36. Сонларнинг энг катта умумий бўлувчисини топинг:

а) 8104 ва 5602; д) 187 ва 180; з) 795 ва 2585;
б) 5555 ва 11110; е) 2165 ва 3556; к) 42628 ва 33124;
в) 980 ва 100; ё) 5400 ва 8400; л) 71004 ва 154452;
г) 5345 ва 4856; ж) 78999 ва 80000; м) 1000 ва 999.

1.37. Қуйидаги сонлар ўзаро тубми:

а) 60 ва 72; б) 55 ва 71; в) 732 ва 648; г) 111 ва 11?

1.38. ЭКУБ$(a;b)\cdot$ЭКУК$(a;b)=a\cdot b$ $(a\in N,\ b\in N)$ тенгликдан фойдаланиб, қуйидаги сонларнинг энг кичик умумий карралисини топинг:

а) 821 ва 934 ;	д) 28 ва 947 ;	к) 75 ва 1853 ;
б) 743 ва 907 ;	е) 56 ва 953 ;	л) 23 ва 1785 ;
в) 109 ва 1005 ;	ж) 419 ва 854 ;	м) 113 ва 9881 ;
д) 827 ва 953 ;	з) 887 ва 6663 ;	н) 875 ва 1346

1.39. Сонларнинг ўзаро туб эканлигини исботланг:

а) 911 ва 130177   б) 811 ва 10403

1.40. Ҳисобланг: τ(ЭКУБ(991;659;647+367))

2-§. БУТУН СОНЛАР

Ҳисобланг:

2.1. $143+(-42+85-52)\cdot 9-124$;
2.2. $-56\cdot((-43+54)-65:5-82)$;
2.3. $-53\cdot(44+86-200\cdot 5+300:(-6))$;
2.4. $660:(-88+44+92:2)+840:(-3)$;
2.5. $48\cdot(-86\cdot 2-95)+(-842)\cdot 31$.

Қолдиқли бўлишга доир мисоллар.

2.6. a ни b га қолдиқли бўлинг:

а) $a=70,\ b=3$;	в) $a=200,\ b=17$
б) $a=180,\ b=9$	г) $a=76,\ b=9$

2.7. a ни b га қолдиқли бўлинг:

а) $a=5,\ b=9$;	в) $a=9,\ b=18$
б) $a=11,\ b=23$;	г) $a=4,\ b=75$

2.8. a ни b га қолдиқли бўлинг:

а) $a=-81,\ b=75$;	д) $a=-33,\ b=7$;	з) $a=15,\ b=43$;
б) $a=-5,\ b=9$;	е) $a=-48,\ b=6$;	к) $a=27,\ b=9$;
в) $a=-41,\ b=7$;	ё) $a=-6,\ b=48$;	л) $a=33,\ b=32$;
г) $a=-35,\ b=7$;	ж) $a=-8,\ b=24$;	м) $a=108,\ b=36$

2.9. $a\in N$, $b\in N$ бўлиб, $a=bq+r$ $(q\in Z,\ r\in N,\ 0\le r<b)$ бўлсин. $-a$ ни b га бўлишда ҳосил бўладиган тўлиқсиз бўлинма q_1 ни ва қолдиқ r_1 ни топинг.

2.10. a ни b га бўлишдаги қолдиқни топинг:

а) $a=81932,\ b=9$;	д) $a=4341,\ b=3$;	з) $a=111,\ b=11$;
б) $a=25,\ b=75$;	е) $a=144,\ b=6$;	к) $a=-11,\ b=111$;
в) $a=-4,\ b=49$;	ё) $a=-15,\ b=11$;	л) $a=-9,\ b=3$;
г) $a=-49,\ b=4$;	ж) $a=-13,\ b=35$;	м) $a=-3,\ b=9$

2.11. Қуйидаги тенглик қолдиқли бўлишни ифодалайдими:

а) $21=3\cdot4+9$; д) $26=4\cdot5+6$; з) $81=81\cdot0+81$;
б) $-18=9\cdot2-36$; е) $-15=11\cdot(-2)+7$; к) $-40=4\cdot(-11)+4$;
в) $35=2\cdot17+1$; ё) $-49=7\cdot8+(-7)$; л) $-35=(-7)\cdot8+21$;
г) $11=2\cdot4+3$; ж) $84=2\cdot42$; м) $49=4\cdot11+5$?

Таққослама ва унинг айрим тадбиқларига доир мисоллар

$a\in Z$, $b\in Z$, $m\in N$ бўлсин. a ва b ларни m га бўлишда бир хил қолдиқ ҳосил бўлса, a ва b сонлар m модул бўйича таққосланади (m модул бўйича тенг қолдиқли) дейилади.

Агар a ва b лар m модул бўйича таққосланувчи бўлса, буни қуйидагича белгиланади:

$$a\equiv b \pmod m). \qquad (1)$$

(1) муносабат таққослама деб аталади.

1 - т е о р е м а. $\boldsymbol{a\equiv b \ (\mathrm{mod}\ m) \Rightarrow (a-b) \vdots m}$.

2 - т е о р е м а. $\boldsymbol{(a-b) \vdots m \Rightarrow a\equiv b (\mathrm{mod}\ m)}$.

3 - т е о р е м а. **Агар $\boldsymbol{a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)}$ ва $\boldsymbol{c\equiv d(\mathrm{mod}\ m)}$ бўлса, қуйидаги таққосламалар тўғри бўлади:**

$$\boldsymbol{a+c\equiv b+d(\mathrm{mod}\ m);}$$
$$\boldsymbol{a-c\equiv b+d(\mathrm{mod}\ m);}$$
$$\boldsymbol{a\cdot c\equiv b\cdot d(\mathrm{mod}\ m).}$$

Натижалар: 1. $a\equiv a(\mathrm{mod}\ m)$;
2. $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m) \Rightarrow a^n\equiv b^n(\mathrm{mod}\ m)$, $n\in \mathrm{N}$;
3. $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m) \Rightarrow c\cdot a\equiv c\cdot b(\mathrm{mod}\ m), \forall c\in \mathrm{Z}$;
4. Агар $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$ ва $c\equiv d(\mathrm{mod}\ m)$ бўлса, ихтиёрий n_1, $n_2\in Z$ учун $n_1a+n_2c \equiv n_1b+n_2d(\mathrm{mod}\ m)$ бўлади.

1- м и с о л. 2222^{5555} сонини 7 га бўлишда ҳосил бўладиган қолдиқни топинг.

Е ч и ш. 2222 ни 7 га қолдиқли бўламиз: $2222=7\cdot317+3$. Бундан, $2222\equiv3(\mathrm{mod}\ 7)$ ни оламиз. Ҳосил бўлган таққосламанинг ҳар икки томонини 5555 - даражага кўтарамиз (2-натижа):

$$2222^{5555}\equiv3^{5555}(\mathrm{mod}\ 7).$$

Бу таққослама изланаётган қолдиқ 3^{5555} ни 7 га бўлишдан ҳосил бўладиган қолдиқ билан бир хил эканлигини кўрсатади. 3^{5555} ни 7 га бўлишда ҳосил бўладиган қолдиқни топамиз. Бунинг учун 3 нинг дастлабки бир нечта даражаларини 7 га бўлишда қандай қолдиқлар ҳосил бўлишини кузатайлик:

$3^1\equiv3(\mathrm{mod}\ 7)$; $3^2\equiv3\cdot3\equiv9\equiv2(\mathrm{mod}\ 7)$; $3^3\equiv2\cdot3\equiv6(\mathrm{mod}\ 7)$;
$3^4\equiv6\cdot3\equiv18\equiv4(\mathrm{mod}\ 7)$; $3^5\equiv4\cdot3\equiv12\equiv5(\mathrm{mod}\ 7)$;
$3^6\equiv5\cdot3\equiv15\equiv1(\mathrm{mod}\ 7)$.

$3^6\equiv1(\mathrm{mod}\ 7)$ га эга бўлдик. Бундан, $3^{6k}\equiv1^k(\mathrm{mod}\ 7)$ $k\in\mathrm{N}$ (2) ни оламиз.

Энди 5555 ни 6 га бўламиз: $5555=6\cdot925+5$.

У ҳолда $3^{5555}=3^{6\cdot925+5}=3^{6\cdot925}\cdot3^5\equiv1\cdot3^5\equiv5(\mathrm{mod}\ 7)$.

Шундай қилиб, изланаётган қолдиқ 5 га тенг.

2 - м и с о л. $2^{60}+7^{30}$ сони 13 га бўлинади. Шуни исботланг.

И с б о т. $2^4=13+3$ ва $7^2=49=13\cdot4-3$ бўлгани учун $2^4\equiv3(\mathrm{mod}\ 13)$, $7^2\equiv-3(\mathrm{mod}\ 13)$ ларга эгамиз. Охирги ҳар бир таққосламани 15 даражага кўтариб, уларни ҳадма-ҳад қўшамиз: $2^{60}+7^{30}=0\ (\mathrm{mod}13)$.

Демак, $2^{60}+7^{30}$ сони 13 га бўлинади.

2.12. Таққослама тўғрими:

а) $125\equiv-35(\mathrm{mod}\ 4)$
б) $44\equiv-32(\mathrm{mod}\ 25)$
в) $-58\equiv11(\mathrm{mod}\ 5)$;
г) $111\equiv13(\mathrm{mod}\ )$;
д) $113\equiv13(\mathrm{mod}\ 100)$
е) $842\equiv42(\mathrm{mod}\ -5)$
ё) $31\equiv-20(\mathrm{mod}\ 17)$
ж) $1\equiv18(\mathrm{mod}\ 0)$?

2.13. $n\in\{3,5,9\}$ бўлсин. n нинг қайси қийматларида таққослама тўғри бўлади:

а) $33\equiv3(\mathrm{mod}\ n)$;
б) $134\equiv-25(\mathrm{mod}\ n)$
в) $-223\equiv41(\mathrm{mod}\ n)$
г) $34\equiv72(\mathrm{mod}\ n)$;
д) $43\equiv-2(\mathrm{mod}\ n)$;
е) $-121\equiv13(\mathrm{mod}\ n)$;
ё) $155\equiv11(\mathrm{mod}\ n)$;
ж) $-48\equiv11(\mathrm{mod}\ n)$?

2.14. 5^{20} ни 24 га бўлишда ҳосил бўладиган қолдиқни топинг.

2.15. 3333^{6666} ни 5 га бўлишда ҳосил бўладиган қолдиқни топинг.

2.16. $7^{7^{77}}$ нинг охирги рақамини топинг.

Е ч и ш. 7 нинг дастлабки бир нечта даражаларининг охирги рақамини кузатамиз:

$7^1=7$;	$7^5=*7$;	Такрорланиш содир бўлди
$7^2=49$;	$7^6=*9$;	(қадам 4 га тенг).
$7^3=*3$;	$7^7=*3$;	Кузатув қуйидаги хулосани чиқаришга имкон беради.
$7^4=*1$;	$7^8=*1$.	

$$7^n=\begin{cases}*7,\ \text{агар}\ n=1\ (\mathrm{mod}\ 4),\\ *9,\ \text{агар}\ n=2\ (\mathrm{mod}\ 4),\\ *3,\ \text{агар}\ n=3\ (\mathrm{mod}\ 4),\\ *1,\ \text{агар}\ n=0\ (\mathrm{mod}\ 4).\end{cases}\qquad(3)$$

Энди $n=7^{77}$ ни 4 га бўлишда ҳосил бўладиган қолдиқни аниқлаймиз:

$7^1 \equiv 3 \pmod 4$; $7^2 \equiv 3 \cdot 7 \equiv 1 \pmod 4$; $7^{2k} \equiv 1 \pmod 4$;
$7^{77} = 7^{2\ 38+1} = 7^{2 \cdot 38} \cdot 7 \equiv 1 \cdot 7 \equiv 3 \pmod 4$.

$7^{77} \equiv 3 \pmod 4$ бўлгани учун, (3) га асосан $7^{7^{77}} = {*3}$. Шундай қилиб, охирги рақам 3 экан.

2.17. Соннинг охирги рақамини топинг:

а) $8^{8^{87}}$;
б) $113^{8^{91}}$;
в) $144^{5^{555}}$;
г) $2002^{9^{95}}$
д) $555^{222^{22}}$;
е) $333^{444^{555}}$;
ё) $1111^{9^{99}}$;
ж) $999^{2888^{999}}$;
з) 10001^{9n}, $n \in N$;
к) 1005^{1005n}, $n \in N$;
л) $8^{8^{95}}$;
м) $6^{7^{89}}$

2.18. Ихтиёрий n натурал сон учун n^5-n сони 5 га бўлинишини исботланг.

Исбот. n - ихтиёрий натурал сон бўлсин. n ни 5 га бўламиз.

Агар $n \equiv 0 \pmod 5$ бўлса, $n^5-n \equiv 0^5-0 \equiv 0 \pmod 5$ бўлади.
Агар $n \equiv 1 \pmod 5$ бўлса, $n^5-n \equiv 1^5-1 \equiv 0 \pmod 5$ бўлади.
Агар $n \equiv 2 \pmod 5$ бўлса, $n^5-n \equiv 2^5-2 \equiv 30 \equiv 0 \pmod 5$ бўлади.
Агар $n \equiv 3 \pmod 5$ бўлса, $n^5-n \equiv 3^5-3 \equiv 240 \equiv 0 \pmod 5$ бўлади.
Агар $n \equiv 4 \pmod 5$ бўлса, $n^5-n \equiv 4^5-4 \equiv 1020 \equiv 0 \pmod 5$ бўлади. n нинг ҳар қандай қийматида, $n^5-n \equiv 0 \pmod 5$ эканини кўрамиз. Демак, $\forall n \in N$ учун (n^2-n) 5 га қолдиқсиз бўлинади.

2.19. n нинг барча бутун қийматларида (n^3+11n) сони 6 га қолдиқсиз бўлинишини исботланг.

2.20. n нинг барча бутун қийматларида (n^2-n) 3 га қолдиқсиз бўлинишини исботланг.

2.21. n^2+1 сони n нинг ихтиёрий бутун қийматида 3 га бўлинмаслигини исботланг.

2.22. n нинг барча натурал қийматларида $n(n^2+1)$ сони 7 га бўлинишини исботланг.

2.23. $12^{2n+1}+11^{2n+2}$ сони n нинг ҳар қандай натурал қайматида 133 га бўлинишини исботланг.

2.24. p сони 3 дан катта туб сон бўлса, p^2-1 сони 24 га бўлинади. Исботланг.

2.25. p ва q сонлари 3 дан катта туб сонлар бўлса, p^2-q^2 сони 24 га бўлинади. Исботланг.

Математик индукция методи ёрдамида сонларнинг бўлинишини исботлашга доир мисоллар

М и с о л. n нинг барча натурал қийматларида $4^n+15n-1$ сони 9 га бўлинади. Исботланг.

И с б о т. $n=1$ да $4^n+15n-1=18$ сони 9 га бўлинади.

$4^n+15n-1$ сони $n=k$ да 9 га бўлинади, деб фараз қиламиз ва $n=k+1$ бўлганда ҳам $4^n+15n-1$ сони 9 га бўлинишини кўрсатамиз:

$n=k+1$ бўлса, $4^n+15n-1=4^{k+1}+15(k+1)-1=4\cdot 4^k+15k+14=$ $=4(4^k+15k-1)-60k+4+15k+14=4(4^k+15k-1)-45k+18=$ $=4(4^k+15k-1)+9(2-5k)$ га эга бўламиз.

Биринчи қўшилувчи қилинган фаразга кўра 9 га бўлинади. Иккинчи қўшилувчи ҳам 9 га бўлингани учун уларнинг йиғиндиси ҳам 9 га бўлинади. Демак, $4^n+15n-1$ сони n нинг барча натурал қийматларида 9 га бўлинади. Шу билан даъво исбот бўлди.

2.26. $4^n+15n-1$ сони n нинг барча натурал қийматларида 3 га бўлинишини исботланг.

2.27. n^3+5n сони ихтиёрий натурал n да 6 га бўлинишини исботланг.

2.28. 7^n+3n-1 нинг 9 га бўлинишини исботланг, бунда $n\in N$.

2.29. $6^{2n}+19^n-2^{n+1}$ нинг 17 га бўлинишини исботланг, бунда $n\in \mathrm{N}$.

2.30. Барча $n\in N$ лар учун $(2n-1)^3-(2n-1)$ сонининг 24 га бўлинишини исботланг.

2.31. n^3+11n сони ихтиёрий $n\in N$ да 6 га бўлинишини исботланг.

2.32. $n^2(n^2-1)$ соннинг 4 га бўлинишини исботланг, бунда $n\in \mathrm{N}$.

2.33. $n(2n-1)(7n+1)$ сони 6 га бўлинишини исботланг ($n\in \mathrm{N}$).

2.34. 2^n+2^{n+1} сони 6 га бўлинишини исботланг ($n\in \mathrm{N}$).

2.35. $n^2(n^2-1)$ сон 12 га бўлинишини исботланг ($n\in \mathrm{N}$).

3-§. РАЦИОНАЛ СОНЛАР

Оддий касрлар устида амаллар

3.1. Амалларни бажаринг:

а) $\frac{8}{45}+\frac{16}{45}$; е) $\frac{17}{18}+\frac{13}{36}$; л) $\frac{8}{15}\quad\frac{19}{151}$;

б) $\frac{17}{48}-\frac{7}{48}$; ё) $\frac{32}{15}-\frac{17}{148}$; м) $\frac{12}{121}\quad\frac{11}{144}$;

в) $\frac{17}{35}+\frac{18}{35}$; ж) $\frac{15}{17}-\frac{7}{18}$; н) $\frac{9}{113}\cdot\frac{15}{101}$;

г) $\frac{18}{69}+\frac{59}{69}$; з) $\frac{37}{113}-\frac{9}{131}$; о) $\frac{19}{38}:\frac{15}{49}$;

д) $\frac{1112}{150}-\frac{338}{150}$; к) $\frac{1}{151}+\frac{9}{153}$; п) $\frac{121}{49}\quad\frac{11}{7}$

3.2. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\left(45\frac{1}{2}-2\frac{3}{8}\right)-\left(5\frac{5}{6}+6\frac{3}{4}\right)+\left(10\frac{2}{3}-5\frac{5}{8}\right)$;

б) $\left(36\frac{4}{5}-12\frac{3}{10}\right)-\left(4\frac{2}{15}+1\frac{1}{30}\right)+\left(20\frac{11}{12}-10\frac{3}{8}-\frac{3}{16}-3\frac{1}{48}\right)$;

в) $\left(12\frac{1}{2}-3\frac{5}{6}\right)-\left(2\frac{8}{9}+1\frac{4}{5}\right)-\left(6\frac{5}{8}-4\frac{3}{4}\right)-\left(6\frac{9}{40}-5\frac{11}{90}\right)$;

г) $56\frac{2}{21}-\left\{\left(1\frac{5}{6}+2\frac{13}{14}\right)+\left[27\frac{13}{30}-\left(15\frac{5}{12}-12\frac{13}{20}\right)\right]\right\}$;

д) $\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{8}\quad\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}$; е) $3\frac{1}{3}\quad 3\frac{13}{53}\cdot 3\frac{1}{88}$;

ё) $5\frac{1}{4}\quad 1\frac{2}{7}\quad 5\frac{1}{2}\quad\frac{3}{22}$; ж) $\left(1\frac{11}{24}+1\frac{13}{56}\right)\cdot 9:1\frac{2}{5}$;

з) $\dfrac{8\frac{1}{2}}{15:\frac{5}{17}}$; к) $\dfrac{\frac{28}{29}:\frac{7}{29}}{\frac{7}{9}\quad\frac{1}{9}}$; л) $\dfrac{4\frac{4}{5}:\frac{4}{17}}{3\frac{2}{5}}$;

м) $8\frac{13}{16}\cdot\frac{47}{64}\quad 1\frac{1}{35}\quad 3\frac{1}{2}$

Амалларни бажаринг:

3.3. а) $2\ \frac{3}{5} + \frac{3}{5}\ \ 2 + 1\frac{1}{2}\ \ 6 + 6\ \frac{1}{2}$,

б) $6\frac{1}{4}\ \ 8 - 3\frac{2}{3}\ \ 5\frac{1}{2} + 2\frac{2}{5}\ \ 4\frac{7}{12}$;

в) $2\frac{1}{2}\ \cdot 48 - 3\frac{3}{8}\ \ \frac{1}{18} + 5\frac{5}{12} : \frac{7}{36}$;

г) $13\frac{1}{2}\ \ 1\frac{1}{3} + 16\frac{1}{2}\ \ 1\frac{5}{11} + 19\frac{1}{4}\ \ \frac{4}{25}$

3.4. а) $\left(3\frac{1}{2} - 2\frac{2}{3} + 5\frac{5}{6} + 4\frac{3}{5}\right)\ \ 24$;

б) $\left(5\frac{5}{8} + 18\frac{1}{2} - 7\frac{5}{24}\right) : 16\frac{2}{3}$;

в) $\left(12\frac{5}{12} + 1\frac{2}{3} - 3\frac{5}{6} + 2\frac{3}{4}\right) : \left(2\frac{1}{2}\ \ \frac{2}{5} - \frac{7}{9}\right)$;

г) $48\frac{3}{8}\ \ 6\frac{3}{4}\ \ \frac{5}{12} - 2\frac{5}{6} + 1\frac{75}{94} \cdot \left(1\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{3} - 13\ \ 26\right)$

3.5. а) $\left(\frac{5}{7}\ \ 2\frac{1}{3}\ \ \frac{5}{6} - 1\right) : \left(1 - \frac{7}{8}\ \ 1\frac{3}{5}\ \ \frac{3}{14}\right)$;

б) $\left(8\frac{7}{15} - 3\frac{3}{4} + 4\frac{2}{3} - 8\frac{7}{60}\right) : \left(4\frac{1}{4} - 2\frac{3}{4}\right)$;

в) $\left(1\frac{8}{13} \cdot \frac{13}{42} + 5\frac{5}{7}\ \ \frac{8}{21}\right)\ \ \left(8\frac{1}{8} + 3\frac{1}{3}\right)$;

г) $2\frac{3}{5}\ \ 6\frac{1}{15} + 1\frac{1}{14} - 1\frac{39}{73} \cdot \left(5\frac{5}{7} - 5\frac{5}{16}\right)$.

3.6. а) $\dfrac{12\frac{4}{5}\ \ 3\frac{3}{4} - 4\frac{4}{11} \cdot 4\frac{1}{8}}{11\frac{2}{3}\ \ 4\frac{4}{7}}$

б) $\dfrac{28\frac{4}{5}\ \ 13\frac{5}{7} + 6\frac{3}{5}\ \ \frac{2}{3}}{1\frac{11}{16} : 2\frac{1}{4}}$;

в) $\dfrac{2\frac{3}{8}\ \ \frac{3}{4} + 24\frac{7}{9}}{7\frac{1}{8} - 175\frac{4}{5}\ \ 24}$;

г) $\dfrac{\left(1\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3} + 3\frac{3}{4}\right) \cdot 3\frac{3}{5}}{14 - 15\frac{1}{8}\ \ 2\frac{1}{5}}$;

д) $\dfrac{14\frac{4}{5}-6\frac{11}{12}+12\frac{3}{4}-7\frac{2}{15}}{10\frac{2}{3}-3\frac{11}{12}}+2\frac{2}{3}\;\;3\frac{3}{4}$;

е) $\dfrac{1\frac{9}{16}\;\;3\frac{1}{5}+16\frac{2}{3}-9\;\;2\frac{2}{5}}{17\frac{7}{12}-6\frac{1}{3}}+\dfrac{12\frac{2}{3}-61\frac{1}{2}\;\;6\frac{3}{4}}{2\frac{2}{3}}$

Қуйидаги масалаларни тенглама тузиб ечинг:

3.7. а) Икки соннинг йиғиндиси $7\frac{1}{2}$ га тенг. Сонлардан бири иккинчисидан $4\frac{4}{5}$ та ортиқ. Шу сонларни топинг;

б) учта соннинг йиғиндиси $3\frac{2}{3}$ га тенг. Биринчи сон иккинчисидан $5\frac{1}{3}$ та, учинчисидан эса $3\frac{5}{6}$ та ортиқ. Шу сонларни топинг.

3.8. Уй учта хонадан иборат. Биринчи хонанинг юзаси $24\frac{3}{8}$ м^2 бўлиб, уй юзасининг $\frac{13}{16}$ қисмини ташкил этади. Иккинчи хонанинг юзаси учинчи хона юзасига қараганда $8\frac{1}{8}$ м^2 ортиқ. Иккинчи хонанинг юзасини топинг.

3.9. Уч бўлак темирнинг оғирлиги биргаликда $17\frac{1}{4}$ кг. Агар биринчи бўлакнинг оғирлигини $1\frac{1}{2}$ кг, иккинчи бўлакнинг оғирлигини эса $2\frac{1}{4}$ кг камайтирсак, учта бўлак темирнинг ҳаммаси бир хил оғирликда бўлиб қолади. Ҳар бир бўлакнинг дастлабки оғирлигини топинг.

3.10. а) Икки соннинг йиғиндиси $8\frac{11}{14}$ га, айирмаси эса $2\frac{3}{7}$ га тенг. Шу сонларни топинг;

б) моторли қайиқ дарё оқими бўйлаб $15\frac{1}{4}$ км/соат тезлик билан, оқимга қарши эса $8\frac{1}{4}$ км/соат тезлик билан юради. Дарё оқимининг тезлигини топинг.

3.11. Ота ўғлидан 24 ёш катта. Ўғлининг ёши отаси ёшининг $\frac{5}{13}$ қисмига тенг. Отаси неча ёшда?

3.12. Касрнинг махражи унинг суратидан 11 та ортиқ. Агар касрнинг махражи унинг суратидан $3\frac{1}{2}$ марта ортиқ бўлса, шу касрни топинг.

3.13. Икки соннинг йиғиндиси 16 га тенг. Агар иккинчи соннинг $\frac{1}{3}$ қисми биринчи соннинг $\frac{1}{5}$ қисмига тенг бўлса, шу сонларни топинг.

3.14. Белгиланган ишни биринчи бригада 36 кунда, иккинчи бригада эса 45 кунда бажаради. Иккита бригада бирга ишласа, шу ишни неча кунда бажаради?

3.15. Икки шаҳар орасидаги масофани йўловчи поезди 10 соатда, юк поезди эса 15 соатда босиб ўтади. Улар бир вақтда бир-бирига қараб йўлга чиқса, неча соатдан кейин учрашади?

3.16. Биринчи қувур бассейнни 5 соатда тўлдиради. Иккинчи қувур тўла бассейнни 6 соатда бўшатади. Агар иккала қувур, бир вақтда очилса, бассейн неча соатдан кейин тўлади (Бассейн бўш эди деб ҳисоблансин).

Ўнли касрлар устида амаллар

Амалларни бажаринг:

3.17. а) $4{,}735:0{,}5+14{,}95:1{,}3-2{,}121:0{,}7$;

б) $589{,}72:16-18{,}305:7+0{,}0567:4$;

в) $3{,}006-0{,}3417:34-0{,}875:125$;

г) $22{,}5:3{,}75+208{,}45-2{,}5:0{,}004$

3.18. а) $(0{,}1955+0{,}187):0{,}085$;

б) $15{,}76267:(100{,}6+42697)$;

в) $(86{,}9+667{,}6):(37{,}1+13{,}2)$;

г) $(9{,}09-900252)\cdot(25{,}007-12{,}507)$.

3.19. а) $(0{,}008+0{,}992)\cdot(5\cdot0{,}6-1{,}4)$;

б) $(0{,}93+0{,}07)\cdot(0{,}93-0{,}805)$;

в) $(50000-1397{,}3):(20{,}4+33{,}603)$;

г) $(2779{,}6+8024):(1{,}98+2{,}02)$.

3.20. а) $\dfrac{4{,}06\cdot0{,}0058+3{,}3044895-(0{,}7584:2{,}37+0{,}0003:8)}{0{,}03625\quad 80-2{,}43}$;

б) $\dfrac{2{,}045\cdot0{,}033+10{,}518395-0{,}464774:0{,}0562}{0{,}003092:0{,}0001-5{,}188}$

в) $\dfrac{57{,}24\cdot3{,}55+430{,}728}{2{,}7\quad 1{,}88-1{,}336}+\dfrac{127{,}18\cdot4{,}35+14{,}067}{18+2{,}1492:3{,}582}$;

г) $52:\left(\dfrac{6:(0{,}4-0{,}2)}{2{,}5\cdot(0{,}8+1{,}2)}+\dfrac{(34{,}06-33{,}81)\cdot4}{6{,}48:(28{,}57-25{,}15)}\right)-8$.

3.21. Икки соннинг ўрта арифметиги 36,4. Бу сонларнинг бири 36,8. Иккинчи сонни топинг.

3.22. Иккита кема 3500 т юкни мўлжалга етказишди. Биринчи кема иккинчисига қараганда 1,5 марта ортиқ юкни мўлжалга етказган бўлса, ҳар бир кема неча тонна юкни мўлжалга етказган?

3.23. Моторли қайиқ оқим бўйича 14,5 км/соат тезлик билан, оқимга қарши эса 9,5 км/соат тезлик билан ҳаракат қилади. Моторли қайиқнинг турғун сувдаги тезлигини ва оқимнинг тезлигини топинг.

3.24. Кема оқим бўйича 4 соатда 85,6 км, оқимга қарши 3 соатда 46,2 км юрди. Кеманинг турғун сувдаги тезлигини ва оқимнинг тезлигини топинг.

3.25. Ораларидаги масофа 32,4 км бўлган иккита аҳоли пунктидан бир вақтда қарама-қарши йўналишда мотоциклчи ва велосипедчи йўлга чиқди. Агар мотоциклчининг тезлиги велосипедчининг тезлигидан 4 марта ортиқ бўлса, улар учрашгунча қанчадан йўл босади?

3.26. Иккита кема ораларидаги масофа 50,9 км бўлган иккита портдан бир-бирига қараб бир вақтда йўлга чиқди. Агар биринчи кеманинг тезлиги 25,5 км/соат, иккинчисиники эса 22,3 км/соат бўлса, улар неча соатдан кейин учрашади?

Даврий касрлар

3.27. Оддий каср махражини туб кўпайтувчиларга ажратиш билан уни ўнли касрга айлантиринг:

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{4};\ \frac{3}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{5}{16};\ \frac{7}{25};\ \frac{23}{25};\ \frac{6}{125};\ 3\frac{9}{40};\ 11\frac{7}{80};$$

$$4\frac{3}{200};\ 4\frac{31}{500}.$$

3.28. Оддий каср суратини унинг махражига бўлиш ёрдамида оддий касрни ўнли касрга айлантиринг:

а) $\frac{9}{15};\ \frac{18}{252};\ \frac{11}{28};\ \frac{39}{65};\ \frac{30}{75};\ \frac{6}{48};\ 2\frac{3}{48};\ 5\frac{192}{575};\ 12\frac{177}{1500};$

б) $\frac{8}{5};\ \frac{25}{16};\ \frac{47}{32};\ \frac{263}{250};\ \frac{312}{125};\ 1\frac{711}{625};\ 5\frac{2541}{2000};$

$$4\frac{7359}{5000};\ 3\frac{23}{25000}.$$

3.29. Қуйидаги сонлар берилган:

$$\frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{6};\ \frac{1}{12};\ \frac{3}{32};\ \frac{4}{21};\ \frac{5}{54};\ \frac{11}{90};\ 12\frac{7}{50};\ \frac{3}{6};\ \frac{15}{45};\ \frac{9}{27}$$

а) Чекли ўнли касрга айланадиган сонлар тўпламини тузинг;

б) Чексиз ўнли касрга айланадиган сонлар тўпламини тузинг.

3.30. Қуйидаги сонларни даврий ўнли каср кўринишида ёзинг:

$$1\quad 1{,}4;\ \frac{7}{8};\ \frac{13}{26};\ \frac{81}{243};\ \frac{15}{43};\ \frac{71}{16};\ \frac{1}{25};\ \frac{15}{39};\ \frac{41}{43};\ 19$$

3.31. Даврий ўнли касрни оддий касрга айлантиринг:

а) 0,(3) ;	д) 13,0(48)	з) 2,(123) ;
б) 0,3(2) ;	е) 0,(4) ;	к) 2,333(45) ;
в) 0,71(23)	ё) 0,(45) ;	л) 41,8519(504)
г) 11,(75)	ж) 3,1(44)	м) 35,73(4845)

3.32. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $$\frac{0{,}8333... - 0{,}4(6)}{1\frac{5}{6}}\quad \frac{1{,}125 + 1{,}75 - 0{,}41(6)}{0{,}59};$$

б) $$\frac{\left(\frac{5}{8} + 2{,}708333...\right): 2{,}5}{(1{,}3 + 0{,}7(6) + 0{,}(36))\ \frac{110}{401}}\quad \frac{1}{2};$$

в) $$\frac{\left(2\frac{38}{45} - \frac{1}{15}\right): 13\frac{8}{9} + 3\frac{3}{65}\quad 0{,}(26)}{(18{,}5 - 13{,}777...)\ \frac{1}{85}}\cdot 0{,}5;$$

г) $$\frac{\frac{3}{4} + 0{,}8(5)\quad \frac{1}{2}}{9\quad (0{,}9(23) - 0{,}7(9))} + \frac{41}{43}$$

4-§. ИРРАЦИОНАЛ СОНЛАР

Таъриф. Чексиз даврий бўлмаган ўнли касрлар иррационал сонлар дейилади.

1-мисол. 0,101001000100001000001... иррационал сон эканини исботланг. (Биринчи бирдан кейин битта нол, иккинчи бирдан кейин иккита нол ва ҳоказо).

И с б о т. Берилган каср даврий ва унинг даври n та рақамдан иборат, деб фараз қилайлик (тескари фараз). $2n+1$ инчи 1 ни танлаймиз. Бу бирдан кейин $2n+1$ та кетма-кет ноллар келади:

$$\ldots 1\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ та}}\boxed{0}\underbrace{0\ldots00}_{n\text{ та}}1$$

Шу ўртада турган 0 ни қараймиз. Бу нол бирор даврнинг ё бошида, ёки ичида, ёки охирида келади. Бу ҳолларнинг ҳаммасида бу давр ажратилган ноллардан тузилган «кесма»да тўла жойлашади. Демак, давр фақат ноллардан тузилган. Бундай бўлиши эса соннинг тузилишига зид. Фараз нотўғри.

2 м и с о л. $\sqrt{2}$ сони иррационал сон эканини исботланг.

И с б о т. $\sqrt{2}$ рационал сон деб фараз қилайлик. У ҳолда уни қисқармас оддий каср кўринишида ёзиш мумкин:

$$\sqrt{2}=\frac{m}{n} \qquad (*)$$

(*) дан $2=\frac{m^2}{n^2}$ ни ёки

$$m^2=2n^2 \qquad (**)$$

ни оламиз. Бу ердан m сони жуфт сон эканлиги келиб чиқади: $m=2k$, $k\in N$. Буни (**) га қўямиз: $(2k)^2=2n^2$. Бундан $n^2=2k^2$ ни оламиз. Демак, n ҳам жуфт экан. Бу эса $\frac{m}{n}$ нинг қисқармас каср эканлигига зид. Фаразимиз нотўғри. $\sqrt{2}$—иррационал сон.

4.1. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2\sqrt{6}$ нинг иррационал сон эмаслигини исботланг.

4.2. $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ иррационал сонми?

4.3 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}+3}}-\frac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}$ сонни иррационалликка текширинг.

4.4. 0,1234567891011121314... соннинг иррационал сон эканлигини исботланг (вергулдан кейин ҳамма натурал сонлар кетма-кет ёзилади).

4.5. Сонларнинг иррационал сон эканлигини исботланг:

а) $\sqrt{13}$; б) $\sqrt{17}$ в) $\sqrt[3]{12}$; г) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

4.6. а) a ва b сонлар рационал сонлар;

б) a ва b сонлар иррационал сонлар;

в) a рационал сон, b иррационал сон бўлса, $a+b$ соннинг рационал ёки иррационал эканлиги ҳақида нима дейиш мумкин?

4.7. а) a ва b сонлар рационал сонлар;

б) a ва b сонлар иррационал сонлар;

в) a рационал сон, b иррационал сон бўлса, $a \cdot b$ соннинг рационал ёки иррационал эканлиги ҳақида нима дейиш мумкин?

4.8. Каср махражидаги иррационалликни йўқотинг:

а) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; б) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; в) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$;

г) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}$; д) $\dfrac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; е) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}}$;

ё) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}}$; ж) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$

4.9. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}$; б) $\sqrt{3-\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$

в) $\left(4\sqrt[3]{1}+2\sqrt{3}-\sqrt[6]{13}+4\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{\dfrac{2\sqrt{3}-1}{11}}$

4.10. Сонларни таққосланг:

а) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ва $\sqrt{11}$; в) $\sqrt{6}+2\sqrt{7}$ ва $\sqrt{10}+\sqrt{21}$;

б) $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ ва $2\sqrt{5}$; г) $\sqrt{11}$ ва $5-\sqrt[3]{5}$

4.11. Агар $z=\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$,

$x=\sqrt[3]{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ бўлса, $\dfrac{z^3}{3}-z$

ва x^3+x ифодаларнинг қийматларини таққосланг.

4.12. $A=\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}}+\sqrt[3]{38-3\sqrt{1445}}$,

$$B=\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}$$

сонларни таққосланг.

4.13. a ва b лар иррационал сонлар бўлсин. $c\in(a;b)$

шартни қаноатлантирувчи c иррационал сон мавжудлигини исботланг.

4.14. а) Агар p, q — бутун сонлар учун $p+q\sqrt{3}=0$ бўлса, $p=q=0$ бўлишини исботланг;

б) агар p, q — бутун сонлар учун $p^2-9q^2=6q$ бўлса, $p=q=0$ бўлишини исботланг;

в) агар p, q — бутун сонлар учун $p^2-4q^2=4pq$ бўлса, $p=q=0$ бўлишини исботланг;

г) a, b, c рационал сонлар учун $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$ бўлса, $a=b=c=0$ бўлишини исботланг.

4.15. α, β лар иррационал сонлар, r эса рационал сон бўлсин. Қуйидаги сонларнинг қайсилари рационал сон бўлиб қолиши мумкин:

а) $\alpha+\beta$; б) $\alpha+r$; в) $\sqrt{\alpha}$; г) $\sqrt{r}$; д) $\alpha\cdot\beta$;

е) $\sqrt{\alpha+r}$; ж) $\sqrt{\alpha}+\sqrt{r}$?

5-§. ҲАҚИҚИЙ СОНЛАР

Соннинг модули

Ҳақиқий сон a нинг модули $|a|$ билан белгиланади ва қуйидагича аниқланади:

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{агар } a\geq 0 \text{ бўлса,} \\ -a, & \text{агар } a<0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

5.1. Ҳақиқий сон a нинг модули номанфий сон эканини исботланг.

5.2. Таққосланг:

а) $|8{,}7|$ ва 8; д) $-|-3{,}2|$ ва $-3{,}2$;

б) $|0|$ ва 0; е) $|a|$ ва 0;

в) $|-15{,}2|$ ва $15{,}2$; ж) $-5|a|$ ва 0;

г) $\left|-6\frac{3}{4}\right|$ ва $-6\frac{3}{4}$; з) $|a|$ ва a.

5.3. Ҳарфларнинг кўрсатилган қийматларида ифоданинг қийматини ҳисобланг:

а) $|a|+2|b|$ $a=-3$, $b=5$; б) $|-a|-2|b|$ $a=-1$, $b=-2$;

в) $\dfrac{-1-|-3a|+4|b|}{2|a|+|b|}$ $a=-4$, $b=0$; г) $\dfrac{4-|a|+2|b+1|}{|-a|\cdot|b+3|\cdot|b+1|}$ $a=2$, $b=-4$;

д) $(-|-a|)^3+2|-b|^3$ $a=1$, $b=2$.

5.4. Агар а) $|a|=b$, б) $|a|=-b$ бўлса, b сон ҳақида нима дейиш мумкин?

5.5. Агар а) $|a|=|b|$, б) $|a|=a$ в) $|b|=-b$ бўлса, a ва b сонлар ҳақида нима дейиш мумкин?

5.6. Модулнинг қуйидаги хоссаларини исботланг:

а) $a\le |a|$; д) $|a+b|\le |a|+|b|$;
б) $-a\le |a|$; е) $|a-b|\le |a|+|b|$;
в) $|-a|=|a|$; ж) $|a+b|\ge |a|-|b|$;
г) $-|a|\le a\le |a|$; з) $|a-b|\ge ||a|-|b||$

5.7. Тенгликни исботланг:

а) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$ в) $|a^2|=|a|^2=a^2$
б) $\frac{|a|}{|b|}=\frac{|a|}{|b|}$ $(b\ne 0)$ г) $|a^{2n}|=|a|^{2n}=a^{2n}$ $n\in N$.

5.8. Ифодани модул белгисисиз ёзинг:

а) $|x-2|$; д) $|3x+7|$; и) $a+|a|$;
б) $|x+2|$; е) $|-3x+7|$; к) $2x+|a-1|$;
в) $|-x+3|$; ж) $|-3x-9|$; л) $3|xy|+a$;
г) $|-x-4|$; з) $|4x|$; м) $2|x-y|+y$

5.9. Ифодани модул белгисисиз ёзинг:

а) $|x+1|+|x-1|$; д) $|4x-8|+|x-2|+|x|$;
б) $|x-1|-2|x+2|$; е) $|7x-5|+|2x-1|+|x-2|$;
в) $|2x-1|-|x-2|$; ж) $|7x+5|-|3x-2|+|x-3|$;
г) $|3x-7|+|4x-5|$; з) $|3x-6|+|8x-4|-|13x-20|$

5.10.* Ифодани модул белгисисиз ёзинг:

а) $||x|-2|$; д) $||6x-1|-|4x+1||$;
б) $||x-3|-x|$; е) $||x-3|-|x||-|x-1|$;
в) $|x-3-|x||$; ж) $|x^2-|x|^2+|x|-|x-3||$;
г) $||x-3|-|x||$; з) $||3x+1|-|x||-|x-2|$

5.11. a, b, c, d ҳақиқий сонлар бир вақтда нолга тенг эмаслигини модул белгисидан фойдаланиб қандай ёзиш мумкин?

5.12. a, b, c сонлардан камида иккитаси ўзаро тенг эмаслигини модул белгиси ёрдамида қандай ёзиш мумкин?

5.13. a, b, c лар ўзаро тенг эканини модул қатнашган тенгсизлик билан ифодаланг.

5.14. $A(a)$ ва $B(b)$ нуқталар орасидаги масофа $|a-b|$ га тенг эканини исботланг.

5.15. Тенгсизликларни ечинг:

а) $|x-2|<3$; б) $|x+2|<3$; в) $|3x-1|<4$; г) $|4x+3|\le 3$.

Сонннинг бутун қисми ва каср қисми. a нинг *бутун қисми* деб, a дан катта бўлмаган энг катта бутун сонга айтилади. a нинг бутун қисми $[a]$ билан белгиланади.

$\{a\}=a-[a]$ сонни a нинг *каср қисми* дейилади. $\{a\}\in[0;1)$ муносабат ўринли.

1 - м и с о л. $\left[\frac{4-x}{5}\right]=6$ тенгламани ечинг.

Е ч и ш. Соннинг бутун қисми таърифига кўра $6\le\frac{4-x}{5}<7$ бўлиши лозим. Бундан $30\le 4-x<35$ ёки $-31<x\le-26$ ни оламиз. Ҳосил қилинган тенгсизликлардан ихтиёрий биттаси ёрдамида қолганларини ҳосил қилиш мумкин бўлганлиги сабабли, $-31<x\le-26$ шартни қаноатлантирувчи барча $x\in R$ лар берилган тенгламанинг ечими бўла олади.

Ж а в о б. (-31;-26].

2 - м и с о л. $\left[\frac{2x+1}{2}\right]=3x$ тенгламани ечинг.

Ечиш. x^* сон $\left[\frac{2x^*+1}{2}\right]=3x^*$ тенгламанинг ечими бўлсин.

Тенгламанинг чап томони бутун сон бўлгани учун унинг ўнг томонидаги $3x^*$ сон ҳам бутун сон бўлади. Демак, x^* - бутун сон. Соннинг бутун қисми таърифига кўра, $3x^*-1<\frac{2x^*+1}{2}\le 3x^*$ тенгсизликка ёки $0{,}25\le x^*<0{,}75$ тенгсизликка эга бўламиз. Охирги тенгсизликни қаноатлантирувчи бутун сон мавжуд эмас. Демак, тенглама ечимга эга эмас.

5.16. Соннинг бутун қисмини топинг:

а) [2,8] ; в) [0] ; д) [-1,5] ; ж) $[\pi]$; и) $[\sqrt{15}]$;

б) [2] ; г) [0,9] ; е) [-0,2] ; з) $[-\pi]$; к) $\left[\frac{100}{7}\right]$

5.17. Ҳисобланг:

а) $100\cdot\left[\frac{1}{7}\right]$; г) $\left[12\frac{2}{7}\right]+5\frac{6}{7}$ ж) $\left[\frac{100}{7^2}\right]\cdot 7$;

б) $\left[12\frac{2}{7}+5\frac{3}{7}\right]$; д) $8\cdot\left[3\frac{2}{3}\right]$; з) $\left[\frac{490}{100}\right]^2$

в) $\left[12\frac{2}{7}\right]+\left[5\frac{6}{7}\right]$; е) $\left[\frac{100}{7}\right]\cdot 7$

5.18. Тенгламани ечинг:

а) $\left[\frac{3x-1}{4}\right] = 5$; в) $[2x+4] = -5$;

б) $\left[\frac{3x}{4} - 1\right] = 15$; г) $[3x-1] = -4$.

5.19. Тенгламани ечинг:

а) $\left[\frac{x-1}{2}\right] = x$; в) $\left[\frac{2x-1}{3}\right] = 2x$;

б) $\left[\frac{3x+1}{2}\right] = -x$; г) $[3x+1] = \frac{x}{4}$.

5.20. Агар n номанфий бутун сон бўлса, $[nx] \geq n[x]$ бўлишини исботланг.

Нисбат. Пропорция. Фоиз

5.21. Қуйидаги нисбатлардан пропорция тузиш мумкинми:

а) 42:14 ва 72:24 ; в) 3,5:21 ва $2\frac{1}{4}\;\;13\frac{1}{2}$

б) 78:13 ва 60:12 ; г) 0,1:0,02 ва 4:0,8 ?

5.22. Пропорциянинг номаълум ҳадини топинг:

а) $x : 12 = 4\frac{3}{4}\;\;7\frac{1}{8}$ д) $13\frac{1}{2}\;\;0{,}4 = x : 1\frac{1}{7}$;

б) $x : 1\frac{1}{7} = 1\frac{3}{15}\;\;1\frac{1}{3}$; е) $10{,}4\;\;3\frac{5}{7} = x : \frac{5}{11}$;

в) $6\frac{1}{2} : x = 6\frac{5}{6}\;\;4{,}1$; ж) $15{,}6\;\;2{,}88 = 2{,}6 : x$;

г) $0{,}38 : x = 4\frac{3}{4}\;\;1\frac{7}{8}$; з) $1{,}25\;\;1{,}4 = 0{,}75 : x$.

5.23. Пропорциядан x ни топинг:

а) $7x : 42 = 45\;\;27$ ж) $4x : 31 = 44\;\;11$;

б) $84 : 6x = 28\;\;14$; з) $85\;\;17x = 105\;\;84$;

в) $21\;\;7 = 2\frac{1}{2} : x$; и) $\frac{1}{6}\;\;2\frac{1}{3} = 3\frac{1}{4}x : 13$;

г) $13\frac{1}{3}\;\;1\frac{1}{3} = 26 : 0{,}2x$ к) $3{,}3 : 7\frac{1}{3} = 4\frac{2}{7}\;\;1\frac{3}{7}x$;

д) $3\frac{1}{3}x : 1{,}5 = 4\frac{2}{7} : \frac{3}{14}$; л) $3\frac{7}{19} : 1\frac{1}{2} = 2\frac{3}{8} : 0{,}8x$;

е) $11\frac{1}{3}\;\;1\frac{8}{9} = 5\frac{1}{3}x : \frac{5}{8}$; м) $6\frac{2}{3}\;\;1\frac{7}{9}x = 0{,}48\;\;1{,}2$.

5.24. Қуйидаги тенгликлар ёрдамида пропорциялар тузинг:

а) $15\cdot42=35\cdot18$; в) $2,5\cdot0,018=0,15\cdot0,3$;

б) $54\cdot55=66\cdot45$; г) $2\frac{1}{2}\ \ 1\frac{2}{7}=\frac{5}{7}\ \ 4\frac{1}{2}$.

5.25. Пропорциядан x ни топинг:

а) $\dfrac{\left(4-3,5\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\right):0,16}{x}=\dfrac{3\frac{2}{7}-\frac{3}{14}\ \ \frac{1}{6}}{41\frac{23}{84}-40\frac{49}{60}}$;

б) $\dfrac{1,2:0,3775-0,2}{6\frac{4}{25}\ \ 15\frac{2}{5}+0,8}=\dfrac{0,16:0,12+0,7}{x}$;

в) $\dfrac{0,125x}{\left(\frac{19}{24}-\frac{21}{40}\right)\ \ 8\frac{7}{16}}=\dfrac{\left(1\frac{28}{63}-\frac{17}{21}\right)\cdot0,7}{0,675\ \ 2,4-0,02}$;

г) $\dfrac{x}{10,5\cdot0,24-15,15:7,5}=\dfrac{9\cdot\left(1\frac{11}{20}-0,945:0,9\right)}{1\frac{3}{40}-4\frac{3}{8}\ \ 7}$.

5.26. Каср кўринишида ифодаланг:

а) 7% ; д) 6,8% и) $1\frac{1}{4}$%

б) 0,75% ; е) 0,48% ; к) $4\frac{3}{7}$%

в) 255% ; ж) 29% ; л) $225\frac{3}{4}$%

г) 300% ; з) $4\frac{3}{7}$% м) 0,099%

5.27. Фоизларда ифодаланг:

а) 0,5 ; д) $4\frac{3}{7}$; и) 15,2 ;

б) 2,15 ; е) $14\frac{1}{5}$; к) $4\frac{17}{43}$;

в) 1,75 ; ж) 43 ; л) $8\frac{5}{9}$

г) 3 ; з) 5,7 ; м) 0,79

5.28. а) 1 нинг 4 га ; д) 3,2 нинг 1,28 га ;
б) 3 нинг 5 га ; е) 15 нинг 18 га ;
в) 5 нинг 2 га ; ж) 0,43 нинг 5 га ;
г) 12,5 нинг 50 га ; з) $\frac{1}{7}$ нинг $\frac{3}{8}$ га

процент нисбатини топинг.

5.29. a нинг p % ини топинг:

а) $a = 75 \quad p = 4$; в) $a = 330 \quad p = 18\frac{1}{3}$;

б) $a = 84 \quad p = 15$; г) $a = 82{,}25$; $p = 160$

5.30. p % и a га тенг бўлган сонни топинг:

а) $p = 1{,}25 \quad a = 55$; в) $p = 0{,}8 \quad a = 1{,}84$;

б) $p = 40 \quad a = 12$; г) $p = 15 \quad a = 1{,}35$

5.31. Пол сиртининг 72 % ини бўяш учун 4,5 кг бўёқ кетди. Полнинг қолган қисмини бўяш учун қанча бўёқ керак бўлади?

5.32. Тўғри тўртбурчакнинг эни 20 % узайтирилди, бўйи эса 20 % қисқартирилди. Унинг юзаси ўзгарадими? Агар ўзгарса, қандай ўзгаради?

5.33. Ишчи иш кунида 360 та детал тайёрлади ва кунлик режани 150 % га бажарди. Ишчи режа бўйича бир кунда нечта детал тайёрлаши керак эди?

5.34. Мева қуритилганда ўз оғирлигининг 82 % ини йўқотади. 36 кг қуритилган мева олиш учун неча кг ҳўл мева олиш керак?

5.35. 10 % га арзонлаштирилган товар 18 сўмга сотилди. Товарнинг дастлабки нархини топинг.

5.36. Завод бир ойда 3360 та машина ишлаб чиқариб, режани 140 % га бажарди. Завод режага нисбатан нечта ортиқ машина ишлаб чиқарган?

5.37. Тўғри тўртбурчак ва квадрат тенг периметрга эга. Тўғри тўртбурчакнинг узунлиги 120 см, эни эса бўйининг 35 % ига тенг. Квадратнинг томонини топинг.

5.38. Тўғри тўртбурчакнинг эни 180 мм бўлиб, бўйининг $\frac{3}{4}$ қисмини ташкил этади. Учбурчакнинг томони тўғри тўртбурчак бўйининг 20 % ига тенг, юзи эса тўғри тўртбурчак юзининг $\frac{2}{5}$ қисмига тенг. Учбурчакнинг шу томонга мос баландлигини топинг.

5.39. Шахмат турнирида 16 ўйинчи иштирок этди ва ҳар бир ўйинчилар жуфтлиги фақат бир партия шахмат ўйнади. Ўйналган партияларнинг 40 % ида дуранг қайд этилди. Нечта партияда ғалаба қайд этилган?

5.40. Маҳсулотлар нархи p % га арзонлаштирилса, аҳолининг сотиб олиш қуввати неча % ортади?

5.41. Узунлиги 19,8 м бўлган арқон икки бўлакка бўлинди. Бўлаклардан бирининг узунлиги иккинчисиникидан 20 % ортиқ бўлса, ҳар бир бўлакнинг узунлигини топинг.

5.42. Узунлиги 19,8 м бўлган арқон икки бўлакка бўлинди. Бўлаклардан бирининг узунлиги иккинчисиникидан 20 % кам бўлса, бўлакларнинг узунлигини топинг.

5.43. Томонлари 9 см ва 7 см бўлган тўғри тўртбурчакнинг томонлари 10 % га орттирилса, тўғри тўртбурчакнинг юзи неча фоизга ортади?

5.44. Тўғри тўртбурчакнинг томонлари 10 % га орттирилса, унинг юзи неча фоизга ортади?

5.45. Тўғри тўртбурчакнинг томонлари 10% га камайтирилса, унинг юзи неча фоиз камаяди?

5.46. Тўғри тўртбурчакнинг катта томони 10 % га камайтирилиб, кичик томони 10 % га орттирилса, тўғри тўртбурчакнинг юзи қандай ўзгаради?

1 мисол. Ўзгарувчи миқдорининг бошланғич вақт моменти $t_0=0$ даги қиймати A_0 га тенг. Агар A миқдорнинг қиймати t вақт оралиғида p % га ортиб туриши маълум бўлса, A нинг nt вақт моментидаги қийматини топинг (бу ерда $n \geq 0$).

Ечиш. А нинг nt вақт моментидаги қийматини A_n билан белгилайлик. Бошланғич вақт моменти $t_0=0$ да А нинг қиймати A_0 га тенглигидан фойдаланиб, вақтнинг $t_1=1\cdot t$ моментида A нинг қиймати қуйидагига тенглигини топамиз:

$$A_1 = A_0 + \frac{A}{100}\ p = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

У ҳолда А нинг $t_2=2t$ вақт моментидаги қиймати

$$A_2 = A_1 + \frac{A}{100}\ p = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

га тенг бўлади.

Шу тарзда давом этиб, A нинг $t_n=n\cdot t$ вақт моментидаги қиймати

$$A_n = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \qquad (*)$$

га тенг бўлишлигини топамиз.

(*) формула *мураккаб фоиз формуласи* дейилади.

2 - мисол. Омонатчи банкка 20000 сўм пул қўйди. Орадан тўрт йил ўтгач, у ўзига тегишли бўлган ҳамма пулни қайтариб олди. Агар банк йилига 3 % фойда тўласа, омонатчи банкдан неча сўм пул олган ва қанча фойда кўрган?

Ечиш. Бу мисолда А ўзгарувчининг қийматлари пул миқдоридир. t вақт оралиғи 1 йилга тенг. p эса 3 га тенг.

A нинг бошланғич вақт моментидаги қиймати A_0=20000 сўм. Биздан А нинг $4t$ вақт моментидаги қиймати A_4 ни ва A_4-A_0 ни (фойдани) топиш талаб қилинмоқда.

Мураккаб фоиз формуласига кўра:

$$A_4 = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^4 = 20000\cdot\left(1 + \frac{3}{100}\right)^4 = \frac{2\ 103^4}{10000} \approx 22510.$$

$$A_4 - A_0 \approx 22510 - 20000 = 2510.$$

Ж а в о б. Омонатчи 22510 сўм пул олган. Фойда 2510 сўм.

5.47. Халқ банки йилига 20 % фойда тўлайди. Омонатчи кассага 15000 сўм қўйди. Икки йилдан кейин унинг кассадаги пули неча сўм бўлади?

5.48. Халқ банки йилига 30 % фойда тўлайди. Омонатга қўйилган пул неча йилдан кейин 2,197 марта кўпаяди?

5.49. Маълум бир ишни иккита завод биргаликда 12 кунда бажаради. Улар икки кун бирга ишлагач, биринчи завод ишламай қўйди. Агар иккинчи заводнинг иш унумдорлиги биринчи завод иш унумдорлигининг $66\frac{2}{3}$ % ини ташкил қилса, иккинчи завод ишни неча кундан кейин тугатади?

5.50. Сайёҳ меҳмонхонадан вокзалга қараб йўлга чиқиб, биринчи соатда 3 км йўл босди. Шу тезликда юрса поездга 40 минут кечикиб қолишини тушуниб етгач, ўз тезлигини $33\frac{1}{3}$ % га орттирди. Натижада у вокзалга поезд жўнашидан 45 минут олдин етиб келди. Меҳмонхонадан вокзалгача бўлган йўлни (масофани) ва сайёҳ шу йўлни неча соатда босиб ўтганини аниқланг.

5.51. 16 билан номаълум соннинг айирмаси улар йиғиндисининг 60 % ига тенг. Номаълум сонни топинг.

Бирор сонни берилган сонларга пропорционал бўлган бўлакларга бўлиш учун берилган сонни шу сонлар йиғиндисига бўлиш, натижани эса берилган сонларнинг ҳар бирига кўпайтириш керак.

3 - м и с о л. 24 ни 3:4:5 нисбатда бўлинг.

Е ч и ш. $\frac{24}{3+4+5} = 2, \quad 2\cdot3=6, \quad 2\cdot4=8, \quad 2\cdot5=10.$

Ж а в о б. 6; 8; 10.

Бирор сонни берилган сонларга тескари пропорционал бўлган бўлакларга бўлиш учун, шу сонни берилган сонларга тескари сонларга тўғри пропорционал бўлган бўлакларга бўлиш етарли.

4 м и с о л. 24 ни 3 ва 4 сонларига тескари пропорционал бўлакларга бўлинг.

Е ч и ш. 3 ва 4 га тескари сонлар: $\frac{1}{3}$ ва $\frac{1}{4}$. 24 ни $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$ нисбатда бўламиз.

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$ ва $\frac{24}{\frac{7}{12}}=\frac{24\ 12}{7}$ бўлгани учун қуйидагиларга эга бўламиз: $\frac{1}{3}\cdot\frac{24\cdot 12}{7}=\frac{96}{7}=13\frac{5}{7}$,

$\frac{1}{4}\ \frac{24\cdot 12}{7}=\frac{72}{7}=10\frac{2}{7}$

Ж а в о б: $13\frac{5}{7}$ ва $10\frac{2}{7}$

5.52. 150 сонни 2:3:5 нисбатда бўлинг. Энг катта бўлакнинг энг кичик бўлакка нисбатининг 10 %и нимага тенг?

5.53. 1800 сонни 2:3:5 сонларга тескари пропорционал нисбатда бўлинг.

5.54. 1554 сонни 1:2 ва 7:2 нисбатларда бўлинг. Ҳосил бўлган барча бўлаклар йиғиндиси нимага тенг? Шу жавобни оғзаки топиш мумкинми?

III б о б. КОМПЛЕКС СОНЛАР

1-§. АЛГЕБРАИК ШАКЛДАГИ КОМПЛЕКС СОНЛАР ВА УЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

$$z=a+bi \qquad (1)$$

кўринишидаги сон комплекс сон дейилади, бу ерда a, $b\in\mathrm{R}$, i эса $i^2=-1$ тенглик билан аниқланадиган *мавҳум бирлик*дир. a сони z комплекс сонниг *ҳақиқий* қисми, b эса z комплекс соннинг *мавҳум* қисми деб аталади ва мос равишда $a=\mathrm{Re}(z)$, $b=\mathrm{Im}(z)$ кўринишда белгиланади. Комплекс соннинг (1) кўринишдаги ёзуви унинг алгебраик шакли дейилади.

Агар иккита $z_1=a_1+b_1i$ ва $z_2=a_2+b_2i$ комплекс соннинг ҳақиқий ва мавҳум қисмлари мос равишда тенг, яъни $a_1=a_2$, $b_1=b_2$ бўлса, улар тенг дейилади.

Мавҳум қисмларининг ишораси билангина бир-биридан фарқ қиладиган $z_1=a+bi$ ва $z_2=a-bi$ комплекс сонлар *қўшма комплекс сонлар* дейилади.

z комплекс сонга *қўшма комплекс сон* $\bar{z}$ билан белгиланади.

Алгебраик шаклда берилган комплекс сонлар устида амаллар қуйидаги қоидалар бўйича бажарилади:

$$(a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i; \qquad (2)$$

$$(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i; \qquad (3)$$

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i) \cdot (a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2;}\, i \qquad (4)$$

1 м и с о л. Комплекс сонларнинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини топинг:

а) $z_1=3+0{,}5i$; б) $z_2=2-4i$; в) $z_3=-9i$; г) $z_4=8$.

Жавоб: а) $\mathrm{Re}(z_1)=3$, $\mathrm{Im}(z_1)=0{,}5$;
б) $\mathrm{Re}(z_2)=2$, $\mathrm{Im}(z_2)=-4$;
в) $\mathrm{Re}(z_3)=0$, $\mathrm{Im}(z_3)=-9$;
г) $\mathrm{Re}(z_4)=8$, $\mathrm{Im}(z_4)=0$

2 м и с о л. Қуйидаги комплекс сонлар ўзаро тенгми:

а) $z_1 = \frac{1}{3} + \sqrt{9}\, i$ ва $z_2 = -\frac{1}{3} + 3i$

б) $z_1 = \frac{1}{4} - i\sqrt[4]{81}$ ва $z_2 = 0{,}25 - 3i$?

Ечиш. а) $\mathrm{Re}(z_1)= \frac{1}{3}$ ва $\mathrm{Re}(z_2)= -\frac{1}{3}$ ларга эгамиз. $\mathrm{Re}(z_1)\neq\mathrm{Re}(z_2)$ бўлгани учун $z_1\neq z_2$;

б) $\mathrm{Re}(z_1) =\frac{1}{4}= 0{,}25=\mathrm{Re}(z_2)$ ва $\mathrm{Im}(z_1)=\sqrt[3]{81}=-3=\mathrm{Im}(z_2)$ бўлгани учун $z_1=z_2$ бўлади.

Жавоб: а) тенг эмас; б) тенг.

3 м и с о л. $z_1=3-2i$ ва $z_2=1+3i$ комплекс сонларнинг

а) йиғиндисини;
б) айирмасини;
в) кўпайтмасини;
г) бўлинмасини топинг.

Ечиш. а) $z_1+z_2=(3-2i)+(1+3i)=(3+1)+(-2+3)i=4+i$;

б) $z_1-z_2=(3-2i)-(1+3i)=(3-1)+(-2-3)i=2-5i$;

в) $z_1 \cdot z_2$ ни топишда (3) формуладан фойдаланиш зарур, аммо (3) формулани ёдда сақлашда бироз қийинчилик туғилиши мумкин. Шу сабабли, $z_1 \cdot z_2$ ни топишда $i^2=-1$ эканини эътиборга олиб, кўпҳадларни кўпайтириш қоидасидан фойдаланиш мумкин:

$$z_1 \cdot z_2 = (3-2i)(1 + 3i) = 3 \quad 1 + 3 \quad (3i) - 2i \cdot 1 - 2i \quad (3i) =$$
$$= 3+9i - 2i - 6i^2 = 3 + 7i - 6 \quad (-1) = 9 + 7i ;$$

г) $\frac{z_1}{z_2}$ ни топишда (4) формуладан фойдаланамиз:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3-2i}{1+3i}=\frac{(3-2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{3-9i-2i-6}{1^2+3^2}=\frac{-3-11i}{10}=-0{,}3-1{,}1i.$$

1.1. Комплекс сон z нинг ҳақиқий қисми $\mathrm{Re}(z)$ ни ва мавҳум қисми $\mathrm{Im}(z)$ ни топинг:

а) $z=-5+8i$;	д) $z=0{,}5+3i$	з) $8i$;
б) $z=6+\frac{1}{2}i$;	е) $z=2+0{,}3i$;	и) 4;
в) $z=-15+2i$;	ё) $z=-4{,}1+2i$;	к) 0;
г) $z=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$	ж) $z=-3-4i$	м) $-3i$

1.2. Агар:

а) $\mathrm{Re}(z)=-4$, $\mathrm{Im}(z)=8$;
б) $\mathrm{Re}(z)=0$, $\mathrm{Im}(z)=1{,}2$;
в) $\mathrm{Re}(z)=1{,}2$, $\mathrm{Im}(z)=0$;
г) $\mathrm{Re}(z)=0$, $\mathrm{Im}(z)=0$

бўлса, z комплекс сонини алгебраик шаклда ёзинг.

1.3. Тенг комплекс сонларни топинг:

а) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i$; б) $0{,}5+3i$; в) $\frac{1}{4}+\frac{2}{6}i$; г) $\sqrt{9-4i}$;

д) $\sqrt{9}-\sqrt{81}\,i$; е) $3-4i$

1.4. а) Комплекс сонлардан қайсилари тенг:

а) $3i$; б) $-4+5i$; в) $\frac{1}{3}+i$; г) $-\frac{1}{4}-8i$; д) $0,(3)+i$;
е) $-\frac{2}{8}-\sqrt{64}\,i$; ж) $\sqrt[4]{81}\,i$?

б) $(4x-3y)+(3x+5y)i=10-(3x-2y-30)i$ бўлса, x ва y ларни топинг.

1.5. Агар:

а) $z=-3+5i$;	д) $z=-3i$;	з) $z=\frac{1}{3}+3{,}4i$;
б) $z=3-5i$;	е) $z=4{,}2$;	к) $z=0$;
в) $z=-3-5i$;	ё) $z=4i$;	л) $z=\sqrt{81}+4i$;
г) $z=3+5i$;	ж) $z=4,(3)$	м) $z=-0,(3)-2,(3)i$

бўлса, $\bar{z}$ ни топинг.

1.6. Йиғиндини топинг:

а) $(-3+2i)+(4-i)$;	д) $(1{,}4-3i)+(2{,}6-4i)$;	з) $8i+(4-6i)$;
б) $(4+5i)+(4-5i)$;	е) $(3+8i)+(3-8i)$;	к) $-15i+(-4+5i)$;
в) $(5+2i)+(-5-2i)$;	ё) $(-7+3i)+(7-3i)$;	л) $(14+2i)+8i$;
г) $4+(-3+i)$;	ж) $4{,}3+(1{,}7-9i)$;	м) $81+(43-17i)$.

1.7. Йиғиндини топинг:

а) $\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}+\frac{1+\sqrt{2}}{3}i\right)+\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}+\frac{1-\sqrt{2}}{3}i\right)$

б) $(\cos^2\alpha+i\sin^2\alpha)+(\sin^2\alpha+i\cos^2\alpha)$ $(\alpha\in R)$;

в) $(0,(3)+i\cdot 1,(5))+(0,(6)+i\cdot 1,(55))$;

г) $(\mathrm{Re}(1+2i)+15i)+(3-i\cdot \mathrm{Im}(1+2i))$

1.8. Айирмани топинг:

а) $(-5+2i)-(8-9i)$; д) $(32+4,(5)i)-(32+i)$;

б) $(5+21i)-(9i+8)$; е) $\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}+\frac{1-\sqrt{2}}{2}i\right)-(1+i)$;

в) $4-(42-3i)$; ё) $4{,}8-\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}-i\right)$

г) $(14+3i)-(21+3i)$; ж) $i-(3i+8)$

1.9. Кўпайтмани ҳисобланг:

а) $(3+5i)(2+3i)$; д) $(\frac{1}{2}+i)(\frac{1}{4}-i)$; з) $(5-2i)(2i+5)$;

б) $(4+7i)(2-i)$; е) $(\frac{4}{7}+3i)(\frac{7}{4}+4{,}7i)$; к) $(-3+i)(3-i)$;

в) $(5-3i)(2-5i)$; ё) $(2+3i)(2-3i)$; л) $0\cdot(4{,}5-i)$;

г) $(-2+i)(7-3i)$; ж) $4\cdot(8{,}3-i)$; м) $(\frac{1}{3}-0{,}3)\cdot i$.

1.10. Икки комплекс соннинг бўлинмасини топинг:

а) $\frac{1+i}{1-i}$; д) $\frac{5-4i}{-3+2i}$; з) $\frac{51}{4-i}$; н) $\frac{0}{3i}$;

б) $\frac{3-4i}{2+i}$; е) $\frac{-7+2i}{5-4i}$; к) $\frac{4-i}{51}$; о) $\frac{1+4i}{1-5i}$;

в) $\frac{2+3i}{2-3i}$; ё) $\frac{3-4i}{-3+2i}$; л) $\frac{31i}{17+i}$; п) $\frac{1}{1+5i}$;

г) $\frac{1+2i}{3-2i}$ ж) $\frac{14-3i}{3i+2}$; м) $\frac{14+i}{31i}$; р) $\frac{1}{1-5i}$.

1.11. Қўшма комплекс сонларнинг кўпайтмаси шаклида ёзинг (бу ерда $a,\ b\in R$):

а) a^2+4b^2 ; д) $3a^2+45b^4$; к) $a^{2n}+33b^{2n}$ $(n\in N)$;

б) $9a^2+25b^2$; е) $10a^2+56b^4$; л) $a^{2n}+b^{2k}$ $(k,\ n\in N)$;

в) $8a^2+16b^2$; ё) $11a^2+48b^6$; м) $\sqrt{3}a^2+b^{18}$;

г) $81a^2+5b^2$; ж) $13a^4+29b^8$; н) $9a^2+\sqrt{5}b^{20}$

1.12. Мавҳум бирлик i нинг қуйидаги даражаларини ҳисобланг ва хулоса чиқаринг:

а) i^1 ; в) i^3 ; д) i^5 ; ё) i^7 ; з) i^9 ; л) i^{11} ;

б) i^2 ; г) i^4 ; е) i^6 ; ж) i^8 ; к) i^{10} ; м) i^{12}

1.13. Амалларни бажаринг:

а) $-3i+5+8i(3-i)$; д) $(5-3i)(4+i)+15i$; з) $3+5i+2i^{1999}$;

б) $(4+2i)(-1-3i)+5-8i$; е) $16-(15-i)(1+i)$; к) $35-i^{2000}+i^{1997}$;

в) $3i(1+i)+3i(3-i)$; ё) $4(0{,}5-2{,}5i)(3+i)+5i$; л) $i^{2001}(3+5i^4)$;

г) $i(5-2i)+i(9-8i)$; ж) $4{,}2(3-i)(1+i)+2+3i$; м) $i^{2002}-i^{2001}-i^{1999}$.

1.14. Ҳисобланг:

а) $\dfrac{(2-3i)(3-2i)}{1+i}$; д) $\dfrac{11}{1-2i}-\dfrac{13}{2-i}$; з) $\dfrac{i^{18}+i^{19}}{2-3i}+\dfrac{1}{3+4i}$;

б) $\dfrac{(3-i)(1+3i)}{2-i}$; е) $\dfrac{3-5}{3+i}+\dfrac{2+3i}{2-i}$; к) $\dfrac{2-3i}{2+3i}\cdot i^{18}+\dfrac{i}{1+i}$;

в) $\dfrac{3-4i}{(1+i)(2-i)}$; ё) $\dfrac{13}{1-4i}+\dfrac{11}{1+4i}$; л) $\dfrac{4i^8}{9}+i\,(1+i^9)$;

г) $\dfrac{2-3i}{(1-i)(3+i)}$; ж) $\dfrac{1-i}{1+i}+\dfrac{3-i}{3+i}$ м) $i^3(1-i^4)+i^{21}$

1.15. Амалларни бажаринг:

а) $(3-2i)^2$; д) $(3+2i)^2-(3-2i)$;

б) $(4+3i)^2$; е) $(-3+5i)+(-3-5i)$

в) $\left(\dfrac{1-2i}{1+i}\right)^2$ ё) $\left(\dfrac{i^6+1}{i^8-1}\right)^2$;

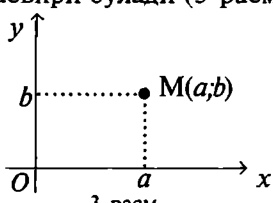
г) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2$ ж) $\left(\dfrac{4+i^7}{3-i^4}\right)^2$

2-§. КОМПЛЕКС СОННИНГ ГЕОМЕТРИК ТАСВИРИ ВА ТРИГОНОМЕТРИК ШАКЛИ

$z=a+bi$ комплекс сон икки хил усул билан геометрик тасвирланиши мумкин:

1. $z=a+bi$ комплекс сонга xOy декарт координаталар системасидаги $(a;b)$ нуқтани мос қўйиш мумкин.

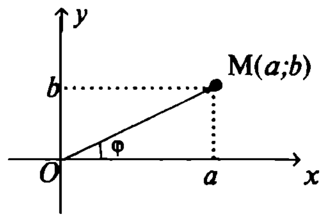
Ҳар бир комплекс сонга xOy текисликнинг фақат битта нуқтаси мос келади ва, аксинча, xOy текисликнинг $M(a;b)$ нуқтаси биттагина $z=a+bi$ комплекс соннинг геометрик тасвири бўлади (3-расм).



3-расм.

Шу муносабат билан, xOy декарт координаталар системасини *комплекс текислик* деб, Ox ўқни *ҳақиқий ўқ*, Oy ўқни эса *мавҳум ўқ* деб аташ қабул қилинган.

2. $z=a+bi$ комплекс сон xOy декарт координаталар системасида боши координаталар бошида, охири эса $M(a;b)$ нуқтада бўлган вектор билан тасвирланади (4-расм):



4-расм.

Бу вектор z комплекс соннинг радиус-вектори деб айтилади. Унинг узунлиги z комплекс сонининг *модули* дейилади ва $|z|$ ёки r билан белгиланади:

$$|z| = r = \sqrt{a^2+b^2}. \qquad (5)$$

Комплекс соннинг модули учун қуйидаги тенгликлар ўринли:

$$|z_1 \quad z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|, \ (z_2 \neq 0)$$

z комплекс сон радиус векторининг Ox ҳақиқий ўқнинг мусбат йўналиши билан ҳосил қилган бурчаги z комплекс соннинг аргументи дейилади. Комплекс соннинг аргументлари чексиз кўп бўлиб, улар бир-биридан 2π га каррали сон билан фарқ қилади. Биз комплекс соннинг аргументи дейилганда, аргументнинг $[0;2\pi]$ оралиққа тегишли бўлган қийматини назарда тутамиз ва бу қийматни $\arg(z)$ ёки φ билан белгилаймиз. $\arg(z)$ ни топишда унинг таърифидан ва

$$\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{b}{|z|} \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{|z|} \\ \varphi \in [0;2\pi] \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} \mathrm{tg}\,(\arg(z)) = \mathrm{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}, \\ \varphi \in [0;2\pi] \end{cases} \qquad (6)$$

кўринишдаги системадан фойдаланилади (4-мисол ва 5-мисолга қаранг).

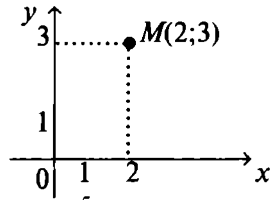
$z=a+bi$ комплекс соннинг тригонометрик шакли қуйидаги кўринишга эга:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (7)$$

(7) да $r = \sqrt{a^2+b^2}$ (z нинг модули) ва φ - комплекс соннинг аргументи.

1 - м и с о л. Комплекс текисликнинг z комплекс сонга мос келувчи нуқтасини ясанг: $z=2+3i$.

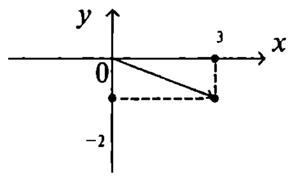
Ечиш. а) $\mathrm{Re}(z)=2$, $\mathrm{Jm}(z)=3$ бўлгани учун бу сонга комплекс текисликнинг M(2;3) нуқтаси мос келади (5-расм):



5-расм.

2 - м и с о л. $z= 3-2i$ комплекс сонга мос келувчи векторни ясанг.

Ечиш. $z = 3 - 2i$ комплекс сонга мос келувчи нуқтани белгилаб, координаталар бошини бу нуқта билан туташтирувчи векторни ясаш кифоя (6-расм):



6-расм.

3 - м и с о л. Комплекс сон z нинг модулини топинг:

а) $z=3-4i$; б) $z=1-3i$; в) $z=\cos^2\alpha+i\sin\alpha$ $(\alpha\in R)$; г) $z=3$.

Ечиш.

а) $|z| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$; б) $|z|=\sqrt{1^2+(-3)^2} = \sqrt{10}$;

в) $|z|=\sqrt{(\cos^2\alpha)^2+\sin^2\alpha} = \sqrt{\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}$;

г) $|z|= \sqrt{3^2+0^2}= 3$.

4 - м и со л. Комплекс сон z нинг аргументи φ ни топинг:

а) $z = 100$;

б) $z = 100 + 100i$;

в) $z = 100i$;

г) $z = -\dfrac{9\sqrt{3}}{2} + \dfrac{9}{2}i$;

д) $z = -100$.

Ечиш. (Комплекс соннинг аргументини аниқлашда, дастлаб шу сон радиус-векторини схематик ясаб олиш тавсия этилади).

а) Комплекс сон аргументининг таърифига кўра, $\varphi=0$ (7-а расм).

б) 1-у с у л. *OAB* тўғри бурчакли учбурчакнинг тенг ёнли учбурчак (7-б расм) эканлигидан фойдалансак, $\varphi=\frac{\pi}{4}$ экани келиб чиқади.

2-у с у л. $|z| = \sqrt{100^2 + 100^2} = 100\sqrt{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} \sin\varphi = \dfrac{100}{100\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\varphi = \dfrac{100}{100\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \varphi \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right] \subset [0;2\pi] \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

3-у с у л.
$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{100}{100} = 1 \\ \varphi \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] \subset [0;2\pi] \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

в) Комплекс сон аргументининг таърифига кўра, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (7-в расм).

г) $\varphi = \pi - \theta$ эканидан фойдаланамиз.

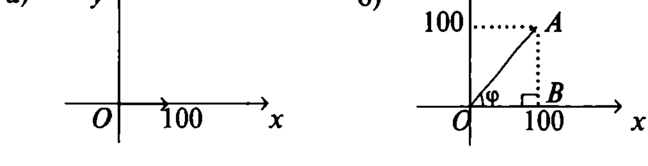
$$|z| = \left|-\frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2}i\right| = \frac{9}{2}|\sqrt{3} + i| = \frac{9}{2}\cdot\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 9$$

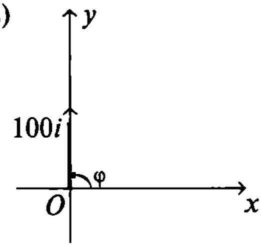
бўлгани учун *OZA* тўғри бурчакли учбурчакдан (7-г расм):

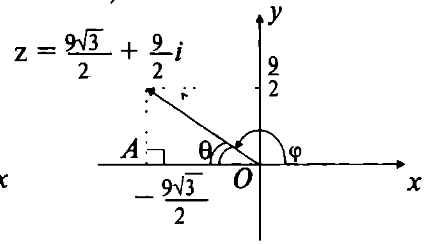
$$\left.\begin{array}{l} \sin\theta = \dfrac{ZA}{OZ} = \dfrac{\frac{9}{2}}{9} = \dfrac{1}{2} \\ \cos\theta = \dfrac{OA}{OZ} = \dfrac{\frac{9\sqrt{3}}{2}}{9} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \theta \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

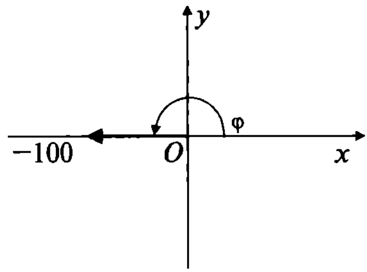
Демак, $\varphi = \pi - \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

д) Комплекс сон аргументининг таърифига кўра, $\varphi=\pi$ (7-д расм).



в) 

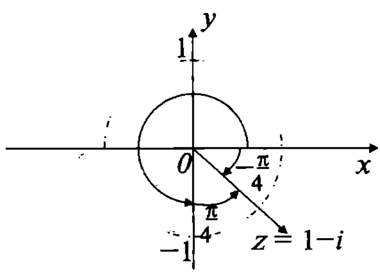
г) 

д) 

7-расм.

5 - м и с о л. $z = 1 - i$ нинг аргументини топинг.

Ечиш. Бу соннинг аргументи φ дейлик. (6) га кўра $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-1}{1} = -1$ ва $\varphi \in [0;2\pi]$ га эгамиз. $\operatorname{tg}\varphi = -1$, $\varphi \in [0;2\pi]$ шартлар ўринли бўладиган φ ни расмдан фойдаланиб топамиз (8-расм):



8-расм.

$\varphi = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ (ёки $\varphi = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$).

Жавоб: $\frac{7\pi}{4}$.

6 мисол. Сонларни тригонометрик шаклда ёзинг:

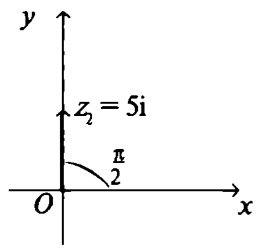
а) $z_1 = 3 + \sqrt{3}\,i$; б) $z_2 = 5i$

Ечиш. а) z_1 сонининг модулини ва аргументи φ ни топамиз. $\mathrm{Re}(z_1)=\sqrt{3}$, $\mathrm{Im}(z_1)=\sqrt{3}$ бўлгани учун $|z_1|=\sqrt{3^2 + \sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$.

$\begin{cases} \mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \\ \varphi \in [0;2\pi] \end{cases}$ системадан $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ ни топамиз.

Демак, $z_1 = 2\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$.

б) $z_2=5i$ нинг модули $|z_1| = |5i| = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$ га тенг. $z_2=5i$ нинг радиус вектори мавҳум ўқнинг мусбат қисмида ётгани учун $\varphi = \frac{\pi}{2}$ бўлади (9-расм).



9-расм.

Шу сабабли $z_2 = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

2.1. Комплекс текисликнинг z комплекс сонга мос келувчи нуқтасини ясанг:

а) $z=1+2i$; д) $z=2i$; з) $z=0$; н) $z=2+3i(1+2i)$;
б) $z=-1+2i$; е) $z=1$; к) $z=3-2i$; о) $z=i-4i(1+i)$;
в) $z=-1-2i$; ё) $z=-2i$; л) $z=-3+2i$; п) $z=i^{4+}i^5$;
г) $z=1-2i$; ж) $z=-1$; м) $z=\frac{\sqrt{2}}{2}$; р) $z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{2}$.

2.2. z комплекс сонга мос келувчи векторни ясанг:

а) $z=2+3i$; д) $z=3i$; з) $z=0$ н) $z=\frac{1+i}{1-i}$;
б) $z=2-3i$; е) $z=-4i$; к) $z=-3+2i$; о) $z=(1+i)(1+2i)$;
в) $z=-2+3i$; ё) $z=2$; л) $z=3-i$; п) $z=(1-i)(1+i)$
г) $z=-2-3i$; ж) $z=-2$; м) $z=\sqrt{4}$; р) $z=i^3-4i$

2.3. z комплекс сонннинг модулини топинг:

а) $z=3+4i$; д) $z=3+3i$; з) $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$ $(\alpha\in R)$;
б) $z=-3-4i$; е) $z=1+2\sqrt{3}i$; г) $z=1+i\cos^2\alpha$ $(\alpha\in R)$;
в) $z=1+\sqrt{8}i$ ё) $z=1+i$; л) $z=(2+3i)(3-4i)$;
г) $z=2\sqrt{2}+i$ ж) $z=\sqrt{2}+i$; м) $z=4\sqrt{81}+3\sqrt{2}i$;
н) $z=-4$; о) $z=bi$, $b\in R$; п) $z=i$ р) $z=0$.

2.4. z комплекс соннинг аргументини топинг:

а) $z=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$; д) $z=\frac{\sqrt{33}}{2}+i\frac{\sqrt{11}}{2}$; з) $z=1$;

б) $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$; е) $z=-2\sqrt{3}\,i$; к) $z=i$;

в) $z=3i$; ё) $z=-\sqrt{6}-\sqrt{6}\,i$; л) $z=-1$;

г) $z=3$; ж) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$; м) $z=-i$.

2.5. Комплекс сонни тригонометрик шаклда ёзинг:

а) $z=-1-i$; д) $z=-2$; з) $z=1+i$; н) $z=2i$;

б) $z=1-i$; е) $z=i$; к) $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ о) $z=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$;

в) $z=\sqrt{3}+i$; ё) $z=1$; л) $z=\frac{\sqrt{33}}{2}+i\frac{\sqrt{11}}{2}$; п) $z=-i$;

г) $z=-1+\sqrt{3}\,i$; ж) $z=-i$; м) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$; р) $z=-\sqrt{6}-\sqrt{6}\,i$.

2.6. $z=-3-4i$ ни тригонометрик шаклда ёзинг.

2.7. $z=\cos\frac{7\pi}{4}-2i\sin\frac{7\pi}{4}$ ни тригонометрик шаклда ёзинг.

2.8. $z=-\cos\frac{\pi}{17}+i\sin\frac{\pi}{17}$ ни тригонометрик шаклда ёзинг.

2.9. $z=2+\sqrt{3}+i$ ни тригонометрик шаклда ёзинг.

2.10. $z=1+\cos\varphi+i\sin\varphi$ $(-\pi\le\varphi\le\pi)$ ни тригонометрик шаклда ёзинг.

3-§. ТРИГОНОМЕТРИК ШАКЛДА БЕРИЛГАН КОМПЛЕКС СОНЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

Агар $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ ва $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ лар тригонометрик шаклда ёзилган комплекс сонлар бўлса, қуйидаги тенгликлар ўринли бўлади:

$$z_1\ z_2=r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2);$$

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{z_1}{z_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)),\quad (z_2\neq 0).$$

Агар $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ тригонометрик шаклдаги комплекс сон бўлса, $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \quad k=0,1,2,\cdots,n-1$$

тенгликлар ўринли бўлади.

Агар даражага кўтариш формуласида $r=1$ бўлса, $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$ Муавр формуласи ҳосил бўлади.

1 мисол. Комплекс соннинг тригонометрик шаклидан фойдаланиб, қуйидаги амалларни бажаринг:

а) $(1-i)\cdot(\sqrt{3}+i)$; б) $\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$.

Ечиш. $z_1 = 1-i$ ва $z_2 = \sqrt{3}+i$ сонларни тригонометрик шаклда ёзиб оламиз:

$|z_1| = |1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$; $\varphi_1 = \dfrac{75\pi}{4}$ бўлгани

учун $z_1 = \sqrt{2}(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4})$.

$|z_2| = |\sqrt{3}+i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = 2$, ва $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{6}$ бўлгани

учун $z_2 = 2(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6})$ бўлади. У ҳолда,

$$\text{а) } (1-i)\cdot(\sqrt{3}+i) = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right)\left(2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= (\sqrt{2}\cdot 2)\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right);$$

$$\text{б) } \frac{1-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) + \right.$$

$$\left. + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right).$$

Жавоб: а) $(1-i)\ (\sqrt{3}+i) = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{23\pi}{12} + i\sin\dfrac{23\pi}{12}\right)$;

б) $\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{19\pi}{12} + i\sin\dfrac{19\pi}{12}\right)$.

2 - мисол. $(1-i)^3$ ни ҳисобланг.

Ечиш. $1-i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$ бўлгани учун (1-мисол) даражага кўтариш формуласига кўра,

$$(1-i)^3 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right)^3 = (\sqrt{2})^3\cdot\left(\cos\left(3\cdot\frac{7\pi}{4}\right) + \right.$$

$$\left. + i\sin\left(3\ \frac{7\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{21\pi}{4} + i\sin\frac{21\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{4} +$$

$$+ i\sin\frac{21\pi}{4}\Big)$$ га эга бўламиз.

3 - м и с о л. $\sqrt[3]{1-i}$ ни ҳисобланг.

Ечиш. $z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ бўлгани учун, илдиз чиқариш формуласига кўра,

$$\sqrt[3]{1-i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi+7\pi k}{4} + i\sin\frac{7\pi+7\pi k}{4}\right);\quad (k=0,1,2).$$

Шу сабабли қуйидагиларни топамиз:

k=0 да, $\sqrt[3]{z} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$;

k=1 да, $\sqrt[3]{z} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi+2\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi+2\pi}{4}\right) =$

$= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{4} + \ \sin\frac{9\pi}{4}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

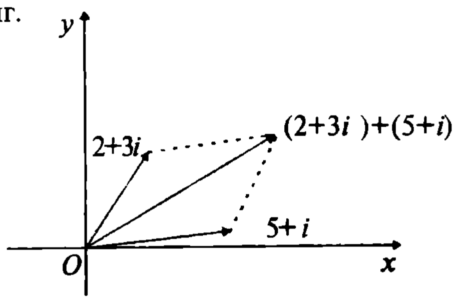
k=2 да, $\sqrt[3]{z} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi+4\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi+4\pi}{4}\right) =$

$= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$,

4 - м и с о л. Даража асосини тригонометрик шаклда ёзмасдан, $(1+i)^{45}$ даражани ҳисобланг.

Ечиш. $(1+i)^2 = 1+2i-1 = 2i$ бўлгани учун, $(1+i)^{45} = (1+i)^{44}\ (1+i) = ((1+i)^2)^{22}\cdot(1+i) = (2i)^{22}\cdot(1+i) = 2^{22}\cdot(i^2)^{11}\cdot(1+i) = 2^{22}\cdot(-1)(1+i) = -2^{22} - 2^{22}i$.

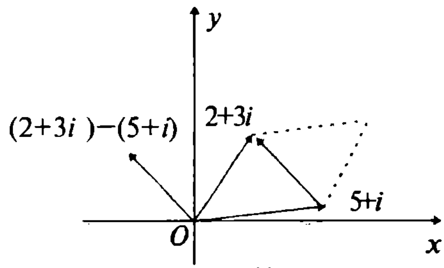
5 м и с о л. $(2+3i)+(5+i)$ йиғиндининг радиус-векторини топинг.



10-расм.

Ечиш. Қўшилувчилар радиус-векторларида параллелограмм ясаймиз. Унинг катта диагонали йиғиндининг радиус-векторидир (10-расм).

6-м и с о л. $(2+3i)-(5+i)$ айирманинг радиус векторини топинг. Е ч и ш $(2+3i)$ ва $(5+i)$ сонларнинг радиус-векторларидан параллелограмм ясаймиз. Сўнгра боши айрилувчи радиус-векторнинг охирида, охири эса камаювчи радиус-векторнинг охирида бўлган векторни ясаймиз. Бу векторни унинг боши координаталар боши билан устма-уст тушадиган қилиб, ўз-ўзига параллел кўчирамиз ва изланган радиус-векторга эга бўламиз (11-расм):



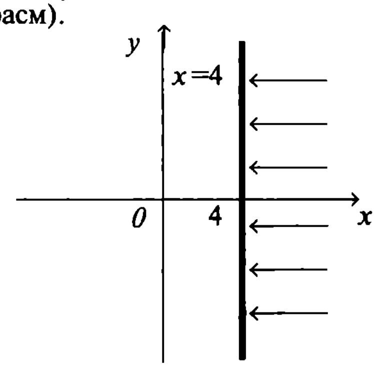
11-расм.

7 м и с о л. Комплекс текисликнинг қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи нуқталарининг геометрик ўрнини штрихлаб кўрсатинг:

а) $\mathrm{Re}(z)>4$; б) $\mathrm{Re}(z)\leq 1$; в) $\mathrm{Im}(z)<4$, $\mathrm{Re}(z)>2$;

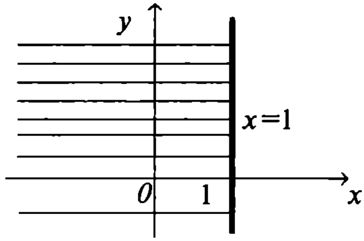
г) $0<\arg(z)\leq \frac{\pi}{6}$.

Е ч и ш. а) $z=x+iy$ нуқта учун $\mathrm{Re}(z)>4$, яъни $x>4$ бўлсин. Абсциссаси 4 дан катта бўлган нуқталар $x=4$ тўғри чизиқдан ўнг томонда жойлашган нуқталардан иборат (12-расм).



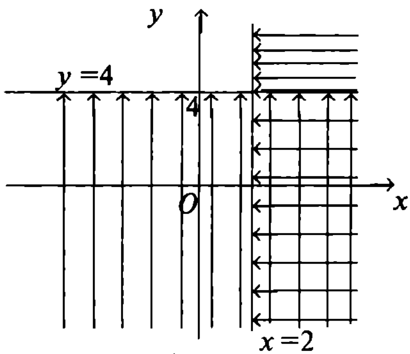
12-расм.

б) $z=x+iy$ нуқта учун $\mathrm{Re}(z)\leq 1$, яъни $x\leq 1$ бўлсин. У ҳолда, а) ҳолдагига ўхшаш мулоҳаза юритиб, қуйидаги шаклни ҳосил қиламиз (13-расм).



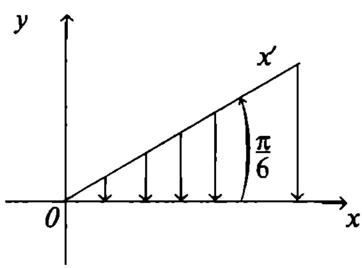
13-расм.

в) $z=x+yi$ нуқта учун $\mathrm{Im}(z)<4$, $\mathrm{Re}(z)>2$ бўлса, $y<4$, $x>2$ тенгсизликлар билан аниқланган соҳага эга бўламиз (14-расм).



14-расм.

г) Оx ўқни $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ бурчакка бурамиз:



15-расм.

xOx' бурчакдаги барча нуқталар учун (Оx ўқ устидаги нуқталар бундан мустасно) $0<\arg(z)\leq\dfrac{\pi}{6}$ шарт бажарилади.

3.1. Тригонометрик шаклда берилган сонларнинг кўпайтмасини топинг:

а) $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ва $z_2=\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}$;

б) $z_1=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right)$ ва $z_2=4\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)$;

в) $z_1=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{24}+i\sin\frac{\pi}{24}\right)$ ва $z_2=3\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$;

г) $z_1=5(\cos\pi + i\sin\pi)$ ва $z_2=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$.

3.2. $\frac{z_1}{z_2}$ ни ҳисобланг:

а) $z_1=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{19}+i\sin\frac{\pi}{19}\right)$, $z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{21}+i\sin\frac{\pi}{21}\right)$;

б) $z_1=6\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2=9\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

в) $z_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$, $z_2=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$;

г) $z_1=\frac{1}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$, $z_2=\frac{1}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

3.3. Даражани ҳисобланг:

а) $\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)^{20}$;

б) $\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)^{16}$;

в) $\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)^{15}$;

г) $\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)^{17}$;

д) $\left(2\left(\cos\frac{\pi}{21}+i\sin\frac{\pi}{21}\right)\right)^{7}$;

е) $\left(\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)\right)^{18}$;

ё) $\left(\sqrt{4}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^{6}$;

ж) $\left(3\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{13}\right)\right)^{2}$.

3.4. $\sqrt{z}$ ни ҳисобланг:

а) $z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; в) $z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$;

б) $z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right)$; г) $z=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$.

3.5. $z=16\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ соннинг учинчи даражали ва тўртинчи даражали илдизларини топинг.

4-§. КОМПЛЕКС СОНЛАР УСТИДА БАРЧА АМАЛЛАРГА ДОИР МИСОЛЛАР

4.1. Ҳисобланг:

а) $(2+3i)(4-5i)+(2-3i)(4+5i)$;

б) $(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)$, $x\in R$;

в) $\frac{(1+2i)^2}{1-3i}$; е) $3+8i+9i^2+10i^3$

г) $(1-4i)-(i(3-4i)+3i)$; ё) $8-4(i^{15}-1)+13i$;

д) $(1+4i)^2-(3+i^9)$; ж) $21i^4+23i^{91}-17i^{17}$

4.2. Тенгламани ечинг (бунда $x\in R$):

а) $-2x+4i=3x(\frac{1}{3}+i^2)+2i-2i^3$; в) $5+(3+x)i=3x+2+4i$;

б) $3+xi=(\frac{18}{9}+x)+1+i$; г) $x+5-(3+x^2)i=7-7i$

4.3. Агар $(5x-3y)+(x-2y)i=6+(8-x+y)i$ бўлса, x, y ҳақиқий сонларни топинг.

4.4. Даража асосини тригонометрик шаклда ёзмасдан даражани ҳисобланг:

а) $(1+i)^{20}$; б) $(1-i)^{21}$

4.5. Қуйидагиларни $\sin x$ ва $\cos x$ орқали ифодаланг:

а) $\sin 3x$; б) $\cos 3x$; в) $\sin 4x$; г) $\cos 4x$; д) $\sin 5x$; е) $\cos 5x$; ж) $\sin 2x$.

Н а м у н а:

ж) $\cos 2x+i\sin 2x=(\cos x+i\sin x)^2=\cos^2 x+2i\sin x\cos x-$

$-\sin^2 x=(\cos^2 x-\sin^2 x)+(2\sin x\cos x)i \Rightarrow \begin{cases}\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x\\ \sin 2x=2\sin x\cos x\end{cases}$

$\sin 2x=2\sin x\cos x$.

4.6. Тегишли комплекс сонларни тригонометрик шаклда ёзиб, ҳисоблашларни бажаринг:

а) $(1+i)^{26}$; д) $(1+i)^9(1-i)^{15}$

б) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; е) $(1+2i)^8(2+3i)^3$;

в) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$; ё) $(2+i)^{26}(2+3i)^9$;

г) $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{20}}{(1-i)^{20}}$; ж) $\frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{21}}$

4.7. $\sqrt[n]{z}$ ни ҳисобланг:

а) $z=1, n=3$; г) $z=1+i$, $n=8$;

б) $z=-1, n=4$; д) $z=i$, $n=3$;

в) $z=-4+\sqrt{48}\,i$, $n=3$; е) $z=-i$, $n=3$;

ё) $z=-9$, $n=3$; к) $z=1-i$, $n=6$;
ж) $z=-15$, $n=4$; л) $z=5i$, $n=2$;
з) $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $n=3$; м) $z=-9i$, $n=2$

4.8. Тенгламани ечинг:

а) $z^4=-1$; б) $z^3=1+i$; в) $z^2=-9$; г) $z^2=16$.

4.9. а) $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ тенгламада $b^2-4ac<0$. Тенгламани комплекс сонлар тўпламида ечинг;

б) $z^4+z^2+1=0$ тенгламани ечинг.

4.10. Ҳисобланг:

а) $\sqrt[3]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$; б) $\sqrt[4]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$; в) $\sqrt[5]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$; г) $\sqrt[6]{\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}}$.

4.11. Тенгламадан x ва y ни топинг $(x\in R,\ y\in R)$:

а) $(x-y)+(3x+y)i=3-3i$; в) $(\frac{3}{4}x-2yi)-(\frac{1}{3}y+6xi)=21i$;
б) $(5x+3yi)+(2y-xi)=3-i$; г) $(2-3i)(x+yi)=-1-5i$

4.12. Берилган комплекс сонларни қўшинг. Қўшилувчиларнинг ва йиғиндининг геометрик тасвирини ясанг:

а) $(2+3i)+(4+2i)$; д) $(-4-7i)+(4+7i)$
б) $(-4+5i)+(3-2i)$; е) $(-3+2i)+(3-2i)$
в) $(-7+6i)+(-3-8i)$ ё) $3i+(4-5i)$
г) $(-5-2i)+(-6+8i)$ ж) $4i+(-8i)$

4.13. Айиришни бажаринг. Камаювчи, айрилувчи ва айирманинг геометрик тасвирини ясанг:

а) $(3+2i)-(2-2i)$ г) $(4-2i)-(3+3i)$
б) $i-5i$; д) $8-(4-3i)$
в) $(4+3i)-(2-3i)$ е) $i-(2-3i)$

4.14. Бўлиш амалини бажаринг:

а) $6(\cos 70°+i\sin 70°) : 3(\cos 25°+i\sin 25°)$;
б) $2(\cos 120°+i\sin 120°) : 4(\cos 90°+i\sin 90°)$;
в) $\sqrt{6}(\cos 160°+i\sin 160°)$ $\sqrt{3}(\cos 40°+i\sin 40°)$
г) $4(\cos 75°+i\sin 75°)$ $\frac{1}{2}(\cos(-15°)+i\sin(-15°))$;
д) $8i:(1+\sqrt{3}i)$; е) $-6i:(-4-4i)$;
ё) $(6-6i):3(\cos 15°+i\sin 15°)$; ж) $(2+2\sqrt{3}i):(4-4i)$.

4.15. Кўпайтувчиларга ажратинг:

а) x^2+4; б) x^4-16; в) x^2+3-4i; г) $7+\sqrt{5}$.

4.16. Тенгликни текширинг:

а) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^4+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^4=1$; в) $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)^5+\left(\frac{-\sqrt{3}-i}{2}\right)^5=\sqrt{3}$;

б) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^5+\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^5=-2$; г) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3=2$.

4.17. Комплекс текисликда қуйидаги шартни қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрнини штрихланг:

а) $\mathrm{Re}(z)<5$; д) $\mathrm{Re}(z)<0$ з) $|z-4|<2$;

б) $-\frac{\pi}{4}<\arg(z)<\frac{\pi}{3}$; е) $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=0$; к) $|z+2i|\geq 4$;

в) $\mathrm{Re}(z)=2$; ё) $|z|>5$; л) $|z+1-i|<2$;

г) $\mathrm{Im}(z)=-2$; ж) $1<|z|<3$; м) $|z-i|<|z-1|$

4.18. $z=(p+qi)(p-qi)$ комплекс соннинг модулини топинг ($p\in R$, $q\in R$).

4.19. $z_1=-2+2\sqrt{3}\,i$ ва $z_2=1-i$ сонларни тригонометрик шаклга келтириб, қуйидаги ифодаларни ҳисобланг:

а) $z_1\ z_2$; в) $\frac{z_1^3}{z_2}$; д) $\sqrt[4]{z_1}$; ё) $z_1^2\cdot z_2$;

б) $\frac{z_2}{z_1}$; г) z_2^6; е) $\sqrt[3]{z_2}$; ж) $z_1\cdot z_2^2$.

4.20. Қуйидаги тенгликларни исботланг:

а) $z\cdot\bar{z}=|z|^2$; в) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)$;

б) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$; г) $z-\bar{z}=2\,Im(z)\cdot i$.

IV б о б. КЎПҲАДЛАР

1-§. БИРҲАДЛАР ВА КЎПҲАДЛАР

Натурал кўрсаткичли даража ва унинг хоссалари

Таъриф:

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\ldots\cdot a}_{n\ \text{марта}}\quad (n\geq 2,\ n\in N),\quad a^1=a.$$

Натурал кўрсаткичли даража қуйидаги хоссаларга эга:

1°. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}\cdot m,\ n\in N$;

2°. $a^m:a^n=a^{m-n}$, $m,\ n\in N$;

3°. $(a^m)^n=a^{mn}$, $m, n\in N$;
4°. $(ab)^n=a^n\cdot b^n$, $m, n\in N$;
5°. $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$, $a,b\in R$, $b\neq 0$, $n\in N$.

1.1. Ифодани x асосли даража кўринишида ёзинг:

а) $x^3\cdot x^5$;
б) $x^4\cdot x^5\cdot x^6$
в) $-x^3\cdot x^4$;
г) $-x^3\cdot x^3$;
д) $(x^2)^3$;
е) $(x^3)^2$;
ё) $(x^2\cdot x^4)^3$;
ж) $((x^3)^4)^5$;
з) $x^3\cdot x^a$;
к) $(x^2\cdot x^3)^a$
л) $x^2\cdot(x^3)^4$
м) $(x^4)^2\cdot(x^2)^4$

1.2. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\frac{2^5\cdot 11^8}{22^{10}}\cdot\frac{34^4\cdot 2^{10}}{17^5\cdot 8^4}$;
б) $\frac{2^8\cdot 7^9}{14^{10}}:\frac{26^5}{13^6\cdot 8^4}$;
в) $\frac{14^{10}}{2^8\cdot 7^9}:\frac{13^6\cdot 8^4}{26^5}$;
г) $\frac{12^5}{2^3\cdot 4^4}$;
д) $\frac{12^5}{2^3\cdot 3^4}:\frac{10^5}{2^6\cdot 5^7}$
е) $\frac{12^5}{2^3\cdot 3^4}\cdot\frac{10^5}{2^6\cdot 5^7}$;
ё) $\frac{10^5}{2^6\cdot 5^7}:\frac{12^5}{2^3\cdot 3^4}$
ж) $\frac{10^5}{2^7\cdot 5^6}\cdot\frac{2^4\cdot 3^3}{12^5}$

1.3. Бирҳаднинг даражасини аниқланг:

а) $3x^4xy^5$;
б) $-31xy^4$;
в) $0,8x^2y^2$;
г) 15 ;
д) $3xy^9z$;
е) $14x^2y^3z^4$;
ё) $13yz^{15}$;
ж) $43x^2y^3z^{19}$;
k) 15 ;
л) x^4y^2z ;
м) $x\cdot x^2\cdot\quad x^9$;
н) $xyx^2y^2x^4y^4x^6y^6\cdots x^{20}y^{20}$.

1.4. Бирҳадни стандарт шаклга келтиринг:

а) $13xy\cdot 14x^2y^3$;
б) $x^2y^2xzy^4$;
в) $3x^2z^2y^2\cdot xz^5$;
г) $11x^2y\cdot 13x^3y^4$;
д) $3xy(-1,5)y^3$;
е) $\frac{2}{3}ax^2y^2\cdot 6,5x^3$;
ё) $a\cdot xy^2z\cdot y^4\cdot x^5$;
ж) $a(x^2)^3yz^2x^3$.

1.5. A^n ни топинг:

а) $A=3x^2yz$, $n=3$;
б) $A=13xy^2$, $n=2$;
в) $A=x^2y^4z$, $n=14$;
г) $A=41xyz^2$, $n=3$;
д) $A=2x^2yz^2$, $n=4$;
е) $A=3xz^4$, $n=5$;
ё) $A=4y^2z^3$, $n=4$;
ж) $A=14xy^3z^3$, $n=2$.

1.6. Бирҳаднинг коэффициентини аниқланг:

а) $1,5xy^2\left(\frac{2}{3}\right)x^2$;
б) $\frac{4}{7}xz\cdot\frac{13}{8}x^2y$;
в) $\frac{14}{15}x\cdot\frac{15}{28}y\cdot 2y^3$;
г) $0,(3)xy\cdot\frac{1}{9}z$;
д) $1,(51)x^2yz^2\cdot\frac{3}{4}xy$;
е) $1\frac{3}{7}xy^2\cdot\frac{4}{10}z^2$
ё) $\frac{11}{13}x^2y^3z$;
ж) $\frac{13}{14}xy\cdot\frac{17}{13}z^2$

1.7. Ифодани соддалаштиринг:

а) $(13a+15b)-(14a-7b)$;
б) $(11x^3-12x^2)+(x^3-x^2+x^4)$; е) $(7a^2-5ax-x^2)+(-2a^2+ax-2x^2)$;
в) $(3a^2x-11x^2)-(3a^2x+6x^2)$; ё) $(13x^2-8xy+y^2)+(-11x^2-9xy)$;
г) $(4x^2y+8xy)-(3x^2y-5xy)$; ж) $(11xy+13y^2)-(9xy+x^2)$.
д) $(23x-11y+10a)-(-15x+10y-15a)$;

1.8. Амалларни бажаринг:

а) $a(a^2+x)-x(a-x)$; д) $-3(a^2-x^2)-2(a^2+x^2)$;
б) $13(x^2+y)+5(x^2-y)$; е) $-(3a-2x)+5(a-2x)$;
в) $2(a-3x)+3(a-2x)$; ё) $17(x^2-y^2)-15(y^2-x^2)$;
г) $13(2a-3x)+11(a+x)$; ж) $19(x^3y-xz^2)+17(-x^3y+3xz^2)$.

1.9. Ифодани соддалаштиринг ва ўзгарувчининг кўрсатилган қийматида ифода қийматини топинг:

а) $(a-4)(a-2)-(a-1)(a-3)$, $a=1{,}75$;
б) $(2a-5)(a+1)-(a+2)(a-3)$, $a=-2{,}6$;
в) $(a-5)(a-1)+(a-2)(a-3)$, $a=1{,}3$;
г) $(x+1)(x+2)+(x+3)(x+4)$, $x=-0{,}4$

1.10. Кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратинг:

а) $7ax+14ay$; д) $x(a-c)+y(c-a)$; к) $5x^{a+2}+10x^2$;
б) $3a^2x+6a^4x^3$ е) $a(x-y)-c(y-x)$; л) $a^{3x}-a^{2x}$;
в) $ax+bx+x$; ё) $2y(x-3)-5c(3-x)$; м) $a^cx^{2c}+a^cx^c$;
г) a^3-2a^2-a ; ж) $5(x-3)-a(3-x)$; н) $15x^{2c+3}-25x^{c+1}$.

1.11. Қисқа кўпайтириш формулаларини исботланг:

а) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$; б) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;
в) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$; г) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$;
д) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$;
е) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
ё) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;
ж) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

1.12. Касрнинг қийматини топинг:

а) $\frac{35^2-18^2}{72^2-16^2}$; д) $\frac{63^2-23^2}{71^2-15^2+86\ \ 24}$

б) $\frac{39{,}5^2-3{,}5^2}{57{,}5^2-14{,}5^2}$; е) $\frac{(4^{k+1}+6\ \ 4^k)^3}{(8^{k+2}+2\cdot 8^k)^2}$, $k\in N$;

в) $\frac{856^2-44^2}{406}$; ё) $\frac{(8^{k+1}+8^k)^2}{(4^k-4^{k-1})^3}$, $k\in N$

г) $\frac{71^2-23^2+94\cdot 42}{62^2-32^2}$; ж) $\frac{(13^2-11^2)(13^2+11^2)}{36^2-12^2}$

1.13. Кўпайтувчиларга ажратинг:

а) x^2-y^2-x-y; д) ax^2-a-x^2+x; к) $(x+y)(x^2+y^2)-x^3-y^3$;
б) $x^2-2xy+y^2-c^2$; е) $x^3+y^3+2xy(x+y)$; л) $36a^2-(a^2+9)^2$;
в) $(x-5)^2-16$; ё) $x^3-y^3-5x(x^2+xy+y^2)$; м) $8x^3-27y^{18}$;
г) $2x^2-4x+2$; ж) $a^4+ax^2-a^3x-x^4$;
н) $(x-y)(x^3+y^3)(x^2+xy+y^2)-(x^6-y^6)$.

1.14. k нинг исталган натурал қийматида

а) $(k+1)^2-(k-1)^2$ нинг қиймати 4 га;
б) $(2k+3)^2-(2k-1)^2$ нинг қиймати 8 га;
в) k^3-k нинг қиймати 6 га;
г) $(3k+1)^2-(3k-1)^2$ нинг қиймати 12 га бўлинишини исботланг.

1.15. Агар $a+b+c=0$ бўлса, $a^3+b^3+c^3=3abc$ бўлишини исботланг.

1.16. Сонларни таққосланг:

а) 45^2-31^2 ва 44^2-30^2; б) $297\cdot299$ ва 298^2;
в) 26^3-24^3 ва $(26-24)^3$; г) $(17+13)^2$ ва 17^3+13^3

1.17. $ab=0$ бўлса, $|a+b|$ нинг қиймати нимага тенг бўлиши мумкин? ($\sqrt{x^2}=|x|$ дан фойдаланинг).

1.18. $|a|^2+|b|^2+|c|^2=0$ бўлса, $(a+b+c)^2$ нинг қийматини топинг.

1.19. $(x+y+z)^2-2xy-2xz$ ни соддалаштиринг.

1.20. $(x-y-z)^2$ ни кўпҳадга айлантиринг.

2-§. БИР ЎЗГАРУВЧИЛИ КЎПҲАДЛАР

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\quad+a_{n-1}x+a_n$ $(a_0\neq0)$ ифода *бир ўзгарувчили n - даражали кўпҳад* дейилади. $a_0, a_1, \ldots, a_n$ лар унинг *коэффициент*ларидир. Уларни ҳақиқий сонлар деб ҳисоблаймиз. x эса ўзгарувчи бўлиб, комплекс қийматлар ҳам қабул қилиши мумкин.

Агар бир ўзгарувчили кўпҳаднинг ифодасида $x=0$ бўлса, озод ҳад ҳосил бўлади; $x=1$ бўлса, барча коэффициентлар йиғиндиси ҳосил бўлади.

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\quad+a_{n-1}x+a_n \quad (a_0\neq0)$$

ва

$$D(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\quad+b_{m-1}x+b_m \quad (b\neq0)$$

кўпҳадлар берилган бўлиб, $n>m$ бўлсин.

1 - т е о р е м а. ***P(x) ва D(x) кўпҳадлар учун P(x)=Q(x)D(x)+R(x) тенглик ўринли бўладиган Q(x) ва***

***R(x)* кўпҳадлар мавжуд ва ягонадир, бунда *R(x)* нинг даражаси *D(x)* даражасидан кичик.**

Бу теорема $P(x)$ кўпҳадни $D(x)$ кўпҳадга қолдиқли бўлишни ифодаловчи теоремадир.

Айтилган $Q(x)$ ва $R(x)$ кўпҳадларни топишнинг амалий усулларини мисолларда кўрсатамиз.

1 - м и с о л. $P(x)=4x^{10}+x^9+5x^7-20x^4-x^3+x^2-25x+5$ кўпҳадни $D(x)=x^7-5x^2+1$ кўпҳадга қолдиқли бўлишни бажаринг.

Ечиш. «Бурчакли бўлиш» усулидан фойдаланамиз:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;\boxed{4x^{10}}+x^9+5x^7-20x^4-x^3+x^2-25x+5 & \boxed{x^7}-5x^2+1 \\
\cline{2-2}
4x^{10}\qquad\qquad -20x^5+4x^3 \qquad\qquad & 4x^3+x^2+5=Q(x) \\
\cline{1-1}
-\;\boxed{x^9}+5x^7+20x^5-20x^4-5x^3+x^2-25x+5 & \\
x^9\qquad\qquad -5x^4\qquad +x^2\qquad\qquad & \\
\cline{1-1}
-\;\boxed{5x^7}+20x^5-15x^4-5x^3\qquad -25x+5 & \\
5x^7\qquad\qquad\qquad\qquad -25x^2+5 & \\
\cline{1-1}
20x^5-15x^4-5x^3+25x^2-25x=R(x). &
\end{array}
$$

Бош ҳадни бош ҳадга бўлиш жараёни даражаси бўлувчининг даражасидан кичик бўлган $R(x)$ кўпҳад ҳосил қилингунча давом эттирилади.

2-м и с о л. $P(x)=x^5+6x^4+11x^3+5x^2-2x$ кўпҳадни $D(x)=x^3+3x^2+x-1$ кўпҳадга қолдиқли бўлишни бажаринг.

Ечиш. «Аниқмас коэффициентлар» усулидан фойдаланамиз.

$P(x)$ нинг даражаси 5, $D(x)$ нинг даражаси эса 3 бўлгани учун $Q(x)$ нинг даражаси 2 га, $R(x)$ нинг даражаси эса кўпи билан 2 га тенг бўлади. Шу сабабли, $Q(x)$ ва $R(x)$ ларни $Q(x)=ax^2+bx+c$, $R(x)=dx^2+ex+m$ кўринишда излаймиз, бу ерда a, b, c, d, e, m лар аниқланиши лозим бўлган номаълум коэффициентлар.

$x^5+6x^4+11x^3+5x^2-2x=(x^3+3x^2+x-1)(ax^2+bx+c)+dx^2+ex+m$ тенглик ўринли бўлсин. Бу тенгликнинг ўнг томонида кўрсатилган амалларни бажариб, ўхшаш қўшилувчиларни ихчамласак, қуйидаги тенглик ҳосил бўлади:

$$x^5+6x^4+11x^3+5x^2-2x=ax^5+(3a+b)x^4+(a+3b+c)x^3+$$
$$+(-a+b+3c+d)x^2+(-b+c+e)x+(-c+m).$$

Кўпҳадларнинг тенглик шартидан фойдаланиб қуйидаги системани тузамиз:

$$\begin{cases} a = 1, \\ 3a + b = 6, \\ a + 3b + c = 11, \\ -a + b + 3c + d = 5, \\ c - b + e = -2, \\ -c + m = 0. \end{cases}$$

Бу системани ечиб, $a=1$, $b=3$, $c=1$, $d=0$, $e=0$, $m=1$ ларни топамиз. Демак, $Q(x)=x^2+3x+1$, $R(x)=1$.

3 - м и с о л. $x^4-2x^3+3x^2+4x+1$ ни x^2+x-2 га бўлишдан чиққан қолдиқни топинг.

Ечиш. Бўлинувчининг даражаси 4 га, бўлувчининг даражаси 2 га тенг бўлгани учун тўлиқсиз бўлинманинг даражаси 2 га тенг бўлади. Қолдиқ эса биринчи даражали кўпҳад ёки ўзгармас сон бўлиши мумкин:

$$x^4-2x^3+3x^2+4x+1=(x^2+x-2)(ax^2+bx+c)+(d+r).$$

Бу тенглик x нинг исталган қийматида, жумладан x^2+x-2=0 бўладиган қийматларда ҳам тўғридир. $x^2+x-2=0$ дан $x=-2$, $x=1$ ларни топамиз.

Юқоридаги тенгликда, дастлаб $x=-2$, сўнгра $x=1$ десак, d ва r ларни топиш имконини берувчи қуйидаги система ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} 37 = -2d + r, \\ 7 = d + r. \end{cases}$$

Бундан $d=-10$, $r=17$ ларни топамиз.

Шундай қилиб, кўпҳадларни бўлишдаги қолдиқ $-10x+17$ дан иборат экан.

4 м и с о л. $P(x)=3(9x^2-7x)^{99}+7(x^5-1)^{100}-x^2+x-7$ кўпҳад барча коэффициентларининг йиғиндисини топинг.

Ечиш. $P(x)=ax^n+bx^{n-1}+$ кўпҳадда $x=1$ десак, коэффициентлар йиғиндисига эга бўламиз. Бизнинг мисолда $P(1)=3\cdot(9\cdot1^2-7\cdot1)^{99}+7(1^5-1)^{100}-1^2+1-7=3\cdot2^{99}-7$.

Жавоб: $3\cdot2^{99}-7$.

2.1. $f(x)=x^2-3x^2+2x-1$ кўпҳад берилган. Қуйидагиларни ҳисобланг:

а) $f(2)$;	д) $f(-i)$;	з) $f(x-1)$
б) $f(i)$;	е) $f(i+1)$;	k) $f(a)$;
в) $f(i+1)$;	ё) $f(\sqrt{3}-\mathrm{i})$;	л) $f(2^n)$
г) $f(\sqrt{2})$;	ж) $f(\sqrt{3}-1)$;	м) $f(\frac{1}{\sqrt{3}})$

2.2. Кўпҳад коэффициентларининг йиғиндисини топинг:

а) $f(x)=(4x-1)^{1999}(2x-1)^{2000}+(8x-1)^2(4x-1)$
б) $f(x)=(3x-2)^{2000}(3x-1)^{199}+(8x+1)^2+2$;
в) $f(x)=(x-2)^{200}(2-x)+(4-x)^{99}(x-1)^{20}+3$;
г) $f(x)=(x-1)(x-2)^{20}+(4-4x)^{18}(x+3)^2+17$

2.3. $f(x)$ кўпҳад коэффициентларининг йиғиндиси m га тенг. a ни топинг:

а) $f(x)=x^3+ax^2+3x+1,\quad m=5$;
б) $f(x)=7x^3+2x^2+ax+2,\quad m=4$;
в) $f(x)=12x^4+2x^3+ax^2+1,\quad m=12$;
г) $f(x)=ax^5+4x^4+8x+1,\quad m=-4$

2.4. Кўпҳаднинг озод ҳадини топинг:

а) $f(x)=(3x^2-1)^{20}(4x+1)^{15}-x^{20}+15$;
б) $f(x)=(3x-4)^{18}(13x-1)^{16}+x^{17}-15$;
в) $f(x)=(2x+1)^{15}(3x^2+2)^4+(x-2)^2+17$;
г) $f(x)=(3x+1)^2(3x+4)^3(x+1)^{200}+(x-1)^{20}+19$

2.5. $f(x)$, $g(x)$ лар тенг кўпҳадлар бўлса, a, b ларни топинг:

а) $f(x)=ax^7+3x^6+x^2+1,\quad g(x)=3x^6+bx^2+1$;
б) $f(x)=ax^3+bx^2+3x+2,\quad g(x)=x^3+bx^2+3x+2$
в) $f(x)=ax^3+2x+3,\quad g(x)=4x^3+bx+3$;
г) $f(x)=ax^8+bx^3+9,\quad g(x)=ax^{10}+4x^3+ax^2+9$.

2.6. $x+5=a(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-3)+c(x-1)(x-2)$ тенглик айният бўлса, a, b, c ларни топинг.

2.7. Кўпҳадлар йиғиндисини топинг:

а) $f(x)=x^{88}+3x^{77}+4x^2+1,\quad g(x)=4x^{88}+3x^{65}+15$;
б) $f(x)=x^4-5x^3+4x^2-1,\quad g(x)=-x^4+6x^3+x+2$;
в) $f(x)=x^6+5x^2+11x+4,\quad g(x)=2x^6+x^4+3x^3+5$;
г) $f(x)=x^7+x^6+5x^4+12,\quad g(x)=7x^3+8x^2-11$.

2.8. Кўпҳадлар йиғиндисининг даражасини топинг:

а) $f(x)=(x-1)^7(x-2)^5+3x,\quad g(x)=(2x-4)^{12}+4x^2$;
б) $f(x)=(2x+5)^{15}+3x^4+4,\quad g(x)=(2x+3)^{16}-4x^3+x+1$;
в) $f(x)=(3x+5)^{15}+31x^5+2,\quad g(x)=-(3x+11)^{15}+33x^6+4$;
г) $f(x)=x^7+x^6+3x^2+x+3,\quad g(x)=-x^7+2x^6+4x^5+2$

2.9. 2.7-мисолдаги кўпҳадлар учун $f(x)-g(x)$ ни топинг.

2.10. Кўпҳадларни кўпайтиринг:

а) $f(x)=5x^4+4x^2+x+2,\quad g(x)=4x$;
б) $f(x)=4x^4+3x^3+2,\quad g(x)=4x^3+7x+1$;
в) $f(x)=11x^4+3x^2+3x+5,\quad g(x)=5x^6+7x^2+4x+2$;
г) $f(x)=13x^3+4x^2+x+2,\quad g(x)=2x^2+5x+6$.

2.11. $P(x)$ ни $D(x)$ га қолдиқли бўлишни бажаринг:

а) $P(x)=x^3+5x^2+5x+3,\quad D(x)=x^2+4x+1$

б) $P(x)=x^3+5x^2+5x+3,\quad D(x)=x+1$;

в) $P(x)=x^4+5x^3+9x^2+11x+6,\quad D(x)=x^2+3x+1$;

г) $P(x)=x^4+5x^3+9x^2+11x+6,\quad D(x)=x^2+2x+1$;

д) $P(x)=3x^5+2x^4-10x^3+5x^2+x+10,\quad D(x)=x^3-x^2+x-1$;

е) $P(x)=3x^5+2x^4-10x^3+5x^2+x+10,\quad D(x)=x^2+3x-4$

ё) $P(x)=4x^6+3x^5-15x^2+4x+5,\quad D(x)=x^3+4x^2-1$;

ж) $P(x)=4x^6+3x^5-15x^2+4x+5,\quad D(x)=x^4-4x+2$;

з) $P(x)=3x^4+3x^2+5x+4,\quad D(x)=x^2+3x+2$;

и) $P(x)=x^5+3x^4+9x^3+12x^2+20x,\quad D(x)=x^3+4x$;

к) $P(x)=x^5+3x^4+9x^3+12x^2+20x,\quad D(x)=x^2+3x+5$;

л) $P(x)=4x^4+5x^2+6x+11,\quad D(x)=x^2+5x-4$.

2.12. Кўпҳадларнинг энг катта умумий бўлувчисини Евклид алгоритми ёрдамида топинг:

а) $x^4+x^3-3x^2-4x-1,\quad x^3+x^2-x-1$;

б) $x^5+x^4-x^3-2x-1,\quad 3x^4+2x^3+x^2+2x-2$;

в) $x^6-7x^4+8x^3-7x+7,\quad 3x^5-7x^3+3x^2-7$;

г) $x^5-2x^4+x^3+7x^2-12x+10,\quad 3x^4-6x^3+5x^2+2x-2$;

д) $x^6+2x^4-4x^3-3x^2+8x-5,\quad x^5+x^2-x+1$;

е) $x^5+3x^4-12x^3-52x^2-52x-12,\quad x^4+3x^3-6x^2-22x-12$;

ж) $x^5+x^4-x^3-3x^2-3x-1,\quad x^4-2x^3-x^2-2x+1$;

з) x^4-4x^3+1; $\quad x^3-3x^2+1$.

V б о б. АЛГЕБРАИК ИФОДАЛАР

1-§. РАЦИОНАЛ АЛГЕБРАИК ИФОДАЛАР ВА УЛАР УСТИДА ШАКЛ АЛМАШТИРИШЛАР

1.1. Ўзгарувчининг ифода маънога эга бўлмайдиган барча қийматлари тўпламини топинг:

а) $\frac{5-x}{x-2}$; д) $\frac{3a}{3+2a}$; з) $\frac{3x}{x(x+2)}$; м) x^2+x+2;

б) $\frac{x^2+3}{x^2+4}$; е) $\frac{a-4}{5}$; и) $\frac{x-2}{a^2-x^2}$; н) $\frac{x-1}{x}+\frac{7}{x-3}$;

в) $\frac{x+3}{(x-1)(x-2)}$; ё) $\frac{a^2-5}{a-4,5}$; к) $\frac{x}{x^2-16}$; о) $\frac{4x}{x+5}-\frac{8x^2}{x-9}$;

г) $\frac{x^2-4}{x^2-9}$; ж) $\frac{13a+2}{26-2a}$; л) $\frac{y}{3y(y-5)}$; п) $\frac{31x^2}{9x-9}+x^2-x$.

1.2. Ўзгарувчининг ифода маънога эга бўладиган барча ҳақиқий қийматлари тўпламини тузинг:

а) $\frac{3}{x+2}$; е) $\frac{a+5}{4-a}$; л) $\frac{x+2}{7x-7}+\frac{13}{x-7}$;

б) $\frac{x^3+13}{x^2+5}$; ё) $\frac{3a+13}{4a^2-1}$; м) $\frac{x^2+x-3}{x^2-5x}+\frac{1}{x}$;

в) $\frac{x+5}{x^2-9}$; ж) $\frac{17a}{(a-1)(a-2)(a-3)}$; н) x^2-x-1;

г) $\frac{3x+5}{4x^2-9}$; з) $\frac{x+4}{x-3}+\frac{1}{x+2}$; о) $\frac{x-2}{x^2-a^2}$;

д) $\frac{11a}{13-a^2}$; к) $\frac{7x-4}{x^2-16}+x+2$; п) $\frac{x}{x^2+x+1}+x^2$;

р) $x^2-\frac{1}{(x-1)(x-4)}$;

1.3. Ифоданинг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $\frac{2x-y}{x(x-y)}$; д) $\frac{x}{x-2}+\frac{y}{y(x-3)}$; з) $x+y+\frac{x}{y-4}$;

б) $\frac{x}{x^2-y^2}$; е) $\frac{x-1}{x}+\frac{y}{3x-y}$; к) $xy+x^2y-\frac{y}{x+3}$;

в) $\frac{x+y}{x^2-y}$; ё) $\frac{y}{x-y}-\frac{x}{x+y}$; л) $1+x^3y+x^4y^2$;

г) $\frac{x-2y}{x^2-y}$; ж) $\frac{3x+y}{x^3-y^3}-\frac{y}{3x-3}$; м) $13-2x^2+(x-y)^2$.

1.4. Касрни қисқартиринг:

а) $\frac{21a^3-6a^2b}{12ab-42a^2}$; ж) $\frac{a^2-3a}{a^2+3a-18}$;

б) $\frac{6m^3-3mn^2}{2m^3n+mn^2}$; з) $\frac{4x^2-8x+3}{4x^2-1}$;

в) $\frac{x^2-2mx+3x-6m}{x^2+2mx+3x+6m}$; и) $\frac{m^2+4m-5}{m^2+7m+10}$;

г) $\frac{8ab+2a-20b-5}{4ab-8b^2+a-2b}$; к) $\frac{x^2+10x+25}{(x+5)^3}$;

д) $\frac{16a^2-8ab+b^2}{16a^2-b^2}$; л) $\frac{(x-2)^2}{(2-x)^2}$;

е) $\frac{9x^2-25y^2}{9x^2+30xy+25y^2}$; м) $\frac{x^6+x^4}{x^4+x^2}$

1.5. Қуйида келтирилган ифодалар орасидаги бутун рационал ифодалар тўпламини тузинг:

$3x^2+y$; $3x^2+\frac{1}{y}$; $3x^2+\frac{1}{2}$; $4a^2-x(a-3x)$; $\frac{x^2}{x-4}$; $\frac{x^3}{4}$;

$6x-\frac{1}{2}$; $\frac{x^2+y}{1\frac{1}{2}-0,(5)x}$ $\frac{xyz-\frac{1}{z}}{3-1\frac{1}{4}}$; $xy+\sqrt{z}-\frac{z^2}{14}$.

Амалларни бажаринг:

1.6. а) $\frac{a-2}{2}-1-\frac{a-3}{3}$;

б) $\frac{a+x}{4}-a+x$;

в) $4a-\frac{a-1}{4}-\frac{a+2}{3}$;

г) $\frac{(a-x)^2}{2a}+x$;

д) $c-\frac{(x+c)^2}{2x}$;

е) $a+x-\frac{a^2+x^2}{a-x}$

ж) $\frac{a}{4x}+\frac{5}{12y}-\frac{c}{9xy^2}$;

з) $1-\frac{x}{x-y}-\frac{1}{x+y}$;

1.7. а) $\frac{a^2}{ax-x^2}+\frac{x}{x-a}$;

б) $\frac{x^2-4xy}{2y^2-xy}-\frac{4y}{x-2y}$;

в) $\frac{x}{2a^2-ax}-\frac{4a}{2ax-x^2}$;

г) $\frac{4y}{3x^2+2xy}-\frac{9x}{3xy+2x^2}$;

д) $\frac{x-25}{5x-25}-\frac{3x+5}{5x-x^2}$;

е) $\frac{12-y}{6y-36}+\frac{6}{6y-y^2}$;

ж) $3x-\frac{x-y}{2-x}+\frac{x+y}{4}$;

з) $\frac{x-12a}{x^2-16a^2}+\frac{4x}{4ax-x^2}$.

1.8. а) $\frac{a^2+3a}{ax-5x+8a-40}$; в) $\frac{x}{3ax-2-x+6a}-\frac{x}{3a-1}$;

б) $\frac{y}{3x-2}-\frac{3y}{6xy+9x-4y-6}$; г) $\frac{3x}{2y+3}+\frac{x^2+3x}{4xy-3-2y+6x}$.

1.9. Каср кўринишида ифодаланг:

а) $\frac{x^2-xy}{y}\quad\frac{y^2}{x^3}$;

б) $\frac{3a}{b^2}\cdot\frac{ab+b^2}{9}$;

в) $\frac{x-y}{xy}\cdot\frac{2xy}{xy-y^2}$;

г) $\frac{4ab}{cx+bx}\quad\frac{ax+bx}{2ab}$;

д) $\frac{xa-xy}{3c^2}\cdot\frac{2x}{cy-ca}$;

е) $\frac{ax-ay}{5x^2y^2}\quad\frac{5xy}{by-bx}$;

ж) $\frac{kx+k^2}{x^2}\cdot\frac{x}{x+k}$;

з) $\frac{ax+ay}{xy^2}\cdot\frac{x^2y}{3x+3y}$;

к) $\frac{xy}{a^2+a^3}\cdot\frac{a+a^2}{x^2y^2}$

л) $\frac{6a}{x^2-x}\cdot\frac{2x-2}{3ax}$;

м) $\frac{x^2-y^2}{2xy}\quad\frac{2x}{x+y}$;

н) $\frac{4x^2}{x^2-9}\quad\frac{3a-ax}{4x}$.

1.10. Соддалаштиринг:

а) $\frac{x^2-4x}{x^2+7x}:\frac{24-6x}{49-x^2}$;

б) $\frac{y^3-16y}{2y+18}:\frac{4-y}{y^2+9y}$;

в) $\frac{(a+b)^2-2ab}{4a^2}:\frac{a^2+b^2}{ab}$;

г) $\frac{5c^3-5}{c+2}:\frac{(c+1)^2-c}{13c+26}$;

д) $\frac{(x+3)^2}{2x-4}:\frac{3x+9}{x^2-4}$;

е) $\frac{(x-3)^2}{x-8}:\frac{4x-12}{3x-24}$;

з) $\frac{a+b}{(a-b)^2}\quad\frac{(a+b)^2}{(a-b)^3}$;

k) $\frac{(3c-b)^2}{3c+b}:\frac{3c-b}{(3c+b)^2}$.

1.11. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\left(\frac{7(m-2)}{m^3-8}-\frac{m+2}{m^2+3m+4}\right)\ \frac{2m^2+4m+8}{m-3}$;

б) $\frac{a+5}{a^2-9}:\left(\frac{a+2}{a^2-3a+9}-\frac{2(a+8)}{a^3+27}\right)$;

в) $\left(\frac{x+2}{3x}-\frac{2}{x-2}-\frac{x-14}{3x^2-6x}\right):\frac{x+2}{6x}\ \frac{1}{x-5}$;

г) $\frac{1}{2}+\left(\frac{3m}{1-3m}+\frac{2m}{3m+1}\right)\cdot\frac{9m^2-6m+1}{6m^2+10m}$;

д) $\left(\frac{1}{x+y}-\frac{y^2}{xy^2-x^3}\right):\left(\frac{x-y}{x^2+xy}-\frac{x}{x^2+xy}\right)-\frac{x}{x-y}$;

е) $\frac{2a+3}{2a-3}\ \left(\frac{2a^2+3a}{4a^2+12a+9}-\frac{3a+2}{2a+3}\right)+\frac{4a-1}{2a-3}-\frac{a-1}{a}$;

ж) $\left(\frac{a+3}{a^2+2a+1}+\frac{a-1}{a^2-2a-3}\right)\cdot\frac{a^2-2a-3}{a+2}-1$;

з) $\frac{3(m+3)}{m^2+3m+9}+\frac{m^2-3m}{(m+3)^2}\ \left(\frac{3m}{m^3-27}+\frac{1}{m-3}\right)$.

1.12. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right):\left(\frac{a+b}{b}-\frac{a-b}{a}\right)$;

б) $\left(2x+1-\frac{1}{1-2x}\right)\ \left(2x-\frac{4x^2}{2x-1}\right)$;

в) $\left(p-q+\frac{4q^2-p^2}{p+q}\right):\left(\frac{p}{p^2-q^2}+\frac{2}{q-p}+\frac{1}{p+q}\right)$;

г) $\left(\frac{2}{2x+y}-\frac{1}{2x-y}-\frac{3y}{y^2-4x^2}\right)\cdot\left(\frac{y^2}{8x^2}-\frac{1}{2}\right)$

д) $\left(\frac{5x+y}{x^2-5xy}+\frac{5x-y}{x^2+5xy}\right)\cdot\frac{x^2-25y^2}{x^2+y^2}$

е) $\frac{9a^2-16b^2}{7a}\cdot\left(\frac{3b-4a}{4b^2-3ab}-\frac{3b+4a}{4b^2+3ab}\right)$;

ж) $\frac{4xy}{y^2-x^2}:\left(\frac{1}{y^2-x^2}+\frac{1}{x^2+2xy+y^2}\right)$;

з) $\frac{a-2}{a^2+2a}\ \left(\frac{a}{a^2-2a}-\frac{a^2+4}{a^3-4a}-\frac{1}{a^2+2a}\right)$;

к) $\frac{4a-5}{a^2-9}+\frac{9(a-3)}{15-7a-4a^2}\ \frac{4a^2-17a+15}{a-2}-\frac{7}{a+3}$;

л) $(a^2-y^2-x^2+2xy):\frac{a+y-x}{a+y+x}$;

м) $\frac{a^2-1}{x^2+ax}\ \left(\frac{x}{x-1}-1\right)\cdot\frac{a-ax^3-x^4+x}{1-a^2}$ $(x=-1)$;

н) $\frac{x}{ax-2a^2}-\frac{2}{x^2+x-2ax-2a}\ \left(1+\frac{3x+x^2}{x+3}\right)$

1.13. Касрни қисқартиринг:

а) $\frac{x^2-x+1}{x^4+x^2+1}$;   в) $\frac{x(y-a)-y(x-a)}{x(y-a)^2-y(x-a)^2}$;

б) $\frac{x^{14}-x^7+1}{x^{21}+1}$;   г) $\frac{x^{33}-1}{x^{33}+x^{22}+x^{11}}$

1.14. k нинг қандай қийматларида $\frac{(k-3)^2}{k}$ ифода натурал қийматлар қабул қилади?

1.15. Ифодани соддалаштиринг ва ўзгарувчиларнинг кўрсатилган қийматларида ифоданинг қийматини ҳисобланг:

а) $\left(\frac{x-2y}{x^3+y^3}+\frac{y}{x^3-x^2y+xy^2}\right)\cdot\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}+\frac{2y^2}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}$; x = 0,2; y = 0,8;

б) $\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$; $a=\frac{1}{3}$; $b=\sqrt{3}$; $c=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2-§. ИРРАЦИОНАЛ ИФОДАЛАР ВА УЛАР УСТИДА ШАКЛ АЛМАШТИРИШЛАР. n-ДАРАЖАЛИ ИЛДИЗ ВА УНИНГ ХОССАЛАРИ

2.1. Ифода маънога эгами:

а) $\sqrt[3]{-9}$; д) $\sqrt[6]{-0{,}25}$; к) $\sqrt[3]{i}$; о) $\sqrt[8]{x-y}$, бунда $x<y$;
б) $\sqrt{-9}$ е) $\sqrt{0{,}25}$; л) $\sqrt[3]{-i}$; п) $\sqrt[7]{x-y}$, бунда $x\le y$;
в) $\sqrt[3]{9}$; ж) $\sqrt[4]{-81}$; м) $\sqrt[4]{i}$; р) $\sqrt[8]{y-x}$, бунда $x\le y$;
г) $\sqrt{9}$; з) $\sqrt[7]{-2}$; н) $\sqrt[4]{-i}$; с) $\sqrt[9]{y-x}$, бунда $x\ge y$?

2.2. Ифода ўзгарувчининг қандай қийматларида маънога эга:

а) $\sqrt{-x}$; д) $\sqrt[3]{x-1}$; к) $\sqrt[4]{-x^2}+\sqrt[4]{x^2-1}$;
б) $\sqrt[4]{x^2}$; е) $\sqrt[5]{(x+1)^2}$; л) $\sqrt{x^2-6x+9}$;
в) $\sqrt[6]{x^2+4}$; ж) $\sqrt[7]{16x}$; м) $\sqrt{x^2+2x+2}$;
г) $\sqrt[8]{(x+4)^2}$; з) $\sqrt[3]{-x+2}$; н) $\sqrt[6]{-(x-3)^2}$?

2.3. Тенглик ўзгарувчининг қандай қийматларида тўғри:

а) $\sqrt{(x-2)^2}=2-x$; д) $\sqrt[3]{x-3}=\sqrt[3]{3-x}$; з) $\sqrt[3]{-x}=2$;
б) $\sqrt{(x+3)^2}=x+3$; е) $\sqrt[3]{x-3}=0$; к) $\sqrt[3]{-x}=-2$;
в) $\sqrt{(x-3)^2}=x-3$; ё) $\sqrt{x^2-1}=-1$; л) $\sqrt{x^2-6x+9}=1$;
г) $\sqrt{(x-4)^2}=4-x$; ж) $\sqrt{x}=1$; м) $\sqrt[3]{x-2}=1$?

2.4. Кўпайтмадан илдиз чиқаринг:

а) $\sqrt{16 \cdot 121}$;   д) $\sqrt{9 \cdot 25 \cdot 26 \quad 49}$;
б) $\sqrt[3]{-125 \cdot 27}$ е) $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 64 \cdot 125}$;
в) $\sqrt[4]{16 \cdot 81}$;   ж) $\sqrt[4]{81 \cdot 625 \cdot 256}$;
г) $\sqrt[5]{32 \quad 243}$ з) $\sqrt{0{,}01 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}25}$

2.5. Бўлинмадан илдиз чиқаринг:

а) $\sqrt{\frac{36}{49}}$;   б) $\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}$;   в) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$;   г) $\sqrt[5]{\frac{243}{32}}$;
д) $\sqrt{\frac{25}{64}}$;   е) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$;   ж) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$;   з) $\sqrt{\frac{0{,}01}{0{,}09}}$

2.7. Даражадан илдиз чиқаринг:

а) $\sqrt[4]{158}$;   б) $\sqrt[4]{(-15)^8}$;   в) $\sqrt[3]{-5^6}$;   г) $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^4}$;
д) $\sqrt[4]{x^4}$, бунда $x \leq 0$;   е) $\sqrt[3]{x^6}$, бунда $x \in R$;
ж) $\sqrt{(x^2+1)^2}$, бунда $x \in R$;   з) $\sqrt{x^6}$, бунда $x \geq 0$.

2.8. Илдиздан илдиз чиқаринг:

а) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{16}}}$;   б) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{76}}}$;   в) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{4}}}$;   г) $\sqrt[7]{\sqrt[3]{25}}$;
д) $\sqrt[7]{\sqrt[3]{\sqrt{x^2}}}$, бунда $x \leq 0$;   е) $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$, бунда $x \geq 0$;
ж) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{x}}}$, бунда $x \geq 0$;   з) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}$, бунда $x \in R$.

2.9. Илдизни даражага кўтаринг:

а) $(\sqrt[4]{2})^3$; б) $(\sqrt[6]{16})^3$; в) $(\sqrt[3]{-2})^5$;   г) $(\sqrt[4]{4})^2$;
д) $(\sqrt[4]{x})^3$; е) $(\sqrt[4]{x^2})^6$; ж) $(\sqrt[4]{x} + 2)^5$; з) $(\sqrt[3]{x^4})^6$

2.10. Берилган илдизни бир хил кўрсаткичли илдизга айлантиринг:

а) $\sqrt{3}$ ва $\sqrt[3]{4}$;   д) $\sqrt{x}$ ва $\sqrt[8]{y}$;
б) $\sqrt[3]{2}$ ва $\sqrt[4]{4}$;   е) $\sqrt[3]{x+1}$ ва $\sqrt[7]{y}$;
в) $\sqrt{5}$ ва $\sqrt[4]{6}$;   ж) $\sqrt{x^2+1}$ ва $\sqrt[6]{y^2-1}$;
г) $\sqrt[5]{2}$ ва $\sqrt[3]{3}$;   з) $\sqrt[5]{x-y}$ ва $\sqrt[4]{y}$

Рационал кўрсаткичли даража

2.11. Ифода маънога эгами:

а) $3^{-\frac{4}{3}}$ б) $(-3)^{-\frac{1}{3}}$ в) $4^{\frac{1}{9}}$ г) $(-3)^{-\frac{2}{3}}$; д) $(\sqrt[3]{-4})^{\frac{1}{2}}$;

е) $(\sqrt{4})^{\frac{2}{5}}$; ж) $(x-1)^{\frac{1}{3}}$, $(x<1)$; з) $(x+2)^{\frac{1}{4}}$, $(x \geq -2)$?

2.12. Ўзгарувчининг ифода маънога эга бўладиган барча қийматларини топинг:

а) $4{,}5^{\frac{x}{2}}$, бунда $x \in Q$; б) $(-4{,}5)^{\frac{x}{2}}$, бунда $x \in Q$;

в) $(3+x)^{\frac{1}{5}}$ г) $(x^2+1)^{\frac{1}{3}}$;

д) $\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{4}}$; е) $(|x|+1)^{\frac{2}{3}}$

ж) $(1-|x|)^{\frac{4}{5}}$ з) $(1-|x|)^{-3}$

2.13. Ҳисобланг:

а) $49^{\frac{1}{2}}$; д) $9^{2\frac{1}{2}}$; з) $9^{-1,5}$; н) $27^{-\frac{5}{6}} \cdot 3^{2,5}$;

б) $1000^{\frac{1}{3}}$; е) $0{,}16^{-1\frac{1}{6}}$; к) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$; о) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$;

в) $4^{-\frac{1}{2}}$; ё) $0{,}008^{1\frac{1}{3}}$; л) $\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{4}{3}}$; п) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{3}{2}}$;

г) $8^{-\frac{1}{3}}$; ж) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{4}{3}}$ м) $(25)^{-\frac{3}{2}}$; р) $\left(\frac{4}{9}\right)$

2.14. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^0\right)^{-0,5} - 7{,}5 \cdot 4^{-\frac{2}{3}} - (-2)^{-4} + 81^{0,25}$

б) $0{,}027^{-\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{-2} + 256^{0,75} - 3^{-1} + (5{,}5)^0$

в) $\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{10}} : \left(\frac{25}{36}\right)^{-\frac{3}{2}} - \left(\left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{5}} \left(\frac{6}{5}\right)^{-3}$

г) $\left(9^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} - (25^{2,5})^{-0,1} + \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{6}{7}}\right)^0 : 36^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$;

д) $\left(4^{-\frac{1}{4}} + \left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right) \cdot \left(4^{-0,25} - (2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right)$;

е) $(0{,}004)^{-1,5} \cdot (0{,}125)^{-\frac{4}{3}} - \left(\frac{1}{121}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

ё) $\dfrac{2 \cdot 4^{-2} + \left(81^{-\frac{1}{2}}\right)^3 \left(\frac{1}{9}\right)^{-3}}{125^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} + (\sqrt{3})^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$

2.15. Амалларни бажаринг:

а) $c^{\frac{1}{3}} \cdot c^{\frac{1}{4}} \cdot c^{\frac{1}{12}}$; д) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{14}} \cdot x^{\frac{2}{7}}$;

б) $b^{0.2} : b^{0.7}$; е) $(m^{0.3})^{1.2} \cdot (m^{-0.4})^{0.4}$;

в) $(m^{0.4})^{-25}$; ж) $4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{1\frac{2}{3}} \cdot 8^{-\frac{1}{9}}$;

г) $y^{0.8} \cdot y^{5} \cdot y^{7.2}$; з) $8^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}$

Кўпайтувчини илдиз белгиси остидан чиқариш, кўпайтувчини илдиз белгиси остига киритиш ва илдизни даражага кўтариш:

$$\sqrt[2n]{a^{2n}b} = |a| \cdot \sqrt[2n]{b}, \qquad (a \in R,\ b \geq 0);$$
$$\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}b} = a \cdot \sqrt[2n+1]{b}, \qquad (a \in R,\ b \in R)$$

2.16. Кўпайтувчини илдиз белгиси остидан чиқаринг:

а) $\sqrt{12}$; д) $\sqrt{98}$; з) $\sqrt{(x^2-2)^2\ y}$;

б) $\sqrt[4]{1250}$ е) $\sqrt[3]{375}$; к) $\sqrt[4]{x^4y^3}$;

в) $\sqrt[3]{81}$; ё) $\sqrt[4]{48}$; л) $\sqrt[7]{(x-1)^7z^2}$;

г) $\sqrt[3]{24}$; ж) $\sqrt{243}$; м) $\sqrt[5]{(y+1)^{10}x^2}$

2.17. Кўпайтувчини илдиз белгиси остига киритинг:

а) $4\sqrt{5}$; д) $x\sqrt{y^3}$, бунда $x \leq 0$; з) $(x-1)^2\sqrt[4]{y-2}$, бунда $x \leq 1$;

б) $-3\sqrt[3]{2}$; е) $x\sqrt[5]{y^3}$, бунда $x \leq 0$; к) $(x-1^3\sqrt[4]{y-2}$, бунда $x \leq 1$;

в) $-3\sqrt[4]{2}$; ё) $x^2\sqrt[4]{y^3}$, бунда $x \leq 0$; л) $-x\sqrt[4]{y}$, бунда $x \geq 0$;

г) $2\sqrt[5]{3}$; ж) $x^3\sqrt[4]{y^5}$, бунда $x \leq 0$; м) $(\sqrt{3}-2)\sqrt{xy^3}$

2.18. Ҳисобланг:

а) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{98}$; д) $\sqrt{2}+3\sqrt{32}+0.5\sqrt{128}-6\sqrt{18}$;

б) $\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{375}$; е) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{686}-\sqrt[3]{16}$;

в) $2\sqrt{3}-\sqrt{27}+3\sqrt{12}-2\sqrt{243}$; ё) $20\sqrt{245}-\sqrt{5}+\sqrt{125}-2.5\sqrt{180}$;

г) $\sqrt{50}-5\sqrt{8}+\sqrt{2}+\sqrt{128}$; ж) $2\sqrt{3}+\sqrt{192}-2\sqrt{75}+\sqrt[4]{128}$.

2.19. Соддалаштиринг:

а) $\sqrt[3]{16\sqrt{2}}$; д) $\sqrt[5]{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{8}}}$;

б) $\sqrt{5\sqrt[3]{625}}$; е) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$;

в) $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}}}$; ж) $\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}$

г) $\sqrt[4]{12\sqrt{9\sqrt[3]{4}}}$; з) $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}$.

2.20. Сонларни таққосланг:

а) $2\sqrt{3}$ ва $3\sqrt{2}$;

б) $2\sqrt[3]{3}$ ва $3\sqrt[3]{2}$

в) $5\sqrt{7}$ ва $8\sqrt{3}$;

г) $3\sqrt[3]{4}$ ва $3\sqrt[3]{2}$;

д) $\sqrt{2}$ ва $\sqrt[3]{3}$;

е) $\sqrt[3]{12}$ ва $\sqrt{5}$;

ж) $\sqrt{8}$ ва $\sqrt[3]{19}$;

з) $\sqrt[12]{2}$ ва $\sqrt[15]{3}$.

Илдизларни кўпайтириш ва бўлиш

2.21. Ифоданинг қийматларини топинг:

а) $\sqrt{2} \quad \sqrt{5} \quad \sqrt{40}$;

б) $\sqrt[4]{2} \quad \sqrt[6]{32}$;

в) $\sqrt{2} \quad \sqrt{6} \quad \sqrt{3}$;

г) $\sqrt{7} \quad \sqrt{6} \quad \sqrt{2}$;

д) $\sqrt[5]{a^2} \quad \sqrt[15]{a^4}$, $a=3$;

е) $\sqrt[3]{a^2} \quad 4\sqrt{a}$, $a=2$;

ж) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{5}$, $a=2$;

з) $\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt{y}$, $x=3$, $y=2$.

2.22. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$;

б) $\dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{2}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{4}}$;

г) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{3}}$;

д) $\sqrt[12]{a^2} \quad \sqrt[4]{a}$;

е) $\sqrt[9]{a^8} \quad \sqrt[6]{a^5}$;

ж) $\dfrac{\sqrt[4]{2^7}}{\sqrt[3]{2^4}}$;

з) $\dfrac{\sqrt[14]{3^9}}{\sqrt[9]{3^2}}$.

2.23. Даражага кўтаринг:

а) $(\sqrt[3]{4x^2})^2$;

б) $(2\sqrt[3]{3x^2})^3$;

в) $(3\sqrt{4x^2 - 1})^2$;

г) $(\sqrt[3]{x^8})^6$

д) $(a^2x\sqrt[3]{3a^2x})^4$;

е) $(\sqrt[3]{2 + xy^2})^2$;

ж) $(\sqrt{xy + z})^3$;

з) $(\sqrt[6]{xy})^2$

Каср махражидаги иррационалликни йўқотиш

2.24. Каср махражидаги иррационалликни йўқотинг:

а) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$;

б) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{12}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$;

г) $\dfrac{4}{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;

д) $\dfrac{3\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{3\sqrt{5}-3\sqrt{3}}$;

е) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$;

ж) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{75}}$;

з) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$;

к) $\dfrac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$;

л) $\dfrac{15}{3\sqrt{3}+3\sqrt{7}}$;

м) $\dfrac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}$;

н) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}$

о) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x+y}}$;

п) $\dfrac{1-a}{\sqrt{1}-\sqrt{a}}$;

р) $\dfrac{x+y}{\sqrt{x-y}}$

2.25. Ҳисобланг:

а) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{37}+\sqrt{36}}$;

б) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{8}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{23}+\sqrt{22}}$;

в) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\sqrt{2}-\sqrt{23}$;

г) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}-\sqrt{7}+\sqrt{5}$

2.26. Тенглик тўғрими:

а) $\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$; б) $-\frac{2}{\sqrt{8}+\sqrt{6}}+\frac{5}{\sqrt{11}+\sqrt{6}}=-\frac{3}{\sqrt{8}+\sqrt{11}}$;

в) $-\frac{8\sqrt{7}}{\sqrt{5\sqrt{7}-2\sqrt{7}}}+\frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{5\sqrt{7}+\sqrt{8\sqrt{7}}}}=-4\sqrt[4]{175}$;

г) $\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3\sqrt{5}}-\sqrt{2\sqrt{5}}}-\frac{5\sqrt{5}}{4\sqrt{2\sqrt{5}}-3\sqrt{3\sqrt{5}}}=\sqrt[4]{45}$?

Иррационал ифодалар устида шакл алмаштиришлар

2.27. Ҳисобланг:

$$\frac{2\cdot 4^{-2}+\left(81^{-\frac{1}{2}}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-3}}{125^{-\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2}+(\sqrt{3})^{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$$

2.28. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\frac{x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{6}}}:\left(\frac{z^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}}\cdot\frac{x^{-\frac{5}{6}}\cdot z^{-\frac{2}{3}}}{y^{\frac{5}{6}}}\right)$; б) $\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{3}{4}}\cdot y^{-\frac{5}{6}}}:\sqrt[4]{x^{-3}\;y^{-5}}\right)^{\frac{2}{7}}$;

в) $ab\sqrt[3]{\frac{b}{a^2}}-ab\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}+\frac{a}{b}\sqrt[3]{ab^4}-\frac{b}{a}\sqrt[3]{a^4b}$;

г) $\sqrt{\frac{3a^{-\frac{7}{2}}\cdot b^{8}}{a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{-\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt[4]{4a^{-10}\cdot b^{6}\cdot\frac{1}{\left(a^{-\frac{1}{2}}b\right)^{3}}}}$;

д) $\left(\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt[4]{ab}}\right)^{-4}$; е) $\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}}}$.

2.29. Мураккаб илдиз формулаларини исботланг:

а) $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$;

б) $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$.

2.30. Мураккаб илдиз формулаларидан фойдаланиб, ифодаларни соддалаштиринг:

а) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$;   в) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$;

б) $\sqrt{6-\sqrt{20}}$;   г) $\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$

2.31. Даражага кўтаринг:

а) $\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2$

2.32. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\left(\sqrt{ab}-\dfrac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\dfrac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}$; б) $\left(\dfrac{(\sqrt{a}+1)^3-a\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}+1)^2-\dfrac{a-\sqrt{ax}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}\right)^{-3}$

в) $\left(\dfrac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\dfrac{1-a}{\sqrt{1-a^2}+a-1}\right)\cdot\left(\sqrt{\dfrac{1}{a^2}-1}-\dfrac{1}{a}\right)$;

г) $\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+2a^2:\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\dfrac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}$;

д) $\dfrac{\dfrac{a+x}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}}$;

е) $\left(\dfrac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{a-4+\dfrac{3}{a}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right)^2$;

ж) $\left(\dfrac{3x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}}-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1}$;

з) $\left(a+b^{\frac{3}{2}}:\sqrt{a}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^{-\frac{2}{3}}$

2.33. $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ бўлса, $\dfrac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\dfrac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$ ифоданинг қийматини топинг.

2.34. $x=13$, $y=5$ бўлса, $\left(x+y^{\frac{3}{2}}:\sqrt{x}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)^{-\frac{2}{3}}$ ифоданинг қийматини топинг.

2.35. Айниятни исботланг:

а) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a+a^{\frac{1}{2}}+1}:\dfrac{1}{a^{\frac{3}{2}}-1}-a=-1$;

б) $\left(\dfrac{(a+\sqrt[3]{a^2x}):(x+\sqrt[3]{ax^2})-1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^6=\dfrac{a^2}{x^4}$

VI-б о б. АЛГЕБРАИК ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

1-§. ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР

1.1. Тенгламани x га нисбатан ечинг:

а) $3x+1=a$;
б) $5+x=ax$;
в) $4=ax$;
г) $x=a^2x$;
д) $ax-a^2=4-2x$;
е) $a+x=a^2x-1$;
ж) $ax-b=1+x$;
з) $x=b-a^2x$;
к) $ax-b^2=7$;
л) $3-a^2x=x-b$

1.2. $m\cdot x=n$ тенглама:

а) фақат битта илдизга;
б) фақат иккита ҳар хил илдизга;
в) фақат 1000 та ҳар хил илдизга;
г) чексиз кўп ҳар хил илдизга эга бўлиши мумкинми?

1.3. $ax=1+b^2$ тенглама чексиз кўп ҳар хил илдизга эга бўлиши мумкинми?

1.4. $(a-1)x=a^2-3a+2$ тенглама илдизга эга бўлмаслиги мумкинми?

1.5. Ота 45 ёшда, ўғли 15 ёшда. Неча йилдан кейин ўғли отасидан икки марта кичик бўлади?

1.6. Тенгламани ечинг:

а) $1-|x|=0,5$;
б) $1+|x|=a$;
в) $|1-x|=0,5$;
г) $|1-x|=a$;
д) $1+x=|\sqrt{2}-3|$;
е) $|1+x|=-|\sqrt{2}-3|$;
ё) $1+x=2-\sqrt{3}$;
ж) $|-x|=1,7$.

1.7. Тенгламани ечинг:

а) $3x(x-1)-17=x(1+3x)+1$; б) $2x-(x+2)\cdot(x-2)=5-(x-1)^2$;
в) $\frac{3x+1}{2}=\frac{2x-3}{5}$ г) $\frac{x-3}{6}+x=\frac{2x-1}{3}-\frac{4-x}{2}$

1.8. m нинг қандай қийматларида берилган тенгламалар R да тенг кучли бўлади:

а) $2x+3=12$ ва $2x+3=12(3m-\frac{1}{2})+15$;

б) $3x+5=12$ ва $(3x+5)(3m-\frac{1}{2})=12$;

в) $4-3x=5$ ва $-3x+4=3m-8$;

г) $10x-mx=1$ ва $(10-m)x=0$?

1.9. Тенгламани ечинг:

а) $(x+2)(a-1)+1=a^2$; б) $x=a^2x$;
в) $ax-a^2=4-2x$; г) $a+x=a^2x-1$;
д) $ax-b^2=7$; е) $ax-b=1+x$.

1.10. Тенгламанинг ечимлари тўпламини тузинг:

а) $\frac{3-2x}{15}=\frac{x-2}{3}+\frac{x}{5}$; б) $\frac{1-3x}{12}=\frac{5x-1}{3}+\frac{7x}{4}$;
в) $\frac{6x-5}{3}-\frac{11}{5}=\frac{4x+3}{5}-0{,}6$; г) $\frac{8x+1}{2}-\frac{9x}{5}=\frac{6x-1}{5}+0{,}1$;
д) $\frac{5x-2}{3}=\frac{2x+3}{2}-\frac{x+2}{3}$; е) $3(x+8)=4(7-x)$;
ж) $(x+3)(x-6)=(x+2)(x+1)+4$; з) $(x-3)(x-4)=(x-5)(x-6)-7{,}5$.

2-§. КВАДРАТ ТЕНГЛАМАЛАР

2.1. Квадрат учҳаддан тўла квадрат ажратинг:

а) $2x^2+4x-3$; д) x^2-6x+8;
б) $\frac{1}{3}x^2-4x+16$; е) $ax^2-4a^2x+4a^3+3$;
в) $-5x^2+20x-13$; ё) $6a^2x-9a^3-ax^2+a-1$;
г) $-0{,}5x^2-0{,}25x-2{,}25$; з) $x^2+(a+b)x+ab$.

2.2. x нинг барча қийматларида x^2+x+1 квадрат учҳад мусбат қийматлар қабул қилишини исботланг.

2.3. x нинг барча қийматларида $-3x^2+12x-13$ квадрат учҳад манфий қийматлар қабул қилишини исботланг.

2.4. x, y, z ларнинг барча қийматларида $5x^2+5y^2+5z^2+6xy-8xz-8yz\geq 0$ бўлишини исботланг.

2.5. Тенгсизликни исботланг:

$$x^2+2xy+3y^2+2x+6y+3\geq 0.$$

2.6. Тенгламани ечинг:

а) $6x^2-x-1=0$; д) $2x^2-12x+12=0$;
б) $3x^2-5x+1=0$ е) $2x-x^2-6=0$;
в) $x^2-x+1=0$ ж) $x^2-4x+5=0$;
г) $-x^2+8x-16=0$; з) $\frac{1}{3}x^2-12x+9=0$.

2.7. 15 сонини кўпайтмаси 70 га тенг бўладиган иккита соннинг йиғиндиси кўринишида ёзиш мумкинми?

2.8. Тенгламани энг қулай формула ёрдамида ечинг:

а) $3x^2-5x+2=0$; д) $5x^2+9x-14=0$;
б) $3x^2-20x-52=0$; е) $4x^2-x+10=0$;
в) $x^2-10x+24=0$; ж) $5x^2-16x+3=0$;
г) $x^2+7x-30=0$; з) $x^2+4x-12=0$.

2.9. Тенгламани оғзаки ечинг:

а) $x^2-3x+2=0$;
б) $x^2+99x-100=0$;
в) $x^2+548x-549=0$;
г) $-x^2+6x-5=0$;
д) $-x^2-7x+8=0$;
е) $x^2-7x+12=0$;
ё) $3x^2+x-2=0$;
ж) $x^2-(a+b)x+ab=0$.

2.10. x_1 ва x_2 лар x^2-$7x+10=0$ тенгламанинг илдизлари бўлсин. Бу илдизларни топмасдан, қуйидагиларни ҳисобланг:

а) $x_1^2+x_2^2$;
б) $x_1^3+x_2^3$;
в) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$;
г) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$;
д) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$;
е) $x_1x_2-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}$;
ё) $(x_1x_2)^2-x_1^3-x_2^3$;
ж) $x_1^2+x_2^2+2x_1x_2$.

2.11. 2.10-мисолдаги тенгламани $-3x^2+x+24=0$ тенглама билан алмаштиринг ва ҳисоблашларни бу тенглама учун бажаринг.

2.12. x_1,x_2 лар $ax^2+bx+a=0$ тенгламанинг илдизлари бўлсин, x_1 ва x_2 сонлар ўзаро тескари сонлар эканини исботланг.

2.13. Берилган тенгламани ечмай, унинг илдизлари ишорасини аниқланг:

а) $x^2-4x+3=0$;
б) $x^2-6x+5=0$;
в) $x^2-x-42=0$;
г) $x^2-x-6=0$;
д) $x^2+x+1=0$;
е) $6x^2-x-1=0$;
ё) $-20x^2-3x+2=0$;
ж) $x^2-6x+10=0$;
з) $-3x^2+17=0$;
к) $-5x^2+x-7=0$.

2.14. Квадрат учҳаднинг илдизларини топинг:

а) $10x^2+5x-5$;
б) $9x^2-9x+2$;
в) $0{,}2x^2+3x-20$;
г) $-2x^2-x-0{,}125$;
д) $0{,}1x^2+0{,}4$;
е) $-0{,}3x^2+1{,}5x$;
ё) x^2+x-6;
ж) x^2-2x-4.

2.15. Квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратинг:

а) $3x^2-24x+21$;
б) $5x^2+10x-15$;
в) $\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$;
г) $x^2-12x+24$;
д) $-y^2+16y-15$;
е) $-x^2-8x+9$;
ё) $2x^2-5x+3$;
ж) $5y^2+2y-3$;
з) $-2x^2+5x+7$;
к) $2x^2-2x+\frac{1}{2}$.

2.16. Касрни қисқартиринг:

а) $\frac{4x+x}{3x^2+2x-1}$; д) $\frac{p^2-11p+10}{20+8p-p^2}$;

б) $\frac{2a^2-5a-3}{3a-9}$; е) $\frac{3x^2+16x-12}{10-13x-3x^2}$;

в) $\frac{16-b^2}{b^2-b-12}$; ж) $\frac{x^2-11x+24}{x^2-64}$;

г) $\frac{2y^2+7y+3}{y^2-9}$; з) $\frac{2y^2+9y-5}{4y^2-1}$.

2.17. Илдизлари қуйидагича бўлган квадрат тенглама тузинг:

а) 2 ва -3; в) $\frac{1}{4}$ ва $\frac{1}{6}$; д) 2 ва 2; ж) 0 ва 5;

б) -1 ва -5; г) $-\frac{1}{2}$ ва $-\frac{1}{3}$; е) $\frac{1}{3}$ ва $\frac{1}{3}$; з) α ва β.

2.18. Илдизлари $\frac{5}{7}$ ва $-\frac{1}{2}$ бўлган шундай квадрат тенглама тузингки, унинг барча коэффициентлари бутун сонлар бўлиб, уларнинг йиғиндиси 36 га тенг бўлсин.

2.19. Илдизлари 3 ва -2 бўлган шундай квадрат тенглама тузингки, унинг бош коэффициенти $\frac{1}{2}$ бўлсин.

2.20. Илдизларидан бири а) $2+\sqrt{3}$ га, б) $3-\sqrt{2}$ га, в) $2-\sqrt{5}$ га, г) $3+\sqrt{5}$ га тенг бўлган бутун коэффициентли келтирилган квадрат тенглама тузинг.

3-§. КАСР-РАЦИОНАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \qquad (1)$$

кўринишдаги тенглама *каср-рационал тенглама* дейилади, бу ерда $P(x)$ ва $Q(x)$ лар кўпҳадлар бўлиб, $Q(x)$ нинг даражаси камида 1 га тенг.

(1) тенгламани ечиш учун $P(x)=0$ тенгламанинг $Q(x)\neq 0$ шартни қаноатлантирадиган ечимларини топиш кифоя, яъни (1) тенглама

$$\begin{cases} P(x)=0, \\ Q(x)\neq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

системага тенг кучлидир.

Мисол. $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}=1$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Бу тенгламани (1) кўринишга келтириб оламиз:

$$\frac{x^2-4x-2}{(x+1)(x-2)}=0.$$

Охирги тенглама $\begin{cases} x^2-4x-2=0, \\ (x+1)(x-2)\neq 0 \end{cases}$ системага тенг кучли. $x^2-4x-2=0$ тенглама $x_1=2+\sqrt{6}$, $x_2=2-\sqrt{6}$ илдизларга эга бўлиб, бу илдизлар $(x+1)(x-2)=0$ тенгламанинг илдизлари эмас.

Шундай қилиб, берилган тенглама иккита илдизга эга: $x_{1,2}=2\pm\sqrt{6}$.

Тенгламани ечинг:

3.1. $\frac{5(x-2)}{x+2}-\frac{2(x-3)}{x+3}=3.$ **3.2.** $\frac{x^2-1}{x}=x^2-\frac{1}{x}$

3.3. $\frac{y+5}{y^2-5y}-\frac{y-5}{2y^2-10y}=\frac{y+25}{2y^2-50}.$ **3.4.** $\frac{x^2}{x+5}=\frac{25}{x+5}.$

3.5. $\frac{3(9x-3)}{9x-6}=2+\frac{3x+1}{3x-2}.$ **3.6.** $\frac{3-7x}{2x+4}=\frac{1,5-3,5x}{x+2}.$

3.7. $\frac{1+x}{1-x}=\frac{a}{c}$ **3.8.** $\frac{3ax-5}{(a-1)(x+3)}+\frac{3a-11}{a-1}=\frac{2x+7}{x+3}.$

Тенгламани ечинг:

3.9. $\frac{5+2x}{4x-3}=\frac{3(x+1)}{7-x}.$ **3.10.** $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=\frac{10}{3}+\frac{36}{x^2-9}.$

3.11. $\frac{30}{x^2-1}-\frac{13}{x^2+x+1}-\frac{18x+7}{x^3-1}=0$ **3.12.** $\frac{x^2}{x+3}=\frac{x}{x+3}.$

3.13. $\frac{x^2-6x}{x-5}=\frac{5}{5-x}.$ **3.14.** $\frac{x^2-6x}{x-5}-\frac{5}{x-5}=0.$

3.15. $\frac{x^2-4}{x}=\frac{3+2x}{2}.$ **3.16.** $\frac{8}{x}=3x+2.$

3.17. $\frac{3x+1}{x+2}=1+\frac{x-1}{x-2}.$ **3.18.** $\frac{2x-2}{x+3}-\frac{x+3}{3-x}=5$

3.19. $\frac{4}{9y^2-1}-\frac{4}{3y+1}-\frac{5}{1-3y}$

3.20. $\frac{4}{x+3}+1=\frac{1}{x-3}+\frac{5}{3-x}.$

4-§. КЎПАЙТУВЧИЛАРГА АЖРАТИШ УСУЛИ

1 - м и с о л. $x^4-4x^3-10x^2+37x-14=0$ тенгламани ечинг.

Е ч и ш. Тенгламанинг чап томонида 4-даражали кўпҳад турибди. Уни квадрат учҳадлар кўпайтмаси шаклида тасвирлашга ҳаракат қиламиз:

$$x^4-4x^3-10x^2+37x-14=(x^2+px+q)(x^2+bx+c).$$

Чап ва ўнг томонларда турган кўпҳадларнинг мос коэффициентларини тенглаштирамиз:

$$\begin{cases} p + b = -4, \\ c + q + pb = -10, \\ pc + qb = 37, \\ qc = -14. \end{cases}$$

Охирги системанинг бирор бутун қийматли ечимини топамиз. $qc=-14$ дан q ва c лар 14 нинг бўлувчилари эканини кўриш қийин эмас. Демак, улар учун ±1, ±2, ±7, ±14 сонларни синаб кўриш керак.

Агар $q=1$ бўлса, $c=-14$ бўлади. Иккинчи ва учинчи тенгламалар $\begin{cases} pb=3, \\ -14p+b=37 \end{cases}$ системани беради. Бу системадан b учун b^2-$37b$-$42=0$ тенглама ҳосил бўлади. Бу тенглама эса ечимга эга эмас.

Шунинг учун, $q=1$ да система бутун ечимга эга эмас.

Агар $q=2$ бўлса, $c=-7$ га эга бўламиз. Бу ҳолда система $q=2$, $c=-7$, $b=1$, $p=-5$ лардан тузилган бутун ечимга эга бўлади (текшириб кўринг).

Шундай қилиб,

$$x^4 -4x^3 - 10x^2 + 37x -14 = (x^2 + 5x + 2)(x^2+x-7).$$

Демак, берилган тенглама x^2-$5x+2=0$ ва x^2+x-$7=0$ тенгламаларга ажралади. Бу тенгламаларни ечиб, берилган тенгламанинг ҳам ечимлари бўладиган $\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$, $\frac{-1\pm\sqrt{29}}{2}$ сонларни топамиз.

2 - м и с о л. $(x^2+x+4)^2+3x(x^2+x+4)+2x^2=0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенгламанинг чап томонини $y= x^2+x+4$ га нисбатан квадрат учҳад сифатида қараб, бу квадрат учҳадни одатдаги стандарт усулда кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$y^2+3xy+2x^2=(y+x)(y+2x).$$

Бундан $(x^2+2x+4)(x^2+3x+4)=0$ тенглама ҳосил бўлади. Охирги тенглама ечимга эга эмас. Демак, берилган тенглама ҳам ечимга эга эмас.

Тенгламани ечинг:

4.1*. $x^3-3x=a^3+\frac{1}{a^3}$ $(a\neq0)$.

4.2. $x^3-8x^2- x+8=0$.

4.3. $x^3-0{,}1x=0{,}3x^2$

4.4. $9x^3-18x^2- x+2=0$.

4.5. $y^4-y^3-16y^2+16y=0$.

4.6. $x^3-x^2=x-1$.

4.7. $x^4-x^2=6x^3-6x$.

4.8. $3x^3-x^2+18x-6=0$.

4.9. $2x^4-18x^2=5x^3-45x$. **4.10.** $3y^2-2y=2y^3-3$.

4.11. $x^3-3x-2=0$. **4.12.** $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12=0$.

4.13.* $2(x^2+6x+1)^2+5(x^2+6x+1)(x^2+1)+2(x^2+1)^2=0$.

4.14.* $(x^2-x+1)^4-6x^2(x^2-x+1)^2+5x^4=0$.

4.15.* $\frac{x+6}{x-6}\cdot\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2+\frac{x-6}{x+6}\cdot\left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2=2\cdot\frac{x^2+36}{x^2-36}$.

4.16. $x^3+7x^2+14x+8=0$. **4.17.** $x^3-5x+4=0$.

4.18. $x^3-8x^2+40=0$. **4.19.** $x^3-2x-1=0$.

4.20. $x^4-4x^2+x+2=0$.

5-§. ЯНГИ ЎЗГАРУВЧИ КИРИТИШ УСУЛИ

1 м и с о л. $(x^2-3x+1)(x^2+3x+2)(x^2-9x+20)=-30$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $(x^2+3x+2)(x^2-9x+20)=(x+1)(x+2)(x-4)(x-5)=$ $=[(x+1)(x-4)]\cdot[(x+2)(x-5)]=(x^2-3x-4)\cdot(x^2-3x-10)$ бўлгани учун берилган тенгламани қуйидагича ёзиб олиш мумкин:

$$(x^2-3x+1)(x^2-3x-4)(x^2-3x-10)=-30.$$

Бу тенгламада $y=x^2-3x$ алмаштириш орқали янги ўзгарувчи y ни киритамиз:

$$(y+1)(y-4)(y-10)=-30.$$

Охирги тенгламадан $y_1=5$, $y_2=4+\sqrt{30}$, $y_3=4-\sqrt{30}$ ларни топиб, қуйидаги учта квадрат тенгламага эга бўламиз:

$$x^2-3x=5,\quad x^2-3x=4+\sqrt{30},\quad x2-3x=4-\sqrt{30}.$$

Бу тенгламаларни ечсак, берилган тенгламанинг барча илдизлари топилади:

$$\frac{3\pm\sqrt{29}}{2},\ \frac{3\pm\sqrt{25+4\sqrt{30}}}{2},\ \frac{3\pm\sqrt{25-4\sqrt{30}}}{2}$$

2 - м и с о л. $x^4-2\sqrt{2}x^2-x+2-\sqrt{2}=0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $\sqrt{2}=a$ деб, $x^4-2ax^2-x+a^2-a=0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламани a га нисбатан квадрат тенглама сифатида қараб, унинг $a=x^2-x$, $a=x^2+x+1$ илдизларини топиш мумкин. $a=\sqrt{2}$ эканини эътиборга олсак, қуйидаги тенгламаларга эга бўламиз:

$$x^2-x=\sqrt{2},\ x^2+x+1=\sqrt{2}.$$

Бу тенгламалар берилган тенгламанинг ҳамма илдизларини аниқлаш имконини беради:

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2},\quad x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{4\sqrt{2}-3}}{2}$$

3 - м и с о л. $\frac{4x}{x^2+x+3}+\frac{5x}{x^2-5x+3}=-\frac{3}{2}$ тенгламани ечинг.

Е ч и ш. $x=0$ тенгламанинг ечими эмас. Шу сабабли, берилган тенглама қуйидаги тенгламага тенг кучли:

$$\frac{4}{x+\frac{3}{x}+1}+\frac{5}{x+\frac{3}{x}-5}=-\frac{3}{2},$$

$y=x+\frac{3}{x}$ десак, $\frac{4}{y+1}+\frac{5}{y-5}=-\frac{3}{2}$ тенглама ҳосил бўлади. Бу тенглама $y_1=-5$, $y_2=3$ илдизларга эга бўлгани учун берилган тенглама $x+\frac{3}{x}=-5$, $x+\frac{3}{x}=3$ тенгламалар мажмуасига тенг кучлидир. Уларни ечиб, берилган тенгламанинг илдизларига эга бўламиз:

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}.$$

Ечилган бу тенглама $\frac{Ax}{ax^2+b_1x+c}+\frac{Bx}{ax^2+b_2x+c}=D$ кўринишдаги тенгламанинг хусусий ҳолидир. Бундай кўринишдаги барча тенгламалар, шунингдек

$$\frac{ax^2+b_1x+c}{ax^2+b_2x+c}\pm\frac{ax^2+b_3x+c}{ax^2+b_4x+c}=A \text{ ва}$$

$$\frac{ax^2+b_1x+c}{ax^2+b_2x+c}=\frac{Ax}{ax^2+b_3x+c},\ A\neq 0$$

кўринишдаги (бу ерда $ac\neq0$) тенгламаларни ечиш схемаси 3-мисолни ечиш схемаси кабидир.

Тенгламани ечинг:

5.1. $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=120$. **5.2.** $(x^2+3)^2-1(x^2+3)+28=0$.

5.3. $t^4-2t^2-3=0$. **5.4.** $2x^4-9x^2+4=0$.

5.5. $5y^4-5y^2+2=0$. **5.6.** $x^4-4x^2+4=0$.

5.7. $(x^2-2x)^2-(x-1)^2+1=0$. **5.8.** $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55$.

5.9. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12=0$. **5.10.** $(x^2-5x+7)-(x-2)(x-3)=0$.

5.11. $(x-2)(x+1)(x+4)(x+7)=19$. **5.12.** $2x^8+x^4-15=0$.

5.13. $(2x-1)^6+3(2x-1)^3=10$. **5.14.** $(x-2)^6-19(x-2)^3=216$.

5.15. $\frac{x-4}{x+5}+\frac{x+5}{x-4}=2$. **5.16.** $\frac{x-4}{x-5}+\frac{6x-30}{x-4}=5$.

5.17. $\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0.$ **5.18.** $x^4-\frac{50}{2x^4-7}=14.$

5.19. $\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{12}.$ **5.20.** $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55.$

5.21. $\frac{x^2-13x+15}{x^2-14x+15}-\frac{x^2-15x+15}{x^2-16x+15}=-\frac{1}{12}$

5.22. $\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1$

5.23. $\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{1}{x^2-2x+3}=\frac{9}{2(x^2-2x+4)}.$

5.24. $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\frac{4x}{x^2-12x+15}.$

5.25. $\frac{2x}{3x^2-x+2}-\frac{7x}{3x^2+5x+2}=1.$ **5.26.** $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=2.$

6-§. БЕЗУ ТЕОРЕМАСИ. ГОРНЕР СХЕМАСИ

Безу теоремаси. ***$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ $(a_0\neq 0)$ кўпҳадни x-c икки ҳадга бўлишдан ҳосил бўладиган r қолдиқ $P_n(x)$ кўпҳаднинг $x=c$ нуқтадаги қийматига, яъни $P_n(c)$ га тенг: $r=P_n(c)$.***

1-мисол. $P_4(x)=x^4+x^3+3x^2+2x+2$ кўпҳадни x-1 га бўлишдан ҳосил бўлган қолдиқни топинг.

Ечиш. Безу теоремасига асосан: $r=P_4(1)=1+1+3+$ $+2+2=9$.

2-мисол. $P_3(x)=x^3+2x^2+x-a^2$ кўпҳадни x-2 га бўлишдан ҳосил бўлган қолдиқ 8 га тенг бўлса, a ни топинг.

Ечиш. $P_3(2)=2^3+2\cdot 2^2+2-a^2=8$ тенгликдан $a^2=10$ ни ҳосил қиламиз. Бундан $a=\sqrt{10}$ ёки $a=-\sqrt{10}$.

Жавоб: $a=\pm\sqrt{10}$.

$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ кўпҳадни x-c га қолдиқли бўлишнинг амалий усулларидан бири Горнер схемаси (усули)дир.

Бу усулнинг моҳияти қуйидагича: $P(x)$ кўпҳадни $x-c$ га қолдиқли бўлишда $Q_{n-1}(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+$ $+b_{n-1}$ $(b_0\neq 0)$ кўпҳад ва $r\in R$ қолдиқ ҳосил бўлади. b_0, b_1, ., b_{n-2}, b_{n-1}, r сонларни қуйидаги схема ёрдамида топиш мумкин:

	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
+	0	cb_0	cb_1		cb_{n-3}	cb_{n-2}	cb_{n-1}
c	$b_0=a_0$	b_1	b_2		b_{n-2}	b_{n-1}	r

3 - м и с о л. $P_5(x)=2x^5-x^4-3x^3+x-3$ ни $x-3$ га қолдиқли бўлинг.

Ечиш.

	2	-1	-3	0	1	-3
		3·2	3·5	3·12	3·36	3·109
c=3	2	5	12	36	109	324=r

Демак, $P_5(x)=(x-3)(2x^4+5x^3+12x^2+36x+109)+324$.

4 - м и с о л. $P_3(x)=2x^3-x^2+3x+2$ ни $x+1$ га қолдиқли бўлинг.

Ечиш.

	2	-1	3	2
		-1·2	-1·(-3)	-1·6
c=-1	2	-3	6	-4=r

$P_3(x)=(x+1)(2x^2-3x+6)-4$.

Безу теоремасидан $P_n(x)$ кўпҳадни $ax+b$ кўринишдаги иккиҳадга бўлишда ҳосил бўладиган r қолдиқ $P_n\left(-\frac{b}{a}\right)$ га тенг бўлишлиги келиб чиқади.

5 - м и с о л. $P_3(x)=x^3-3x^2+5x+7$ ни $2x+1$ га бўлишдан ҳосил бўлган қолдиқни топинг.

Ечиш. Қолдиқ $r = P_3\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+7=\frac{29}{8}$ га тенг.

6.1. $P(x)$ кўпҳад $D(x)$ кўпҳадга бўлинадими:

а) $P(x)=x^{100}-3x+2$, $D(x)=x-1$;
б) $P(x)=x^{100}-3x+2$, $D(x)=x+1$;
в) $P(x)=x^{100}-3x^2+2$, $D(x)=x^2-1$;
г) $P(x)=x^{100}-3x+2$, $D(x)=2x^2-1$?

6.2. $x^{2n-1}+a^{2n-1}$ кўпҳад $x+a$ га бўлинишини исботланг, бунда $a\neq0$, $n\in\mathrm{N}$.

6.3. x^n-a^n кўпҳад $x-a$ га бўлинишини исботланг, бунда $a\neq0$, $n\in\mathrm{N}$.

6.4. а) x^4-3x^2+1 ни $x-2$ га; б) $x^5-4x^3+x^2$ ни $x-3$ га; в) $x^5-4x^3-x^2+1$ ни $2x-3$ га; г) $x^4-3x^3+x^2-1$ ни $3x-4$ га бўлишдаги қолдиқни топинг.

6.5. m нинг қандай қийматларида $3x^4-2x^2-m^2x-2$ кўпҳад $x-2$ га қолдиқсиз бўлинади?

6.6. m нинг қандай қийматларида $3x^3-4x^2-mx-1$ кўпҳад $x+1$ га бўлинмайди?

6.7. a ва b нинг қандай қийматларида $2x^4+ax^3+bx-2$ кўпҳад x^2-x-2 учҳадга қолдиқсиз бўлинади?

6.8*. m ва n нинг қандай қийматларида x^3+mx+n кўпҳад $x^2+3x+10$ учҳадга қолдиқсиз бўлинади?

6.9. $P(x)$ кўпҳадни x-1 га бўлищда қолдиқ 3, x-2 га бўлишда эса қолдиқ 5 ҳосил бўлади. $P(x)$ ни x^2-$3x$+2 га бўлишда ҳосил бўладиган қолдиқни топинг.

6.10. $P(x)$ кўпҳадни $x-a$ га бўлищда r_1 қолдиқ, $x-b$ га бўлищда эса r_2 қолдиқ ҳосил бўлади ($a \neq b$). $P(x)$ ни $x^2-(a+b)x+ab$ га бўлищда ҳосил бўладиган қолдиқни топинг.

6.11. Горнер схемаси ёрдамида $P(x)$ кўпҳадни $D(x)$ иккиҳадга қолдиқли бўлинг:

а) $P(x)=x^2-5x-7$, $D(x)=x-1$;
б) $P(x)=x^3-3x^2+5x-6$, $D(x)=x-2$;
в) $P(x)=2x^4-3x^2-5x+2$, $D(x)=x+1$;
г) $P(x)=3x^5-4x^3-x+1$, $D(x)=x+3$;
д) $P(x)=3x^6-4x^5-x^4+x^3-x^2-1$, $D(x)=x-3$;
е) $P(x)=x^5-x^2-5x-6$, $D(x)=x-2$;
ж) $P(x)=x^4-x^3+2x^2-5x-42$, $D(x)=x+2$;
з) $P(x)=x^5-4x^2+5x-3$, $D(x)=x-3$;
и) $P(x)=x^4-3x^3+2x^2-4x-1$, $D(x)=x+4$;
к) $P(x)=x^5-4x^3-3x^2+1$, $D(x)=x-4$;
л) $P(x)=x^6-5x^4+3x^2-5x+6$, $D(x)=x+2$;
м) $P(x)=x^5-4x^3+2x^2-3$, $D(x)=x-1$.

6.12. Горнер схемасидан фойдаланиб, $f(x)$ кўпҳаднинг $x=a$ нуқтадаги қийматини топинг:

а) $f(x)=x^3-x^2+2$, $a=1$; б) $f(x)=x^4-3x^3$-x+10, $a=2$;
в) $f(x)=x^5-x^4+3x^2$-x+1, $a=-1$;
г) $f(x)=x^6-7x^2+3x^2-3$, $a=3$; д) $f(x)=x^6-5x^3-4x^2+8$, $a=4$;
е) $f(x)=x^8+7x^7+x^6+3x^5+3x^4+2x^3+x^2-x+1$, $a=5$.

6.13. Горнер схемасидан фойдаланиб, $a^3+b^3+c^3-3abc$ ни кўпайтувчиларга ажратинг.

6.14. Агар $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ бўлса, $\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq abc$ бўлади. Шуни 6.13-масала натижасидан фойдаланиб исботланг.

7-§. АЛГЕБРАНИНГ АСОСИЙ ТЕОРЕМАСИ

Алгебранинг асосий теоремаси (Гаусс теоремаси). ***n-даражали (бу ерда $n \geq 1$) ҳар қандай кўпҳад ақалли битта комплекс илдизга эга.***

Т е о р е м а. ***Агар $\alpha+\beta i$ ($\beta \neq 0$) комплекс сон $P(z)$ кўпҳаднинг илдизи бўлса, $\alpha-\beta i$ сони ҳам $P(z)$ кўпҳаднинг илдизи бўлади.***

Н а т и ж а : ***n-даражали $P_n(x)$ кўпҳад $x-\alpha$ кўринишидаги иккиҳадлар ва x^2+px+q кўринишидаги манфий дискриминантли квадрат учҳадлар даражаларининг кўпайтмасидан иборат:***

$$P_n(x)=a_0(x-\alpha)^k \cdot \quad \cdot (x^2+px+q)^m \cdot$$

бу ерда $k \in \{0, 1, 2, \quad .\}$ $m \in \{0,1,2, . \ .\}$.

1 м и с о л. $x^2+4x+15=0$ тенгламанинг барча комплекс илдизларини топинг.

Ечиш. Алгебранинг асосий теоремасидан бу тенглама кўпи билан иккита комплекс илдизга эгалиги келиб чиқади. Бу илдизлар квадрат тенгламани ечишнинг одатдаги усули ёрдамида топилади:

$$x^2+4x+15=0; \ D=4^2-4 \cdot 15=-44; \ x_{1,2}=\frac{-4 \pm 2\sqrt{-11}}{2}=-2 \pm i\sqrt{11}.$$

2 м и с о л. $x^2+4x+15$ учҳадни кўпайтувчиларга ажратинг.

Ечиш. Квадрат учҳаднинг илдизларини топамиз: $x_{1,2}=-2 \pm i\sqrt{11}$. Шунинг учун $x^2+4x+15=(x+2-i\sqrt{11}) \times$ $\times(x+2+i\sqrt{11})$.

3 м и с о л. $x^4+4x^2+15=0$ тенгламанинг барча комплекс илдизларини топинг.

Ечиш. $x^2=t$ деб, $t^2+4t+15=0$ квадрат тенгламани ҳосил қиламиз. Унинг илдизлари: $t_1=-2+i\sqrt{11}$, $t_2=-2-i\sqrt{11}$. $x^2=-2+i\sqrt{11}$, $x^2=-2-i\sqrt{11}$ тенгламаларга эга бўлдик. $-\sqrt{2}+i\sqrt{11}$, $\sqrt{2}-i\sqrt{11}$ ифодаларнинг қийматларини ҳисобласак, берилган тенгламанинг 4 та комплекс илдизларига эга бўламиз (бу илдизларни ўзингиз аниқланг).

4 м и с о л. Илдизларидан бири $1+3i$ бўлган ҳақиқий коэффициентли квадрат тенглама тузинг.

Ечиш. $1+3i$ сон изланаётган квадрат тенгламанинг илдизи бўлгани учун $1-3i$ сон ҳам унинг илдизи бўлади. Демак, изланган тенглама $a(x-(1+3i))(x-(1-3i))=0$ кўринишда бўлиб, бу ерда $a \in R$, $a \neq 0$. Қавсларни очиб, ўхшаш қўшилувчилар ихчамланса, $ax^2-2ax+10a=0$ квадрат тенглама ҳосил бўлади. Бу эса изланган тенгламадир.

Жавоб: $ax^2-2ax+10a=0$, ($a\in R$, $a\neq 0$).

7.1. Тенгламанинг барча комплекс ечимларини топинг.

а) $x^2-2x+2=0$; д) $x^2+2x+17=0$; и) $9x^2-12x+5=0$;
б) $x^2-4x+5=0$; е) $x^2-8x+41=0$; к) $16z^2-32z+17=0$;
в) $x^2+6x+13=0$; ж) $9x^2+6x+10=0$; л) $z^2+4z+7=0$;
г) $x^2+4x+13=0$; з) $4x^2+4x+5=0$; м) $z^2-6z+11=0$.

7.2. Квадрат учҳадни чизиқли кўпайтувчиларга ажратинг:

а) x^2+2x+5; в) $4z^2+8z+5$;
б) $x^2-3x+10$; г) $25z^2+50z+26$.

7.3. Тенгламани комплекс сонлар тўпламида ечинг:

а) $z^4+5z^2-36=0$; д) $x^4+3x^2-18=0$;
б) $x^4-8x^2-9=0$; е) $x^4+4x^2-32=0$;
в) $y^4-y^2-6=0$; ж) $z^4+z^2+1=0$;
г) $t^4+2t^2-15=0$; з) $z^6-2z^3+4=0$.

7.4. Илдизларидан бири $2-3i$ бўлган ҳақиқий коэффициентли квадрат тенглама тузинг.

7.5. Илдизлари $2-3i$, $2-i$ бўлган ҳақиқий коэффициентли тўртинчи даражали тенглама тузинг.

7.6. Илдизлари 2, $2-3i$, $2-i$ бўлган ҳақиқий коэффициентли бешинчи даражали тенглама тузинг.

7.7. $x=1$ сони $x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1$ кўпҳаднинг неча каррали илдизи эканини аниқланг.

7.8. Қуйидаги кўпҳадларни чизиқли ва квадрат кўпайтувчилар кўпайтмаси шаклида тасвирланг.

а) x^6+27; в) x^6+64;
б) x^4+16x^2; г) x^4+7x^2.

8-§. ЮҚОРИ ДАРАЖАЛИ ТЕНГЛАМАЛАР

Теорема: $\frac{p}{q}$ **қисқармас каср ($p\in Z$, $q\in N$) бўлсин.** $\frac{p}{q}$ **сон $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ *кўпҳаднинг илдизи* бўлиши учун p сон озод ҳад a_n нинг, q сони эса бош коэффициент a_0 нинг бўлувчиси бўлиши зарур.**

Натижа: $p\in Z$ сони $P_n(x)$ кўпҳаднинг илдизи бўлиши учун p сони озод ҳад a_n нинг бўлувчиси бўлиши зарур.

1 - мисол. $2x^3+x^2-4x-2=0$ тенгламанинг рационал илдизларини топинг.

Ечиш. Озод ҳаднинг барча бутун бўлувчилари: -2; -1; 1; 2. Бош коэффициентнинг барча натурал бўлувчилари: 1; 2.

Тенгламанинг рационал илдизларини қуйидаги сонлар орасидан излаймиз:

$$-2;\ -1;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 1;\ 2.$$

Бу сонларни берилган тенгламага бевосита қўйиб кўриш билан, уларнинг илдиз бўлиш ёки бўлмаслигини аниқлаймиз.

Текшириш кўрсатадики, $-\frac{1}{2}$ сони берилган тенгламанинг илдизи бўлади, қолган сонлар эса илдиз бўлмайди.

Шундай қилиб, берилган тенглама фақат битта рационал илдизга эга: $x=-\frac{1}{2}$.

Жавоб: $-\frac{1}{2}$.

2 - мисол. Тенгламанинг бутун илдизларини топинг: $2x^4-x^3+2x^2+3x-2=0$.

Ечиш. Озод ҳаднинг барча бутун бўлувчилари: -2; -1; 1; 2. Тенгламанинг барча бутун илдизларини қуйидаги сонлар орасидан излаймиз: -2; -1; 1; 2.

Бу сонларнинг ҳар бирини тенгламага қўйиб кўриб, улар орасидан фақат -1 сонгина тенгламанинг ечими эканини аниқлаймиз.

Демак, берилган тенглама фақат битта бутун ечимга эга: $x=-1$.

Жавоб: $x=-1$.

3 мисол. $x^3+3x^2-1=0$ тенгламанинг бутун илдизларини топинг.

Ечиш. Бутун илдизларни -1; 1 сонлар орасидан излаймиз. Бу сонларнинг иккаласи ҳам тенгламанинг илдизи эмаслигини кўриш қийин эмас.

Жавоб: тенглама бутун илдизга эга эмас.

4 - мисол. $2x^4-x^3+2x^2+3x-2=0$ $(x\in R)$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Олдинги мисоллардан фарқли ўлароқ, бу ерда тенгламанинг барча ҳақиқий илдизларини топиш талаб қилинаяпти.

Дастлаб рационал илдизларини излаймиз. Рационал илдизлар эса -2; -1; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 1; 2 сонлар орасида бўлади (агар улар мавжуд бўлса). Рационал илдизлар қуйидаги сонлар эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин: -1 ва $\frac{1}{2}$.

Шунинг учун тенгламанинг чап томонидаги кўпҳад $(x+1)(x-\frac{1}{2})=x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ га қолдиқсиз бўлинади. Бўлишни бажариб,

$$2x^4-x^3+2x^2+3x-2=\left(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)\cdot(2x^2-2x+4)$$

ни ҳосил қиламиз.

Тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\left(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)\cdot(2x^2-2x+4)=0.$$

$2x^2-2x+4=0$ тенглама янги ҳақиқий илдизларни бермайди.

Жавоб: $x_1=-1$; $x_2=\frac{1}{2}$.

8.1. Тенгламанинг рационал илдизларини топинг:

а) $3x^3-4x^2+5x-18=0$; д) $4x^4+8x^3-3x^2-7x+3=0$;
б) $x^3-4x^2-27x+90=0$; е) $x^4+x^3+x^2+3x+2=0$;
в) $x^4-x^3+x+2=0$; ж) $x^4-4x^3-13x^2+28x+12=0$;
г) $2x^3-5x^2+8x-3=0$; з) $3x^4+4x^2+5x-12=0$.

8.2 .Тенгламанинг бутун илдизларини топинг:

а) $x^4+2x^3+4x^2+3x-10=0$; б) $x^3+7x^2+14x+8=0$;
в) $x^4-x^3+2x^2-x+1=0$; г) $x^4+x^2+x+2=0$.

8.3. Тенгламани ечинг ($x\in R$):

а) $3x^3-5x^2+3x+5=0$; б) $4x^5+8x^4+5x^3+10x^2-3x-6=0$;
в) $3x^5-6x^4+4x^3-8x^2-3x+6=0$; г) $2x^5+4x^4-5x^3-10x^2-7x-14=0$;
д) $3x^5-6x^4-8x^3+16x^2-16x+32=0$; е) $2x^5+6x^4-7x^3-21x^2-4x-12=0$.

8.4. Тенгламанинг барча ҳақиқий илдизларини топинг:

а) $2x^4+3x^3-8x^2-9x+6=0$; б) $2x^4-5x^3-x^2+5x+2=0$;
в) $5x^4-3x^3-4x^2-3x+5=0$; г) $4x^4-3x^3-8x^2+3x+4=0$;
д) $3x^4-4x^3-7x^2+4x+4=0$; е) $2x^4-7x^3-5x^2+7x+3=0$.

8.5. Тенгламани ечинг ($x\in R$):

а) $8x^4+6x^3-13x^2-x+3=0$; б) $x^3+6x+4x^2+3=0$;
в) $2x^4-x^3-9x^2+13x-5=0$; г)* $(x-1)^3+(2x+3)^3=27x^3+8$;
д) $x^3-(2a+1)x^2+(a^2+a)x-(a^2-a)=0$;
е) $x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$.

8.6. $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$ (бу ерда $a+b=c+d$) кўринищдаги тенгламани ечинг:

а) $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)=144$; б) $(x-1)(x+2)(x-3)(x-6)=6$;
в) $(x-3)(x+2)(x-6)(x-1)=-56$; г) $(x+2)(x-3)(x-4)(x+3)=9$;
д) $(x+3)(x-2)(x-6)(x+7)=-180$;
е) $(x+6)(x+2)(x-7)(x-3)=-180$.

8.7. Қайтма тенгламани ечинг:

а) $x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$; б) $x^4-3x^3+x^2+3x+1=0$;
в) $x^4-4x^3+x^2-4x+1=0$; г) $2x^4-4x^3+2x^2-4x+2=0$;
д) $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$; е) $x^4+2x^3+x^2-2x+1=0$.

8.8. Қайтма тенгламанинг барча ҳақиқий илдизларини топинг:

а) $x^4+5x^3+2x^2+5x+1=0$; б) $4x^4+2x^3+3x^2+x+1=0$;
в) $2x^4+3x^3-13x^2-6x+8=0$; г) $3x^4-2x^3+x^2-6x+27=0$.

8.9. Тенгламани ечинг:

а) $8x^3+36x^2+54x=98$.

Ечиш. $8x^3+36x^2+54x=(2x+3)^3-27$ бўлгани учун, берилган тенглама $(2x+3)^3-27=98$ тенглмага тенг кучли. Бундан: $(2x+3)^3=125$; $2x+5=5$. Бундан $x=1$ эканини топамиз.
Жавоб: 1.

б) $8x^3-36x^2+54x=28$;
в) $16x^4+32x^3+12x^2+8x-80=0$;
г) $x^4-8x^3+24x^2-8x=65$;
д) $(x^2+27)^2-5(x^2+27)(x^2+3)+6(x^2+3)^2=0$.
е) $(x^2-1)^2+5(x^4-1)-6(x^2+1)^2=0$;
ж) $(x^2-3)^2-7(x^4-9)+6(x^2+3)^2=0$.
з) $(x-2)^2+(x-2)(x+1)+(x+1)^2=0$.

Намуна сифатида д) тенгламани ечиб кўрсатамиз.

Ечиш. Бу тенгламанинг ҳадларини $(x^2+3)^2$ га бўлсак, у ушбу кўринишни олади: $\frac{(x^2+27)^2}{(x^2+3)^2}-5\cdot\frac{x^2+27}{x^2+3}+6=0$, $y=\frac{x^2+27}{x^2+3}$ деб белгиласак, $y^2-5y+6=0$ тенглама ҳосил бўлади.

Бундан $y_1=2$, $y_2=3$ ларга эгамиз.
$\frac{x^2+27}{x^2+3}=2$, $\frac{x^2+27}{x^2+3}=3$ тенгламалар мос равищда $\pm\sqrt{21}$ ва ±3 илдизларга эга.

8.10. $f[f(x)]=x$ кўринишидаги тенгламани ечинг:

а) $(x^2-4x+6)^2-4(x^2-4x+6)+6=x$ (*).

Ечиш. $x^2-4x+6=x$ тенгламани ечамиз:

$$x^2-5x+6=0; \quad x_1=2, \quad x_2=3;$$

$(x^2-4x+6)^2-4(x^2-4x+6)-x=0$ кўпҳад $(x-2)(x-3)$ га қолдиқсиз бўлинади. Бўлишни бажариб, x^2-3x+3 бўлинмани топамиз. (*) ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин: $(x^2-3x+3)(x-2)(x-3)=0$

Бу тенглама $x=2$, $x=3$ лардан бошқа ҳақиқий илдизларга эга эмас. (*) тенгламанинг ҳамма илдизлари: 2; 3.

б) $(x^2+2x-5)^2+2(x^2+2x-5)-5=x$;
в) $(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x$;
г) $(x^2-8x+18)^2-8(x^2-8x+18)+18=x$;
д) $(x^2-9x+16)^2-9(x^2-9x+16)+16=x$;
е) $(x^2-3x+3)^2-3(x^2-3x+3)+3=x$.

9-§. ДЕТЕРМИНАНТЛАР

1 - м и с о л. Тенгламани ечинг: $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 1 & x^2 \end{vmatrix} = 5$.

Е ч и ш. $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 1 & x^2 \end{vmatrix} = x \cdot x^2 - 1 \quad 3 = x^3 - 3$ бўлгани учун тенглама $x^3-3=5$ ёки $x^3=8$ кўринишини олади.

Ж а в о б: $x=2$.

2 - м и с о л. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ ни ҳисобланг.

Е ч и ш. I у с у л:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9+2\cdot6\cdot7+4\cdot8\cdot3-7\cdot5\cdot3-4\cdot2\cdot9-8\cdot6\cdot1= =45+84+96-105-72-48=0.$$

II у с у л:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} =(-1)^{1+1}\cdot1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\cdot3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$=1\cdot(45-48)-2(36-42)+3(32-35)=-3+12-9=0.$$

9.1. Детерминантларни ҳисобланг:

а) $\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 13 & -6 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}$ ж) $\begin{vmatrix} 1-a & -a \\ a & 1+a \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} x & 1 \\ x^2 & x^3 \end{vmatrix}$

9.2. a нинг қандай қийматларида детерминантнинг сатрлари пропорционал бўлади:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ a & 3a \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 6 & a \end{vmatrix}$?

9.3. Тенгламани ечинг:

а) $\begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix}=0$; б) $\begin{vmatrix} a-1 & 3 \\ a^2 & 3a \end{vmatrix}=0$; в) $\begin{vmatrix} a & a-1 \\ a+2 & a \end{vmatrix}=0$.

9.4. Детерминантларни ҳисобланг:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 0 & -a & -1 \\ a & 1 & -a \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$.

9.5. Тенгламани ечинг:

а) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} =0$;

б) $\begin{vmatrix} x^2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ x^4 & x & x \end{vmatrix} =0$.

9.6. Ҳисобланг:

а) $2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$, бунда $x=3,1(73)$;

б) $2,(7) \cdot \begin{vmatrix} x & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} +3,(13)$, бунда $x=2,(71)$.

9.7. Детерминантларни ҳисобланг:

а) $\begin{vmatrix} 5 & 20 & 15 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 10 & 12 & 8 \end{vmatrix}$

г) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 12 & 8 \end{vmatrix}$ д) $\begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 10 & 4 & 8 \end{vmatrix}$ е) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 10 & 12 & 4 \end{vmatrix}$

9.8. Тенгламани ечинг:

а) $2 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x^2 & x & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$; б) $2 \cdot \begin{vmatrix} x^2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 16$;

в) $\dfrac{\begin{vmatrix} x^2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} - \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{4x-6} = -\dfrac{67}{4}$; г) $\dfrac{3}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}} - x = 1.$

10-§. ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ

$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ система икки ўзгарувчили чизиқли тенгламалар системаси дейилади. Бу ерда a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 лар ҳақиқий сонлар бўлиб, уларнинг ҳаммаси бир вақтда нолга тенг бўлиши ҳам мумкин.

Ягона ечимга эга бўлган система *аниқ система* деб, чексиз кўп ечимга эга бўлган система эса *аниқмас система* деб аталади.

Ечимга эга бўлмаган система *биргаликда бўлмаган система* дейилади.

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ни системанинг *асосий детерминанти* деб, қуйидаги детерминантларни эса системанинг *ёрдамчи детерминантлари* деб атаймиз:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}; \ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Т е о р е м а.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\Delta=0} \arrow[r, "\text{ҳа}"] \arrow[d, "\text{йўқ}"'] & \boxed{\Delta_x=\Delta_y=0} \arrow[r, "\text{ҳа}"] \arrow[d, "\text{йўқ}"'] & \boxed{a_1=b_1=a_2=b_2=0} \arrow[r, "\text{ҳа}"] \arrow[d, "\text{йўқ}"'] & \boxed{c_1=c_2=0} \arrow[r, "\text{ҳа}"] \arrow[d, "\text{йўқ}"'] & \text{система аниқмас система} \\
\text{система аниқ} & \text{система биргаликдамас} & \text{система аниқмас} & \text{система аниқмас} &
\end{tikzcd}$$

$x = \dfrac{\Delta x}{\Delta}$ $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}$

М и с о л. $\begin{cases} 2x + ay = a + 2, \\ (a+1)x + 2ay = 2a + 4 \end{cases}$ система a нинг қандай қийматларида чексиз кўп ечимга эга бўлади?

Е ч и ш. Теоремадан кўринадики, система қуйидаги ҳоллардагина аниқмас система бўла олади:

1) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ ва ўзгарувчилар олдидаги коэффициентлардан камида биттаси нолдан фарқли;

2) системадаги 6 та коэффициентнинг ҳаммаси нолга тенг.

Бизнинг система учун 2-ҳол ўринли эмас. Шу сабабли, 1-ҳолни қараш етарлидир.

Берилган система аниқмас система бўлиши учун a параметр қуйидаги системанинг ечими бўлиши керак:

$$\begin{cases} \Delta=\begin{vmatrix} 2 & a \\ a+1 & 2a \end{vmatrix}=0, \\ \Delta_x=\begin{vmatrix} a+2 & a \\ 2a+4 & 2a \end{vmatrix}=0, \\ \Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & a+2 \\ a+1 & 2a+4 \end{vmatrix}=0. \end{cases}$$

Бу система ягона ечимга эга: a=3.
Жавоб: a=3.

10.1. Системани ўрнига қўйиш усули билан ечинг:

а) $\begin{cases} x-y=5, \\ 2x+3y=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y=1, \\ 3x+4y=5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y=5, \\ 2x+2y=10; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \frac{1}{2}x-y=5, \\ x-9y=31; \end{cases}$ д) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=6, \\ \frac{x}{5}+\frac{y}{4}=3\frac{9}{20}; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \frac{3}{4}x-\frac{5}{7}y=\frac{23}{168}, \\ 2x+6y=\frac{21}{169}; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 0{,}3x-y=\frac{4}{7}, \\ 30x-10y=\frac{40}{7}; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 0{,}3-4y=\frac{1}{3}, \\ 0{,}7x-7y=43. \end{cases}$

10.2. Системани алгебраик қўшиш усулида ечинг:

а) $\begin{cases} x-y=-1, \\ 4x+y=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y=2, \\ -2x-y=3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x+3y=7, \\ -4x-6y=-14; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x+3y=2, \\ \frac{1}{2}x-3y=-\frac{11}{8}; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x+3y=\frac{281}{143}, \\ 3x+4y=\frac{405}{143}; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3{,}1x+\frac{1}{13}y=1, \\ 3{,}1x+\frac{1}{11}y=3. \end{cases}$

10.3. Системанинг асосий детерминантини ҳисобланг:

а) $\begin{cases} 3x+4y=7, \\ 2x-5y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1{,}2x-4y=3, \\ 3x-5y=7; \end{cases}$; в) $\begin{cases} ax-y=1, \\ 5x+2y=2; \end{cases}$;

г) $\begin{cases} ax-by=1, \\ 13x-4y=2. \end{cases}$

10.4. Системанинг ёрдамчи детерминантларини ҳисобланг:

а) $\begin{cases} 2x-3y=1, \\ x-y-7=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-1{,}7y=2, \\ 4x-4{,}3y=1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x-5y=2, \\ 4x-4{,}3y=5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 4x-3y=5, \\ 6x-7y=0. \end{cases}$

10.5. Системани Крамер формулаларидан фойдаланиб ечинг:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = -4, \\ 3x + 8y = 1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ 4x - 8y = 5; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x - y = 1, \\ 3x - 3y = -3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + 11y = 15, \\ 10x - 11y = 9; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x - 0{,}5y = 1; \end{cases}$ к) $\begin{cases} 3x - 5y = 0, \\ -15x + 25y = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - 3y = -3, \\ x + 3y = 21; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} -x + 3y = -2, \\ 2x - 6y = -1; \end{cases}$ л) $\begin{cases} 2x - 3y = -1, \\ 4x - 6y = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x - 3y = 16, \\ x + 2y = 1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \frac{3}{4}x - \frac{5}{7}x = \frac{23}{168}, \\ 2x + 6y = \frac{31}{165}; \end{cases}$ м) $\begin{cases} 7x - 2y = 16, \\ 3{,}5x - y = 8. \end{cases}$

10.6. $\begin{cases} 3x - 5y = -7, \\ 4x + 7y = 18 \end{cases}$ система берилган:

а) Системанинг ҳар бир тенгламаси нечта ечимга эга?

б) Система нечта ечимга эга?

10.7. Системани ечинг:

а) $\begin{cases} 2x + ay = -6, \\ ax + 8y = 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} ax - (a-1)y = 0{,}5, \\ (a-1)x - ay = a; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x - ay = 6 - a, \\ -ax + 3y = 3 - 2a. \end{cases}$

10.8. $\begin{cases} a^2x - ay = a - 1, \\ bx + (3-2b)y = 3+a \end{cases}$ система (1;1) дан иборат ягона ечимга эга. a ва b ларни топинг.

10.9. a ва b ларнинг қуйидаги система чексиз кўп ечимга эга бўладиган барча қийматларини топинг:

$$\begin{cases} a^2x - by = a^2 - b, \\ bx - b^2y = 2 + 4b. \end{cases}$$

10.10. a нинг қандай қийматларида $\begin{cases} ax - 4y = a + 1, \\ 2x + (a+6)y = a + 3 \end{cases}$ система ечимга эга бўлмайди?

10.11. a нинг қандай қийматларида $\begin{cases} 2x - ay = a + 2, \\ (a+1)y + 2ay = 2a + 4 \end{cases}$ система чексиз кўп ечимга эга бўлади?

10.12. Системани Гаусс усулида ечинг:

а) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + 3y - 2z = 7, \\ 3x + 2y + 5z = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y - z = -1, \\ 3x - 2y + 4z = 9, \\ 2x + 3y + 2z = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-y+z=-1, \\ 2x+3y+4z=5, \\ 3x-2y-2z=-7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-y-z=-1, \\ 4x+5y-3z=6, \\ 2x+3y-2z=3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} -x+y+z=-3, \\ 2x+2y-3z=3, \\ 3x+4y+5z=-6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} -x-y+z=3, \\ 5x+2y+3z=-4, \\ 3x+4y-2z=-9. \end{cases}$

10.13. Системани Крамер формулалари ёрдамида ечинг:

а) $\begin{cases} -x_1+2x_2+3x_3=0, \\ x_1-4x_2-13x_3=0, \\ -3x_1+5x_2+4x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-4y+z=1, \\ x-2y+4z=3, \\ 3x-y+5z=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+2y+3z=1, \\ 2x+y-z=3, \\ 3x+3y+2z=10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ 2x+4y+6z=3, \\ 3x+y-z=1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x-3y+z-2=0, \\ x+5y-4z+5=0, \\ 4x+y-3z=-4; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 7x+3y+2z=1, \\ 3x+y+2z=2, \\ 10x+12y+8z=4. \end{cases}$

10.14. Системани ечинг:

а) $\begin{cases} 5x+2y+3z=-7, \\ 5x+2y+3z=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x-3y=7, \\ -2x+9y=4, \\ 2x+4y=-2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x+5z=6, \\ y-6z=-2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+2y=3, \\ 3y-2z=-1. \end{cases}$

11-§. ЧИЗИҚЛИ БЎЛМАГАН ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ

1 - мисол. $\begin{cases} x-y=2, \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш. Системанинг таркибида ўзгарувчиларнинг бирини иккинчиси орқали чизиқли ифодалаб олиш имконини берадиган тенглама мавжуд. Бундай ҳолда системани ўрнига қўйиш усули билан ечиш мумкин. $x-y=2$ дан $x=y+2$ ни топиб, иккинчи тенгламада $x=y+2$ ўрнига қўйишни бажарамиз: $(y+2)^2+y^2=10$.

Бу тенглама $y_1=-3$, $y_2=1$ илдизларга эга. У ҳолда $x_1=y_1+2=-3+2=-1$; $x_2=y_2+2=1+2=3$.

Жавоб: $(-1;-3)$ ва $(3;1)$.

2 - мисол. $\begin{cases} x-y=1, \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш. Бу системани ҳам ўрнига қўйиш усули билан ечиш қулай. Аммо ўрнига қўйишни бошқача йўл билан амалга оширамиз: $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ бўлгани учун системани $\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=3 \end{cases}$ кўринишда ёзиб оламиз. Бу эса чизиқли тенгламалар системасидир. Уни ечиб, (2;1) ечимни топамиз.

Ж а в о б: (2;1).

3 - м и с о л. $\begin{cases} x+y=15, \\ xy=56 \end{cases}$ системани ечинг.

Е ч и ш. Бу системага ўрнига қўйиш усулини қўлласак, квадрат тенгламани ечишдан иборат оралиқ масалага келиб қоламиз. Бу квадрат тенгламани берилган системага ўрнига қўйиш усулини қўлламай ҳосил қилиш мумкин. Бунинг учун Виет теоремасига тескари теоремадан фойдаланиш зарур.

x, y лар учун $x+y=15$, $xy=56$ бўлса, улар $t^2-15t+56=0$ квадрат тенгламанинг илдизлари бўлади. $t^2-15t+56=0$ тенгламани ечиб, $t_1=7$, $t_2=8$ ларни топамиз. Демак, $x_1=7$, $y_1=8$ ва $x_2=8$, $y_2=7$.

Ж а в о б: (7;8) ва (8;7).

3-мисолда қараб чиқилган усул «ёрдамчи квадрат тенглама тузиш усули» деб аталиши мумкин.

4 - м и с о л. $\begin{cases} x-y=1, \\ xy=12 \end{cases}$ системани ечинг.

Е ч и ш. $z=-y$ деб олиб, системани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} x+z=1, \\ xz=-12 \end{cases}$$

Ёрдамчи квадрат тенгламани тузамиз:

$$t^2-t-12=0.$$

Бундан $t_1=-3$, $t_2=4$ ларни топамиз. У ҳолда $x_1=-3$, $z_1=4$ ва $x_2=4$, $z_2=-3$ бўлади. $z=-y$ эканини эътиборга олиб, берилган системанинг ечимларини аниқлаймиз: $x_1=-3$; $y_1=-4$; $x_2=4$; $y_2=3$.

Ж а в о б: (−3;−4); (4;3).

5 - м и с о л. $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3 \end{cases}$ системани ечинг.

Е ч и ш. I у с у л. Иккига кўпайтирилган иккинчи тенгламани биринчи тенгламага ҳадма-ҳад қўшиб, $(x+y)^2=16$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бундан $x+y=-4$ ёки $x+y=4$ эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун берилган система иккита системага ажралади:

$$\begin{cases} x+y=-4, \\ xy=3 \end{cases} \quad (1); \qquad \begin{cases} x+y=4, \\ xy=3 \end{cases} \quad (2).$$

(1) системани ечиб, (-1;-3), (-3;-1) ечимларни; (2) системани ечиб, (1;3), (3;1) ечимларни топамиз.

Шундай қилиб, берилган система (-1;-3), (-3;-1), (1;3) ва (3;1) лардан иборат ечимларга эга.

II усул. Берилган система ёрдамида ўзгарувчилардан бирининг иккинчисига нисбатини топишга ҳаракат қиламиз. Тенгламаларнинг чап томонларида бир хил даражали ҳадлар тургани сабабли бир жинсли тенглама ҳосил қилиш мумкин. Бунинг учун учга кўпайтирилган биринчи тенгламадан 10 га кўпайтирилган иккинчи тенгламани айирамиз: $3x^2-10xy+3y^2=0$.

Системадан кўриниб турибдики, $x\neq0$, $y\neq0$. Шу сабабли, ҳосил қилинган бир жинсли тенгламадан $\frac{x}{y}$ ни топиш мумкин:

$$3\left(\frac{x}{y}\right)^2-10\cdot\frac{x}{y}+3=0;$$

$$\frac{x}{y}=\frac{1}{3}\text{ ёки }\frac{x}{y}=3.$$

У ҳолда берилган система қуйидаги системаларга ажралади:

$$\begin{cases}3x=y,\\ xy=3\end{cases}\quad(3);\qquad\qquad \begin{cases}x=3y,\\ xy=3\end{cases}\quad(4).$$

Бу системалар ҳам биринчи усулда топилган ечимларга олиб келади.

6 - м и с о л. $\begin{cases}x(x+y)=12,\\ y(x+y)=4\end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш. 5-мисолдаги ечишнинг иккинчи усулида ўзгарувчилардан бирининг иккинчисига нисбатини бир жинсли тенглама тузиб топдик. Бу мисолда ҳам шундай қилиш мумкин. Бироқ,бу система учун ўзгарувчилар нисбатини бошқа усулда топиш қулай.

$x+y\neq0$, $x\neq0$, $y\neq0$ экани равшан. Шунинг учун тенгламаларни ҳадма-ҳад бўлиш мумкин:

$$\frac{x(x+y)}{y(x+y)}=\frac{12}{4}\text{ ёки }\frac{x}{y}=3.$$

Натижада $\begin{cases}y(x+y)=4,\\ x=3y\end{cases}$ системага эга бўламиз. Бу система ва демак, берилган система ҳам $(-3;-1)$, $(3;1)$ ечимларга эга.

Ж а в о б: $(-3;-1)$ ва $(3;1)$.

7 - м и с о л. $\begin{cases} x+y+xy=7, \\ x^2+y^2+xy=13 \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш. Системада x ни y билан, y ни эса x билан алмаштирсак, яна шу системанинг ўзи ҳосил бўлади. Бундай системалар *симметрик система* деб аталади. $x+y=u$, $xy=v$ деб олиб, $\begin{cases} u+v=7, \\ u^2-v=13 \end{cases}$ системани ҳосил қиламиз.

Бундан $u_1=4$, $v_1=3$ ва $u_2=-5$, $v_2=12$.

Эски ўзгарувчиларга қайтсак,

$\begin{cases} x+y=4, \\ xy=3 \end{cases}$ ва $\begin{cases} x+y=-5, \\ xy=12 \end{cases}$ системалар ҳосил бўлади.

Иккинчи система ечимга эга эмас, биринчи система эса (1;3), (3;1) ечимларга эга.

Ж а в о б: (1;3), (3;1).

11.1. Системани ечинг:

а) $\begin{cases} x-y=1, \\ x^2+y^2=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-3xy-2y^2=2, \\ x+2y=1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y-2x=2, \\ 5x^2-y=1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x-2y+1=0, \\ 5xy+y^2=16; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x+y=4, \\ y+xy=6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x^2-xy=33, \\ 4x-y=17. \end{cases}$

11.2. Системани ечинг:

а) $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=3, \\ xy+4=0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y=7, \\ xy=12; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x-y=5, \\ xy=-6; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x-y=9, \\ xy=-20; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x-y=10, \\ xy=-21. \end{cases}$

11.3. Системани ечинг:

а) $\begin{cases} \frac{x}{25}+\frac{y}{9}=1, \\ x^2+y^2=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x+7y=56, \\ x^2+y^2-4y=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y=1, \\ x^2+xy+y=1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-2y=-3, \\ -2y^2+xy+3y=0. \end{cases}$

11.4. Системани ечинг:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=20, \\ xy=8; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y^2-xy=12, \\ x^2-xy=28; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y^2=68, \\ xy=16; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x^2+y^2=25-2xy, \\ y(x+y)=10; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x(x+y)=9, \\ y(x+y)=16; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 5(x+y)+2xy=-19, \\ 15xy+5(x+y)=-175; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2+xy=15, \\ y^2+xy=10; \end{cases}$ и) $\begin{cases} 5(x+y)+2xy=-19, \\ 3xy+x+y=-35; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 - xy = 28, \\ y^2 - xy = -12; \end{cases}$ к) $\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 2xy = 7, \\ (2x - y)y = y. \end{cases}$

11.5. Системани ечинг:

а) $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 + xy = 7; \end{cases}$ д) $\begin{cases} xy + 3y^2 - x + 4y - 7 = 0, \\ 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^2 - xy + 3x^2\ 17, \\ y^2 - x^2 = 16; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2xy + y^2 - 4x - 3y + 2 = 0, \\ xy + 3y^2 - 2x - 14y + 16 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ y^2 - 2xy + 15 = 0; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} 3x^2 + xy - 2x + y - 5 = 0, \\ 2x^2 - xy - 3x - y - 5 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2y^2 + xy - x^2 = 0, \\ x^2 - xy - y^2 + 3x + 7y + 3 = 0; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy = 12, \\ 2(x + y)^2 - y^2 = 14. \end{cases}$

11.6. Системани ечинг:

а) $\begin{cases} xy - x + y = 1, \\ x^2y - xy^2 = 30; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy + x - y = 3, \\ x^2y - xy^2 = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + xy + x = 10, \\ y^2 + xy + y = 20; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 37, \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 26. \end{cases}$

11.7. Системани ечинг:

а) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 55, \\ x + y = 5; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 82, \\ xy = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^3 - y^3 = 7; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x^3y^3 = -8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ xy(x + y) = -2; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} (x^2 + y^2)xy = 78, \\ x^4 + y^4 = 97; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 18, \\ x + y = 12; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ x - y = 5. \end{cases}$

11.8. Системани ечинг:

а) $\begin{cases} x + y + z = 13, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 91, \\ y^2 = xz; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{xy}{x + y} = 1, \\ \dfrac{xz}{x + z} = 2, \\ \dfrac{yz}{y + z} = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^4 + y^4 + z^4 = 1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} xy = 2, \\ yz = 3, \\ zx = 6. \end{cases}$

12-§. МАТНЛИ МАСАЛАЛАР

1 м а с а л а. Икки ишчи бирга ишлаб смена давомида 72 та детал тайёрлади. Ишлаб чиқариш унумдорлигини биринчи ишчи 15% га, иккинчи ишчи эса 25% га оширгач, улар смена давомида биргаликда 86 та детал тайёрлай бошлашди. Меҳнат унумдорлиги ошгач, ҳар бир ишчи смена давомида нечтадан детал тайёрлаган?

Ечиш. Меҳнат унумдорлигини оширгунга қадар биринчи ишчи смена мобайнида x та детал, иккинчиси эса y та детал тайёрлаган бўлсин. У ҳолда меҳнат унумдорлиги ошгандан сўнг, биринчи ишчи $x+0,15x$ та детал, иккинчи ишчи эса $y+0,25y$ та детал тайёрлай бошлаган.

Қуйидаги системага эга бўламиз: $\begin{cases} x+y=72, \\ 1,15x+1,25y=86. \end{cases}$
Бундан $x=40$, $y=32$ ларни топамиз. Меҳнат унумдорлиги ошгач биринчи ишчи смена мобайнида $1,15x=1,15\cdot 40=46$ та, иккинчи ишчи эса $1,25y=1,25\cdot 32=40$ та детал тайёрлаган.

Жавоб: 46 та ва 40 та.

2 — м а с а л а. Икки соннинг йиғиндиси 60 га, нисбати эса 4 га тенг. Шу сонларни топинг.

Ечиш. x ва y изланган сонлар бўлиб, $x>y$ бўлсин. Қуйидаги системага эгамиз:
$\begin{cases} x+y=60, \\ x:y=4. \end{cases}$ Бу системадан $x=48$, $y=12$ ни топамиз.

Жавоб: 48 ва 12.

3-м а с а л а. Икки ишчининг иккинчиси биринчисидан $1\frac{1}{2}$ кун кейин ишга тушса, улар биргаликда бир ишни 7 кунда тамомлай оладилар. Агар бу ишни ҳар қайси ишчи ёлғиз ўзи бажарса, у ҳолда биринчи ишчи иккинчи ишчига қараганда 3 кун ортиқ ишлаши керак бўлади. Ҳар қайси ишчининг ёлғиз ўзи бу ишни неча кунда тамомлай олади?.

Ечиш. Биринчи ишчи ёлғиз ўзи ишлаб, ишни x кунда, иккинчи ишчи эса ёлғиз ўзи ишлаб, y кунда бажарсин. У ҳолда биринчи ишчи бир кунда ишнинг $\frac{1}{x}$ қисмини, иккинчи ишчи бир кунда ишнинг $\frac{1}{y}$ қисмини бажаради.

Биринчи ишчи $1\frac{1}{2}$ кун ишлаб, ишнинг $1\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{3}{2x}$

қисмини бажаргач, иккинчи ишчи ишлашни бошлади. Улар биргаликда 7 кун ишлаган. Шу 7 кунда ишнинг $7\frac{1}{x}+7\frac{1}{y}=\frac{7x+7y}{xy}$ қисми бажарилган. Шунга кўра $\frac{3}{2x}+\frac{7x+7y}{xy}=1$ тенгламага эга бўламиз. Ёлғиз ўзи ишлаган биринчи ишчи иккинчисига қараганда 3 кун кўп ишлаб, ишни тамомлайди. Демак, $x-3=y$.

$\begin{cases} \frac{3}{2x}+\frac{7x+7y}{xy}=1, \\ x-3=y \end{cases}$ системани ҳосил қиламиз. Бу системани ечсак, $x=17$, $y=14$ экани топилади.

Ж а в о б: Биринчи ишчи 17 кунда, иккинчи ишчи 14 кунда.

4 — м а с а л а. Олтин ва кумушдан ҳосил қилинган икки хил қотишмаларнинг биринчисида олтин ва кумуш 2:3 нисбатда, иккинчисида эса 3:7 нисбатда эканлиги маълум. Олтин ва кумуш 5:11 нисбатда бўладиган янги қотишма ҳосил қилиш учун кўрсатилган қотишмаларни қандай нисбатда олиш керак?

Е ч и ш. Биринчи қотишманинг $\frac{2}{2+3}=\frac{2}{5}$ қисми олтин ва $\frac{2}{2+3}=\frac{2}{5}$ қисми кумушдан иборат. Иккинчи қотишманинг $\frac{3}{3+7}=\frac{3}{10}$ қисми олтин ва $\frac{3}{3+7}=\frac{3}{10}$ қисми эса кумушдир.

Янги қотишма ҳосил қилиш учун олинган биринчи қотишманинг миқдорини x билан ва иккинчи қотишманинг миқдорини y билан белгилайлик (x ва y лар оғирликни ифодалайди).

x миқдордаги биринчи қотишмадаги олтиннинг ва кумушнинг миқдори мос равишда $\frac{2}{5}x$ ва $\frac{3}{5}x$ га тенг. y миқдордаги иккинчи қотишмадаги олтиннинг миқдори $\frac{3}{10}y$ га, кумушнинг миқдори эса, $\frac{7}{10}y$ га тенг. Янги қотишмага $\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}y$ миқдорда олтин ва $\frac{3}{5}x+\frac{7}{10}y$ миқдорда кумуш киради. Шартга кўра, $\frac{\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}y}{\frac{3}{5}x+\frac{7}{10}y}=\frac{5}{11}$.

Бу тенглик ёрдамида $\frac{x}{y}$ нисбатни топамиз:

$$\frac{4x+3y}{6x+7y}=\frac{5}{11}\Rightarrow 44x+33y\Rightarrow 30x+35y\Rightarrow 14x=2y\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{1}{7}.$$

Ж а в о б. Қотишмаларни 1:7 нисбатда олиш керак.

5—м а с а л а. Маҳсулот дастлаб 20 % га арзонлаштирилди. Янги нарх яна 10 % камайтирилгач, ҳосил бўлган кейинги нарх яна 5% га камайтирилди. Маҳсулотнинг дастлабки нархи неча фоиз камайтирилди?

Ечиш. Маҳсулотнинг дастлабки нархи x (сўм) бўлсин. Бу нарх 20% камайтирилгач, маҳсулотнинг нархи $x-0,20x=0,80x$ (сўм) бўлади. Бу нарх 10 % камайтирилса, $0,80x-0,10\cdot 0,80x=0,72x$ сўмдан иборат бўлган янги нарх пайдо бўлади. Бу нарх 5 % камайтирилса, маҳсулотнинг охирги нархи $0,72x-0,05\cdot 0,72x=0,684x$ сўм эканлиги келиб чиқади.

Дастлабки нарх x сўм, энг охирги нарх $0,684x$ сўм бўлди. Маҳсулот $x-0,684x=0,316x$ сўмга арзонлаштирилди. $0,316x$ сўм x сўмнинг неча фоизини ташкил этишини топамиз.

Пропорция тузайлик: $\frac{x}{0,316x}=\frac{100}{p}$. Бундан $p=31,6$ экани келиб чиқади.

Жавоб. 31,6 %.

6—м а с а л а. Икки хонали номаълум сон рақамларининг йиғиндиси 12 га тенг. Шу икки хонали номаълум сонга 36 сони қўшилса, номаълум соннинг рақамларини тескари тартибда ёзишдан ҳосил бўладиган сон келиб чиқади. Номаълум сонни топинг.

Ечиш. Икки хонали номаълум соннинг рақамлари x, y бўлсин, яъни $\overline{xy}=10x+y$ изланган сон бўлсин. Қуйидагиларга эгамиз:

$\begin{cases} x+y=12, \\ \overline{xy}+36=\overline{yx} \end{cases}$ ёки $\begin{cases} x+y=12, \\ 10x+y+36=10y+x. \end{cases}$ Бу системадан $x=4$, $y=8$ экани келиб чиқади Демак, изланган сон 48 экан.

Жавоб: 48.

7—м а с а л а. Юк поезди А шаҳардан В шаҳарга қараб жўнади (16-расм). Орадан 3 соат ўтгач, А шаҳардан В шаҳарга қараб, йўловчи поезди йўлга чиқди ва орадан 15 соат ўтгач юк поездидан 300 км ўзиб кетди. Агар йўловчи поездининг тезлиги юк поездининг тезлигидан 30 км/соат ортиқ бўлса, юк поездининг тезлигини топинг.

Ечиш. Юк поездининг тезлиги x км/соат бўлсин. У ҳолда йўловчи поездининг тезлиги $x+30$ км/соат бўлади. Йўловчи поезди 15 соат юриб, $15(x+30)$ км масофани босиб ўтади. Юк поезди 18 соатда $18x$ км масофани босиб ўтган. Шунга кўра $18x+300=15(x+30)$

16-расм.

тенгламага эга бўламиз. Уни ечиб, $x=50$ эканини аниқлаймиз.

Жавоб. 50 км/соат.

Қуйидаги масалаларни квадрат тенглама тузиб ечинг:

12.1. Тўғри тўртбурчакнинг баландлиги асосининг 75% ига тенг. Агар шу тўғри тўртбурчакнинг юзи 48 $м^2$ бўлса, унинг периметрини топинг.

12.2. 15 т сабзавотни ташиш учун маълум миқдорда юк ортадиган бир неча машина сўралган эди. Гаражда тайёр турган машиналар бўлмагани учун, гараж сўралгандан битта ортиқ, лекин 0,5 т кам юк ортадиган машиналар юборди. Юборилган машиналарнинг ҳар бирига неча тонна сабзавот ортилган?

12.3. Жамоа хўжалиги 200 га ерга маълум муддатда чигит экиб бўлиши керак эди, аммо у ҳар куни режадагидан 5 га ортиқ экиб, ишни муддатидан 2 кун олдин тугатди. Чигит экиш неча кунда тугатилган?

12.4. Томоша залида 320 та ўрин бор эди. Ҳар бир қатордаги ўринлар сони 4 та орттирилиб, яна бир қатор қўшилгандан сўнг 420 та жой бўлди. Томоша залидаги жойлар энди неча қатор бўлди?

12.5. Кема оқимга қарши 48 км ва оқим бўйича ҳам шунча йўл босди, ҳамма йўлга 5 соат вақт сарф қилди. Дарё оқимининг тезлиги 4 км/соат бўлса, кеманинг турғун сувдаги тезлигини топинг.

12.6. Икки пристан орасидаги масофа дарё йўли билан 80 км. Кема шу пристанларнинг биридан иккинчисига бориб келиш учун 8 соат 20 минут вақт сарф қилади. Дарё оқимининг тезлиги 4 км/соат бўлса, кеманинг турғун сувдаги тезлигини топинг.

12.7. Қайиқ дарё оқимига қарши 22,5 км, оқим бўйича эса 28,5 км юриб, бутун йўлга 8 соат вақт сарфлади. Оқимнинг тезлиги 2,5 км/соат. Қайиқнинг турғун сувдаги тезлигини топинг.

12.8. Дарё ёқасидаги қишлоқдан сол оқизилди. Орадан 5 соат 20 минут ўтгач, ўша қишлоқдан моторли қайиқ жўнатилди. Моторли қайиқ 20 км йўл босиб, солга етиб олди. Агар моторли қайиқнинг тезлиги солнинг тезлигидан 12 км/соат ортиқ бўлса, солнинг тезлигини топинг.

12.9. Сув иккита қувурдан келганда сув ҳайдаш қозони 2 соат 55 минутда тўлади. Биринчи қувурнинг ёлғиз ўзи сув ҳайдаш қозонини иккинчисига қараганда 2 соат олдин тўлдира олади. Ҳар қайси қувурнинг ёлғиз ўзи сув ҳайдаш қозонини қанча вақтда тўлдиради?

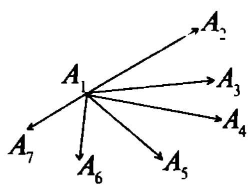
12.10. Икки ишчи айни бир ишни биргалашиб ишласа, 12 кунда тамом қилади. Агар олдин биттаси ишлаб, ишнинг ярмини тамом қилгандан кейин унинг ўрнига иккинчиси ишласа, иш 25 кунда тамом бўлади. Шу ишни ҳар қайси ишчи ёлғиз ўзи ишласа, неча кунда тамом қилади?

12.11. Қувватлари ҳар хил иккита трактор 4 кун бирга ишлаб жамоа хўжалиги ерининг $\frac{2}{3}$ қисмини ҳайдади. Агар бутун ерни биринчи трактор иккинчисига қараганда 5 кун тезроқ ҳайдай олса, бутун ерни ҳар қайси трактор ёлғиз ўзи неча кунда ҳайдай олади?

12.12. Портдаги икки кема бир вақтда, бири шимолга қараб, иккинчиси шарққа қараб жўнади. 2 соатдан кейин улар орасидаги масофа 60 км бўлди. Бу кемалардан бирининг тезлиги иккинчисиникидан 6 км/соат ортиқ. Ҳар қайси кеманинг тезлигини топинг.

12.13. Ҳар қандай учтаси бир тўғри чизиқда ётмайдиган 7 та нуқтадан нечта турли тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?

Ечиш. Расмга қаранг (17-расм):



17-расм.

Боши A_1 нуқтада бўлган 6 та векторга эгамиз. Боши қолган нуқталарда бўлган векторлар ҳам 6 тадан бўлади. Ҳаммаси бўлиб $7 \cdot 6 = 42$ та турли векторлар ҳосил бўлади. Бу векторлар 21 жуфт қарама-қарши векторлардир. Қарама-қарши векторлар жуфти битта тўғри чизиқда ётади (Бизнинг мисолда).

Шундай қилиб, айтилган тўғри чизиқлар $42:2=21$ та экан.

Топшириқ. Ҳар қандай учтаси бир тўғри чизиқда ётмайдиган n та нуқта орқали ўтувчи турли тўғри чизиқлар сони $\frac{n(n-1)}{2}$ га тенглигини исботланг. Бу тасдиқдан фойдаланиб, 12.14—12.18-масалаларни ечинг.

12.14. Футбол ўйини мусобақасида ҳаммаси бўлиб 55 та ўйин ўйналди. Бунда ҳар бир команда қолган командалар билан фақат бир мартадан ўйнади. Мусобақада нечта команда қатнашган?

12.15. Шахмат турнирида ҳаммаси бўлиб 231 партия шахмат ўйналди. Агар ҳар бир шахматчи қолган шахматчиларнинг ҳар бири билан фақат бир партия шахмат ўйнаган бўлса, турнирда неча киши қатнашган?

12.16. Мактаб битирувчилари бир-бирлари билан расм алмаштирди. Агар 870 та расм алмаштирилган бўлса, мактабни неча ўқувчи битирган?

12.17. Қавариқ кўпбурчакнинг 14 та диагонали мавжуд. Унинг томонлари нечта?

12.18. Қандай кўпбурчак диагоналларининг сони томонларининг сонидан 12 та ортиқ бўлади?

Тенгламалар системаси тузиб ечиладиган масалалар

12.19. Поезд йўлда 6 минут тўхтаб қолди ва 20 км йўлда тезлигини соатига жадвалдагидан 10 км ошириб, кечикишни йўқотди. Поезд шу йўлда жадвалга мувофиқ қандай тезлик билан юриши керак эди?

12.20. *А* ва *В* станциялар орасидаги йўлнинг ўртасида поезд 10 минут тўхтаб қолди. *В* станцияга кечикмасдан бориш учун ҳайдовчи поезднинг дастлабки тезлигини 6 км/соат оширди. Агар станциялар орасидаги масофа 60 км бўлса, поезднинг дастлабки тезлигини топинг.

12.21. Периметри 28 см бўлган тўғри тўртбурчакнинг қўшни томонларига ясалган квадратлар юзларининг йиғиндиси 116 см^2 га тенг. Тўғри тўртбурчакнинг томонларини топинг.

12.22. Юзи 120 см^2, диагонали эса 17 см бўлган тўғри тўртбурчакнинг томонларини топинг.

12.23. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси 41 см, юзи 180 см^2. Катетларини топинг.

12.24. Тўғри бурчакли учбурчакнинг периметри 48 см, юзи 96 см^2. Учбурчакнинг томонларини топинг.

12.25. Икки мусбат соннинг ўрта арифметиги 20, ўрта геометриги эса 12. Шу сонларни топинг.

12.26. Икки шаҳар орасидаги масофа 480 км; шу масофани йўловчи поезди юк поездига қараганда 4 соат тез босади. Агар йўловчи поездининг тезлиги 8 км/соат оширилса, юк поездининг тезлиги эса 2км/соат оширилса, пассажир поезди шу масофани юк поездига қараганда 5 соат тез ўтади. Ҳар қайси поезднинг тезлигини топинг.

12.27. Ораларидаги масофа 180 км бўлган *A* ва *B* шаҳарлардан икки поезд бир вақтда бир-бирига қараб йўлга чиқди. Улар учрашгандан кейин *A* шаҳридан чиққан поезд *B* шаҳарга 2 соатда етиб боради, иккинчиси эса *A* шаҳарга 4,5 соатда етиб боради. Поездлар тезлигини топинг.

12.28. Велосипедчилар пойгаси учун 6 км узунликдаги масофа белгиланди. Акмал Шавкатдан ўтиб кетиб, маррага 2 минут олдин келди. Агар Акмал тезлигини 0,1 км/минут камайтириб, Шавкат тезлигини 0,1 км/минутга оширса, унда Акмал маррага Шавкатдан 2 минут олдин етиб келарди. Акмал ва Шавкатларнинг тезлигини топинг.

12.29. Икки экскаватор бирга ишлаб, бирор ҳажмдаги ер ишларини 3 соату 45 минутда бажаради. Бир экскаватор алоҳида ишлаб, бу ҳажмдаги ишни иккинчисига қараганда 4 соат тезроқ бажаради. Шундай ҳажмдаги ер ишларини бажариш учун ҳар бир экскаваторга алоҳида қанча вақт керак бўлади?

12.30. Бир комбайнчи майдондаги буғдой ҳосилини иккинчи комбайнчидан 24 соат тезроқ ўриб олиши мумкин. Иккала комбайнчи биргаликда ишлаганда эса ҳосилни 35 соатда ўриб олишади. Ҳар бир комбайнчи алоҳида ишлаб, ҳосилни ўриб олиши учун қанча вақт керак бўлади?

12.31. Иккита мусбат соннинг йиғиндиси уларнинг айирмасидан 5 марта катта. Агар шу сонлар квадратлари айирмаси 180 га тенг бўлса, бу сонларни топинг.

12.32. Икки хонали сон ўзининг рақамлари квадратларининг йиғиндисидан 11 та кам ва рақамларининг иккиланган кўпайтмасидан 5 та ортиқ. Шу икки хонали сонни топинг.

12.33. Икки хонали сон рақамлари квадратларининг йиғиндиси 13 га тенг. Агар бу сондан 9 ни айирсак, шу рақамлар билан тескари тартибда ёзилган сон ҳосил бўлади. Шу сонни топинг.

12.34. Балиқ оғирлиги бўйича бешта қисмга 14:12:11:9:15 каби нисбатларда бўлинган. Иккинчи бўлакнинг оғирлиги 11,2 г эканлигини билган ҳолда балиқнинг бутун оғирлигини топинг.

12.35. Иккита металлдан икки хил қотишма тайёрланган. Биринчи қотишмада металлар 1:2 нисбатда, иккинчи қотишмада эса 3:2 нисбатда. Металлар нисбати 8:7 бўладиган қилиб янги қотишма тайёрлаш учун металларни қандай нисбатда олиш керак?

12.36. Товар дастлаб 20 % га, сўнгра яна 15 % га арзонлашгач, 2380 сўм деб баҳоланди. Товарнинг дастлабки нархини топинг.

13-§. ЧИЗИҚЛИ ТЕНГСИЗЛИКЛАР. КВАДРАТ ТЕНГСИЗЛИКЛАР

Тенгсизликларни ечинг:

13.1. $7x-3(2x+3)>2(x-4)$. **13.2.** $\frac{x+1}{4}<2\frac{1}{2}-\frac{1-2x}{3}$.

13.3. $\frac{6-5x}{5}+\frac{3x-1}{2}>5-x$. **13.4.** $\frac{7x}{4}<0.3(x+7)+2\frac{1}{5}$.

13.5. $-x(x-1)-6>5x-x^2$. **13.6.** $7x-6<x+12$.

13.7. $1-2x\geq 4-5x$. **13.8.** $1-x\geq 2x+3$.

13.9. $\frac{2}{3-x}<0$. **13.10.** $\frac{4}{2+x}\leq 0$.

13.11. $\frac{x^2}{3x+5}<0$. **13.12.** $3(x\text{-}2)+x<4x+1$.

13.13. $5(x+1)\geq 2(x-1)+3x+3$. **13.14.** $\frac{5x+3}{2}-1\geq 3x-\frac{x-7}{2}$.

13.15. $2-\frac{x-4}{3}<2x-\frac{7x-4}{3}$. **13.16.** $(x-1)^2+7>(x+4)^2$.

13.17. $(x+1)^2+3x^2<(2x-1)^2+7$.

13.18. $(x+3)(x-2)\geq(x+2)(x-3)$.

13.19. $(x+1)(x-4)+4\geq(x+2)(x-3)-x$.

13.20. $\frac{2}{3x+6}<0$. **13.21.** $\frac{3}{2x-4}>0$. **13.22.** $\frac{-1{,}7}{0{,}5x-2}>0$.

Параметр қатнашган чизиқли тенгсизликларни ечинг:

13.23. $(a^2+1)y>3$. **13.24.** $-(b^2+2)z<0$.

13.25. $ax>-3$. **13.26.** $ax<b$.

13.27. $(a-5)x>2$. **13.28.** $ax>b$.

13.29. $(2m+1)x>2n-7$. **13.30.** $a(x-1)>x-2$.

13.31. $(a-1)x<5a+1$. **13.32.** $ax>a(a-1)$.

13.33. $(2b-1)y<4$. **13.34.** $(2a+1)x<3a-2$.

13.35. y нинг қандай қийматларида:

а) $\frac{7-2y}{6}$ касрнинг қиймати $\frac{3y-7}{12}$ касрнинг мос қийматларидан катта бўлади?

в) $\frac{4,5-2y}{5}$ касрнинг қиймати $\frac{2-3y}{10}$ касрнинг мос қийматларидан кичик бўлади?

г) $5y$-1 икки ҳаднинг қиймати $\frac{3y-1}{4}$ касрнинг мос қийматидан катта бўлади?

д) $\frac{5-2y}{12}$ касрнинг қиймати 1-6y иккиҳаднинг мос қийматидан кичик бўлади?

Тенгсизликни график усулда ечинг:

13.36. $x^2-4x+3>0$.

3.37. $x^2-6x+5\le 0$.

13.38. $-5x^2+3x+2\ge 0$.

13.38. $-x^2+x>0$.

13.39. $x^2+x+1<0$.

13.40. $x^2-x+1\ge 0$.

13.41. $x^2-6x+10\le 0$.

13.42. $-3x^2+2x+1>0$.

13.44. a нинг қандай қийматларида $(a-1)x^2-(a+1)x+(a+1)>0$ тенгсизлик x нинг барча ҳақиқий қийматлари учун бажарилади?

13.45. a нинг қандай қийматларида $(2-a)x^2+2(3-2a)x-5a+6\le 0$ тенгсизлик x нинг ҳеч бир қийматида бажарилмайди?

13.46. a нинг $(a-3)x^2-2(3a-4)x+7a-6=0$ тенглама ечимга эга бўладиган барча қийматларини топинг.

Параметрли тенгсизликларни ечинг:

13.47. $kx^2-x-1>0$.

13.48. $kx^2+12x-5<0$.

13.49. $x^2+kx+3<0$.

13.50. $x^2-2x+k>0$.

13.51. $kx^2+kx-5<0$.

13.52. $x^2>a$.

13.53. $x^2+(2k+3)x+k^2+4k+3<0$.

13.54. $kx^2+(2k)x+k+2>0$.

13.55. $(k+2)x^2+2(k+1)x+k-1>0$.

13.56. $\frac{x^2+x-6}{2k+1}>x+6(2k-1)$.

Тенгсизликни ечинг:

13.57. $3x^2-7x+4\le 0$.

13.58. $3x^2-7x+6<0$.

13.59. $3x^2-7x-6<0$.

13.60. $x^2-3x+5>0$.

13.61. $x^2-14x-15>0$.

13.62. $2-x-x^2\ge 0$.

14-§. РАЦИОНАЛ ТЕНГСИЗЛИКЛАР

Тенгсизликларни ечинг:

14.1. $x^2-4x+45>0$. **14.2.** $x^2+2x>6x-15$.

14.3. $x^2-11x+30>0$. **14.4.** $3x^2-4x+3>0$.

14.5. $3x^2-5x-2>0$. **14.6.** $5x^2-7x+2<0$.

14.7. $3x^2-7x-6<0$. **14.8.** $3x^2-2x+5>0$.

14.9. $(x-2)(x-5)(x-12)>0$. **14.10.** $(x+7)(x+1)(x-4)<0$.

14.11. $x(x+1)(x+5)(x-8)>0$. **14.12.** $(x+48)(x-37)(x-42)>0$.

14.13. $(x+0,7)(x-2,8)(x-2,9)<0$. **14.14.** $(x^2-16)(x+17)>0$.

14.15. $\left(x-\frac{2}{3}\right)(x^2-121)<0$. **14.16.** $x^3-25x<0$.

14.17. $x^3-0,01>0$. **14.18.** $(x^2-9)(x^2-1)>0$.

14.19. $(x^2-1,5x)(x^2-36)<0$. **14.20.** $(x^2+17)(x-6)(x+2)<0$.

14.21. $x(2x^2+1)(x-4)>0$. **14.22.** $(x-1)^2(x-24)<0$.

14.23. $(x+7)(x-4)^2(x-21)>0$. **14.24.** $\frac{x-8}{x+4}>0$.

14.25. $\frac{x+16}{x-11}<0$. **14.26.** $\frac{x+1}{3-x}\geq 0$.

14.27 $\frac{6-x}{x-4}\leq 0$. **14.28.** $(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4(x-4)^5>0$.

14.29. $(x-1)^2(x+1)^3(x-2)^4(x-4)^5\geq 0$.

14.30. $(x+2)^2(x-1)^3(x-2)^7\leq 0$. **14.31.** $x^3(x+1)^2(x-4)^3\geq 0$.

14.32. $(x-1)^4(x+1)^2<0$. **14.33.** $(x-0,5)(x+0,5)^2(x-2)>0$.

14.34. $x^2(x^2-1)(x+1)<0$.

14.35. $\frac{(x-1)(x+2)^4(x-3)^2}{(x-4)^3}>0$. **14.36.** $\frac{(x-1)^4(x-2)^3(x+5)}{(x-7)^2}\geq 0$.

14.37. $\frac{(x-2)^4(x+2)^3(x-1)}{(x-3)^2}\leq 0$. **14.38.** $\frac{(x-2)(x-3)^4(x-4)}{x+2}<0$.

14.39. $\frac{(1-x)(x-2)}{12-3x}>0$. **14.40.** $(11-x)^3(x-1,5)\geq 0$.

14.41. $(2-3x)(4x+5)\leq 0$. **14.42.** $(2-3x)(4x+5)(3-4x)\geq 0$.

14.43. $(3-4x)(5-6x)(x-7)\leq 0$. **14.44.** $(3-4x)^2(4-7x)^3(x+5)>0$.

14.45. $(13-9x)^3(11-8x)^4(5-x)\leq 0$. **14.46.** $\frac{(3x-5)(7-4x)^3}{4x+7}>0$.

14.47. $\frac{(4x-7)(3-5x)^2}{(7x-4)^3}<0$. **14.48.** $\frac{(4.5x-9)^2}{7x-21}<0$.

14.49. $\frac{0,5}{x-x^2-1}<0$. **14.50.** $\frac{x^2-5x+6}{x^2+x+1}<0$.

14.51. $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+1}<0.$ **14.52.** $\dfrac{x^2+4x+4}{2x^2-x-1}>0.$

14.53. $x^4-5x^2+4<0.$ **14.54.** $x^4-2x^2-63\le 0.$

14.55. $\dfrac{3}{x-2}<1.$ **14.56.** $\dfrac{1}{x-1}\le 2.$

14.57. $\dfrac{4x+3}{2x-5}<6.$ **14.58.** $\dfrac{5x-6}{x+6}<1.$

14.59. $\dfrac{5x-1}{x^2+3}<1.$ **14.60.** $\dfrac{x-2}{x^2+1}<-\dfrac{1}{2}$

14.61. $\dfrac{x+1}{(x-1)^2}<1.$ **14.62.** $\dfrac{x^2-7x+12}{2x^2+4x+5}>0$

14.63. $\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+1}\le 2.$ **14.64.** $\dfrac{x^2-5x+7}{-2x^2+3x+2}>0.$

14.65. $\dfrac{x+7}{x-5}+\dfrac{3x+1}{2}\ge 0.$ **14.66.** $2x^2+\dfrac{1}{x}>0.$

14.67. $\dfrac{x^2-x-6}{x^2+6x}\ge 0.$ **14.68.** $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-11x+30}<0.$

14.69. $\dfrac{x-1}{x+1}<x$ **14.70.** $\dfrac{1}{x+2}<\dfrac{3}{x-3}.$

14.71. $\dfrac{14x}{x+1}-\dfrac{9x-30}{x-4}<0.$ **14.72.** $\dfrac{15-4x}{x^2-x-12}<4.$

14.73. $\dfrac{1}{x^2-5x+6}\ge\dfrac{1}{2}$ **14.74.** $\dfrac{(2-x^2)(x-3)^3}{(x+1)(x^2-3x-4)}\ge 0.$

14.75. $\dfrac{4}{1+x}+\dfrac{2}{1-x}<1.$ **14.76.** $2+\dfrac{3}{x+1}>\dfrac{2}{x}.$

14.77. $\dfrac{2(x-3)}{x(x-6)}\le\dfrac{1}{x-1}.$ **14.78.** $\dfrac{7}{(x-2)(x-3)}+\dfrac{9}{x+3}+1<0.$

14.79. $(x^2+3x+1)(x^2+3x-3)\ge 5.$

14.80. $(x^2-x-1)(x^2-x-7)<-5.$

15-§. МОДУЛ ҚАТНАШГАН ТЕНГЛАМАЛАР

1 - м и с о л. Тенгламани ечинг:
а) $|x|=-2,5$; б) $|x|=2,5$; в) $|x^2-1|=0$.

Ечиш. а) $|x|\ge 0$ бўлгани учун тенглама ечимга эга эмас.

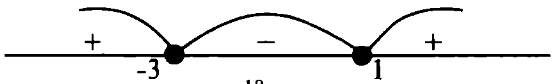
б) $|x|=2,5 \Leftrightarrow x=\pm 2,5$. Жавоб. $x=\pm 2,5$.

в) $|x^2-1|=0 \Leftrightarrow x^2-1=0$. Жавоб. $x=\pm 1$.

2 - м и с о л. $|x^2+2x-3|=2x+x^2-3$.

Ечиш. $|f(x)|=f(x)$ кўринишдаги тенгламага эгамиз. Бу тенглама $f(x)\ge 0$ тенгсизликка тенг кучлидир:

$$|x^2+2x-3|=2x+x^2-3;$$
$$2x+x^2-3\geq 0;$$
$$(x-(-3))(x-1)\geq 0 \text{ (18-расм).}$$



18-расм.

Жавоб. $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$.

3 - м и с о л. $|x^2+2x-3|=3-x^2-2x$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $|f(x)|=-f(x)$ кўринишидаги тенгламага эгамиз. Бу тенглама $f(x)\leq 0$ тенгсизликка тенг кучли (19-расм):

$$|x^2+2x-3|=-(x^2+2x-3);\ x^2+2x-3\leq 0;\ (x-(-3))(x-1)\leq 0.$$

19-расм.

Жавоб. $[-3;1]$.

4 - м и с о л. $x^2-5|x|+6=0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. 1 - у с у л. $|x|^2=x^2$ эканидан фойдаланамиз:

$$|x|^2-5|x|+6=0;$$
$$|x|=t;$$
$$t^2-5t+6=0;$$
$$t_1=2\ ;\ t_2=3;$$
$$|x|=2;\ |x|=3;$$
$$x_1=2,\ x_2=-2;\ x_3=3,\ x_4=-3.$$

Жавоб. $\pm 2;\ \pm 3$.

2- у с у л. Модулнинг таърифидан фойдаланамиз:

$$\begin{cases} x^2-5x+6=0, \\ x\geq 0 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} x^2+5x+6=0, \\ x<0. \end{cases}$$

Бу системаларни ечиб, ± 2; ± 3 илдизларни топамиз.

5 - м и с о л. $|3x-8|+|3x-2|=-3$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $|3x-8|\geq 0$, $|3x-2|\geq 0 \Rightarrow$ ечими йўқ. Жавоб. $\varnothing$.

6 - м и с о л. $|3x-8|+|3x-2|=3$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $3x-8=0$, $3x-2=0$ тенгламаларни ечиб, $x=2\frac{2}{3}$ ва $x=\frac{2}{3}$ сонларни топамиз. Улар сон тўғри чизиғини учта оралиққа бўлади. Тенгламани шу оралиқларнинг ҳар бирида ечамиз:

$x<\frac{2}{3}$ $\lvert 3x-8\rvert = 8-3x$ $\lvert 3x-2\rvert = 2-3x$ $(8-3x)+(2-3x)=3$ $x=\frac{7}{6}>\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}\le x<2\frac{2}{3}$ $\lvert 3x-8\rvert = 3x-8$ $\lvert 3x-2\rvert = 2-3x$ $(3x-8)+(2-3x)=3$ $0\cdot x=9$	$x\ge 2\frac{2}{3}$ $\lvert 3x-8\rvert = 3x-8$ $\lvert 3x-2\rvert = 3x-2$ $(3x-8)+(3x-2)=3$ $6x=13$ $x=2\frac{1}{3}<2\frac{2}{3}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

Жавоб. $\varnothing$.

7 - м и с о л. $|2+3x| = |4+2x|+|x-2|$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $(4+2x)+(x-2) = 2+3x$ эканини кўриш қийин эмас.

$|f(x)+g(x)| = |f(x)|+|g(x)|$ тенглама $f(x)\cdot g(x) \ge 0$ тенгсизликка тенг кучли эканлигидан фойдаланамиз:

$|(4+2x)+(x-2)| = |4+2x|+|x-2|$;

$(4+2x)(x-2) \ge 0$;

$2(x+2)(x-2) \ge 0$.

20-расм.

Жавоб: $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

$|f(x)|=a\,(a\in \mathrm{R})$ кўринишдаги тенгламани ечинг:

15.1. $|x|=-2$. **15.7.** $|2x-5|=-1$. **15.13.** $|x^2-3x+1|=1$.

15.2. $|x|=2$. **15.8.** $|2x-5|=1$. **15.14.** $|x^3-x|=0$.

15.3. $|x|=0$. **15.9.** $|2x-5|=0$. **15.15.** $|x^4-x|=0$.

15.4. $|x-1|=-2$. **15.10.** $|3-x|=-1$. **15.16.** $|x^2|=9$.

15.5. $|x-1|=2$. **15.11.** $|a+x|=-2$. **15.17.** $|x^2-1|=0$.

15.6. $|x-1|=0$. **15.12.** $|4-x|=0$. **15.18.** $|x-|x||=0$.

$|f(x)|=f(x)$ кўринишдаги тенгламани ечинг:

15.19. $|3x^2-7x+4|=3x^2-7x+4$. **15.20.** $|x^2-14x-15|=x^2-14x-15$.

15.21. $|2-x-x^2|=2-x-x^2$. **15.22.** $|3x^2-7x+6|=3x^2-7x+6$.

$|f(x)|=-f(x)$ кўринишдаги тенгламани ечинг:

15.23. $|3x^2-7x+6|=7x-6-3x^2$. **15.24.** $|x^4-x^2|=x^2-x^4$.

15.25. $|-x^2-4x-4|=x^2+4x+4$.

15.26. $|(x-1)^2(x-2)(x-3)|=(x-1)^2(2-x)(x-3)$.

$f(|x|)=g(x)$ кўринишдаги тенгламани ечинг:

15.27. $|x|=3x-5$. **15.28.** $|x^2+|x|-6=0$.

15.29. $|x|=x^2-3x+5$. **15.30.** $x+|x|+5=x^2$.

$|f(x)|=g(x)$ кўринишдаги тенгламани ечинг:

15.31. $|x+2|=2(3-x)$. **15.32.** $|3x-2|=11-x$.

15.33. $2|x^2+2x-5|=x-1$. **15.34.** $|3x+1|=5+6x$.

Тенгламани оралиқлар усули билан ечинг:

15.35. $|3x-8|-|3x-2|=6$. **15.36.** $|x-1|+|x-3|=2$.

15.37. $|x-1|+|x-3|=3$. **15.38.** $|x|-|x-2|=2$.

15.39. а) $|x-3|+|x+2|-|x-4|=3$. б) $|x-4|-|2x-3|+|3x-2|=2$.

$|f(x)+g(x)|=|f(x)|+|g(x)|$ кўринишдаги тенгламани ечинг:

15.40. $|7-2x|=|5-3x|+|x+2|$. **15.41.** $\left|\frac{x^2}{x-1}\right|=\left|\frac{x}{x-1}\right|+|x|$

15.42. $|5x-4|=|x|+4|x-1|$. **15.43.** $|6x+13|+|7-6x|=20$.

15.44. $|6x|-|6x-5|=5$. **15.45.** $13-|-x+13|=|x|$.

Ичма-ич модуллар қатнашган тенгламани ечинг:

15.46. $|2-|1-|x|||=1$. **15.47.** $||x|-3|=3-|x|$.

15.48. $||6x|-|6x-3||=3$. **15.49.** $|x-|4-x||-2x=4$.

$|f(x)|=|g(x)|$ кўринишдаги тенгламани ечинг:

15.50. $|3x-5|=|5-2x|$. **15.51.** $|x+1|=|x-1|$.

15.52. $|1-|2-x||=|3+x|$. **15.53.** $||3-2x|-1|=|x-1|$.

Тенгламани ечинг:

15.54. $(x^2-5x+6)^2-5|x^2-5x+6|+6=0$. **15.55.** $|x^2-4x+3|=-(4+2\sqrt{3})x$.

15.56. $|x^2-4x+3|+|x^2-5x+6|=1$. **15.57.** $\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}=1$.

15.58. $x^2-6x+|x-4|+8=0$.

15.59. $(x^2-2|x|)\quad(2|x|-2)-9\quad\frac{2|x|-2}{x^2-2|x|}=0$

15.60. $12x-3x^2-\frac{x}{\sqrt{x-1}}-\frac{|4-x|}{\sqrt{x-1}}+|4-x|=3x|4-x|-\frac{4}{\sqrt{x-1}}+4$.

15.61. $|2-3x|-|5-2x|=0$. **15.62.** $|9-2x|=|4-3x|+|x+5|$.

15.63. $|x^2-3x+2|=|x|-x^2+4$. **15.64.** $\frac{|x^2-1|}{x-2}=x$.

Параметр қатнашган тенгламани ечинг:

15.65. $2|x+a|-|x-2a|=3a$. **15.66.** $a-\frac{2a^2}{x+a}=a$.

15.67. $|x^2-a^2|=(x+3a)^2$. **15.68.** $x=2|x-a|-2|x-2a|$.

Системани ечинг:

15.69. $\begin{cases} 2u + v = 7, \\ |u - v| = 2. \end{cases}$

15.70. $\begin{cases} 3u - v = 1, \\ |u - 2v| = 2. \end{cases}$

15.71. $\begin{cases} y + x - 1 = 0, \\ |y| - x - 1 = 1. \end{cases}$

15.72. $\begin{cases} |x - 1| + y = 0, \\ 2x - y = 1. \end{cases}$

15.73. $\begin{cases} |x + 2|y| = 3, \\ 5y + 7x = 2. \end{cases}$

15.74. $\begin{cases} |x-1| + |y-2| = 1, \\ y = 3 - |x - 1|. \end{cases}$

15.75. $\begin{cases} y - 2|x| + 3 = 0, \\ |y| + x - 3 = 0. \end{cases}$

15.76. $\begin{cases} |xy - 4| = 8 - y^2, \\ xy = 2 + x^2. \end{cases}$

15.77. $|x^2+x-1|=2x-1$ тенгламанинг $x<\frac{\sqrt{3}}{3}$ шартни қаноатлантирувчи барча ечимларини топинг.

15.78. a нинг $\begin{cases} 2x + 2(a - 1)y = a - 4, \\ 2|x + 1| = ay + 2 \end{cases}$ система ягона ечимга эга бўладиган барча қийматларини топинг. Системанинг ечимини топинг.

15.79. a нинг $\begin{cases} ax + (a - 1)y = 2 + 4a, \\ 3|x| + 2y = a - 5 \end{cases}$ система ягона ечимга эга бўладиган барча қийматларини топинг. Системанинг ечимини топинг.

15.80. Тенгламани график усулда ечинг:

а) $|x|=x+1$; б) $|3x-1|=3-x$;

в) $|x+1|=x+3$; г) $|3x+1|=5+6x$.

16-§. МОДУЛ ҚАТНАШГАН ТЕНГСИЗЛИКЛАР

1 - м и с о л. $|x-3| > x+2$ тенгсизликни ечинг.

Е ч и ш. $|x-3| = \begin{cases} x - 3, \text{ агар } x \geq 3 \text{ бўлса}, \\ 3 - x, \text{ агар } x < 3 \text{ бўлса} \end{cases}$ бўлгани учун

$\begin{cases} x \geq 3, \\ x-3 > x+2 \end{cases}$ ва $\begin{cases} x < 3, \\ 3-x > x+2 \end{cases}$ системалар ҳосил бўлади.

Биринчи система ечимга эга эмас, иккинчи системанинг ечими $x\in(-\infty ; \frac{1}{2})$ дан иборат.

Ж а в о б. $x\in(-\infty ; \frac{1}{2})$.

2 - м и с о л. $|x^2-5x+6|\leq x^2-5x+6$ тенгсизликни ечинг.

Е ч и ш. $|f(x)|\leq f(x)$ тенгсизлик $|f(x)|=f(x)$ тенгламага ва демак, $f(x)\geq 0$ тенгсизликка тенг кучли эканлигидан фойдаланамиз:

$x^2-5x+6 \geq 0$.

Бу тенгсизликнинг ечимларини топамиз: $(-\infty; 2]\cup[3;+\infty)$.

Ж а в о б: $(-\infty;2] \cup [3;+\infty)$.

3 - м и с о л. $|x^2-5x+6| \geq x^2-5x+6$.

Е ч и ш. $|f(x)| \geq f(x)$ тенгсизлик $f(x)$ ифода ўз маъносини йўқотмайдиган барча x лар учун ўринли эканлигидан фойдаланамиз:

x^2-5x+6 ифода барча $x\in R$ да маънога эга.

Жа в о б: $(-\infty\ ;\ +\infty)$.

4 - м и с о л. $|x^2-5x+6| > x^2-5x+6$ тенгсизликни ечинг.

Е ч и ш. $|f(x)| > f(x)$ тенгсизлик $f(x) < 0$ тенгсизликка тенг кучли эканлигидан фойдаланамиз: $|x^2-5x+6| > x^2-5x+6$; $x^2-5x+6 < 0$; $x\in(2;3)$.

Ж а в о б: $(2\ ;\ 3)$.

Тенгсизликни ечинг:

16.1. $|x|<1$. **16.2.** $|x|\leq 1$. **16.3.** $|x|>1$. **16.4.** $|x|\geq 1$. **16.5.** $|x|<0$. **16.6.** $|x|\leq 0$.

16.7. $|x|<-3$. **16.8.** $|x|>-1$. **16.9.** $|x|\geq -1$. **16.10.** $|x|\leq -3$. **16.11.** $|x-1|\leq 0$. **16.12.** $|2x-3|\leq 0$. **16.13.** $-3|x-4|<0$.

16.14. $3|x-4|\leq 0$. **16.15.** $3|x-4|\geq 0$. **16.16.** $13|x-4|>0$. **16.17.** $|x^2-1|\leq 0$. **16.18.** $|x^2-1|>0$. **16.19.** $|x^3-8|>0$. **16.20.** $\sqrt{x^2}\leq 1$.

Тенгсизликни модулнинг таърифидан фойдаланиб ечинг:

16.21. $2|x+10|>x+4$. **16.22.** $3|x-1|\leq x+3$.

16.23. $x^2-7x+12<|x-4|$. **16.24.** $x^2-5x+9>|x-6|$.

16.25. $|x^2+3x|\geq 2-x^2$. **16.26.** $|x^2-6x+8|<5x-x^2$.

Тенгсизликни ечинг:

16.27. $|x-2|<2x-10$. **16.28.** $|x^2-x-3|<9$.

16.29. $\left|\dfrac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}\right|<3$. **16.30.** $\left|\dfrac{x^2-1}{x}+12\right|<3x-1$.

16.31. $|2x-7|\leq 5$. **16.32.** $|2x-1|\leq|x-1|$.

16.33. $\left|\dfrac{x+4}{x+2}\right|<1$. **16.34.** $|13-2x|\geq|4x-9|$.

16.35. $|x+1|+4\geq 2|x|$. **16.36.** $|2x+3|>|x|-4x-1$.

16.37. $|x-2|+|3-x|>2+x$. **16.38.** $|x-1|>|x+2|-3$.

16.39. $|5-x|<|x-2|+|7-2x|$. **16.40.** $|x-6|\leq|x^2-5x+9|$.

16.41. $|x^3-1|>1-x$. **16.42.** $\dfrac{2x-5}{|x-3|}>-1$ **16.43.** $\dfrac{|4-x|}{x+6}<3$.

16.44. $\dfrac{|x-2|}{x^2-5x+6}\geq 3$ **16.45.** $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\leq 1$

16.46. $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| \geqslant 1.$ **16.47.** $\dfrac{x^2-|x|-6}{x-2} \geqslant 2.$

16.48. $\dfrac{4x-1}{|x-1|} > |x+1|.$ **16.49.** $\dfrac{2x}{|x-3|} < |x|.$

16.50. $x^2 \leqslant \left|1-\dfrac{2}{x^2}\right|.$ **16.51.** $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geqslant 1$

16.52. $\dfrac{|x^2-2x|+4}{x^2+|x+2|} \geqslant 1$

16.53. $|x-1|-|x-2|+|x+1|>|x+2|+|x|-3.$

16.54. $|x-1|-|x-2|+|x-3|\leqslant 3+|x-4|-|x-5|.$

16.55. $|x+2|-|x+1|+|x|\geqslant \dfrac{5}{2}+|x-1|-|x-2|.$

17-§. ИРРАЦИОНАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ВА ИРРАЦИОНАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАЛАРИ

1 - м и с о л. $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-7}=-5$ тенгламани ечинг.

Е ч и ш. $\sqrt{x+3}\geq 0$, $\sqrt{2x-7}\geq 0$ бўлгани учун тенглама ечимга эга эмас.

Ж а в о б. $\varnothing$.

2 - м и с о л. $\sqrt{15+\sqrt{x-\sqrt{7}}}=2{,}5$ тенгламани ечинг.

Е ч и ш. x нинг жоиз қийматларида $\sqrt{x-\sqrt{7}}\geq 0$ бўлгани учун $\sqrt{15+\sqrt{x-\sqrt{7}}}\geq\sqrt{15+0}>2{,}5.$

Ж а в о б: $\varnothing$.

3 - м и с о л. $\sqrt{x-7}+\sqrt{7-x}=8$ тенгламани ечинг.

Е ч и ш. Тенгламанинг аниқланиш соҳаси: $\{7\}$, $x=7$ сони ечим бўла олмайди.

Ж а в о б. $\varnothing$.

Тенгламани мантиқий мулоҳазалар юритиб ечинг:

17.1. $\sqrt{x+2}+\sqrt{2x-1}=-3$ **17.2.** $4+\sqrt{2y-3}=1.$

17.3. $6-\sqrt{x+\sqrt{2}}=7$ **17.4.** $\sqrt{10+\sqrt{x-\sqrt{3}}}=3$

17.5. $\sqrt{x-3}+\sqrt{2-x}=5$ **17.6.** $\sqrt{x-4}+\sqrt{4-x}=1$

17.7. $\sqrt{x-4}+\sqrt{4-x}=-1$ **17.8.** $\sqrt{x+4}+\sqrt{-x-5}=0$

Тенгламани аниқланиш соҳасини топиш билан ечинг:

17.9. $x+\sqrt{x-1}+2=\sqrt{x-1}.$ **17.10.** $\sqrt{-x^2+x+6}=2x-7$

17.11. $\sqrt{-x^2-3x-2}=x-1.$ **17.12.** $\sqrt{x^2-4x+3}=\sqrt{5x-6-x^2}.$

17.13. $\sqrt{2x^2-7x+3}=$
$=\sqrt{5x-2-x^2}.$ **17.14.** $\sqrt{y-3}-6\sqrt{2-y}=8.$

17.15. $(x^2-1)\sqrt{2x-1}=0$ **17.16.** $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0.$

17.17. $(9-x^2)\sqrt{2-x}=0$ **17.18.** $(16-x^2)\sqrt{3-x}=0.$

17.19. $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+3}=0.$

Тенгламани $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$ тенглама билан $\begin{cases} f(x) = (g(x))^{2n}, \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ системанинг тенг кучлилигидан фойдаланиб ечинг:

17.20. $\sqrt{12-x} = x$. **17.21.** $\sqrt{7-x} = x - 1$

17.22. $x - \sqrt{x+1} = 5$. **17.23.** $21 + \sqrt{2x-7} = x$.

1724. $1 - \sqrt{1+5x} = x$. **17.25.** $2\sqrt{x+5} = x + 2$.

17.26. $4\sqrt{x+6} = x + 1$ **17.27.** $\sqrt{4+2x-x^2} = x - 2$.

17.28. $\sqrt{37-x^2} + 5 = x$. **17.29.** $\sqrt{6-4x-x^2} = x + 4$.

17.30. $\sqrt{1+4x-x^2} = x - 16$.

Тенгламани янги ўзгарувчи киритиб ечинг:

17.31. $x^2 - 4x + 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$.

17.32. $2x^2 + 3x - 5\sqrt{x^2 + 3x + 9} + 3 = 0$.

17.33. $x^2 + \sqrt{x^2 + 2x + 8} = 12 - 2x$.

17.34. $2x^2 + \sqrt{2x^2 - 4x + 12} = 4x + 8$.

17.35. $3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2$

17.36. $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^2} = 3$ **17.37.** $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} - 6 = 0$.

17.38. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}+2} + \dfrac{\sqrt[3]{x}+3}{5} = 2$ **17.39.** $\dfrac{8}{\sqrt{10-2x}} - \sqrt{10-2x} = 2$.

17.40. $\sqrt{2-x} + \dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3} = 2$. **17.41.** $\sqrt{\dfrac{3-x}{2+x}} + 3\sqrt{\dfrac{2+x}{3-x}} = 4$.

17.42. $\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}} - 2\sqrt{\dfrac{x-1}{2x+1}} = 1$. **17.43.** $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} = \dfrac{3}{2}$.

Тенгламани даражага кўтариш усули билан ечинг:

17.44. $\sqrt{x+1} = 8 - \sqrt{3x+1}$

17.45. $\sqrt{x+\sqrt{x+1}} + \sqrt{x-\sqrt{x+11}} = 4$

17.46. $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-2x+3} = 3$

17.47. $\sqrt{x^2+x-5} + \sqrt{x^2+8x-4} = 5$

17.48. $\sqrt{4x-3} + \sqrt{5x+1} = \sqrt{15x+4}$

17.49. $\sqrt{x+5} + \sqrt{x+3} = \sqrt{2x+7}$

17.50. $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$

17.51. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x-8}$.

17.52. $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$

17.53. $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}$

17.54. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 2$.

17.55. $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1.$

17.56. $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4.$

17.57. $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1.$

17.58. $\sqrt[3]{x^2-2x}-\sqrt[3]{2x^2-7x+6}=0.$

17.59. $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1.$

17.60. $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1.$

Тенгламани «қўшмасига кўпайтириш» усули билан ечинг:

17.61. $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1.$

17.62. $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7.$

17.63. $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2.$ **17.64.** $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6.$

Иррационал тенгламаларни ечинг:

17.65. $\sqrt{x^2+3x-3}=2x-3.$

17.66. $\sqrt{9x^2+2x-3}=3x-2.$

17.67. $(x+2)(x-5)+\sqrt[3]{x(x+3)}=0.$

17.68. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2.$

17.69. $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=1.$

17.70. $\sqrt{5x+7}-\sqrt{x+3}=\sqrt{3x+1}.$

17.71. $\sqrt{x+4}+2\sqrt{x+1}=\sqrt{x+20}.$

17.72. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}.$

17.73. $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x+3}=\sqrt{2x+1}.$

17.74. $\sqrt[3]{(3-x)^2}+\sqrt[3]{(6+x)^2}-\sqrt[3]{(3-x)(6+x)}=3.$

17.75. $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2-1}$ **17.76.** $\sqrt{x+1}=a.$

17.77. $\sqrt{x+3}=\sqrt{a-x}.$ **17.78.** $\sqrt{\dfrac{x+a}{x-a}}+2\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}=3.$

17.79. $\sqrt{7-x}-\sqrt{x-3}=a.$ **17.80.** $\sqrt{2x-1}-x+a=0.$

17.81. $x+\dfrac{2x}{\sqrt{2+x^2}}=\sqrt{2}$ тенгламани ечинг.

Иррационал тенгламалар системасини ечинг:

17.82. $\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=20, \\ x^2+y^2=136. \end{cases}$ **17.83.** $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=2{,}5, \\ x+y=5. \end{cases}$

17.84. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2x-1}{y+2}}+\sqrt{\dfrac{y+2}{2x-1}}=2, \\ x+y=2. \end{cases}$ **17.85.** $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=2{,}5, \\ x^2+y^2=15. \end{cases}$

17.86. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{\dfrac{y}{x}} = 1{,}5, \\ x + y + xy = 9. \end{cases}$ **17.87.** $\begin{cases} \sqrt{x^2} + y = 5, \\ y^2 - x = 7. \end{cases}$

17.88. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2, \\ xy = 27. \end{cases}$ **17.89.** $\begin{cases} x + y = 9, \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3. \end{cases}$

17.90. $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6, \\ x^2y + xy^2 = 20. \end{cases}$ **17.91.** $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}} = \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y}, \\ \sqrt{\dfrac{16x}{8}} = \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y}, \end{cases}$

17.92. $\begin{cases} x\sqrt{(x + y)^2} = 3x, \\ x(\sqrt{(x - y)^2} - 1)^2 = 0. \end{cases}$

17.93. $\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2, \\ x\sqrt[5]{x^2 - 4y^2} = 0. \end{cases}$

18-§. ИРРАЦИОНАЛ ТЕНГСИЗЛИКЛАР

1 - м и с о л. $\sqrt{x+5} > -8$ тенгсизликни ечинг.

Е ч и ш . $\sqrt{x+5} > 0$ бўлгани учун $\sqrt{x+5} > -8$ тенгсизлик ўзининг аниқланиш соҳасидаги барча x лар учун, яъни $x \geq -5$ да бажарилади.

Ж а в о б. $[-5;+\infty)$.

2 - м и с о л. $\sqrt{x^2 - 3x + 1} < 0$ тенгсизликни ечинг.

Е ч и ш . $\sqrt{x^2 - 3x + 1} \geq 0$ бўлгани учун берилган тенгсизлик ечимга эга эмас.

Ж а в о б. $\varnothing$.

Тенгсизликни мантиқий мулоҳазалар юритиб ечинг:

18.1. $\sqrt{x+3} \geq -5$. **18.2.** $\sqrt{x^2+1} > -1$.

18.3. $\sqrt{x^2 - 2x + 4} > -\dfrac{1}{2}$ **18.4.** $\sqrt{x^2 - 2x + 4} < 0$.

18.5. $\sqrt{x^2 - 2x + 4} \geq 0$. **18.6.** $\sqrt{x^2 - 2x + 4} > 0$.

18.7. $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \geq 0$ **18.8.** $\sqrt{|x-2| + x^2 + 4} < 0$

18.9. $\sqrt{x^2 - 2x + 3} \geq -0{,}3$. **18.10.** $\sqrt{x^2} > 0$

18.11. $\sqrt{x-4} + \sqrt{3-x} > 0$. **18.12.** $\sqrt{x-4} + \sqrt{3+x} < 0$

18.13. $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+3} > 0$ **18.14.** $\sqrt{x^3+1} > 0$.

18.15. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} \geq 0$ **18.16.** $\sqrt{4y^2 + 4y + 1} > 0$

18.17. $\sqrt{x^2 + x + 1} > 0$ **18.18.** $\sqrt{5x - 6 - x^2} > 0$

18. 19. $\sqrt{5x - 6 - x^2} \leq 0$ **18.20.** $\sqrt{-4x^2 - 12x - 9} \geq 0$

18.21. $\sqrt{x - 1 - x^2} > 0$. **18.22.** $\sqrt{5x - 18 - x^2} > 0$

18. 23. $(x-1)\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$. **18. 24.** $(3-x)\sqrt{x^2 + x - 2} \leq 0$.

18.25. $(x+2)\sqrt{x^2-2x-3} \geq 0$. **18.26.** $(1-x)\sqrt{6+x-x^2} \leq 0$.

18.27. $\dfrac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}} < 0$. **18.28.** $\dfrac{\sqrt{2x^2+15x-17}}{10-x} \geq 0$.

18.29. $\dfrac{\sqrt{x^2-x-2}}{x^2+2x-3} > 0$ **18.30.** $\dfrac{x^2-3x-6}{\sqrt{x^2-4x+3}} < 0$

Эслатмалар:

1) $\sqrt[2n+1]{f(x)}\ \mathrm{V}\ g(x)$ кўринишдаги тенгсизликни (бу ерда V ни $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ ларнинг исталган биттаси деб тушунамиз) ечиш учун $f(x)\ \mathrm{V}\ g^{2n+1}(x)$ тенгсизликни ечиш кифоя;

2) $\sqrt[2n]{f(x)}<g(x)$ тенгсизликни ечиш учун $\begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)>0, \\ f(x)<g^{2n}(x) \end{cases}$ системани ечиш керак;

3) $\sqrt[2n]{f(x)}\leq g(x)$ тенгсизликни ечиш учун $\begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)\geq 0, \\ f(x)\leq g^{2n}(x) \end{cases}$ системани ечиш керак;

4) $\sqrt[2n]{f(x)}>g(x)$ тенгсизликни ечиш учун $\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ ва $\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^{2n}(x) \end{cases}$ системаларни ечиш керак;

5) $\sqrt[2m]{f(x)}\geq g(x)$ тенгсизликни ечиш учун $\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ ва $\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^{2n}(x) \end{cases}$ системаларни ечиш керак. Бу системалар ечимлари тўпламларининг бирлашмаси берилган тенгсизликнинг ечимлари тўплами бўлади.

Қуйидаги иррационал тенгсизликларни ечинг:

18.31. $\sqrt{x+7} < x$. **18.32.** $\sqrt{9x-20} < x$.

18.33. $\sqrt{x^2+4x+4} < x+6$. **18.34.** $\sqrt{2x^2-3x-5} < x-1$.

18.35. $\sqrt{x+78} < x+6$. **18.36.** $\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8-x$.

18.37. $1-\sqrt{13+3x^2} > 2x$. **18.38.** $\sqrt{x^2+x-12} < x$.

18.39. $\sqrt{2x+4} > x+3$. **18.40.** $\sqrt{x^2+x-2} > x$.

18.41. $\sqrt{9-24x+16x^2} > 8$. **18.42.** $\sqrt{(x+4)(x+3)} > 6-x$.

18.43. $\sqrt{x^2-5x-24} > x+2$. **18.44.** $3\sqrt{6+x-x^2} > 4x-2$.

18.45. $\sqrt{x^2-x-2} > 2x+3$. **18.46.** $\sqrt{x^2-4x} > x-4$.

18.47. $\sqrt{x^2-x-6} \geq x+5$. **18.48.** $\sqrt{x^2-5x+6} \geq x+1$.

18.49. $\sqrt{x^2-7x+12} \geq 1-x$. **18.50.** $\sqrt{3x^2+13x+4} \geq x-2$.

Томонларида номанфий ифодалар ҳосил қилиб ечиладиган тенгсизликларни ечинг:

18. 51. $3\sqrt{x}-\sqrt{x+3}>1$.

18.52. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+4}>0$.

18.53. $\sqrt{x-6}-\sqrt{10-x}\geq 1$.

18.54. $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}>\sqrt{2x-1}$.

18.55. $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$.

18.56. $\sqrt{1-x}\leq\sqrt[4]{5-x}$.

18.57. $\sqrt[4]{5x-1}\leq\sqrt{x\sqrt{6}}$.

18.58. $\sqrt{1-x^2+1}<\sqrt{3-x^2}$

18.59. $\sqrt{x+3}<\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}$.

18.60. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}>\frac{3}{2}$

Тенгсизликни ечинг:

18.61. $\sqrt{x^2-x-12}<7-x$. **18.62.** $\sqrt{x^2-5x+6}<2x-3$.

18.63. $\frac{\sqrt{x+2}}{x}<1$. **18.64.** $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}>1{,}5\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

18.65. $\sqrt{x^2-5x+6}+\frac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}\geq 2$.

18.66. $\frac{1}{\sqrt{3x-2}}+\sqrt{3x+2}>2$.

18.67. $\sqrt{x^2-x-2}+\frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}>2$.

18.68. $\sqrt{3-4x}+\frac{1}{\sqrt{3-4x}}<2$.

18.69. $\sqrt{x^2+4x+4}<x+6$

18.70. $\sqrt{16x^2-24x+9}<\sqrt{4x^2+12x+9}$.

18. 71. $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}<8$.

18.72. $\sqrt{x^4+2x^2+1}+\sqrt{4x^4-4x^2+1}\leq 2x-1$.

18.73. $\sqrt{x}-3\leq\frac{2}{\sqrt{x-2}}$. **18.74.** $5\sqrt{x}>x+6$.

18.75. $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}>4+\frac{\sqrt{x-1}}{2}$. **18.76.** $\frac{1}{\sqrt{2-x}}>\frac{1}{x-1}$

18.77. $\frac{1}{\sqrt{1+x}}>\frac{1}{2-x}$ **18.78.** $\frac{\sqrt{3x^2+4}}{x-1}\geq 4$.

18.79. $\frac{1-3\sqrt{16-x^2}}{x}\leq 1$ **18.80.** $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}>1{,}5$.

18.81. $a\sqrt{x+1}<1$. **18.82.** $x+\sqrt{a-x}>0$ $(a\geq 0)$.

18.83. $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a$.

VII б о б. ФУНКЦИЯЛАР ВА ГРАФИКЛАР

1-§. ФУНКЦИЯНИНГ АСОСИЙ ХОССАЛАРИ

1 - м и с о л. $y = \begin{cases} -1, x < 1 \text{ да}, \\ 0, x = 1 \text{ да}, \\ 2, x > 1 \text{ да} \end{cases}$ функциянинг қийматлар соҳасини топинг.

Ечиш. x ҳар қандай қиймат қабул қилганда ҳам y ўзгарувчи фақат -1, 0, 2 қийматлардан бирортасига тенг бўлади. Шунинг учун $E(y)=\{-1;0;2\}$ ($E(y)$ билан $y(x)$ функция қийматлар соҳаси белгиланган).

2 - м и с о л. $y=\sqrt{x+5}$ функциянинг қийматлар соҳасини топинг.

Е ч и ш. a нинг $\sqrt{x+5}=a$ тенглама камида битта илдизга эга бўладиган қийматларини топамиз.

$a<0$ бўлса, тенглама ечимга эга эмас. $a \geq 0$ бўлсин. $\sqrt{x+5}=a$ ни квадратга кўтариб, $x+5=a^2$ га ёки $x=a^2-5$ га эга бўламиз.

Демак, $\sqrt{x+5}$ тенглама $a \geq 0$ бўлганда ечимга эга.

Ж а в о б. $E(y)=[0;+\infty)$.

3 - м и с о л. $f\left(\frac{x-2}{5x+1}\right)=\frac{x+2}{x-3}$ бўлса, $f(x)$ ни топинг.

Е ч и ш $\frac{x-2}{5x+1}=t$ деб, x ни топамиз: $x=\frac{t+2}{1-5t}$.

Берилган тенгликка кўра: $f(t)=\dfrac{\frac{t+2}{1-5t}+2}{\frac{t+2}{1-5t}-3}$ Бундан

$f(x)-\frac{4-9x}{16x-1}$ экани келиб чиқади.

4 - м и с о л. $f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=2x$ бўлса, $f(x)$ ни топинг.

Ечиш. Берилган тенгликда, x га $x=t$ ва $x=\frac{1}{t}$ қийматларни берамиз:

$$f(t)+3f\left(\frac{1}{t}\right)=2t; \quad f\left(\frac{1}{t}\right)+3f(t)=\frac{2}{t}$$

Ҳосил бўлган тенгламаларнинг иккинчисини 3 га кўпайтириб, ундан биринчисини ҳадма-ҳад айирамиз ва $8f(t)=\frac{6}{t}-2t=\frac{6-2t^2}{t}$ га эга бўламиз. Бу тенглик ёрдамида, $f(x)=\frac{3-x^2}{4x}$ ни топамиз.

5 - м и с о л. $f(x)=|x-1|x^3-1$ функцияни жуфт ва тоқ функцияларнинг йиғиндиси шаклида тасвирланг.

Е ч и ш. $f(x)$ функция жуфт функция ҳам эмас, тоқ функция ҳам эмас. Унинг аниқланиш соҳаси координаталар бошига нисбатан симметрик, яъни $\forall x \in D(f)$ учун $-x \in D(f)$. Шунинг учун, $f(x)$ функцияни жуфт ва тоқ функцияларнинг йиғиндиси шаклида тасвирлаш мумкин.

$$\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\frac{|x-1|x^3-|x+1|x^3-2}{2} \text{ ва}$$

$$\psi(x)=\frac{|x-1|x^3+|x+1|x^3}{2}$$

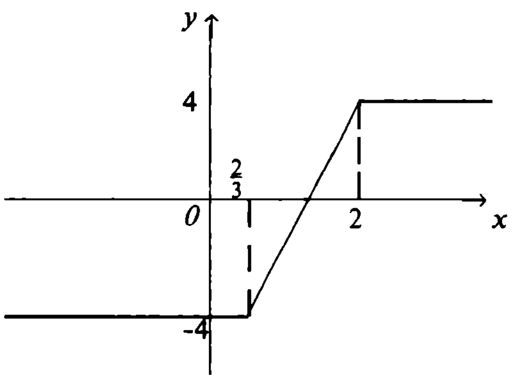
функцияларни қараймиз. $\varphi(x)$ функциянинг жуфт функция, $\psi(x)$ нинг эса тоқ функция ва $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$ эканлигини кўриш қийин эмас.

Ж а в о б. $f(x)=\frac{|x-1|x^3+|x+1|x^3-2}{2}+\frac{|x-1|x^3+|x+1|x^3}{2}$

6 - м и с о л. $f(x)=|3x-2|-3|x-2|$ функциянинг графигини ясанг.

Е ч и ш . Функция ифодасини модул белгисисиз ёзиб олиб, сўнгра графигини ясаймиз (21-расм):

$$f(x)=\begin{cases} -4, \text{ агар } x<\frac{2}{3} \text{ бўлса,} \\ 6x-8, \text{ агар } \frac{2}{3}\le x<2 \text{ бўлса,} \\ 4, \text{ агар } x\ge 2 \text{ бўлса.} \end{cases}$$



21-расм.

7 - м и с о л. $y=9-|x-3|$ функциянинг энг катта қийматини ва аргументининг унга мос қийматларини топинг.

Е ч и ш . $D(y)=R$ ва $\forall x \in R$ учун $y=9-|x-3|\le 9+0=9$

га эгамиз. $y(x)=9$ тенглик бажариладиган x лар мавжуд ёки мавжуд эмаслигини аниқлаймиз:

$$9-|x-3|=9; \quad |x-3|=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=3.$$

Демак, $y(x)=9$ тенглик ўринли бўладиган x лар мавжуд. Шундай қилиб, барча $x\in R$ лар учун $y(x)\leq 9$ бўлиб, $y(x)=9$ тенглик ўринли бўладиган x лар мавжуд экан. Бу ҳол, $\max\limits_{x\in R} y(x) = y(0) = y(3) = 9$ дейиш учун асос бўла олади.

Ж а в о б. $\max\limits_{x\in R} y(x) = 9, \quad x_{\max} = 0, \quad x_{\max} = 3.$

Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг:

1.1. $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$. **1.2.** $f(x) = \dfrac{3x}{x-3{,}4}$ **1.3.** $f(x) = \dfrac{4x-1}{3x-2}$.

1.4. $f(x) = \dfrac{4x+13}{7x+14}$ **1.5.** $f(x) = \dfrac{4x}{(x-1)(x-2)}$.

1.6. $f(x) = \dfrac{3x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ **1.7.** $f(x) = \dfrac{4x^2-1}{x^2-7x+12}$

1.8. $f(x) = \dfrac{4x+1}{x^2-8x+15}$ **1.9.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$

1.10. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-x+1}$ **1.11.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$.

1.12. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+x+1}$ **1.13.** $f(x) = x + x^2 + \dfrac{1}{x-3}$

1.14. $f(x) = x^2 + x - 3$ **1.15.** $f(x) = x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2-1}$.

1.16. $f(x) = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{x^2-1}$ **1.17.** $f(x) = x + x^{-1} + x^{-2}$

1.18. $f(x) = x^{1} + \dfrac{2}{x}$ **1.19.** $f(x) = ax^2 + bx + c$

1.20. $f(x) = ax + b$ **1.21.** $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{(x^2-3x)^2}$

1.22. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$ **1.23.** $y = \sqrt{3-5x}$.

1.24. $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{3-2(7-5x)}}$ **1.25.** $y = \sqrt{2(3x-1)-7x+2}$.

1.26. $y = \dfrac{3+4x}{\sqrt{3-2x-4(1-5x)}}$ **1.27.** $y = \sqrt{-\sqrt{2}(2-3x)}$.

1.28. $y = \dfrac{1}{\sqrt{(3x-1)\sqrt{2}-3x+2}}$ **1.29.** $y = \sqrt{2-\sqrt{3}(x+\sqrt{3})-2x}$.

1.30. $y = \dfrac{2}{\sqrt{(x-\sqrt{3})\sqrt{3}-2x}+1}$. **1.31.** $y = \sqrt{60x-25x^2-36}$.

1.32. $y=\frac{1}{\sqrt{112x+64+49x^2}}$. **1.33.** $y=\sqrt{5x^2+6x+1}+\frac{1}{3x+5}$.

1.34. $y=\sqrt{3x+4}-\frac{1}{\sqrt{-2x^2-5x-2}}$. **1.35.** $y=\sqrt{4-x|x|}$.

1.36. $y=\sqrt{|x|(x-1)}$ **1.37.** $y=\sqrt{(x-2)\sqrt{x}}$

1.38. $y=\sqrt{(1-x)\sqrt{x-2}}$. **1.39.** $y=\sqrt{\frac{3-2x-x^2}{x^2+7x+12}}$.

1.40. $y=\sqrt{\frac{-x^2+6x-8}{x^2+5x+6}}$. **1.41.** $y=\frac{2}{\sqrt{x^2+x-20}}+\sqrt{x^2+5x-14}$.

1.42. $y=\sqrt{20-x-x^2}-\frac{3}{\sqrt{14-5x-x^2}}$

1.43. $y=\sqrt{\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}}$ **1.44.** $y=\sqrt{\frac{7-x}{\sqrt{4x^2-19x+12}}}$

1.45. $y=\sqrt{\frac{-4x^2+4x+3}{\sqrt{2x^2-7x+3}}}$. **1.47.** $y=\sqrt{12x^2-4x^3-9x}-\sqrt{2-|x|}$

1.48. $y=\sqrt{|x-1|(3x-6)}+\frac{3}{x^2+4x-21}$.

1.49. $y=\frac{\sqrt{(x^2-4x-21)|x+2|}}{x^2+x-72}$

1.50. $y=\sqrt{5-\sqrt{4x^2-20x+25}}-\sqrt{|x|(2x-10)}$

Қуйидаги функцияларнинг қийматлар соҳасини топинг:

1.51. $y=1$. **1.52.** $y=x$. **1.53.** $y=x^2$. **1.54.** $y=-x^2$

1.55. $y=\begin{cases}0, & x\le 0 \text{ да},\\ 1, & x>1 \text{ да},\end{cases}$ **1.56.** $y=\begin{cases}-1, & x^2<1 \text{ да},\\ 0, & x^2=1 \text{ да},\\ 1, & x^2>1 \text{ да}.\end{cases}$

1.57. $y=x^2+2$. **1.58.** $y=3-4x^2$ **1.59.** $y=3x-x^2$.

1.60. $y=3x^2-6x+1$. **1.61.** $y=\frac{5}{x-2}$. **1.62.** $y=\frac{x}{x+1}$.

1.63. $y=\frac{2}{x^2+2}$. **1.64.** $y=\frac{x^2+1}{x}$. **1.65.** $y=\sqrt{x-2}+3$.

1.66. $y=|x-4|-2$. **1.67.** $y=5-\sqrt{2x+1}$

1.68. $y=3-|2x+3|$. **1. 69.** $y=\sqrt{x^2+4}$

1.70. $y=4-2\sqrt{x^2+9}$ **1.71.** $y=\sqrt{3x^2-6x+4}$

1.72. $y=\sqrt{8x-2x^2-7}$ **1.73.** $y=1-\frac{5}{\sqrt{x-1}+1}$

1.74. $y=2-\frac{3}{2x^2-8x+9}$. **1.75.** $y=1-\sqrt{9-\sqrt{2x^2+6\sqrt{2}x+9}}$.

1.76. $y=3-\sqrt{16-\sqrt{4x^2-4\sqrt{3}x+3}}$.

1.77. $y=\dfrac{x^3+8}{x+2}$. **1.78.** $y=\dfrac{(x^3+8)(x-4)}{x^2-2x-8}$.

1.79. $y=\dfrac{x^3-27}{x-3}$. **1.80.** $y=\dfrac{x^4+6x^3-27x-162}{x^2+3x-18}$.

1.81. $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ бўлса, $f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ ни топинг.

1.82. $f(x)=\sqrt{x^3-1}$ бўлса, $f(\sqrt[3]{x^2+1})$ ни топинг.

1.83. $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ бўлса, $f(tgx)$ ни топинг.

1.84. $f\left(\dfrac{3x-1}{x+2}\right)=\dfrac{x+1}{x-1}$ бўлса, $f(x)$ ни топинг.

1.85. $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x$ бўлса, $f(x)$ ни топинг.

1.86. $(x-1)f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x-1}$ бўлса, $f(x)$ ни топинг.

1.87. $f(x)+xf\left(\dfrac{x}{2x-1}\right)=2$ бўлса, $f(x)$ ни топинг.

1.88. $2f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)-3f\left(\dfrac{3x-2}{2x+1}\right)=\dfrac{13x-4}{2x-3x^2}$ бўлса, $f(x)$ ни топинг.

Қуйидаги функцияларни жуфтликка текширинг:

1.89. а) $f(x)=19$; б) $\varphi(x)=0$; в) $g(x)=(2-3x)^3+(2+3x)^3$;
г) $h(x)=(5x-2)^4+(5x+2)^4$.

1.90. а) $f(x)=(x+3)|x-1|+(x-3)|x+1|$
б) $\varphi(x)=(x+5)|x-3|-(x-5)|x+3|$;
в) $g(x)=\dfrac{|x-7|}{x+1}+\dfrac{|x+7|}{x-1}$; г) $h(x)=\dfrac{|x-4|}{x+2}-\dfrac{|x+4|}{x-2}$.

1.91. а) $f(x)=(x+2)(x+3)(x+4)-(x-2)(x-3)(x-4)$;
б) $\varphi(x)=(x-5)^8(x+7)^{11}+(x+5)^8(x-7)^{11}$;
в) $g(x)=(x-6)^9(x+3)^5+(x+6)^9(x-3)^5$;
г) $h(x)=(x^2-3x+5)(x^3-8x^2+2x-1)-(x^2+3x+5)\cdot$
$\cdot(x^3+8x^2+2x+1)$.

1.92. а) $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{x+1}-\dfrac{x^3+2x^2}{x-1}$;
б) $\varphi(x)=\dfrac{x^5-2x^2+3}{x-4}+\dfrac{x^5+2x^2+3}{x+4}$;
в) $g(x)=\dfrac{(x-1)^5}{(3x+4)^3}+\dfrac{(x+1)^5}{(3x-4)^3}$;
г) $h(x)=\dfrac{(x-2)^3(x+1)^5(x-5)^7}{2x+1}+\dfrac{(x+2)^3(x-1)^5(x+5)^7}{2x-1}$.

1.93. а) $f(x)=8^{x^2}$; б) $f(x)=4{,}3^x$; в) $f(x)=x^3+3x^2-5$;
г) $f(x)=5x^4-4x^3+3x^2+1$.

Қуйидаги функцияларни жуфт ва тоқ функцияларнинг йиғиндиси шаклида тасвирланг:

1.94. а) $f(x) = |x+1| \quad x^2 - 1$; б) $f(x) = |2x-3| + x^2 - 1$;
в) $\varphi(x) = (x+3)|x-1| + |x+1|x$;
г) $g(x) = |x-1||x+1||x+2|x+3|x|(x-1)$.

1.95. а) $f(x) = \dfrac{(x-2)^2(x+3)^3}{2x+1} - \dfrac{(x+2)^2}{x-1}$;

б) $f(x) = 2(x-2)|x+3| + \dfrac{5|x| + 4x^2}{x-1}$;

в) $\varphi(x) = 3x - 2(x-1) + \dfrac{x^2-2x+1}{x+1}$;

г) $g(x) = 3|x^2 - 4x + 1| + |x^2 - x| + 8x^2$

1.96. Қуйидаги функцияларнинг чегараланганлигини исбот қилинг:

а) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$; б) $y = \dfrac{2}{4+x^2}$

1.97. Қуйидаги функцияларнинг чегараланмаганлигини исбот қилинг:

а) $y = \dfrac{1}{1-x^2}$; б) $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

1.98. а) $y = \dfrac{5}{2x+1}$ функция $(-\infty;-0,5)$ да камайишини;

б) $y = \dfrac{4}{2-x}$ функция $(2;+\infty)$ да ўсишини;

в) $y = \dfrac{21x-9}{3x-1}$ функция $(-\infty;1/3)$ да ўсишини;

г) $y = \dfrac{4x+31}{x+7}$ функция $(-7;\infty)$ да камайишини исботланг.

1.99. а) $y=3x^2-4x+7$ функция $(-\infty;2/3]$ да камайишини;
б) $y=-5x^2+6x+19$ функция $(-\infty;0,6]$ да ўсишини;
в) $y=3\sqrt{4x+1}-1$ функция $[-0,25;+\infty)$ да камайишини;
г) $y=2+\sqrt{3-5x}$ функция $(-\infty;0,6]$ да камайишини исботланг.

1.100. а) $y=x^3-3x$ функция $|1;+\infty)$ да ўсишини;
б) $y=12x-x^3$ функция $|2;+\infty)$ да камайишини;
в) $y = 0,5x^2 - 2\sqrt{x}$ функция $|1;\infty)$ да ўсишини ва $|0;1]$ да камайишини;
г) $y = \sqrt{x} - 2x^2$ функция $[0;0,25]$ да ўсишини ва $[0,25;+\infty)$ да камайишини исботланг.

1.101. $f(x)=x^2$ функция берилган. Аргументнинг ҳар қандай x_1 ва x_2 қийматларида $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ бўлишини исботланг.

1.102. $f(x)=\sqrt{x}$ функция берилган. Аргументнинг ҳар қандай x_1 ва x_2 қийматларида $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ бўлишини исботланг.

1.103. $f(x)=x^2-4x+4$ ва $g(x)=\frac{a^2+1}{x+3}$ функциялар берилган.

а) $f(x)$ функция $[2;+\infty)$ да ўсишини исботланг;

б) $g(x)$ функция $[2;+\infty)$ да камайишини исботланг;

в) a нинг $f(3)=g(3)$ бўладиган барча қийматларини топинг;

г) $(x-2)^2=\frac{6}{x+3}$ тенгламни $[2;+\infty)$ оралиқда ечинг.

1.104. $f(x)=(x-3)^2$ ва $g(x)=\frac{a^2+1}{4-x}$ функциялар берилган.

а) $f(x)$ функция $(-\infty;3]$ да камайишини исботланг;

б) $g(x)$ функция $(-\infty;3]$ да ўсишини исботланг;

в) a нинг $f(2)=g(2)$ бўладиган барча қийматларини топинг;

г) $x^2-6x+9=\frac{2}{4-x}$ тенгламани $(-\infty;3]$ оралиқда ечинг.

1.105. Агар $f(x)$ функция X тўпламда ўсувчи (камаювчи), $g(x)$ функция эса X тўпламда камаювчи (ўсувчи) бўлса, $f(x)=g(x)$ тенглама X тўпламда кўпи билан битта илдизга эга бўлишини исботланг.

1.106. Тенгламаларни ечинг:

а) $(x+1)^3=41-3x-x^3$; б) $3x^3+2x=4+(2-x)^3$;

в) $(x-1)^5+x^5=45-x^3=2x$; г) $4x^5+2x^3+71=(3-x)^3+1$;

д) $x^{1991}+1=\sqrt{5-x}$; е) $\sqrt{10+x}+5=-2x^{13}-6x$;

ж) $2\sqrt{x-2}=\frac{9}{x}-1$; з) $\sqrt{3-x}=1-\frac{5}{x}$

1.107. Қуйидаги функцияларнинг нолларини топинг:

а) $f(x)=3x^2-4$; д) $f(x)=|x-1|\cdot\left|\frac{x+1}{x^2-1}\right|$;

б) $f(x)=2x^2-5x+6$; е) $f(x)=x^3+8x-x$;

в) $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}$; ж) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-7x+12}$;

г) $f(x)=\frac{x}{x-1}-\frac{2x}{x+1}$; з) $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-11x+30}$.

Қуйидаги функцияларнинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг:

1.108. $y=1-2x$. **1.109.** $y=x^3$.

1.109. $y=3-2x-x^2$ **1.111.** $y=\frac{1}{x+1}$.

Қуйидаги функцияларни даврийликка текширинг:

1.112. $y=x$. **1.116.** $y=\{x\}+1$. **1.120.** $y=5$.

1.113. $y=x^2$. **1.117.** $y=[x]-1$. **1.121.** $y=5+x$.

1.114. $y=\{x\}$. **1.118.** $y=x^2+\{x\}$. **1.222.** $y=\{5+x\}$.

1.115. $y=[x]$. **1.119.** $y=[x]+x$. **1.123.** $y=[5+x]$.

1.124. $f(x)=\begin{cases} -x, \text{ агар } 0 \le x < 1 \text{ бўлса,} \\ \frac{1}{2}, \text{ агар } 1 \le x < 2 \text{ бўлса} \end{cases}$

функция берилган. Шу функция ёрдамида даврий функция қуринг.

1.125. Даври фақат рационал сонлар бўлган функция қуринг.

Қуйидаги функцияларга тескари функцияларни топинг:

1.126. $f(x)=2x+3$; **1.127.** $f(x)=\frac{2x-1}{x+2}$;

1.128. $f(x)=x^2$, $x\in(0;+\infty]$; **1.129.** $f(x)=x^2$, $(-\infty;0]$;

1.130. $f(x)=-x^2$, $x\in(-\infty;0]$;

1.131. $f(x)=\begin{cases} x, \text{ агар } x\in[0;1) \text{ бўлса,} \\ 3-x, \text{ агар } x\in[1;2] \text{ бўлса.} \end{cases}$

Қуйидаги функциялар тескариланувчими:

1.132. $f(x)=3x^2+1$; **1.133.** $f(x)=3x+4$;

1.134. $f(x)=4x-5$; **1.135.** $f(x)=\frac{3x+1}{4x-2}$;

1.136. $f(x)=\frac{7x-4}{3x+5}$; **1.137.** $f(x)=\frac{dx+b}{cx+d}$;

1.138. $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ агар } x\in[0;1) \text{ бўлса,} \\ x-1, \text{ агар } x\in[1;2] \text{ бўлса.} \end{cases}$

1.139. $f(x)=\begin{cases} 3x+1, \text{ агар } x\in[0;1) \text{ бўлса,} \\ -3x+1, \text{ агар } x\in[1;2] \text{ бўлса.} \end{cases}$

1.140. $f(x)=\begin{cases} x^3, \ x\le 0 \text{ бўлса,} \\ x, \ x>0 \text{ бўлса.} \end{cases}$?

Қуйидаги функцияларнинг энг катта қийматларини ва аргументнинг унга мос қийматларини кўрсатинг:

1.141. $y=5-|x+8|$. **1.142.** $y=2-\sqrt{x-2}$.

1.143. $y=x^2-2x+3$, $x\in[1;5]$.

1.144. $y=-x^2-4x+1$, $x\in[1;2]$.

1.145. $y=\dfrac{2}{5+|3x-2|}$.   **1.146.** $y=\dfrac{2}{x^2-2x+2}$.

1.147. $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$.   **1.148.** $y=\dfrac{4x}{x^2+4}$.

1.149. $y=\dfrac{x}{4x^2+9}$.

Қуйидаги функцияларнинг энг кичик қийматларини ва аргументнинг функциялар бу қийматларга эришадиган қийматларини топинг:

1.150. $y=\sqrt{4x^2-12x+9-2}$.   **1.151.** $y=3+\sqrt{x^2-3x+2}$

1.152. $y=x^2+6x+11,\ x\in[-4;2]$.   **1.153.** $y=-x^2+2x+2,\ x\in[1;2]$.

1.154. $y=-\dfrac{3}{|x+1|+1}$.   **1.155.** $y=\dfrac{2}{x^2+1}$.

1.156. $y=-\dfrac{x}{12x^3+3}$ **1.157.** $y=\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4x+5}$.

2-§. ФУНКЦИЯ ГРАФИГИНИ ЯСАШГА ДОИР МИСОЛЛАР

Қуйидаги функцияларнинг графикларини ясанг:

2.1. $y=\dfrac{|x|}{x}(x^2+6x)$.   **2.2.** $y=\dfrac{x}{|x|}(4x-x^2-3)$

2.3. $y=\dfrac{|x-2|}{2-x}(x^2-2x)$.   **2.4.** $y=\dfrac{x+2}{|x+2|}(x^2+4x+3)$.

2.5. $y=|||x|-2|-1|$.   **2.6.** $y=|2-|1-|x|||$.

2.7. $y=|x^2-5|x|+6|$.   **2.8.** $y=\sqrt{4x^2-4x^2|x|+x^4}$

2.9. $y=||1-x^2|-3|$.   **2.10.** $y=||x^2-2x|-3|$.

2.11. $y=2-\sqrt{|x-3|}$.   **2.12.** $y=2-\sqrt{3-|x|}$.

2.13. $y=|2-\sqrt{|x-3|}|$ **2.14.** $y=|2-\sqrt{3-|x|}|$

2.15. $y=\dfrac{|x|}{x-1}$.   **2.16.** $y=\dfrac{|x|}{|x|-1}$.

2.17. $y=\left|\dfrac{x}{x-1}\right|$.   **2.18.** $y=\dfrac{x}{|x-1|}$.

2.19. $y=\dfrac{x^2-5x-6}{8x-x^2-12}$.   **2.20.** $y=\dfrac{2x^2-17x+21}{7+6x-x^2}$.

2.21. $y=\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}$.   **2.22.** $y=\dfrac{\dfrac{x-2}{x}+\dfrac{x-2}{x+1}}{\dfrac{x-2}{x}-\dfrac{x-2}{x+1}}$.

2.23. $y=\dfrac{2x}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x^2}{1+x}\right)}}$. **2.24.** $\dfrac{\sqrt{\dfrac{9+x^2}{3x}+2}+\sqrt{\dfrac{9+x^2}{3x}-2}}{\sqrt{\dfrac{9+x^2}{3x}+2}-\sqrt{\dfrac{9+x^2}{3x}-2}}$

2.25. $y=\dfrac{|x^3-3x+2|}{x-1}$.

2.26. $y=\begin{cases} 3, \text{ агар } x\leq -4 \text{ бўлса,} \\ |x^2-4|x|+3|, \text{ агар } -4<x\leq 4 \text{ бўлса.} \\ 3-(x-4)^2, \text{ агар } x>4 \text{ бўлса.} \end{cases}$

2.27. $y=\begin{cases} 8-(x+6)^2, \text{ агар } x<-6 \text{ бўлса,} \\ x^2-6|x|+8|, \text{ агар } -6\leq x<5 \text{ бўлса,} \\ 3, \text{ агар } x\geq 5 \text{ бўлса.} \end{cases}$

2.28. $f(x)$ жуфт функция учун $x\geq 0$ да $f(x)=\sqrt{x}$ бўлса, $f(x)$ функция графигини ясанг.

2.29. $f(x)$ жуфт функция учун $x\geq 0$ да $f(x)=x^2-3x$ бўлса, $f(x)$ функциянинг графигини ясанг.

2.30. $f(x)$ тоқ функция учун $x\geq 0$ да $f(x)=x^2$ бўлса, $f(x)$ функциянинг графигини ясанг.

2.31. $f(x)$ тоқ функция учун $x\leq 0$ да $f(x)=x^2-2x$ бўлса, $f(x)$ функция графигини ясанг.

3-§. АРАЛАШ МАСАЛАЛАР

Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳаси ва қийматлар соҳасини топинг:

3.1. $y=\sqrt{x-1}$ **3.2.** $y=\dfrac{x^2-4}{x^2-9}$. **3.3.** $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x}}$.

3.4. $y=\sqrt[3]{1+x}$. **3.5.** $y=\dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{x+4}$. **3.6.** $y=\sqrt{x^2-1}$

3.7. $y=x$ ва $y=\dfrac{x^2}{x}$ функцияларнинг аниқланиш соҳа-ҳалари устма-уст тушадими? Агар устма-уст тушмаса, аниқланиш соҳаларининг умумий қисмини топинг.

3.8. Жумланинг маъносини тушунтиринг:

а) Функция юқоридан (қуйидан) чегараланган;

б) Функция юқоридан (қуйидан) чегараланмаган;

в) Функция чегараланган;

г) Функция чегараланган эмас.

3.9. Исботланг:

а) $y=\dfrac{1}{x}$ функция юқоридан чегараланган эмас;

б) $y=\dfrac{1}{x}$ функция қуйидан чегараланган эмас;

в) $y=x^2$ функция юқоридан чегараланган эмас;
г) $y=x^2$ функция чегараланган эмас.

3.10. Шундай функция қурингки, бу функция жуфт ҳам бўлмасин ва тоқ ҳам бўлмасин.

3.11. Ҳар қандай функцияни ҳам жуфт ва тоқ функцияларнинг йиғиндиси шаклида ёзиш мумкинми? $y = \sqrt{x}$ функцияни мисол сифатида қаранг.

3.12. Функциянинг монотонлигини исботланг:

а) $y = \sqrt{x}$; б) $y=x^3$.

3.13. Функция монотон функция бўла оладими (агар бўла олмаса, монотонлик оралиқларини топинг):

а) $y = \frac{1}{|x|}$; б) $y = x - [x]$; в) $y = \sqrt[3]{x^2}$; г) $y = \sqrt{5 - 4x}$;

д) $y = \begin{cases} -1, \text{ агар } x<0 \text{ бўлса} \\ 1, \text{ агар } x > 0 \text{ бўлса} \end{cases}$ е) $y = \frac{x+1}{x-2}$;

ж) $y = |x^2 - 3x + 2|$; з) $y = \sqrt{1 - x^2}$.

3.14. Иккита монотон функциянинг йиғиндиси монотон бўлмаслиги мумкинми?

3.15. Монотон ўсувчи функцияларнинг кўпайтмаси ҳамма вақт ҳам монотон ўсувчи функция бўладими?

3.16. [0;2] оралиқда берилган функцияни иккита монотон ўсувчи функцияларнинг айирмаси шаклида тасвирланг:

$$y = \begin{cases} x^2, \text{ агар } 0 \le x < 1 \text{ бўлса,} \\ 5, \text{ агар } x = 1 \text{ бўлса,} \\ x + 3, \text{ агар } 1 < x \le 2 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

3.17. Монотон бўлмаган функцияни иккита монотон функцияларнинг айирмаси шаклида тасвирлаш мумкинми?

3.18. $y=\{x\}$ функция даврий функция эканлигини исботланг. Унинг даврини топинг ва графигини ясанг.

3.19. Даври 2π бўлган $f(x)$ даврий функция $[-\pi;\pi]$ оралиқда $y = \begin{cases} 0, \text{ агар } -\pi \le x \le 0 \text{ бўлса,} \\ x, \text{ агар } 0 < x \le \pi \text{ бўлса} \end{cases}$ функция билан устма-уст тушади. $f(x)$ функция графигини ясанг.

3.20. Даври T=2 бўлган $f(x)$ даврий функция $[-1;1]$ оралиқда $y = \begin{cases} x + 1, \text{ агар } -1 \le x \le 0, \\ x, \text{ агар } 0 < x \le 1 \end{cases}$ функция билан устма-уст тушади. $f(x)$ функция графигини ясанг.

3.21. Даври T=3 бўлган f функция (0;3] оралиқда $y=2-x$ функция билан устма-уст тушади. $f(x)$ функция графигини ясанг.

3.22. Функцияларнинг графикларини айни бир координаталар системасида ясанг:

а) $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^4$, $y=x^5$;

б) $y=x$, $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\sqrt[4]{x}$, $y=\sqrt[5]{x}$.

Қуйидаги функцияларнинг графикларини ясанг:

3.23. $y=\sqrt{\frac{1}{x}}$. **3.24.** $y=\left[\frac{1}{x}\right]$ **3.25.** $y=[x^2]$.

3.26. $y=[\sqrt{x}]$. **3.27.** $y=\begin{cases} x^3, \text{ агар } x\le -1 \text{ бўлса,} \\ \frac{1}{x}, \text{ агар } -1< x<0 \text{ бўлса,} \\ x^2, \text{ агар } x\ge 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$

3.28. $y=\begin{cases} x^2, \text{ агар } x\le -1 \text{ бўлса,} \\ 2x-1, \text{ агар } -1<x\le 1 \text{ бўлса,} \\ \sqrt{x}, \text{ агар } x>1 \text{ бўлса.} \end{cases}$

3.29. $y=\begin{cases} x^2, \text{ агар } x\le -2 \text{ бўлса,} \\ \frac{1}{x^2}, \text{ агар } -2<x<0 \text{ бўлса,} \\ \sqrt{x}, \text{ агар } 0\le x\le 4 \text{ бўлса,} \\ x^2, \text{ агар } x\ge 4 \text{ бўлса.} \end{cases}$

3.30. $y=\begin{cases} x^3, \text{ агар } x\ge -2 \text{ бўлса,} \\ \frac{1}{x}, \text{ агар } -2<x<-1 \text{ бўлса,} \\ x^2, \text{ агар } -1\le x<2 \text{ бўлса,} \\ \sqrt{x}, \text{ агар } x\ge 2 \text{ бўлса.} \end{cases}$

3.31. $y=x^2+5|x-1|+1$. **3.32.** $y=|-3x+2|-|2x-3|$.

3.33. $y=|x^2-3x+2|-|2x-3|$. **3.34.** $y=(x+1)(|x|-2)$.

3.35. $y=\frac{2x+1}{2-x}$. **3.36.** $y=1-\frac{1}{|x|}$

3.37. $y=\frac{2x-6}{|3-x|}$. **3.38.** $y=\sin^2x+\cos^2x$.

3.39. $y=\frac{|x-1|}{1-x^2}$. **3.40.** $y=(\sin^2x+\cos^2x)^4-x^2+5$.

Қуйидаги функцияларга тескари функцияларни топинг ва тескари функцияларнинг графигини ясанг:

3.41. $y=3x-2$.

3.42. $y=-(x+2)^2-2$, $x\in(-\infty;-1)$.

3.43. $y=\frac{x+1}{x-1}$, $x\in(1;+\infty;)$.

3.44. $y=\sqrt{x^2-4}$, $x\in[2;+\infty)$.

Берилган функцияларга тескари функцияларни топинг. Тескари функцияларнинг ва унга тескари функцияларнинг графикларини айни бир координаталар системасида ясанг:

3.45. а) $y=2x$; б) $y=-3x$; в) $y=5x-1$; г) $y=3x-4$.

3.46. а) $y=\frac{3}{x-1}$; б) $y=\frac{2}{2-x}$; в) $y=\frac{3x}{2x-1}$; г) $y=\frac{1-x}{x+2}$

3.47. а) $y=(x+3)^2$, $x\leq-3$; б) $y=(x-4)^2$, $x\geq 4$;
в) $y=x^2+8x-4$, $x\geq 4$; г) $y=(x-4)^2$, $x\leq 1$.

3.48. а) $y=\sqrt{x-2}$; б) $y=\sqrt{3-x}$;
в) $y=4-\sqrt{x-1}$; г) $y=5+\sqrt{4-x}$.

3.49. Агар $A(1;2)$ нуқта $y=x^2+px+q$ параболанинг учи бўлса, p ва q ларни топинг.

3.50. Агар $M(-1;-7)$ нуқта ординаталар ўқини $N(0;-4)$ нуқтада кесувчи $y=ax^2+bx+c$ параболанинг учи бўлса, a, b, c ларни топинг.

3.51. Агар $y=ax^2+bx+c$ функциянинг графиги $A(1;4)$, $B(-1;10)$, $C(2;7)$ нуқталар орқали ўтса, $y=ax^2+bx+c$ функцияни топинг.

3.52. Учи $A(1;1)$ нуқта бўлган $y=ax^2+bx+c$ парабола $B(-1;5)$ нуқта орқали ўтади. Бу параболанинг абсциссаси 5 га тенг бўлган нуқтасининг ординатасини топинг.

3.53. $x=2$ тўғри чизиқ $y=ax^2-(a+6)x+9$ квадрат учҳад графигини ясанг.

3.54. $y=x^2-6x+a$ функциянинг энг кичик қиймати 1 га тенг. Функция графигини ясанг.

3.55. $y=-x^2+4x+a$ функциянинг энг катта қиймати 2 га тенг. Функция графигини ясанг.

3.56. $y=2x^2+(a+2)x+a$ функциянинг x_1 ва x_2 ноллари учун $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=3$ муносабат ўринли бўлса, унинг графифигини ясанг.

3.57. a нинг қандай қийматларида $y=-x^2+4x+a$ функциянинг қийматлари тўплами $y=\sqrt{2x-a}$ функциянинг аниқланиш соҳаси билан устма-уст тушади?

3.58. b нинг қандай қийматларида $y=2bx^2+2x+1$ ва $y=5x^2+2bx-2$ функцияларнинг графиклари битта нуқтада кесишади?

3.59. $y=x^2+6x-3$ ва $y=(x+3)^2-25$ функцияларнинг графиклари $x=a$ тўғри чизиқ билан кесишган. Кесишиш нуқталари орасидаги масофани топинг.

3.60. c нинг қандай қийматларида $y=cx^2-x+c$ ва $y=cx+1-c$ функцияларнинг графиклари умумий нуқтага эга бўлмайди?

3.61. b нинг $x^2-2bx+b+6=0$ тенглама

а) манфий илдизларга;

б) мусбат илдизларга;

в) ҳар хил ишорали илдизларга эга бўладиган барча қийматларини топинг.

3.62. a нинг қандай қийматларида қуйидаги тенгсизлик барча $x\in(-\infty;+\infty)$ лар учун ўринли бўлади:

а) $x^2-(a+2)x+8a+1>0$; в) $ax^2+4x+a+3<0$;

б) $\frac{1}{24}x^2+ax-a+1>0$; г) $ax^2-4ax-3\leq 0$?

3.63. Тенгсизлик b нинг қандай қийматларида ечимга эга эмас:

а) $x^2+2bx+1<0$; в) $bx^2+(2b+3)x+b-1\geq 0$;

б) $bx^2+4bx+5\leq 0$; г) $(4-b^2)x^2+2(b+2)x-1>0$?

3.64. Қуйидаги функцияларнинг графикларини ясанг ва уларнинг ёрдамида функцияларнинг ноллари, ишораси сақланадиган оралиқларини, функцияларнинг энг катта ва энг кичик қийматларини, қийматлари соҳаларини кўрсатинг:

а) $x=\begin{cases}3, \text{ агар } x\leq -4 \text{ бўлса,}\\ |x^2-4|x|+3|, \text{ агар } -4<x\leq 4 \text{ бўлса,}\\ 3-(x-4)^2 \text{ агар } x>4 \text{ бўлса;}\end{cases}$

б) $x=\begin{cases}8-(x+6)^2, \text{ агар } x<-6 \text{ бўлса,}\\ |x^2-6|x|+8|, \text{ агар } -6\leq x<5 \text{ бўлса,}\\ 3, \text{ агар } x\geq 5 \text{ бўлса;}\end{cases}$

в) $x=\begin{cases}|||x|-1|-1|, \text{ агар } |x|<2 \text{ бўлса,}\\ \sqrt{|x|-2}, \text{ агар } |x|\geq 2 \text{ бўлса;}\end{cases}$

г) $x=\begin{cases}2-\sqrt{4-|x|}, \text{ агар } |x|\leq 4 \text{ бўлса,}\\ \dfrac{8}{|x|}, \text{ агар } x>4 \text{ бўлса.}\end{cases}$

3.65. $f(x)=x^2$-$6x$ функция берилган. Қуйидаги функцияларнинг графикларини ясанг:

а) $y=f(x)-2$; б) $y=f(x-2)$; в) $y=2f(x)$;

г) $y=f(2x)$; д) $y=-f(x)$; е) $y=f(-x)$;

ж) $y=f(|x|)$; з) $y=|f(x)|$; и) $y=|f(|x|)|$.

3.66. Қуйидаги функцияларнинг энг катта қийматини топинг:

а) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$; б) $y=\dfrac{x}{1+x+x^2}$.

3.67. $y = \frac{x^2 + 3}{1 + x}$ $(x>-1)$ функциянинг энг кичик қийматини топинг.

3.68. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(t) = \frac{t^2}{t - 1}$ бўлса, $f(g(t))$ ни топинг.

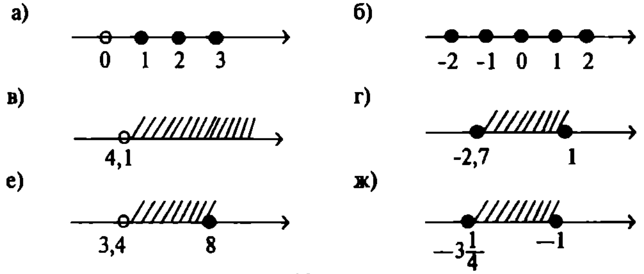
3.69. $f(x) = \frac{\sqrt{x - 1}}{x}$, $g(t) = \frac{2t^2 - 2t + 1}{(t-1)^2}$ бўлса, $f(g(t))$ ни топинг.

3.70. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x + 1}}$, $g(t) = \frac{t^2 - \sqrt{t}}{t}$ бўлса, $f(g(t))$ ни топинг.

ЖАВОБЛАР

I б о б.

1.1. {Тошкент, Андижон, Бухоро, Жиззах, Қашқадарё, Навоий, Наманган, Самарқанд, Сурхондарё, Сирдарё, Фарғона, Хоразм, Қорақалпоғистон}.
1.2. {С, Е, Р, Қ, У, Ё, Ш, Ҳ, Ў, Л, К, А, М, Э, Г, Б, Х, Т, Н, Ж, З, И, Д, Й, Я, Ф, О, П, В, Ғ, Ч, Ъ}. **1.3.** {1, 9, 2}. **1.4.** {10∈B, 136∈B}. **1.5.** $S=\{-3; -2; -1; 4\}$, $S_1=\{3; 2; 1; -4\}$. **1.6.** {Б, Ў, Щ, В, А, Қ, Т, Д, Н, У, М, И, Л, Ф, О, Й}. **1.7.** а) {1, 2, 3, 4}; б) $\{-\frac{7}{4}\}$; {0; 12}; г) $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$; д) { 1; 2} ; е {1; 2; 3}. **1.8.**



22-расм.

1.9. а) {111, 113, 131, 133, 311, 313, 331, 333}; б) {135, 153, 315, 351, 513, 531}; в) {104, 140, 203, 302, 320, 401, 410, 500}; г) 1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91}. **1.10.** а), б). **1.12.** д). **2.1.** а) $B\subset A$, б) $Д\not\subset A$, **2.3.** {3}, {6}, {9}, {12}, {3; 6}, {3; 9}, {3; 12;}, {6; 9}, {6; 12}, {9; 12}, {3; 6; 9}, {3; 6; 12}, {3; 9; 12}, {6; 9; 12}, ∅, *A*. **2.4.** а) $A\subset B$; б) $C\subset Д$; в) $E\subset F$; г) $K\not\subset M$, $M\not\subset K$. **2.6.** а) $B\subset A$; б) $A\subset B$; в) $A\subset B$; $B\subset A$; г) $A\subset B$; д) $A\subset B$; е) $B\subset A$; ж) $B\subset A$. **2.7.** а) тўғри; б) нотўғри; в) нотўғри; г) тўғри. **2.8.** а) $A=B$; б) $A\neq B$; в) $A\neq B$; г) $A=B$. **3.5.** [3; 5]. **3.6.** $P\cup E$ = {а, б, в, г, д, е, ж, з, к}. **3.8.** а) $A\cup B=\{x \mid x=4k, k\in Z\}$. **3.11**. $A\setminus B=\{x \mid x\in[-5; 3)\cup(3; 4)\cup(4; 5)\cup(5; 6)\cup(6; 7)\cup(7; 8)\cup(8; 9)\cup(9; 10)\}$. **3.15.** $A=\{x \mid x=2k, k\in Z\}$. **3.16.** $A=\{x \mid x=3k+1, x=3k+2, k\in Z\}$.
4.1. 20 киши. **4.2.** 13 киши. **4.4.** 68 киши. **4.5.** 4 та.

II б о б.

1.1. 1875. **1.2.** 51215. **1.3.** 89. **1.4.** 475385. **1.5.** 73450. **1.6.** 13174. **1.7.** 68654. **1.8.** 933333. **1.9.** 249480. **1.10.** 27396. **1. 12.** { 7, 14, 21}. **1. 13.** {117342, 1897524}. **1.15.** Ҳаммасига. **1.16.** k = 2431 бўлиши мумкин, k∈{15; 18}. **1.17.** k = 1,3, 5, 7, 15, 21, 35, 105. **1.25.** а) 1, 11, 19, 209; б) 1, 11, 13, 143; в) 1, 11, 13, 17, 143, 187, 221, 2431; г) 1, 11, 13, 19, 143, 209, 247, 2717. **1.26.** а) 1; 11; б) 1; 11; в) 1; 11; 13; 143; г) 1; 11; 13; 143. **1.33.** а) 1; 13; 17; 221; б) 1; 17; 19; 23; 323; 391; 437; 7429. **1.34.** 8 та. **1.36.** а) 2; б) 5555; в) 20; г) 1; д) 1; е) 28; ё) 600. **1.40.** 1. **2.6.** а) $70=23\cdot3+1$; б) $180=20\cdot9$; в) $200=11\cdot17+13$; г) $76=8\cdot9+4$ **2.7.** а) $5=0\cdot9+5$; в) $9=0\cdot18+9$. **2.9.** $q_1=-q-1$; $r_1=b-r$. **2.13.** а) $n=3$, $n=5$; б) $n=3$; в) ҳеч бир қийматида; г) $n = 3$, $n = 9$; д) $n = 3$, $n = 5$, $n = 9$; е) ҳеч бир қийматида; ё) $n = 3$, $n = 9$; ж) $n = 3$, $n = 5$. **2.15.** 4. **2.17.** ё) 1; ж) 1; к) 5. **3.32.** а) $\frac{5}{6}$; б) 1; в) 9. **4.9.** в) 3. **4.12.** A>B. **4.13.** Кўрсатма: a ва b сонлари орасида S_1 рационал сон топилишини исботланг. Агар S сони $\frac{a}{\sqrt{2}}$ ва $\frac{b}{\sqrt{2}}$ сонлари орасидаги рационал сон бўлса, $\sqrt{2}S$ сонини изланган c сон сифатида олиш мумкин. **4.15.** а) , г); д); ж). **5.3.** б) -3; г) 0,8; д) 15. **5.5.** а) $a=b$ ёки $a=-b$; в) $b\in(-\infty; 0]$. **5.11.** $|a|+|b|+|c|+|d|\neq 0$. **5.12.** $|a-b| + |b-c| + |a-c| \neq 0$. **5.13.** $|a-b| + |b-c| + |a-c| \leq 0$. **5.15.** а) $x\in(-1; 5)$; г) $x\in[-1.25.; -0.25]$ **5.16.** ж) 3; з) -4; и) 3; к) 14. **5.18.** а) $x\in\left[7; 8\frac{1}{3}\right)$ в) $x\in[-4,5; -4)$. **5.19.** а) $\{-2; -1\}$. Кўрсатма: $0\leq\frac{x-1}{2}-x<1$ нинг бутун ечимларини топинг. г) $\varnothing$. **5.25.** а) 1; б) $\frac{1}{3}$; в) 5. **5.28.** а) 25%; б) 60%; в) 250%. **5.31.** 1,75 кг. **5.33.** 240 та. **5. 36.** 960 та. **5.41.** 9 м ва 10,8 м. **5.42.** 8,8 м ва 11 м. **5.43.** 21%. **5.45.** 19%. **5.48.** 2 йилдан кейин. **5.49.** 25 кундан кейин. **5.50.** 20 км; $5\frac{1}{4}$ соат. **5.51.** 4.

III б о б.

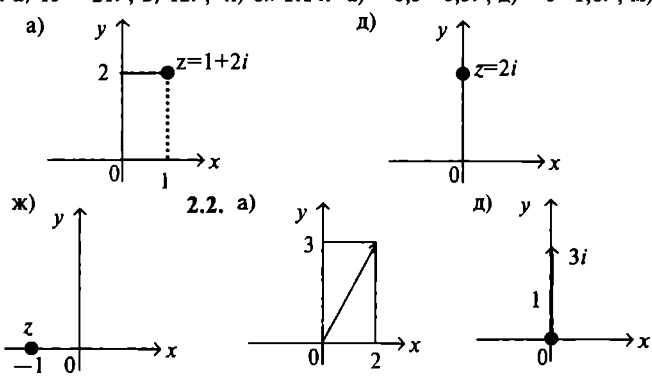
1.1. а) $\mathrm{Re}(z) = -5$, $\mathrm{Im}(z) = 8$; з) $\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Im}(z) = 8$; и) $\mathrm{Re}(z) = 4$, $\mathrm{Im}(z) = 0$. **1.2.** а) $-4 + 8i$; в) 1,2. **1.5.** а) $\bar{z} = -3 - 5i$; в) $\bar{z} = -3 + 5i$; г) $\bar{z} = 3 - 5i$; д) $\bar{z} = 3i$; е) $\bar{z} = 4{,}2$. **1.6.** а) $1 + i$; б) 8; в) 0; ж) $6 - 9i$; з) $4 + 2i$. **1.7.** а) $1+\frac{2}{3}i$; б) $1+i$; в) $1+3\frac{1}{9}i$; г) $4+13i$. **1.8.** а) $-13+11i$; д) $3\frac{5}{9}i$; е) $\frac{-1-\sqrt{2}}{2}+\frac{-1-\sqrt{2}}{2}i$; ё) $\frac{67+5\sqrt{2}}{15}+i$ **1.9.** а) $-9+19i$; ё) 13.

1.10. б) $0{,}4 - 2{,}2i$; з) $12 + 3i$; и) $\frac{4}{51}-\frac{1}{51}i$ **1.11.** а) $a^2+4b^2 = (a-2bi)(a+2bi)$; л) $a^{2n} + b^{2k} = (a^n - ib^k)(a^n + ib^k)$.

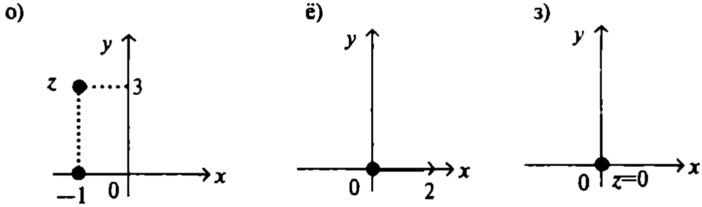
1.12. $$i^n = \begin{cases} i, \text{ агар } n = 4k+1,\ k = 0, 1, 2, \ldots \text{ бўлса,} \\ -1, \text{ агар } n = 4k+2,\ k = 0, 1, 2, \quad \text{бўлса,} \\ -i, \text{ агар } n = 4k+3,\ k = 0, 1, 2, \quad \text{бўлса,} \\ 1, \text{ агар } n = 4k,\ k = 0, 1, 2, \quad \text{бўлса.} \end{cases}$$

1.13. а) $13 + 21i$; в) $12i$; л) $8i$. **1.14.** а) $-6{,}5-6{,}5i$; д) $-3+1{,}8i$; м) i.

2.1.



23-расм.



23-расм (давоми).

2.3. а) $|z| = 5$; д) $|z| = 3\sqrt{2}$; ё) $|z| = \sqrt{2}$; з) $|z| = 1$; н) $|z| = 4$; о) $|z|=|b|$; п) $|z| = 1$. **2.4.** а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) 0; д) $\frac{\pi}{6}$; е) $\frac{3\pi}{2}$; ё) $\frac{3\pi}{4}$; ж) $\frac{3\pi}{6}$; з) 0; и) $\frac{\pi}{2}$; к) π. л) $\frac{3\pi}{2}$; м) $\frac{3\pi}{2}$. **2.5.** а) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$; б) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$; в) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; г) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; д) $2(\cos\pi + i\sin\pi)$; е) $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$; ё) $\cos 0 + i\sin 0$; ж) $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3}{2}\pi$; з) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; к) $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$; л) $\sqrt{11}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; м) $\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$; н) $2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. **2.6.** $-3-4i=5\left(\cos\left(\pi + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)$.
2.7. $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ **2.8.** $z = \cos\frac{16\pi}{17} + i\sin\frac{16\pi}{17}$. **3.1.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$; в) $3\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ **3.2.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{399} + i\sin\frac{2\pi}{399}\right)$; г) $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ **3.3.** а) 1; в) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; г) $\cos\frac{3\pi}{7} + i\sin\frac{3\pi}{7}$; д) $64 + 64\sqrt{3}\,i$. **3.4.** а) $z_0 = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$; $z_1 = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right)$; в) $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. **4.2.** а) $x \in R$; б) $x \in \varnothing$; в) 1; г) 2. **4.3.** $x = -\frac{2}{3}$, $y = -\frac{28}{9}$ **4.4.** а) -2^{10}; б) $-2^{10}(1-i)$.

4.9. а) $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$; б) $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

IV б о б.

1.2. б) $59\frac{3}{7}$; в) $\frac{7}{416}$. **1.3.** м) 45; н) 222. **1.5.** а) $27x^6y^3z^3$; е) $243x^5z^{20}$. **1.6.** г) $\frac{1}{27}$; ё) $\frac{11}{13}$; ж) $1\frac{3}{14}$ **1.8.** а) a^3+x^2 ; в) $5a-12x$; ж) $2x^3y + 32xz^2$. **1.12.** б) $\frac{1}{2}$; г) 3; ё) 192. **1.15.** $a + b + c = 0 \Rightarrow c = -a - b \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 - (a + b)^3 = -3a^2b - 3ab^2 = 3ab(-a - b) = 3abc$.

1.17. $a + b = \begin{cases} |a|, \ a\neq 0, \ b = 0 \text{ да} \\ |b|, \ a=0, \ b\neq 0 \text{ да.} \\ 0, \ a=b=0 \text{ да.} \end{cases}$ **2.2.** а) $3^{1999} + 147$. г) 17.

2.3. б) $a = -7$. **2.4.** а) 16; г) 84. **2.5.** б) $a = 1$, $\forall b \in R$; г) $a = 0$, $b = 4$. **2.6.** $a = 3$; $b = -7$; $c = 4$. **2.8.** а) 12; в) 14 **2.10.** а) $f(x)g(x) = 20x^5 + 16x^3 + 4x^2 + 8x$; г) $f(x)g(x) = 26x^5 + 73x^4 + 100x^3 + 33x^2 + 12$.

2.11. а) $P(x)=D(x)(x+1)+2$; б) $P(x)=D(x)(x^2+4x+1)+2$;
в) $P(x) = D(x)(x^2+2x+2)+3x+4$; г) $P(x) = D(x)(x^2+3x+1)+3x+4$;
д) $P(x) = D(x)(3x^2+5x-8)-5x^2+14x+2$; и) $P(x) = D(x)\cdot(x^2+3x+5)$;
к) $P(x) = D(x)\cdot(x^3+4x)$. **2.12.** а) $x+1$; б) x^2+1; в) x^3+1; г) x^2-2x+2; д) x^3-x+1; е) $x+3$; ж) x^2+x+1; з) 1.

V б о б.

1.1. а) $\{2\}$ б) $\varnothing$; в) $\{1 \quad 2\}$ г) $\{-3; 3\}$; д) $\{-\frac{3}{2}\}$; е) $\varnothing$; ё) $\{4, 5\}$; ж) $\{13\}$; м) $\varnothing$; н) $\{0; 3\}$; о) $\{-5; 9\}$; п) $\{1\}$. **1.2.** а) $\{x | x \neq -2\}$; б) R; к) $\{x | x \in R, x\neq 1, x\neq 7\}$; м) R; о) R. **1.3.** а) $\{(x; y) \ x\in R, y\in R, x \neq 0, x\neq y\}$; в) $\{(x; y) | \ x\in R, y\in R, y \neq x^2\}$; д) $\{(x; y) | \ x\in R, y\in R, x\neq 2, x\neq 3, y\neq 0\}$; ё) $\{(x; y) | \ x\in R, y\in R, x \neq \pm y\}$; к) $\{(x; y) | \ x\in R, y\in R\}$ **1.4.** а) $-\frac{a}{2}$; в) $\frac{x-2m}{x+2m}$; г) $\frac{2a+5}{a+2b}$; к) $\frac{1}{x+5}$; л) 1. **1.6.** а) $\frac{a-6}{6}$; б) $\frac{5x-3a}{4}$; в) $\frac{41a-5}{12}$; г) $\frac{a^2+x^2}{2a}$; д) $-\frac{x^2+c^2}{2x}$ **1.7.** а) $\frac{a+x}{x}$; б) $\frac{2y-x}{y}$; в) $-\frac{2a+x}{ax}$; д) $\frac{x-5}{5x}$. **1.8.** в) $\frac{2x}{(1-3a)(x+2)}$; г) $\frac{7x^2}{(2x-1)(2y+3)}$

1.9. а) $\frac{y(x-y)}{x^2}$ б) $\frac{a(a+b)}{3b}$ е) $-\frac{a}{xyb}$; и) $\frac{1}{axy}$ **1.10.** в) $\frac{b}{4a}$; д) $\frac{x+2}{6}$; з) $\frac{a-b}{a+b}$; к) $9c^2 - b^2$. **1.12.** б) $-2x$; в) $q^2 - pq$; г) $-\frac{1}{4x}$; л) $\frac{30x^2+6y^2-16xy}{x(x^2+y^2)}$; е) 2 ж) $2x(x+y)$ з) $a - 2$. **1.13.** а) $\frac{1}{x^2+x+1}$ б) $\frac{1}{x^7+1}$; в) $\frac{a}{xy-a^2}$; г) $\frac{x^{11}-1}{x^{11}}$ **1.14.** 1 ва 9. **2.2.** а) $x \leq 0$; б) $x\in R$; в) $x\in R$; г) $x\in R$; д) $x\in R$; е) $x\in R$; ж) $x\in R$; з) $x\in R$; и) $x\in\varnothing$; к) $x\in R$; л) $x\in R$; м) $x = 3$ **2.3.** а) $x \leq 2$; б) $x \geq -3$; в) $x \geq 3$; г) $x \leq 4$; д) $x = 3$; е) $x = 3$; ё) $x \in\varnothing$; ж) $x = 1$; з) $x = -8$; и) $x= 8$; к) $x\in\{2; 4\}$; л) $x=3$.
2.4. а) 44; б) -15; в) 6; г) 6; д) 630; е) 120; ж) 60; з) 0,015.

2.5. а) $\frac{6}{7}$; б) $-\frac{4}{3}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{3}{2}$; д) $\frac{5}{8}$; е) $\frac{4}{5}$; ж) $\frac{3}{5}$; з) $\frac{1}{3}$

2.7. а) 225; б) 225; в) -25; г) $\frac{1}{9}$; д) $-x$; е) x^2; ж) x^2+1; з) x^3.
2.8. а) $\sqrt[9]{16}$; б) $\sqrt[12]{76}$; в) $\sqrt[15]{4}$; г) $\sqrt[21]{25}$; д) $\sqrt[21]{x^2}$; е) $\sqrt[6]{x}$; ж) $\sqrt[12]{x}$; з) $\sqrt[9]{x}$.
2.9. а) $\sqrt[4]{8}$; б) 4; в) $\sqrt[3]{-32}$; г) 2; д) $\sqrt[4]{x^3}$; е) x^3; ж) $\sqrt[4]{(x+2)^5}$; з) x^8.
2.10. а) $\sqrt[6]{27}$ ва $\sqrt[6]{16}$; в) $\sqrt[4]{25}$ ва $\sqrt[4]{6}$; з) $\sqrt[20]{(x-y)^4}$ ва $\sqrt[20]{y^5}$.
2.11. а) Ҳа; б) Йўқ; в) Ҳа; г) Йўқ; д) Йўқ; е) Ҳа; ж) Йўқ; з) Ҳа.

2.12. а) $x\in Q$; б) $\{x|x=2k,\ k\in Z\}$; в) $x\ge -3$; г) $x\in R$; д) $x>0$; е) $x\in R$; ж) $x\in[-1;1]$; з) $x\neq\pm1$.

2.14. е) 1989; ж) $\frac{1}{8}$ **2.15.** а) $c^{\frac{2}{3}}$; б) $\sqrt{b}$; в) $\frac{1}{m}$; г) y^3

2.16. д) $7\sqrt{2}$; ж) $2\sqrt[4]{3}$; и) $|x^2-2|\sqrt{y}$; л) $(x-1)\sqrt[7]{z^2}$; м) $(y+1)^2\sqrt[5]{5x^2}$.

2.17. а) $\sqrt{80}$; б) $\sqrt[3]{-54}$; в) $-\sqrt[4]{162}$; г) $\sqrt[4]{96}$; д) $-\sqrt{x^2y^3}$; е) $\sqrt[5]{x^5y^3}$; ж) $\sqrt[4]{x^8y^3}$; з) $-\sqrt[4]{x^{12}y^3}$; и) $\sqrt[4]{(x-1)^8(y-2)}$; к) $-\sqrt[4]{(x-1)^{12}(y-2)}$; л) $-\sqrt[4]{x^4y}$; м) $-\sqrt{(7-4\sqrt{3})xy^3}$

2.18. а) $\sqrt{2}$; б) $6\sqrt[3]{3}$; з) $2\sqrt[4]{8}$. **2.19.** а) $2\sqrt{2}$; в) $\sqrt[30]{3^{13}}$; е) $\sqrt{\sqrt{2}+1}$; з) $\sqrt[9]{32}$.
2.20. а) $2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$; г) $3\sqrt[3]{4}>3\sqrt[3]{2}$; д) $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$; ж) $\sqrt{8}<\sqrt[3]{19}$.
2.21. а) 20; б) $2\sqrt[12]{2}$; в) 6; з) $\sqrt[4]{12}$. **2.22.** а) $\sqrt[6]{2}$; б) $\sqrt[3]{4}$; в) $\sqrt{6}$; г) $\sqrt[12]{\frac{16}{27}}$; д) $\frac{1}{\sqrt[12]{a}}$; е) $\sqrt[18]{a}$ **2.23.** а) $x\sqrt[3]{16x}$; б) $24x^2$; в) $36x^2-9$; $\left(|x|\ge\frac{1}{2}\right)$
г) x^{16} е) $\sqrt[3]{(2+xy^2)^2}$ ж) $(xy+z)\sqrt{xy+z}$ **2.24.** а) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{5}{6}\sqrt[3]{18}$;
в) $5+2\sqrt{6}$; г) $2-\sqrt{2}+\sqrt{6}$; д) $4+\sqrt[3]{75}+\sqrt[3]{45}$; л) $\frac{2(\sqrt{a}-\sqrt{x})}{a-x}$
н) $\frac{(x-y)\sqrt{x+y}}{x+y}$; о) $(1+\sqrt{a})\sqrt{1-\sqrt{a}}$ **2.25.** а) $\sqrt{37}-\sqrt{2}$; б) $\sqrt{23}-\sqrt{6}$;
в) 2; г) $2\sqrt{5}$ **2.26.** а) тўғри; б) нотўғри; в) тўғри; г) тўғри. **2.27.** $\frac{1}{8}$
2.28. а) $x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}z^{-\frac{1}{3}}$; б) $x^{\frac{2}{7}}y^{\frac{1}{2}}$; в) 0; г) $\frac{b^4}{a^3}\sqrt{\frac{3\sqrt{2b\sqrt[4]{b}}}{\sqrt[4]{a^7}}}$; д) $\frac{a}{b}$ е) $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{9}}$
2.30. г) $\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{2}$ **2.31.** 2. **2.32.** а) $a\sqrt[4]{b}(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})$; б) 27; в) -1, агар $0<a\le1$ ва $-\left(\frac{\sqrt{1-a^2+1}}{a}\right)^2$, агар $-1<a<0$; г) 3; д) $\sqrt[6]{a}$; е) $9a$; ж) $\frac{x^2}{2x-1}$;
з) $\sqrt[2]{(a-b)^2}$. **2.33.** 1. **2.34.** 4.

VI боб.

1.1. а) $\frac{a-1}{3}$; б) $a=1$ да ечим йўқ, $a\neq1$ да $\frac{5}{a-1}$; г) $a=\pm1$ да x ихтиёрий сон, $a\neq\pm1$ да $x=0$. **1.3.** Йўқ. **1.4.** Йўқ. **1.5.** 15 йилдан кейин. **1.7.** а) $-4{,}5$; б) исталган сон; в) -1; г) илдизи йўқ. **1.9.** а) $a\neq1$ да $x=a-1$, $a=1$ да x—исталган сон; б) $a\neq\pm1$ да $x=0$, $a=\pm1$ да x — исталган сон; е) $a\neq1$ да $x=\frac{b+1}{a-1}$; $a=1$, $b=-1$ да x — исталган сон; $a=1$, $b\neq-1$ да илдиз йўқ. **2.1.** д) $(x-3)^2-1$; е) $a(x-2a)^2+3$; з) $\left(x+\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{(a-b)^2}{4}$. **2.7.** Йўқ. **2.10.** Кўрсатма: $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$, $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$. **2.17.** з) $a(x^2-(a+b)x+ab)=0$, $a\in R$, $a\neq0$. **2.18.** $84x^2-18x-30=0$. **2.19.** $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-3=0$. **2.20.** а) Кўрсатма: $(x-2-\sqrt{3})(x-a)=0$. Тенгламанинг чап томонини квадрат учҳад кўринишида тасвирланг, бу ерда $\alpha\in R$. **3.1.** -4, 5. **3.2.** 1. **3.3.** 15. **3.4.** $x=5$. **3.5.** $x\in R$, $x\neq\frac{2}{3}$ **3.6.** $x\in R$, $x\neq-2$. **3.7.** $a\neq-c$, $c\neq0$ да $x=\frac{a-c}{a+c}$; $a=-c$, $c=0$ да $\varnothing$. **3.8.** $a\neq1$, $a\neq2{,}25$, $a\neq-0{,}4$ да $x=\frac{31-2a}{4a-9}$; $a=2{,}25$,

$a=-0{,}4$ да $\varnothing$; $a=1$ да маънога эга эмас. **3.9.** $-\frac{11}{7}$ ва 2. **3.10.** $\varnothing$. **3.11.** -4 ва 9. **3.12.** 0 ва 1. **3.13.** 1. **4.1.** Кўрсатма: $a^3+b^3=(a+b)^3-3(a+b)ab$. **4.2.** -1; 1; 8. **4.11.** -1; 2. **4.12.** -2; 1. **4.13.** $y=x^2+6x+1$ га нисбатан квадрат учҳад сифатида қаранг. **4.14.** $y=(x^2-x+1)^2$ га нисбатан квадрат учҳад сифатида қаранг. **4.15.** Кўрсатма: $2\cdot\frac{x^2+36}{x^2-36}=\frac{x+6}{x-6}+$ $+\frac{x-6}{x+6}$. **4.16.** -4; -2; -1. **4.17.** 1; $\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$. **4.18.** Кўрсатма: $40=8+32$. **5.1.** -1 ва 6. **5.7.** 0,2, $1\pm\sqrt{2}$. **5.10.** Кўрсатма: $x^2-5x+6=t$ деб олинг. **5.11.** Кўрсатма: $x^2+5x=t$ деб олинг. **5.15.** $\varnothing$. **5.16.** 5,5 ва 6. **5.17.** -5; 1; $-1\pm\sqrt{6}$. **5.18.** ± 2; $\pm\frac{\sqrt[4]{24}}{2}$. **5.19.** Кўрсатма: $x^2+2x=t$ деб олинг. **5.20.** -4; 2. **5.21.** $x_{1,2}=10\pm\sqrt{85}$, $x_{3,4}=5\pm\sqrt{10}$. **5.22.** $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{7}{2}$. **5.23.** $x=1$. **5.24.** $x_1=3$, $x_2=5$, $x_{3,4}=9\pm\sqrt{66}$ **5.25.** $x_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{97}}{6}$ **5.26.** $a=b$ да $x\in\mathrm{R}$, $x\neq a$; $a\neq b$ да $\varnothing$. **6.5.** $m=\pm\sqrt{15}$. **6.6.** $m\neq 2$ бўлса. 6.7. $a=b=-3$. **6.8.** $m=1$, $n=-30$. **6.9.** $2x+1$. **6.10.** $\frac{r_1-r_2}{a-b}x+\frac{r_1b-r_2a}{b-a}$. **6.11.** б) $\mathrm{P}(x)=\mathrm{D}(x)\cdot(x^2-x+3)$; в) $\mathrm{P}(x)=\mathrm{D}(x)\ (2x^3-2x^2-x-4)+6$; ж) $\mathrm{P}(x)=\mathrm{D}(x)\cdot(x^3-3x^2+8x-21)$; м) $\mathrm{P}(x)=\mathrm{D}(x)\ (x^4+x^3-3x^2-x-1)-4$. **6.12.** а) 2; б) 0; в) 3. **6.13.** $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-$ $-ab-bc-ac)$. Кўрсатма: $a^3+b^3+c^3-3abc$ ни a га нисбатан кўпҳад деб қаранг ва $a=-b-c$ сони шу кўпҳаднинг илдизи эканини текшириб кўринг. **7.1.** б) $x=2\pm i$; г) $x=-2\pm 3i$; е) $x=4\pm 5i$; з) $x=-0{,}5\pm i$; к) $x=1\pm\frac{1}{4}i$ м) $x=3\pm\sqrt{2}\ i$. **7.2.** а) $(x+1-$ $-2i)(x+1+2i)$; б) $(x-3i)(x-1+3i)$; г) $(5z+5-i)$. $(5z+5+i)$. **7.3.** а) $\pm 3i$; ± 2; ж) $z_{1,2}=\pm\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ $z_{3,4}=\pm\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ **7.4.** ax^2- $-4ax+13a=0$, $a\neq 0$, $a\in\mathrm{R}$. **7.5.** $ax^4-8ax^3-34ax^2-72ax+65=0$, $a\neq 0$, $a\in\mathrm{R}$. **7.6.** $a(x-2)(x^4 8x^3 34x^2-72x+65=0)$, $a\neq 0$, $a\in\mathrm{R}$. **7.7.** 3 каррали. **7.8.** а) $(x^2+3)(x^2-3x+3)(x^2+3x+3)$; б) $x^2(x-4i)(x+4i)$. **8.1.** а) 2; б) -5; 3; 6; в) рационал илдизи йўқ; г) $\frac{1}{2}$; д) $\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{2}$; е) -1; ж) -3; 2. **8.2.** а) -2; 1; б) -4; -2; -1; в) бутун ечимлари йўқ. **8.3.** а) $1\frac{2}{3}$; б) $\pm\frac{1}{4}\sqrt{2(\sqrt{73}-5)}$; в) $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{3}}$; г) $\pm\frac{1}{2}\sqrt{14}$; д) ± 2; е) ± 2; -3. **8.4.** а) -2; $\pm\sqrt{3}$; $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 2; в) 1; г) ± 1; $\frac{3\pm\sqrt{73}}{8}$; д) ± 1; $-\frac{2}{3}$; 2; е) ± 1 $\frac{7\pm\sqrt{73}}{4}$ **8.5.** а) $-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; б) -1; в) $\frac{1}{2}$ 2,5; г) $-\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{2}$; 3; д) 1; $a\pm\sqrt{a}$; е) -5; 2; 3; 4. **8.6.** а) 4; 5; б) -1; 5; $2\pm 2\sqrt{2}$; д) -4; 3; $\frac{1\pm\sqrt{145}}{2}$; е) -3; 4; $\frac{-1\pm\sqrt{145}}{2}$.

8.7. а) 1; б) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; $1+\sqrt{2}$. **8.8.** а) $\frac{-5\pm\sqrt{21}}{6}$; б) $\varnothing$; в) $\frac{-5\pm\sqrt{57}}{4}$; -1 ; 2 **8.9.** а) 1; б) 2; в) 1; -2; г) 5; -1; д) $\pm\sqrt{21}$; ± 3; е) $\varnothing$; ж) $\varnothing$; з) $\varnothing$. **8.10.** а) 2; 3; б) $\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$, $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$; в) -1 ; 3 ; $\pm\sqrt{3}$ **9.1.** а) -15; б) 3; д) 0; е) 0; ж) 1; з) $x^2(x^2-1)$. **9.2.** а) $a=6$; б) $a=-2$; в) 0; г) a — ихтиёрий сон. **9.3.** а) ± 2; б) 0; в) $\varnothing$. **9.5.** в) $x\in R$; г) $x\in R$. **9.6.** а) $8\frac{172}{495}$; б) 3,(13). **9.7.** а) -80; б) 6; в) -72; г) 0; д) 36; е) -90. **9.8.** а) $\frac{2}{3}$; б) 0 ва 6; г) $\varnothing$. **10.1.** а) $(4; -1)$; б) $\varnothing$; в) $(t; 5-t)$, $t\in R$; г) $(4; -3)$; д) $(6; 9)$; е) $\varnothing$; ж) $\left(t ; \frac{21t-40}{7}\right)$, $t\in R$. **10.2.** а) $(1; 2)$; б) $\varnothing$; в) $\left(t; \frac{7-2t}{3}\right)$, $t\in R$; г) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$; д) $\left(\frac{7}{11}; \frac{3}{13}\right)$. **10.3.** а) -23; б) 6; в) $2a-5$; г) $-4a+13b$. **10.4.** а) $\Delta_x=7$; $\Delta_y=-1$; б) $\Delta_x=-3{,}5$; $\Delta_y=30$ **10.5.** а) $(-5; 2)$; б) $(2; 1)$; в) $(6; 5)$; г) $(5; -2)$; д) $\varnothing$; е) $\varnothing$; ж) $\varnothing$; з) $\varnothing$; и) $(t; t-1)$, $t\in R$; к) $\left(t ; \frac{3t}{5}\right)$, $t\in R$ **10.7.** а) Агар $a\neq\pm 4$ бўлса, $\left(-\frac{12}{4-a} ; \frac{6}{4-a}\right)$ Агар $a=4$ бўлса, $\varnothing$. Агар $a=-4$ бўлса, $\left(t ; \frac{t+3}{2}\right)$, $t\in R$; б) $a\neq\pm3$ да $(2; 1)$, $a=\pm3$ да $\left(t; \frac{a-6+3t}{a}\right)$, $t\in R$; в) $a\neq\frac{1}{2}$ да $\left(\frac{a(2a-3)}{2(1-2a)} ; \frac{2a^2-a+1}{2(1-2a)}\right)$, $a=\frac{1}{2}$ да $\varnothing$. **10.8.** $a=1$, $b=-1$. **10.9.** $(1; -1)$, $(1; -2)$, $(-1; -1)$, $(-1; 2)$. **10.10.** $a=4$. **10.11.** $a=3$. **10.12.** а) $(1; 1; -1)$; б) $(1; -1; 1)$; в) $(-1; 1; 1)$; г) $(1; 1; 1)$; д) $(1; -1; -1)$; е) $(-1; -1; 1)$. **10.14.** а) $\varnothing$; г) $\left(3-2y ; y ; \frac{3y+1}{2}\right)$, $y\in R$. **11.1.** а) $(1; 0)$; $(0; -1)$; б) $(5/4; -1/8)$; $(-1; 1)$; е) $(-4; -5)$; $(6; -5)$. **11.2.** а) $(2; 3)$, $(3; 2)$; г) $(2; -3)$, $(3; -2)$. **11.3.** а) $\varnothing$; б) $\varnothing$; в) $(1-t; t)$, $t\in R$. **11.4.** а) $(-2; -4)$, $(-4; -2)$, $(2; 4)$, $(4; 2)$; б) $(2; 8)$, $(8; 2)$, $(-2; -8)$, $(-8; -2)$; в) $\left(-\frac{9}{5}; -\frac{16}{5}\right)$, $\left(\frac{9}{5} ; \frac{16}{5}\right)$; г) $(-3; -2)$, $(3; 2)$; д) $(-7; -3)$, $(7; 3)$; е) К ў р с а т м а. Бир жинсли тенглама ҳосил қилинг; ж) $(-3; -2)$, $(3; 2)$. **11.5.** а) $(1; 2)$, $(2; 1)$; б) $(-3 ; -5)$, $\left(-\frac{5}{3} ; -\frac{13}{3}\right)$, $\left(\frac{5}{3} ; \frac{13}{3}\right)$, $(3; 5)$; в) $(-4; -5)$, $(-3\sqrt{3}; -\sqrt{3})$, $(3\sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(4; 5)$; г) $(1; -1)$, $(3; -3)$, $\left(\sqrt{157}-13; \frac{\sqrt{157}-13}{2}\right)$, $\left(-13-\sqrt{157}; -\frac{13+\sqrt{157}}{2}\right)$; д) $(2; -3)$, $(t; 1)$, $t\in R$; е) $(-1; 3)$, $(t; 2)$, $t\in R$; ж) $(2; -1)$, $(-1; t)$, $t\in R$; з) $(-1; -2)$, $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $(1; 2)$, $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$. **11.6.** а) $(5; 1)$, $(1; 5)$, $(3; 2)$, $(2; 3)$; б) $(2; 1)$, $(-1; -2)$, $(1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2})$, $(1+\sqrt{2}; 1-\sqrt{2})$; в) $(-2; -4)$, $\left(\frac{5}{3} ; \frac{10}{3}\right)$; г) $(1; 4)$, $(-5; -4)$, $(5; -4)$, $(-1; -4)$. **11.7.** а) $(2; 3)$, $(3; 2)$; б) $(-1; -2)$, $(2; 1)$; в) $(-1; 2)$, $(2; -1)$. К ў р с а т м а. Иккинчи тенгламани 3 га кўпайтириб, биринчи тенгламага қўшинг; г) $(4; 8;)$, $(8; 4)$; д) $(-3; -1)$, $(-1; -3)$, $(1; 3)$, $(3; 1)$; е) $(2; -1)$, $(-1; 2)$; ж) $(-3; -2)$, $(-2; -3)$, $(2; 3)$, $(3; 2)$. К ў р с а т м а. Биринчи тенгламадан $x^2+y^2=\frac{78}{xy}$ ни топамиз. Бу тенгламани квадратга кўтаринг. **11.8.** а) (1; 3; 9), (9; 3; 1); б) $\left(\frac{12}{7}; \frac{12}{5}; -12\right)$; в) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; \frac{1}{\sqrt[3]{3}}; \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$; г) (2; 1; 3), (—2; —1; —3). **12.1.** 28 м. **12.2.** 2.5. т. **12.3.** 8 кунда. **12.4.** 21 қатор. **12.5.** 20 км/соат. **12.6.** 20 км/соат. **12.7.** 7 км/соат. **12.9.** 5 соат, 7 соат. **12.10.** 30 кунда, 20 кунда. **12.12.** 18 км/соат, 24 км/соат. **12.14.** 11 та. **12.15.** 22 киши. **12.16.** 30 ўқувчи (Эслатма; 12.13. масалада 42 та вектор ҳосил бўлади). **12.17.** 7 та. **12.18.** саккиз бурчак. **12.19.** 40 км/соат. **12.20.** 30 км/соат. **12.21.** 10 см ва 4 см. **12.22.** 15 см; 8 см. **12.24.** 12 см; 16 см; 20 см. **12.25.** 36.4. **12.26.** 40 км/соат. 30 км/ соат. **12.27.** 36 км/ соат; 24 км/соат. **12.28.** 36 км/соат; 30 км/соат. **12.29.** 10 соат; 6 соат. **12.30.** 60 соат; 84 соат. **12.31.** 18 ва 12. **12.32.** 15 ёки 95. **12.33.** 32. **13.1.** $(-\infty; -1)$.

13.2. $(-4,6; +\infty)$. **13.3.** $(2\frac{13}{15}; +\infty)$. **13.4.** $(-\infty; 2\frac{28}{29})$. **13.5.** $(-\infty; -1{,}5)$.

13.6. $(-\infty; 3)$. **13.7.** $[1; +\infty)$. **13.8.** $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$. **13.9.** $(3; +\infty)$. **13.10.** $(-\infty; -2)$.

13.11. $(-\infty; -1\frac{2}{3})$. **13.23.** $y > \frac{3}{a^2+1}$.

13.26. $\begin{cases} a > 0 \text{ да } x < \frac{b}{a}; \\ a = 0,\ b \le 0 \text{ да } \varnothing; \\ a = 0,\ a > 0 \text{ да } x \in R; \\ a < 0 \text{ да } x > \frac{b}{a} \end{cases}$

13.35. а) y<3 да; б) y>7 да; в) $y > \frac{3}{17}$ да; г) y<0.1 да. **13.36.** $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. **13.37.** $[1; 5]$. **13.38.** $\left[-\frac{2}{5}; 1\right]$. **13.39.** $(0; 1)$. **13.40.** $\varnothing$. **13.41.** $(-\infty; +\infty)$. **13.42.** $\varnothing$. **13.44.** $a \in (5/3; \infty)$.

13.47. $\begin{cases} k > 0 \text{ да},\ x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{1+4k}}{2k}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{1+4k}}{2k}\right); \\ k = 1 \text{ да},\ x \in (-\infty; -1); \\ -\frac{1}{4} < k < 0 \text{ да},\ x \in \left(\frac{1-\sqrt{1+4k}}{2k}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{1+4k}}{2k}\right); \\ k \le -\frac{1}{4} \text{ да}, \varnothing. \end{cases}$

13.49. $\begin{cases} |k| > 2\sqrt{6} \text{ да},\ x \in \left(\frac{-k-2\sqrt{6}}{4}, \frac{-k+2\sqrt{6}}{4}\right), \\ |k| \le 2\sqrt{6} \text{ да}, \varnothing. \end{cases}$

13.50. $\begin{cases} k < 1 \text{ да},\ x \in (-\infty; 1-\sqrt{1-k}) \cup (1+\sqrt{1-k}; +\infty); \\ k = 1 \text{ да},\ x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty); \\ k > 1 \text{ да},\ x \in (-\infty; +\infty) \end{cases}$

13.57. $x \in \left[1; \frac{4}{3}\right]$. **13.58.** $\varnothing$. **13.59.** $\left(-\frac{2}{3}; 3\right)$. **13.60.** $x \in R$. **13.61.** $x \in (-\infty; -1) \cup (15; +\infty)$. **13.62.** $[-2; 1]$. **14.2.** $x \in (-\infty; +\infty)$. **14.4.** $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. **14.5.** $x \in (-\infty; -\ -) \cup (2\frac{1}{3}; +\infty)$. **14.8.** $x \in (-\infty; +\infty)$. **14.9.** $x \in (2; 5) \cup (12; +\infty)$. **14.10.** $x \in (-\infty; -7) \cup (-1; 4)$. **14.11.** $x \in (-\infty; -5) \cup (-1; 0) \cup (8; +\infty)$. **14.12.** $x \in (-48; 37) \cup (42; +\infty)$. **14.13.** $x \in (-\infty; -0.7) \cup (2.8; 9.2)$. **14.14.** $x \in (-17; -4) \cup (4; +\infty)$. **14.15.** $x \in (-\infty; -11) \cup (-\frac{2}{3}; 1)$. **14.16.** $x \in (-\infty; -5) \cup (0; 5)$. **14.17.** $x \in (-0.1; 0) \cup (0.1; +\infty)$. **14.18.** $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; 1) \cup (3; +\infty)$.

14.19. $x\in(-6;0)\cup(6;15)$. **14.20.** $x\in(-2;6)$. **14.21.** $x\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$. **14.22.** $x\in(-\infty;1)\cup(1;24)$. **14.23.** $x\in(-\infty;-7)\cup(21;+\infty)$. **14.24.** $x\in(-\infty;-4)\cup(8;+\infty)$. **14.25.** $x\in(-16;11)$. **14.26.** $x\in[-1;3)$. **14.27.** $x\in(-\infty;-4)\cup[6;+\infty)$ **14.28.** $x\in(1;2)\cup(4;+\infty)$. **14.29.** $x\in(-\infty;-1]\cup\{1;2\}\cup[4;+\infty)$. **14.30.** $x\in\{-2\}\cup[1;2]$. **14.34.** $x\in(-\infty;1)$. **14.35.** $(-\infty;-2)\cup(-2;1)\cup(4;+\infty)$. **14.36.** $x\in(-\infty;-5]\cup\{1\}\cup[2;7)\cup(7;+\infty)$. **14.49.** $(-\infty;+\infty)$. **14.50.** $(2;3)$. **14.51.** $(-3;1)$. **14.52.** $(-\infty;-2)\cup(-2;\frac{1}{2})\cup(1;+\infty)$. **14.53.** $(-2;-1)\cup(1;2)$. **14.54.** $[-3;3]$. **14.55.** $(-\infty;2)\cup(5;+\infty)$. **14.56.** $(-\infty;1)\cup(1.5;+\infty)$. **14.57.** $(-\infty;2.5)\cup(\frac{33}{8};+\infty)$. **14.58.** $(-6;3)$. **14.59.** $(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$. **14.60.** $(-3;1)$. **14.61.** $(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$. **14.63.** $(-\infty;+\infty)$. **14.64.** $(-\frac{1}{2};2)$. **14.65.** $[1;3]\cup(5;+\infty)$. **14.66.** $(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}})\cup(0;+\infty)$. **14.67.** $(-\infty;6)\cup[-2;0)\cup(3;+\infty)$. **14.68.** $(2;3)\cup(5;6)$. **14.69.** $(1;+\infty)$. **14.70.** $(-\frac{9}{2};-2)\cup(3;+\infty)$. **14.71.** $(-1;1)\cup(4;6)$. **14.72.** $(-\infty;-3)\cup(-\frac{\sqrt{7}}{2};\frac{\sqrt{7}}{2};)\cup(4;+\infty)$. **14.73.** $[1;2)\cup(3;4]$. **14.75.** $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **14.76.** $(-\infty;-2)\cup(-1;0)\cup(\frac{1}{2};+\infty)$. **14.78.** $(-5;1)\cup(2;3)$. **14.77.** $(-\infty;0)\cup(1;6)$. **14.79.** $(-\infty;4]\cup[-2;-1]$. **14.80.** $(-2;-1)\cup(2;3)$ **15.19.** $[1;\frac{4}{3}]$. **15.20.** $(-\infty;-1]\cup[15;+\infty)$. **15.21.** $[-2;1]$. **15.22.** R. **15.23.** $\varnothing$. **15.24.** $[-1;1]$. **15.25.** R. **15.26.** $\{1\}\cup[2;3]$. **15.27.** $x=-5/2$. **15.28.** $x=\pm2$. **15.31.** $x=4/3$. **15.32.** $x=-4{,}5$; $x=3{,}25$. **15.33.** $x=\frac{\sqrt{113-5}}{4}$. **15.34.** $x=-\frac{2}{3}$. **15.35.** $(-\infty;2/3]$. **15.36.** $[1;3]$. **15.37.** $x=0{,}5$, $x=3{,}5$. **15.38.** $[2;+\infty)$. **15.39.** a) $x=2$; $x=-6$. **15.40.** $[-2;1\frac{2}{3}]$ **15.41.** $\{0\}\cup(1;+\infty)$. **15.42.** $(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$. **15.43.** $[-2\frac{1}{6};1\frac{1}{6}]$. **15.44.** $[\frac{5}{6};+\infty)$. **15.45.** $[0;13]$. **15.46.** $\{-4;-2;0;2;4\}$ **15.47.** $[-3;3]$. **15.48.** $(-\infty;0]\cup[\frac{1}{2};+\infty)$. К ў р с а т м а. $|a-b|=|a|-|b|\Leftrightarrow(a-b)\,b\geq0$. **15.49.** $\{0\}$. **15.50.** $\{0;2\}$. **15.51.** $\{0\}$. **15.52.** $\{-1\}$. **15.54.** $\{1;4;\frac{1}{2}(5\pm\sqrt{13}\}$. **15.55.** $\{-\sqrt{3}\}$. **15.56.** $\{2;\frac{5}{2};\frac{9+\sqrt{17}}{4}\}$. **15.57.** $\{-\frac{2}{3};\frac{1}{2};2\}$. **15.58.** $\{3;4\}$. **15.59.** $\{\pm1;\pm3\}$. **15.60.** $(1;4]$. **15.61.** $\{1\frac{2}{3};-3\}$. **15.62.** $\{-5;1\frac{1}{3}]$. **15.63.** $\{\frac{1-\sqrt{5}}{2};1+\sqrt{2}\}$. **15.64.** $\{\frac{1-\sqrt{3}}{2}\}$. **15.65.** $a\leq0$ да $x=-a$; $a>0$ да $x=-7a$, $x=a$. **15.66.** $a>0$ да $\{-3a;a\}$; $a=0$ да $x\neq0$; $a<0$ да $\varnothing$. **15.67.** $a\neq0$ да $\{-\frac{5a}{3}\}$; $a=0$ да $(-\infty;+\infty)$. **15.68.** $a\leq0$ да $x=\frac{6a}{5}$; $a>0$ да $x=\pm2a$. **15.69.** $(3;1)$, $(\frac{5}{3};\frac{11}{3})$. **15.70.** $(0;-1)$, $(\frac{4}{5};\frac{7}{5})$. **15.71.** $(0;1)$. **15.72.** $(0;-1)$. **15.73.** $(-\frac{11}{19};\frac{23}{19})$, $(1;-1)$. **15.74.** $(c;4-c)$, бу ерда $c\in[0;1]$ **15.75.** $(2;1)$, $(0;-3)$, $(-6;9)$. **15.76.** $(\sqrt{2};2\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2};-2\sqrt{2})$. **15.77.** $\{-\frac{3+\sqrt{17}}{2}\}$. **15.78.** $a\in[\frac{2}{3};3-\sqrt{5}]$ да $\left(\frac{4a-a^2}{2a-4};\ \frac{a-4}{a-2}\right)$, $a\in((3-\sqrt{5};\ 2]$ да $\left(\frac{a^2-12a+8}{6a-4};\ \frac{a}{3a-2}\right)$. **15.79.** $a=7-4\sqrt{3}$ да $(0;1-2\sqrt{3})$, $a=7+4\sqrt{3}$ да $(0;1+2\sqrt{3})$, $a=1$ да $(6;-1)$. **16.1.** $(-1;1)$. **16.2.** $[-1;1]$. **16.3.** $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **16.4.** $(-\infty;-1]\cup[;+\infty)$. **16.5.** $\varnothing$. **16.6.** $\{0\}$. **16.7.** $\varnothing$. **16.8.** $(-\infty;+\infty)$. **16.9.** $(-\infty;+\infty)$. **16.10.** $\varnothing$. **16.11.** $\{1\}$. **16.12.** $\{\frac{3}{2}\}$. **16.13.** $(-\infty;+\infty)$. **16.14.** $x=4$. **16.15.** $(-\infty;+\infty)$. **16.16.** $(-\infty;4)\cup(4;+\infty)$.

16.17. $\{\pm1\}$. **16.18.** $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **16.19.** $R\backslash\{2\}$. **16.20.** $[-1;1]$. **16.21.** $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **16.22.** $[0;3]$. **16.23.** $(22;4)$. **16.24.** $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$. **16.25.** $(-\infty;-\frac{2}{3}]\cup[-\frac{1}{2};+\infty)$. **16.26.** $\left(\frac{11-\sqrt{57}}{4};\ \frac{11+\sqrt{57}}{4}\right)$ **16.27.** $(8;+\infty)$. **16.28.** $(-3;4)$. **16.29.** $(-\infty;-2)\cup(-1;+\infty)$. **16.31.** $[1;6]$. **16.32.** $\varnothing$. **16.33.** $(-\infty;-3]$. **16.34.** $[-2;3\frac{2}{3}]$. **16.35.** $[-3;5]$. **16.36.** $(-\frac{4}{7};\ +\infty)$. **16.37.** $(-\infty;1)\cup(7;+\infty)$. **16.38.** $(-\infty;1)$. **16.39.** $(-\infty;2)\cup(3,5;+\infty)$. **16.40.** $(-;1]\cup[3;+\infty)$. **16.41.** $(-\infty;-1)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$. **16.42.** $(2;3)\cup(3;+\infty)$. **16.43.** $(-\infty;-6)\cup(-3,5;+\infty)$. **16.44.** $(3;3\frac{1}{3})$ **16.45.** $[0;1\frac{3}{5}]\cup[2,5;+\infty)$. **16.46.** $(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup(-1;0]$. **16.47.** $(-\infty;2)$. **16.48.** $[\sqrt{6}-2;1)\cup(1;4]$. **16.49.** $(-\infty;1]\cup[5;+\infty)$. **16.50.** $[-1,0)\cup(0;1]$. **16.51.** $(-\infty;-\frac{2}{3}]\cup[-\frac{1}{2};2]$. **16.52.** $(-\infty;\frac{1+\sqrt{17}}{4}]$. **16.53.** $(1;3)$. **16.54.** $(1-\sqrt{3};2-\sqrt{2})$. **16.55.** $(-\infty;\frac{4-\sqrt{19}}{3})\cup(\frac{4+\sqrt{19}}{3};+\infty)$. **17.1.** $\varnothing$. **17.2.** $\varnothing$. **17.3.** $\varnothing$. **17.4.** $\varnothing$. **17.5.** $\varnothing$. **17.6.** $\varnothing$. **17.7.** $\varnothing$. **17.8.** $\varnothing$. **17.9.** $\varnothing$. **17.10.** $\varnothing$. **17.11.** $\varnothing$. **17.12.** $x=3$. **17.13.** $x=0,5$. **17.14.** $\varnothing$. **17.15.** $\{\frac{1}{2};1\}$. **17.16.** $\{-1;\ 2\}$. **17.17.** $\{-3;\ 2\}$. **17.18.** $\{-4;\ 3\}$. **17.19.** $x=6$. **17.20.** $x=3$. **17.21.** $x=3$. **17.22.** $x=8$. **17.23.** $x=28$. **17.24.** $x=0$. **17.25.** $x=4$. **17.26.** $x=19$. **17.27.** $x=3$. **17.28.** $x=6$. **17.29.** $x=-1$. **17.30.** $x=3$. **17.31.** $x=2$. **17.33.** $x=-1\pm2\sqrt{17}$. **17.34.** $\varnothing$. **17.35.** $x=-5$, $x=0$. **17.36.** $-3\frac{3}{8}$; 1. **17.37.** $-8;27$. **17.38.** 8; 27. **17.39.** $x=3$. **17.40.** $x=1$. **17.41.** $\{-\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\}$. **17.42.** $x=2,5$. **17.43.** $x=1\frac{2}{3}$ **17.44.** $x=8$. **17.45.** $x=5$. **17.46.** $x=\frac{7\pm\sqrt{153}}{16}$. **17.47.** $x=2$. **17.48.** $x=3$. **17.49.** $\varnothing$. **17.50.** $x=-61$, $x=30$. **17.51.** $x=8$, $x=8\pm4\sqrt{3}$. **17.52.** $x=-6$, $x=-5$, $x=-\frac{11}{2}$. **17.53.** $x=-1$. **17.54.** $x=0$. **17.55.** $x=3$; $x=4$. **17.56.** $x=0$. **17.57.** $x=9$. **17.58.** $x=2$; $x=3$. **17.59.** $x=-61$; $x=30$. **17.60.** $x=-109$; $x=80$. **17.61.** $x=-2\frac{2}{3}$; $x=1$. **17.62.** $x=-\frac{1}{3}$, $x=1$. **17.63.** $x=\pm4$. **17.64.** $x=-1$. **17.65.** $x=4$. **17.66.** $\varnothing$. **17.67.** $x=-1$; $x=40$. **17.68.** $[2;+\infty]$. **17.69.** $[5;8]$. **17.70.** $x=-\frac{1}{11}$ **17.71.** $x=\frac{5}{11}$ **17.72.** $x=\frac{\sqrt{5}}{2}$ **17.73.** $x=2$. **17.74.** $x=-5$; $x=2$. **17.75.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **17.76.** $a<0$ да $\varnothing$, $a\geq0$ да $x=a^2-1$. **17.77.** $a<-3$ да $\varnothing$, $a\geq-3$ да $x=\frac{a-3}{2}$. **17.78.** $a\neq0$ да $x=\frac{5a}{3}$; $a=0$ да $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. **17.79.** $a\in(-\infty;2)\cup(2\sqrt{2};+\infty)$ да $\varnothing$; $a\in[2;2\sqrt{2}]$ да $x=5\pm\frac{a\sqrt{8-a^2}}{2}$ **17.80.** $a<0$ да $\varnothing$, $0\leq a\leq\frac{1}{2}$ да $x=a+1\pm\sqrt{2a}$; $a>\frac{1}{2}$ да $x=a+1+\sqrt{2a}$. **17.81.** $x=\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{\sqrt{3}-1}$ **17.82.** $(6;10)$, $(10;6)$. **17.83.** $(1;4)$, $(4;1)$. **17.84.** $(-\frac{5}{4};\ \frac{1}{3}\}$. **17.85.** $\left(-\sqrt{\frac{15}{17}}-4\sqrt{\frac{15}{17}}\right)$, $\left(-4\sqrt{\frac{15}{17}};-\sqrt{\frac{15}{17}}\right)$. **17.86.** $(-9;\ -\frac{9}{4})$, $(4;1)$. **17.87.** $(-6;-1)$, $(-3;2)$, $(9;-4)$, $(2;3)$. **17.88.** $(-1;-27)$, $(27;1)$. **17.89.** $(1;8)$ $(8;1)$. **17.90.** $(1;4)$, $(4;1)$. **17.91.** $(5;4)$. Кўрсатма. Тенгламаларни кўпайтиринг. **17.92.** $(-2;-1)$, $(-1;-2)$

(1;2), (2;1), (0;c), $c\in R$. **17.93.** (4;2), (4/3;—2/3). **18.1.** [—3;+∞). **18.2.** (—∞;+∞). **18.3.** (—∞;+∞). **18.4.** ∅. **18.5.** $x=2$. **18.6.** $x\neq 2$. **18.7.** (—∞;+∞). **18.8.** ∅. **18.9.** (—∞;+∞). **18.10.** $x\neq 0$. **18.11.** ∅. **18.12.** ∅. **18.13.** [—3;+∞). **18.14.** (—1;+∞). **18.15.** (—∞;1]∪[2;+∞). **18.16.** $y\neq 1/2$. **18.17.** (—∞;+∞). **18.18.** (2;3). **18.19.** $x=2$; $x=3$. **18.20.** $x=-1{,}5$. **18.21.** ∅. **18.22.** ∅. **18.23.** {—1}∪[2;+∞). **18.24.** {—2;1}∪[3;+∞). **18.25.** [—2;—1]∪[3;+∞). **18.26.** {—2}∪[1;3]. **18.28.** (—∞; —8,5]∪[1;10).

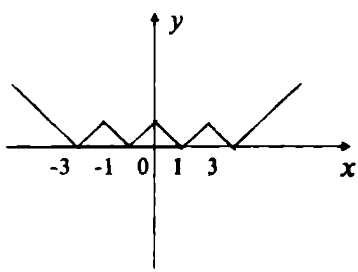
VII б о б.

1.1. $x\neq 2$. **1.2.** $x\neq 3.4$. **1.4.** $x\neq -2$. **1.6.** $x\neq 1, x\neq 2, x\neq 3$. **1.7.** $x\neq 3$. $x\neq 4$. **1.10.** R. **1.12.** $x\neq 2$. **1.13.** $x\neq 3$. **1.14.** R. **1.16.** $x\neq 0$, $x\neq \pm 1$. **1.18.** $x\neq 0$. **1.19.** R. **1.21.** $x\neq 0, x\neq 2, x\neq 3$. **1.28.** $\left(-\frac{\sqrt{2}}{3};+\infty\right)$. **1.29.** $(-\infty;\sqrt{3}-2]$ **1.30.** $(-\infty;-2(\sqrt{3}+2))$. **1.31.** {1;2}. **1.32.** $x\neq -8/7$. **1.35.** (—∞;2]. **1.36.** {0}∪[1;+∞). **1.37.** {0}∪[2;+∞). **1.38.** {2}. **1.45.** [—0,5;0,5]. **1.46.** $\left[-\frac{2}{3};\ 2\right]\cup\{3\}$. **1.47.** [—2;0]∪{1,5}. **1.48.** {1}∪[2;3}∪(3;+∞). **1.49.** (—∞;—9)∪(—9;—3]∪{—2}∪[7;8)∪(8;+∞). **1.50.** {0,5}. **1.58.** (—∞;3]. **1.59.** (—∞;2.25]. **1.61.** (—∞;0)∪(0;+∞). **1.62.** (—∞;1)∪(1;+∞). **1.63.** (0;1]. **1.64.** (—∞;—2]∪[2;+∞). **1.66.** [—2;+∞). **1.67.** (—∞;5]. **1.69.** [2;—∞]. **1.70.** (—8; —2]. **1.71.** [1;+∞). **1.72.** [0;1]. **1.73.** [—4;1). **1.74.** [—1;2). **1.75.** [—2;1]. **1.76.** [—1;3]. **1.77.** [—3;∞). **1.78.** [3;12)∪(123;+∞). **1.79.** [6,75;+∞). **1.80.** [6,75;27)∪(27;+∞). **1.84.** Кўрсатма: $\frac{3x-1}{x+2}=t$ деб олинг ва $f(t)$ни топинг. **1.89.** а) жуфт; б) жуфт; в) жуфт; г) жуфт. **1.90.** в) тоқ; г) жуфт. **1.91.** а) жуфт; б) тоқ; в) жуфт; г) тоқ. **1.92.** а) тоқ; б) жуфт; в) жуфт; г) жуфт. **1.106.** а) 2; б) 1; в) 2; г) —1; д) 1; е) —1; ж) 3; з) —1. **1.107.** а) $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$; в) ∅; д) ∅; ж) 1. **1.108.** (—∞;+∞) да ↓. **1.109.** (—∞;+∞) да ↑. **1.126.** $g(x)=\frac{x-3}{2}$. **1.127.** $g(x)=\frac{2x+1}{2-x}$. **1.128.** $g(x)=\sqrt{x}$. **1.129.** $g(x)=-\sqrt{x}$. **1.130.** $g(x)=-\sqrt{-x}$.

1.131. $g(x)=\begin{cases} x, & \text{агар } x\in[0;1] \text{ бўлса,} \\ 3-x, & \text{агар } x\in[1;2] \text{ бўлса.} \end{cases}$ **1.147.** $y_{max}=1$, $x_{max}=1$.

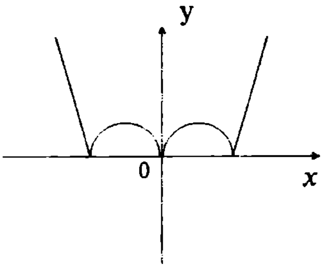
1.149. $y_{max}=\frac{1}{12}$, $x_{max}=1.5$. **1.157.** $y_{max}=0$, $x_{max}=-2$.

2.5.



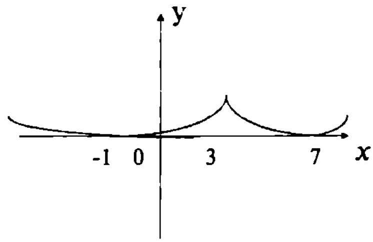
24-расм.

2.8.



25-расм

2.13.



26-расм

3.49. $p=-2$, $q=-1$. **3.50.** $a=3$, $b=6$, $c=-4$. **3.51.** $y=2x^2-3x+5$. **3.52.** 17. **3.57.** $a=2$. **3.58.** $b=4$. **3.59.** $r=13$. **3.60.** $\forall c\in(-\infty;-\frac{1}{2})\cup(1;+\infty)$. **3.61.** а) $-6<b\le 2$; б) $b\ge 3$; в) $b<-6$. **3.62.** а) $0<a<28$; б) $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{3}$; в) $a<-4$; г) $-\frac{3}{4}\le a\le 0$. **3.63.** а) $-1\le b\le 1$; б) $0\le b<1{,}25$; в) $b<-\frac{9}{16}$; г) $b\le -2$.

МУНДАРИЖА

АБДУҲАМИДОВ АБДУҲАКИМ УСМОНОВИЧ,
НАСИМОВ ҲУСАН АБДИРАҲМОНОВИЧ,
НОСИРОВ УМАРҚУЛ МИСИРОВИЧ,
ҲУСАНОВ ЖУМАНАЗАР ҲУСАНОВИЧ

АЛГЕБРА ВА МАТЕМАТИК АНАЛИЗ АСОСЛАРИДАН МАСАЛАЛАР ТЎПЛАМИ

I қисм

«Шарқ» нашриёт-матбаа
акциядорлик компанияси
Бош таҳририяти
Тошкент — 2002

Муҳаррирлар *И. Аҳмаджонов, З. Мирзоҳакимова*
Бадиий муҳаррир *К. Акчулаков*
Техник муҳаррир *Д. Габдрахманова*
Мусаҳҳиҳлар *Ю. Бизаатова, Н. Мухамедиева*

Диапозитивдан босишга рухсат этилди 07.12.2001. Бичими $84x108^1/_{32}$. Таймс гарнитураси. Офсет босма. Шартли босма табоғи 7,98. Нашриёт-ҳисоб табоғи 8,2. Адади 20 000 дона. Буюртма № 2805. Баҳоси шартнома асосида.

«Шарқ» нашриёт-матбаа
акциядорлик компанияси босмахонаси,
700083, Тошкент шаҳри, Буюк Турон кўчаси, 41

А 45

Алгебра ва математик анализ асосларидан масалалар тўплами. I қисм: Академик лицейлар ва касб-ҳунар коллежлари учун ўқув қўлланма /А. Абдуҳамидов, Ҳ. Насимов, У. Носиров, Ж. Ҳусанов. — «Шарқ». 2001. — 152б.

Сарл. олдида: Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги; Ўрта махсус, касб-ҳунар таълими маркази.

I. Абдуҳамидов А. ва бошқ.

22.14я722+22.16я722